

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ANDRÉ LUIZ ANDRADE SIMÕES

**ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM CANAIS COM O
FUNDO EM DEGRAUS: RESULTADOS
EXPERIMENTAIS, SOLUÇÕES NUMÉRICAS E
PROPOSIÇÕES TEÓRICAS**

São Carlos
2012

ANDRÉ LUIZ ANDRADE SIMÕES

**ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM CANAIS COM O
FUNDO EM DEGRAUS: RESULTADOS
EXPERIMENTAIS, SOLUÇÕES NUMÉRICAS E
PROPOSIÇÕES TEÓRICAS**

Tese apresentada ao
Departamento de Engenharia
Hidráulica e Saneamento da
Escola de Engenharia de São
Carlos – Universidade de São
Paulo para obtenção do título
de Doutor em Ciências,
Programa de Engenharia
Hidráulica e Saneamento.

Área de concentração:
Engenharia Hidráulica e
Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Tit. Harry
Edmar Schulz.

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos
2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E
PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Simões, André Luiz Andrade

S593e Escoamentos turbulentos em canais com o fundo em
degraus : resultados experimentais, soluções numéricas e
proposições teóricas / André Luiz Andrade Simões ;
orientador Harry Edmar Schulz. -- São Carlos, 2012.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Hidráulica e Saneamento e Área de Concentração em
Mecânica dos Fluidos) -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ANDRÉ LUIZ ANDRADE SIMÕES**

Título da tese: "Escoamentos turbulentos em canais com o fundo em degraus: resultados experimentais, soluções numéricas e proposições teóricas".

Data da defesa: 16/04/2012

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Harry Edmar Schulz (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Paulo Celso Greco Junior**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Podalyro Amaral de Souza**
(Escola Politécnica/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Aristeu da Silveira Neto**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

Aprovado.

Prof. Dr. **José Junji Ota**
(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Hidráulica e Saneamento:

Prof. Titular **Edson Cezar Wendland**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

42108833
Comissão de Pós-Graduação
Engenharia Hidráulica e Saneamento
16/04/2012

*Dedico esta tese a minha esposa,
ao meu filho,
aos meus irmãos,
aos meus pais e
aos meus avós.*

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnologia, CNPq (141078/2009-0), pela bolsa de doutorado concedida e pelo auxílio financeiro correspondente ao Projeto 472834/2008-8. À Universidade de São Paulo e à Escola de Engenharia de São Carlos.

Compor esta parte da tese levou algum tempo, sobretudo quando pensei em como deixar escrito o devido agradecimento ao Professor Harry Edmar Schulz, meu orientador. O Professor Schulz sempre esteve presente, de forma imprescindível, desde o início e até os últimos desenvolvimentos e instantes deste doutorado. Para mim foi uma grande honra ser orientado por ele, um ser humano formidável e genial. Ocorreu o mesmo durante algumas tentativas de escrever um texto digno do Professor Rodrigo de Melo Porto, meu co-orientador. Ter a sua participação durante o mestrado e o doutorado foi realmente especial. Faltam-me palavras para agradecer aos dois.

Deixo registrada também a minha gratidão aos Professores das disciplinas que fizeram parte do doutorado: Harry Edmar Schulz e Nivaldo Aparecido Corrêa, Woodrow Nelson Lopes Roma, Gustavo Carlos Buscaglia, Paulo Celso Greco Júnior e Oscar Maurício Hernandez Rodriguez. Agradeço aos Professores Hans George Arens, Edson Cezar Wendland e Rodrigo de Melo Porto pela participação na banca de qualificação, com recomendações de grande valor. Ao Professor Paulo Celso Greco Júnior, pela possibilidade de uso do software adotado.

Ao técnico Alcino de Paula, por todo o apoio durante a montagem do aparato experimental e por estar sempre presente com uma disposição admirável para o trabalho. Aos funcionários do Serviço de Mecânica e Motores da EESC pelas ideias e confecção do fundo em degraus e de outras peças importantes utilizadas nos experimentos. Agradeço a Flávia, Fernanda e aos demais funcionários do Departamento de Engenharia Hidráulica e Saneamento da Escola de Engenharia de São Carlos.

Aos amigos e professores: Júlio Gonçalves, Marcius Giorgetti, João Brandão, Hemerson Pinheiro, Daniel Costa, Romualdo Brito, Guilherme Barbosa, Raquel Lobosco, Antônio Meira Neto, Leandro Martins, Miguel Candezano, Evelise Góis, Anderson Alexandre, Ana Paula Alexandre, Marina Alexandre, Amanda Durici, Michel Sahade Darzé, Erundino Pousada Presa, Jorge Eurico Ribeiro Matos, João Martins, Paulo Simões e Antônio Gilberto Simões de Oliveira.

Finalmente, agradeço de forma especial aos meus pais, aos meus irmãos, à minha esposa, ao meu filho e aos meus avós, pelo amor singular que me sustenta a cada dia.

SUMÁRIO GERAL

LISTA DE SÍMBOLOS	i
RESUMO.....	xxiii
ABSTRACT	xxiv
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....	1
CAPÍTULO 2: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
CAPÍTULO 3: ESTUDO EXPERIMENTAL.....	99
CAPÍTULO 4: EQUAÇÕES E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	157
CAPÍTULO 5: TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA	243
CAPÍTULO 6: SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	293
CAPÍTULO 7: DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS.....	339
CAPÍTULO 8: COMPARAÇÕES ENTRE EXPERIMENTOS, SIMULAÇÕES E TEORIA	393
CAPÍTULO 9: CONCLUSÕES E REFERÊNCIAS	421
APÊNDICE 1	455
APÊNDICE 2	473
APÊNDICE 3	489

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 2

Minúsculas

- a na equação 2.12 é utilizado apenas para simplificar a escrita;
- b na equação 2.12 é utilizado apenas para simplificar a escrita; na Figura 2.11 corresponde à largura indicada;
- c_f fator de resistência de Fanning ($c_f=f/4$);
- c_i fração de vazios normalizada definida como $c_i = [\bar{C}(Z_i) - \bar{C}_i] / (\bar{C}_u - \bar{C}_i)$;
- f fator de resistência;
- f_{aw} fator de resistência do escoamento bifásico, calculado com a profundidade equivalente de água (equação 2.38);
- f_b fator de resistência devido ao fundo em degraus;
- f_d fator de resistência deduzido por Chanson (2002, p.171). Ver equação 2.42;
- f_L fator de resistência em um vertedor liso, utilizado na metodologia de Sanagiotto (2003), equações 2.45 e 2.46, e Dai Pra (2004), equações 2.54 e 2.55;
- f_m fator de resistência do escoamento bifásico, calculado com a profundidade h_{90} ;
- $f_{m\acute{a}x}$ fator de resistência definido pela metodologia de Ohtsu *et al.* (2004). Na metodologia destes autores o fator de resistência para um dado ângulo α é função de s/h_c , assumindo um valor máximo assintótico;
- g aceleração devida à gravidade;
- h_a pressão atmosférica por unidade de peso de fluido;
- h_A profundidade do escoamento, perpendicular ao fundo, em $x=L_A$;
- h_c altura crítica ($h_c=(q^2/g)^{1/3}$ para canais retangulares);
- $h_{\bar{C}^*}$ profundidade da mistura correspondente a um valor de \bar{C}^* ;
- h_{mean} altura média definida como $h_{mean} = (h_c + h(x))/2$, em que $h(x)$ é a função que calcula as profundidades do escoamento ao longo do canal. Esta profundidade média é empregada nas equações 2.58 e 2.59;
- h_{pi} carga devida à pressão no fundo
- h_t ponto de inflexão do modelo de Straub e Anderson;
- h_u profundidade do escoamento uniforme;

- h_v carga correspondente à pressão de vapor
- h_1 conjugado supercrítico de um ressalto hidráulico;
- h_2 conjugado subcrítico de um ressalto hidráulico;
- h_{90} profundidade correspondente à posição y , perpendicular ao fundo, onde $C = 0,9$;
- $h_{90,A}$ profundidade do escoamento na posição de início da aeração definida por Boes (2000), obtida para a posição no perfil de fração de vazios onde há 90% de ar;
- h' distância média das partículas projetadas além de $x_2 = h_t$ (modelo de Straub e Anderson);
- k altura da macro rugosidade, definida como $k = s \cos \alpha$; um parâmetro adimensional que leva em conta a redistribuição de pressões (apenas nas equações 2.22 e 2.23); k também é a energia cinética turbulenta quando utilizado no contexto, sendo definido de tal forma, ou quando aparece junto com ε , que é a taxa de dissipação de energia por unidade de massa (*e.g.*, “modelo $k-\varepsilon$ ”);
- l comprimento do piso do degrau;
- p pressão mecânica utilizada na equação da energia ou equação de Bernoulli (para escoamento incompressível). Possíveis subscritos indicam a seção correspondente, sendo sempre especificada no texto;
- p_e pressão externa da bolha (equação de Rayleigh);
- p_i pressão interna da bolha (equação de Rayleigh);
- p_m pressão média calculada a partir de um sinal (ver equação 2.169);
- p_r pressão relativa;
- p_v pressão de vapor;
- q vazão específica;
- r coordenada radial (equação de Rayleigh);
- r_1 fração de líquido definida como $r_1 = 1 - \overline{C^*}(x_2)$ (o subscrito 1 denota fase 1);
- s altura do degrau;
- t tempo;
- u^* velocidade de cisalhamento, $u^* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$;
- $u(y)$ componente do vetor velocidade paralela ao fundo do canal;

- v_{wi} velocidade calculada com a profundidade equivalente apenas de água na seção de início da aeração;
- v_r velocidade de ascensão das bolhas de ar do modelo de Chanson (1996); componente radial da velocidade (utilizada na dedução da equação de Rayleigh, 1917); velocidade de ascensão das bolhas (modelo de Straub e Anderson);
- w_f função presente no modelo de Wood (1984);
- x coordenada horizontal;
- x_s um comprimento (para vertedores controlados por comportas, por exemplo, x_s foi definido por Cain e Wood (1981) como a distância, paralela ao fundo, desde a superfície livre até o ponto de início da aeração, tendo como referência a superfície livre no início da aeração). Ver equação 2.77;
- y coordenada vertical;
- z eixo vertical com origem na crista (ou definida de acordo com o texto) e positivo para baixo;
- z_i' posição de início da aeração, medida na vertical e com origem na posição de escoamento crítico (equação 2.92);

Maiúsculas

- A_1 função pertencente à metodologia de Ohtsu *et al.* (2004), para o cálculo do fator de resistência;
- A' definição utilizada na equação 2.66, $A' = (c_f/c'_f)^{1/3}$. Nesta equação o apóstrofo corresponde à calha lisa;
- B largura de topo do canal;
- B', G' parâmetros do modelo de Wood (1984);
- $C(x_i, t)$ campo escalar de fração de vazios. x_i é a representação tensorial dos eixos coordenados x_1, x_2 e x_3 , ou 1, 2 e 3, ou x, y e z ;
- $C(y)$ fração de vazios em função de y ;
- \bar{C} fração de vazios média, definida com $h_{90} \bar{C} = \int_0^{y=h_{90}} C dy$;
- \bar{C}^* valor médio temporal de $C(x_i, t)$;
- $\bar{C}(x_1)$ fração de vazios média definida como $\bar{C}(x_1) = \frac{1}{h_{\bar{C}^*}} \int_0^{h_{\bar{C}^*}} \bar{C}^*(x_2) dx_2$;

- C_b fração de vazios no pseudo fundo definida por Boes e Hager (2003b). Os seus valores correspondem a medidas locais de concentração de ar em duas posições perto das bordas externas dos degraus, sendo a mais próxima a 1,5 mm;
- \bar{C}_i fração de vazios no ponto de início da aeração z_i' definido por Boes (2000);
- C_p coeficiente de pressão calculado com p_m ;
- C_p' coeficiente de pressão calculado com σ_p ;
- \bar{C}_e fração de vazios média (na seção transversal) do ar transportado (bolhas incorporadas ao escoamento). Ver equação 2.177;
- $\bar{C}_{e\infty}$ valor médio assintótico de \bar{C}_e observado nos dados experimentais;
- \bar{C}_u fração de vazios na posição de escoamento uniforme em uma calha lisa definida por meio da equação de Hager (1991), equação 2.111, ou para um canal em degraus, como utilizado na equação 2.119;
- D adimensional (“*drop number*”) utilizado como $D = q^2/(gs^3) = (h_c/s)^3$ na equação 2.171;
- D_t difusividade turbulenta do modelo de Chanson (1996);
- D_h diâmetro hidráulico;
- D_t difusividade turbulenta média para bolhas de ar;
- L_c comprimento característico;
- Fr número de Froude definido com valores característicos ($Fr = V/(gL_c)^{1/2}$);
- Fr' número de Froude na base do extravasor que possui canal liso;
- Fr^* número de Froude escrito com a forma $Fr^* = q/\sqrt{gk^3 \text{sen}\alpha}$;
- Fr_2 número de Froude na seção subcrítica do ressalto hidráulico;
- F_* número de Froude escrito com a forma $F_* = q/\sqrt{ge^3 \text{sen}\alpha}$ (equação 2.81);
- F_1 número de Froude em termos de h_1 (equações 2.58 e 2.59);
- F número de Froude definido com a forma $F = q/\sqrt{gs^3 \text{sen}\alpha}$;
- H_{res} energia residual, $H_{res} = H_{max} - \Delta H$;
- H_{dam} altura desde a crista do vertedor até a cota de fundo da bacia de dissipação;

- $H_{dam,u}$ altura desde a crista até a posição onde é estabelecido o escoamento uniforme (ou quase uniforme);
- $H_{m\acute{a}x}$ energia específica crítica somada a H_{dam} , ou seja, $H_{m\acute{a}x}=1,5h_c+H_{dam}$;
- H_o carga sobre a soleira, a montante da comporta;
- H_s energia total a montante (entrada do canal) em relação ao ponto de início da aeração (Equação 2.84);
- I_f declividade da linha de energia;
- K este símbolo foi utilizado em diferentes equações: (a) taxa de expansão adimensional da camada cisalhante (Equação 2.42); (2) função presente na equação 2.82;
- K', D' constantes do modelo de Chanson (1996);
- L_A posição de início da aeração;
- L distância entre as profundidades definidas em Δh ;
- N número de degraus;
- R raio da bolha (equação de Rayleigh);
- Re número de Reynolds definido com valores característicos ($Re=\rho VL_c/\mu$). Pode ser definido em termos da vazão específica quando especificado ($Re=q/v$);
- R_h raio hidráulico;
- V velocidade média característica ou velocidade do jato (nas equações 2.22 e 2.23);
- V_{cr} velocidade com valor crítico relacionado à ocorrência de cavitação, definida por Gomes (2006), pela equação 2.168;
- X_i coordenada adimensional definida como $X_i = (x-L_A)/h_A$;
- X^* distância a partir do ponto de início da aeração para o estudo de Wilhelms e Gulliver (2005);
- Y_{50} é a posição y correspondente a $C = 0,5$;
- Z_i eixo coordenado adimensional igual a $(z-z_i)/h_c$.

Alfabeto Grego*Minúsculas*

- α ângulo entre o pseudo-fundo e a horizontal;
- α_c coeficiente de Coriolis;
- δ espessura da camada limite;
- ε rugosidade absoluta equivalente (os subscritos “p”, “e” e “m” correspondem ao piso, espelho e muros, respectivamente); ε pode ser também a taxa de dissipação de energia por unidade de massa; no modelo de Wood (1984), esta letra é a difusividade da densidade média;
- ν viscosidade cinemática;
- φ função da temperatura e do gás para dedução da equação do raio crítico de uma bolha em equilíbrio;
- ϕ' proporção de energia dissipada por degrau;
- κ_1, κ_2 constantes adimensionais de correção das equações 2.58 e 2.59;
- λ constante de proporcionalidade (modelo de Straub e Anderson);
- μ viscosidade dinâmica;
- θ ângulo entre a horizontal e o piso de um degrau inclinado;
- ρ massa específica;
- σ_c adimensional utilizado para cavitação (número de cavitação, número de Euler, número de Leuox);
- σ_E desvio padrão da função erro de Gauss;
- σ_p rms obtido com o sinal medido com transdutores de pressão (ver equação 2.170);
- σ tensão superficial;
- τ_o tensão média de cisalhamento sobre o perímetro molhado;

Maiúsculas

- Δf variação de f utilizada no cálculo da incerteza de f (equação 2.62);
- Δh diferença entre a altura crítica e $h(x)$; variação de $h(x)$ utilizada no cálculo da incerteza de f (equação 2.62);

ΔH_{dam} $\Delta H_{\text{dam}} = H_{\text{dam}} - E(z=H_{\text{dam}})$ (E = energia específica no pé do vertedor);

$\Delta H'$ definição correspondente à diferença $\Delta H' = H_{\text{res}}' - H_{\text{res}}$ empregada na equação 2.66. Nesta equação o apóstrofo corresponde à calha lisa;

ΔH energia dissipada;

Δq variação de q utilizada no cálculo da incerteza de f (equação 2.62);

Δx espaçamento finito entre dois pontos sobre o eixo x;

Φ, Φ_1 funcionais;

Ω_1, Ω_1 coeficientes da potência definida pela equação 2.60;

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 3

Minúsculas

- a_3 coeficiente de assimetria;
- a_4 coeficiente de curtose;
- $b_{x,y}$ covariância dos dados medidos (“x”) e calculados (“y”);
- e_c energia específica crítica por unidade de massa;
- f_p frequência dominante (utilizada no cálculo do número de Strouhal);
- k_e energia cinética turbulenta por unidade de massa;
- k_e^* energia cinética turbulenta adimensional, definida como $k_e^* = (w'/V_c)^2$;
- h altura de escoamento (perpendicular ao fundo). Utilizada para valores “instantâneos” e para definir Γ , que é calculado com valores médios;
- h_m altura de escoamento média utilizada na Figura 3.11a;
- h_{mc} altura de escoamento média calculada com amostras corrigidas, utilizada na Figura 3.13a (notação adotada para comparar com h_m , apenas nestas figuras);
- h_u altura de escoamento para condição uniforme;
- $h(0)$ altura de escoamento medida na posição $x=0$ (valor médio);
- h_1 igual a h_A ;
- h_2 profundidade ou altura de escoamento na posição final da região de transição, correspondente ao primeiro pico do perfil médio ondulado;
- h_3 profundidade ou altura de escoamento do primeiro vale após h_2 ;
- $\max()$ função que indica a apresentação do valor máximo de um determinado vetor ou matriz situado entre os parêntesis;
- q vazão por unidade de largura (vazão unitária, $q=Q/B$);
- q_r quartil;
- q_t vazão teórica por unidade de largura utilizada na dedução da equação 3.5;
- u flutuação de velocidade utilizada na definição geral da energia cinética turbulenta, equação 3.47;
- z_c cota da seção com escoamento crítico;

- z_i posição de início da aeração vertical com a mesma origem de LA, portanto, $z_i = L_A \sin \alpha$;
- z_i' posição de início da aeração vertical somada à distância calculada com a extrapolação para o caso de um vertedor sem comportas;
- z_L posição de início da aeração z_i' somada ao comprimento de transição, $L \sin \alpha$;
- z_1 cota do ponto de jusante da linha de corrente escolhida para deduzir a equação 3.3;
- w' componente vertical da intensidade turbulenta, definida como $w' = \sqrt{\overline{w^2}}$;
- w flutuação definida como $w = W - \overline{W}$;
- $z_i')_{S_2}$ o mesmo que z_i' . O detalhe “)S₂” ressalta que se trata da posição z_i' correspondente ao final do perfil S₂;, diferenciando-a da posição z_i' de Boes (2000), que corresponde a 1% de ar junto ao pseudo fundo;

Maiúsculas

- A área da seção transversal ao escoamento; amplitude de um conjunto de amostras, definida como $A = \max(h) - \min(h)$;
- AIQ amplitude interquartil;
- B largura de topo do canal, que coincide com a largura do vertedor de parede delgada atrelado à equação 3.5; B também é a largura do canal em degraus;
- C_d coeficiente de vazão;
- E_c energia específica crítica;
- F número de Froude definido como $F = q / \sqrt{gs^3 \sin \alpha}$;
- Fr número de Froude definido em termos da altura média: $V / (gH_m)^{1/2}$;
- Fr_u número de Froude Fr para o escoamento uniforme;
- H carga sobre a soleira de um vertedor retangular de parede vertical e delgada; adimensional definido como $H = z/h_c$;
- H_m altura média definida como $H_m = A/B$;
- I_o declividade de fundo do canal, igual a $\sin \alpha$;
- L comprimento de transição;
- L° comprimento paralelo ao pseudo fundo entre h_1 e h_3 ;

- L_A posição de início da aeração definida como a distância entre a posição $x=0$ e a posição final do perfil S_2 , paralela ao pseudo fundo;
- L_{A^*} distância até o início da aeração, paralela ao pseudo fundo e correspondente a z_i' ;
- L_A^* distância até o início da aeração, paralela ao pseudo fundo e correspondente a z_L ;
- P altura do vertedor;
- Q vazão;
- Re número de Reynolds, escrito para o vertedor de parede delgada em termos do diâmetro hidráulico com a forma: $Re = 4Q/[(B+2H+2P)v]$; número de Reynolds em termos do diâmetro hidráulico $Re=V4R_h/v$, portanto, função da posição ao longo do canal uma vez que V e R_h são funções de x ;
- R_h raio hidráulico;
- $Re(0)$ número de Reynolds em termos do diâmetro hidráulico. Calculado em $x=0$;
- St número de Strouhal;
- T_c tempo característico definido como $T_c = \Gamma_s \sqrt{2} / V_c$;
- $V(x)$ velocidade média ao longo do canal, calculada com $V(x) = q/h(x)$, ou simplesmente $V=q/h$;
- V_o velocidade no ponto inicial sobre a linha de corrente escolhida para deduzir a equação 3.3 (trata-se de uma velocidade de aproximação);
- V_1 velocidade no ponto final sobre a linha de corrente escolhida para deduzir a equação 3.3;
- V_c velocidade crítica, $V_c=(gh_c)^{1/2}$;
- W derivada temporal de h (derivada temporal obtida com os valores “instantâneos” de h medidos com o sensor ultrassônico);
- \bar{W} valor médio de W ;
- Z_u posição final do decaimento das quantidades estatísticas na região com escoamento bifásico, definida como $Z_u=(z-z_i)+z_i)_{S_2}$;

Alfabeto grego

Minúsculas

- ϕ número puro adotado igual a 1,5 para a construção dos *box plots*;
- λ_i constantes adimensionais;

$\rho_{x,y}$ coeficiente de correlação entre dados medidos (“x”) e calculados (“y”);

σ_x desvio padrão dos dados medidos (“x”);

σ_y desvio padrão dos dados calculados (“y”);

Maiúsculas

Γ adimensional definido como $\Gamma = h/h_c$;

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 4

Minúsculas

- \vec{a} aceleração;
- a_{ijkl} tensor de 4ª ordem resultante da combinação linear entre tensão e deformação;
- d_β diâmetro médio de partículas esféricas de uma fase dispersa β ;
- $d_{\alpha\beta}$ comprimento de escala interfacial do modelo de mistura;
- e energia específica, no sentido termodinâmico ($e=E/m$);
- $f(\eta)$ variável adimensional definida por Blasius em sua solução para camada limite. Foi utilizado também apenas o f , mas apenas no item de apresentação da solução de Blasius;
- h entalpia (energia interna, especificamente a energia térmica, somada ao termo correspondente ao trabalho das forças de pressão);
- k condutividade térmica;
- m massa;
- p pressão, um campo escalar $p=p(x_i,t)$;
- \bar{p} pressão mecânica, igual a menos um terço do traço do tensor das tensões;
- \hat{p} pressão adimensional utilizada na equação de Navier-Stokes, $\hat{p} = (p - p_o) / \rho V^2$. Trata-se de uma forma de escrever o número de Euler;
- p_e pressão estática definida para o escoamento multifásico;
- p_t pressão total definida para o escoamento multifásico como $p_t = p_e + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} r_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}^2$;
- \vec{r} vetor posição;
- r_{α} fração volumétrica da fase α , utilizada na apresentação dos modelos multifásicos. É definida como $r_{\alpha} = Vol_{\alpha} / Vol$, em que Vol_{α} é o volume da fase α ;
- s vetor tensão (força interna por unidade de área que, no instante t , atua sobre a superfície dA); também é utilizado para denotar a entropia por unidade de massa;
- t tempo;
- \hat{t} tempo adimensional definido como $\hat{t} = tV/L$;
- u, v, w componentes do campo de velocidades em x, y e z , campos escalares: $u=u(x,y,z,t)$, etc.

- x_j^0 coordenadas da posição inicial de uma partícula “p” (coordenadas materiais);
- x_i coordenadas da posição atual de uma partícula “p”;
- \bar{x}_i sistema de coordenadas adimensionalizados como $\bar{x}_i = x_i / L$;
- u energia interna e, em algumas passagens, a componente do vetor velocidade em x ;

Maiúsculas

- $A_{\alpha\beta}$ área interfacial por unidade de volume entre as fases α e β ;
- C concentração; C_A =concentração da espécie A;
- D_{AB} coeficiente de difusão da espécie A na espécie B;
- E energia total
- \vec{F} vetor força resultante;
- F_c força devida a um campo (gravitacional);
- Fr número de Froude utilizado na forma adimensional da equação de Navier-Stokes;
- F_s força de contato entre superfícies;
- J Jacobiano;
- J_A fluxo da espécie química A;
- N grandeza extensiva;
- N_p número total de fases
- \dot{Q} taxa de transferência de calor ou potência térmica;
- Re número de Reynolds utilizado na forma adimensional da equação de Navier-Stokes;
- S entropia;
- S_{ger} entropia gerada;
- S_A termo que representa fontes e sumidouros;
- T temperatura;
- T_o temperatura do ambiente;
- $T_{jkl\dots}$ tensor geral;

\dot{U}	potência utilizável dissipada;
V	velocidade característica;
\vec{V}	campo de velocidades, definido como $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$;
V_i	vetor velocidade escrito com notação de Einstein. i varia de 1 a 3, sendo possível escrever as três componentes V_1 , V_2 e V_3 , correspondentes a x_1 , x_2 , x_3 (são iguais a u , v e w);
\vec{V}_m	velocidade média da mistura em um escoamento multicomponente;
\hat{V}_i	velocidade adimensional utilizada na equação de Navier-Stokes: $\hat{V}_i = V_i / V$;
V_∞	velocidade fora da camada limite ou velocidade do escoamento potencial;
We	número de Weber;
\dot{W}	taxa de trabalho ou potência ou taxa de variação do trabalho de escoamento;
\dot{W}_{max}	potência máxima;

Alfabeto grego *Minúsculas*

α	ângulo empregado na dedução do teorema do transporte de Reynolds, definido entre o vetor normal à superfície e o vetor velocidade;
δ_i	vetor unitário;
δ_{ij}	delta de Kronecker;
δ^*	espessura de deslocamento (utilizada na formulação integral de von Kármán);
$\dot{\epsilon}_{ij}$	tensor taxa de deformação;
ϵ_{ijk}	símbolo de Levi-Civita;
λ	segundo coeficiente de viscosidade de Stokes; na teoria da similaridade é utilizado para denotar a escala geométrica, ou seja, L_X/L_Y (X denota protótipo e Y representa o modelo físico);
θ	espessura de quantidade de movimento (utilizada na formulação integral de von Kármán);
ϕ	uma quantidade escalar genérica utilizada no equacionamento do modelo de mistura;
ρ	massa específica, também escrita como um campo escalar $\rho = \rho(x_i, t)$;

ρ_α	massa por unidade de volume da fase α ;
$\tilde{\rho}_\alpha$	densidade efetiva da fase α , definida como $\tilde{\rho}_\alpha = r_\alpha \rho_\alpha$;
ρ_m	densidade da mistura; na segunda dedução da equação de conservação de massa é uma densidade média devida ao tamanho finito do volume de controle;
σ	tensor das tensões de Cauchy;
σ_s	tensão superficial;
η	grandeza intensiva, definida como a grandeza extensiva por unidade de massa; adimensional empregado na solução de Blasius;
η_v	grandeza extensiva por unidade de volume;
μ	viscosidade dinâmica;
ω	sub-região tridimensional de Ω ;
ω_A	fração mássica da espécie A;
$\zeta_k, \vec{\zeta}$	vorticidade;
ω^*	sub-volume mínimo de Ω para o qual é possível definir um valor único para ρ devido à ausência de flutuações estatísticas;

Maiúsculas

Δm	quantidade finita de massa contida em um volume Δvol ;
Δt	intervalo finito entre dois instantes sobre o eixo t ;
Δvol	volume com dimensões finitas preenchido com fluido;
Ω	região finita do espaço tridimensional que contém um determinado fluido;
Γ	circulação (Símbolo clássico para circulação. Não confundir com $\Gamma = h/h_c$ utilizado nos demais capítulos sobre vertedores em degraus);
ψ	função corrente empregada na equação de Blasius para camada limite laminar.

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 5

Minúsculas

- a_{ij} tensor anisotrópico presente no modelo de turbulência de tensões de Reynolds;
- $f(r)$ função coeficiente de correlação (longitudinal);
- g aceleração devida à gravidade;
- $g(r)$ função coeficiente de correlação (transversal);
- k energia cinética turbulenta;
- l' pequena escala de comprimento (não é a microescala de Kolmogorov);
- l_1, l_2 comprimentos de mistura;
- r distância entre duas componentes de flutuação de velocidades;
- t tempo;
- u' pequena escala de velocidade (não é a microescala de Kolmogorov);
- u_1 velocidade na posição 1, empregada na apresentação sobre camada limite turbulenta;
- u^* velocidade de cisalhamento, definida como $u^* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$;

Maiúsculas

- C concentração; C_A =concentração da espécie A;
- D_{AB} coeficiente de difusão da espécie A na espécie B;
- E energia da escala externa (grande escala);
- $E(\kappa)$ espectro de energia;
- L comprimento característico;
- L_{ij} integral da função coeficiente de correlação $L_{ij} = \int_0^\infty \rho_{ij}(r, t) dr$ que define a escala integral de Taylor;
- L_f, L_g escalas integrais de Taylor para turbulência isotrópica;
- Re número de Reynolds;
- S_{ij} tensor de deformação média presente no modelo de tensões de Reynolds apresentado;
- V velocidade média ou velocidade característica das grandes escalas;

- V_i campo de velocidades;
- V_i' flutuação em torno de V_i ;
- V_i'' intensidade turbulenta;
- \vec{V}_m velocidade média da mistura em um escoamento multicomponente;
- $\overline{V_i'V_j'}$ tensor de Reynolds definido com as covariâncias (média dos produtos das flutuações);
- U escala de velocidade de Kolmogorov;

Alfabeto grego

Minúsculas

- β coeficiente de expansão térmica (Equação 5.133);
- δ_{ij} delta de Kronecker;
- ε taxa de dissipação de energia mecânica por unidade de massa;
- η escala de comprimento definida por Kolmogorov;
- κ número de onda (ver espectro de energia); também empregado para representar a constante de von Kármán;
- λ_f microescala de Taylor (longitudinal);
- λ_g microescala de Taylor (transversal);
- ν viscosidade cinemática;
- ν_τ viscosidade cinemática turbulenta ou coeficiente de Boussinesq;
- μ_τ viscosidade turbulenta;
- ρ massa específica, também escrita como um campo escalar $\rho=\rho(x_i,t)$;
- $\rho_{ij}(r,t)$ função coeficiente de correlação (ver escala integral de Taylor);
- τ_0 tensão de cisalhamento média (média sobre o perímetro molhado);
- ω igual a ε/k . Utilizado no modelo k- ω ;

Maiúsculas

- Ω_{ij} tensor vorticidade.

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 6

Minúsculas

$$\underline{f}(\underline{q}) \quad \text{vetor: } \underline{f}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{gq_1^2}{2} \\ q_1 \end{bmatrix};$$

h_a energia cinética de aproximação por unidade de peso de fluido;

h_d carga de projeto;

k altura das macro rugosidades, $k = s \cos \alpha$;

p pressão;

q vazão específica;

q_d vazão de projeto;

$$\underline{q} \quad \text{vetor: } \underline{q} = \begin{bmatrix} h \\ hV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix};$$

s altura do degrau;

t tempo;

w componente longitudinal da velocidade, $w(x,y)$, em um escoamento completamente desenvolvido;

z_A posição de início da aeração desde a crista até a posição onde a camada limite e o escoamento possuem a mesma altura (perpendicular ao fundo);

Maiúsculas

A_α, B_α matrizes de ordem p ;

C concentração de um composto em um escoamento;

C_d coeficiente de vazão de um vertedor de parede delgada;

C_d^* coeficiente de vazão de um vertedor com soleira padrão;

C_n número de Courant;

D_{AB} coeficiente de difusão da espécie A na espécie B;

H_o carga hidráulica: $H_o = h_d + h_a$;

I unidade imaginária;

- L_A posição de início da aeração definida como $z_A/\text{sen}\alpha$;
- P altura do vertedor;
- R coeficiente de correlação;
- S_A termo que representa fontes e sumidouros;
- $S(k)$ símbolo empregado na análise de estabilidade de von Neumann (ou raio espectral);
- $T^\alpha U$ operador de translação utilizado na análise de estabilidade;

Alfabeto grego*Minúsculas*

- λ_i constantes de ajuste presentes nas potências utilizadas para camada limite ($i=1,2,3,4$);
- η escala de comprimento definida por Kolmogorov;
- μ viscosidade dinâmica;

LISTA DE SÍMBOLOS – CAPÍTULO 7

Minúsculas

- f fator de resistência;
- f_p frequência de oscilação da superfície livre;
- h altura de escoamento (perpendicular ao fundo ou pseudofundo);
- h_c altura crítica;
- h_{mean} valor médio calculado como $h_{mean} = (h_0 + h_1)/2$ (empregado na formulação para o fator de resistência);
- h_u altura de escoamento na região uniforme (ou quase uniforme);
- h_0 altura de escoamento, definida na seção de entrada do volume de controle utilizado na formulação para o fator de resistência;
- h_1 conjugado supercrítico, também considerado igual à profundidade no final da calha na formulação para o fator de resistência e, no contexto do comprimento de transição, é igual à primeira profundidade característica da onda (h_A);
- h_2 profundidade ou altura de escoamento na posição final da região de transição, correspondente ao primeiro pico do perfil médio ondulado;
- h_3 profundidade ou altura de escoamento do primeiro vale após h_2 ;
- k altura da macro rugosidade, definida como $k = s \cos \alpha$;
- l comprimento do piso de um degrau;
- q vazão específica;
- s altura do degrau;
- u_* velocidade de cisalhamento.

Maiúsculas

- A área da seção transversal; na primeira forma adimensional proposta para o perfil da superfície livre A é um adimensional com a forma $A = B/h_u$;
- B largura de topo do canal;
- C fração de vazios;
- \dot{C} taxa de geração de vazios entre as seções 1 e 2 (Figura 7.4);
- Fr número de Froude em termos de quantidades características;

- Fr_k número de Froude definido como $Fr_k = \frac{V_\infty}{\sqrt{gk \sin \alpha}}$;
- G aceleração da gravidade;
- H adimensional definido como $H = z/h_c$;
- I_f declividade da linha de energia;
- I_o declividade de fundo;
- K módulo de elasticidade volumétrica; constante de proporcionalidade (item 7.6);
- L_c comprimento característico;
- Q vazão ($Q=VA$);
- Re_k número de Reynolds definido como $Re_k = \frac{V_\infty k}{\nu}$;
- R_h raio hidráulico;
- T adimensional para a turbulência;
- V velocidade média;
- V_1 velocidade média na seção transversal onde inicia a aeração superficial, correspondente a h_1 no contexto do comprimento de transição; velocidade do escoamento supercrítico utilizada para definir o número de Froude Fr_1 (formulação para o fator de resistência);

Alfabeto grego

Minúsculas

- α ângulo de inclinação do canal;
- α_c coeficiente de Coriolis ou de correção da energia cinética;
- β coeficiente de Boussinesq ou de correção de quantidade de movimento;
- ε rugosidade absoluta equivalente (os subscritos “p”, “e” e “m” correspondem ao piso, espelho e muros, respectivamente); ε pode ser também a taxa de dissipação de energia por unidade de massa;
- κ_1 coeficiente de correção para levar em consideração a não linearidade do perfil da superfície livre. Utilizado na formulação para o fator de resistência;
- κ_2 coeficiente de correção utilizado na formulação para o fator de resistência para corrigir o valor da tensão de cisalhamento;

- ρ massa específica da água;
- ρ_a massa específica do ar;
- μ viscosidade dinâmica;
- σ tensão superficial;
- τ_0 tensão de cisalhamento média;

Maiúsculas

- ΔE energia dissipada por unidade de volume de fluido;
- Δh diferença entre a altura na seção de entrada do volume de controle e a altura na saída do mesmo volume, utilizada na formulação para o fator de resistência: $\Delta h = h_0 - h_1$;
- ΔH energia dissipada por unidade de peso de fluido;
- Δp diferença entre a pressão em uma determinada posição e instante e a pressão de vapor do líquido, ou seja, $p - p_v$;
- Γ adimensional definido como $H = h/h_c$;

Resumo

SIMÕES, A.L.A. (2012). **Escoamentos turbulentos em canais com o fundo em degraus: resultados experimentais, soluções numéricas e proposições teóricas**. São Carlos, 528 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho traz contribuições experimentais, numéricas e teóricas acerca dos escoamentos turbulentos em canais e vertedores em degraus. Com a exposição de resultados de diferentes autores, procurou-se apresentar uma visão histórica sobre a evolução do conhecimento ligado ao tema, bem como o seu estado-da-arte. Os resultados experimentais foram obtidos em um canal em degraus com 1V:1H. Procurou-se investigar o comportamento da superfície livre com o uso de um medidor ultrassônico de deslocamentos. Foi possível obter perfis médios bem definidos, compostos por um trecho inicial com a forma S_2 e S_3 e um trecho ondulado a partir do início da aeração superficial. Esses perfis formados por valores médios levaram à definição de profundidades características que compõem a onda e de um comprimento de transição ao escoamento bifásico entre o final do perfil S_2 e o primeiro pico da onda. As comparações dos dados experimentais deste trabalho e dos resultados experimentais e numéricos de outros autores, referentes à posição de início da aeração e à altura de escoamento nesta posição, indicaram haver excelente concordância entre as diferentes propostas. Foram fornecidas expressões empíricas para a maior parte das quantidades medidas. Além dos valores médios, os sinais instantâneos obtidos com o ultrassom foram também analisados, tendo sido possível extrair informações sobre a distribuição da intensidade turbulenta, energia cinética turbulenta, número de Strouhal e coeficientes de assimetria e curtose. Estas quantidades estatísticas revelaram diferentes regiões ao longo do canal em degraus, incluindo a região de decaimento das mesmas, com posição final coincidente. Como resultado foi proposta uma expressão para calcular a posição vertical do início do escoamento uniforme. A segunda parte desta tese contém uma revisão sobre as equações e princípios básicos de mecânica dos fluidos e sobre aspectos essenciais relacionados a soluções numéricas. Ao comparar os resultados experimentais com soluções numéricas das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds, conservação de massa e diferentes modelos de turbulência, concluiu-se haver excelente sobreposição das soluções aos experimentos. Isto foi possível com o uso do modelo não homogêneo para o escoamento com superfície livre e com os modelos de turbulência $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$, SSG e zero-equação. Em seguida, utilizando-se o modelo $k-\varepsilon$, foram realizadas simulações numéricas em domínios que correspondem a vertedores sem comportas e com dimensões de protótipo. Explorou-se também o uso do referido conjunto de equações na obtenção de informações sobre escoamentos em quedas sucessivas. Neste caso a análise dos resultados se concentrou nas profundidades ao longo do canal e da energia residual. A terceira parte da tese contém proposições e considerações teóricas e semi-empíricas. Entre elas, pode-se mencionar que foram apresentadas equações para previsão de perfis da superfície livre, fator de resistência, comprimento de transição, desenvolvimento da camada limite e coeficiente de reoxigenação. Finalmente, o último capítulo antes das conclusões traz discussões acerca dos três pontos de vista: experimental, numérico e teórico.

Palavras-chave: canais em degraus; mecânica dos fluidos; turbulência.

Abstract

SIMÕES, A.L.A. (2012). **Turbulence in stepped chute flows: experimental results, numerical solutions and theoretical approaches**. São Carlos, 528 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work includes contributions from experimental, numerical and theoretical studies about turbulent flows in stepped chutes and spillways. Initially, previous results and proposals of different authors are presented, intending to furnish an overview of the historical evolution of the knowledge in this theme and its state-of-the-art. The experimental results were obtained in a stepped channel with step ratio 1V:1H. The behavior of the free surface was investigated using an ultrasonic displacement meter. It was possible to obtain well-defined time-averaged profiles, comprising a first stretch with the S_2 and S_3 forms, and a second wavy stretch, which was produced by the surface aeration. These profiles consist of average depths, and led to the definition of characteristics depths for the first “wave” and to a transition length between the end of the S_2 profile and the first peak of the wavy region. Comparisons between the experimental data obtained in this study and experimental and numerical results of other authors, regarding the inception point and the water depth at this position, indicated excellent agreement between the different proposals. Empirical expressions are proposed here for most of the measured parameters. In addition to the analysis of the average values, also the instantaneous signals obtained with the ultrasound sensor were analyzed; allowing to obtain information about the distribution of the turbulent intensity, the turbulent kinetic energy, the Strouhal number, and the coefficients of skewness and kurtosis. The behavior of these statistical quantities revealed different regions along the stepped chute, and a final region of decay coincident for all quantities. As a result, an expression was proposed to calculate the vertical position of the beginning of the uniform flow. The second part of this thesis contains a review of the basic principles and equations of fluid mechanics and some key aspects related to numerical solutions. By comparing the experimental results with the numerical solutions of the Reynolds Averaged Navier-Stokes equations, the conservation of mass, and different turbulence models, it was concluded that there exist an excellent superposition between the numerical predictions and the experiments. This was made possible using an inhomogeneous model for the free surface flow and the turbulence models $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$, SSG and zero-equation. Further, using the $k-\varepsilon$ model, numerical simulations were carried out for uncontrolled spillways (without gates), considering prototype dimensions. The same set of equations was used for skimming flows and nappe flows. In the second case, the analysis focused on the water depths along the channel and on the residual energy. The third part of the thesis contains theoretical and semi-empirical formulations based on fluid mechanics’ principles. The presented equations are for predictions of free surface profiles, resistance factors, transition lengths, development of boundary layer and reaeration. Finally, the last chapter before the conclusions presents discussions about the three points of view: experimental, numerical and theoretical.

Keywords: fluid mechanics; stepped chutes; turbulence.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	3
1.1 Considerações gerais	3
1.2 Organização dos tópicos.....	7
2 OBJETIVOS	9

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais

O tema central deste trabalho é o estudo das características dinâmicas de escoamentos em canais com o fundo em degraus. Devido às possibilidades de uso de estruturas hidráulicas desse tipo, o assunto tratado aqui é de grande interesse para a engenharia. Como ilustrado por meio da Figura 1, canais em degraus são empregados em sistemas de drenagem e principalmente como parte de extravasores de barragens. O termo vertedor em degraus, ou vertedouro em degraus, é utilizado para designar este tipo de estrutura, como na Figura 1.1c,d.

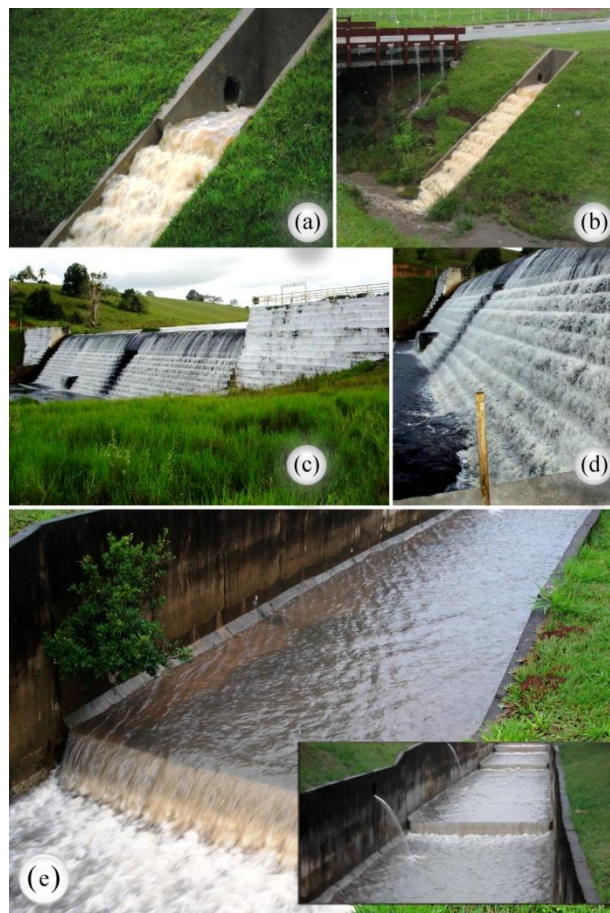


Figura 1.1 – Exemplos de usos de canais em degraus: (a,b) Canal do sistema de drenagem do Campus II da USP em São Carlos-SP; (c,d) Vertedor em degraus da barragem Rio da Dona (Bahia) – Imagem cedida por Antônio Gilberto Simões de Oliveira; (e) Córrego Tijuco Preto (entrada principal do Campus I da USP em São Carlos).

Ao projetar um canal como fundo em degraus, que pode ter dezenas de metros de altura, é necessário prever, assim como nos projetos de estruturas hidráulicas em geral, a maior quantidade possível de informações sobre os comportamentos das variáveis de campo envolvidas. O campo de pressões, por exemplo, pode indicar a possibilidade de ocorrência de mudança de fase da água e conseqüentes danos ocasionados pela cavitação. Atrelado a este fenômeno, o conhecimento da distribuição de bolhas de ar incorporadas ao escoamento

também é decisivo em previsões sobre o risco de cavitação. A velocidade média na extremidade final de um canal vertedor, que pode ser obtida a partir do campo de velocidades, é uma grandeza indispensável para estimativas das dimensões de estruturas de dissipação de energia adicionais, empregadas com o propósito de manter a integridade estrutural da barragem.

Se existisse uma solução analítica geral para o sistema de equações diferenciais parciais e leis constitutivas que traduz os princípios de conservação, certamente seria possível responder a uma considerável quantidade de questões relativas aos escoamentos em canais em degraus. Em um ponto de vista mais profundo sobre o tema, que excede a precisão exigida pela engenharia, cabe afirmar que tais respostas seriam aproximadas. Neste ponto de vista e, de uma forma sintética, pode-se dizer que as equações de Cauchy associadas às equações constitutivas para um fluido newtoniano, as equações de Navier-Stokes, seriam suficientes para representar o balanço de quantidade de movimento. Tanto para o escoamento monofásico quanto para o escoamento bifásico, o uso das equações de conservação de massa seria uma opção bem estabelecida para reprodução matemática desse princípio. Finalmente, a primeira lei da termodinâmica, a equação da energia, possibilitaria prever, junto com equações constitutivas (equação do gás-ideal, por exemplo), a formação de cavidades e subsequente mudança de fase para o estado líquido, assim como a transferência de calor que ocorre quando a energia é dissipada no escoamento.

Atualmente não é possível resolver o sistema de equações citado para escoamentos em estruturas hidráulicas ou outros tipos de escoamentos encontrados na indústria, que operam com elevados números de Reynolds, nem mesmo com o uso de métodos numéricos associados aos recursos computacionais mais avançados. Por esta razão, ao longo de muitos anos têm sido propostos e aperfeiçoados modelos matemáticos para os escoamentos turbulentos. Tais representações aproximadas para o problema da turbulência possuem restrições impostas pelas hipóteses simplificadoras adotadas nos desenvolvimentos teóricos das formulações. Apesar deste fato, resultados obtidos com tais modelos matemáticos possuem proximidades com a realidade física (que dependem do caso específico sob análise), sendo úteis para elaboração de projetos com diferentes níveis de complexidade.

Desde os projetos mais simples até os mais complexos a experimentação sempre está presente. Para os escoamentos laminares, por exemplo, que podem ser solucionados com elevada precisão através de formas simplificadas das equações de Navier-Stokes, pode ser necessário conhecer a viscosidade e a massa específica do fluido e, portanto, é necessária a experimentação. Quando o objetivo é prever o comportamento médio das grandezas de um

escoamento turbulento por meio de modelos de turbulência, o uso de recursos experimentais é indispensável para o levantamento de constantes ou relações que naturalmente surgem no processo de construção de tais modelos. Deste modo, a mecânica dos fluidos experimental é essencial para o entendimento das características de escoamentos em estruturas hidráulicas e para a concepção de métodos para previsões das grandezas de interesse.

Frisa-se que, ao mencionar a necessidade de experimentar, não está sendo feita qualquer observação sobre a possibilidade de conceber algo livre da experiência, condição que pode ser amplamente discutida. Assim, acerca das três leis de Newton e das hipóteses de Stokes, por exemplo, não parece razoável afirmar que elas surgiram como frutos de pensamentos isentos de experiências anteriores. Outro exemplo interessante sobre este tema é o uso de resultados obtidos com as equações básicas, por meio de simulações numéricas diretas de escoamentos simples, utilizados para explicar aspectos da turbulência. Como as equações diferenciais sofreram alguma influência da experimentação em diferentes níveis, os resultados também estão associados a ela. Por outro lado, observar a simulação também é uma experiência. Sobre este tema, por exemplo Kant escreveu:

“Não há dúvida de que todo o nosso conhecimento principia pela experiência. Sem dúvida, que outro motivo poderia despertar e por em ação a nossa capacidade de conhecer senão as coisas que afetam os sentidos e que, de um lado, por si mesmas dão origem a representações e, de outro lado, movimentam nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, ligá-las ou separá-las, transformando então a matéria bruta das impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência? Dessa forma, na ordem do tempo, nenhum conhecimento precede em nós a experiência e é com esta que todo o conhecimento de principia.” (Immanuel Kant. *Kritik der Reinen Vernunft*, 1781)

No parágrafo seguinte o autor apresenta a seguinte observação:

“No entanto, se todo o conhecimento se principia com a experiência, isso não prova que todo ele derive da experiência. Nosso próprio conhecimento experimental bem poderia ser um composto do que recebemos por meio das impressões sensíveis e daquilo que a nossa própria capacidade de conhecer – apenas ocasionada por impressões sensíveis – produz por si mesma, acréscimo esse que não distinguimos dessa matéria prima, enquanto a nossa atenção não despertar por um longo exercício que nos capacite a separá-los.” (Immanuel Kant. *Kritik der Reinen Vernunft*, 1781)

Após tais colocações, Kant destaca que pelo menos uma questão deve ser resolvida com um estudo mais atento: se poderá haver um conhecimento independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos. Ele denominou este conhecimento como *a priori*, separando-o do conhecimento empírico, cuja origem é *a posteriori*, isto é, na experiência. As numerosas páginas de sua obra são dedicadas a argumentações sobre esse assunto e implicações desvendadas com o uso de exemplos, ilustrando assim a importância dispensada a

questões fundamentais relacionadas à ciência. Não há aqui a intenção de desdobrar o tema expondo sequer algumas poucas discussões que podem ser apresentadas. Trabalhos como o de Hume (1711-1776), o de Poincaré (1854-1912) e o de Popper (1902-1994) são alguns exemplos de textos dedicados ao tópico. Entretanto, expõe-se a seguir uma concisa e introdutória consideração.

Ao posicionar a experiência como indispensável, é natural que seja questionada a necessidade de desenvolvimentos de modelos matemáticos. Algumas argumentações favoráveis aos modelos podem ser apresentadas. Um exemplo típico é o uso de análise dimensional, uma forma teórica de organizar as informações vinculadas a um fenômeno. Sobre este tema, Poincaré escreveu:

“A experiência é a única fonte da verdade. Somente ela pode nos ensinar algo novo e nos prover de certeza. Estes são dois pontos inquestionáveis. Entretanto, se a experiência é tudo, que lugar é deixado para a física matemática? (...) Não podemos nos contentar apenas com a experimentação? Não, isto é impossível; o que seria uma completa incompreensão da verdadeira natureza da ciência. O cientista deve trabalhar com método. A ciência é construída com fatos assim como uma casa é construída com pedras, mas um acúmulo de fatos não é ciência assim como uma casa não é um monte de pedras. E, principalmente, o cientista deve prever.” (Henri Poincaré. *Science and Hypothesis*, 1905, p.140-141)

Considerando um experimento que envolve uma grandeza $A=A(x)$, para a qual foram obtidos muitos pontos nos intervalos $x_1 < x < x_2$ e $x_3 < x < x_4$, como na Figura 1.2, não é possível prever o comportamento de $A(x_2 < x < x_3)$ sem alguma reflexão. Podem existir diferentes caminhos formados pelos pontos (x, A) entre x_2 e x_3 . Se alguma teoria estiver disponível, mesmo que exista uma ou mais constantes de ajuste que reflitam a dificuldade de representar exatamente o fenômeno, é possível que ela forneça uma resposta próxima ao que seria obtido experimentalmente para o intervalo $x_2 < x < x_3$. A palavra próxima é necessária porque não há confirmação experimental. A curva tracejada da Figura 1.2 que possui um padrão diferente das demais é um exemplo ainda mais impressionante sobre as possibilidades existentes. Neste caso, pode-se utilizar como exemplo a distribuição de pressão em torno de uma esfera lisa. Se as previsões para a região entre as nuvens de pontos são difíceis, a tentativa de prever o que ocorre se $x < x_1$ e $x > x_4$ pode ser considerada muito mais difícil sem o uso de alguma teoria.

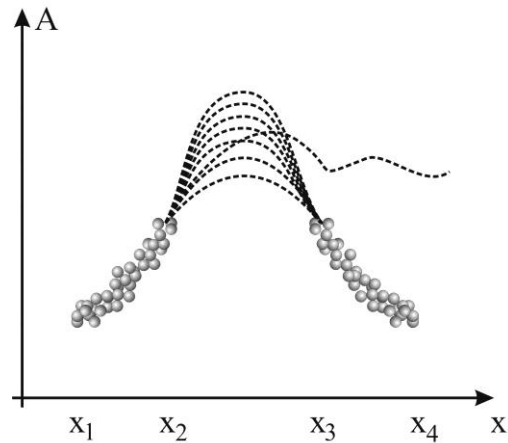


Figura 1.2 – Ilustração sobre a discussão relacionada à relevância da teoria. As curvas tracejadas são algumas possibilidades para o intervalo $x_2 < x < x_3$.

As linhas anteriores resumem a forma de trabalho adotada nesta pesquisa. Esse modo envolve experiência, teoria e simulação. Os problemas relacionados aos escoamentos em canais em degraus têm sido estudados há pelo menos quatro décadas. Existem dados publicados para diferentes tipos de geometrias dos degraus, incluindo degraus com pisos em auge, em declive, com soleiras situadas na extremidade do piso, entre outras configurações já mencionadas, por exemplo, em Simões (2008) e Simões, Porto e Schulz (2009). Apesar da grande quantidade de dados, são notadas algumas divergências, além de não haver informações experimentais suficientes para generalizar um possível método de previsão para todos os aspectos relevantes de escoamentos. Desse modo, estudos experimentais e teóricos, ainda que sejam direcionados a um único aspecto do escoamento, são de grande relevância para a área.

1.2 Organização dos tópicos

Este trabalho está organizado de acordo com os seguintes tópicos:

- a) **Introdução:** são apresentados tópicos gerais adotados nesta linha de pesquisa;
- b) **Objetivos:** os objetivos deste trabalho são apresentados sob a forma de tópicos que destacam as propostas da tese;
- c) **Revisão bibliográfica:** é exposto o estado atual do conhecimento sobre estudos relacionados a escoamentos em canais e vertedores com o fundo em degraus. Sempre que possível, procurou-se expor os assuntos de maneira sintética e com ênfase para os detalhes conceituais inculcados nas formulações. A revisão bibliográfica é fundamental para a identificação de assuntos que já foram estudados e de dados disponíveis para

análise em conjunto com modelos propostos. Entretanto, não foi possível dissertar sobre todos os estudos existentes, sobretudo devido às barreiras impostas pelos diferentes idiomas (como o mandarim, japonês, etc.);

- d) **Materiais e métodos:** este item está distribuído entre os capítulos. O capítulo sobre o estudo experimental desenvolvido contém os materiais e métodos correspondentes. O capítulo com resultados numéricos inéditos é precedido por capítulos escritos acerca das equações e princípios básicos de Mecânica dos Fluidos, Transição e Turbulência. O próprio capítulo sobre as soluções numéricas contém uma breve introdução aos métodos numéricos que destaca a importância de temas como estabilidade, consistência e convergência, por exemplo. O capítulo com desenvolvimentos teóricos inéditos possui métodos que consistem basicamente na adoção de hipóteses e princípios fundamentais (conservação de massa, 2ª Lei de Newton, etc.) para problemas específicos. A sua construção, entretanto, passou pela observação da revisão bibliográfica, resultados numéricos e experimentais e todas as demais impressões devidas às informações sobre Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica, Mecânica do Contínuo, etc.;
- e) **Comparações entre Experimentação, Simulações e Teoria:** Tais comparações são expostas no penúltimo capítulo da tese, que precede as conclusões e referências.

Sobre a estética do trabalho, cabe destacar que foram utilizados diferentes softwares para produção dos gráficos, prática que, às vezes, inviabiliza a uniformidade em toda a tese. Cabe mencionar também que cada capítulo da Tese possui uma lista de símbolos própria. Em função do grande número de equações, entende-se que seria demasiadamente confuso elaborar uma única lista, com símbolos compostos para evitar muitas repetições. Deste modo, optou-se pelo método de citar as definições dos símbolos após as equações com o uso de uma lista por capítulo, como complemento.

2 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho estão associados aos estudos teórico, experimental e numérico do escoamento ao longo de canais com o fundo em degraus e, em alguns aspectos, para canais lisos. A parte teórica mencionada refere-se à apresentação de modelos matemáticos propostos para escoamentos em canais lisos e em degraus. A seguir são listados os objetivos gerais da pesquisa:

- 1) Apresentar o estado atual do conhecimento sobre o tema central da pesquisa e os fundamentos que sustentam todas as propostas do trabalho;
- 2) Estudar experimentalmente as características de escoamentos em canais em degraus;
- 3) Estudar as características do escoamento deslizante sobre turbilhões e em quedas sucessivas por meio de soluções numéricas da equação de conservação de massa e equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds associadas a modelos de turbulência;
- 4) Propor modelos físico-matemáticos adimensionais e analíticos para previsão da posição da superfície livre em canais retangulares;
- 5) Aplicar sensores acústicos ultrassônicos de deslocamento para o estudo do comportamento estatístico da superfície livre de escoamentos deslizantes sobre turbilhões. O uso do ultrassom é parte da metodologia, mas, como objetivo deste trabalho, destaca-se a aplicação deste tipo de instrumento de medição;
- 6) Desenvolver um modelo físico-matemático para avaliação do fator de resistência de Darcy-Weisbach;
- 7) Propor um modelo físico-matemático para o desenvolvimento da camada limite;
- 8) Desenvolver um equacionamento para avaliar a reoxigenação da água.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Sumário

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 Considerações iniciais.....	13
2.2 Aspecto históricos.....	17
2.3 Regimes ou tipos de escoamento: aspectos físicos	20
2.4 Escoamento em quedas sucessivas	26
2.4.1 Ocorrência do escoamento em quedas sucessivas e os seus sub-regimes.....	26
2.4.2 Dissipação de energia.....	29
2.4.3 Aeração do escoamento e fenômenos relacionados	32
2.5 Escoamento de transição.....	34
2.6 Escoamento deslizante sobre turbilhões	35
2.6.1 Ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões e dos seus sub-regimes.....	35
2.6.2 Dissipação de energia.....	37
2.6.3 Escoamento bifásico.....	57
2.6.4 Cavitação e campo de pressões	75
2.7 Tópicos especiais	85

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Considerações iniciais

Ao escrever sobre escoamentos em canais em degraus é natural que seja especificado o contexto abordado, já que existem diferentes fenômenos que podem ser amplamente discutidos. Esta revisão é dedicada à exploração do conhecimento existente sobre os escoamentos em estruturas com degraus e espera-se que ela sirva como suporte para identificação da maior parte dos resultados obtidos nos estudos desta área. Como nas diversas áreas da ciência, a terminologia é um aspecto fundamental, o mesmo ocorrendo em trabalhos que discorrem sobre hidráulica e mecânica dos fluidos. Por este motivo, estas considerações iniciais incluem definições básicas utilizadas ao longo do texto. O termo canal em degraus é utilizado para nomear uma estrutura hidráulica com fundo escalonado capaz de conduzir água em escoamento com superfície livre. Esta definição não inclui restrições em relação à geometria dos degraus e dos muros laterais do canal. Os degraus podem ter o piso em aclave, podem estar espaçados e, em alguns estudos, é possível encontrar degraus horizontais com soleiras centrais ou na extremidade de jusante do piso. Há também, embora não sejam comuns, canais em degraus com muros laterais não-paralelos. O termo vertedor em degraus é usado para os extravasores de barragens. O vertedor propriamente dito é, por definição, a região superior do extravasor. À sua frente é normalmente adotada uma crista definida segundo os padrões usuais para estruturas lisas (perfil Creager, 1917; Scimemi, 1939), embora ela possa ser alterada com a inclusão de degraus com dimensões não uniformes. A Figura 2.1 ilustra algumas possíveis geometrias encontradas em estudos sobre o tema.

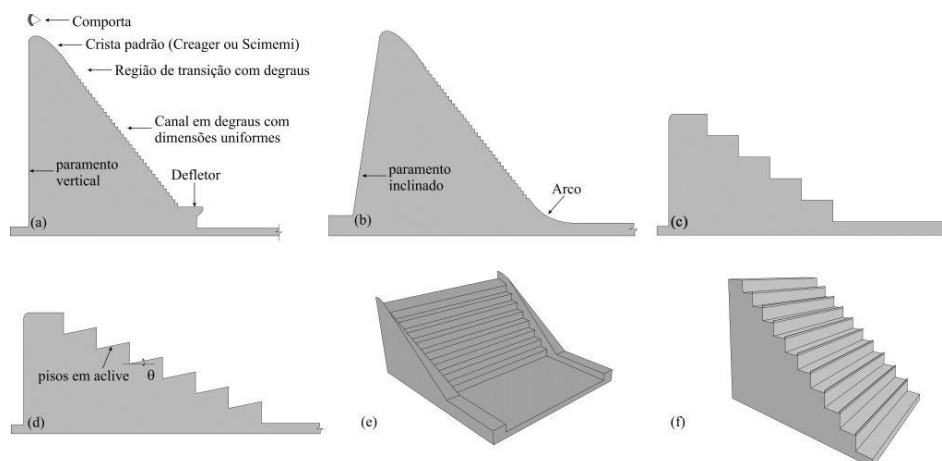
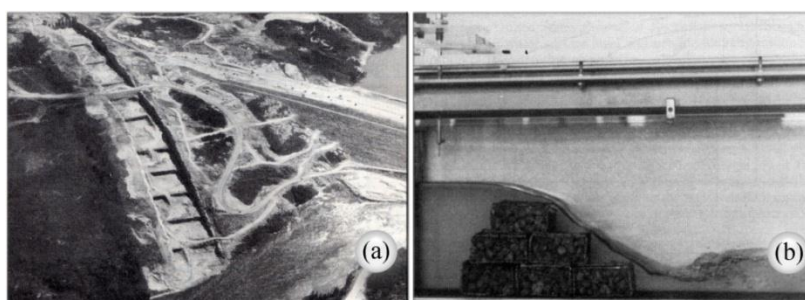


Figura 2.1 – Exemplos de características de canais em degraus: (a) Degraus com alturas variadas, comporta e defletor na extremidade final do canal; (b) Uso de um arco na base do canal e inclinação do paramento de montante; (c) Canal sem a crista padrão; (d) Degraus cujos pisos estão em aclave; (e) Muros laterais convergentes; (f) Degraus com soleiras nas extremidades finais dos pisos.

A primeira imagem da Figura 2.1 contém um defletor na extremidade final do canal, sendo esta forma uma proposta por Tozzi (1992, p.89-93). O uso de comportas é mencionado por Chanson (2002, p.177). Os trabalhos de Diez-Cascon *et al.* (1991) e Povh (2000) ilustram o uso de arcos como ligação entre o canal em degraus e a bacia de dissipação (Figura 2.1b). Ainda sobre a Figura 2.1b, de acordo com os trabalhos de Christodoulou (1993, p.645) e Chanson (2002, p.218), o paramento de montante não precisa ser necessariamente vertical. O uso de degraus em aclave e com soleiras terminais pode ser visto nos trabalhos de Peyras *et al.* (1992), Chinnarasri e Wongwises (2006, p.73-74), Takahashi *et al.* (2008, p.115) e Carvalho e Martins (2009, p.516). É usual adotar uma largura uniforme para o canal em degraus. Entretanto, há estudos que se ocuparam em investigar os efeitos da adoção de muros laterais convergentes, como pode ser visto no trabalho de Frizell (2006, p.46-48) e Hunt *et al.* (2008).

Neste trabalho, o termo *canal em degraus* é utilizado para canais com o fundo em degraus. O termo *vertedor em degraus* é empregado sempre que o canal em degraus fizer parte do sistema extravasor de uma barragem. Nestas definições, se não for mencionado o contrário, subentende-se que os pisos são horizontais e sem soleiras nas extremidades. Está implícito também que os muros laterais são paralelos e que a seção transversal do canal é retangular. Pode-se ainda fazer distinção entre uma ou outra estrutura em função da rugosidade superficial, que pode apresentar valores diferentes nas diferentes partes que compõem o perímetro molhado. Existem canais e vertedores em degraus formados por rochas (Figura 2.2a) e por pedras confinadas em gaiolas (gabião), como ilustrado na Figura 2.2b. O canal apresentado na Figura 2.2c, exemplifica uma estrutura com pisos cujas rugosidades superficiais são diferentes das encontradas nos espelhos e muros laterais. As finalidades dos canais e vertedores apresentados anteriormente estão atreladas às obras hidráulicas que os adotam. Entretanto, existem estruturas da arquitetura decorativa que incluem o uso de canais em degraus, como apresentado na Figura 2.2d.



(Continua na próxima página)



Figura 2.2 – Exemplos de canais em degraus com rugosidades superficiais diferentes: (a) Imagem aérea de um canal em degraus formado por rochas, situado no Canadá e pertencente ao James Bay Project; (b) Canal em degraus formado por gabiões; (c) Canal em degraus com rugosidades dos pisos modificada pela introdução de pedras; (d) Canal em degraus de uma estrutura decorativa, com a superfície revestida com pastilhas.

Fonte: (a) Aubin *et al.* (1979, p.127)- (b) Stephenson (1979); (d) Simões (2008)

As imagens anteriores mostram canais em degraus construídos com diferentes materiais. Os canais denominados “descidas d’água tipo escada” ou “escadas d’água” utilizados em sistemas de drenagem de rodovias são normalmente construídos com concreto armado (DER, 1991, p.236-237), assim como o canal dissipador de energia da Figura 2.2c. Peyras *et al.* (1992, p.716) sugerem o uso de uma camada de concreto sobre os pisos de canais em degraus formados por gabiões com o intuito de preservar a integridade da estrutura. Nota-se também canais construídos com rochas e outros materiais, como nas Figuras 2.2a,d. Além das alternativas mencionadas, existe a possibilidade de uso de pré-fabricados de concreto que se encaixam formando um canal com o fundo em degraus. Algumas formas específicas foram desenvolvidas e estudadas pelo *U.S. Department of the Interior* e pelo Instituto Superior Técnico (Portugal), tendo como aplicação principal o revestimento dos taludes de jusante de barragens de terra e enrocamento já existentes. Tal emprego se deve a avaliações hidrológicas relativamente recentes que demonstraram a incapacidade de alguns sistemas extravasores em descarregar vazões que não foram previstas quando os extravasores originais foram projetados. A Figura 2.3 contém mais algumas imagens, que ilustram alguns dos aspectos aqui mencionados.

Nesse sentido, um dos materiais mais empregados para a construção de vertedores em degraus é o concreto compactado a rolo. Como ilustrado por meio das Figuras 2.3d,e,f, o uso de camadas de concreto favorece a confecção dos degraus. Além dessa vantagem construtiva, os degraus atuam como dissipadores de energia e, como consequência, a estrutura de dissipação a jusante do vertedor em degraus normalmente possui dimensões inferiores às de uma estrutura de dissipação a jusante de um vertedor liso. Millan (1993, p.23-26) menciona também que o uso de concreto compactado a rolo pode ser mais econômico, em alguns casos, até mesmo em relação às obras de terra e enrocamento. A imagem da Figura 2.3f ilustra uma

situação na qual a ensecadeira de montante rompeu, tendo ocorrido o galgamento durante a construção. A estrutura permaneceu intacta, sendo essa mais uma vantagem atrelada ao uso de concreto compactado a rolo.

O uso de concreto compactado a rolo em barragens não é tão recente, podendo-se mencionar o seu uso no núcleo de uma barragem em Taiwan, entre 1960 e 1961. Andriolo (1998, p.12) comenta que em 1986 foram construídas quinze barragens desse tipo em diversas partes do mundo. Segundo o mesmo autor, esse número cresceu para 45 barragens em 1990, 96 barragens em 1993 e 156 barragens em 1996. O concreto compactado a rolo no Brasil tem sido empregado para construção de barragens há mais de vinte anos e, como apresentado por Simões (2006, 2008), entre as 45 barragens brasileiras mencionadas por este autor, pelo menos 18 possuem vertedor em degraus.

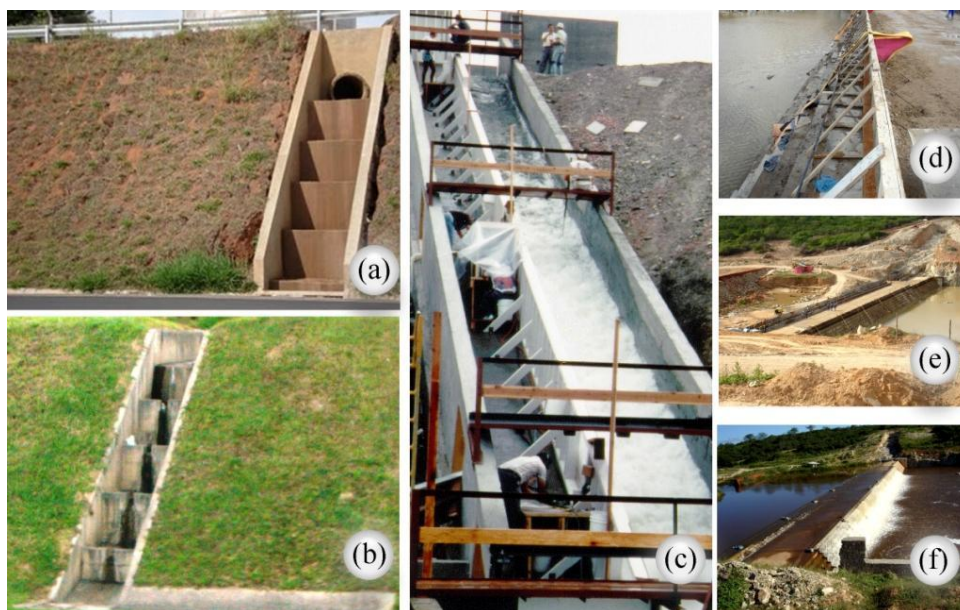


Figura 2.3 – Canais e vertedores em degraus construídos com diferentes materiais: (a,b) Estruturas de concreto armado; (c) Canal em degraus formado por peças pré-moldadas; (d,e,f) Barragem construída com concreto compactado a rolo. Fonte: (c) – Frizell (1992); (d,e,f) – Imagens cedidas por Antônio G. Simões de Oliveira e Paulo R. M. Simões.

Em função dos atrativos relacionados aos vertedores em degraus, as características dos escoamentos em tais estruturas hidráulicas têm sido estudadas em diversas instituições. Como exemplo, pode-se mencionar os trabalhos desenvolvidos em Portugal, na Espanha, na China, na Grécia, no Japão, na África do Sul, na Austrália, na Suíça, nos Estados Unidos e no Canadá. No Brasil, um dos primeiros estudos relacionados ao tema foi conduzido na Universidade de São Paulo, em 1992, seguido por pesquisas em outras universidades, como indicado na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 – Trabalhos acadêmicos desenvolvidos no Brasil sobre vertedores e canais em degraus

Autor(a) – 1 Orientador – 2	Ano	Instituição	Declividade	Caráter do Trabalho	Tipo
1 – Marcos José Tozzi 2 – Giorgio Brighetti	1992	USP/EP	1V:0,75H; 1V:2,0H; 1V:6,69H	Experimental	T
1 – Winston H. Kanashiro 2 – Podalyro Amaral de Souza	1995	USP/EP	1V:0,75H	Experimental	T
1 – Paulo Henrique Povh 2 – Marcos José Tozzi	2000	UFPR	1V:0,75H	Experimental	D
1 – Julio Cesar Olinger 2 – Giorgio Brighetti	2001	USP/EP	1V:0,75H	Experimental	T
1 – Daniela Guzzon Sanagiotto 2 – Marcelo Giulian Marques	2003	UFRGS	1V:0,75H	Experimental	D
1 – Maurício Dai Prá 2 – Marcelo Giulian Marques	2004	UFRGS	1V:1H	Experimental	D
1 – Jaime Federici Gomes 2 – Marcelo Giulian Marques	2006	UFRGS	1V:0,75H	Experimental	T
1 – André Luiz Andrade Simões 2 – Michel Sahade Darzé	2006	UNIFACS	-	Teórico	M
1 – Eudes José Arantes 2 – Rodrigo de Melo Porto	2007	USP/EESC	1V:0,75H	Numérico	T
1 – André Luiz Andrade Simões 2 – Rodrigo de Melo Porto	2008	USP/EESC	-	Teórico	D

Legenda: USP = Universidade de São Paulo; EP = Escola Politécnica; EESC = Escola de Engenharia de São Carlos; UFPR = Universidade Federal do Paraná; UFRGS = Universidade Federal do Rio Grande do Sul; UNIFACS = Universidade Salvador; T = tese; D = dissertação; M = Monografia.

Os trabalhos internacionais publicados sobre o tema estão, em grande parte, concentrados nos dois principais periódicos de engenharia hidráulica: o *Journal of Hydraulic Reserach* e o *Journal of Hydraulic Engineering*. Existem também artigos publicados em outros meios importantes, como no periódico francês, *La Houille Blanche*, no *International Journal of Multiphase Flow*, no *Canadian Journal of Civil Engineering*, entre outros. Como exemplo da quantidade de publicações, pode-se mencionar que ao inserir o termo *stepped spillway* no site do *Journal of Hydraulic Engineering* são recuperados 51 documentos, que correspondem a artigos e discussões sobre artigos. Há também alguns livros específicos sobre vertedores e canais em degraus e livros com capítulos sobre alguns aspectos do escoamento. Entre eles, encontram-se os trabalhos de Chanson (1994c, 2002), de Minor e Hager (2000) que organizaram artigos de um *workshop*, Vischer e Hager (1998) e Khatsuria (2005), que dedicaram parte dos seus livros aos vertedores em degraus, entre outros. Outras fontes de informações sobre o tema são os relatórios escritos em universidades e grandes centros de pesquisa. Como exemplo, pode-se mencionar o *Project Report 511*, desenvolvido na Universidade de Minnesota, no *St. Anthony Falls Laboratory*, escrito por Lueker *et al.* (2008), dentre os quais encontra-se também um professor brasileiro (Schulz, H.E., da USP).

2.2 Aspecto históricos

Embora o interesse recente sobre escoamentos em canais em degraus tenha sido impulsionado pelo uso de concreto compactado a rolo (ccr) nas construções de barragens, há evidências históricas que indicam o uso de tais estruturas em épocas anteriores ao uso do ccr. Em seu

livro sobre vertedores em degraus, Chanson (2002) apresenta uma interessante exposição sobre o tema. Ele menciona o trabalho de Knauss (1995) e afirma que o mais antigo vertedor em degraus conhecido está situado na Grécia, em Akarnania, tendo sido construído em 1.300 a.C.. De acordo com esse autor, a estrutura apresentava 10,5 m de altura, 25 m de largura, declividades entre 39° e 75° e degraus com alturas entre 0,6 m e 0,9 m (CHANSON, 2002, p.36).

Seguindo o panorama apresentado por Chanson (2002), pode-se mencionar que outros extravasores antigos foram encontrados no oriente médio como, por exemplo, nas proximidades do rio Khosr (694 a.C.). Durante o império romano foram construídos alguns vertedores, sendo que uma parte dos mesmos pode ser encontrada na Líbia, Síria e Tunísia. Chanson (2002, p.36) comenta que, após a queda do Império Romano, engenheiros mulçumanos construíram barragens com extravasores desse tipo na Espanha, no Iran, na Arábia Saudita e no Iraque. Os engenheiros espanhóis continuaram a utilizar as estruturas romanas e mulçumanas, além de terem projetado novas barragens com vertedores em degraus, a exemplo das barragens Almansa, Alicante e Barrarueco de Abajo. Informações adicionais muito interessantes sobre características dessas e de outras construções antigas podem ser encontradas na referência mencionada.

Os degraus são estruturas naturalmente vinculadas a civilizações que se estabelecem em regiões acidentadas, ou cujo estágio arquitetônico utiliza as pirâmides com degraus. Embora fora do contexto do escoamento propriamente dito, pode-se aludir ao uso de degraus em forma de terraços nas civilizações do Novo Continente (maias, incas, astecas), os quais visavam mais a proteção da erosão nas plantações do que a própria condução da água, mas que mostra que uma solução técnica vinculada à água fez uso de degraus também nessas civilizações.

É interessante notar que nomes históricos como Leonardo da Vinci e Johann Bernoulli tenham apresentado padrões de escoamentos que, de alguma forma, estão relacionados aos observados atualmente. A Figura 2.4a mostra um desenho de da Vinci, apresentado por Richter (1883, p.236), que corresponde a um dos tipos de escoamento que ocorre para vazões menores e degraus com pisos mais extensos. Já a Figura 2.4b, extraída do livro *Hydraulica*, de Bernoulli, ilustra a formação de vórtices em um escoamento que passa por descontinuidades geométricas, sendo esse um padrão típico do escoamento sobre vertedores em degraus que funcionam em regime deslizante sobre turbilhões.

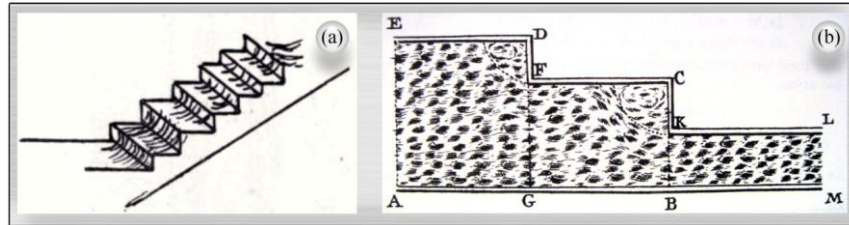


Figura 2.4 – Desenhos históricos relacionados aos campos de escoamentos em canais e vertedores em degraus: (a) Esboço atribuído a Leonardo da Vinci (Richter, 1883, p.236) (a imagem está em espelho); (b) Desenho encontrado no livro *Hydraulica*, de Johann Bernoulli (Bernoulli, 1743, p.368).

No Brasil, o uso de concreto compactado a rolo para a construção de barragens com vertedores em degraus tem sido uma prática há mais de trinta anos. Entre as 50 barragens listadas na Tabela 1.2, pelo menos 24 possuem parte do sistema extravasor composta por um vertedor desse tipo. A Figura 2.5 ilustra a distribuição das barragens nos diferentes Estados brasileiros. Nota-se que, de acordo com esse levantamento, a Bahia possui oito barragens construídas com ccr, dentre as quais três possuem vertedores em degraus. Na Paraíba essa relação é de 1/3 (leia-se “um para três”), em Pernambuco é de 5/6, no Rio Grande do Sul é de 3/5, em Goiás 1/4, em Minas Gerais 3/6, no Ceará 2/3, no Piauí 1/1, no Mato Grosso 2/2, no Rio Grande do Norte 1/4, em São Paulo 2/2, no Pará 0/2, em Sergipe 0/1 e no Paraná 0/2.

Tabela 1.2 – Barragens brasileiras construídas com ccr

nº	NOME	ESTADO	VERTEDOR	PERÍODO DE CONSTRUÇÃO
1	Acauã	Paraíba	Degraus	1993-1995
2	Arthur Tavares de Melo	Pernambuco	Degraus	-
3	Bandeira de Melo	Bahia	Liso	2001-2005
4	Belo Jardim	Pernambuco	Degraus	1995-1998
5	Bertarello	Rio Grande do Sul	Degraus	1998-2000
6	Cana Brava	Goiás	Liso	1999-2002
7	Candongá	Minas Gerais	Liso	2001-2005
8	Canoas	Ceará	Degraus	1993-1996
9	Carábas	Minas Gerais	Degraus	1990-1991
10	Carnaúba	Ceará	Degraus	2002-2002
11	Castanhão	Ceará	Liso	1999-2002
12	Cova da Mandioca	Bahia	Degraus	1993-1994
13	Dona Francisca	Rio Grande do Sul	Degraus	1998-2000
14	Duas Serras	Pernambuco	Degraus	-
15	Estreito	Piauí	Degraus	1997-2002
16	Fundão	Rio Grande do Sul	-	2001-2005
17	Gameleira	Minas Gerais	Degraus	1990-1991
18	Guilman-Amorin	Minas Gerais	Degraus	1997-2000
19	João Leite	Goiás	Degraus	2001-2004
20	Jordão	Paraná	Liso	1994-1996
21	Juba I	Mato Grosso	Degraus	-1995
22	Juba II	Mato Grosso	Degraus	-1995
23	Jucazinho	Pernambuco	Degraus	1996-1999
24	Lajeado	Goiás	Liso	1998-2002
25	Malhada das Pedras	Bahia	-	-
26	Mocotó	Bahia	-	-

27	Pedras Altas	Bahia	Degraus	2000-2001
28	Pelo Sinal	Rio Grande do Norte	-	1991-1994
29	Pindobaçu	Bahia	Liso	2001-2005
30	Pirapama	Pernambuco	-	2000-2001
31	Ponto Novo	Bahia	Liso	1998-2000
32	Rio da Dona	Bahia	Degraus	-
33	Rio do Peixe	São Paulo	Degraus	1996-1998
34	Rio da Prata	Pernambuco	Degraus	1993-1994
35	Rosal	São Paulo	Degraus	1998-2000
36	Saco de Nova Olinda	Paraíba	-	1985-1987
37	Salto Caxias	Paraná	Liso	1995-1998
38	Santa Clara	Minas Gerais	Liso	2001-2005
39	Santa Clara-Jordão	Rio Grande do Sul	-	2001-2005
40	Santa Cruz do Apodi	Rio Grande do Norte	-	1998-2000
41	Serra do Falcão	Goiás	-	2001-2005
42	Sítio Traíras	Rio Grande do Norte	-	-
43	Traíras	-	Degraus	1994-1995
44	Três Marias	Minas Gerais	Liso	-
45	Tucuruí (1ª fase)	Pará	Liso	1975-
46	Tucuruí (2ª fase)	Pará	Liso	1998-2005
47	Umari	Rio Grande do Norte	Degraus	1998-2001
48	Val de Serra	Rio Grande do Sul	Degraus	1997-1998
49	Várzea Grande	Paraíba	-	1993-1995
50	Xingó	Sergipe	Liso	-

Fonte: Elaborado com dados de Simões (2006), Associação Brasileira de Cimento Portland e Andriolo (2002).

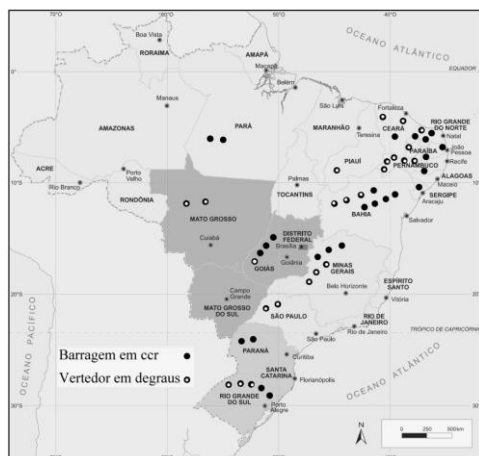


Figura 2.5 – Barragens e vertedores em degraus nos Estados brasileiros

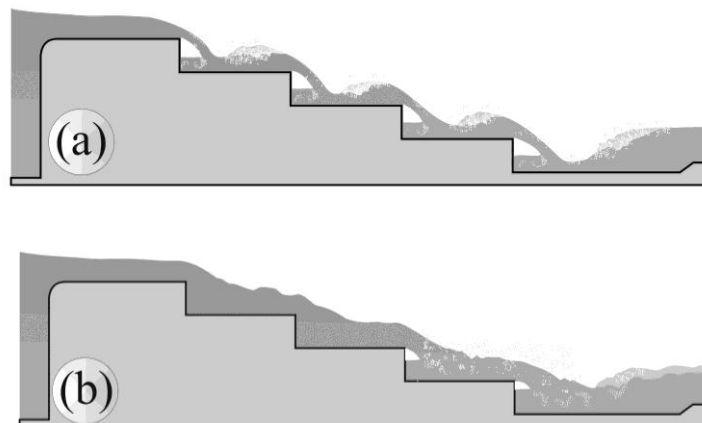
Os itens precedentes contêm informações introdutórias sobre escoamentos em canais e vertedores em degraus. A partir do item 2.3, esta revisão bibliográfica se desenrola com a apresentação dos resultados de autores sobre características dos diferentes escoamentos que ocorrem em canais e vertedores em degraus.

2.3 Regimes ou tipos de escoamento: aspectos físicos

Observando o esboço de Leonardo da Vinci da Figura 2.4a, nota-se que o escoamento ocorre de um piso para o outro por meio de quedas. Este tipo de escoamento é denominado *nappe flow* na bibliografia internacional. Considerando a mesma geometria da estrutura esboçada

pelo artista, há um valor para a vazão a partir do qual a configuração do escoamento é alterada. É possível identificar um escoamento principal na direção longitudinal ao canal e um escoamento secundário nas cavidades formadas pelos degraus, que é mantido pelo escoamento principal. Em inglês, o termo empregado para designar esse padrão é *skimming flow*. Os trabalhos de Horner (1969), Rajaratnam (1990), Diez-Cascon *et al.* (1991) e de outros pesquisadores classificaram os padrões mencionados como dois regimes de escoamento que ocorrem em vertedores e canais em degraus. Matos e Quintela (1995a) introduziram, na língua portuguesa, os termos atualmente empregados para os tipos de escoamento: escoamento em quedas sucessivas para o regime *nappe flow* e escoamento deslizante sobre turbilhões para o *skimming flow*. Para condições específicas que propiciam escoamentos que não se enquadram nesses dois tipos, sendo intermediários a eles, existem padrões que fazem parte de um escoamento denominado como escoamento de transição. Os primeiros autores que sugeriram essa terceira divisão foram Ohtsu e Yasuda (1997).

A separação mencionada no parágrafo anterior culminou na realização de estudos específicos sobre cada tipo de escoamento. Apesar de ainda haver lacunas no conhecimento sobre as características de cada um dos tipos, devido às complexidades dos escoamentos e pela grande quantidade de geometrias imagináveis, é possível encontrar na literatura um grande número de informações sobre o tema. Por esta razão, a organização desta revisão bibliográfica foi feita com base nos tipos de escoamentos. Como exemplo da dificuldade inerente às atuais classificações, cabe mencionar que, atualmente, cada um dos três tipos de escoamentos apresentados anteriormente possui pelo menos dois sub-regimes. Com o intuito de apresentar uma primeira descrição sobre as características gerais dos três tipos de escoamentos, é apresentado um esboço na Figura 2.6.



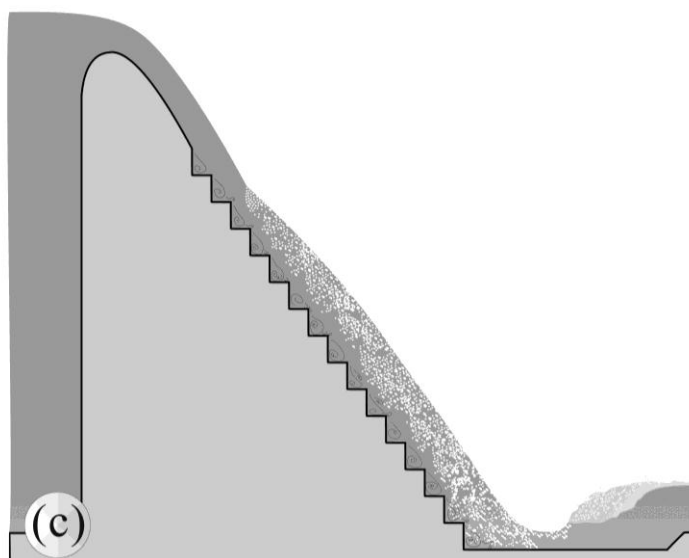


Figura 2.6 – Tipos de escoamentos: (a) Quedas sucessivas; (b) Transição; (c) Deslizante sobre turbilhões.

Os escoamentos em quedas sucessivas ocorrem normalmente em canais encontrados nos sistemas de drenagem urbana, estações de tratamento de esgoto, canais para a transposição de peixes, estruturas ornamentais e em vertedores em degraus de barragens com degraus de grandes dimensões.

Como ilustrado na Figura 2.6a, o escoamento proveniente de um reservatório ou de um canal, ao encontrar a extremidade do primeiro degrau, ocorre seguindo uma trajetória semelhante à observada em vertedores de parede delgada. Nota-se a formação de uma cavidade de ar na região abaixo da lâmina vertente que permanece desde que a mesma tenha um suprimento de ar contínuo. Entre a cavidade de ar e o piso do degrau pode haver a formação de uma região com recirculação. As características do jato dependem da altura dos degraus e das condições de aeração do mesmo. Para degraus altos, a entrada de ar por meio da superfície livre normalmente é intensa, tornando o escoamento bifásico. Se o dispositivo responsável pela adução de ar não for dimensionado corretamente, o jato pode oscilar e, assim como o ar incorporado ao escoamento, tais oscilações se propagam para jusante determinando o padrão observado após o ponto de impacto da lâmina vertente como piso.

Com o intuito de identificar um sub-regime específico do escoamento em quedas sucessivas, considera-se válido supor a ocorrência de uma curva H3 sobre o degrau. Seguindo tal hipótese, o escoamento não pode persistir indefinidamente segundo essa curva, ocorrendo então um ressalto hidráulico. Com a formação do ressalto e a conseqüente transição para o regime subcrítico, a curva teórica prevista para o trecho entre a onda estacionária e a queda brusca é uma curva H2. Esse é o primeiro sub-regime do escoamento em quedas sucessivas. De acordo com Chanson (2002, p.90) o escoamento em quedas sucessivas pode ser

subdividido em três tipos. O primeiro é denominado escoamento com ressalto hidráulico plenamente desenvolvido, abreviado por NA1. O segundo é o escoamento com ressalto hidráulico parcialmente desenvolvido (NA2) e o terceiro, escoamento sem ressalto hidráulico (NA3). Para um dado escoamento NA1, à medida que a vazão é elevada, o ressalto se desloca para jusante. Com isto há transição entre os sub-regimes até a condição para a qual se torna impossível a formação do ressalto hidráulico.

A Figura 2.6b tem como objetivo ilustrar de forma aproximada a seção longitudinal de um escoamento de transição. Nota-se que há algumas cavidades preenchidas e outras não, além de oscilações na superfície livre. De acordo com autores como Chanson (2002) e Chanson e Toombes (2004), o escoamento de transição é caracterizado pela recirculação de água entre degraus e normalmente por uma pequena cavidade de ar junto à face superior do espelho. Observa-se também um ponto de estagnação que divide o escoamento em duas regiões sobre o piso. A montante do ponto de estagnação ocorre a zona com escoamento recirculante e, a jusante dele, há formação de respingos de água (*spray*) e escoamento supercrítico. A ocorrência desse ponto de divisão também ocorre em escoamentos deslizantes sobre turbilhões, sendo possível observá-lo por meio de campos de velocidades obtidos com simulações numéricas. O escoamento de transição tem sido menos explorado pelos estudiosos quando comparado aos dois regimes principais. Apesar disto, trabalhos como os de Chanson (2002), Chanson e Toombes (2004), Sánchez-Juny e Dolz (2005) e Carosi e Chanson (2006) contêm informações interessantes sobre as características do escoamento.

O terceiro tipo de escoamento, ilustrado na Figura 2.6c, é o deslizante sobre turbilhões. O termo utilizado para nomear esse padrão reflete, de forma resumida, o aspecto do campo de velocidades. Como desenhado na figura mencionada, observa-se um escoamento principal que ocorre sobre grandes turbilhões confinados nas cavidades dos degraus. Em vertedores de barragens sem comportas, o escoamento oriundo do reservatório é praticamente monofásico e, devido à distância em relação ao fundo do canal de aproximação, é razoável assumir que a distribuição de velocidades junto à entrada do vertedor seja aproximadamente uniforme. Ao entrar em contato com o contorno sólido, o perfil uniforme passa a sofrer a sua influência e a camada limite se desenvolve ao longo do escoamento. Existem diferentes geometrias que podem ser adotadas nas proximidades da extremidade de montante do vertedor em degraus e, em função de tais geometrias, a camada limite pode se desenvolver sobre distâncias diferentes. Para prosseguir com essa descrição, assume-se que existe um pseudo-fundo formado pelo alinhamento das esquinas dos degraus. Se for verdadeira a hipótese de um escoamento com perfil de velocidades uniforme na entrada do canal, a descrição anterior

permite definir uma região de escoamento potencial, uma região de escoamento no interior da camada limite e zonas de escoamentos com grandes vórtices. Ao longo do trecho onde ocorre este padrão, a superfície livre deve ser lisa e bem definida e o escoamento monofásico. A partir da posição onde a espessura da camada limite coincide com a profundidade do escoamento, são observadas intensas agitações na superfície livre e conseqüente entrada de ar. Na literatura técnica, o ponto na superfície livre a partir do qual o ar é incorporado recebe o nome de ponto de “incipiência” da aeração. A partir desse ponto, observa-se a formação de um escoamento bifásico formado pela mistura do ar com a água. Como representado na Figura 2.6c, a entrada de ar forma um perfil longitudinal composto por bolhas que penetram no escoamento a profundidades crescentes ao longo do canal. Observações experimentais publicadas por Chamani e Rajaratnam (1999a, p.363) e Ohtsu *et al.* (2001, p.522), assim como aquelas realizadas neste trabalho, mostram que as bolhas podem atingir a região dos grandes vórtices formados entre degraus. Para posições próximas à posição de início da aeração, as bolhas podem ser transportadas até os grandes vórtices permanecendo ali de forma intermitente. Para posições mais a jusante, plenamente aeradas, observou-se que sempre há uma grande quantidade de bolhas em recirculação.

Empregando os possíveis perfis da superfície livre utilizados nos estudos de escoamentos permanentes gradualmente variados, pode-se considerar que, a partir do início do vertedor em degraus ocorre um perfil do tipo S_2 . Esse perfil é caracterizado por profundidades decrescentes no sentido do escoamento que tendem assintoticamente ao regime uniforme. Essa descrição é coerente com aquelas apresentadas na literatura, elaboradas para a região de escoamento monofásico e com base em observações em modelos reduzidos com e sem comportas. De uma forma geral, há também um consenso sobre a forma da superfície livre a jusante do ponto de incipiência da aeração (pelo menos no tocante à manutenção da profundidade, podendo haver evoluções nos perfis de concentração e velocidade associados, um tema que ainda necessita mais investigações). Nesta parte, as profundidades são crescentes do sentido do escoamento e, se o canal for suficientemente extenso, observa-se o estabelecimento de um escoamento uniforme. Para canais controlados por comportas instaladas na extremidade de montante, entretanto, existe a possibilidade de ocorrência de perfis S_3 , como constatado nesta pesquisa.

Pegram *et al.* (1999, p.500) estudaram o escoamento em canais em degraus com $1V:0,6H$. De acordo com esses autores, o escoamento deslizante sobre turbilhões ocorre quando a profundidade é grande o suficiente em relação à altura dos degraus em um vertedor relativamente íngreme. Como característica principal do escoamento, eles destacam a

incorporação de ar e também mencionam a existência de vórtices na região triangular formada entre dois degraus e o pseudo-fundo, como mencionado anteriormente. Diferente de algumas descrições encontradas na literatura, esses autores observaram a existência de pequenas cavidades de ar no topo do triângulo. Os autores comentam que a manutenção dos grandes turbilhões formados entre degraus não acontece em regime permanente e uniforme, havendo ejeções da água contida nas cavidades para o escoamento principal.

Chanson (2002) propõe a subdivisão do escoamento deslizante em três tipos, de acordo com o padrão de escoamento observado em diferentes declividades de vertedores em degraus. Esse autor considerou a estabilidade do vórtice abaixo do pseudo-fundo e sugeriu os seguintes regimes: (a) escoamento com recirculação instável com interferência esteira-degrau (SK1); (b) Escoamento com recirculação instável com interferência esteira-esteira (SK2) e (c) escoamento com recirculação estável (SK3). O SK3 é aquele ilustrado na Figura 2.6c. O caso (a) é caracterizado por uma superfície livre com ondulações e ocorre em canais não muito inclinados, ou seja, em canais com pisos extensos e, portanto, com cavidades longas abaixo do pseudo-fundo. De acordo com Chanson (2002) são formadas esteiras instáveis que atuam isoladamente em cada degrau. Observando um degrau, a esteira tem início no vértice externo e termina sobre o piso do degrau. O caso (b) é diferenciado do caso (a) pela posição final da esteira. Para degraus que formam canais mais inclinados do que aqueles do caso (a), o referido autor comenta que a extremidade de jusante da esteira formada em um degrau interfere com a próxima esteira. Sobre a superfície livre, comenta-se também que as ondulações são reduzidas em relação ao tipo (a). O último sub-regime corresponde à descrição inicial dada para o escoamento deslizante sobre turbilhões.

Ohtsu *et al.* (2004) apresentaram resultados experimentais obtidos em vertedores em degraus com ângulos de inclinação da calha entre $5,7^\circ$ e 55° . Para ângulos entre 19° e 55° esses autores observaram que o perfil da superfície livre, na região de escoamento uniforme, é independente da relação entre a altura do degrau e a profundidade crítica (s/h_c , em que s =altura do degrau), sendo a declividade da superfície livre praticamente igual à declividade do pseudo-fundo. A esse sub-regime os referidos autores deram o nome Perfil Tipo A. Para ângulos entre $5,7^\circ$ e 19° , a superfície livre do escoamento deslizante não é sempre paralela ao pseudo-fundo e o Perfil Tipo A só é formado para pequenos valores da relação s/h_c . Para valores grandes desse adimensional, os autores comentam que o perfil da superfície livre passa a ter profundidades variadas, dependentes da posição ao longo de um degrau. O escoamento deslizante se torna, em parte, paralelo ao piso, sendo esse sub-regime denominado Perfil Tipo B.

2.4 Escoamento em quedas sucessivas

Este item é dedicado à apresentação de resultados de estudos relacionados ao escoamento em quedas sucessivas. Os tópicos explorados foram divididos da seguinte forma: (1) Ocorrência do escoamento em quedas sucessivas e os seus sub-regimes; (2) Dissipação de energia; (3) Aeração.

2.4.1 Ocorrência do escoamento em quedas sucessivas e os seus sub-regimes

O uso de análise dimensional aplicada ao problema de determinação da ocorrência de um dos três regimes de escoamento pode conduzir a diferentes resultados. Para canais em degraus usuais, uma abordagem pode ser feita incluindo na análise as seguintes variáveis: s = altura dos degraus, l = comprimento dos pisos, V = velocidade média característica, B = largura do canal (retangular), ρ = massa específica, μ = viscosidade dinâmica, L_c = comprimento característico e g = aceleração da gravidade. Sendo assim, define-se a seguinte função:

$$\Phi(s, l, B, V, \rho, \mu, L_c, g) = 0 \quad (2.1)$$

As escolhas feitas para a definição da função anterior são praticamente imediatas porque incluem as dimensões dos degraus e as variáveis que definem os números de Reynolds e Froude. Entretanto, a função 2.1 pode ser redefinida em função de detalhes específicos, como, por exemplo, com a possibilidade de adoção de canais em degraus com muros laterais convergentes ou divergentes, às vezes utilizados em estruturas de descarga lateral em grandes canais como o rio Tietê. O uso do teorema de Vaschy-Buckingham ou uma inspeção simples das possíveis combinações entre as variáveis da equação 2.1 conduz à definição de uma nova função, Φ_1 , em termos de cinco adimensionais, cuja forma é:

$$\Phi_1\left(\frac{s}{L_c}, \frac{l}{L_c}, \frac{B}{L_c}, Re, Fr\right) = 0 \quad (2.2)$$

em que: Re = número de Reynolds e Fr = número de Froude.

Estudos voltados ao estabelecimento de critérios para a previsão dos diferentes tipos de escoamento normalmente utilizam relações entre s/h_c e s/l ou adimensionais similares (h_c = profundidade crítica). Essery e Horner (1978) apresentaram resultados experimentais válidos para $0,2 \leq s/l \leq 0,842$ que permitem identificar as regiões de ocorrência dos regimes quedas sucessivas e deslizante sobre turbilhões. A proposta desses autores relaciona s/l com h_c/l para canais em degraus com pisos horizontais ou em aclave. Desta forma, percebe-se que devido aos pisos inclinados, seria necessário incluir mais uma variável na função definida pela

equação 2.2, ou seja, o ângulo formado entre o piso e o plano horizontal. Para uma mesma geometria é esperado que o aumento da vazão específica (ou da altura crítica) faça com que o escoamento passe do regime quedas sucessivas para o regime deslizante sobre turbilhões. As curvas estabelecidas pela relação $s/l(h_c/l)$ propostas por esses autores dividem o plano em duas regiões, uma para cada regime de escoamento, e corroboram o esse comportamento intuitivo sobre a mudança de regime.

Além do trabalho mencionado no parágrafo anterior, há uma série de estudos que estabeleceram critérios para identificar a ocorrência dos tipos de escoamentos. Rajaratnam (1990, p.550) sugere que o escoamento deslizante sobre turbilhões deve ocorrer se $h_c/s \geq 0,8$ para o intervalo $0,4 \leq s/l \leq 0,9$. O mesmo autor comenta que observações de Sorensen (1985) para $s/l = 1,28$ estão de acordo com este critério. Chanson (1994a) analisou dados de diversos pesquisadores e concluiu que existe a seguinte relação linear que divide, no plano $(s/l)-(h_c/s)$, regiões com escoamento deslizante e em quedas sucessivas:

$$\frac{h_c}{s} = 1,057 - 0,465 \frac{s}{l} \quad (2.3)$$

Chamani e Rajaratnam (1999b, p.971) selecionaram um volume de controle que inclui a parte do escoamento situada entre a crista do vertedor e o primeiro degrau. Assumindo que o escoamento é ideal, os referidos autores empregaram a equação de conservação de energia e a equação de quantidade de movimento associadas a equações empíricas. Como resultado, eles obtiveram a seguinte formulação para prever o limite de ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{0,89 \left[\left(\frac{h_c}{s} \right)^{-1} - \left(\frac{h_c}{s} \right)^{-0,34} + \frac{3}{2} \right] - 1} \quad (2.4)$$

Os mesmos autores sugeriram o uso de uma formulação empírica para prever a ocorrência do escoamento em quedas sucessivas. Tal equação, escrita a seguir, quando comparada com a equação 2.4 sugere a existência do escoamento de transição entre os regimes quedas sucessivas e deslizante sobre turbilhões, como comentam os autores.

$$\frac{s}{l} = 0,405 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{-0,62} \quad (2.5)$$

Em um estudo posterior ao que gerou a equação 2.3, Chanson (2001) analisou dados experimentais e propôs a equação 2.6 para prever o limite entre o escoamento quedas sucessivas e o escoamento de transição.

$$\frac{h_c}{s} = 0,89 - 0,4 \frac{s}{l} \quad (2.6)$$

Ohtsu *et al.* (2001, p.524) verificaram que o adimensional h_c/s é independente do número de Reynolds e da razão de aspecto B/h_c se $B/h_c \geq 5$ e $Re = q/v \geq 2,0 \cdot 10^4$. Considerando tais restrições e para $0,1 \leq s/l \leq 1,43$, os referidos autores propuseram a seguinte equação para avaliar o limite entre o escoamento em quedas sucessivas e o escoamento de transição:

$$\frac{s}{h_c} = 0,57 \left(\frac{s}{l} \right)^3 + 1,3 \quad (2.7)$$

Chinnarasri e Wongwises (2004) estudaram o escoamento em canais em degraus com pisos em aclave e com pisos horizontais. Para canais com ângulos de inclinação entre o pseudo fundo e a horizontal (α) iguais a 30°, 45 e 60°, esses autores estudaram pisos com ângulos em relação à horizontal (θ) iguais a 10°, 20° e 30°. Como proposta de previsão da ocorrência do escoamento em quedas sucessivas para tais configurações e para $0,1 \leq s/l \leq 1,73$, os referidos autores obtiveram a seguinte equação empírica:

$$\frac{h_c}{s} = 0,927 - 0,005\theta - 0,388 \frac{s}{l} \quad (2.8)$$

Arantes (2007, p.107-108) simulou numericamente o escoamento sobre vertedores em degraus com o uso das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds associadas a um dos modelos de turbulência de tensões de Reynolds. Entre as suas análises, o referido autor estudou a transição entre os regimes de escoamento, considerando escoamento bidimensional e uma estrutura com três degraus. Para h/l igual a 0,2 foram simulados $h_c/s = 0,5$, $h_c/s = 0,75$, $h_c/s = 1,0$ e $h_c/s = 2,0$. Para s/l igual a 0,5 foram simulados $h_c/s = 0,5$, $h_c/s = 0,75$ e $h_c/s = 1,0$. Como resultados de suas simulações computacionais, o referido autor apresentou diferentes perfis da superfície livre, sendo estes coerentes com resultados de estudos experimentais representados pelas equações citadas anteriormente.

Considerando os sub-regimes do escoamento em quedas sucessivas, Chanson (1994a, p.72) propôs a inequação 2.9 para avaliar a ocorrência desse tipo de escoamento com a

formação de ressaltos hidráulicos sobre os pisos. Para tanto, o referido autor utilizou formulações empíricas propostas por Rand (1955) e Hager *et al.* (1990, p.602).

$$\frac{h_c}{s} < 0,0916 \left(\frac{s}{1} \right)^{-1,276} \quad (2.9)$$

2.4.2 Dissipação de energia

O escoamento em canais em degraus é altamente turbulento e, por esta razão, envolve considerável dissipação de energia. Adicionalmente, é possível identificar mecanismos específicos, como a dispersão do jato no ar, o impacto do jato com o piso do degrau, a formação de uma região de recirculação abaixo o jato e, em alguns casos, a formação de ressaltos hidráulicos sobre os degraus.

Chamani e Rajaratnam (1994) assumiram a existência de um parâmetro adimensional que representa a proporção de energia dissipada por degrau (ϕ'). Supondo-se que na crista do vertedor ocorre a profundidade crítica, a energia dissipada após o primeiro degrau é igual a $(\phi')(s + 1,5h_c)$ de modo que a energia residual vale $(1 - \phi')(s + 1,5h_c)$. Na base do segundo degrau, seguindo a mesma idéia, a energia residual é $(1 - \phi')[(1 - \phi')(s + 1,5h_c) + s]$. Verifica-se facilmente que após N degraus a energia residual é calculada por meio da seguinte equação:

$$H_{res} = (1 - \phi')^N (s + 1,5h_c) + s \sum_{i=1}^{N-1} (1 - \phi')^i \quad (2.10)$$

A equação anterior pode ser reescrita em termos da energia dissipada ΔH , adimensionalizada em relação à energia $H_{m\acute{a}x} = 1,5h_c + H_{dam}$. Os referidos autores utilizaram a aproximação $H_{dam} = Ns$, ou seja, a altura do vertedor, desde a crista até a bacia de dissipação, é igual ao número de degraus multiplicado pela altura dos degraus, condição verdadeira para canais com degraus uniformes e sem a crista padrão. Como resultado, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\Delta H}{H_{m\acute{a}x}} = 1 - \frac{(1 - \phi')^N \left[1 + 1,5 \frac{h_c}{s} \right] + \sum_{i=1}^{N-1} (1 - \phi')^i}{N + 1,5 \frac{h_c}{s}} \quad (2.11)$$

Observa-se que a equação 2.11 inclui o adimensional desconhecido ϕ' . Com base nos dados de Horner (1969), Chamani e Rajaratnam (1994, p.258) propuseram as seguintes equações para avaliar ϕ' :

$$\begin{cases} \phi' = a - b \log\left(\frac{h_c}{s}\right) \\ a = 0,30 - 0,35\left(\frac{s}{1}\right) \\ b = 0,54 + 0,27\left(\frac{s}{1}\right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Em suas conclusões, Chamani e Rajaratnam (1994) comentam que a energia dissipada parece ocorrer devido à mistura ocasionada pelos jatos e pela formação de ressaltos parciais sobre os degraus. Os autores comentam também que os desenvolvimentos foram propostos para $h_c/s < 0,8$, condição que caracteriza a ocorrência do escoamento em quedas sucessivas.

Uma forma relativamente simples de escrever uma expressão para a energia dissipada pelos degraus pode ser desenvolvida assumindo-se que na extremidade inicial do canal a energia específica possui um valor crítico e que o escoamento sobre os degraus apresenta distribuição de pressões hidrostática. Sendo $z = 0$ a posição no início do canal (onde a energia é crítica) e $-z_1$ a cota do piso de um degrau em uma posição z genérica, pode-se escrever (ver Figura 2.7):

$$\Delta H = 1,5h_c + z - \frac{q^2}{2gh^2} - h \quad (2.13)$$

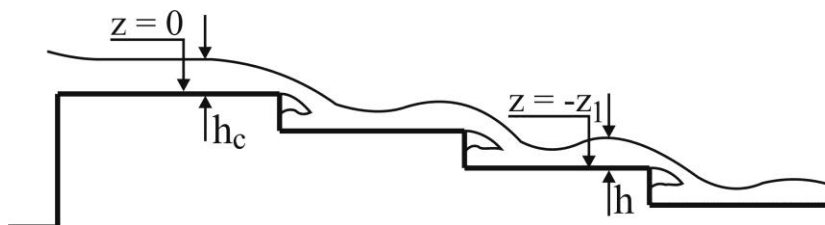


Figura 2.7 – Desenho esquemático de um escoamento em quedas sucessivas

A vazão específica “ q ” está relacionada com a profundidade crítica por $h_c^3 = q^2/g$. Portanto, a equação anterior pode ser reescrita com a seguinte forma:

$$\Delta H = 1,5h_c + z - \frac{h_c^3}{2h^2} - h \quad (2.14)$$

A equação anterior pode ser adimensionalizada, resultando em:

$$\frac{\Delta H}{H_{\text{máx}}} = 1 - \frac{\frac{h}{h_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c} \right)^{-2}}{\frac{z}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (2.15)$$

Observa-se que a equação anterior requer o conhecimento da profundidade do escoamento (h). Chanson (2002, p.102-103) propôs o uso da equação 2.16, obtida por Rand (1955), assumindo que $h = h_1$ (conjugado supercrítico do ressalto). Esta equação é válida para $0,045 < h_c/s < 1$ e corresponde ao escoamento sobre um degrau com piso horizontal e com a lâmina vertente aerada.

$$\frac{h_1}{s} = 0,54 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{1,275} \quad (2.16)$$

Como resultado da combinação entre as equações 2.15 e 2.16, obtém-se a equação 2.17, proposta por Chanson (2002). Para canais controlados por comportas em sua extremidade de montante, um desenvolvimento semelhante conduz à equação 2.18, proposta pelo mesmo autor.

$$\frac{\Delta H}{H_{\text{máx}}} = 1 - \frac{0,54 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{0,275} + 1,714 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{-0,55}}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (2.17)$$

$$\frac{\Delta H}{H_{\text{máx}}} = 1 - \frac{0,54 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{0,275} + 1,714 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{-0,55}}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{H_o}{h_c}} \quad (2.18)$$

em que: H_o = carga sobre a soleira, a montante da comporta.

Com o objetivo de exprimir a energia dissipada em termos da altura de um degrau, Simões (2008, p.34), com o uso de procedimentos algébricos semelhantes aos anteriores e a equação 2.16, propôs a equação 2.19, cuja forma é semelhante à de Stephenson (1979), válida para um degrau, ou seja, $N = 1$.

$$\frac{\Delta H}{s} = N + \frac{3}{2} \frac{h_c}{s} - 0,54 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{1,275} - 1,714 \left(\frac{h_c}{s} \right)^{0,45} \quad (2.19)$$

As equações precedentes são válidas para o escoamento em quedas sucessivas que inclui a formação de ressaltos sobre os pisos dos degraus. O sub-regime NA2 ainda requer

estudos adicionais para o estabelecimento adequado de relações entre as variáveis de interesse prático. É possível que a única recomendação referente a este sub-tipo de escoamento tenha sido fornecida por Peyras *et al.* (1992, p.711). Com base em estudos realizados em vertedores formados por gabiões, esses autores sugeriram o uso das equações destinadas ao sub-regime NA1 em avaliações preliminares.

Fundamentado em estudos experimentais, Chanson (2002) obteve as equações 2.20 e 2.21 para o cálculo da energia residual, $H_{res}=H_{max}-\Delta H$, a jusante de canais em degraus submetidos ao sub-regime NA3:

$$\frac{H_{res}}{h_c} = 6,0 \left(\frac{H_{dam}}{h_c} \right)^{-0,30} \quad \text{para } 2 < H_{dam}/h_c < 20 \quad (2.20)$$

$$\frac{H_{res}}{h_c} = 3,34 \left(\frac{H_{dam}}{h_c} \right)^{-0,027} \quad \text{para } 30 < H_{dam}/h_c < 75 \quad (2.21)$$

Estas equações foram desenvolvidas com base em dados experimentais de Horner (1969), correspondentes a um canal com $\alpha = 22,8^\circ$ e $s = 0,45$ m, Chanson (2002, p.112), com dados medidos em uma estrutura com $\alpha = 3,4^\circ$ e $s = 0,143$ m e Pinheiro e Fael (2000), para modelos com $\alpha = 18^\circ$ e $\alpha = 14^\circ$ e $s = 0,05$ m. Sendo $H_{res}/h_c = h/h_c + 0,5(h/h_c)^{-2}$, se h/h_c diminui com $H_{dam}/h_c = z/h_c$ a partir de um valor crítico, ou seja, $h/h_c = 1$, então H_{res}/h_c cresce com H_{dam}/h_c . Este comportamento não é observado nas equações anteriores.

2.4.3 Aeração do escoamento e fenômenos relacionados

A ocorrência de escoamentos bifásicos em canais em degraus que operam submetidos ao regime “quedas sucessivas” é de considerável relevância devido a diferentes razões. A entrada de ar no líquido contribui com a reoxigenação da água e evita a deterioração da estrutura quando há cavitação. Em escoamentos em quedas sucessivas, as velocidades são inferiores às observadas em estruturas lisas, condição que aumenta o tempo de permanência das bolhas de ar no interior do líquido e, conseqüentemente, a transferência de gases através da interface ar-água. Com respeito à cavitação, sabe-se que a mistura compressível ar-água minimiza os seus efeitos devido à absorção elástica da energia liberada no impacto entre massas de água nos colapsos das bolhas.

Observando o escoamento em um canal retangular com um degrau (ou vertedor de parede espessa) nota-se que a lâmina vertente adere à face vertical de jusante do vertedor se a porção de fluido abaixo do jato não estiver em contato com a pressão atmosférica. Esta

situação normalmente é evitada em função do aparecimento de pressões negativas e possíveis vibrações impostas à estrutura devido a oscilações na lâmina vertente. Como solução, é usual implantar aeradores de fundo que conectam o ambiente externo (com pressão atmosférica) com a parte inferior do jato. O mesmo procedimento é usual em vertedores de parede delgada, como ilustrado na Figura 2.8.



Figura 2.8 – Exemplo de uso de um conduto aerador em um vertedor de parede delgada. Vertedor situado no canal de restituição do Laboratório de Hidráulica Ambiental do Departamento de Engenharia Hidráulica e Saneamento – EESC – USP.

O escoamento sobre um degrau ou sobre uma sucessão deles, quando submetido ao regime quedas sucessivas com formação de ressalto hidráulico, tem essas ondas estacionárias como fontes adicionais para a admissão de ar. Para os demais sub-regimes, desde que o jato esteja bem ventilado (como na Figura 2.8), observa-se a entrada de ar ao longo do jato (sobre as faces superior e inferior) e devido ao mergulho do mesmo na porção de líquido que permanece sobre o degrau (*plunging flow*), sobretudo na parte anterior, onde se situa a zona de recirculação. Além desses mecanismos, em função das dimensões da estrutura e condições hidráulicas, é possível que a entrada de ar aconteça através da superfície livre do escoamento ao longo do degrau e devido ao impacto do jato com o piso. De acordo com Chanson (2002, p.107), a parte inferior do jato fica submetida a uma considerável troca interfacial. Sobre a parte superior, o referido autor menciona que a interface ar-água é afetada por turbilhões atuando próximo à superfície livre e por rápidas “redistribuições de pressão” a jusante da borda formada pelos degraus. Chanson (2002) sugeriu que a distribuição da fração de vazios pode ser modelada por meio das seguintes equações:

$$C(y) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y - Y_{50}}{2 \sqrt{\frac{D_t}{V} x}} \right) \right] \text{ (parte inferior do jato)} \quad (2.22)$$

$$C(y) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{Y_{50} - y}{2 \sqrt{\frac{D_t}{V} x} \sqrt{1 + k \frac{Y_{50} - y}{x}}} \right) \right] \text{ (parte superior do jato)} \quad (2.23)$$

em que $C(y)$ = fração de vazios, y = coordenada vertical, Y_{50} é o lugar onde $C = 0,5$, D_t = difusividade média para bolhas de ar, V = velocidade do jato, x = coordenada horizontal, k = um parâmetro adimensional que leva em conta a redistribuição de pressões.

Toombes (2002) estudou o escoamento em canais em degraus com baixas declividades. Entre os seus resultados o referido autor apresenta distribuições de vazios para as diferentes regiões do escoamento sobre um degrau, comparações entre a equação 2.22 e frações de vazios médias e características de bolhas de ar presentes no escoamento. Uma interessante contribuição encontrada no trabalho desse autor é o conjunto de medidas de concentrações de oxigênio dissolvido no líquido em função das diferentes características hidráulicas. Para um único degrau e canais com múltiplos degraus, Toombes (2002, p.232) apresenta distribuições longitudinais da eficiência para o oxigênio dissolvido.

2.5 Escoamento de transição

O escoamento de transição ocorre entre o escoamento em quedas sucessivas e o deslizante sobre turbilhões. De acordo com Chanson (2002, p.119), autores como Elviro e Mateos (1995) e Chanson (1996) reportaram condições de transição entre os dois regimes principais. É provável que Ohtsu e Yasuda (1997) tenham sido os primeiros a apresentar o conceito de escoamento de transição (Chanson, 2002; Ohtsu, Yasuda e Takahashi, 2004). De acordo com descrições apresentadas pelos referidos autores, o escoamento de transição apresenta características específicas, como a presença de cavidades de ar junto à parte superior de alguns espelhos dos degraus, uma superfície livre ondulada, turbilhões entre degraus e formação de respingos de água na região de impacto do jato com o piso.

O número de publicações com dados acerca desse regime de escoamento não é comparável à quantidade correspondente aos demais, entretanto, trabalhos como os de Chanson (2002), Chanson e Toombes (2004), Sánchez-Juny e Dolz (2005) e Carosi e Chanson (2006) trazem informações relevantes sobre o assunto. Os estudos desses

pesquisadores incluem dados sobre a configuração do escoamento de transição, quantificações de frações de vazios, pressões e posição de início da aeração.

2.6 Escoamento deslizante sobre turbilhões

As obras hidráulicas que incluem canais com o fundo em degraus são projetadas, em grande parte, tendo em vista o escoamento deslizante sobre turbilhões. Os exemplos mais frequentes são os canais de grande declividade que integram as estruturas extravasoras de barragens. Por ser o regime predominante em grandes obras, o escoamento deslizante tem despertado o interesse de diversos pesquisadores, sendo possível relacionar um considerável número de publicações vinculadas ao tema. Este item é voltado à apresentação de resultados sobre o escoamento em questão e foi dividido da seguinte forma: (1) Ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões e dos seus sub-regimes; (2) Dissipação de energia; (3) Aeração.

2.6.1 Ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões e dos seus sub-regimes

Ohtsu e Yasuda (1999) e Ohtsu *et al.* (2001, p.524), no mesmo estudo que produziu a equação 2.7, apresentaram a equação a seguir, que separa as regiões de ocorrência dos escoamentos de transição e deslizante sobre turbilhões no plano (s/l , s/h_c). Tal equação é válida para as mesmas condições ligadas à equação 2.7.

$$\frac{s}{h_c} = 1,16 \left(\frac{s}{l} \right)^{0,165} \quad (2.24)$$

Chanson (2001), com base em dados experimentais correspondentes a degraus com pisos horizontais e s/l entre 0,05 e 1,7, propôs a equação 2.25 para identificar a ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões. Esta equação leva em consideração o regime de transição, assim como a equação anterior.

$$\frac{h_c}{s} = 1,2 - 0,325 \frac{s}{l} \quad (2.25)$$

Boes e Hager (2003a) concluíram que o início do escoamento deslizante sobre turbilhões depende da profundidade crítica, da altura dos degraus e ângulo de inclinação do canal. Estes autores, com base em estudos experimentais correspondentes a $25^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$ e canais com degraus cujos pisos eram horizontais, desenvolveram a seguinte equação para determinar o início do escoamento deslizante sobre turbilhões:

$$\frac{h_c}{s} = 0,91 - 0,14 \frac{s}{l} \quad (2.26)$$

Considerando canais em degraus com pisos horizontais e inclinados, Chinnarasri e Wongwises (2004, p.875) obtiveram a equação 2.27 para prever a ocorrência do escoamento deslizante sobre turbilhões após o escoamento de transição. A configuração experimental atrelada à referida equação impõe as seguintes condições: $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$, $10^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ (ângulo do piso em relação à horizontal) e $0,1 \leq s/l \leq 1,73$.

$$\frac{h_c}{s} = (0,844 + 0,003\theta) \left(\frac{s}{l} \right)^{-0,153 + 0,004\theta} \quad (2.27)$$

Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2004) estudaram experimentalmente o escoamento deslizante sobre turbilhões em canais com $5,7^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$. Com o intuito de separar as regiões correspondentes aos sub-regimes Tipo A e B (ver item 2.3), os referidos autores apresentaram a seguinte equação, válida para os experimentos realizados em canais com $5,7^\circ \leq \alpha \leq 19^\circ$:

$$\frac{s}{h_c} = 13 \left(\frac{s}{l} \right)^2 - 2,73 \left(\frac{s}{l} \right) + 0,373 \quad (2.28)$$

A seguir é apresentada uma comparação realizada no contexto do presente estudo e já publicada em Simões et al. (2011), contendo parte das equações anteriores para delimitar as regiões de ocorrência dos diferentes tipos de escoamento, incluindo a subdivisão para o regime deslizante sobre turbilhões. Nota-se, na figura 2.9a, que para determinados pontos (s/l , s/h_c) ou regiões no plano s/l - s/h_c o tipo de escoamento é bem definido de acordo com todas as equações. Apesar disto, observa-se que uma porção considerável do gráfico é composta por um emaranhado de curvas para as quais há divergências sobre o regime correspondente, embora haja um comportamento subjacente médio que ainda assim desponte, como ilustrado na Figura 2.9b. Nesta figura também são apresentadas retas que delimitam, de forma aproximada, as regiões em destaque, e que, no contexto das incertezas que cada equação em particular contém, são sugeridas como ferramentas para descrever as diferentes regiões.

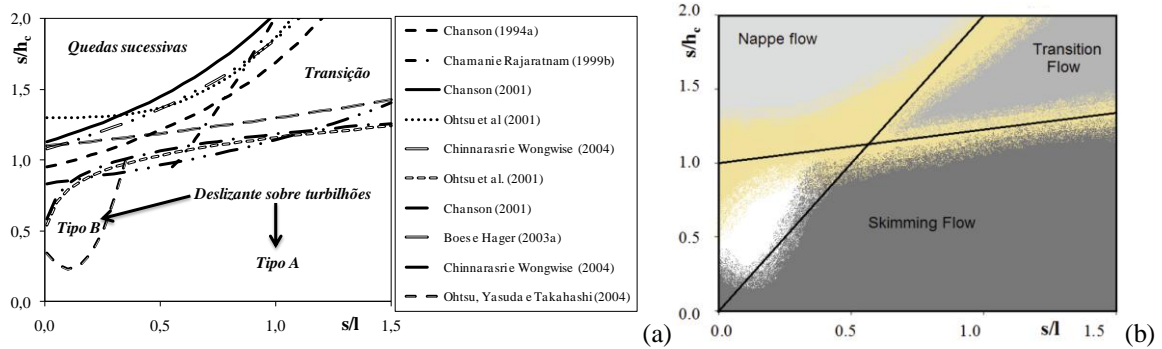


Figura 2.9 – Classificação dos tipos de escoamento: (a) Comparação entre as equações e (b) uma apresentação qualitativa elaborada com base nos extremos encontrados em (a), cujas retas são: $s/h_c = 2s/l$; $s/h_c = 0,233s/l + 1$ (Simões *et al.*, 2011).

2.6.2 Dissipação de energia

A dissipação de energia que ocorre em escoamentos no interior de canais e vertedores em degraus é considerada como um importante fenômeno proporcionado por tais estruturas. Por este motivo, diversos pesquisadores se empenharam em estabelecer equações e gráficos destinados a prever o comportamento da energia dissipada ou da energia residual na base de vertedores e canais em degraus. Ao longo dos anos de pesquisas realizadas em diversas instituições, foram adotadas algumas iniciativas para representar o fenômeno, como, por exemplo, o uso das equações de resistência de Darcy-Weisbach e de Manning, o uso de equações algébricas ajustadas aos dados experimentais e a apresentação de pontos experimentais por meio de gráficos.

Este item contém uma apresentação dos diferentes pontos de vista adotados para formular o problema de dissipação de energia. São abordados aspectos como a não uniformidade do perfil da superfície livre ao longo do escoamento monofásico, valores para o fator de resistência de Darcy-Weisbach, a influência das bolhas de ar na resistência oferecida ao escoamento, comparações entre a energia dissipada por um canal liso em relação a um canal em degraus, entre outros tópicos.

Fator de Resistência

A equação de Darcy-Weisbach tem sido amplamente adotada em estudos relacionados aos vertedores em degraus. A sua dedução pode ser desenvolvida com argumentos físicos e o uso de desenvolvimentos teóricos. Em um dos casos utiliza-se a análise dimensional associada ao conhecimento sobre energia. Já a segunda dedução envolve o uso da segunda lei de Newton e uma informação experimental sobre o comportamento da tensão de cisalhamento média ao longo do perímetro molhado. Em ambos os casos o resultado é o mesmo. A análise dimensional é interessante porque revela claramente que o fator de resistência é uma função

de números adimensionais. O exemplo mais difundido, certamente devido à sua forte capacidade de previsão, é o escoamento em condutos forçados circulares. Para tal problema, o fator de resistência é uma função de duas variáveis: rugosidade relativa e número de Reynolds. Quando se pretende aplicar o mesmo tipo de análise aos vertedores e canais em degraus o fator de resistência obtido pode ser dependente de mais de uma dezena de números puros, como ilustrado por meio da equação 2.29, desenvolvida no âmbito deste trabalho.

$$f = \Phi_1 \left(\text{Re}, \text{Fr}, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{\varepsilon_p}{L_c}, \frac{\varepsilon_e}{L_c}, \frac{\varepsilon_m}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{l}{L_c}, \frac{L_c}{B}, C \right) \quad (2.29)$$

Nesta definição f é o fator de resistência de uma equação idêntica à equação de Darcy-Weisbach, razão pela qual este nome é preservado. As demais variáveis são: Re = número de Reynolds, Fr = número de Froude, $\alpha = \text{atg}(s/l)$, $k = s \cos \alpha$, L_c = comprimento característico, ε = rugosidade absoluta equivalente (os subscritos “p”, “e” e “m” correspondem ao piso, espelho e muros, respectivamente), s = altura do degrau, l = comprimento do piso do degrau, B = largura de topo do canal, C = fração de vazios (um campo escalar que, para o caso mais geral é uma função $C = C(x_i, t)$).

Em termos do diâmetro hidráulico ($D_h = 4R_h$, em que R_h = raio hidráulico), a equação de Darcy-Weisbach assume a forma representada através da equação 2.30. Nesta equação I_f é a declividade da linha de energia, definida a partir da energia dissipada em um comprimento Δx .

$$I_f = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (2.30)$$

Rajaratnam (1990) analisou dados de Sorensen (1985), correspondentes a um modelo reduzido com $1V:0,78H$, escala 1:25 e $s = 0,61$ m (Valor correspondente ao protótipo). Entre as suas conclusões ele apresenta um valor igual a 0,18 para o fator de resistência definido de acordo com Fanning (ver, por exemplo, Bird, Stewart e Lightfoot, 2002, p.173):

$$c_f = \frac{f}{4} = \frac{2h_u^3 g \text{sen} \alpha}{q^2} \quad (2.31)$$

Comparando as equações 2.30 e 2.31, conclui-se que o referido autor utilizou a profundidade do escoamento uniforme $h = h_u$ (uma vez que $I_f = \text{sen} \alpha$) e a condição de canal largo, para a

qual ocorre $R_h = h$ (q = vazão por unidade de largura). O fator de resistência indicado por ele equivale, portanto, a $f = 0,72$.

Stephenson (1991, p.29) assumiu que o escoamento em vertedores em degraus pode alcançar o regime uniforme e sugeriu que o fator de resistência de Darcy-Weisbach pode ser calculado como uma função independente do número de Reynolds. Para tanto, o referido autor indica o uso da seguinte equação:

$$f = \left[1,14 + 2 \log \left(\frac{4h_u}{k} \right) \right]^{-2} \quad (2.32)$$

Observa-se que a equação anterior possui certa semelhança com aquela que modela o escoamento turbulento em tubos rugosos (para os quais a rugosidade absoluta equivalente ultrapassa a subcamada laminar). Neste caso, a “altura de rugosidade” k foi utilizada no lugar da rugosidade absoluta equivalente.

Tozzi (1992) estudou o escoamento em modelos físicos de vertedores em degraus com 1V:0,75H, 1V:0,2H e 1V:6,69H. Em seus estudos, o referido autor utilizou valores de k entre 5 e 60 mm e vazões específicas entre 86,1 e 201,4 L/(sm). Para vertedores com 1V:0,75H, inclinação muito utilizada em estruturas de barragens, o autor concluiu que, se $h/k \leq 1,8$ o fator de resistência assume um valor constante igual a 0,163. Para $h/k > 1,8$, Tozzi (1992) obteve uma formulação com a seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,16 + 1,24 \log \left(\frac{h}{k} \right) \quad (2.33)$$

Cabe mencionar que os resultados obtidos por Tozzi (1992) correspondem ao escoamento apenas de água e escoamentos de ar em condutos com diferentes configurações. As demais formas geométricas estudadas pelo autor culminaram nas seguintes equações:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 3,25 + 0,39 \log \left(\frac{h}{k} \right), \text{ válida para } 1 \leq h/k \leq 14 \text{ e } 1V:2H \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 3,68 + 0,28 \log \left(\frac{h}{k} \right), \text{ válida para } 1 \leq h/k \leq 10 \text{ e } 1V:6,69H \quad (2.35)$$

Christodoulou (1993) obteve dados experimentais em um modelo físico com 35,93 cm de altura (desde a crista até a bacia de dissipação) e 1V:0,7H. Os resultados publicados por este autor indicam que o fator de resistência variou entre 0,192 e 0,684.

Povh (2000) realizou experimentos em um modelo físico com $1V:0,75H$, $s = 2,4$ cm, $B = 0,8$ m e para vazões que corresponderem ao intervalo $3,38 \leq h_c/k \leq 11,72$. Como metodologia, o referido autor mediu conjugados subcríticos na bacia de dissipação e calculou os correspondentes conjugados supercríticos, tendo estimado o fator de resistência com base em tais valores. Povh (2000, f.122) comenta que o valor médio para o fator de resistência resultou igual a 0,11, sendo tal resultado próximo daquele sugerido por Matos e Quintela (1995b) para o pré-dimensionamento de vertedores em degraus.

A resistência oferecida ao escoamento apenas de água é alterada quando ocorre a entrada de bolhas de ar transformando-o em uma mistura bifásica do tipo ar-água. Grupos de bolhas de ar podem funcionar como pequenas camadas lubrificantes entre camadas do líquido transportado. Deste modo, as tensões de cisalhamento desenvolvidas na mistura são menores em relação às tensões presentes em um escoamento monofásico. Além disto, se as bolhas penetrarem até as proximidades do contorno sólido, desde que ocorram grandes densidades de bolhas, haverá também um efeito de redução na tensão cisalhante existente ao longo da superfície sólida. Resultados experimentais obtidos em canais lisos e em degraus mostraram que a resistência oferecida ao escoamento é reduzida quando ocorre a entrada de bolhas de ar. Tais estudos utilizaram o fator de resistência como grandeza relevante, sendo o trabalho de Wood (1983) uma importante referência na área. Inicialmente o autor apresenta a relação existente entre a tensão média de cisalhamento (τ_o) sobre o perímetro molhado e o fator de resistência, válida para um canal retangular largo e escoamento monofásico:

$$\tau_o = \rho \frac{f}{8} \left(\frac{q}{h} \right)^2 \quad (2.36)$$

Após a apresentação da equação anterior, Wood (1983, p.457) comenta que os efeitos do número de Reynolds sobre o fator de resistência podem ser negligenciados se houver rugosidades e números de Reynolds elevados. Prosseguindo com a apresentação de sua metodologia, o autor escreve a equação para f a partir da equação de Darcy-Weisbach, com a forma a seguir, válida apenas para o escoamento uniforme. Enfatiza-se que o fator de resistência depende apenas da rugosidade relativa h_u/ϵ .

$$f = \frac{8h_u^3 g s \epsilon \alpha}{q^2} \quad (2.37)$$

Wood (1983) sugere que o fator de resistência do escoamento bifásico (f_{aw}) possa ser obtido a partir de uma equação semelhante à anterior, desde que ele seja função não apenas da

rugosidade relativa, mas também da fração de vazios média. Com essas considerações, a combinação entre as equações apresentadas pelo referido autor permite escrever:

$$f_{aw} = \frac{8gh_{90}^3(1-\bar{C})^3 \text{sen}\alpha}{q^2} \quad (2.38)$$

em que \bar{C} = fração de vazios média (ou concentração média de ar), calculada com a seguinte definição: $h_{90}\bar{C} = \int_0^{y=h_{90}} C dy$; h_{90} é a profundidade correspondente à posição y , perpendicular ao fundo, onde $C = 0,9$. Aqui foi utilizado $h=h_u$ uma vez que $I_f=\text{sen}\alpha$.

Com base nos dados experimentais de Straub e Anderson (1958), Wood (1983) obteve a curva apresentada na Figura 2.10. É interessante notar que o fator de resistência para o escoamento de ar e água é praticamente igual ao fator de resistência para a água pura até valores da fração de vazios média em torno de 0,3, posição a partir da qual é iniciado um considerável decréscimo. Wood (1983) explica que até o valor 30% a concentração de ar junto ao fundo do vertedor é da ordem de 10%.

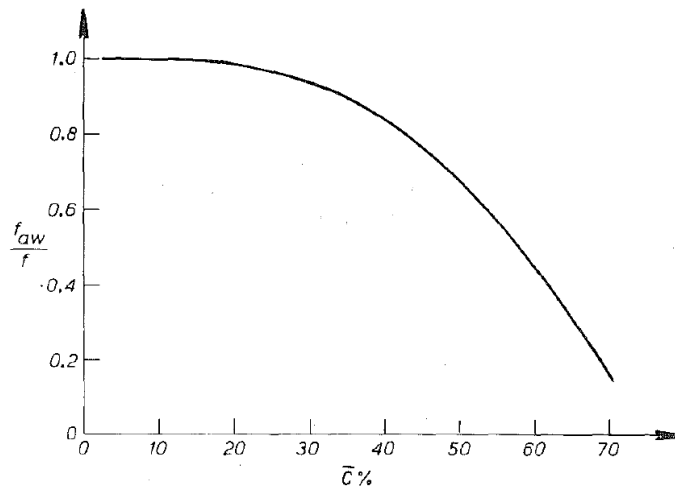


Figura 2.10 – Comportamento da relação f_{aw}/f em função da fração de vazios média
Fonte: Wood (1983, p.458)

Ainda sobre vertedores lisos, Chanson (1994a) comenta que a presença de bolhas de ar no interior da camada limite turbulenta reduz as tensões de cisalhamento. Este autor propôs a equação 2.39 para estimar o efeito de redução da resistência oferecida ao escoamento.

$$\frac{f_{aw}}{f} = 0,5 \left\{ 1 + \text{tgh} \left[0,628 \frac{0,514 - \bar{C}}{\bar{C}(1 - \bar{C})} \right] \right\} \quad (2.39)$$

em que: tgh = tangente hiperbólica.

Abordagens semelhantes a aquela proposta por Wood (1983) e Chanson (1994a) foram aplicadas aos escoamentos em vertedores em degraus. Boes (2000, p.183) e Boes e Hager (2003a, p.676) comentam que o fator de resistência é, em muitos estudos, superestimado para a região de escoamento bifásico. Se as medidas forem realizadas com instrumentos que fornecem profundidades próximas ao valor $h = h_{90}$ e se estes resultados forem utilizados para calcular o fator de resistência negligenciando a presença do ar na água, obtém-se valores de f , denotados por f_m , cujos valores são superiores aos obtidos com a equação 2.38. Como resultados de seus estudos, Boes (2000) apresentou a seguinte equação:

$$\frac{f_{aw}}{f_m} = 0,5 \left\{ 1 + \operatorname{tgh} \left[\frac{0,25 - \bar{C}}{\bar{C}(1 - \bar{C})} \right] \right\} \quad (2.40)$$

Cabe ressaltar que as equações 2.39 e 2.40 foram normalizadas com valores do fator de resistência diferentes, já que f_m é calculado com a profundidade da mistura, f_{aw} calculado com a profundidade equivalente apenas de água, ou seja, $h_{90}(1 - \bar{C})$ e f é calculado com a profundidade do escoamento monofásico. Desta forma, ocorrerá sempre $f_{aw}/f_m \leq 1$. Os dados experimentais de Boes (2000), também apresentados por Boes e Hager (2003a), mostram excelente concordância com a equação 2.40, sendo independentes da inclinação do canal.

Considerando dados de diferentes pesquisadores obtidos para escoamentos em canais em degraus, Chanson (2002, p.168) propôs a seguinte equação para modelar o comportamento da relação f_{aw}/f em função da concentração média de ar:

$$\frac{f_{aw}}{f} = 0,5 \left\{ 1 + \operatorname{tgh} \left[2,5 \frac{0,5 - \bar{C}}{\bar{C}(1 - \bar{C})} \right] \right\} \quad (2.41)$$

Chanson (2002, p.171) recomenda que o fator de resistência do escoamento não aerado seja estimado por meio da equação 2.42. Com o uso desta equação, o valor de f passa a ser igual ao de f_d na equação 2.41.

$$f_d = \frac{2}{K\sqrt{\pi}} \quad (2.42)$$

A dedução da equação 2.42 envolve o uso de algumas hipóteses e considerações específicas encontradas no trabalho de Chanson (2002, p.334-336). Para $\alpha < 20^\circ$ o autor considera que a resistência oferecida ao escoamento inclui arrasto de forma ocasionado pela recirculação que ocorre na cavidade formada pelos degraus somada ao “atrito” superficial

existente na porção final de cada degrau (sub-regime SK1). Para inclinações um pouco maiores, entre 12 e 25°, o autor comenta que as camadas de mistura de degraus adjacentes podem interagir e o atrito superficial passa a ter o seu efeito reduzido (sub-regime SK2). Para ângulos superiores aos 20°, Chanson (2002) afirma que não há resistência superficial entre o escoamento principal e as faces dos degraus (sub-regime SK3). Nestes casos o arrasto de forma devido à recirculação passa a ser o principal responsável pela dissipação de energia, como explica o autor. Para deduzir a equação anterior, assumiu-se que a camada de mistura é basicamente uma camada com escoamento cisalhante livre. A representação matemática do problema incluiu o uso do modelo de comprimento de mistura e a hipótese de viscosidade turbulenta constante através da camada cisalhante. O resultado é a equação 2.42, que contém a taxa de expansão adimensional da camada cisalhante K^{-1} . Com K entre 4,5 e 6, Chanson (2002) sugere um valor para o fator de resistência f_d igual a 0,20. No mesmo livro o referido autor indica $K = 12$ para escoamentos monofásicos, o que resulta em $f = 0,094$.

Boes e Hager (2003a) estudaram o comportamento do fator de resistência do escoamento bifásico uniforme em canais em degraus. Como equação básica, os referidos autores empregaram a equação de Darcy-Weisbach escrita para canais retangulares com a seguinte forma:

$$f_{aw} = \frac{8gBh^3 \text{sen}\alpha}{q^2(B+2h)} \quad (2.43)$$

em que h = profundidade equivalente apenas de água (escoamento uniforme, já que $I_f = \text{sen}\alpha$).

Entre as suas contribuições, Boes e Hager (2003a) apresentaram uma equação para calcular o fator de resistência correspondente aos efeitos oriundos da presença dos degraus (f_b). A equação proposta por estes autores é apresentada a seguir:

$$\frac{1}{\sqrt{f_b}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 - 0,42\text{sen}(2\alpha)}} \left[1,0 - 0,25 \log \left(\frac{k}{D_h} \right) \right] \quad (2.44)$$

Nesta equação D_h = diâmetro hidráulico calculado com a profundidade equivalente h . A sua validade está vinculada aos intervalos: $19^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$ e $0,1 \leq k/D_h \leq 1,0$.

Sanagiotto (2003) realizou experimentos em canais lisos e em degraus com $1V:0,75H$. Entre os resultados do seu trabalho, a referida autora apresentou um conjunto de equações que permitem calcular o fator de resistência para um vertedor em degraus com base no fator de

resistência de um vertedor liso. As equações que compõem o seu método encontram-se apresentadas a seguir.

$$\frac{f_L}{f} = 1,8162 \exp(-1,7692x / L_A) \quad (2.45)$$

$$f_L = 2,6976 Fr^{-1,7068} \quad (2.46)$$

$$\frac{h_L}{h_c} = \left(1,647 + 0,53 \frac{x}{h_c} \right)^{-0,7055} \quad (2.47)$$

em que f_L = fator de resistência em um vertedor liso, válido para $2,5 \leq Fr \leq 12$; Fr = número de Froude calculado com uma profundidade h_L em uma posição x na calha lisa. A autora destaca que a equação 2.45 é válida para $x/L_A < 1$ e $h/k \leq 9$; para $1 \leq x/L_A \leq 2$ a equação está restrita a valores de $h/k \leq 3$. Para x/L_A entre 2 e 2,5 a equação deve ser utilizada com cuidado e para $x/L_A > 2,5$ a equação deve ser evitada. A equação 2.47 é válida para $1 \leq x/h_c \leq 17$.

Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2004, p.863) mencionam que, para um canal em degraus, o efeito do campo gravitacional nas características do escoamento deslizante sobre turbilhões é considerável. Desta forma, o escoamento passa a depender do número de Froude, além da rugosidade relativa e do ângulo de inclinação do canal. Com os dados experimentais obtidos, os referidos autores concluíram que o fator de resistência pode ser expresso apenas em função do ângulo α e do número adimensional s/h_c , tendo sido propostas as seguintes equações:

$$f = f_{\text{máx}} - A_1 \left(0,5 - \frac{s}{h_c} \right)^2 \quad (2.48)$$

$$f_{\text{máx}} = -4,2 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha^2 + 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha + 3,2 \cdot 10^{-2} \quad (2.49)$$

$$A_1 = -1,7 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^2 + 6,4 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha - 1,5 \cdot 10^{-1} \quad (2.50)$$

Condições para o uso das equações 2.48 a 2.50: válidas para $5,7^\circ \leq \alpha \leq 19^\circ$ e $0,1 \leq s/h_c \leq 0,5$. Se $0,5 \leq s/h_c$, desde que ocorra escoamento deslizante sobre turbilhões, $f = f_{\text{máx}}$. O ângulo α deve ser utilizado em graus.

$$f_{\text{máx}} = 2,32 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^2 - 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha + 2,31 \cdot 10^{-1} \quad (2.51)$$

$$A_1 = 0,452 \quad (2.52)$$

Condições para o uso das equações 2.48, 2.51 e 2.52: válidas para $19^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$ e $0,1 \leq s/h_c \leq 0,5$. Se $0,5 \leq s/h_c$, desde que ocorra escoamento deslizante sobre turbilhões, $f = f_{\text{máx}}$. O ângulo α deve ser utilizado em graus.

Dai Pra (2004, p.91-92), em um estudo realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, assim como o de Sanagiotto (2003), obteve um conjunto de equações que compõem uma metodologia semelhante à de Sanagiotto para estimar o fator de resistência em estruturas com 45° .

$$\frac{h_L}{h_c} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{h_c} \right)^{-0,344} \quad (2.53)$$

$$f_L = \frac{8gh_L^2 \text{sen} \alpha D_h}{q^2 \cdot 4} \quad (2.54)$$

$$\frac{f_L}{f} = 1,09 \exp \left(-0,834 \frac{x}{L_A} \right) \quad (2.55)$$

Dai Pra (2004) ressalta que: a equação 2.53 é aplicável quando $0 < x/h_c \leq 45$, sendo válida com restrições para x/h_c entre 2.30 e 2.45; para $x/L_A < 0,80$, a equação 2.55 é válida; para $0,80 < x/L_A \leq 1,20$ a equação 2.55 deve ser utilizada com restrições; para $1,20 < x/L_A < 2,5$ a equação 2.55 é válida; para $x/L_A > 2,5$ recomenda-se não utilizar a equação 2.55.

Chanson (2004, p.317) apresentou resultados de estudos realizados na Universidade de Queensland, correspondentes a canais em degraus com $\alpha = 15,9^\circ$ e $\alpha = 21,8^\circ$, $s = 0,05$ m e $s = 0,1$ m. Entre os seus resultados, o autor indica valores para o fator de resistência f_{aw} entre 0,07 e 0,28. Chanson (2004) sugeriu uma relação linear entre f_{aw} e a fração de vazios média com a seguinte forma (com coeficiente de correlação igual a 0,392):

$$f_{aw} = 0,276 - 0,288\bar{C}, \text{ obtida para } 0,28 < \bar{C} < 0,60 \quad (2.56)$$

No mesmo trabalho, Chanson (2004) também obteve uma equação semelhante à equação 2.41, desenvolvida com base na metodologia de Wood (1983) descrita anteriormente. A equação mencionada é:

$$\frac{f_{aw}}{f} = 0,5 \left\{ 1 + \text{tgh} \left[0,71 \frac{0,52 - \bar{C}}{\bar{C}(1 - \bar{C})} \right] \right\} \quad (2.57)$$

Foi destacado anteriormente que há diferentes detalhes geométricos que podem ser adotados em conjunto com vertedores e canais em degraus. Chanson (2006) apresentou

algumas considerações e desenvolvimentos que levaram em conta a geometria de entrada. Após analisar dados de Boes (2000) e André *et al.* (2003), que estudaram o escoamento em canais com entrada pressurizada, Chanson (2006) obteve um valor para o fator de resistência próximo de 0,10. Para vertedores modelos sem a condição de entrada sob pressão, o autor menciona que o valor médio do fator de resistência foi próximo de 0,21 para cristas semelhantes à padrão e 0,15 para a condição de entrada com uma soleira extensa. Cabe destacar que, entre os 179 valores de f analisados pelo referido autor, encontram-se números elevados, como $f = 1,0$, e valores iguais a 0,08 e ainda menores.

Grande parte dos estudos relacionados às características de escoamentos em canais e vertedores em degraus foi realizada com o uso de experimentação em laboratório. Apesar deste fato, existem alguns trabalhos que utilizaram as equações de conservação e modelos de turbulência para obter resultados. Dong e Lee (2006) utilizaram o modelo $k-\varepsilon$ para uma estrutura com 20° e, entre os seus resultados, apresentam valores para o fator de resistência de Fanning ($c_f = f/4$). Os valores calculados por estes autores para c_f situaram-se entre 0,015 e 0,042, aproximadamente. Tais números correspondem a f entre 0,06 e 0,168.

Arantes (2007) estudou o escoamento em vertedores em degraus simulando-os através de soluções das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds associadas a modelos de turbulência. Entre os seus resultados é possível encontrar valores para o fator de resistência e comparações com a metodologia proposta por Tozzi (1992) para $1V:0,75H$. Os valores de f calculados por este autor variaram entre 0,141 e 0,212. Ao comparar os seus resultados com os de Tozzi (1992), o referido autor obteve excelente concordância com a experimentação.

Gonzalez e Chanson (2008) estudaram o escoamento em um canal com baixa declividade ($1V:2,5H$) e com aletas (*vanes*) instaladas sobre os degraus. As sete disposições para as aletas encontram-se ilustradas na Figura 2.11. Os valores para o fator de resistência foram calculados em diferentes posições adimensionais z/b (ver Figura 2.11). De acordo com os autores, a configuração em zigzag ofereceu maior resistência do que as demais. Os valores médios ao longo de z/b foram: $f = 0,16$ (sem aletas), $f = 0,21$ (com 3 e 7 aletas e fila), $f = 0,20$ (7 aletas em fila com alternância entre degraus), $f = 0,22$ (zigzag 3 e 5) e $f = 0,21$ (zigzag 7).

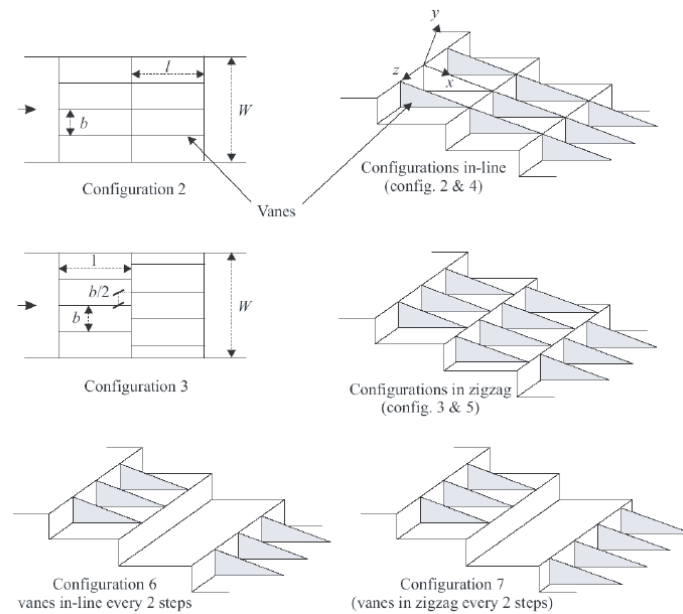


Figura 2.11 – Detalhe da geometria utilizada por Gonzalez e Chanson (2008)
 Fonte: Gonzalez e Chanson (2008, p.67)

Parte das propostas para o cálculo do fator de resistência carrega a hipótese de escoamento uniforme. Simões (2008) propôs formas adimensionais para a equação diferencial do escoamento gradualmente variado e utilizou dados experimentais publicados por onze pesquisadores com o intuito de obter o fator de resistência. Entre os seus desenvolvimentos, verificou-se que o intervalo $0,07 \leq f \leq 0,20$ produz curvas que se aproximam da maioria dos pontos experimentais. Posteriormente, no trabalho de Simões, Schulz e Porto (2010, p.334), o intervalo teve os seus limites estendidos para $0,05 \leq f \leq 0,30$, encerrando uma maior quantidade de pontos. No mesmo trabalho foi proposta uma formulação teórica para o fator de resistência, fundamentada no princípio de conservação de energia. Considerou-se f constante e uma variação linear para o perfil da superfície livre, tendo sido obtida a seguinte equação:

$$f = 8 \sin \alpha \frac{h_c^2}{h_1 h_{\text{mean}}} \frac{1}{\kappa_1 F_1^2} - \frac{8}{\kappa_1} \frac{\Delta h}{L} \quad (2.58)$$

Com o uso da 2ª Lei de Newton, tendo sido adotada como hipótese que a tensão de cisalhamento é uma constante no pseudo-fundo, a equação obtida possui a forma apresentada a seguir. Este modelo é preferível em relação ao anterior porque evita a inconsistência $f < 0$.

$$f = -\frac{4\Delta h}{\kappa_1 L} + \sqrt{\left(\frac{4\Delta h}{\kappa_1 L}\right)^2 + \frac{64}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{\sin \alpha}{F_1^4} \left(\frac{h_c}{h_1}\right)^2 \left(\sin \alpha + \frac{\Delta h}{L}\right)} \quad (2.59)$$

em que h_c = profundidade crítica, $h_{mean} = (h_c + h(x))/2$, Δh = diferença entre a altura crítica e $h(x)$, L = distância entre as profundidades definidas em Δh , F_1 = número de Froude em termos de h_1 e κ_1 e κ_2 são constantes adimensionais introduzidas devido às simplificações adotadas.

Os dados experimentais utilizados por Simões (2008) e Simões, Schulz e Porto (2010) possibilitaram o cálculo das constantes κ_1 e κ_2 para vertedores lisos e em degraus. A Figura 2.12 contém as curvas obtidas pelos autores, correspondentes a $\kappa_1 = 8$ e $\kappa_1 = 1,0$, para vertedores em degraus e $\kappa_1 = 25$ e $\kappa_1 = 4,0$, para vertedores lisos. Com o intuito de propor um modelo simples e prático, a equação 2.60 foi ajustada aos dados, tendo sido obtidas as seguintes constantes de ajuste: $\Omega_1 = 1,66$ e $\Omega_2 = 1,23$ para estruturas em degraus ($4,01 \leq F_1 \leq 11,16$) e $\Omega_1 = 0,393$ e $\Omega_2 = 1,22$ para canais lisos ($5,78 \leq F_1 \leq 12,9$). Vale comentar que a Figura 2.12 se destaca entre aquelas encontradas na literatura por ter congregado de forma expressiva os resultados dos autores indicados na legenda.

$$f = \Omega_1 F_1^{-\Omega_2} \quad (2.60)$$

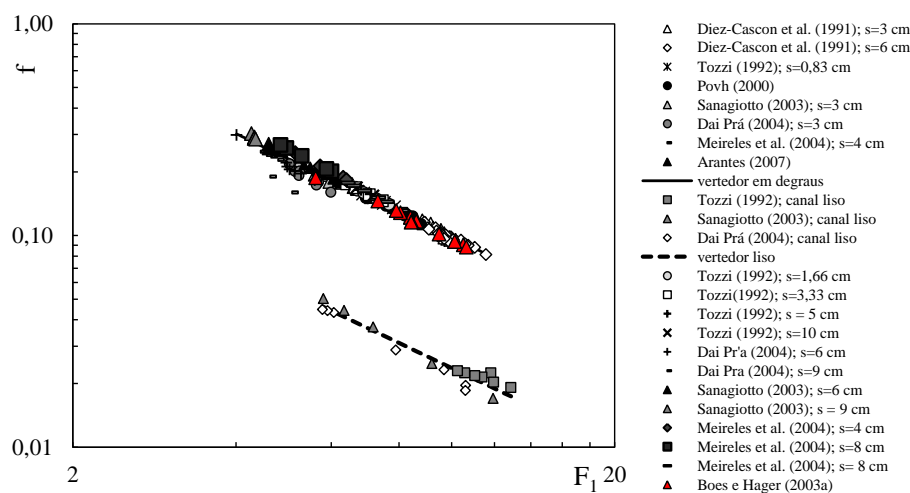


Figura 2.12 – Relação entre o fator de resistência e F_1 . Pontos experimentais de diferentes autores citados na legenda. Fonte: Simões, Schulz e Porto (2010a).

Reflexão sobre as variações encontradas para o fator de resistência

Os valores de f encontrados na literatura apresentam uma ampla faixa de variação, com números compreendidos aproximadamente entre 0,05 e 5 (ver Chanson, 2002, p.165). Há alguns detalhes que podem ser úteis na compreensão de tais variações. Ao medir a profundidade da mistura e utilizar esse resultado no cálculo de f , sabe-se que o valor obtido será superior ao calculado se o volume de ar fosse excluído. Esta é uma das principais razões

de valores demasiadamente elevados para o fator de resistência. Outra justificativa vinculada às variações em intervalos menores (0,08 a 0,2, por exemplo) é a dificuldade encontrada quando se pretende medir a profundidade do escoamento bifásico. Até mesmo a região monofásica não é de fácil medição uma vez que oscilações de alta frequência impedem a definição precisa da posição da superfície livre ou do seu valor médio com o uso de réguas ou pontas. Para demonstrar estes fatos, considera-se o desenvolvimento exposto a seguir. A equação 2.30 pode ser reescrita para um canal largo com a seguinte forma:

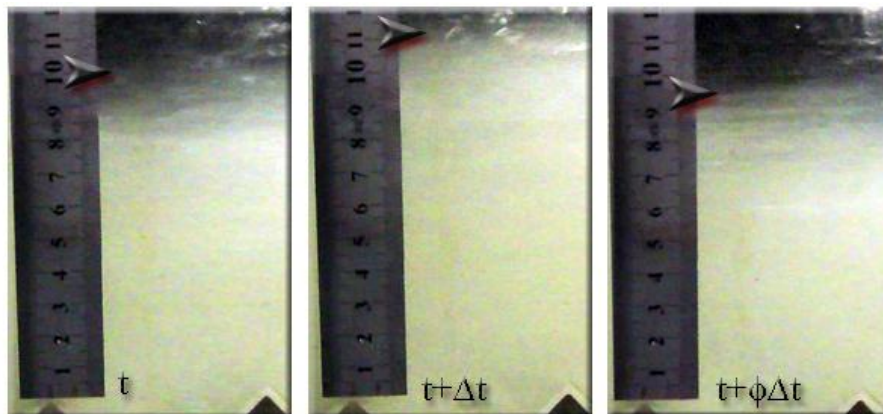
$$f = 8gh^3 I_f / q^2 \quad (2.61)$$

Derivando f em relação a q e h , obtém-se: $\partial f / \partial q = -16gh^3 I_f / q^3$ e $\partial f / \partial h = 24gh^2 I_f / q^2$.

Assumindo que $I_f = 1 \pm 0$ (uma hipótese grosseira), pode-se avaliar a propagação da incerteza no cálculo do fator de resistência por meio da equação 2.62. Para tanto, admitiu-se que os erros vinculados às variáveis sejam estatisticamente independentes e a função $f=f(q,h)$ varie de forma suave com respeito à propagação de erros.

$$\Delta f / f = \sqrt{4(\Delta q / q)^2 + 9(\Delta h / h)^2} \quad (2.62)$$

Para um experimento com $h = 0,05 \pm 0,001$ m e $q = 0,25 \pm 0,005$ m²/s, a incerteza relativa no cálculo do fator de resistência é próxima de 7,2%. Levando em consideração a dificuldade em definir a posição da superfície livre e a parcela correspondente às medições que permitiriam o cálculo de I_f , a incerteza relativa poderia ser ainda maior. Para $\Delta h = 3$ mm, obtém-se $\Delta f / f = 18,4\%$ e para $\Delta h = 5$ mm, o resultado é $\Delta f / f = 30,3\%$.



(Continua na próxima página)



Figura 2.13 – Comportamento da superfície livre ($\phi > 1$)

A Figura 2.13 contém algumas imagens sequenciais do escoamento bifásico, obtidas no canal utilizado nesta pesquisa. Elas ilustram uma oscilação com amplitude próxima de 15 mm. As três primeiras fotografias foram obtidas apenas com a iluminação do ambiente, condição que produziu imagens semelhantes à percepção do olho humano. As duas últimas fotografias mostram que a forma da superfície é altamente irregular, com porções de fluido que compõem um campo macroscópico típico do movimento turbulento. Fica evidente que o instrumento utilizado para medir a profundidade do escoamento pode conduzir a resultados incorretos se estes aspectos não forem bem definidos e conhecidos em um dado trabalho experimental. Outras fotografias são apresentadas no Apêndice 1.

Ao observar as duas últimas fotografias da Figura 2.13, é razoável fazer a seguinte pergunta: Qual é a localização da superfície livre? Uma aproximação pode ser feita considerando as três primeiras imagens da Figura 2.13. Entretanto, mesmo que tal aproximação seja pertinente, se fossem realizadas N medições com uma ponta ou régua (sem o uso de câmeras de alta velocidade ou algo parecido), a profundidade média pode não ser realmente a posição média da superfície livre. Isto ocorre porque ao medir N profundidades, é provável que eles correspondam a valores máximos, sendo calculada então uma média dos máximos. Uma possível solução para obter médias bem definidas seria utilizar um instrumento de medida com alta frequência de aquisição de dados por um tempo razoavelmente longo e sem a necessidade de utilizar a visão, como um sensor ultrassônico, por exemplo. Outras imagens e detalhes sobre os aspectos semelhantes aos expostos nesta breve discussão podem ser vistos em Wilhelms e Gulliver (2005).

Formas de quantificação da energia dissipada

A energia dissipada em um escoamento que acontece em um canal em degraus pode ser definida como a diferença entre a energia disponível nas proximidades da crista e a energia na extremidade final do canal, sendo denotada neste trabalho por ΔH . Seleccionando um volume

de controle que envolve o escoamento de água entre a crista (seção 0) e uma seção a jusante (seção 1), pode-se escrever a equação da energia com a seguinte forma:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \Delta H \quad (2.63)$$

Cabe ressaltar que, em função das características do escoamento e da geometria do canal, a seção 1 pode ser composta por ar mais água. Assumindo que a distribuição de pressões é hidrostática de modo que $p_0/\gamma = h_0$ e $p_1/\gamma = h_1 \cos \alpha$ (Chow, 1959), a equação anterior pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \overbrace{z_0 - z_1}^{H_{\text{dam}}} + h_0 + \alpha_0 \frac{q^2}{2gh_0^2} - \left(h_1 \cos \alpha + \alpha_1 \frac{q^2}{2gh_1^2} \right) = \\ &= \left(H_{\text{dam}} + h_0 + \alpha_0 \frac{h_c^3}{2h_0^2} \right) \left[1 - \left(h_1 \cos \alpha + \alpha_1 \frac{q^2}{2gh_1^2} \right) / \left(H_{\text{dam}} + h_0 + \alpha_0 \frac{h_c^3}{2h_0^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Denotando $H_{\text{dam}} + h_0 + \alpha_0 \frac{h_c^3}{2h_0^2}$ por H_{max} , a equação anterior passa a ter a seguinte forma:

$$\frac{\Delta H}{H_{\text{max}}} = 1 - \left(\frac{h_1}{h_c} \right) \left(\frac{\cos \alpha + \alpha_1 \frac{h_c^3}{2h_1^3}}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{h_0}{h_c} + \alpha_0 \frac{h_c^2}{2h_0^2}} \right) \quad (2.64)$$

A equação 2.64 corresponde a um modelo que pode ser útil, respeitadas as restrições destacadas, para quantificar a energia dissipada no interior do volume de controle selecionado. Todos os fenômenos responsáveis pela dissipação de energia (recirculação dos grandes turbilhões entre degraus, tensões de cisalhamento entre volumes de líquido e entre a água e o ar (na interface), além de outros fenômenos) foram reunidos em ΔH . Alguns autores sugeriram o uso de equações que podem ser obtidas de forma parecida com aquela apresentada para a dedução da equação anterior. Em todos os casos, a hipótese adotada com maior frequência é a de canal largo e a validade da equação de Darcy-Weisbach. Levando em consideração a largura do canal, o uso da equação de Darcy-Weisbach (equação 2.30) para um canal retangular em conjunto com a equação 2.64 conduz ao seguinte resultado:

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \left[\frac{\left[\frac{8I_f}{(1+2h_1/B)f} \right]^{-1/3} \cos \alpha + \frac{\alpha_1}{2} \left[\frac{8I_f}{(1+2h_1/B)f} \right]^{2/3}}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{h_0}{h_c} + \alpha_0 \frac{h_c^2}{2h_0^2}} \right] \quad (2.65)$$

A equação 2.64 (ou 2.65) não possibilita qualquer cálculo sem o conhecimento das grandezas ali presentes. Desta forma, deve-se dispor de resultados experimentais ou numéricos para gerar relações entre a energia dissipada adimensional e os demais adimensionais presentes na equação. Sorensen (1985) construiu modelos físicos em escalas 1:10 e 1:25 com o intuito de prever o comportamento do escoamento na barragem Monksville. Com medições de vazões e profundidades efetuadas no final da calha, Sorensen (1985) calculou a energia específica nesta posição. No mesmo estudo ele incluiu modelos físicos sem degraus e a sua comparação foi apresentada em relação aos mesmos. Concluiu-se que a energia cinética do vertedor em degraus correspondia a valores entre 6% e 12% daqueles obtidos na estrutura lisa.

Rajaratnam (1990), seguindo a mesma ideia de comparação feita por Sorensen (1985), propôs a seguinte equação:

$$\frac{\Delta H'}{H'_{\text{res}}} = \frac{(1-A') + \frac{Fr'^2(A'^2-1)}{2A'^2}}{1 + \frac{Fr'^2}{2}} \quad (2.66)$$

em que $\Delta H' = H'_{\text{res}} - H_{\text{res}}$, H_{res} = energia específica residual no pé do vertedor e o apóstrofo corresponde à calha lisa; Fr = número de Froude na base do vertedor; $A' = (c_f/c'_f)^{1/3}$.

Rajaratnam (1990) assumiu que $Fr'^2/2 + 1 = Fr'^2/2$ e que $A'/Fr'^2 = 0$. O referido autor também utilizou $c_f = 0,18$ e $c'_f = 0,0065$. Com estes números e simplificações, a equação 2.66 permitiu concluir que a energia dissipada no escoamento sobre degraus, em relação a um canal liso, está próxima de 89%, como calculado a seguir:

$$\frac{\Delta H'}{H'_{\text{res}}} = \frac{A'^2 - 1}{A'^2} = \frac{(0,18/0,0065)^{2/3} - 1}{(0,18/0,0065)^{2/3}} \cong 0,89$$

Stephenson (1991) propôs um equacionamento adimensional que pode ser deduzido seguindo procedimentos similares aos que conduziram às equações 2.64 e 2.65. O autor definiu um adimensional para a energia com a seguinte forma: $\Delta H_{\text{dam}}/H_{\text{dam}}$, sendo $\Delta H_{\text{dam}} =$

$H_{\text{dam}} - E(z=H_{\text{dam}})$ (E = energia específica no pé do vertedor). Essa relação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta H_{\text{dam}}}{H_{\text{dam}}} = \frac{H_{\text{dam}} - h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}}{H_{\text{dam}}} = 1 - \frac{h_1}{h_c} \left(1 + \frac{h_c^3}{2h_1^3} \right) \frac{h_c}{H_{\text{dam}}}$$

Em sua proposta, o autor utilizou a equação de Darcy-Weisbach para canais largos com o intuito de calcular h_1 . Substituindo esta equação na anterior, pode-se verificar que o resultado obtido é a equação 2.67, um pouco diferente da equação apresentada pelo referido autor, que possui expoente 1/2 no lugar de 1/3.

$$\frac{\Delta H_{\text{dam}}}{H_{\text{dam}}} = 1 - \left(1 + \frac{4I_f}{f} \right) \left(\frac{f}{8I_f} \right)^{1/3} \frac{h_c}{H_{\text{dam}}} \quad (2.67)$$

O perfil da superfície livre do escoamento não aerado é composto por profundidades que dependem da posição longitudinal. Com a hipótese de escoamento permanente gradualmente variado, Tozzi (1992) utilizou a equação da energia para obter o perfil da superfície livre da região não aerada do escoamento. O método empregado pelo autor envolveu o uso de uma média aritmética entre as declividades da linha de energia em duas seções transversais adjacentes e o uso da equação de Darcy-Weisbach com o fator de resistência calculado através de suas equações empíricas.

Embora tenham sido empregadas estratégias essencialmente teóricas para a obtenção de relações que envolvessem a energia dissipada, percebe-se que a informação experimental é indispensável, uma vez que sempre resta uma variável por quantificar. Alguns autores, entretanto, apresentaram resultados sob a forma de gráficos com pontos experimentais ou equações ajustadas aos dados, sem qualquer desenvolvimento teórico. Christodoulou (1993) construiu um modelo reduzido com perfil indicado pela WES (*Waterways Station Experiment*), com $s = 2,5$ cm, $l = 1,75$ cm, $\alpha = 55^\circ$ e $H_{\text{dam}} = 35,93$ cm, tendo sido adotados degraus com alturas variadas junto à crista padrão. Foram medidas profundidades em duas posições do canal e para vazões entre 0,02 e 0,09 m³/(sm). Os resultados obtidos por este autor foram apresentados sob a forma de um gráfico que relaciona $\Delta H/H_{\text{max}}$ com $h_c/(Ns)$. Em suas definições, deve-se destacar que: H_{max} é definido de tal maneira que a seção “0” esteja localizada no canal de aproximação, N = número de degraus, s = altura do degrau e h_c = profundidade crítica. O gráfico de Christodoulou (1993) é apresentado na Figura 2.14.

Hager (1995, p.165) obteve a equação 2.68, ajustada aos pontos experimentais de Sorensen (1985) e Christodoulou (1993), válida para $h_c/(Ns) < 0,25$.

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = \exp \left[-30 \left(\frac{h_c}{Ns} \right)^2 \right] \quad (2.68)$$

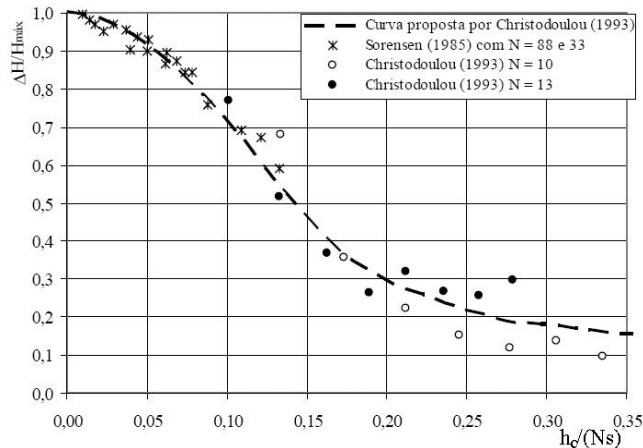


Figura 2.14 – Relação proposta por Christodoulou (1993)
Fonte: Adaptado de Christodoulou (1993)

Chanson (1993) comenta que se o escoamento alcança condições uniformes, a energia dissipada adimensional pode ser calculada através da equação 2.69:

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \frac{\frac{h_u}{h_c} \cos \alpha + \frac{\alpha_c}{2} \left(\frac{h_c}{h_u} \right)^2}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (2.69)$$

Com o uso da equação de Darcy-Weisbach em conjunto com a equação 2.69, o referido autor propôs a equação 2.70.

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \frac{\left(\frac{f}{8 \text{sen} \alpha} \right)^{1/3} \cos \alpha + \frac{\alpha_c}{2} \left(\frac{f}{8 \text{sen} \alpha} \right)^{-2/3}}{\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (2.70)$$

em que h_u = profundidade do escoamento uniforme e α_c = coeficiente de Coriolis.

É interessante notar que as equações anteriores assumem que na seção 0 (utilizada na dedução das equações 2.64 e 2.65) a energia é crítica ($h_0 = h_c$) e $\alpha_0 = 1$. Adicionalmente, para que a forma apresentada pela equação 2.70 seja possível, é necessário que o escoamento no canal aconteça com $h_u/B = 0$. Chanson (1993) destaca que, para barragens altas, a equação anterior é simplificada para a forma proposta por Stephenson (1991). Chanson (1994b, p.217)

sugeriu a equação 2.71, semelhante à anterior, válida para canais controlados por comportas, submetidas a uma carga H_o .

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \frac{\left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha}\right)^{1/3} \cos \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha}\right)^{-2/3}}{\frac{H_{\text{dam}} + H_o}{h_c}} \quad (2.71)$$

Chamani e Rajaratnam (1999a, p.367) estudaram o escoamento em vertedores em degraus com $\alpha = 59,03^\circ$ e $\alpha = 51,34^\circ$, e degraus com alturas iguais a 12,5 cm, 6,25 cm e 3,15 cm. Entre os resultados apresentados por estes pesquisadores, encontra-se uma relação entre $\Delta H/H_{\max}$ com a vazão específica no modelo físico.

Povh (2000) investigou as características do escoamento deslizante em um modelo físico com escala 1:25 que correspondia a um protótipo com $1V:0,75H$, $H_{\text{dam}} = 41,5$ m, $s = 0,60$ m e vazões específicas entre 4,21 e 27,11 m^2/s . Para avaliar a energia dissipada, foram medidas profundidades subcríticas de ressaltos formados na bacia de dissipação e calculadas as profundidades supercríticas com a equação clássica obtida com o balanço de quantidade de movimento. O referido autor propôs as equações apresentadas a seguir, ajustadas aos seus pontos experimentais. Nota-se que Povh (2000) utilizou a energia específica residual para compor os adimensionais encontrados nas equações mencionadas ($H_{\text{res}} = H_{\max} - \Delta H$).

$$\begin{cases} \frac{H_{\text{res}}}{H_{\max}} = 1 - 0,039 \frac{H_{\text{dam}}}{h_c}, \text{ válida para } \frac{H_{\text{dam}}}{h_c} \leq 13,25 \\ \frac{H_{\text{res}}}{H_{\max}} = 0,719e^{-0,03 \frac{H_{\text{dam}}}{h_c}}, \text{ válida para } 13,25 < \frac{H_{\text{dam}}}{h_c} \leq 34,07 \end{cases} \quad (2.72)$$

Boes e Hager (2003a) apresentaram resultados de estudos experimentais desenvolvidos em um canal com um pressurizador na sua extremidade inicial. Estes autores apresentaram uma relação entre H_{res}/H_{\max} com k/D_h ($D_h =$ diâmetro hidráulico), a e H_{dam}/h_c . Considerando o limite $H_{\text{dam}}/h_c < 15$ a 20, os autores sugeriram a seguinte equação:

$$\frac{H_{\text{res}}}{H_{\max}} = \exp \left[\left(-0,045 \left(\frac{k}{D_h} \right)^{0,1} (\text{sen}\alpha)^{-0,8} \right) \frac{H_{\text{dam}}}{h_c} \right] \quad (2.73)$$

Para valores de H_{dam}/h_c maiores ou iguais que 15 a 20, os autores propõem a equação 2.74.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_{res}}{H_{max}} = \frac{\Phi}{\frac{H_{dam}}{h_c} + \Phi} \\ \Phi = \left(\frac{f_b}{8\text{sen}\alpha} \right)^{1/3} \cos \alpha + \frac{\alpha_c}{2} \left(\frac{f_b}{8\text{sen}\alpha} \right)^{-2/3} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Considerando a região de escoamento uniforme (ou quase-uniforme), Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2004) encontraram boa concordância entre H_{res}/h_c , α e o fator de resistência. As equações apresentadas por estes autores podem ser obtidas com procedimentos similares aos empregados anteriormente e foram indicadas para cada um dos sub-tipos de escoamento (Tipo A e Tipo B, ver item 2.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{H_{res}}{H_{max}} \right)_{\text{uniforme}} = \left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha} \right)^{1/3} \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha} \right)^{-2/3} \quad (\text{Tipo A}) \\ \left(\frac{H_{res}}{H_{max}} \right)_{\text{uniforme}} = \left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha} \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{8\text{sen}\alpha} \right)^{-2/3} \quad (\text{Tipo B}) \end{array} \right. \quad (2.75)$$

Para a região de escoamento não uniforme, as equações apresentadas por estes autores mostram que há dependência entre a energia residual adimensionalizada e outros adimensionais, com pode ser visto no conjunto de equações empíricas apresentadas a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{H_{res}}{H_{max}} \right)_{\text{não-uniforme}} = 1,5 + \left[\left(\frac{H_{res}}{H_{max}} \right)_{\text{uniforme}} - 1,5 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{H_{dam}}{H_{dam,u}} \right)^m \right] \\ m = -\frac{\alpha}{25} + 4 \\ \frac{H_{dam,u}}{h_c} = \frac{5,7 + 6,7 \exp(-6,5s/h_c)}{-1,21 \cdot 10^{-5} \alpha^3 + 1,60 \cdot 10^{-3} \alpha^2 - 7,13 \cdot 10^{-2} \alpha + 1,30} \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Nestas equações, deve-se notar que: $H_{dam,u}$ = altura desde a crista até a posição onde há escoamento uniforme e α deve ser utilizado em graus. A validade do método corresponde aos seguintes intervalos: $5,7^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$, $0,1 \leq s/h_c$ (com escoamento deslizante sobre turbilhões) e $5 \leq H_{dam}/h_c \leq H_{dam,u}/h_c$.

Arantes (2007), com resultados obtidos através do uso de modelos de turbulência e as equações de conservação em termos de grandezas médias, calculou os adimensionais propostos por Christodoulou (1993) com e sem o uso do coeficiente de Coriolis diferente da unidade. O referido autor concluiu que a inclusão deste fator de correção implica em uma redução de até 47,5% na perda de energia. Arantes (2007) verificou também que o uso da

equação 2.70, proposta por Chanson (1993), apresenta melhor aproximação com os resultados obtidos numericamente se $f = 0,17$ e $\alpha_c = 1,13$.

Simões (2008) e Simões, Schulz e Porto (2010) apresentaram comparações entre pontos experimentais (H_{dam}/h_c , $\Delta H/H_{\text{max}}$) de diferentes autores com a formulação 2.65, escrita para um canal largo e escoamento crítico na seção 0. Em tal comparação, considerou-se o escoamento como gradualmente variado, tendo sido obtida uma envoltória de curvas que correspondem ao fator de resistência entre 0,05 e 0,30, como pode ser visto na Figura 2.15.

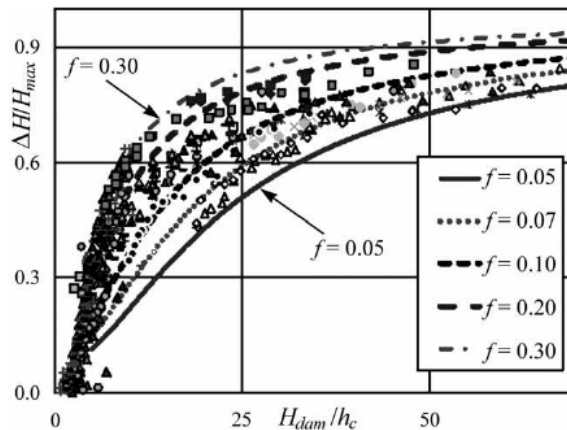


Figura 2.15 – $\Delta H/H_{\text{max}}$ em função de H_{dam}/h_c (curvas com 1V:0,75)
Fonte: Simões, Schulz e Porto (2010)

2.6.3 Escoamento bifásico

Algumas imagens e breves apresentações expostas anteriormente mostraram que o escoamento deslizante sobre turbilhões é composto, no caso mais geral, por uma região de escoamento monofásico (água) e uma região com escoamento bifásico (ar-água). Os efeitos da aeração do escoamento assumem grande importância quando se pretende utilizar uma estrutura hidráulica desse tipo. Como exemplo, pode-se mencionar que as profundidades do escoamento aumentam e há o movimento de numerosas gotas de água no ar. Portanto, a altura dos muros laterais deve ser suficiente para conter o líquido. A porção monofásica no escoamento é mais suscetível à cavitação do que a bifásica. Junto à parte superior dos espelhos o campo de pressões pode ser formado por valores negativos e, em alguns casos, desencadeia-se um processo de formação de bolhas de gases, antes dissolvidos na água, ou até mesmo bolhas de vapor de água. O colapso dessas cavidades ocorre por um processo de implosão, sendo liberada grande quantidade de energia. Diferente do escoamento monofásico, a mistura se comporta sob a influência do efeito de compressibilidade do ar de tal maneira que a compressibilidade da mistura é capaz de absorver o colapso das bolhas. Deste modo, a entrada de ar no escoamento pode ser vista como benéfica em relação à cavitação. Outro

fenômeno de grande relevância vinculado à presença de bolhas de ar no escoamento é a troca de gases através da interface ar-água das bolhas. Finalmente, cabe mencionar que o ar presente na água reduz a resistência oferecida ao escoamento, como discutido na seção correspondente ao fator de resistência.

Aspectos físicos do escoamento

Descrições relativas aos escoamentos em vertedores lisos possuem alguns aspectos em comum com aquelas apresentadas para estruturas em degraus. A região inicial do escoamento é composta apenas por água (1 – Figura 2.16), com uma superfície livre aparentemente lisa. A partir da posição onde a espessura da camada limite coincide com a profundidade do escoamento, define-se o ponto de início da aeração (ver Figura 2.16). É nesta posição que os efeitos originados no fundo podem ser percebidos na superfície, tornando-a bastante irregular e contorcida. A jusante do início da aeração, desenvolve-se um campo de fração volumétrica de ar $C(x_i, t)$ cuja evolução espacial em x_1 (coordenada longitudinal) é crescente desde a superfície até o fundo, como ilustrado na Figura 2.16.

O padrão geral descrito no parágrafo anterior também é observado em vertedores em degraus de barragens e modelos físicos utilizados em laboratórios. Adicionalmente, deve-se incluir em tal descrição o transporte de ar sob a forma de bolhas até os contornos sólidos dos degraus. Entretanto, canais curtos com entradas laterais ou em queda livre, como aqueles existentes em sistemas de drenagem, normalmente operam com escoamentos aerados desde posição inicial. Quando se inicia a aeração, há uma evolução espacial dos perfis de fração de vazios, isto é, para valores médios (temporais) de C , denotados por \bar{C}^* , existe uma função $\bar{C}^*(x_1, x_2)$, assumindo a hipótese de escoamento bidimensional. A partir de uma determinada posição x_1 o equilíbrio é estabelecido de tal maneira que $\bar{C}^* = \bar{C}^*(x_2)$. Trabalhos como os de Straub e Anderson (1958), Keller *et al.* (1974), Cain e Wood (1981) e Wood *et al.* (1983) apresentaram resultados coerentes com as descrições acima, atrelados aos escoamentos em vertedores lisos. A Figura 2.16b é a situação clássica apresentada por Keller *et al.* (1974).

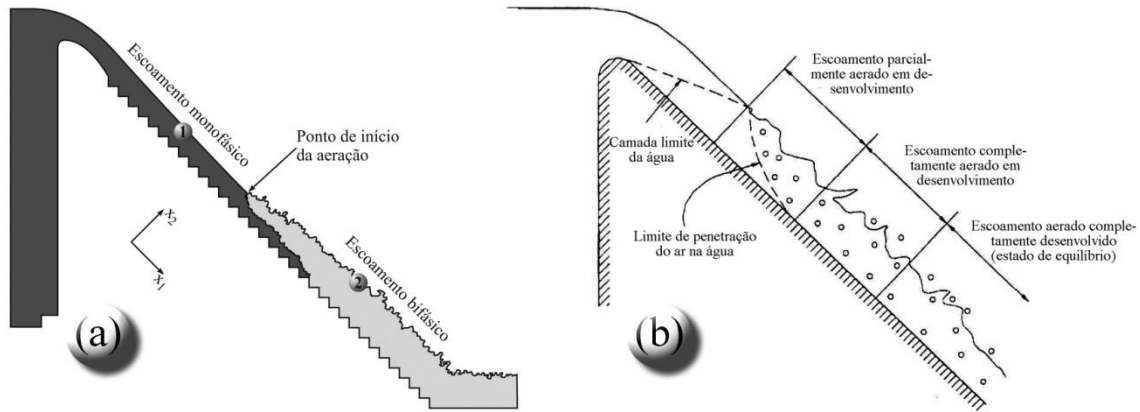


Figura 2.16 – Escoamento deslizante e suas regiões
Fonte: (b) Keller *et al.* (1974)

Um dos primeiros trabalhos que descreveram aspectos semelhantes entre escoamentos em canais lisos e em degraus foi o de Sorensen (1985), que contém uma ilustração indicando o ponto de início da aeração e uma referência ao fato da superfície livre ser lisa antes desse ponto (Fig. 2.17a). Peyras, Royet e Degoutte (1992) estudaram o escoamento em canais em degraus formados por gabiões e, no item correspondente ao escoamento *skimming flow*, destacaram a Figura 2.17b, que contém o ponto de início da aeração, assim como o trabalho de Sorensen (1985).

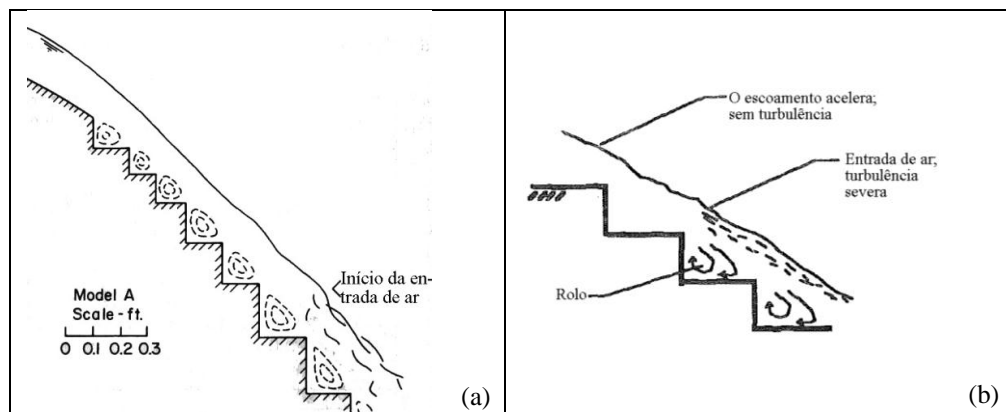


Figura 2.17 – Ilustrações do escoamento sobre fundo em degraus.
Fonte: (a) Sorensen (1985, p.1467) e (b) Peyras *et al.* (1992, p.712).

A imagem apresentada na Figura 2.17b destaca a existência de rolos a jusante da posição de início da aeração. Estudos experimentais mostram que a distribuição de ar no escoamento alcança as cavidades abaixo do pseudo-fundo, onde há grandes turbilhões mantidos pelo escoamento principal. Alguns exemplos são os trabalhos de Chamani e Rajaratnam (1999, p.363) e Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2001, p.522).

Início da aeração

Grande parte dos trabalhos relacionados ao início da aeração em vertedores lisos e em degraus define tal posição como aquela na qual a espessura da camada limite (δ) é igual à profundidade do escoamento (h_A). Bauer (1954), com base em estudos experimentais correspondentes a vertedores lisos, propôs a seguinte equação:

$$\frac{\delta}{x_s} = 0,0254 \left(\frac{x_s}{\varepsilon} \right)^{-0,135} \quad (2.77)$$

em que x_s = um comprimento (para vertedores controlados por comportas, por exemplo, x_s foi definido por Cain e Wood (1981) como a distância, paralela ao fundo, desde a superfície livre até o ponto de início da aeração, tendo como referência a superfície livre no início da aeração) e ε = rugosidade absoluta equivalente.

Cain e Wood (1981), assumindo como válida uma lei de potência para a distribuição de velocidades (dada pela equação 2.78) e a equação 2.79 para representar o crescimento da camada limite, obtiveram a equação 2.80.

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{-1/n} \quad (2.78)$$

$$\frac{\delta}{x_s} = c_1 \left(\frac{x_s}{\varepsilon} \right)^{-c_2} \quad (2.79)$$

$$\frac{x_s}{\varepsilon} = \left(\frac{n+1}{c_1 n \sqrt{2}} \right)^{(2/3-2c_2)} F_*^{(2/3-2c_2)} \quad (2.80)$$

em que c_1 , c_2 e n são parâmetros de ajuste dos modelos, $u = u(y)$ e U = velocidade do escoamento potencial. F_* é uma forma do número de Froude, definida em termos da rugosidade, como apresentado a seguir.

$$F_* = \frac{q}{\sqrt{g\varepsilon^3 \sin\alpha}} \quad (2.81)$$

Wood *et al.* (1983) comentam que os resultados de diferentes aproximações teóricas de Keller e Rastogi (1977) conduziram à equação 2.82 (K é uma função aparentemente independente do ângulo α). Considerando $n = 6,3$ (Cain e Wood, 1981) e comparando as equações 2.80 e 2.82, Wood *et al.* (1983) obtiveram $c_1 = 0,10$ e $c_2 = 0,82K^{-1,4}$. Considerando uma variedade de dados apresentados por Keller e Rastogi (1977), Wood *et al.* (1983), com

análise de regressão múltipla, obtiveram a equação 2.83. Esta equação possibilita o cálculo da posição de início da aeração (L_A), medida desde o início da curva que define a crista padrão. Os referidos autores também desenvolveram uma equação para a espessura da camada limite (Eq. 2.84). Nesta equação, observa-se a dependência em relação à energia total a montante (H_s na entrada do canal) em relação ao ponto de início da aeração.

$$\frac{x_s}{\varepsilon} = KF_*^{0,713} \quad (2.82)$$

$$\frac{L_A}{\varepsilon} = 13,6(\text{sen}\alpha)^{0,0796} F_*^{0,713} \quad (2.83)$$

$$\frac{\delta}{L_A} = 0,0212 \left(\frac{L_A}{H_s} \right)^{0,11} \left(\frac{L_A}{\varepsilon} \right)^{-0,10} \quad (2.84)$$

Observa-se que o conjunto de equações apresentado anteriormente permite que a posição de início da aeração seja calculada, assim como a profundidade em tal posição. Nota-se que a equação 2.83 inclui o ângulo de inclinação do canal, além de F_* . Algumas propostas para vertedores em degraus seguem formas similares a este conjunto de equações. O *U.S. Army Corps of Engineers* (1977, 1990, p.9) sugeriu a seguinte relação entre h_A/L_A e L_A/ε :

$$\frac{h_A}{L_A} = 0,08 \left(\frac{L_A}{\varepsilon} \right)^{-0,233} \quad (2.85)$$

Tozzi (1992) propôs o uso da equação anterior desde que ε seja substituído pela altura de rugosidade ($k = \text{scos}\alpha$). Em seu trabalho, ele comparou os resultados obtidos com este modelo utilizando os pontos experimentais publicados por Sorensen (1985) e concluiu que a relação entre os valores experimentais e os calculados por ele variou entre 1,12 e 1,38. Os dados de Sorensen (1985) e Tozzi (1992) podem ser vistos na Figura 2.18a. É interessante notar que ao multiplicar os dados de Tozzi por 1,25, os pontos se aproximam da reta de 45° , como ilustrado na Figura 2.18b.

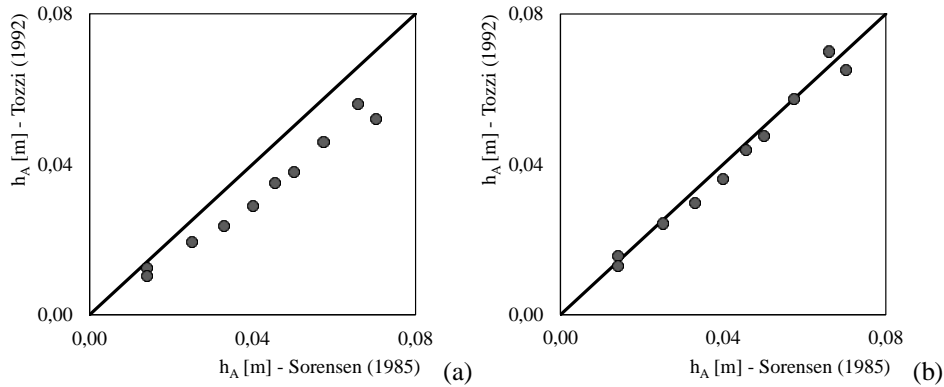


Figura 2.18 – Comparação entre os resultados de Sorensen (1985) e Tozzi (1992): (a) Dados apresentados por Tozzi (1992) e (b) Dados com os valores de Tozzi (1992) modificados por um fator 1,25.

Matos (1999) obteve as equações 2.86 e 2.87 para canais em degraus com $\alpha = 53^\circ$. Nota-se certa semelhança entre a equação 2.86 (válida apenas para uma inclinação) e a equação 2.83. Assim como indicado por Tozzi (1992), a rugosidade absoluta equivalente deu lugar à altura de rugosidade, inclusive na definição de F_r^* .

$$\frac{L_A}{k} = 6,289F_r^{*0,734} \quad (2.86)$$

$$\frac{h_A}{k} = 0,361F_r^{*0,606} \quad (2.87)$$

em que $F_r^* = \frac{q}{\sqrt{gk^3 \text{sen}\alpha}}$.

Chamani (2000) conduziu um estudo experimental em modelos físicos com $B = 0,3$ m, $l/s = 0,6$ e $l/s = 0,8$ e para vazões entre 21 e 62 L/s. Com os seus dados experimentais, Chamani (2000, p.66) obteve a seguinte equação:

$$\frac{L_A}{k} = 8,29 \left(\frac{q}{\sqrt{gk^3 s/l}} \right)^{0,85} \quad (2.88)$$

Povh (2000, f.81-87, 97-99) estudou o escoamento em um modelo físico com $1V:0,75H$ e $s = 2,4$ cm. As suas observações o levaram a definir quatro posições relacionadas ao início da aeração. A primeira é identificada como “aeração da superfície livre da água”, onde o perfil da superfície livre apresenta oscilações decorrentes da aeração (utiliza-se a variável L_1/k ou $L1/k$). A segunda é a “aeração intermitente dos degraus”. O autor explica que há uma região de separação a jusante do espelho de cada degrau, tendo o mesmo notado a presença dos grandes turbilhões por meio das bolhas de ar incorporadas ao movimento (L_2/k ou $L2/k$).

Em seguida, Povh verificou a ocorrência de grandes turbilhões de forma contínua, denominando tal região como “aeração contínua dos degraus” (L_3/k ou $L3/k$). A quarta e última região corresponde ao escoamento totalmente aerado ao longo da profundidade (L_4/k ou $L4/k$). A Figura 2.19, apresentada a seguir, ilustra o comportamento dos dados experimentais desse autor.

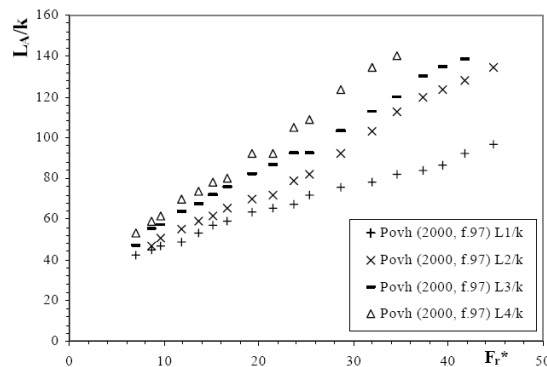


Figura 2.19 – Quatro posições de início da aeração
Fonte: Povh (2000)

Chanson (2002, p.147-148), após analisar dados experimentais de diferentes autores, obteve equações semelhantes às propostas por Wood *et al.* (1983). Nota-se que as equações 2.83 e 2.89 possuem os mesmos expoentes.

$$\frac{L_A}{k} = 9,719(\text{sen}\alpha)^{0,0796} F_r^{*0,713} \quad (2.89)$$

$$\frac{h_A}{k} = 0,4034(\text{sen}\alpha)^{-0,04} F_r^{*0,592} \quad (2.90)$$

Estas equações foram obtidas para α entre 20° e 55° . É interessante notar que, ao combinar as equações 2.83 e 2.84, com $H_s/L_A = \text{sen}\alpha$ e $\delta = h_A$, obtém-se a equação 2.91. Uma forma semelhante a esta foi citada por Chanson (1993).

$$\frac{h_A}{\varepsilon} = 0,222(\text{sen}\alpha)^{-0,0384} F_r^{*0,6417} \quad (2.91)$$

Boes (2000, p.124) definiu o ponto de início da aeração no fundo como a posição a partir da qual a fração de vazios no pseudo fundo é igual a 0,01. Este autor utilizou um modelo físico com entrada sob pressão ao invés de uma entrada livre. Com o intuito de extrapolar os resultados experimentais para estruturas sem comportas na entrada, foi empregada a equação da energia entre a seção de início da aeração e a seção com escoamento

crítico. Definindo z_i' como a posição de início da aeração, medida na vertical com origem na posição de escoamento crítico, o referido autor propôs a equação 2.92. Boes (2000, p.122) também apresentou equações ajustadas aos dados experimentais que possibilitam calcular a profundidade do escoamento na posição de início da aeração definida por ele (equações 2.93 e 2.94). A equação 2.93 fornece profundidades equivalentes (apenas água) e a equação 2.94 profundidades da mistura (90 indica uma fração de vazios média igual a 0,9).

$$\frac{z_i'}{s} = 4,69F^{0,84} \quad (2.92)$$

$$\frac{h_A}{s} = 0,32F^{0,56} \quad (2.93)$$

$$\frac{h_{90,A}}{s} = 0,42F^{0,56} \quad (2.94)$$

em que $F = \frac{q}{\sqrt{gs^3 \sin \alpha}}$.

Boes e Hager (2003b, p.665-666), utilizaram dados de Boes (2000) e de outros autores em conjunto com a metodologia citada anteriormente. Como resultados, os referidos autores obtiveram as seguintes equações:

$$\frac{z_i'}{s} = 5,9F^{0,8}, \text{ válida para } 25^\circ < \alpha < 75^\circ \quad (2.95)$$

$$\frac{h_{90,A}}{s} = 0,40F^{0,60}, \text{ válida para } 25^\circ < \alpha < 55^\circ \quad (2.96)$$

Sanagiotto (2003) estudou o escoamento em um modelo físico com 1V:0,75H, degraus com alturas entre 3 cm e 9 cm e s/h_c entre 0,0814 e 0,894. Com o intuito de prever os valores de L_A e h_A , Sanagiotto (2003) desenvolveu as equações 2.97 e 2.98 (válidas para $50^\circ \leq \alpha \leq 53,13^\circ$).

$$\frac{L_A}{k} = 9,7721F_r^{*,0,7014} \quad (2.97)$$

$$\frac{h_A}{k} = 0,3965F_r^{*,0,5975} \quad (2.98)$$

Dai Prá (2004, p.90-91) estudou o escoamento em um modelo com $\alpha = 45^\circ$ e concluiu que a equação 2.98, apresentada por Sanagiotto (2003), pode ter sua faixa de aplicação

estendida, com extremo inferior igual a 45°. O ponto de incipiência da aeração foi representado por este autor através da seguinte equação:

$$\frac{z_i' + 1,5h_c}{k} = 7,0F_r^{*0,755} \quad (2.99)$$

É natural esperar que diferentes condições de entrada em um canal propiciem desenvolvimentos diferentes dos campos de velocidade, pressão, etc. Chanson (2006) resumiu uma série de estudos experimentais e destacou as diferentes geometrias empregadas pelos pesquisadores em seus modelos físicos. Nesse trabalho, o referido autor apresentou dois pares de equações para L_A e h_A . O primeiro corresponde aos vertedores em degraus sem comportas (equações 2.100 e 2.101) e o segundo aos vertedores controlados por comportas (2.102 e 2.103). Para o desenvolvimento de tais equações, Chanson (2006) empregou modelos semelhantes às equações 2.78 e 2.79.

$$\left(\frac{(L_A)_{uc}}{k}\right)^{1/4} = 24,14(\text{sen}\alpha)^{0,111}F_r^* \quad (2.100)$$

$$\left(\frac{(h_A)_{uc}}{k}\right)^{1/4} = \frac{0,4034}{(\text{sen}\alpha)^{0,04}}F_r^{*0,592} \quad (2.101)$$

$$\left(\frac{(L_A)_{pi}}{k}\right)^{3/2-b} = \left(\frac{(L_A)_{uc}}{k}\right)^{3/2-b} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F_r^{*2/3}}{(L_A)_{pi}\text{sen}\alpha^{1/3}/k} (Fr_{pi}^{-2/3} + \frac{1}{2}Fr_{pi}^{4/3})}} \quad (2.102)$$

$$\left(\frac{(h_A)_{pi}}{k}\right)^{(3-2b)/(2-2b)} = \left(\frac{(h_A)_{uc}}{k}\right)^{(3-2b)/(2-2b)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F_r^{*2/3}}{(L_A)_{pi}\text{sen}\alpha^{1/3}/k} (Fr_{pi}^{-2/3} + \frac{1}{2}Fr_{pi}^{4/3})}} \quad (2.103)$$

em que “uc” indica que não há comporta, “pi” representa a condição “pressurizado na entrada”, Fr_{pi} = número de Froude em termos das grandezas de entrada (H_{pi} = abertura da comporta e $V = q/H_{pi}$).

Arantes (2007) utilizou recursos numéricos e computacionais para obter resultados com as equações de Navier-Stokes médias de Reynolds e um dos modelos de turbulência de tensões de Reynolds. Entre os seus resultados, o autor avaliou o desenvolvimento da camada limite e relações entre os adimensionais h_A/L_A e L_A/k , tendo encontrado boa concordância com os resultados experimentais de Tozzi (1992).

Fração de vazios

Uma importante variável que faz parte do conjunto de grandezas de campo que caracterizam o escoamento em canais lisos e em degraus é a fração de vazios. Trata-se de uma fração volumétrica de ar, denominada em alguns textos como concentração de ar, embora seja uma grandeza adimensional. Sendo “Vol” a variável volume, define-se a fração de vazios por meio da seguinte relação:

$$C = \frac{\text{Vol}_{\text{ar}}}{\text{Vol}_{\text{ar}} + \text{Vol}_{\text{água}}} \quad (2.104)$$

Deve-se destacar que C é um campo escalar, para o caso mais geral, $C(x_i, t)$. Outras definições associadas foram apresentadas anteriormente. Define-se a fração de vazios média por meio da seguinte igualdade:

$$\overline{C^*}(x_i, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(x_i, t) dt \quad (2.105)$$

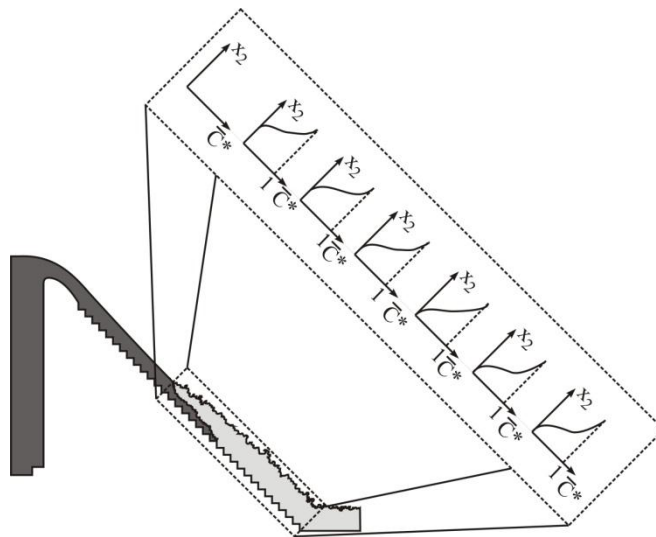


Figura 2.20 – Evolução espacial de $\overline{C^*} = \overline{C^*}(x_1, x_2)$. x_1 é paralelo a $\overline{C^*}$.

Observa-se que $\overline{C^*}(x_i, t)$ conserva a característica de campo escalar tridimensional e não estacionário, mas agora com um valor médio entre os valores instantâneos. Assumindo a condição de regime permanente e bidimensional, escreve-se $\overline{C^*} = \overline{C^*}(x_1, x_2)$, como ilustrado na Figura 2.20. O termo fração de vazios média ou concentração média de ar também é utilizado para indicar um valor médio obtido a partir de um perfil $\overline{C^*}(x_2)$. Neste caso, escreve-se:

$$\bar{C}(x_1) = \frac{1}{h_{\bar{C}^*}} \int_0^{h_{\bar{C}^*}} \bar{C}^*(x_2) dx_2 \quad (2.106)$$

em que $h_{\bar{C}^*}$ é a profundidade da mistura correspondente a um valor de \bar{C}^* .

A mistura ar-água é composta por bolhas de ar presentes no escoamento, gotas de água junto à superfície livre e volumes de ar circundados por estruturas deformadas de água que compõem a superfície livre. Em muitos desenvolvimentos é usual empregar profundidades equivalentes apenas de água. Neste texto, h é a letra utilizada para denotar as profundidades do escoamento monofásico e, também, para indicar profundidades equivalentes apenas de água. Com a hipótese de um campo bidimensional e, sendo o canal retangular com largura B , pode-se definir a fração de líquido média no tempo (r_1 , em que 1 denota a fase 1, isto é, a água) da seguinte maneira:

$$r_1 = 1 - \bar{C}^*(x_2) = \frac{B dx_1 dh}{B dx_1 dx_2}$$

Simplificando e integrando em x_2 , obtém-se a definição para a profundidade equivalente apenas de água:

$$h = \int_0^{h_{\bar{C}^*}} r_1 dx_2 \quad (2.107)$$

As equações 2.106 e 2.107 possibilitam escrever a seguinte relação:

$$h = h_{\bar{C}^*} [1 - \bar{C}(x_1)] \quad (2.108)$$

Cabe destacar que o uso de um elemento de volume com dimensões infinitesimais é uma alternativa a ser considerada com cuidado. O escoamento é composto por água e bolhas com dimensões da ordem de milímetros. Se for utilizado um instrumento capaz de medir a densidade através do escoamento por meio de um detector extremamente delgado, é possível que os valores médios temporais de C sejam médias calculadas com $C = 1$ (somente ar), $C = 0$ (somente água) e $0 < C < 1$ (detectados na interface ar-água das bolhas). Levando em conta a possibilidade de haver posições dominantes para as bolhas, o valor médio de C pode resultar muito próximo de 1 se a posição do detector coincidir com a posição com maior densidade de probabilidade de encontrar uma bolha. O contrário também é possível. De outro modo, selecionando um volume finito, com dimensões da ordem de alguns diâmetros das bolhas, ao

medir o número de bolhas presentes em tal volume em função do tempo e o volume de ar correspondente, pode-se saber qual a fração de vazios média no volume.

Diez-Cascon *et al.* (1991, p.25), sugeriram que a fração de vazios média em um vertedor em degraus pode ser avaliada por meio da equação 2.109, desenvolvida pela ASCE (1961), para canais lisos.

$$\bar{C} = 0,743 \log \left(\frac{\text{sen} \alpha}{q^{1/5}} \right) + 0,876 \quad (2.109)$$

A vazão específica q deve ser utilizada com a unidade de acordo com o S.I.

Chamani e Rajaratnam (1999a, p.367) utilizaram uma sonda como aquela desenvolvida por Lamb e Killen (1950) para medir a fração de vazios. Essa sonda utiliza um volume de amostragem cúbico, com lados iguais a 10 mm. Estes pesquisadores verificaram que a equação 2.109 deve ser modificada para a seguinte forma:

$$\bar{C} = 0,93 \log \left[\frac{(\text{sen} \alpha)^{0,1}}{q^{0,3}} \right] + 1,05 \quad (2.110)$$

A vazão específica deve ser utilizada em L/(sm) e o termo entre colchetes deve estar no intervalo 0,2 – 0,27, aproximadamente.

Matos e Quintela (1995a) e Matos (2000) apresentaram dados de diferentes autores (Diez-Cascon *et al.*, 1991; Tozzi, 1992; Lejune, Lejune e Lacroix, 1994; Chamani e Rajaratnam, 1999) correspondentes a fração de vazios média em função do adimensional H_{dam}/h_c . Os dados experimentais mostraram que, para $H_{\text{dam}}/h_c > 30$, a variação da fração de vazios média é muito pequena, podendo-se considerar a ocorrência do escoamento uniforme. Os resultados desses autores indicam também que a equação de Hager (1991, p.531) para calhas lisas, equação 2.111, fornece um valor próximo do valor de equilíbrio (\bar{C}_u) encontrado experimentalmente, embora alguns pontos estejam situados abaixo de 63% (para 1V:0,75H). A equação 2.112, apresentada por Matos (2000), ilustra o comportamento mencionado.

$$\bar{C}_u = 0,75(\text{sen} \alpha)^{0,75} \quad (2.111)$$

$$\bar{C} = 0,62 - \frac{55,9}{\left(\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} \right)^2} \quad (2.112)$$

Válida para $10 < H_{\text{dam}}/h_c < 100$ e 1V:0,75H.

Povh (2000) mediu as alturas conjugadas de ressaltos estabelecidos na bacia de dissipação a jusante de um modelo físico de um vertedor em degraus. Com o uso da equação 2.113, o autor calculou profundidades teóricas não aeradas. Tais resultados permitiram calcular valores para a fração de vazios média. Como resultado, Povh (2000) apresentou a equação 2.114 (com q em m^2/s). Posteriormente, Povh e Tozzi (2001) apresentaram uma equação semelhante à 2.112. Eles analisaram dados de Diez-Cascon *et al.* (1991), Tozzi *et al.* (1996), Povh (2000) e Matos (2000) e, como resultado, apresentaram a equação 2.115, que corresponde à envoltória dos dados.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1 \right) \quad (2.113)$$

$$\bar{C} = 0,368 \log \left(\frac{\text{sen} \alpha}{q^{0,2}} \right) + 0,665 \quad (2.114)$$

$$\bar{C} = 0,62 - \frac{11}{\left(\frac{H_{\text{dam}}}{h_c} \right)^2} \quad (2.115)$$

Boes (2000) e Boes e Hager (2003b) dedicaram-se ao estudo experimental e ao estabelecimento de metodologias para o cálculo de frações de vazios em vertedores em degraus. O conjunto de equações apresentadas por Boes e Hager (2003b) auxilia na previsão de: (1) Fração de vazios média como função da distância vertical (equação 2.116); (2) Fração de vazios média no regime uniforme (equação de Hager, 1991 – Eq. 2.111); (3) Fração de vazios na posição de início da aeração (equação 2.117); (4) Fração de vazios no pseudo-fundo (equação 2.118).

$$c_i = \frac{\bar{C}(Z_i) - \bar{C}_i}{\bar{C}_u - \bar{C}_i} = \left\{ \text{tgh} \left[5 \cdot 10^{-4} \cdot (100^\circ - \alpha) Z_i \right] \right\}^{1/3} \quad (2.116)$$

$$\bar{C}_i = 1,2 \cdot 10^{-3} (240^\circ - \alpha) \quad (2.117)$$

$$C_b(X_i) = 0,015 X_i \frac{\sqrt{\text{tg} \alpha}}{2} \quad (2.118)$$

Validade: $26^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$ (α em graus). As equações estão escritas em termos de adimensionais definidos como: $Z_i = (z - z_i')/h_c$ e $X_i = (x - L_A)/h_A$, em que: z = eixo vertical, positivo para baixo e com origem na crista padrão; z_i' = posição correspondente a L_A e x = eixo orientado no sentido do escoamento e com origem na soleira.

Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2004, p.867) apresentaram uma formulação empírica para a concentração média de ar na região de escoamento quase-uniforme. O trabalho desses pesquisadores mostra que esta variável depende do ângulo de inclinação do canal como previsto pela equação de Hager (1991), válida para canais lisos, e do adimensional s/h_c , como pode ser visto a seguir:

$$\bar{C}_u = D - 0,3 \exp \left[-5 \left(\frac{s}{h_c} \right)^2 - 4 \frac{s}{h_c} \right] \quad (2.119)$$

D é igual a 0,3 para $5,7^\circ \leq \alpha \leq 19^\circ$ e $0,1 \leq s/h_c$ (desde que o escoamento seja deslizante sobre turbilhões). Se $19^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$ e $0,1 \leq s/h_c$, D é calculado com a seguinte equação (com α em graus):

$$D = -2,0 \cdot 10^{-4} \alpha^2 + 2,14 \cdot 10^{-2} \alpha - 3,57 \cdot 10^{-2} \quad (2.120)$$

Modelos para a distribuição de fração de vazios

1) Modelo de Straub e Anderson (1958).

Straub e Anderson (1958) desenvolveram um trabalho hoje considerado “clássico” sobre o comportamento de escoamento bifásicos do tipo ar-água em canais lisos. Eles identificaram duas regiões correspondentes ao perfil de concentração. A primeira, denominada região interior, consiste em uma mistura de bolhas em água dominada pela turbulência. A segunda região, denominada região exterior, corresponde à mistura heterogênea de gotas e volumes de água ejetados da superfície. A fronteira entre as duas regiões de Straub e Anderson é definida no ponto de inflexão do perfil, para $\partial^2 \bar{C}^* / \partial x_2^2 \Big|_{x_2=h_t} = 0$. Para a região interior, a equação proposta por estes pesquisadores é:

$$\bar{C}^* = \bar{C}^*(h_t/2) \left(\frac{x_2}{h_t - x_2} \right)^{0,4 \lambda u_*} \quad (2.121)$$

Para a região exterior, o modelo proposto por eles tem a seguinte forma:

$$\frac{1 - \bar{C}^*}{1 - \bar{C}^*(h_t/2)} = \frac{2}{h' \sqrt{\pi}} \int_{x_2 - h_t}^{+\infty} \exp \left[- \left(\frac{v}{h'} \right)^2 \right] dv \quad (2.122)$$

em que v_t = velocidade de ascensão das bolhas, $u^* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ = velocidade de cisalhamento, λ = constante de proporcionalidade e h' = distância média das partículas projetadas além de $x_2 = h_t$.

2) Modelo de Wood (1984).

Wood (1984) elaborou um modelo matemático com o intuito de prever a distribuição de fração de vazios em escoamentos sobre vertedores lisos e completamente desenvolvidos. Fundamentado na equação de conservação de massa, foi proposta a seguinte equação diferencial:

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(1 - \bar{C}^*)] = \rho(1 - \bar{C}^*) w_f \cos \alpha \quad (2.123)$$

em que ε = difusividade da densidade média (assumida como constante) e w_f está relacionado ao comportamento da velocidade da água em x_2 e pode ser modelado com a seguinte relação (válida até $x_2 = h_{90}$):

$$w_f = x_2 \bar{C}^* \quad (2.124)$$

Combinando as equações anteriores e integrando, obtém-se:

$$\bar{C}^* = B' / \{B' + \exp[-G'(x_2 / h_{90})^2 \cos \alpha]\} \quad (2.125)$$

Nota-se que surgiram duas constantes: B' e G' . A condição h_{90} permite obter uma relação entre as constantes e a fração de vazios média na seção transversal, fornecendo mais uma equação:

$$B' = 9 \exp(-G' \cos \alpha) \quad (2.126)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{h_{90}} \int_0^{h_{90}} \bar{C}^* dx_2 \quad (2.127)$$

É interessante notar que modelo de Wood (1984) não apresenta a descontinuidade encontrada na proposta de Straub e Anderson (1958).

3) Modelo de Chanson (1996).

Seguindo procedimentos fundamentados em argumentação física e equações de conservação, Chanson (1996) propôs um novo modelo matemático para perfis de fração de vazios. A primeira equação apresentada por Chanson (1996) possui a forma da equação de conservação

de massa de uma espécie em escoamento, escrita em termos de grandezas médias e com a hipótese de Boussinesq (já que contém uma difusividade turbulenta):

$$\frac{D}{Dt} \overline{C^*} = -\text{div} \vec{q}_{\text{ar}} \quad (2.128)$$

O segundo membro da equação é o divergente do fluxo de ar, definido como:

$$\vec{q}_{\text{ar}} = -D_t \nabla \overline{C^*} + \overline{C^*} \vec{v}_r \quad (2.129)$$

D_t é a difusividade turbulenta e v_r a velocidade de ascensão das bolhas de ar (um vetor vertical. A sua componente em x_2 (eixo perpendicular ao fundo) é $v_r \cos \alpha$ e em x_1 (eixo paralelo ao fundo e positivo no sentido do escoamento) é $-v_r \sin \alpha$). A equação 2.128 assume que a densidade das bolhas de ar é constante, *i.e.*, os efeitos de compressibilidade são desprezíveis.

Para escoamento bidimensional, a equação da continuidade em coordenadas cartesianas é escrita com a seguinte forma (resultado da substituição da equação 2.129 na equação 2.128):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 \overline{C^*}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (v_2 \overline{C^*}) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D_{x_1} \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D_{x_2} \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} (-v_r \overline{C^*} \sin \alpha) - \frac{\partial}{\partial x_2} (v_r \overline{C^*} \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.130)$$

em que v_r é positiva para cima ao longo de x_2 (perpendicular ao fundo), α é o ângulo de inclinação do canal e D_{x_i} são as componentes da difusividade turbulenta. Considerando a região de equilíbrio do escoamento, a equação 2.130 é simplificada com:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\text{qualquer grandeza}) = 0 \text{ e } v_{x_2} = 0$$

Logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D_{x_2} \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} (v_r \overline{C^*}) \cos \alpha \quad (2.131)$$

A força de flutuação em um corpo submerso é igual à diferença entre as componentes verticais de pressão que atuam em suas partes superior e inferior. Para uma única bolha subindo com velocidade constante em um fluido calmo, o balanço de forças envolve a força de arrasto, força peso e força de flutuação. Desprezando o peso de ar no interior da bolha, a velocidade de subida da bolha ao quadrado é proporcional ao gradiente de pressão:

$$v_r^2 \propto -\frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (2.132)$$

No escoamento bifásico ar-água, a pressão local e o gradiente de pressão em qualquer posição x_2 é (Chanson, 1996, p.296):

$$p(x_2) = \int_{x_2}^{+\infty} \rho(1 - \overline{C^*}) g \cos \alpha dx_2 \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}(x_2) = \rho(1 - \overline{C^*}) g \cos \alpha \quad (2.134)$$

A densidade local a mistura ar-água é $\rho = \rho(1-C) + \rho_{ar}C$, tendo sido desprezado o termo que envolve a densidade do ar. Considerando a velocidade de subida da bolha submetida a um gradiente de pressão hidrostático (*i.e.*, $\partial p/\partial x_2 = \rho g \cos \alpha$), a velocidade de ascensão da bolha em um fluido com densidade $\rho(1-C)$ é:

$$v_r^2 = [(v_r)_{hid}]^2 (1 - \overline{C^*}) \quad (2.135)$$

em que “hid” indica que v_r é a velocidade da bolha em um gradiente de pressão hidrostático. Substituindo a equação 2.135 na equação 2.131, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(D_t \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial x_2} \right) = (v_r)_{hid} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{C^*} \sqrt{1 - \overline{C^*}} \right) \quad (2.136)$$

D_t é a difusividade na direção normal à direção do escoamento ($D_t = D_{x_2}$) e a velocidade $(v_r)_{hid}$ é considerada constante. Em termos adimensionais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} \left(D' \frac{\partial \overline{C^*}}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\overline{C^*} \sqrt{1 - \overline{C^*}} \right) \\ \begin{cases} y' = x_2 / h_{90} \\ D' = D_t / [(v_r)_{hid} h_{90} \cos \alpha] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.137)$$

A primeira integração desta equação resulta em:

$$\frac{\partial \overline{C^*}}{\partial y'} = \frac{1}{D'} \overline{C^*} \sqrt{1 - \overline{C^*}} + \text{constante} \quad (2.138)$$

No desenvolvimento seguinte é considerada apenas a solução para “constante = 0”.

$$\frac{\partial \overline{C^*}}{\partial y'} = \frac{1}{D'} \overline{C^*} \sqrt{1 - \overline{C^*}} \quad (2.139)$$

Assumindo turbulência homogênea perpendicular ao escoamento, a integração da equação anterior conduz ao seguinte resultado:

$$\sqrt{1-\bar{C}^*} = \operatorname{tgh}\left(K' - \frac{y'}{2D'}\right) \quad (2.140)$$

Nesta equação K' é uma constante de integração. Pode-se escrever:

$$\bar{C}^* = 1 - \operatorname{tgh}^2\left(K' - \frac{y'}{2D'}\right) \quad (2.141)$$

Nota-se que a fração de vazios é função de dois parâmetros constantes: K' e D' . Uma relação entre D' e K' é deduzida a partir da condição de contorno h_{90} ($y'=1$):

$$\begin{aligned} K' &= K^* + \frac{1}{2D'} \\ \therefore K^* &= \operatorname{tgh}^{-1}\left(\sqrt{0,1}\right) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Se a difusividade é desconhecida, pode-se utilizar a concentração média de ar:

$$\bar{C} = \int_0^1 \bar{C}^* dy' \quad (2.143)$$

Isto produz:

$$\bar{C} = 2D' \left[\operatorname{tgh}\left(K^* + \frac{1}{2D'}\right) - \operatorname{tgh}(K^*) \right] \quad (2.144)$$

Aqui termina a apresentação do modelo de Chanson (1996). ■

Comparações realizadas por Matos (1999) revelaram uma boa concordância entre o modelo de Wood (1984) e perfis experimentais, apesar daquele modelo ter sido concebido sem levar em conta a existência de degraus. Boes e Hager (2003, p.667) comentam que o modelo de Chanson (1996) apresentou boa concordância com os pontos experimentais, exceto para pequenos valores de y' . Alguns pontos experimentais destes autores foram apresentados em comparação ao modelo de Chanson (1996) por Simões (2008, p.83). Arantes (2007) comparou os seus resultados numéricos com os dois últimos modelos apresentados e encontrou melhores concordâncias com a proposta de Wood (1984).

2.6.4 Cavitação e campo de pressões

O surgimento de uma segunda fase sob a forma de bolhas preenchidas por gases no interior de um líquido é denominado cavitação. Se a bolha surgir devido à presença de uma substância com composição química diferente daquela do líquido, denomina-se cavitação gasosa. De outro modo, se o aparecimento da bolha ocorrer devido à mudança de fase do líquido, define-se a cavitação como vaporosa. É importante destacar que, diferente da ebulição, a cavitação ocorre sem o aquecimento do líquido. Para que as bolhas sejam formadas, deve haver no campo de pressões zonas com ocorrências de valores suficientemente baixos.

De uma forma geral, acredita-se que as bolhas formadas nas zonas de baixa pressão entram em colapso em regiões onde a pressão não é suficiente para sustentar a existência das mesmas. Esse colapso é muito rápido e produz um pulso local de pressão de grande valor. Se o colapso ocorrer junto à superfície sólida, é esperado que ela seja deteriorada devido aos esforços originados durante a implosão. Rayleigh (1917) desenvolveu um exemplo numérico cujo resultado demonstra que a pressão interna nos últimos estágios do colapso de uma bolha de vapor de água é 1260 vezes maior do que a pressão do fluido em um ponto afastado da interface vapor-água da bolha. Com números tão elevados, os efeitos do fenômeno sobre superfícies sólidas que compõem estruturas hidráulicas são altamente destrutivos, como ilustra a Figura 2.21. Pinto (1988, p.84) menciona que o colapso das bolhas pode ser acompanhado de pressões próximas de 7000 a 70000 kg/cm² e, se a implosão ocorrer a cerca de 1,0 mm da superfície sólida, as tensões sobre o contorno não causam prejuízos.

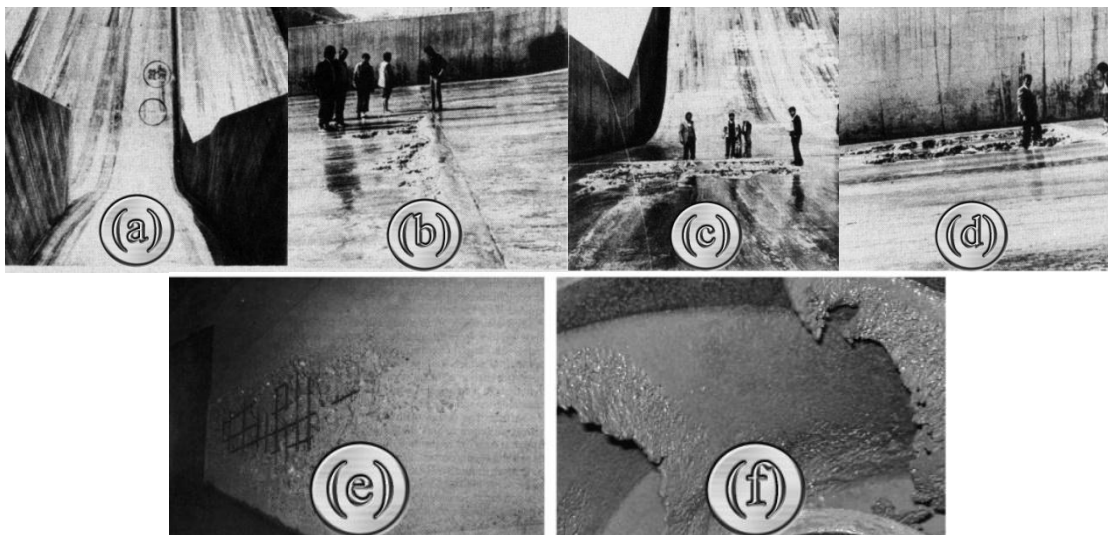


Figura 2.21 – Desgastes provocados pela cavitação. Em concreto: (a-d) Barragem Keban (e) Barragem Dworshak; (e) superfície de aço. Fonte: (a-d) Aksoy e Ethembabaoglu (1979, p.373); (e) Regan, Munch e Schrader (1979, p.190); (b) Rotor utilizado para ilustrar o desgaste provocado pela cavitação – EESC – USP.

O crescimento de uma bolha de vapor decorrente do fenômeno de cavitação vaporosa é favorecido pela existência de um núcleo. Esse núcleo pode ser sólido ou uma pequena bolha de gás presente no escoamento. Em um experimento realizado por Harvey, McElroy e Whiteley (1947, p.162), constatou-se que a presença de núcleos na água propiciava o surgimento de cavitação para velocidades menores que 3 m/s. Ao retirar possíveis núcleos e superfícies hidrofóbicas, os autores conseguiram a formação inicial de cavidades com velocidades muito superiores, atingindo 37 m/s. Os mesmos autores propuseram que a existência de núcleos de gás em pequenas cavidades sobre superfícies sólidas ou em partículas de poeira existentes na água podem atuar como núcleos. Deste modo, exceto em situações controladas ou elaboradas com critérios específicos, há uma grande chance de haver núcleos que propiciem a cavitação em estruturas e partes móveis utilizadas em hidráulica. Em uma superfície de concreto, a existência de irregularidades contribui para a formação de núcleos e acelerações locais elevadas. Sendo o cimento a parte menos resistente do concreto é esperado que a sua deterioração ocorra antes. Desta forma, o fenômeno é intensificado com o aumento das irregularidades superficiais em função da exposição dos agregados e, em seguida, do aço.

Equação de Rayleigh (1917)

Rayleigh (1917) utilizou princípios básicos de conservação e algumas hipóteses com o intuito de descrever a evolução de uma bolha esférica. As hipóteses utilizadas na dedução podem ser enunciadas da seguinte maneira: (1) A bolha é formada por moléculas iguais às do líquido na fase vaporosa; (2) A pressão de vapor na bolha não é função do raio; (3) O líquido é incompressível; (4) O movimento considerado é radial para ambas as fases; (5) Os efeitos viscosos são desprezíveis; (6) A bolha é esférica; (7) Não há transporte de massa através da interface; (8) O fluido é newtoniano. Com tais considerações, a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes, em coordenadas esféricas, assumem as seguintes formas:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} = 0 \quad (2.145)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (2.146)$$

em que r = raio; v = velocidade; p = pressão; ρ = massa específica do líquido e t = tempo.

Em uma posição muito distante da bolha, define-se $p(\infty, t) = p_\infty$. Sendo p_i a pressão interna da bolha, p_e a pressão externa e σ a tensão superficial, a segunda lei de Newton pode ser aplicada, resultando em: $p_i - p_e = 2\sigma/R$. Em palavras, a diferença entre as pressões é compensada pela força devida à tensão superficial para que a bolha permaneça em equilíbrio.

O uso desta igualdade permite escrever a segunda condição de contorno da equação de Rayleigh: $p(R,t) = p_v - 2\sigma/R$ (p_v = pressão de vapor, no interior da bolha e, $p(R,t)$ = pressão imediatamente fora da bolha). Com essa consideração, observa-se que a bolha possui paredes muito delgadas em relação ao seu raio. Integrando a equação da continuidade, vem

$$\int \frac{\partial v_r}{v_r} = -2 \int \frac{\partial r}{r} \Rightarrow v_r r^2 = F(t) \quad (2.147)$$

O uso da equação anterior na parede da bolha ($r = R$) fornece o seguinte resultado:

$$\dot{R}R^2 = F(t) \quad (2.148)$$

em que $v_r(R,t) = \dot{R}$.

Com este resultado e a equação 2.147 é possível expressar a velocidade em qualquer posição radial do líquido (v_r) através da seguinte formulação:

$$v_r = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \dot{R} \quad (2.149)$$

Substituindo a equação 2.149 na equação 2.146, obtém-se:

$$\left[\frac{2R}{r^2} \dot{R}^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \ddot{R} \right] + \left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 R^2 \dot{R}^2 - \frac{2}{r^3} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (2.150)$$

Integrando, o resultado é:

$$-\frac{1}{r} (2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}) + \frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4} = -\frac{1}{\rho} p(r,t) + \Phi(t) \quad (2.151)$$

A função que aparece em consequência da integração pode ser encontrada com a condição de contorno $p(\infty,t) = p_\infty$, resultando em:

$$\Phi(t) = \frac{p_\infty}{\rho} \quad (2.152)$$

Com a segunda condição de contorno, obtém-se a equação de Rayleigh:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_v - p_\infty}{\rho} - \frac{2\sigma}{\rho R} \quad (2.153)$$

É interessante notar que o conjunto de hipóteses e desenvolvimentos que culminaram na equação anterior foi capaz de reduzir o sistema não linear de EDP's em uma EDO não linear

cuja solução é uma função que descreve o comportamento do raio da bolha com o tempo. A equação também pode ser expressa com variáveis adimensionais:

$$\begin{cases} \zeta = R/R_0 \Rightarrow R = \zeta R_0 \Rightarrow dR/d\zeta = R_0 \\ T = t/\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}} \Rightarrow t = T\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}} \Rightarrow dt/dT = \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}} R_0 \frac{d\zeta}{dT} \right.$$

Substituindo-os na equação 2.153, obtém-se:

$$\zeta^2 \frac{d^2\zeta}{dT^2} + \frac{3}{2}\zeta \left(\frac{d\zeta}{dT}\right)^2 = \zeta \left(R_0 \frac{p_v - p_\infty}{\sigma} \right) - 2 \quad (2.154)$$

Equação de Rayleigh-Plesset

Plesset (1949) deduziu uma equação semelhante à de Rayleigh. Em seus desenvolvimentos, a pressão no interior da bolha (p_B) não é simplesmente a pressão de vapor, sendo dependente do tempo, os efeitos viscosos foram considerados e a temperatura no interior da bolha também. Com ν igual à viscosidade cinemática da fase líquida, a equação de Rayleigh-Plesset assume a seguinte forma:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_B - p_\infty}{\rho} - \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{4\nu}{R}\dot{R} \quad (2.155)$$

Detalhes sobre a dedução podem ser encontrados em Brennen (1995).

Sobre a implosão da bolha

As teorias apresentadas anteriormente (equações de Rayleigh e Rayleigh-Plesset) contêm uma hipótese fundamental que não corresponde bem à realidade física. Trata-se da geometria esférica e desaparecimento da bolha.

Knapp, Daily e Hammitt (1970, p.344) e Falvey (1990) separam as possibilidades de colapso em diferentes grupos. Seguindo a divisão apresentada por Falvey (1990), ilustrada pela Figura 2.22, o primeiro grupo de eventos leva em conta o colapso de uma bolha em um líquido em repouso. O volume da bolha diminui com o tempo até atingir um valor mínimo (fim do primeiro colapso). Em seguida, o volume da bolha aumenta com o tempo, embora não alcance o valor inicial, e diminui em seguida. Neste segundo estágio o crescimento da bolha é acompanhado de uma onda de choque esférica, como ilustrado na Figura 2.22a. O termo em inglês *rebound* é utilizado para denotar os numerosos ciclos que podem ocorrer. O segundo grupo expõe a análise do colapso de uma bolha submetida a um gradiente de pressões. A

bolha, inicialmente esférica, é distorcida assumindo a forma aproximada de uma semiesfera oca. A parte inferior da esfera é então a porta de entrada para um jato de água com alta velocidade, como ilustrado na Figura 2.22b. A estrutura seguinte indicada pelo autor é uma formação toroidal. O terceiro grupo é um pouco mais complexo, pois inclui a existência de um contorno sólido junto ao colapso. O primeiro colapso é semelhante ao descrito para o segundo grupo. Após o instante em que há formação do toro, passam a existir duas ondas de choque esféricas, o surgimento de uma bolha maior e a propagação de uma onda secundária e uma primária. Finalmente, o último grupo considera o colapso de um aglomerado de bolhas, como ilustrado na Figura 2.22d. Nota-se a formação de ondas de choque, assim como nos casos anteriores.

O trabalho de Ellis (1953) contém imagens interessantes que ilustram distorções bolhas durante o colapso em diferentes situações. Estudos realizados por Frost (1985) mostraram que uma bolha inicialmente esférica é convertida em uma bolha cuja superfície é formada por numerosas estruturas menores. Há uma distorção considerável em relação à esfera, como ilustrado na Figura 2.23. Suslick (1989), citado por Pfister (2008, p.16), também apresenta uma fotografia interessante de uma forma toroidal estabelecida durante o colapso.

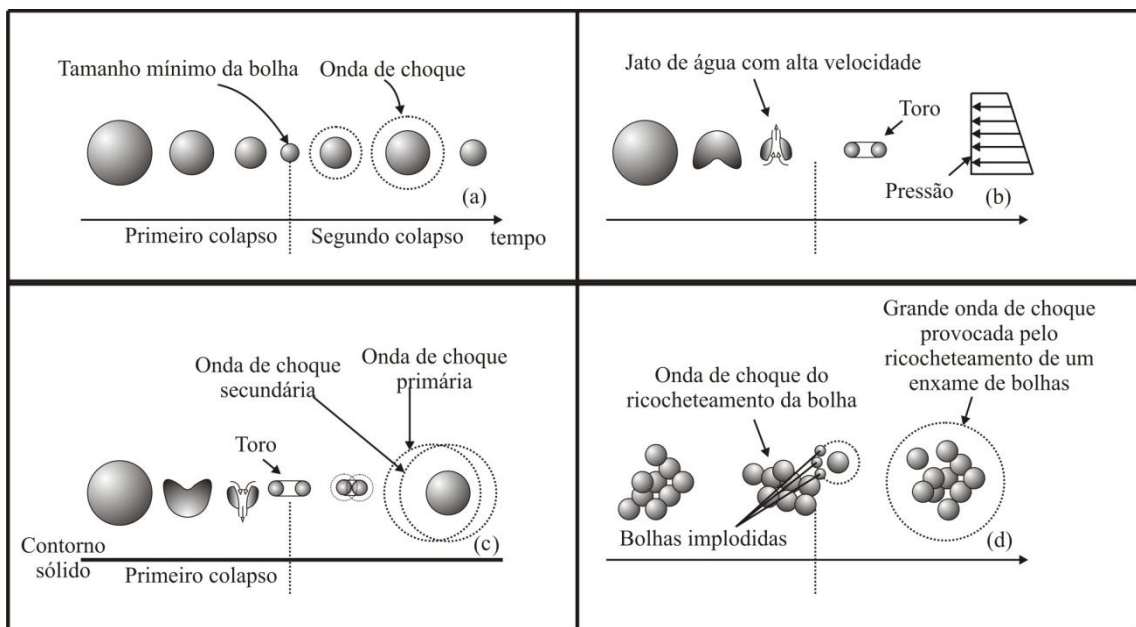


Figura 2.22 – Diferentes estágios do colapso
Fonte: Adaptado de Falvey (1990, p.9)

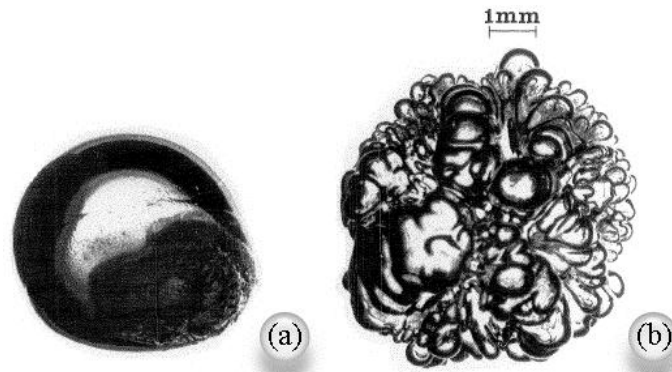


Figura 2.23 – Bolha de éter em glicerol antes do colapso (a) e após o primeiro colapso (b).
Fonte: Frost (1985, p.64)

As forças decorrentes da cavitação podem ser exploradas em aplicações benéficas. Um interessante exemplo encontrado na natureza é o camarão de estalo (*Alpheus heterochaelis*). Esse animal marinho produz um jato de alta velocidade ao fechar uma de suas garras em um tempo muito pequeno. Imagens obtidas por Versluis *et al.* (2000, p.2115) com uma câmera de alta velocidade (40.500 fps) mostram a formação e desaparecimento da cavidade. Esses autores mediram as pressões nas proximidades do animal e verificaram que o colapso da bolha corresponde a um pico extremamente elevado de pressão, capaz de atordoar presas, oponentes territoriais, quebrar vidros de aquários e gerar imagens espúrias em sonares de submarinos. O ser humano tem utilizado a cavitação de diferentes formas, como, por exemplo, para limpeza ultra-sônica, realizações de cortes com água, para a desinfecção da água e para a geração de luz (*sonoluminescence*). Um exemplo recente é o uso da formação e colapso de bolhas com o intuito de produzir trabalho (Schulz *et al.*, 2011).

Número adimensional para cavitação

O número adimensional empregado nos estudos sobre cavitação é o número de Euler e pode ser definido, de uma forma geral, como:

$$\sigma_c = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad (2.156)$$

Nesta definição σ_c é denominado também como número de cavitação ou de Leroux, p é uma pressão absoluta em um ponto de estudo no líquido e V é uma velocidade de referência. A partir da definição contida na equação anterior é possível encontrar variados tipos de números adimensionais de cavitação. Como exemplo, pode-se citar o coeficiente de cavitação de Thoma (Porto, 2006, p.158). Pfster, Hager e Minor (2006a,b) definiram um coeficiente de

cavitação para vertedores em degraus. Esses autores utilizaram como referência a seção transversal onde há o início da aeração e definiram o número da seguinte forma:

$$\sigma_{bi} = \frac{h_{pi} - h_v + h_a}{\frac{v_{wi}^2}{2g}} \quad (2.157)$$

em que h_{pi} = carga devida à pressão no fundo, h_v = carga correspondente à pressão de vapor e h_a = valor correspondente à pressão atmosférica. A velocidade v_{wi} é calculada com a profundidade equivalente apenas de água na seção de início da aeração.

Raio crítico de uma bolha em equilíbrio

É possível definir um raio crítico para uma bolha estática que contém vapor e gás. Empregando mais uma vez a hipótese de bolha esférica, o seu volume gasoso pode ser escrito como proporcional ao cubo do raio e a sua massa (gasosa) que, por hipótese, é independente do tempo. Portanto, sendo φ uma função da temperatura e do gás, a pressão parcial no gás é φ/r^3 . A segunda lei de Newton aplicada a uma bolha esférica assume a seguinte forma:

$$r\rho \frac{dv}{dt} = p_v + \frac{\varphi}{r^3} - p - \frac{2\sigma}{r} \quad (2.158)$$

Para uma bolha em equilíbrio a aceleração é nula e a equação anterior permite escrever:

$$p - p_v = \frac{\varphi}{r^3} - \frac{2\sigma}{r} \quad (2.159)$$

A diferença entre a pressão no líquido e a pressão de vapor para a condição de equilíbrio está relacionada com o raio da bolha de acordo com a equação anterior. Se esta equação for válida, pode-se determinar o raio crítico (r_c):

$$\left. \frac{d}{dr} (p - p_v) \right|_{r=r_c} = -3 \frac{\varphi}{r^4} + \frac{2\sigma}{r^2} = 0 \Rightarrow r_c = \sqrt{\frac{3\varphi}{2\sigma}} \quad (2.160)$$

A equação precedente pode ser expressa em termos da diferença entre as pressões no líquido e a pressão de vapor. É interessante notar que $r_c > 0$ e $\sigma > 0$, portanto, deve ser respeitada a desigualdade $p < p_v$.

$$r_c = \frac{4\sigma}{-3(p - p_v) \Big|_{r=r_c}} \quad (2.161)$$

De acordo com Knapp, Daily e Hammitt (1970, p.79), as equações 2.160 e 2.161 foram obtidas por Blake (1949). Com o intuito de evidenciar os comportamentos previstos pelas equações apresentadas neste item, considera-se válido adimensionalizar a equação 2.159 de tal maneira que ela assuma a seguinte forma:

$$p^* = \frac{p - p_v}{(p - p_v)|_{r=r_c}} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r_c} \right)^{-3} - 3 \left(\frac{r}{r_c} \right)^{-1} \right] \quad (2.162)$$

Com este resultado fica evidente que a relação entre os adimensionais não depende de φ e σ . A Figura 2.24 ilustra o comportamento de $p^*(r/r_c)$. Nota-se que para um mesmo p^* podem existir dois valores de r/r_c .

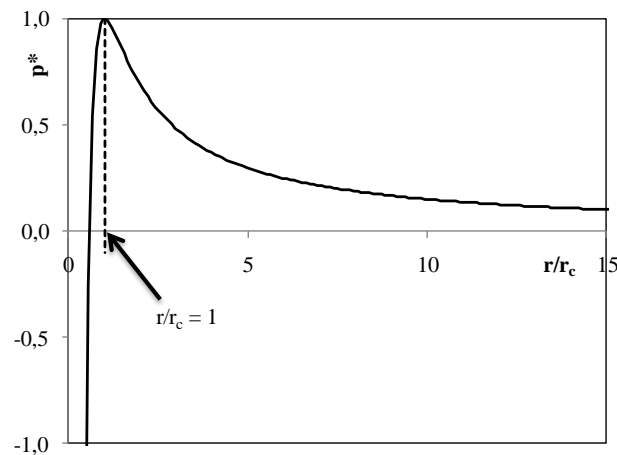


Figura 2.24 – Relação entre os adimensionais da equação 2.162

Estudos sobre o campo de pressões

Se em um modelo físico o número de cavitação aponta para a ocorrência deste fenômeno, um protótipo semelhante deverá apresentar o mesmo potencial de cavitação se o seu número de cavitação for idêntico ao do modelo. Sendo X o protótipo e Y o modelo físico correspondente, esta afirmação conduz ao seguinte resultado:

$$\sigma_{cX} = \sigma_{cY} \Rightarrow (p - p_v)_X / (p - p_v)_Y = V_X^2 / V_Y^2 \quad (2.163)$$

Os modelos físicos de vertedores normalmente são construídos seguindo a semelhança de Froude. Sendo λ a escala geométrica ($\lambda \geq 1$) e utilizando a semelhança de Froude, pode-se escrever:

$$Fr_X = Fr_Y \Rightarrow \frac{V_X}{\sqrt{gL_X}} = \frac{V_Y}{\sqrt{gL_Y}} \Rightarrow \frac{V_X}{V_Y} = \sqrt{\frac{L_X}{L_Y}} = \sqrt{\lambda} \quad (2.164)$$

Combinando as equações precedentes com a pressão relativa $p_r = p - p_a$, obtém-se:

$$(p - p_v)_X / (p - p_v)_Y = \lambda \Rightarrow p_{rX} = (p_{rY})\lambda + p_a(\lambda - 1) + p_v(1 - \lambda) \quad (2.165)$$

Observando o resultado expresso pela equação 2.165, nota-se que pressões relativas negativas obtidas em um modelo físico podem levar a diferentes pressões relativas em um protótipo quando $\lambda > 1$. Essas pressões no protótipo podem ou não assumir valores negativos com este critério de extrapolação. Exemplo: Se $p_{rY}/\gamma = -1,0 \text{ mH}_2\text{O}$ e $\lambda = 10$, $p_{rX}/\gamma = 79,9 \text{ mH}_2\text{O}$ (com $p_v/\gamma = 0,32 \text{ mH}_2\text{O}$ e $p_a = 101 \text{ kPa}$). Utilizando um segundo critério, para o qual se define $p_{rX}/p_{rY} = \lambda$, o valor de p_{rX} seria igual a $-10 \text{ mH}_2\text{O}$. Se $\lambda = 15$, a pressão extrapolada assumiria um valor incorreto. Apesar deste fato, entende-se que medições realizadas em modelos podem fornecer pressões negativas que apontem para o risco de ocorrência de cavitação no protótipo. Observa-se, entretanto, a necessidade de mais estudos neste item particular.

Tozzi (1992) realizou medições de pressões nos pisos e espelhos dos degraus em um modelo físico com $1V:0,75H$. Os seus resultados mostraram a ocorrência de pressões negativas na parte superior do espelho e positivas na extremidade final dos pisos. Com o uso de transdutores de pressão, o referido autor obteve variações entre $-0,5$ e $0,4 \text{ mH}_2\text{O}$. Entre os seus resultados, Tozzi apresentou curvas com probabilidade de ocorrência de pressões negativas iguais a 1% e 10%. Tais curvas foram obtidas em duas posições ao longo do canal, uma monofásica e a outra bifásica. As curvas desenvolvidas relacionam um coeficiente de pressão do tipo $(p_r/\gamma)/[V^2/(2g)]$ com h/k . Desta forma, a extrapolação dos resultados deve ser feita com a relação $p_{rX}/p_{rY} = \lambda$.

Olinger (2001) e Olinger e Brighetti (2004) apresentaram resultados de estudos experimentais desenvolvidos em um modelo físico com $1V:0,75H$ alimentado por uma entrada sob pressão. Foram utilizadas três configurações e, a cada uma delas foi associada uma escala de transposição calculada com base em um degrau com altura de 60 cm : (1) $s = 12,0 \text{ cm}$ com escala 1:5; (2) $s = 6,0 \text{ cm}$ com escala 1:10 e (3) $s = 3,0 \text{ cm}$ com escala 1:20. As vazões máximas utilizadas nos testes situaram-se entre $0,014$ e $0,246 \text{ m}^3/\text{s}$. Os resultados obtidos por Olinger (2001) mostraram a ocorrência de pressões negativas nos espelhos dos degraus. Estes autores também apresentaram uma metodologia destinada a prever a ocorrência da cavitação com base nos valores obtidos no modelo físico e extrapolados de acordo com as escalas mencionadas acima. Na avaliação do risco de cavitação nos degraus, Olinger (2001) considerou a conclusão obtida por Lopardo *et al.* (1982) para bacias de

dissipação por ressalto hidráulico. Estes autores concluíram que a cavitação em uma bacia de dissipação semelhante à estudada por eles pode acontecer se a probabilidade de ocorrência de pressões flutuantes sub-atmosféricas atingir 1% em termos de frequência.

Chen, Daí e Liu (2002) utilizaram as equações de Navier-Stokes médias de Reynolds e o modelo de turbulência k- ϵ com o intuito de simular o escoamento em um vertedor em degraus. Estes autores mediram as pressões em um modelo correspondente ao simulado e obtiveram boa concordância entre os resultados, exceto na posição próxima à superfície livre.

Alguns critérios relacionados à cavitação indicam o uso de velocidades médias máximas. Peterka (1953) constatou experimentalmente que frações de vazios médias junto ao contorno sólido próximas de 5% a 8% são suficientes para evitar os danos decorrentes da cavitação. Boes e Hager (2003b), com o uso da equação 2.118 e os valores indicados por Peterka (1953), encontraram expressões para posições adimensionais críticas X_i ($= X_{i,c}$):

$$X_{i,c}(0,05) = 5,0(\text{sen}\alpha)^{-2,3} \quad (2.166)$$

$$X_{i,c}(0,08) = 10,0(\text{sen}\alpha)^{-2,3} \quad (2.167)$$

Os autores comentam que a distância requerida para que haja uma aeração suficiente no pseudo-fundo é muito sensível ao valor da fração de vazios utilizada. Considerando que a aeração é mais intensa nos protótipos do que nos modelos, Boes e Hager (2003b) recomendam o uso da equação 2.167 para propósitos práticos. Para a região desprotegida pela falta de ar, os autores propõem que as velocidades médias não excedam um valor máximo igual a 20 m/s.

Arantes e Porto (2005) e Arantes (2007) simularam o escoamento em vertedores em degraus com diferentes configurações. Com uma geometria semelhante a utilizada por Olinger (2001), os autores realizaram comparações entre as pressões experimentais e numéricas, tendo encontrado bons resultados em relação aos valores experimentais.

Gomes (2006) realizou experimentos em um modelo físico com 1V:0,75H e com três alturas diferentes para os degraus ($s = 3$ cm, $s = 6$ cm e $s = 9$ cm). Após análise estatística dos dados obtidos com transdutores de pressão, Gomes (2006) indicou uma vazão específica máxima de 15,6 m²/s para que não ocorra cavitação. O autor também sugere uma velocidade média máxima na seção de início da aeração, igual a 17 m/s. Entre os seus resultados, o referido autor apresentou um critério destinado a prever velocidades a partir das quais a cavitação pode ocorrer (V_{cr}). Tal critério é válido para x/L_A entre 0,35 e 1,20 e pode ser utilizado com a seguinte formulação:

$$V_{cr} = 16,29 + \frac{9,91}{1 + \exp\left[\frac{(x/L_A - 0,60)}{0,23}\right]} \quad (2.168)$$

A unidade de V_{cr} é m/s. Esta equação é válida para $h_c/s \leq 4,09$, $48^\circ \leq \alpha \leq 58^\circ$.

Amador, Sánchez-Juny e Dolz (2009) obtiveram resultados experimentais correspondentes a um modelo com 1V:0,8H. As pressões foram obtidas ao longo dos pisos e espelhos dos degraus e, entre os resultados apresentados, encontram-se variações dos coeficientes de pressão em função da distância ao longo do vertedor. As definições para os coeficientes de pressão utilizados por estes autores incluem o uso de uma pressão média (p_m) e o rms das flutuações de pressão (σ_p):

$$C_p = (p_m / \gamma) / (V^2 / 2g) \quad (2.169)$$

$$C_p' = (\sigma_p / \gamma) / (V^2 / 2g) \quad (2.170)$$

A montante do ponto de início da aeração, o valor de C_p' cresce ao longo do vertedor e, a jusante do início da aeração a evolução de ambos os coeficientes mostra uma tendência decrescente.

2.7 Tópicos especiais

Além dos fenômenos e propostas estudadas com maior frequência é possível encontrar, na literatura, contribuições sobre temas mais específicos ligados aos vertedores e canais em degraus. Entre tais assuntos, encontram-se os seguintes tópicos:

- 1) Canais em degraus com grandes dimensões;
- 2) Canais com degraus formados por gabiões;
- 3) Características de ressaltos hidráulicos a jusante de vertedores em degraus;
- 4) Escoamentos com jatos mergulhantes ou ressaltos submersos;
- 5) Recomendações para o projeto da altura dos muros laterais;
- 6) Geometria de soleiras com alturas de degraus variadas;
- 7) Aeradores de fundo para vertedores em degraus;
- 8) Defletor na extremidade final do canal em degraus;
- 9) Uso de degraus espaçados;
- 10) Degraus inclinados e com soleiras sobre os pisos;
- 11) Canais em degraus com muros laterais convergentes;
- 12) Uso de degraus pré-moldados;
- 13) Comprimento de bacias de dissipação;
- 14) Observação sobre a descrição do escoamento aerado em vertedores;
- 15) Mecânica dos fluidos computacional e vertedores em degraus;
- 16) Reoxigenação da água em escoamento em canais em degraus;

A seguir são apresentadas sínteses sobre os temas listados acima. Uma revisão estendida sobre alguns temas pode ser encontrada em Simões (2008) e Simões, Porto e Schulz (2009).

1) Canais em degraus formados por rochas

É usual adotar um ressalto hidráulico como dissipador de energia em uma bacia de dissipação. Entretanto, para estruturas muito elevadas, essa alternativa pode não ser viável. Poggi (1949, 1956) propôs o uso de um canal em degraus com grandes dimensões, sendo que cada degrau deve funcionar como uma bacia de dissipação e, em cada uma das extremidades dos degraus, deve ser utilizado um perfil WES. O vertedor da barragem Tehri, situada no Vale do Ganges do Himalaia Central, por exemplo, possui 218 m de altura e 777 m de comprimento (horizontal), aproximadamente (Vittal e Porey, 1987). A Figura 2.25 ilustra uma estrutura deste tipo.

Um segundo exemplo de canal em degraus com grandes dimensões foi apresentado na Figura 2.2a, no início desta revisão bibliográfica. Naquele caso, os degraus do vertedor canadense são formados por rochas e não possuem perfis desenhados de acordo com as recomendações de Scimemi.

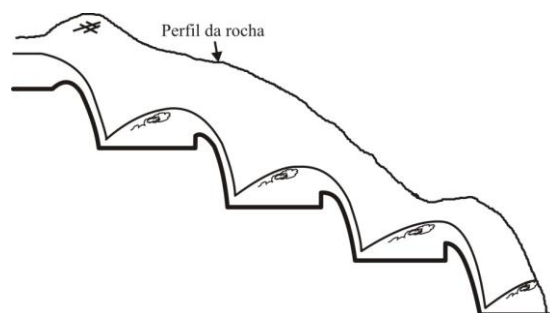


Figura 2.25 – Canal em degraus com grandes dimensões
Fonte: Adaptado de Chow (1959)

2) Canais com degraus formados por gabiões

A idéia de utilizar gabiões para construir um canal em degraus foi apresentada por Stephenson (1979), como ilustrado pela Figura 2.26. Em seu estudo experimental, o autor obteve relações adimensionais que envolvem a energia dissipada em relação à altura do degrau de forma semelhante a aquela expressa pela equação 2.19, mas válida para um degrau. Sendo $D = q^2/(gs^3)$, ou seja, $(h_c/s)^3$, a equação proposta por Stephenson (1979), deduzida com o auxílio das equações de Rand (1955), é:

$$\frac{\Delta H}{s} = 1 + 1,5D^{0,333} - 0,54D^{0,425} - 1,71D^{0,15} \quad (2.171)$$

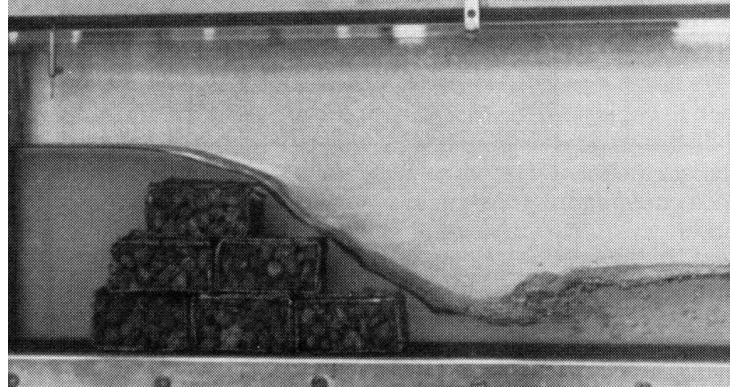


Figura 2.26 – Canal em degraus formados por gabões

Fonte: Stephenson (1979)

Peyras, Royet e Degoutte (1992) estudaram o escoamento em um modelo físico de um canal em degraus formado por gabões com escala 1:5 e o uso da semelhança de Froude. Os modelos construídos por estes autores incluíam o uso de placas de concreto sobre os pisos dos degraus, placas de concreto inclinadas sobre os pisos e degraus com soleiras terminais. Assim como no trabalho de Stephenson (1979), os resultados experimentais mostraram que a energia dissipada relativa à altura de um degrau depende do ângulo α .

3) Características de ressaltos hidráulicos a jusante de vertedores em degraus

Alguns pesquisadores construíram modelos físicos de vertedores em degraus com bacias de dissipação por ressalto hidráulico. Deste modo, há na literatura informações sobre características de ressaltos estabelecidos em tais modelos. Diez-Cascon *et al.* (1991) concluíram que o quadrado do número de Froude na seção subcrítica do ressalto é aproximadamente constante e igual a 0,041 para as condições testadas. O número de Froude ao quadrado pode ser utilizado para estabelecer a seguinte relação:

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{gFr_2^2}} \quad (2.172)$$

Com o valor indicado pelos autores substituído na equação anterior, obtém-se a forma proposta por eles:

$$h_2 = 1,355q^{2/3} \quad (2.173)$$

Pegram *et al.* (1999) realizaram estudos experimentais em um modelo com 1V:0,6H e chegaram a uma conclusão semelhante à dos autores citados anteriormente, mas com coeficientes distintos:

$$h_2 = 2,96q^{0,89} \quad (2.174)$$

Trabalhos recentes desenvolvidos por Ohtsu, Yasuda e Takahashi (2000, 2004) expõem relações entre h_2/h_c e H_{dam}/h_c e nos quais os autores concluíram que o primeiro adimensional é independente da relação s/h_c . Os pontos experimentais correspondentes a $\alpha = 55^\circ$ e $H_{\text{dam}}/h_c > 28$, apontam para um valor constante de $h_2/h_c = 2,55$ se o adimensional s/h_c estiver situado entre 0,6 e 1,25. Os autores perceberam também que a posição do ressalto é relevante na determinação de h_2/h_c .

Em um desenvolvimento analítico e experimental destinado a avaliação da cota de fundo de bacias de dissipação por ressalto hidráulico, Simões (2008) e Simões, Schulz e Porto (2010a) obtiveram a equação 2.175:

$$H_{\text{dam}}/h_c = 1,01Y/h_c + 2,15 \quad (2.175)$$

Nesta equação, $Y = H_{\text{dam}} - h_2$. Substituindo a definição de Y na equação 2.175 e rearranjando-a, obtém-se uma relação que demonstra a dependência de h_2 não só com a vazão específica, mas também com a altura H_{dam} , como pode ser visto por meio da equação 2.176. Nota-se as semelhanças entre os expoentes das vazões das fórmulas de Pegram *et al.* (1999) e da equação 2.176. O primeiro termo parece irrelevante devido ao fator 0,0099, entretanto, H_{dam}/h_c pode ser um número de magnitude considerável. Para $H_{\text{dam}}/h_c = 50$, por exemplo, obtém-se $h_2/h_c = 0,5 + 2,13$.

$$\begin{cases} \frac{h_2}{h_c} = 0,0099 \frac{H_{\text{dam}}}{h_c} + 2,13 \\ h_2 = 0,0099H_{\text{dam}} + 1,005q^{2/3}, \text{ válida para o S.I., } g = 9,806 \text{ m/s}^2 \end{cases} \quad (2.176)$$

4) *Escoamentos com jatos mergulhantes ou ressaltos submersos*

Um jato mergulhante em um vertedor em degraus pode ser observado quando o nível d'água a jusante do canal em degraus do sistema extravasor é elevado o suficiente para que parte do canal em degraus permaneça sob a água. As características de escoamentos desta natureza foram estudadas por Yasuda e Ohtsu (2000) para α entre $5,7^\circ$ e 55° . Uma revisão em português sobre o estudo desses pesquisadores foi apresentada por Simões (2008, p.123-129).

5) *Recomendações para o projeto da altura dos muros laterais*

O correto dimensionamento da altura dos muros laterais é essencial para evitar falhas em barragens. Estruturas de terra e enrocamento, por exemplo, podem não suportar, por períodos

prolongados, os desgastes ocasionados pelo excesso de água que por ventura ultrapasse os muros. Sendo assim, é comum adotar um muro com altura uniforme e igual à maior profundidade prevista para o escoamento. O emprego de coeficientes de segurança é recomendado devido às incertezas relacionadas às previsões. Uma segunda alternativa inclui considerar as diferentes profundidades ao longo do canal. Para tanto, há formulações de diversos autores que permitem prever a forma do perfil da superfície livre, como apresentado em Simões (2008), Simões, Schulz, Porto e Darzé (2010) e Schulz, Lobosco e Simões (2011). A Figura 29 ilustra um vertedor com muros laterais uniformes.

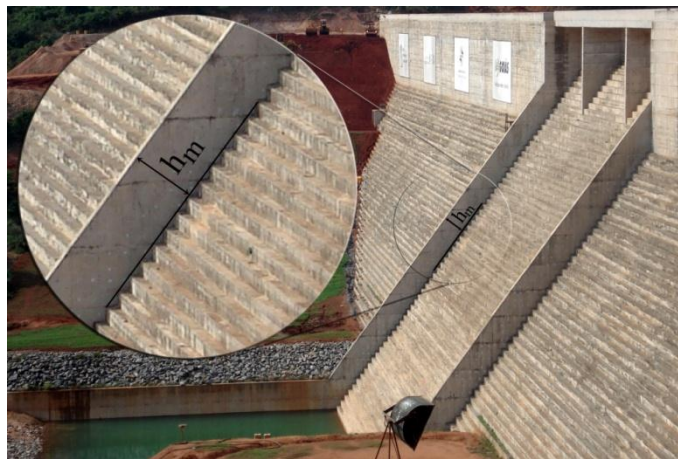


Figura 2.27 – Vertedor em degraus com muros laterais paralelos e com alturas uniformes, denotadas por h_m .
Fonte: Simões, Schulz, Porto e Darzé (2010).

6) Geometria de soleiras com alturas de degraus variadas

Alguns trabalhos experimentais utilizaram soleiras do tipo Scimemi ou Creager com degraus variados até o ponto de tangência, sendo referências quando se pretende utilizar essa alternativa (e.g. Tozzi, 1992; Olinger, 2000). Um método destinado a auxiliar a escolha das dimensões dos degraus foi apresentado por Garcia e Iguacel (1995).

7) Aeradores de fundo para vertedores em degraus e outras alternativas

Este é um dos temas de grande importância e com certa carência de informações. Importantes contribuições experimentais sobre aeradores de fundo em vertedores em degraus foram apresentadas por Pfister, Hager e Minor (2006a,b) e Zamora, Pfister, Hager e Minor (2008). Uma segunda proposta, fundamentada em soluções numéricas das equações de conservação em termos de grandezas médias foi desenvolvida na Escola de Engenharia de São Carlos por Arantes (2007).

Lueker *et al.* (2008) estudaram o uso de macro rugosidades adicionais implantadas a montante da soleira padrão do modelo físico do vertedor auxiliar da Barragem Folsom. A

Figura 2.28 ilustra duas configurações empregadas nos ensaios (Figuras 2.28a,b) e o aspecto da superfície livre com e sem o uso das macro-rugosidades (imagens da Figura 2.28c). Embora este estudo tenha sido desenvolvido nos Estados Unidos, considera-se válido destacar a participação de um pesquisador brasileiro no desenvolvimento desta alternativa. Como pode ser visto na Figura 2.28c, na terceira imagem, as rugosidades adicionais aumentaram a aeração superficial. Isto é percebido pelas ondas bifásicas (“água branca”) observadas na superfície.



Figura 2.28 – Uso de macro-rugosidades a montante da crista padrão para aumentar a aeração superficial: (a) e (b) duas configurações testadas pelos pesquisadores e (c) Três imagens correspondentes a: 1^a - Sem as macro-rugosidades, 2^a e 3^a – Correspondem a duas configurações diferentes.

Fonte: Lueker *et al.* (2008).

8) Defletor na extremidade final do canal em degraus

O uso de um defletor implantado com o intuito de afastar o local de impacto do jato proveniente do canal em degraus foi estudado por Tozzi (1992). Entre os seus resultados, o referido autor apresenta relações que permitem calcular o comprimento desde o final do defletor até a posição de impacto.

9) Uso de degraus espaçados

Kanashiro (1995) realizou experimentos em um modelo físico cuja característica principal era o uso de “degraus espaçados”. As imagens apresentadas por este pesquisador mostram que a geometria empregada também proporciona uma intensa aeração do escoamento. Entre os seus resultados é possível encontrar dados sobre dissipação de energia, que depende do espaçamento entre macro rugosidades e da relação entre a profundidade do escoamento e k .

10) Degraus inclinados e com soleiras sobre os pisos

Chinnarasri e Wongwises (2004, 2006) apresentaram resultados de estudos experimentais voltados à compreensão das características de escoamentos em canais em degraus com soleiras terminais e pisos em aclave. Os resultados destes autores contêm um conjunto de equações que possibilita a previsão de grandezas médias relevantes para o pré-dimensionamento de estruturas deste tipo. Uma discussão sobre o trabalho desses pesquisadores foi apresentada por Takahashi, Yasuda e Ohtsu (2008). Os resultados experimentais apresentados por eles mostram que a energia dissipada pelos degraus com soleiras terminais é um pouco maior que energia dissipada em estruturas sem soleiras.

Carvalho e Martins (2009) realizaram experimentos e simularam o escoamento em canais em degraus com soleiras situadas junto à posição central de cada piso e com perfis na extremidade final dos degraus. O modelo de turbulência empregado foi o $k-\varepsilon$ RNG e, entre as conclusões, percebe-se que os resultados numéricos apresentaram boa concordância com a experimentação.

11) Canais em degraus com muros laterais convergentes

O uso de muros laterais convergentes não é uma prática comum, sobretudo porque provoca a formação de ondas e conseqüente elevação da posição da superfície livre. Esse efeito pode ser visto nos trabalhos de Frizell (2006) e Hunt *et al.* (2008).

12) Uso de degraus pré-moldados

Verificações recentes do comportamento hidrológico de algumas bacias com barragens de terra mostraram que os vertedores podem não ser capazes de escoar vazões máximas. Com o intuito de proteger a face de terra contra galgamentos, Frizell, Matos e Pinheiro (2000) e Relvas e Pinheiro (2008) apresentaram resultados de estudos experimentais correspondentes ao escoamento em um canal com o fundo construído com degraus pré-moldados. As investigações desses autores incluíram características básicas do escoamento, como o fator de resistência e a quantidade de ar incorporada.

13) Comprimentos de bacias de dissipação

Vertedores em degraus normalmente são associados a grandes dissipações de energia. Apesar disto, em grande parte dos problemas o uso de bacias de dissipação não deixa de ser necessário. Simões (2006, 2008) e Simões, Schulz e Porto (2010a) desenvolveram relações entre o comprimento da bacia adimensionalizado (L_i/H_{dam}) com o adimensional H_{dam}/h_c ,

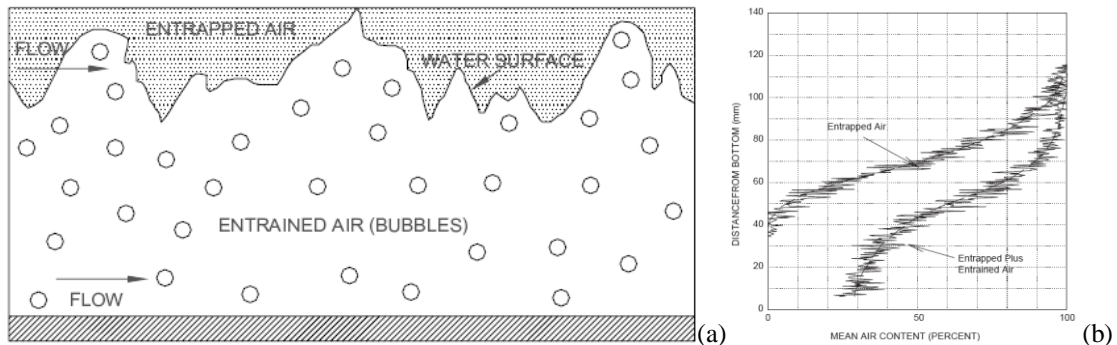
válidas para canais lisos e em degraus. Os resultados destes autores mostram o efeito da resistência no comprimento das bacias de dissipação por ressalto hidráulico sugeridas por Peterka (1984), além se possibilitarem o cálculo do comprimento de forma direta devido à excelente correlação existente entre os adimensionais citados. Adicionalmente, foram propostas equações que auxiliam na estimativa da cota de fundo da bacia.

14) Observação sobre a descrição do escoamento aerado em vertedores

Este item é dedicado à exposição da descrição proposta por Wilhelms e Gulliver (2005) para escoamentos aerados em vertedores lisos e, por extensão, aos vertedores em degraus. Estes autores destacam trabalhos clássicos e mencionam que o de Ehrenberger (1926) é normalmente citado como o primeiro estudo sobre aeração natural em canais abertos (aeração que não é induzida por aeradores de fundo ou outros mecanismos, mas sim aquela que ocorre devido à entrada de ar por meio da superfície livre). As maiores contribuições do trabalho de Ehrenberger foram, de acordo com os referidos autores: (1) reconhecimento da influência do ar incorporado nas características hidráulicas e (2) uma descrição sobre a física do escoamento aerado, que inclui temas destacados neste trabalho, como: são notadas gotas de água envolvidas pelo ar na região superior. Abaixo de tal camada é observada uma mistura de ar e água e em seguida, bolhas de ar individuais imersas na água. Finalmente, há uma camada não aerada junto ao fundo. Segundo Wilhelms e Gulliver (2005), tal descrição por meio de camadas conduziu ao uso do conceito de contínuo para o escoamento ar-água desde o fundo até a superfície.

A ideia de empregar o conceito de contínuo parece plausível quando são observados perfis de fração de vazios obtidos experimentalmente (ver, por exemplo, Straub e Anderson, 1958 e Boes e Hager, 2003b). Como apresentado na Figura 2.13, a hipótese de uma distribuição contínua de ar em água não representa bem a observação experimental. Esta e outras observações constatadas com fotografias de alta velocidade e fotografias com sobreposição de imagens (com baixa velocidade de abertura do obturador da máquina e condições de iluminação específicas) já haviam sido apresentadas por Killen (1968). Tendo como base as evidências fotográficas de Killen (1968), Wilhelms e Gulliver (2005) introduziram os conceitos de “*entrained air*” e “*entrapped air*”, que podem ser vistos na Figura 2.29. O primeiro conceito se refere as bolhas de ar presentes no escoamento principal, portanto, trata-se do ar transportado pelo escoamento sob a forma de bolhas. O segundo conceito corresponde ao ar presente entre as ondas que compõem a superfície livre

contorcida. Possíveis traduções são: (1) ar transportado (para o caso das bolhas presentes no escoamento) e (2) ar aprisionado, para o ar envolvido pelas ondas.



2.29 – Desenho esquemático que ilustra os conceitos de ar aprisionado e ar transportado, em (a). Em (b) são apresentados perfis de concentração para o ar aprisionado e para a soma do ar aprisionado com o ar transportado, valores obtidos para $q = 0,43 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\alpha = 30^\circ$.

Fonte: (a) - Wilhelms e Gulliver (2005) e (b) Killen (1968), citado por Wilhelms e Gulliver (2005).

Killen (1968) foi capaz de medir concentrações médias de ar e gerar perfis de ar aprisionado e ar aprisionado somado ao ar transportado, como apresentado na Figura 2.29b. Wilhelms e Gulliver (2005) consideraram os dois tipos de ar incorporados ao escoamento e obtiveram, a partir dos dados de Killen (1968) e Straub e Anderson (1956), uma equação que possibilita calcular a fração de vazios média ao longo de vertedores lisos, fração esta que inclui apenas o ar transportado. A equação obtida por eles possui a seguinte forma:

$$\bar{C}_e = \bar{C}_{e\infty}(1 - e^{-0,010X^*/h_A}) \quad (2.177)$$

Nesta equação \bar{C}_e = fração de vazios média (na seção transversal) do ar transportado (bolhas incorporadas ao escoamento), $\bar{C}_{e\infty}$ = valor médio assintótico de \bar{C}_e observado nos dados experimentais, X^* = distância a partir do ponto de início da aeração, h_A = profundidade no ponto de início da aeração. Os autores obtiveram também uma expressão que possibilita calcular o valor de equilíbrio da fração de ar transportado:

$$\bar{C}_{e\infty} = 0,656[1 - e^{-0,0356(\alpha - 10,9)}] \quad (2.178)$$

A equação 2.178 foi desenvolvida para $15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$, portanto, para uma ampla faixa de possíveis aplicações práticas. Outros detalhes podem ser encontrados no trabalho de Wilhelms e Gulliver (2005), como o significado do valor 0,010 presente na equação 2.177, fotografias relacionadas ao estudo experimental que originou os conceitos e dados e gráficos ilustrando a qualidade dos ajustes matemáticos.

A determinação dos limites de integração para o cálculo das frações de vazios médias foi uma contribuição essencial da pesquisa destes autores. Eles analisaram os dados de Killen (1968) e concluíram que a fração de vazios média do ar transportado cresce ao longo do vertedor. Era esperado o mesmo, segundo os autores, para o ar aprisionado, mas, para o limite de integração h_{98} , concluiu-se que o valor médio da fração de vazios é aproximadamente constante e igual a 0,23 ao longo do vertedor. Para os limites h_{95} e h_{90} os valores médios foram iguais a 14,2% e 7,3%, respectivamente. Ao avaliar os três casos, os autores concluíram que o desvio padrão menor foi aquele correspondente a h_{98} , ou seja, as flutuações em torno da média foram menores para a definição com $C = 0,98$. Killen (1968) conclui que a forma contorcida (ou rugosidade) da superfície livre pode ter suas características descritas satisfatoriamente por meio de uma função erro de Gauss. Uma função erro também pode ser empregada para descrever a forma da distribuição de frações de vazios aprisionados. Sendo σ_E o desvio padrão da função erro de Gauss, a diferença $h_{02}-h_{98}$ resulta igual a $4,1\sigma_E$.

Wilhelms (1997), em sua tese de doutorado, mostrou que se a distribuição de vazios aprisionados é descrita por uma distribuição normal acumulada, a fração de vazios média de ar aprisionado é igual a uma constante multiplicada pelo desvio padrão σ_E . Assumindo como válida uma analogia do problema em questão com resultados sobre a camada limite turbulenta, Wilhelms e Gulliver (2005) empregaram informações sobre distribuições relacionadas à camada limite, apresentadas por Hinze (1959), e obtiveram uma fração de vazios média igual a 0,25. Esse valor é muito próximo dos 23% obtidos com os dados experimentais e reforçam a conclusão sobre a altura h_{98} . Além disto, eles usaram os 23% como referência para subtração ao analisar os dados de Straub e Anderson (1958) e obtiveram pontos que se distribuem próximos aos dados de Killen (1968).

O conceito desenvolvido por Wilhelms e Gulliver (2005) foi aplicado por Lima *et al.* (2008) para calcular a evolução da captura de ar na superfície inferior de um jato de aerador, simplificando a sua análise e igualmente fornecendo resultados dependentes da posição até a qual a integração foi feita. Os resultados mostram ser importante considerar, no uso das medidas de concentração, o ar de fato incorporado, desconsiderando o ar no qual as deformações do líquido estão imersas.

15) Mecânica dos fluidos computacional e vertedores em degraus

Neste item são apresentados alguns detalhes específicos sobre simulações numéricas realizadas por diferentes pesquisadores. Chen *et al.* (2002) utilizaram o modelo de turbulência de tensões de Reynolds, diferenças finitas e o algoritmo SIMPLEC para simular o escoamento

em um vertedor em degraus com 1V:0,75H. Estes autores realizaram medições em um modelo físico equivalente ao domínio simulado, com 78,9 cm de altura, 30 cm de largura, perfil de entrada WES e com cinco degraus de transição. Entre os resultados encontram-se campos de velocidades experimentais e numéricos que mostram os grandes turbilhões entre degraus. Também foram comparados perfis de velocidades e distribuições de pressões (experimentais e numéricas). Como conclusão, os autores sugeriram que o modelo de tensões de Reynolds é adequado para o problema. Os resultados deste trabalho não incluem a incorporação de ar e consequente elevação da superfície livre a partir do início da aeração. Mais tarde, Chen *et al.* (2004) utilizaram o modelo k- ϵ em um domínio tridimensional, resolveram as equações com volumes finitos e empregaram o modelo “*fractional volume of fluid model*”. Os resultados apresentados foram os campos de velocidades e pressões. Nota-se que a elevação da superfície devido à entrada de ar não foi simulada.

Entre os métodos numéricos empregados normalmente e problemas sobre vertedores em degraus, destaca-se o uso de diferenças finitas e volumes finitos. Tabbara *et al.* (2005) utilizaram elementos finitos por meio do software ADINA-F. O domínio apresentado indica o uso de um perfil WES com degraus de transição. A simulação foi desenvolvida a partir de uma condição inicial com o domínio completamente preenchido por água. Com a evolução temporal, a geometria inicial do domínio, em seu contorno superior, era deformada até assumir a forma final da superfície livre. Como soluções, além dos campos obtidos, não foi observada a entrada de ar.

Arantes e Porto (2005) e Arantes (2007) simularam o escoamento com o modelo de tensões de Reynolds SSG e o software CFX em diferentes configurações, incluindo a comparação com dados experimentais de autores como Olinger (2000), Tozzi (1992), entre outros. Foram comparadas distribuições de pressões, perfis de velocidades, posição de início da aeração, profundidade no início da aeração, além de ter sido desenvolvida uma geometria para um aerador de fundo.

Dong e Lee (2006) empregaram o modelo k- ϵ para representar a turbulência, discretizaram as equações com volumes finitos e adotaram malhas não estruturadas. Este trabalho se destaca por ter simulado o escoamento em canais com ângulos menores, iguais a 10° e 20°. Embora os autores tenham apresentado perfis de frações de vazios, nota-se que a variação desta quantidade ocorreu em uma distância muito curta, certamente a que ocorre na interface entre os fluidos (ar e água).

Xiangju *et al.* (2006) utilizaram o modelo RNG k- ϵ , escrito para o modelo de mistura adotado por eles. Como condições de contorno foram fixadas as alturas para água e ar na entrada, com perfil uniforme para velocidades da água e pressão atmosférica para o ar. Como nos demais trabalhos, empregou-se a condição de não deslizamento nas paredes e uma lei de parede padrão. Destaca-se que estes autores resolveram as equações com o modelo de mistura por meio do Software Fluent[®], com volumes finitos e o algoritmo PISO (*The pressure-velocity coupling algorithm is the pressure-implicit with splitting of operators*). Os resultados numéricos foram comparados com os obtidos em um modelo físico com perfil WES e degraus de transição, 1V:0,75H, $H_{\text{dam}}=82,7$ cm e B=30 cm (largura). Além dos campos de velocidades e pressões (experimentais e numéricos), este artigo se destaca por ter apresentado distribuição de vazios a partir do ponto de início da aeração e ao longo da profundidade.

Qian *et al.* (2009) testaram os modelos de turbulência: (1) *Realizable* k- ϵ ; (2) SST k- ω ; (3) v^2 -f; (4) LES (com Smagorinsky-Lilly). Com os resultados obtidos eles concluíram que o modelo *Realizable* k- ϵ é a melhor opção entre os quatro para a simulação do escoamento em vertedores em degraus e apontaram algumas deficiências encontradas com os resultados calculados com os demais modelos de turbulência. O expoente da distribuição de velocidades na camada limite, representada por uma potência, resultou igual a 1/3 e, como conhecido a partir de dados experimentais, as pressões mínimas ocorreram na parte superior das faces verticais dos degraus.

Bombardelli, Meireles e Matos (2010) empregaram o modelo k- ϵ e a sua versão RNG. Estes autores utilizaram o software FLOW 3D, volumes finitos e diferenças finitas e o tratamento da superfície livre foi feito com o TruVOF. Diferente da maior parte dos trabalhos, a malha empregada possuía a mesma resolução em todo o domínio. Foram realizados experimentos em um modelo com 1V:0,75H, crista padrão e degraus com alturas variadas sobre a crista. Entre os resultados, encontram-se comparações entre profundidades medidas e calculadas numericamente (para o escoamento apenas de água), perfis de velocidades e desenvolvimento da camada limite. É interessante notar que eles concluíram não haver diferenças significativas entre os resultados calculados com o modelo k- ϵ e a versão RNG k- ϵ .

Rad e Teimouri (2010) simularam o escoamento com o modelo k- ϵ e apresentaram resultados que correspondem aos regimes nappe flow, transition flow e skimming flow. Não ocorreu entrada de ar, como na maior parte dos trabalhos. Estes autores utilizaram degraus com pisos inclinados em algumas simulações. Sarfaraz e Attari (2011) realizaram simulações representando a turbulência com o modelo RNG k- ϵ associado ao VOF (*volume of fluid*) e ao

Drift Flux sub-model, por meio do Software FLOW 3D. Foram realizados experimentos em um modelo físico com 1H:1.2V e como resultados os autores compararam as velocidades médias e profundidades em função de h_c/s para o escoamento uniforme, assim como a posição de ocorrência do escoamento uniforme. A maior parte das soluções numéricas obtidas nos trabalhos supracitados envolveu o uso de códigos comerciais. Uma alternativa diferente foi apresentada por Lobosco e Schulz (2010) e Schulz, Lobosco e Simões (2011), que adotaram o software livre OpenFOAM[®].

16) Reoxigenação da água em escoamentos em vertedores em degraus

A elevada agitação da superfície livre em escoamentos sobre vertedores favorece transferências de massas de gases através da interface ar-água. Podem ocorrer transportes de gases dissolvidos para o ar e transferência de gases da atmosfera para a água em uma taxa acelerada. A formação de lagos com a construção de barragens modifica as quantidades de oxigênio e outros compostos no meio líquido originalmente em um estado de agitação mais elevado. Portanto, do ponto de vista ambiental, é relevante conhecer as distribuições de espécies químicas ao longo do escoamento como um todo e, para quantificar as trocas aceleradas, especificamente sobre o canal em degraus e das demais possíveis estruturas de dissipação implantadas na extremidade final do extravasor. A quantidade de oxigênio dissolvida na água é uma das informações mais importantes acerca da qualidade da água. Desta forma, os estudos sobre este tema normalmente estão vinculados ao conhecimento das concentrações de O_2 . Toombes (2002) e Chanson (2002) apresentam revisões bibliográficas sobre o assunto, incluindo medidas de oxigênio dissolvido em vertedores em degraus submetidos aos regimes *nappe flow* e *skimming flow*. Nesta tese, no Capítulo 7, expõe-se uma breve revisão sobre o tema e a apresentação de um modelo fundamentado na teoria estatística da turbulência.

CAPÍTULO 3

ESTUDO EXPERIMENTAL

Sumário

3 ESTUDO EXPERIMENTAL.....	101
3.1 Descrição geral do laboratório e equipamentos	101
3.2 Medidas de vazão e posição da superfície livre.....	103
3.2.1 Considerações gerais.....	103
3.2.2 Vazões	104
3.2.3 Posição da superfície livre.....	106
3.2.4 Resultados	110
3.3 Observações adicionais sobre o método de medição.....	115
3.4 Análise dos resultados.....	118
3.4.1 Posição de início da aeração.....	121
3.4.2 Profundidades no início da aeração.....	127
3.4.3 Profundidade final da região de transição e comprimento de transição.....	129
Profundidade final da região de transição	129
Comprimento de transição	131
3.4.4 Outras grandezas	134
3.4.5 Considerações finais sobre os resultados anteriores	138
3.5 Análise espectral e outras informações estatísticas sobre a superfície livre.....	138
3.5.1 Análise espectral	138
3.5.2 Intensidade turbulenta	143
3.5.3 Profundidades máximas	150
3.5.4 Relação entre o escoamento uniforme e decaimento de quantidades estatísticas..	153
3.7 Considerações finais sobre o Capítulo 3.....	155

3 ESTUDO EXPERIMENTAL

Este capítulo contém descrições sobre a parte experimental da pesquisa. Sendo assim, ele compõe uma fração da exposição completa dos materiais e métodos empregados. São apresentados detalhes sobre a metodologia experimental adotada e sobre o método de análise dos resultados experimentais e das aproximações experimentais para diferentes grandezas relacionadas ao escoamento turbulento em canais em degraus. Os resultados obtidos incluem grandezas conhecidas, como a posição de início da aeração, e variáveis inéditas identificadas a partir do perfil médio da superfície livre e dos valores instantâneos da posição da superfície livre.

3.1 Descrição geral do laboratório e equipamentos

O trabalho experimental foi desenvolvido no Laboratório de Hidráulica Ambiental, pertencente ao Departamento de Engenharia Hidráulica e Saneamento. Esse laboratório é composto por uma área principal, oficina mecânica e outras instalações. Situado na área principal, há um equipamento de pesquisa composto de um canal retangular de aço e acrílico. A sua inclinação é ajustável e os possíveis ângulos entre o fundo do canal e a horizontal (α) são: 3°, 14°, 30° e 45°. O comprimento útil do canal é de 5,0 m e a largura é de 0,20 m. A água escoada ao longo do canal é proveniente do rio situado nas adjacências do laboratório e o seu transporte é feito por um conjunto motor-bomba (Figura 3.1a). Na extremidade final do canal existe um dissipador de energia composto por estruturas de aço elaboradas para que o escoamento assuma características uniformes e pouco agitadas no trecho de restituição. Este por sua vez possui largura igual a 0,79 m e comprimento de 9,0 m desde o último dissipador até a seção transversal onde há um vertedor retangular de soleira delgada. A Figura 3.1b,c contém desenhos esquemáticos dos componentes. Com medições da posição da superfície livre a montante do vertedor (Figura 3.1b) é possível calcular as vazões a partir dos dados de calibração obtidos por Carvalho (1997), pesquisador responsável pela construção do canal original com fundo liso. O sistema hidráulico também possui um medidor de vazão eletromagnético instalado em um trecho da tubulação a montante da entrada do canal.

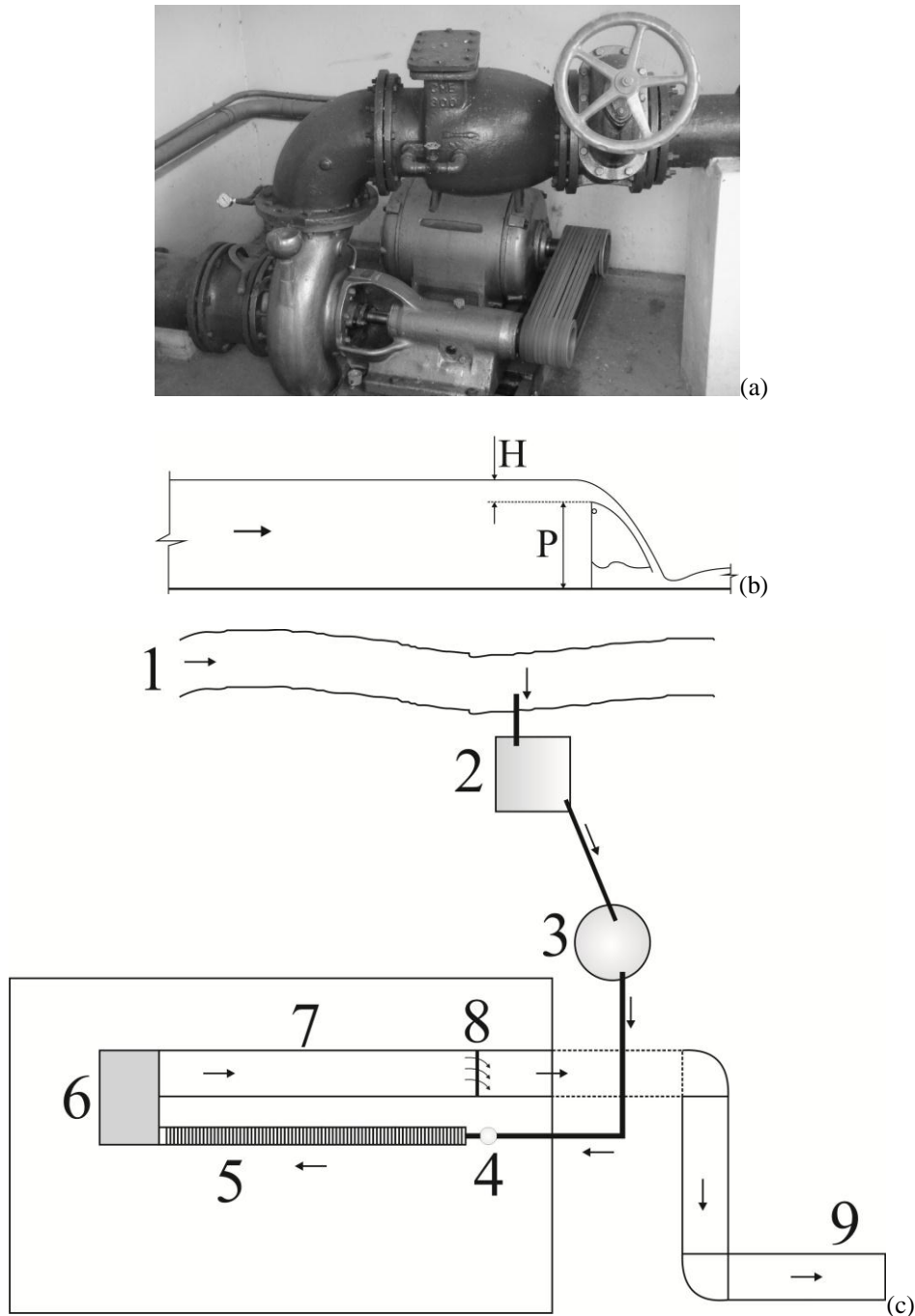


Figura 3.1 – (a) Conjunto motor-bomba utilizado nos experimentos; (b) canal de restituição empregado para obtenção de vazões com auxílio do vertedor de parede delgada; (c) desenho esquemático do sistema hidráulico utilizado para realização dos experimentos: 1) Rio; 2) Casa de bombas; 3) Reservatório cilíndrico; 4) Medidor de vazão eletromagnético; 5) Canal em degraus (extensão de 5 m); 6) Dissipador de energia; 7) Trecho inicial do canal de restituição; 8) Vertedor de parede delgada; 9) Canal de restituição (a água retorna ao rio).

Entre os equipamentos que já foram utilizados ao longo da história do laboratório, e que conferiam a este laboratório um perfil de ponta, não encontrável em outros laboratórios de pesquisa em hidráulica, destacam-se os seguintes: (1) Sonda de Césio 137 utilizada para medir frações de vazios. Ela era composta por um sistema eletrônico de aquisição de dados, uma envoltória de chumbo e um veículo de alta capacidade de carga instalado sobre o canal

(este veículo foi projetado e instalado por Lima, 2004, mas as facilidades laboratoriais relacionadas a estas medidas foram desativadas); (2) Sistema para medições com o uso da técnica Imagem por Velocimetria de Partículas. Há um equipamento periférico capaz de produzir luz laser com frequência de pulso controlável, cabos de fibra-óptica, lentes e uma câmera com capacidade de filmar a 30 fps (Neste caso, o sistema necessita ser atualizado, porque se trata de um equipamento cerca de 15 anos. Principalmente os sistemas geradores de luz laser apresentaram desenvolvimento muito evidenciado no período mencionado, sendo já difícil efetuar sua manutenção); (3) Sensores ultrassônicos de posição. Esses equipamentos podem ser ligados ao computador e utilizados para obter posições da superfície livre ao longo do canal (adquiridos para este trabalho); (4) Transdutor de pressão portátil; (5) Estroboscópio. Este equipamento faz parte do Laboratório de Hidráulica do Campus I e foi cedido gentilmente pelo Professor Rodrigo de Melo Porto. Com ele é possível visualizar fenômenos rápidos não percebidos pelo olho humano em condições normais de iluminação.

Entre os equipamentos citados, utilizou-se nesta pesquisa o sensor acústico para medir a posição da superfície livre. A utilização de sensores ultrassônicos foi realizada por Lueker *et al.* (2008) com o objetivo de medir a posição da superfície livre do escoamento em um modelo físico do vertedor auxiliar da Barragem Folsom, no Laboratório St. Anthony Falls da Universidade de Minnesota. Este modelo físico possuía um trecho liso e o trecho final constituído por degraus. O equipamento empregado por Lueker *et al.* (2008) possuía acurácia de 1 mm e resolução de 0,25 mm. O seu funcionamento era dependente da temperatura do ar, sendo que o cone formado pelo ultrassom possuía ângulo de abertura de 8°. A frequência de aquisição de dados adotada por tais pesquisadores foi de 10 Hz e o tempo para cada experimento foi escolhido como 60 s. Um segundo trabalho que empregou sondas acústicas foi o de Murzyn e Chanson (2009), entretanto, para a medição da posição da superfície livre de ressaltos hidráulicos. Os referidos autores calcularam frequências dominantes, número de Strouhal e outras grandezas a partir dos sinais obtidos com a sonda acústica.

3.2 Medidas de vazão e posição da superfície livre

3.2.1 Considerações gerais

Os componentes eletrônicos e sensores empregados nesta parte da pesquisa foram sensores ultra-sônicos, notebooks, softwares para aquisição e análise de dados, um vertedor retangular de parede delgada, um medidor de vazão eletromagnético, um medidor de distância a laser, inclinômetro e régua. Um dos sensores acústicos era posicionado sobre um suporte preso ao

veículo que se desloca ao longo do canal. Para a maior parte dos experimentos, no trecho inicial, onde ocorre o escoamento monofásico, eram realizadas medições a cada 5 cm e, a partir da posição 60 cm, foram adotados espaçamentos de 10 cm. Estabeleceu-se como critério a realização de 6000 medidas com frequência de 50 Hz em cada posição longitudinal. O segundo sensor teve como utilidade medir a posição da superfície livre a montante do vertedor de parede delgada com o intuito de calcular a carga hidráulica média e, em seguida, a vazão.

3.2.2 Vazões

Para o cálculo da vazão com a equação do vertedor de parede delgada é necessário medir a carga sobre a soleira. Os valores médios dessa grandeza são obtidos com os dados medidos a uma frequência de 25 Hz durante 240 s. Durante um experimento para obtenção do perfil da superfície livre, cuja duração é próxima de 3 h, foram obtidos pelo menos cinco valores médios distribuídos entre o início e o fim. Adicionalmente, eram registrados cinco valores médios das vazões fornecidas pelo medidor eletromagnético, sendo cada um deles calculado como a média aritmética de 15 leituras. Em todos os casos a vazão adotada para os cálculos finais é a média das médias. Há uma diferença considerável entre os valores fornecidos por ambos dispositivos. Uma vez que o vertedor foi devidamente calibrado, optou-se pelo seu uso para realização dos cálculos. A equação empírica obtida por Carvalho (1997) para a medição de vazão com o vertedor de parede delgada possui a seguinte forma:

$$Q = 1,81464H^{1,55787} \quad (3.1)$$

Nesta equação, Q é a vazão e H , a carga sobre a soleira, ambas com unidades de acordo com o S.I. Os coeficientes desta equação foram calculados para vazões situadas entre 25 e 200 L/s, aproximadamente.

A equação clássica para um vertedor de parede delgada é deduzida com a equação de Bernoulli. Os detalhes relacionados à construção desse modelo podem ser encontrados em Porto (2006). O ponto a montante, sobre a linha de corrente, é escolhido em uma posição distante do vertedor (onde as linhas de corrente podem ser consideradas horizontais e paralelas). O ponto a jusante está inserido na lâmina vertente e sobre a soleira do vertedor. Se o plano horizontal de referência passa em uma cota igual à cota da soleira, pode-se escrever a equação de Bernoulli com a seguinte forma:

$$H + \frac{V_0^2}{2g} = H - y + \frac{V_1^2}{2g} \quad (3.2)$$

As variáveis encontradas nesta equação possuem as seguintes definições: $y = H - z_1$ (em que z_1 = cota do ponto de jusante); V_0 e V_1 são as velocidades do líquido nos pontos inicial e final sobre a linha de corrente, respectivamente. Destaca-se também que, como hipótese, assumiu-se que a pressão é atmosférica no interior da lâmina vertente. Uma vazão unitária infinitesimal na seção da lâmina vertente pode ser escrita como $dq = V_1 dy$. A expressão para V_1 é obtida por meio da equação anterior:

$$V_1 = \sqrt{2gy + V_0^2} \quad (3.3)$$

Desprezando a velocidade de aproximação V_0 e integrando a equação $dq = V_1 dy$, vem:

$$q_t = \int_0^H \sqrt{2gy} dy = \frac{2}{3} \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (3.4)$$

A integração anterior, ao ser realizada para os limites 0 e H, faz com que a seção de jusante da linha de corrente tenha altura H. Sabe-se que há uma considerável contração do jato nas proximidades do vertedor. Com o intuito de corrigir esse e os demais erros atrelados ao modelo, utiliza-se um coeficiente de vazão C_d , transformando a vazão unitária teórica (q_t) em uma vazão real (q):

$$\begin{cases} q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} H^{3/2} \\ Q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} B H^{3/2} \end{cases} \quad (3.5)$$

em que B = largura do vertedor.

A dedução da equação anterior corresponde a um vertedor retangular de parede delgada sem contrações laterais. A comparação direta entre as equações 3.1 e 3.5 não é possível, uma vez que o expoente da equação empírica assumiu o melhor valor correspondente ao ajuste por mínimos quadrados. Apesar disto, foram realizados alguns cálculos com o intuito de verificar o modelo mais adequado para interpolação dos dados experimentais. A Figura 3.2a ilustra a qualidade do equacionamento clássico para vertedores (equação 3.5) com o uso de um coeficiente de vazão único e igual a 0,718, obtido por mínimos quadrados. Como esperado, a equação 3.1 apresenta uma somatória de erros quadráticos inferior à obtida para a equação 3.5. Este fato é ilustrado pela maior aderência dos pontos à reta de ajuste perfeito da Figura

3.2b comparada à Figura 3.2a. Embora este não seja um motivo de grande relevância devido aos erros e incertezas associados aos estudos experimentais, ele serviu para decidir sobre o uso de uma ou outra equação. Neste trabalho a equação utilizada é a 3.1.

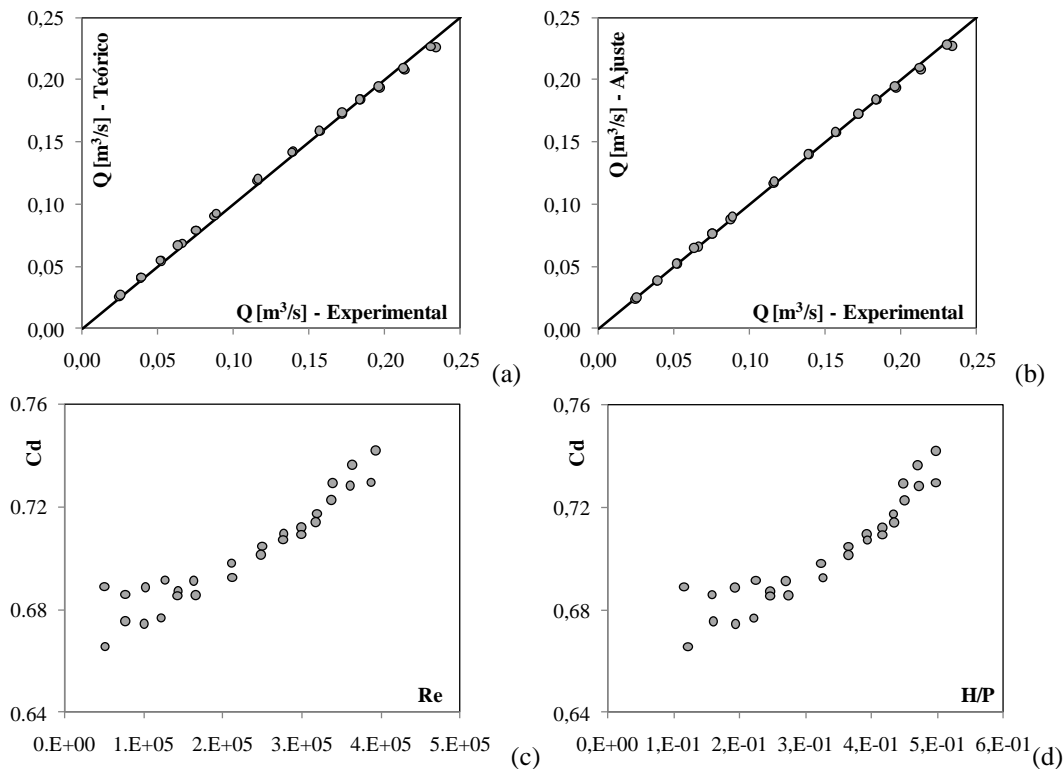


Figura 3.2 – Dados experimentais de Carvalho (1997) em comparação aos modelos: (a) Equação 3.5 em relação aos dados experimentais; (b) Equação 3.1 comparada aos dados experimentais; (c) $C_d(Re)$ e (d) $C_d(H/P)$

É interessante observar que o coeficiente de vazão depende do número de Reynolds ($Re = 4Q/[(B+2H+2P)v]$, em que P = altura do vertedor) e do adimensional H/P para os experimentos do referido autor, como ilustrado na Figura 3.2c,d. Uma terceira alternativa seria utilizar funções $C_d(Re)$ e $C_d(H/P)$ para o cálculo da vazão com a equação 3.5.

3.2.3 Posição da superfície livre

Como ilustrado na Figura 3.3, o sensor utilizado para realização de medidas da posição da superfície livre fica situado sobre um veículo capaz de se deslocar sobre o canal. Esse veículo é suportado por um cabo de aço preso a um motor que possibilita o seu deslocamento. O software para aquisição de dados com o sensor acústico foi utilizado em um notebook que permanecia sobre a plataforma. O cabo empregado para conectar sensor e computador possui um amplificador de sinal devido à sua grande extensão. Apesar do uso deste dispositivo, foram realizados testes com todos os cabos empregados nesta pesquisa e não foram verificadas diferenças entre os resultados obtidos com cabos diferentes.

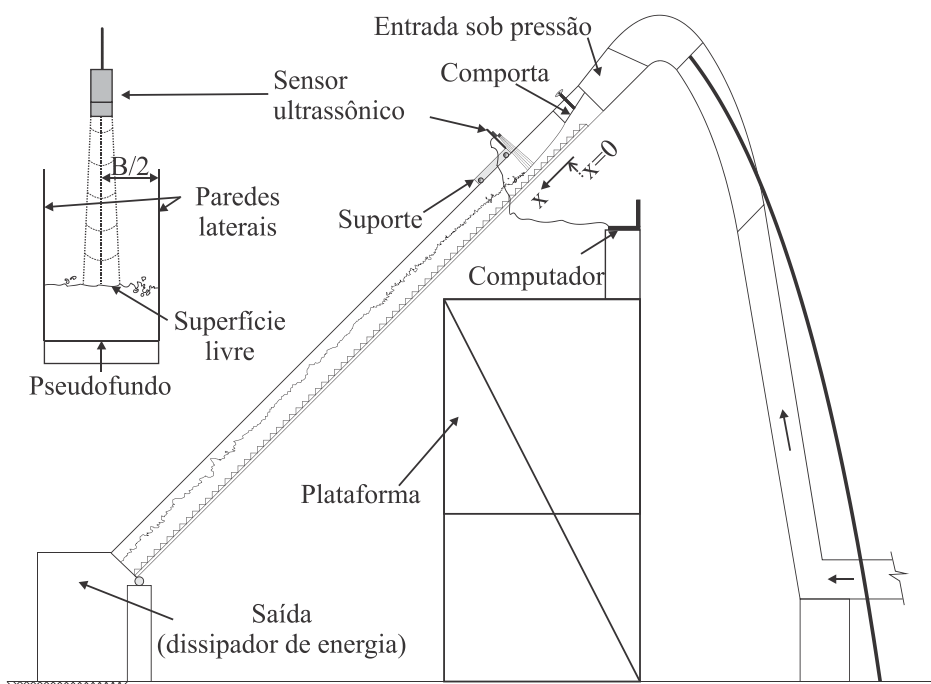
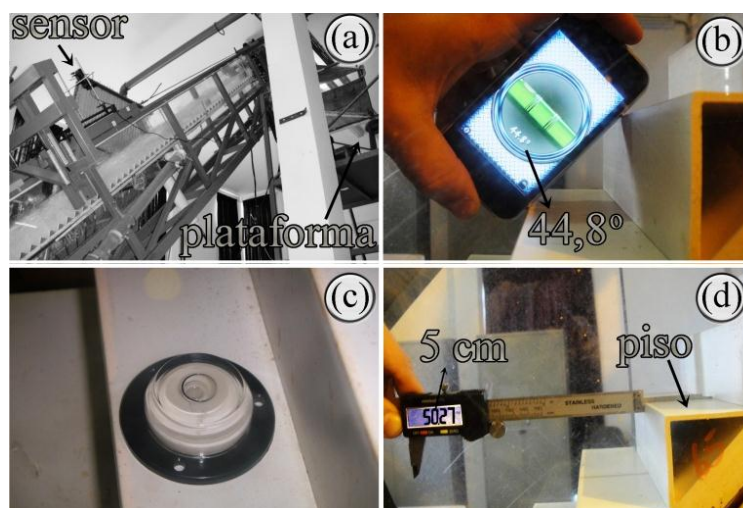


Figura 3.3 – Desenho esquemático da disposição utilizada no experimento: canal inclinado com $\alpha = 45^\circ$, degraus com $s = l = 5$ cm (s = altura do degrau e l = comprimento do piso de um degrau), largura do canal $B = 0,20$ m, extensão utilizada nos experimentos igual a $3,5$ m.

Os experimentos realizados restringiram-se ao ângulo de 45° , degraus com s (altura) = l (comprimento do piso) = 5 cm, o canal mantém a sua largura e característica prismática ($B = 0,20$ m) e o comprimento do canal utilizado para realização de medidas de $3,5$ m, em função das dimensões do veículo e das interferências provocadas no ultrassom por obstáculos. Tais obstáculos correspondem a saliências ou pequenas vigas utilizadas na estrutura do canal. A Figura 3.4 ilustra algumas características geométricas de parte da instalação experimental, como uma visão geral do canal, o ângulo entre o pseudofundo e a horizontal e as dimensões dos degraus.



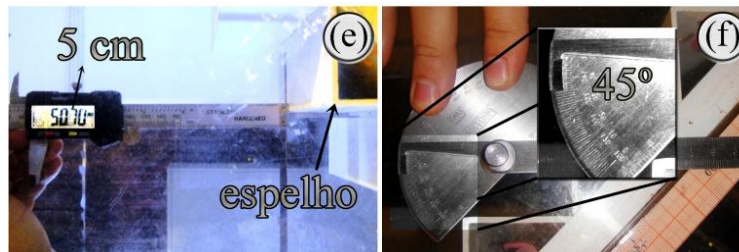


Figura 3.4 – Detalhes sobre a geometria do canal:

(a) Canal, a disposição do sensor acústico e plataforma; (b) ângulo (α) formado entre o pseudofundo e a horizontal, sendo aproximadamente igual a 45° ; (c) a terceira imagem corresponde à verificação da posição do piso em relação à horizontal. Nota-se que ele estava praticamente plano, como indicado pelo nível; (d,e) dimensões do piso e espelho; (f) uma segunda verificação do ângulo α .

Durante um experimento, o sensor ultrassônico é ligado a um notebook através de uma porta USB. O software que identifica o sensor possibilita a aquisição dos dados com diferentes frequências, com valor máximo igual a 50 Hz. Esta frequência mencionada é igual à taxa de amostragem e não deve ser confundida com a frequência das ondas sonoras, igual a 50 kHz para este sensor. De acordo com o fabricante, as ondas emitidas pelo sensor viajam a uma velocidade próxima de 343 m/s e formam um cone com ângulo situado entre 15° e 20° e área da base menor correspondente ao emissor, que possui diâmetro igual a 3,7 cm. Alguns testes realizados para este trabalho mostram que o ângulo mencionado pode ser próximo de 7° . O seu bom funcionamento depende de uma distância mínima do obstáculo igual a 15 cm, necessária porque o emissor também é o detector. Além disto, a distância máxima é 6 m. Os sensores possuem precisão igual a 1 mm e são calibrados pelo fabricante. Não foi possível realizar calibrações dos mesmos com equipamentos mais precisos, embora tenham sido efetuados alguns testes qualitativos com o uso de um medidor de distâncias a laser com precisão igual a 1,5 mm. Os resultados podem ser vistos na Figura 3.5a, sendo que cada ponto obtido com o sensor ultra-sônico corresponde à média de 100 medidas obtidas a uma frequência de 20 Hz. Embora esta não seja uma calibração adequada segundo as regras da instrumentação (que normalmente exige um instrumento dez vezes mais preciso), foi possível verificar características esperadas como a linearidade e um coeficiente angular unitário. Constatou-se que o estado inercial do sensor influencia o valor do primeiro ponto medido se o mesmo permanecer sem uso durante alguns minutos. A Figura 3.5b ilustra este fato por meio de um histograma de frequências correspondente a um ponto do gráfico da Fig. 3.5a. Observa-se que uma medida ocorreu com valor discrepante muito menor em relação à média.

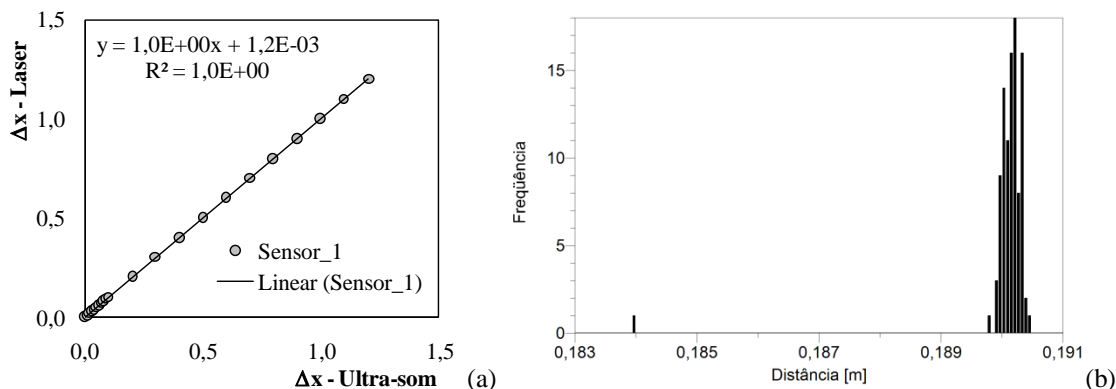


Figura 3.5 – Funcionamento do sensor acústico: (a) Comparação qualitativa entre as medidas realizadas com o sensor ultra-sônico e uma trena a laser (na equação $x =$ abscissa). Valores em metros. (b) Histograma de frequências absolutas obtido para um dos pontos da Figura 3.5a, com frequência de 20 Hz e 100 medidas (média = mediana = 0,1902 m e desvio padrão = 0,0001254 m).

Os deltas utilizados na Figura 3.5a indicam que os valores correspondem a diferenças calculadas com base em uma medida inicial adotada como referência. Para a obtenção das profundidades perpendiculares ao pseudo-fundo, o procedimento adotado antes do início de cada experimento, com o canal vazio, consiste nos seguintes passos:

- (1) Posicionar o sensor sobre o canal: é utilizado um suporte confeccionado com barras com roscas e porcas que possibilitam o ajuste da altura em relação ao fundo do canal;
- (2) Ajustar o emissor/detector de tal maneira que o sinal acústico seja perpendicular ao fundo: esta etapa é realizada por comparação entre o ângulo entre o pseudo-fundo e o ângulo do emissor/detector. Um medidor de ângulos digital auxiliou a comparação;
- (3) Inserir o alvo no canal: utilizou-se uma placa de acrílico como alvo para medir a distância desde o sensor até o alvo com o canal vazio. A espessura do alvo é conhecida, o que possibilita o cálculo da profundidade do escoamento com os valores das posições da superfície livre (Figura 3.6);
- (4) Verificar se o sensor está centralizado (em relação à largura): com o auxílio do alvo e de um medidor de distâncias a laser é possível verificar, de forma aproximada, se o sensor está situado em $B/2$, ou seja, centralizado em relação à largura do canal. Para cada posição longitudinal foram realizadas medições apenas na posição central. Se não houvesse interferências provocadas pelas paredes do canal e o sensor fosse posicionado em diferentes posições transversais (ao longo da largura do canal), seria possível medir superfícies médias e não as linhas médias, ou seja, $h(x_1, x_2)$ e não apenas $h(x_1)$, em que $h =$ profundidade do escoamento;
- (5) Verificar a distância desde o sensor até o alvo: esta etapa é realizada com o mesmo medidor de distâncias a laser e com o próprio sensor;

A Figura 3.6a,b ilustra, de forma esquemática, as grandezas relevantes para a realização das medidas. Observa-se que a profundidade do escoamento é calculada como $h = Hs_a - Hs_sl + e$.

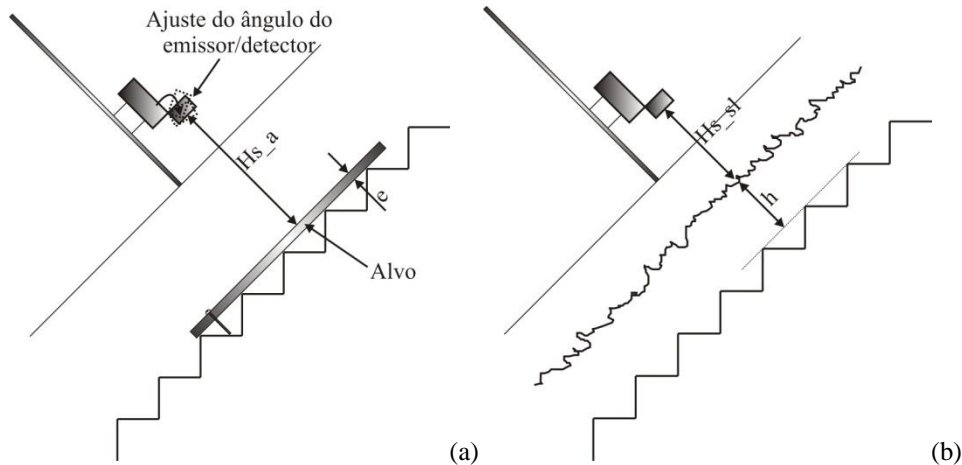


Figura 3.6 – Posicionamento do sensor antes de cada experimento (a) e posição do sensor durante um experimento (b). Hs_a = distância desde o sensor até o alvo; e = espessura do alvo; Hs_sl = distância desde o sensor até a superfície livre; h = profundidade do escoamento.

3.2.4 Resultados

Todos os experimentos realizados nesta pesquisa são supercríticos. Em um canal prismático com escoamento unidimensional, monofásico e distribuição de pressões hidrostática é possível calcular a forma teórica do perfil da superfície livre por meio da clássica equação diferencial do escoamento permanente gradualmente variado:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f}{1 - Fr^2} \quad (3.6)$$

em que h = altura de escoamento, x = eixo coordenado paralelo ao fundo do canal, I_o = declividade de fundo, I_f = declividade da linha de energia, Fr = número de Froude (definido como $V/(gH_m)^{1/2}$, $H_m = A/B$, A = área da seção transversal e B = largura de topo da seção transversal).

Se $1 - Fr^2 < 0$ o escoamento é supercrítico. Resta então definir o sinal do numerador para que seja possível prever o sinal de h_x . A declividade da linha de energia pode ser escrita como uma função do número de Froude, do fator de resistência de Darcy-Weisbach e do adimensional h/B . Para tanto, emprega-se a equação de Darcy-Weisbach escrita em termos do diâmetro hidráulico, obtendo-se como resultado a seguinte igualdade:

$$I_f = \frac{f}{8} Fr^2 \left(1 + 2 \frac{h}{B}\right) \quad (3.7)$$

Considerando, por exemplo, $f = 0,08$ e $h/B = 0$ (canal largo), $I_f = 0,01 Fr^2$. A condição de escoamento uniforme implica $Fr_u = 10$ ($I_o = 1$). Espera-se com base nesta simples relação que $dh/dx < 0$ se $1 < Fr < 10$. A curva prevista para tais condições é denominada S_2 . Ela tem início em uma seção com $h/h_c = 1$ e tende assintoticamente a $h/h_c = h_u/h_c$. Se $Fr > 10$, a curva prevista é a S_3 , com $dh/dx > 0$. Esta curva tem início em uma seção com $h/h_c < h_u/h_c$ e também possui assíntota horizontal com o valor h_u/h_c . A terminologia S_2 e S_3 é a mesma empregada por Chow (1959) e é adotada nos textos clássicos e modernos (e.g. Henderson, 1966; Porto, 2006). Destaca-se que o valor 0,08 para f é apenas um exemplo utilizado neste trecho para a definição das formas das curvas S_2 e S_3 .

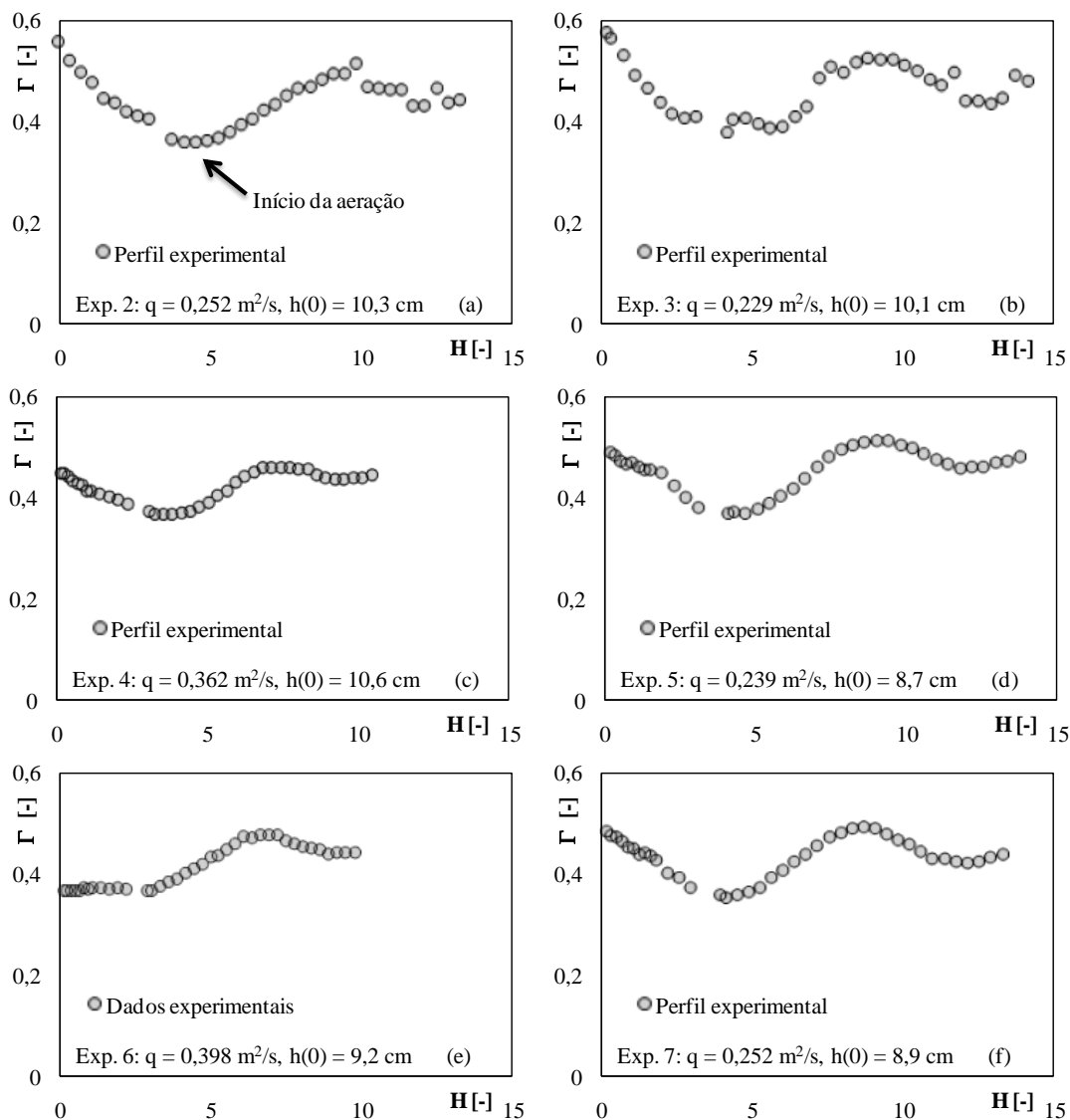
Os experimentos realizados correspondem a $s = 1 = 5$ cm e diferentes vazões e aberturas da comporta. A Figura 3.7 contém os perfis da superfície livre representados pelos adimensionais $H = z/h_c$ e $\Gamma = h/h_c$, sendo $z = x \text{sen} \alpha$ e $x =$ coordenada longitudinal, paralela ao fundo. A Tabela 3.1 contém um resumo das informações relacionadas aos experimentos. As vazões dos experimentos 8 e 9 foram extrapoladas uma vez que ultrapassam o limite inferior de 25 L/s.

Tabela 3.1 – Dados gerais sobre os experimentos relativos às medições da posição da superfície livre

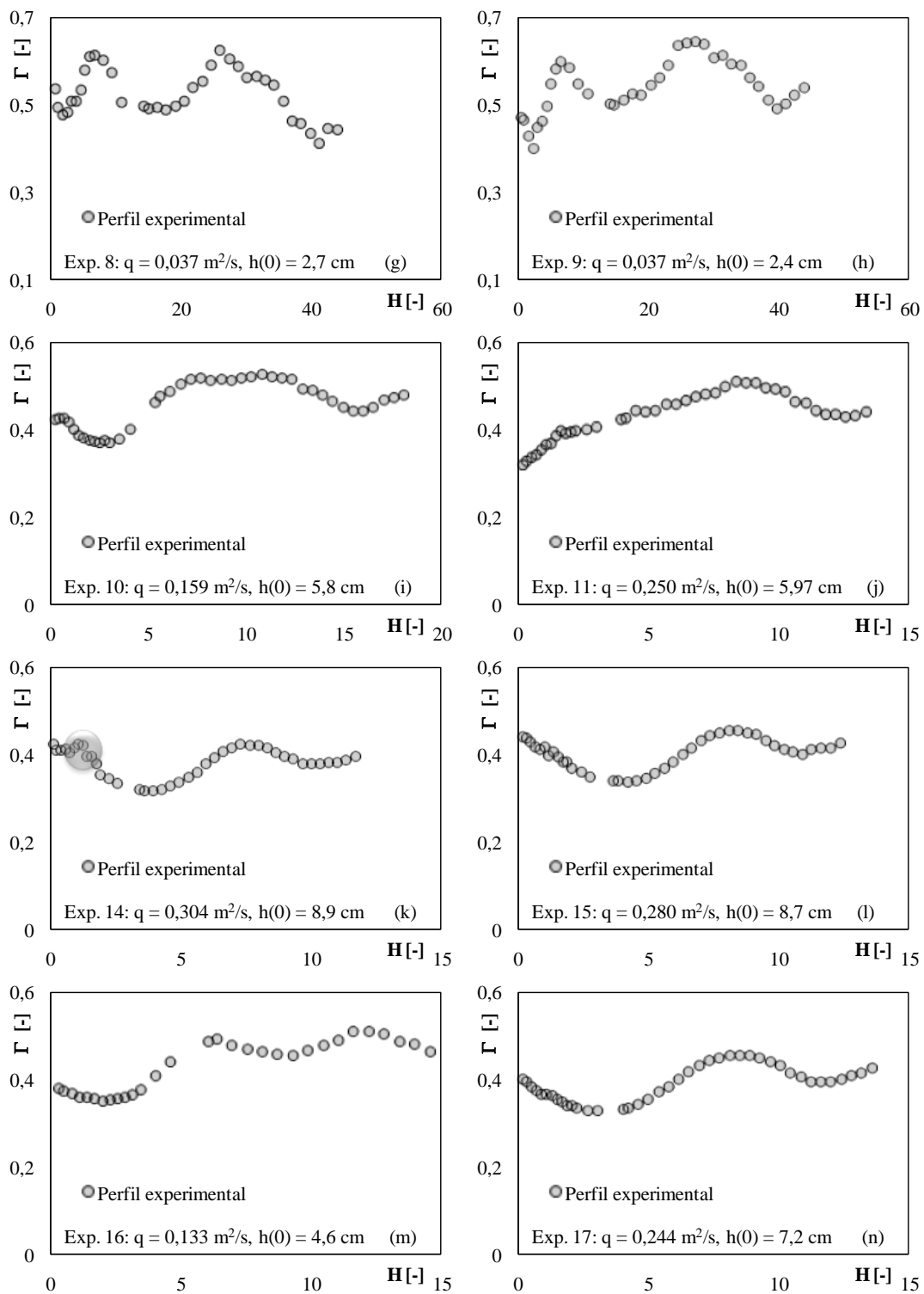
Nº	Nome do Experimento	Q [m ³ /s]	Perfil	q [m ² /s]	h _c [m]	s/h _c	h(0) [m]	Hs_a [m]
1	Exp.2	0,0505	S ₂	0,252	0,187	0,268	0,103	0,5045
2	Exp.3	0,0458	S ₂	0,229	0,175	0,286	0,101	0,651
3	Exp.4	0,0725	S ₂	0,362	0,238	0,211	0,106	0,6575
4	Exp.5	0,0477	S ₂	0,239	0,180	0,278	0,087	0,6533
5	Exp.6	0,0833	S ₃	0,416	0,261	0,192	0,092	0,6533
6	Exp.7	0,0504	S ₂	0,252	0,187	0,268	0,089	0,6468
7	Exp.8	0,0073	S ₂	0,037	0,051	0,971	0,027	0,6439
8	Exp.9	0,0074	S ₂	0,037	0,052	0,967	0,024	0,6432
9	Exp.10	0,0319	S ₂	0,159	0,137	0,364	0,058	0,6434
10	Exp.11	0,0501	S ₃	0,250	0,186	0,269	0,06	0,6479
11	Exp.14	0,0608	S ₂	0,304	0,211	0,237	0,089	0,646
12	Exp.15	0,0561	S ₂	0,280	0,200	0,250	0,087	0,6484
13	Exp.16	0,0265	S ₂	0,133	0,122	0,411	0,046	0,6471
14	Exp.17	0,0487	S ₂	0,244	0,182	0,274	0,072	0,6476
15	Exp.18	0,0431	S ₂	0,216	0,168	0,298	0,074	0,6472
16	Exp.19	0,0274	S ₂	0,137	0,124	0,402	0,041	0,6456
17	Exp.20	0,0360	S ₂	0,180	0,149	0,336	0,068	0,6475
18	Exp.21	0,0397	S ₂	0,198	0,159	0,315	0,071	0,6265

Notação: Q = vazão obtida como vertedor retangular de parede delgada; $q = Q/B$; $B = 0,20$ m (largura do canal); $h_c = (q^2/g)^{1/3}$; $g = 9,806$ m/s²; $s = 0,05$ m (altura do degrau); $h(0)$ = profundidade média na posição inicial; $Freq_1$ = taxa de amostragem do sensor acústico ($Freq_1=50$ Hz); N° de amostras = $Freq_1 T.A.$; $T.A.$ = tempo de amostragem ($T.A.=60$ s para o Exp.2 e $T.A.=120$ s para os demais); Hs_a = distância desde o sensor até o alvo; ea = espessura do alvo ($ea=0,0126$ m).

Os comportamentos dos valores médios apresentados na Figura 3.7 mostram que o método adotado permite medir perfis S_2 de forma satisfatória. A posição de início da aeração definida com base em tais experimentos corresponde à posição longitudinal onde termina o perfil S_2 . Para a maior parte dos experimentos esta definição pode ser utilizada sem dificuldades. Entretanto, a ocorrência de ondas transversais ou até mesmo erros experimentais podem dificultar a medição precisa, como ilustrado pelos dados do Experimento 3. Observando os resultados do Experimento 14, nota-se a elevação do perfil médio da superfície livre. Observações visuais justificam este desvio com base na existência de ondas transversais originadas na entrada do canal. Os resultados dos experimentos 6 e 11 indicaram a ocorrência de perfis médios do tipo S_3 . Cabe mencionar que a identificação visual dos perfis S_2 e S_3 , neste trabalho, não foi possível para todos os experimentos, tendo sido observados apenas alguns perfis S_2 .



(Continua na próxima página)



(Continua na próxima página)

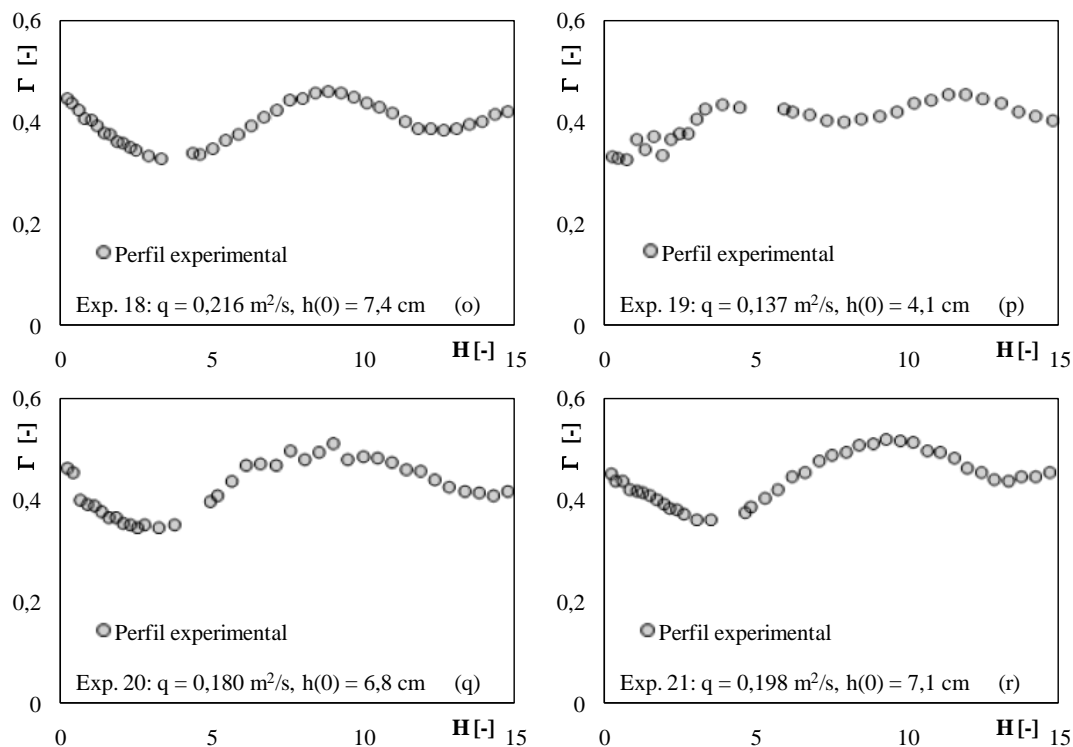


Figura 3.7 – Perfis médios da superfície livre obtidos experimentalmente: os perfis (e) e (j) são do tipo S_3 e os demais claramente do tipo S_2 . As únicas variáveis alteradas em cada experimento são a vazão específica e a abertura da comporta, representada por $h(0)$, sendo este o valor medido na posição inicial dos 3,5 m, que não é exatamente a posição da comporta. A profundidade crítica é calculada com $h_c = (q^2/g)^{1/3}$. As variáveis utilizadas são: $\Gamma = h/h_c$ e $H = z/h_c$, z = eixo vertical.

Em todos os casos, para uma determinada posição longitudinal, o espaçamento adotado nas medições foi alterado em função da existência de uma barra transversal de sustentação dos muros laterais. Não foi possível medir nesta região em função das reflexões provocadas pela barra. Como já foi mencionado, a escolha do trecho de 3,5 m para realizações dos experimentos foi influenciada pela pelas dimensões do veículo utilizado para transportar o sensor e pelas possibilidades de posicionamento do mesmo sobre o canal.

3.2.5 Considerações finais sobre os resultados anteriores

O uso do método de medição da superfície livre com ultrassom permitiu obter perfis da superfície livre dos escoamentos monofásico e bifásico. Os resultados mostram profundidades médias que caracterizam perfis S_2 e S_3 . Foram observadas profundidades crescentes na região de transição entre os escoamentos monofásico e bifásico e perfis médios ondulados para a região bifásica. Matos (2000) encontrou perfis ondulados por meio de observação visual através das paredes laterais do canal e das profundidades características do escoamento bifásico. Alguns pesquisadores relataram haver dificuldades em medir profundidades do escoamento bifásico com o uso de réguas ou pontas limnimétricas. O sensor acústico

empregado aqui é uma alternativa interessante por fornecer perfis médios bem definidos nas regiões monofásica e bifásica. Adicionalmente, ele possibilita levantar máximos e mínimos e sinais que podem ser explorados por meio de análise espectral. A seguir é apresentada uma metodologia destinada a auxiliar na rejeição de amostras e análise dos dados. Em seguida, seguindo o caráter deste capítulo, são apresentadas relações puramente empíricas entre algumas variáveis calculadas a partir dos perfis médios e demais informações (q , s , k , etc.).

3.3 Observações adicionais sobre o método de medição

Neste item são destacados alguns detalhes relacionados às medições de profundidades realizadas com ultrassom. Este método foi adotado com o intuito de capturar a posição da superfície livre. Observações visuais sem o auxílio de qualquer equipamento eletrônico mostram a sobreposição das ondas existentes na superfície, assim como o aspecto esbranquiçado da mistura bifásica (Figura 3.8a). Com o uso de estroboscópio ou fotografias obtidas com alta velocidade, pode-se observar que a forma da superfície livre não é bem definida como a fornecida apenas pela visão. Ela é composta por estruturas alongadas, às vezes bifurcadas, que emergem do escoamento principal, além de volumes de água e gotas separadas deste escoamento, como pode ser visto na Figura 3.8b. Sendo assim, o volume de medição cônico gerado pelo equipamento pode detectar valores que não correspondem à posição da superfície que encerra a maior parte do volume de líquido. A Figura 3.8c ilustra tal consideração com uma ilustração do problema. Para comprovar esta hipótese, foram realizados lançamentos de fragmentos de papel com tamanhos e formas aproximadamente iguais às dos volumes de fluido. Com uma frequência de amostragem igual a 50 Hz e lançamentos horizontais e parabólicos, conclui-se que o sensor é capaz de detectar os fragmentos de papel e, por extensão, as massas líquidas que atravessam o cone de medição ultrassônico.

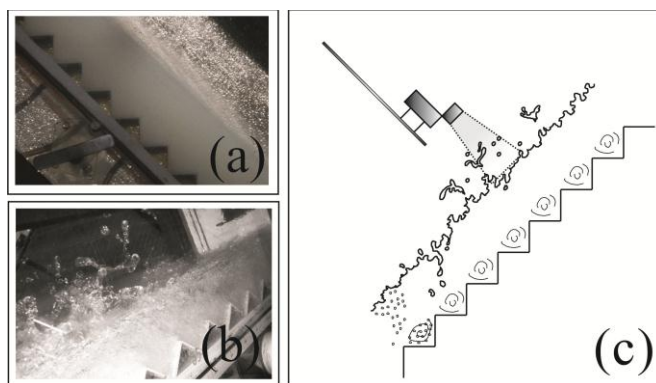
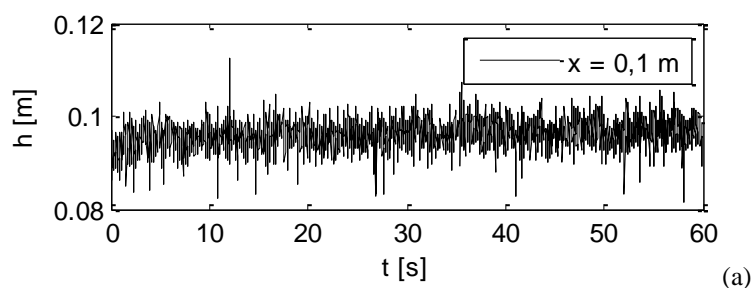


Figura 3.8 – Estrutura da superfície livre: (a,b) Fotografias correspondentes a experimentos realizados nesta pesquisa; (c) desenho esquemático com ilustração do cone e possíveis valores discrepantes detectados devido à presença de volumes e gotas destacadas do escoamento.

Foi desenvolvido um código que possibilita eliminar valores discrepantes da amostra. Este código funciona em Matlab[®] e, com algumas alterações, pode ser utilizado no software livre Octave. Destaca-se que o termo “valor discrepante” foi adotado para designar as medidas das posições de volumes ejetados da superfície quando se pretende calcular a posição média da superfície. A definição de discrepância é relativa uma vez que esses valores estão relacionados à posição da superfície livre definida anteriormente. Quando o interesse está concentrado nos valores máximos, os valores extremos medidos deixam de ser classificados como discrepantes. Sendo assim, a definição depende do fenômeno. Em um estudo relacionado à medição da posição da superfície livre de ressaltos hidráulicos, Simões, Schulz e Porto (2010) utilizaram o mesmo sensor empregado nesta pesquisa. Este estudo foi realizado no contexto do presente trabalho. O problema de ejeção de gotas e volumes de líquido ocorreu na pesquisa realizada por esses autores. As amostras obtidas apresentavam amplitudes ($A = \max(h) - \min(h)$) que, em muitos casos, eram superiores à altura do ressalto calculada com valores médios ou superiores às dimensões características observadas no experimento. Deste modo, a observação do fenômeno forneceu subsídios para a definição do valor discrepante. Classifica-se também como discrepante a medida que ultrapassa um dos limites correspondente ao intervalo de medição do sensor, ou seja, 0,15 m como valor mínimo e 6,0 m como máximo.

Os sinais obtidos com o sensor ultrassônico possuem formas que dependem da posição ao longo do canal. A Figura 3.9 contém dois sinais correspondentes ao experimento 2, o primeiro obtido no escoamento monofásico e o segundo na região bifásica. O aspecto dos sinais obtidos na região monofásica é semelhante ao apresentado na Figura 3.9a. Os sinais obtidos para o escoamento bifásico são parecidos com aquele da Figura 3.9b. Nota-se que a distribuição dos valores para o escoamento apenas de água possui maior simetria em relação ao segundo caso. Nota-se que a Figura 3.9b apresenta picos que afastam a forma do sinal de uma possível simetria. Isso se deve aos máximos ocasionados pelas ejeções citadas anteriormente.



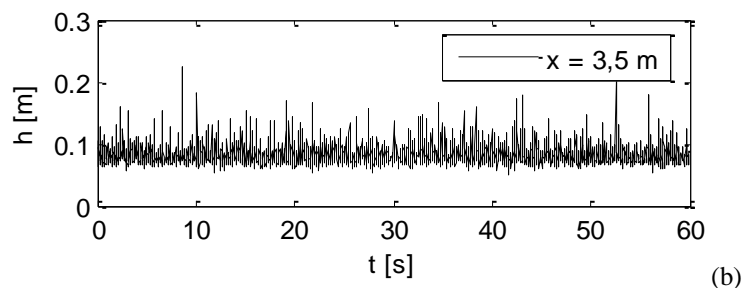


Figura 3.9 – Valores da profundidade em função do tempo para duas posições ao longo do canal: (a) Valores obtidos na região com escoamento monofásico; (b) Valores obtidos na extremidade final do canal, onde o escoamento é bifásico.

Há diferentes formas de representação gráfica dos dados de uma amostra, sendo os diagramas de caixas alternativas interessantes por apresentarem informações sobre simetria e variabilidade. A elaboração dos mesmos utiliza os quartis, denotados por “qr”, e a amplitude interquartil (AIQ). A Figura 3.10 contém o diagrama de caixas para o ressalto estudado por Simões, Schulz e Porto (2010). Nesta figura o eixo vertical contém valores da profundidade do escoamento (h) e o horizontal indica as posições (números inteiros) onde foram realizadas as medições. Nota-se que o diagrama possui uma linha horizontal vermelha. Esta linha corresponde ao segundo quartil do grupo de dados medidos. Quanto mais próxima do centro estiver essa linha, mais simétrica é a distribuição dos dados, por exemplo em um histograma. A extremidade inferior da caixa corresponde ao primeiro quartil e a superior ao terceiro. Portanto, os extremos da caixa encerram 50% dos dados da amostra. Os símbolos “+” correspondem a profundidades (h) e só são apresentados quando excedem os limites $qr_1 - \phi AIQ$ e $qr_3 + \phi AIQ$, sendo estes os “valores discrepantes”. Como convenção, utiliza-se $\phi = 1,5$, embora este número possa ser escolhido de forma conveniente para um determinado estudo. No trabalho dos referidos autores, concluiu-se que o valor 1,5 é adequado para o ressalto hidráulico. Neste trabalho foi utilizado o mesmo critério.

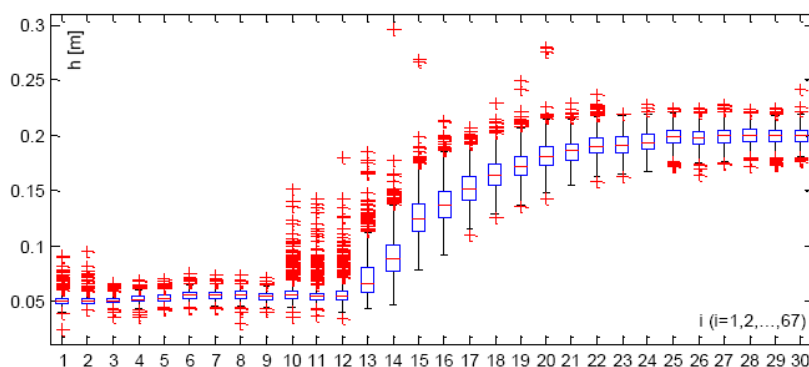


Figura 3.10 – Diagrama de caixas correspondentes às posições da superfície livre de um ressalto hidráulico. Fonte: Simões, Schulz e Porto (2010)

3.4 Análise dos resultados

Neste item, o método citado anteriormente é aplicado ao experimento 14. Evidentemente, qualquer dos demais experimentos poderia ter sido escolhido. Este foi utilizado como exemplo devido à existência de uma onda transversal que alterou a forma do perfil S_2 . A intenção era verificar a forma corrigida do perfil médio na posição da onda, tendo sido este o primeiro experimento analisado com o método de rejeição. O perfil médio da superfície livre e as amplitudes das amostras ao longo de x encontram-se na Figura 3.11. Nota-se que os valores médios das profundidades (hm nesta figura) são inferiores a 10 cm ao longo de toda a extensão do canal. Observações visuais e de filmes mostram que as amplitudes das amostras, apresentadas na Figura 3.11b, não correspondem às oscilações da superfície livre e devem ter sido ocasionadas pelo líquido separado do escoamento principal. Portanto, fica evidente a existência de valores discrepantes com a observação destes resultados (Fig. 3.11a,b).

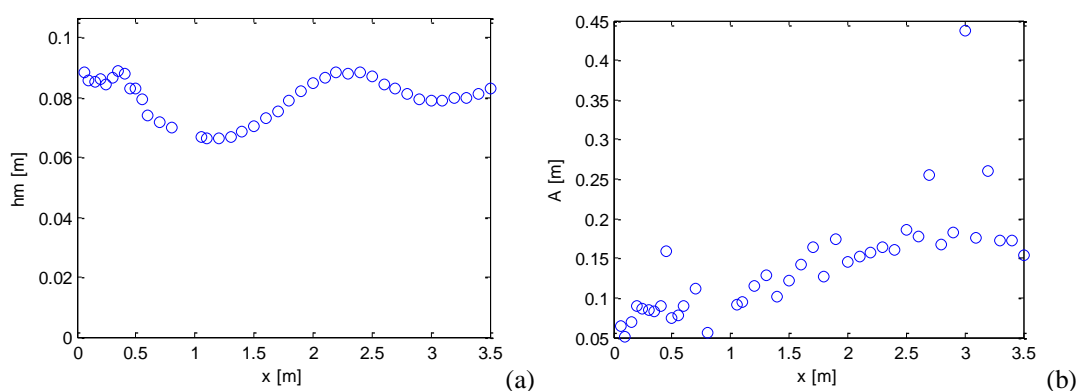


Figura 3.11 – Perfil da superfície livre (a) e amplitude das amostras (b) para o experimento 14.

A representação dos dados por meio de diagramas de caixas é apresentada na Figura 3.12. A Figura 3.12a indica uma grande quantidade de pontos situados fora dos limites estabelecidos como aceitáveis. Após a rejeição dos valores considerados discrepantes, o resultado é aquele da Figura 3.12b. Uma vez que a média e as demais quantidades estatísticas são recalculadas, surgem novos valores discrepantes de acordo com o critério adotado. Isto não significa que eles devam ser rejeitados sem uma nova análise das amostras, por meio das amplitudes e do perfil médio, por exemplo. Estes encontram-se apresentados na Figura 3.13. Na Figura 3.13(a) é comparado o perfil médio com o perfil médio corrigido (hmc). A Figura 3.13 (b) contém a amplitude em função da posição ao longo do canal. Nota-se uma considerável redução nos valores de $A(x)$ em comparação aos encontrados na Figura 3.11b.

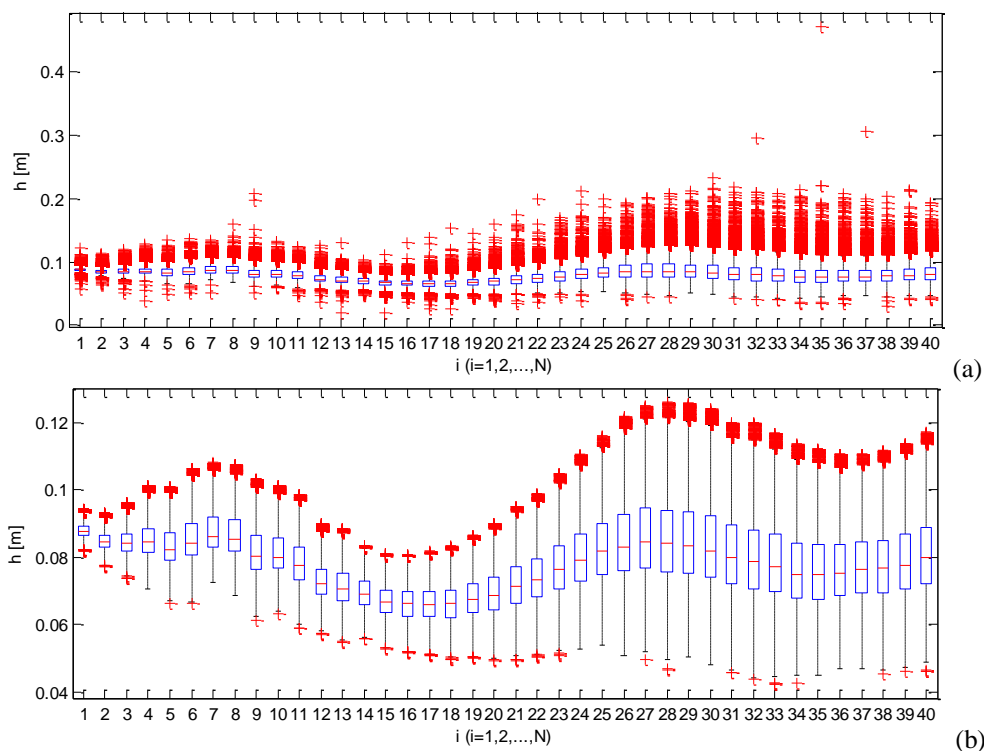


Figura 3.12 – Diagrama de caixas para a posição da superfície livre do experimento 14: (a) com valores discrepantes e (b) após aplicação do método de rejeição de valores discrepantes.

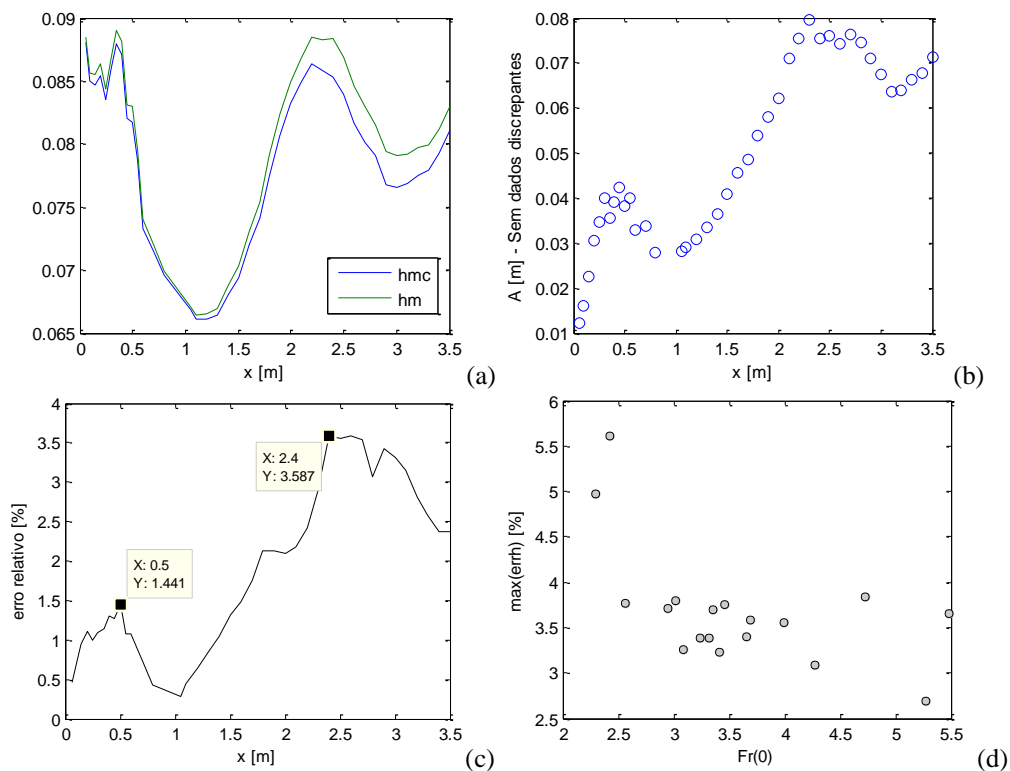


Figura 3.13 - Perfil da superfície livre (a) e amplitude das amostras (b) após a aplicação do método de rejeição; (c) erro relativo calculado com os valores médios “hm” e “hmc”, tendo como referência “hmc”; (d) erros relativos máximos correspondentes aos dezoito experimentos.

Dados correspondentes ao experimento 14 (unidades de acordo com o S.I.).

Alguns resultados interessantes podem ser extraídos dos “valores corrigidos”. A Figura 3.13a indica que o perfil médio da superfície livre não sofre alterações importantes com a rejeição dos dados. Isto é reforçado pela análise dos erros relativos ao longo de x , que assumiram valores menores que 3,6%, como apresentado na Figura 3.13c. Observa-se que os valores médios para a região monofásica (perfil S_2) são muito próximos, com erro relativo máximo menor que 1,5%. A Figura 3.13d contém os erros relativos máximos obtidos em cada um dos experimentos, em função do número de Froude na posição inicial. Os maiores valores resultaram iguais a 5,6% (experimento 2) e 5% (experimento 3) e os demais, menores que 4%. Menciona-se também que o percentual máximo de amostras rejeitadas foi igual a 8,3% para o experimento 5.

Além das conclusões apresentadas no parágrafo anterior, os dados corrigidos foram utilizados para calcular mais algumas quantidades. A primeira entre elas, apresentada na Figura 3.14a, é o terceiro momento central, definido como coeficiente de assimetria. Os valores dos coeficientes de assimetria indicam que a maior parte das distribuições de probabilidades possui dados distribuídos mais à direita em relação à média, devido aos valores positivos encontrados. A Figura 3.14b ilustra o comportamento do coeficiente de curtose (4º momento central). Nota-se que os valores corrigidos situaram-se em torno de três, indicando que grande parte dos valores discrepantes foi rejeitada. A Figura 3.15 contém alguns histogramas e curvas normais que ilustram as formas das distribuições das medidas para quatro posições em x . É interessante notar que a Figura 3.15c, correspondente à posição $x = 1,05$ m é a que mais se aproxima de uma distribuição normal (linha vermelha).

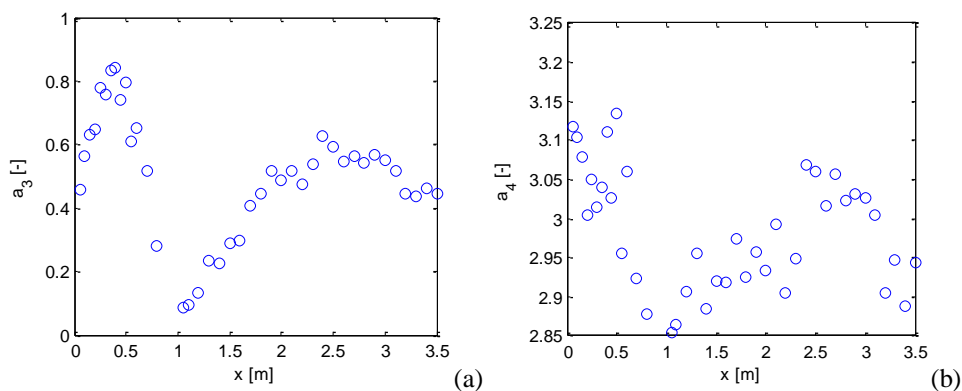


Figura 3.14 – Momentos centrais adimensionalizados: (a) Coeficiente de assimetria e (b) coeficiente de curtose. Experimento 14.

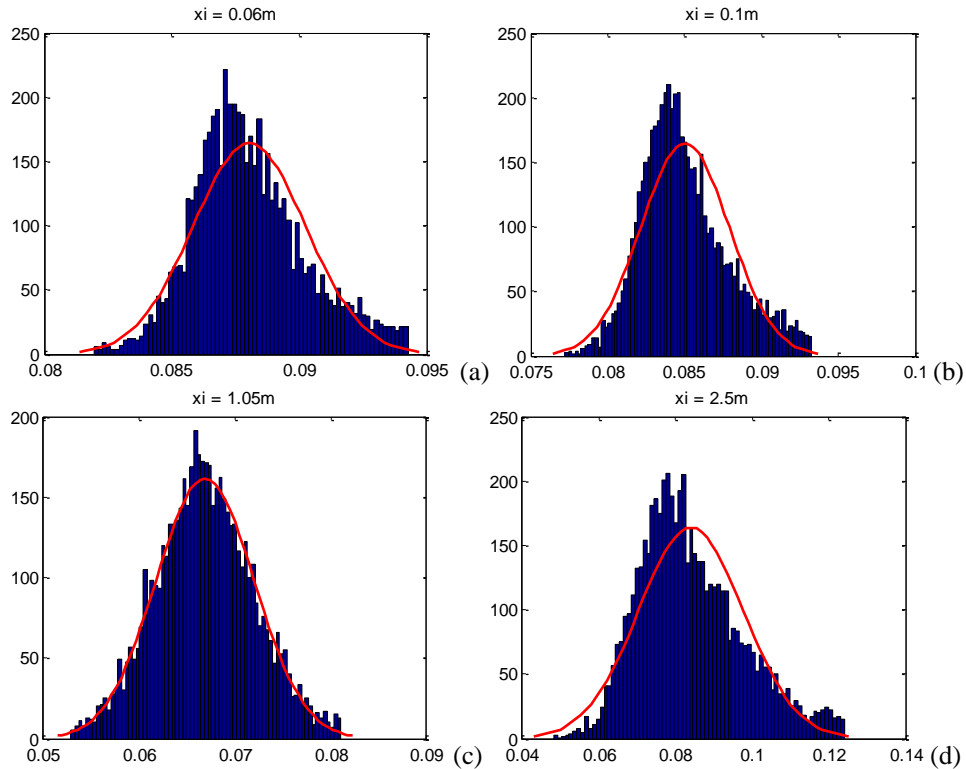


Figura 3.15 – Histogramas de frequências (ordenadas) de h (abscissas) para quatro posições (x): Experimento 14

3.4.1 Posição de início da aeração

A posição de início da aeração foi definida com base no ponto de mínimo que caracteriza a extremidade final do perfil S_2 ou, de forma aproximada, para os experimentos que apresentaram espalhamentos como os experimentos 3 e 19. Os resultados apresentados neste item do trabalho correspondem aos dezesseis experimentos que resultaram na identificação de perfis S_2 , entre os dezoito apresentados na Figura 3.7, tendo sido obtidos após a aplicação do critério de rejeição. A primeira relação investigada envolve as variáveis L_A/k e F_r^* e o uso de uma função do tipo potência. A variável L_A é definida na Figura 3.16a, assim como as demais empregadas neste item. A potência utilizada possui a seguinte forma:

$$\frac{L_A}{k} = c_1 F_r^{*c_2} \quad (3.8)$$

em que $F_r^* = q/\sqrt{gk^3 \sin \alpha}$. c_1 e c_2 são constantes adimensionais.

A qualidade do ajuste foi quantificada com o uso do coeficiente de correlação e dos erros quadráticos entre valores experimentais e calculados. Seja x o conjunto dos valores medidos e y o dos valores calculados, define-se o coeficiente de correlação como a

covariância dos dados ($b_{x,y}$) dividida pelo produto dos desvios padrão (σ_x e σ_y), como escrito a seguir:

$$\rho_{x,y} = \frac{b_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.9)$$

Os resultados podem ser vistos na equação 3.10 e no gráfico da Figura 3.16b. O coeficiente de correlação entre dados experimentais e valores calculados com a equação 3.10 resultou igual a 0,91.

$$\frac{L_A}{k} = 1,61F_r^{*1,06} \quad (3.10)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$.

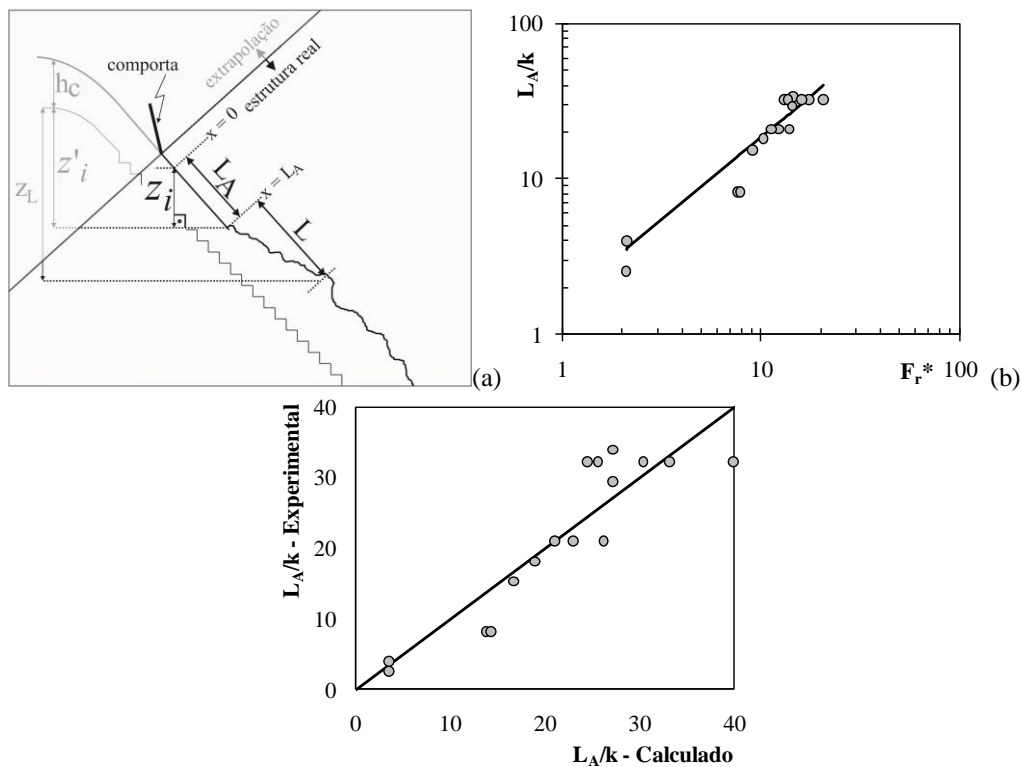


Figura 3.16 – (a) Definição das variáveis relacionadas ao início da aeração; (b) Relação empírica entre L_A/k e F_r^* : dados experimentais e valores calculados; (c) distribuição dos pontos em torno da reta de ajuste perfeito.

Durante os experimentos, constatou-se que a posição de início da aeração depende da abertura da comporta e, portanto, da profundidade na posição inicial ($x=0$). Mais uma vez, o uso de uma potência possibilitou um bom ajuste, com coeficiente de correlação igual a 0,97. A Figura 3.17 contém a comparação entre os dados experimentais e a equação ajustada, escrita a seguir.

$$\frac{L_A}{k} = 7,35 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{1,47} \quad (3.11)$$

Válida para $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$.

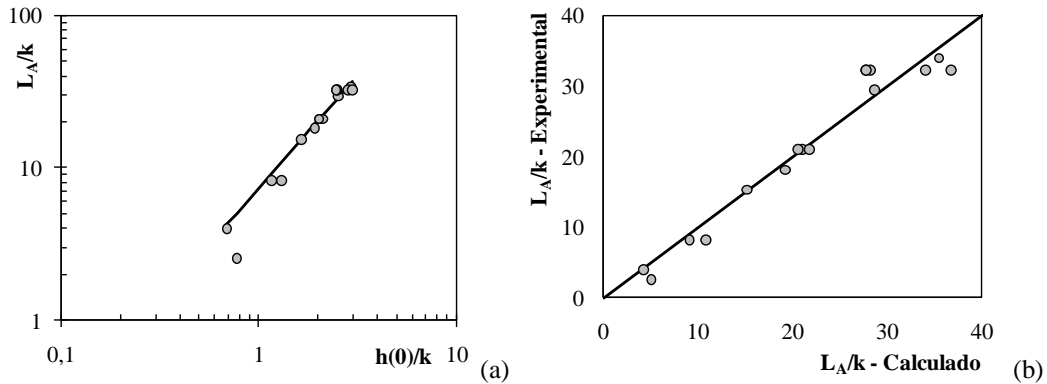


Figura 3.17 – Posição de início da aeração em função da profundidade na posição inicial do canal: (a) relação empírica entre L_A/k e $h(0)/k$; (b) comparação entre dados experimentais, calculados e a reta com coeficiente angular igual a 45° .

As relações entre variáveis descritas anteriormente sugerem que a posição de início da aeração, para este experimento, é uma função de duas variáveis adimensionais: F_r^* e $h(0)/k$. Tendo como fundamento as funções observadas e, sendo λ_i constantes adimensionais, considerou-se a seguinte hipótese:

$$\frac{L_A}{k} = \lambda_1 F_r^{*\lambda_2} + \lambda_3 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{\lambda_4} \quad (3.12)$$

A minimização dos erros quadráticos entre os valores medidos e os calculados possibilitou o cálculo das constantes, tendo sido obtida a equação 3.13. A Figura 3.18 permite observar o comportamento da equação obtida em relação aos experimentos. O coeficiente de correlação entre os dados experimentais e os valores calculados resultou igual a 0,98.

$$\frac{L_A}{k} = -9,09 F_r^{*0,0684} + 16,28 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{0,967} \quad (3.13)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$ e $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$.

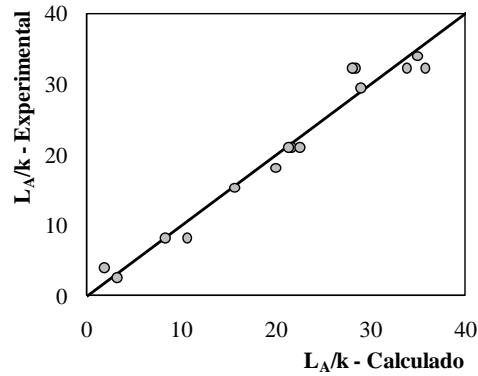


Figura 3.18 – Relação entre dados experimentais e valores calculados (-, reta com 45°). Esta relação corresponde à dependência de L_A/k com F_r^* e $h(0)/k$ e a equação utilizada é a 3.13.

Prosseguindo com a observação das medidas em função de variáveis relevantes do escoamento, constatou-se que é possível expressar L_A/k como função do número de Reynolds na posição inicial, definido com o diâmetro hidráulico ($D_h = 4R_h$, em $x = 0$). Incluindo este adimensional na equação 3.12 por meio da soma de mais uma potência que o envolva, o resultado obtido por mínimos quadrados forneceu os coeficientes da equação 3.14. O coeficiente de correlação para esta equação em relação aos dados experimentais é igual a 0,98. Os pontos formados pelos valores medidos e calculados com a equação 3.14 podem ser vistos na Figura 3.19.

$$\frac{L_A}{k} = 699,97F_r^{*-6,33} + 34,22 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{0,592} - 49,45 \text{Re}(0)^{-0,0379} \quad (3.14)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$, $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$ e $1,15 \cdot 10^5 \leq \text{Re}(0) \leq 7,04 \cdot 10^5$.

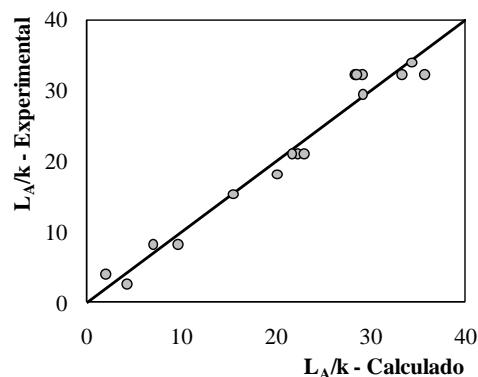


Figura 3.19 - Relação entre dados experimentais e valores calculados (-, reta com 45°). Esta relação corresponde à dependência de L_A/k com F_r^* , $h(0)/k$ e $\text{Re}(0)$ dada pela equação 3.14.

O primeiro ajuste apresentado, equação 3.10, pode ser reescrito com os adimensionais z_i/s e F ($s =$ altura do degrau; $z_i = L_A \text{sen} \alpha$), sendo F o número de Froude utilizado por Boes e

Hager (2003b) com a seguinte forma: $F = \frac{q}{\sqrt{gs^3 \text{sen} \alpha}}$. Pode-se verificar que $F_r^* = F/(\cos^3 \alpha)^{0,5}$.

O coeficiente de correlação para estes adimensionais é o mesmo obtido para os adimensionais encontrados na equação 3.10. A equação resultante, válida para as mesmas condições dos modelos precedentes, é:

$$\frac{z_i}{s} = 1,397F^{1,06} \quad (3.15)$$

A equação 2.92, proposta por Boes (2000) possui coeficientes diferentes daqueles encontrados na equação 3.15. O mesmo ocorre com a equação 2.95, apresentada por Boes e Hager (2003b). Com o intuito de comparar os resultados experimentais por meio destas equações empíricas, a equação 3.15 foi modificada com a substituição de z_i por z_i' (ver Figura 3.16a). Para tanto, utilizou-se a equação da energia escrita entre a seção com escoamento crítico (Seção 1, representada pelo subscrito “c”) e a seção inicial dos experimentos (Seção 2, em $x = 0$, representada por (0)). A forma empregada neste trabalho inclui o uso da equação de Darcy-Weisbach com valores médios para o raio hidráulico e velocidade. A equação resultante é similar à proposta por Boes (2000, p.126), exceto em relação ao uso do coeficiente de Coriolis.

$$(z_c - z(0)) = \frac{h(0) \cos \alpha + \frac{h_c^3}{2h(0)^2} - \frac{3}{2}h_c}{1 - f \frac{h_c^3(h(0) + h_c)}{(h_c h(0))^2 16 \text{sen} \alpha} - \frac{(B + h_c + h(0))}{B}} \quad (3.16)$$

Nota-se que o cálculo de z_i' requer o conhecimento do fator de resistência. Os valores utilizados para este adimensional são aqueles calculados com base na solução analítica da curva S_2 , apresentada no capítulo 4. Como resultado desta metodologia, a equação obtida possui coeficiente de correlação $\rho_{x,y} = 0,98$ e tem a seguinte forma:

$$\frac{z_i'}{s} = 3,19F^{0,837} \quad (3.17)$$

em que $z_i' = z_i + z_c - z(0)$. Válida para os mesmos intervalos precedentes.

Verifica-se que a equação 3.17 fornece valores menores em relação aos calculados com a equação de Boes (2000, p.126) e a equação de Boes e Hager (2003b). Duas razões podem ser destacadas para justificar tais diferenças: (1) O método empregado para o cálculo do fator

de resistência e, seguramente, (2) a definição do início da aeração. Esses autores definiram a posição de “início da aeração no fundo” como aquela onde há 1% de ar no pseudofundo, que ocorre evidentemente após o ar ter atravessado a superfície (ponto de incipiência na superfície) e percorrido o trajeto até o fundo. A definição empregada no presente trabalho corresponde à posição final do perfil S_2 , relacionada com a incipiência na superfície. Utilizando a equação de Boes e Hager (2003b), equação 2.95, é possível relacionar estas duas posições por meio da equação 3.18. Nota-se que o início da aeração com 1% de ar junto ao fundo ocorre em uma posição próxima de 1,85 vezes a posição final do perfil S_2 .

$$\frac{z_i'_{1\%}}{z_i'_{S_2}} = \frac{1,85}{F^{0,037}} \quad (3.18)$$

em que $z_i'_{1\%}$ corresponde à equação de Boes e Hager (2003b) e $z_i'_{S_2}$ à equação 3.17.

É possível transformar a equação 3.17 de tal maneira que ela relacione variáveis semelhantes às definidas inicialmente (L_{A^*}/k e F_r^* , em que L_{A^*} é a distância até o início da aeração, paralela ao pseudo fundo e correspondente a z_i'). Para tanto, utiliza-se a seguinte relação entre os números de Froude:

$$F = \eta F_r^* \Rightarrow \frac{q}{\sqrt{gs^3 \text{sen}\alpha}} = \eta \frac{q}{\sqrt{gk^3 \text{sen}\alpha}} \Rightarrow \eta = \left(\frac{k}{s}\right)^{3/2} \Rightarrow F = \left(\frac{k}{s}\right)^{3/2} F_r^*$$

Uma vez que $L_{A^*}/k = (z_i'/s)/(\text{sen}\alpha \text{cos}\alpha)$, obtém-se:

$$\frac{L_{A^*}}{k} = 4,13 F_r^{*0,837} \quad (3.19)$$

O comportamento da equação 3.19 em relação aos dados experimentais é ilustrado na Figura 3.20. Foram inseridos nesta figura pontos experimentais de outros pesquisadores, assim como duas curvas. Observa-se que, exceto pelos dois primeiros pontos, os resultados situaram-se próximos à curva definida por Matos (1999). É interessante notar também que as retas de Matos (1999) e Sanagiotto (2003) são aproximadamente paralelas. Os dois pontos experimentais correspondentes aos menores números de Froude foram os principais responsáveis pela diferença de inclinação encontrada em relação às equações citadas. Esse desvio pode ter ocorrido devido à dificuldade em medir o perfil S_2 para a condição próxima ao limite entre os escoamentos de transição e deslizante sobre turbilhões e devido à extrapolação realizada para estimativa das vazões.

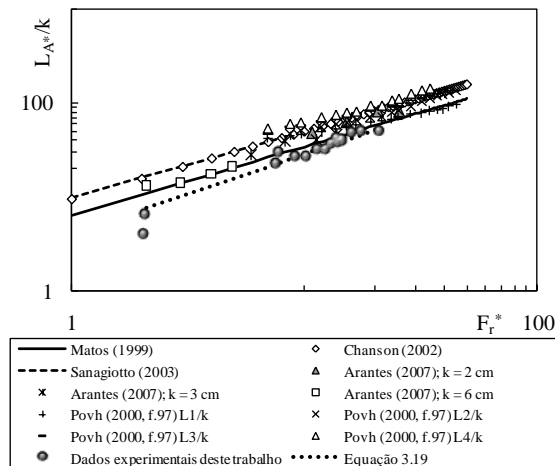


Figura 3.20 – Posição de início da aeração: comparação entre dados experimentais desta pesquisa, equação obtida neste trabalho e dados (experimentais e numéricos) de diferentes autores.

3.4.2 Profundidades no início da aeração

Este item contém os resultados experimentais para as profundidades do escoamento na posição de início da aeração. Assim como no item anterior, procurou-se estabelecer relações entre o adimensional h_A/k e os números de Froude, Reynolds e a profundidade relativa $h(0)/k$. Diferente do problema de determinação da posição de início da aeração, a profundidade em $x = L_A$ não necessita do cálculo de extrapolação para uso em vertedores sem comportas. O primeiro ajuste obtido corresponde à equação 3.20, cujo coeficiente de correlação entre valores medidos e calculados resultou igual a 0,97. A Figura 3.21 ilustra os resultados correspondentes a esta equação em relação aos pontos experimentais.

$$\frac{h_A}{k} = 0,363Fr^{*0,609} \tag{3.20}$$

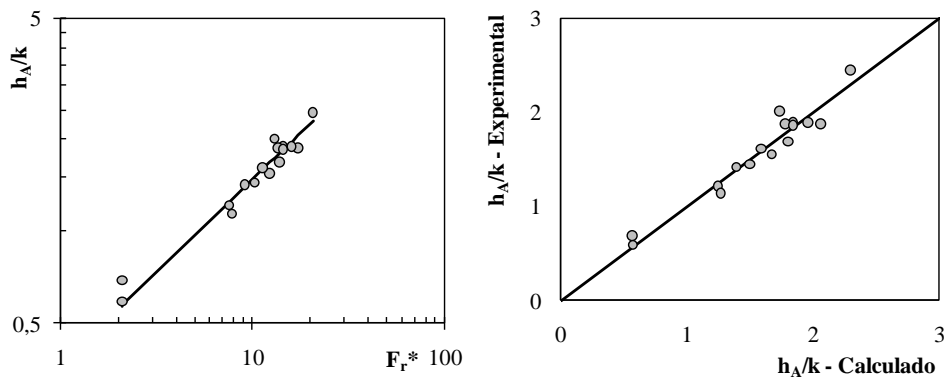


Figura 3.21 – Resultados experimentais e equação empírica (a) e comparação entre os resultados (b): profundidades na posição de início da aeração superficial, definida com o final do perfil S_2 .

Os resultados experimentais, quando comparados às equações e pontos experimentais e numéricos de outros autores, apresentaram excelente concordância. A Figura 3.22 ilustra esta observação e, mais uma vez, revela boa concordância com a equação proposta por Matos (1999). Os coeficientes da lei de potência apresentada por Matos (1999) são próximos dos valores calculados neste trabalho (0,361 e 0,606).

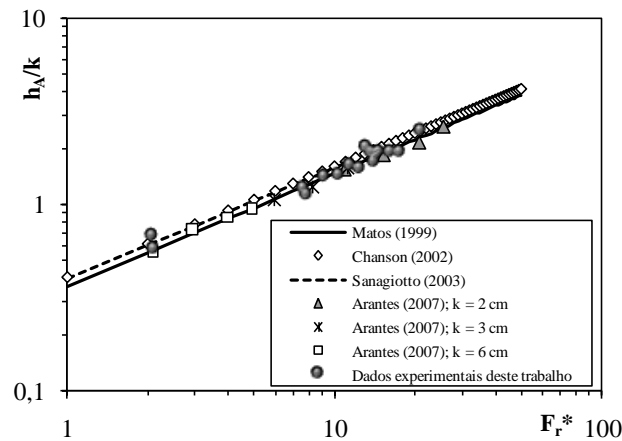


Figura 3.22 – Profundidade na posição de início da aeração definida com base no final do perfil S_2 : comparação com dados experimentais e numéricos de diferentes pesquisadores.

As relações entre h_A/k , $h(0)/k$ e $Re(0)$ foram estabelecidas com o uso de potências, tendo sido obtidas as equações 3.21 e 3.22. A representação gráfica destes ajustes é apresentada na Figura 3.23 e os coeficientes de correlação resultaram iguais a 0,97 e 0,93, respectivamente.

$$\frac{h_A}{k} = 0,918 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{0,783} \quad (3.21)$$

$$\frac{h_A}{k} = 7 \times 10^{-5} Re(0)^{0,77} \quad (3.22)$$

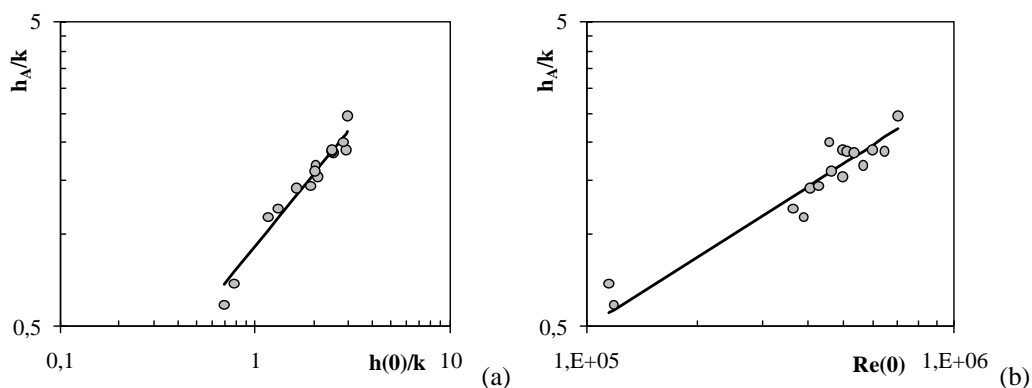


Figura 3.23 – Ajustes para $h_A/k(h(0)/k)$ – (a) e $h_A/k(Re(0))$ – (b)

Um modelo composto por três potências, como aquele representado pela equação 3.14, possibilitou o estabelecimento de uma relação empírica entre as quatro variáveis com $\rho_{x,y} = 0,98$. Nota-se, por meio da Figura 3.24, que a distribuição dos pontos em torno da reta de 45° indica um excelente ajuste.

$$\frac{h_A}{k} = 0,791F_r^{*-6,98} + 1,285 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{0,567} - 19,56 \text{Re}(0)^{-0,322} \quad (3.23)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$, $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$ e $1,15 \cdot 10^5 \leq \text{Re}(0) \leq 7,04 \cdot 10^5$.

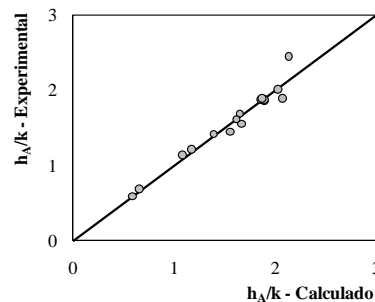


Figura 3.24 – Comparação entre dados experimentais e valores calculados (com $h_A/k(F_r^*, h(0)/k, \text{Re}(0))$) correspondentes à profundidade no início da aeração

A inclusão do número de Reynolds na equação anterior e nas demais propostas semelhantes apresentadas neste capítulo ocorreu de forma livre, seguindo o método empírico de busca de correlações entre as grandezas estudadas. Apesar disto, sabe-se que descrição matemática de escoamentos com superfície livre envolve os números de Reynolds e Froude, como exposto no capítulo 4, quando é apresentada a equação de Navier-Stokes em termos de variáveis adimensionais. O uso da formulação integral de von Kármán para a camada limite também conduz a soluções que podem envolver os números de Reynolds e de Froude, como proposto no capítulo 7 desta tese.

3.4.3 Profundidade final da região de transição e comprimento de transição

Profundidade final da região de transição

Os experimentos revelaram que os valores médios de profundidades formam um perfil da superfície livre com uma região decrescente (S_2) seguida de uma zona com profundidades crescentes até um máximo a partir do qual há uma forma ondulada, como ilustrado na Figura 3.25. O valor máximo imediatamente após o final da segunda região é denotado com h_2 . O comprimento de transição, por sua vez, é representado por L e corresponde ao comprimento entre h_A e h_2 , paralelo ao pseudo fundo.

Assim como nos itens anteriores, esta parte do trabalho procurou estabelecer relações entre variáveis adimensionais com o uso das informações empíricas. As formas das funções foram adotadas a partir da observação do comportamento dos pontos experimentais. Se houver uma boa relação entre h_A/k e h_2/k , é razoável supor que h_2/k apresente boas correlações com os demais adimensionais empregados anteriormente. Dessa forma, a primeira equação estabelecida relaciona h_A/k com h_2/k . O coeficiente de correlação resultou igual a 0,99. Os dados e a equação 3.24 podem ser vistos na Figura 3.26.

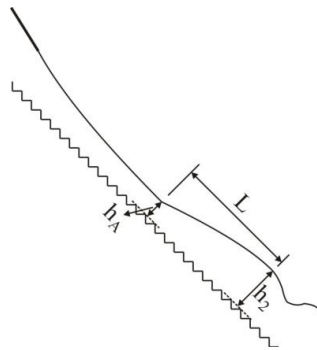


Figura 3.25 – Definição da profundidade h_2 e do comprimento de transição L

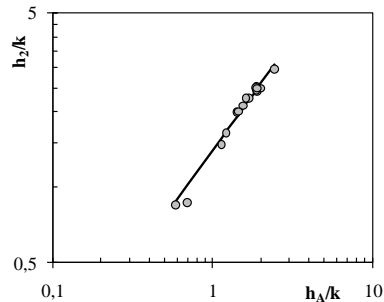


Figura 3.26 – Relação entre a profundidade no início da aeração (h_A/k) e a profundidade correspondente à primeira crista da onda (h_2/k).

$$\frac{h_2}{k} = 1,408 \left(\frac{h_A}{k} \right)^{0,879} \quad (3.24)$$

As equações obtidas para h_2/k em função de F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$ encontram-se apresentadas a seguir. Entre os valores calculados e medidos, os coeficientes de correlação resultaram iguais a: 0,98; 0,97 e 0,94. A Figura 3.27 ilustra a distribuição dos pontos em torno das curvas obtidas.

$$h_2/k = 0,57F_r^{*0,54} \quad (3.25)$$

$$h_2/k = 1,297[h(0)/k]^{0,696} \quad (3.26)$$

$$h_2/k = 0,000333Re(0)^{0,672} \quad (3.27)$$

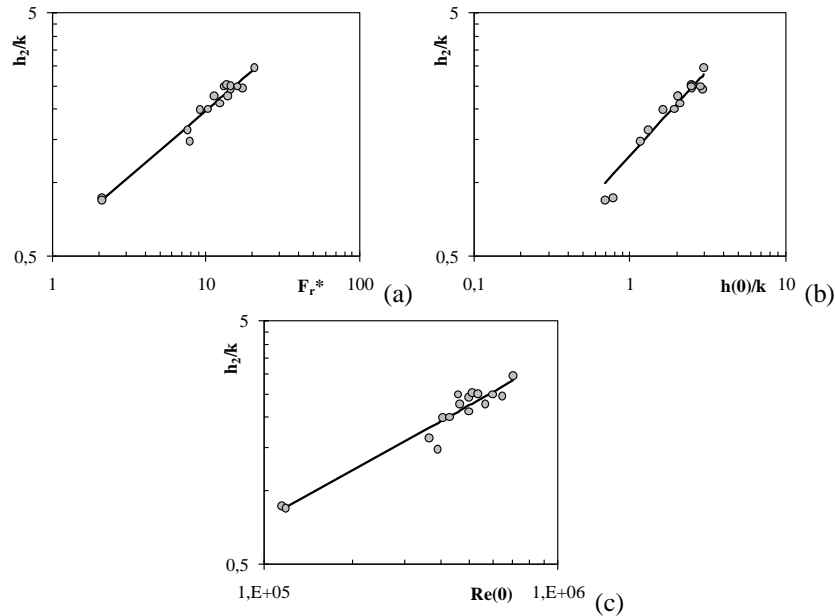


Figura 3.27 – Comparação entre dados experimentais e equações empíricas: (a) Relação entre h_2/k e F_r^* ; (b) relação entre h_2/k e $h(0)/k$ e (c) relação entre h_2/k e $Re(0)$.

Finalmente, assim como nos casos anteriores, estabeleceu-se uma relação envolvendo os três adimensionais F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$ e h_2/k , representada pela equação 3.28 e Figura 3.28, que contém uma comparação entre valores medidos e calculados. O coeficiente de correlação para esta aproximação resultou $\rho_{x,y} = 0,99$.

$$\frac{h_2}{k} = 0,319 F_r^{*0,553} + 0,529 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{0,744} - 1,6 \cdot 10^4 Re(0)^{-2,1 \cdot 10^5} \quad (3.28)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$, $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$ e $1,15 \cdot 10^5 \leq Re(0) \leq 7,04 \cdot 10^5$.

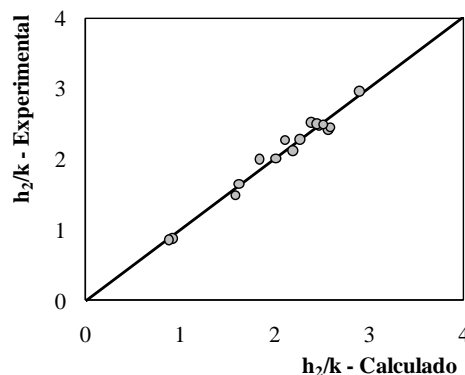


Figura 3.28 – Comparação entre valores medidos e calculados com a equação 3.28.

Comprimento de transição

O comprimento de transição entre o final do perfil S_2 e o escoamento bifásico pôde ser bem caracterizado a partir das medidas com ultrassom. Em um ponto de vista prático, esta variável é relevante para o projeto porque caracteriza uma região ainda desprotegida em função da

ausência de ar junto ao fundo. Tal afirmação constitui uma hipótese fundamentada em observações visuais e necessita de verificação experimental por meio de medições de frações volumétricas de ar. Apesar disto, é apresentada uma análise para a hipótese levantada, tendo como base estudos experimentais de Boes (2000) e Boes e Hager (2003b).

Se aos valores de L_{A^*} ou z_i' forem adicionados comprimentos de transição correspondentes é possível definir novas posições de início da aeração. Os primeiros adimensionais estudados foram $(z_i' + L \text{sen} \alpha)/s = z_L/s$ e $F = q/(gs^3 \text{sen} \alpha)^{1/2}$. Como resultado, desenvolveu-se a equação 3.29, com coeficiente de correlação igual a 0,95. A Figura 3.29 ilustra o comportamento deste ajuste em relação aos dados experimentais. Na mesma figura é apresentada a curva obtida com a equação de Boes e Hager (2003b).

$$\frac{z_L}{s} = 6,4F^{0,81} \quad (3.29)$$

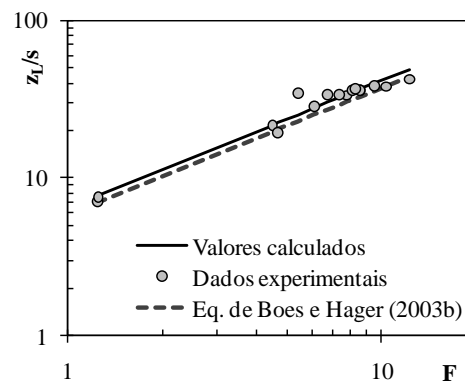


Figura 3.29 – Posição de início da aeração definida com a soma do comprimento de transição L : z_L/s em função de F ; a equação de Boes e Hager (2003b) é $z_i'/s = 5,9F^{0,8}$ (neste caso z_i' corresponde a uma fração de vazios média igual a 1% junto ao pseudo fundo).

As equações propostas por Boes (2000) e Boes e Hager (2003b), equações 2.92 e 2.95, apresentam formas que permitem relacionar z_L/s com a posição correspondente a uma fração de vazios no fundo igual a 1%. Os resultados obtidos foram:

$$\frac{z_i')_{1\%}}{z_L} = 0,73F^{0,03} \quad (3.30)$$

$$\frac{z_i')_{1\%}}{z_L} = \frac{0,92}{F^{0,01}} \quad (3.31)$$

As equações precedentes sugerem, como se esperava, que o início da aeração é mais próximo da posição z_L em relação à posição calculada com a equação 3.17, correspondente ao final do perfil S_2 . Como ilustrado na Figura 3.29, as diferenças em relação à equação de Boes

e Hager (2003b) não são muito grandes, sugerindo que a posição correspondente a z_L é próxima à posição onde há 1% de ar junto ao fundo.

Os dados também foram utilizados para relacionar L_A^*/k com F_r^* , sendo L_A^* a posição correspondente à soma de L_A^* com L . O resultado obtido foi a equação 3.32 ($\rho_{x,y} = 0,95$), cujo comportamento é ilustrado por meio da Figura 3.30 em comparação aos dados de outros pesquisadores. De forma geral, nota-se uma excelente concordância da equação 3.32 com a maior parte dos resultados dos pesquisadores citados na legenda da figura, em especial com os resultados de Povh (2000), correspondentes ao comprimento $L4/k$, Chanson (2002) e Sanagiotto (2003).

$$\frac{L_A^*}{k} = 8,4F_r^{*0,81} \quad (3.32)$$

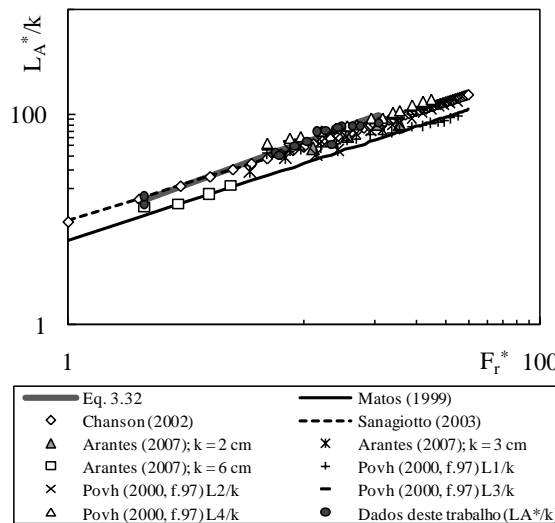


Figura 3.30 – Nova posição de início da aeração: comparação com dados de diferentes autores

Uma tentativa de relacionar a nova posição de início da aeração com o número de F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$ resultou na equação 3.33. Este ajuste possui coeficiente de correlação igual a 0,98 e o espalhamento dos pontos em torno da reta de 45° pode ser visto na Figura 3.31.

$$\frac{L_A^*}{k} = 2397,09F_r^{*-6,36} - 32,49 \left[\frac{h(0)}{k} \right]^{-1,29} + 0,212 Re(0)^{0,452} \quad (3.33)$$

Válida para $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$, $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$ e $1,15 \cdot 10^5 \leq Re(0) \leq 7,04 \cdot 10^5$.

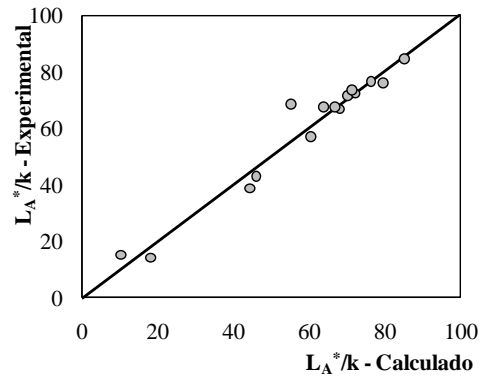


Figura 3.31 – Posição de início da aeração L_A^*/k em função de F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$: comparação entre dados medidos e calculados com a equação 3.33

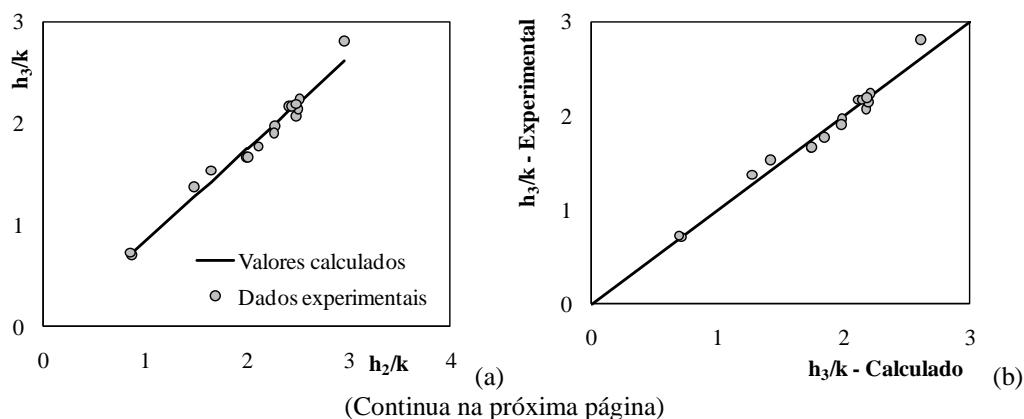
3.4.4 Outras grandezas

Todos os resultados experimentais correspondentes aos perfis S_2 possibilitaram identificar, ainda que de forma aproximada em alguns casos, o início da aeração superficial, o máximo correspondente à primeira crista da onda (h_2) e um mínimo após primeira crista, onde a profundidade da mistura passa a ser representada por h_3 . A análise dos dados correspondentes à profundidade do primeiro vale (h_3) apontou para a existência de boas correlações com algumas variáveis adimensionais. Inicialmente, constatou-se que h_3/k e h_2/k e h_3/k e h_1/k estão relacionados linearmente de acordo com as seguintes equações:

$$\frac{h_3}{k} = 0,908 \frac{h_2}{k} - 0,0748 \quad (3.34)$$

$$\frac{h_3}{k} = 1,117 \frac{h_1}{k} - 0,0596 \quad (3.35)$$

Os coeficientes de correlação entre valores medidos e calculados com as equações precedentes resultaram iguais a 0,99 e os gráficos correspondentes aos ajustes podem ser vistos na Figura 3.32.



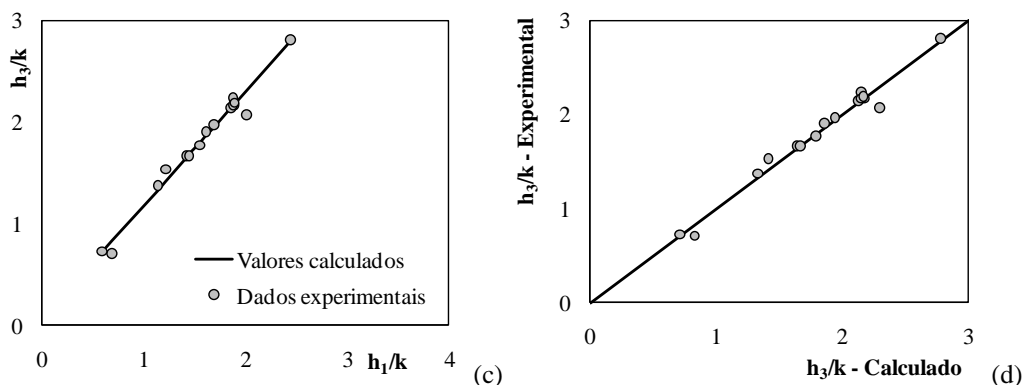
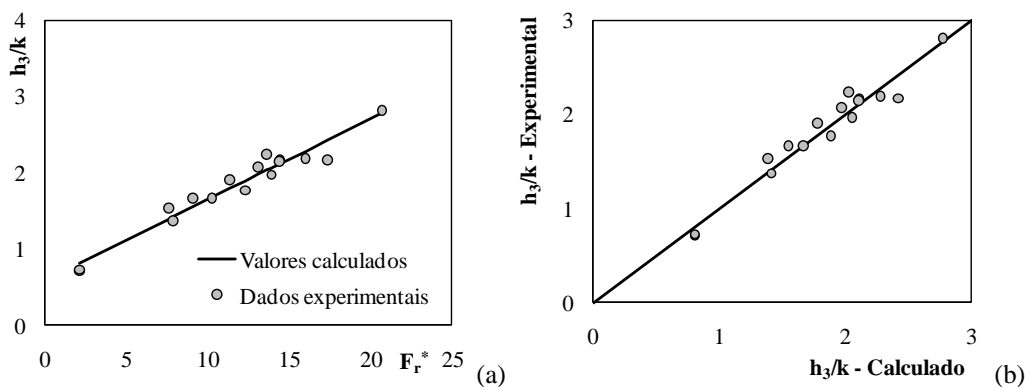


Figura 3.32 – Profundidade média da mistura na posição do primeiro vale: (a) relação linear entre h_3/k e h_2/k ; (b) comparação entre dados medidos e calculados; (c) relação linear entre h_3/k e h_1/k e (d) comparação entre dados medidos e calculados.

Assim como nos desenvolvimentos anteriores, foi investigada a existência de relações entre h_3/k e F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$, além de outros adimensionais, como h_1/h_2 , L/k , L/h_1 , L/h_2 , etc. A disposição dos pontos experimentais (F_r^* , h_3/k) indicou a existência de uma relação linear entre essas variáveis. O ajuste obtido é apresentado na Figura 3.33a e, na Figura 3.33b são comparados dados experimentais com valores calculados por meio da equação 3.36. O coeficiente de correlação entre dados experimentais e medidos resultou igual a 0,97. As Figuras 3.33c,d apresentam resultados obtidos com o mesmo tipo de análise, porém correspondem a $(Re(0), h_3/k)$. Constatou-se uma dependência linear e o coeficiente de correlação entre dados calculados e medidos resultou igual a 0,95. O arranjo dos pontos $(h(0)/k, h_3/k)$ ocorreu de maneira um pouco mais espalhada em relação às demais relações apresentadas neste item. Embora esse espalhamento tenha sido notado, foi possível obter um ajuste razoável por meio de uma potência, como ilustrado nas Figuras 3.33e,f. O coeficiente de correlação resultou igual a 0,95.



(Continua na próxima página)

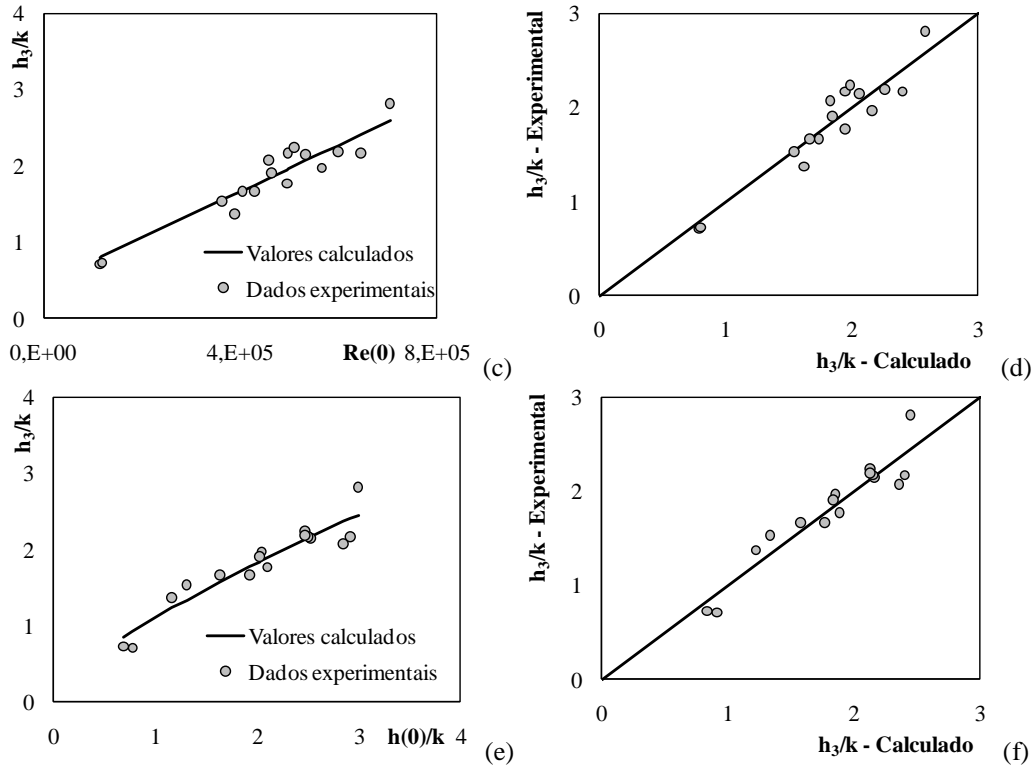


Figura 3.33 – Outras relações lineares envolvendo h_3/k : (a) Distribuição dos pontos experimentais em torno da reta ajustada, relação com F_r^* ; (b) Comparação entre dados experimentais e calculados, relação com F_r^* ; (c) relação linear $h_3/k(Re(0))$; (d) Comparação entre dados experimentais e calculados, para $h_3/k(Re(0))$; (e) distribuição de dados experimentais em torno da curva definida por uma potência entre h_3/k e $h(0)/k$; (f) comparação entre dados experimentais e calculados, relação com h_3/k e $h(0)/k$.

$$\frac{h_3}{k} = 0,106F_r^* + 0,586 \quad (3.36)$$

$$\frac{h_3}{k} = 3,05 \times 10^{-6} Re(0) + 0,439 \quad (3.37)$$

$$\frac{h_3}{k} = 1,10[h(0)/k]^{0,731} \quad (3.38)$$

Como nos itens anteriores e, seguindo o caráter empírico deste capítulo, foi obtida uma equação que relaciona h_3/k com F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$. A forma da função obtida é apresentada a seguir, tendo sido escolhida após a observação das formas das três equações anteriores. A Figura 3.34 permite notar a distribuição dos pontos experimentais e calculados em torno da reta de 45°. O coeficiente de correlação entre dados medidos e calculados com esta metodologia é igual a 0,98.

$$\frac{h_3}{k} = -10,59F_r^{*-0,0316} + 0,0079[h(0)/k]^{4,0} - 15,0Re(0)^{-0,157} + 13,43 \quad (3.39)$$

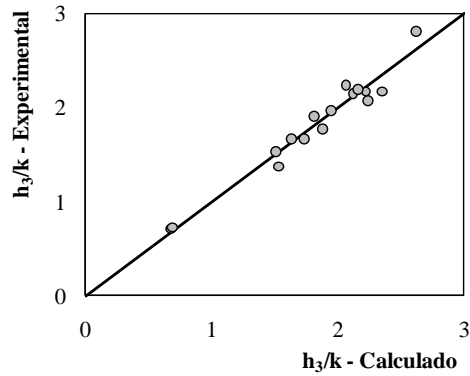
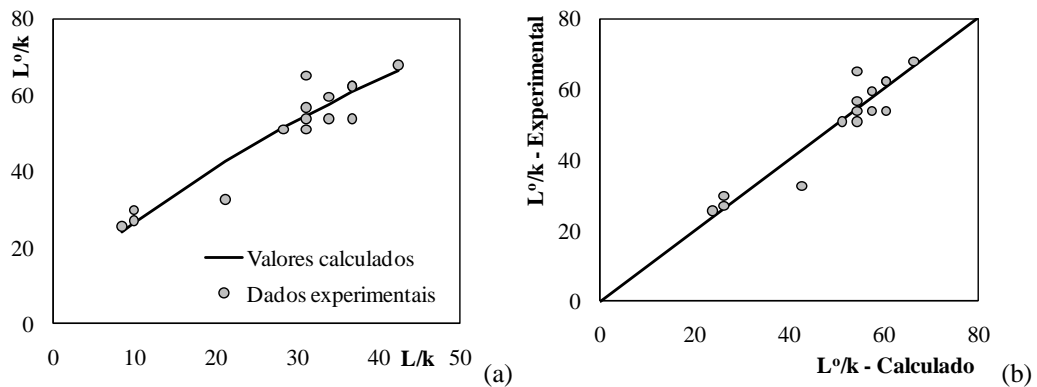


Figura 3.34 – Comparação entre valores experimentais e calculados com a função $h_3/k(F_r^*, h(0)/k, Re(0))$.

Com os dados experimentais desta pesquisa, concluiu-se que não há correlação entre h_3/k e o comprimento de transição ou adimensionais definidos a partir dele (L/h_1 e L/h_2). O comprimento desde o final do perfil S_2 até a posição correspondente a h_3 é definido como L° . As correlações aceitáveis envolvendo este comprimento correspondem ao comportamento de L°/k em função de L/k e L°/h_3 em função de h_3/h_2 . Em ambos os casos foram utilizadas potências, tendo sido obtidos coeficientes de correlação iguais a 0,95 e 0,89. As comparações entre os dados experimentais e calculados são apresentadas a seguir.

$$\frac{L^\circ}{k} = 6,12 \left(\frac{L}{k} \right)^{0,636} \quad (3.40)$$

$$\frac{L^\circ}{h_3} = 14,14 \left(\frac{h_3}{h_2} \right)^{-4,94} \quad (3.41)$$



(Continua na próxima página)

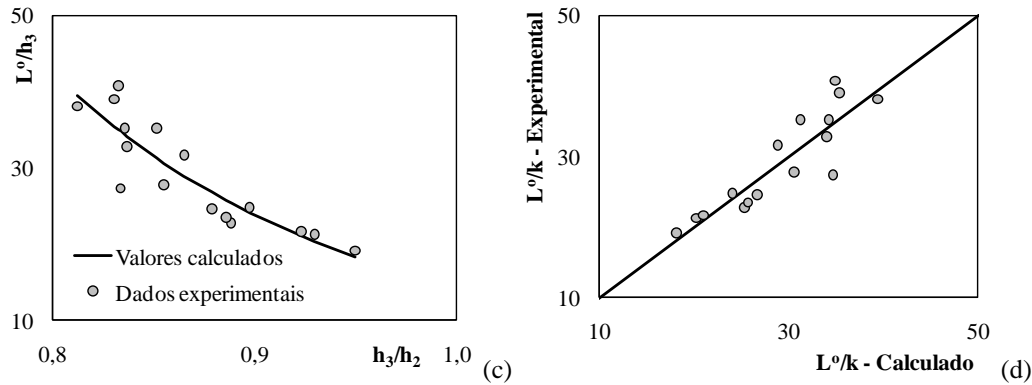


Figura 3.35 – Relações adimensionais estabelecidas com h_2 , h_3 , k , L e L° .

3.4.5 Considerações finais sobre os resultados anteriores

Os resultados obtidos com o sensor acústico possibilitaram identificar variáveis clássicas presentes nos estudos sobre vertedores, como a posição de início da aeração e a profundidade nesta posição. As equações ajustadas aos experimentos e os próprios pontos experimentais situaram-se próximos a resultados de diferentes autores que estudaram o comportamento de tais grandezas em modelos físicos de vertedores em degraus. Além da realização de medidas de variáveis clássicas com o uso de um método inédito nesta área, identificou-se um novo conjunto de grandezas por meio do perfil médio da superfície livre. Este conjunto inclui comprimentos de transição e profundidades relacionadas à forma ondulada da superfície. Como comentário final, destaca-se que todos os ajustes empíricos apresentados anteriormente possuem validade se forem respeitadas as seguintes restrições: $2,09 \leq F_r^* \leq 20,70$, $0,69 \leq h(0)/k \leq 2,99$ e $1,15 \cdot 10^5 \leq Re(0) \leq 7,04 \cdot 10^5$ e $\alpha = 45^\circ$.

3.5 Análise espectral e outras informações estatísticas sobre a superfície livre

3.5.1 Análise espectral

Com o uso da transformada rápida de Fourier (FFT) e os dados experimentais originais foi possível calcular frequências dominantes (f_p) a partir das derivadas temporais de h , consideradas aproximadamente iguais à velocidade vertical da superfície (W). Para tanto, considerou-se a derivada temporal da posição da superfície livre, medida desde o sensor até a superfície. Este valor corresponde ao oposto da derivada temporal de h , como demonstrado a seguir. Seja h a profundidade do escoamento, H_{s_sl} = distância desde o sensor até a superfície livre e H_{sp} = distância desde o sensor até o pseudo fundo. É possível verificar que:

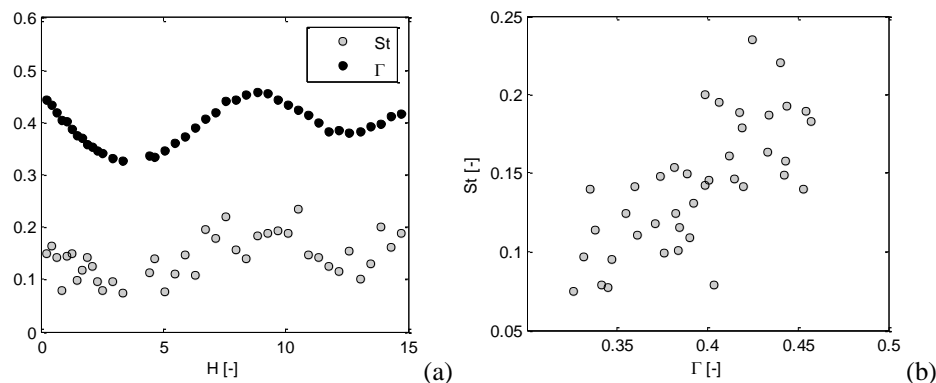
$$W = \frac{dh}{dt} = -\frac{dH_{s_sl}}{dt} \quad (3.42)$$

Sabe-se que $H_{sp} - H_{s_sl} = h$ e H_{sp} é uma constante, logo: $\frac{dh}{dt} = \frac{d(H_{sp} - H_{s_sl})}{dt} = -\frac{dH_{s_sl}}{dt}$. ■

A frequência dominante pode ser utilizada para o cálculo do número de Strouhal, que representa uma relação entre tempos (um tempo característico do escoamento e o tempo atrelado ao fenômeno em estudo, que neste caso é a oscilação da superfície livre). O experimento escolhido para ilustrar este tipo de análise é o de número 18, por ser um dos experimentos com perfil S_2 bem caracterizado. Os seus resultados correspondem a um perfil S_2 praticamente sem ondulações e regiões de transição e aerada bem definidas. O número de Strouhal envolve o tempo característico do escoamento e o período de oscilação. Ele foi definido neste trabalho com a velocidade média obtida a partir do perfil médio ($V(x) = q/h(x)$, sendo q = vazão específica) e a profundidade do escoamento ($h(x)$, que é o valor médio). Outras tentativas, como o uso da profundidade na posição inicial e da velocidade na mesma posição não resultaram em possíveis correlações. Sendo f_p a frequência de pico, o número de Strouhal é escrito com a seguinte forma:

$$St = \frac{hf_p}{V} \quad (3.43)$$

A primeira tentativa de perceber a variação do número de Strouhal ao longo do escoamento conduziu à elaboração da Figura 3.36a. A partir do primeiro pico após a região de transição, assim como na região não aerada, há uma proporcionalidade entre valores de $St(H)$ e Γ . A Figura 3.36b ilustra este comportamento. Definindo o número de Reynolds com o diâmetro hidráulico, $Re = V4R_H/v$, constatou-se que o número de Strouhal é inversamente proporcional ao seu valor, como ilustrado na Figura 3.36c. A Figura 3.36d contém os pontos (Fr, St) e é apenas uma forma de representação adicional que pode ser obtida a partir da Figura 3.36b já que $Fr = \Gamma^{-3/2}$ (Fr = número de Froude).



(Continua na próxima página)

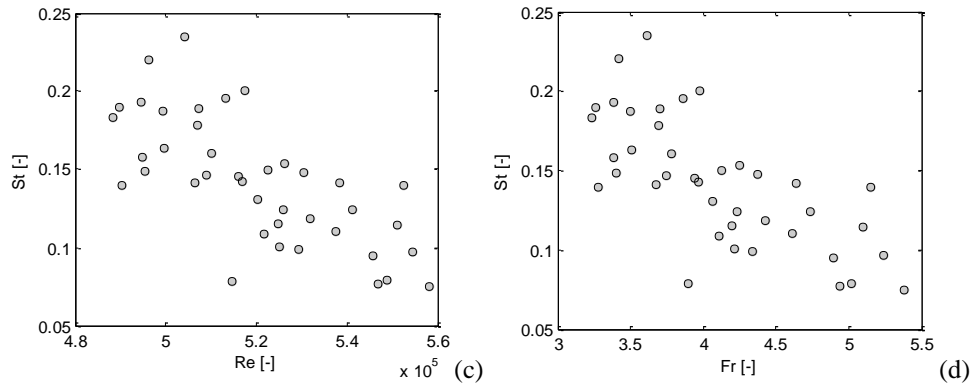


Figura 3.36 – Número de Strouhal calculado com dados do experimento 18: (1) $St(H)$ e $\Gamma(H)$, em que $H = z/h_c$ e $\Gamma = h/h_c$; (b) $St(\Gamma)$; (c) $St(Re)$; (d) $St(Fr)$.

A Figura 3.37 reúne os dados de todos os experimentos realizados nesta pesquisa, isto é, perfis S_3 , S_2 e escoamentos monofásicos e bifásicos. O primeiro resultado, correspondente a relação $St(\Gamma)$ apresentada na Figura 3.37a, contém uma grande quantidade de dados distribuída em uma forma aproximadamente elíptica. Isto confirma a tendência observada no experimento 18. Nota-se também grupos de pontos com comportamento linear bem definido. Eles pertencem à região não aerada dos experimentos 2 e 3 e 19 e são exceções com coeficientes de correlação maiores que 0,8 entre St e Γ . A Figura 3.37b contém pontos que ilustram a relação entre St e Re . Como no caso precedente, há um aglomerado de pontos que se destaca dos demais, entretanto, com forma aproximadamente circular. Os valores de Strouhal mais à esquerda, correspondentes aos menores números de Reynolds, fazem parte dos experimentos 8 e 9 (experimentos com vazões menores). A aparência vertical produzida pela distribuição dos pontos desses dois experimentos ocorreu em função da escala horizontal do gráfico.

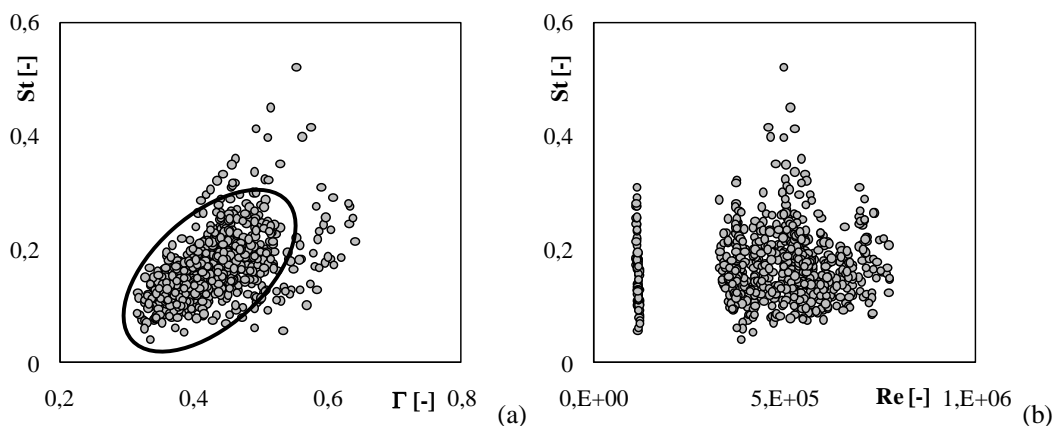


Figura 3.37 – Número de Strouhal para os escoamentos monofásico e bifásico (todos experimentos): (a) Pontos experimentais (Γ , St); (b) pontos experimentais (Re , St).

A separação dos dados obtidos para o escoamento monofásico com perfis S_2 resultou nas Figuras 3.38a,b. A Figura 3.38a mantém a tendência observada a partir de todos os dados.

Os pontos (Re, St) da Figura 3.38b destacaram possíveis relações lineares entre esses adimensionais.

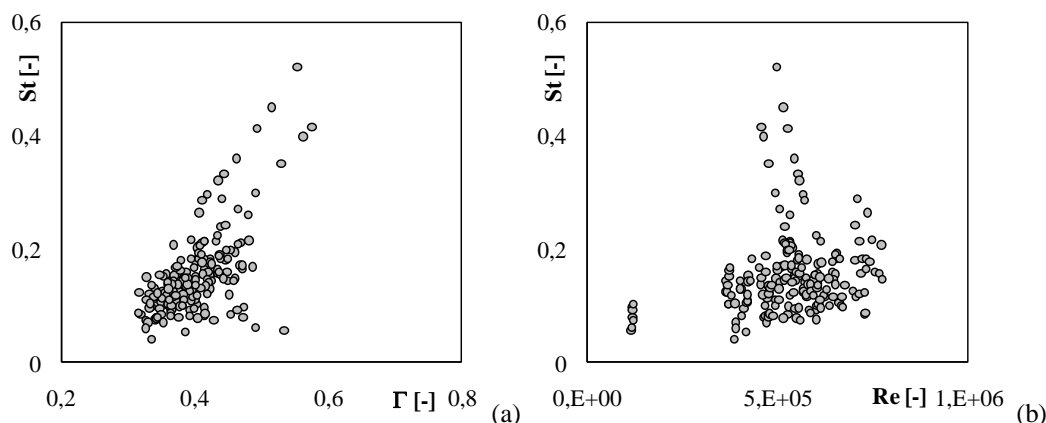


Figura 3.38 – Número de Strouhal para o escoamento monofásico (experimentos com perfis S_2): (a) Pontos experimentais (Γ , St); (b) pontos experimentais (Re, St).

O passo seguinte na observação dos resultados consistiu em gerar gráficos semelhantes aos anteriores, porém, para os pontos da região bifásica dos experimentos com perfis monofásicos S_2 . Percebe-se mais uma vez a forma aproximadamente elíptica na Figura 3.39a, a aparência vertical para baixos Reynolds na Figura 3.39b e o aspecto aproximadamente circular para os demais pontos na Figura 3.39b.

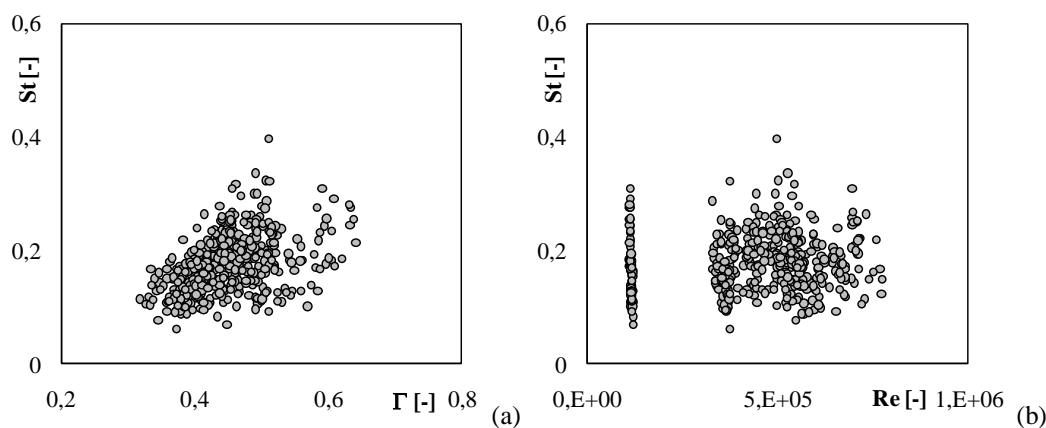


Figura 3.39 – Número de Strouhal para o escoamento bifásico (experimentos com perfis S_2): (a) Pontos experimentais (Γ , St); (b) pontos experimentais (Re, St).

Ao analisar os experimentos individualmente não foram calculadas boas correlações. As únicas exceções apresentaram correlações praticamente perfeitas e possuem uma explicação teórica para isto. Trata-se dos experimentos 2 e 3, que apresentaram frequências de pico na região monofásica com variações pequenas em relação aos demais. Como consequência, o número de Strouhal apresenta boa correlação com o número de Froude devido à relação analítica existente entre ambos, como apresentado a seguir:

$$St = \frac{hf_p}{V} = \frac{\sqrt{h_c} f_p}{\sqrt{g}} Fr^{-4/3} \quad (3.44)$$

O experimento 2 apresentou freqüências de pico próximas de 12,2-12,3 para os primeiros oito pontos experimentais da região monofásica. Para o experimento 3, o valor de f_p resultou próximo de 9,3. Uma vez que, para um determinado experimento, a altura crítica é única, só resta f_p como variável capaz de alterar a forma da relação entre St e Fr ou St e Γ . As freqüências dos dezesseis experimentos com perfis S_2 variaram entre 2,73 e 12,32 para números de Froude entre 1,95 e 5,65, como ilustrado na Figura 3.40a. Avaliou-se também a possibilidade de relação entre a freqüência (ou período) com um tempo característico do escoamento, definido a seguir. Os resultados são apresentados na Figura 3.40b, que relaciona o período com o tempo característico, T_c . Como pode ser visto, assim como ocorreu para a freqüência em função de Fr , não há boa correlação entre estas grandezas.

$$T_c = \Gamma \frac{s\sqrt{2}}{V_c} \quad (3.45)$$

em que $V_c = (gh_c)^{0,5}$.

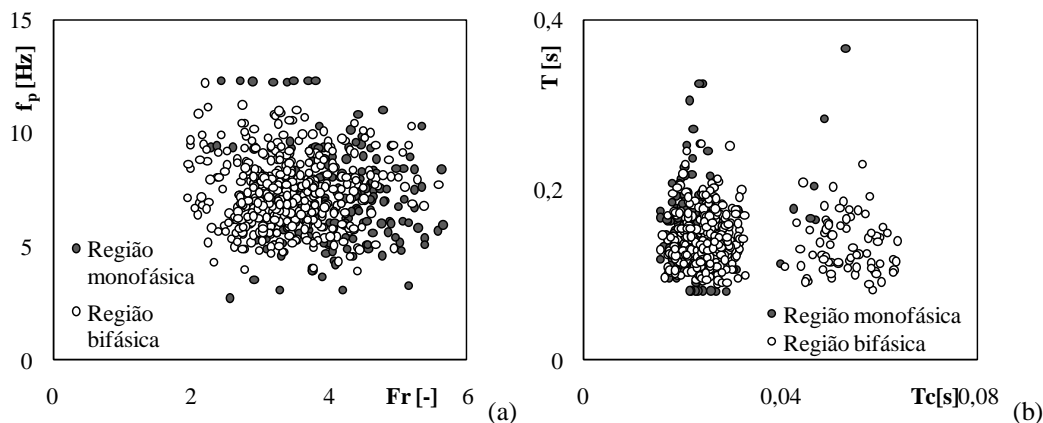


Figura 3.40 – (a) Freqüências dominantes para os experimentos com perfil S_2 ; (b) Período ($1/f_p$) em função do tempo característico definido por meio da equação 3.45.

Os pontos obtidos na posição inicial do experimento 18 ($x=6$ cm) foram utilizados para obter o gráfico da Figura 3.41a. Na mesma figura é mostrada uma reta correspondente à lei dos $5/3$ de Kolmogorov (1945). Uma análise semelhante para a posição final do canal com escoamento plenamente bifásico forneceu os resultados apresentados na Figura 3.41b. É interessante notar que esta avaliação indicou a ocorrência da sub-região inercial apenas para os dados da região monofásica. Em todos os casos, os dados correspondentes a $W = dh/dt$ fornecidos pelo programa de aquisição de dados do sensor ultra-sônico foram utilizados para

gerar os gráficos. Utilizou-se a transformada rápida de Fourier e foram obtidos espectros de amplitude de um lado para os quadrados de w . Uma faixa mais ampla do espectro correspondente à sub-região inercial foi identificada para os escoamentos supercrítico e subcrítico de um ressalto hidráulico com $Fr_1 = 3$ (número de Froude da seção supercrítica) estudado por Simões, Schulz e Porto (2010b), como ilustrado na Figura 3.41c,d.

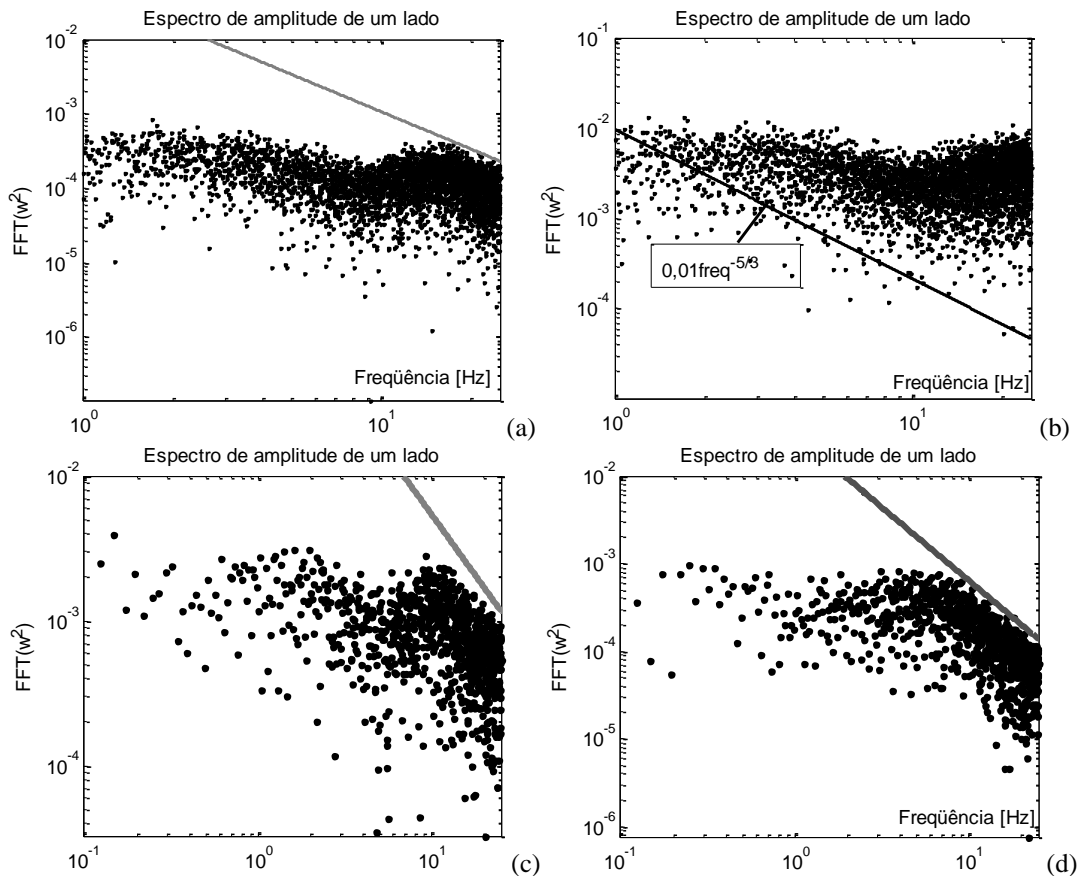


Figura 3.41 – Espectro de amplitude de um lado calculado com $(dh/dt)^2$:

(a) Escoamento monofásico ($x=6$ cm) e (b) escoamento bifásico ($x=350$ cm). A Figura (c) corresponde ao escoamento supercrítico ($x=0$) e a (d) ao escoamento subcrítico ($x=2,95$ m) de um ressalto hidráulico com $Fr_1 = 3$, estudado por Simões, Schulz e Porto (2010b). A linha cinza é obtida com uma potência de $-5/3$ e é apresentada apenas para comparação visual com os pontos.

3.5.2 Intensidade turbulenta

Definições

Este item é dedicado à análise dos sinais $h=h(x,t)$ e obtenção de informações sobre a turbulência na superfície livre. Os cálculos são realizados a partir das amostras com velocidades verticais W , sem rejeição de amostras. Hinze (1975, p.4) menciona o trabalho de Dryden e Kueth (1930) como o primeiro a introduzir a definição de intensidade das flutuações turbulentas. Estes autores utilizaram o valor rms da flutuação, definindo a intensidade das flutuações turbulentas de acordo com a equação 3.46. Brodkey (1967, p.269)

utiliza a mesma definição. É usual expressar os resultados em termos relativos adimensionalizando a intensidade turbulenta com o valor médio da velocidade, a velocidade de atrito, entre outras opções. A intensidade turbulenta possui componentes nas três direções. Considerando a componente vertical, define-se:

$$w' = \sqrt{w^2} \quad (3.46)$$

em que w' é a intensidade das flutuações turbulentas ou simplesmente intensidade turbulenta e $w = W - \bar{W}$.

A intensidade turbulenta definida pela equação 3.46 é considerada aqui como aproximadamente igual à componente vertical da intensidade turbulenta na superfície livre. Além da intensidade turbulenta, foram calculados valores para a energia cinética turbulenta a partir das informações experimentais disponíveis. A energia cinética turbulenta por unidade de massa, k_e , é definida como a metade do traço do tensor de Reynolds:

$$k_e = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.47)$$

em que u = flutuação de velocidade. Classicamente, a energia cinética turbulenta é representada por k . Uma vez que o símbolo k é utilizado em estudos sobre vertedores em degraus como sendo a altura de rugosidade e , por ele aparecer com grande frequência neste texto, optou-se pelo símbolo k_e para representar a energia cinética turbulenta neste capítulo.

Se a turbulência for isotrópica o tensor de Reynolds possui componentes diferentes de zero apenas na diagonal principal. O elipsóide, para turbulência isotrópica, é reduzido a uma esfera deixando de existir variações quando são realizadas rotações do sistema de coordenadas e reflexões com respeito aos planos coordenados. Deste modo, as componentes da diagonal principal passam a ser iguais e a energia cinética turbulenta assume a seguinte forma (escrita em termos de w ou w'):

$$k_e = \frac{3}{2} \overline{w^2} = \frac{3}{2} w'^2 \quad (3.48)$$

Resultados

A intensidade turbulenta foi utilizada para calcular intensidades relativas. A adimensionalização adotada inclui o uso da velocidade crítica, $V_c = (gh_c)^{0,5}$, resultando na seguinte forma para a intensidade relativa (ir):

$$ir = \frac{w'}{V_c} \quad (3.49)$$

De forma aproximada, pôde-se concluir que o comportamento da intensidade turbulenta consiste em um trecho crescente para $H < 10$, aproximadamente, e uma região com valores decrescentes para $H > 10$. A intensidade relativa condensou as informações de forma muito interessante e apresenta o mesmo comportamento, evidenciando um crescimento relativamente pouco íngreme para $H > 25$. A Figura 3.42 permite observar tais descrições.

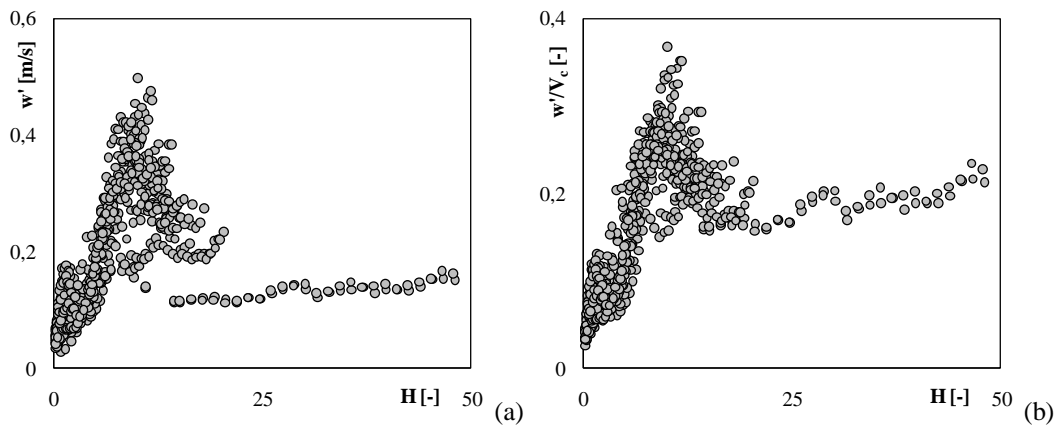


Figura 3.42 – Intensidades turbulentas para todos os experimentos com perfis S_2 : (a) Intensidade em função da posição adimensionalizada $H = z/h_c$; (b) intensidade relativa em função da posição H .

Cada experimento, inclusive aqueles com perfis S_3 , possui um valor máximo para a intensidade turbulenta. Estes valores apresentaram boa correlação com as velocidades críticas correspondentes. A equação empírica ajustada que relaciona $\max(w')$ com V_c é apresentada a seguir e o coeficiente de correlação entre dados medidos e calculados resultou igual a 0,90. A Figura 3.43a ilustra a distribuição dos pontos em torno da curva representada pela equação 3.50. Estão atrelados a esta equação os seguintes limites: $0,157 < w' < 0,493$ e $0,71 < V_c < 1,60$.

$$\max(w') = 0,255V_c^{1,41} \quad (3.50)$$

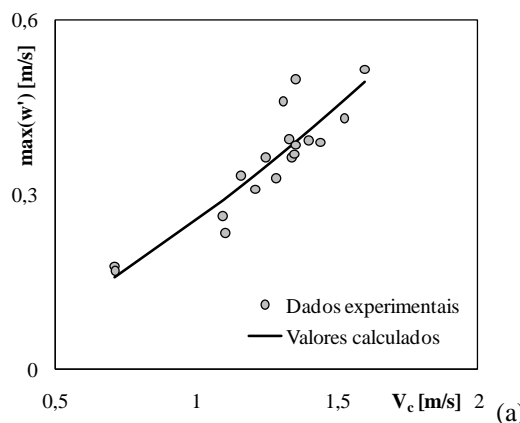


Figura 3.43 – Valores máximos para a intensidade turbulenta

Com o intuito de distinguir os resultados obtidos para a região monofásica dos resultados obtidos após o fim do perfil S_2 , as intensidades relativas foram analisadas em função de z/z_i (z_i = posição de início da aeração, medida verticalmente). Com a Figura 3.44a,b é possível concluir que as intensidades relativas máximas ocorrem a jusante do ponto de início da aeração superficial. A Figura 3.40b destaca esta conclusão e permite observar também que existem dois picos, o primeiro para a região monofásica e o segundo para a região bifásica. Os máximos ocorridos na região monofásica não apresentaram boa correlação com a velocidade crítica, como aconteceu para o escoamento da mistura. Nota-se que os valores mínimos definidos pelo contorno superior dos pontos ocorrem próximos ao ponto de início da aeração, um pouco a montante, em $z/z_i \cong 0,9$. O pico para a região bifásica ocorre em $z/z_i \cong 2,11$. Cabe mencionar que os valores obtidos para a intensidade turbulenta relativa são da ordem dos valores encontrados na literatura (ver Hinze, 1975).

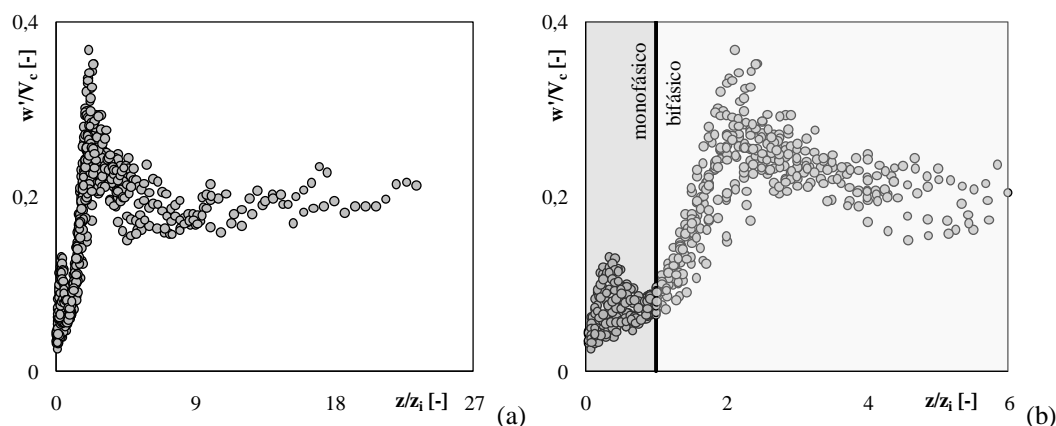


Figura 3.44 – Intensidade relativa em função da posição vertical adimensionalizada com a posição de início da aeração definida com o final do perfil S_2 : (a) Todos os resultados e (b) Parte inicial, com destaque para a posição de início da aeração ($z/z_i = 1$).

Assumindo como verdadeira a hipótese de turbulência isotrópica, a equação 3.48 pôde ser empregada para calcular a energia cinética turbulenta. Para comprovar esta hipótese seria necessário medir as três componentes da velocidade e, a partir delas calcular as componentes do tensor de Reynolds. Se as correlações entre u_i e u_j ($i \neq j$) resultassem iguais a zero (ou muito baixas) a turbulência seria isotrópica. A obtenção de tais valores na superfície livre é extremamente complexa. Em um determinado volume selecionado para análise, por exemplo, com 5 cm^3 , certamente ocorrem movimentos de diversos tipos. Alguns possíveis exemplos são: o movimento semelhante ao de uma membrana, a ocorrência de formas alongadas que se deslocam tridimensionalmente, a formação de gotas que ascendem e, em seguida, retornam ao escoamento principal seguindo trajetórias que não são necessariamente retilíneas, etc. Sendo

assim, definir a superfície livre com precisão seria a primeira tarefa, que aparentemente não é simples.

A energia cinética turbulenta k_e também foi adimensionalizada. Para tanto, empregou-se a energia específica crítica (no sentido hidráulico) definida como $E_c = (3/2)h_c$ (por unidade de peso de fluido). Seja h a profundidade de escoamento e V a velocidade média na seção transversal, a energia específica (E) para um canal retangular é definida como:

$$E = h + \frac{V^2}{2g} \quad (3.51)$$

Derivando a energia em relação a profundidade h , vem:

$$E = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2gh^2} \Rightarrow \frac{dE}{dh} = 1 - \frac{q^2}{gh^3} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g} \left(1 - \frac{dE}{dh}\right)^{-1}}$$

Se $dE/dh = 0$, $h = h_c$ (altura crítica utilizada ao longo do texto). A energia específica crítica é definida de modo que $E_c = E(h_c)$. Portanto, $E_c = (3/2)h_c$. A energia específica crítica por unidade de massa de fluido pode ser escrita como:

$$e_c = \frac{3}{2}gh_c$$

Utilizando esta expressão para adimensionalizar a energia cinética turbulenta, obtém-se:

$$k_e^* = \frac{k_e}{e_c} = \frac{\overline{w^2}}{gh_c} = \frac{w'^2}{gh_c} \quad (3.52)$$

A partir da equação 3.52, conclui-se imediatamente que $k_e^* = (w'/V_c)^2$. Os valores obtidos para a energia cinética seguem o mesmo padrão correspondente à intensidade turbulenta, como pode ser visto na Figura 3.45. Gonzalez e Chanson (2008) apresentaram resultados para intensidade turbulenta relativa obtida com uma sonda de condutividade de ponta dupla. A adimensionalização foi escrita em termos da velocidade longitudinal interfacial (ar-água), também obtida com a referida sonda. Os resultados destes pesquisadores correspondem a escoamentos em canais em degraus submetidos ao escoamento deslizante sobre turbilhões e com placas triangulares inseridas nos degraus para alterar a turbulência em relação a uma estrutura convencional. As intensidades turbulentas relativas foram apresentadas em função da posição adimensional y/y_{90} e das velocidades V/V_{90} . Nestas definições, y = eixo coordenado perpendicular ao pseudofundo, y_{90} é a profundidade para $C=0,9$, V é a velocidade longitudinal interfacial (ar-água) e V_{90} a velocidade em $y=y_{90}$.

Embora os resultados de Gonzalez e Chanson (2008) correspondam a variações da intensidade turbulenta ao longo da profundidade do escoamento, foi interessante notar que eles mediram valores para a intensidade turbulenta que compuseram um padrão com uma região aproximadamente constante (abaixo do pseudofundo), uma tendência decrescente até um ponto de mínimo seguido de um crescimento com um ponto de máximo que ocorre entre $y/y_{90}=0,5$ e $y/y_{90}=1,0$.

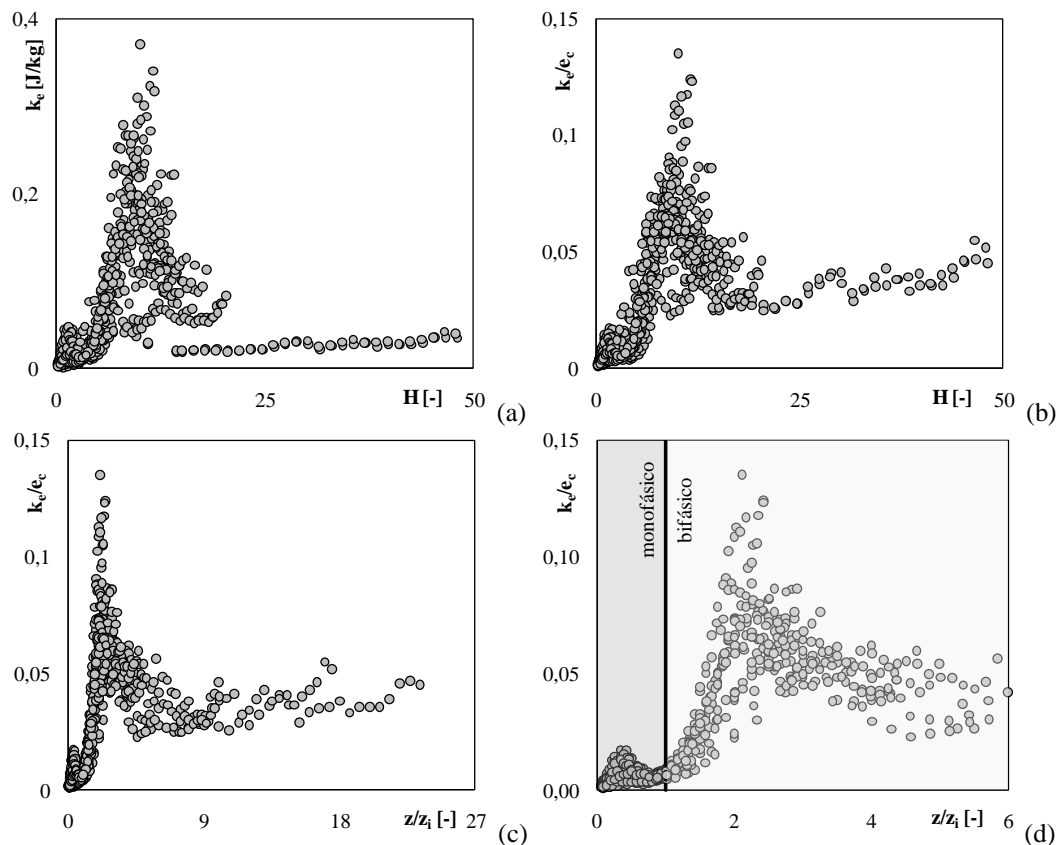


Figura 3.45 – Energia cinética turbulenta: (a) Energia cinética turbulenta em função de H ; (b) k_e^* em função de H ; (c) k_e^* em função de z/z_i ; (d) k_e^* em função de z/z_i (ampliação).

Resultados obtidos para um ressalto hidráulico

No âmbito deste doutorado foi conduzido um estudo experimental com o intuito de obter informações sobre a superfície livre de um ressalto hidráulico com $Fr_1=3$. O sensor acústico utilizado foi o mesmo empregado nas medições realizadas no canal em degraus, com frequência de amostragem igual a 50 Hz, 2000 amostras/posição e 67 posições ao longo do canal. A Figura 3.46a possui um desenho esquemático do canal empregado, que é retangular e possui largura igual a 41 cm. A vazão foi obtida através de um vertedor triangular e da equação de Thomson. Embora o escoamento no canal em degraus seja supercrítico ao longo de toda a sua extensão, considerou-se relevante mencionar os resultados obtidos para o ressalto hidráulico porque ambos os casos apresentam uma semelhança que é a entrada de ar

por meio da superfície livre. Foi interessante notar que este fenômeno provoca um aumento nos valores das intensidades turbulentas no ressalto hidráulico e nos escoamentos sobre degraus. Além disto, os aspectos gerais das distribuições de intensidades turbulentas são semelhantes.

Alguns resultados experimentais e numéricos relacionados ao estudo do referido ressalto hidráulico foram publicados por Simões, Schulz e Porto (2010b). Neste trabalho os dados apresentados pelos referidos autores foram utilizados para calcular as intensidades turbulentas relativas. Uma fotografia do ressalto estudado, o perfil médio da superfície livre e o comportamento da intensidade turbulenta relativa são apresentados na Figura 3.46b,c. Como pode ser notado na Figura 3.46c, w'/V_c assumiu um valor máximo na região de intensa recirculação do ressalto hidráulico e aproximadamente coincidente com a posição em que ocorre a profundidade crítica, o que são características que apontam esta medida como adequada para localizar o rolo e obter informações de sua agitação. Entre o ponto de máximo e x/h_c igual a 20, o comportamento de w'/V_c pôde ser descrito por meio da seguinte equação (com coeficiente de correlação igual a 0,99):

$$\frac{w'}{V_c} = 2,45 \left(\frac{x}{h_c} \right)^{-6/5} \quad (3.53)$$

No intervalo $20 < x/h_c < 30$, w'/V_c possui um valor médio próximo de 0,07.

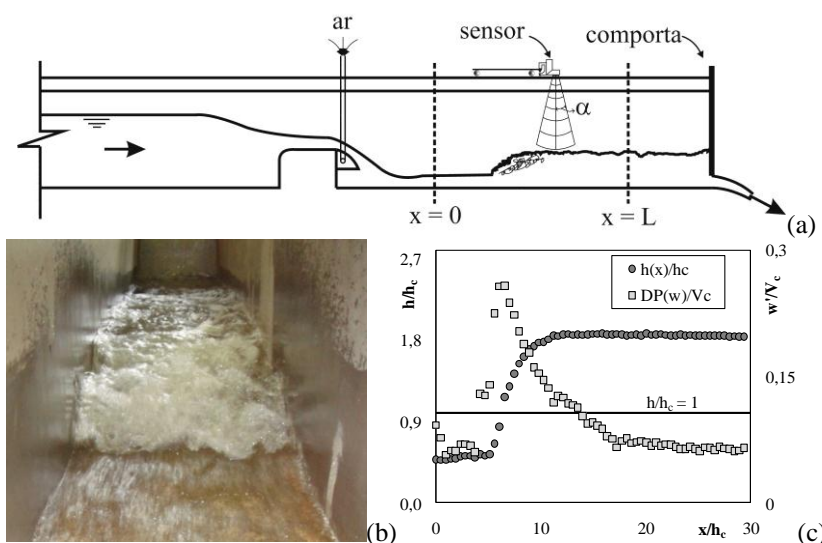


Figura 3.46 – Resultados experimentais sobre a posição da superfície livre de um ressalto hidráulico: (a) desenho esquemático do canal e sensor empregado; (b) fotografia do ressalto estudado ($Fr_1 = 3$); (c) intensidade turbulenta relativa ao longo do ressalto hidráulico e perfil médio da superfície livre.

3.5.3 Profundidades máximas

Neste item são apresentados valores para as profundidades máximas adimensionalizadas em relação à profundidade crítica ($\max(\Gamma)$) e suas relações com outras variáveis dos escoamentos estudados no canal em degraus. As primeiras relações obtidas foram entre $\max(\Gamma)$ e h_1/h_c , h_2/h_c e h_3/h_c . As equações que representam tais relações e os gráficos correspondentes são apresentadas a seguir. Nota-se que há coerência entre as relações observando-se as definições de cada uma das grandezas adimensionais utilizadas. Os valores máximos foram obtidos a partir dos perfis médios corrigidos.

$$\max(\Gamma) = 1,27 \frac{h_1}{h_c} + 0,0454 \quad (3.54)$$

$$\max(\Gamma) = 1,09 \frac{h_2}{h_c} - 0,0202 \quad (3.55)$$

$$\max(\Gamma) = 1,48 \frac{h_3}{h_c} - 0,111 \quad (3.56)$$

Os coeficientes de determinação são iguais a 0,71, 0,92 e 0,84, respectivamente, e devem ser observados os seguintes intervalos: $0,31 < h_1/h_c < 0,47$, $0,41 < h_2/h_c < 0,60$, $0,36 < h_3/h_c < 0,49$.

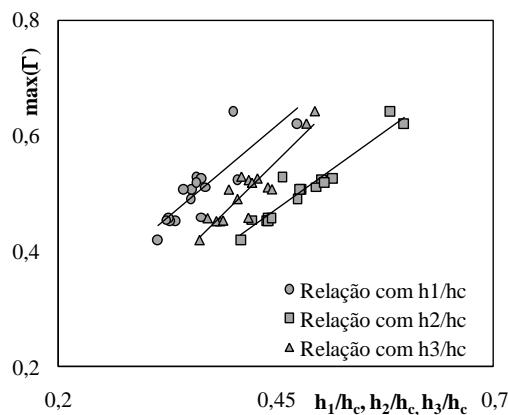


Figura 3.47 – Relações entre $\max(\Gamma)$ e os adimensionais h_1/h_c , h_2/h_c , h_3/h_c .

Os coeficientes de correlação de outros ajustes apresentaram valores baixos, dentre os quais os únicos aceitáveis são aqueles envolvendo o número de Reynolds na posição inicial, $Re(0)$, e o adimensional s/h_c . As equações 3.57 e 3.58 representam as relações entre estas variáveis, com coeficientes de correlação iguais a 0,87 e 0,85, respectivamente. Os gráficos da Figura 3.48 contêm os pontos experimentais em torno das retas ajustadas aos dados.

$$\max(\Gamma) = -3 \times 10^{-7} Re(0) + 0,651 \quad (3.57)$$

$$\max(\Gamma) = 0,215 \frac{s}{h_c} + 0,421 \quad (3.58)$$

Validade: $1,1 \times 10^5 < \text{Re}(0) < 7,0 \times 10^5$ e $0,21 < s/h_c < 0,97$.

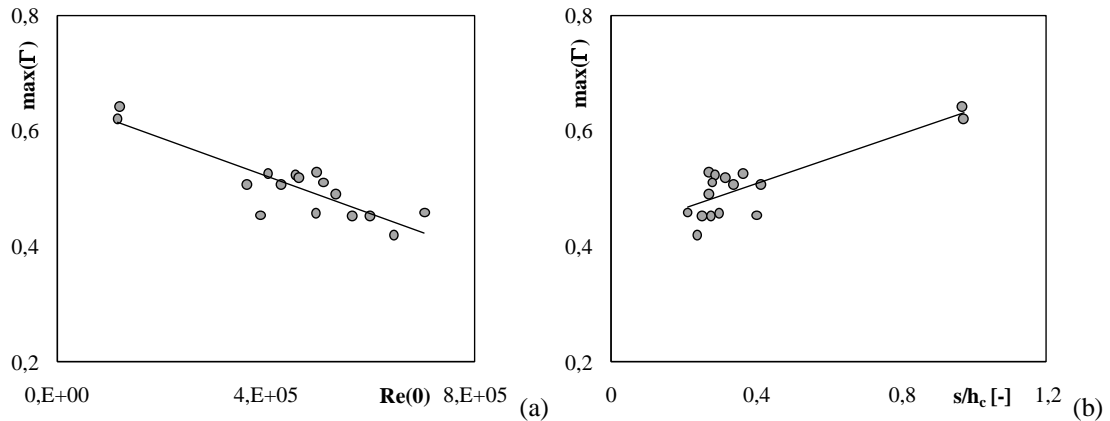


Figura 3.48 – (a) Relação entre $\max(\Gamma)$ e $\text{Re}(0)$; (b) relação entre $\max(\Gamma)$ e s/h_c .

Finalmente, com o intuito de localizar os valores máximos, foram calculadas as relações entre $\max(\Gamma)$ e H e $\max(\Gamma)$ e $H - z_i/h_c$ ou $(z - z_i)/h_c$ (distância entre a posição de início da aeração superficial e a posição correspondente ao valor máximo). As equações 3.59 e 3.60 correspondem a estes ajustes e possuem coeficientes de correlação iguais a 0,86 e 0,83. Os gráficos da Figura 3.49 ilustram as retas obtidas com as equações e os pontos correspondentes aos experimentos realizados. A equação 3.60 é especialmente útil porque fornece a localização da profundidade máxima a partir do ponto de início da aeração. Assumindo que os resultados são aplicáveis a estruturas sem comportas é possível calcular a profundidade máxima após o início da aeração com a equação 3.60.

$$\max(\Gamma) = 0,0084H + 0,407 \quad (3.59)$$

$$\max(\Gamma) = 0,0074(H - z_i/h_c) + 0,445 \quad (3.60)$$

Validade: $7,36 < H < 27,35$ e $3,35 < (H - z_i/h_c) < 24,62$.

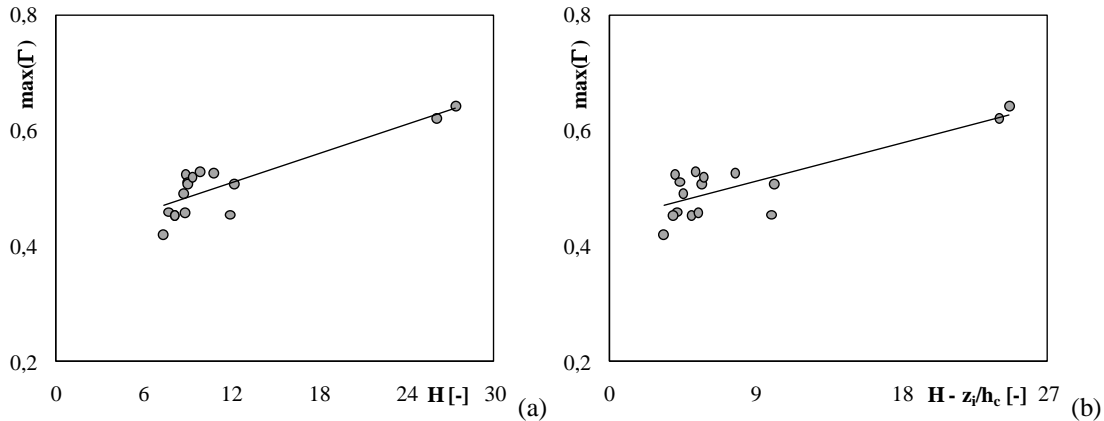


Figura 3.49 – Localização dos valores máximos de Γ ao longo do canal: (a) Relação entre $\max(\Gamma)$ e H ; (b) relação entre $\max(\Gamma)$ e $H - z_i/h_c$.

As relações apresentadas até aqui foram estabelecidas com as profundidades máximas pertencentes aos perfis médios da superfície livre, a jusante do ponto de início da aeração. Devido às oscilações da superfície livre em torno dos valores médios, estes não são os máximos medidos. Foi possível estabelecer uma relação linear entre os valores máximos obtidos com perfis médios, $\max(\Gamma)$, e os máximos presentes nos sinais corrigidos, denotados por $\max(\Gamma^*)$. A equação que relaciona estas quantidades é apresentada a seguir e possui coeficiente de correlação igual a 0,98.

$$\max(\Gamma^*) = 2,0\max(\Gamma) - 0,275 \quad (3.61)$$

Válida para $0,42 < \max(\Gamma) < 0,64$.

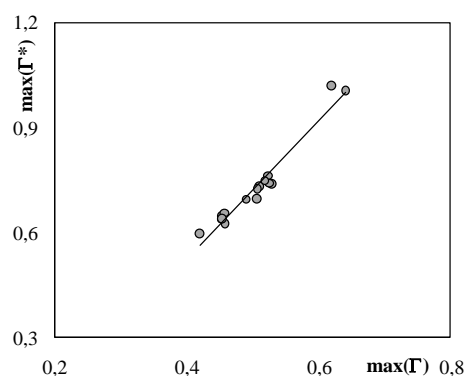


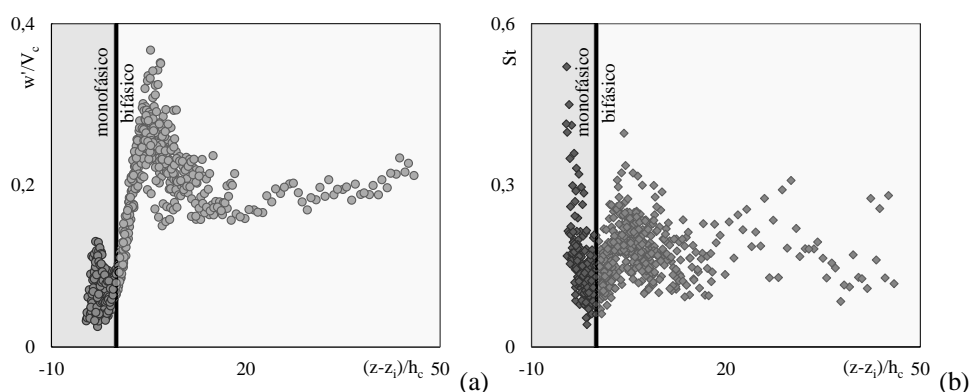
Figura 3.50 – Relação entre os valores máximos de Γ

A equação 3.61 mostra que a profundidade máxima é aproximadamente duas vezes maior que a profundidade média máxima. Esta constatação é de grande importância prática, sendo útil para o dimensionamento das alturas dos muros laterais. O dimensionamento realizado a partir de profundidades equivalentes apenas de água e frações de vazios médias depende do fator de resistência adotado, como pode ser visto em Simões *et al.* (2010),

Simões, Schulz e Porto (2011) (discussão de Takahashi e Ohtsu, 2011). A metodologia desenvolvida neste trabalho proporciona mais uma alternativa para avaliar a altura dos muros laterais, válida para vertedores em degraus com $\alpha = 45^\circ$ e os demais intervalos citados anteriormente.

3.5.4 Relação entre o escoamento uniforme e decaimento de quantidades estatísticas

A definição precisa da ocorrência do escoamento uniforme pode ser feita a partir do conhecimento dos comportamentos médios dos campos de velocidades, pressões e distribuição de vazios. Em média, a uniformidade existe se a condição de equilíbrio é alcançada, como em um escoamento plenamente desenvolvido em um conduto forçado, cujos perfis de velocidades possuem formas independentes ao longo da posição. De forma geral, entende-se que a uniformidade em escoamentos livres é uma característica assintótica. Uma profundidade constante, por outro lado, é entendida como um indicativo de uniformidade (apesar de poderem haver redistribuições de velocidades e vazios). A Figura 3.51 contém quatro gráficos. O primeiro, Figura 3.51a, permite observar as intensidades turbulentas relativas (apresentadas anteriormente) em função do adimensional $(z-z_i)/h_c$. O uso deste adimensional nas abscissas faz com que os pontos correspondentes ao escoamento monofásico fiquem em $(z-z_i)/h_c < 0$. Os demais também utilizam esta ideia. A Figura 3.51b contém os números de Strouhal, apresentados anteriormente e reapresentados nesta figura com o referido eixo das abscissas. As Figuras 3.51c e 3.51d foram elaboradas com os coeficientes de assimetria e curtose dos sinais correspondentes às profundidades do escoamento. Nos quatro gráficos apresentados é possível observar a ocorrência de um pico à jusante do início da aeração. A intensidade turbulenta apresentou um comportamento crescente mais definido em relação aos demais a partir de $(z-z_i)/h_c = 0$ e o número de Strouhal foi o adimensional com maior espalhamento ao longo do canal. Após o pico observa-se o decaimento destas quantidades.



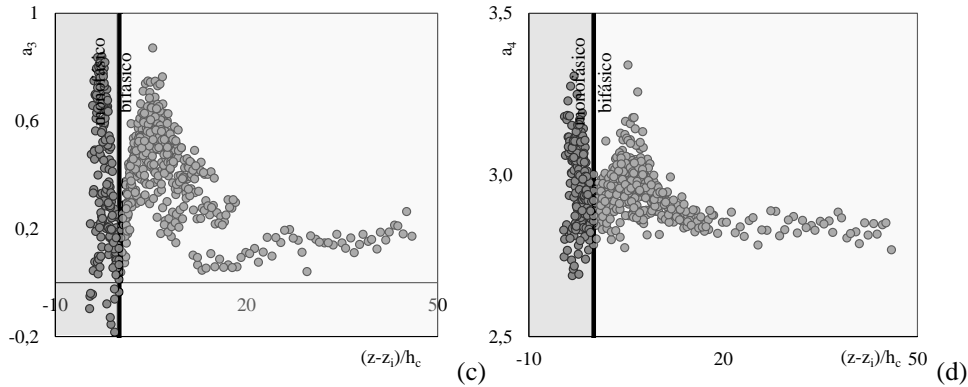


Figura 3.51 – Quantidades estatísticas em função de $(z-z_i)/h_c$: (a) Intensidade turbulenta, (b) Número de Strouhal, (c) coeficiente de assimetria, (d) coeficiente de curtose (623 pontos em cada gráfico)

De forma aproximada, sobretudo para St , fica evidente que o decaimento termina muito próximo à posição $(z-z_i)/h_c=20$. Definindo $Z_u=(z-z_i)+z'_i)_{s_2}$ e com o uso da equação 3.17, pode-se estabelecer, com base nos dados e considerações expostos neste trabalho, uma função para a distância desde a crista do vertedor até a posição final do decaimento, Z_u . Inicialmente, escreve-se o número de Froude presente na equação 3.17, F , com a seguinte forma:

$$F = \frac{q}{\sqrt{gs^3 \sin \alpha}} = \frac{h_c^{3/2} \sqrt{g}}{\sqrt{gs^3 \sin \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\frac{s}{h_c} \right)^{-3/2} \quad (3.62)$$

A equação 3.17 pode ser reescrita como:

$$\frac{z'_i)_{s_2}}{s} \frac{s}{h_c} = 3,19 \frac{s}{h_c} F^{0,837} \Rightarrow \frac{z'_i)_{s_2}}{h_c} = 3,19 \left(\frac{s}{h_c} \right)^{-0,26} (\sin \alpha)^{-0,42}$$

Empregando a definição de Z_u e o resultado $(z-z_i)/h_c=20$, obtém-se a equação procurada:

$$\frac{Z_u}{h_c} = 20 + 3,19 \left(\frac{s}{h_c} \right)^{-0,26} (\sin \alpha)^{-0,42} \quad (3.63)$$

Deve-se destacar que esta equação está vinculada às condições experimentais apresentadas anteriormente. Isto significa que o número 20 pode não ser absoluto, eventualmente sendo função do ângulo α , por exemplo, assim como os demais números reais presentes na função.

Escoamento uniforme

Matos e Quintela (1995c) indicaram que o escoamento uniforme ocorre se $z/h_c \geq 25-30$, para $1V:0.75H$. Neste caso z é o eixo coordenado vertical com origem na crista padrão e positivo para baixo. Yildiz e Kas (1998), para a mesma inclinação, sugeriram que o escoamento uniforme ocorre se $z/h_c \geq 20$. Ohtsu *et al.* (2004), a partir de resultados experimentais,

concluíram que a altura adimensional necessária para que ocorra o escoamento quase-uniforme em vertedores em degraus depende de s/h_c e de α .

Empregando a metodologia de Ohtsu *et al.* (2004), o escoamento uniforme para um canal com $\alpha=45^\circ$ ocorre se $z/h_c > 24,95$, para $s/h_c=1$. O uso da equação de Boes e Hager (2003a) para $\alpha=45^\circ$ resulta em $z/h_c > 19,04$ como condição para ocorrência do escoamento uniforme. Utilizando a equação 3.63 com $s/h_c=1$ e $\alpha=45^\circ$, obtém-se $Z_u/h_c=23,7$. Com esta breve revisão sobre o tema, percebe-se que a previsão da ocorrência do escoamento uniforme ainda é um tema com resultados divergentes. Tais observações sugerem que o método apresentado nesta tese, baseado no decaimento das quantidades estatísticas, é adequado para a definição da ocorrência do escoamento uniforme.

3.7 Considerações finais sobre o Capítulo 3

O Capítulo 3 foi escrito com base nos resultados experimentais obtidos nesta pesquisa. Em um primeiro ponto de vista, as equações propostas são ajustes matemáticos destinados a fornecer subsídios práticos para a previsão de grandezas relacionadas ao escoamento em canais em degraus com 1V:1H. Em outros termos, as equações propostas servem como ferramentas de interpolação. Em função das condições relacionadas à etapa experimental desta pesquisa, há uma lacuna entre alguns pontos experimentais e dois experimentos correspondentes as menores vazões. Para reforçar as tendências estabelecidas foram utilizadas comparações com dados experimentais de outros autores, como pode ser visto na Figura 3.22. A possibilidade de uso imediato das equações empíricas em projetos de canais em degraus foi, sem dúvidas, um dos motivadores essenciais desta pesquisa. Além disto, procurou-se compreender aspectos aparentemente menos aplicados, como a configuração dos perfis médios formados por diferentes profundidades características, o comportamento do número de Strouhal e intensidades turbulentas calculadas com os sinais obtidos. Como consequência do uso deste segundo ponto de vista, definiu-se uma equação destinada a prever a ocorrência do escoamento uniforme com base no final do decaimento das quantidades estatísticas apresentadas. Este é um dos principais resultados desta tese. Os capítulos seguintes abordam aspectos teóricos da mecânica dos fluidos, turbulência, soluções numéricas e desenvolvimentos teóricos para problemas relacionados aos escoamentos com superfície livre em canais de vertedores lisos e em degraus.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Sumário

4 EQUAÇÕES E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	159
4.1 A hipótese do contínuo	159
4.2 Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)	160
4.2.1 Primeira dedução do TTR	160
4.2.2 Segunda dedução do TTR	164
4.3 Conservação de massa	169
4.4 Quantidade de movimento linear	173
4.5 Conservação de energia	183
4.6 Conservação de massa para uma espécie em escoamento	186
4.7 Forma diferencial do TTR.....	190
4.8 Equações de Navier-Stokes	191
4.8.1 Considerações iniciais.....	191
4.8.2 Equações constitutivas	192
4.9 Forma adimensional das equações de Navier-Stokes.....	202
4.10 Teoria da similaridade e equações de Navier-Stokes	205
4.11 Equações de Euler e Bernoulli	211
4.12 Escoamentos multifásicos	213
4.12.1 Introdução	213
4.12.2 Modelo não-homogêneo: Definições básicas.....	215
4.12.3 Modelo não-homogêneo: Equações de conservação	218
4.12.4 Modelo Homogêneo.....	219
4.13 Segunda lei da termodinâmica	221
4.13.1 Teorema de Gouy-Stodola.....	221
4.13.2 Forma diferencial para taxa de geração de entropia	225
4.14 Conservação de vorticidade e circulação	228
4.15 Teoria da camada limite: uma breve apresentação	231

4.15.1 Solução de Blasius (1908)	232
4.15.2 Formulação integral (Theodore von Kármán)	236
4.16 Considerações finais	241

4 EQUAÇÕES E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Este capítulo é dedicado à apresentação de algumas equações e princípios básicos da mecânica dos fluidos, voltada mais especificamente aos estudos da presente tese. Tais equações representam fundamentos essenciais, a saber: conservação de massa, segunda lei de Newton, a primeira lei da termodinâmica e a segunda lei da termodinâmica. Existem diferentes caminhos possíveis quando se pretende deduzir as equações de conservação. Neste texto, grande parte das deduções é realizada a partir do teorema do transporte de Reynolds e outros teoremas. Esta é uma alternativa compacta e rigorosa, tendo sido considerada adequada para a exposição feita aqui. Note-se que esta exposição visa o entendimento mais direto dos desenvolvimentos feitos ao longo desta tese. Assim, ela objetiva permitir ao leitor localizar mais facilmente tanto os princípios aplicados como as proposições teóricas ou empíricas desenvolvidas. A notação empregada não é única, sendo possível encontrar notação vetorial e com índices, ambas comentadas nas referências citadas. O presente capítulo também inclui a obtenção da equação constitutiva para um fluido newtoniano que, combinada com a equação de Cauchy (deduzida a partir da 2ª Lei de Newton), resulta na equação de Navier-Stokes. Neste sentido, as exposições feitas neste capítulo também podem ser vistas como uma revisão bibliográfica sobre os princípios de conservação, em suas formas mais básicas. Enfatiza-se que a revisão desses princípios e as suas consequentes equações é necessária na fundamentação da Mecânica dos Fluidos Computacional, que é explorada nesta tese para estudar o escoamento em vertedores em degraus. Apesar da extensão do assunto, considera-se este texto uma síntese, dividida em duas partes. A primeira corresponde ao presente capítulo e a segunda, apresentada no Capítulo 5, aborda a Transição e a Turbulência. As principais referências utilizadas foram Shames (1962), Chandrasekharaiah e Debnath (1994), Schulz (2003) e Batchelor (2000).

4.1 A hipótese do contínuo

As equações apresentadas neste capítulo possuem duas hipóteses básicas: (1) a validade da mecânica newtoniana e (2) a hipótese do contínuo. Os materiais são compostos por moléculas, átomos e partículas ainda menores do que essas duas estruturas. Com base nesta noção, pode-se dizer, de forma geral, que essas partículas não estão continuamente distribuídas nos materiais, existindo vazios entre elas. Quando se estuda os efeitos externos sobre os materiais, os vazios podem ou não aparecer nas formulações, dependendo da hipótese adotada. O estudo denominado microscópico é aquele que leva em conta a existência dos interstícios. O estudo

que ignora os interstícios e assume que o material é contínuo é chamado de macroscópico, sendo este o campo que inclui a Mecânica dos Fluidos.

Seja Ω uma região finita no espaço tridimensional que contém um determinado fluido e ω uma sub-região de Ω . Se Δm é a massa contida em um volume ΔVol , em um instante t , a massa específica é definida da seguinte maneira:

$$\rho = \lim_{\Delta \text{Vol} \rightarrow \omega^*} \frac{\Delta m}{\Delta \text{Vol}} \quad (4.1)$$

Neste caso ω^* é um subvolume mínimo de Ω . Se $\Delta \text{Vol} < \omega^*$ não é possível definir um valor único para ρ devido às flutuações estatísticas. De outro modo, se ω^* for grande, não há como capturar possíveis variações espaciais da massa específica, definindo-se então um valor médio que disfarça a distribuição desta variável no espaço. Estas duas propriedades devem ser satisfeitas para que tanto as flutuações estatísticas sejam irrelevantes como o volume seja suficientemente pequeno para ser considerado como um ponto no seu tratamento matemático. Com a hipótese do contínuo o limite é calculado “assumindo” que $\Delta \text{Vol} \rightarrow 0$. A massa específica ou densidade (como se utiliza nos textos de mecânica do contínuo) é, no caso mais geral, uma função do espaço e do tempo, sendo uma variável escalar e de campo, ou seja, $\rho = \rho(x_i, t)$, $i=1, 2, 3$.

4.2 Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Os modelos matemáticos da física clássica como a segunda lei de Newton, a lei de conservação da massa, a primeira lei da termodinâmica e a segunda lei da termodinâmica, por exemplo, foram primordialmente estabelecidos para sistemas. O TTR possibilita a aplicação destas leis aos volumes de controle, constituindo assim uma transformação do ponto de vista lagrangeano para o ponto de vista euleriano (por esta razão, alguns autores denominam o TTR como Transformação de Reynolds. Situação semelhante ocorre com a derivada material D/Dt). A dedução do TTR, apresentada a seguir, não admite que o volume de controle possa se deformar ou se deslocar. Entretanto, tais limitações podem ser superadas com a aplicação do teorema de Leibniz e com o uso de uma velocidade relativa, por exemplo.

4.2.1 Primeira dedução do TTR

A Figura 4.1a ilustra o volume de controle e o sistema no instante inicial t . Nota-se que não é possível fazer uma distinção clara entre o sistema e o volume de controle, pois em t eles coincidem. As linhas de corrente esboçadas indicam que o volume de controle e o sistema

estão inseridos em um escoamento. O volume de controle permanece fixo em relação ao sistema de coordenadas xyz , mas o sistema se move de acordo com o campo de escoamento, representado por $\vec{V}(x,y,z,t)$, que é arbitrário (ou seja, no desenho as linhas de corrente poderiam apontar para cima, para baixo ou para o lado oposto sem que a dedução do teorema fosse prejudicada). Cabe mencionar ainda que a forma do volume de controle não é específica, precisamente para que a formulação obtida possa ser empregada a volumes de controle tubulares, cúbicos, cônicos, irregulares, etc. O objetivo principal deste equacionamento é relacionar a taxa de variação de qualquer propriedade (ou grandeza) extensiva (N) do sistema com as variações temporais desta propriedade atreladas com o volume de controle.

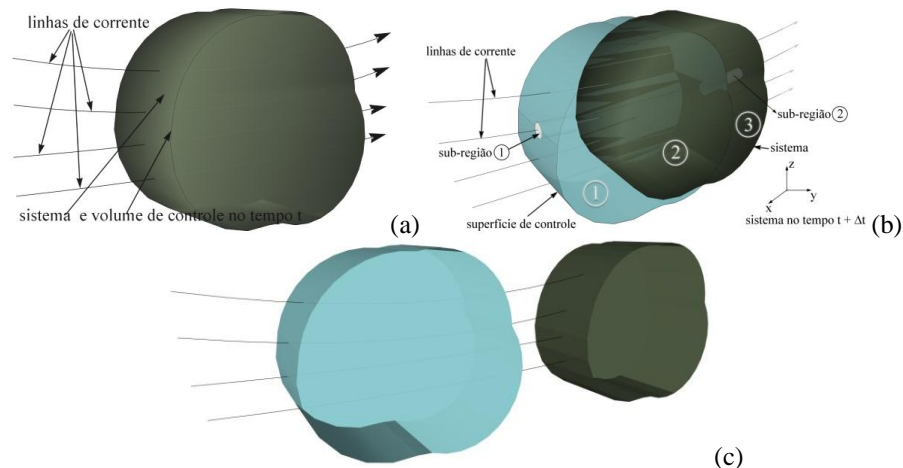


Figura 4.1 – Sistema e volume de controle utilizados na dedução do teorema do transporte de Reynolds: (a) o volume de controle está plenamente ocupado pelo sistema no instante inicial t ; (b) devido ao escoamento, o sistema se deslocou em relação ao volume de controle, que permanece fixo e com a mesma forma (instante $t+\Delta t$); (c) apenas mais uma imagem que indica o deslocamento do sistema no escoamento (para um instante maior do que $t+\Delta t$ que não será utilizado na dedução do TTR).

A taxa de variação de uma propriedade extensiva do sistema é matematicamente escrita por meio de sua derivada temporal, definida através do limite apresentado a seguir:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s(t + \Delta t) - N_s(t)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

O subscrito “s” indica que a propriedade extensiva N pertence ao sistema. Em $t+\Delta t$, de acordo com a Figura 4.1b, o sistema ocupa as regiões 2 e 3, enquanto que em t o sistema e o volume de controle coincidem, sendo este um detalhe conceitual de extrema relevância. Isto posto, pode-se escrever que

$$\begin{cases} N_s(t + \Delta t) = N_2(t + \Delta t) + N_3(t + \Delta t) = N_{vc}(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t) + N_3(t + \Delta t) \\ N_s(t) = N_{vc}(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Observando o desenho apresentado, nota-se que N_2 é igual a $N_{vc} - N_1$. Substituindo a equação 4.3 na equação 4.2, obtém-se:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{vc}(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t) + N_3(t + \Delta t) - N_{vc}(t)}{\Delta t} \quad (4.4)$$

Uma vez que o limite da soma é igual à soma dos limites, a equação 4.4 é escrita da seguinte maneira:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \overbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{vc}(t + \Delta t) - N_{vc}(t)}{\Delta t}}^{\text{Limite 1}} + \overbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t)}{\Delta t}}^{\text{Limite 2}} - \overbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_1(t + \Delta t)}{\Delta t}}^{\text{Limite 3}} \quad (4.5)$$

Nota-se que a equação 4.5, em seu segundo membro, só possui termos relacionados às regiões do espaço selecionadas na Figura 4.1b e ao volume de controle. O próximo passo em busca da equação almejada consiste em escrever cada um dos limites de forma conveniente para aplicações relacionadas ao escoamento de fluidos. De acordo com a definição de derivada, o “limite 1” da equação 4.5 pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{vc}(t + \Delta t) - N_{vc}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial N_{vc}}{\partial t} \quad (4.6)$$

Além de poder variar com o tempo, a propriedade extensiva N , dentro do volume de controle, pode variar ponto a ponto em função, por exemplo, da existência de um campo escalar de massa específica $\rho(x,y,z,t)$. Deste modo, a fim de obter a contribuição de todos os pontos no interior do volume de controle, deve-se efetuar uma soma, representada pela integral de volume apresentada a seguir:

$$N_{vc} = \iiint_{vc} \eta \rho dVol \quad (4.7)$$

em que η é a grandeza intensiva, igual a dN/dm e $m =$ massa. Combinando as equações 4.6 e 4.7, obtém-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{vc}(t + \Delta t) - N_{vc}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial N_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \eta \rho dVol \quad (4.8)$$

Para avaliar o “limite 2” da equação 4.5 foi utilizada a sub-região 2 da Figura 4.1b, ampliada na Figura 4.2. Cabe mencionar que a forma de um cilindro utilizada no desenho não significa que esta região deva ser necessariamente cilíndrica. Como convenção, o vetor normal “n” sempre aponta para fora da superfície de controle. Convenciona-se também que ele é sempre perpendicular à superfície dA . O ângulo α entre o vetor velocidade e o vetor n pode variar de 0° a 90° porque a massa da região 3 sai do volume de controle. Ainda sobre a Figura 4.2, destaca-se que Δs representa a distância percorrida durante Δt sobre uma linha de corrente existente no instante inicial por uma partícula de fluido que estava sobre a superfície do sistema em t . Finalmente, para a sub-região 2, pode-se escrever:

$$dN_3(t + \Delta t) = (\eta \rho dVol)_{(t+\Delta t)} = (\eta \rho \Delta s dA \cos \alpha)_{(t+\Delta t)} \quad (4.9)$$

Percebe-se que o volume $dVol$ foi substituído por $\Delta s dA \cos \alpha$. Considerando toda a região 3, a equação 4.9 é integrada produzindo o seguinte resultado:

$$N_3(t + \Delta t) = \left(\iint_{\text{superfície 3}} \eta \rho \Delta s \cos \alpha dA \right)_{(t+\Delta t)} \quad (4.10)$$

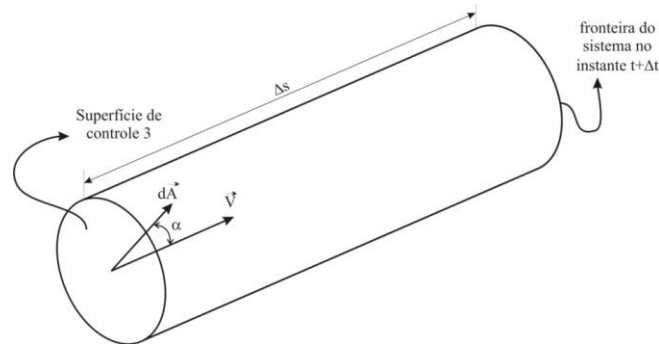


Figura 4.2 – Detalhes relacionados à sub-região 3 (neste desenho $d\vec{A} = \vec{n}dA$).

Combinando a equação 4.10 e o “limite 2” da equação 4.5, obtém-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iint_{sc3} \eta \rho \frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha dA = \iint_{sc3} \eta \rho \|\vec{V}\| \cos \alpha \|d\vec{A}\| = \iint_{sc3} \eta (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (4.11)$$

Neste ponto do desenvolvimento só resta avaliar o “limite 3” da equação 4.5. O seu desenvolvimento é àquele do “limite 2”, exceto pelo fato de que agora é estudada uma região dentro do volume de controle que era, no instante t , ocupada pelo sistema. Alguns detalhes importantes devem ser notados: (1) O vetor normal continua apontando para fora como

convencionado, mas agora, o ângulo entre ele e o vetor velocidade pode variar entre 90° e 180° porque o vetor velocidade aponta para dentro do volume de controle; (2) O cosseno de um ângulo entre 90° e 180° varia de 0 a -1. Por esta razão, deve-se inserir um sinal negativo no resultado para a sub-região 1, uma vez que o volume é uma quantidade escalar que deve ter sempre um valor numérico positivo. Com tais considerações, para a região 1, obtém-se:

$$N_1(t + \Delta t) = \left(\iint_{\text{superfície1}} -\eta\rho\Delta s \cos \alpha dA \right)_{(t+\Delta t)} \quad (4.12)$$

Substituindo no “limite 3” da equação 4.5, vem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iint_{\text{superfície1}} -\eta\rho \frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha dA = -\iint_{sc1} \eta(\rho\vec{V} \cdot \vec{ndA}) \quad (4.13)$$

As equações 4.8, 4.11 e 4.13 substituídas na equação 4.5 produzem o seguinte resultado:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \eta\rho dVol + \iint_{sc3} \eta(\rho\vec{V} \cdot \vec{ndA}) + \iint_{sc1} \eta(\rho\vec{V} \cdot \vec{ndA}) \quad (4.14)$$

Considerando toda a superfície de controle, inclusive aquelas através das quais não há passagem de fluido (quando $\alpha = 90^\circ$ ou $V = 0$), a soma das integrais duplas pode ser representada por uma integral de superfície (isto é, sobre uma superfície fechada que envolve o volume):

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \eta\rho dVol + \oiint_{sc} \eta(\rho\vec{V} \cdot \vec{ndA}) \quad (4.15)$$

A equação 4.15 é o conhecido teorema do transporte de Reynolds para um volume de controle fixo e constitui o modelo clássico para converter uma análise de sistema em uma análise de volume de controle. Apresentado em palavras, este equacionamento estabelece que a taxa de variação de uma propriedade extensiva do sistema é igual à taxa de variação temporal dessa propriedade no interior do volume de controle somada ao escoamento total da mesma propriedade através das superfícies de controle.

4.2.2 Segunda dedução do TTR

Ao deduzir a equação 4.15 foram demonstrados aspectos físicos relevantes atrelados a ela. Deste modo, evidenciou-se que o teorema do transporte de Reynolds é uma representação matemática de um balanço para uma grandeza N em um volume de controle. Este item tem

com objetivo apresentar um segundo caminho para obtenção do mesmo teorema, que é menos extenso, porém menos evidente com relação aos aspectos físicos. Porém, como a linguagem usual da Mecânica dos Fluidos, seja conceitual, seja computacional, é matemática e tende a se tornar mais abstrata à medida que se busca a solução de problemas mais básicos, a apresentação deste caminho é adequada no presente momento. Como parte da demonstração, é utilizada a seguinte igualdade:

$$\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \vec{V} \quad (4.16)$$

Nesta equação D/Dt é a derivada material e J é o Jacobiano. A prova da equação 4.16, também denominada de fórmula de Euler, pode ser encontrada em Chandrasekharaiah e Debnath (1994, p.253-254) e em Aris (1989, p.83-84). O Jacobiano é definido da seguinte maneira:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Nesta definição, x_j^0 é a representação, com notação indicial, das coordenadas de um ponto P_0 , que é a posição inicial de uma partícula “p”. Tais coordenadas são chamadas de coordenadas materiais. x_i representa as coordenadas do vetor posição de um ponto P que é a posição atual da partícula “p”. Neste caso, denomina-se x_i como coordenadas espaciais. Outros termos empregados para estas coordenadas são: coordenadas de referência ou coordenadas iniciais para o primeiro caso e coordenadas instantâneas ou atuais para o segundo caso (Chandrasekharaiah e Debnath, 1994).

A grandeza extensiva N pode ser representada como:

$$N = \iiint_{\operatorname{Vol}(t+\Delta t)} \rho \eta d\operatorname{Vol} \quad (4.18)$$

A derivada material de N é, portanto:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{\operatorname{Vol}(t+\Delta t)} \rho \eta d\operatorname{Vol} \quad (4.19)$$

Utilizando o Jacobiano, pode-se verificar que $d\operatorname{Vol}(t+\Delta t) = J d\operatorname{Vol}(t)$. Substituindo esta relação na equação 4.19, obtém-se:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t)} \frac{D}{Dt} (\rho\eta J) d\text{Vol} \quad (4.20)$$

A equação 4.20 pode ser reescrita com a seguinte forma:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t)} \left[J \frac{D(\rho\eta)}{Dt} + (\rho\eta) \frac{DJ}{Dt} \right] d\text{Vol} \quad (4.21)$$

Substituindo a equação 4.16 na equação 4.21, vem

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t)} \left[J \frac{D(\rho\eta)}{Dt} + (\rho\eta) J \text{div} \vec{V} \right] d\text{Vol} \quad (4.22)$$

Se for considerado o produto $J d\text{Vol}(t)$, a integral anterior passa a ser avaliada em $t+\Delta t$:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \left[\frac{D(\rho\eta)}{Dt} + (\rho\eta) \text{div} \vec{V} \right] d\text{Vol} \quad (4.23)$$

Empregando a definição de derivada material para o primeiro termo do integrando é obtido o seguinte resultado:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \left[\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\rho\eta) + (\rho\eta) \text{div} \vec{V} \right] d\text{Vol} \quad (4.24)$$

Ao utilizar a definição de derivada material surge a soma composta pelos dois últimos termos do integrando, que pode ser reduzida por meio da seguinte identidade:

$$(\vec{V} \cdot \nabla)(\rho\eta) + (\rho\eta) \text{div} \vec{V} = \nabla \cdot (\rho\eta \vec{V}) \quad (4.25)$$

Substituindo 4.25 em 4.24, tem-se:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \left[\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\eta \vec{V}) \right] d\text{Vol} \quad (4.26)$$

Separando os termos do integrando, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} d\text{Vol} + \iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \nabla \cdot (\rho\eta \vec{V}) d\text{Vol} \quad (4.27)$$

A parte final da dedução requer o uso do teorema de Gauss.

Teorema de Gauss

O teorema de Gauss, freqüentemente chamado de teorema da divergência de Gauss, possibilita transformar uma integral de volume do divergente de um campo tensorial em uma integral de área sobre a superfície que define o volume. Existem diferentes maneiras de enunciar este teorema, mas alguns aspectos básicos estão presentes em todos os enunciados.

Teorema de Gauss. Seja uma região do espaço (Vol) definida por uma superfície suave por partes fechada e orientada para fora¹. Se as funções

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3), \Phi_2(x_1, x_2, x_3), \Phi_3(x_1, x_2, x_3)$$

e suas primeiras derivadas

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}$$

são contínuas em Vol U SC (U denota união, ou seja, está-se considerando como domínio de trabalho o volume e sua superfície delimitante), então:

$$\iiint_{vc} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \right) dVol = \iint_{sc} [\Phi_1 \cos(n, x_1) + \Phi_2 \cos(n, x_2) + \Phi_3 \cos(n, x_3)] dS$$

em que $\cos(n, x_i) = \cos(\alpha_i)$ são os cossenos diretores, α_i são os ângulos entre n e o eixo correspondente e n vetores unitários que apontam para fora da superfície. Sendo $T_{jkl\dots}$ um tensor de ordem qualquer, o teorema de Gauss pode ser escrito da seguinte maneira (Mase, 1970, p.23; Chou e Pagano, 1992, p.186-187):

$$\iiint_{vc} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} T_{jkl\dots} \right] dVol = \iint_{sc} [T_{jkl\dots} n_i dA] \quad (4.28)$$

O operador del, representado por $\partial/\partial x_i$, é um tensor de ordem 1, ou seja, um vetor. Se o tensor $T_{jkl\dots}$ for considerado como um tensor de segunda ordem, o produto ponto (produto vetorial) entre ele o operador del reduz a ordem do resultado para $2+1-2=1$ (o resultado é um vetor).

Para este caso, o teorema é escrito com a seguinte forma:

¹ Os gráficos de funções vetoriais podem ser contínuos e suaves ou erráticos. Seja $v(t)$ uma função vetorial, em que t é um parâmetro, cujo conjunto dos valores possíveis define o domínio de $v(t)$. Do ponto de vista algébrico, a suavidade exige que as componentes de $v(t)$ possuam derivadas contínuas não nulas para um mesmo t . Uma superfície orientável possui dois lados, diferente da faixa de Möbius (August Möbius, 1790-1868), por exemplo, que só possui um lado (ver Aris, 1962, p.44-45).

$$\iiint_{vc} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dVol = \iint_{sc} T_{ij} n_i dA \quad (4.29)$$

A prova do teorema de Gauss pode ser encontrada em diferentes fontes, dentre as quais cabe mencionar Wrede (1972, p.297), Butkov (1988, p.27), Chou e Pagano (1992, p.186-187) e Kreyszig (2009), que valoriza aspectos geométricos envolvidos na dedução. Um modo compacto de verificar este teorema normalmente é apresentado em textos sobre mecânica do contínuo, como em Chandrasekharaiah e Debnath (1994) e Gonzalez e Stuart (2008), por exemplo. Tal prova é exposta a seguir, escrita tendo como referências os livros citados.

Prova do teorema de Gauss. Seja c um vetor constante arbitrário e ψ um campo tensorial definido em Vol e em A (superfície que envolve o volume Vol). Então

$$c \cdot \iiint_{Vol} \text{div} \psi dVol = \iiint_{Vol} c \cdot \text{div} \psi dVol$$

Utiliza-se agora a seguinte igualdade:

$$c \cdot \text{div} \psi = \text{div}(\psi^T c)$$

$$\text{Prova: } (\text{div} \psi) \cdot c = [\text{div} \psi]_i [c]_i = a_{ij,j} c_i = a_{ji,i} c_j = (a_{ji} c_j)_{,i} = ([\psi^T c]_i)_{,i} = \text{div}(\psi^T c)$$

em que $[\psi]_{ij} = a_{ij}$.

$$\begin{aligned} c \cdot \iiint_{Vol} \text{div} \psi dVol &= \iiint_{Vol} c \cdot \text{div} \psi dVol = \\ \iiint_{Vol} \text{div} [\psi^T c] dVol &= \iint_A (\psi^T c) \cdot \vec{n} dA = \iint_A c \cdot (\psi \vec{n}) dA \end{aligned}$$

Portanto:

$$c \cdot \left\{ \iiint_{Vol} \text{div} \psi dVol - \iint_A \psi \vec{n} dA \right\} = 0$$

em que \vec{n} = vetor unitário normal à superfície A. Uma vez que c é um vetor arbitrário, fica demonstrado o teorema. Empregando notação com sufixos, tem-se:

$$\iiint_{Vol} a_{ik,k} dVol = \iint_A a_{ik} n_k dA$$

(notação com vírgula: $a_{ik,k} = \partial a_{ik} / \partial x_k$). Aqui termina a prova do teorema de Gauss. ■

Retornando à equação 4.27, pode-se transformar a integral que inclui o divergente em uma integral sobre a superfície A com o teorema de Gauss (equação 4.28):

$$\iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \frac{\partial(\rho\eta V_i)}{\partial x_i} d\text{Vol} = \iint_{sc} (\rho\eta V_i) n_i dA \quad (4.30)$$

Ou, com o uso dos operadores tradicionais do cálculo:

$$\iiint_{\text{Vol}(t+\Delta t)} \nabla \cdot (\rho\eta \vec{V}) d\text{Vol} = \iint_{sc} \rho\eta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (4.31)$$

Substituindo uma dessas equações na equação 4.27, o resultado obtido é o teorema do transporte de Reynolds.

$$\frac{DN}{Dt} = \iiint_{vc} \frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} d\text{Vol} + \iint_{sc} \rho\eta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (4.32)$$

Como já comentado, neste caminho foram valorizadas identidades do cálculo, procedimentos que se tornam usuais quando se buscam soluções básicas. O teorema do transporte de Reynolds junto com o teorema de Gauss é utilizado para obtenção das equações de conservação apresentadas nos itens seguintes.

4.3 Conservação de massa

O princípio de conservação da massa estabelece que a taxa de variação da massa de um sistema é igual a zero. Sendo assim, para $N=m$, m =massa, $dm/dm=1$ e o teorema do transporte de Reynolds é reduzido para a seguinte forma:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho d\text{Vol} + \iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.33)$$

Esta é a equação de conservação da massa na forma integral. A forma diferencial pode ser obtida por meio de um balanço de massa realizado em um elemento de fluido ou com o teorema de Gauss, considerando que o tensor T_{ij} é de primeira ordem, *i.e.*, um vetor, igual a $\rho \vec{V}$. Tal consideração leva ao seguinte resultado:

$$\iiint_{vc} (\nabla \cdot \rho \vec{V}) d\text{Vol} = \iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.34)$$

Percebe-se que as equações 4.33 e 4.34 possuem um termo em comum. Considerando o volume de controle como indeformável, a derivada da primeira integral da equação 4.33 pode ser efetuada antes da integração. Substituindo 4.33 em 4.34, obtém-se:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dVol + \iiint_{vc} (\nabla \cdot \rho \vec{V}) dVol = \iiint_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \rho dVol + \iiint_{vc} (\nabla \cdot \rho \vec{V}) dVol$$

ou

$$0 = \iiint_{vc} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\nabla \cdot \rho \vec{V}) \right] dVol \quad (4.35)$$

A equação 4.35 é válida para um volume de controle de qualquer tamanho ou forma. Em respeito à igualdade, percebe-se que o integrando deve ser igual a zero, condição que produz a equação diferencial da conservação da massa (pode-se utilizar também, como argumento final, o “teorema da localização”):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (4.36)$$

A equação 4.36 é válida para escoamentos não permanentes, tridimensionais e compressíveis, ou seja, é a forma geral da equação da conservação da massa, a partir da qual é possível obter formas particulares (escoamentos bidimensionais, em regime permanente, etc.). Ela é válida para qualquer sistemas de coordenadas curvilíneas, podendo-se efetuar a alteração com o uso do operador del apropriado. É interessante notar que através da regra do produto, a equação 4.36 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.37)$$

Percebe-se que os dois primeiros termos do primeiro membro da equação 4.37 correspondem à derivada material da massa específica. Se tal definição for empregada, a equação assume a forma apresentada a seguir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.38)$$

Se o escoamento for incompressível, a massa específica não varia com o espaço e não varia com o tempo, tornando nula a sua derivada material, condição que produz a seguinte equação:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.39)$$

Ressalta-se que a equação 4.39 continua sendo válida para escoamentos em regime não permanente. Em coordenadas cartesianas, definindo $u=dx/dt$, $v=dy/dt$ e $w=dz/dt$, a equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.40)$$

Considerando que o sistema de coordenadas (x,y,z) corresponde a (x_1,x_2,x_3) , como ilustrado na Figura 4.3, as equações anteriores podem ser escritas com notação indicial da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0 \quad (4.44)$$

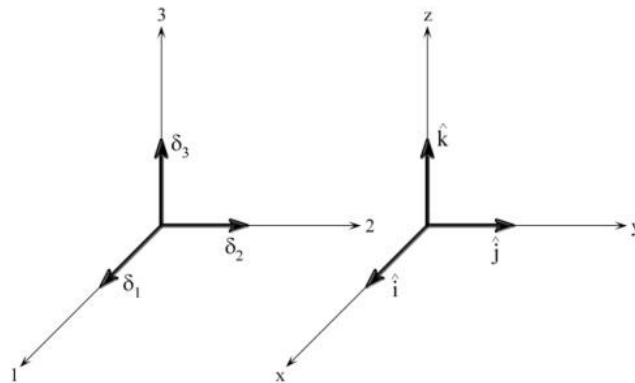


Figura 4.3 – Equivalência entre as notações (os deltas correspondem aos vetores unitários i, j e k e os eixos coordenados são denotados por números)

Alguns aspectos físicos da dedução

O teorema do transporte de Reynolds pode ser aplicado em casos com volumes de controle cujas dimensões são tão pequenas quanto se necessite, como aquele ilustrado na Figura 4.4. Tratando-se de conservação de massa ($\eta=1$), o equacionamento integral assume a forma apresentada anteriormente, reescrita a seguir:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dVol + \iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot ndA \quad (4.33)$$

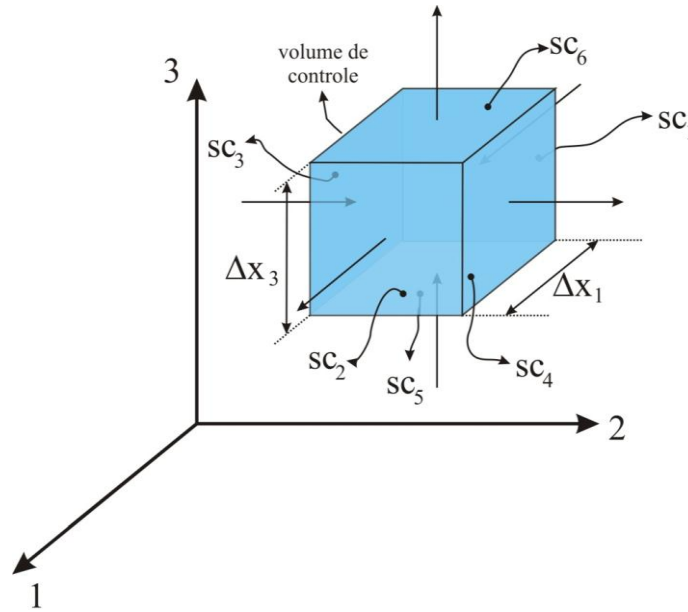


Figura 4.4 – Volume de controle

O primeiro termo do segundo membro desta equação é avaliado utilizando-se um valor médio para a massa específica (ρ_m) do fluido no interior do volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dVol = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (4.45)$$

O segundo termo, relativo à passagem de massa através das superfícies de controle, é dividido em seis termos e avaliado supondo-se que o escoamento é uniforme ao longo das superfícies de controle, ou seja, que as distribuições dos fluxos de massa ρV são de fato uniformes em cada superfície de controle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{sc_1} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = -(\rho V_1)_{x_1} \Delta x_2 \Delta x_3; \quad \iint_{sc_2} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = (\rho V_1)_{x_1 + \Delta x_1} \Delta x_2 \Delta x_3 \\ \iint_{sc_3} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = -(\rho V_2)_{x_2} \Delta x_1 \Delta x_3; \quad \iint_{sc_4} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = (\rho V_2)_{x_2 + \Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_3 \\ \iint_{sc_5} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = -(\rho V_3)_{x_3} \Delta x_1 \Delta x_2; \quad \iint_{sc_6} (\rho \vec{V} \cdot ndA) = (\rho V_3)_{x_3 + \Delta x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Substituindo as equações 4.45 e 4.46 na equação 4.33 e dividindo pelo volume, obtém-se:

$$0 = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{(\rho V_1)_{x_1 + \Delta x_1} - (\rho V_1)_{x_1}}{\Delta x_1} + \frac{(\rho V_2)_{x_2 + \Delta x_2} - (\rho V_2)_{x_2}}{\Delta x_2} + \frac{(\rho V_3)_{x_3 + \Delta x_3} - (\rho V_3)_{x_3}}{\Delta x_3} \quad (4.47)$$

Fazendo Δx_1 , Δx_2 e Δx_3 tenderem a zero, o volume de controle passa a ser um volume de controle infinitesimal (ou um ponto). Para esta condição, verifica-se que: (1) a massa específica assume um valor pontual e não mais um valor médio e (2) a hipótese de distribuições uniformes nas seções transversais do volume de controle deixa de ser uma restrição. Deste modo, obtém-se a equação procurada:

$$\frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.48)$$

Reconhecendo a existência do divergente de ρV na equação 4.48, obtém-se uma forma idêntica à equação 4.36, deduzida por outro caminho. É interessante notar que esta forma de obtenção da equação da continuidade, embora seja menos elegante do ponto de vista matemático, é mais física do que a anterior, pois mostra que a equação representa um balanço de massa. Uma apresentação semelhante foi dada por Sissom e Pitts (1979, p.276-278). O mesmo pode ser feito para os demais princípios de conservação, caminho não adotado aqui devido à extensão necessária para as apresentações deste tipo.

4.4 Quantidade de movimento linear

A equação diferencial decorrente do balanço de “momentum” (ou quantidade de movimento linear, sendo o termo em latim, comum na literatura inglesa, adotado por vezes no presente texto) está fundamentada na segunda lei do movimento de Newton. A sua construção, sob o ponto de vista de Euler, pode ser realizada por meio das mesmas ferramentas empregadas para a obtenção da equação da conservação da massa. O início da dedução desta equação consiste em identificar cada um dos termos presentes na segunda lei de Newton, escrita a seguir:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \quad (4.49)$$

Forças em um elemento de fluido (ou material)

Existem dois tipos de forças consideradas nas análises realizadas com os princípios da mecânica do contínuo. Tais forças são as forças de campo e as forças de superfície (ou forças devidas ao contato). Alguns autores, como Kundu e Cohen (2008, p.89), por exemplo, mencionam ainda as forças em linha (*line forces*), resultantes da tensão superficial e que podem surgir na interface entre um líquido e um gás e entre líquidos imiscíveis. Apesar da existência destas forças, os autores comentam que elas não aparecem nas equações, pois são tratadas como condições de contorno. As forças de campo ocorrem, em grande parte das

aplicações, devido ao campo gravitacional e aos campos eletromagnéticos. As forças de superfície, diferente das de campo, originam-se devido ao contato. Essa superfície pode ser vista como aquela existente nos contornos de um dado volume ou a superfície imaginária existente quando é selecionado um volume particular que pertence ao volume total do material. O primeiro caso pode corresponder, por exemplo, às forças devidas ao vento atuantes na superfície livre, além dos exemplos já mencionados quando a tensão superficial foi citada. A Figura 4.5a ilustra tal situação. Ao destacar um elemento material que compõe um volume definido pelos seus contornos, deve-se evocar o princípio da ação e reação (3ª lei de Newton) para identificar as forças devidas ao contato. As forças de superfície que ocorrem nesta situação são devidas ao contato do volume selecionado com a sua vizinhança (Figura 4.5b).

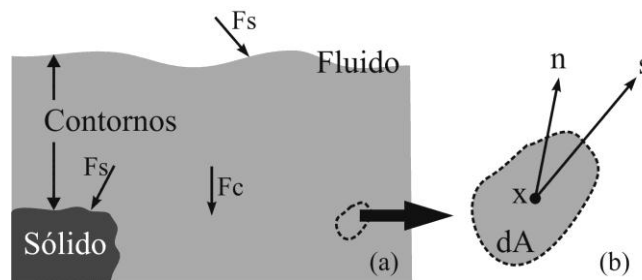


Figura 4.5 – Forças de campo e superfície (a) e vetor tensão em um elemento de área dA (b). Notação: F_s = força de superfície, F_c = força de campo, n = vetor unitário normal à superfície dA , s = vetor tensão, x = ponto em dA .

(1) **Forças de campo:** a força gravitacional que age sobre um elemento de fluido de volume $dVol$ é expressa da seguinte maneira:

$$d\vec{F}_{\text{campo}} = \rho \vec{g} dVol \quad (4.50)$$

em que \vec{g} é o vetor aceleração da gravidade ou, para o caso mais geral, o vetor força de campo cuja dimensão física é força por unidade de massa. Menciona-se também que, ρ e \vec{g} podem depender da posição e do tempo. O efeito gravitacional sobre o volume é escrito por meio da soma das contribuições pontuais, como apresentado a seguir:

$$\vec{F}_{\text{campo}} = \iiint_{Vol} \rho \vec{g} dVol \quad (4.51)$$

(2) **Forças de superfície:** na Figura 4.5 foi definido o vetor s (tensor de ordem 1) que representa uma força por unidade de área, sendo chamado de vetor tensão ou vetor tração (*traction vector*). É evidente que a força sobre a superfície orientada dA que contém ponto x é $(dA)s$ e que se dA for modificado, a força será igualmente modificada. Por outro lado, se dA e

dA_1 são superfícies com áreas iguais e orientações diferentes não é possível afirmar que as forças atuantes são iguais ou distintas. Para resolver este problema, Cauchy postulou:

Postulado de Cauchy sobre a tensão. O vetor tensão $s(x_i, t)$ é dependente da orientação da superfície do elemento material sobre o qual ele atua e depende de x_i e t , ou seja, $s = s(x_i, t, n)$.

A partir do postulado de Cauchy é possível responder à questão anterior. Prosseguindo com esta breve exposição sobre forças de contato, quando dA é um elemento de área pertencente ao interior do material, o vetor n possui duas direções possíveis, opostas entre si. Escolhendo uma das direções para n , o vetor $s = s(x_i, t, n)$ é interpretado como a força interna por unidade de área que, no instante t , atua sobre a superfície dA . É inevitável que as três leis de Newton sejam utilizadas para a plena compreensão acerca da existência do vetor tensão e de suas conseqüências. Em particular, a terceira lei de Newton indica que deve ser definido um vetor tensão que atua na direção $-n$, e que $s(x_i, t, -n) = -s(x_i, t, n)$. Esta igualdade é conhecida como relação recíproca de Cauchy ou simplesmente como lei da ação e reação. Ressalta-se que foi assumido como verdadeiro que as porções adjacentes do material destacado para a análise, com superfícies dA , interagem de tal maneira que os efeitos comentados são produzidos.

Componentes da tensão

Considera-se agora um elemento de fluido (ou sólido) com volume $dVol$ e situado por meio de um sistema de coordenadas cartesianas. O volume infinitesimal $dVol$ representa um ponto e, portanto, pode ter infinitos planos que passam por ele. Nesta análise, apenas os três planos definidos pelos vetores unitários normais δ_i são considerados porque os demais planos podem ser decompostos sobre os três eixos. Para o plano correspondente a δ_1 (δ_i é normal ao plano e paralelo ao eixo i) identifica-se o vetor tensão que atua neste plano como sendo $s^{(1)} = s(\delta_1)$. Em termos de suas componentes, pode-se escrever: $s^{(1)} = \tau_{11}\delta_1 + \tau_{12}\delta_2 + \tau_{13}\delta_3 = \tau_{1k}\delta_k$. De forma similar, escreve-se: $s^{(2)} = \tau_{2k}\delta_k$ e $s^{(3)} = \tau_{3k}\delta_k$. O sobrescrito (i) em s indica que o vetor $s^{(i)}$ corresponde ao plano (i) e não uma componente do vetor tensão, ou seja, sobre cada plano (i) existe um vetor $s^{(i)}$ que por sua vez possui três componentes sobre os três eixos coordenados. De forma compacta, pode-se escrever: $s^{(i)} = \tau_{ik}\delta_k$. Efetuando o produto escalar nesta equação com o vetor δ_j , em ambos os membros, obtém-se: $s^{(i)} \cdot \delta_j = \tau_{ij}$ (isto é verdadeiro porque $\delta_k \cdot \delta_j = \delta_{kj} = \delta_{jk}$ = delta de Kronecker e $\tau_{ik}\delta_{kj} = \tau_{ij}$). τ_{ij} representa a j^{th} componente de $s^{(i)}$ e é uma matriz 3×3 conhecida como matriz das tensões em um ponto x_i e um instante t .

Tensor das tensões de Cauchy

A Figura 4.6a ilustra um tetraedro de pequenas dimensões com três faces perpendiculares aos eixos coordenados e uma face definida por meio do vetor unitário n , cuja inclinação é arbitrária. Define-se inicialmente as áreas das faces perpendiculares aos eixos 1, 2 e 3 iguais a Δa_1 , Δa_2 e Δa_3 , respectivamente. A área da face inclinada é simplesmente ΔA . É possível obter as seguintes relações:

$$\begin{cases} \Delta a_1 = (\Delta A)n_1 \\ \Delta a_2 = (\Delta A)n_2 = (\Delta A)\cos(n, x_2) \\ \Delta a_3 = (\Delta A)n_3 \\ \Delta \text{Vol} = h(\Delta A)/3 \end{cases}$$

em que $\cos(n, x_2)$ é o cosseno do ângulo entre n e o eixo positivo x_2 , n_i são as componentes de n e ΔVol é o volume do tetraedro (h é a distância do ponto P até a face inclinada, como indicado na Figura 4.6a).

Sendo “ ρ ” a massa específica e “ a ” a aceleração avaliada no ponto P , a segunda lei de Newton pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\rho(\Delta \text{Vol})a = (\Delta \text{Vol})\rho g + (\Delta a)s(x_i, t, n) - (\Delta a_i)s^{(i)}$$

Combinando as definições anteriores, vem:

$$s(x_i, t, n) = \rho h(a - g)/3 + n_i s^{(i)}$$

Para n e P fixos, considera-se o limite quando h tende a zero. Esta condição faz com que a face inclinada normal a n tenda a ser um elemento plano normal a n em P . Como resultado, obtém-se:

$$s(x_i, t, n) = n_i s^{(i)}$$

No item anterior foi obtida a seguinte relação: $s^{(i)} = \tau_{ik}\delta_k$. Substituindo-a na equação anterior, obtém-se:

$$s(x_i, t, n) = \tau_{kj} n_k \delta_j$$

Aplicando o produto escalar com δ_i em ambos os membros da equação anterior, obtém-se:

$$s_i(x_i, t, n) = \tau_{ki} \delta_k$$

É possível demonstrar que τ_{ij} são as componentes de um tensor de segunda ordem (Chandrasekharaiah e Debnath, 1994, p.72), embora esta seja uma conclusão imediata com base no que foi exposto anteriormente. Este tensor é denominado tensor das tensões de Cauchy, denotado por σ neste texto:

$$\sigma = \tau_{ij}\delta_i\delta_j \text{ ou } s(x_i, t, n) = \sigma^T n$$

Esta última equação inclui a matriz transposta do tensor das tensões e pode ser escrita na forma matricial com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Observa-se que tal relação liga o vetor tensão $s(x_i, t, n)$ com o tensor das tensões σ , sendo conhecida em textos de mecânica do contínuo como lei ou hipótese de Cauchy (Chandrasekharaiah e Debnath, 1994, p.300; Gonzalez e Stuart, 2008, p.82-83).

Como discutido, as forças de superfície dão origem ao tensor das tensões. É possível demonstrar que o vetor tensão e n não precisam ser colineares. Sendo assim, o tensor das tensões é composto por tensões tangenciais e tensões normais. As tensões tangenciais ou de cisalhamento são compostas exclusivamente por tensões viscosas. As tensões normais, entretanto, são compostas pelas tensões decorrentes da pressão termodinâmica (que sempre atuam comprimindo o elemento de fluido e dependem da densidade do fluido e da temperatura²) e pelas tensões viscosas. Como mencionado, σ é o tensor das tensões e, a partir deste ponto, as tensões viscosas são representadas pela letra τ e a pressão por p :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Sendo δ_i e δ_j vetores unitários (ver Figura 4.3), o tensor σ pode ser escrito como:

$$\sigma = \sigma_{ij}\delta_i\delta_j \quad (4.53)$$

em que $\delta_i\delta_j$ é uma díada unitária (tensor de segunda ordem, também denominado produto exterior ou produto de Kronecker: \otimes , *i.e.*, $\delta_i\otimes\delta_j$). Como exemplo, apresenta-se:

² Se o fluido for incompressível a pressão p passa a ser uma pressão mecânica.

$$\delta_1 \delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

A interpretação dos índices é auxiliada com a Figura 4.6b. O subscrito i representa o plano no qual atua a componente do tensor e o subscrito j representa a orientação de acordo com os eixos 1, 2 e 3. A direção de um determinado plano é definida através do vetor normal a ele, que sempre aponta para fora da superfície.

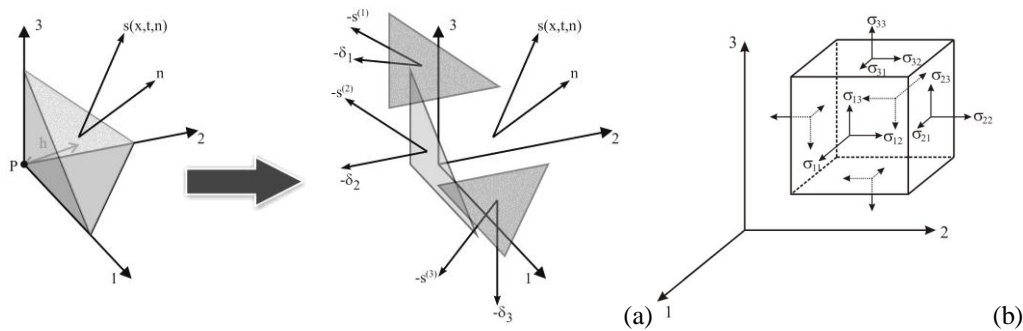


Figura 4.6 – Tetraedro (a) e tensões em um elemento de fluido (b).

Fonte: adaptado de Chandrasekharaiah e Debnath (1994).

Quantidade de movimento: forma integral e forma diferencial

Neste item, a grandeza extensiva estudada é o vetor quantidade de movimento linear e a grandeza intensiva correspondente é o vetor velocidade. Com o uso do teorema do transporte de Reynolds, pode-se obter a forma integral que representa o balanço de quantidade de movimento linear, apresentada a seguir.

$$\left. \frac{d(m\vec{V})}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \vec{V} \rho dVol + \iint_{sc} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA) \quad (4.55)$$

O somatório das forças inclui as forças de campo e as de superfície, apresentadas anteriormente. A equação 4.51 define a força de campo considerada, que é aquela decorrente do campo gravitacional. Os esforços de superfície são definidos a partir do tensor das tensões da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{\text{sup}} = \iint_{sc} \sigma^T \vec{n} dA \quad (4.56)$$

Com o intuito de obter a forma diferencial da equação da quantidade de movimento, utiliza-se aqui o teorema de Gauss, que possibilita a transformação das integrais de superfície em integrais de volume, como apresentado a seguir:

$$\oiint_{sc} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot \vec{ndA}) = \iiint_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) dVol \quad (4.57)$$

$$\oiint_{sc} \sigma^T \vec{ndA} = \iiint_{Vol} \nabla \cdot \sigma_{ji} dVol \quad (4.58)$$

Cabe comentar que o produto $\vec{V}\vec{V}$ é um tensor de segunda ordem (um produto diádico). Combinando as equações anteriores, vem

$$\begin{aligned} \iiint_{Vol} \rho \vec{g} dVol + \iiint_{Vol} \nabla \cdot \sigma_{ji} dVol &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \vec{V} \rho dVol + \iiint_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) dVol \Rightarrow \\ \iiint_{Vol} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \nabla \cdot \sigma_{ji} \right] dVol &= 0 \end{aligned}$$

Como resultado, empregando-se o “teorema da localização”, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma^T \quad (4.59)$$

A equação 4.59 é a forma diferencial da equação da quantidade de movimento linear. Ela é uma equação vetorial válida para escoamento compressível e em regime não permanente que carrega a hipótese do contínuo. Cabe ressaltar que o operador nabla em ambos os membros da equação forma o divergente de um campo tensorial. Sendo tal operação efetuada com um produto ponto, a ordem da multiplicação é reduzida em duas unidades. Deste modo, os segundos termos de ambos os membros da equação são tensores de primeira ordem (ordem do resultado da multiplicação = 1+2-2=1). Os demais termos são facilmente reconhecidos como vetores. Algumas manipulações algébricas efetuadas sobre o primeiro membro da equação 4.59 possibilitam a obtenção de uma segunda forma. O primeiro termo pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.60)$$

O termo que envolve o diádico pode ser manipulado através da seguinte identidade:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (4.61)$$

A substituição destes resultados na equação 4.59 permite escrever:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \overbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right]}{=0} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma^T \quad (4.62)$$

O termo entre colchetes é igual a zero, de acordo com a equação diferencial de conservação de massa. Deste modo, a equação da quantidade de movimento na forma diferencial pode ser escrita sem o produto diádico, diferente da equação 4.59.

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma^T \quad (4.63)$$

Com o uso da derivada material, a equação assume a seguinte forma:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma^T \quad (4.64)$$

Uma vez que a derivada material, assim como o teorema do transporte de Reynolds, representa um elo entre os pontos de vista de Euler e de Lagrange, reconhece-se de forma imediata a segunda Lei do Movimento de Newton na equação 4.64. O primeiro membro corresponde ao produto entre massa e aceleração por unidade de volume de fluido e o segundo membro contém a soma das forças de campo e de contato, ambas por unidade de volume de fluido. Esta equação é válida para qualquer meio contínuo, incluindo sólidos e fluidos não-newtonianos. Em homenagem ao engenheiro e matemático francês Augustin Louis de Cauchy (1789-1857), a equação anterior é denominada como equação do movimento de Cauchy em textos de mecânica do contínuo. Existem diferentes notações que podem ser empregadas na escrita da equação da quantidade de movimento. Como exemplo, apresenta-se a seguir dois estilos que utilizam notação indicial:

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (4.65)$$

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i + \sigma_{ji,j} \quad (4.66)$$

em que $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \sigma_{j,i,j}$. Os índices i e j variam de 1 a 3 e correspondem aos eixos coordenados em três dimensões. As equações escalares correspondentes à equação vetorial são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) &= \rho g_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \rho \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) &= \rho g_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \rho \left(\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) &= \rho g_3 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{cases} \rho \frac{DV_1}{Dt} = \rho g_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{DV_2}{Dt} = \rho g_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{DV_3}{Dt} = \rho g_3 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{cases} \quad (4.68)$$

De acordo com a equação 4.52, que define o tensor das tensões, as componentes do tensor que ocupam a diagonal principal são compostas pela soma das tensões viscosas normais com a pressão. Matematicamente, pode-se escrever que:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \tau_{ij} - p, \text{ se } i = j \\ \sigma_{ij} = \tau_{ij}, \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \\ \delta_{ij} = \text{delta de Kronecker} \end{cases} \quad (4.69)$$

É interessante notar que, pelo equilíbrio do tetraedro elementar ilustrado na Figura 4.6, o tensor das tensões é simétrico. Em outros termos, diz-se que o momentum angular é conservado, sendo o fluido classificado como apolar. Uma demonstração sobre a simetria do tensor das tensões pode ser encontrada em Aris (1989, p.102-103). Sendo simétrico, a quádrica representativa do tensor é um elipsóide, como ilustrado na Figura 4.7. Para a condição de repouso não há tensões cisalhantes, de modo que a forma alongada do elipsóide deixa de existir dando lugar a uma esfera (ou tensor esférico).

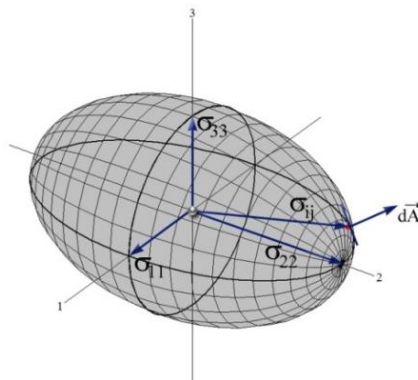


Figura 4.7 – Quádrica representativa do tensor das tensões
Fonte: adaptado de Lencastre (1996, p.40).

Considerações sobre a simetria do tensor das tensões

Considerando um sistema de coordenadas inerciais, o princípio da quantidade de movimento angular para um sistema pode ser escrito como:

$$\dot{\vec{r}} \times d\vec{F} = \dot{\vec{r}} \times \frac{D}{Dt} (dm\vec{V}) \quad (4.70)$$

em que $\dot{\vec{r}}$ é o vetor posição que situa uma partícula em relação à origem fixa de um sistema inercial de referência. É interessante observar que:

$$\frac{D}{Dt} (\dot{\vec{r}} \times dm\vec{V}) = \overbrace{\frac{D\dot{\vec{r}}}{Dt} \times (dm\vec{V})}^{\vec{V} \times \vec{V} = 0} + \dot{\vec{r}} \times \frac{D}{Dt} (dm\vec{V}) = \dot{\vec{r}} \times \frac{D}{Dt} (dm\vec{V}) = \dot{\vec{r}} \times \frac{D\vec{V}}{Dt} dm = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{a}} dm \quad (4.71)$$

Utilizando as equações escritas para forças superficiais e de campo, obtém-se o momento da quantidade de movimento, que é igualado à expressão anterior integrada no volume:

$$\iiint_{Vol} (\dot{\vec{r}} \times \vec{a}) dm = \iiint_{Vol} (\dot{\vec{r}} \times \vec{g}) dm + \iint_{sc} (\dot{\vec{r}} \times \vec{\sigma}) d\vec{A} \quad (4.72)$$

O integrando do último termo desta equação pode ser visto como o produto tensorial do vetor posição com o tensor das tensões. O resultado de tal operação é um tensor de segunda ordem, pois o produto xis reduz a ordem do resultado em uma unidade ($\Sigma[\text{ordens das grandezas multiplicadas}] - 1 = 1+2+0-1=2$). Pode-se demonstrar que com o uso do símbolo de Levi-Civita o integrando do último termo da equação anterior é escrito da seguinte maneira:

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{\sigma}) = \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kp} \quad (p = 1, 2, 3) \quad (4.73)$$

O próximo passo consiste em combinar este resultado com o teorema de Gauss, com o intuito de obter uma integral tripla:

$$\iint_{sc} \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kp} \vec{n} dA = \iiint_{vc} \varepsilon_{ijk} (r_j \sigma_{pk})_{,p} dVol \quad (4.74)$$

O segundo membro da equação anterior pode ser escrito como uma soma:

$$\iiint_{vc} \varepsilon_{ijk} (r_j \sigma_{pk})_{,p} dVol = \iiint_{vc} [\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{pk,p} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}] dVol = \iiint_{vc} [\dot{\vec{r}} \times (\nabla \cdot \vec{\sigma}) + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}] dVol \quad (4.75)$$

Combinando os resultados anteriores:

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{Vol}} (\vec{r} \times \vec{a}) \rho d\text{Vol} &= \iiint_{\text{Vol}} (\vec{r} \times \vec{g}) \rho d\text{Vol} + \iiint_{\text{vc}} \left[\vec{r} \times (\nabla \cdot \sigma) + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \right] d\text{Vol} \Rightarrow \\ \iiint_{\text{Vol}} \left[\vec{r} \times (\rho \vec{a} - \rho \vec{g} - \nabla \cdot \sigma) \right] d\text{Vol} &= \iiint_{\text{vc}} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} d\text{Vol} \end{aligned} \quad (4.76)$$

A partir da equação de Cauchy (presente no primeiro membro da equação anterior), conclui-se que o integrando do segundo membro da equação é igual a zero. Sendo este termo igual a zero, a partir da definição do símbolo de Levi-Civita é possível concluir que ocorrem as seguintes igualdades:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{23} - \sigma_{32}) = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ (\sigma_{31} - \sigma_{13}) = 0 \Rightarrow \sigma_{31} = \sigma_{13} \Rightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj} \\ (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

Com o resultado anterior fica demonstrado que o tensor das tensões é simétrico quando são consideradas apenas as forças de campo e de superfície no cálculo do momento da quantidade de movimento. Em outras palavras, *se há conservação de quantidade de movimento angular* o tensor das tensões é simétrico. A condição de simetria demonstrada acima é atribuída a Cauchy (1827), como mencionado por Chandrasekharaiah e Debnath (1994, p.337) e é equivalente à relação recíproca de Cauchy. Ao adicionar um torque devido a um dado campo e uma co-tensão (*couple stress*) à tensão normal, o balanço de quantidade de movimento angular conduz a um resultado atrelado aos fluidos polares (um caso mais geral do que os fluidos apolares, que são aqueles que seguem a relação recíproca de Cauchy). Outros detalhes relacionados a este tema são apresentados por Aris (1989, p.102-104).

4.5 Conservação de energia

Neste item é apresentada a primeira lei da termodinâmica aplicada ao escoamento de fluidos. A primeira lei da termodinâmica para um sistema pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \quad (4.77)$$

Para um volume de controle fixo, com o uso do teorema do transporte de Reynolds, pode-se escrever a primeira lei como:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W} &= \iiint_{\text{vc}} \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) d\text{Vol} + \iint_{\text{sc}} e(\rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA) \\ e &= \frac{V^2}{2} + gz + u \end{aligned} \quad (4.78)$$

em que “e” é a energia específica (no senso termodinâmico e não hidráulico), correspondente à soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional e com a energia interna, todas por unidade de massa de fluido. Foram desprezadas outras possíveis formas de energia na definição de e, como, por exemplo, energia decorrente de reações químicas, nucleares e efeitos de campos magnéticos e eletrostáticos. O teorema de Gauss possibilita escrever que

$$\oiint_{sc} e(\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA) = \iiint_{vc} [\nabla \cdot (\rho e \vec{v})] dVol \quad (4.79)$$

Considerando apenas a possibilidade de troca de calor por condução, utiliza-se a lei de Fourier para modelar o termo referente à taxa de transferência de energia sob a forma de calor através das fronteiras do sistema:

$$\dot{Q} = -\oiint_{sc} \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad (4.80)$$

O sinal negativo é necessário, pois se $\dot{Q} > 0$ o fluxo de calor ocorre para dentro do volume de controle e se $\dot{Q} < 0$ o fluxo ocorre de dentro para fora do volume de controle. Uma vez que o vetor \vec{n} sempre aponta para fora, quando calor estiver entrando o resultado da integração será negativo (graças ao produto escalar), sendo corrigido com o sinal negativo imposto. A lei de Fourier estabelece a seguinte relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperaturas:

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (4.81)$$

Combinando as equações 4.80 e 4.81 e aplicando o teorema de Gauss, vem:

$$\dot{Q} = \oiint_{sc} (k \nabla T) \cdot \vec{n} dA = \iiint_{Vol} \nabla \cdot (k \nabla T) dVol \quad (4.82)$$

Para modelar o termo que envolve o trabalho W, foram considerados apenas os efeitos decorrentes das tensões. Deste modo, a partir da definição de trabalho, pode-se escrever a taxa de trabalho (denominado muitas vezes como trabalho de escoamento) da seguinte maneira:

$$\dot{W} = -\oiint_{sc} (\sigma \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dA \quad (4.83)$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\dot{W} = -\oiint_{sc} (\sigma \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = -\iiint_{vc} \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{v}) dVol \quad (4.84)$$

Com todos os termos escritos como integrais volumétricas é possível obter a equação diferencial da conservação da energia pela substituição dos resultados precedentes na equação 4.78, com apresentado a seguir.

$$\iiint_{Vol} \nabla \cdot (k\nabla T) dVol + \iiint_{vc} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}) dVol = \iiint_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) dVol + \iiint_{vc} \left[\nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \right] dVol \Rightarrow$$

$$\iiint_{Vol} \left[\nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}) - \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) - \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \right] dVol = 0$$

Mais uma vez, a soma dos termos entre colchetes deve ser igual a zero, resultando em:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial t} (e\rho) + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \quad (4.85)$$

A equação da conservação da massa pode ser encontrada no segundo membro da equação 4.85 com o uso da regra do produto e de uma identidade, como apresentado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} (e\rho) + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + e \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \cdot \nabla e = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{\text{conservação da massa}} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e$$

Os termos restantes do lado direito da igualdade podem ser escritos com o uso da derivada material:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e = \rho \frac{De}{Dt} \quad (4.86)$$

Empregando a definição de energia específica, obtém-se:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left(\frac{Du}{Dt} + \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) \quad (4.87)$$

Deste modo, a equação diferencial da energia assume a seguinte forma:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}) = \rho \left(\frac{Du}{Dt} + \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) \quad (4.88)$$

Ainda é possível realizar uma modificação na forma de apresentação da equação 4.88. Sendo $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico, pode-se verificar a seguinte identidade (ver prova em Bird *et al.*, 2004, p.781):

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \vec{V})$$

Relembrando a equação de Cauchy (equação da quantidade de movimento linear), percebe-se a sua presença na equação 4.88 por meio das seguintes operações:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k\nabla T) + \sigma : (\nabla \vec{V}) &= \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g} \cdot \vec{V} - \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \sigma) = \rho \frac{Du}{Dt} + \underbrace{\vec{V} \cdot \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g} - \nabla \cdot \sigma \right]}_{=0} \\ \nabla \cdot (k\nabla T) + \sigma : (\nabla \vec{V}) &= \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Como discutido anteriormente, o tensor das tensões envolve as tensões viscosas e a pressão termodinâmica. Este fato possibilita a seguinte interpretação do segundo termo do primeiro membro da equação 4.89:

$$\sigma : (\nabla \vec{V}) = \underbrace{\tau : (\nabla \vec{V})}_{\substack{\text{Por envolver tensões tangenciais} \\ \text{este termo é interpretado como uma} \\ \text{função de dissipação viscosa } \Phi}} - \underbrace{p(\nabla \cdot \vec{V})}_{\substack{\text{Taxa de trabalho de} \\ \text{compressão ou expansão}}} = \Phi - p(\nabla \cdot \vec{V}) \quad (4.90)$$

Combinando as equações 4.89 e 4.90 e rearranjando os termos, obtém-se a equação da energia válida, para escoamento variável, compressível, viscoso e com condução de calor:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi = \rho \frac{Du}{Dt} + p(\nabla \cdot \vec{V}) \quad (4.91)$$

Em notação indicial, a equação 4.91 pode ser escrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{(1)} + \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{(2)} = \rho \underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{(3)} + p \underbrace{\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)}_{(4)} \quad (4.92)$$

Os termos desta equação podem ser interpretados da seguinte forma:

- (1) Divergente do fluxo de calor. Corresponde à taxa de adição de energia por condução de calor, por unidade de volume;
- (2) Este termo corresponde à taxa de trabalho realizado sobre o fluido pelas forças das tensões cisalhantes, por unidade de volume;
- (3) Este termo exprime a taxa de variação local e o transporte advectivo de energia interna do fluido, por unidade de volume;
- (4) Taxa de trabalho realizado sobre o fluido que advém das forças de pressão, por unidade de volume.

4.6 Conservação de massa para uma espécie em escoamento

A fim de equacionar o problema de conservação da massa de um composto presente em um escoamento, é interessante observar que o princípio geral necessário para esta tarefa pode ser expresso por meio de palavras da seguinte maneira: considerando um volume de controle para

avaliação euleriana do problema, a variação de massa do composto no interior do volume de controle é igual à massa que entra no mesmo por meio das superfícies permeáveis menos a massa que sai do volume de controle mais a massa gerada no interior do volume de controle e menos a massa consumida no interior do volume de controle. A geração e o consumo de massa podem ocorrer graças a reações químicas, por exemplo, e serão representadas por um único termo. Como objetivo, procura-se estabelecer uma equação de conservação para a fração de cada composto presente no escoamento. Com o intuito de utilizar as ferramentas matemáticas empregadas neste texto, a grandeza intensiva é definida como a razão entre a massa de um composto A e a massa total (fração mássica, denotada por ω_A). Desta forma, o teorema do transporte de Reynolds em sua forma integral é escrito da seguinte maneira:

$$\left. \frac{dm_A}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \omega_A \rho dVol + \iint_{sc} \omega_A (\rho \vec{V} \cdot \vec{ndA}) \quad (4.93)$$

Nesta equação, o vetor velocidade corresponde à velocidade com a qual se desloca a espécie A e o primeiro membro não se anula como na equação da continuidade, pois pode ocorrer produção ou consumo de massa da espécie A no interior do volume de controle. Utilizando a definição de concentração C, igual à massa de A dividida pelo volume total, a equação anterior é escrita da seguinte maneira:

$$\left. \frac{dm_A}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} C_A dVol + \iint_{sc} C_A (\vec{V} \cdot \vec{ndA}) \quad (4.94)$$

O teorema de Gauss permite expressar a integral de superfície como uma integral no volume:

$$\iint_{sc} C_A (\vec{V} \cdot \vec{ndA}) = \iiint_{vc} \nabla \cdot (C_A \vec{V}) dVol \quad (4.95)$$

O termo relativo às fontes e sumidouros pode ser escrito com a forma integral da seguinte maneira:

$$\frac{dm_A}{dVol} = C_A \Rightarrow m_A = \iiint_{vc} C_A dVol \Rightarrow \frac{dm_A}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{vc} C_A dVol \quad (4.96)$$

Substituindo as equações 4.95 e 4.96 na equação 4.94, vem

$$\frac{d}{dt} \iiint_{vc} C_A dVol = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} C_A dVol + \iiint_{vc} \nabla \cdot (C_A \vec{V}) dVol \Rightarrow$$

$$\iiint_{vc} \left[-\frac{dC_A}{dt} + \frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}) \right] dVol = 0$$

Denotando o termo que representa fontes e sumidouros com S_A e, sabendo-se que o volume elementar $dVol$ é diferente de zero, obtém-se:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}) = S_A \quad (4.97)$$

A equação 4.97 é uma forma intermediária da equação procurada que apresenta uma complicação do ponto de vista prático, pois requer o conhecimento da velocidade da espécie A. Uma abordagem amplamente empregada está baseada no uso da Lei de Fick e consiste em considerar que o processo de transporte da espécie A ocorre por meio da combinação do transporte difusivo com o transporte advectivo. No primeiro caso, o movimento de uma espécie é avaliado em relação ao movimento da mistura e no segundo caso é considerado o movimento da mistura, representado por uma velocidade média (indicada com o subscrito “m”). Deste modo, o fluxo relativo da espécie A é definido como:

$$J_A = C_A (\vec{V} - \vec{V}_m) \quad (4.98)$$

A Lei de Fick estabelece que:

$$J_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A \quad (4.99)$$

em que D_{AB} é um tensor de segunda ordem denominado como coeficiente de difusão da espécie A na espécie B (oxigênio em água, por exemplo). Igualando as equações 4.98 e 4.99 e resolvendo para o produto entre a concentração de A e o vetor velocidade da espécie A, obtém-se:

$$J_A = C_A (\vec{V} - \vec{V}_m) = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A \Rightarrow C_A \vec{V} = C_A \vec{V}_m - \rho D_{AB} \nabla \omega_A \quad (4.100)$$

Prosseguindo em busca de um modelo que considere a velocidade média da mistura, substitui-se a equação 4.100 na equação 4.97:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m - \rho D_{AB} \nabla \omega_A) = S_A \Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m) - \nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla \omega_A) = S_A \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m) = S_A + \nabla \cdot (D_{AB} \nabla C_A) \quad (4.101)$$

Em notação tensorial, escreve-se:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (C_A V_{mi}) = S_A + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ABi} \frac{\partial}{\partial x_i} C_A \right) \quad (4.102)$$

A equação 4.101 (ou 4.102) corresponde ao modelo matemático procurado para conservação da massa de um composto em um escoamento, válido para regime não permanente, escoamento tridimensional, compressível, meio anisotrópico para o composto, além de considerar a possibilidade de geração e consumo da espécie A. É interessante notar que o caráter geral desta equação possibilita a obtenção de formulações particulares. Para o caso incompressível, isto é, se a distribuição de densidade da mistura for incompressível, a equação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\vec{V}_m \cdot \nabla) C_A = S_A + \nabla \cdot (D_{AB} \nabla C_A) \quad (4.103)$$

A simplificação encontrada na equação anterior em relação à original decorre da equação da continuidade, como apresentado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (C_{Ai} V_{mi}) = C_{Ai} \overbrace{\frac{\partial V_{mi}}{\partial x_i}}^{\text{div } V_{mi}=0} + V_{mi} \frac{\partial C_{Ai}}{\partial x_i} = V_{mi} \frac{\partial C_{Ai}}{\partial x_i}$$

Se o fluido estiver em repouso ($V_m=0$), ainda assim pode haver transferência de massa por difusão, sendo tal condição representada pela equação deduzida:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = S_A + \nabla \cdot (D_{AB} \nabla C_A) \quad (4.104)$$

Se o meio for considerado isotrópico, a equação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = S_A + D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (4.105)$$

Caso não haja fontes ou sumidouros para o soluto A, obtém-se a forma apresentada a seguir, conhecida como segunda lei de Fick (Bird *et al.*, 2002, p.557):

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (4.106)$$

Pode-se ainda realizar uma simplificação adicional, para situações que ocorrem em regime permanente. Se isto for considerado, a forma matemática da equação passa a ser a da equação de Laplace (Pierre Simon Laplace, 1749-1827):

$$\nabla^2 C_A = 0 \quad (4.107)$$

Textos clássicos que expõem deduções da equação geral obtida para escoamentos multicomponentes são os trabalhos de Streeter, Wylie e Bedford (1998, p.212-214) e Bird, Stewart e Lightfoot (2004, p.555), por exemplo. Ambos foram empregados como referências para elaboração deste item.

4.7 Forma diferencial do TTR

Nos itens anteriores foram apresentadas equações diferenciais que exprimem princípios básicos da mecânica dos fluidos, a saber: conservação da massa, balanço de quantidade de movimento linear e conservação da energia. Tais modelos matemáticos podem ser representados de forma compacta através de uma equação diferencial escrita em termos da grandeza intensiva η , que pode ser vista como uma forma diferencial do teorema do transporte de Reynolds. Esta forma aparece com certa frequência em livros clássicos de mecânica dos fluidos e em manuais de softwares de mecânica dos fluidos computacional, sendo empregada para resumir a apresentação das equações básicas resolvidas. De acordo com o teorema de Gauss, a integral de superfície do TTR pode ser transformada em uma integral volumétrica:

$$\oiint_{sc} \eta (\rho \vec{V} \cdot \vec{ndA}) = \iiint_{vc} \nabla \cdot (\eta \rho \vec{V}) dVol \quad (4.108)$$

A grandeza extensiva N pode ser expressa, por exemplo, por unidade de volume:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dVol} &= \eta_v \\ N &= \iiint_{vc} \eta_v dVol \end{aligned} \quad (4.109)$$

Deste modo, o TTR pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{vc} \eta_v dVol = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \eta \rho dVol + \iiint_{vc} \nabla \cdot (\eta \rho \vec{V}) dVol \quad (4.110)$$

Agrupando os termos em uma única integral de volume, obtém-se a forma diferencial:

$$\frac{d\eta_v}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\eta\rho\vec{V}) \quad (4.111)$$

em que η_v é igual à grandeza extensiva por unidade de volume, diferente de η , que é a grandeza extensiva por unidade de massa. É fácil verificar que $\eta_v = \rho\eta$, o que possibilita escrever a equação 4.111 com a seguinte forma:

$$\frac{d(\rho\eta)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\eta\rho\vec{V}) \quad (4.112)$$

É possível deduzir a equação anterior a partir das ferramentas empregadas na segunda dedução do TTR. O primeiro membro da equação 4.112 representa a força resultante por unidade de volume, para a segunda lei de Newton, as taxas de calor e trabalho, para a primeira lei da termodinâmica, é igual a zero para o caso da conservação da massa (equação da continuidade) e é igual às fontes e sumidouros (S_A) para o caso de conservação da massa de um composto em escoamento.

4.8 Equações de Navier-Stokes

4.8.1 Considerações iniciais

As equações de Navier-Stokes representam, em essência, a segunda lei do movimento de Newton associada às equações constitutivas correspondentes a um fluido newtoniano. O seu desenvolvimento foi fruto dos esforços de diversos cientistas, dentre os quais se encontram: Claude Louis M. H. Navier (1785-1836), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Simeon Denis Poisson (1781-1840), Adhémar Jean Claude Barré, M. de Saint-Venant (1797-1886), George Gabriel Stokes (1819-1903) e eventualmente outros não citados. Em 1822, Navier, que foi um engenheiro de pontes, propôs a inclusão de efeitos viscosos nas equações de Euler, tendo sido o primeiro a obter uma forma matematicamente correta das conhecidas equações de Navier-Stokes. Contribuições mais elaboradas do ponto de vista analítico foram fornecidas por Cauchy e Poisson e, finalmente, após vinte e três anos, Stokes (professor Lucasiano entre 1849 e 1903) apresentou uma dedução completa para as equações.

A seção seguinte apresenta um breve desenvolvimento das equações constitutivas que, combinadas com a equação diferencial do momentum (quantidade de movimento linear), desenvolvida anteriormente, culminam nas equações de Navier-Stokes. A dedução das equações de Navier-Stokes pode ser encontrada em diferentes fontes e, normalmente, uma compreensão completa do caminho necessário para obtenção das equações requer a consulta de materiais cujos assuntos estão interligados. Talvez os aspectos mais intrincados das

equações sejam aqueles relacionados à obtenção do modelo constitutivo para um fluido newtoniano. O primeiro grupo de referências necessárias são aquelas que versam sobre mecânica dos fluidos e tratam como pré-requisitos tópicos básicos de mecânica do contínuo e, inevitavelmente, de cálculo tensorial. Fazem parte deste grupo os trabalhos de Stokes (1845), Schlichting (2000), Aris (1989), White (2006), Schulz (2003), Durst (2008) e Kundu e Cohen (2008). O segundo grupo é composto por livros de mecânica do contínuo e de física matemática, dentre os quais, os principais utilizados foram os de Butkov (1988) e Chandrasekharaiah e Debnath (1994). Entende-se que a apresentação aqui feita pode ser entendida como uma contribuição que, além do caráter de revisão histórica sobre tema, é uma tentativa de organização em um só documento das informações presentes nas fontes citadas.

4.8.2 Equações constitutivas

O desenvolvimento apresentado neste texto é válido apenas para fluidos newtonianos, uma classe que possui características menos gerais do que fluidos estudados pela reologia. A equação da quantidade de movimento linear, ou equação de Cauchy, apresentada anteriormente é:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij} \quad (4.113)$$

Em termos de suas equações componentes escalares, escreve-se o sistema:

$$\begin{cases} \rho \frac{DV_1}{Dt} = \rho g_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{DV_2}{Dt} = \rho g_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{DV_3}{Dt} = \rho g_3 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{cases} \quad (4.114)$$

Comentou-se anteriormente que o tensor das tensões é simétrico. Este fato tem como consequência a existência de seis e não nove componentes diferentes que formam o referido tensor, apresentado a seguir:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Deste modo, a equação da quantidade de movimento (ou o sistema de equações que compõem a referida equação vetorial) passa a ter seis e não nove tensões como incógnitas. A

seguir são apresentados os desenvolvimentos necessários para obtenção de relações entre as tensões e as componentes das velocidades do escoamento.

Decomposição do movimento de um fluido

1) Translação pura: um elemento de fluido de massa dm em um campo de escoamento sofre translação pura quando ele se desloca de um ponto a outro sem alterar a sua forma, isto é, sem sofrer qualquer deformação, de modo que não se desenvolvam tensões de cisalhamento, como ilustrado por meio da Figura 4.8. A translação é dada simplesmente pelo vetor velocidade e corresponde à velocidade do centro de massa do elemento de fluido.

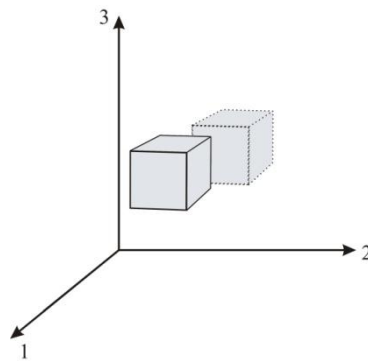


Figura 4.8 – Translação pura. O cubo pontilhado corresponde ao elemento de fluido no instante $t+\Delta t$.

2) Dilatação volumétrica: a dilatação volumétrica de um elemento de fluido pode ocorrer devido a mudanças no comprimento das arestas que delimitam as suas faces, que então caracterizam as alterações no volume desse elemento. Para escoamentos incompressíveis, a taxa de dilatação volumétrica é nula. A variação no comprimento do elemento de fluido em uma dada direção ocorre quando existe uma variação espacial da velocidade naquela direção. Sendo assim, define-se a taxa de dilatação volumétrica como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \\ \dot{\epsilon}_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \\ \dot{\epsilon}_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (4.116)$$

ou, reconhecendo-se o divergente do campo de velocidades:

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (4.117)$$

O índice duplo indica o plano no qual ocorre a deformação. Um esboço de dilatação volumétrica pode ser visto na Figura 4.9. É interessante notar que se o escoamento for incompressível a taxa de dilatação volumétrica é nula. Para casos como esse a equação 4.117 é reduzida à equação da continuidade para escoamento incompressível.

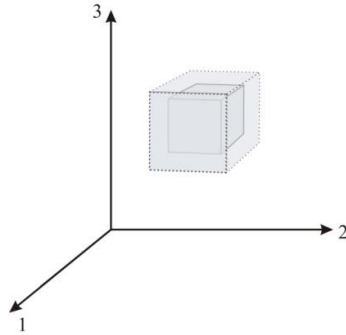


Figura 4.9 – Dilatação volumétrica: o cubo pontilhado corresponde ao elemento de fluido dilatado em $t+\Delta t$.

3) Deformação angular: a deformação angular de um elemento de fluido está atrelada às definições de variações no ângulo entre duas linhas que possuem um ponto comum, mais adequadamente expressas por duas linhas reciprocamente perpendiculares no fluido. Tal variação pode ser equacionada e, como resultado, obtém-se (White, 2006, p.20):

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \\ \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \\ \dot{\epsilon}_{31} = \dot{\epsilon}_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (4.118)$$

As igualdades anteriores decorrem da simetria considerada na deformação angular, ou seja, $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji}$, em analogia com a mecânica dos sólidos. A Figura 4.10 contém um esboço que representa uma possível deformação angular de um elemento de fluido.

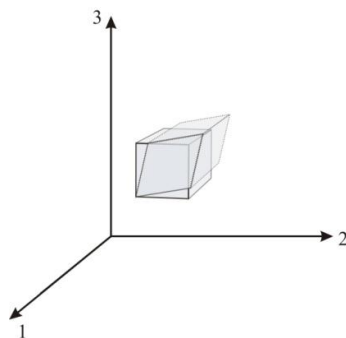


Figura 4.10 – Deformação angular

4) Rotação de corpo rígido: neste caso o fluido se move como se fosse um sólido, sem sofrer os efeitos de tensões cisalhantes. Logo, um elemento de fluido permanece com lados mutuamente perpendiculares sem que ocorra aproximação angular como ilustrado a seguir, com o auxílio da Figura 4.11.

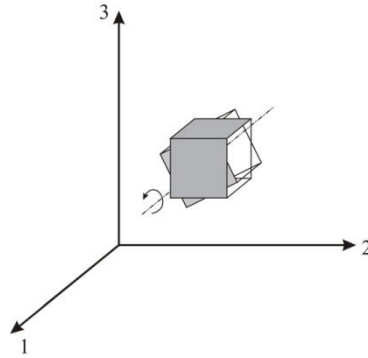


Figura 4.11 – Rotação de corpo rígido

É interessante notar que a taxa de rotação possui formulação semelhante àquela para deformação angular, exceto pelo sinal negativo decorrente da não aproximação entre os lados do elemento. Sendo Ω_i o vetor velocidade angular, as suas componentes são (White, 2006, p.20; Kundu e Cohen, 2008, p.37):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_3 = \Omega_{21} = -\Omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \\ \Omega_1 = \Omega_{32} = -\Omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \\ \Omega_2 = \Omega_{13} = -\Omega_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \end{array} \right. \quad (4.119)$$

Com o uso do símbolo de Levi-Civita (1873-1941), ε_{ijk} , a equação 4.119 assume a forma:

$$\left. \begin{array}{l} 2\Omega_i = [\nabla \times V]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \\ \varepsilon_{ijk} \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ se } ijk = 123, 231 \text{ e } 312 \text{ (sentido horário)} \\ -1 \text{ se } ijk = 321, 213, 132 \text{ (anti - horário)} \\ 0 \text{ se quaisquer dois índices forem iguais} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (4.120)$$

O subscrito junto à letra ômega indica que o elemento gira em torno daquele eixo. Os diferentes tipos de deformação, representados pelas equações anteriores, podem ser reunidos em uma representação do tensor taxa de deformação, como pode ser visto na equação 4.121.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}}_{\dot{\epsilon}_{kl}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & 0 & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\epsilon}_{kl}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega_i} \quad (4.121)$$

Em notação tensorial a equação 4.121 é representada por:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)}_{\text{Partesimétrica (dilatação+deformação)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} - \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)}_{\text{Parteanti-simétrica (rotação)}} \quad (4.122)$$

Postulados de Stokes (1845) sobre o tensor viscoso (White, 2006):

- i) O fluido é um meio contínuo e o tensor viscoso varia linearmente com o tensor taxa de deformação $\dot{\epsilon}_{ij}$;
- ii) O fluido é isotrópico, ou seja, suas propriedades são independentes da direção considerada e, conseqüentemente, a lei de deformação é independente dos eixos coordenados empregados;
- iii) Quando a taxa de deformação é igual a zero, a lei de deformação é reduzida para a condição hidrostática.

O postulado i possibilita escrever o tensor viscoso como uma combinação linear de nove elementos do tensor das deformações, como apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1113} & a_{1121} & a_{1122} & a_{1123} & a_{1131} & a_{1132} & a_{1133} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1213} & a_{1221} & a_{1222} & a_{1223} & a_{1231} & a_{1232} & a_{1233} \\ a_{1311} & a_{1312} & a_{1313} & a_{1321} & a_{1322} & a_{1323} & a_{1331} & a_{1332} & a_{1333} \\ a_{2111} & a_{2112} & a_{2113} & a_{2121} & a_{2122} & a_{2123} & a_{2131} & a_{2132} & a_{2133} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2213} & a_{2221} & a_{2222} & a_{2223} & a_{2231} & a_{2232} & a_{2233} \\ a_{2311} & a_{2312} & a_{2313} & a_{2321} & a_{2322} & a_{2323} & a_{2331} & a_{2332} & a_{2333} \\ a_{3111} & a_{3112} & a_{3113} & a_{3121} & a_{3122} & a_{3123} & a_{3131} & a_{3132} & a_{3133} \\ a_{3211} & a_{3212} & a_{3213} & a_{3221} & a_{3222} & a_{3223} & a_{3231} & a_{3232} & a_{3233} \\ a_{3311} & a_{3312} & a_{3313} & a_{3321} & a_{3322} & a_{3323} & a_{3331} & a_{3332} & a_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{32} \\ \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Em notação tensorial, a matriz de 81 elementos é representada de forma compacta por:

$$\tau_{ij} = a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = a_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial x_l}, \text{ em que } i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (4.124)$$

Para um fluido isotrópico (postulado ii), sendo simétricos os tensores da equação 4.124, o número de constantes para definir o tensor de quarta ordem a_{ijkl} se reduz a duas (λ e μ). Esta afirmação é proveniente de um teorema da mecânica do contínuo, provado a partir de uma série de rotações nos eixos coordenados e da condição de simetria dos tensores taxa de

deformação e viscoso. Como a demonstração é relativamente extensa, ela foi deslocada para o Apêndice 2. O resultado final da demonstração é:

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.125)$$

Reconhece-se na equação 4.125 que μ é a viscosidade dinâmica e λ o segundo coeficiente de viscosidade de Stokes. Combinando as equações 4.124 e 4.125, vem:

$$\tau_{ij} = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \quad (4.126)$$

O tensor taxa de deformação é formado por uma parte simétrica, referente à superposição dos efeitos de dilatação e deformação, e uma parte anti-simétrica correspondente à rotação de corpo rígido. Uma vez que o tensor viscoso é simétrico, ele será proporcional somente à parte simétrica do tensor das deformações (não há tensões cisalhantes associadas à rotação pura), definido de acordo com a equação 4.127:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{Partesimétrica} \\ (\text{dilatação+deformação})}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} - \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)}_{\substack{\text{Parteanti-simétrica} \\ (\text{rotação})}} \quad (4.127)$$

Substituindo a parte simétrica de 4.127 em 4.126, vem:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \quad (4.128)$$

Substituindo a equação 4.128 na equação 4.52 (equação que define o tensor das tensões como a soma do tensor hidrostático mais o tensor de desvio), obtém-se a equação constitutiva para um fluido newtoniano. Lembrando que o delta de Kronecker é igual a+1 se $i=j$ e igual a zero se $i \neq j$, os termos presentes na equação 4.128 podem ser simplificados algebricamente da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parte 1} \Rightarrow \frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} 2 \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \\ \text{Parte 2} \Rightarrow \frac{1}{2} \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) = \mu \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \end{array} \right.$$

Alguns detalhes sobre as simplificações precedentes são apresentadas no Apêndice 2. O resultado final procurado é:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \quad (4.129)$$

A equação 4.129 corresponde à equação constitutiva para um fluido newtoniano, ou seja, um fluido que se comporta de acordo com as hipóteses adotadas nos desenvolvimentos precedentes.

Equações de Navier-Stokes (N-S)

Os desenvolvimentos apresentados anteriormente culminaram na equação constitutiva para um fluido newtoniano e possibilitam a obtenção das equações de Navier-Stokes. Para tanto, substitui-se a equação 4.129 na equação de Cauchy. A equação 4.64, apresentada anteriormente, é:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma^T \quad \text{ou} \quad \rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.64)$$

Combinando com a equação 4.129, obtém-se a equação de Navier-Stokes (ou equações de Navier-Stokes, uma vez que ela representa três equações escalares):

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.130)$$

Esta é uma forma compacta de escrever as equações. Com o uso de notação vetorial em alguns termos, a equação assume a forma apresentada a seguir:

$$\rho \underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{Aceleração}} = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{Força de campo}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{Gradiente de pressões}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \delta_{ij} \underbrace{\nabla \cdot \vec{V}}_{\text{Divergente de } \vec{V}} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.131)$$

A equação 4.131 pode ser representada por suas equações componentes, escritas em diferentes sistemas de coordenadas. A seguir, são apresentadas as equações de N-S em coordenadas cartesianas.

Direção 1 (ou x):

$$\rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) = \rho g_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] \quad (4.132)$$

Direção 2 (ou y):

$$\rho \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) = \rho g_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \right] \quad (4.133)$$

Direção 3 (ou z):

$$\rho \left(\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) = \rho g_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right] \quad (4.134)$$

É interessante notar que se o fluido estiver em repouso a equação 4.131 é simplificada de tal maneira que se obtém a equação básica da estática dos fluidos. Para tanto, o termo relativo à aceleração é igual a zero, assim como o divergente do campo vetorial de velocidades e o termo oriundo da relação entre tensão e deformação angular. Com estas simplificações, a equação 4.131 passa a ser escrita como apresentado a seguir:

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = 0 \quad (4.135)$$

A hipótese de Stokes (1845)

O segundo coeficiente de viscosidade de Stokes (λ), por estar associado apenas com a expansão volumétrica, é denominado por alguns autores como coeficiente volumétrico de viscosidade (*coefficient of bulk viscosity*) e na teoria da elasticidade linear ele é chamado de constante de Lamé (White, 2006, p.66). A hipótese de Stokes tem como objetivo relacionar este coeficiente com a viscosidade dinâmica do fluido. Para alcançar tal relação são empregadas as definições de pressão mecânica e termodinâmica. A pressão mecânica é definida como o negativo de um terço do traço do tensor das tensões (primeiro invariante), que são as componentes normais do tensor:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (4.136)$$

A equação constitutiva 4.129 contém os três termos presentes na equação 4.136, como pode ser visto a seguir:

$$\sigma_{11} = \lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - p \quad (4.137)$$

$$\sigma_{22} = \lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - p \quad (4.138)$$

$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial V_3}{\partial x_3} - p \quad (4.139)$$

A soma das equações 4.137 a 4.139 fornece:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3p + (3\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) \quad (4.140)$$

Nota-se a existência do divergente do campo de velocidades na definição anterior:

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) = \text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_k}{\partial x_k}$$

A substituição da equação 4.140 na equação 4.136 fornece o seguinte resultado:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \quad (4.141)$$

Observa-se que a pressão mecânica não é igual à propriedade termodinâmica chamada pressão. Esta distinção conceitual é importante e se destaca para o caso mais geral, para o qual o escoamento é compressível. Muitos escoamentos são praticamente incompressíveis ou com efeitos de compressibilidade tão pequenos que $V_{k,k}$ é próximo de zero. Esta simplificação é válida para a maioria dos problemas relacionados à hidráulica, mas pode não ser adequada quando se pretende obter detalhes vinculados ao movimento dos fluidos, como durante o colapso de bolhas em fenômenos de cavitação em vertedores e outras estruturas hidráulicas. O termo entre parênteses encontrado na equação 4.141 é chamado de coeficiente de viscosidade volumétrico (Brodkey, 1967, p.38; Kundu e Cohen, 2008, p.102), sendo definido como:

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \quad (4.142)$$

A hipótese de Stokes assume $K=0$, o que significa supor que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica, ou seja:

$0 = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Rightarrow \bar{p} = p$. Como consequência, obtém-se:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (4.143)$$

Escoamento incompressível

Se a massa específica do fluido permanece constante, o divergente do vetor velocidade e o segundo coeficiente de viscosidade desaparecem da equação de Navier-Stokes de acordo com a equação da continuidade. Além disto, se for assumido que a viscosidade dinâmica é constante e independente do campo de temperaturas, a equação de Navier-Stokes é simplificada para:

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.144)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.145)$$

Para tanto, considerou-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)}_{=0} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \mu \nabla^2 \vec{V} \\ \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) = 0 \\ \frac{\partial V_j}{\partial x_j} &= 0 \text{ (incompressibilidade)} \end{aligned}$$

Existem aplicações nas quais o uso de coordenadas cilíndricas é preferível. Nesse sistema de coordenadas, as equações de Navier-Stokes assumem as seguintes formas:

Componente radial (r):

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] &= \\ \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] & \quad (4.146) \end{aligned}$$

Componente angular (θ):

$$\rho \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right] = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \quad (4.147)$$

Componente longitudinal (z):

$$\rho \left[\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \quad (4.148)$$

4.9 Forma adimensional das equações de Navier-Stokes

Este item tem como objetivo expor uma breve discussão sobre a importância relativa de cada um dos termos presentes nas equações de N-S para o caso de escoamento isotérmico e incompressível (equação 4.144). A discussão que pode ser desenvolvida a partir da forma adimensional da equação é especialmente importante para a teoria da semelhança. A equação de Navier-Stokes utilizada como ponto de partida possui a seguinte forma, reescrita a seguir:

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.144)$$

Sendo L um comprimento característico genérico, a adimensionalização é iniciada por meio da definição de algumas variáveis adimensionais. A primeira, apresentada a seguir, é uma relação entre velocidades:

$$\hat{V}_i = \frac{V_i}{V} \quad (4.149)$$

Define-se também o seguinte número de Euler:

$$\hat{p} = \frac{p - p_0}{\rho V^2} \quad (4.150)$$

Assim como as variáveis dependentes, as independentes também são adimensionalizadas, de acordo com as definições dadas a seguir:

$$\hat{t} = \frac{tV}{L} \quad (4.151)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{x_1}{L} \\ \hat{x}_2 &= \frac{x_2}{L} \\ \hat{x}_3 &= \frac{x_3}{L} \end{aligned} \right\} \text{Coordenadas espaciais adimensionais} \quad (4.152)$$

em que V = velocidade média de referência ou velocidade característica e p_o = pressão de referência. O operador nabla (ou del) pode ser adimensionalizado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla &= \delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \delta_1 \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_1} + \delta_2 \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_2} + \delta_3 \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_3} \Rightarrow \\ L \nabla &= L \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \widehat{\nabla} = \delta_i \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \delta_1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \end{aligned} \quad (4.153)$$

Similarmente, o laplaciano adimensionalizado é escrito como:

$$L^2 \nabla^2 = \widehat{\nabla}^2 = \delta_1 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1^2} + \delta_2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2^2} + \delta_3 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_3^2} \quad (4.154)$$

A derivada material assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} V_3 = \frac{\partial}{L \partial \hat{t}} + \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_1} V \widehat{V}_1 + \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_2} V \widehat{V}_2 + \frac{\partial}{L \partial \hat{x}_3} V \widehat{V}_3 = \\ &= \frac{V}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \widehat{V}_1 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \widehat{V}_2 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \widehat{V}_3 \right) = \frac{V}{L} \frac{D}{D\hat{t}} \Rightarrow \frac{D}{L D\hat{t}} = \frac{V}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \widehat{V}_1 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \widehat{V}_2 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \widehat{V}_3 \right) \Rightarrow \\ \frac{D}{L D\hat{t}} &= \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \widehat{V}_1 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \widehat{V}_2 + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \widehat{V}_3 \right) \end{aligned} \quad (4.155)$$

Por meio dos resultados anteriores e de algumas manipulações algébricas apresentadas a seguir é possível reescrever as equações de Navier-Stokes com variáveis adimensionais:

1º Membro:

$$\rho \frac{D V_i}{Dt} = \rho \frac{V}{L} \frac{D(\widehat{V}_i V)}{D\hat{t}} = \rho \frac{V^2}{L} \frac{D \widehat{V}_i}{D\hat{t}} \quad (4.156)$$

2º Membro:

$$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} = \rho g_i - \frac{\rho V^2}{L} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\mu V}{L^2} \frac{\partial^2 \widehat{V}_i}{\partial \hat{x}_j^2} \quad (4.157)$$

Rearranjando os termos, com $L/(\rho V^2)$ em evidência, obtém-se:

$$\left(\frac{L}{\rho V^2} \rho g_i - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \frac{L}{\rho V^2} \frac{\mu V}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{V}_i}{\partial \hat{x}_j^2} \right) \frac{\rho V^2}{L} = \left[\left(\frac{L}{V^2} g_i \right) - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \left(\frac{1}{\rho V} \frac{\mu}{L} \right) \frac{\partial^2 \hat{V}_i}{\partial \hat{x}_j^2} \right] \frac{\rho V^2}{L} \quad (4.158)$$

No segundo membro da equação 4.158, os termos entre parênteses são:

$$\frac{g_i L}{V^2} = \left(\frac{V^2}{g_i L} \right)^{-1} = Fr^{-2} \quad (4.159)$$

O símbolo Fr denota o número de Froude.

$$\left(\frac{1}{\rho V} \frac{\mu}{L} \right) = \left(\rho \frac{VL}{\mu} \right)^{-1} = Re^{-1} \quad (4.160)$$

em que Re é o número de Reynolds escrito em termos de grandezas características genéricas.

Combinando as equações, obtém-se a forma adimensional almejada:

$$\frac{D\hat{V}_i}{D\hat{t}} = \frac{1}{Fr^2} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{V}_i}{\partial \hat{x}_j^2} \quad (4.161)$$

A equação anterior também pode ser escrita com os operadores vetoriais:

$$\frac{D\hat{V}}{D\hat{t}} = \frac{1}{Fr^2} - \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{V} \quad (4.162)$$

Para escoamentos nos quais as forças inerciais são muito maiores do que as viscosas, o número de Reynolds assume valores extremamente elevados. Ao admitir que $Re \rightarrow \infty$, a equação 4.162 é simplificada com a supressão do último termo, sendo possível reconhecer, no resultado obtido, a forma adimensional da equação de Euler.

$$\frac{D\hat{V}}{D\hat{t}} = \frac{1}{Fr^2} - \hat{\nabla} \hat{p} \quad (4.163)$$

Se o adimensional que envolve a pressão for definido de acordo com a equação 4.164, apresentada a seguir, é possível avaliar a condição $Re \rightarrow \infty$. Os demais adimensionais são os mesmos empregados anteriormente. Adicionalmente, considera-se que os efeitos gravitacionais são muito pequenos em relação aos demais.

$$\hat{p}' = (p - p_0) / (\mu V / L) \quad (4.164)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\text{Re} \frac{D\hat{V}}{Dt} = -\hat{\nabla}p' + \hat{\nabla}^2 \hat{V} \quad (4.165)$$

Com $\text{Re} \rightarrow 0$, a equação 4.165 é modificada para:

$$\hat{\nabla}p' = \hat{\nabla}^2 \hat{V} \quad (4.166)$$

Ou, em forma dimensional:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.167)$$

A equação 4.167 (ou 4.166) representa de forma satisfatória escoamentos nos quais os efeitos viscosos são preponderantes, também denominados escoamentos de Stokes ou *creeping flows*. Um escoamento deste tipo é ilustrado por meio da figura a seguir, que contém uma visualização obtida com pó de alumínio em glicerina e resultados obtidos com uma solução numérica das equações de Navier-Stokes em duas dimensões.

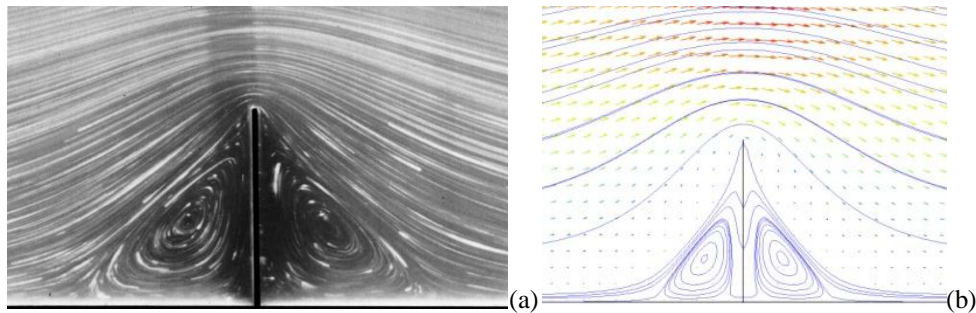


Figura 4.12 – Escoamento de Stokes em um canal com obstáculo: (a) visualização com uso de pó de alumínio em glicerina (van Dyke, 1982, fotografia de Taneda, 1979) e (b) simulação numérica (fluido: glicerina, $\text{Re} = \text{Vs}/\nu$ com V = velocidade média do escoamento e s = altura do obstáculo; $\text{Re} = 0,014$; software EasyCFD).

4.10 Teoria da similaridade e equações de Navier-Stokes

A elaboração de projetos relacionados à engenharia hidráulica frequentemente requer o uso de extrapolações, que ocorrem, por exemplo, ao projetar estruturas hidráulicas de grande porte, como o vertedor de uma barragem, uma eclusa ou uma grande turbina. A extrapolação é efetuada quando as informações obtidas em um modelo físico em escala reduzida são empregadas para prever os fenômenos que ocorrem em uma escala muito maior. A teoria da semelhança mecânica contém os fundamentos necessários para a realização adequada de estudos experimentais de problemas específicos em escalas reduzidas. Este tópico expõe de forma sintética alguns temas básicos sobre o assunto e, como referências principais, cabe mencionar os livros de Pimenta (1981), Porto (2006), Schulz (2003) e Kundu e Cohen (2008).

Definições

Dois escoamentos que ocorrem segundo as mesmas trajetórias são mecanicamente semelhantes quando apresentam, em instantes homólogos, relações constantes entre todas as grandezas físicas relevantes para o movimento. Dados dois escoamentos semelhantes, como aqueles da Figura 4.13, para que exista semelhança geométrica é necessário que sejam satisfeitas as seguintes relações:

$$\frac{\overline{X_1 X_2}}{\overline{Y_1 Y_2}} = \frac{\overline{X_2 X_3}}{\overline{Y_2 Y_3}} = \dots = C_0 \quad (4.168)$$

$$\frac{\widehat{X_1 X_2 X_3}}{\widehat{Y_1 Y_2 Y_3}} = \frac{\widehat{X_2 X_3 X_4}}{\widehat{Y_2 Y_3 Y_4}} = \dots = 1 \quad (4.169)$$

A equação 4.168 estabelece que os escoamentos X e Y possuem comprimentos homólogos proporcionais ($C_0 = \text{constante}$) e a equação 4.169 corresponde à igualdade entre os ângulos homólogos.

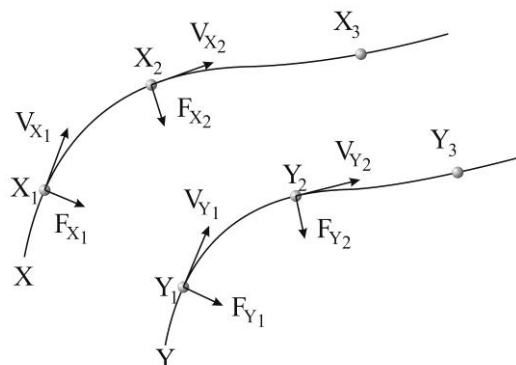


Figura 4.13 – Linhas de corrente de dois escoamentos X e Y (X pode ser, por exemplo, o escoamento em um protótipo e Y em um modelo físico). Fonte: adaptado de Pimenta (1981, v.2, p.5)

Além da geometria, os escoamentos devem ser semelhantes do ponto de vista cinemático, ou seja, devem apresentar proporcionalidades entre velocidades, acelerações e os intervalos de tempo, entre instantes e pontos homólogos. Deste modo, ainda sobre a Figura 4.13, devem ser observadas as seguintes relações:

$$\frac{V_{X_1}}{V_{Y_1}} = \frac{V_{X_2}}{V_{Y_2}} = \dots = C_1 \quad (4.170)$$

$$\frac{a_{X_1}}{a_{Y_1}} = \frac{a_{X_2}}{a_{Y_2}} = \dots = C_2 \quad (4.171)$$

$$\frac{t_{X_1}}{t_{Y_1}} = \frac{t_{X_2}}{t_{Y_2}} = \dots = C_3 \quad (4.172)$$

em que V = velocidade, a = aceleração, t = tempo e C_1 , C_2 e C_3 são constantes.

Para que se tenha uma similaridade completa entre um modelo físico e um protótipo, além da semelhança geométrica e a cinemática, é necessário respeitar a semelhança dinâmica. Tomando como exemplo as energias dissipadas (Δh), as forças (F) e tensões (σ), dos escoamentos X e Y , a semelhança dinâmica exige que sejam satisfeitas as seguintes equações:

$$\frac{\Delta h_{X_1}}{\Delta h_{Y_1}} = \frac{\Delta h_{X_2}}{\Delta h_{Y_2}} = \dots = C_4 \quad (4.173)$$

$$\frac{F_{X_1}}{F_{Y_1}} = \frac{F_{X_2}}{F_{Y_2}} = \dots = C_5 \quad (4.174)$$

$$\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{Y_1}} = \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{Y_2}} = \dots = C_6 \quad (4.175)$$

em que C_4 , C_5 e C_6 são constantes.

As relações constantes definidas com as equações precedentes são denominadas como escalas de semelhança dos dois movimentos. Os valores de C_0, \dots, C_6 são diferentes pois envolvem grandezas diferentes. Entretanto, para uma mesma grandeza (pressão, velocidade) o valor da constante é o mesmo para qualquer par de pontos homólogos escolhido. A razão de similaridade de duas figuras geométricas é denominada escala geométrica, denotada neste item com a letra λ . As demais escalas do movimento podem ser escritas em função de λ e das relações existentes entre os valores das características físicas dos fluidos em escoamento.

Definição de semelhança com o auxílio da equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes foi adimensionalizada, assumindo a seguinte forma:

$$\frac{D\hat{V}}{D\hat{t}} = \frac{1}{Fr^2} - \hat{\nabla}\hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{V} \quad (4.176)$$

em que $\hat{V}_i = \frac{V_i}{V}$, $\hat{p} = \frac{p - p_0}{\rho V^2}$, $\hat{t} = \frac{tV}{L}$, $\hat{x}_1 = \frac{x_1}{L}$, $\hat{x}_2 = \frac{x_2}{L}$ e $\hat{x}_3 = \frac{x_3}{L}$. Como comentado anteriormente, a velocidade V é uma velocidade característica do escoamento, L é uma dimensão característica do escoamento e p_0 é uma pressão de referência. Os números de

Froude e Reynolds são definidos em termos das grandezas características, como apresentado a seguir:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g_i L}} \text{ e } Re = \rho \frac{VL}{\mu}.$$

Observando os conceitos e definições apresentadas, pode-se concluir que, para dois escoamentos X e Y com superfície livre e cinematicamente semelhantes, a equação 4.176 só fornecerá soluções idênticas se os números de Froude e Reynolds forem iguais para X e Y, ou seja, $Fr_X = Fr_Y$ e $Re_X = Re_Y$. Cabe enunciar, com base nos adimensionais definidos, os conceitos de pontos e instantes homólogos:

Definição. *Pontos homólogos são aqueles para os quais são verdadeiras as seguintes relações: $\hat{x}_{iX} = \hat{x}_{iY}$ ($i = 1,2,3$). Instantes homólogos são aqueles em que: $\hat{t}_X = \hat{t}_Y$.*

A semelhança de Reynolds ocorre quando há igualdade entre os números de Reynolds dos escoamentos X e Y. Ela é especialmente importante em escoamento sob pressão e pode ser verificada com a forma adimensional das equações de Navier-Stokes sem o número de Froude. Para tanto, utiliza-se uma nova variável adimensional para a pressão, definida como:

$$p^* = \frac{p + \rho g z}{\rho V^2} \quad (4.177)$$

em que g é a componente da aceleração devida à gravidade em x_3 (a única diferente de zero) e $z = x_3$. Utilizando a equação 4.177, a equação de Navier-Stokes assume a seguinte forma:

$$\frac{D\hat{V}}{D\hat{t}} = -\hat{\nabla} p^* + \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{V} \quad (4.178)$$

Portanto, conclui-se que o número de Reynolds deve ser igual para X e Y. Considerando agora escoamentos com superfície livre, como mencionado anteriormente, os números de Reynolds e Froude dos escoamentos X e Y devem ser iguais para que os escoamentos sejam mecanicamente similares. Se em X e Y forem utilizados os mesmos fluidos, submetidos ao mesmo valor de g , é fácil verificar que $\sqrt{L_Y} V_X = \sqrt{L_X} V_Y$ e $L_Y V_X = L_X V_Y$. A solução deste sistema é: $L_X = L_Y$ e $V_X = V_Y$. Portanto, conclui-se que não é possível, para escoamentos geometricamente semelhantes, respeitar a similaridade em sua plenitude. Felizmente, para escoamentos turbulentos, é possível fixar um valor mínimo para o número de Reynolds, Re_0 ,

denominado Reynolds soleira (Pimenta, 1981), e então empregar a semelhança de Froude, com a qual os números de Froude do protótipo e do modelo físico (de X e de Y) devem ser iguais. Ela é válida se $Re_X > Re_Y > Re_0$. Esta prática é possível porque, em escoamentos turbulentos, para $Re > Re_0$, deixa de haver a dependência entre as grandezas físicas e o número de Reynolds. Como exemplo, cabe mencionar o diagrama de Moody e o coeficiente de arrasto para o escoamento externo, em torno de uma esfera. Em ambos os casos, verifica-se que tanto o fator de resistência quanto o coeficiente de arrasto são independentes de Re em certa região do domínio, para $Re > Re_0$.

Escalas de semelhança

Sendo X o protótipo e Y o modelo físico em escala reduzida, a semelhança de Froude possibilita estabelecer relações entre as grandezas físicas relevantes e a escala geométrica λ . Com a igualdade $Fr_X = Fr_Y$, pode-se escrever:

$$\frac{V_X}{V_Y} = \sqrt{\frac{L_X}{L_Y}} = \sqrt{\lambda} \quad (4.179)$$

O mesmo pode ser feito para as demais grandezas, com o auxílio da equação 4.179. Para o tempo, tem-se:

$$\frac{t_X V_X}{L_X} = \frac{t_Y V_Y}{L_Y} \Rightarrow \frac{t_X}{t_Y} = \frac{L_X V_Y}{L_Y V_X} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \quad (4.180)$$

Para as pressões relativas, escreve-se:

$$\frac{p_X - p_0}{p_Y - p_0} = \frac{V_X^2}{V_Y^2} = \lambda \quad (4.181)$$

Para as vazões Q_X e Q_Y , obtém-se:

$$\frac{Q_X}{Q_Y} = \frac{V_X L_X^2}{V_Y L_Y^2} = \lambda^{1/2} \lambda^2 = \lambda^{5/2} \quad (4.182)$$

Os desenvolvimentos precedentes levaram em consideração as forças de inércia, as forças devidas ao campo gravitacional, as forças de pressão e as viscosas. Há problemas para os quais a consideração somente dessas grandezas não é suficiente. Em problemas com superfície livre a tensão superficial é uma grandeza importante como, por exemplo, em escoamentos supercríticos com elevada entrada de ar que ocorrem em vertedores lisos e em degraus e em bacias de dissipação. Neste caso a semelhança de Weber deve ser observada e,

se não puder ser respeitada, deve ficar dentro de limites práticos recomendados na literatura. Este adimensional é proporcional à relação entre as forças de inércia e de tensão superficial, sendo definido como:

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_s} \quad (4.183)$$

em que We = número de Weber e σ_s = tensão superficial. A Tabela 4.1 reúne alguns adimensionais importantes para a Mecânica dos Fluidos e para a Hidráulica.

Tabela 4.1 – Alguns números adimensionais pertencentes à Mecânica dos Fluidos e Hidráulica

Nome	Definição	Descrição
Número de Froude William Froude (1810-1879): foi um engenheiro inglês.	$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$	É importante em escoamentos com superfície livre, como em canais, vertedores de barragens, escoamentos ao redor de embarcações.
Número de Reynolds Osborne Reynolds (1842-1912): engenheiro inglês.	$Re = \rho \frac{VL}{\mu}$	Trata-se de um número adimensional importante para quase todos os fenômenos ligados aos fluidos.
Número de Weber Moritz Weber (1871-1951): professor alemão que aplicou a similaridade aos escoamentos capilares.	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_s}$	Relação entre força inercial e de tensão superficial. É importante em escoamentos capilares e com superfície livre, sobretudo quando há entrada de ar por meio dela.
Número de Euler Leonhard Euler (1797-1783): notável matemático suíço.	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$ ou $Eu = \frac{\Delta p}{0,5\rho V^2}$	Relação entre diferença de pressão e a pressão dinâmica.
Número de Cavitação, também conhecido como número de Leroux.	$\sigma_c = \frac{p - p_v}{\rho V^2}$ ou $\sigma_c = \frac{p - p_v}{0,5\rho V^2}$	p = pressão absoluta e p_v = pressão de vapor. É importante em escoamentos em sistemas elevatórios, em canais de vertedores, etc.
Fator de resistência de Darcy Henry P. G. Darcy (1803-1858): engenheiro francês.	$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$	Fundamental em escoamentos sob pressão e muito utilizado em escoamentos em canais vertedores.
Fator de resistência de Fanning John T. Fanning (1837-1911): engenheiro americano.	$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2}$	Semelhante ao de Darcy-Weisbach. Em alguns países ele é empregado no lugar do primeiro.
Coefficiente de arrasto	$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho AV^2}$	A = área característica. Relação entre força de arrasto e dinâmica. É empregado para avaliar esforços em pilares, aerofólios, etc.
Número de Cauchy Augustin-Louis de Cauchy (1789-1857): foi um matemático e físico notável.	$Ca = \frac{\rho V^2}{K}$	K = módulo de elasticidade volumétrico do fluido.
Número de Mach Ernst Mach (1838-1916): físico austríaco com muitas contribuições em mecânica dos fluidos.	$M = \frac{V}{c}$	c = velocidade do som. É de grande importância em escoamentos compressíveis.
Número de Schmidt	$Sc = \frac{\nu}{D}$	D = difusividade molecular. É um adimensional que envolve propriedades do fluido e representa a relação entre a difusão de quantidade de movimento e a difusão de massa.
Número de Strouhal	$St = \frac{Lf^*}{V}$	f^* é uma frequência relacionada ao fenômeno. Este adimensional compara a frequência do fenômeno com o inverso do tempo característico do escoamento principal.

4.11 Equações de Euler e Bernoulli

Se a equação de Navier-Stokes for simplificada com a hipótese de escoamento ideal, o resultado obtido é a equação de Euler, atribuída ao ilustre matemático Leonhard Euler. Quando foi considerada a condição $Re \rightarrow \infty$, mencionou-se que o resultado obtido é a equação de Euler. A partir daquela equação ou da equação de Navier-Stokes sem o termo relativo aos efeitos viscosos, obtém-se a equação de Euler:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (gz) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.184)$$

Como nos demais casos aqui estudados, a única força de campo considerada é aquela devida ao campo gravitacional. Com o objetivo de discutir a validade da equação de Bernoulli para situações específicas, a sua dedução é iniciada escrevendo-se a aceleração advectiva em termos da vorticidade (ζ_k), como apresentado a seguir:

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = -V_j \varepsilon_{ijk} \zeta_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} V_j^2 \right) \quad (4.185)$$

Substituindo este resultado na equação de Euler, tem-se:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} V_j^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (gz) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = V_j \varepsilon_{ijk} \zeta_k \quad (4.186)$$

Assumindo que a massa específica é função apenas da pressão (condição barotrópica), vem:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{dp}{\rho} \quad (4.187)$$

Substituindo este resultado na equação 4.186, obtém-se:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} V_j^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} \right) = V_j \varepsilon_{ijk} \zeta_k \quad (4.188)$$

Os três termos entre parênteses são grandezas escalares e podem ser interpretados como energia cinética, potencial gravitacional e decorrente da pressão (trabalho realizado pelas forças de pressão), respectivamente, todos por unidade de massa de fluido. Em notação vetorial a equação de Euler pode ser escrita com a forma apresentada a seguir:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla B = \vec{V} \times \vec{\zeta} \quad \therefore B = \frac{1}{2} V^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} \quad (4.189)$$

Para escoamento permanente e linhas de corrente e linhas de vorticidade não coincidentes, a equação anterior passa a ser escrita como:

$$\nabla B = \vec{V} \times \vec{\zeta} \quad (4.190)$$

Nesta equação, para B constante, $\text{grad}(B)$ é um vetor normal à superfície B (ver prova em Chandrasekharaiah e Debnath, 1994). O segundo membro é igual a um vetor perpendicular a \vec{V} e $\vec{\zeta}$. Deste modo, pode-se concluir que \vec{V} e $\vec{\zeta}$ são tangenciais à superfície B constante. Conclui-se também que as linhas de corrente e linhas de vorticidade se cruzam em uma superfície B constante. Isto equivale a dizer que B é constante ao longo de linhas de corrente e de vorticidade. Uma superfície com B constante e coberta por uma malha formada por linhas de corrente e de vorticidade recebe o nome de superfície de Lamb em homenagem ao físico e matemático Sir Horace Lamb (1849-1934) (Lamb, 1879).

$$V^2/2 + gz + p/\rho = C \quad (4.191)$$

em que C é uma constante sobre linhas de corrente e de vorticidade, neste caso. Se o escoamento for irrotacional e a massa específica dependente da pressão, obtém-se:

$$V^2/2 + gz + \int dp/\rho = C_{\{\text{qualquer ponto}\}} \quad (4.192)$$

A equação 4.191 pode ser aplicada sobre uma linha de corrente e, em geral, o valor da constante C é diferente para diferentes linhas de corrente. No segundo caso (equação 4.192), que corresponde à condição de vorticidade nula no campo de escoamento, o valor da constante C permanece igual para todas as linhas de corrente e, portanto, a equação de Bernoulli pode ser aplicada transversalmente às linhas de corrente. Em outras palavras, se o escoamento for irrotacional, a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer do escoamento. Um exemplo de escoamento rotacional que possui linhas de corrente com valores de C diferentes e efeitos viscosos nulos é o conhecido escoamento de corpo rígido estabelecido no interior de um recipiente cilíndrico (desde que o regime seja permanente). Adicionalmente, considera-se válido listar as hipóteses que restringem o uso desta equação: (1) escoamento em regime permanente; (2) escoamento com efeitos viscosos desprezíveis; (3) ausência de trabalho de eixo; (4) escoamento incompressível (eq. 4.191); (5) escoamento sem transferência de calor e (6) escoamento ao longo de uma linha de corrente (equação 4.191).

4.12 Escoamentos multifásicos

4.12.1 Introdução

Neste trabalho, os escoamentos em vertedores e canais em degraus são estudados numericamente através de soluções de equações escritas para escoamentos multifásicos.

Um escoamento multifásico é aquele em que há mais de um fluido presente. Os fluidos podem ser diferentes espécies químicas, como ocorre em grande parte dos casos, ou diferentes estados termodinâmicos de uma mesma espécie. Um exemplo típico para este caso é o fenômeno da cavitação, que inclui o escoamento de água no estado líquido e bolhas de vapor de água. Cabe destacar aqui a diferença entre um escoamento multicomponente e um escoamento multifásico. No primeiro caso assume-se a existência de uma mistura entre fluidos em uma escala molecular e no segundo caso é considerada uma mistura macroscópica, correspondente a uma escala muito maior do que a molecular. A mistura multicomponente em escoamento compartilha um único campo de velocidades, temperaturas, etc. (ver a dedução da equação de conservação de massa para uma espécie, apresentada no item 4.6, que inclui uma importante hipótese vinculada ao campo de velocidades). O escoamento multifásico requer a solução de campos para cada fase em escoamento. Exemplos de escoamentos multifásicos são: escoamento ar-água, com bolhas de ar presentes na água ou gotas de água presentes no ar, fluidos imiscíveis (óleo-água), entre outros. Quando são resolvidos os campos para cada um dos fluidos há forças interfaciais a serem consideradas nos cálculos e fenômenos de transferências entre as fases (calor, massa e quantidade de movimento). As noções de escoamentos multifásicos e multicomponentes podem ser conectadas com o intuito de modelar um dado problema. Em situações desse tipo há o escoamento de duas ou mais fases, sendo que cada uma delas pode ser composta por mais de uma espécie. Como exemplo, cabe citar mais uma vez o escoamento bifásico ar-água. Durante o tempo de residência das bolhas de ar na água pode ocorrer a troca de moléculas de O_2 (entre outras) entre as fases por meio da interface ar-água, como ilustrado na Figura 4.14. Ou seja, o oxigênio se dissolve na água. Uma imagem mais física pode ser considerada utilizando o açúcar não dissolvido em uma xícara de água (multifásico sólido-líquido) e o açúcar já dissolvido na mesma xícara de água (multicomponente na fase líquida).

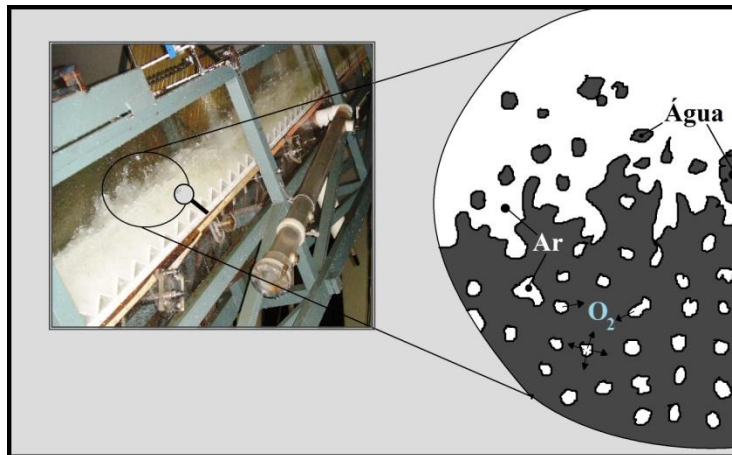


Figura 4.14 – escoamento multifásico – multicomponente ar-água.

O escoamento composto por diferentes fases pode ser representado matematicamente com o uso de diferentes estratégias. Uma das mais utilizadas em softwares comerciais é a representação do tipo euleriano-euleriano. Há também softwares desenvolvidos com modelos lagrangeanos, como o software livre SPHysics. Este tipo de abordagem é capaz de simular escoamentos com aspectos extremamente realísticos, incluindo facilmente o tombamento de ondas e formação de gotas. Uma terceira alternativa consiste em combinar os dois pontos de vista. Alamy Filho (2006) desenvolveu códigos capazes de resolver problemas de sedimentação e ressuspensão em canais. Nesses códigos o autor utilizou a simulação de grandes escalas para representação da turbulência e o fundo do canal representado por meio do ponto de vista lagrangeano, de tal maneira que a sua forma evolui em função da sedimentação e ressuspensão, modelados matematicamente com a equação de conservação de massa para uma espécie associada a um modelo analítico para a velocidade de sedimentação.

Existem modelos multifásicos homogêneos e não-homogêneos. O modelo homogêneo tem como premissa fundamental o compartilhamento dos campos entre as fases. Para um determinado processo de transporte, o modelo homogêneo assume que as quantidades escalares transportadas são as mesmas para todas as fases, com exceção da fração volumétrica. No modelo não-homogêneo apenas o campo de pressões é compartilhado pelos fluidos e a interação entre eles é realizada através de termos de transferência interfacial. A seguir são apresentados alguns detalhes sobre estes tipos de abordagem. Como referências empregadas para elaboração deste, cita-se Bennon e Incropera (1987), Iguchi e Ilegbusi (2011) e o tutorial do software ANSYS CFX[®].

4.12.2 Modelo não-homogêneo: Definições básicas

A fração volumétrica de uma determinada fase é denotada por “r”, sendo utilizado um símbolo grego subscrito para indicar a fase. r_α , por exemplo, representa a fração da fase α , isto é, sendo Vol_α o volume de “ α ” presente em um pequeno volume Vol , tem-se: $r_\alpha = \text{Vol}_\alpha/\text{Vol}$. Considerando a existência de uma única fase, define-se a densidade do material de forma tradicional: $\rho_\alpha = \text{massa por unidade de volume}$. A densidade efetiva, denotada com o uso de um til sobre a letra ρ , é definida como:

$$\tilde{\rho}_\alpha = r_\alpha \rho_\alpha \quad (4.193)$$

A definição da equação 4.193 corresponde à razão entre a massa de α e o volume total V , assim como se define concentração. Uma terceira definição vinculada às possíveis densidades em um escoamento multifásico é a densidade da mistura (ρ_m), definida como:

$$\rho_m = \sum_\alpha r_\alpha \rho_\alpha \quad (4.194)$$

A equação 4.194 representa a soma das massas das diferentes fases dividida pelo volume total. A pressão total em escoamentos multifásicos é definida da seguinte forma:

$$p_t = p_e + \frac{1}{2} \sum_\alpha r_\alpha \rho_\alpha \bar{V}_\alpha^2 \quad (4.195)$$

As trocas interfaciais de quantidade de movimento, calor e massa são dependentes da superfície de contato entre duas fases. Com o intuito de caracterizar tal superfície de contato, utiliza-se uma área interfacial por unidade de volume entre duas fases, denotada por $A_{\alpha\beta}$, sendo esta uma grandeza com unidade de comprimento elevado a -1. A transferência interfacial pode ser modelada utilizando o Modelo de Mistura, o Modelo de Partículas ou o Modelo de Superfície Livre. Tais opções fornecem diferentes meios de calcular $A_{\alpha\beta}$ com o uso de equações algébricas.

Modelo de partículas

O modelo de partículas assume que umas das fases é contínua (fase α) e a outra é dispersa (fase β). Este modelo carrega a hipótese de que a fase dispersa é composta por partículas esféricas com diâmetro médio d_β . Sendo assim, a densidade de área interfacial é definida da seguinte maneira:

$$A_{\alpha\beta} = r_{\beta} \frac{6d_{\beta}^2}{d_{\beta}^3} = r_{\beta} \frac{6}{d_{\beta}} \quad (4.196)$$

A equação 4.196 é escrita para um volume Vol que contém a fase α e a fase β , sendo que a fase β está presente por meio de esferas de diferentes diâmetros (no caso mais geral) com um valor médio definido por d_{β} . Duas estratégias são adotadas para conferir certa robustez ao modelo: (1) define-se um valor mínimo para a fração r_{β} com o intuito de evitar que a densidade de área interfacial seja igual a zero e, (2) para valores elevados de r_{β} a hipótese de fase dispersa é inválida. Neste caso a densidade de área deve diminuir para refletir o fato de que ela tende a zero quando r_{β} tende a unidade. Matematicamente essas modificações assumem a seguinte forma (no software CFX):

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} = \tilde{r}_{\beta} \frac{6}{d_{\beta}} \\ \tilde{r}_{\beta} = \max(r_{\beta}, r_{\min}) \text{ se } r_{\beta} < r_{\max} \\ \tilde{r}_{\beta} = \max\left(\frac{1-r_{\beta}}{1-r_{\max}} r_{\max}, r_{\min}\right) \text{ se } r_{\beta} > r_{\max} \end{cases} \quad (4.197)$$

Como padrão, no software CFX, os valores máximo e mínimo da fração volumétrica (r) são 0,8 e 10^{-7} , respectivamente. É possível formular o problema de tal maneira que r_{\min} seja nulo. Para casos sem forças de arrasto, pode-se utilizar uma formulação ligeiramente diferente para a densidade de área que recebe o nome “*Unclipped Interfacial Area*”. Para tal equacionamento a densidade de área pode ser nula, ou seja, $r_{\min} = 0$. Além disto, a densidade de área interfacial é reduzida mais agressivamente à medida que a fração volumétrica da fase dispersa se torna maior. O equacionamento para esta situação é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{\text{unclipped}} &= \varphi A_{\alpha\beta} \\ \varphi &= \left(\frac{1-r_{\beta}}{1-r_{\beta}'}\right)^n \\ r_{\beta}' &= \begin{cases} r_{\beta} & \text{Se } r_{\beta} \leq 0,25 \\ 0,393855 - 0,57142r_{\beta} & \text{Se } 0,25 < r_{\beta} \leq 0,6 \\ 0,05 & \text{Para os demais} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.198)$$

O valor de n é igual a 5 como padrão no referido software. Com o uso do diâmetro médio das partículas e das propriedades contínuas de cada fase, é possível escrever o número de Reynolds e o número de Prandtl da seguinte maneira:

$$\text{Re}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha} \left| \vec{V}_{\beta} - \vec{V}_{\alpha} \right| d_{\beta} / \mu_{\alpha} \quad (4.199)$$

$$\text{Pr}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha} C_{p\alpha} / \lambda_{\alpha} \quad (4.200)$$

Em que: μ_{α} = viscosidade da fase contínua, $C_{p\alpha}$ = capacidade térmica específica da fase contínua e λ_{α} = condutividade térmica da fase contínua.

Modelo de mistura

O modelo de mistura considera as fases de forma simétrica de tal maneira que a densidade de área por unidade de volume é representada pela seguinte equação:

$$A_{\alpha\beta} = r_{\alpha} r_{\beta} / d_{\alpha\beta} \quad (4.201)$$

Nota-se que nesta definição há uma nova variável, $d_{\alpha\beta}$, que é o comprimento de escala interfacial. Em problemas para os quais uma das frações volumétricas é muito pequena (próxima de zero), utiliza-se a seguinte formulação:

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} = 6r_{\alpha} r_{\beta} / (r_{\alpha} d_{\beta} + r_{\beta} d_{\alpha}) \\ d_{\alpha\beta} = (r_{\alpha} d_{\beta} + r_{\beta} d_{\alpha}) / 6 \end{cases} \quad (4.202)$$

Os mesmos adimensionais apresentados no sub-modelo de partículas aparecem com as seguintes definições:

$$\text{Re}_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} \left| \vec{V}_{\beta} - \vec{V}_{\alpha} \right| d_{\alpha\beta} / \mu_{\alpha\beta} \quad (4.203)$$

$$\text{Pr}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} C_{p\alpha\beta} / \lambda_{\alpha\beta} \quad (4.204)$$

Diferente do modelo de quando uma das fases é dispersa, as grandezas físicas agora correspondem à mistura. A densidade, por exemplo, é calculada por: $\rho_{\alpha\beta} = r_{\alpha} \rho_{\alpha} + r_{\beta} \rho_{\beta}$. $\mu_{\alpha\beta}$, $C_{p\alpha\beta}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$ são, respectivamente, a viscosidade da mistura, a capacidade térmica específica da mistura e condutividade térmica da mistura.

Modelo de superfície livre

Este sub-modelo pertence ao tratamento não-homogêneo do problema multifásico e busca uma solução para a interface entre os fluidos. Havendo dois fluidos apenas, a densidade de área interfacial por unidade de volume é modelada pela seguinte equação:

$$A_{\alpha\beta} = |\nabla r_\alpha| \quad (4.205)$$

A generalização para mais de duas fases assume a seguinte forma:

$$A_{\alpha\beta} = 2|\nabla r_\alpha||\nabla r_\beta| / (|\nabla r_\alpha| + |\nabla r_\beta|) \quad (4.206)$$

4.12.3 Modelo não-homogêneo: Equações de conservação

Equação da continuidade

A equação da continuidade do modelo não-homogêneo mantém algumas semelhanças com a equação da continuidade para um único fluido em escoamento, como pode ser visto a seguir. Nota-se que a primeira diferença está na inclusão da fração volumétrica no primeiro membro. Como há interação entre as fases, é possível que ocorra transferência de massa através da interface. Deste modo, são adicionados termos de taxa de transferência de massa por unidade de volume entre fases. Além disto, utiliza-se um termo fonte que possibilita a definição de fontes e sumidouros para problemas específicos. A equação da continuidade para o modelo homogêneo é semelhante à equação para o modelo não-homogêneo, exceto pela velocidade, que não é específica para cada fase e sim compartilhada com todas as fases.

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha \vec{V}_\alpha) = S_{MS\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_p} \Gamma_{\alpha\beta} \quad (4.207)$$

em que $S_{MS\alpha}$ é um termo fonte e $\Gamma_{\alpha\beta}$ é a taxa de transferência de massa por unidade de volume desde a fase β até a fase α . Esse termo só existe se houver transferência de massa pela interface.

Equação de conservação de volume

A primeira relação básica de conservação estabelece que a somatória das frações volumétricas de cada fase é igual à unidade:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha = 1 \quad (4.208)$$

A equação 4.208 pode ser combinada com a equação da continuidade (equação 4.207) para obtenção da seguinte equação para conservação de volume:

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t}(r_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha \vec{V}_\alpha) \right) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_\alpha} \left(S_{MS\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_p} \Gamma_{\alpha\beta} \right) \quad (4.209)$$

Considerando o caso incompressível e a ausência de termos fonte, a equação anterior assume a forma apresentada a seguir. Nota-se que ela é semelhante à equação da continuidade para uma fase e escoamento incompressível.

$$\sum_{\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}) = 0 \quad (4.210)$$

Quantidade de movimento linear

A equação de quantidade de movimento pertencente ao modelo não-homogêneo, ou equação de Navier-Stokes, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r}_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}) + \nabla \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}) = & -\mathbf{r}_{\alpha} \nabla p_{\alpha} + \nabla \cdot \left(\mathbf{r}_{\alpha} \mu_{\alpha} \left(\nabla \vec{V}_{\alpha} + (\nabla \vec{V}_{\alpha})^T \right) \right) + \\ & + \sum_{\beta=1}^{N_p} (\Gamma_{\alpha\beta}^+ \vec{V}_{\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^+ \vec{V}_{\alpha}) + S_{M\alpha} + M_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.211)$$

em que $S_{M\alpha}$ é um termo fonte que representa forças de campo externas e fontes e sumidouros definidos para problemas específicos; M_{α} corresponde às forças interfaciais atuando na fase α devido à presença das demais fases; o termo $(\Gamma_{\alpha\beta}^+ \vec{V}_{\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^+ \vec{V}_{\alpha})$ surge devido à transferência de quantidade de movimento entre fases devido à transferência de massa entre as fases.

Fechamento do sistema de equações

Para fechamento do sistema de equações, o campo de pressões é compartilhado por todas as fases, ou seja, $p_{\alpha} = p$ para todos os valores de α . O sistema completo de equações possui $4N_p + 1$ equações e $5N_p$ incógnitas. Para duas fases, por exemplo, há 9 equações (duas para continuidade, seis para quantidade de movimento e uma para conservação de volume) e 10 incógnitas (duas frações volumétricas, seis componentes de velocidades e duas pressões). Se for estabelecido que $p_{\alpha} = p$, tem-se mais uma equação e o sistema pode ser resolvido.

4.12.4 Modelo Homogêneo

A premissa básica do modelo homogêneo é o compartilhamento dos campos entre as fases. Para um determinado processo de transporte, o modelo homogêneo assume que as quantidades escalares transportadas são as mesmas para todas as fases, com exceção da fração volumétrica. Em outros termos, sendo ϕ uma quantidade escalar genérica, α o índice para contar as fases e N_p o número total de fases, escreve-se:

$$\phi_\alpha = \phi, 1 \leq \alpha \leq N_p \quad (4.212)$$

Uma vez que há compartilhamento das quantidades transportadas no modelo homogêneo, utiliza-se uma equação geral para resolver os campos compartilhados no lugar de resolver equações de transporte correspondentes a cada fase. A equação única mencionada pode ser deduzida pela soma das equações de transporte de cada fase, obtendo-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\vec{V}\phi - \Gamma\nabla\phi) = S \quad (4.213)$$

em que

$$\begin{cases} \rho = \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \rho_\alpha \\ \vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \rho_\alpha \vec{V}_\alpha \\ \Gamma = \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \Gamma_\alpha \end{cases} \quad (4.214)$$

Quantidade de movimento linear

Como mencionado anteriormente, o modelo homogêneo assume que $V_\alpha = V$ para todas as fases α . A equação de conservação do momentum pode ser obtida a partir da equação 4.211, resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^T \right) \right) + S_M \quad (4.215)$$

O termo relativo às forças interfaciais que está presente no modelo não-homogêneo deixa de existir quando os campos são compartilhados. Além disto, o somatório correspondente às trocas de quantidade de movimento induzidos pela troca de massa entre fases,

$$\sum_{\beta=1}^{N_p} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^+ \vec{V} - \Gamma_{\beta\alpha}^+ \vec{V} \right), \text{ é igual a zero anulando-se devido à soma.}$$

As definições dadas pela equação 4.214 são válidas e a viscosidade é calculada com o valor correspondente à mistura:

$$\mu = \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \mu_\alpha \quad (4.216)$$

Demais equações

As equações de conservação de massa e volume são as mesmas do modelo não-homogêneo, porém, com $V_\alpha = V$. O campo de pressões também é compartilhado entre as fases de tal maneira que $p_\alpha = p$.

4.13 Segunda lei da termodinâmica

Como exaustivamente mencionado nos livros citados, a mecânica dos fluidos está fundamentada em conclusões e princípios gerais da mecânica e da termodinâmica clássicas. Apesar disto, a terminologia técnica da área nem sempre ressalta o elo presente entre tais princípios básicos, essencialmente no que diz respeito à geração de entropia e à própria entropia. Seguindo os textos de Bejan (1982), Schulz (2001, 2003) e Kundu e Cohen (2008), esta seção tem como objetivo abordar a segunda lei da termodinâmica e o desenvolvimento teórico da relação entre a geração de entropia e a taxa de dissipação de energia, na forma de trabalho, expondo assim o teorema de Gouy-Stodola. Como fechamento é deduzido um equacionamento diferencial para a taxa de geração de entropia a partir da relação de Gibbs, da equação da continuidade e da primeira lei da termodinâmica, tal como apresentadas anteriormente nas formas diferenciais. Ao escrever a segunda lei da termodinâmica incluindo-a no escopo deste trabalho, junto com as demais equações da mecânica dos fluidos, é introduzida mais uma equação e mais uma variável, a entropia. A intenção principal em abordar este princípio é destacar os conceitos próprios da segunda lei da termodinâmica.

4.13.1 Teorema de Gouy-Stodola

Em estudos sobre escoamentos incompressíveis a entropia nem sempre é analisada de forma explícita como uma grandeza de interesse prático. Apesar disto, é interessante observar que há uma relação entre a geração de entropia e a dissipação de energia. Para iniciar a discussão sobre o tema, uma consequência importante da segunda lei é apresentada, a saber: a desigualdade de Clausius (Rudolf Julius Emanuel Clausius, 1822-1888), estabelecida para um ciclo termodinâmico:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (4.217)$$

O símbolo utilizado na integral indica apenas que a soma é efetuada em um ciclo completo, com início e fim no mesmo ponto arbitrário. O numerador é escrito com um delta minúsculo para enfatizar que não se trata de uma diferencial exata de Q (calor). A aplicação desta equação a diversas trajetórias reversíveis ligando dois pontos conduz à definição da entropia S

como variável de estado (utiliza-se, portanto, uma diferencial exata “dS”), de acordo com a equação apresentada a seguir (que também é utilizada na obtenção da equação de Gibbs, utilizada também para demonstração da equação de Crocco, 1937):

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{reversível}} \quad (4.218)$$

Em casos reais os processos são sempre irreversíveis e a segunda lei é classicamente enunciada como: “a variação da entropia de um sistema é maior ou igual à quantidade de calor a ele transferida, dividida pela temperatura absoluta do sistema” (Schulz, 2003, p.233). Matematicamente, tem-se:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (4.219)$$

A definição de entropia permite concluir que há transferência de entropia através das fronteiras de um sistema sempre que houver transferência de calor. A segunda lei da termodinâmica estabelece, portanto, que quando um sistema passa de um estado 1 para um estado 2, tem-se:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \leq S_2 - S_1 \quad (4.220)$$

Esta relação mostra que quando o sistema passa do estado 1 para o estado 2 a sua entropia aumenta, pois se for considerada a igualdade (processo reversível), a entropia do estado 2 será:

$$S_2 = S_1 + \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (4.221)$$

Observando agora a desigualdade presente na equação é natural que seja introduzida uma parcela correspondente à entropia gerada durante a transição do estado 1 para o 2 (S_{ger}):

$$S_{\text{ger}} = S_2 - S_1 - \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (4.222)$$

Acerca da equação anterior, cabe mencionar que a entropia gerada depende do caminho seguido durante a transição e, portanto, não é uma propriedade do sistema. As equações anteriores estão escritas para análise de sistemas (sistemas fechados em termodinâmica). Com

o intuito de utilizar um ponto de vista euleriano, isto é, uma formulação para volume de controle (ou sistema aberto em termodinâmica), convém trabalhar com a taxa de variação temporal da grandeza extensiva em questão:

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\text{sistema}} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (4.223)$$

O símbolo Q com um ponto denota uma descarga térmica. A entropia pode ser representada na forma integral a partir da sua grandeza intensiva “s” da seguinte maneira:

$$S|_{\text{sistema}} = \iiint_{\text{Vol sistema}} s dm = \iiint_{\text{Vol sistema}} s \rho dVol \quad (4.224)$$

A taxa de variação da entropia do sistema pode ser expressa por meio de uma integral de superfície para levar em conta a não uniformidade do fluxo de calor através das fronteiras do sistema, assim como da temperatura, como apresentado a seguir:

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\text{sistema}} \geq \iint_{SC} \frac{1}{T} \left(\frac{\delta \dot{Q}}{A} \right) dA \quad (4.225)$$

Com a relação estabelecida por meio da expressão anterior, torna-se viável construir um equacionamento euleriano para o problema por meio do teorema do transporte de Reynolds:

$$\iint_{SC} \frac{1}{T} \left(\frac{\delta \dot{Q}}{A} \right) dA \leq \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho s dVol + \iint_{SC} \rho s \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.226)$$

Considerando valores médios nas seções de entrada e saída do volume de controle, a inequação anterior assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq \sum_{\text{entra}} \dot{m} s - \sum_{\text{sai}} \dot{m} s + \frac{\dot{Q}}{T} \quad (4.227)$$

Deve-se notar que o símbolo \dot{m} representa uma descarga (no SI, kg/s). Em palavras, o resultado anterior afirma que a taxa de variação da entropia da massa no interior do volume de controle é maior ou igual ao fluxo de entropia através das superfícies de controle permeáveis à massa mais a parcela correspondente à transferência de calor que pode ocorrer através de toda a superfície de controle. Também é possível definir a taxa de geração de entropia:

$$\dot{S}_{\text{ger}} = \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\dot{Q}}{T} + \sum_{\text{sai}} \dot{m}s - \sum_{\text{entra}} \dot{m}s \geq 0 \quad (4.228)$$

A equação anterior é utilizada para obtenção da relação entre a geração de entropia e a taxa de dissipação de energia, na forma de trabalho. O procedimento para obtenção de tal relação é conhecido como teorema de Gouy-Stodola (Aurel Boreslav Stodola, 1859-1942) e inclui o uso da primeira lei da termodinâmica escrita para volumes de controle com a seguinte forma (considerando valores médios):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.229)$$

em que E é a energia do sistema no interior do volume de controle (cinética mais potencial gravitacional mais interna), h é a entalpia (energia interna, especificamente a energia térmica, somada ao termo correspondente ao trabalho das forças de pressão) e W com um ponto é a potência utilizável do sistema (ou taxa de trabalho).

Eliminando a potência térmica das equações precedentes, obtém-se:

$$\dot{W} \leq \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \frac{\partial}{\partial t} (E - T_0 S) \quad (4.230)$$

Nesta inequação, T_0 é a temperatura do ambiente, em que está imersa a parte do volume de controle por onde penetra o calor e a superfície de controle correspondente. Qualquer alteração de temperatura é considerada como ocorrendo no interior do volume de controle. Fica claro com a expressão anterior que a taxa de trabalho utilizável do sistema possui um limite superior e que a potência máxima corresponde ao sinal de igualdade. A diferença entre as potências máxima e utilizável corresponde à potência utilizável dissipada, isto é:

$$\dot{U} = \dot{W}_{\text{máx}} - \dot{W} \quad (4.231)$$

Pode-se associar 4.229 com 4.230 para o caso de potência máxima, como apresentado a seguir:

$$\dot{W} = \dot{Q} + \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.232)$$

$$\dot{W}_{\text{máx}} = \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \frac{\partial}{\partial t} (E - T_0 S) \quad (4.233)$$

Subtraindo as potências como indicado na equação 4.231 e com T_0 em evidência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{máx}} - \dot{W} &= \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz - T_0 s \right) - \frac{\partial}{\partial t} (E - T_0 S) + \\ &- \left[\dot{Q} + \sum_{\text{entra}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial E}{\partial t} \right] = T_0 \frac{\partial S}{\partial t} - T_0 \sum_{\text{entra}} \dot{m} s + T_0 \sum_{\text{sai}} \dot{m} s - \dot{Q} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\dot{U} = \dot{W}_{\text{máx}} - \dot{W} = T_0 \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \sum_{\text{entra}} \dot{m} s + \sum_{\text{sai}} \dot{m} s - \frac{\dot{Q}}{T_0} \right) \quad (4.234)$$

Percebe-se que a equação anterior contém a definição de entropia gerada (S_{ger}), presente na equação 4.228, fato que permite escrever o seguinte resultado:

$$\dot{U} = T_0 \dot{S}_{\text{ger}} \quad (4.235)$$

Este é o teorema de Gouy-Stodola, que relaciona a potência dissipada com a taxa de geração de entropia no interior do volume de controle. É interessante notar que, para escoamentos com ausência (hipotética) de efeitos viscosos, a potência utilizável é igual à potência máxima e, portanto, a entropia gerada é nula, uma vez que T_0 é diferente de zero para fluidos em escoamento.

4.13.2 Forma diferencial para taxa de geração de entropia

A segunda abordagem aqui apresentada tem como objetivo relacionar a taxa de produção de entropia sob um ponto de vista diferencial a partir da equação de Gibbs. Cabe destacar que o procedimento seguido tem como referência Kundu e Cohen (2008) e que alguns aspectos relevantes sobre a segunda lei da termodinâmica devem ser enunciados antes do início da demonstração almejada. O primeiro deles se refere à equação 4.221, cuja interpretação revela que para um processo reversível e isolado ($\delta Q=0$), a entropia do estado 1 é igual a entropia do estado 2. Considerando processos reais (irreversíveis) e um sistema isolado, a desigualdade de Clausius mostra que a entropia aumenta quando passa de um estado 1 para um estado 2, sendo este acréscimo ocasionado por efeitos viscosos e processos de mistura (S_{ger}). O terceiro aspecto importante afirma que coeficientes relacionados aos transportes moleculares como a viscosidade dinâmica e a condutividade térmica devem ser positivos (caso contrário, ocorreria uma diminuição espontânea da entropia de um sistema isolado). O último ponto destacado é

de grande importância para compreensão do modelo apresentado e pretende refletir sobre uma questão conceitual associada à equação de Gibbs.

A forma diferencial da primeira lei da termodinâmica para um sistema pode ser expressa para um processo internamente reversível da seguinte maneira:

$$\delta Q_{\text{rev}} - \delta W_{\text{rev}} = dE \quad (4.236)$$

em que E é a energia do sistema. Para processos internamente reversíveis, os demais termos podem ser escritos como apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \delta Q_{\text{rev}} = T dS \\ \delta W_{\text{rev}} = p d\text{Vol} \end{cases} \quad (4.237)$$

Combinando estas equações, o resultado obtido é a equação de Gibbs:

$$T ds = du + p d\rho^{-1} \quad (4.238)$$

Embora seja tema básico do escopo da termodinâmica clássica, o último ponto deixado em aberto, julgado aqui como algo importante, se refere à validade das relações de Gibbs. Deve-se notar que a obtenção destas relações foi realizada tendo em mente um processo internamente reversível. Apesar disto, o resultado obtido é válido para processos reversíveis e irreversíveis, pois relaciona propriedades de estado do sistema e, portanto, independentes do processo pelo qual o sistema passa. Observando que $d\rho^{-1} = -\rho^{-2} d\rho$, a equação de Gibbs pode ser escrita como:

$$T ds = du - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (4.239)$$

Deste modo, a taxa de variação da entropia pode ser obtida por meio da derivada material, como apresentado a seguir:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{Du}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.240)$$

A derivada material da massa específica é determinada por meio da equação diferencial da conservação da massa e a derivada material da energia interna é avaliada com a equação da energia, deduzida a partir da 1ª lei da termodinâmica.

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.241)$$

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi = \rho \frac{Du}{Dt} + p(\nabla \cdot \vec{V}) \quad (4.242)$$

Substituindo estas equações na equação 4.240 e utilizando o vetor fluxo de calor no lugar de $k\nabla T$, vem:

$$T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \dot{q} + \frac{\Phi}{\rho} - \frac{p}{\rho} (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \dot{q} + \frac{\Phi}{\rho} \Rightarrow \rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \dot{q} + \frac{\Phi}{T}$$

Pode-se demonstrar que:

$$-\frac{1}{T} \nabla \cdot \dot{q} = -\nabla \cdot \left(\frac{\dot{q}}{T} \right) - \frac{\dot{q}}{T^2} \nabla T$$

Combinando estes resultados e voltando a utilizar a lei de Fourier para condução de calor, obtém-se:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\dot{q}}{T} \right) + \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{\Phi}{T} \quad (4.243)$$

Em notação tensorial, escreve-se:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\dot{q}_i}{T} \right) + \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\Phi}{T} \quad (4.244)$$

O primeiro termo do segundo membro desta equação corresponde ao ganho de entropia reversível ocasionado pela transferência de calor, pois não contém a condutividade térmica. Os dois últimos termos representam a produção de entropia originada da condução de calor e dos efeitos viscosos, lembrando que:

$$\Phi = \tau \nabla \cdot \vec{V} = \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Vale ainda destacar uma consequência importante deste desenvolvimento. A segunda lei da termodinâmica exige que a geração de entropia seja positiva, o que implica k e μ sempre positivos. Finalmente, nota-se que se o escoamento for considerado como ideal e sem condução de calor a entropia é conservada ao longo das trajetórias das partículas de fluido.

4.14 Conservação de vorticidade e circulação

Neste item são expostos alguns comentários acerca do comportamento de vórtices a partir do exame dos teoremas de Hermann von Helmholtz (1821-1894) e de Kelvin (William Thomson, 1824-1907). Esses teoremas se referem a linhas de vórtice que, assim como linhas de corrente, são linhas que tangenciadas em todos os seus pontos pelo vetor rotação, num dado instante. Também é possível encontrar a terminologia filamento de vórtice e, se um conjunto de filamentos de vórtices tangentes a uma curva fechada contida em um escoamento é representado, define-se o tubo de vorticidade (assim como existe o tubo de corrente) ou tubo vorticoso. Uma superfície formada por linhas de vorticidade localmente paralelas é chamada de superfície de vorticidade. Teoremas atribuídos a Helmholtz, válidos para massa específica constante e escoamento ideal, são (Kundu e Kohen, 2008, p.149):

- (1) Um tubo de vorticidade não possui uma extremidade final no interior do fluido. Ele deve se estender para o infinito, terminar em uma parede sólida ou formar uma superfície fechada sobre si mesmo.
- (2) A intensidade de um tubo de vorticidade é uniforme ao longo de sua extensão, isto é, a circulação não varia ao longo do tubo de vorticidade. Tal afirmação é consequência do teorema 1, já que se a força variar ao longo do tubo de vorticidade ele pode começar ou terminar no interior do fluido.
- (3) Qualquer linha de vórtice é formada pelas mesmas partículas de fluido, ou seja, ela move-se com o fluido.

Para as mesmas condições (ρ =constante e $\mu=0$), o teorema de Kelvin (Thomson, 1869) afirma que em um escoamento ideal e barotrópico com forças de campo conservativas, a circulação (Γ) ao longo de uma curva fechada movendo-se de acordo com o fluido não varia com o tempo. Matematicamente isto significa que a derivada material da circulação é nula:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \\ \text{em que : } \Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{x} \end{array} \right. \quad (4.245)$$

A prova deste teorema é apresentada de duas maneiras diferentes. A primeira pode ser obtida a partir da definição de vorticidade e de algumas operações algébricas, como apresentado a seguir:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C V_i dx_i = \oint_C \frac{DV_i}{Dt} dx_i + \oint_C V_i \frac{Ddx_i}{Dt} \quad (4.246)$$

em que dx é a distância entre dois pontos sobre a curva C . A partir da equação de Cauchy, pode-se escrever:

$$\frac{DV_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} \Rightarrow \oint_C \frac{DV_i}{Dt} dx_i = \oint_C \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} \right] dx_i \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{DV_i}{Dt} dx_i = -\oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C g_i dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} dx_i$$

Combinando este resultado com a equação 4.246, obtém-se:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C g_i dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} dx_i + \oint_C V_i \frac{Ddx_i}{Dt} \quad (4.247)$$

Após o desenvolvimento da equação anterior, resta mostrar que os termos do segundo membro são nulos. Assume-se que a força de campo é conservativa, de forma que $g_i = -\nabla \Pi$, em que Π é uma força potencial ou energia potencial por unidade de massa (gz, assim como utilizado na dedução da equação de Bernoulli). Pode-se agora calcular a integral de linha de g ao longo da linha de fluido AB :

$$\oint_C g_i dx_i = -\int_A^B \nabla \Pi \cdot dx = -\int_A^B d\Pi = \overbrace{\Pi_A - \Pi_B}^{A=B} = 0$$

Já que a integração anterior foi realizada ao longo de uma linha fechada, os pontos A e B coincidem e, portanto, o resultado anterior é igual a zero. O próximo passo em direção à prova do teorema leva em consideração a hipótese de fluido barotrópico. Com o objetivo de provar que a primeira integral da equação 4.247 é igual a zero, é empregado um artifício matemático que considera $P = p/\rho$. Derivando a variável P em relação a p , obtém-se $dP/dp = \rho^{-1}$. Substituindo este resultado na integral:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \int_A^B \frac{dP}{dp} dp = P_B - P_A = 0$$

Esta igualdade decorre da condição atrelada à integração, assim como no caso anterior. A hipótese de escoamento ideal anula a integral que envolve o tensor viscoso. Para mostrar que a última integral é nula, considera-se que a velocidade na posição $x+dx$ sobre a curva C é:

$$\cancel{V_i} + dV_i = \frac{D}{Dt} (x_i + dx_i) = \cancel{\frac{Dx_i}{Dt}} + \frac{D}{Dt} (dx_i) \Rightarrow$$

$$dV_i = \frac{D}{Dt} (dx_i) \Rightarrow \oint_C V_i \frac{D(dx_i)}{Dt} = \oint_C V_i dV_i = \oint_C d\left(\frac{1}{2} V_i^2\right) = 0$$

Uma segunda maneira de provar o teorema da circulação de Kelvin consiste inicialmente em verificar que é verdadeira a seguinte igualdade:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{x}$$

Observando a equação 4.246 e o último resultado da prova 1, fica demonstrada a igualdade anterior. Pode-se também escrever a seguinte relação:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \left[\frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{x} + (\nabla\vec{V})^T \vec{V} \cdot d\vec{x} \right]$$

A dedução desta equação pode ser encontrada em Chandrasekharaiah e Debnath (1994).

Empregando a identidade $(\nabla\vec{V})^T \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})$, vem:

$$\oint_C (\nabla\vec{V})^T \vec{V} \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} \oint_C \nabla(V^2) \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} \oint_C dV^2 = 0$$

Portanto, fica demonstrada mais uma vez a validade do ponto de partida para a segunda forma de provar o teorema de Kelvin. Utilizando um pouco de formalismo para enunciar o teorema a ser provado, pode-se escrever:

Teorema. *Se a aceleração DV_i/Dt é o gradiente de um potencial, a circulação ao redor da curva material permanece constante no tempo.*

Prova. Seja ϕ um tensor de ordem zero, uma vez que $DV_i/Dt = \text{grad}(\phi)$, é verdade que:

$$\oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{x} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{x} = \oint_C d\phi = 0$$

Portanto, fica demonstrada a equação 4.245, que representa o teorema de Kelvin. ■

De acordo com o teorema de Cauchy-Lagrange, se um escoamento como aquele para o qual é válido o teorema de Kelvin é inicialmente irrotacional, ele permanecerá assim ao longo de toda a sua história. Entretanto, para escoamentos reais, alguns agentes são capazes de criar ou destruir a vorticidade, como, por exemplo, forças de campo não conservativas (forças de Coriolis, por exemplo), relações entre pressão e massa específica não barotrópicas e tensões viscosas. Para finalizar esta breve exposição sobre vorticidade e circulação, é considerada a

equação de Navier-Stokes para o caso incompressível e isotérmico. Se for aplicado o operador rotacional sobre os termos da equação de Navier-Stokes, pode-se demonstrar que:

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta} = \nabla \rho^{-1} \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (4.248)$$

em que $\vec{\zeta}$ é a vorticidade, definida como o produto vetorial entre o operador del e o vetor velocidade (rotacional do campo de velocidades). Com o intuito de elucidar as causas da variação temporal da vorticidade, pode-se interpretar os demais termos presentes na equação 4.248 (Batchelor, 2000, p.264; Vanyo, 1993, p.164-165; Kundu e Kohen, 2008, p.150-151):

- (1) $-(\mathbf{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta}$: este termo corresponde ao transporte advectivo de vorticidade que ocorre através das superfícies permeáveis do volume de controle infinitesimal (ponto) considerado, causado pela existência do campo de velocidades. Ele inclui alongamentos e inclinações nas linhas de vórtice;
- (2) $\nabla \rho^{-1} \times \nabla p$: uma vez que o rotacional do gradiente de um campo escalar é igual a zero, para a condição de massa específica constante este termo é nulo. Se superfícies de massa específica não forem paralelas a superfícies de pressão surge um torque e este termo não é igual a zero;
- (3) $\nabla \times \mathbf{g}$: este termo é igual a zero para forças conservativas (ver demonstração do teorema de Kelvin). Algumas forças magnéticas e elétricas não são conservativas e podem produzir ou modificar a vorticidade em fluidos magnéticos ou condutores;
- (4) $\nu \nabla^2 \vec{\zeta}$: este termo representa a taxa de mudança na vorticidade ocasionada pela difusão de vorticidade assim como o seu termo correspondente na equação de N-S representa a difusão de quantidade de movimento linear.

Referências que abordam este tema e que foram utilizadas para este item são Batchelor (2000), White (2006), Chandrasekharaiah e Debnath (1994), White (2002), Vanyo (1993) e Kundu e Cohen (2008).

4.15 Teoria da camada limite: uma breve apresentação

A partir do final do século XIX a mecânica dos fluidos começou a ser desenvolvida de duas maneiras distintas. Um desses ramos era a hidrodinâmica teórica, fundamentada na equação de Euler e, conseqüentemente, dedicada aos escoamentos ideais. A segunda parte desta bifurcação, existente graças à necessidade de respostas práticas e rápidas que não eram fornecidas pela teoria, era a hidráulica. Em 1904, Ludwig Prandtl foi capaz de expor³ uma idéia que vinculou a hidrodinâmica teórica com a hidráulica. Com o conceito de camada

³ Em um congresso em Heidelberg, onde apresentou o seu trabalho intitulado “Escoamento de fluidos com cisalhamento muito pequeno” (SCHLICHTING, 1979, p. 1; SCHULZ, 2003, p. 130).

limite, Prandtl mostrou que, considerando a influência da viscosidade no interior de uma camada delgada nas proximidades das superfícies delimitadoras dos escoamentos (que podem ser sólidas ou não), resultados experimentais apresentavam excelente concordância com a teoria. Estudos relacionados à camada limite formam atualmente uma especialização da mecânica dos fluidos, cuja complexidade e quantidade de informações seguramente exige a existência de tratados específicos sobre o tema, a exemplo do clássico escrito pelo professor Hermann Schlichting, *Boundary-Layer Theory*. Neste texto são apresentados apenas dois desenvolvimentos. O primeiro deles é válido para o escoamento laminar em uma placa plana semi-infinita, solução atribuída a Blasius (1908). O segundo desenvolvimento conduz a uma formulação integral proposta por von Kármán que requer a introdução de um perfil de velocidades para ser utilizada. Trata-se de um caminho interessante do ponto de vista prático, pois pode ser empregado tanto para escoamentos turbulentos quanto para escoamentos laminares.

4.15.1 Solução de Blasius (1908)

A solução de Blasius (1908) está fundamentada nas equações de Navier-Stokes escritas com algumas simplificações, enunciadas a seguir:

- 1) Escoamento sobre placa plana semi-infinita, onde o escoamento é assumido como bidimensional (ao longo da placa e normal a ela);
- 2) O escoamento ocorre em regime permanente;
- 3) O escoamento é incompressível;
- 4) Não há gradiente de pressões (não há variação de pressão ao longo do comprimento da placa, pois a velocidade do escoamento potencial se mantém constante);
- 5) O escoamento é isotérmico (μ é uma constante).

Com estas hipóteses, as equações de Navier-Stokes e a equação de conservação da massa são escritas da seguinte maneira:

Direção 1 (ao longo da placa):

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.249)$$

Direção 2 (normal à placa):

$$V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.250)$$

Continuidade:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.251)$$

Algumas considerações adicionais são necessárias para obtenção da solução proposta por Blasius. Sendo a camada limite laminar suficientemente delgada, considera-se que a componente da velocidade na direção 2 é muito menor do que a componente na direção 1. Considera-se também que a componente na direção 2 do gradiente da velocidade V_1 é muito maior do que a componente do gradiente na direção 1. Como consequência, a equação 4.249 é simplificada com a exclusão do termo difusivo que envolve a variação de V_1 com x_1 , uma vez que este termo é muito menor do que aquele que envolve a variação de V_1 com x_2 . Já os termos do primeiro membro permanecem, pois eles possuem a mesma ordem de grandeza uma vez que são formados pela multiplicação de fatores com valores elevados e pequenos. Ao considerar que V_2 é muito pequena, a equação 4.250 revela que a variação de pressão na direção 2 é igual a zero porque os demais termos são anulados. Após estas simplificações, as equações assumem as seguintes formas:

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.252)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.253)$$

O próximo passo para obtenção da solução proposta por Blasius consiste em empregar a função corrente (ψ) como ferramenta matemática da seguinte maneira:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ V_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} \quad (4.254)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (4.255)$$

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2^3} \quad (4.256)$$

A equação 4.256 é uma equação diferencial parcial não linear e de terceira ordem. Com o objetivo de resolver o problema matemático, Blasius propôs o uso de adimensionais que

transformam a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária. Tais adimensionais são:

$$\begin{cases} \eta = x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} \\ f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x_1 V_\infty}} \end{cases} \quad (4.257)$$

A velocidade com o subscrito infinito representa a velocidade na região fora da camada limite (escoamento potencial) e no lugar da relação entre a viscosidade dinâmica e a massa específica foi utilizada a viscosidade cinemática. Finalmente, com regras simples de diferenciação parcial, é possível efetuar a transformação mencionada. Para tanto, procura-se obter os termos presentes na equação 4.256 da seguinte maneira:

$$\frac{\overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}^A}{\partial x_2} \frac{\overbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}}^B}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}^C}{\partial x_1} \frac{\overbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}}^D}{\partial x_2^2} = \frac{\overbrace{\mu}{\rho}}{\rho} \frac{\overbrace{\partial^3 \psi}{\partial x_2^3}}{\partial x_2^3} \quad (4.258)$$

$$\psi = f(\eta) \sqrt{\nu x_1 V_\infty} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = f(\eta) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x_1}} + \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \sqrt{\nu x_1 V_\infty} \therefore \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = f(\eta) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x_1}} - \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{1}{2} x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1^3}} \sqrt{\nu x_1 V_\infty} = \frac{1}{2} \left[f(\eta) \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x_1}} - \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{x_2 V_\infty}{x_1} \right] \{\text{Termo C}\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \sqrt{\nu x_1 V_\infty} \therefore \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} \sqrt{\nu x_1 V_\infty} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} V_\infty \{\text{Termo A}\}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = V_\infty \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] = V_\infty \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} \{\text{Termo D}\}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x_2^3} = \frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial \eta^3} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} = \frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial \eta^3} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1}} = \frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial \eta^3} \frac{V_\infty^2}{\nu x_1} \{\text{Termo E}\}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} V_\infty = \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} V_\infty = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1^3}} V_\infty \{\text{Termo B}\}$$

Combinando os resultados:

$$[A.B]: -\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} V_\infty \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1^3}} V_\infty = -\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{2} V_\infty^2 x_2 \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x_1^3}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[C.D]:} \quad & \left[-\frac{1}{2}f(\eta)\sqrt{\frac{V_\infty}{x_1}}V_\infty\sqrt{\frac{V_\infty}{vx_1}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}\frac{x_2V_\infty}{x_1}V_\infty\sqrt{\frac{V_\infty}{vx_1}} \right] \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2} = \\
 & = -f(\eta)\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2}\frac{V_\infty^2}{x_1} + \frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2}V_\infty^2x_2\sqrt{\frac{V_\infty}{vx_1^3}}
 \end{aligned}$$

Substituindo na equação 4.256,

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2}V_\infty^2x_2\sqrt{\frac{V_\infty}{vx_1^3}} \right] - f(\eta)\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2}\frac{V_\infty^2}{x_1} + \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2}V_\infty^2x_2\sqrt{\frac{V_\infty}{vx_1^3}} \right] = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial\eta^3}\frac{V_\infty^2}{vx_1} \Rightarrow \\
 & -f(\eta)\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{1}{2} = \frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial\eta^3} \Rightarrow \\
 & \begin{cases} f(\eta)\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + 2\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} = 0 \\ f.f'' + 2.f''' = 0 \end{cases} \quad (4.259)
 \end{aligned}$$

A equação 4.259 é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem que representa a solução proposta por Blasius em sua tese de doutorado. Observando as definições dos adimensionais utilizados, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = V_1 &= \frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}V_\infty \Rightarrow \frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta} = f' = \frac{V_1}{V_\infty} \\
 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -V_2 &= \frac{1}{2}\left[f(\eta)\sqrt{\frac{vV_\infty}{x_1}} - \frac{\partial f(\eta)}{\partial\eta}\frac{x_2V_\infty}{x_1} \right] = \frac{1}{2}f(\eta)\sqrt{\frac{vV_\infty}{x_1}} - \frac{1}{2}\frac{V_1}{V_\infty}\frac{x_2V_\infty}{x_1} \Rightarrow \\
 f(\eta) &= V_1\frac{x_2}{x_1}\sqrt{\frac{x_1}{vV_\infty}} - 2V_2\sqrt{\frac{x_1}{vV_\infty}} = \sqrt{\frac{x_1}{vV_\infty}}\left(V_1\frac{x_2}{x_1} - 2V_2 \right)
 \end{aligned}$$

Para $x_2 = 0$, $V_1 = V_2 = 0$ e para $x_2 \rightarrow \infty$, $V_1 \rightarrow V_\infty$. Deste modo, conclui-se que:

$$\begin{cases} \eta = 0 \Rightarrow f = f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' = 1 \end{cases} \quad (4.260)$$

A equação desenvolvida por Blasius foi solucionada por ele com o uso de uma expansão em série do seguinte tipo (Hughes e Brighton, 1999):

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{\alpha^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{(3n+2)} \quad (4.261)$$

em que $\alpha = 0,332$ e:

$$\{C_0 = C_1 = 1; C_2 = 11; C_3 = 375; C_4 = 27897; C_5 = 3817137 \quad (4.262)$$

Como alternativa ao uso da série anterior, a equação de Blasius pode ser solucionada por meio de um método numérico apropriado, como os de Runge-Kutta, por exemplo, caminho que revela a origem da constante “ α ”, apresentada anteriormente. A concordância entre dados experimentais e a equação de Blasius é excelente, como pode ser visto em Schlichting e Gersten (2000), que apresenta uma comparação com os dados de Nikuradse (1942), e Klewicki *et al.* (2007), no livro editado por Tropea *et al.* (2007, p.889).

4.15.2 Formulação integral (Theodore von Kármán)

A solução de Blasius, discutida brevemente no item anterior, representa um marco de grande importância para a mecânica dos fluidos e, embora seja extremamente satisfatória quando confrontada com experimentos, a sua validade está limitada pelas hipóteses adotadas. Neste item é apresentada a forma integral de equacionar o problema da camada limite, desenvolvida por Theodore von Kármán (que também foi aluno de Ludwig Prandtl), aplicável não só às camadas-limite laminares, mas também para o caso turbulento desde que seja conhecida uma expressão para o perfil de velocidades (pois não há solução exata para camada limite turbulenta). A dedução apresentada é bastante difundida entre os livros de mecânica dos fluidos. Como referência principal, utilizou-se a exposição feita por Fox e McDonald (2001). O seu desenvolvimento considera o escoamento sobre uma placa plana e, apesar de ter um caráter mais geral do que a solução via análise diferencial proposta por Blasius, algumas hipóteses são necessárias:

- 1) O escoamento ocorre em regime permanente (ou permanente em média se o escoamento for turbulento);
- 2) Escoamento incompressível;
- 3) Escoamento bidimensional;
- 4) Ausência de forças de campo paralelas ao eixo x_1 .

Para o desenvolvimento da equação, foi selecionado um volume de controle diferencial no interior da camada limite, como pode ser visto na Figura 4.15 apresentada a seguir. A solução é obtida com o uso das equações integrais de conservação da massa e quantidade de movimento linear escritas para o referido volume de controle. A largura do volume de controle é w (independente de x_1), a espessura da camada limite é δ , a velocidade do escoamento fora da camada limite é V_∞ e há fluxo de massa por bc (pois a fronteira da camada limite não coincide com uma linha de corrente). Além disto, procura-se equacionar o caso que inclui fluxo de massa por ad (injeção ou sucção), tendo sido ilustrada a injeção no desenho apresentado. Não é necessária a hipótese de escoamento laminar, o que faz com que

o resultado seja válido para escoamento laminar ou turbulento. Considera-se também que dp/dx_1 é diferente de zero (o escoamento em um canal, por exemplo, possui gradiente de pressões diferente de zero, ao contrário do escoamento em uma placa plana).

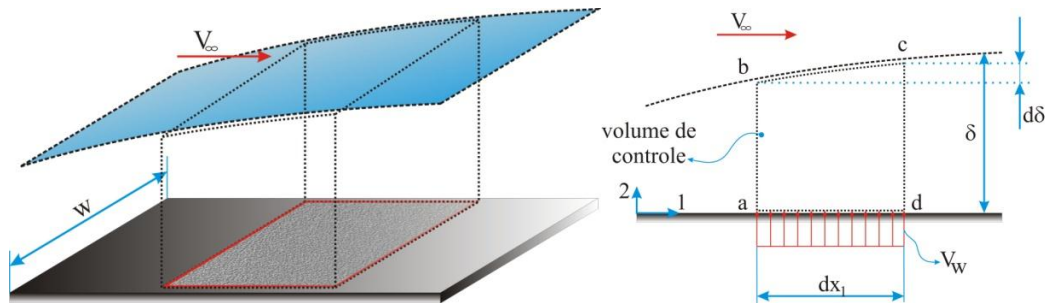


Figura 4.15 - Desenho esquemático com informações utilizadas para obtenção da formulação integral

Parte 1: Conservação de massa

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho dVol + \iint_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.263)$$

Sendo o regime permanente, a equação 4.263 é escrita para as superfícies de controle permeáveis à massa com a seguinte forma:

$$0 = \iint_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd} + \dot{m}_{ad} \quad (4.264)$$

Para a superfície ab a descarga é:

$$\dot{m}_{ab} = -w \int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \quad (4.265)$$

em que w é a largura (independente de x_1) e V_1 a componente x_1 do vetor velocidade. O sinal negativo se deve ao produto escalar.

A superfície de controle cd está situada em uma posição $x_1 + dx_1$. Expandindo a descarga por meio de uma série de Taylor em torno de x_1 e com truncamento no termo de segunda ordem, obtém-se uma expressão para a descarga em cd:

$$\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \frac{\partial \dot{m}_{ab}}{\partial x_1} dx_1 = w \left[\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 \right] \quad (4.266)$$

Considerando que a injeção ou sucção ocorre com um perfil de velocidades uniforme, obtém-se a expressão para a descarga em ad:

$$\dot{m}_{ad} = \pm \rho V_w w dx_1 \quad (4.267)$$

Na equação 4.267 o sinal será negativo se houver injeção de massa no volume de controle e positivo se houver sucção de massa (aqui é considerada a injeção). A descarga através da superfície bc é determinada com as equações 4.264 a 4.267:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{bc} &= -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd} - \dot{m}_{ad} = w \int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 - w \int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 - w \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 + \rho V_w w dx_1 \Rightarrow \\ \dot{m}_{bc} &= -w \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 + \rho V_w w dx_1 \end{aligned} \quad (4.267)$$

Parte 2: Quantidade de movimento

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho \vec{V} dVol + \iint_{SC} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.268)$$

A componente x_1 da equação da quantidade de movimento em regime permanente é:

$$\sum F_x = \iint_{SC} \rho V_1 \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4.269)$$

Os membros da equação 4.269 são avaliados separadamente. Inicialmente, são estudados os termos relativos à taxa de transferência de quantidade de movimento.

a) Transporte de quantidade de movimento:

Através da superfície de controle ab o transporte de quantidade de movimento é:

$$qm_{ab} = -w \int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \quad (4.270)$$

Assim como no caso de conservação da massa, utiliza-se uma expansão em série de Taylor:

$$qm_{cd} = w \left[\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) dx_1 \right] \quad (4.271)$$

Uma vez que a massa que escoar através da superfície de controle bc tem componente de velocidade V_{∞} na direção x_1 , a taxa de transferência de quantidade de movimento em x_1 , através de bc, é dado por:

$$qm_{bc} = V_{\infty} \dot{m}_{bc} = -wV_{\infty} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 - \rho V_w dx_1 \right)}_{\dot{m}_{bc}/w} \quad (4.272)$$

Na equação 4.272 o sinal negativo se deve a descarga bc pois V_{∞} é positivo. Somando os termos, obtém-se a expressão para a taxa de transporte total de quantidade de movimento através das superfícies de controle:

$$\begin{aligned} \iint_{SC} \rho V_1 \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= -w \int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 + w \left[\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) dx_1 \right] - \\ &- wV_{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 - \rho V_w dx_1 \right] \Rightarrow \\ \iint_{SC} \rho V_1 \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= w \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) dx_1 - wV_{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 - \rho V_w dx_1 \right] \end{aligned} \quad (4.273)$$

b) Somatório de forças

Na superfície ab atua uma força devida a pressão p:

$$F_{ab} = pw\delta \quad (4.274)$$

Considera-se que p é função apenas de x_1 , pois a camada limite é delgada, sendo razoável desprezar variações em x_2 . Na superfície cd a força devida a pressão é calculada com uma expansão em série de Taylor como nos casos anteriores:

$$p_{cd} = p + \frac{dp}{dx_1} dx_1 \Rightarrow F_{cd} = - \left(p + \frac{dp}{dx_1} dx_1 \right) w(\delta + d\delta) \quad (4.275)$$

Sobre a superfície bc é considerada uma pressão média:

$$p_{bc} = p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx_1} dx_1 \Rightarrow F_{bc} = \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx_1} dx_1 \right) w d\delta \quad (4.276)$$

Sobre a superfície ad atua uma força de cisalhamento:

$$F_{ad} = - \left(\tau_{21} + \frac{1}{2} d\tau_{21} \right) w dx_1 \quad (4.277)$$

em que τ_{21} é a tensão de cisalhamento sobre a superfície 2 e na direção 1 (com sentido negativo). Assim, o somatório das forças em x_1 é:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_1} &= p w \delta - \left(p + \frac{dp}{dx_1} dx_1 \right) w (\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx_1} dx_1 \right) w d\delta - \left(\tau_{21} + \frac{1}{2} d\tau_{21} \right) w dx_1 = \\ &= \underbrace{p w \delta - p w \delta}_{=0} - p w d\delta - \frac{dp}{dx_1} w \delta dx_1 + \frac{dp}{dx_1} w \underbrace{dx_1 d\delta}_{\frac{dx_1 d\delta}{\delta dx_1} \rightarrow 0} \\ &+ \left(p w d\delta + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx_1} w dx_1 d\delta \right) - \left(\tau_{21} w dx_1 + \frac{1}{2} w d\tau_{21} dx_1 \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum F_{x_1} = -\frac{dp}{dx_1} w \delta dx_1 - \tau_{21} w dx_1 \quad (4.278)$$

Igualando as equações 4.273 e 4.278:

$$-\frac{dp}{dx_1} w \delta dx_1 - \tau_{21} w dx_1 = w \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) dx_1 - w V_\infty \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) dx_1 - \rho V_w dx_1 \right]$$

Dividindo todos os termos pela área $w dx_1$, vem:

$$-\frac{dp}{dx_1} \delta - \tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) - V_\infty \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) - \rho V_w \right]$$

O gradiente de pressão pode ser avaliado com a equação de Euler escrita de forma simplificada como $dp/dx_1 = -\rho V_\infty dV_\infty/dx_1$, para a região de escoamento potencial:

$$\rho V_\infty \frac{dV_\infty}{dx_1} \delta - \tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) - V_\infty \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) - \rho V_w \right] \quad (4.279)$$

Uma vez que:

$\delta = \int_0^{\delta} dx_2$, a equação 4.279 é escrita como:

$$\tau_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 V_1 dx_2 \right) + V_\infty \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^{\delta} \rho V_1 dx_2 \right) - \rho V_\infty V_w + \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^{\delta} \rho V_\infty dx_2 \quad (4.280)$$

Com o intuito de utilizar as definições de espessura de deslocamento (δ^*) e de quantidade de movimento (θ), a equação 4.280 é retrabalhada. Inicialmente informa-se aqui que é possível

demonstrar que $\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 V_\infty dx_2 = \underbrace{V_\infty \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 dx_2}_{\text{igual ao segundo termo do segundo membro da equação 4.280}} + \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho V_1 dx_2$, o que faz com que a

equação 4.280 seja reescrita como:

$$\begin{aligned} \tau_{21} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 V_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 V_\infty dx_2 - \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho V_1 dx_2 - \rho V_\infty V_w + \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho V_\infty dx_2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 (V_\infty - V_1) dx_2 + \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho (V_\infty - V_1) dx_2 - \rho V_\infty V_w = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{V_\infty^2 \int_0^\delta \rho \frac{V_1}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_1}{V_\infty}\right) dx_2}_{\rho\theta} + V_\infty \underbrace{\frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho \left(1 - \frac{V_1}{V_\infty}\right) dx_2}_{\rho\delta^*} - \rho V_\infty V_w \stackrel{\ddagger}{=} \\ \frac{\tau_{21}}{\rho} + V_\infty V_w &= \frac{d}{dx_1} (V_\infty^2 \theta) + V_\infty \frac{dV_\infty}{dx_1} \delta^* \end{aligned} \quad (4.281)$$

A equação 4.281 corresponde ao equacionamento procurado, incluindo injeção de massa devido ao sinal do termo que envolve V_w . Se a injeção (ou sucção) for desconsiderada, as equações 4.280 e 4.281 assumem as formas mais comuns encontradas nos textos básicos:

$$\tau_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 V_1 dx_2 + V_\infty \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta \rho V_1 dx_2 + \frac{dV_\infty}{dx_1} \int_0^\delta \rho V_\infty dx_2 \quad (4.282)$$

$$\frac{\tau_{21}}{\rho} = \frac{d}{dx_1} (V_\infty^2 \theta) + V_\infty \frac{dV_\infty}{dx_1} \delta^* \quad (4.283)$$

Para que a formulação integral de von Kármán seja empregada, deve-se conhecer um perfil de velocidades adequado.

4.16 Considerações finais

Este capítulo foi dedicado às equações fundamentais da mecânica dos fluidos, tendo sido apresentada uma revisão sobre as mesmas. Elas representam quatro princípios básicos, a saber: conservação de massa, segunda Lei de Newton (quantidade de movimento linear), conservação de energia e a segunda lei da termodinâmica. Uma breve exposição sobre os modelos para escoamentos multifásicos e multicomponentes também foi realizada com a apresentação das equações dos modelos heterogêneo e homogêneo e da equação de advecção-difusão. Entre os demais itens discutidos, destaca-se que a formulação integral para camada limite é explorada no Capítulo 7 com a proposição de um modelo para o desenvolvimento da camada limite em vertedores.

CAPÍTULO 5

TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA

Sumário

5.1 Transição	245
5.1.1 Alguns tipos de instabilidades	247
5.2 Turbulência	250
5.2.1 Considerações iniciais	250
5.2.2 Definições básicas e equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds.....	253
5.2.3 Conservação de massa para a concentração de um composto	258
5.2.4 Escalas de turbulência	260
5.2.5 Espectro de energia.....	267
5.2.6 Modelos de turbulência	270
Camada-limite turbulenta	270
Espessura da camada limite	274
Modelos de turbulência “sem equações”	276
Comprimento de mistura de Prandtl	279
Modelos com “uma equação”	280
Modelos com duas equações: Modelo de turbulência $k-\varepsilon$	283
Modelos de tensões de Reynolds	287
5.3 Considerações finais	291

5.1 Transição

Um dos primeiros resultados experimentais que indicaram a existência de uma transição entre escoamento laminar e turbulento foram, provavelmente, os de Hagen (1839). Ele estudou o escoamento de água em tubos e concluiu que a velocidade média do fluido e o raio do tubo eram relevantes para a caracterização da natureza do escoamento. Em 1854 Hagen verificou que a viscosidade também era importante para o fenômeno da turbulência. Apesar dessas observações, o seu trabalho não estabeleceu um critério geral para a transição de um escoamento laminar para um escoamento turbulento. Algumas décadas mais tarde, Osborne Reynolds apresentou um parâmetro único para avaliar a transição entre o escoamento laminar e o turbulento. Reynolds (1883), utilizando o conceito de similaridade mecânica de escoamentos de fluidos reais, propôs que o escoamento permanece laminar desde que não seja excedido um valor crítico da relação entre a velocidade média (V), um comprimento característico (L) e a viscosidade cinemática (ν). Em outras palavras, Reynolds estabeleceu que o número puro VL/ν , com L igual ao diâmetro interno do tubo, assume um valor crítico a partir do qual o escoamento deixa de ser laminar.

Em 1908 o físico alemão Arnold Sommerfeld apresentou um artigo que continha a hoje conhecida equação de Orr-Sommerfeld. Nessa equação ele introduziu um número adimensional e o denominou “número de Reynolds”. Desde então, a relação VL/ν passou a ser chamada de número de Reynolds. Maiores detalhes históricos sobre o tema são discutidos por Rott (1990). O número de Reynolds expressa uma relação entre valores característicos de forças de inércia e forças viscosas. As forças inerciais são capazes de iniciar o movimento de um fluido em repouso e contribuem para a formação de heterogeneidades no escoamento. As forças viscosas atuam amortecendo tais heterogeneidades. No clássico experimento de Reynolds é possível observar, por meio de um filete de corante, que para números de Reynolds inferiores ao valor crítico, o corante escoava com a sua estrutura praticamente inalterada. Qualquer perturbação é rapidamente amortecida pelos efeitos viscosos neste caso. À medida que o número de Reynolds aumenta o corante passa a assumir diferentes formas e, para valores correspondentes ao escoamento turbulento, há uma mistura intensa do mesmo.

O experimento de Reynolds, cujo aparato é ilustrado na Figura 5.1, foi realizado com tubos de diâmetros aproximadamente iguais a 1”, 1/2” e 1/4” (2,54 cm, 1,27 cm e 0,635 cm, respectivamente) e comprimentos próximos de 4 pés e 6 polegadas (1,37 m). Em todos os casos o conduto estava equipado com um bocal hidrodinâmico na entrada para evitar a formação e propagação de instabilidades (Reynolds, 1883, p. 941). Como ilustrado na Figura

5.1, o tubo conectado ao bocal permanecia imerso dentro de um grande tanque com água. Injetava-se um filete de corante dentro do tubo cuja utilidade era permitir a visualização do escoamento.

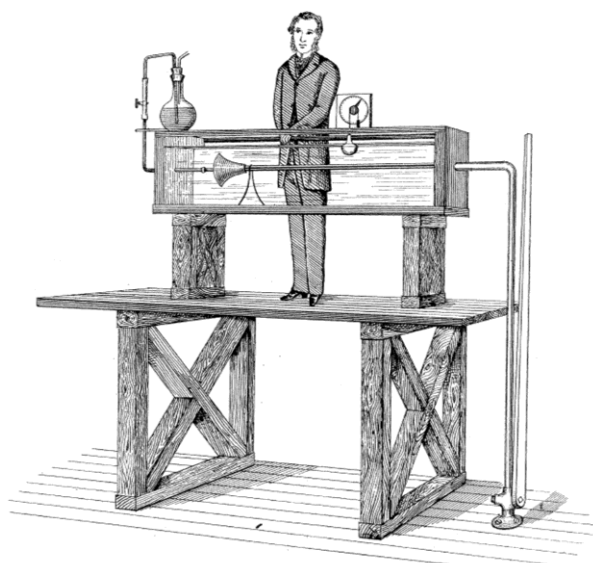


Figura 5.1 – Representação artística do experimento de Reynolds.
Fonte: Reynolds (1983, p.73).

Sobre as observações experimentais de Reynolds (1983), considera-se válido destacar as seguintes descrições:

1. Quando as velocidades eram suficientemente baixas, o corante se estendia ao longo de uma linha reta dentro do tubo (ver Figura 5.2a);
2. Ao aumentar a velocidade de modo gradual, em algum ponto do tubo, sempre a uma distância considerável em relação à entrada, o corante era misturado com o fluido circundante preenchendo todo o restante do tubo com água colorida (Figura 5.2b);
3. A Figura 5.2c ilustra a formação de instabilidades a partir do ponto onde a espessura da camada limite coincide aproximadamente com o raio interno do tubo.

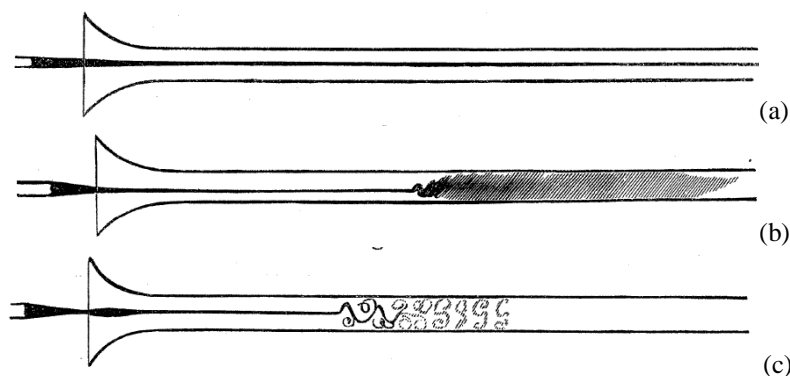


Figura 5.2 – Representações dos três escoamentos apresentadas por Reynolds (1883, p.942): (a) escoamento laminar; (b) escoamento turbulento; (c) escoamento de transição. Fonte: Reynolds (1983).

Para o caso de tubos, o comprimento característico é o diâmetro e a velocidade é a velocidade média na seção transversal, sendo o número de Reynolds crítico utilizado na prática da engenharia igual a 2300, embora este valor possa variar de forma expressiva em condições controladas em laboratório. Reynolds conseguiu um escoamento laminar com $Re=13000$, valor que atualmente não é alcançado no mesmo laboratório devido ao tráfego intenso que induz vibrações no equipamento, como explica van Dyke (1982, p.61). Apesar desta consideração, Root (1990, p.5) menciona que V. Walfrid Ekman visitou o laboratório e, após reduzir a rugosidade da superfície do bocal de entrada do conduto, conseguiu escoamento laminar com número de Reynolds superior a 44000. Novopashin e Muriel (2002) discutem que número de Reynolds crítico depende fortemente das outras propriedades do fluido, além da viscosidade cinemática. Os resultados de experimentos realizados com cinco gases inertes, quatro gases moleculares e dois líquidos mostraram que o número de Reynolds crítico variou entre 2530 e 3570, dependendo do fluido utilizado. Cabe mencionar também que a existência de singularidades, como curvas, válvulas e outros acessórios, podem alterar o valor do número de Reynolds crítico em relação ao obtido para as condições experimentais de um tubo horizontal e retilíneo.

5.1.1 Alguns tipos de instabilidades

Existem diferentes tipos de instabilidades e o estudo das mesmas compõe uma especialidade da Mecânica dos Fluidos que não será aprofundada neste texto. Trabalhos clássicos dedicados exclusivamente ao assunto são os de Chandrasekhar (1981) e Drazin e Reid (2004). O livro de Dyke (1982) contém visualizações muito interessantes de diversos tipos de instabilidades. Cabe mencionar que, em língua portuguesa, o trabalho de Silveira-Neto (2003) é uma interessante referência sobre o tema. Outras obras como a de Schlichting (2000), Batchelor (2009), White (2006), Kundu e Cohen (2008) também contêm tópicos de instabilidades em escoamentos de fluidos. A seguir, apresenta-se uma breve explicação qualitativa sobre o tema, elaborada com as referências citadas.

Camada de mistura

Este tipo de escoamento é um subgrupo dos escoamentos cisalhantes livres e ocorre quando, entre dois escoamentos com velocidades aproximadamente uniformes e diferentes, há uma distribuição de velocidades como ilustrado na Figura 5.3.

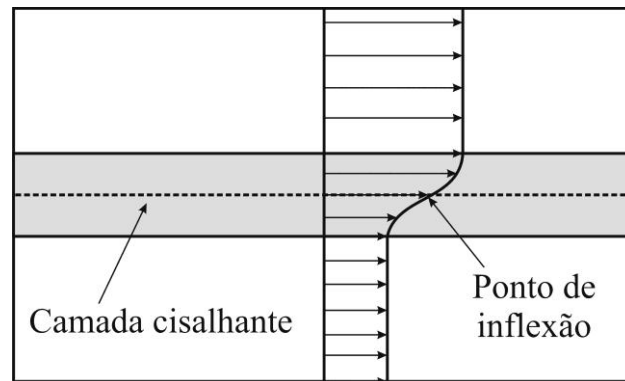


Figura 5.3 – Exemplo de um campo de velocidades com uma camada cisalhante
Fonte: adaptado de Silveira-Neto (2003)

Um dos resultados da introdução de perturbações externas em um campo como aquele da Figura 5.3 é a formação de vórtices e instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Imagens deste tipo de instabilidade obtidas em laboratório podem ser vistas em Dyke (1982) e a sua ocorrência na atmosfera é ilustrada na Figura 5.4. Após cerca de 40 s, o padrão ilustrado na primeira fotografia desapareceu, o que caracteriza uma camada de mistura com desenvolvimento temporal.

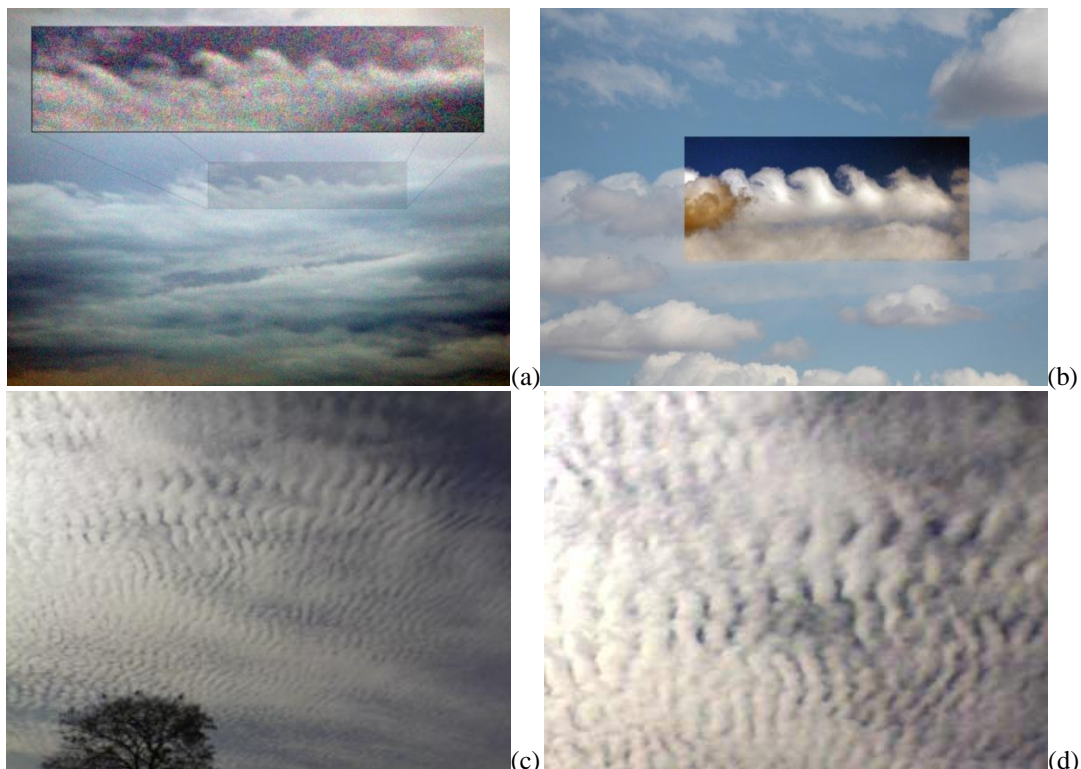


Figura 5.4 – Instabilidades de Kelvin-Helmholtz (São Carlos, SP).
Fonte: Fotografias (c) e (d) cedidas pelo Professor Harry E. Schulz.

Existe também a possibilidade da camada de mistura apresentar um padrão de desenvolvimento espacial, como aquele da Figura 5.5. Nota-se que neste caso as instabilidades de Kelvin-Helmholtz apresentam regiões formadas por turbilhões crescentes ao

longo da direção do escoamento (esquerda para direita). Tais estruturas turbilhonares bem organizadas e em uma escala relativamente grande são também conhecidas como estruturas coerentes. Uma aplicação dos conceitos relacionados às instabilidades, vinculada aos canais em degraus, foi desenvolvida por Chanson (2002, p.335). Ele considera a ocorrência de uma camada cisalhante livre nas proximidades do pseudofundo, a partir do vértice formado entre piso e espelho. A partir desta consideração, Chanson (2002) propôs uma formulação para o fator de resistência que resulta em um valor próximo de 0,20, para escoamentos deslizantes sobre turbilhões, como apresentado na revisão bibliográfica (Capítulo 2).

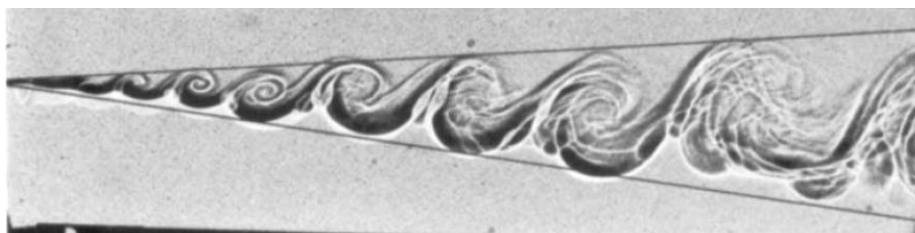


Figura 5.5 – Camada de mistura em desenvolvimento espacial
Fonte: Brown e Roshko (1974)

Além dessas instabilidades, que correspondem aos escoamentos cisalhantes livres, há aquelas formadas em jatos, que também incluem a ocorrência de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, e em esteiras. No último caso, talvez a mais conhecida seja a esteira de von Kármán, que pode ocorrer a jusante de obstáculos, como ilustrado na Figura 5.6. É possível observar o comportamento do escoamento bidimensional em torno de um cilindro. A primeira imagem corresponde ao escoamento de Stokes. A segunda imagem ilustra a formação de vórtices laminares estáveis a jusante do obstáculo. A Figura 5.6c é uma representação do campo de velocidades por meio de cores e permite observar a forma ondulada de uma imagem instantânea do campo de velocidades. Ela ocorre devido à sucessiva formação de transporte de vórtices após o cilindro, formando a conhecida esteira de vórtices de von Kármán.

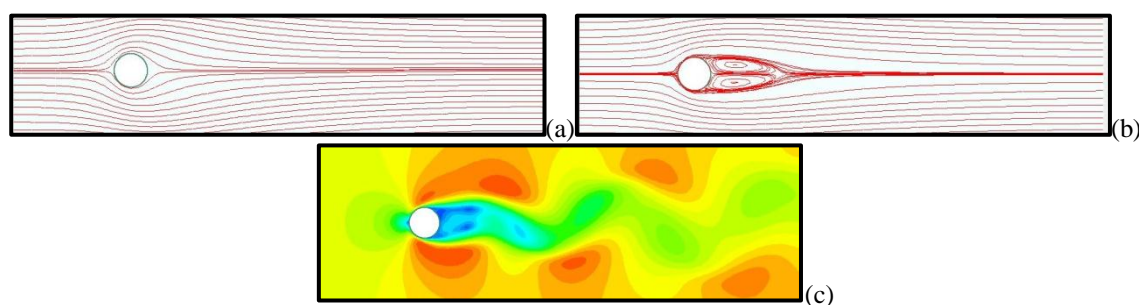


Figura 5.6 – Transição a jusante de um cilindro: linhas de corrente em (a) e (b) e campo de velocidades em (c) e (d). (a) $Re = 4,75$; (b) $Re = 47,46$; (c) $Re = 142,37$ (Código: EasyCFD).

Transição na camada limite

Para um escoamento da esquerda para a direita sobre uma placa plana, como esquematizado na Figura 5.7, assume-se que há um perfil de velocidades uniforme e sem turbulência antes do fluido encontrar a placa. A região (1) é caracterizada por um escoamento estável e laminar. Após a posição correspondente ao número de Reynolds crítico, Re_c , ocorrem instabilidades bi-dimensionais denominadas ondas de Tollmien-Schlichting (2). Na região (3) há formação de ondas tri-dimensionais e de vórtices. A região (4) é caracterizada pelo decaimento dos vórtices e a (5) pelo aparecimento de regiões turbulentas (*turbulent spots* ilustrados com círculos pintados com a cor preta). A turbulência completa é ilustrada como região (6).

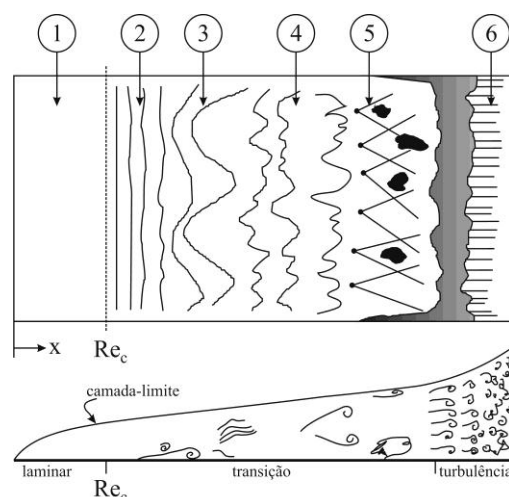


Figura 5.7 – Representação esquemática do processo de transição da camada limite
 Fonte: Adaptado de White (2006, p. 377) e Schlichting (2000, p. 420).

Existem ainda outros tipos de instabilidades, como a de Taylor-Couete e a convecção de Bénard. O primeiro tipo ocorre entre cilindros concêntricos rotativos (em um escoamento de Couete) devido à ação das forças oriundas da rotação. O tratamento matemático dado a esta instabilidade pode ser encontrado no capítulo 3 de Drazin e Reid (2004) e em outras referências citadas anteriormente. A segunda instabilidade mencionada ocorre devido à convecção e o seu estudo, denominado problema de Bénard, pode ser encontrado em Chandrasekhar (1981, p.11).

5.2 Turbulência

5.2.1 Considerações iniciais

Pesquisas relacionadas à turbulência compõem atualmente a vanguarda da dinâmica dos fluidos moderna. Em mecânica dos fluidos, além da gigantesca dificuldade matemática relacionada à busca de uma solução geral para as equações de N-S (acrônimo para Navier-

Stokes), existe a desafiadora tarefa de entender a e representar a turbulência. Escoamentos turbulentos são compostos por estruturas vorticosas tridimensionais de diferentes tamanhos e quantidades de energia e por movimentos do fluido que não são necessariamente turbilhonares. O estudo de detalhes a respeito de tais estruturas pode ser feito com auxílio de instrumentação ou através de soluções numéricas das equações governantes do escoamento.

Do ponto de vista experimental, visualizar e registrar o campo de velocidades do escoamento é um trabalho cujo grau de complexidade aumenta à medida que se pretende obter detalhes do fenômeno. Como exemplo, pode-se mencionar a técnica não intrusiva conhecida como velocimetria por imagem de partícula (PIV), que fornece o campo de velocidades em um fluido com base na observação do movimento de pequenas partículas refletoras presentes no escoamento em um período curto, com o uso de lasers pulsados. Uma adaptação desta técnica é o que se chama de micro-PIV, método que possibilita o levantamento do campo de velocidades em escalas muito menores do que aquelas investigadas em experimentos que empregam PIV.

Quando se trata de simular numericamente escoamento de fluidos, cálculos relacionados a campos turbulentos, ainda que estacionários (permanentes em média), são extremamente mais complexos do que cálculos para escoamentos laminares. De forma similar ao exemplo adotado para a situação experimental, a simulação numérica de escoamentos turbulentos se torna mais difícil e cara à medida que detalhes do escoamento são investigados. Em uma escala de complexidade, o nível mais alto corresponde à simulação numérica direta (*Direct Numerical Simulation* - DNS), realizada quando se pretende resolver o movimento não-permanente de todas as escalas do escoamento turbulento. Para tanto, deve-se empregar malhas tridimensionais altamente refinadas e os computadores mais avançados. Mesmo com o uso destes recursos, em função da existência de diferentes escalas de tempo e espaço, que podem ter várias ordens de magnitude, problemas práticos de engenharia não são abordados com DNS. Autores como Blazek (2001, p.1, 53), Chung (2002, p.679) e Lesieur (2008, p.18-19) comentam que com os computadores atuais, o uso de DNS ainda não é possível para casos práticos de escoamentos turbulentos e com elevados números de Reynolds, como, por exemplo, o escoamento em um avião em escala completa. O mesmo pode ser dito para simulações de escoamentos ao longo de estruturas hidráulicas, como canais, sistemas extravasores de barragens, escoamentos através de máquinas hidráulicas como turbinas, bombas, além de outros casos. Apesar destas limitações, o emprego de DNS possui expressiva importância para pesquisa. Entre as aplicações possíveis, pode-se citar que o seu uso é útil para compreensão de estruturas turbulentas e daquelas que ocorrem na transição entre

escoamentos laminares e turbulentos, para calibração de modelos de turbulência, para simulação da produção de ruídos em aerodinâmica, entre outras aplicações (Anderson, 1995, p.530-533; Blazek, 2001, p.53; Ferziger e Perić, 2002, p.268-269).

O segundo nível, abaixo da simulação numérica direta, é a simulação de grandes escalas (*Large Eddy Simulation* - LES). Com esta técnica os grandes vórtices são simulados enquanto os menores são modelados. Tal modelagem assume que a turbulência em pequenas escalas é isotrópica, ou seja, não depende da orientação do sistema de coordenadas, comportando-se de forma estatisticamente previsível, independentemente do campo de escoamento turbulento. Mesmo com esta hipótese básica, que diminui de forma drástica o problema em relação ao que é tratado via DNS, o uso de LES em problemas práticos de engenharia é dispendioso, pois exige o uso de recursos computacionais avançados, além de bastante tempo para obtenção de soluções que em muitos casos excedem os prazos relacionados aos projetos.

O terceiro e último nível apresentado nesta breve discussão não pretende simular o comportamento não permanente de qualquer vórtice em qualquer escala. Neste nível, encontram-se os modelos de turbulência, nos quais estão embutidas aproximações que dependem de constantes ou funções empíricas para o fechamento matemáticos das equações. Embora possa parecer que este nível é pouco preciso, deve-se mencionar que os modelos de turbulência são responsáveis por grandes avanços na engenharia pelo fato de produzirem resultados confiáveis que auxiliam o desenvolvimento de projetos desta área. Apenas como recurso mnemônico, a Figura 5.8 resume a classificação descrita anteriormente.

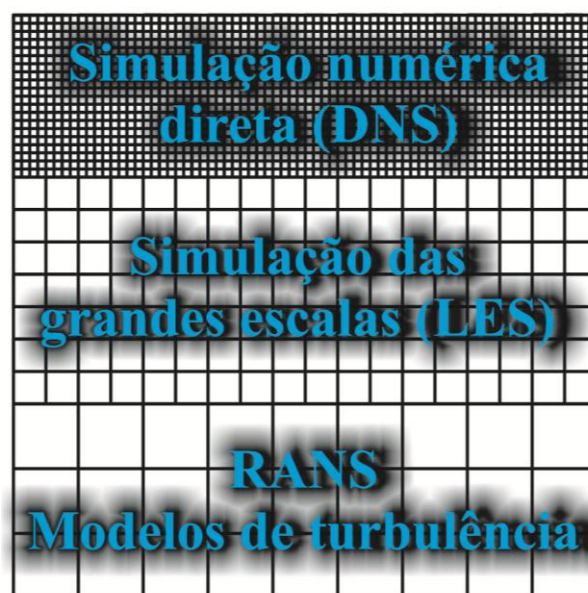


Figura 5.8 – Níveis encontrados na simulação numérica de escoamentos (RANS é o acrônimo para *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*).

Ao empregar modelos de turbulência, as equações de N-S são transformadas e passam a relacionar variáveis médias. Escritas com essa forma, as equações recebem o nome de equações de Reynolds ou equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds, como uma tradução do inglês *Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations* (RANS). Os parágrafos seguintes expõem alguns tópicos sobre o tema, incluindo a dedução das referidas equações e uma breve discussão sobre turbulência e modelos de turbulência. Destaca-se que o tema é extremamente amplo e uma exposição abrangente e densa certamente ocuparia um número considerável de páginas. Aqui são abordados apenas conceitos básicos e, como referência, cabe citar a influência exercida pelos textos de Hinze (1975), Brodkey (1967), Monin e Yaglom (2007), Schulz (1985, 1990, 2001, 2003), Durst (2008) e Kundu e Cohen (2008).

5.2.2 Definições básicas e equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds

Este item tem como objetivo apresentar a forma de obtenção das equações básicas da Mecânica dos Fluidos escritas em termos de grandezas médias, isto é, equações cujas variáveis dependentes representam valores temporais médios e não instantâneos. Para tanto, são utilizados conceitos próprios do cálculo, além de algumas definições estatísticas elementares. As grandezas instantâneas encontradas nas equações já desenvolvidas podem ser separadas em uma parcela média mais uma parcela correspondente à flutuação em torno da média em um dado instante. Sendo t o tempo e T um intervalo de tempo finito, há três formas básicas de definição da média para um campo euleriano. Utilizando a velocidade, pode-se escrever (Hinze, 1975, p.5):

$$\overline{v}_i^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v_i(x_0, t) dt \quad (5.1)$$

$$\overline{v}_i^x = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X v_i(x, t_0) dx \quad (5.2)$$

$$\overline{v}_i^e = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} v_i(x_0, t_0)}{N} \quad (5.3)$$

em que \overline{v}_i^t =média temporal, \overline{v}_i^x =média espacial e \overline{v}_i^e é a média de um conjunto de dados de N experimentos idênticos. Se as três médias forem consideradas iguais, pode-se dizer que a turbulência é estacionária e homogênea, sendo tal igualdade conhecida como teorema da ergodicidade ou hipótese ergódica. A Figura 5.9a ilustra a decomposição mencionada, para a qual a variável em questão (profundidade do escoamento) é separada em um valor médio

considerado permanente mais o desvio relativo a esta média. As demais variáveis envolvidas no escoamento podem ser decompostas da mesma maneira como foi feito para o caso da profundidade subcrítica do ressalto na referida figura. O mesmo pode ocorrer para escoamentos em regime não permanente, como ilustrado na Figura 5.9b, em uma representação esquemática da variação da profundidade média durante a passagem de uma onda em um canal.

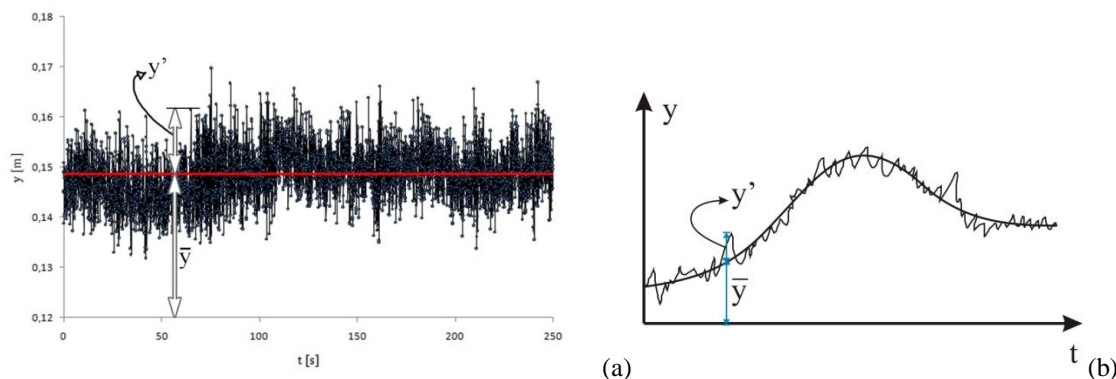


Figura 5.9 – Profundidades instantâneas em uma seção de escoamento subcrítico de um ressalto hidráulico. A linha vermelha representa o valor médio das profundidades (em uma única posição, portanto, uma média temporal) e os pontos representam os valores instantâneos das profundidades (ou as flutuações em torno da média, se forem observados em relação à profundidade média). Os dados foram obtidos com um sensor ultrassônico durante 250 segundos com frequência de 20 Hz, em um canal retangular do Laboratório de Hidráulica da EESC/USP (a); escoamento turbulento em regime não permanente ilustrado por meio da variação da profundidade média com o tempo (b).

Adotando uma barra superior como operador de média para velocidade, escreve-se:

$$V_i = \overline{V_i} + V_i' \quad (5.4)$$

Os conceitos elementares do cálculo permitem escrever as seguintes relações para duas funções genéricas A e B (equações 5.5a-i, apresentadas a seguir):

$$1) \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (5.5a)$$

$$2) \overline{\overline{A}} = \overline{A} \quad (5.5b)$$

$$3) \overline{cA} = c\overline{A} \quad (5.5c)$$

$$4) \overline{AB} = \overline{A} \overline{B} \quad (5.5d)$$

$$5) \overline{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} \quad (5.5e)$$

$$6) \overline{A'} = 0 \quad (5.5f)$$

$$7) \overline{A'B} = 0 \quad (5.5g)$$

$$8) \overline{A'B'} \neq 0 \quad (5.5h)$$

$$9) \overline{A'A'} = \overline{A'^2} \quad (5.5i)$$

A segunda barra superior indica a operação de média sobre a média e c é uma constante. As demonstrações das propriedades apresentadas como equações 11a-i podem ser encontradas em Brodkey (1967, p.234), Schulz (2003, p.116-118), Durst (2008, p.528) e Kundu e Cohen (2008, 541-544).

Ao aplicar as propriedades descritas por meio das equações 5.5 nas equações de Navier-Stokes são obtidas as equações de N-S médias de Reynolds (1894). Com o uso da notação tensorial, os algebrismos são sintetizados de forma significativa. A equação de N-S para escoamento isotérmico e incompressível foi manipulada por partes da seguinte maneira:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.6)$$

$$\overline{\rho \frac{\partial V_i}{\partial t}} = \rho \frac{\partial (\overline{V_i + V_i'})}{\partial t} = \rho \frac{\partial (\overline{V_i} + \overline{V_i'})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho \bar{V}_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}} &= \overline{\rho (\bar{V}_j + V_j') \frac{\partial (\bar{V}_i + V_i')}{\partial x_j}} = \rho \left[\overline{\bar{V}_j \frac{\partial (\bar{V}_i + V_i')}{\partial x_j}} + \overline{V_j' \frac{\partial (\bar{V}_i + V_i')}{\partial x_j}} \right] = \\ &= \rho \left[\overline{\bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}} + \overline{\bar{V}_j \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}} + \overline{V_j' \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}} + \overline{V_j' \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}} \right] = \rho \left[\overline{\bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}} + \overline{V_j' \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

De acordo com a regra do produto, pode-se escrever:

$$\overline{\rho \frac{\partial (V_i' V_j')}{\partial x_j}} = \overline{\rho V_i' \frac{\partial V_j'}{\partial x_j}} + \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}}. \text{ A equação da continuidade garante que } \frac{\partial V_j'}{\partial x_j} = 0, \text{ restando apenas:}$$

$$\overline{\rho \frac{\partial (V_i' V_j')}{\partial x_j}} = \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}}. \text{ Substituindo este termo na equação 5.8, vem:}$$

$$\overline{\rho \bar{V}_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}} = \rho \left[\overline{\bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial (V_i' V_j')}{\partial x_j}} \right] \quad (5.9)$$

Os demais termos requerem operações algébricas mais simples, como apresentado a seguir:

$$\overline{\rho g_i} = \rho (\overline{g_i} + \overline{g_i'}) = \rho g_i \quad (5.10)$$

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (5.11)$$

$$\mu \overline{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j}} = \mu \overline{\frac{\partial^2 (\bar{V}_i + V_i')}{\partial x_j \partial x_j}} = \mu \overline{\frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \mu \overline{\frac{\partial^2 V_i'}{\partial x_j \partial x_j}} = \mu \overline{\frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j}} \quad (5.12)$$

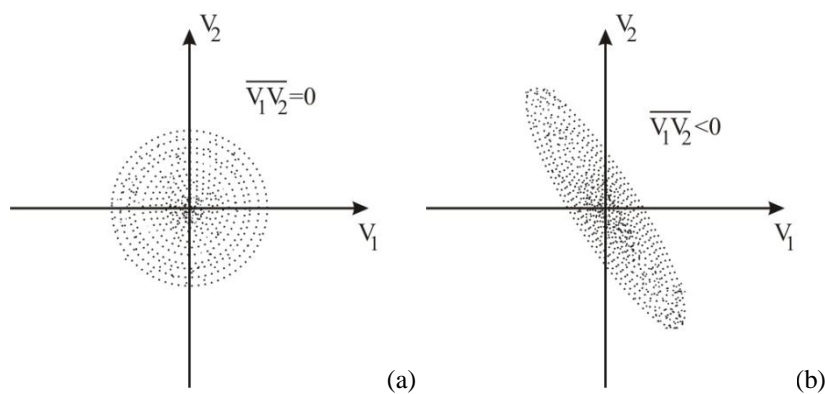
Substituindo os resultados obtidos na equação de Navier-Stokes, é obtida a equação procurada:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\rho \overline{V_i' V_j'})}{\partial x_j} \quad (5.13)$$

O último termo do segundo membro da equação 5.13 é um produto diádico e, portanto, como um tensor de segunda ordem, possui nove componentes que compõem o tensor de Reynolds, apresentado a seguir:

$$\rho \overline{V_i' V_j'} = \rho \begin{bmatrix} \overline{V_1' V_1'} & \overline{V_1' V_2'} & \overline{V_1' V_3'} \\ \overline{V_2' V_1'} & \overline{V_2' V_2'} & \overline{V_2' V_3'} \\ \overline{V_3' V_1'} & \overline{V_3' V_2'} & \overline{V_3' V_3'} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

O tensor de Reynolds é um tensor simétrico composto por covariâncias das componentes de velocidades. Em analogia com o tensor das tensões de Cauchy, as componentes da diagonal principal correspondem a tensões normais e as demais componentes correspondem a tensões cisalhantes. Se as flutuações turbulentas não apresentam direções preferenciais, a turbulência é classificada como isotrópica e as componentes da diagonal principal são iguais e as demais iguais a zero. Para este caso o tensor é esférico e uma possível representação gráfica do mesmo pode ser vista na Figura 5.10a. Em contraste com a turbulência isotrópica, a representação gráfica vista na Figura 5.10b ilustra a distribuição alongada com forma aproximadamente elipsoidal da nuvem de pontos que representam um meio turbulento anisotrópico.



(Continua na próxima página)

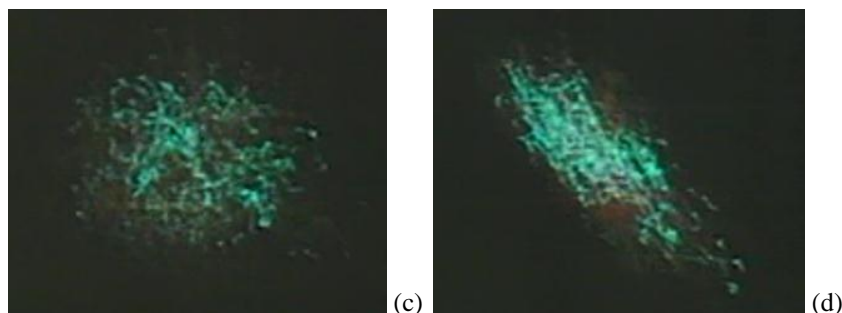


Figura 5.10 – Turbulência isotrópica (a) e turbulência anisotrópica (b). Cada ponto representa um par de valores de $V_1 V_2$ em um dado instante; (c) Turbulência isotrópica ilustrada por meio de uma mancha circular produzida pelos sinais de dois anemômetros e turbulência anisotrópica ilustrada por meio de uma mancha elíptica.

Fonte: Figuras (a) e (b) adaptadas de Kundu e Cohen (2008, p.551) e imagens extraídas do vídeo *Characteristics of Laminar and Turbulent Flow*, de Hunter Rouse, University of IOWA.

Uma definição formal para a homogeneidade pode ser enunciada da seguinte maneira (Monin e Yaglom, 2007):

Definição 1. *A turbulência é homogênea se todos os campos atrelados à dinâmica do fluido forem campos aleatórios homogêneos. Um campo aleatório homogêneo é aquele que possui densidade de probabilidade independente da posição no espaço.*

A definição de isotropia, de acordo com Monin e Yaglom (1975, p. 113, v.2), é:

Definição 2. *A turbulência é classificada como isotrópica se todos os campos atrelados à dinâmica do fluido forem campos aleatórios homogêneos e isotrópicos. Um campo vetorial aleatório isotrópico é aquele cujas densidades de probabilidade de suas componentes em um conjunto arbitrário de pontos x_1, x_2, \dots, x_N não são afetadas por rotações, translações e/ou reflexões acompanhadas de rotação simultânea e/ou reflexão do sistema de coordenadas em relação ao sistema no qual as componentes do vetor são determinadas.*

Em outras palavras, a turbulência é dita isotrópica se qualquer parâmetro médio é direcionalmente independente e homogênea se os parâmetros médios avaliados (velocidade, pressão etc.) são independentes da posição no fluido, embora possam ser diferentes para diferentes direções (anisotropia). As Figuras 5.11a,b e 5.12 ilustram esses conceitos.

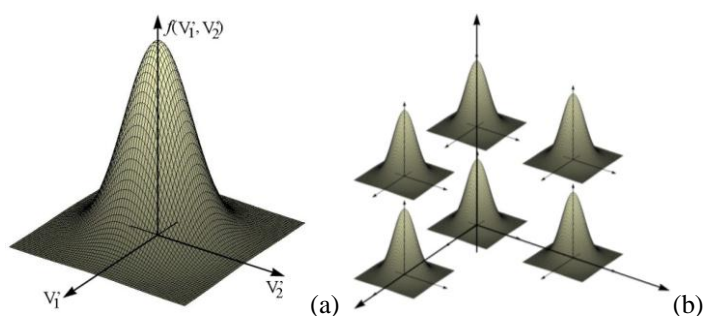


Figura 5.11 – (a) Turbulência isotrópica; (b) turbulência homogênea ilustradas pelo comportamento da densidade de probabilidades bidimensional. Fonte: adaptado de Durst (2008).

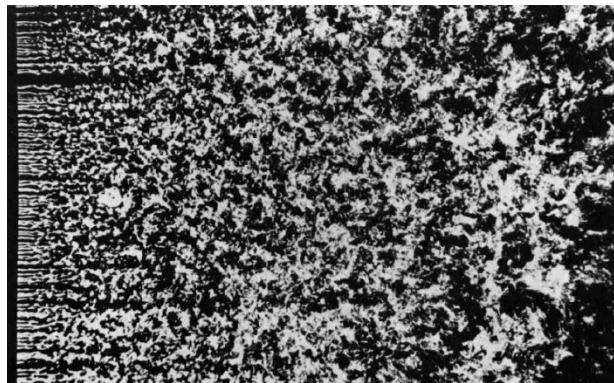


Figura 5.12 – Turbulência homogênea após uma grade
(Fonte: Van Dyke (1982, p.89), fotografia de Thomas Corke e Hassan Nagib)

5.2.3 Conservação de massa para a concentração de um composto

Além das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds, é de interesse prático obter o equacionamento médio a partir da formulação desenvolvida para concentração de uma espécie em um escoamento. Esta equação, reescrita a seguir, é simplificada com a hipótese de meio isotrópico para o soluto em questão e são empregadas as mesmas ferramentas matemáticas que conduziram às equações RANS.

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m) = S_A + \nabla \cdot (D_{AB} \nabla C_A) \quad (5.15)$$

Sendo o meio isotrópico para a espécie presente no escoamento, a equação é simplificada e assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m) = S_A + D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (5.16)$$

Em coordenadas cartesianas retangulares o segundo termo do primeiro membro pode ser escrito de forma conveniente a partir da regra do produto, como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (C_A \vec{V}_m) &= \frac{\partial (C_A V_{m1})}{\partial x_1} + \frac{\partial (C_A V_{m2})}{\partial x_2} + \frac{\partial (C_A V_{m3})}{\partial x_3} = C_A \left(\frac{\partial V_{m1}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{m2}}{\partial x_2} + \frac{\partial V_{m3}}{\partial x_3} \right) + \\ &+ V_{m1} \frac{\partial C_A}{\partial x_1} + V_{m2} \frac{\partial C_A}{\partial x_2} + V_{m3} \frac{\partial C_A}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Sendo o escoamento é incompressível ($\text{div} \vec{V}_m = 0$), obtém-se:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\vec{V}_m \cdot \nabla) C_A = S_A + D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (5.17)$$

Ou,

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + V_{m1} \frac{\partial C_A}{\partial x_1} + V_{m2} \frac{\partial C_A}{\partial x_2} + V_{m3} \frac{\partial C_A}{\partial x_3} = S_A + D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial x_3^2} \right) \quad (5.18)$$

Utilizando notação com índices, a equação 5.18 pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + V_{mi} \frac{\partial C_A}{\partial x_i} = S_A + D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x_i^2} \quad (5.19)$$

Substituindo as variáveis instantâneas:

$$\frac{\partial (C_A + C'_A)}{\partial t} + (V_{mi} + V'_{mi}) \frac{\partial (C_A + C'_A)}{\partial x_i} = (S_A + S'_A) + D_{AB} \frac{\partial^2 (C_A + C'_A)}{\partial x_i^2} \quad (5.20)$$

Aplicando o operador de média em ambos os membros da equação, tem-se:

$$\overline{\frac{\partial (C_A + C'_A)}{\partial t} + (V_{mi} + V'_{mi}) \frac{\partial (C_A + C'_A)}{\partial x_i}} = \overline{(S_A + S'_A) + D_{AB} \frac{\partial^2 (C_A + C'_A)}{\partial x_i^2}} \quad (5.21)$$

Deve-se observar que o produto de duas flutuações não é nulo, mesmo para o caso de grandezas diferentes (velocidade e concentração):

$$\overline{\frac{\partial C_A}{\partial t} + V_{mi} \frac{\partial C_A}{\partial x_i} + V'_{mi} \frac{\partial C'_A}{\partial x_i}} = \overline{S_A + D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x_i^2}} \quad (5.22)$$

Com o intuito de utilizar o conceito de coeficiente de difusão turbulento, o termo que envolve o produto de flutuações é escrito da seguinte maneira:

$$\overline{V'_{mi} \frac{\partial C'_A}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial (V'_{mi} C'_A)}{\partial x_i}} - C'_A \frac{\partial V'_{mi}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial (V'_{mi} C'_A)}{\partial x_i}} \quad (5.23)$$

A última igualdade é garantida pela equação da continuidade. Substituindo a equação 5.23 na equação 5.22, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial C_A}{\partial t} + V_{mi} \frac{\partial C_A}{\partial x_i} + \frac{\partial (V'_{mi} C'_A)}{\partial x_i}} &= \overline{S_A + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x_i} \right)} \Rightarrow \\ \overline{\frac{\partial C_A}{\partial t} + V_{mi} \frac{\partial C_A}{\partial x_i}} &= \overline{S_A + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x_i} - (V'_{mi} C'_A) \right]} \end{aligned} \quad (5.24)$$

O primeiro termo entre colchetes corresponde ao fluxo molecular de massa de acordo com a lei de Fick. Já o produto de flutuações representa o fluxo turbulento de massa. Deste modo,

nota-se que o fluxo total de massa em um escoamento turbulento pode ser expresso por meio da seguinte equação:

$$\dot{m}_i = -D_{AB} \frac{\partial \overline{C_A}}{\partial x_i} + \overline{(V'_{mi} C'_A)} \quad (5.25)$$

Ao trabalhar com escoamentos turbulentos, é comum utilizar a lei de Fick para avaliação de um fluxo médio a partir de um gradiente de concentração média. Essa postura gera a necessidade de introduzir um coeficiente de difusão turbulento para que seja mantida a proporcionalidade entre fluxo e gradiente da concentração média. O coeficiente de difusão turbulenta não reflete a natureza do fluido, mas as características do escoamento. A sua introdução na lei de Fick produz o seguinte resultado:

$$\dot{m}_i = -(D_{AB} + D_i) \frac{\partial \overline{C_A}}{\partial x_i} \quad (5.26)$$

Combinando as equações 5.25 e 5.26, obtém-se:

$$-\overline{(V'_{mi} C'_A)} = D_i \frac{\partial \overline{C_A}}{\partial x_i} \quad (5.27)$$

Substituindo este resultado na equação 5.24, vem:

$$\frac{\partial \overline{C_A}}{\partial t} + \overline{V_{mi}} \frac{\partial \overline{C_A}}{\partial x_i} = \overline{S_A} + (D_{AB} + D_i) \frac{\partial^2 \overline{C_A}}{\partial x_i^2} \quad (5.28)$$

Matematicamente, a equação obtida é semelhante à equação original. Entretanto, deve-se observar que ela relaciona grandezas médias (temporais) e que possui um novo coeficiente vinculado ao nível de turbulência do meio e não ao fluido, como é o caso do coeficiente de difusão molecular.

5.2.4 Escalas de turbulência

Escalas de Taylor

A descrição proposta por Richardson (1922) explica que o escoamento turbulento é composto por turbilhões de diferentes tamanhos, condição que impõe à turbulência uma abundância de escalas. Este foi um dos primeiros trabalhos a perceberem a existência de tal variedade de escalas ligadas à turbulência. Um turbilhão pode não ser uma escolha precisa para definir a estrutura dos campos turbulentos, isto é, podem existir trajetórias seguidas pelo fluido em um escoamento turbulento que não formam turbilhões. Porém, como comentado por Pope (2009,

p.183), ele foi concebido para representar o movimento turbulento que é moderadamente coerente em uma região com certa escala de comprimento. O trabalho intitulado *Statistical theory of turbulence*, escrito por Taylor (1935), foi um marco importante nos estudos da turbulência. Taylor (1935) definiu duas escalas de turbulência a partir da função coeficiente de correlação. A grande escala, “escala integral” ou “macro-escala” é obtida pela integração da função coeficiente de correlação, como apresentado a seguir:

$$L_{ij} = \int_0^{\infty} \rho_{ij}(r, t) dr \quad (5.29)$$

Nesta equação r é a distância entre duas componentes de flutuação de velocidades e $\rho_{ij}(r, t)$ a função coeficiente de correlação, definida como:

$$\rho_{ij}(r, t) = \frac{\overline{V_i'(x, t)V_j'(x+r, t)}}{\sqrt{\overline{V_i'^2(x, t)V_j'^2(x+r, t)}}} \quad (5.30)$$

Emprega-se agora as intensidades turbulentas:

$$V_1'' = \sqrt{\overline{V_1'^2}}; V_2'' = \sqrt{\overline{V_2'^2}}; V_3'' = \sqrt{\overline{V_3'^2}} \quad (5.31)$$

Combinando as equações 5.30 e 5.31, obtém-se:

$$\rho_{ij}(r, t) = \frac{\overline{V_i'(x, t)V_j'(x+r, t)}}{\overline{V_i''(x, t)V_j''(x+r, t)}} \quad (5.32)$$

Se a turbulência for homogênea o resultado anterior é simplificado com a exclusão da dependência das intensidades em relação à posição analisada, resultando em:

$$\rho_{ij}(r, t) = \frac{\overline{V_i'(x, t)V_j'(x+r, t)}}{\overline{V_i''(t)V_j''(t)}} \quad (5.33)$$

Para o caso isotrópico, se $i \neq j$ os termos fora da diagonal principal são nulos no tensor de Reynolds e os termos da diagonal principal são iguais, condições que simplificam o coeficiente de correlação para a seguinte forma:

$$\rho_{ii}(r, t) = \frac{\overline{V_i'(x, t)V_i'(x+r, t)}}{\overline{V_i''^2(t)}} \quad (5.34)$$

Se for tomada como uma direção de medidas de velocidades a direção da reta que une dois pontos em consideração, só interessará saber as velocidades normais e paralelas a esta reta. Como resultado, obtém-se duas funções de coeficiente de correlação, a saber: uma longitudinal, denotada por $f(r)$, e uma transversal, simbolizada por $g(r)$:

$$f(r) = \frac{\overline{V_r'(x,t)V_r'(x+r,t)}}{V'^2(t)} \quad (5.35)$$

$$g(r) = \frac{\overline{V_n'(x,t)V_n'(x+r,t)}}{V'^2(t)} \quad (5.36)$$

Para o caso isotrópico são obtidas duas grandes escalas definidas por meio das funções $g(r)$ e $f(r)$:

$$L_f = \int f(r) dr \quad (5.37)$$

$$L_g = \int g(r) dr \quad (5.38)$$

Estas escalas estão relacionadas por meio da seguinte equação:

$$L_g = \frac{L_f}{2} \quad (5.39)$$

De acordo com Taylor (1935), as suas escalas estão associadas ao tamanho médio dos turbilhões, sendo L_g o seu valor representativo. Além da macro-escala, Taylor também definiu uma microescala (λ_g) como sendo:

$$\lambda_g = \sqrt{-\frac{2}{\partial^2 g(r)/\partial r^2}\bigg|_{r=0}} \quad (5.40)$$

A microescala de Taylor é função da derivada segunda da função coeficiente de correlação $g(r)$ em $r = 0$. Para obtenção desta definição, considera-se uma expansão de $g(r)$ em série de Taylor em $r = 0$:

$$g(r) = g(0) + rg'(0) + \frac{r^2}{2} g''(0) + \dots$$

Uma vez que $g(r)$ é uma função par de r , as parcelas ímpares da série são iguais a zero. Sendo $g(0)=1$ e desprezando termos de ordem superior, tem-se:

$$g(r) = 1 + \frac{r^2}{2} g(0)'' = 1 - \frac{r^2}{\left[\sqrt{-\frac{2}{g(0)''}} \right]^2} = 1 - \frac{r^2}{\lambda_g^2} \quad (5.41)$$

Nota-se na equação a definição da microescala de Taylor, sendo chamada de microescala transversal devido a adoção de $g(r)$. A micro-escala longitudinal é definida de forma semelhante por meio da seguinte equação:

$$\lambda_f = \sqrt{-\frac{2}{f(r)''|_{r=0}}} \quad (5.42)$$

A definição de Taylor (1935) para as menores escalas admite que ela represente adequadamente o tamanho médio dos menores turbilhões, pois foi utilizada a condição de r tendendo a zero, acreditando-se assim que a ação dos menores turbilhões é que determina o comportamento da função coeficiente de correlação envolvida. Menciona-se ainda que a micro-escala de Taylor não é a menor escala que ocorre em um escoamento turbulento, sendo a micro-escala de Kolmogorov uma aproximação mais realística. Isto se deve ao fato de que a definição de Taylor está associada a escalas de velocidades, cuja importância é menor do que a da taxa de dissipação de energia encontrada na definição de Kolmogorov (Tennekes e Lumley, 1972, p.68). Apesar disto, há trabalhos que utilizaram a microescala de Taylor como estimativa para geração de malhas com um número de pontos adequado para capturas as diferentes escalas de tal maneira que pudesse ser realizada uma simulação numérica direta.

O segundo marco histórico relacionado ao estudo da turbulência e, em especial ao estudo da turbulência isotrópica e de suas microescalas foi estabelecido em 1941 pelo físico-matemático russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987). Entre as contribuições presentes no trabalho de Kolmogorov (1941a-d), encontram-se escalas de comprimento e velocidade para os menores turbilhões existentes em um meio turbulento, além de uma equação para variação espectral da energia cinética turbulenta (Schulz, 2001). Por se tratar de uma teoria de grande importância para o estudo da turbulência, neste item são apresentados alguns tópicos relacionados ao trabalho de Kolmogorov (1941), tendo sido utilizadas como referências principais os livros de Monin e Yaglom (1965), Landahl e Christensen (1994), Schulz (2001) e Kundu e Cohen (2008). Um texto interessante sobre este notável cientista, especificamente sobre as suas contribuições em turbulência, foi escrito por Yaglom (1994). Ele comenta que a leitura do trabalho de Taylor foi inspiradora para Kolmogorov, que sempre se interessou por possíveis aplicações relacionadas às suas proposituras teóricas.

Microescalas de Kolmogorov e relações com as grandes escalas

Fundamentado em análise dimensional, Kolmogorov sugeriu as seguintes expressões para as escalas de comprimento (η) e de velocidade (U):

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (5.43)$$

$$U = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad (5.44)$$

em que ν é a viscosidade cinemática e ε a taxa de dissipação de energia mecânica por unidade de massa que ocorre nas menores escalas quando a energia mecânica é dissipada sob a forma de calor. As dimensões das definições anteriores podem ser facilmente verificadas. Utilizando as unidades do sistema internacional, por exemplo, tem-se:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \Rightarrow \text{m} = \left(\frac{\text{m}^6 \cdot \text{s}}{\text{s}^3 \cdot \text{J}} \right)^{1/4} = \left(\frac{\text{m}^6 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}}{\text{s}^3 \cdot \text{N} \cdot \text{m}} \right)^{1/4} = \left(\frac{\text{m}^6}{\text{s}^3} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}} \right)^{1/4} = (\text{m}^4)^{1/4} = \text{m}$$

$$U = (\nu\varepsilon)^{1/4} \Rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}} = \left(\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{s} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}} \right)^{1/4} = \left(\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} \right)^{1/4} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Estas são as únicas formas de representar a velocidade e o comprimento como função da viscosidade cinemática e da taxa de dissipação de energia por unidade de massa. A relação entre tais variáveis foi desenvolvida por Kolmogorov (1941) a partir da hipótese de que “*para o caso da turbulência com números de Reynolds suficientemente altos, a distribuição multidimensional de probabilidades para velocidades relativas, em uma região de espaço-tempo G em que a turbulência é localmente isotrópica, é definida completamente pelos valores de ε e ν* ” (Monin e Yaglom, 1965, p.347, v.2). Em outras palavras, isto significa que para as menores escalas de movimento, apenas a viscosidade cinemática e a taxa de dissipação de energia são suficientes para definir a velocidade e a escala de comprimento dos turbilhões. Para que estas escalas tenham as formas apresentadas, é necessário que o número de Reynolds característico do turbilhão seja igual a um. Uma maneira simples de verificar este fato consiste em assumir que a taxa de dissipação de energia por unidade de massa pode ser

definida em função das pequenas escalas de comprimento (l') e velocidade (u')¹, como apresentado a seguir (Landahl e Christensen, 1994):

$$\varepsilon \approx \nu \left(\frac{u'}{l'} \right)^2 \quad (5.45)$$

O equacionamento anterior é análogo à fórmula de Stokes obtida a partir de considerações mecânicas e termodinâmicas (ver Monin e Yaglom, 1965, p.52-55, v.1 e p.347, v.2). Do mesmo modo, define-se também o número de Reynolds com estes parâmetros:

$$\text{Re}' = \frac{u'l'}{\nu} \quad (5.46)$$

A eliminação da escala de velocidade destas expressões permite escrever:

$$\begin{aligned} u' &= l' \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\nu}{l'} \text{Re}' \Rightarrow l'^2 = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \nu \text{Re}' = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/2} \text{Re}' \Rightarrow \\ l' &= \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \sqrt{\text{Re}'} \end{aligned} \quad (5.47)$$

A equação 5.47 mostra que para obtenção da escala de comprimento de Kolmogorov ($l' = \eta$) os efeitos inerciais devem ser da mesma ordem dos efeitos viscosos, de tal maneira que o número de Reynolds seja igual à unidade. A mesma idéia pode ser empregada para obtenção da escala de velocidade eliminando-se l' ($u' = U$):

$$\begin{aligned} l' &= u' \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} = \frac{\nu}{u'} \text{Re}' \Rightarrow u'^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \nu \text{Re}' = \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \nu^2 \right)^{1/2} \text{Re}' \Rightarrow \\ u' &= (\nu \varepsilon)^{1/4} \sqrt{\text{Re}'} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Além das escalas anteriores, pode-se também definir escalas de tempo, vorticidade e energia por unidade de massa (t_η corresponde à escala de Kolmogorov):

$$t = t_\eta = \frac{\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \sqrt{\text{Re}'}}{(\nu \varepsilon)^{1/4} \sqrt{\text{Re}'}} = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (\text{tempo}) \quad (5.49)$$

¹ Ao se referir às pequenas escalas, não significa que elas sejam as micro-escalas de Kolmogorov.

$$t^{-1} = t_{\eta}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon}{v}\right)^{1/2} \quad (\text{vorticidade}) \quad (5.50)$$

$$U^2 = (v\varepsilon)^{1/2} \quad (\text{energia}) \quad (5.51)$$

É interessante observar que a imposição de um número de Reynolds igual à unidade transforma o “comprimento do turbilhão” (η) em um valor crítico. Para esta condição, uma redução em seu comprimento faz com que os efeitos viscosos superem os inerciais e então o turbilhão deixa de existir. É preciso que se enfatize que, além dos turbilhões pequenos, pertencentes à microescala de Kolmogorov, há, nos escoamentos turbulentos, também turbilhões com dimensões maiores. O limite superior para a escala de uma estrutura deste tipo é da ordem da maior dimensão da composição geométrica que a envolve ou então a dimensão da estrutura que a originou, como um cilindro. No interior de um tubo, por exemplo, é comum adotar o diâmetro interno como dimensão característica das grandes escalas (também conhecida como escala externa, em contraste com a microescala que pode ser chamada de escala interna). Para as grandes escalas geométricas, as escalas de tempo, T , e energia, E , são:

$$T = \frac{L}{V} \quad (5.52)$$

$$E = V^2 \quad (5.53)$$

Convém questionar se é possível conhecer, ainda que aproximadamente, os valores das microescalas de Kolmogorov com base nas informações correspondentes às grandes escalas, uma vez que estas são facilmente mensuráveis (como a velocidade média e o diâmetro interno de um tubo). Assumindo que toda energia introduzida no escoamento por meio das grandes escalas é dissipada pelos efeitos viscosos, escreve-se:

$$\varepsilon = \frac{E}{T} = \frac{V^2}{T} = \frac{V^3}{L} \quad (5.54)$$

Combinando a equação anterior com a definição para escala de comprimento de Kolmogorov é possível obter uma relação entre as escalas de comprimento e o número de Reynolds das grandes escalas (comparável ao número de Reynolds usualmente definido nos problemas típicos de mecânica dos fluidos), como apresentado a seguir:

$$\eta = \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \left(\frac{v^3 L}{V^3}\right)^{1/4} = \frac{v^{3/4} L^{1/4}}{V^{3/4}} \frac{L^{3/4}}{L^{3/4}} = \frac{v^{3/4}}{V^{3/4}} L \Rightarrow$$

$$\frac{\eta}{L} = \text{Re}^{-3/4} \quad (5.55)$$

O mesmo procedimento conduz às relações para velocidade e tempo (Pope, 2009, p.186):

$$\frac{U}{V} = \text{Re}^{-1/4} \quad (5.56)$$

$$\frac{t_\eta}{T} = \text{Re}^{-1/2} \quad (5.57)$$

5.2.5 Espectro de energia

As relações anteriores mostram de que maneira as grandes escalas estão relacionadas com as escalas de Kolmogorov. É notável que para números de Reynolds típicos de escoamentos turbulentos (10^5 em tubulações industriais, por exemplo) a relação entre escalas seja tão grande. Pensando na quantidade mínima de números reais necessários para descrever completamente o estado físico de um sistema (fluido no interior de uma tubulação, por exemplo), o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento tridimensional seria igual ao cubo de L/η e, portanto, igual a $\text{Re}^{9/4}$ (Landau e Lifshitz, 1987). Isto sugere que um escoamento turbulento possui uma grande quantidade de escalas intermediárias entre as microescalas (que possuem pouca energia) e as grandes escalas (portadoras de grande quantidade de energia proveniente de agentes externos) o que permite concluir também que há um considerável espectro de energia, já que cada escala possui certa quantidade de energia associada a ela. É por esta razão que o uso de simulação numérica direta é extremamente custoso para elevados números de Reynolds.

Para obter o espectro de energia $E(\kappa)$ mencionado como uma função do número de ondas κ , Kolmogorov utilizou, mais uma vez, a taxa de dissipação de energia e a viscosidade cinemática (além das variáveis citadas). Como resultado da análise dimensional, dois parâmetros adimensionais foram obtidos, relacionados a seguir por meio da função genérica Φ (Schulz, 2001):

$$\frac{E(\kappa)}{v^{5/4} \varepsilon^{1/4}} = \Phi \left[\kappa \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (5.58)$$

A experimentação sugere que o espectro de energia possa ser representado como uma potência do número de ondas, condição que possibilita escrever a função genérica Φ como uma lei de potência em relação ao parâmetro adimensional que ela envolve (porque o número

de ondas está presente apenas neste parâmetro), como explica Schulz (2001). Sendo A uma constante a ser determinada pela via experimental e, seguindo a idéia anterior, tem-se:

$$\frac{E(\kappa)}{v^{5/4}\varepsilon^{1/4}} = A \left[\kappa \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right]^x \tag{5.59}$$

Pretendendo avaliar x na equação anterior, Kolmogorov admitiu que a viscosidade cinemática, considerada relevante nos desenvolvimentos precedentes, pudesse não ser importante para alguma região do espectro de energia. Tendo isso em mente, deve-se operar a equação anterior de tal maneira que a viscosidade fique elevada a zero, desaparecendo assim a sua influência na relação entre as variáveis. Para tanto, segue-se os seguintes desenvolvimentos algébricos:

$$E(\kappa) = v^{5/4}\varepsilon^{1/4} A \left[\kappa \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right]^x = v^{5/4}v^{3x/4}\varepsilon^{1/4} A \left[\kappa \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right]^x \Rightarrow \frac{5}{4} + \frac{3x}{4} = 0 \Rightarrow x = -5/3 \Rightarrow$$

$$E(\kappa) = A\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3} \tag{5.60}$$

O expoente 5/3 foi verificado de forma ampla por meio de experimentos oriundos de diferentes fontes, como pode ser visto na Figura 5.13, que expõe a relação entre os adimensionais $E(\kappa)(\varepsilon v^5)^{-1/4}$ e $\kappa\eta$. Por esta razão, a equação 5.60 recebeu o nome de lei dos 5/3 de Kolmogorov. Comentários acerca dos trabalhos experimentais clássicos sobre o tema podem ser encontrados em Monin e Yaglom (1965, p.479-494, v.2).

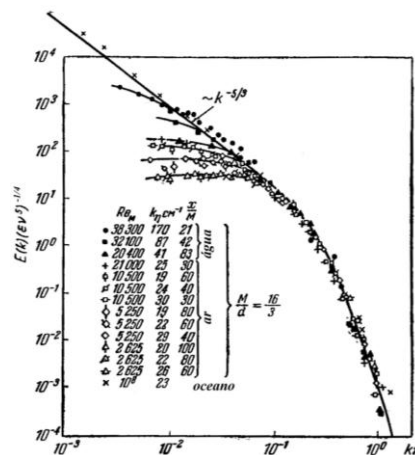


Figura 5.13 – Espectro longitudinal adimensionalizado de acordo com diferentes autores: Gibson e Schwarz (1963) para a água, Stewart e Townsend (1951) para o ar e Grant, Stewart e Moilliet (1962).
 Fonte: Monin e Yaglom (1965, p. 486, v.2).

É interessante observar que a Figura 5.13 pode ser vista como uma relação entre o espectro de energia e o número de onda, embora estejam representados ali valores adimensionais. O tamanho do turbilhão está relacionado de forma inversa com o número de onda κ (cuja dimensão é o inverso do comprimento), ou seja, os grandes vórtices possuem números de onda pequenos e os pequenos vórtices possuem números de onda grandes. Deste modo, percebe-se que a quantidade de energia associada a cada turbilhão diminui com o tamanho do turbilhão. O intervalo no espaço de número de ondas que respeita a segunda hipótese de Kolmogorov (que exclui a viscosidade cinemática) é conhecido como sub-região inercial, sendo uma parte da denominada região de equilíbrio universal, para a qual as propriedades dos escoamentos turbulentos podem ser expressas como função da viscosidade cinemática e da taxa de dissipação de energia (Schulz, 2001, p.23). Esta descrição sugere a existência de uma cascata de energia, cujo patamar mais elevado corresponde aos turbilhões maiores (com maior quantidade de energia) e o mais baixo aos turbilhões pertencentes à microescala de Kolmogorov (com menor quantidade de energia). Os turbilhões intermediários atuam como uma espécie de ponte entre os maiores, que são alimentados por agentes externos (gradientes de pressão e forças de campo), e os menores, responsáveis pela dissipação, sob a forma de calor, da maior parte da energia injetada nas grandes escalas.

A cascata de energia foi proposta por Richardson (1922), citado por Monin e Yaglom (2007, p.12-13, v.1), e, em outras palavras, a noção exposta por ele diz que os turbilhões grandes são instáveis e rompem, transferindo energia para turbilhões menores, com dimensões intermediárias. Estes também não são capazes de permanecer, de tal maneira que se desfazem e transferem a sua energia para turbilhões ainda menores. Esta cascata de energia ocorre até as pequenas escalas, onde os turbilhões são estáveis e dissipam sua energia cinética sob a forma de calor. A figura a seguir ilustra esta idéia, entretanto, destaca-se que a linearidade presente nela não é correta, sendo possível verificar este fato interpretando as equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier, como apresentado por Silveira-Neto (2003, p.72).

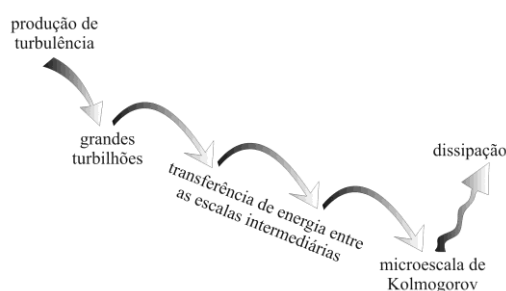


Figura 5.14 – Representação esquemática da cascata de energia. “Grandes turbilhões têm pequenos turbilhões que se alimentam de sua velocidade, e pequenos turbilhões têm turbilhões ainda menores, e assim por diante, até a viscosidade” (versos de Lewis P. Richardson citado por Porto, 2006, p.27).

5.2.6 Modelos de turbulência

Como demonstrado anteriormente, ao reescrever as equações de Navier-Stokes em termos de grandezas médias surgem variáveis desconhecidas que são as médias dos produtos de flutuações de velocidades, ou o tensor de Reynolds:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\rho \overline{V_i' V_j'})}{\partial x_j}$$

O mesmo ocorre com a equação de conservação da massa de um composto em escoamento:

$$\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} + \bar{V}_{mi} \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial x_i} = \bar{S}_A + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{AB} \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial x_i} - \overline{V_{mi}' C_A'} \right]$$

De um modo geral, os modelos de turbulência foram e são desenvolvidos com o intuito de modelar as covariâncias do tensor de Reynolds. Este item é dedicado ao tema e apresenta os modelos clássicos e modernos que possuem este papel. Inicialmente são expostas equações mais simples relacionadas à turbulência, especificamente alguns tópicos sobre a camada limite turbulenta.

Camada-limite turbulenta

Antes de expor alguns tópicos sobre os modelos de turbulência, considera-se válido que seja feita uma breve apresentação acerca da camada limite turbulenta. O escoamento turbulento possui complexidades que impediram, até então, uma análise fundamentada apenas em métodos teóricos. Por esta razão, os resultados experimentais e a análise dimensional constituem a base dos desenvolvimentos relacionados à camada limite turbulenta. Seguindo o exposto em Monin e Yaglom (1979) e Schulz (2003), pode-se listar as seguintes grandezas relevantes para a determinação da equação que descreve as velocidades em diferentes pontos:

- 1) Tensão de cisalhamento na parede (τ_0): esta grandeza depende das condições do escoamento turbulento, sendo diretamente proporcional à agitação do meio. Além disto, ela também depende da viscosidade do fluido;
- 2) Massa específica do fluido em escoamento (ρ);
- 3) A diferença de velocidade média entre dois pontos do escoamento (Δu_{12}), ao longo do eixo perpendicular à superfície sobre a qual ocorre o escoamento;
- 4) As cotas dos pontos nos quais as velocidades são consideradas (z_1 e z_2).

Com esta seleção, tem-se cinco variáveis envolvidas no problema. Utilizando o teorema de Vashy-Buckingham, pode-se verificar que existem dois números adimensionais que descrevem o fenômeno observado:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta u_{12}}{\sqrt{\tau_0 / \rho}} \quad (5.61)$$

$$\Pi_2 = \frac{z_2}{z_1} \quad (5.62)$$

Reconhece-se em Π_1 a definição de velocidade de cisalhamento:

$$u^* = \sqrt{\tau_0 / \rho} \quad (5.63)$$

Seguindo os procedimentos usuais da análise dimensional, pode-se escrever:

$$\Phi\left(\frac{\Delta u_{12}}{u^*}, \frac{z_2}{z_1}\right) = 0 \quad (5.64)$$

Φ é uma função genérica. A equação 5.64 também pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\frac{u(z_2) - u(z_1)}{u^*} = \frac{\Delta u_{12}}{u^*} = \Phi_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad (5.65)$$

A forma da função Φ_1 ainda não é conhecida. Uma maneira de abordar o problema consiste em utilizar a seguinte igualdade (Monin e Yaglom, 1979):

$$\Phi_1\left(\frac{z_3}{z_2}, \frac{z_2}{z_1}\right) = \Phi_1\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \Phi_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad (5.66)$$

A equação 5.65 pode ser reescrita para diferentes pontos ao longo de z , além dos pontos 1 e 2. Com tal condição, pode-se demonstrar a equação 5.66 da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta u_{13}}{u^*} = \Phi_1\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \text{ e } \frac{\Delta u_{23}}{u^*} = \Phi_1\left(\frac{z_3}{z_2}\right), \text{ portanto: } \Phi_1\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \Phi_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\Delta u_{23}}{u^*} + \frac{\Delta u_{12}}{u^*} = \frac{\Delta u_{13}}{u^*}$$

Observa-se que Φ_1 deve ser tal que, aplicada ao produto de duas grandezas, opere no sentido de ser igual à soma da função aplicada às grandezas em separado. A função que atende a este requisito é a logarítmica, multiplicada por um coeficiente genérico "A". Adotando \ln para a função Φ_1 , tem-se:

$$\frac{u(z_2) - u(z_1)}{u^*} = A \ln(z_2) - A \ln(z_1) \quad (5.67)$$

Com o intuito de obter uma expressão envolvendo apenas parâmetros adimensionais, é realizada uma nova análise dimensional com as seguintes variáveis: τ_0 , ρ , $u(z)$, z e ν . Nota-se que a tensão de cisalhamento na parede e a massa específica foram mantidas. No lugar da diferença de velocidades, considera-se agora a velocidade em um ponto ($u(z)$), a cota correspondente (z) e a viscosidade cinemática, cuja relevância depende da posição z . Após o uso do teorema de Vashy-Buckingham, pode-se escrever:

$$\frac{u(z)}{u^*} = \Phi_2\left(\frac{zu^*}{\nu}\right) \quad (5.68)$$

A representação dada pela equação 5.68 é denominada lei de parede. O próximo passo deste desenvolvimento consiste em multiplicar, na equação 5.67, z_1 e z_2 por u^*/ν :

$$\frac{u(z_2)}{u^*} = A \ln\left(\frac{z_2 u^*}{\nu}\right) + \frac{u(z_1)}{u^*} - A \ln\left(\frac{z_1 u^*}{\nu}\right) \quad (5.69)$$

As duas últimas parcelas do segundo membro estão associadas à cota de referência, a partir da qual a função logarítmica é válida. Observando a equação 5.69, o primeiro membro é um adimensional, usualmente denotado por u^+ . A cota adimensionalizada é representada por y^+ . Com esta simbologia, a equação para a velocidade na camada limite turbulenta passa a ser:

$$u^+ = A \ln(y^+) + B \quad (5.70)$$

em que:

$$\begin{cases} u^+ = \frac{u(z_2)}{u^*} \\ y^+ = \frac{z_2 u^*}{\nu} \\ B = \frac{u(z_1)}{u^*} - A \ln\left(\frac{z_1 u^*}{\nu}\right) \end{cases} \quad (5.71)$$

Na equação 5.70, $A = 1/\kappa$, sendo κ a constante de von Kármán, cujo valor médio é próximo de 0,40 ou 0,41 (ver Durst, 2008, p.582 e White, 2006, p.417), embora este número possa variar para escoamentos com sólidos em suspensão. B é a variável que envolve a cota de referência determinada pela via experimental. Nota-se que B depende da viscosidade cinemática, da velocidade de cisalhamento e de z_1 , portanto, B é função das condições de

escoamento de um determinado fluido. Observa-se que o perfil logaritmico é limitado devido à singularidade em $y^+=0$ ou $z_1=0$. Com o intuito de representar a região correspondente à subcamada viscosa, considera-se o seguinte desenvolvimento. Para esta região, onde os turbilhões não podem subsistir, aplica-se a lei da viscosidade de Newton, que pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\frac{\tau}{\rho u_*^2} = \frac{du^+}{dy^+} \quad (5.72)$$

Junto ao contorno sólido $\tau=\tau_0$, portanto:

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow u^+ = y^+ \quad (5.73)$$

O perfil de velocidades linear na subcamada viscosa, obtido de tal maneira, está de acordo com a experimentação. A região entre a subcamada viscosa e o escoamento turbulento é denominada região de amortecimento ou camada de amortecimento. Para esta camada é comum utilizar o perfil logaritmico com valores e A e B diferentes. A seguir é apresentado um resumo das equações correspondentes a cada uma das três camadas, incluindo uma expressão para a região de amortecimento:

1) *Para a subcamada viscosa:*

$$u^+ = y^+ \quad (\text{válido para } 0 < y^+ < 5)$$

2) *Para a região de amortecimento:*

$$u^+ = 5,0 \ln(y^+) - 3,05 \quad (\text{válido para } 5 < y^+ < 30)$$

3) *Para a região de escoamento turbulento:*

$$u^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5 \quad (\text{válido para } 30 < y^+ < 400)$$

O valor de $B = 5,5$ para a região de escoamento turbulento corresponde a um valor médio calculado com dados de diversos pesquisadores, assim como a constante de von Kármán, como ilustrado por Durst (2008, p.582). A Figura 5.15 ilustra as três regiões mencionadas e uma última região, para valores de y^+ maiores que 400. Não há comportamento assintótico para a função logaritmica quando y^+ tende ao infinito, o que revela a necessidade de outro desenvolvimento para a porção superior da camada limite turbulenta. Já foram conduzidos estudos para tal região, sendo um dos resultados mais relevantes a

denominada “lei da esteira”, de Coles (ver White, 2006, p.421 e Schulz, 1985). Para escoamentos laminares em tubos, por exemplo, sabe-se que o efeito da rugosidade superficial pode ser desprezado, sendo válidas as equações obtidas a partir das equações de Navier-Stokes mesmo para tubos rugosos. Entretanto, o escoamento turbulento sofre de forma considerável a influência da rugosidade. A subcamada viscosa estende-se apenas até y^+ próximo de 5. Por esta razão, não são raros os escoamentos que ocorrem sobre superfícies cuja rugosidade absoluta equivalente é tal que a subcamada viscosa deixa de existir. Em casos como esse a Figura 5.15 é alterada com o deslocamento do perfil de velocidades para baixo e para a direita, condição que também pode ser demonstrada por meio dos resultados de Nikuradse (Porto, 2006; White, 2006, p.431).

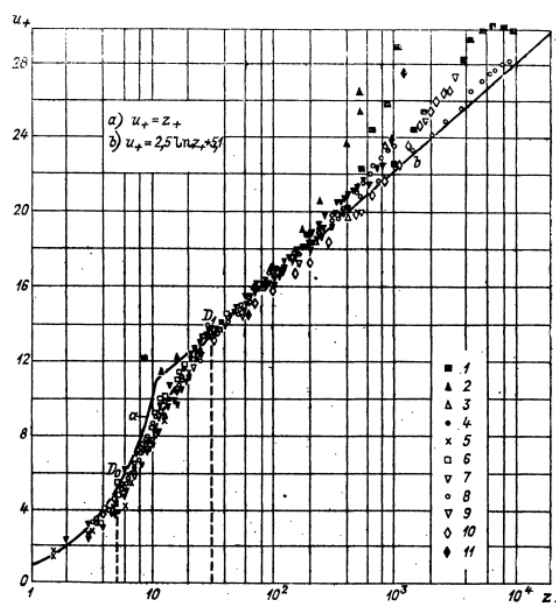


Figura 5.15 – Camada limite turbulenta: observa-se uma excelente concordância entre o perfil logarítmico e os pontos experimentais. Para a região externa, ocorrem perfis de velocidades que podem variar dependendo do campo de pressões ou se o escoamento ocorre em placas planas ou tubos, por exemplo.

Fonte: Monin e Yaglom (1979)

Espessura da camada limite

A espessura da camada limite turbulenta (δ) em função da posição (x) ao longo de um conduto é uma informação de grande relevância para diversas aplicações da mecânica dos fluidos e da hidráulica. Pode-se mencionar, por exemplo, o escoamento ao longo de canais vertedores. Um caminho relativamente simples e adequado para obtenção de equações semi-empíricas para $\delta(x)$ consiste em utilizar a formulação integral de von Kármán, representada pela seguinte equação:

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho V V dy + V_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho V dy + \frac{dV_{\infty}}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_{\infty} dy \quad (5.74)$$

em que $x_1=x$, $x_2=y$ e $V_1 = V$. Resultados experimentais apresentados por Schlichting (2000) e outros autores mostram que é possível aproximar a função $V=V(y)$ por meio de uma lei de potência do tipo:

$$\frac{V}{V_{\infty}} = C \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \quad (5.75)$$

Nesta equação C e n são assumidos como constantes, embora n possa depender do número de Reynolds e da rugosidade do contorno sólido. Cabe mencionar que Utilizando a equação 5.74 com o perfil de velocidades dado pela equação 5.75, pode-se efetuar a integrações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho V V dy + V_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho V dy = -V_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho C \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2n} dy + V_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho C \left(\frac{y}{\delta} \right)^n dy \Rightarrow \\ \frac{\tau_{yx}}{\rho C V_{\infty}^2} &= \frac{d\delta}{dx} \left(\frac{n}{2n^2 + 3n + 1} \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Observa-se que, para resolver a equação diferencial ordinária 5.76 é necessário conhecer uma relação entre a tensão de cisalhamento e a espessura da camada limite. Com base em informações empíricas, pode-se utilizar a seguinte aproximação:

$$\frac{\tau_{yx}}{C_1 \rho V_{\infty}^2} = \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^N \quad (5.77)$$

em que C_1 e N são assumidos como constantes e v = viscosidade cinemática. De acordo com Schlichting (1968), a aproximação empírica de Blasius para o cálculo da tensão de cisalhamento média em escoamentos turbulentos sobre placas planas lisas tem a forma:

$$\frac{\tau_{yx}}{0,0225 \rho V_{\infty}^2} = \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{1/4} \quad (5.78)$$

Combinando as equações 5.76 e 5.77, obtém-se:

$$C_1 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^N = C \frac{d\delta}{dx} \left(\frac{n}{2n^2 + 3n + 1} \right) \quad (5.79)$$

Separando as variáveis e integrando, vem:

$$C_1 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^N \int dx = C \left(\frac{n}{2n^2 + 3n + 1} \right) \int \delta^N d\delta \Rightarrow$$

$$C_1 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^N x = C \left(\frac{n}{2n^2 + 3n + 1} \right) \frac{\delta^{N+1}}{N+1} + K \quad (5.80)$$

K é uma constante de integração que pode ser igual a zero se for determinada assumindo a simplificação de que em $x=0$, $\delta=0$ (hipótese válida apenas se a extensão correspondente ao escoamento laminar e de transição for desprezível). Com essa hipótese a equação 5.80 pode ser reescrita, após algumas manipulações algébricas, com a seguinte forma:

$$\frac{\delta}{x} = \left[(N+1) \frac{C_1}{C} \left(2n + 3 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{v}{V_\infty x} \right)^N \right]^{\frac{1}{N+1}} \quad (5.81)$$

Com os valores $C = 1$, $n = 1/7$ (expoente médio), $C_1 = 0,0225$ e $N = 1/4$, a equação 5.81 assume a seguinte forma:

$$\frac{\delta}{x} = 0,37 \text{Re}_x^{-1/5} \quad (5.82)$$

em que $\text{Re}_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$.

Modelos de turbulência “sem equações”

Os modelos de turbulência sem equações são aqueles que não possuem equações diferenciais parciais além das equações de conservação escritas em termos de grandezas médias. Uma idéia inicial sobre este tipo de modelo foi apresentada quando o coeficiente de difusão turbulenta foi adotado na equação de conservação de massa de um composto em um escoamento. Para as equações de Navier-Stokes, a proposta de Boussinesq (1877) consiste em introduzir o conceito de viscosidade turbulenta (tensor denotado por μ_t . Esta viscosidade também é chamada de coeficiente de Boussinesq, sendo muitas vezes apresentada como uma viscosidade cinemática turbulenta ν_t) que, assim como a difusividade turbulenta, é função do escoamento e não uma propriedade do fluido. Observando a equação 5.13, reescrita a seguir, pretende-se modelar o tensor formado pelas médias dos produtos das flutuações.

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\rho \overline{V_i' V_j'})}{\partial x_j} \quad (5.13)$$

Com o modelo de Boussinesq o tensor desviador de Reynolds é representado por:

$$-\rho \overline{V_i' V_j'} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.83)$$

Nesta equação k é a energia cinética turbulenta, definida como a metade do traço do tensor de Reynolds:

$$k = \frac{1}{2} \overline{V_i' V_i'} \quad (5.84)$$

É interessante notar que a equação 5.83 é análoga à equação constitutiva para um fluido newtoniano, desde que $V_{i,i} = 0$:

$$\sigma_{ij} + p \delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.85)$$

A equação 5.13 pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial (\rho \overline{V_i' V_j'})}{\partial x_j} \quad (5.86)$$

Utilizando a equação 5.83, obtém-se:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \quad (5.87)$$

Agrupando a pressão com o termo que contém a energia cinética turbulenta, a equação assume a seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \rho \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{g}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (5.88)$$

A soma da viscosidade dinâmica com a viscosidade turbulenta pode ser chamada de viscosidade efetiva, sendo dependente de x_i e t devido à viscosidade turbulenta. O segundo termo do segundo membro entre parênteses é a pressão média modificada (Pope, 2009, p.93).

Comentários sobre o modelo de Boussinesq

Cabe ressaltar que a viscosidade turbulenta, para o caso geral, é função da posição e do tempo em um escoamento turbulento, já que ela depende das condições de escoamento. Uma vez que a sua determinação experimental ou teórica é necessária, o problema de determinação do tensor de Reynolds foi apenas transferido para a determinação de um campo formado por viscosidades turbulentas. Nota-se também que, devido à forma final da equação, gradientes de velocidades nulos implicam ausência de tensões cisalhantes turbulentas, o que não é verdade. Tomando como exemplo um escoamento permanente e completamente desenvolvido (em média) em um conduto forçado com seção genérica, a equação 5.88 é simplificada para a seguinte forma:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(\mu + \mu_{t31}) \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\mu + \mu_{t32}) \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_2} \right] \quad (5.89)$$

Para um dado gradiente de pressões médias modificadas e uma distribuição de viscosidades turbulentas conhecida, a solução da equação 5.89 é um perfil de velocidades $V_3(x_1, x_2)$. Nas regiões desse perfil onde o gradiente de velocidades é nulo, a tensão turbulenta média também é nula. Entretanto, as componentes do tensor de Reynolds correspondentes não são necessariamente iguais a zero devido às flutuações existentes no escoamento turbulento, que correspondem ao movimento de vórtices através dessa região de gradiente de velocidades médias nulo. Definindo, por exemplo, a viscosidade turbulenta em 3-1, tem-se:

$$\mu_{t31} = -\frac{\overline{\rho V_3 V_1'}}{\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1}} \quad (5.90)$$

Portanto, se a componente de $\text{grad}(\mathbf{V})$ é igual a zero, a componente de μ_t não está definida.

A equação da continuidade em termos de grandezas médias garante que:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.91)$$

Os traços dos tensores definidos na equação 5.83 podem ser escritos com a seguinte forma:

$$\rho \left(\overline{V_1' V_1'} + \overline{V_2' V_2'} + \overline{V_3' V_3'} \right) = -2\mu_t \left(\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_3} \right) + 2\rho k \quad (5.92)$$

Eliminando o termo correspondente à equação da continuidade é obtida a definição de k :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{V_1'V_1'} + \overline{V_2'V_2'} + \overline{V_3'V_3'}) \quad (5.93)$$

Portanto, conclui-se que a adoção do termo que envolve k na equação 5.83 é necessária para que $\overline{V_i'V_i'} \neq 0$.

Comprimento de mistura de Prandtl

Prandtl, em 1925, propôs uma forma de determinação da viscosidade turbulenta com base em argumentos físicos. Conhecida como teoria do comprimento de mistura, a sua idéia está baseada em uma analogia com o conceito de livre caminho médio molecular da teoria cinética dos gases. De acordo com Prandtl, $\overline{V_1'V_2'}$ pode ser relacionado com o gradiente de velocidades médias e escalas do escoamento de acordo com a seguinte equação:

$$-\overline{V_1'V_2'} \cong C_1 \sqrt{\overline{V_1'^2}} \sqrt{\overline{V_2'^2}} \cong C_1 \left(l_1 \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \right) \left(l_2 \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \right) \quad (5.94)$$

em que C_1 = constante de proporcionalidade, l_1 e l_2 são chamadas de comprimentos de mistura e representam o tamanho médio dos vórtices (muito maiores do que o livre caminho médio). Considerando $C_1=1$ e $l_1=l_2=l_m$, a equação 5.94 passa a ser representada por:

$$-\rho \overline{V_1'V_2'} \cong \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \right)^2 \quad (5.95)$$

Com a hipótese de Boussinesq, para um escoamento unidirecional, obtém-se:

$$-\rho \overline{V_1'V_2'} \cong \mu_t \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \quad (5.96)$$

Igualando as equações 5.95 e 5.96, o resultado é:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \right| \quad (5.97)$$

Este é o modelo do comprimento de mistura para a viscosidade turbulenta. Casos tridimensionais normalmente não são abordados por esta teoria. Observa-se que, mais uma vez, o problema de fechamento da turbulência não foi resolvido, tendo sido transferida a quantificação da viscosidade turbulenta para o comprimento de mistura, que é função de x_2 . Existem algumas propostas para o cálculo do comprimento de mistura, como apresentado por Rodi (2000), dentre as quais a conhecida equação 5.98, proposta por von Kármán (1930):

$$l_m = -\kappa \frac{\overline{\partial V_1 / \partial x_2}}{\partial^2 \overline{V_1} / \partial x_2^2} \quad (5.98)$$

Esta equação pode ser utilizada para o escoamento próximo ao contorno sólido, embora possua restrições. Em escoamentos com perfis que possuem pontos de inflexão, por exemplo, a equação não é adequada. Maiores detalhes podem ser encontrados em Monin e Yaglom (2007, p.371, v.1) e Schulz (1985, 1989), incluindo deduções. Assumindo que junto à parede o comprimento de mistura é igual a κx_2 , a equação 5.95 pode ser escrita como:

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 x_2^2 \left(\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \right)^2 \quad (5.99)$$

Para utilizar a tensão de cisalhamento no perímetro molhado, assume-se como hipótese que a tensão na parede é igual a que se desenvolve no interior do escoamento. A terceira hipótese corresponde a $\mu/\mu_t \rightarrow 0$. Tais simplificações são atribuídas a Prandtl. Utilizando a velocidade de cisalhamento e separando as variáveis, a equação 5.99 pode ser integrada, resultando em:

$$\frac{\overline{V_1}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln x_2 + C \quad (5.100)$$

A constante de integração C é determinada considerando que em z_1 a velocidade média é $u(z_1)$ e em z_2 , $u(z_2)$:

$$C = \frac{u(z_1)}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln z_1 \quad (5.101)$$

Substituindo na equação 5.100, obtém-se:

$$\frac{u(z_2)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_2}{z_1} + \frac{u(z_1)}{u^*} \quad (5.102)$$

Nota-se que o resultado obtido é idêntico ao obtido por meio de análise dimensional.

Modelos com “uma equação”

Classicamente, o coeficiente de Boussinesq foi interpretado como sendo proporcional ao produto entre as escalas de velocidade (V) e comprimento (L) que caracterizam os movimentos de estruturas pertencentes às grandes escalas do escoamento:

$$v_t \propto VL \quad (5.103)$$

De acordo com Rodi (2000, p.20-21), Kolmogorov, em 1942, e Prandtl, em 1945, sugeriram que $k^{1/2}$ é a melhor representação para a escala de velocidade associada aos grandes turbilhões, justificando tal proposta no fato deles conterem a maior parte da energia cinética. Com essa idéia, define-se a conhecida relação de Kolmogorov-Prandtl para a viscosidade turbulenta:

$$v_t = c'_\mu \sqrt{kL} \quad (5.104)$$

em que c'_μ = constante de proporcionalidade. Além da energia cinética turbulenta k , a taxa de dissipação de energia por unidade de massa, ε , também é relevante no modelo de turbulência de uma equação. Como menciona Rodi (2000, p.21), ε normalmente é modelada por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (5.105)$$

Nesta equação C_D é uma constante de proporcionalidade. Observa-se que em tal definição a taxa de dissipação de energia por unidade de massa é modelada com base nas escalas atreladas aos grandes turbilhões.

O termo modelo de turbulência com uma equação reflete o uso de uma equação diferencial parcial deduzida para representar o transporte de k . O produto médio de duas flutuações de velocidade em direções associadas aos eixos coordenados, e em pontos distintos do campo, é igual à função de correlação multiplicada pelos desvios-padrão dessas flutuações. A variação temporal da função de correlação possibilita introduzir, no equacionamento, as equações de Navier-Stokes. O fruto dessa associação é uma equação de evolução para as flutuações de velocidades que contém parcelas iguais ao produto de três flutuações de velocidade. O surgimento de tais parcelas ilustra que o problema estatístico da turbulência não é fechado. Quando se pretende descrever funções de correlação de n variáveis, sempre aparecerão parcelas envolvendo $n+1$ variáveis, sem que seja obtida uma equação adicional. Se as duas direções de duas flutuações são coincidentes e a distância entre os pontos onde atuam tais flutuações é nula, tem-se a soma dos quadrados das flutuações, gerando a equação da energia cinética turbulenta (Schulz, 2001, p.31):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{V_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{V_i' \left(\frac{V_j' V_j'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right] - \overline{V_i' V_j'} \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} - \overline{V_i' \frac{\partial V_i'}{\partial x_j}} \quad (5.106)$$

em que k é a energia cinética turbulenta, ν é a viscosidade cinemática do fluido e p' é a flutuação de pressão. Observa-se que a equação 5.106 não pode ser resolvida em conjunto com as equações de N-S médias, pois ela contém termos desconhecidos. O primeiro membro da equação é formado pela taxa de variação local de k e por um termo que representa o seu transporte advectivo. Esses termos não precisam ser modelados. O segundo membro contém termos que devem ser modelados de alguma forma para que a equação seja empregada. Seguindo o exposto em Rodi (2000), o primeiro termo, escrito a seguir, é equivalente a um termo difusivo, sendo normalmente modelado como proporcional ao gradiente de k :

$$-\overline{V_i' \left(\frac{V_j' V_j'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (5.107)$$

σ_k é uma constante empírica de difusão (Rodi, 2007, p.21) ou o número de Prandtl efetivo para difusão de energia turbulenta, como explicam Launder e Spalding (1972, p.76) e Pope (2009, p.371); $k_{,i} = \text{grad}(k)$. O segundo termo do segundo membro é modelado com a hipótese de Boussinesq, por meio do conceito de viscosidade turbulenta:

$$-\overline{V_i' V_j'} \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} \quad (5.108)$$

Para turbulência homogênea, o último termo da equação 5.106 corresponde à taxa de dissipação de energia por unidade de massa (ε). Rodi (2000, p.21) explica que esse termo é usualmente modelado com a equação 5.105:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{V_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V_i'}}{\partial x_j} = C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (5.109)$$

Substituindo as equações 5.107 a 5.109 e a equação de Kolmogorov-Prandtl na equação 5.106, obtém-se:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{V_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{c_\mu' \sqrt{k} L}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + c_\mu' \sqrt{k} L \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (5.110)$$

Em síntese, cabe destacar que o modelo apresentado está atrelado aos seguintes tópicos:

- 1) As tensões de Reynolds são obtidas por meio do conceito de viscosidade turbulenta;
- 2) A viscosidade turbulenta é definida com a equação de Kolmogorov-Prandtl, sendo função de k ;

- 3) O campo de energia cinética turbulenta é modelado com base em desenvolvimentos de estatística, tendo como consequência o surgimento de quantidades desconhecidas;
- 4) As quantidades desconhecidas que aparecem na equação de transporte de k são modeladas como apresentado anteriormente;

Nota-se que o uso da equação 5.110 requer o conhecimento dos valores de c'_μ , σ_k e C_D .

Segundo Launder e Spalding (1972), citados por Rodi (2000, p.22), é razoável adotar $\sigma_k = 1,0$ e $c'_\mu C_D = 0,08$. As equações 5.104 e 5.105 permitem escrever:

$$L = \frac{v_t}{c'_\mu \sqrt{k}} = C_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow c'_\mu C_D = \frac{\varepsilon v_t}{k^2} \quad (5.111)$$

Resultados obtidos por Kim *et al.* (1987), citado por Pope (2009, p.371), com o uso de simulação numérica direta de um escoamento em um canal para $Re = 13750$, mostram que $c'_\mu C_D$ é função de y^+ , sendo aproximadamente constante e com valor médio próximo de 0,09 para $60 < y^+ < 400$. Também é necessário especificar a distribuição de L (comprimento característico para os maiores turbilhões). A grande escala de turbulência, como discutido anteriormente, foi definida inicialmente por Taylor a partir da função de correlação entre as flutuações de velocidades. Como explica Schulz (2001, p.34), L pode ser quantificado a partir de medidas espectrais. Uma revisão sobre modelos utilizados para o cálculo de L pode ser encontrada em Rodi (2000, p.22-24). Além do modelo de turbulência fundamentado no transporte de k e nas considerações precedentes, existem outras propostas de uma equação para representar escoamentos turbulentos. Pode-se mencionar, por exemplo, os trabalhos de Bradshaw *et al.* (1967, 1973), descritos por Rodi (2000).

Modelos com duas equações: Modelo de turbulência $k-\varepsilon$

O modelo de turbulência $k-\varepsilon$ é um clássico da turbulência empregado frequentemente em softwares livres e comerciais. Ele possui este nome devido à introdução de uma equação diferencial parcial para o cálculo da taxa de dissipação de energia por unidade de massa (ε). O cálculo de k é efetuado com a mesma equação do modelo anterior. Uma das vantagens associadas a este caminho consiste em que, ao resolver uma equação para ε , não é necessário modelar o comprimento característico L . Em resumo, o modelo $k-\varepsilon$ consiste em:

- 1) A equação para o transporte de k é utilizada;
- 2) Utiliza-se uma equação para o transporte de ε ;
- 3) A viscosidade cinemática turbulenta é modelada com a equação 5.111.

O cálculo da taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa é realizado para altos números de Reynolds, quando a isotropia local acontece. Neste caso, tem-se:

$$\varepsilon = v_t \overline{\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}} \quad (5.112)$$

O segundo membro desta equação é igual à viscosidade turbulenta multiplicada pela flutuação da vorticidade. As equações de Navier-Stokes podem ser utilizadas para deduzir uma equação exata para as flutuações de vorticidade e, conseqüentemente, para ε . Entretanto, tal dedução envolve correlações complexas, cujo comportamento é pouco conhecido, sendo necessária a adoção de consideráveis simplificações para que a equação seja utilizável. Após a aplicação de tais simplificações, a equação resultante é (Rodi, 2000, p.28):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{V_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (P + G) (1 + C_{\varepsilon 3} Rf) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.113)$$

P e G foram adotados apenas para simplificar a escrita da equação, sendo definidos como:

$$P = v_t \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} \quad (5.114)$$

$$G = \beta g_i \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} \quad (5.115)$$

em que σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, $C_{\varepsilon 3}$ são constantes ou parâmetros empíricos resultantes das simplificações necessárias para a obtenção do modelo, b , g_i e Rf são parâmetros associados aos efeitos oriundos do empuxo, geralmente desprezíveis nos escoamentos usuais (Schulz, 2001, p.32) e σ_t é o número de Prandtl turbulento (para transferência de calor) ou de Schmidt turbulento (para transferência de massa). Com a equação 5.111, a viscosidade turbulenta é obtida de forma imediata, sendo calculada por meio da seguinte equação:

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.116)$$

em que c_μ é uma constante.

Constantes empíricas

O uso do modelo k- ε só é possível se forem conhecidos valores ou expressões matemáticas para os parâmetros empíricos mencionados. Como explica Rodi (2000, p.28), em um

escoamento turbulento gerado por grades oscilantes, os termos de difusão e produção P+G são nulos, restando apenas $C_{\varepsilon 2}$ nas equações para k e ε . Para este tipo de escoamento, observa-se um movimento preferencial em apenas uma direção (x_1) e uma característica de escoamento plenamente desenvolvido (em média), ou seja, perfis de velocidades que não se alteram ao longo de x_1 . Com tais considerações, para acelerações locais desprezíveis, as equações 5.110 e 5.113 são simplificadas para a seguinte forma:

$$\overline{V}_1 \frac{dk}{dx_1} = -\varepsilon \quad (5.117)$$

$$\overline{V}_1 \frac{d\varepsilon}{dx_1} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.118)$$

Estudos experimentais mostram que o decaimento de k pode ser modelado com uma lei de potência do tipo $k = ax_1^{-n}$. Derivando essa função uma vez, obtém-se:

$$\frac{dk}{dx_1} = -nax_1^{-n-1}$$

Substituindo este resultado na equação 5.117, determina-se a expressão para ε :

$$\varepsilon = \overline{V}_1 nax_1^{-n-1}$$

Derivando uma vez em relação a x_1 , tem-se:

$$\frac{d\varepsilon}{dx_1} = (-n-1)\overline{V}_1 nax_1^{-n-2}$$

Com a equação 5.118 e a lei de potência, pode-se escrever:

$$(n+1)x_1^{-n-2} = C_{\varepsilon 2} \frac{nax_1^{-2n-2}}{k} \Rightarrow C_{\varepsilon 2} = ax_1^{-n} \frac{(n+1)x_1^n}{na} = \frac{(n+1)}{n}$$

Seguindo esses procedimentos, se o valor de n for obtido experimentalmente, pode-se estimar o valor da constante $C_{\varepsilon 2}$. No capítulo 3 foi apresentada uma equação para o decaimento da intensidade turbulenta na superfície livre de um ressalto hidráulico (equação 3.53). Considerando a turbulência como isotrópica, por hipótese, é possível estimar o valor da constante $C_{\varepsilon 2}$, como exposto a seguir:

$$\frac{w'}{V_c} = 2,45 \left(\frac{x}{h_c} \right)^{-6/5} \Rightarrow k = \frac{3}{2} w'^2 = \frac{3}{2} 2,45^2 gh_c^{2,2} x^{-12/5} \Rightarrow C_{\varepsilon 2} = \frac{2,2+1}{2,2} \cong 1,4$$

Como padrão, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ (Rodi, 2000). Foi interessante constatar que a metodologia proposta aqui resultou em um valor para a constante próximo ao valor padrão. Os experimentos realizados no canal em degraus forneceram informações sobre a componente vertical da intensidade turbulenta. Mais uma vez, assumindo a ocorrência de turbulência isotrópica, pôde-se calcular a constante para $2,5 < z/z_i < 14$, com coeficiente de correlação igual a 0,72. Como resultado foi obtido $n = 0,46$, o que implica $C_{\varepsilon 2} = 3,17$. Este número aproximadamente 1,7 vezes maior que o valor padrão.

Para regiões de um escoamento turbulento para as quais é válida a hipótese do equilíbrio local, tem-se $P=\varepsilon$. Com essa hipótese, é possível determinar o valor de c_μ a partir do resultado experimental de Bradshaw *et al.* (1967), que obtiveram

$$\frac{\overline{V_1'V_2'}}{k} \cong 0,3 \quad (5.119)$$

Com a hipótese de Boussinesq e a equação anterior, pode-se escrever:

$$-\frac{\overline{V_1'V_2'}}{k} = \frac{v_t}{k} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} = -0,3 \quad (5.120)$$

Sendo $P=\varepsilon$, tem-se:

$$\varepsilon = v_t \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} = v_t \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \quad (5.121)$$

As equações 5.116, 5.120 e 5.121 podem ser resolvidas para c_μ , tendo como resultado:

$$c_\mu = \frac{v_t}{k^2} \varepsilon = \frac{-0,3}{k} v_t \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} = 0,09$$

A constante $C_{\varepsilon 1}$ é determinada para regiões próximas à parede e com base no perfil logaritmico. Como consequência, as hipóteses atreladas à obtenção do perfil logaritmico são transferidas para essa constante. Utiliza-se também a equação para ε , simplificada de tal maneira que $D\varepsilon/Dt = G = Rf = 0$, como apresentado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (5.122)$$

Mais uma vez, emprega-se a hipótese de que $P=\varepsilon$. O resultado final é a seguinte equação:

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\varepsilon} \sqrt{c_{\mu}}} \quad (5.123)$$

Apesar da dependência de $C_{\varepsilon 1}$ em relação às demais grandezas presentes na equação 5.123, é comum utilizar o valor 1,44. De acordo com Rodi (2000, p. 29), é usual empregar os seguintes valores para as constantes do modelo k- ε : $c_{\mu} = 0,09$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_{\varepsilon} = 1,3$. Rodi (2000) comenta que esses valores são adequados para escoamentos bidimensionais em camadas limite junto a paredes, escoamentos em dutos, escoamentos cisalhantes livres, escoamentos em recirculação, jatos e camadas limite tridimensionais formadas devido às paredes. Segundo Pope (2009, p.373), a proposta do modelo k- ε padrão é atribuída aos autores Jones e Launder (1972) e melhorias com a introdução das constantes se devem a Launder e Sharma (1974). Pesquisadores que contribuíram para o seu desenvolvimento, antes dessas publicações, são: Davidov (1961), Harlow e Nakayama (1968), Hanjalić (1970) entre outros citados por Launder e Spalding (1972).

Modelos de tensões de Reynolds

Nos modelos de tensões de Reynolds é resolvida uma equação de transporte para cada componente do tensor de Reynolds e para a taxa de dissipação de energia ou outra grandeza (como ω , que é igual a ε/k , grandeza utilizada no modelo de duas equações k- ω). Com esta prática é obtida uma escala de tempo ou de comprimento para a turbulência e, conseqüentemente, não há necessidade de utilizar a viscosidade turbulenta. Isto é tido como uma vantagem considerável, pois o uso da viscosidade turbulenta é considerado um dos maiores problemas dos modelos anteriores (Pope, 2009, p. 387).

A equação diferencial parcial que representa o transporte das tensões de Reynolds é obtida a partir das equações de Navier-Stokes e das equações de Navier-Stokes médias de Reynolds. Segundo Rodi (2000, p. 34), a dedução da equação 5.124, apresentada a seguir, foi inicialmente feita por Chou (1945).

$$\frac{\overline{\partial V_i' V_j'}}{\partial t} + \overline{V_k} \frac{\overline{\partial V_i' V_j'}}{\partial x_k} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \quad (5.124)$$

Os termos T_1 a T_5 foram escritos apenas para simplificar a apresentação. O primeiro membro da equação não precisa ser modelado, pois ele contém as incógnitas atreladas a esta nova equação que compõe o sistema de equações diferenciais parciais. Entretanto, o segundo

membro, devido aos desenvolvimentos estatísticos, possui correlações desconhecidas que precisam ser modeladas de algum modo para que a equação seja utilizada.

O primeiro termo do segundo membro, T_1 , é composto por partes que o caracterizam como uma representação do transporte difusivo. Ele possui a seguinte forma:

$$T_1 = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{V'_k V'_i V'_j} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{V'_j p'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{V'_i p'}}{\partial x_j} \right) \quad (5.125)$$

O segundo termo, T_2 , é interpretado como um agente de produção de tensão e T_3 está ligado à produção de flutuação. Eles são representados como:

$$T_2 = -\overline{V'_i V'_k} \frac{\partial \overline{V'_j}}{\partial x_k} - \overline{V'_j V'_k} \frac{\partial \overline{V'_i}}{\partial x_k} \quad (5.126)$$

$$T_3 = -\beta \left(g_i \overline{V'_j \varphi} + g_j \overline{V'_i \varphi} \right) \quad (5.127)$$

em que φ é a flutuação de uma quantidade escalar. O quarto termo, T_4 , é denominado correlação entre a pressão e a deformação. Ele é um tensor que possui traço nulo e, como consequência, o esse termo não aparece na equação da energia cinética. Como explica Pope (2009, p.389), ele atua na redistribuição da energia entre as tensões de Reynolds, sendo escrito como:

$$T_4 = \frac{\overline{p' \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right)}}{\rho} \quad (5.128)$$

O termo T_6 envolve a viscosidade cinemática do fluido e representa uma dissipação viscosa:

$$T_5 = -2\nu \overline{\frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k}} \quad (5.129)$$

Modelos para os termos $T_1 - T_5$

Como mencionado, é preciso modelar cada um dos termos que envolvem quantidades estatísticas desconhecidas. No software CFX, por exemplo, o modelo de tensões de Reynolds utilizado como padrão utiliza a equação de transporte para ε , tendo a seguinte equação para o transporte das componentes do tensor de Reynolds:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\overline{\rho V_i' V_j'})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{V_k \rho V_i' V_j'} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{2}{3} C_s \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \overline{V_i' V_j'}}{\partial x_k} \right) = \\ & = P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \varepsilon + \Phi_{ij} + P_{ij,b} \end{aligned} \quad (5.130)$$

Nesta equação, P_{ij} é igual a T_2 :

$$P_{ij} = -\overline{\rho V_i' V_k'} \frac{\partial \overline{V_j'}}{\partial x_k} - \overline{\rho V_j' V_k'} \frac{\partial \overline{V_i'}}{\partial x_k} \quad (5.131)$$

O termo T_3 está relacionado a $P_{ij,b}$:

$$\begin{cases} P_{ij,b} = B_{ij} - C_{buo} \left(B_{ij} - \frac{1}{3} B_{kk} \delta_{ij} \right) \\ B_{ij} = g_i b_j + g_j b_i \end{cases} \quad (5.132)$$

Empregando o modelo de Boussinesq, b_i é modelado como:

$$b_i = \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \beta \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (5.133)$$

em que β = coeficiente de expansão térmica. Se as diferenças de densidades são levadas em consideração na formulação do modelo, escreve-se:

$$b_i = -\frac{\mu_t}{\rho \sigma_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (5.134)$$

Nestes modelos, σ_ρ é o número de Schmidt turbulento, igual a 0,9 para o modelo de Boussinesq e igual a 1,0 para o segundo modelo (eq. 5.134).

Não é possível abrir mão de uma equação de transporte para a taxa de dissipação de energia, ε , uma vez que ela aparece em cada uma das equações que modelam o transporte das componentes do tensor de Reynolds. A equação empregada com a equação 5.130 é:

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho V_k \varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon RS}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (5.135)$$

O modelo de tensões de Reynolds também pode ser empregado com coeficientes de difusão anisotrópicos. Para tal condição, a equação de transporte para as tensões de Reynolds e demais equações assumem as seguintes formas:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \overline{V_i' V_j'})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{V_k \rho V_i' V_j'} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\delta_{kl} \mu + \rho C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_k' V_l'} \right) \frac{\partial \overline{V_i' V_j'}}{\partial x_l} \right] = \\ & = P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \varepsilon + \Phi_{ij} + P_{ij,b} \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$b_i = C_S \rho \beta \frac{k}{\varepsilon \sigma_p} \overline{V_i' V_k'} \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (5.137)$$

$$b_i = -C_S \frac{k}{\varepsilon \sigma_p} \overline{V_i' V_k'} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \quad (5.138)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{V_k \varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu \delta_{kl} + c_{\varepsilon} \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_k' V_l'} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) \quad (5.139)$$

O termo T_4 atua na redistribuição da energia entre as tensões de Reynolds, conduzindo-as de certa forma a um estado isotrópico. Este termo é dividido em duas partes. Seguindo a simbologia das equações 5.130 e 5.139, escreve-se:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} \quad (5.140)$$

O primeiro termo do segundo membro é denominado “termo lento” ou termo de retorno à isotropia. O segundo termo é o termo rápido. Aqui se inicia uma apresentação muito importante. Há alguns modelos de tensões de Reynolds relacionados à equação para ε que se diferenciam em função dos modelos empregados para os referidos termos. Os modelos denominados LRR-IP e LRR-QI, propostos por Launder, Reece e Rodi (1975) utilizam correlações lineares. A abreviação IP denota “*Isotropization of Production*”, o que denota a influência exercida pelo termo matemático na tendência à isotropia presente no modelo. O modelo LRR-IP é o mais simples dos três a serem apresentados, sendo composto por:

$$\begin{cases} \Phi_{ij,1} = -C_1 \rho \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{V_i' V_j'} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \\ \Phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \end{cases} \quad (5.141)$$

em que $C_1 = 1,8$, $C_2 = 0,6$ e P é dado por $0,5P_{ii}$. A abreviação QI significa “Quasi-Isotropic”. O termo lento para a condição quase isotrópica é o mesmo do modelo IP e o termo rápido é calculado por meio da seguinte equação:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{ij,2} &= -\frac{C_2+8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{30C_2-8}{55} \rho k (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}) - \dots \\ &+ \frac{8C_2-2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ D_{ij} &= -\rho \overline{V_i V_k} \frac{\partial \overline{V_k}}{\partial x_j} - \rho \overline{V_j V_k} \frac{\partial \overline{V_k}}{\partial x_i} \end{aligned} \right. \quad (5.142)$$

O terceiro e último modelo apresentado aqui é o SSG, desenvolvido por Speziale, Sarkar e Gatski (1991). Estes pesquisadores utilizaram uma relação quadrática para a correlação dada pela equação 5.140, tendo obtido:

$$\Phi_{ij,1} = -\rho \epsilon \left[C_{s1} a_{ij} + C_{s2} \left(a_{ij} a_{kj} - \frac{1}{3} a_{mn} a_{mn} \delta_{ij} \right) \right] \quad (5.143)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,2} &= -C_{r1} P a_{ij} + C_{r2} \rho k S_{ij} - C_{r3} \rho k S_{ij} \sqrt{a_{mn} a_{mn}} + \dots \\ &+ C_{r4} \rho k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + C_{r5} \rho k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \end{aligned} \quad (5.144)$$

Estes modelos incluem um tensor anisotrópico a_{ij} , um tensor vorticidade e um tensor de deformação média, definidos, respectivamente, como:

$$a_{ij} = \frac{\overline{V_i V_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right).$$

As constantes presentes nos modelos apresentados foram escritas a seguir, na Tabela 5.1. Os três modelos utilizam $\sigma_p = 1,0$ se b_i for calculado com base na diferença de densidades. Quando é selecionado o modelo de Boussinesq, os valores empregados são aqueles da Tabela 5.1. Aqui é encerrada esta breve apresentação de alguns modelos de turbulência.

Tabela 5.1 – Constantes dos modelos de tensões de Reynolds

Modelo	C_{iRS}	σ_{eRS}	c_s	c_e	c_{e1}	c_{e2}	C_{s1}	C_{s2}	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}	σ_p
LRR-IP	0,1152	1,10	0,22	0,18	1,45	1,9	1,8	0	0	0,8	0	0,6	0,6	0,9
LRR-QI	0,1152	1,10	0,22	0,18	1,45	1,9	1,8	0	0	0,8	0	0,873	0,655	0,9
SSG	0,1	1,36	0,22	0,18	1,45	1,83	1,7	-1,05	0,9	0,8	0,65	0,625	0,2	2/3

Fonte: Adaptado do tutorial do software CFX[®]

5.3 Considerações finais

Este capítulo foi escrito com o intuito de expor uma breve revisão sobre transição e turbulência. Não é preciso mencionar que se trata de uma síntese. Uma ampla revisão

bibliográfica apenas sobre transição, incluindo suas equações e origens das mesmas, por exemplo, certamente ocuparia um considerável número de páginas. Existem outros modelos de turbulência. O modelo $k-\varepsilon$, por exemplo, possui uma variação, como, por exemplo, RNG $k-\varepsilon$, que se utiliza de conceitos da teoria de renormalização de grupo aplicada a Navier-Stokes. Neste modelo as equações de transporte são as mesmas, mas as constantes são definidas de maneira diferente e uma das constantes é substituída por uma função. Além deste modelo de duas equações, pode-se citar o modelo $k-\omega$, que no lugar de ε utiliza a relação $\omega = \varepsilon/k$. Este modelo também possui uma variação denominada “Wilcox $k-\omega$ model”. O modelo de tensões de Reynolds apresentado é baseado na equação de transporte para ε , sendo apenas uma das possibilidades. Há também modelos baseados na equação de ω , do modelo $k-\omega$. Finalmente, apenas como um comentário adicional, os modelos mencionados são denominados de “a posteriori” por Schulz et al. (2011 a, b), por introduzirem conceitos novos à formulação após construir as equações de transporte. Os autores propõem uma formulação denominada “a priori”, que considera a introdução de conceitos novos antes de construir as referidas equações. Esta formulação foi aplicada apenas para um caso simplificado de transferência unidimensional de massa, mas mostra-se promissora para mais aplicações.

CAPÍTULO 6

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Sumário

6.1 Introdução	295
6.2 Métodos numéricos	295
6.2.1 Equações diferenciais parciais	295
Classificação das equações	296
Condições de contorno e iniciais	297
Erros e malhas	298
Consistência	300
Estabilidade	301
Convergência.....	306
Ordem de convergência para a malha.....	306
Conservação	307
Consistência física de soluções numéricas	307
6.3 Simulações numéricas	311
6.3.1 Considerações iniciais	311
6.3.2 escoamento deslizante sobre turbilhões – Experimento 18	311
6.3.3 escoamento deslizante sobre turbilhões: Vertedor sem comportas.....	314
Simulação SF 1.1: 1V:0,75H, $s = 0,6$ m, $q = 30$ m ² /s.	319
Simulação SF 1.2: 1V:0,75H, $s = 0,6$ m, $q = 25$ m ² /s.	323
Simulações SF 1.3 a SF 1.7: 1V:0,75H, $s = 0,6$ m, q entre 2 m ² /s e 20 m ² /s.....	325
Simulações SF 1.8 a SF 1.11: 1V:0,75H, $s = 2,4$ m, q entre 15 m ² /s e 30 m ² /s.....	327
Simulações SF 1.12 a SF 1.18: 1V:1H, $s = 0,6$ m, q entre 5 m ² /s e 40 m ² /s.	328
Simulações SF 1.19 a SF 1.25: 1V:6,67H, $s = 0,6$ m, q entre 5 m ² /s e 40 m ² /s.....	330
Simulações SF 1.26 a SF 1.31: 1V:5H, $s = 0,6$ m, q entre 5 m ² /s e 30 m ² /s.	331
6.4 Análise dos resultados (Skimming flow).....	332
6.4.1 Posição de início da aeração	332
6.4.2 Profundidade no início da aeração.....	335
6.4.3 Relação entre h_A/L_A e L_A/k	336
6.5 escoamento em quedas sucessivas	336

6.1 Introdução

Os capítulos 4 e 5 foram escritos com a intenção de apresentar uma breve revisão sobre conceitos essenciais relacionados à Mecânica dos Fluidos e a Turbulência. Foi apresentada grande parte das equações diferenciais parciais resolvidas neste trabalho com o código escolhido. Tais equações representam os princípios de conservação de massa e a segunda lei de Newton para escoamentos monofásicos e multifásicos, representações aproximadas para a turbulência (modelos de turbulência) e equações constitutivas, em todos os casos, solucionadas para escoamentos incompressíveis. Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos inéditos obtidos para escoamentos em canais em degraus. Antes, entretanto, resta discutir sobre métodos numéricos. Isto é feito brevemente a seguir.

6.2 Métodos numéricos

Embora sejam preferíveis por diversas razões, as soluções analíticas para equações diferenciais parciais são raras, principalmente em problemas de Mecânica dos Fluidos. Este fato é justificado por diferentes características dos problemas desta área, como, por exemplo, a existência freqüente de geometrias complicadas, a não linearidade das equações governantes e as possíveis condições de contorno. Deste modo, torna-se inevitável o uso de técnicas numéricas para obtenção de soluções. A essência dos métodos numéricos para EDP's está ligada à discretização das mesmas, que são válidas para o contínuo. Tal discretização transforma o problema contínuo em um problema finito, ou seja, enquanto a solução analítica de uma equação diferencial é válida para os infinitos pontos que compõem o domínio da solução, a solução numérica é válida para uma quantidade finita de pontos. Existem diferentes métodos capazes de transformar as equações originais em formas discretas, como o método das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, elementos de contorno e métodos espectrais. Aqui é apresentada uma síntese de aspectos básicos relacionados à mecânica dos fluidos computacional. Métodos clássicos como diferenças finitas, volumes finitos, entre outros não são apresentados. Optou-se por uma exposição de tópicos como: classificação das equações diferenciais parciais; estabilidade, consistência e convergência; ordem de convergência para a malha. Cabe mencionar que foram seguidos, principalmente, os textos de Dautray e Lions (2000) e Ferziger e Perić (2002) nesta breve revisão.

6.2.1 Equações diferenciais parciais

Os fenômenos pertencentes à mecânica dos fluidos e à engenharia hidráulica normalmente ocorrem em regime variável e em três dimensões. Como consequência, as equações que

modelam tais fenômenos são equações diferenciais parciais. Até mesmo quando a hipótese de escoamento unidimensional é considerada válida para aplicações práticas, se há dependência temporal, a solução procurada é uma função $\Phi(t,x)$ e a equação diferencial é parcial. É verdade que em casos específicos, certas hipóteses funcionam razoavelmente bem possibilitando o uso de modelos que são equações diferenciais ordinárias, como, por exemplo, a equação de Blasius e a equação do escoamento permanente gradualmente variado. Este item tem como objetivo expor alguns tópicos introdutórios relacionados à solução numérica de equações diferenciais parciais. Algumas EDP's mais simples, resultantes dos modelos completos obtidos das leis de conservação são utilizadas em alguns exemplos. Essas formas simplificadas, em alguns casos, podem ser classificadas segundo um critério especial que separa as equações de acordo com a natureza das mesmas. Este assunto é abordado a seguir.

Classificação das equações

Para um processo difusivo bidimensional em um meio B estacionário, a equação de conservação de massa para um composto A em um escoamento é simplificada para a seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + S_A \quad (6.1)$$

Recordando as origens da equação, conclui-se imediatamente que ela representa um processo difusivo que evolui com o tempo, podendo incluir ou não a existência de fontes e sumidouros (S_A). Uma equação deste tipo é classificada como parabólica. Se o perfil $C(x,y)$ for independente do tempo, a equação deixa de ser parabólica e passa a ser classificada como elíptica. Um escoamento laminar completamente desenvolvido e em regime permanente em um conduto pode ser modelado com a seguinte forma simplificada das equações de Navier-Stokes:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.2)$$

Nesta equação $w(x,y)$ é a componente da velocidade paralela ao eixo z , que é perpendicular ao plano $x-y$, p = pressão e μ a viscosidade dinâmica. O gradiente de pressões pode ser função do tempo. Sendo assim, há uma família de soluções para a equação elíptica, dependentes do instante considerado, mas independentes entre si. Na equação parabólica o

termo ∂ “variável”/ ∂t , que para a equação 6.2 seria uma aceleração local $\partial w/\partial t$, vincula as soluções pertencentes aos diferentes instantes. Para determinar a classe de uma EDP, considera-se a seguinte equação, em analogia às cônicas estudadas em geometria analítica:

$$a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + d \frac{\partial F}{\partial x} + e \frac{\partial F}{\partial y} + fF = g \quad (6.3)$$

em que: a, b, c, d, e, f e g são funções de x e y ou constantes. As funções a, b e c são tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ e $F(x,y)$ é a função incógnita do problema.

Para casos em que a, b e c são constantes, é possível classificar uma determinada equação como elíptica, parabólica ou hiperbólica. Se não são constantes, a EDP pode assumir características das três classes em função de x, y, z e t. A classificação da EDP em uma das três classes mencionadas é feita com o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta = 0$ a equação é parabólica, se $\Delta < 0$ a equação é elíptica e se $\Delta > 0$ a equação é hiperbólica. Tomando como exemplo a equação 6.2, nota-se que $F = w$, $a=c=\mu$ e $b = 0$, portanto, $\Delta = -4\mu^2 < 0$. Se o gradiente de pressões for diferente de zero a equação é chamada de equação de Poisson e se for nulo, equação de Laplace. Simplificando a equação 6.1 para o caso unidimensional em que $\partial^2 C/\partial y^2 = 0$, verifica-se que a equação resultante é parabólica, pois: $a = D_{AB} > 0$, $b=c=0$, assumindo que t é a segunda variável independente presente na equação 6.3. Um exemplo de equação hiperbólica é a equação de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (6.4)$$

Comparando com a equação 6.3, nota-se que $a = -j^2$, $b = 0$ e $c = 1$. Sendo assim, $\Delta = 4j^2 > 0$ e a equação é hiperbólica. Outros exemplos de equações hiperbólicas são: equações de Euler, equações de Saint-Venant e as equações do golpe de aríete. Para estas equações, ao calcular os autovalores da matriz convectiva, conclui-se que as equações formam um sistema hiperbólico.

Condições de contorno e iniciais

Os problemas modelados por equações elípticas nos quais são especificados valores da variável dependente no contorno do domínio são denominados problemas de Dirichlet. Se, no contorno do domínio, for especificada a derivada normal ou tangencial da variável dependente, o problema recebe o nome de problema Neumann. Pode-se também adotar uma combinação linear entre as condições de Dirichlet e Neumann, sendo este tipo denominado

condição de Robin. Finalmente, o terceiro problema ou problema misto é aquele para o qual são especificados, em uma parte do contorno, valores para a variável dependente e na parte restante as derivadas. Para equações parabólicas, além dos valores nos contornos, é necessário especificar condições iniciais em todo o domínio. As equações hiperbólicas também precisam de condições iniciais. As condições de contorno podem ser especificadas por meio de números, equações ou tabelas ou através de expressões que incorporam informações sobre o comportamento das variáveis no interior do domínio.

Especificamente sobre as equações hiperbólicas (Exemplos: equações de Saint-Venant, equações do golpe de aríete, equações Euler), é necessário conhecer os autovalores da matriz convectiva e então, a partir deles, impor adequadamente as condições de contorno respeitando o modo com o qual as informações são transportadas sobre as curvas características.

Erros e malhas

Ao representar um fenômeno físico por meio de soluções de equações diferenciais, sabe-se que existem erros associados a tais soluções que podem distanciá-las mais ou menos da realidade física. Os primeiros erros podem surgir durante a elaboração do modelo matemático. Isto ocorre porque freqüentemente são necessárias hipóteses simplificadoras para a sua construção. Tomando como exemplo as equações de conservação de massa e a equação da quantidade de movimento linear na forma diferencial, a hipótese fundamental para a dedução das mesmas é a hipótese do contínuo. Esta é uma consideração válida e que funciona satisfatoriamente desde que o meio selecionado para estudo e as escalas adotadas sejam compatíveis com a hipótese. Do mesmo modo, ao considerar que efeitos relativísticos não são importantes, está sendo feita uma hipótese simplificadora. Estas são conjecturas perfeitamente aceitáveis e os erros decorrentes delas são imperceptíveis desde que sejam respeitadas as condições que levam às conjecturas. Um exemplo de hipótese que introduz consideráveis erros na descrição matemática do problema é assumir que um fluido não-newtoniano se comporta como um fluido newtoniano.

Ao escolher um método de discretização para as equações escritas sob o ponto de vista euleriano é preciso adotar uma malha para discretização do domínio. Os problemas tratados sob o ponto de vista de Lagrange utilizam partículas ao invés de malhas. Existem diferentes tipos de malhas. A primeira classe inclui as denominadas *malhas estruturadas*. Elas são compostas por famílias de linhas de grade. Os membros de uma mesma família não se cruzam, formando interseções apenas com membros de outras famílias e apenas uma vez. Em outros termos, elas são aquelas cujas interseções entre segmentos, os nós, possuem vizinhos

bem definidos. Em uma *malha não estruturada* a identificação dos vizinhos de um determinado nó não é trivial como em uma malha estruturada. A Figura 6.1a ilustra uma seção transversal de um tubo discretizada com uma malha estruturada cartesiana. Percebe-se claramente que esta não é uma solução adequada devido à incapacidade da malha se ajustar perfeitamente ao contorno curvo do círculo. É possível obter um resultado aceitável com este tipo de malha se ela for refinada ao ponto de tornar os erros devidos ao contorno irrelevantes. Esta prática pode ser útil em problemas simples, que não exigem grandes recursos computacionais. É possível utilizar uma malha estruturada bem ajustada a contornos curvos ou inclinados. Para tanto, pode-se empregar coordenadas curvilíneas generalizadas ou fronteiras imersas, por exemplo. A Figura 6.1b ilustra o uso de uma malha não estruturada para um problema cuja geometria inclui formas curvas e inclinadas. Trata-se de um conduto semelhante ao utilizado por Tozzi (1992), desenvolvido para estudar a dissipação de energia promovida pelos degraus. Nota-se que a não uniformidade da malha é capaz de se ajustar bem aos contornos curvos.

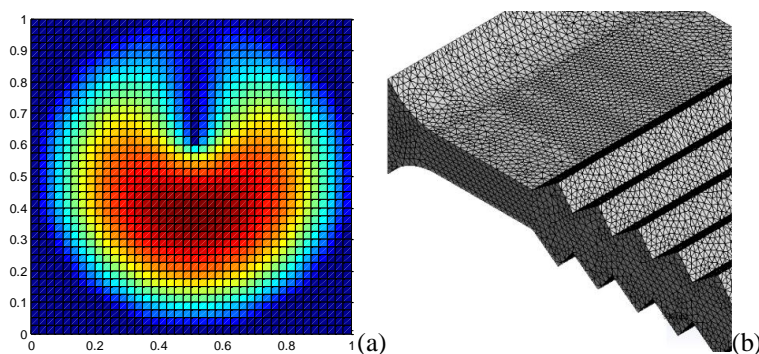


Figura 6.1 – Exemplos de malhas: (a) estruturada e (b) não-estruturada. Em (a) houve a tentativa de ajustar a malha a uma forma composta por arcos de círculos. Em (b) é possível notar que a forma triangular dos elementos da malha se ajusta melhor à forma curva.

Ao discretizar a equação diferencial é obtida uma equação modificada, que não é, evidentemente, a equação diferencial original. A diferença entre as soluções exatas obtidas com a equação discretizada e a equação original é o erro de discretização, decorrente do truncamento dos termos da série de Taylor. A solução exata da forma discreta da EDP é a solução que não inclui erros de arredondamento, sendo definida como a diferença entre a solução analítica da EDP e o erro de discretização. Os erros de arredondamento são aqueles introduzidos na solução pelo fato de uma máquina (computador, calculadora) representar os números de modo finito. Há ainda mais um tipo de erro a ser mencionado aqui, que é o erro de convergência. Este erro ocorre quando é necessário o uso de um método iterativo, como o método iterativo de Newton. A adoção deste tipo de técnica requer a imposição de um critério

de parada, que introduz o erro de convergência na solução. O erro de convergência é igual à diferença entre o resultado numérico calculado iterativamente e a solução exata da equação na forma discreta.

Consistência

A consistência de uma equação na forma discreta existe se o erro de truncamento tende a zero quando os espaçamentos da malha tendem a zero. Este é um aspecto importante, pois um dos requisitos para haver convergência do método numérico é a consistência. A verificação da consistência de uma forma discreta pode ser realizada seguindo o caminho inverso da discretização. A seguir é apresentado um exemplo para uma equação parabólica unidimensional escrita para um escalar genérico φ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (6.5)$$

Utilizando o esquema centrado de diferenças finitas para a derivada espacial e o método de Euler para a derivada temporal, a equação discretizada assume a seguinte forma (naturalmente, φ foi substituído pela variável discreta Φ):

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\Phi_{i-1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (6.6)$$

Com o objetivo de verificar a consistência da equação discretizada são empregadas as seguintes expansões em série de Taylor:

$$\Phi_{i+1}^n = \Phi_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right|_i^n + O(\Delta x)^4 \quad (6.7)$$

$$\Phi_{i-1}^n = \Phi_i^n - \Delta x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right|_i^n + O(\Delta x)^4 \quad (6.8)$$

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t)^3 \quad (6.9)$$

Substituindo as equações 6.7 a 6.9 em 6.6, obtém-se o seguinte resultado:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_i^n = \alpha \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (6.10)$$

Nota-se que a equação 6.10 contém a equação original mais o erro local de truncamento. Quando Δx e Δt tendem a zero, o erro local de truncamento tende a zero, sendo possível recuperar a equação original. Sendo assim, diz-se que a discretização é consistente com a equação diferencial original.

Estabilidade

O segundo requisito necessário para que ocorra convergência é a estabilidade. Um método numérico é estável se os erros ou perturbações presentes na solução não crescem sem limites. Esse tal crescimento descontrolado pode produzir números que atingem os limites da máquina, com valores irrealistas como 10^{200} , por exemplo. Condições de contorno ou iniciais incorretas podem ser responsáveis por este tipo de erro, assim como o acúmulo de erros de arredondamento ocorrido durante o processamento. Se as condições de contorno e iniciais forem corretas, o acúmulo de erros de arredondamento passa a ser o responsável pela instabilidade de um método numérico.

Para analisar a estabilidade de uma equação linear na forma discreta é apresentado a seguir o método de von Neumann. A referência referente a este tema utilizada neste trabalho é o livro de Dautray e Lions (2000). Como restrições, a equação deve ser linear e com espaçamento da malha constante. Para estas condições, define-se a seguinte relação:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} T^{\alpha} U^{n+1} = \sum_{\alpha} B_{\alpha} T^{\alpha} U^n \quad (6.11)$$

em que A_{α} e B_{α} são matrizes de ordem p (com p linhas e p colunas), $T^{\alpha}U$ é um operador de translação. Uma das etapas do uso do método consiste em determinar estas matrizes para uma dada equação da forma discreta. O próximo passo consiste em calcular o símbolo ou raio espectral do esquema numérico, que para coeficientes constantes é:

$$S(k) = \left[\sum_{\alpha} A_{\alpha} \exp(Ik\alpha) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{\alpha} B_{\alpha} \exp(Ik\alpha) \right] \quad (6.12)$$

em que $I =$ unidade imaginária e $k \in \mathbb{R}^m$.

Análise de estabilidade das equações de Saint-Venant

O método de Lax-Friedrichs é uma variação sutil e necessária do esquema centrado. No esquema centrado, as derivadas espaciais são aproximadas por diferenças finitas centradas de

segunda ordem no instante “n” e as temporais por diferenças finitas avançadas de primeira ordem na posição “i”. Este item contém uma aplicação do método de von Neumann às formas linearizadas das equações de Saint-Venant 1D. Como referência, cita-se o trabalho de Simões, Schulz e Porto (2010a).

$$\frac{\partial \underline{f}(q)}{\partial x} \cong \frac{\underline{f}(q)_{i+1}^n - \underline{f}(q)_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} \cong \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} \quad (6.14)$$

Há um grave problema com a escolha das aproximações 6.13 e 6.14 para os sistemas hiperbólicos de um modo geral, que é a instabilidade numérica. Para um sistema hiperbólico linear é possível provar que o esquema centrado é incondicionalmente instável. Com o intuito de verificar a estabilidade de um método numérico, normalmente é utilizada a análise de estabilidade de von Neumann, mencionada anteriormente. Como o sistema deve ser linear para que essa análise seja empregada, considera-se um estado de referência “0” que permite definir $h = h_0 + y$ e $V = V_0 + v$, em que h_0 e V_0 são constantes e y e v são perturbações em torno desses valores constantes. Inicialmente, empregando a regra do produto, a equação de Saint-Venant é reescrita na forma não-conservativa, como apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

O sistema anterior é formado pelas equações de Saint-Venant para um canal retangular (equações para águas rasas) e sem termos fonte (declividade de fundo, tensões na superfície, declividade da linha de energia). Substituindo as definições anteriores para h e V na equação 6.15 e eliminando as derivadas de constantes, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + (h_0 \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x}) + (V_0 \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x}) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (V_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}) + g \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Desprezando os termos que envolvem produtos de flutuações, o sistema 6.16 é linearizado, assumindo a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v}{\partial x} + V_0 \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Aproximada com o esquema centrado, a equação 6.17 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ v_i \end{bmatrix}^{n+1} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ v_i \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix}^n + \\ & - \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix}^n = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

A aplicação do método de von Neumann requer a identificação das matrizes A_α e B_α presentes na seguinte relação:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} T^{\alpha} U^{n+1} = \sum_{\alpha} B_{\alpha} T^{\alpha} U^n$$

Para a equação 6.18, as matrizes são:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = -B_{-1} = \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} \end{bmatrix}.$$

Note-se que $\alpha = -1$ corresponde à posição $i-1$ da malha espacial, $\alpha = 0$ ao índice i e $\alpha = 1$ ao índice $i+1$. Para $n+1$ identifica-se as matrizes A_α e para o instante n as matrizes B_α . O próximo passo consiste em calcular o símbolo do esquema numérico:

$$S(k) = \left[\sum_{\alpha} A_{\alpha} \exp(Ik\alpha) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{\alpha} B_{\alpha} \exp(Ik\alpha) \right]$$

Substituindo as matrizes, vem:

$$S(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} \end{bmatrix} (e^{Ik} - e^{-Ik}) \quad (6.19)$$

Das relações trigonométricas elementares, sabe-se que $e^{Ik} - e^{-Ik} = 2i \operatorname{sen} k$. Substituindo na equação 6.19 e somando as matrizes, vem:

$$S(k) = \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{\Delta x} I_{\text{senk}} + 1 & \frac{h_0 \Delta t}{\Delta x} I_{\text{senk}} \\ \frac{g \Delta t}{\Delta x} I_{\text{senk}} & \frac{V_0 \Delta t}{\Delta x} I_{\text{senk}} + 1 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Se o módulo de um dos autovalores do símbolo for maior do que a unidade o esquema é instável. Sendo assim, é necessário calcular os autovalores de $S(k)$, o que pode ser feito com a solução da função característica.

$$\left(\frac{V_0 \Delta t}{\Delta x} I_{\text{senk}} + 1 - \text{autov}[S(k)] \right)^2 = \frac{gh_0 \Delta t^2}{\Delta x^2} I^2 \text{sen}^2 k \Rightarrow$$

$$\text{autov}[S(k)] = \begin{cases} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 - \sqrt{gh_0}) I_{\text{senk}} + 1 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 + \sqrt{gh_0}) I_{\text{senk}} + 1 \end{cases} \quad (6.21)$$

Nota-se na equação 6.21 a definição do número de Courant (C_n):

$$C_n = \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 + \sqrt{gh_0}) \quad (6.22)$$

Teorema 1. *O esquema numérico centrado é incondicionalmente instável.*

Prova. $|\text{autov}[S(k)]| > 1 \quad \forall C_n$.

A partir dessa conclusão de cunho geral, de que o esquema centrado não é adequado para as equações linearizadas, verifica-se que as equações não lineares originais não podem ser discretizadas com esse esquema. O método de Lax e Friedrichs, já mencionado, altera o esquema centrado com o uso da seguinte aproximação para a derivada temporal:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q_{i+1}^n - \frac{1}{2}(q_{i+1}^n + q_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (6.23)$$

Seguindo os mesmos procedimentos, é possível demonstrar a condição de estabilidade do método de Lax-Friedrichs. O sistema 6.17 discretizado com este método assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ v_i \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} - 0,5 & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} - 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix}^n +$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} + 0,5 & \frac{h_0 \Delta t}{2\Delta x} \\ \frac{g \Delta t}{2\Delta x} & \frac{V_0 \Delta t}{2\Delta x} + 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix}^n = 0 \quad (6.24)$$

Portanto, o símbolo é:

$$S(k) = \begin{bmatrix} \frac{V_0 \Delta t}{\Delta x} \text{Isenk} - \cos k & \frac{h_0 \Delta t}{\Delta x} \text{Isenk} \\ \frac{g \Delta t}{\Delta x} \text{Isenk} & \frac{V_0 \Delta t}{\Delta x} \text{Isenk} - \cos k \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Calculando os seus autovalores, obtém-se:

$$\text{autov}[S(k)] = \begin{cases} \text{Isenk} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 - \sqrt{gh_0}) - \cos k \\ \text{Isenk} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 + \sqrt{gh_0}) - \cos k \end{cases} \quad (6.26)$$

Teorema 2. *O método de Lax-Friedrichs é estável se $C_n < 1$.*

Prova. O módulo do segundo autovalor de $S(k)$ é:

$$|\text{autov}[S(k)]|^2 = C_n^2 \text{sen}^2 k + \cos^2 k = \text{sen}^2 k (C_n^2 - 1) + 1 < 1 \Rightarrow C_n < 1$$

A Figura 6.2 ilustra o comportamento de $|\text{autov}[S(k)]|$ para diferentes números de Courant sob a forma de gráfico. Uma descrição detalhada do método de análise empregado pode ser encontrada em Dautray e Lions (2000) e, uma abordagem um pouco diferente, em Chaudhry (2008, p.392). Este exemplo teve como objetivo ilustrar o uso do método de análise de estabilidade numérica para o sistema hiperbólico formado pelas equações para águas rasas. Como as equações originais precisam ser lineares para aplicação do método, torna-se inviável a aplicação do mesmo às equações completas de Navier-Stokes. Apesar disto, as informações deduzidas a partir de sistemas lineares são empregadas como referências para o estabelecimento de critérios de estabilidade para as equações de Navier-Stokes e da continuidade.

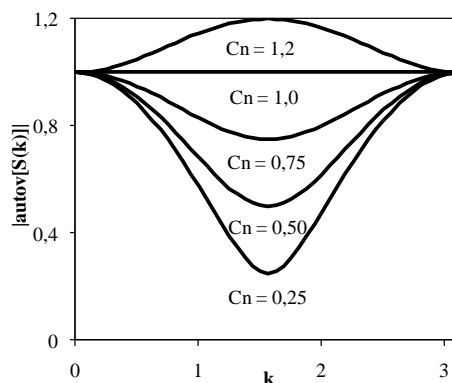


Figura 6.2 – Comportamento de $|\text{autov}[S(k)]|$ em função de C_n

Convergência

Para uma discretização consistente, se o refinamento progressivo da malha produz resultados que se aproximam da solução analítica da EDP, diz-se que há convergência. De acordo com o teorema da equivalência de Lax (Lax e Richtmyer, 1956), pode-se escrever que um esquema numérico consistente é convergente se e somente se ele for estável (a prova pode ser encontrada em Dautray e Lions, 2000, p.37).

Considera-se de grande relevância destacar que a convergência ocorre em relação à solução analítica e não necessariamente aos resultados experimentais. Há situações para as quais o resultado numérico errado representa bem o resultado experimental, como pode ser visto em Simões, Schulz e Porto (2010a). Estes autores apresentaram o perfil médio experimental de um ressalto hidráulico obtido com ultrassom. No mesmo trabalho eles compararam a solução das equações de Saint-Venant calculadas com diferentes números de Courant, ilustrando que o efeito numérico difusivo aproxima os resultados numéricos e experimentais. Ao utilizar o número de Courant apropriado, a solução obtida foi próxima de uma descontinuidade (onda de choque normal), que é a solução esperada. Sendo assim, julgar adequada a solução com difusão numérica é um erro grave do ponto de vista numérico e físico, já que as hipóteses atreladas às equações fazem com que elas representem um problema com choques normais.

Ordem de convergência para a malha

Um determinado método numérico possui uma ordem de convergência atrelada a ele, que pode ser definida como o valor do expoente da dimensão da malha que melhor ajusta uma lei de potência entre o erro (e.g., valor máximo da diferença entre solução analítica ou solução de referência e resultado numérico) e esta dimensão. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem, por exemplo, possui ordem de convergência proporcional à quarta potência do espaçamento da malha. Esta ordem de convergência é resultante da dedução do método. A Figura 6.3 ilustra o significado da ordem de convergência ou de precisão de cinco métodos numéricos. Para tanto, comparou-se a solução analítica de uma EDO que modela a queda livre com as soluções numéricas obtidas com os métodos indicados na legenda. Percebe-se que os erros absolutos máximos calculados com as soluções analíticas e numéricas mantêm relações com o espaçamento da malha que indicam a ordem do método por meio da potência correspondente.

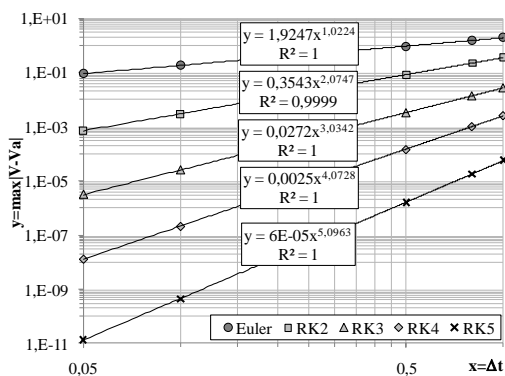


Figura 6.3 – Ordens de precisão ou convergência dos métodos de Euler e Runge-Kutta (RK) até ordem 5. V é a velocidade da partícula em queda livre, calculada numericamente e V_a a velocidade calculada analiticamente. Δt é o espaçamento da malha temporal, Euler denota o método de Euler RK o método de Runge e Kutta correspondente à ordem indicada por um número.

Para EDP's, se a malha não se ajusta bem aos contornos do domínio, não há garantia de que o código escrito com um determinado método de discretização forneça a ordem de precisão do método quando são realizados sucessivos refinamentos da malha. De uma forma geral, se o contorno não é bem representado pela malha, a ordem de convergência para a malha é aproximadamente uma vez menor que a ordem de precisão do método (ver Simões, Schulz e Porto, 2010b). Se houverem discontinuidades na solução a ordem de precisão teórica também é prejudicada, como demonstrado por Simões *et al.* (2011).

Conservação

Além dos três princípios básicos apresentados anteriormente, é de grande importância que um método numérico de discretização seja conservativo. As equações diferenciais originais são representações matemáticas de leis de conservação em mecânica dos fluidos. Portanto, a forma discreta das mesmas deve ser conservativa para cada elemento da malha numérica e de forma global para todo o domínio discretizado. Se o método de volumes finitos for utilizado isto é garantido. Em outros termos, para um dado volume de controle, a equação discretizada não pode acrescentar quantidades à solução que não estão presentes no balanço de uma propriedade extensiva qualquer realizado a partir das equações originais.

Consistência física de soluções numéricas

Como mencionado anteriormente, uma solução numérica deve ser considerada correta se os erros em relação à solução analítica da equação diferencial original são pequenos. Ela não deve ser avaliada como correta tendo como fundamento comparações com dados experimentais (note-se que o ideal é que tanto dados, como solução analítica, como resultado numérico sejam “iguais”, mas aqui se está descrevendo a metodologia vinculada ao conceito

de consistência física de soluções numéricas). As equações de conservação resolvidas em problemas de mecânica dos fluidos computacional são deduzidas a partir de princípios da física clássica, que, considera-se, representam bem os fenômenos pertencentes a ela. Deste modo, as soluções teóricas obtidas com elas conduzem, idealmente, a “excelentes” resultados em relação à experimentação, como é o caso da solução de Blasius para camada limite, a solução de Hagen-Poiseuille, a solução de Couete, etc. Por conseguinte, tendo como fundamento um conjunto de formulações derivadas das equações de Navier-Stokes que representam satisfatoriamente problemas como aqueles citados, é, por inferência, razoável supor que os resultados para problemas que ainda não admitem soluções analíticas (na nossa “matriz” atual de conhecimento matemático) sejam fisicamente consistentes. Entretanto, há sérias complicações quando se pretende simular escoamentos complexos, para os quais a nossa “matriz” de conhecimento matemático ainda está sendo construída, como os escoamentos turbulentos, multifásicos, etc.

Como discutido no capítulo 5, a turbulência possui um amplo espectro de energia que traduz as possíveis quantidades de energia contidas nos diferentes tamanhos dos turbilhões que compõem o movimento do fluido. Sendo L a dimensão característica das grandes escalas, η a micro-escala de Kolmogorov e Re o número de Reynolds das grandes escalas, a teoria de Kolmogorov prevê a seguinte expressão para os graus de liberdade de um escoamento turbulento com número de Reynolds Re :

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 = Re^{9/4} \quad (6.27)$$

Os valores de Re em estudos sobre vertedores em degraus são da ordem de 10^5 . Portanto, uma malha euleriana deve possuir aproximadamente 10^{11} elementos. Este número é demasiadamente elevado para realização de simulações com os recursos computacionais existentes. A alternativa para contornar este obstáculo é o uso de modelos de turbulência. Tais modelos consistem em representações aproximadas para a turbulência e não há garantia que as soluções numéricas sejam próximas dos resultados experimentais. Eles carregam simplificações que, em muitos casos, transgridem as características físicas, como turbulência isotrópica e homogênea. Existem, certamente, escoamentos específicos que podem ser considerados isotrópicos e homogêneos (vale a ressalva de que, mesmo nesses casos, a isotropia implica em decadência monotônica, ou seja, é uma situação ideal). O escoamento em vertedores em degraus, entretanto, é composto por uma região principal que desliza sobre grandes turbilhões, o que “não parece” ser um campo homogêneo e isotrópico. Além disto, a

superfície livre é extremamente irregular a jusante do início da aeração. As ondas e distorções ocorridas no escoamento bifásico são de difícil representação e os modelos de turbulência e modelos multifásicos normalmente são empregados em malhas muito mais espessas do que as dimensões características de tais ondulações. A entrada de ar e formação de um grande número de bolhas no interior do escoamento impõe restrições ainda mais severas. Capturar a formação das referidas bolhas e o movimento das mesmas é um desafio ainda insuperável devido às suas dimensões e às dimensões da malha necessárias para representar satisfatoriamente a interface.

Ao solucionar um problema com mecânica dos fluidos computacional (CFD), como o escoamento em um vertedor, obtém-se os campos de velocidade, pressão, distribuição de vazios e demais grandezas associadas ao modelo de turbulência adotado. A validação, ou melhor, a comparação entre teoria (CFD) e experimentação deve ser feita por meio da comparação entre as quantidades calculadas e aquelas mensuráveis (note-se aqui a ressalva anterior, de que idealmente todos os resultados devem ser “iguais”, seja experimentais, analíticos ou numéricos). Esta prática requer o uso de instrumentação sofisticada, pois é necessário medir campos de velocidades e pressões para que seja possível obter os valores médios correspondentes. Além disto, as flutuações permitem o cálculo das covariâncias e, conseqüentemente, a verificação de isotropia, entre outras avaliações. Deste modo consegue-se encerrar o ciclo do método científico. A complexidade dos métodos numéricos e dos modelos matemáticos que compõem a estrutura da mecânica dos fluidos computacional provoca, em muitos casos, a falsa impressão de perfeição atrelada às soluções obtidas. É verdade que este ramo da mecânica dos fluidos participou (e participa) de avanços que podem ser classificados momentaneamente de “incríveis” (na modéstia do conhecimento humano atual – certamente esta “incredulidade” será menos efusiva com o avançar das décadas e séculos), como o projeto de aeronaves, veículos espaciais (lançadores de satélites, entre outros), grandes barragens, máquinas hidráulicas, física nuclear e grandes embarcações, por exemplo. Como já mencionado, sempre se deve lembrar das já comentadas “sérias dificuldades”, que mantém a nossa efusão em um limite mais próximo (ver Chanson e Lubin, 2010). Tendo em conta as considerações feitas neste item sobre a consistência física de soluções numéricas, adotou-se como princípio básico deste trabalho que os resultados numéricos não verificados devem ser considerados como aproximações úteis apenas em avaliações preliminares e nunca em projetos definitivos. Eles nunca devem substituir a experimentação.

6.3 Simulações numéricas

6.3.1 Considerações iniciais

Este item contém os resultados inéditos obtidos nesta tese por meio de simulações numéricas. Existem alguns softwares comerciais reconhecidos pela boa qualidade dos resultados que produzem, dentre os quais, pode-se citar, por exemplo, o Fluent[®] e o CFX[®] (utilizado neste trabalho). Há também softwares livres, como o OpenFOAM[®], Clawpack, SPHysics, entre outros. As simulações foram realizadas tendo como objetivos calcular grandezas de interesse prático, realizar comparações com resultados experimentais e demonstrar limitações dos modelos matemáticos utilizados quando se pretende simular escoamentos em canais em degraus. Sempre que possível é recomendável verificar a convergência por meio do refinamento sucessivo da malha. Isso não significa que seja necessário verificar a ordem de convergência de códigos comerciais como aquele empregado neste trabalho. Tais códigos normalmente são amplamente testados por meio de diferentes métodos específicos para esse fim. Neste trabalho, o nível de refinamento das malhas adotadas foi escolhido em função da capacidade dos computadores disponíveis.

6.3.2 Escoamento deslizando sobre turbilhões – Experimento 18

Os resultados obtidos com a realização do Experimento 18, apresentado no Capítulo 3, foram comparados com resultados numéricos calculados com diferentes modelos de turbulência, o modelo não homogêneo para o escoamento bifásico e o modelo de superfície livre. O objetivo desta simulação é comparar a posição média da superfície livre do escoamento monofásico obtida experimentalmente com soluções numéricas calculadas com diferentes modelos de turbulência. Assumiu-se como simplificação que o escoamento é bidimensional, simulando-o em um domínio com dimensões iguais às indicadas na Figura 6.4. Foi fixada uma velocidade média na entrada igual a 2,91 m/s. As variáveis na saída foram representadas por meio de extrapolações, inclusive para as frações volumétricas de ar e água e as laterais do domínio correspondem à condição de simetria. A parte superior do domínio permite apenas o escoamento de ar.

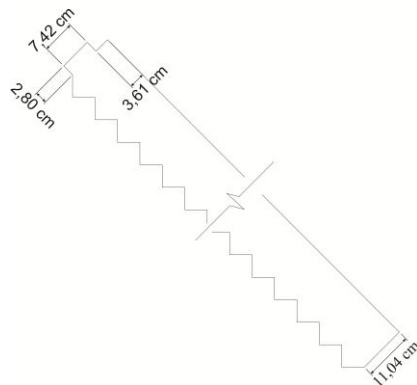


Figura 6.4 – Geometria utilizada para simular o Experimento 18 ($s=l=5$ cm).

Como pode ser visto na Figura 6.5, houve excelente concordância entre os pontos obtidos experimentalmente e aqueles calculados com os modelos de turbulência $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$, SSG e o modelo sem equações (aquele representado por Zero eq. na referida figura). Destaca-se também que foram utilizadas diferentes malhas. Adicionalmente, testou-se o modelo $k-\omega$, o modelo BSL e o modelo $k-\varepsilon$ EARMS. Apenas o último apresentou resultados com qualidade semelhante aos apresentados na Figura 6.5. Os demais superestimaram as posições da superfície livre, com erro relativo máximo em relação aos experimentos próximo de 8%. O mesmo desvio foi observado ao utilizar o modelo $k-\varepsilon$ e o modelo de mistura ao invés do modelo de superfície livre.

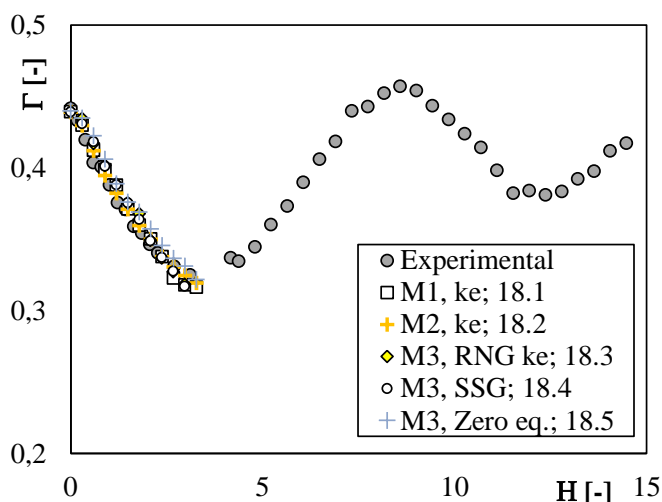


Figura 6.5 – Comparação entre resultados experimentais e soluções numéricas calculadas com diferentes modelos de turbulência (ver legenda) para a região monofásica do escoamento ($k\varepsilon = k-\varepsilon$; M1 e M2 são malhas não estruturadas com $\sim 0,49 \times 10^6$ e $\sim 0,23 \times 10^6$ elementos, respectivamente; M3 é uma malha estruturada com $\sim 0,2 \times 10^6$ elementos). Os números 18.1 a 18.5 correspondem às diferentes simulações realizadas (ver informações adicionais no Apêndice 3).

Em todos os casos, não foi possível reproduzir numericamente o perfil bifásico encontrado pela via experimental. Além disto, destaca-se que algumas cavidades de ar persistiram abaixo do pseudo-fundo nas soluções numéricas, sendo esta solução inconsistente

com o Experimento 18, que não apresentou cavidades de ar em tal posição. Supondo-se que as soluções numéricas obtidas (em todos os casos foram empregados esquemas numéricos de alta resolução) sejam próximas das soluções analíticas, este erro pode ser atribuído aos modelos matemáticos utilizados para representar o fenômeno (modelos de turbulência e modelos relacionados ao escoamento multifásico) ou à simulação bidimensional. A Figura 6.6 contém uma comparação semelhante à da Figura 6.5, porém para resultados de uma simulação em um domínio 3D. O modelo de turbulência empregado foi o $k-\varepsilon$ e a malha estruturada possui $3,1 \times 10^6$ elementos. Neste caso, o tempo necessário para realização da simulação foi de aproximadamente oito dias. Os resultados calculados desta forma apresentaram excelente concordância com os pontos experimentais. As cavidades persistiram na simulação 3D, porém, com dimensões menores em relação às encontradas para simulações bidimensionais, como ilustrado nas Figuras 6.7a e 6.7b. As Figuras 6.7c e 6.7d ilustram o aspecto tridimensional da solução por meio de iso-superfícies de frações volumétricas de ar correspondentes a 0,90.

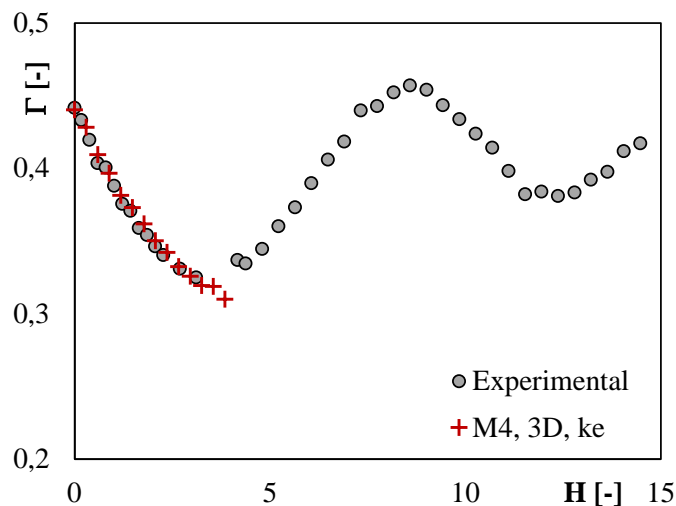


Figura 6.6 – Comparação entre dados experimentais do Experimento 18 e resultados numéricos obtidos com o modelo multifásico não homogêneo, o modelo de turbulência $k-\varepsilon$ e um domínio tridimensional correspondente ao trecho do canal empregado nos experimentos, com largura igual a 0,20 m. A seção escolhida está situada no centro do canal ($B/2$), assim como foi posicionado o sensor acústico. A malha M4 é estruturada e possui $3,1 \times 10^6$ elementos (ver informações adicionais no Apêndice 3).

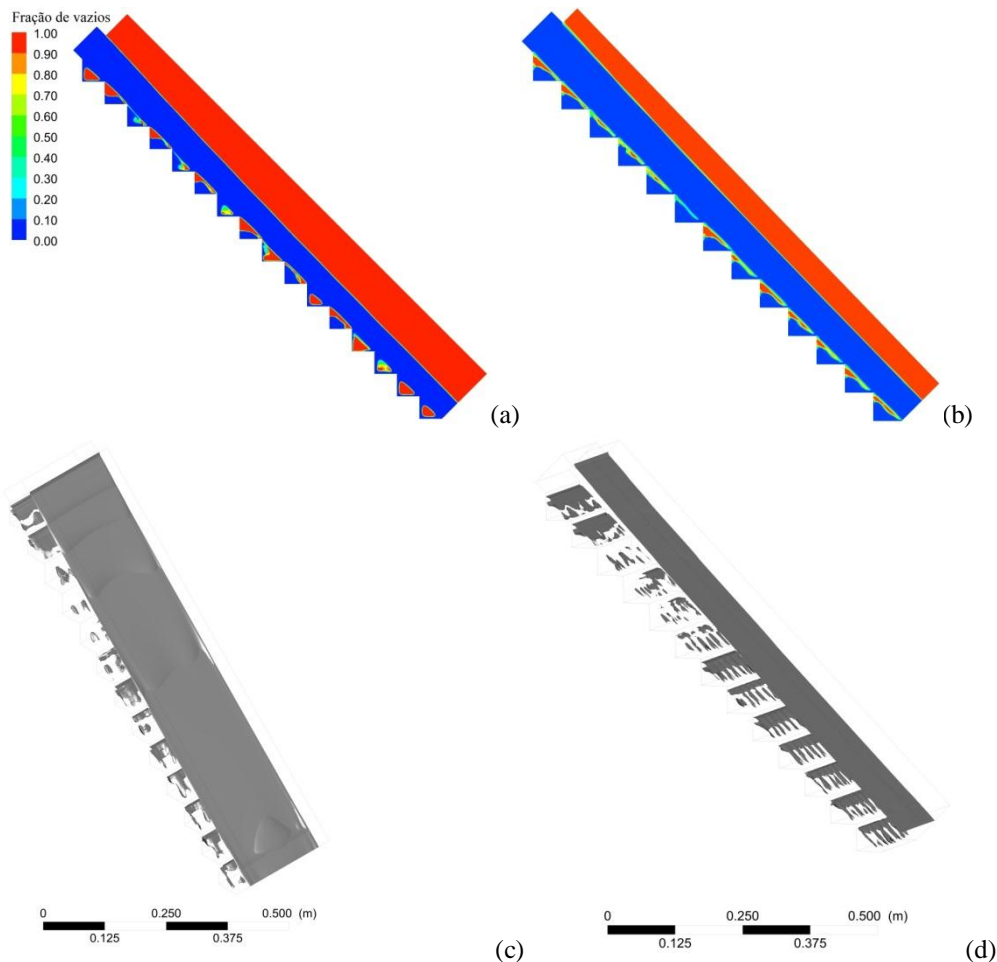


Figura 6.7 – Campos de frações volumétricas de ar e isso-superfícies: (a) Simulação 2D com o modelo $k-\varepsilon$ e a malha M2 mencionada na Figura 6.5, (b) Simulação 3D correspondente aos dados da Figura 6.6, (c, d) Isso-superfícies de fração volumétrica de ar correspondentes a 90% de vazios (neste caso, a adoção de 90% ou outro valor próximo não produz diferenças expressivas uma vez que a interface é muito delgada para a solução obtida, que corresponde à região a montante do ponto de início da aeração).

6.3.3 Escoamento deslizante sobre turbilhões: Vertedor sem comportas

Considerações iniciais

O estabelecimento de critérios para a realização das simulações está baseado nas magnitudes das variáveis adimensionais encontradas nos estudos experimentais publicados por diversos autores. Nem sempre esses intervalos são citados em termos adimensionais. O valor mínimo para a vazão específica, por exemplo, deve ser escolhido de tal maneira que ocorra o escoamento deslizante para uma determinada geometria dos degraus. O valor máximo para a mesma grandeza está fortemente atrelado à ocorrência de cavitação. Pfister, Hager e Minor (2006a,b) analisaram valores para o coeficiente de cavitação e concluíram que o limite relacionado ao risco de cavitação em vertedores em degraus conduz a uma vazão específica máxima igual a $30 \text{ m}^2/\text{s}$. Uma avaliação semelhante para vertedores lisos fornece um valor

máximo igual a $100 \text{ m}^2/\text{s}$, como mencionado pelos referidos autores. Estes números serviram como indicadores para a adoção dos valores utilizados nas primeiras simulações realizadas.

A escolha do limite inferior para a vazão específica e geometria dos degraus foi auxiliada com a Figura 2.9, apresentada na revisão bibliográfica e reproduzida a seguir como Figura 6.8. As áreas definidas neste gráfico possibilitam verificar a ocorrência dos tipos de escoamento e, embora tenha sido constatada uma região de “dúvida” (Fig. 6.8b), ela é extremamente útil para obtenção de estimativas iniciais dos limites entre os tipos de escoamento.

O perfil adotado é composto por um perfil padrão proposto por Scimemi (1930). Não há degraus de transição e os degraus possuem dimensões uniformes que se estendem até a posição de início da aeração, aproximadamente, para a maior vazão simulada (para vazões menores e a mesma geometria, o ponto de início da aeração se desloca para montante). Não foi possível simular a mistura bifásica ar-água após o início da aeração nesta etapa da pesquisa. Sendo assim, para valores de s (altura do degrau), α (ângulo entre a horizontal e o pseudo fundo) e q (vazão específica), pode-se prever o comprimento do trecho monofásico e estabelecer o domínio computacional com o uso desta informação. A equação empregada foi a $2.89 \left(\frac{L_A}{k} = 9,719(\text{sen}\alpha)^{0,0796} F_r^{*,0,713} \right)$, proposta por Chanson (2002). O valor de L_A é utilizado como referência para a definição de H_{dam} (distância vertical desde a crista até o piso do último degrau) e P (altura do vertedor).

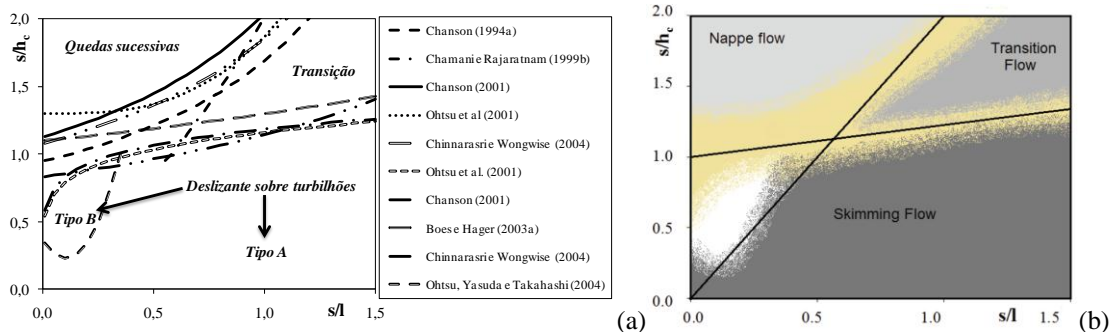


Figura 6.8 – Classificação dos tipos de escoamento: (a) Comparação entre as equações e (b) uma apresentação qualitativa elaborada com base nos extremos encontrados em (a) (Figura 2.9 reproduzida neste capítulo e renumerada como Figura 6.8)

A equação que relaciona a vazão e a altura de escoamento sobre a crista padrão em um vertedor-extravador possui forma semelhante à equação para um vertedor retangular de parede delgada. Definindo q_d como a vazão específica de projeto e h_d como a carga de projeto, escreve-se (Porto, 2006):

$$q_d = \frac{2}{3} C_d^* \sqrt{2g} h_d^{3/2} \quad (6.28)$$

O coeficiente de vazão C_d^* pode ser relacionado com o coeficiente de vazão C_d de um vertedor Bazin (vertedor retangular de soleira delgada) igualando as vazões dessas estruturas:

$$q_d = q = \frac{2}{3} C_d^* \sqrt{2g} h_d^{3/2} = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} h^{3/2} \Rightarrow$$

$$C_d^* = C_d \left(\frac{h}{h_d} \right)^{3/2} \quad (6.29)$$

em que h = carga sobre a soleira de um vertedor Bazin e q = vazão específica escoada sobre um vertedor Bazin. Sabe-se que $h-h_d$ é aproximadamente igual a $0,12h$ (Porto, 2006, p.399). Portanto, pode-se escrever:

$$C_d^* = 1,211 C_d \quad (6.30)$$

A equação empírica obtida por Bazin (1889) para o cálculo de C_d e outras equações desenvolvidas para este fim indicam que o coeficiente de vazão depende da carga sobre a soleira e da altura do vertedor, como apresentado a seguir:

$$C_d = \left(0,6075 + \frac{0,0045}{h} \right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (6.31)$$

sujeito a: $0,08 < h < 0,5$, $0,20 < P < 2,0$; P = altura do vertedor.

A equação 6.28 é normalmente é escrita de forma compacta, com o coeficiente de vazão substituído por um segundo coeficiente de vazão dimensional C_o . Além disto, utiliza-se a carga hidráulica $H_o = h_d + h_a$, ou seja, a carga hidráulica h_d acrescida da energia cinética de aproximação h_a (por unidade de peso de fluido):

$$q_d = C_o H_o^{3/2} \quad (6.32)$$

em que $C_o = \frac{2}{3} C_d^* \sqrt{2g}$.

O conhecido livro *Design of Small Dams (Bureau of Reclamation, 1987, p.370)* apresenta uma curva que relaciona C_o e P/H_o , confirmando a existência das relações entre as variáveis citadas na análise anterior. A curva apresentada no referido livro foi utilizada para gerar a Figura 6.9a, com valores de C_o de acordo com o S.I.. Junto à curva é apresentado o

resultado obtido com a equação 6.33, proposta neste trabalho para interpolação dos dados. A Figura 6.9b permite comparar os dados calculados com a equação 6.33 e os dados que formam a curva original. O coeficiente de correlação para este ajuste resultou aproximadamente igual a um e o máximo erro relativo igual a 0,7%. Cabe destacar que o trabalho original apresenta C_o atrelado à aceleração da gravidade em ft/s^2 ($g = 32,2 \text{ ft/s}^2$), portanto, deve-se observar cuidadosamente as unidades utilizadas.

$$C_o = 1,661 + 0,509 \operatorname{tgh} \left[1,933 \left(\frac{P}{H_o} \right)^{0,639} \right] - (\text{Unidades de acordo com o S.I.}) \quad (6.33)$$

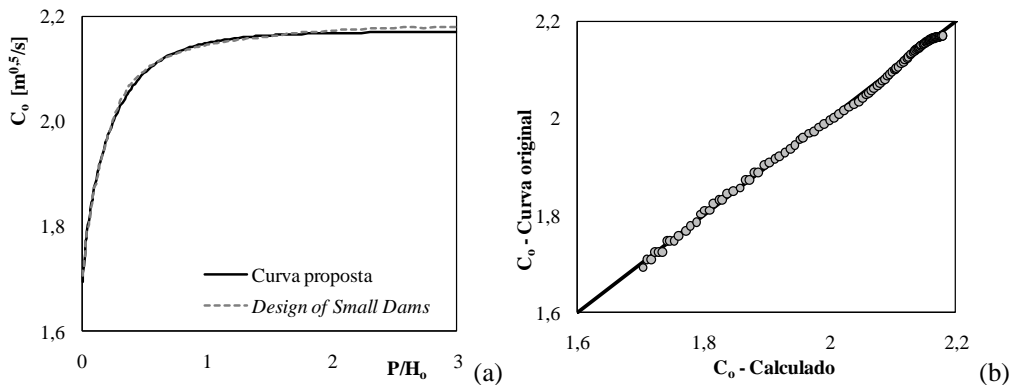


Figura 6.9 – Coeficiente de vazão: (a) Relação entre o coeficiente de vazão e o adimensional P/H_o ; (b) comparação entre dados originais e calculados com a função de interpolação proposta.

O desenho do perfil do vertedor foi feito com o auxílio da equação da soleira padrão para vertedores com paramento de montante vertical, conhecida como perfil WES (*Waterways Experiment Station*) ou Scimemi (Scimemi, 1930). Neste trabalho é assumido que $H_o = h_d$. A forma do perfil é dada por:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{X^{1,85}}{H_o^{0,85}} \quad (6.34)$$

$$\begin{cases} R_1 = 0,5H_o \\ R_2 = 0,2H_o \\ a = 0,175H_o \\ b = 0,282H_o \end{cases} \quad (6.35)$$

A Figura 6.10 contém as definições dos símbolos presentes nas equações 6.34 e 6.35. O perfil é desenhado até que a derivada dY/dX coincida com a inclinação adotada para o paramento de jusante (1V:0,75H, 1V:0,8H, 1V:1H, etc.).

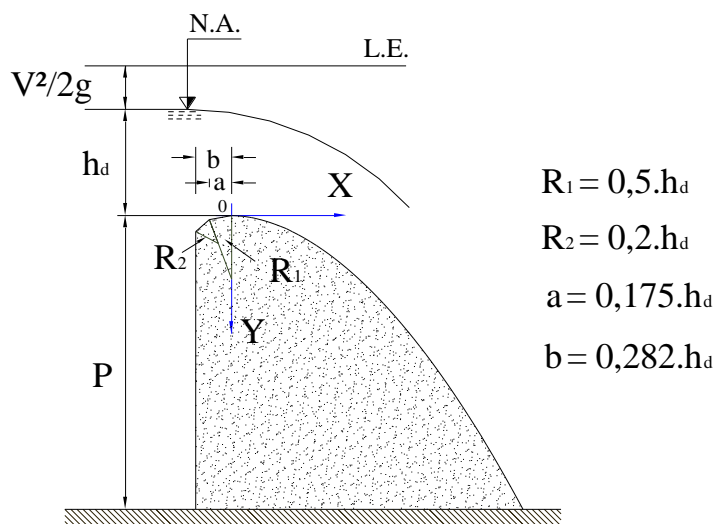


Figura 6.10 – Perfil Scimemi com paramento de montante vertical
 Fonte: Porto (2006)

Após a definição da geometria da soleira padrão, resta estabelecer a altura dos degraus e a inclinação do paramento de jusante. Uma vez definida a vazão, o regime de escoamento e a inclinação do paramento de jusante, pode-se calcular a altura dos degraus através da Figura 6.8. Isto leva, evidentemente, a diversas soluções. A definição das dimensões dos degraus foi feita com base nesta análise e em informações sobre valores reais encontrados na prática.

Resultados obtidos com soluções numéricas

As simulações de escoamentos em regime deslizante sobre turbilhões ou *skimming flow* são nomeadas com a abreviação SF seguida da numeração correspondente. Se não for mencionado o contrário, as simulações realizadas correspondem a domínios bidimensionais. O software empregado foi elaborado para resolução de problemas tridimensionais. A estratégia adotada para resolver um determinado problema em duas dimensões consiste em gerar uma malha com largura igual à largura do domínio e impor a condição de contorno de simetria nas faces laterais do domínio, assim como foi feito para a simulação do Experimento 18.

Os computadores utilizados são compostos por: (1) um processador Intel Core i5[®] 650 com 3,20 GHz e 8Gb de memória RAM; (2) um processador Intel Core i7 2600 com 3.4 GHz (até 3.8 GHz) e 16 Gb (RAM); (3) um processador i7 2820 QM 2.3 GHz (até 3.4 GHz) e 8 Gb (RAM). O número de elementos das malhas variou entre 5×10^5 e 1×10^6 , aproximadamente. O tempo total de simulação depende da vazão escoada, para um mesmo domínio. Vazões menores implicam tempos maiores. Para as vazões maiores o tempo foi próximo de dois dias e para as vazões menores, em média, o tempo foi igual a cinco dias. O computador dois é aproximadamente duas vezes mais rápido nos processamentos em relação ao computador um.

Os arquivos gerados ocupam aproximadamente 2Gb do disco rígido, que possui 1Tb (em 1 e 2) e 750 Gb (em 3). A seguir são apresentadas sínteses dos resultados obtidos.

Simulação SF 1.1: $1V:0,75H$, $s = 0,6$ m, $q = 30$ m²/s.

Os dados relacionados à geometria utilizada e outras grandezas são apresentados na Tabela 6.1 e na Figura 6.11a.

Tabela 6.1 – Informações gerais sobre a simulação SF 1.1

Grandeza	Valor	Grandeza	Valor
H_{dam} [m]	59,8	q [m ² /s]	30
s [m]	0,6	h_c [m]	4,51
l [m]	0,45	h_d [m]	5,76
k [m]	0,36	P [m]	49,6
α	53,13°	C_o [m ^{1/2} /s]	2,17
h_E [m]	20	P/h_d	8,68
V_E [m/s]	1,5	s/h_c	0,133

Simbologia: h_E = altura da entrada; V_E = velocidade na entrada.

Esta simulação foi a primeira de um conjunto correspondente a geometrias com dimensões semelhantes às de estruturas reais. A geometria do domínio e a malha empregada podem ser vistas na Figura 6.11. As condições de contorno utilizadas foram: (1) Entrada com perfil de velocidades uniforme ($V = 1,5$ m/s ao longo de 20 m de altura, o que resulta em $q = 30$ m²/s); (2) Paredes com rugosidade absoluta equivalente igual a 0,15 mm; (3) Saída com extrapolações para as frações volumétricas de ar e água; (4) Contorno superior aberto e com fração de vazios igual à unidade. Empregou-se o modelo de turbulência k- ϵ com intensidades turbulentas extrapoladas nos contornos abertos e intensidade turbulenta igual a 1% na entrada. O modelo multifásico empregado é o não-homogêneo com a densidade de área interfacial por unidade de volume calculada com o modelo de superfície livre.

O domínio foi elaborado de acordo com as dimensões especificadas na Figura 6.11a. A sua espessura é igual a 0,05 m, valor correspondente ao tamanho mínimo de um elemento da malha. Como ilustrado através da Figura 6.11b,c, a malha adotada nesta simulação é muito mais refinada ao longo da região prevista para o escoamento sobre o canal em degraus. Esta prática reduz consideravelmente a quantidade de elementos que compõem a malha (500.000 para esta simulação), mas prejudica a resolução da solução obtida para os campos atrelados ao escoamento de ar. Como não há interesse direto no escoamento de ar, julga-se esta estratégia como adequada devido às dificuldades em trabalhar com malhas com mais de 10⁶ elementos (com os computadores disponíveis).

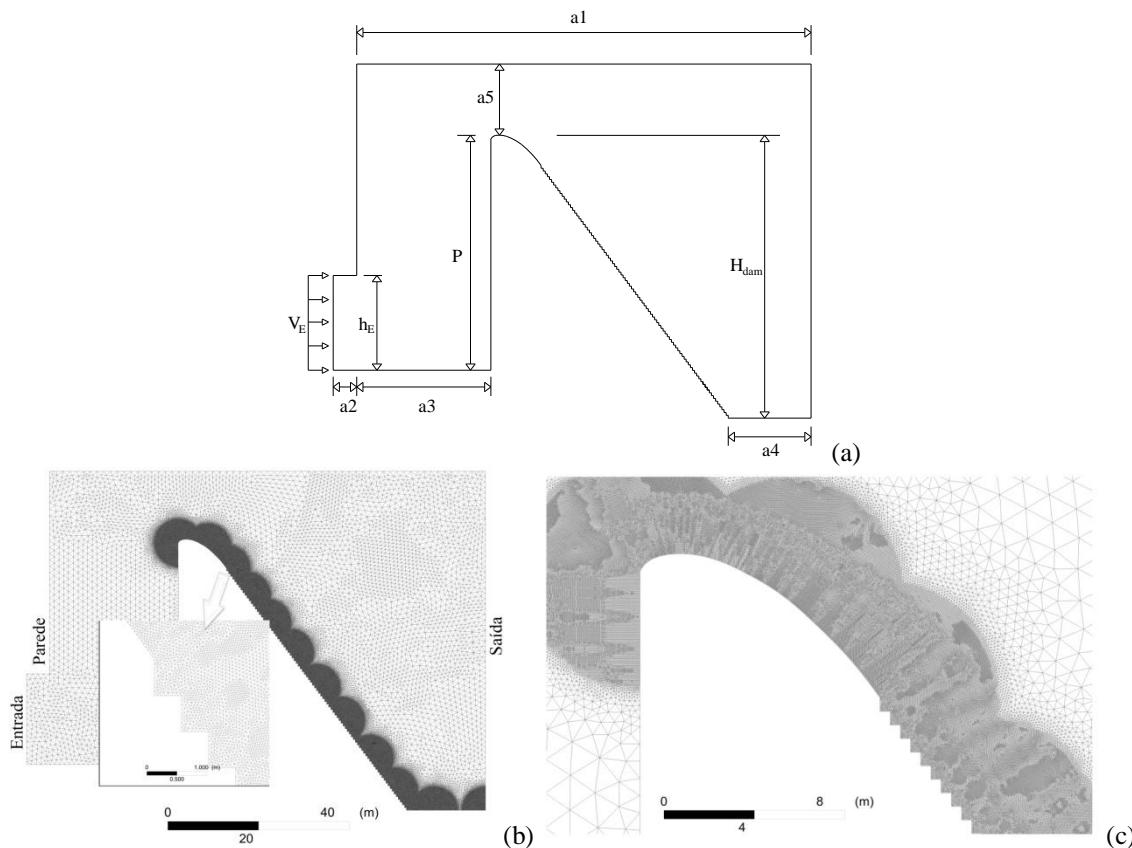


Figura 6.11 – Geometria e malha utilizada na simulação SF 1.1: (a) Geometria do domínio: $a_1=96$ m, $a_2 = 5$ m, $a_3 = 28,3$ m, $a_4 = 17,4$ m, $a_5 = 15$ m; (b) Malha em todo o domínio e detalhe do refinamento junto aos degraus, (c) malha refinada junto à crista padrão.

O domínio adotado, em sua região a montante do vertedor, não representa a condição real encontrada em uma barragem. A segunda alternativa para imposição da condição de contorno na entrada seria o uso de frações volumétricas fixas, um perfil de velocidades uniforme e distribuição hidrostática de pressão. Esta não é uma opção correta uma vez que o escoamento a montante da crista padrão é subcrítico. A profundidade na extremidade esquerda do domínio é parte da solução do problema. Ao impor um valor fixo, devido à possibilidade de propagações de ondas em todos os sentidos, não há garantia de que o valor imposto será igual ao calculado.

Os resultados obtidos podem ser visualizados por meio de diferentes recursos, como gráficos de cores, campos vetoriais, linhas de corrente, entre outros. A visualização pode ser feita em todo o domínio ou em regiões específicas, construídas no pós-processamento. Pode-se, por exemplo, gerar uma linha perpendicular ao pseudofundo que serve de base para apresentação de perfis de velocidades. O primeiro aspecto observado em cada simulação é o da distribuição das frações volumétricas de ar e água, como ilustrado na Figura 6.12. Como pode ser visto na Figura 6.12a, o resultado obtido reproduz a forma esperada para o perfil

médio da superfície livre. O detalhe destacado na Figura 6.12b permite observar irregularidades na superfície livre decorrentes da baixa resolução da malha a montante do vertedor. A Figura 6.12c destaca exatamente o contrário, ou seja, uma superfície livre bem definida em função da alta resolução da malha naquela posição. O mesmo pode ser visto na posição final do vertedor (Fig. 6.12d). Esta figura também indica a existência de cavidades de ar nos últimos degraus, de acordo com a solução numérica. Tais cavidades não correspondem, necessariamente, ao escoamento que seria observado em uma estrutura real com características físicas e condições hidráulicas semelhantes.

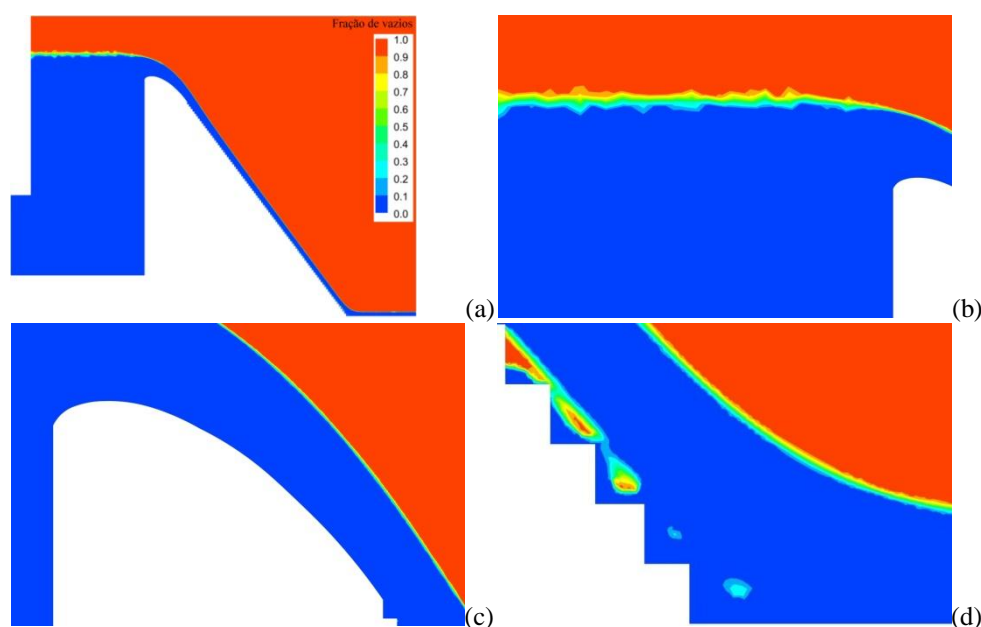


Figura 6.12 – Solução para o campo de fração volumétrica de ar ou fração de vazios: (a) Solução apresentada em todo o domínio, (b) detalhe da superfície livre a montante da crista padrão, (c) detalhe da superfície livre sobre a crista padrão e (d) superfície livre na extremidade final do canal.

Os campos de velocidades obtidos com a solução do modelo não-homôgeneo são os campos para o escoamento de ar e escoamento de água. A apresentação a seguir corresponde ao campo de velocidades superficiais de água, que é a multiplicação do campo de frações volumétricas de água pelo campo de velocidades da fase líquida. A Figura 6.13a contém a distribuição de velocidades em todo o domínio, representada por meio de um diagrama de cores. Nota-se que junto à crista padrão as velocidades estão entre 3,4 m/s e 10,1 m/s, intervalo que contém a velocidade crítica, igual a 6,65 m/s para este problema. Os resultados também indicam a ocorrência de valores elevados, com máximo superior a 30 m/s na extremidade de jusante do canal em degraus. A Figura 6.13c permite observar os grandes turbilhões formados entre os últimos degraus.

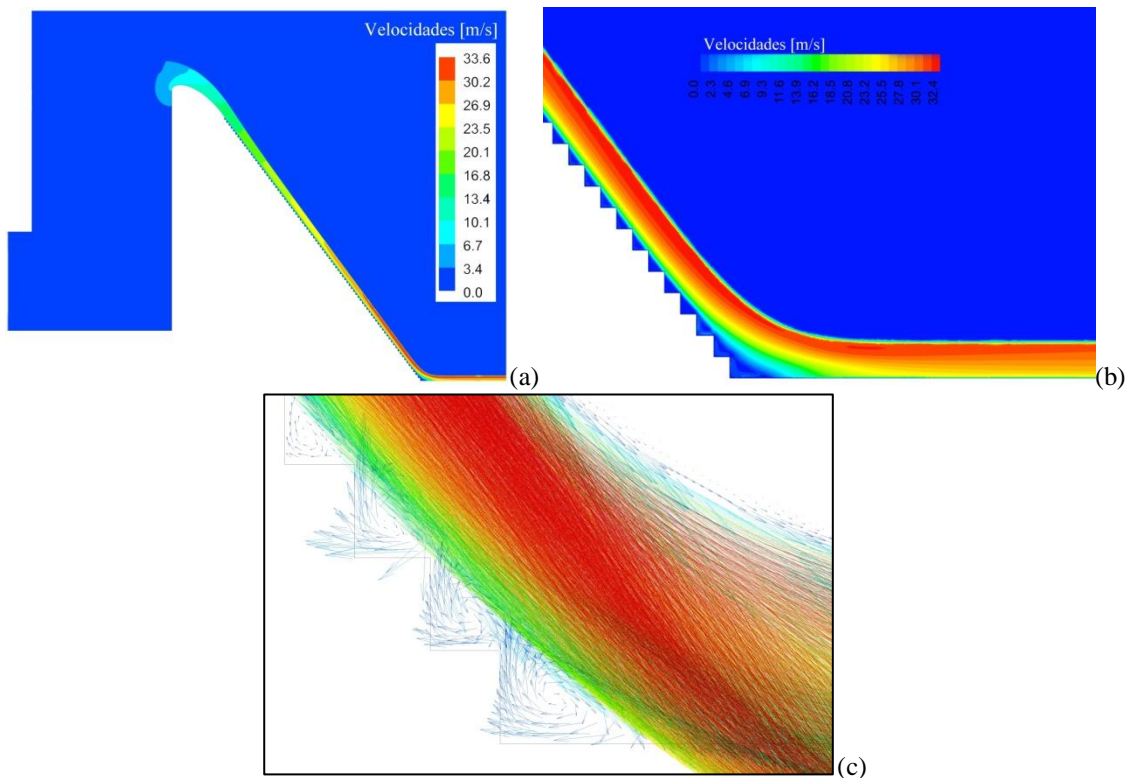
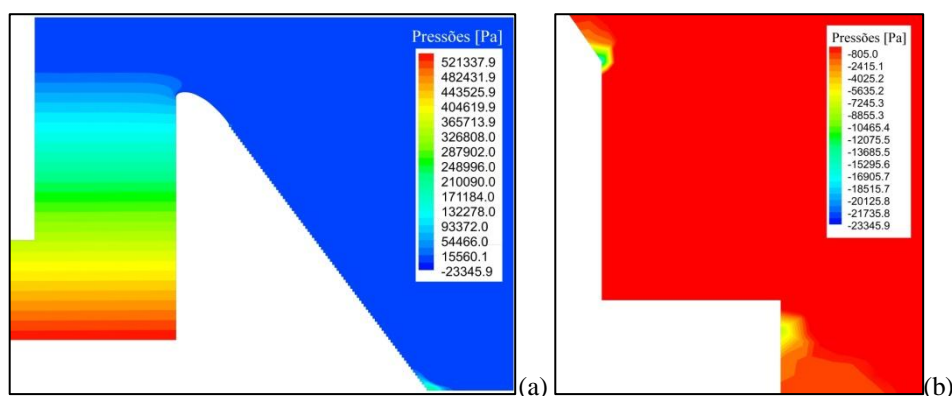


Figura 6.13 – Campo de velocidades (água): (a) visão geral do domínio com o campo de velocidades para água; (b) Trecho final do canal em degraus e campo de velocidades representado por meio de mapa de cores; (c) Campo vetorial de velocidades nos últimos degraus.

Um dos resultados obtidos que possui considerável interesse prático é o campo de pressões. Com ele é possível prever, ainda que de maneira preliminar e aproximada, a possibilidade de ocorrência de cavitação. Para tanto, compara-se as pressões mínimas com a pressão de vapor da água, neste problema igual a 0,32 mH₂O a 25°C. A Figura 6.14a contém o campo de pressões em todo o domínio. Devido à ampla faixa de variação desta variável, a referida imagem só possibilita a visualização de variações a montante do vertedor, onde ocorrem os máximos. A Figura 6.14b ilustra a ocorrência de pressões negativas no encontro da soleira padrão com o primeiro espelho e sobre o espelho do segundo degrau.



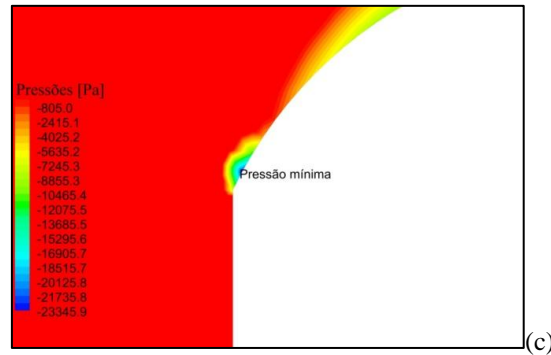


Figura 6.14 – Distribuição de pressões: (a) Distribuição de pressões em todo o domínio; (b) Detalhe das pressões nos primeiros degraus; (c) Pressão mínima na soleira padrão.

A Figura 6.14c destaca a ocorrência da pressão mínima sobre a parte inicial da soleira padrão. O valor $-23345,9$ Pa é igual a $-2,38$ mH₂O, com $\gamma = 9806$ N/m³. Sendo $10,3$ mH₂O a pressão atmosférica, obtém-se $\min(p) = 7,92$ mH₂O (referencial absoluto). Esta avaliação sugere que a cavitação não ocorre em uma estrutura como esta e para a vazão específica igual a 30 m²/s. Entretanto, tal conclusão deve ser levada em consideração com algumas observações. Como discutido, a malha não é refinada o suficiente para capturar todos os detalhes do escoamento. Isto levou ao uso de um modelo de turbulência cujas simplificações podem ou não conduzir a soluções adequadas para o campo de pressões. Assumindo que o modelo de turbulência seja satisfatório para o problema em questão, ainda há observações que merecem destaque. Mesmo com uma malha típica de simulações que envolvem modelos de turbulência, ainda assim é possível que ela não seja refinada o bastante para capturar as distribuições adequadamente, sobretudo os máximos e mínimos. Os valores médios são relevantes, mas para avaliar a possibilidade de ocorrência de cavitação por meio de comparações com a pressão de vapor, as flutuações assumem um papel de grande importância. Para este problema seriam necessárias flutuações próximas de $0,96\min(p)$: $(7,92 - 0,32)/7,92 = 0,96$. Finalmente, deve-se ressaltar que a avaliação da ocorrência de cavitação por meio de comparações como aquelas realizadas aqui é simplificada e tem caráter prático e preliminar. Como discutido na revisão bibliográfica, a formação de colapso de bolhas é influenciado por diferentes condições físicas.

Simulação SF 1.2: $IV:0,75H$, $s = 0,6$ m, $q = 25$ m²/s.

A diferença entre os dados desta simulação e os da anterior está apenas no valor da vazão específica, que foi reduzida para 25 m²/s, e na malha, refinada na região da superfície livre a montante do vertedor. A geometria do domínio permanece a mesma, o que leva a ocorrência da condição de soleira comprimida. Com a alteração da vazão específica, alguns dados apresentados na Tabela 6.1 foram modificados, como pode ser visto na Tabela 6.2.

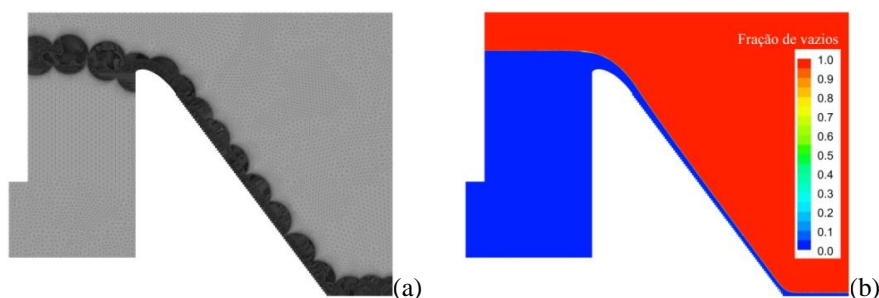
Tabela 6.2 – Informações gerais sobre a simulação SF 1.2

Grandeza	Valor	Grandeza	Valor
H_{dam} [m]	59,8	q [m^2/s]	25
s [m]	0,6	h_c [m]	4,0
l [m]	0,45	h_d [m]	5,76
k [m]	0,36	P [m]	49,6
α	$53,13^\circ$	C_o [$\text{m}^{1/2}/\text{s}$]	2,17
h_E [m]	20	P/h_d	8,68
V_E [m/s]	1,25	s/h_c	0,15

Sendo $q = Ch^{3/2}$ a relação entre uma vazão qualquer e a carga de trabalho correspondente, h , pode-se prever o valor de h desde que seja conhecido o coeficiente de vazão C . Empregando a equação 6.36, proposta por Porto (2006, p.400) com base em dados experimentais de Abecasis (1961) e da WES, foi calculado $h = 5,09$ m. O coeficiente de vazão permaneceu praticamente o mesmo devido ao valor elevado do adimensional P/h_d .

$$C = 2,215 \left(\frac{h}{h_d} \right)^{0,148} \quad (6.36)$$

Uma síntese dos resultados correspondentes à simulação SF 1.2 é apresentada na Figura 6.15. A Figura 6.15a ilustra a malha adotada e a Figura 6.15b a distribuição de frações volumétricas de ar, que possibilitam visualizar a posição da superfície livre. Nota-se que a malha adotada para esta simulação eliminou completamente as irregularidades encontradas na superfície livre a montante do vertedor, na simulação SF 1.1. Diferente do problema precedente, a pressão mínima ocorreu no encontro entre a crista padrão e o primeiro degrau. Utilizando a comparação entre a pressão mínima e a pressão de vapor do líquido para verificar a possibilidade de ocorrência de cavitação, conclui-se que o valor calculado não é suficientemente baixo para que o líquido mude de fase.



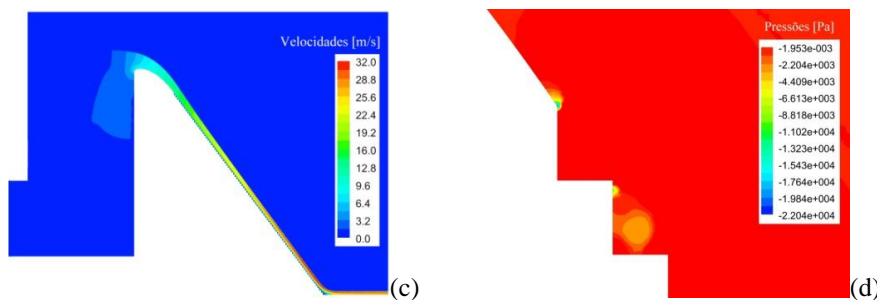


Figura 6.15 – Imagens relacionadas à simulação SF 1.2: (a) malha adotada para a simulação ($5,8 \cdot 10^5$ elementos), (b) fração de vazios, (c) campo de velocidades e (d) parte do campo de pressões com $\min(p)$.

Simulações SF 1.3 a SF 1.7: $IV:0,75H$, $s = 0,6$ m, q entre 2 m²/s e 20 m²/s.

O domínio empregado nas simulações anteriores e a malha utilizada na simulação SF 1.2 foram utilizados para as demais vazões testadas, entre 2 m²/s e 20 m²/s. A menor vazão específica empregada corresponde ao escoamento deslizante sobre turbilhões, de acordo com a Figura 6.8. A forma da superfície livre esperada para as vazões inferiores aos 30 m²/s deveria incluir a entrada de ar e conseqüente elevação das profundidades ao longo do espaço a partir do ponto de início da aeração. Entretanto, o modelo matemático adotado para representar o escoamento, a condição de regime permanente e o refinamento da malha não são capazes de fornecer soluções para a mistura após o início da aeração. Sendo assim, as profundidades obtidas após o início da aeração foram consideradas como profundidades equivalentes apenas de água.

Os campos de frações volumétricas de ar para as simulações correspondentes a este item podem ser vistos na Figura 6.16 e os dados se encontram apresentados nas Tabelas 6.3 e 6.4. As imagens da Figura 6.16 mostram que as soluções obtidas correspondem a superfícies livres bem definidas, exceto para a Simulação SF 1.7, obtida com $q = 2$ m²/s. Neste caso o escoamento saltou os degraus dois e três após o primeiro degrau. Trata-se de um fenômeno esperado para vazões menores, como pode ser visto em Tozzi (1992, p.247). Os valores das demais variáveis de campo (velocidades, pressões) foram explorados no próximo capítulo em conjunto com desenvolvimentos teóricos.

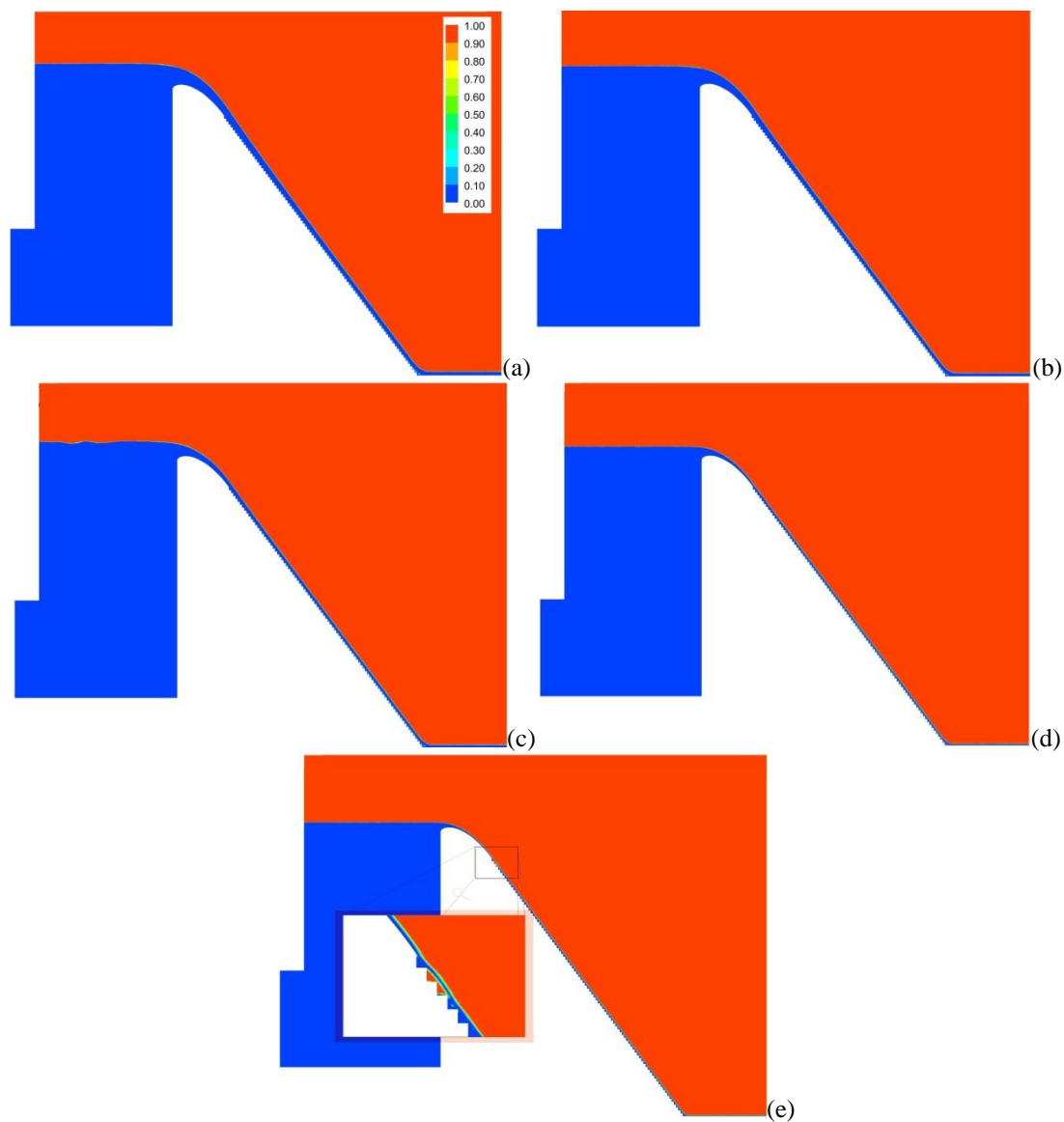


Figura 6.16 – Campos de frações de vazios obtidos com as simulações SF 1.3 a SF 1.7 (as cores correspondem à fração de vazios): (a) Simulação SF 1.3; (b) Simulação SF 1.4; Simulação SF 1.5; Simulação SF 1.6; Simulação SF 1.7.

Tabela 6.3 – Informações comuns às simulações SF 1.3 a SF 1.7

Grandeza	H_{dam} [m]	s [m]	l [m]	k [m]	α
Valor	59,8	0,6	0,45	0,36	53,13°
Grandeza	h_E [m]	h_d [m]	P [m]	C_o	P/h_d
Valor	20	5,76	49,6	2,17	8,68

Tabela 6.4 – Informações sobre as simulações SF 1.3 a SF 1.7

-	SF 1.3	SF 1.4	SF 1.5	SF 1.6	SF 1.7
V_E [m/s]	1,0	0,75	0,5	0,25	0,1
q [m ² /s]	20	15	10	5	2
h_c [m]	3,44	2,84	2,17	1,37	0,74
s/h_c	0,17	0,21	0,28	0,44	0,81

Simulações SF 1.8 a SF 1.11: $IV:0,75H$, $s = 2,4$ m, q entre 15 m²/s e 30 m²/s.

As simulações SF 1.8 a SF 1.11 foram realizadas com uma geometria semelhante a anterior, exceto pelas dimensões dos degraus, que possuem alturas iguais a 2,40 m. A estratégia para a construção da malha também inclui o refinamento das regiões previstas para o escoamento de água, como ilustrado por meio da Figura 6.17. As Tabelas 6.5 e 6.6 contêm os detalhes relacionados às simulações.

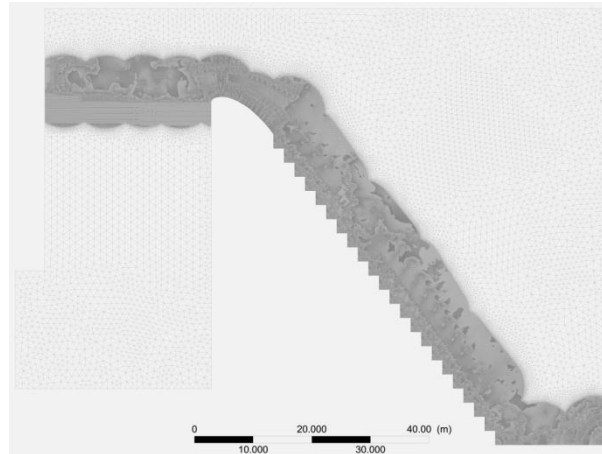


Figura 6.17 – Malha não-estruturada obtida para realização das simulações 1.8 a 1.11 ($9,4 \times 10^5$ elementos)

Tabela 6.5 – Informações comuns às simulações SF 1.8 a SF 1.11

Grandeza	H_{dam} [m]	s [m]	l [m]	k [m]	α
Valor	59,8	2,4	1,8	1,44	$53,13^\circ$
Grandeza	h_E [m]	h_d [m]	P [m]	C_o	P/h_d
Valor	20	5,76	49,6	2,17	8,68

Tabela 6.6 – Informações sobre as simulações SF 1.8 a SF 1.11

-	SF 1.8	SF 1.9	SF 1.10	SF 1.11
V_E [m/s]	1,5	1,25	1,0	0,75
q [m ² /s]	30	25	20	15
h_c [m]	4,51	4,0	3,44	2,84
s/h_c	0,53	0,60	0,70	0,85

As soluções numéricas obtidas para as simulações SF 1.8 a SF 1.11 indicam a persistência de grandes cavidades de ar abaixo do pseudo fundo, como apresentado na Figura 6.18. Este fenômeno pode ser explicado pelas grandes dimensões das cavidades, erros numéricos ou dificuldades de representação do escoamento bifásico e turbulento por meio dos modelos empregados. A primeira hipótese considera que o escoamento não é capaz de arrastar todo o ar presente entre os degraus devido às grandes dimensões das cavidades. Com estas simulações foi possível obter resultados que correspondem ao intervalo $0,53 \leq s/h_c \leq 0,85$. As simulações SF 1.1 a SF 1.7 correspondem ao intervalo $0,13 \leq s/h_c \leq 0,81$, portanto, praticamente todos os resultados obtidos com as simulações SF 1.8 a SF 1.11 estão contidos neste intervalo. Embora exista tal coincidência, as pressões absolutas mínimas obtidas a partir das simulações

com degraus de grandes dimensões variaram entre 4,64 mH₂O e 6,33 mH₂O e as pressões absolutas mínimas calculadas para $s = 0,6$ m, entre 7,92 mH₂O e 8,21 mH₂O.

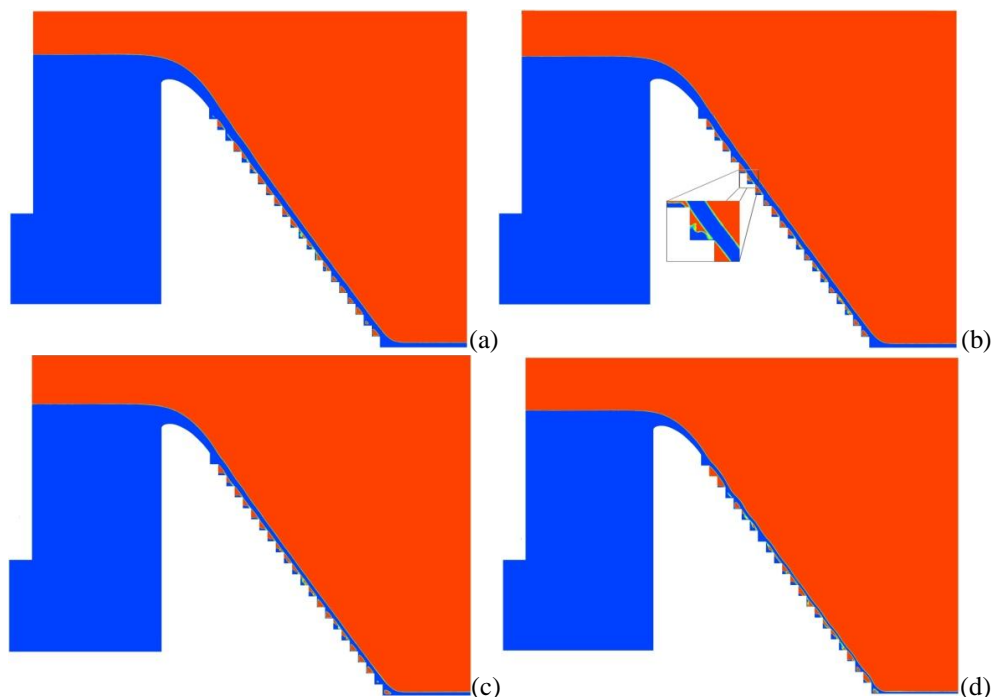


Figura 6.18 - Campos de frações de vazios obtidos com as simulações SF 1.8 a SF 1.11 (legenda: ver Fig. 6.10): (a) Simulação SF 1.8; (b) Simulação SF 1.9; (c) Simulação SF 1.10; (d) Simulação SF 1.11.

Simulações SF 1.12 a SF 1.18: IV:1H, $s = 0,6$ m, q entre $5 \text{ m}^2/\text{s}$ e $40 \text{ m}^2/\text{s}$.

Esta parte do trabalho contém os resultados obtidos para simulações em um vertedor em degraus com $s = 1 = 0,6$ m, portanto, com $\alpha = 45^\circ$. A tentativa de obtenção de informações a partir de resultados numéricos para um canal menos inclinado teve como objetivo generalizar possíveis relações entre grandezas do escoamento (fator de resistência, pressões mínimas, etc.). A vazão máxima escolhida para este conjunto de simulações é igual a $40 \text{ m}^2/\text{s}$ e o traçado da soleira WES foi realizado com esta vazão. Os dados específicos utilizados em cada uma das simulações podem ser vistos nas Tabelas 6.7 a 6.8.

Tabela 6.7 – Informações comuns às simulações SF 1.12 a SF 1.18

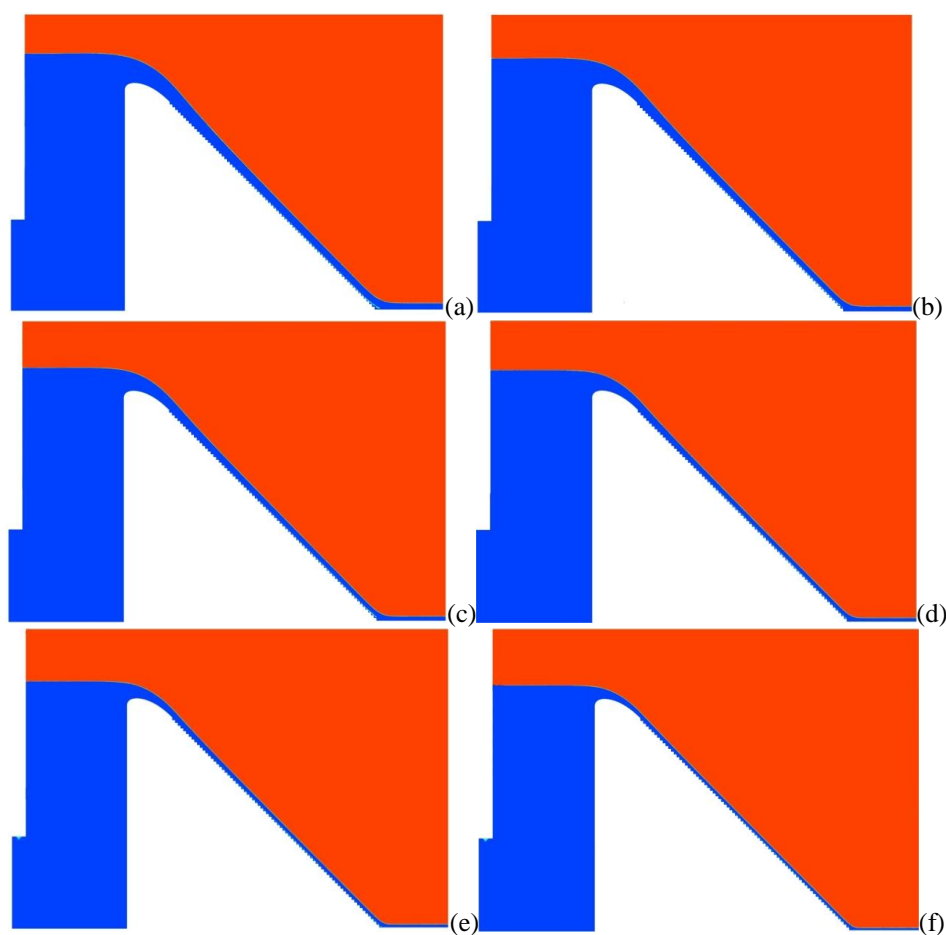
Grandeza	H_{dam} [m]	s [m]	l [m]	k [m]	α
Valor	59,8	0,6	0,6	0,42	45°
Grandeza	h_E [m]	h_d [m]	P [m]	C_o	P/h_d
Valor	20	6,98	49,6	2,17	8,68

Tabela 6.8 – Informações sobre as simulações SF 1.12 a SF 1.18

-	SF 1.12	SF 1.13	SF 1.14	SF 1.15	SF 1.16	SF 1.17	SF 1.18
V_E [m/s]	2,0	1,5	1,25	1,0	0,75	0,5	0,25
q [m ² /s]	40	30	25	20	15	10	5
h_c [m]	5,46	4,51	4,0	3,44	2,84	2,17	1,37
s/h_c	0,11	0,13	0,15	0,17	0,21	0,28	0,44

As malhas empregadas nestas simulações são não-estruturadas e com aparência semelhante às precedentes. Para a simulação com vazão específica igual a $40 \text{ m}^2/\text{s}$ foi empregada uma malha com aproximadamente 1×10^6 elementos. As demais simulações foram realizadas com malhas compostas pela metade do número de elementos, aproximadamente. Em todos os casos, a dimensão mínima era a mesma e igual a $0,05 \text{ m}$. A primeira malha possui maior quantidade de elementos porque foi refinada em uma área maior do que as demais com o objetivo de abranger a região do escoamento de água e ar para a maior vazão (que implica maiores profundidades). Nesta fase foram encontradas algumas dificuldades relacionadas à estabilidade, o que levou ao ajuste da malha original. Em média, foram necessários dois a três dias para cada simulação.

Os resultados correspondentes às frações volumétricas de ar obtidas para as sete vazões testadas podem ser vistos na Figura 6.19. Nota-se, assim como nas soluções anteriores, que a superfície livre é bem definida e não há entrada de ar por meio dela. A Figura 6.19h é uma ampliação da Figura 6.19g, relativa ao experimento numérico SF 1.18. Observa-se que mesmo para a menor vazão testada houve uma boa definição da superfície livre.



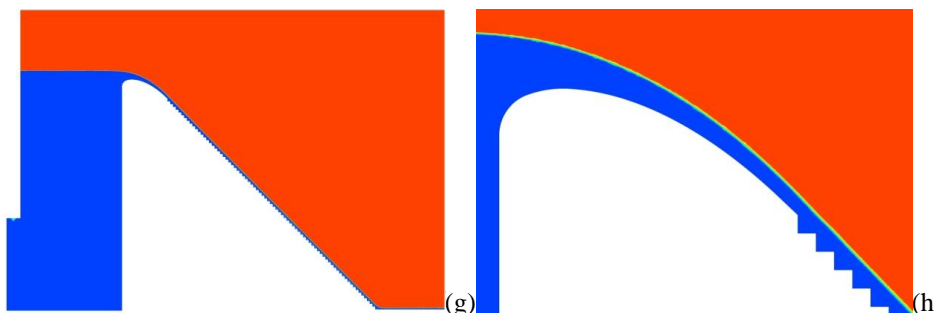


Figura 6.19 - Campos de frações de vazios obtidos com as simulações SF 1.12 a SF 1.18 (legenda: ver Fig. 6.10): (a) Simulação SF 1.12; (b) Simulação SF 1.13; (c) Simulação SF 1.14; (d) Simulação SF 1.15; (e) Simulação SF 1.16; (f) Simulação SF 1.17; (g) Simulação SF 1.18; (h) Detalhe da superfície livre (SF 1.18).

Simulações SF 1.19 a SF 1.25: $IV:6,67H$, $s = 0,6$ m, q entre 5 m^2/s e 40 m^2/s .

Prosseguindo com a ideia de generalizar possíveis relações entre grandezas, foram realizadas simulações em um canal com $\alpha=31^\circ$. Os dados vinculados a esta parte do trabalho podem ser vistos nas Tabelas 6.9 e 6.10. A Figura 6.20 contém os campos de frações de vazios obtidos para as simulações SF 1.19 a SF 1.25, simulações realizadas seguindo critérios semelhantes aos anteriores e com malhas cujas características também são semelhantes às precedentes (não-estruturadas, com número de elementos aproximadamente igual). Para valores baixos de s/l pode se tornar difícil adotar uma entrada composta por uma soleira WES. Neste caso ainda foi possível utilizar um trecho do perfil hidrodinâmico utilizado nas simulações anteriores.

Tabela 6.9 – Informações comuns às simulações SF 1.19 a SF 1.25

Grandeza	H_{dam} [m]	s [m]	l [m]	k [m]	α
Valor	40	0,6	1,0	0,514	31°
Grandeza	h_E [m]	h_d [m]	P [m]	C_o	P/h_d
Valor	20	6,98	40	2,17	5,73

Tabela 6.10 – Informações sobre as simulações SF 1.19 a SF 1.25

-	SF 1.19	SF 1.20	SF 1.21	SF 1.22	SF 1.23	SF 1.24	SF 1.25
V_E [m/s]	2,0	1,5	1,25	1,0	0,75	0,5	0,25
q [m^2/s]	40	30	25	20	15	10	5
h_c [m]	5,46	4,51	4,0	3,44	2,84	2,17	1,37
s/h_c	0,11	0,13	0,15	0,17	0,21	0,28	0,44

O refinamento da malha empregada não foi suficiente para capturar a interface com a mesma resolução ao longo de todo o escoamento correspondente à simulação SF 1.19, com maior vazão e maior carga sobre a soleira. A Figura 6.20a ilustra este resultado. Apesar disto, a partir do primeiro degrau a interface apresentou a resolução esperada, um detalhe praticamente imperceptível para a escala adotada para as Figuras. A Figura 6.20h, assim como nas simulações anteriores, mostra que mesmo para a menor vazão simulada a qualidade da solução numérica na transição ar-água permaneceu com elevada resolução.

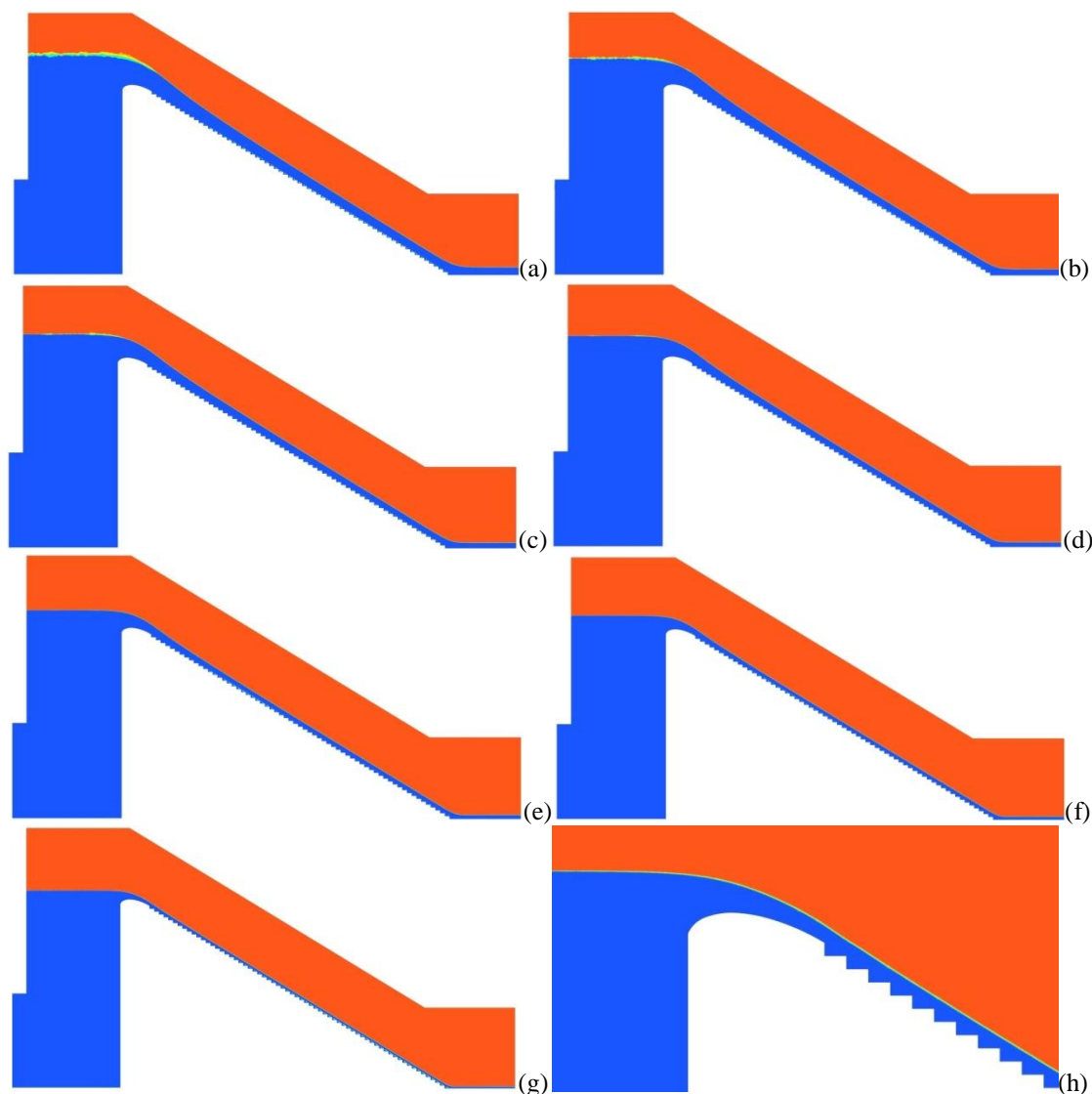


Figura 6.20 - Campos de frações de vazios obtidos com as simulações SF 1.19 a SF 1.25 (legenda: ver Fig. 6.10): (a) Simulação SF 1.19; (b) Simulação SF 1.20; (c) Simulação SF 1.21; (d) Simulação SF 1.22; (e) Simulação SF 1.23; (f) Simulação SF 1.24; (g) Simulação SF 1.25; (h) Detalhe do escoamento junto à crista padrão correspondente à simulação SF 1.25.

Simulações SF 1.26 a SF 1.31: $IV:5H$, $s = 0,6 m$, q entre $5 m^2/s$ e $30 m^2/s$.

As últimas simulações pertencentes ao grupo SF foram realizadas para um canal com $\alpha=11,3^\circ$. Neste caso a adoção de uma soleira WES não foi possível, tendo sido utilizado um pequeno degrau com extensão igual a 1,5 m. Os dados destas simulações encontram-se nas Tabelas 6.11 e 6.12. Como pode ser visto na Figura 6.21, a forma do perfil da superfície livre nas proximidades da entrada do canal em degraus é próxima de um “S” com um ponto de inflexão, onde ocorre, aproximadamente, a profundidade crítica. Alguns resultados numéricos apresentaram soluções para o campo de frações de vazios com cavidades de ar persistentes, que não desapareceram com a evolução dos cálculos. As Figuras 6.21g e 6.21h ilustram detalhes destes campos extraídos das simulações SF 1.29 e SF 1.30, respectivamente.

Tabela 6.11 – Informações comuns às simulações SF 1.26 a SF 1.31

Grandeza	H_{dam} [m]	s [m]	l [m]	k [m]	α
Valor	20	0,6	3,0	0,59	11,3°
Grandeza	h_E [m]	h_d [m]	P [m]	C_o	P/h_d
Valor	20	5,76	20	2,17	3,47

Tabela 6.12 – Informações sobre as simulações SF 1.26 a SF 1.31

-	SF 1.26	SF 1.27	SF 1.28	SF 1.29	SF 1.30	SF 1.31
V_E [m/s]	1,5	1,25	1,0	0,75	0,5	0,25
q [m ² /s]	30	25	20	15	10	5
h_c [m]	4,51	4,0	3,44	2,84	2,17	1,37
s/h_c	0,11	0,13	0,15	0,17	0,21	0,28

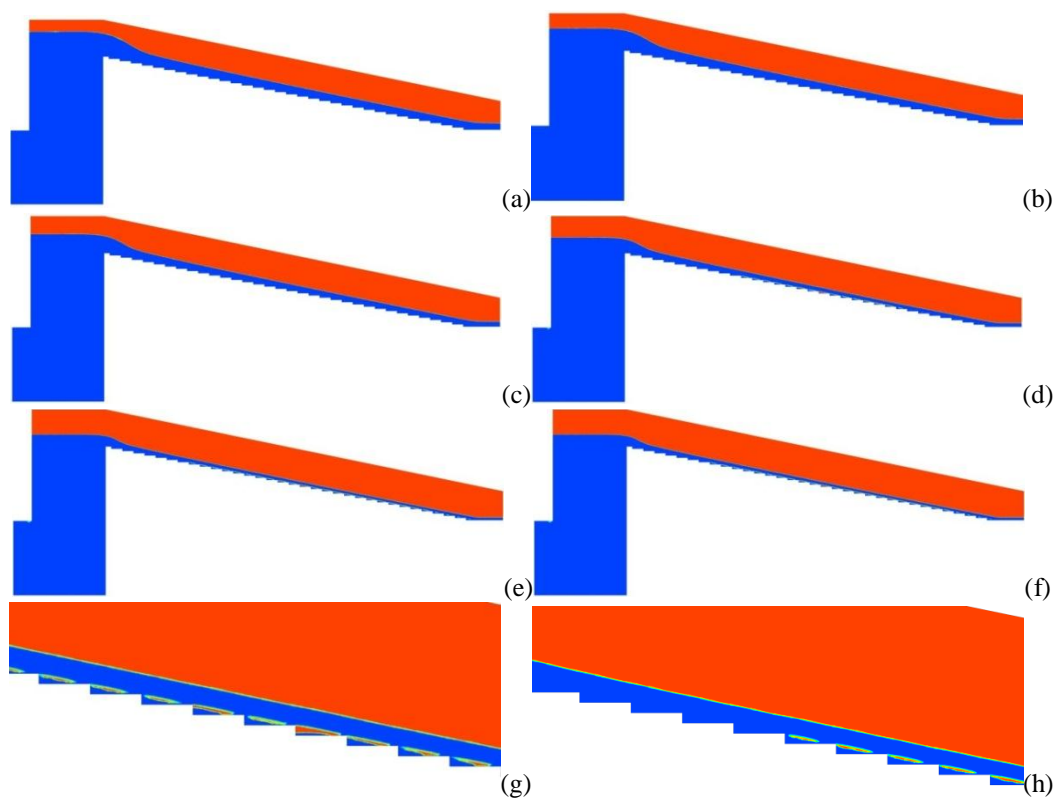


Figura 6.21 – Campos de frações de vazios obtidos com as simulações SF 1.26 a SF 1.32: (a) Simulação SF 1.26; (b) Simulação SF 1.27; (c) Simulação SF 1.28; (d) Simulação SF 1.29; (e) Simulação SF 1.30; (f) Simulação SF 1.31; (g) Detalhe da Simulação SF. 1.29; (h) Detalhe da Simulação SF. 1.30.

6.4 Análise dos resultados (Skimming flow)

6.4.1 Posição de início da aeração

A posição de início da aeração definida a partir dos resultados numéricos é aquela a partir da qual a espessura da camada limite turbulenta, δ , coincide com a altura de escoamento, h , ou seja, a própria definição física do ponto de início de aeração, como ilustrado na Figura 6.22. Como todo o desenvolvimento do escoamento antes do ponto de início de aeração é supercrítico (não dependendo, portanto, do que ocorre na região aerada), os cálculos do escoamento são facilitados. Os valores de z_A foram obtidos com os resultados da maior parte das simulações anteriores correspondentes a estruturas sem comportas, como indicado na

Tabela 6.13. Eles foram extraídos dos campos de velocidades, identificando-se a igualdade $\delta=h$ por meio de perfis de velocidades. Os valores de L_A foram calculados de forma simplificada como $z_A/\text{sen}\alpha$.

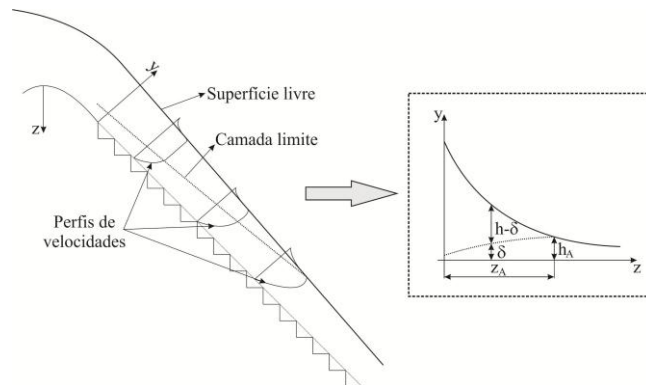


Figura 6.22 – Desenho esquemático com a definição da posição de início da aeração z_A com base na igualdade $\delta=h$ (δ =espessura da camada limite turbulenta). O fato de se ter escoamento supercrítico faz com que não haja influência de jusante sobre o desenvolvimento do escoamento de montante.

Tabela 6.13 – Resultados numéricos para a posição de início da aeração

α [rad]	Simulação	q [m ² /s]	h_c [m]	z_A [m]	L_A [m]	z_A/k [-]	L_A/k [-]	F_r^* [-]
0,9273	SF 1.1	30	4,51	47,10	58,88	130,83	163,54	49,59
	SF 1.2	25	3,99	42,10	52,63	116,94	146,18	41,32
	SF 1.3	20	3,44	37,50	46,88	104,17	130,21	33,06
	SF 1.4	15	2,84	26,70	33,38	74,17	92,71	24,79
	SF 1.5	10	2,17	20,60	25,75	57,22	71,53	16,53
	SF 1.6	5	1,37	10,30	12,88	28,61	35,76	8,26
0,7854	SF 1.12	40	5,46	46,40	65,62	109,37	154,67	54,97
	SF 1.13	30	4,51	38,70	54,73	91,22	129,00	41,23
	SF 1.14	25	3,99	32,70	46,24	77,07	109,00	34,36
	SF 1.15	20	3,44	27,90	39,46	65,76	93,00	27,48
	SF 1.16	15	2,84	21,40	30,26	50,44	71,33	20,61
	SF 1.17	10	2,17	16,20	22,91	38,18	54,00	13,74
0,54042	SF 1.18	5	1,37	9,80	13,86	23,10	32,67	6,87
	SF 1.19	40	5,46	33,89	65,87	65,87	128,03	48,26
	SF 1.20	30	4,51	28,80	55,98	55,98	108,80	36,19
	SF 1.21	25	3,99	23,30	45,29	45,29	88,02	30,16
	SF 1.22	20	3,44	18,00	34,99	34,99	68,00	24,13
	SF 1.23	15	2,84	14,10	27,41	27,41	53,27	18,10
0,1974	SF 1.24	10	2,17	9,40	18,27	18,27	35,51	12,06
	SF 1.25	5	1,37	5,30	10,30	10,30	20,02	6,03
	SF 1.26	30	4,51	11,70	59,66	19,89	101,40	47,94
	SF 1.27	25	3,99	9,60	48,95	16,32	83,20	39,95
	SF 1.28	20	3,44	6,40	32,63	10,88	55,47	31,96
	SF 1.29	15	2,84	5,00	25,50	8,50	43,33	23,97
	SF 1.30	10	2,17	2,70	13,77	4,59	23,40	15,98
	SF 1.31	5	1,37	1,60	8,16	2,72	13,87	7,99

Os adimensionais z_A/k e F_r^* apresentados na Tabela 6.13 relacionam-se bem através da seguinte função, assim como apresentado na revisão bibliográfica:

$$\frac{z_A}{k} = \lambda_1 F_r^{*\lambda_2} \quad (6.37)$$

Os parâmetros λ_1 e λ_2 são adimensionais e dependem do ângulo α . A Tabela 6.14 contém os valores de λ_1 e λ_2 , assim como os coeficientes de correlação.

Tabela 6.14 – Valores dos parâmetros relacionados à equação 6.37

α	λ_1 [-]	λ_2 [-]	R
53,13°	4,905	0,854	1,0
45°	5,262	0,759	1,0
31°	1,912	0,923	1,0
11,3°	0,23	1,137	0,99

R=coeficiente de correlação

Os dados apresentados na Tabela 6.14 e a equação 6.37 conduziram ao desenvolvimento de uma formulação geral para interpolação das soluções numéricas. Tal formulação é composta por uma potência e um logaritmo, como apresentado a seguir (equação 6.38a). A equação 6.38b foi obtida por meio da relação $z_A = L_A \text{sen}\alpha$.

$$\frac{z_A}{k} = 9,389(\text{sen}\alpha)^{2,28} F_r^{*-0,239\ln(\text{sen}\alpha)+0,748} \quad (6.38a)$$

$$\frac{L_A}{k} = 9,389(\text{sen}\alpha)^{1,28} F_r^{*-0,239\ln(\text{sen}\alpha)+0,748} \quad (6.38b)$$

Estas equações são válidas para: $6 < F_r^* < 55$ e $0,11 \leq s/h_c \leq 0,44$. O coeficiente de correlação entre os valores numéricos e calculados com a equação 6.38 é igual a 1,0 (para dois dígitos significativos e reduzindo a apresentação à primeira casa decimal). Este resultado e a distribuição dos pontos formados pelos valores calculados e numéricos (Figura 6.23a) indicam a boa qualidade da equação proposta. A relação entre os valores obtidos com a equação 6.38, denotados por $(z_A)_1$, e os valores calculados numericamente, $(z_A)_2$, também é apresentada (Figura 6.23b). Nota-se que a maior parte dos pontos está localizada próximo ao valor unitário, sendo que apenas um ponto apresentou desvio maior que 11%.

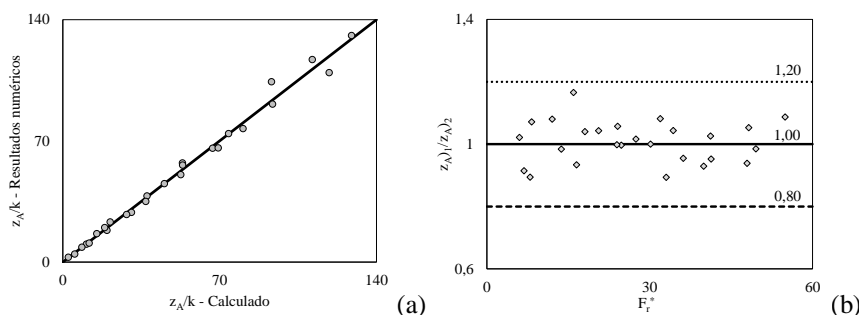


Figura 6.23 – Posição de início da aeração: Comparação entre os resultados numéricos e os valores calculados como função proposta.

6.4.2 Profundidade no início da aeração

A relação entre os adimensionais h_A/k e F_r^* foi estabelecida por diversos autores com o uso de uma potência, como apresentado na revisão bibliográfica. Os dados numéricos conduziram ao uso de uma função com esta forma também, tendo sido possível calcular coeficientes independentes do ângulo α . Todos os dados encontram-se na Tabela 6.15. A equação 6.39 corresponde ao modelo sugerido, com coeficiente de correlação igual a 0,99. A distribuição dos dados em relação aos valores numéricos originais é ilustrada na Figura 6.24a e a Figura 6.24b contém a relação entre os valores ajustados pela potência e os calculados numericamente. Observa-se que os pontos situaram-se entre 0,9 e 1,1.

$$\frac{h_A}{k} = 0,34F_r^{*0,582} \quad (6.39)$$

Estas equações são válidas para: $6 < F_r^* < 55$ e $0,11 \leq s/h_c \leq 0,44$.

Tabela 6.15 – Resultados para profundidade no início da aeração

α [rad]	Simulação	q [m ² /s]	h_c [m]	h_A [m]	h_A/k [-]	F_r^* [-]
0,9273	SF 1.1	30	4,51	1,11	3,07	49,59
	SF 1.2	25	3,99	1,02	2,83	41,32
	SF 1.3	20	3,44	0,88	2,44	33,06
	SF 1.4	15	2,84	0,75	2,08	24,79
	SF 1.5	10	2,17	0,60	1,66	16,53
	SF 1.6	5	1,37	0,39	1,10	8,26
0,7854	SF 1.12	40	5,46	1,47	3,45	54,97
	SF 1.13	30	4,51	1,20	2,84	41,23
	SF 1.14	25	3,99	1,10	2,60	34,36
	SF 1.15	20	3,44	0,97	2,28	27,48
	SF 1.16	15	2,84	0,82	1,94	20,61
	SF 1.17	10	2,17	0,64	1,50	13,74
0,54042	SF 1.18	5	1,37	0,42	0,99	6,87
	SF 1.19	40	5,46	1,74	3,39	48,26
	SF 1.20	30	4,51	1,44	2,80	36,19
	SF 1.21	25	3,99	1,32	2,57	30,16
	SF 1.22	20	3,44	1,18	2,30	24,13
	SF 1.23	15	2,84	0,99	1,93	18,10
0,1974	SF 1.24	10	2,17	0,80	1,55	12,06
	SF 1.25	5	1,37	0,53	1,03	6,03
	SF 1.26	30	4,51	1,96	3,34	47,94
	SF 1.27	25	3,99	1,77	3,00	39,95
	SF 1.28	20	3,44	1,61	2,74	31,96
	SF 1.29	15	2,84	1,35	2,30	23,97
	SF 1.30	10	2,17	1,07	1,82	15,98
	SF 1.31	5	1,37	0,65	1,10	7,99

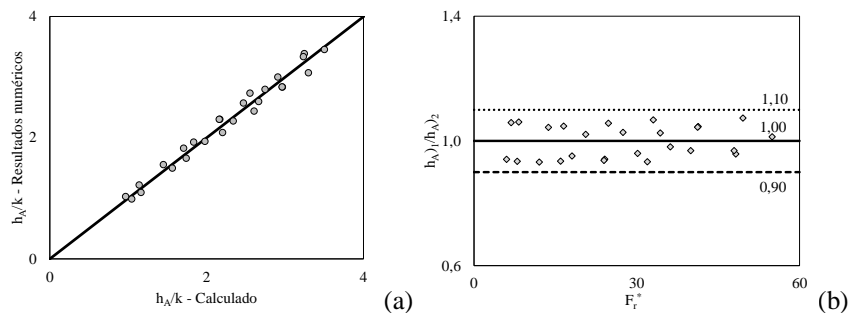


Figura 6.24 – Profundidades no início da aeração: Comparação entre os resultados numéricos e os valores calculados como função proposta.

6.4.3 Relação entre h_A/L_A e L_A/k

As variáveis h_A/L_A e L_A/k podem ser relacionadas por meio de uma função com a forma da equação 6.40, como apresentado na revisão bibliográfica. Os dados numéricos obtidos confirmaram este comportamento. Os coeficientes λ_3 e λ_4 calculados para cada valor de α podem ser vistos na Tabela 6.16. Com a Figura 6.25, nota-se que os pontos não ultrapassaram os limites 0,90 e 1,10.

$$h_A/L_A = \lambda_3(L_A/k)^{\lambda_4} \quad (6.40)$$

Tabela 6.16 – Valores dos parâmetros relacionados à equação 6.40

α	λ_3	λ_4	F_r^*	s/h_c	R
	[-]	[-]	[-]	[-]	
53,13°	0,0974	-0,328	8,26-49,59	0,13-0,44	0,98
45°	0,0649	-0,214	6,87-54,97	0,11-0,44	0,98
31°	0,17	-0,39	6,03-48,26	0,11-0,44	0,99
11,3°	0,367	-0,516	7,99-47,94	0,13-0,44	0,99

R=coeficiente de correlação.

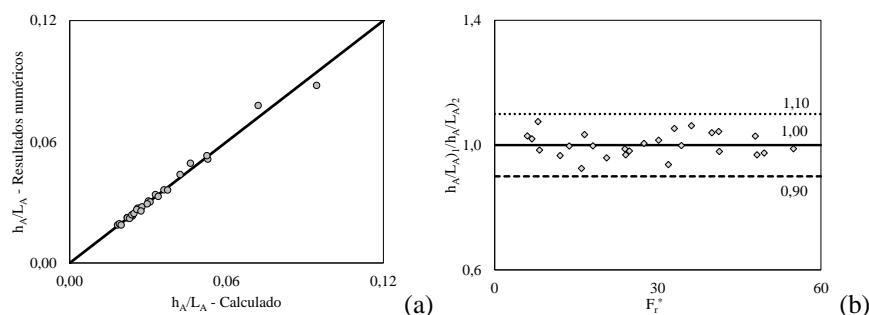


Figura 6.25 – Comparação entre os valores numéricos e interpolados de h_A/L_A e L_A/k .

6.5 escoamento em quedas sucessivas

Foram realizadas duas simulações de escoamentos em quedas sucessivas com o intuito de avaliar a energia dissipada. A primeira simulação, denominada NF1.1, foi realizada em um domínio bidimensional discretizado com uma malha não estruturada com aproximadamente $4,3 \times 10^5$ elementos. Os degraus possuem $s=0,25$ m, $s/l=0,5$ e $s/h_c=1,5$ (valor próximo do limite entre o regime nappe flow e o escoamento de transição). O domínio escolhido possui uma

entrada sob pressão com 0,15 m de altura. Adotou-se rugosidade absoluta equivalente igual a 0,15 mm, o modelo não homogêneo e o modelo de turbulência k-ε. A Figura 6.26a contém a solução obtida para o campo de fração de vazios. Com este resultado, foram obtidas profundidades sobre os pisos para avaliação aproximada da energia residual em função de z/h_c . Na Figura 6.26b é apresentada a solução para $s/h_c=2$ (demais dados iguais aos da simulação NF1.1). Esta simulação é denominada NF1.2.

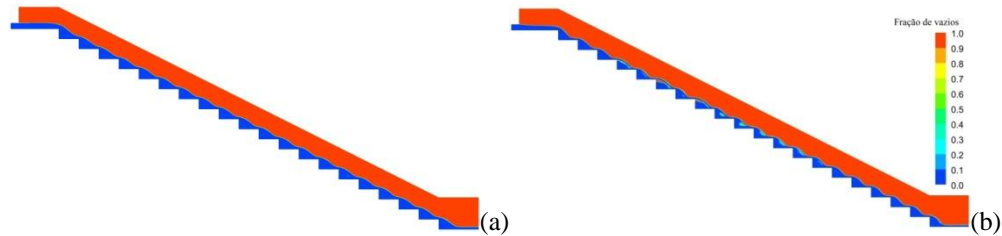


Figura 6.26 – Campo de fração volumétrica de ar: (a) NF1.1; (b) NF1.2.

Para calcular a energia residual, H_{res} , foram utilizadas as seguintes definições:

$$H_{res} = h + q^2 / (2gh^2) = h + h_c^3 / (2h^2) \quad (6.41)$$

$$H_{máx} = z + 1,5h_c \quad (6.42)$$

$$H_{res} / H_{máx} = (h/h_c + 0,5h_c^2/h^2) / (z/h_c + 1,5) \quad (6.43)$$

Com estas equações é possível definir um fator de resistência para o nappe flow, representado por f_n . Seja I_f a declividade da linha de energia. Calculada com a equação de Darcy-Weisbach para um canal largo, pode-se escrever:

$$I_f = f_n (h_c/h)^3 / 8 = f_n Fr^2 / 8 \quad (6.44)$$

Fr^2 é o quadrado do número de Froude para um canal retangular, igual a $(h_c/h)^3$. Chanson (2002) calculou $f_n = 0,079$, para z/h_c entre 2,5 e 14,5, com dados experimentais para o regime nappe flow sem ressalto hidráulico (NA3). Com o intuito de comparar os resultados numéricos com os dados experimentais apresentados pelo referido autor, a equação de conservação de energia foi escrita com a seguinte forma simplificada:

$$I_f = (H_{máx} - H_{res}) / (z / \text{sen}\alpha) = \text{sen}\alpha (1 + 1,5h_c/z) (1 - H_{res} / H_{máx}) \quad (6.45)$$

Com esta equação e a equação 6.44 é possível calcular f_n a partir dos dados numéricos por meio da equação 6.46. Os resultados obtidos e apresentados na Figura 6.27a indicam que o parâmetro adimensional $H_{res}/H_{máx}$ decresce ao longo de z/h_c , com valores praticamente

independentes de s/h_c . Como pode ser visto nas Figuras 6.27b e c, f_n cresce ao longo de z/h_c com um comportamento aproximadamente logarítmico, descrito pela equação 6.47, que possui coeficiente de correlação igual a 0,93.

$$f_n = (8\text{sen}\alpha / Fr^2)(1 + 1,5h_c / z)(1 - H_{\text{res}} / H_{\text{máx}}) \quad (6.46)$$

$$f_n = 0,0449 \ln(z / h_c) + 0,0418 \quad (6.47)$$

Os resultados foram obtidos com profundidades calculadas nas proximidades do final do piso, que são valores próximos aos que se estabeleceriam em bacias de dissipação horizontais na mesma posição vertical do piso. Como ilustrado na Figura 6.27b, os valores calculados com os resultados numéricos de acordo com a metodologia descrita coincidem aproximadamente com a solução de Chanson (2002) para os menores valores de z/h_c . Os resultados obtidos possuem $\min(f_n)=0,068$ e $\max(f_n)=0,21$ e são válidos para z/h_c entre 1,5 e 40. Como pode ser visto na Figura 6.27d, o valor da declividade da linha de energia na região de escoamento uniforme, calculada com a metodologia descrita, coincide de forma aproximada com o valor teórico previsto, isto é, $\text{sen}(\text{atan}(0,5))=0,447$, para z/h_c entre 10 e 40.

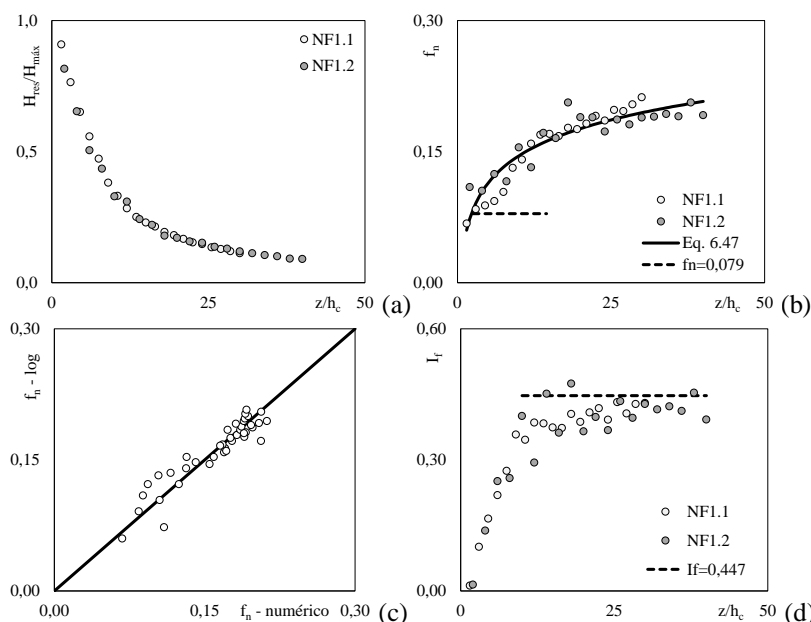


Figura 6.27 – Resultados correspondentes aos experimentos numéricos NF1.1 e NF1.2: Energia residual (a), fator de resistência (b), comparação entre valores calculados com a função logarítmica e os dados numéricos (c) e declividade da linha de energia (d). Valores calculados com as equações 6.43 e 6.46 (a e b).

Verifica-se que a presente metodologia permite expandir o conhecimento acerca dos escoamentos em canais escalonados (vertedores), mostrando que os resultados encontrados na literatura preenchem requisitos particulares desses escoamentos.

CAPÍTULO 7

DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS

Sumário

7 DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS	341
7.1 Análise dimensional.....	341
7.1.1 Aplicação ao escoamento em canais em degraus	342
7.1.2 Análise dimensional para a dissipação de energia em canais em degraus	349
7.2 Modelo matemático para o perfil da superfície livre	352
7.2.1 Dedução da equação diferencial ordinária para o perfil da superfície livre	352
7.3 Formas adimensionais para o perfil da superfície livre	357
7.3.1 Primeira forma adimensional: $\xi(\chi)$	357
7.3.2 Segunda forma adimensional: $\Gamma(H)$	359
7.3.3 Soluções analíticas para as adimensionalizações apresentadas	360
7.4 Fator de resistência	361
7.4.1 Equação da energia	361
7.4.2 Balanço de forças	362
7.4.3 Solução final	363
7.5 Comprimento de transição para o escoamento bifásico: Parte 1.....	364
7.5.1 Conservação de massa	364
7.5.2 Quantidade de movimento	366
7.5.3 Conservação de energia	368
7.5.4 Síntese do modelo proposto	370
7.6 Comprimento de transição: Parte 2	371
7.6.1 Proposta fundamentada em analogia com as leis básicas.....	371
7.6.2 Modelo para o comprimento de transição total, entre h_1 e h_3	373
7.7 Dissipação de energia.....	375
7.7.1 Considerações fenomenológicas	375
7.7.2 Equacionamento integral para a dissipação de energia	378
7.8 Formulação integral para o desenvolvimento da camada limite.....	379
7.8.1 Aproximação para $dp/dx_1=0$ e $dV_\infty/dx_1=0$	381

7.9 Modelo para transferência de oxigênio através da interface ar-água	384
7.9.1 Modelo clássico para reoxigenação	384
7.9.2 Modelo proposto para K_2	385
7.9.3 Comportamento de K_2^* ao longo do escoamento: aproximação para n e y constantes	388
7.9.4 Inclusão das dimensões dos degraus na formulação	389
7.9.5 Comparações com dados experimentais	390

7 DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS

As impressões decorrentes da leitura dos trabalhos existentes, além daquelas provenientes dos experimentos desta pesquisa, conduziram à seleção de variáveis e proposição de hipóteses relativas a relações entre elas. Entre as abordagens teóricas encontram-se análises dimensionais, soluções inéditas para o perfil da superfície livre, uma equação para o fator de resistência e uma equação para o comprimento de transição encontrado com as medidas dos perfis da superfície livre.

7.1 Análise dimensional

O uso de variáveis adimensionais é indispensável em estudos ligados à Mecânica dos Fluidos e Hidráulica. Esta prática reduz o número de graus de liberdade do problema e produz resultados que independem do sistema de unidades adotado. Como exemplo, pode-se mencionar o diagrama de Moody, que é uma representação altamente compacta da relação entre o fator de resistência com a velocidade média, a viscosidade cinemática, a rugosidade absoluta equivalente e o diâmetro interno do tubo. Quando se pretende substituir as variáveis dimensionais por números puros, é razoável perguntar: (1) Quantos números adimensionais são necessários para descrever o fenômeno? (2) Como obter tais números? Uma possível maneira de responder a estas questões é com o uso do teorema de Vaschy-Buckingham. Antes de enunciar o teorema, é necessário observar as seguintes definições básicas:

Definição 1. *Grandezas físicas dimensionais são aquelas que possuem dimensões associadas a elas, como a velocidade, pressão, força, aceleração, etc. Elas são denotadas neste texto por G_i , em que $i = 1, 2, \dots, n$, sendo n o número de grandezas físicas que representam o fenômeno. As grandezas físicas podem ser funções ou constantes.*

Definição 2. *Número total de unidades fundamentais, denotado por j , é o número de unidades dimensionais necessárias para escrever as unidades de cada variável do fenômeno. Neste texto, tais grandezas são: massa, comprimento, tempo e temperatura.*

Definição 3. *Uma matriz dimensional possui j linhas e n colunas. Cada elemento da matriz é determinado pela comparação do expoente de G_i com a unidade fundamental da linha correspondente, sendo igual ao expoente dessa unidade fundamental presente em G .*

Teorema 1. *Se um fenômeno físico puder ser descrito através de uma função $F(G_1, G_2, \dots, G_n) = 0$, então o mesmo fenômeno também pode ser descrito por meio de uma função $\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$, de $n-r$ números adimensionais independentes e com a forma:*

$$\Pi_i = A_i G_1^{a_i} G_2^{b_i} G_3^{c_i} \dots G_n^{z_i} \quad (7.1)$$

Nesta equação $r =$ característica da matriz dimensional (geralmente igual a j), $A_i =$ número puro e a_i , b_i , c_i e z_i são incógnitas, determinadas de tal maneira que a homogeneidade dimensional seja satisfeita. Nota-se que o Teorema 1 estabelece que os números adimensionais devem ser independentes, ou seja, não podem ser escritos como um múltiplo ou uma potência de outro. Essa independência é alcançada se para cada Π existir um G diferente dos presentes nos demais Π 's.

7.1.1 Aplicação ao escoamento em canais em degraus

Neste item o Teorema 1 é aplicado ao escoamento com superfície livre que ocorre em um canal com o fundo em degraus, como aquele da Figura 7.1. A escolha adequada das grandezas físicas é o primeiro passo para a realização da análise dimensional. Algumas escolhas são imediatas, como, por exemplo, a velocidade, a massa específica, a viscosidade dinâmica e a aceleração da gravidade, já que o escoamento ocorre com superfície livre. As demais variáveis relevantes para a análise são determinadas com base em conjecturas razoáveis e possíveis informações existentes. Canais com o fundo em degraus podem ser construídos com ângulos de inclinação (α) que variam desde valores pequenos até valores elevados, como 50° ou 60° , em vertedores de barragens. Como ilustrado na Figura 7.1, há uma posição ao longo de x a partir da qual o escoamento deixa de ser monofásico devido à entrada de ar através da superfície. A posição de início da aeração corresponde à posição onde a espessura da camada limite é igual à profundidade do escoamento, h . A aeração e a configuração da superfície livre dependem, entre outras variáveis, das dimensões dos degraus (" s ", " l " e $k = s \cos \alpha$). Uma maneira de representar a mistura bifásica é utilizando a fração de vazios, como discutido na revisão bibliográfica.

A qualidade dos resultados obtidos por meio de estudos em modelos reduzidos está associada às dimensões do modelo físico, além de outros aspectos. Modelos físicos muito pequenos normalmente levam a resultados que não podem ser extrapolados para o protótipo, mesmo com o uso de números adimensionais. A quantificação de tais efeitos de escala é feita com adimensionais selecionados em função dos fenômenos envolvidos. Em vertedores, graças à incorporação de ar, é razoável incluir os efeitos da tensão superficial entre ar e água. Deve-se levar em consideração também a possibilidade de ocorrência de cavitação, sobretudo na região de escoamento monofásico, sendo o campo de pressões (p) relevante para o fenômeno, ou, em outros termos, a diferença entre a pressão absoluta p e a pressão de vapor p_v , denotada por Δp . Uma vez que a compressibilidade da água é importante durante o colapso de cavidades, deve-se incluir na análise o módulo de elasticidade volumétrico do fluido (K). A

frequência f_p , utilizada anteriormente para definir o número de Strouhal, também foi selecionada. Finalmente, é razoável adotar um adimensional inicialmente genérico, T , que caracterize a turbulência. Neste trabalho, T foi representado de algumas formas apenas para a superfície livre, como com o uso da intensidade turbulenta relativa e com os coeficientes de assimetria e curtose, que envolvem momentos centrais.

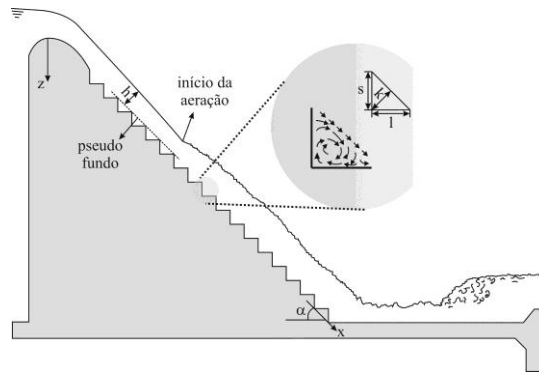


Figura 7.1 – Desenho esquemático de um canal com o fundo em degraus

Reunindo as variáveis mencionadas anteriormente e outras definidas a seguir, existe a seguinte função que descreve o fenômeno:

$$F(V, \Delta p, \rho, \mu, \sigma, K, \alpha, L_c, s, l, k, B, \rho_a, C, g, f_p, T) = 0 \quad (7.2)$$

em que V = velocidade média, $\Delta p = p - p_v$, ρ = massa específica da água, μ = viscosidade dinâmica, σ = tensão superficial, K = módulo de elasticidade volumétrica, α = ângulo de inclinação do canal, L_c = comprimento característico, s = altura do degrau, l = comprimento do piso, $k = s \cos \alpha$, B = largura de topo do canal, ρ_a = massa específica do ar, C = fração de vazios, g = aceleração da gravidade, f_p = frequência dominante e T = adimensional para a turbulência.

Como pode ser notado, o número de grandezas físicas definidas na função dimensional é $n = 17$. O campo de temperaturas não foi considerado neste problema, o que implica $j = 3$. Portanto, a matriz dimensional possui a seguinte forma:

	V	Δp	ρ	μ	σ	K	α	L_c	s	l	k	B	ρ_a	C	g	f_p	T
M	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
L	1	-1	-3	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	-3	0	1	0	0
T	-1	-2	0	-1	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0

O próximo passo para aplicação do método consiste em determinar a característica (*rank*) da matriz dimensional, que para este problema é igual a três. Como mencionado anteriormente, cada número adimensional deve envolver uma grandeza G diferente daquelas

existentes nas demais para que haja independência entre os Π 's. Deve-se então escolher um conjunto de variáveis a repetir, formado por um número de variáveis igual à característica da matriz dimensional. Como regra, o coeficiente da matriz dimensional do sistema pró-básico (variáveis repetidas) deve ser diferente de zero. Observadas essas regras, o sistema pró-básico será formado por variáveis que, quando combinadas, não resultam em um número adimensional. Para esse problema foram escolhidas as variáveis V , ρ e L_c (base dimensional), cuja matriz dimensional possui determinante igual a -1 . Cabe mencionar que é comum escolher V e ρ e uma grandeza geométrica para compor o sistema pró-básico.

Com os resultados precedentes, a próxima etapa consiste em determinar os números adimensionais. Como $n = 17$ e $r = 3$, serão obtidos 14 adimensionais. Empregando a equação 7.1 com $z_i = +1$ ou $z_i = -1$ (os valores foram escolhidos convenientemente para obter números adimensionais com as formas padrão) obtém-se:

$$\Pi_1 = A_1 V^{a_1} \rho^{b_1} L_c^{c_1} \Delta p \quad (7.3)$$

$$\Pi_2 = A_2 V^{a_2} \rho^{b_2} L_c^{c_2} \mu \quad (7.4)$$

$$\Pi_3 = A_3 V^{a_3} \rho^{b_3} L_c^{c_3} \sigma \quad (7.5)$$

$$\Pi_4 = A_4 V^{a_4} \rho^{b_4} L_c^{c_4} K \quad (7.6)$$

$$\Pi_5 = A_5 V^{a_5} \rho^{b_5} L_c^{c_5} \alpha \quad (7.7)$$

$$\Pi_6 = A_6 V^{a_6} \rho^{b_6} L_c^{c_6} k \quad (7.8)$$

$$\Pi_7 = A_7 V^{a_7} \rho^{b_7} L_c^{c_7} s \quad (7.9)$$

$$\Pi_8 = A_8 V^{a_8} \rho^{b_8} L_c^{c_8} l \quad (7.10)$$

$$\Pi_9 = A_9 V^{a_9} \rho^{b_9} L_c^{c_9} \rho_a \quad (7.11)$$

$$\Pi_{10} = A_{10} V^{a_{10}} \rho^{b_{10}} L_c^{c_{10}} C \quad (7.12)$$

$$\Pi_{11} = A_{11} V^{a_{11}} \rho^{b_{11}} L_c^{c_{11}} B \quad (7.13)$$

$$\Pi_{12} = A_{12} V^{a_{12}} \rho^{b_{12}} L_c^{c_{12}} g \quad (7.14)$$

$$\Pi_{13} = A_{13} V^{a_{13}} \rho^{b_{13}} L_c^{c_{13}} f_p \quad (7.15)$$

$$\Pi_{14} = A_{14} V^{a_{14}} \rho^{b_{14}} L_c^{c_{14}} T \quad (7.16)$$

Para garantir a homogeneidade dimensional nas equações 7.3 a 7.16 os expoentes são determinados com a solução das equações formadas pelas dimensões de cada grandeza, como apresentado a seguir:

Equação 7.3:

$$\Pi_1 = A_1 V^{a_1} \rho^{b_1} L_c^{c_1} \Delta p \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_1} (L)^{c_1} \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 - 3b_1 + c_1 - 1 = 0 \\ -a_1 - 2 = 0 \\ b_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

Nota-se que o resultado obtido é o número de cavitação. O valor de A_1 pode ser escolhido como sendo igual a 1 ou igual a 2.

Equação 7.4:

$$\Pi_2 = V^{a_2} \rho^{b_2} L_c^{c_2} \mu^{-1} \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_2} (L)^{c_2} \left(\frac{M}{TL}\right)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 - 3b_2 + c_2 + 1 = 0 \\ -a_2 + 1 = 0 \\ b_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad (7.18)$$

Neste caso adotou-se $A_2 = 1$ e $z_2 = -1$ com o intuito de obter o número de Reynolds. Para que ele seja expresso em termos do diâmetro hidráulico, utiliza-se $L_c = 4R_h$, (R_h = raio hidráulico).

Equação 7.5:

$$\Pi_3 = V^{a_3} \rho^{b_3} L_c^{c_3} \sigma^{-1} \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_3} (L)^{c_3} \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_3 - 3b_3 + c_3 + 1 = 0 \\ -a_3 + 2 = 0 \\ b_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ b_3 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

O resultado obtido é o número de Weber, com $A_3 = 1$ e $z_3 = -1$.

Equação 7.6:

$$\Pi_4 = V^{a_4} \rho^{b_4} L_c^{c_4} K^{-1} \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_4} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_4} (L)^{c_4} \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_4 - 3b_4 + c_4 + 1 = 0 \\ -a_4 + 2 = 0 \\ b_4 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 2 \\ b_4 = 1 \\ c_4 = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

Verifica-se que as escolhas para A_4 e z_4 resultaram no número de Cauchy.

Equação 7.7:

$$\Pi_5 = A_5 V^{a_5} \rho^{b_5} L_c^{c_5} \alpha \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_5} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_5} (L)^{c_5} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_5 - 3b_5 + c_5 = 0 \\ -a_5 = 0 \\ b_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 0 \\ b_5 = 0 \\ c_5 = 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

Neste caso, como esperado, o adimensional é o próprio ângulo α .

Equação 7.8:

$$\Pi_6 = A_6 V^{a_6} \rho^{b_6} L_c^{c_6} k \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_6} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_6} (L)^{c_6} (L)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_6 - 3b_6 + c_6 + 1 = 0 \\ -a_6 = 0 \\ b_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6 = 0 \\ b_6 = 0 \\ c_6 = -1 \end{cases} \quad (7.22)$$

O resultado obtido é uma razão do tipo k/L_c , que pode ser vista como uma razão de aspecto semelhante à rugosidade relativa para tubos, com k equivalente à rugosidade absoluta equivalente e L_c equivalente ao diâmetro. Pode-se adotar $A_6 = 1$ e $L_c = 4R_h$ para que o número puro seja escrito em termos do diâmetro hidráulico. Isto não afeta de nenhum modo o resultado final da análise, porém, trata-se de uma escolha que mantém certa coerência com as definições empregadas em hidráulica.

Equação 7.9:

$$\Pi_7 = A_7 V^{a_7} \rho^{b_7} L_c^{c_7} s \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_7} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_7} (L)^{c_7} (L)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_7 - 3b_7 + c_7 + 1 = 0 \\ -a_7 = 0 \\ b_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_7 = 0 \\ b_7 = 0 \\ c_7 = -1 \end{cases} \quad (7.23)$$

Não há analogia como ocorreu no caso anterior. Apesar disto, optou-se por $A_7 = 1$ e $L_c = 4R_h$, quantidade que pode ser alterada convenientemente em aplicações futuras.

Equação 7.10:

$$\Pi_8 = A_8 V^{a_8} \rho^{b_8} L_c^{c_8} l \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_8} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_8} (L)^{c_8} (L)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_8 - 3b_8 + c_8 + 1 = 0 \\ -a_8 = 0 \\ b_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_8 = 0 \\ b_8 = 0 \\ c_8 = -1 \end{cases} \quad (7.24)$$

Valem os comentários feitos para o adimensional precedente.

Equação 7.11:

$$\Pi_9 = A_9 V^{a_9} \rho^{b_9} L_c^{c_9} \rho_a \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_9} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_9} (L)^{c_9} \left(\frac{M}{L^3}\right)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_9 - 3b_9 + c_9 - 3 = 0 \\ -a_9 = 0 \\ b_9 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_9 = 0 \\ b_9 = -1 \\ c_9 = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

Este adimensional é numericamente igual à densidade do ar (densidade relativa). Para um experimento realizado com água e ar ele é, em grande parte das aplicações, uma constante.

Equação 7.12:

$$\Pi_{10} = A_{10} V^{a_{10}} \rho^{b_{10}} L_c^{c_{10}} C \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_{10}} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_{10}} (L)^{c_{10}} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{10} - 3b_{10} + c_{10} = 0 \\ -a_{10} = 0 \\ b_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 0 \\ b_{10} = 0 \\ c_{10} = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

Por ser uma grandeza adimensional, a fração de vazios é igual a Π_{10} , como esperado.

Equação 7.13:

$$\Pi_{11} = A_{11} V^{a_{11}} \rho^{b_{11}} L_c^{c_{11}} B^{-1} \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_{11}} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_{11}} (L)^{c_{11}} (L)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} - 3b_{11} + c_{11} - 1 = 0 \\ -a_{11} = 0 \\ b_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ b_{11} = 0 \\ c_{11} = 1 \end{cases} \quad (7.27)$$

Este número é interessante por incluir a largura de topo do canal.

Equação 7.14:

$$\Pi_{12} = A_{12} V^{a_{12}} \rho^{b_{12}} L_c^{c_{12}} g^{-1} \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_{12}} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_{12}} (L)^{c_{12}} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{12} - 3b_{12} + c_{12} - 1 = 0 \\ -a_{12} + 2 = 0 \\ b_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 2 \\ b_{12} = 0 \\ c_{12} = -1 \end{cases} \quad (7.28)$$

Este número é igual ao quadrado do número de Froude (com certa frequência, é o quadrado o número de Froude que aparece nos resultados e não o número de Froude). Neste caso, é comum adotar $A_{12} = 1$ e $L_c = H_m$, em que H_m = altura média, definida como a razão entre a área molhada e a largura de topo da seção.

Equação 7.15:

$$\Pi_{13} = A_{13} V^{a_{13}} \rho^{b_{13}} L_c^{c_{13}} f_p \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_{12}} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_{12}} (L)^{c_{12}} (T)^{-1} = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{13} - 3b_{12} + c_{12} = 0 \\ -a_{13} - 1 = 0 \\ b_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13} = -1 \\ b_{13} = 0 \\ c_{13} = 1 \end{cases} \quad (7.29)$$

O resultado obtido é o número de Strouhal ($A_{13}=1$). O último cálculo é semelhante ao realizado para o ângulo α e para C , uma vez que T é um adimensional por definição.

Com os resultados anteriores a função Φ pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\Phi\left(\sigma_c, Re, We, Ca, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{1}{L_c}, \frac{\rho_a}{\rho}, C, \frac{L_c}{B}, Fr, St, T\right) = 0 \quad (7.30)$$

A quantidade de números adimensionais ilustra a complexidade do problema. Se a reoxigenação da água fosse inserida na análise assim como a liberação de gases dissolvidos e a influência da rugosidade absoluta equivalente da superfície do material que compõe dos degraus, a função seria dependente de uma quantidade ainda maior de adimensionais. O último passo da análise dimensional consiste em estabelecer a forma da função Φ e os valores das constantes envolvidas. Essa tarefa não pode ser realizada sem a realização de experimentos, normalmente efetuados em laboratório, com modelos em escala reduzida, mas que também podem ser experimentos numéricos, com soluções obtidas a partir das equações de conservação atreladas a modelos de turbulência (embora esta seja uma alternativa com limitações em relação à primeira). Outro caminho para a determinação da função seria a via teórica. A seguir são expostos comentários sobre aspectos físicos ligados a alguns adimensionais presentes na equação 7.30, especificamente para o escoamento desta aplicação:

1) Ao adimensionalizar a equação de Navier-Stokes surgem os números de Reynolds e Froude. Uma consequência deste resultado é o fato de não ser possível igualar os números de Reynolds e Froude de um modelo reduzido aos mesmos números do protótipo correspondente. Sendo assim, o número de Reynolds do escoamento em um modelo com escala reduzida deve ter um valor soleira (isto é, de referência) compatível com a turbulência observada no protótipo. Nos estudos experimentais deve ser verificada a dependência dos números adimensionais com Re ;

2) A experiência mostra que modelos reduzidos com escalas inadequadas interferem no fenômeno de aeração do escoamento. Investigações experimentais relativas a um aerador de fundo implantado em uma calha lisa, conduzidas por Pinto (1988, p.100), em modelos de escalas 1:50, 1:30, 1:15 e 1:8 revelaram que o fenômeno de aeração depende do número de Weber, mostrando que a tensão superficial é importante, a menos que este parâmetro atinja um valor crítico, situado entre 500 e 1000;

3) O número de Cauchy está associado à compressibilidade do fluido e, portanto, à cavitação. Neste caso, este adimensional pode ser relacionado à cadeia de eventos que decorrem do colapso de uma bolha gasosa ou vaporosa, que libera grande quantidade de energia, a qual se traduz na propagação de ondas que viajam através do líquido e que podem atingir superfícies sólidas, deteriorando-as;

4) O ângulo do canal e as três razões de aspecto seguintes exercem influência, por exemplo, na ocorrência de diferentes tipos de escoamento em canais em degraus, na posição de início da aeração e na dissipação de energia ao longo do canal. Há canais cujos degraus possuem pisos não-horizontais ou com soleiras na extremidade de jusante. Para esses problemas, seriam necessárias razões de aspecto e ângulos adicionais para levar em consideração a influência de tais geometrias;

5) Valores adequados para a fração de vazios C são de grande importância para a prevenção dos efeitos da cavitação e também alteram as condições de dissolução de gases na água;

6) O adimensional que envolve a largura é importante por generalizar a análise que, em muitos casos, é realizada com a hipótese de canal largo. A influência das paredes laterais pode ser importante, por exemplo, em canais de sistemas de drenagem nos quais os valores de L_c/B (que pode ser h/B) nem sempre tendem a zero;

7) O número de Froude é indispensável já que o escoamento ocorre com superfície livre e este adimensional relaciona forças inerciais e gravitacionais. Embora tenha sido mencionado que $L_c = H_m$, em estudos relacionados a vertedores em degraus, há definições de Froude em termos das dimensões da cavidade formada entre degraus, ou, mais especificamente, em termos de “ k ”, como apresentado nos capítulos anteriores.

A análise dimensional também pode ser realizada de forma direcionada, ainda mais específica, como apresentado a seguir.

7.1.2 Análise dimensional para a dissipação de energia em canais em degraus

Este item tem como objetivo aplicar a análise dimensional ao problema de escoamentos em canais com o fundo em degraus, como esquematizado na Figura 7.1. Percebe-se que, para

aquela situação, há um escoamento do tipo deslizante sobre turbilhões (*skimming flow*), sendo essa uma restrição atrelada aos desenvolvimentos expostos aqui. A energia dissipada por unidade de volume de fluido (ΔE) entre duas seções 1 e 2 separadas por uma distância Δx pode ser tratada com o uso do Teorema 1, na forma:

$$F(\rho, V, L_c, \Delta E, \mu, g, \Delta x, k, s, l, \varepsilon_p, \varepsilon_e, \varepsilon_m, B, \alpha, C) = 0 \quad (7.31)$$

Nota-se que na definição desta função foram inseridas rugosidades absolutas equivalentes (ε) para o piso do degrau (ε_p), para o espelho do degrau (ε_e) e para os muros laterais (ε_m , supostamente iguais). Tal consideração é válida, pois há interesse em conhecer a influência desta grandeza nos valores de ΔE . A Figura 7.2 ilustra dois canais em degraus que, embora não estejam operando em regime deslizante sobre turbilhões nessas fotografias, são dois exemplos com superfícies cujas rugosidades são distintas.



Figura 7.2 – Canais em degraus: (a) Barragem Rio da Dona (Imagem cedida por Antônio Gilberto Simões de Oliveira) e (b e c) canal dissipador de energia do sistema de drenagem do Campus II da USP – São Carlos.

Nota-se que $n = 16$ para a função escolhida. Com $j=3$, a matriz dimensional para o problema em questão é:

	V	ΔE	ρ	μ	α	L_c	s	l	k	B	ε_p	ε_e	ε_m	Δx	g	C
M	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	1	-1	-3	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
T	-1	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0

A característica desta matriz é igual a 3 e o sistema pró-básico escolhido é composto por V, ρ e L_c . Seguindo os mesmos procedimentos apresentados anteriormente, vem,

$$\Pi_1 = A_1 V^{a_1} \rho^{b_1} L_c^{c_1} \Delta E \Rightarrow \left(\frac{L}{T}\right)^{a_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_1} (L)^{c_1} \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^1 = (MLT)^0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 - 3b_1 + c_1 - 1 = 0 \\ -a_1 - 2 = 0 \\ b_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

O adimensional obtido com $A_1 = 2$ é:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta E}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (7.33)$$

Uma vez que as demais grandezas são semelhantes a aquelas do problema anterior, não é necessário efetuar todas as operações novamente. O adimensional Π_1 pode ser escrito como uma função de Φ :

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \Phi\left(\text{Re}, \text{Fr}, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{\varepsilon_p}{L_c}, \frac{\varepsilon_e}{L_c}, \frac{\varepsilon_m}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{1}{L_c}, \frac{\Delta x}{L_c}, \frac{L_c}{B}, C\right) \quad (7.34)$$

A perda de carga em um conduto forçado é proporcional à primeira potência do comprimento para o escoamento laminar completamente desenvolvido e em regime permanente, sendo esta uma conclusão que pode ser obtida experimentalmente e através da equação de Navier-Stokes e de conservação de massa, que resulta na conhecida solução de Hagen-Poiseuille. A experiência mostra que ocorre a mesma proporcionalidade para escoamentos turbulentos em condições semelhantes. O equacionamento apresentado aqui para a queda de energia não deve ser restrito aos escoamentos completamente desenvolvidos, uma vez que em um vertedor em degraus está condição é rara, ocorrendo apenas para a região bifásica e após um comprimento relativo extenso. Deste modo, assumir que tal dissipação está linearmente relacionada com o comprimento corresponderia a uma simplificação. Supondo que a linha de energia tenha uma forma qualquer, sempre com $dE/dx < 0$, e que Δx é suficientemente pequeno para que a mencionada proporcionalidade linear seja válida, escreve-se:

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\Delta x}{L_c} \Phi_1\left(\text{Re}, \text{Fr}, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{\varepsilon_p}{L_c}, \frac{\varepsilon_e}{L_c}, \frac{\varepsilon_m}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{1}{L_c}, \frac{L_c}{B}, C\right) \quad (7.35)$$

Multiplicando Π_1 por g/g , obtém-se:

$$\Delta H = f \frac{\Delta x}{L_c} \frac{V^2}{2g} \quad (7.36)$$

em que ΔH = energia dissipada por unidade de peso de fluido e f = fator de resistência, igual à função Φ_1 . Substituindo L_c por $4R_h$ e fazendo $I_f = \Delta H/\Delta x$ (declividade da linha de energia), a equação 7.36 é reescrita com a seguinte forma:

$$I_f = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (7.37)$$

Nota-se que a equação 7.37 é semelhante à de Darcy-Weisbach, exceto pela definição do fator de resistência, que para a equação universal é uma função do número de Reynolds e da rugosidade relativa. Se for assumido que $\varepsilon = \varepsilon_p = \varepsilon_e = \varepsilon_m$ (o que não é verdade para a Figura 7.2b) e que a influência de ε/L_c pode ser desprezada quando comparada a k/L_c , o fator de resistência é simplificado para:

$$f = \Phi_2 \left(\text{Re}, \text{Fr}, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{1}{L_c}, \frac{L_c}{B}, C \right) \quad (7.38)$$

As hipóteses que permitiram a obtenção da equação 7.38 são razoáveis para grande parte dos vertedores de barragens normalmente adotados em projetos. Ainda sobre este tipo de estrutura, pode-se afirmar que é comum ocorrer a condição de canal largo, o que elimina a possibilidade de existência de uma boa correlação entre f e L_c/B . Assumindo que f é independente de Re (uma hipótese que necessita de maiores embasamentos, mas que é utilizada neste estudo como hipótese passível de teste), a equação 7.38 passa a ser:

$$f = \Phi_3 \left(\text{Fr}, \alpha, \frac{k}{L_c}, \frac{s}{L_c}, \frac{1}{L_c}, C \right) \quad (7.39)$$

7.2 Modelo matemático para o perfil da superfície livre

O uso de algumas hipóteses e das equações de conservação de energia e massa ou equação da quantidade de movimento e conservação de massa têm como resultado uma equação diferencial ordinária cujas soluções são funções $h(x)$, *i.e.*, o perfil da superfície livre. Este item é dedicado às deduções desta EDO e de suas soluções para formas adimensionais.

7.2.1 Dedução da equação diferencial ordinária para o perfil da superfície livre

Primeira dedução (conservação de energia)

A conservação de massa e energia são os princípios básicos desta dedução. O primeiro conjunto de hipóteses está presente na primeira lei da termodinâmica escrita com a forma apresentada a seguir:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H \quad (7.40)$$

Nesta equação, α_1 e α_2 são os coeficientes de Coriolis nas seções 1 e 2. Se as seções 1 e 2 estiverem separadas por um comprimento Δx , pode-se escrever:

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma \Delta x} + \frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2g \Delta x} \quad (7.41)$$

A distribuição de pressões, por hipótese, é calculada por meio do equilíbrio de um elemento de fluido perpendicular ao fundo. Sendo $\gamma h B dx$ o peso do fluido correspondente a ele, a sua componente normal ao fundo é $\gamma h B dx \cos \alpha$. A outra força atuante na direção normal ao fundo é a força de pressão no fundo, igual a $-p B dx$. A condição de equilíbrio na direção perpendicular ao fundo do canal resulta na equação 7.42, apresentada por Chow (1959):

$$p = \gamma h \cos \alpha \quad (7.42)$$

Substituindo este resultado na equação 7.41 e, para $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} \cos \alpha + \frac{\alpha_c}{2g} \frac{dV^2}{dx} \quad (7.43)$$

em que α_c = coeficiente de Coriolis. O último termo do segundo membro pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{dV^2}{dx} = 2V \frac{dV}{dx} = 2 \frac{Q}{A} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{A} \right) = 2 \frac{Q^2}{A} \frac{dA^{-1}}{dx} = -2 \frac{Q^2}{A^3} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} = -2 \frac{V^2}{A/B} \frac{dh}{dx}$$

Substituindo este resultado na equação 7.43 e identificando o número de Froude (Fr), pode-se escrever:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} \cos \alpha - \alpha_c Fr^2 \frac{dh}{dx} \quad (7.44)$$

Isolando dh/dx e, reconhecendo que $dH/dx = -I_f$ (declividade da linha de energia [m/m]) e $dz/dx = -I_o$ (declividade de fundo [m/m]), vem:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f}{\cos \alpha - \alpha_c Fr^2} \quad (7.45)$$

A equação anterior é conhecida como equação diferencial do escoamento gradualmente variado. A sua dedução pode ser encontrada em obras clássicas como Chow (1959) e Henderson (1966).

Segunda dedução (2ª Lei de Newton)

Os princípios de conservação de massa e o balanço de quantidade de movimento são os fundamentos desta dedução. Esta segunda dedução inclui a possibilidade de regime variável com o intuito de obter as equações de Saint-Venant. O volume de controle adotado pode ser visto em destaque na Figura 7.3. Ressalta-se que a simplicidade do modelo matemático deduzido não faz distinção entre um canal liso ou em degraus, sendo, portanto, válido para ambos os casos.

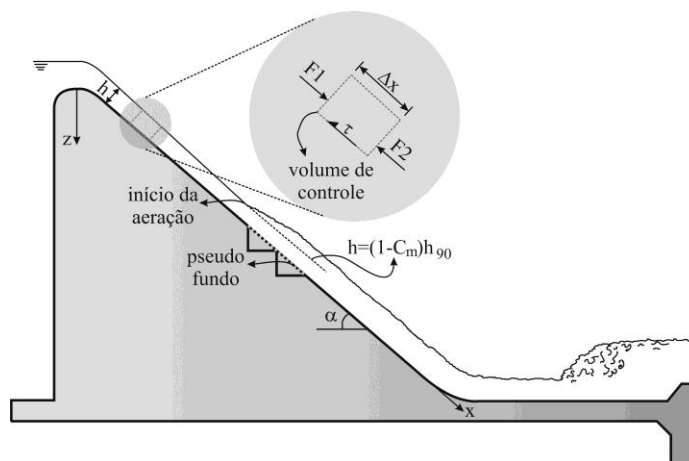


Figura 7.3 – Volume de controle adotado para a dedução

A equação de conservação de massa em sua forma integral é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dVol + \oiint_{sc} \rho \vec{v} \cdot n dA = 0 \quad (7.46)$$

O volume de controle adotado possui apenas duas faces permeáveis, uma entrada e uma saída. O escoamento é, por hipótese, unidimensional. Deste modo, sendo Q a vazão e 1 e 2 as seções de entrada e saída, respectivamente, a equação pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$\int_x \frac{\partial A}{\partial t} dx + Q_2 - Q_1 = 0 \quad (7.47)$$

Utilizando o teorema do valor médio e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se a equação da continuidade na forma conservativa:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.48)$$

A segunda lei de Newton escrita para um volume de controle e em sua formulação integral pode assumir a seguinte forma:

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \vec{v} dVol + \iint_{sc} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot n dA \quad (7.49)$$

em que $F =$ força resultante.

Com a hipótese de escoamento unidimensional (em x), incompressível e levando em conta apenas a entrada (1) e saída (2), a equação é reescrita:

$$F = \rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} v dVol - \rho \iint_1 v_1 v_1 dA + \rho \iint_2 v_2 v_2 dA \quad (7.50)$$

As forças consideradas são: (1) Forças devidas às pressões nas seções 1 e 2, calculadas com distribuições semelhantes à da equação 7.42; (2) Força de cisalhamento ao longo do perímetro molhado; (3) Força devida ao peso de líquido no volume de controle. Utilizando a geometria do problema e as hipóteses anteriores, escreve-se:

$$F = -\gamma A \frac{dz}{dx} \Delta x - \gamma \frac{d}{dx} (\bar{h}A) \Delta x \cos \alpha - \tau_0 P \Delta x \quad (7.51)$$

1) *Força Peso.* O peso do líquido presente no volume de controle é igual a $\gamma A \Delta x$. Na direção do escoamento, a componente é $\gamma A \Delta x \sin \alpha$ ou $-\gamma A \Delta x dz/dx$.

2) *Força devida a pressão.* A força na seção 1 é F_1 . Na seção 2, a força é $F_1 + (dF_1/dx) \Delta x$. Deste modo, a diferença entre as forças nas seções 1 e 2 é igual a:

$$F_1 - F_2 = -\frac{dF_1}{dx} \Delta x$$

Com a distribuição de pressões dada pela equação 7.42, obtém-se:

$$F_1 - F_2 = -\gamma \frac{d(\bar{h}A)}{dx} \Delta x \cos \alpha$$

em que \bar{h} é a distância desde a superfície livre até o centro de gravidade da seção. O mesmo resultado é obtido considerando variações na área e na profundidade desde que os termos envolvendo produtos de diferenciais sejam desprezados.

3) *Cisalhamento.* O cálculo da força devida ao cisalhamento é feito com a tensão média de cisalhamento sobre o perímetro molhado.

Com as considerações feitas até aqui as integrais da equação 7.50 devem ser avaliadas. A primeira é aquela que envolve a taxa de variação da quantidade de movimento da massa no interior do volume de controle. Reconhecendo que $dVol = Adx$, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} v dVol = \frac{\partial}{\partial t} \int_x v Adx$$

Com valores médios e o coeficiente de Boussinesq, as integrais sobre as superfícies são calculadas da seguinte forma:

$$-\rho \iint_1 v_1 v_1 dA + \rho \iint_2 v_2 v_2 dA = \rho \beta_2 Q_2 V_2 - \rho \beta_1 Q_1 V_1$$

Combinando as formulações anteriores:

$$-\gamma \Delta x \left[A \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} (\bar{h}A) \cos \alpha + \frac{\tau_0 P}{\gamma} \right] = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_x V Adx + \rho \beta_2 Q_2 V_2 - \rho \beta_1 Q_1 V_1$$

Dividindo a equação por Δx :

$$-\gamma \left[A \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} (\bar{h}A) \cos \alpha + \frac{\tau_0 P}{\gamma} \right] = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\int_x V Adx}{\Delta x} + \frac{\rho \beta_2 Q_2 V_2 - \rho \beta_1 Q_1 V_1}{\Delta x}$$

Uma vez que as posições que definem Δx são independentes do tempo, o uso do teorema de Leibniz em sua forma mais simples possibilita reescrever a integral presente na equação anterior. Empregando o teorema do valor médio, é obtido o seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t} (VA) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta QV + g \bar{h}A \cos \alpha) = -g \left(A \frac{dz}{dx} + \frac{\tau_0 P}{\gamma} \right) \quad (7.52)$$

A tensão de cisalhamento precisa ser modelada. Para tanto, utilizou-se a definição do fator de resistência semelhante à definição para coeficientes de arrasto e a equação de Darcy-Weisbach:

$$f = \frac{\tau_0}{(1/8)\rho V^2} e I_f = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \tau_0 = \gamma \frac{A}{P} I_f \quad (7.53)$$

Substituindo na equação 7.52, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} (VA) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta QV + g \bar{h}A \cos \alpha) = gA(I_o - I_f) \quad (7.54)$$

As equações 7.48 e 7.54 formam um sistema hiperbólico, escrito na forma conservativa. Em regime permanente, a equação 7.48 é:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q = \text{constante} \quad (7.55)$$

Para o regime permanente e com coeficiente de Boussinesq independente da posição, a equação 7.54 assume a seguinte forma:

$$\beta \frac{d}{dx} (QV) + \frac{d}{dx} (g\bar{h}A) \cos \alpha = gA(I_o - I_f) \quad (7.56)$$

As derivadas podem ser reescritas, como apresentado a seguir:

$$\beta \frac{d}{dx} (QV) = \beta Q \frac{dV}{dx} = -\beta \frac{BQ^2}{A^2} \frac{dh}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (g\bar{h}A) \cos \alpha = g \frac{B}{2} \cos \alpha \frac{d}{dx} (h^2) = gBh \frac{dh}{dx} \cos \alpha$$

Substituindo na equação 7.56 e simplificando, vem:

$$\frac{dh}{dx} \left(-\beta \frac{V^2}{gh} + \cos \alpha \right) = (I_o - I_f)$$

Reconhecendo o número de Froude, o resultado obtido é:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f}{\cos \alpha - \beta Fr^2} \quad (7.57)$$

Nota-se que as equações 7.45 e 7.57 são semelhantes, exceto pelos coeficientes de correção de Coriolis e Boussinesq e pela definição de Fr.

7.3 Formas adimensionais para o perfil da superfície livre

Neste item é realizada a substituição das variáveis dimensionais encontradas na equação 7.57 por variáveis dimensionais. Em seguida são apresentadas soluções analíticas para as equações em termos de variáveis adimensionais.

7.3.1 Primeira forma adimensional: $\xi(\chi)$

Os adimensionais empregados nesta seção foram introduzidos por Hager e Blaser (1998) em um trabalho sobre canais lisos e utilizados por Boes (2000) para canais com o fundo em

degraus. Embora sejam os mesmos adimensionais, a equação deduzida por esses pesquisadores é diferente daquela apresentada aqui. Os adimensionais utilizados são:

$$\begin{cases} \xi = \frac{h}{h_u} \\ \chi = \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{h_u}{h_c} \right)^3 \frac{x}{h_u} \end{cases} \quad (7.58)$$

Derivando-os, obtém-se:

$$\begin{cases} dh = h_u d\xi \\ dx = d\chi \left(\frac{h_u}{h_c} \right)^{-3} \frac{h_u}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases} \quad (7.59)$$

Outras relações são necessárias para obtenção da forma final da EDO. A equação de Darcy-Weisbach e o número de Froude podem ser escritos com variáveis adimensionais da seguinte maneira:

$$I_f = \frac{f}{8} \frac{h_c^3}{h^3} (1 + 2h/B) \quad (7.60)$$

$$Fr^2 = \frac{h_c^3}{h^3} \quad (7.61)$$

A relação I_f/I_o , com o uso da equação 7.60, é:

$$\frac{I_f}{I_o} = \frac{1}{\xi^3} \frac{(1 + 2\xi/A)}{(1 + 2/A)} \quad (7.62)$$

em que $A = B/h_u$. Substituindo 7.59 em 7.57, vem:

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \left(\frac{h_c}{h_u} \right)^3 \frac{1}{I_o} \left(\frac{I_o - I_f}{\cos\alpha - \beta Fr^2} \right) = \left(\frac{h_c}{h_u} \right)^3 \left(\frac{1 - I_f/I_o}{\cos\alpha - \beta Fr^2} \right) \quad (7.63)$$

Com as equações 7.61 e 7.62, a equação 7.63 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{1 - \frac{1}{\xi^3} \frac{(1 + 2\xi/A)}{(1 + 2/A)}}{\frac{h_u^3}{h_c^3} \cos\alpha - \beta \frac{1}{\xi^3}} = \frac{\xi^3 - \frac{(A + 2\xi)}{(A + 2)}}{\xi^3 \frac{h_u^3}{h_c^3} \cos\alpha - \beta} \quad (7.64)$$

A equação 7.60 para o regime uniforme permite que a razão h_o/h_c seja substituída:

$$\frac{h_u^3}{h_c^3} = \frac{f}{8I_o} (1 + 2/A) \quad (7.65)$$

Finalmente, substituindo 7.65 em 7.64, obtém-se:

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{\xi^3 - \frac{(A+2\xi)}{(A+2)}}{\xi^3 - \frac{f}{8\text{tg}\alpha} (1 + 2/A) - \beta} \quad (7.66)$$

Esta equação foi apresentada por Simões, Schulz e Porto (2010a, p.330), sem a dedução exposta aqui. A condição de canal largo leva ao resultado obtido por Simões (2008, p.174), escrito a seguir:

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{\xi^3 - 1}{\frac{f}{8\text{tg}\alpha} \xi^3 - \beta} \quad (7.67)$$

7.3.2 Segunda forma adimensional: $\Gamma(H)$

Os adimensionais utilizados neste item foram utilizados no capítulo sobre desenvolvimentos experimentais e encontram-se listados a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \frac{h}{h_c} \Rightarrow d\Gamma = \frac{dh}{h_c} \\ H = \frac{z}{h_c} \Rightarrow dH = \frac{dz}{h_c} \end{array} \right. \quad (7.68)$$

Utiliza-se também os seguintes adimensionais, que surgem ao longo da dedução:

$$\omega = \frac{f}{8\text{sen}\alpha} \text{ e } \varphi = 2 \frac{h_c}{B}. \quad (7.69)$$

Considerando que $\text{sen}\alpha \cong z/x$ e com os equacionamentos já apresentados, a equação 7.57 é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d\Gamma}{dH} = \left(\frac{1}{\text{sen}\alpha} \right) \frac{\text{sen}\alpha - \frac{f}{8} \frac{h_c^3}{h^3} \frac{(B+2h)}{B}}{\cos\alpha - \beta h_c^3/h^3} = \frac{1 - \omega \left(\frac{h_c^3}{h^3} + 2 \frac{h_c}{B} \frac{h_c^2}{h^2} \right)}{\cos\alpha - \beta h_c^3/h^3} = \frac{1 - \omega(\Gamma^{-3} + \varphi\Gamma^{-2})}{\cos\alpha - \beta\Gamma^{-3}}$$

Finalmente, multiplicando este resultado por Γ^3 , obtém-se a equação final:

$$\frac{d\Gamma}{dH} = \frac{\Gamma^3 - \omega(1 + \varphi\Gamma)}{\Gamma^3 \cos\alpha - \beta} \quad (7.70)$$

A equação anterior foi apresentada por Simões, Schulz e Porto (2010c). A condição de canal largo implica $\varphi = 0$ e reduz a equação 7.70 à forma proposta por Simões (2008, p.176).

Esta equação é:

$$\frac{d\Gamma}{dH} = \frac{\Gamma^3 - \omega}{\Gamma^3 \cos \alpha - \beta} \quad (7.71)$$

7.3.3 Soluções analíticas para as adimensionalizações apresentadas

Equação 7.66

A solução analítica para a primeira forma adimensional proposta, equação 7.66, foi desenvolvida por Schulz e apresentada em Simões, Schulz e Porto (2010a). Como hipótese, assumiu-se que o fator de resistência é uma constante. O resultado obtido foi escrito sob a forma de um sistema de equações e é uma função $\chi(\xi)$ e não $\xi(\chi)$, como apresentado a seguir:

$$\chi = (A + 2)(W_1 W_2 + W_3 + W_4) \quad (7.72a)$$

$$W_1 = \frac{\arctan[\sqrt{2+A}(1+2\xi)]/\sqrt{-2+3A}}{(2+A)^{3/2}\sqrt{-2+3A}(4+3A)} \quad (7.72b)$$

$$W_2 = 12\beta + 12A\beta + 3A^2\beta + 4\lambda - 3A^2\lambda \quad (7.72c)$$

$$W_3 = \frac{\lambda\xi}{2+A} + \frac{(-\beta+\lambda)\ln(-1+\xi)}{4+3A} \quad (7.72d)$$

$$W_4 = \frac{(\beta-\lambda)\ln(A+2\xi+A\xi+2\xi^2+A\xi^2)}{2(4+3A)} + D \quad (7.72e)$$

em que $\lambda = f(1+2/A)/(8tg\alpha)$ e D é a constante de integração.

Equação 7.70

A EDO 7.70 foi integrada por Schulz e os detalhes relacionados à solução podem ser vistos em Simões, Schulz e Porto (2010c). Assim como foi feito para a equação anterior, a solução representa $H(\Gamma)$. A integração desta equação resultou em:

$$H = C\Gamma + \lambda\Gamma + \frac{(-2b\beta + \beta d - bd^3\lambda + 3be\lambda d + e\lambda d^2 - 2e^2\lambda)}{(b^2 - bd + e)\sqrt{-d^2 + 4e}} \arctg\left(\frac{d + 2\Gamma}{\sqrt{-d^2 + 4e}}\right) + \frac{(-\beta - b^3\lambda)\ln(b + \Gamma)}{b^2 - bd + e} + \frac{(\beta + b\lambda d^2 - be\lambda - e\lambda d)\ln(e + \Gamma d + \Gamma^2)}{2(b^2 - bd + e)} \quad (7.73a)$$

em que $CI' =$ constante de integração determinada para $H = 0$ e $\Gamma = 1$ ou outro valor pertencente ao perfil S_2 ; $\lambda = \cos\alpha$ nesta solução; $d = -b$; $e = -\omega/b$. b é definido a seguir:

$$b = \sqrt[3]{-\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{(\varphi\omega)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{(\varphi\omega)^3}{27}}} \quad (7.73b)$$

7.4 Fator de resistência

No âmbito dos desenvolvimentos propostos para este tese, Simões, Schulz e Porto (2010b) apresentaram uma formulação para o cálculo do fator de resistência médio que o relaciona com o número de Froude da seção de jusante ($F=F_1$), além de outras grandezas. A formulação foi obtida a partir da equação da energia e de quantidade de movimento aplicada a um volume de controle com seção de entrada na posição com escoamento crítico e saída em uma posição vertical z , abaixo da crista. Esta dedução foi efetuada no contexto da presente linha de pesquisa, sendo uma contribuição de Schulz (em Simões, Schulz e Porto, 2010b) que, segundo este autor, encontrou motivação nos resultados adimensionais de Simões (2008).

7.4.1 Equação da energia

O volume de controle adotado corresponde a um trapézio com seção de entrada denotada por “0” e seção de saída representada por “1”. Como hipótese, assumiu-se que a diferença de pressões entre as seções é igual a zero e que o canal é largo. Sendo assim, a equação da energia com a equação de Darcy-Weisbach assume a seguinte forma:

$$z_0 - z_1 + \frac{V_0^2 - V_1^2}{2g} = f \int_{x_0}^{x_1} \frac{V^2}{2g} \frac{dx}{4h} \quad (7.74)$$

Reescrevendo a equação em termos da vazão específica, obtém-se:

$$z_0 - z_1 + \frac{q^2}{2g} \left(\frac{h_1^2 - h_0^2}{h_0^2 h_1^2} \right) = \frac{q^2 f}{8g} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h^3} \quad (7.75)$$

Para que o cálculo da energia dissipada possa ser efetuado é necessário conhecer a função $h(x)$. A estratégia empregada para a construção deste modelo consistiu em adotar uma variação linear para o perfil da superfície livre como primeira aproximação:

$$h = h_0 - \frac{x\Delta h}{\Delta x} \quad (7.76)$$

em que $\Delta x = x_1 - x_0$ (x = coordenada longitudinal) e $\Delta h = h_0 - h_1$. Combinando as equações e integrando:

$$z_0 - z_1 + \frac{q^2}{2g} \left(\frac{h_1^2 - h_0^2}{h_0^2 h_1^2} \right) = \frac{q^2 f}{8g} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\left[h_0 - \frac{x \Delta h}{\Delta x} \right]^3} \Rightarrow$$

$$z_0 - z_1 + \frac{q^2}{2g} \frac{(h_1 - h_0)(h_1 + h_0)}{h_0^2 h_1^2} = - \frac{q^2 f}{8g} \frac{\Delta x}{\Delta h} \int_0^1 \frac{1}{\left[h_0 - \frac{x \Delta h}{\Delta x} \right]^3} d \left(h_0 - \frac{x \Delta h}{\Delta x} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta z - \frac{q^2}{g} \frac{\Delta h}{h_0^2 h_1^2} h_{\text{mean}} = - \frac{q^2 f}{8g} \frac{\Delta x}{\Delta h} \left(- \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\left(h_0 - \frac{x \Delta h}{\Delta x} \right)^2} \Bigg|_0^{\Delta x}$$

Cabe destacar as seguintes definições: $\Delta z = z_0 - z_1$ e $h_{\text{mean}} = (h_0 + h_1)/2$ (a notação original utilizada na primeira publicação foi preservada). Prosseguindo com os cálculos:

$$\Delta z - \frac{q^2}{g} \frac{\Delta h}{h_0^2 h_1^2} h_{\text{mean}} = \frac{q^2 f}{16g} \frac{\Delta x}{\Delta h} \left[\frac{1}{(h_1)^2} - \frac{1}{(h_0)^2} \right] = \frac{q^2 f}{16g} \frac{\Delta x}{\Delta h} \frac{(h_0 - h_1)(h_1 + h_0)}{h_0^2 h_1^2} = \frac{q^2 f}{8g} \frac{\Delta x}{\Delta h} \frac{\Delta h h_{\text{mean}}}{h_0^2 h_1^2} \kappa_1$$

Neste ponto da dedução foi inserido um coeficiente de correção κ_1 para levar em consideração a não linearidade do perfil. Isolando o fator de resistência, utilizando o número de Froude, assumindo que $h_0 = h_c$ e simplificando a equação, obtém-se:

$$f = \frac{8}{\kappa_1} \left(\text{sen} \alpha \frac{h_c^2}{h_1 h_{\text{mean}} F_1^2} - \frac{\Delta h}{\Delta x} \right) \quad (7.77)$$

Sabe-se que $f > 0$. Portanto, deve-se ter:

$$F_1^2 < \frac{h_c^2}{h_1 h_{\text{mean}}} \frac{\Delta z}{\Delta h} \quad \text{ou} \quad F_1^2 < \frac{\Delta z}{\Delta h} \frac{h_c^2}{h_1 h_{\text{mean}}} = 2 \Delta z \frac{h_0^2}{h_1 (h_0^2 - h_1^2)} = \frac{2 \Delta z}{h_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_0^2} \right)}$$

7.4.2 Balanço de forças

Considera-se neste balanço de forças o peso do líquido, as pressões e a resistência oferecida ao escoamento. Deste modo, tem-se: Peso + Pressão.área = força de resistência. O peso é calculado considerando um perfil longitudinal do escoamento com forma trapezoidal. As

pressões são aproximadas com distribuições hidrostáticas e a força de cisalhamento é calculada com a tensão no fundo:

$$\rho g \frac{h_0 + h_1}{2} \Delta x B \text{sen} \alpha + \frac{\rho g h_0}{2} B h_0 - \frac{\rho g h_1}{2} B h_1 = \tau_0 B \Delta x \quad (7.78)$$

Simplificando:

$$g h_{\text{mean}} \Delta x \text{sen} \alpha + \frac{g}{2} (h_0^2 - h_1^2) = \frac{\tau_0}{\rho} \Delta x \Rightarrow$$

$$g h_{\text{mean}} \Delta x \text{sen} \alpha + g (h_0 - h_1) \frac{(h_0 + h_1)}{2} = u_*^2 \Delta x \Rightarrow h_{\text{mean}} [g \Delta x \text{sen} \alpha + g \Delta h] = u_*^2 \Delta x \Rightarrow$$

$$g h_{\text{mean}} \left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right) = V^2 \frac{f}{8} \Rightarrow$$

$$h_{\text{mean}} = \frac{V^2 f}{8g} \frac{1}{\left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)} \quad \text{ou} \quad h_{\text{mean}} = \frac{\kappa_2 V_1^2 f}{8g} \frac{1}{\left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)} \quad \text{ou} \quad h_{\text{mean}} = \frac{\kappa_2 F_1^2 h_1 f}{8} \frac{1}{\left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)}.$$

em que κ_2 = segundo coeficiente de correção. Destaca-se que a tensão de cisalhamento foi calculada com base na velocidade V_1 . Combinando o último resultado anterior com a equação 7.77, vem

$$f = \text{sen} \alpha \frac{8}{\kappa_1} \frac{h_c^2}{\kappa_2 h_1^2 F_1^4 f} \left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right) - \frac{8}{\kappa_1} \frac{\Delta h}{\Delta x} \frac{f}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f^2 = \text{sen} \alpha \frac{h_c^2}{h_1^2} \frac{64}{\kappa_1 \kappa_2 F_1^4} \left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right) - \frac{8}{\kappa_1} \frac{\Delta h}{\Delta x} f \quad (7.79)$$

7.4.3 Solução final

A equação 7.79 pode ser resolvida analiticamente para o fator de resistência com a solução da equação do segundo grau. A escolha da raiz foi orientada pela condição física $f > 0$. Com tais considerações, a solução obtida por Simões, Schulz e Porto (2010b, p. 332) assume a forma dada pela equação 7.80.

$$f = -\frac{4\Delta h}{\kappa_1 \Delta x} + \sqrt{\left(\frac{4\Delta h}{\kappa_1 \Delta x} \right)^2 + \frac{64}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{\text{sen} \alpha}{F_1^4} \left(\frac{h_c}{h_1} \right)^2 \left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)} \quad (7.80)$$

7.5 Comprimento de transição para o escoamento bifásico: Parte 1

Existe um comprimento de transição entre o perfil S_2 e o escoamento bifásico com profundidade média constante, como destacado no capítulo sobre resultados experimentais. Foram propostas algumas formulações que descrevem o comportamento deste comprimento de transição e, como resultados de tais estudos, há referências a serem citadas. Os primeiros trabalhos sobre o tema são os de Schulz e Simões (2011) e Simões (2011). Em seguida, Simões, Schulz e Porto (2011) apresentaram comparações entre os modelos propostos e resultados experimentais. Além dessas publicações, foi apresentada a definição de comprimento de transição, encontrada nos dados experimentais desta tese, na resposta à discussão apresentada por Takahashi e Ohtsu (2011).

Neste item é apresentado o modelo de Simões, Schulz e Porto (2011). O volume de controle escolhido contém uma entrada (seção 1), uma saída (seção 2) e uma parte da superfície de controle, a superfície livre, através da qual o ar é capturado. Nesta região há também ejeções de gotas de água que podem ou não retornar para o escoamento por meio dela. Como hipótese, assume-se que os transportes de massa, quantidade de movimento e energia ocorrem apenas através das seções 1 e 2 em quantidades apreciáveis. A Figura 7.4 resume as considerações precedentes.

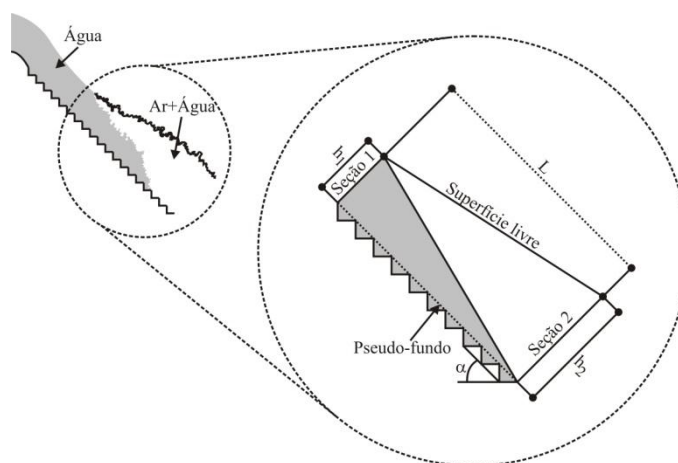


Figura 7.4 – Desenho esquemático utilizado para a construção do modelo

7.5.1 Conservação de massa

A equação de conservação de massa para escoamentos em regime permanente, em sua forma integral e para volumes de controle é:

$$0 = 0 - \iint_1 \rho_1 v_1 dA + \iint_2 \rho_2 v_2 dA \quad (7.81)$$

A massa específica na seção 1 é igual à da água. Na seção 2, entretanto, há bolhas de ar envolvidas pelo líquido, não sendo possível utilizar uma massa específica média ou um valor para a mistura (as bolhas possuem alguns milímetros de diâmetro). A existência de bolhas no líquido faz com que a distribuição de massa específica do escoamento bifásico seja composta por gradientes demasiadamente elevados. No interior de uma bolha, junto à interface, a massa específica é igual à do ar. Após a interface, no líquido, a massa específica é a da água. Como a espessura da interface ar-água é muito pequena, os gradientes são elevados, o que permite criar uma imagem aproximada de um campo de massa específica repleto de descontinuidades. Para a seção 1, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\rho_1 \iint_1 v_1 dA = \rho_1 V_1 A_1 \quad (7.82)$$

em que V é o valor médio na seção transversal.

Apesar das considerações anteriores, adota-se neste desenvolvimento o uso de formulações clássicas para a mistura. Ao longo da seção 2, a massa específica e a velocidade são funções da posição. Deste modo, sabe-se que:

$$\frac{\iint \rho_2 v_2 dA}{A_2} \neq \bar{\rho}_2 V_2 \quad (7.83)$$

Com o intuito de utilizar uma igualdade semelhante a aquela definida pela equação 7.82, é introduzido um coeficiente de correção ω_0 :

$$\iint_2 \rho_2 v_2 dA = \omega_0 \bar{\rho}_2 V_2 A_2 = \rho_1 V_1 A_1 \quad (7.84)$$

Se $\omega_0 = 1$, isto significa que as distribuições na seção 2 são uniformes, logo:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (7.85)$$

Utiliza-se aqui a formulação clássica para equacionar a massa específica da mistura, na seção 2 e na região de escoamento bifásico do trapézio. Para tanto, o número de Mach deve ser muito menor do que a unidade, ou seja, a mistura deve ter um comportamento incompressível.

$$\bar{\rho}_2 = \bar{C}_{\text{par}} + (1 - \bar{C})\rho_1 \Rightarrow \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \cong (1 - \bar{C}), \text{ em que } \frac{\bar{C}_{\text{par}}}{\rho_1} \ll (1 - \bar{C}) \quad (7.86)$$

Substituindo 7.86 em 7.84 e simplificando, o resultado é:

$$V_1 h_1 = \omega_0 (1 - \bar{C}) V_2 h_2 \Rightarrow \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{h_1^2}{\omega_0^2 (1 - \bar{C})^2 h_2^2} = \frac{1}{\omega_0^2 (1 - \bar{C})^2 h^{*2}} \quad (7.87)$$

A área utilizada corresponde a área de um canal retangular ($A = Bh$) e $h^* = h_2/h_1$.

7.5.2 Quantidade de movimento

A segunda lei de Newton (equação da quantidade de movimento linear) é utilizada em sua forma integral, euleriana e em regime permanente.

$$F = -\iint_1 \rho_1 v_1 v_1 dA + \iint_2 \rho_2 v_2 v_2 dA = -\beta_1 \rho_1 V_1^2 B h_1 + \omega_1 \bar{\rho}_2 V_2^2 B h_2 \quad (7.88)$$

em que β_1 é o coeficiente de Boussinesq na seção 1 e ω_1 é um coeficiente de correção semelhante ao de Boussinesq que leva em conta o fato de:

$$\iint_2 \rho_2 v_2 v_2 dA \neq \bar{\rho}_2 V_2^2 A_2$$

Força peso: Considera-se a área trapezoidal destacada na Figura 7.4 e uma fração ω_2 desta área que corresponde aproximadamente ao triângulo inferior. Assume-se também que a massa específica da fração da área trapezoidal restante seja igual à massa específica da mistura, definida por meio da equação 7.86.

$$\begin{aligned} F_{\text{peso}} &= [\omega_2 \text{Vol} \rho_1 g + (1 - \omega_2) \text{Vol} \rho_1 (1 - \bar{C}) g] \text{sen} \alpha = \\ &= \left[\omega_2 \frac{(h_1 + h_2)}{2} B L \rho_1 g + (1 - \omega_2) \frac{(h_1 + h_2)}{2} B L \rho_1 (1 - \bar{C}) g \right] \text{sen} \alpha = \\ &= \frac{(h_1 + h_2)}{2} B L \rho_1 g [\omega_2 + (1 - \omega_2)(1 - \bar{C})] \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad (7.89)$$

Forças resultante das pressões em 1 e 2 (F_p):

$$F_{p1} - F_{p2} = \frac{\rho_1 g h_1}{2} B h_1 \cos \alpha - \frac{\rho_1 (1 - \bar{C}) g h_2}{2} B h_2 \cos \alpha = \frac{\rho_1 g}{2} B [h_1^2 - (1 - \bar{C}) h_2^2] \cos \alpha \quad (7.90)$$

O $\cos \alpha$ aparece nas definições anteriores devido à adoção da equação 7.42.

Força ocasionada pela tensão de cisalhamento no fundo:

$$F_t = -\tau_o B L \quad (7.91)$$

Foram desprezadas as tensões cisalhantes nas paredes e superfície livre. Combinando as equações anteriores, vem:

$$\begin{aligned} & \frac{(h_1+h_2)}{2} L g [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha + \frac{g}{2} [h_1^2 - (1-\bar{C})h_2^2] \cos \alpha - \frac{\tau_o}{\rho_1} L = \\ & = -\beta_1 V_1^2 h_1 + \omega_1 (1-\bar{C}) V_2^2 h_2 \Rightarrow \\ & L \left\{ \frac{(h_1+h_2)}{2} g [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{\tau_o}{\rho_1} \right\} = \\ & = -\beta_1 V_1^2 h_1 + \omega_1 (1-\bar{C}) V_2^2 h_2 - \frac{g}{2} [h_1^2 - (1-\bar{C})h_2^2] \cos \alpha \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{L}{h_1} &= \frac{-\beta_1 V_1^2 + \omega_1 (1-\bar{C}) V_2^2 (h_2/h_1) - \frac{g}{2h_1} [h_1^2 - (1-\bar{C})h_2^2] \cos \alpha}{\frac{(h_1+h_2)}{2} g [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{\tau_o}{\rho_1}} \Rightarrow \\ \frac{L}{h_1} &= \frac{V_1^2 \left\{ -\beta_1 + \omega_1 (1-\bar{C}) \frac{V_2^2}{V_1^2} \frac{h_2}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{gh_1}{V_1^2} \left[1 - (1-\bar{C}) \frac{h_2^2}{h_1^2} \right] \cos \alpha \right\}}{\frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) g [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{\tau_o}{\rho_1}} \Rightarrow \\ \frac{L}{h_1} &= \frac{-\beta_1 + \omega_1 (1-\bar{C}) \frac{V_2^2}{V_1^2} \frac{h_2}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{gh_1}{V_1^2} \left[1 - (1-\bar{C}) \frac{h_2^2}{h_1^2} \right] \cos \alpha}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{gh_1}{V_1^2} [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{\tau_o}{V_1^2 \rho_1}} \end{aligned} \quad (7.92)$$

Com o intuito de estabelecer uma formulação que relacione adimensionais, utiliza-se $L^* = L/h_1$ e as definições de h^* e Froude:

$$L^* = \frac{-\beta_1 + \omega_1 (1-\bar{C}) \frac{V_2^2}{V_1^2} h^* - \frac{1}{2F_{f1}^2} \left[1 - (1-\bar{C}) h^{*2} \right] \cos \alpha}{\frac{1}{2F_{f1}^2} (1+h^*) [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{\tau_o}{V_1^2 \rho_1}} \quad (7.93)$$

Com a equação 7.87 é possível substituir a relação entre velocidades presente na equação anterior, obtendo-se:

$$L^* = \frac{-\beta_1 + \frac{\omega_1}{\omega_0^2} \frac{1}{(1-\bar{C})h^*} - \frac{1}{2F_{f1}^2} \left[1 - (1-\bar{C}) h^{*2} \right] \cos \alpha}{\frac{(1+h^*)}{2F_{f1}^2} [\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C})] \text{sen} \alpha - \frac{f}{8}} \quad (7.94)$$

A tensão de cisalhamento no fundo foi modelada por meio da definição do fator de resistência de Darcy-Weisbach (f), calculado com grandezas da seção 1:

$$f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{8}\rho_1 V_1^2} \quad (7.95)$$

7.5.3 Conservação de energia

Neste item é empregada a equação de conservação de energia em sua forma integral, euleriana e em regime permanente, assim como adotado para as equações de conservação anteriores.

$$\dot{Q} - \dot{W} = -\iint_1 \rho_1 e_1 v_1 dA + \iint_2 \rho_2 e_2 v_2 dA \quad (7.96)$$

em que \dot{Q} é a potência térmica resultante das trocas de calor através da superfície de controle e \dot{W} é a potência resultante das diferentes formas de trabalho; $e = gz + v^2/2 + u$ (energia específica no sentido termodinâmico).

$$\dot{Q} - \dot{W} = -\iint_1 \rho_1 \left(gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) v_1 dA + \iint_2 \rho_2 \left(gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) v_2 dA \quad (7.97)$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = -\rho_1 \iint_1 \left(gz_1 v_1 + \frac{v_1^3}{2} + u_1 v_1 \right) dA + \iint_2 \left(g\rho_2 z_2 v_2 + \rho_2 \frac{v_2^3}{2} + \rho_2 u_2 v_2 \right) dA \quad (7.98)$$

As integrações foram aproximadas seguindo procedimentos semelhantes aos adotados anteriormente. Tendo como intenção o uso de grandezas médias na seção transversal 2, foi considerado um coeficiente de correção ω_3 , no termo correspondente à energia cinética, semelhante ao coeficiente de Coriolis, empregado para a seção 1 (α_{c1}). A energia potencial de um elemento de fluido varia ao longo das posições verticais das seções de entrada e saída. Sendo Z_1 a cota de um elemento de fluido junto ao fundo da seção 1 e Z_2 a cota de um elemento de fluido junto ao fundo da seção 2, igual a zero, pode-se escrever z_1 em função de h como $z_1 = Z_1 + h \cos \alpha$. Do mesmo modo, $z_2 = h \cos \alpha$.

$$\iint_1 \left[g(Z_1 + h \cos \alpha) v_1 + \frac{v_1^3}{2} + u_1 v_1 \right] dA = gZ_1 V_1 A_1 + \iint_1 ghv_1 \cos \alpha dA + \alpha_{c1} \frac{V_1^3}{2} A_1 + \bar{u}_1 V_1 A_1 \quad (7.99)$$

$$\iint_2 \left(g\rho_2 h v_2 \cos \alpha + \rho_2 \frac{v_2^3}{2} + \rho_2 u_2 v_2 \right) dA = \iint_2 g\rho_2 h v_2 \cos \alpha dA + \omega_3 \bar{\rho}_2 \frac{V_2^3}{2} A_2 + \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 V_2 A_2 \quad (7.100)$$

Uma fração do trabalho pode ser interpretada como sendo aquela devida à parte esférica do tensor das tensões. Esta parcela é conhecida como trabalho de escoamento ou trabalho das forças de pressão (W_p). Matematicamente, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\dot{W}_p = \iint \frac{\overbrace{dFdx}^{W_p}}{dA dt} dA = \iint pvdA \Rightarrow \dot{W}_p = \begin{cases} \iint \rho_1 g h v_1 \cos \alpha dA \\ 1 \\ \iint \rho_2 g h v_2 \cos \alpha dA \\ 2 \end{cases} \quad (7.101)$$

Combinando todos os resultados a partir da equação 7.98 e utilizando a relação geométrica $Z_1 = L \sin \alpha$, escreve-se:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_r = & - \left(\rho_1 g L V_1 A_1 \sin \alpha + 2 \rho_1 g \cos \alpha \iint_1 h v_1 dA + \rho_1 \alpha_{cl} \frac{V_1^3}{2} A_1 + \rho_1 \bar{u}_1 V_1 A_1 \right) + \\ & + 2g \cos \alpha \iint_2 \rho_2 h v_2 dA + \omega_3 \bar{\rho}_2 \frac{V_2^3}{2} A_2 + \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 V_2 A_2 \end{aligned} \quad (7.102)$$

em que W_r é a resultante das demais formas de trabalho, ocasionadas por tensões de cisalhamento e máquinas hidráulicas, não consideradas neste problema. As integrais restantes foram aproximadas com o uso de valores médios e coeficientes de correção, definidos a seguir:

$$\begin{cases} 2 \rho_1 g \cos \alpha \iint_1 h v_1 dA = \omega_4 \rho_1 g \cos \alpha h_1 V_1 A_1 \\ 2g \cos \alpha \iint_2 \rho_2 h v_2 dA = \omega_5 g \cos \alpha \bar{\rho}_2 h_2 V_2 A_2 \end{cases} \quad (7.103)$$

$$\text{em que } \omega_4 = \frac{2 \iint_1 h v_1 dA}{h_1 V_1 A_1} \text{ e } \omega_5 = \frac{2 \iint_2 \rho_2 h v_2 dA}{\bar{\rho}_2 h_2 V_2 A_2} .$$

Substituindo a 7.103 em 7.102 e rearranjando os termos, uma possível forma para a equação resultante é:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q} - \dot{W}_r + \rho_1 V_1 A_1 \bar{u}_1 - \bar{\rho}_2 V_2 A_2 \bar{u}_2}{g} = & - \rho_1 V_1 A_1 \left(L \sin \alpha + \alpha_{cl} \frac{V_1^2}{2g} + \omega_4 h_1 \cos \alpha \right) + \\ & + \bar{\rho}_2 V_2 A_2 \left(\omega_3 \frac{V_2^2}{2g} + \omega_5 h_2 \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (7.104)$$

Utilizando a equação 7.84 na equação 7.104 e multiplicando-a por -1, obtém-se:

$$h_p = \omega_0 \left(L \sin \alpha + \alpha_{c1} \frac{V_1^2}{2g} + \omega_4 h_1 \cos \alpha \right) - \left(\omega_3 \frac{V_2^2}{2g} + \omega_5 h_2 \cos \alpha \right) \quad (7.105)$$

$$h_p = - \frac{\dot{Q} - \dot{W}_r + \rho_1 V_1 A_1 \bar{u}_1 - \rho_2 V_2 A_2 \bar{u}_2}{g \rho_2 V_2 A_2} \quad (7.106)$$

O termo h_p representa as irreversibilidades. Nota-se que ele inclui a variação da energia interna, a potência térmica resultante que atravessa a superfície de controle e a potência resultante comentada anteriormente. A equação 7.105 pode ser reescrita como:

$$h_p = \omega_0 L \sin \alpha + \frac{V_1^2}{2g} \left(\omega_0 \alpha_{c1} - \omega_3 \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) + h_1 \left(\omega_0 \omega_4 - \omega_5 \frac{h_2}{h_1} \right) \cos \alpha \quad (7.107)$$

Com a equação 7.87 é possível substituir a relação entre velocidades presente na equação anterior e se a mesma for dividida por h_1 é obtida uma formulação adimensional:

$$\frac{h_p}{h_1} = L^* \omega_0 \sin \alpha + \frac{Fr_1^2}{2} \left[\omega_0 \alpha_{c1} - \frac{\omega_3}{\omega_0^2} \frac{1}{(1-\bar{C})^2 h^{*2}} \right] + (\omega_0 \omega_4 - \omega_5 h^*) \cos \alpha \quad (7.108)$$

A perda de energia ocorrida no trecho de comprimento L deve ser modelada de alguma maneira. Adotou-se como alternativa uma estratégia semelhante a empregada para perdas de carga localizadas:

$$\frac{h_p}{h_1} = K \frac{V_1^2}{2gh_1} = \frac{K}{2} Fr_1^2 \quad (7.109)$$

Combinando as equações 7.108 e 7.109 e isolando o termo que envolve a fração de vazios, obtém-se a equação final:

$$(1-\bar{C}) = \frac{\sqrt{\omega_3}}{\omega_0} \left[h^* \sqrt{\omega_0 \frac{2L^* \sin \alpha}{Fr_1^2} + \frac{2}{Fr_1^2} (\omega_0 \omega_4 - \omega_5 h^*) \cos \alpha + \omega_0 \alpha_{c1} - K} \right]^{-1} \quad (7.110)$$

7.5.4 Síntese do modelo proposto

O sistema obtido é composto pelas equações 7.94 e 7.110, reescritas a seguir:

$$L^* = \frac{-\beta_1 + \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{1}{(1-\bar{C})h^*} - \frac{1}{2Fr_1^2} \left[1 - (1-\bar{C})h^{*2} \right] \cos \alpha}{\frac{(1+h^*)}{2Fr_1^2} \left[\omega_2 + (1-\omega_2)(1-\bar{C}) \right] \sin \alpha - \frac{f}{8}} \quad (7.94)$$

$$(1-\bar{C}) = \frac{\sqrt{\omega_3}}{\omega_0} \left[h^* \sqrt{\omega_0 \frac{2L^* \text{sen}\alpha}{F_{r1}^2} + \frac{2}{F_{r1}^2} (\omega_0 \omega_4 - \omega_5 h^*) \cos \alpha + \omega_0 \alpha_{c1} - K} \right]^{-1} \quad (7.110)$$

Ao substituir 7.110 em 7.94 é conseguida uma equação não linear que relaciona L^* e h^* . As constantes, evidentemente, devem ser calculadas com informações experimentais ou alguma teoria. A proposição deste modelo teve como principal objetivo destacar a complexidade encontrada quando se pretende aplicar as leis básicas com poucas simplificações ao problema em questão, que inclui escoamento bifásico. A existência de dez constantes e a forma das equações são características indesejáveis em um ponto de vista prático.

7.6 Comprimento de transição: Parte 2

Neste item são apresentadas outras formulações relacionadas ao comprimento de transição. As equações foram desenvolvidas no contexto deste doutorado e das pesquisas relacionadas, e, assim como ocorreu com alguns modelos já apresentados, elas foram publicadas antes da apresentação desta tese.

7.6.1 Proposta fundamentada em analogia com as leis básicas

Uma análise alternativa, apresentada por Schulz e Simões (2011), levou à definição da taxa de geração de vazios entre as seções 1 e 2 (Figura 7.4), denotada por \dot{C} . Assumiu-se que esta grandeza é proporcional à vazão específica, q , e à declividade da superfície livre, dh/dx . Tais proporcionalidades também podem envolver potências destas quantidades, porém, considerou-se a abordagem mais simples, com primeiras potências. Utilizando uma constante de proporcionalidade, K , a formulação básica assume a seguinte forma:

$$\dot{C} = Kq \frac{dh}{dx} \quad (7.111)$$

A vazão específica é uma constante para o regime permanente. A constante de proporcionalidade, K , pode ser função da posição, variando em função das características do meio, assim como ocorre com as constantes de proporcionalidade das leis básicas (Lei de Newton da viscosidade, Lei de Fick, Lei de Fourier, Lei de Ohm, Lei de Darcy). A primeira aproximação considerada assume que \dot{C} e K são constantes, o que conduz à seguinte solução:

$$\dot{C} \int_0^L dx = Kq \int_{h_1}^{h_2} dh \Rightarrow L = \frac{Kq}{\dot{C}} (h_2 - h_1) \quad (7.112)$$

Para o caso de K variável, considerou-se uma aproximação por meio de uma série do tipo:

$$K = \sum_i \omega_i (qh)^i \quad (7.113)$$

Com truncamento de primeira ordem, $i=1$, obtém-se:

$$L = \frac{\omega_0}{C} (qh_2 - qh_1) + \frac{\omega_1}{2C} (q^2 h_2^2 - q^2 h_1^2) \quad (7.114)$$

Observando a relação entre variáveis presente na equação 7.114, Schulz e Simões (2011) sugeriram uma formulação semi-empírica, apresentada a seguir. Nesta equação, θ_i são coeficientes que devem ser calculados a partir de dados experimentais.

$$L = \theta_1 qh_2 + \theta_2 qh_1 + \theta_3 (qh_2)^2 + \theta_4 (qh_1)^2 + \theta_5 \quad (7.115)$$

Aspectos físicos relacionados aos parâmetros envolvidos

Considerando a dependência de \dot{C} para com x , cabe destacar os seguintes pontos:

- \dot{C} possui uma região de máximo no volume, o que faz com que a aproximação mais simples para \dot{C} seja uma equação de segunda ordem em x (ou, em outros termos, um polinômio de grau 2);
- Sendo assim, considerando o caso mais simples em que K é uma constante, isso implica que a evolução da superfície livre é não-linear, sendo regida no mínimo por uma função de terceira ordem em x (ou, em outros termos, um polinômio de grau 3). Essa condição é fisicamente necessária, porque a superfície evolui, nessa região (volume) como uma curva em S e apenas com funções de terceira ordem ou superiores pode-se gerar um ponto de inflexão. Esta correlação direta entre \dot{C} e h é imediatamente observável pela presente formulação. Adicionalmente, se K variar, sabe-se que \dot{C} seguirá um comportamento que imporá no mínimo uma função de terceira ordem para h .
- Qualquer função que se utilize para representar \dot{C} como função de x não afeta a generalidade da equação 2. Para demonstrar isto, considere-se o desenvolvimento a seguir. A função genérica envolve x multiplicado por alguma constante a determinar. É possível então adimensionalizar esta função na forma:

$$\dot{C} = \dot{C}(a_i x) \Rightarrow \dot{C} = \dot{C}\left(a_i L \frac{x}{L}\right) \Rightarrow \dot{C} = \dot{C}\left(b_i \frac{x}{L}\right) \quad (7.116)$$

a_i representa a(s) constantes(s) a determinar. As equações 7.111 e 7.116 permitem escrever:

$$\dot{C} \left(b_i \frac{x}{L} \right) d \left(\frac{x}{L} \right) = \frac{Kq}{L} dh \quad (7.117)$$

b_i representa a(s) novas constantes(s) a determinar. A integração do primeiro membro da equação 7.117 é feita entre 0 e 1, fornecendo, portanto, um valor numérico, denotado aqui por ψ . O comprimento L , portanto, fica determinado por:

$$L = \frac{1}{\psi} \int_{h_1}^{h_2} Kq dh \quad (7.118)$$

7.6.2 Modelo para o comprimento de transição total, entre h_1 e h_3

Este item contém formulações para o comprimento do trecho entre h_1 e h_3 , correspondente à variável L^0 , como indicado na Figura 7.5. Assim como no desenvolvimento da primeira formulação, foram utilizados os princípios básicos de conservação, porém, com simplificações adicionais e considerações que levam a um resultado mais simples e com caráter prático mais evidente em relação ao primeiro sistema apresentado (equações 7.94 e 7.110). Assim como ocorreu com as soluções analíticas para a EDO, esta proposta insere-se na linha de pesquisa que contextualiza o doutorado, sendo uma contribuição de Schulz (de Simões, Schulz e Porto, 2010b) que, segundo o autor, é decorrência natural do trabalho efetuado em conjunto com a equipe, na pesquisa em tela.

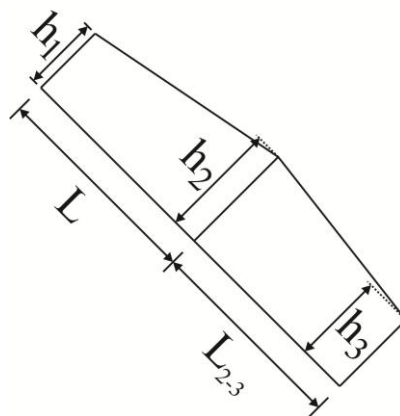


Figura 7.5 – Desenho esquemático do volume de controle adotado, com indicação dos comprimentos L (comprimento de transição) e L_{2-3} (comprimento entre o primeiro pico e o vale correspondente a h_3).

Formulação para o primeiro trecho

A primeira simplificação empregada corresponde ao uso da seguinte relação geométrica: $h_2 = h_1 + \Delta h$. Sendo A_b a área da base de um elemento de fluido, paralela ao plano do fundo do canal, o volume correspondente é $\text{Vol} = A_b h$. Portanto, a relação entre massas específicas é:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{h_1}{h_1 + \Delta h} = \frac{h_1}{h_2} \quad (7.119)$$

A conservação de massa utilizada nesta formulação corresponde a:

$$\rho_1 V_1 h_1 B = \rho_2 V_2 h_2 B \quad (7.120)$$

Portanto, conclui-se de 7.119 e 7.120 que $V_1 = V_2$. A equação da quantidade de movimento foi empregada incluindo as forças decorrentes das pressões, a força peso e a força resultante da tensão cisalhante. O resultado obtido é:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\rho_1 g h_1 \frac{B h_1}{2} \cos \alpha - \rho_2 g h_2 \frac{B h_2}{2} \cos \alpha}^{\text{Força decorrente das Pressões}} + \\ & + \overbrace{\left(\rho_1 g \frac{B h_1 L}{2} + \rho_2 g \frac{B h_2 L}{2} \right)}^{\text{Peso}} \operatorname{sen} \alpha - \overbrace{\tau_o B L}^{\text{Cisalhamento}} = -\rho_1 \beta_1 V_1^2 B h_1 + \rho_2 \beta_2 V_2^2 B h_2 \end{aligned} \quad (7.121)$$

em que β é o coeficiente de Boussinesq. Utilizando a equação 7.120 e $V_1 = V_2$, obtém-se:

$$\frac{B g}{2} (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) \cos \alpha + \frac{B g L}{2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \operatorname{sen} \alpha - \tau_o B L = \rho_1 V_1^2 h_1 B (\beta_2 - \beta_1) \quad (7.122)$$

Utilizou-se também a primeira lei da termodinâmica. Como simplificações, assumiu-se que $\dot{Q} = 0$, que as energias internas nas seções 1 e 2 são iguais, que $\Delta(u\rho VA) = 0$ e que $\dot{W} =$ potência dissipada, igual a $\tau_o AV$. Deste modo, a equação da energia foi escrita com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\tau_o B L V_1 \theta = & -(L \operatorname{sen} \alpha + h_1 \cos \alpha) g \rho_1 V_1 B h_1 + \\ & + h_2 \cos \alpha g \rho_2 V_2 B h_2 - \frac{\alpha_1 \rho_1 V_1^3 B h_1}{2} + \frac{\alpha_2 \rho_2 V_2^3 B h_2}{2} \end{aligned} \quad (7.123)$$

A velocidade escolhida para representar a potência dissipada definida anteriormente foi aquela da seção 1. Junto com tal adoção, introduziu-se um coeficiente de ajuste θ . Igualando as tensões de cisalhamento das equações 7.122 e 7.123 e utilizando as igualdades propostas, é possível demonstrar a seguinte solução:

$$L^* = \varpi_1 (h^* - 1) / \operatorname{tg} \alpha + \varpi_2 F r_1^2 / \operatorname{sen} \alpha \quad (7.124)$$

Demonstração. A partir das equações 7.119, 7.120, 7.122 e 7.123, obtém-se:

$$\frac{\tau_o}{\rho_1 h_1} L \theta = (L \operatorname{sen} \alpha + h_1 \cos \alpha) g - g h_2 \cos \alpha + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 V_1^2}{2} \text{ e}$$

$$\frac{\tau_o}{\rho_1 h_1} L \theta = \theta \frac{g}{2\rho_1 h_1} (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) \cos \alpha + L \theta g \sin \alpha - \theta V_1^2 (\beta_2 - \beta_1).$$

Subtraindo estas equações e, com algumas operações algébricas, vem:

$$\begin{aligned} \frac{L}{h_1} \sin \alpha (1 - \theta) + \cos \alpha - \frac{h_2}{h_1} \cos \alpha + \frac{V_1^2}{2gh_1} (\alpha_1 - \alpha_2) &= \frac{\theta}{2\rho_1 h_1^2} (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) \cos \alpha - \theta \frac{V_1^2}{gh_1} (\beta_2 - \beta_1) \Rightarrow \\ \frac{L}{h_1} &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{2} \left(\frac{2 - \theta}{1 - \theta} \right) \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) - \frac{Fr_1^2}{(1 - \theta) \sin \alpha} \left[\theta (\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \Rightarrow \\ \frac{L}{h_1} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2 - \theta}{1 - \theta} \right) \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right)}_{\varpi_1} + \underbrace{\left[\frac{\theta}{(\theta - 1)} (\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{2(\theta - 1)} (\alpha_1 - \alpha_2) \right]}_{\varpi_2} \frac{Fr_1^2}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Portanto, fica confirmada a existência da equação 7.124. ■

Formulação para o segundo trecho

Os desenvolvimentos para o segundo trecho são análogos aos apresentados para o primeiro trecho. Como resultado, a equação obtida é:

$$\frac{L_{2-3}}{h_2} = \varpi_3 \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{h_3}{h_2} - 1 \right) + \varpi_4 \frac{Fr_2^2}{\sin \alpha} \quad (7.125)$$

Multiplicando este resultado por h^* e substituindo Fr_1 por Fr_2 por meio da relação entre estes números adimensionais, obtém-se:

$$\frac{L_{2-3}}{h_1} = \varpi_3 \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{h_3}{h_2} - 1 \right) h^* + \varpi_4 \frac{Fr_1^2}{\sin \alpha} \quad (7.126)$$

Equação para o comprimento entre h_1 e h_3

O resultado final procurado é obtido somando-se as equações 7.124 e 7.126. Com o uso da variável $L^o = L + L_{2-3}$, definida no Capítulo 3, a equação resultante é:

$$\frac{L^o}{h_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left[\varpi_1 (h^* - 1) + \varpi_3 \left(\frac{h_3}{h_1} - h^* \right) \right] + \varpi_5 \frac{Fr_1^2}{\sin \alpha} \quad (7.127)$$

em que $\varpi_5 = \varpi_2 + \varpi_4$.

7.7 Dissipação de energia

7.7.1 Considerações fenomenológicas

A Figura 7.6 contém um esboço que ilustra diferentes possibilidades relacionadas à dissipação de energia em um canal em degraus. Nela são utilizados turbilhões para representar as menores estruturas coerentes do escoamento turbulento, sendo portadoras de pouca

quantidade de energia, estáveis e responsáveis pela dissipação de energia sob a forma de calor.

No quadro (I), destacado do escoamento monofásico principal, é ilustrada a interação líquido-líquido que pode ocorrer nas menores escalas, assim como a consequente dissipação de energia sob a forma de calor. Nesta região a espessura da camada limite devida ao fundo do canal é menor do que a profundidade do escoamento e a camada limite devida à interface com o gás é ainda mais delgada. Apesar disto, não se pode considerar que esta região seja necessariamente uma zona com escoamento potencial devido às condições do escoamento a montante. Adicionalmente, fundamentado em estudos sobre escoamentos forçados em um canal em degraus, como apresentado por Silveira-Neto (2003), supõe-se a existência de injeções de instabilidades que ocorrem de forma intermitente. O quadro (II) contém uma ampliação da interface ar-água também para a região do escoamento principal sem a presença de bolhas de ar. A interação entre os fluidos desta região, líquido e gás, leva à ocorrência de tensões de cisalhamento menores em relação às tensões cisalhantes desenvolvidas durante o movimento relativo de massas de líquido. Portanto, há uma dissipação menor em relação à condição do quadro (I). Também ocorre interação do tipo líquido-gás no interior do escoamento principal, como destacado por meio do quadro (III). Neste caso, espera-se que a presença das bolhas de ar diminua a dissipação, como discutido na revisão bibliográfica.

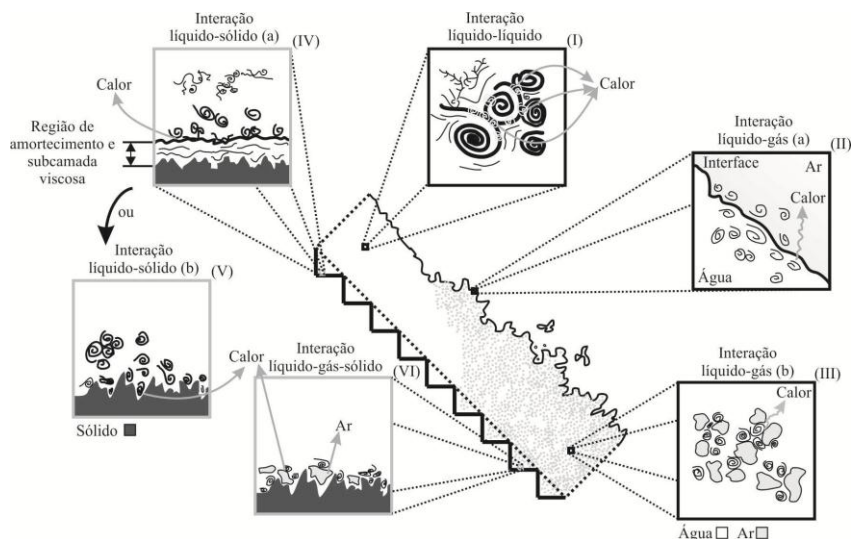


Figura 7.6 – Desenho esquemático de um perfil instantâneo do escoamento em um canal em degraus e das diferentes interações existentes nas escalas relacionadas à dissipação de energia.

O próximo esboço, apresentado no quadro (IV), assume a ocorrência da região de amortecimento e da subcamada viscosa na região de escoamento secundário a montante do início da aeração. Neste caso há dissipação correspondente à interação entre líquido e sólido, mas com a formação da subcamada viscosa. O quadro (V) corresponde a um número de

Reynolds de rugosidade tal que a formação da subcamada viscosa é impossível. Ali, o movimento turbulento interage com o sólido em escalas diferentes daquelas apresentadas no quadro (IV). Em outros termos, pode-se dizer que há um pequeno filme líquido aderido que se movimenta muito lentamente. A sua espessura, entretanto, é menor do que a espessura da subcamada viscosa do quadro (IV), caracterizando assim uma situação diferente. Em (VI) foi considerada a possibilidade de interação entre o ar presente nas bolhas e o sólido, sem a formação da subcamada viscosa (assumiu-se que se a subcamada se formar as bolhas não penetram nela). A dissipação que ocorre no escoamento representado pelo quadro (V) deve ser superior à dissipação correspondente ao quadro (VI).

Como ilustrado por meio da Figura 7.7a, a agitação junto à superfície faz com que volumes de líquido sejam lançados sobre ela. Tais ejeções consomem parte da energia do fluido em escoamento. A Figura 7.7b contém uma fotografia de um turbilhão estabelecido a montante do ponto de início da aeração. Este escoamento secundário é mantido pelas trocas de quantidade de movimento com o escoamento principal. Portanto, sob o ponto de vista do escoamento principal, pode-se considerar que é necessária uma quantidade de energia para manter os grandes turbilhões em movimento.

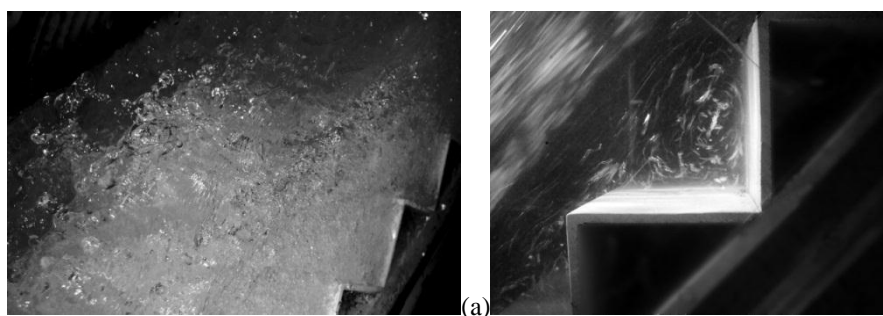


Figura 7.7 – (a) Porções de líquido lançadas a partir do escoamento; (b) Turbilhão visualizado a partir de bolhas presentes no escoamento.

Observou-se também a formação de cavidades na superfície livre e a injeção de massas de ar que se deslocavam até os grandes turbilhões, como ilustrado por meio da Figura 7.8.

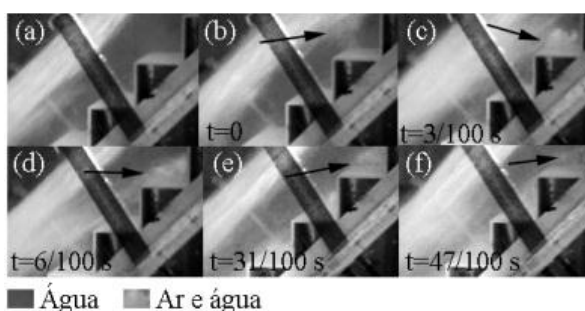


Figura 7.8 – Injeção de ar por meio da superfície livre ($q=0,229 \text{ m}^2/\text{s}$, Exp. 3). Imagens obtidas a partir de um vídeo com as seguintes características: 1280x720 pixels, 29 quadros/s.

O tempo de permanência do grupo de bolhas abaixo do pseudofundo foi medido de forma aproximada por meio do vídeo obtido, sendo igual a 0,47 s. Este é mais um exemplo de como ocorrem os transportes de massa, de quantidade de movimento e de energia nos escoamentos estudados. Pfister e Hager (2010) apresentaram descrições semelhantes, fundamentadas na observação de imagens obtidas com taxa de amostragem igual a 1000 quadros/s e resolução de 512x512 pixels.

7.7.2 Equacionamento integral para a dissipação de energia

Os desenvolvimentos apresentados neste item foram, em grande parte, explorados na dedução do modelo matemático para o comprimento de transição, representado pelas equações 7.94 e 7.110. A formulação foi desenvolvida sob o ponto de vista euleriano e com um volume de controle com superfícies de controle de entrada e saída em seções do escoamento monofásico e bifásico, respectivamente. A superfície de controle inferior coincide com o pseudofundo e as demais simplificações adotadas anteriormente também se aplicam aqui. A partir da equação 7.104, sem considerar $Z_2=0$, e da equação 7.84, pode-se escrever:

$$h_p = \omega_0 \left(Z_1 + \alpha_{c1} \frac{V_1^2}{2g} + \omega_4 h_1 \cos \alpha \right) - \left(Z_2 + \omega_3 \frac{V_2^2}{2g} + \omega_5 h_2 \cos \alpha \right) \quad (7.128)$$

em que:

$$h_p = -\frac{\dot{Q} - \dot{W}_r + \rho_1 V_1 A_1 \bar{u}_1 - \rho_2 V_2 A_2 \bar{u}_2}{g \rho_2 V_2 A_2}, \quad \omega_0 = \rho_1 V_1 A_1 / (\bar{\rho}_2 V_2 A_2), \quad \omega_3 = \frac{\iint \rho_2 v_2^3 dA}{\rho_2 V_2^3 A_2}, \quad \omega_4 = \frac{2 \iint h v_1 dA}{h_1 V_1 A_1},$$

$$\omega_5 = \frac{2 \iint \rho_2 h v_2 dA}{\rho_2 h_2 V_2 A_2}.$$

Assumindo que $\omega_0=1$ e levando em consideração que $Z_1-Z_2=z$ (posição vertical, positiva para baixo e com origem na posição adotada para Z_1), obtém-se:

$$h_p = \left(z + \alpha_{c1} \frac{V_1^2}{2g} + \omega_4 h_1 \cos \alpha \right) - \left(\omega_3 \frac{V_2^2}{2g} + \omega_5 h_2 \cos \alpha \right) \quad (7.129)$$

Esta equação pode ser reescrita com a seguinte forma:

$$h_p = \left(z + \alpha_{c1} \frac{h_c^3}{2h_1^2} + \omega_4 h_1 \cos \alpha \right) - \left(\omega_3 \frac{h_c^3}{2h_2^2 \rho_2 / \rho_1} + \omega_5 h_2 \cos \alpha \right) \quad (7.130)$$

Com o primeiro termo do segundo membro em evidência, obtém-se:

$$\frac{h_p}{z + \alpha_{cl} \frac{h_c^3}{2h_1^2} + \omega_4 h_1 \cos \alpha} = 1 - \frac{h_2}{h_c} \left(\frac{\omega_3 \frac{h_c^3}{2h_2^3 \rho_2 / \rho_1} + \omega_5 \cos \alpha}{\frac{z}{h_c} + \alpha_{cl} \frac{h_c^2}{2h_1^2} + \omega_4 \frac{h_1}{h_c} \cos \alpha} \right) \quad (7.131)$$

O uso da equação 7.86, $\bar{\rho}_2 / \rho_1 \cong (1 - \bar{C})$, resulta em:

$$\frac{h_p}{z + \alpha_{cl} \frac{h_c^3}{2h_1^2} + \omega_4 h_1 \cos \alpha} = 1 - \left[\frac{\frac{\omega_3}{2(1-\bar{C})} \left(\frac{h_2}{h_c} \right)^{-2} + \frac{h_2}{h_c} \omega_5 \cos \alpha}{\frac{z}{h_c} + \alpha_{cl} \frac{h_c^2}{2h_1^2} + \omega_4 \frac{h_1}{h_c} \cos \alpha} \right] \quad (7.132)$$

Se os coeficientes de correção forem considerados iguais à unidade e a seção 1 corresponder à seção com escoamento crítico, a equação anterior assume a seguinte forma:

$$\frac{h_p}{z + \frac{3}{2} h_c} = 1 - \frac{\frac{1}{2(1-\bar{C})} \left(\frac{h_2}{h_c} \right)^{-2} + \frac{h_2}{h_c} \cos \alpha}{\frac{z}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (7.133)$$

Finalmente, empregando a profundidade equivalente apenas de água, h_{2w} , obtém-se:

$$\frac{h_p}{z + \frac{3}{2} h_c} = 1 - \frac{\frac{(1-\bar{C})}{2} \left(\frac{h_{2w}}{h_c} \right)^{-2} + \frac{h_{2w}}{h_c} \frac{\cos \alpha}{(1-\bar{C})}}{\frac{z}{h_c} + \frac{3}{2}} \quad (7.134)$$

O resultado obtido mostra uma forma de quantificação da energia dissipada mais geral em relação às formulações usuais. Em um caso mais simples, para o qual a seção 2 é composta apenas por água, a fração de vazios média é igual a zero e a equação anterior assume uma forma semelhante à deduzida na revisão bibliográfica (Equação 2.64). Isto demonstra a sua validade para escoamentos monofásicos, evidenciando que esta formulação é de fato mais geral.

7.8 Formulação integral para o desenvolvimento da camada limite

No capítulo 4 foram apresentadas as propostas de Blasius e von Kármán para o desenvolvimento da camada limite sobre placas planas. Neste item é proposta uma formulação semelhante à de von Kármán, porém, escrita para um canal inclinado e, portanto, com uma componente da força peso na direção do escoamento, igual a $\gamma w \delta x_1 \sin \alpha$. A notação é a mesma do capítulo 4, ou seja, w =largura do canal, d =espessura da camada limite e

x_1 é o eixo coordenado paralelo ao fundo do canal. Esta componente da força peso é acrescentada ao somatório de forças, transformando a equação 4.281 em (sem considerar a equação de Euler com a forma $dp/dx_1 = -\rho V_\infty dV_\infty/dx_1$ utilizada na equação 4.279):

$$\frac{\tau_{21}}{\rho} - g\delta \sin\alpha + V_\infty V_w = \frac{d}{dx_1}(V_\infty^2\theta) - \frac{dp}{dx_1} \frac{\delta^*}{\rho} \quad (7.135)$$

Em que τ_{21} é a tensão de cisalhamento no plano 2 e na direção 1, V_∞ =velocidade do escoamento potencial e V_w corresponde à injeção ou sucção de massa através do fundo, p é a pressão no contorno da superfície de controle do volume de controle escolhido dentro da camada limite. θ é a espessura de quantidade de movimento e δ^* a espessura de deslocamento. Sendo V_1 a componente da velocidade paralela a x_1 e perpendicular a x_2 , estas grandezas são definidas, para o caso incompressível, da seguinte forma:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{V_1}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_1}{V_\infty}\right) dx_2 \quad (7.136)$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{V_1}{V_\infty}\right) dx_2 \quad (7.137)$$

O termo relativo à transferência de massa através do pseudofundo poderia ser considerado devido às trocas que ocorrem entre o escoamento principal e os escoamentos secundários. Entretanto, assume-se que o canal em degraus não possui aeradores de fundo ou outra geometria que propicie a injeção ou sucção de massa de tal maneira que o balanço desta quantidade seja alterado. Portanto, $V_w=0$ para o desenvolvimento apresentado aqui. Empregando um perfil de velocidades representado por uma potência, como apresentado a seguir, pode-se realizar as integrações presentes nas definições anteriores.

$$\frac{V_1}{V_\infty} = c_1 \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^{c_2} \quad (7.138)$$

$$\theta = c_1 \delta \int_0^1 \left[\left(\frac{x_2}{\delta}\right)^{c_2} - c_1 \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^{2c_2} \right] d(x_2/\delta) = \delta \left(\frac{c_1}{c_2+1} - \frac{c_1^2}{2c_2+1} \right) \quad (7.139)$$

$$\delta^* = \int_0^1 \left[1 - c_1 \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^{c_2} \right] d(x_2/\delta) = 1 - \frac{c_1}{c_2+1} \quad (7.140)$$

em que c_1 e c_2 são funções desconhecidas que devem ser determinadas experimentalmente. Neste desenvolvimento, assume-se que c_1 e c_2 são constantes.

A tensão de cisalhamento deve ser aproximada, assim como o perfil de velocidades. O uso da hipótese de Boussinesq pode parecer uma escolha apropriada, em analogia com a formulação para a camada limite laminar, porém, o perfil definido pela potência anterior faz com que a tensão em $x_2=0$ seja igual a zero. Adotou-se uma aproximação empírica semelhante à proposta por Blasius (Schlichting, 2000) para camada limite turbulenta em placas planas lisas:

$$\frac{\tau_{21}}{\rho V_\infty^2} = c_3 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{c_4} \quad (7.141)$$

Substituindo estes resultados na equação 7.135, obtém-se:

$$c_3 V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{c_4} - g \delta \sin \alpha = \left(\frac{c_1}{c_2 + 1} - \frac{c_1^2}{2c_2 + 1} \right) \frac{d}{dx_1} (V_\infty^2 \delta) - \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{c_1}{c_2 + 1} \right) \frac{dp}{dx_1} \quad (7.142)$$

Ou

$$c_3 V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{c_4} - g \delta \sin \alpha = c_5 \left(2\delta V_\infty \frac{dV_\infty}{dx_1} + V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx_1} \right) - \frac{c_6}{\rho} \frac{dp}{dx_1} \quad (7.143)$$

$$\text{em que } c_5 = \left(\frac{c_1}{c_2 + 1} - \frac{c_1^2}{2c_2 + 1} \right) \text{ e } c_6 = \left(1 - \frac{c_1}{c_2 + 1} \right).$$

A espessura da camada limite é função da posição x_1 . Se a forma do perfil da superfície livre for S_2 , conclui-se que a velocidade do escoamento potencial aumenta em direção ao ponto de início da aeração, sendo, portanto, função de x_1 , assim como δ .

7.8.1 Aproximação para $dp/dx_1=0$ e $dV_\infty/dx_1=0$

Se a curvatura da superfície livre entre a seção de entrada no canal e a posição de início da aeração não for muito acentuada, como pode ocorrer em estruturas controladas por comportas, a aceleração $dV_\infty/dx_1=0$ pode assumir valores poucos expressivos em relação aos demais termos presentes na equação. Esta hipótese não implica $dp/dx_1=0$, uma vez que resta o termo relativo ao campo gravitacional e o termo difusivo da componente em x_1 das equações de Navier-Stokes. Em um ponto de vista mais simples, considerando distribuição de pressões hidrostática e a primeira hipótese, com valores de h próximos entre si ao longo de x_1 ,

assumiu-se que $dp/dx_1=0$. Com estas simplificações, a equação 7.143 assume a seguinte forma:

$$c_3 V_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{c_4} - g \delta \sin \alpha = c_5 V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx_1} \quad (7.144)$$

Reorganizando a forma da equação e separando as variáveis, pode-se obter a seguinte solução analítica:

$$\begin{aligned} \frac{c_3}{c_5} \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{c_4} \delta^{-c_4} - \frac{g \sin \alpha}{c_5 V_\infty^2} \delta &= \frac{d\delta}{dx_1} \Rightarrow dx_1 = \frac{d\delta}{c_7 \delta^{-c_4} - c_8 \delta} = \frac{\delta^{c_4} d\delta}{c_7 - c_8 \delta^{1+c_4}} \Rightarrow \\ \int_0^{L_A} dx_1 &= \int_0^{h_A} \frac{\delta^{c_4} d\delta}{c_7 - c_8 \delta^{1+c_4}}. \quad zz = c_7 - c_8 \delta^{1+c_4} \Rightarrow \frac{dzz}{-(1+c_4)c_8} = \delta^{c_4} d\delta \Rightarrow \\ \frac{1}{-(1+c_4)c_8} \int_{c_7}^{c_7 - c_8 h_A^{1+c_4}} \frac{dzz}{zz} &= \frac{1}{-(1+c_4)c_8} \left(\ln |c_7 - c_8 h_A^{1+c_4}| - \ln |c_7| \right) \Rightarrow \\ L_A &= \frac{\ln |c_8 h_A^{c_9} - c_7|}{c_{10}} + c_{11} = \frac{\ln |h_A^{c_9} - \overbrace{c_7/c_8}^{-c_{12}}|}{c_{10}} + c_{11} + \frac{c_{13}}{c_{10}} \\ L_A &= \frac{\ln |h_A^{c_9} + c_{12}|}{c_{10}} + c_{13}, \end{aligned} \quad (7.145)$$

em que $c_9 = c_4 + 1$, $c_{10} = -c_4 c_8 - c_8 = -c_8 c_9$ e $c_{11} = \frac{\ln |-c_7|}{c_4 c_8 + c_8}$. Vale lembrar aqui que L_A representa

o comprimento de início da aeração, quantificado como o comprimento para o qual a espessura da camada limite coincide com h_A , que é a altura de escoamento na posição de início da aeração.

Análise dos sinais das constantes e formas adimensionais da equação 7.145

A equação 7.145 pode ser reescrita em termos de constantes adimensionais e de números adimensionais apenas, como apresentado neste item. A constante c_4 é adimensional e foi introduzida com a apresentação da equação 7.141, como um expoente. Portanto, c_9 é adimensional. A constante c_{10} é:

$c_{10} = -\frac{g \sin \alpha}{c_5 V_\infty^2} c_9$. Utilizando o Sistema Internacional, c_{10} possui unidade m^{-1} . c_5 é adimensional

uma vez que $c_5 = \left(\frac{c_1}{c_2 + 1} - \frac{c_1^2}{2c_2 + 1} \right)$. c_{12} pode ser escrita da seguinte forma:

$c_{12} = -c_3 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{c_4} \frac{V_\infty^2}{g \sin \alpha}$, logo, c_{12} é dada em m^{c_4+1} ou m^{c_9} . A constante c_3 é adimensional e faz parte da equação 7.141. Se $c_4=0$, c_3 é semelhante a um coeficiente de arrasto de forma (ou seja, relacionado ao cisalhamento). Finalmente, a constante pode ser interpretada da seguinte forma:

$$c_{13} = c_{11} + \frac{\ln |c_8|}{c_{10}} = \frac{\ln |-c_7|}{c_4 c_8 + c_8} + \frac{\ln |c_8|}{c_{10}} = \frac{\ln |-c_7|}{-c_{10}} + \frac{\ln |c_8|}{c_{10}} = \frac{1}{c_{10}} \ln \left| -\frac{c_8}{c_7} \right| = \frac{1}{c_{10}} \ln \left| -\frac{g \sin \alpha}{c_3 V_\infty^2} \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{-c_4} \right| \Rightarrow$$

$$c_{13} = \frac{1}{c_{10}} \ln \left| \frac{1}{c_{12}} \right|$$

Com tais definições, a equação 7.145 é reescrita em termos apenas das constantes adimensionais presentes nesta formulação e pode ser adimensionalizada, como exposto a seguir:

$$L_A = \frac{1}{c_{10}} \ln \left| \frac{h_A^{c_9}}{c_{12}} + 1 \right| = -\frac{c_5}{c_9} \frac{V_\infty^2}{g \sin \alpha} \ln \left| -h_A^{c_9} \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{-c_4} \frac{g \sin \alpha}{c_3 V_\infty^2} + 1 \right| =$$

$$= -\frac{c_5}{c_9} \frac{V_\infty^2}{g \sin \alpha} \ln \left| -\frac{\sin \alpha}{c_3} \left(\frac{V_\infty h_A}{v} \right)^{c_4} \frac{g h_A}{V_\infty^2} + 1 \right| = -\frac{c_5}{c_9 \sin \alpha} h_A \text{Fr}_A^2 \ln \left| -\frac{\sin \alpha}{c_3} \text{Re}_A^{c_4} \text{Fr}_A^{-2} + 1 \right|$$

Portanto, obtém-se:

$$\frac{L_A}{h_A} = c_{14} \frac{\text{Fr}_A^2}{\sin \alpha} \ln \left| c_{15} \sin \alpha \text{Re}_A^{c_4} \text{Fr}_A^{-2} + 1 \right|, \quad (7.146)$$

ou

$$\frac{L_A}{h_A} = c_{14} \frac{\text{Fr}_A^2}{\sin \alpha} \left(\ln \left| c_{15} \sin \alpha \text{Re}_A^{c_4} + \text{Fr}_A^2 \right| - 2 \ln \left| \text{Fr}_A \right| \right), \quad (7.147)$$

em que $c_{14} = -c_5/c_9$, $c_{15} = -1/c_3$, $\text{Fr}_A = \frac{V_\infty}{\sqrt{g h_A}}$ e $\text{Re}_A = \frac{V_\infty h_A}{v}$. Uma vez que $c_3 > 0$, $c_{15} < 0$. Para que

esta condição física seja satisfeita, deve-se considerar o uso do módulo da solução analítica em possíveis ajustes numéricos das constantes. Considerando uma estrutura com comportas, para a qual a profundidade $h(0)$ (empregada no capítulo sobre o estudo experimental) é aproximadamente igual à abertura da comporta, $V_\infty = q/h(0)$, assumindo que a camada limite inicia em $x=0$. Em um segundo caso, pode-se adotar $V_\infty = (g h_c)^{1/2}$.

Os adimensionais presentes na equação anterior surgem naturalmente com as operações algébricas efetuadas. A segunda adimensionalização proposta consiste em definir L_A/k e

$h_{A^*}=h_A/k$, introduzindo assim uma dimensão característica dos grandes turbilhões situados entre degraus. Como resultado, obtém-se:

$$\frac{L_A}{k} = c_{14} Fr_k^2 \ln | c_{15} h_{A^*}^{c_9} Re_k^{c_4} Fr_k^{-2} + 1 | \quad (7.148)$$

em que $Fr_k = \frac{V_\infty}{\sqrt{gksen\alpha}}$ e $Re_k = \frac{V_\infty k}{\nu}$.

Evidencia-se, assim, que os fenômenos vinculados à camada-limite neste tipo de escoamento podem ser representados como função do número de Reynolds e do Número de Froude, condição explorada no capítulo que apresentou os dados experimentais.

7.9 Modelo para transferência de oxigênio através da interface ar-água

7.9.1 Modelo clássico para reoxigenação

O modelo analítico clássico que representa a absorção de oxigênio por meio da interface ar-água pode ser escrito com as seguintes formas (Schulz, 2003):

$$C(t) = C_s - [C_s - C(0)] \exp(-K_2 t) \quad (7.149a)$$

$$r = \frac{C_s - C(0)}{C_s - C(t)} = \exp(K_2 t) \quad (7.149b)$$

$$\begin{cases} E_T = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{C_s - C(t)}{C_s - C(0)} = \frac{C(t) - C(0)}{C_s - C(0)}; \\ E_T = 1 - \exp(-K_2 t). \end{cases} \quad (7.149c)$$

em que $C(t)$ =concentração de oxigênio na água para um determinado instante t (massa de oxigênio por unidade de volume); C_s =concentração de saturação; $C(0)$ =concentração inicial (em $t=0$); K_2 =coeficiente de reoxigenação; t =tempo; r =déficit; E_T =eficiência da aeração a uma dada temperatura T .

A dedução da equação 7.149a pode ser encontrada em Schulz (2003, p.175-176). Considera-se um volume de controle com uma parte da superfície de controle composta pela superfície livre, através da qual ocorre o fluxo de massa, J_A :

$$J_A = A_s^{-1} \frac{dM}{dt} \quad (7.150)$$

em que A_s =área interfacial, correspondente à superfície livre que separa líquido e gás. M é a massa do soluto, igual ao produto de $C(t)$ com o volume $A_s h$, sendo h a altura do volume. Neste caso $C(t)$ é uma concentração média no seio do líquido, admitindo-se que a mistura

ocorre de forma instantânea, ou seja, sem variações espaciais da concentração. Com esta definição e uma equação análoga à lei de Newton do resfriamento, obtém-se:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{h_{tm}}{h} [C_s - C(t)] \quad (7.151)$$

Nesta equação h_{tm} é o coeficiente de transferência de massa, que dividido pela altura resulta no coeficiente de reoxigenação K_2 . Deste modo, fica demonstrada a origem da equação 7.149a, que é solução da EDO anterior.

7.9.2 Modelo proposto para K_2

O coeficiente de reoxigenação é função de características dos fluidos separados pela interface, da agitação do meio líquido e do meio gasoso e de fatores externos, como a temperatura. Este item tem como objetivo propor uma formulação para avaliação de K_2 em vertedores a partir da energia cinética turbulenta junto à superfície livre. Trata-se de uma proposta que foi elaborada seguindo as ideias apresentadas nas referências citadas, sobretudo aquelas de Schulz e Giorgetti (1986) e Schulz (1989, 2001, 2003). Nesses estudos, a base teórica seguida foram as propostas de misturadores de Corrsin (1957, 1964). Adicionalmente, mostrou-se como a escala de segregação, uma grandeza estatística presente nos modelos de Corrsin, poderia ser adequadamente descrita em fenômenos interfaciais, o que foi possível a partir da utilização de conceitos de onda quadrada aleatória. Note-se que a ponte conceitual entre os misturadores e o fenômeno de transferência interfacial de massa é que garante a possibilidade de uso de conceitos desenvolvidos para turbulência nas questões fronteiriças. De outra forma, sem esta ponte conceitual, as propostas assumem a característica essencialmente empírica. No presente estudo, considera-se que a base conceitual seja a mesma apresentada em Schulz e Giorgetti (1986) e Schulz (1989). Como discutido no capítulo 5, assumindo que toda energia introduzida no escoamento por meio das grandes escalas é dissipada pelos efeitos viscosos, obtém-se (ver equação 5.54):

$$\varepsilon = V_I^3 / L_I \quad (7.152)$$

Nesta equação V_I é a velocidade característica das grandes escalas e L_I é o comprimento característico das grandes escalas (ou comprimento médio dos grandes turbilhões). Este resultado é um princípio importante que decorre da cascata de energia, para altos números de Reynolds, como mencionado por Pope (2009, p.244), e como discutido no capítulo 5. Mencionou-se também que, de acordo com Rodi (2007, p.20-21), Kolmogorov, em 1942, e

Prandtl, em 1945, sugeriram que $k_e^{1/2}$ é a melhor representação para a escala de velocidade associada aos grandes turbilhões, justificando tal proposta no fato deles conterem a maior parte da energia cinética. Portanto, $V_I = k_e^{1/2}$, o que leva ao seguinte resultado:

$$\varepsilon = k_e^{3/2} / L_I \quad (7.153)$$

em que k_e é a energia cinética turbulenta por unidade de massa. Adotando um procedimento similar ao empregado para representação de ε (ver Pope, 2009, p.370), considera-se que a equação 7.153 deva ser corrigida com uma constante C_D :

$$\varepsilon = C_D k_e^{3/2} / L_I \quad (7.154)$$

Os comentários acima não consideram perfis de velocidade, ou escalas preferenciais. Em outras palavras, há isotropia implicitamente considerada. No caso de escoamentos gerais, com perfis de velocidade, as mesmas expressões são utilizadas, sabendo-se que podem haver variações por exemplo nos coeficientes propostos. Em escoamentos que seguem a lei logarítmica para a velocidade média, $L_I = l_m = \kappa x_2$ (l_m =comprimento de mistura, κ =constante de von Kármán e x_2 =eixo coordenado perpendicular à parede), $C_D = 0,166$, como pode ser visto em Pope (2009, p.372). Para o caso mais geral, em que hajam escoamentos preferenciais, C_D é função do número de Reynolds, como ilustrado por Nezu e Nakagawa (1993, p.22). Note-se que a equação 7.154 vale, em princípio, para qualquer escoamento, mesmo aquele sem escoamento médio e isotrópico (neste caso, necessariamente decadente). Urban *et al.* (2005) empregaram este resultado para avaliar o decaimento da turbulência ao longo de bacias de dissipação a jusante de vertedores. Com as equações apresentadas até aqui, observa-se que é necessário calcular o comprimento L_I . Nezu e Nakagawa (1993, p.70-72) estudaram a relação entre L_I/h e a profundidade normalizada $(y-k_r)/(h-k_r)$, em que k_r =altura de rugosidade. Para a região próxima à superfície livre, ou seja, para valores de $(y-k_r)/(h-k_r)$ próximos da unidade, L_I/h assume valores entre, aproximadamente, 0,4 (fundo rugoso: *clips*, cascalho ou areia grossa (*gravel*), seixo ou cascalho (*pebbles*)) e 0,62 (fundo liso). Os degraus podem ser classificados como macro rugosidades, entretanto, equivalência entre eles e os elementos de rugosidade citados deve ser verificada experimentalmente uma vez que o escoamento deslizante sobre turbilhões envolve a formação de grandes turbilhões com dimensões bem definidas (já que os degraus possuem geometria bem definida) e a ocorrência do escoamento principal sobre a camada de líquido (ou líquido e ar) que compõe o escoamento secundário

presente nas cavidades. Deste modo, optou-se por uma aproximação linear com uma constante λ_I a ser determinada:

$$L_I = \lambda_I h \quad (7.155)$$

Combinando as equações 7.154 e 7.155, obtém-se:

$$\varepsilon = c \frac{k_e^{3/2}}{h} \quad (7.156)$$

em que $c = C_D/\lambda_I$.

Neste estágio da construção do modelo, utilizou-se a proporcionalidade empírica observada entre K_2 , a taxa de dissipação de energia e h encontrada por diversos autores. Trata-se de uma relação estabelecida por meio de potências, com a forma apresentada pela equação 7.157 (Schulz e Giorgetti, 1986). Nesta equação, a constante λ_K e os expoentes n e y assumem diferentes valores quando são observados os estudos de diversos pesquisadores, como ilustrado por meio da Tabela 7.1, que contém dados reunidos por Rathbun (1977).

Tabela 7.1 – Expoentes n e y apresentados por diversos autores

n	y	Autores citados por Rathbun (1977)
0,323	1,353	Churchill <i>et al.</i>
0,33	1,00	Langbein-Durum
0,24	1,51	Owens <i>et al.</i>
0,33	1,17	Isaacs-Gaudy
0,22	1,63	Owens <i>et al.</i>
0,28	0,57	Negulesku-Rojanski
0,17	1,33	O'Connor-Dobbins
0,234	0,820	Padden-Gloyna
0,20	1,20	Bansal
0,202	1,487	Bennett-Rathbun
0,375	1,00	Parkhurst-Pomeroy
0,408	0,66	Krenkel-Orlob
0,500	1,00	Cadwallader-McDonnel
0,375	1,00	Dobbins
1,00	0	Tsivoglow-Wallace

Fonte: Rathbun (1977).

$$K_2 = \lambda_K \varepsilon^n h^y \quad (7.157)$$

Substituindo a equação 7.156 na equação 7.157 é obtido o modelo para o coeficiente de reoxigenação K_2 em função da energia cinética turbulenta e da altura de escoamento. Empregando os adimensionais $\Gamma = h/h_c$ e $k_e^* = w'^2/(gh_c) = (w'/V_c)^2 = k_e/e_c$ é possível obter a equação 7.159. Nestas definições, h_c = altura crítica, h = altura de escoamento, w' = intensidade turbulenta ($w' = \sqrt{w^2}$, em que w é a flutuação da componente vertical), V_c = velocidade crítica e $e_c = (3/2)V_c^2$.

$$K_2 = \psi k_e^{3n/2} h^{y-n} \quad (7.158)$$

$$K_2 = \underbrace{\psi_1 h_c^{n/2+y}}_{\psi_1 h_c^{n/2+y}} \left(\frac{3}{2}g\right)^{3n/2} k_e^{*3n/2} \Gamma^{y-n} \Rightarrow$$

$$K_2^* = \frac{K_2}{\psi_1 h_c^{n/2+y}} = k_e^{*3n/2} \Gamma^{y-n} \quad (7.159)$$

em que $\psi = \lambda_K c^n$ e $\psi_1 = \psi \left(\frac{3}{2}g\right)^{3n/2}$.

Vale mencionar que a dependência do coeficiente de aeração para com uma potência da taxa de dissipação de energia segue também do uso dos misturadores de Corrsin (1957, 1964) e das considerações com ondas quadradas aleatórias de Schulz e Giorgetti (1986) e Schulz (1989). O vínculo conceitual, portanto, fundamenta-se nessa abordagem.

7.9.3 Comportamento de K_2^* ao longo do escoamento: aproximação para n e y constantes

Para que seja possível calcular valores de K_2^* a partir dos dados experimentais deste trabalho é necessária a determinação dos expoentes n e y . Os dados da Tabela 7.1 fornecem os seguintes valores médios: $n=0,35$ e $y=1,05$. Ao relacionar os números de Sherwood ($Sh=h_{tm} d_p/D$, h_{tm} =coeficiente de transferência de massa; d_p =diâmetro da partícula; D =difusividade molecular; ν =viscosidade cinemática), de Schmidt ($Sc=\nu/D$) e de Reynolds ($Re_p=\varepsilon^{1/3} d_p^{4/3}/\nu$) é possível calcular $n=1/4$ para um problema de dissolução de esferas (ver Schulz, 2001, p.20). O mesmo valor para o expoente, *i.e.*, $n=1/4$, foi deduzido por Schulz (2001). Optou-se pelo uso de $n=1/4$ e $y=1,05$ para avaliar a distribuição de K_2^* ao longo de $(z-z_i)/h_c$, sendo esta uma primeira aproximação já que a quebra da superfície livre e conseqüente formação de gotas e bolhas de ar podem alterar o valor de n e de y (Roberts, 1984).

Como pode ser visto na Figura 7.9a, o adimensional K_2^* não apresenta boa correlação com $(z-z_i)/h_c$. Entretanto, esses são comportamentos exploratórios, essencialmente previsivos, destinados a comparações com dados medidos e relatados na literatura. Os valores mínimo e máximo obtidos foram 0,03 e 0,11, com média igual a 0,066. A partir do ponto de início da aeração, como ilustrado na Figura 7.9b, observa-se que K_2^* cresce com a posição ao longo do canal. Tal comportamento é consistente com a variação da energia cinética turbulenta e das profundidades para este intervalo. Nesta região há o “rompimento” da superfície livre, ou seja, inicia-se a formação de ondas e estruturas turbulentas de grandes dimensões em relação às que ocorrem na superfície livre do escoamento monofásico. Uma aproximação para os valores intermediários de K_2^* em função de $(z-z_i)/h_c$ é fornecida por meio da equação 7.160a e

a envoltória dos dados corresponde às equações 7.160b (inferior) e 7.160c (superior), válidas para $0 < (z-z_i)/h_c < 5$. As curvas obtidas com estas equações podem ser vistas na Figura 7.9b.

$$K_2^* = 0,058 + \frac{0,157}{1 + \exp[-(Z_i - 2,17)/8,69]} \quad (7.160a)$$

$$K_2^* = 0,044 + \frac{0,11}{1 + \exp[-(Z_i - 2,17)/8,69]} \quad (7.160b)$$

$$K_2^* = 0,07 + \frac{0,2}{1 + \exp[-(Z_i - 2,17)/8,69]} \quad (7.160c)$$

em que $Z_i = (z-z_i)/h_c$.

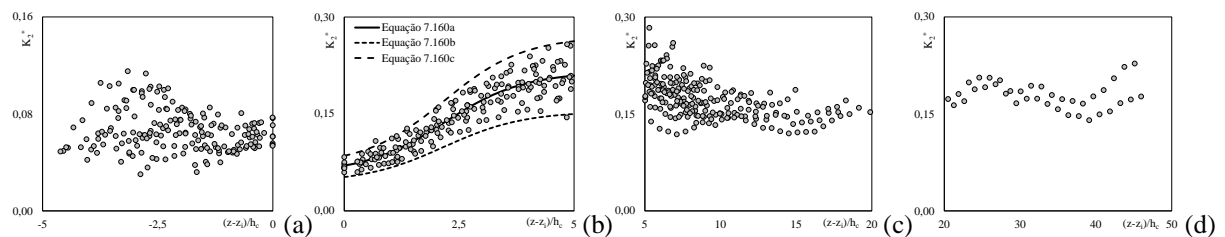


Figura 7.9 – Variação de K_2^* com expoentes constantes n : (a) Escoamento monofásico; (b) Escoamento bifásico na região de transição até o primeiro pico dos valores de energia cinética turbulenta; (c) resultados obtidos para região entre o primeiro pico e a região final de decaimento das quantidades estatísticas em $(z-z_i)/h_c=20$; (d) resultados calculados para região final.

Os resultados para $5 < (z-z_i)/h_c < 20$ são apresentados na Figura 7.9c. Eles correspondem à região de decaimento das quantidades estatísticas apresentadas no Capítulo 3. A Figura 7.9d contém os pontos restantes, para $20 < (z-z_i)/h_c < 46$. Observa-se que o caráter ondulatório presente em Γ também ocorreu para estes valores de K_2^* , que oscilam em torno de um valor médio de 0,18.

7.9.4 Inclusão das dimensões dos degraus na formulação

Schulz (1990), a partir de dados experimentais, estabeleceu uma relação entre K_2 , ε e a rugosidade absoluta equivalente, ϕ , empregada como escala integral de Taylor. A equação obtida por este pesquisador é apresentada a seguir:

$$K_2 = 0,041\varepsilon^{0,49}\phi^{-0,154} \quad (\phi \text{ em metros}) \quad (7.161)$$

Propõe-se que a rugosidade presente na equação de Schulz (1990) seja substituída por $k = scos\alpha$, para aplicações relacionadas a vertedores em degraus. Trata-se de uma sugestão semelhante à apresentada por Tozzi (1992), relacionada à camada limite. A dependência de K_2 com k expressa desta forma deve ser verificada por meio de experimentos, assim como o valor do expoente.

$$K_2 = 0,041\varepsilon^{0,49}k^{-0,154} \quad (k \text{ em metros}) \quad (7.162)$$

Se $c=1$, a equação 7.156 e a equação 7.162 podem ser combinadas resultando em:

$$K_2 = 0,041(k_e^{0,735}/h^{0,49})k^{-0,154} \quad (7.163)$$

Observa-se que este equacionamento é de aplicação imediata desde que os expoentes e constante corresponda adequadamente aos vertedores em degraus. Nota-se que ao substituir a taxa de dissipação de energia pela energia cinética turbulenta, a altura de escoamento h fica relacionada de forma inversa com o coeficiente de reoxigenação.

7.9.5 Comparações com dados experimentais

Chanson (2002, p.196) apresentou resultados experimentais que relacionam E_{15} e H_{dam}/h_c (ou z/h_c , como utilizado neste texto) para $\alpha=11^\circ$, $\alpha=22^\circ$ e $\alpha=45^\circ$ em regime deslizante sobre turbilhões. Este autor comenta que a transferência de massa a montante do ponto de início da aeração é próxima de zero e apresenta uma metodologia semi-empírica para avaliar a eficiência levando em consideração a área interfacial devida às bolhas incorporadas ao escoamento. Com base nos dados de Chanson (2002), sugere-se a equação 7.164, com coeficiente de correlação igual a 0,96. A Figura 7.10 ilustra os resultados obtidos com esta equação em comparação aos dados experimentais de Chanson (2002).

$$E_{15} = 1 - \exp[-0,011(z/h_c)^{1,3}] \quad (7.164)$$

Válida para $\alpha=11^\circ$, $\alpha=22^\circ$, $\alpha=45^\circ$ e $7,8 < z/h_c < 32,5$, aproximadamente.

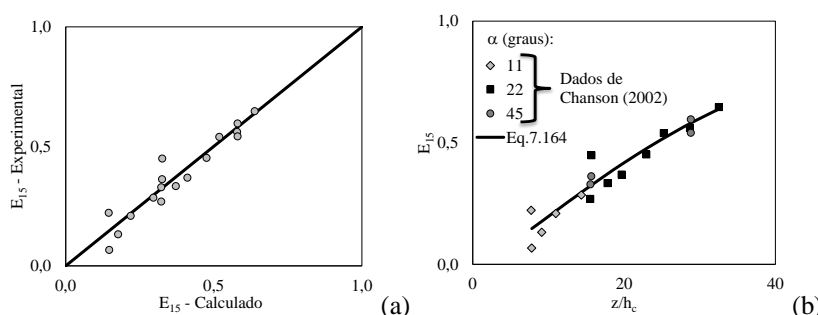


Figura 7.10 – Comparação entre a formulação semi-empírica 7.164 e os dados experimentais de Chanson (2002)

A boa qualidade do ajuste representado pela função 7.164 e a forma desta equação possibilitaram comparar as equações 7.149c e 7.164. Tal analogia conduz naturalmente à igualdade apresentada a seguir, por meio da equação 7.165.

$$K_2 t = 0,011(z/h_c)^{1,3} \quad (7.165)$$

Com base na informação contida na equação 7.165, considerou-se a redefinição de K_2^* , a partir da equação 7.159, incluindo o adimensional $(z/h_c)^{1,3}$, com o intuito de utilizar os dados experimentais desta pesquisa. Deste modo, propõe-se o adimensional apresentado a seguir, definido como K_2^o . Ele também inclui a altura de rugosidade $(k/h_c)^r$, definida com o intuito de incluir as dimensões dos degraus no equacionamento. Os resultados obtidos com esta formulação podem ser vistos na Figura 7.11, calculados com $n=1/4$, $y=1,05$, $c^n=0,06$ e $r=-0,01$. Nesta comparação não foi considerada a correção para a temperatura. É interessante observar que o uso dos expoentes apresentados ao longo do texto conduziu a uma boa aproximação entre os dados, sendo necessário o cálculo apenas de c^n .

$$K_2^o = K_2^* c^n \left(\frac{z}{h_c} \right)^{1,3} \left(\frac{k}{h_c} \right)^r = \frac{K_2}{\lambda_K \left(\frac{3}{2} g \right)^{3n/2} h_c^{n/2+y}} \left(\frac{z}{h_c} \right)^{1,3} \left(\frac{k}{h_c} \right)^r \Rightarrow \quad (7.166)$$

$$K_2^o = c^n (z/h_c)^{1,3} k_e^{*3n/2} \Gamma^{y-n} (k/h_c)^r$$

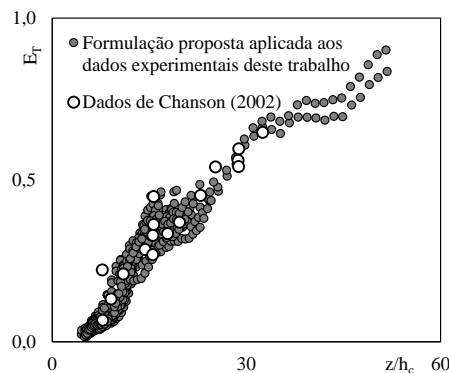


Figura 7.11 – Comparação entre os dados calculados com base na formulação proposta neste trabalho e os dados experimentais de Chanson (2002). Os valores de z/h_c correspondem às distâncias desde a crista até a cota de fundo da bacia de dissipação ou até a cota do piso do degrau mais baixo.

Esta formulação considera o tema de quantificação do coeficiente de aeração para vertedores escalonados e mostra que os conceitos da área podem ser retrabalhados para a geometria considerada. Apesar da exiguidade de dados medidos especificamente para quantificar a aeração em canais escalonados, o uso dos dados existentes na literatura e as considerações aqui tecidas, que permitem relacionar diferentes dados para obter o coeficiente de aeração, conduziu a resultados coerentes, mostrando que esta abordagem é merecedora de maiores estudos.

CAPÍTULO 8

COMPARAÇÕES ENTRE EXPERIMENTOS, SIMULAÇÕES E TEORIA

Sumário

8.1 Introdução	395
8.2 Perfil da superfície livre	395
8.2.1 Comparações com dados experimentais	395
8.2.2 Comparação com resultados numéricos	399
8.2.3 Formulação para o fator de resistência obtida com os dados numéricos	402
8.2.4 Discussão sobre a previsão do perfil bifásico	403
8.3 Constantes presentes na formulação proposta para o fator de resistência	404
8.3.1 Cálculo a partir de dados de diferentes fontes	404
8.3.2 Cálculos realizados com o uso dos dados experimentais	405
8.3.3 Cálculos realizados com o uso dos dados numéricos	406
8.4 Comprimento de transição para o escoamento bifásico	409
8.4.1 Primeiro equacionamento baseado nas leis de conservação – Parte 1	409
8.4.2 Analogia com as leis básicas – Parte 2	409
8.4.3 Resultados para o comprimento de transição total, entre h_1 e h_3	410
8.5 Análise da formulação integral para camada limite	410
8.5.1 Aplicação para o cálculo de L_A e L_A^* com dados experimentais	410
8.5.2 Aplicação aos dados numéricos	412
8.6 Comparação entre os resultados experimentais, numéricos e dados da literatura	412
8.7 Comprimento de ressaltos hidráulicos a jusante de vertedores em degraus	413
8.7.1 Considerações iniciais	413
8.7.2 Definição do comprimento do ressalto com o auxílio de quantidades estatísticas	414
8.7.3 Comprimento do ressalto hidráulico a jusante de vertedores em degraus	416

8.1 Introdução

Este capítulo antecede as conclusões desta tese e contém as comparações entre os modelos propostos no Capítulo 7 e os resultados numéricos e experimentais.

8.2 Perfil da superfície livre

8.2.1 Comparações com dados experimentais

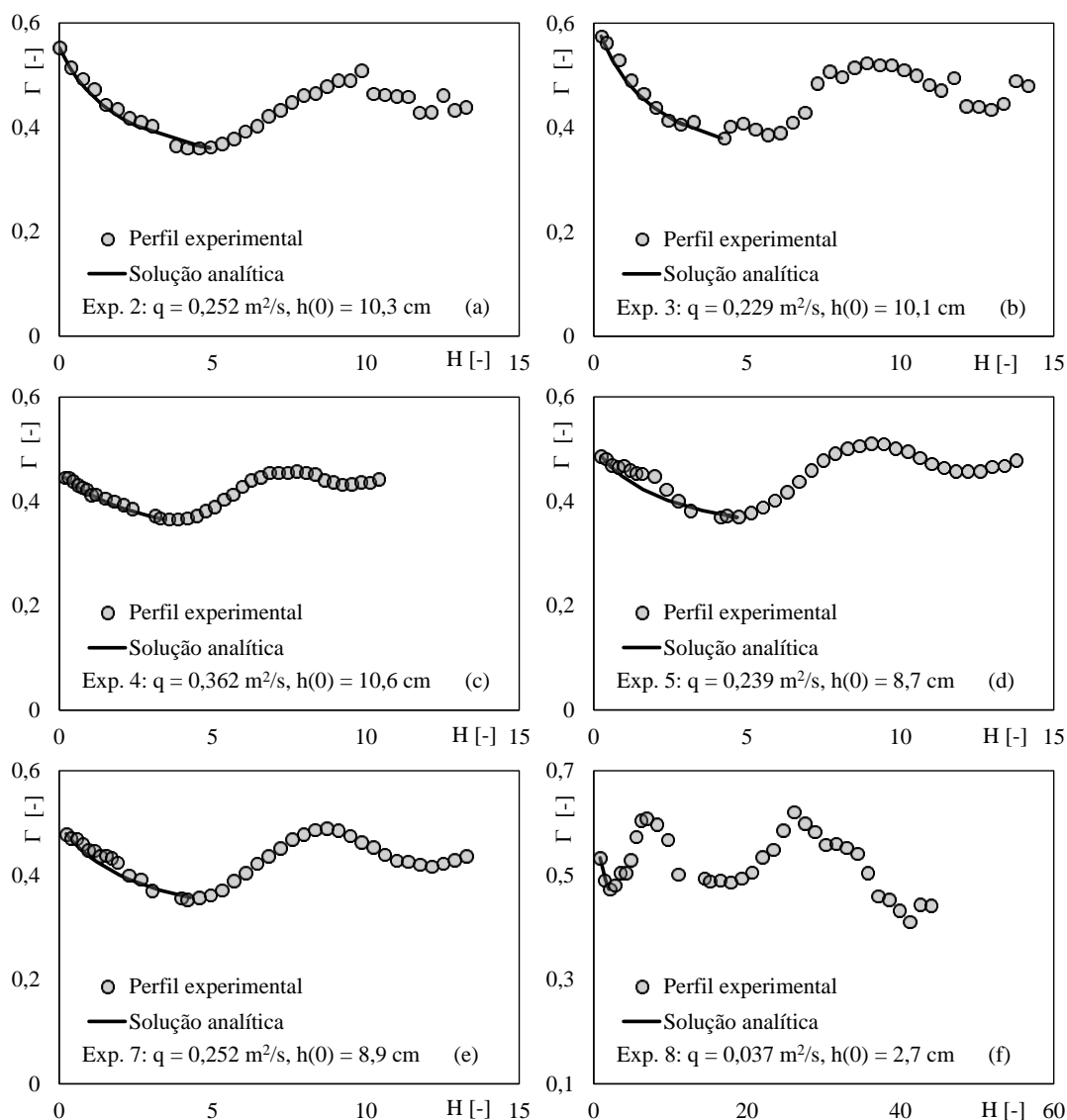
As comparações apresentadas neste item correspondem à solução para a forma adimensional que incluiu o uso de $\Gamma=h/h_c$ e $H=z/h_c$. Tal equacionamento adimensional envolve também os números $\omega=f/(8\text{sen}\alpha)$ e $\varphi=2h_c/B$, que podem ser vistos na Tabela 8.1 junto com os valores do fator de resistência e outros detalhes relacionados. A escolha do fator de resistência foi realizada inicialmente por comparação visual entre a curva S_2 e os pontos experimentais. Este número serviu como estimativa inicial para a minimização da soma dos erros quadráticos entre os valores experimentais e analíticos. O uso das soluções analíticas está condicionado ao conhecimento do fator de resistência e do coeficiente de Boussinesq. Este coeficiente pode ser calculado a partir de perfis de velocidades experimentais. Neste trabalho, o seu valor foi assumido constante e igual a 1,05 com base nos resultados de Tozzi (1992). O cálculo do fator de resistência pode ser realizado com a equação da energia e dados que possibilitem calcular a declividade da linha de energia. Neste trabalho o fator de resistência é um parâmetro de ajuste presente no modelo analítico.

Tabela 8.1 – Dados relacionados às comparações entre a solução $H=H(\Gamma)$ e dados experimentais.

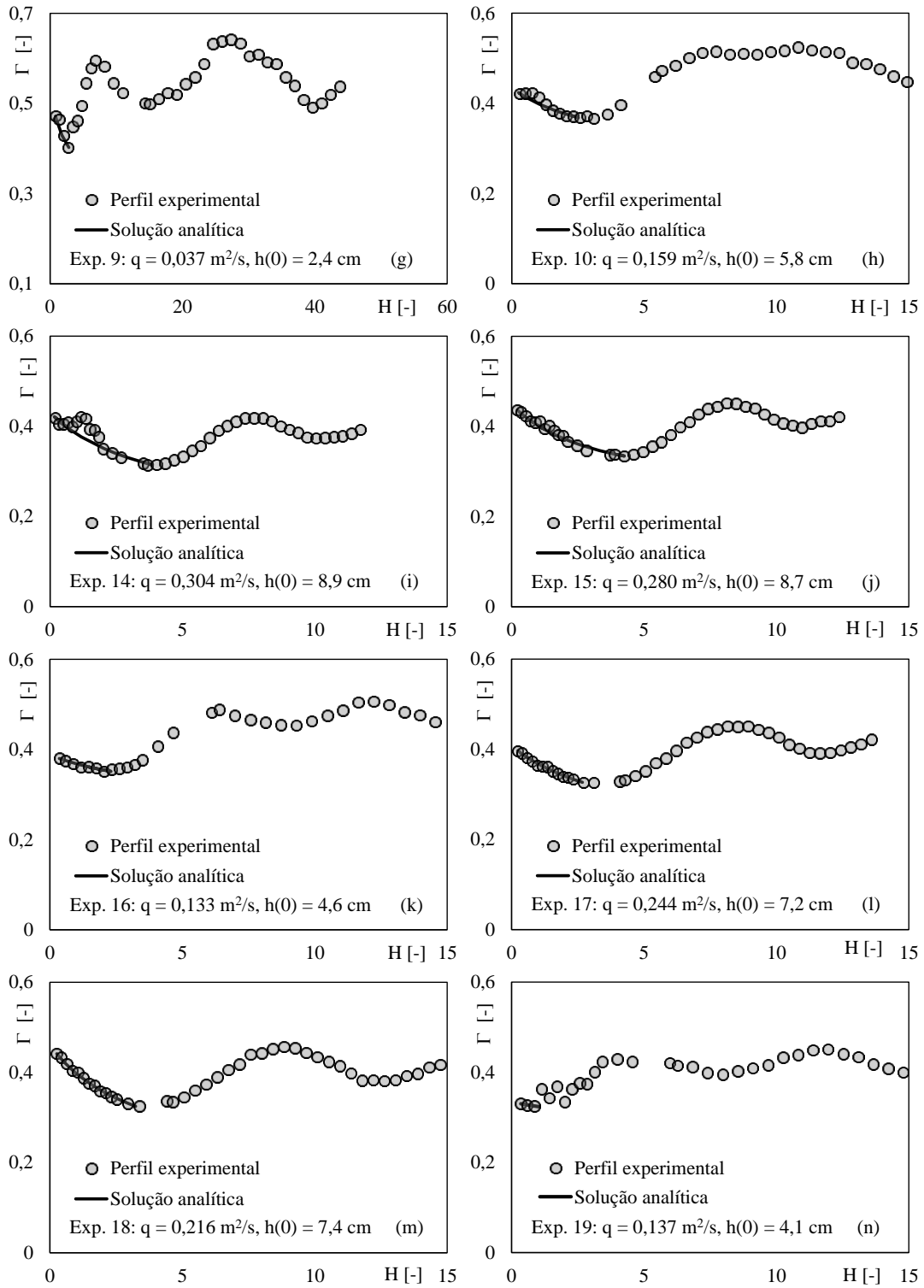
Nº	Experimento	ω	φ	f	Re=q/v	s/h _c
1	Exp.2	0,0212	1,87	0,12	2,5E+05	0,268
2	Exp.3	0,0229	1,75	0,13	2,3E+05	0,286
3	Exp.4	0,0195	2,37	0,11	3,6E+05	0,211
4	Exp.5	0,0248	1,80	0,14	2,4E+05	0,278
5	Exp.7	0,0199	1,86	0,11	2,5E+05	0,268
6	Exp.8	0,0583	0,51	0,33	3,7E+04	0,971
7	Exp.9	0,0371	0,52	0,21	3,7E+04	0,967
8	Exp.10	0,0229	1,37	0,13	1,6E+05	0,364
9	Exp.14	0,00919	2,11	0,052	3,0E+05	0,237
10	Exp.15	0,0152	2,0	0,086	2,8E+05	0,250
11	Exp.16	0,0229	1,22	0,13	1,3E+05	0,411
12	Exp.17	0,00955	1,82	0,054	2,4E+05	0,274
13	Exp.18	0,00725	1,68	0,041	2,2E+05	0,298
14	Exp.19	0,0177	1,24	0,10	1,4E+05	0,402
15	Exp.20	0,00884	1,49	0,050	1,8E+05	0,336
16	Exp.21	0,0212	1,59	0,12	2,0E+05	0,315

Os perfis analíticos e experimentais são apresentados na Figura 8.1. Observa-se que a maior parte dos experimentos apresentou boa concordância com a solução analítica. Os

experimentos 8 e 9 contêm poucos pontos na região monofásica devido ao início da aeração próximo da origem $x=0$ em relação aos demais. Apesar disto, foi possível verificar o decaimento de Γ ao longo de H e, portanto, a existência de um perfil S_2 . Nestes experimentos está evidente a posição de início da aeração e perfil ondulado que ocorre após ela. Isto não ocorreu com os dados do experimento 19 devido ao espalhamento dos pontos após o perfil S_2 identificado. Em alguns casos (experimentos 5, 7 e 14) é possível observar a elevação da superfície na região monofásica, ocasionada pela formação de pequenas ondas transversais.



(Continua na próxima página)



(Continua na próxima página)

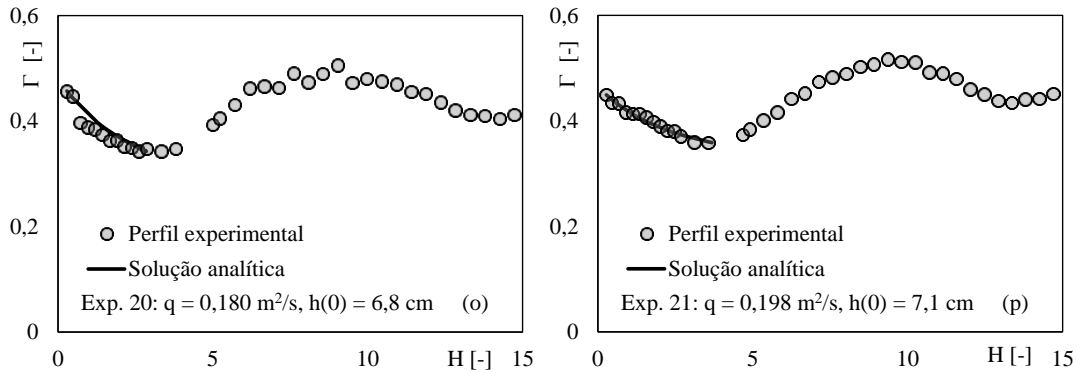


Figura 8.1 – Perfil da superfície livre adimensional (apenas perfis S_2): comparações entre resultados experimentais e solução analítica para $H=H(\Gamma)$.

As tentativas de relacionar o fator de resistência com outros adimensionais não resultaram em ajustes com coeficientes de correlação elevados. As relações entre f e adimensionais como s/h_c , $Re=q/v$ ou F_r^* , por exemplo, que variam apenas em função da vazão específica para os experimentos deste trabalho (uma vez que $\alpha=45^\circ$, $s=0,05$ m e $k=0,035$ m) resultam em ajustes com coeficientes de correlação próximos de 0,80 e distribuição dos pontos gerados pelos valores calculados e “experimentais” como apresentado na Figura 8.2. A Figura 8.2a compara os pontos formados pelos valores de f apresentados na Tabela 8.1 e os pontos calculados com a equação 8.1, que relaciona f com o número de Reynolds definido como q/v . Os dados que compõem a Figura 8.2b foram obtidos com a Tabela 8.1 e a equação 8.2. As equações 8.1 e 8.2 possuem coeficientes de correlação iguais a 0,80 e 0,83, respectivamente, com limites de aplicação especificados na Tabela 8.1.

$$f(Re) = -0,085 \log(Re) + 1,145 \quad (8.1)$$

$$f(s/h_c) = 0,25 \frac{s}{h_c} + 0,238 \quad (8.2)$$

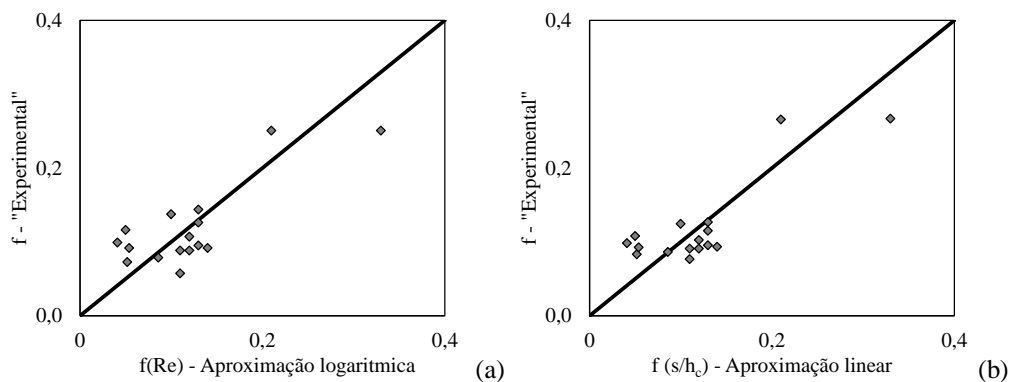


Figura 8.2 – Comparação entre valores de f correspondentes aos ajustes apresentados na Tabela 8.1 e os valores calculados com as equações 8.1 e 8.2.

8.2.2 Comparação com resultados numéricos

No item anterior foi utilizada a formulação para canais retangulares. Neste item, uma vez que as simulações foram realizadas em domínios bidimensionais, a solução analítica empregada corresponde à solução para canais largos, apresentada por Simões, Schulz e Porto (2010a), e que é matematicamente similar à solução de Bresse, citado por Henderson (1966). O sistema que compõe a referida solução é:

$$H = \Gamma \cos \alpha + (\omega \cos \alpha - \beta)\phi + C \quad (8.3)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (8.4)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{6(-\sqrt[3]{\omega})^2} \ln \left[\frac{(\Gamma - \sqrt[3]{\omega})^2}{\Gamma^2 + \sqrt[3]{\omega}\Gamma + (\sqrt[3]{\omega})^2} \right] \quad (8.5)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{(\sqrt[3]{\omega})^2 \sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2\Gamma + \sqrt[3]{\omega}}{-\sqrt[3]{\omega}\sqrt{3}} \right) \quad (8.6)$$

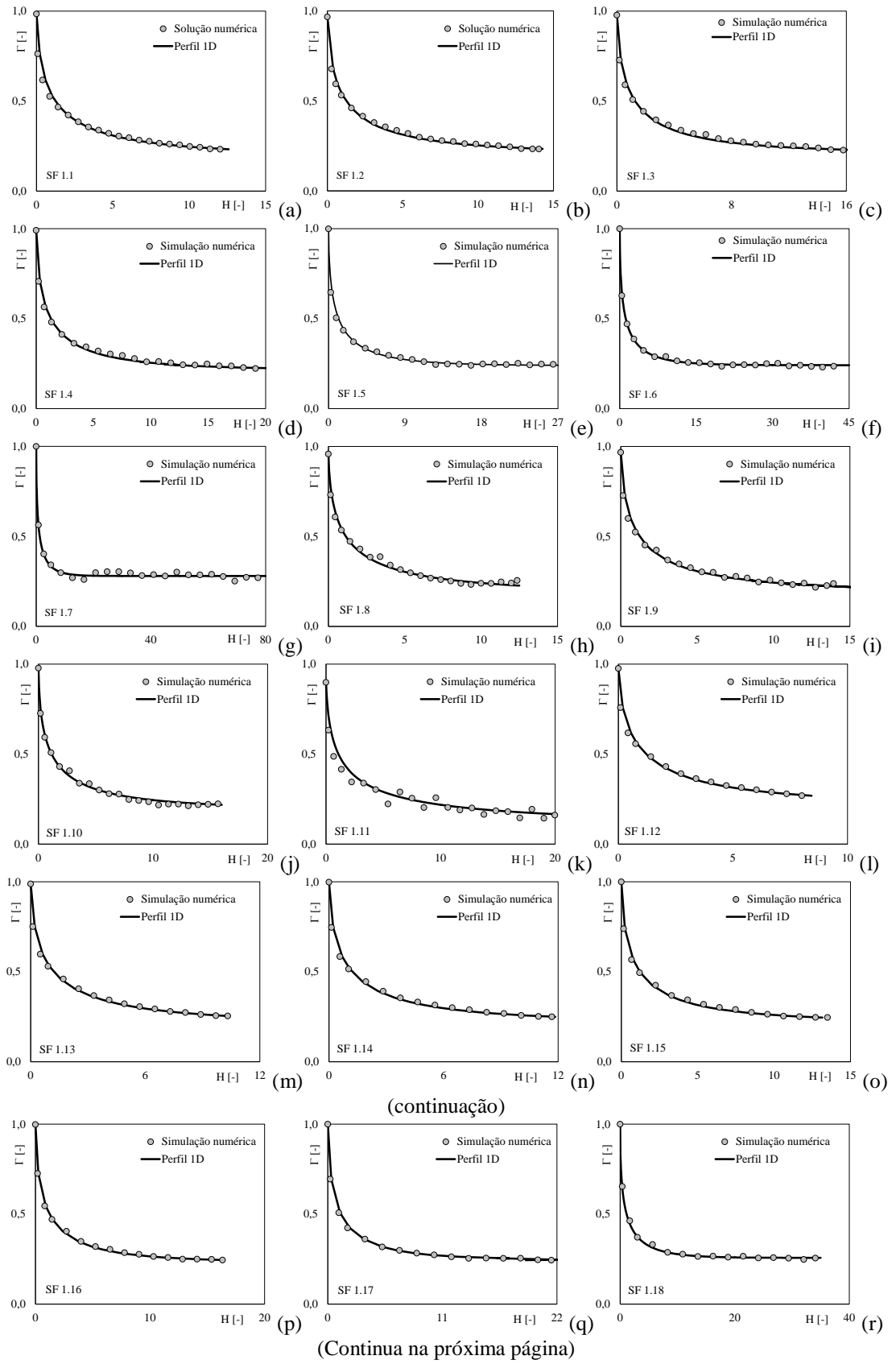
As primeiras soluções numéricas apresentadas no capítulo 6 foram obtidas utilizando-se a geometria e condições de escoamento do experimento 18. A sobreposição dos pontos experimentais e numéricos foi excelente. Deste modo, o fator de resistência obtido para o experimento 18 é praticamente o mesmo calculado com os pontos numéricos, sendo desnecessária a reapresentação da Figura 8.1(m). As demais simulações, SF 1.1 a SF 1.31, foram utilizadas para calcular o fator de resistência da solução analítica anterior. Os resultados encontram-se apresentados na Tabela 8.2, assim como outros detalhes relacionados.

Tabela 8.2 – Dados correspondentes às simulações numéricas e resultados obtidos com as comparações entre as soluções numéricas e o perfil unidimensional da superfície livre.

α	Simulação	q [m ² /s]	h _c [m]	f	ω	Re=q/v	s/h _c
53,13° (s=0,6 m)	SF 1.1	30	4,51	0,052	0,00813	3,0E7	0,133
	SF 1.2	25	3,99	0,062	0,00969	2,5E7	0,150
	SF 1.3	20	3,44	0,063	0,00984	2,0E7	0,174
	SF 1.4	15	2,84	0,065	0,0102	1,5E7	0,211
	SF 1.5	10	2,17	0,088	0,0138	1,0E7	0,277
	SF 1.6	5	1,37	0,090	0,0141	5,0E6	0,439
	SF 1.7	2	0,74	0,140	0,0219	2,0E6	0,809
53,13° (s=2,4 m)	SF 1.8	30	4,51	0,045	0,00703	3,0E7	0,532
	SF 1.9	25	3,99	0,046	0,00719	2,5E7	0,601
	SF 1.10	20	3,44	0,050	0,00781	2,0E7	0,697
	SF 1.11	15	2,84	0,010	0,00156	1,5E7	0,845
45° (s=0,6 m)	SF 1.12	40	5,46	0,063	0,0111	4,0E7	0,110
	SF 1.13	30	4,51	0,061	0,0108	3,0E7	0,133
	SF 1.14	25	3,99	0,065	0,0115	2,5E7	0,150
	SF 1.15	20	3,44	0,066	0,0117	2,0E7	0,174
	SF 1.16	15	2,84	0,074	0,0131	1,5E7	0,211
	SF 1.17	10	2,17	0,087	0,0153	1,0E7	0,277
	SF 1.18	5	1,37	0,096	0,0170	5,0E6	0,439

31° (s=0,6 m)	SF 1.19	40	5,46	0,096	0,0233	4,0E7	0,110
	SF 1.20	30	4,51	0,093	0,0226	3,0E7	0,133
	SF 1.21	25	3,99	0,100	0,0243	2,5E7	0,150
	SF 1.22	20	3,44	0,107	0,0260	2,0E7	0,174
	SF 1.23	15	2,84	0,110	0,0267	1,5E7	0,211
	SF 1.24	10	2,17	0,130	0,0316	1,0E7	0,277
	SF 1.25	5	1,37	0,135	0,0328	5,0E6	0,439
11,31° (s=0,6 m)	SF 1.26	30	4,51	0,083	0,0529	3,0E7	0,133
	SF 1.27	25	3,99	0,086	0,0548	2,5E7	0,150
	SF 1.28	20	3,44	0,085	0,0542	2,0E7	0,174
	SF 1.29	15	2,84	0,065	0,0414	1,5E7	0,211
	SF 1.30	10	2,17	0,060	0,0382	1,0E7	0,277
	SF 1.31	5	1,37	0,100	0,0637	5,0E6	0,439

As comparações entre os resultados obtidos numericamente e a solução simplificada para o perfil unidimensional encontram-se apresentadas na Figura 8.3. O procedimento empregado para obtenção dos valores para o fator de resistência apresentados na Tabela 8.2 foi o mesmo utilizado nas comparações anteriores, entre a solução analítica e os resultados experimentais. Adotou-se $\beta=1,0$ e, como ilustrado pelas figuras, foi possível obter excelentes ajustes entre a solução simplificada unidimensional e as soluções numéricas obtidas com as equações de Navier-Stokes médias, o modelo k- ϵ e o modelo multifásico não homogêneo. A Figura 8.3g, correspondente à simulação SF 1.7, mostra que os pontos obtidos com a simulação numérica apresentaram um espalhamento maior em torno da curva analítica quando comparado com os demais. Este comportamento pode ser explicado pela baixa vazão específica ($q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$), que conduz a uma superfície mais ondulada, ou seja, a forma do fundo passa a exercer maior influência na forma da superfície livre. Os resultados obtidos com a simulação SF 1.11 (Fig. 8.3k) também estão mais dispersos em relação aos outros. Neste caso, como discutido no capítulo sobre as simulações numéricas, a adoção de degraus com $s=2,4 \text{ m}$ conduziu a soluções com grandes cavidades de ar. A simulação SF 1.11 corresponde à menor vazão testada e o resultado obtido inclui o descolamento a partir do segundo degrau, que recola a partir do quarto degrau, e profundidades onduladas ao longo do restante do canal. Os demais resultados com alguns pontos dispersos foram obtidos por motivos semelhantes, *i.e.*, devido a superfícies onduladas por oscilações oriundas da forma do fundo ou de cavidades de ar persistentes abaixo do escoamento principal (que possuem pressões baixas e, portanto, alteram a forma do perfil do escoamento principal). Os últimos pontos das Figuras 8.3h e 8.3j estão posicionados de tal maneira que é caracterizado o início de uma elevação da posição da superfície livre. Estes pontos foram obtidos no final do canal e ocorreram devido à curvatura da superfície livre que há ao longo da transição entre o canal inclinado e o canal horizontal situado na extremidade de jusante.



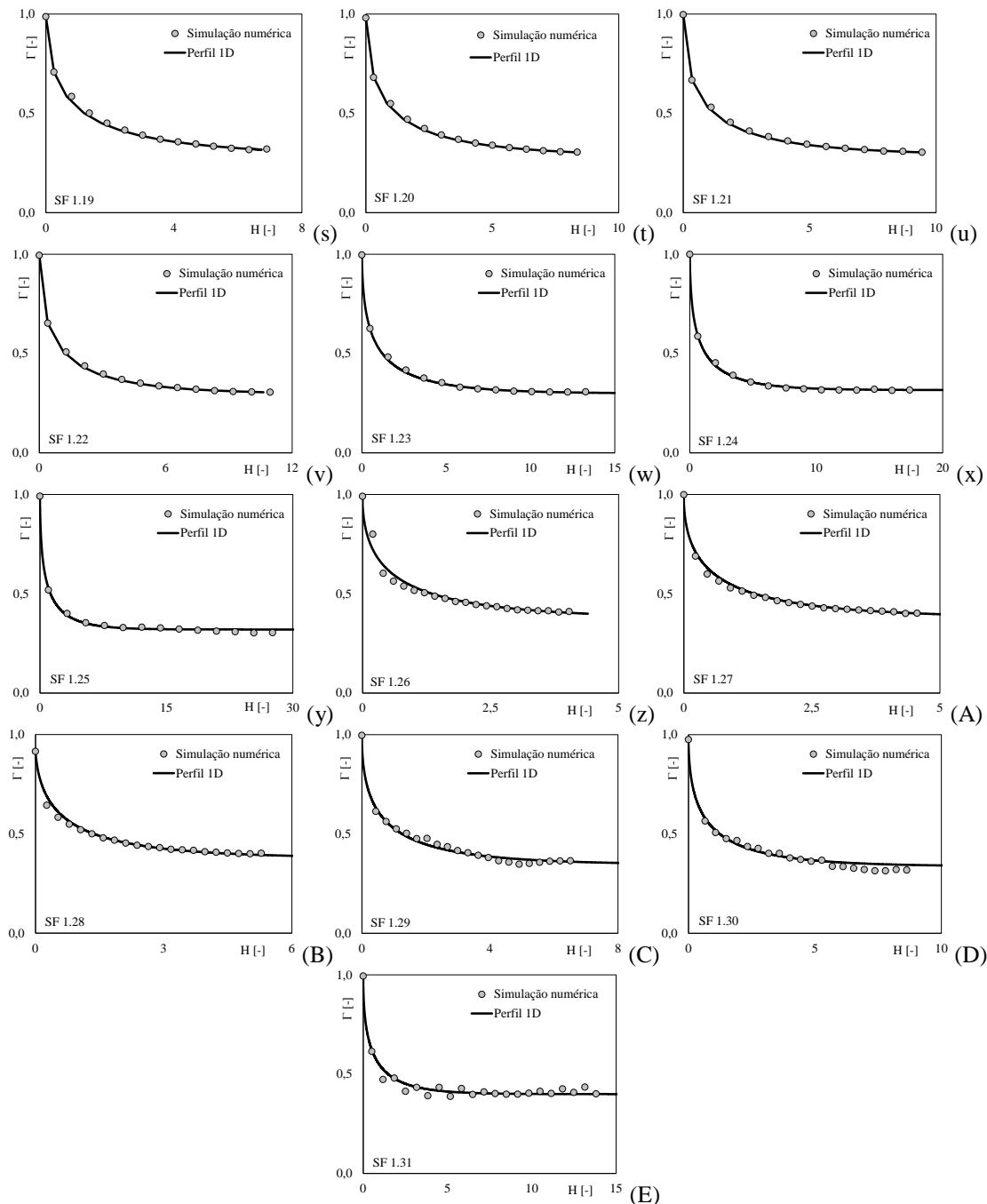


Figura 8.3 – Soluções numéricas obtidas com as equações de Navier-Stokes médias de Reynolds e perfil analítico unidimensional definido pelo sistema de equações 8.3 a 8.6. Os pontos, denominados “Simulação numérica” correspondem às soluções obtidas com as equações de Navier-Stokes, o modelo de turbulência $k-\varepsilon$ e o modelo multifásico não homogêneo, como descrito no capítulo sobre simulações numéricas. As linhas, denotadas por “Perfil 1D”, foram obtidas com as equações 8.3 a 8.6.

8.2.3 Formulação para o fator de resistência obtida com os dados numéricos

Os resultados numéricos para o fator de resistência, apresentados na Tabela 8.2, apresentaram boas correlações com o adimensional k/h_c para os três primeiros ângulos empregando-se uma potência com a forma:

$$f = a \left(\frac{k}{h_c} \right)^b, \quad (8.7)$$

em que a e b são constantes, definidas de acordo com a Tabela 8.3, apresentada a seguir.

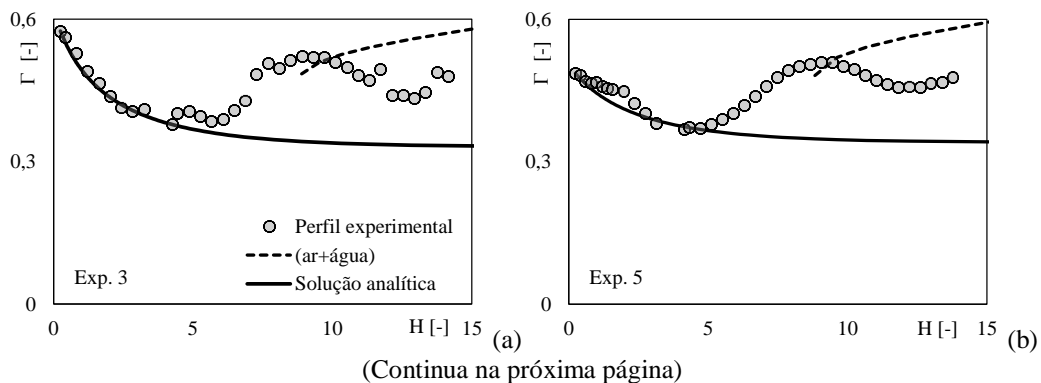
Tabela 8.3 – Constantes obtidas para a equação 8.7

α	a	b	k/h _c	Re	R
	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
53,13°	0,195	0,502	0,0798-0,485	8,0E6-1,2E8	0,97
45°	0,146	0,355	0,0776-0,311	2,0E7-1,6E8	0,97
31°	0,185	0,294	0,0942-0,377	2,0E7-1,6E8	0,96

R=coeficiente de correlação.

8.2.4 Discussão sobre a previsão do perfil bifásico

Foi discutido em trabalhos anteriores, como em Simões (2008), Simões *et al.* (2010b) e Takahashi e Ohtsu (2011), que é possível prever, para fins práticos, a forma do perfil bifásico com o uso de frações de vazios médias conhecidas ao longo do canal, assim como a partir da forma do perfil da superfície livre do escoamento monofásico. Empregando esta metodologia com o uso das equações de Boes e Hager (2003a,b), foram traçados os perfis do escoamento bifásico a partir dos perfis de profundidades equivalentes apenas de água gerados pela extrapolação das soluções apresentadas na Figura 8.1. Alguns resultados podem ser vistos na Figura 8.4, apresentada a seguir. Observa-se que na posição de início da aeração definida pela metodologia mencionada, as profundidades da mistura calculadas (linhas tracejada) são inferiores às profundidades obtidas experimentalmente.



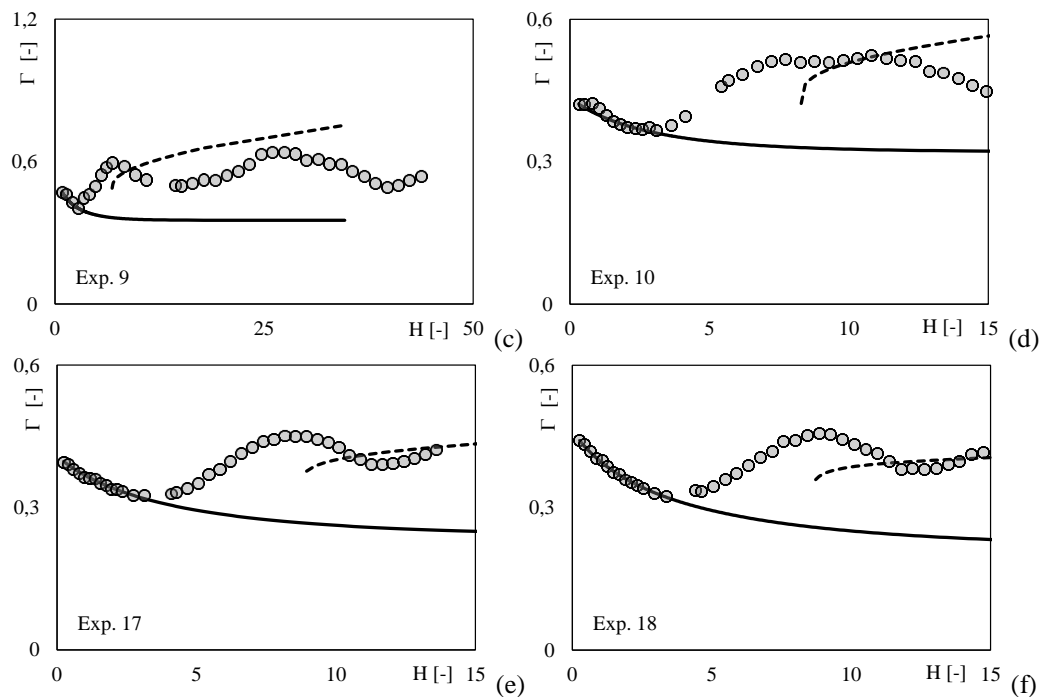


Figura 8.4 – Previsão da forma do perfil bifásico e comparação com os resultados experimentais.

Os experimentos 3, 5, 9 e 10, apresentados na Figura 8.4, sugerem também que o método de previsão fornece profundidades sobrestimadas em relação aos dados experimentais. Os experimentos 17 e 18 indicam soluções mais próximas dos pontos experimentais, porém, com oscilações em torno delas devido à forma do perfil experimental.

Como discutido ao longo desta tese, sobretudo na revisão bibliográfica, o fator de resistência é alterado com a entrada de ar no escoamento. Deste modo, as previsões anteriores podem ser modificadas com o uso de valores de f variados. Para tanto seria necessário conhecer a função que define o fator de resistência ao longo do escoamento, a partir do ponto de início da aeração. Uma alternativa aproximada consistiria em empregar as formulações existentes, que relacionam os valores de f dos escoamentos monofásico e bifásico, obtidas para o escoamento uniforme como funções da fração de vazios média. Se o fator de resistência diminui com a entrada de ar, as profundidades equivalentes apenas de água também diminuem e, como consequência, os perfis bifásicos previstos (Figura 8.4) devem ser formados por profundidades menores.

8.3 Constantes presentes na formulação proposta para o fator de resistência

8.3.1 Cálculo a partir de dados de diferentes fontes

A primeira avaliação realizada com a equação proposta para o fator de resistência (equação 7.80, do item 7.4.3 do Capítulo 7) envolveu o uso de dados de diferentes autores, listados na legenda da Figura 8.5. Nesta figura são apresentadas as curvas obtidas com $\kappa_1 = 8$ e $\kappa_2 = 1,0$,

para canais em degraus e $\kappa_1 = 25$ e $\kappa_2 = 4,0$, para canais lisos. Como mencionado na revisão bibliográfica, estes resultados foram apresentados por Simões, Schulz e Porto (2010a), que também sugeriram um modelo mais simples e prático, que relaciona f com o número de Froude F_1 presente na formulação completa. A equação 8.8 representa esta proposta, sendo complementada pelas seguintes constantes de ajuste: $\Omega_1 = 1,66$ e $\Omega_2 = 1,23$ para estruturas em degraus, válidas para $4,01 \leq F_1 \leq 11,16$, e $\Omega_1 = 0,393$ e $\Omega_2 = 1,22$, para canais lisos, válidas para $5,78 \leq F_1 \leq 12,9$. Os coeficientes de correlação entre os valores de f calculados com a equação completa e o ajuste dado pela equação 8.8 resultaram iguais a 0,97 e 0,98 para vertedores em degraus e lisos, respectivamente.

$$f = \Omega_1 F_1^{-\Omega_2} \quad (8.8)$$

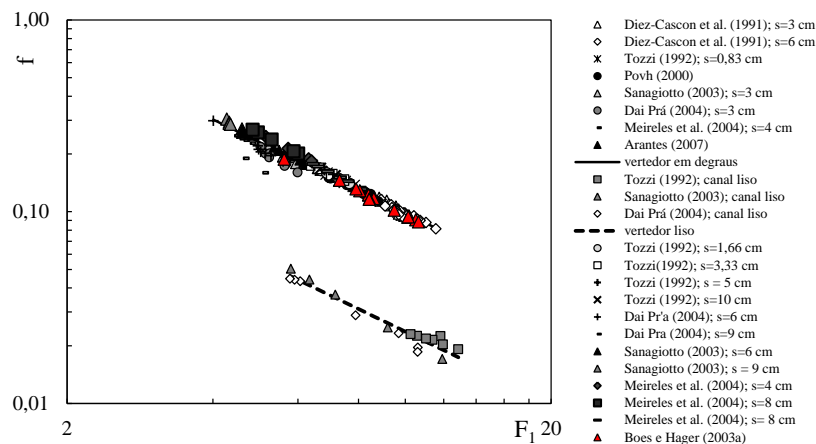


Figura 8.5 – Primeira avaliação da equação deduzida para o fator de resistência, com as constantes calculadas a partir de dados experimentais de diferentes autores (citados na legenda). Fonte: Simões Schulz e Porto (2010a).

8.3.2 Cálculos realizados com o uso dos dados experimentais

Antes de apresentar os resultados obtidos a partir de cálculos efetuados com os dados experimentais, considera-se válido definir novamente cada um dos termos presentes no modelo sugerido, reescrito a seguir (com $h_c = h_0$):

$$f = -\frac{4\Delta h}{\kappa_1 \Delta x} + \sqrt{\left(\frac{4\Delta h}{\kappa_1 \Delta x}\right)^2 + \frac{64}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{\text{sen} \alpha}{F_1^4} \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \left(\text{sen} \alpha + \frac{\Delta h}{\Delta x}\right)} \quad (7.80)$$

A equação anterior foi desenvolvida para um volume de controle com uma entrada denotada pelo subscrito “0” e uma saída representada pelo subscrito “1”. Para uso com os dados referentes ao modelo físico desta pesquisa, adotou-se $h_0 = h(0)$, e não igual a h_c como realizado no item anterior. Δx é a distância, paralela ao pseudo-fundo, entre h_0 e h_1 . Deste

modo, as definições necessárias para uso da equação e cálculo das constantes são: $\Delta h = h_0 - h_1$, $\Delta x = x_1 - x_0$ e $F_1 = \sqrt{h_c^3 / h_1^3}$.

Foi possível obter os resultados apresentados na Figura 8.6 empregando as definições apresentadas e com o uso dos pontos experimentais obtidos com medições ao longo do escoamento monofásico. Nesta figura também é apresentada a curva gerada pela potência definida pela equação 8.8. As constantes obtidas foram $\kappa_1 = 8$ e $\kappa_2 = 1,0$, assim como no item anterior. Estes valores permitiram calcular o fator de resistência entre 0,066 e 0,35, limites próximos dos limites apresentados na Tabela 8.1. As constantes da potência foram $\Omega_1 = 1,66$ e $\Omega_2 = 1,82$, com coeficiente de correlação entre os valores originais e calculados com a equação 8.8 igual a 0,97. Cabe mencionar que apenas Ω_2 foi alterado, sendo igual a 1,48 vezes o valor anterior. Os resultados obtidos estão vinculados ao intervalo $2,37 \leq F_1 \leq 5,67$.

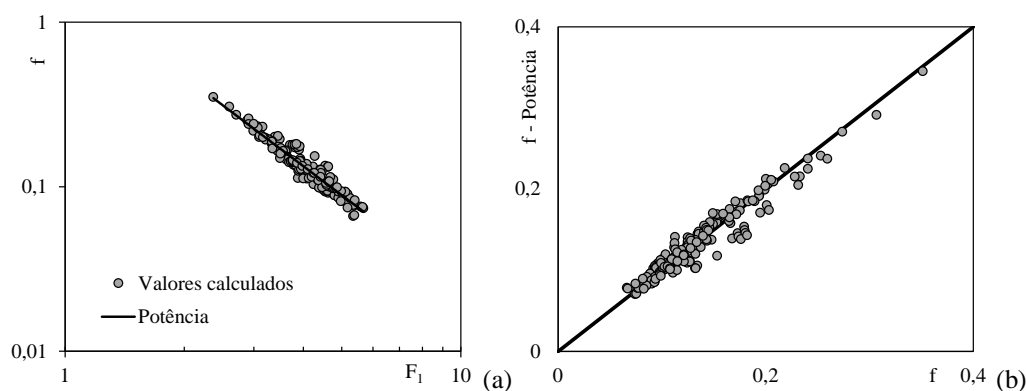


Figura 8.6 – Resultados obtidos para o fator de resistência calculado com dados experimentais, modelo proposto e curva obtida com a equação 8.8 (a); comparação entre os pontos gerados com a equação 7.80 (f), equação 8.8 (Potência) e a reta de ajuste perfeito.

8.3.3 Cálculos realizados com o uso dos dados numéricos

Os primeiros experimentos numéricos analisados foram SF 1.1 a SF 1.7. Os dados possibilitaram o cálculo do fator de resistência, tendo sido obtidos $\kappa_1 = 32$ e $\kappa_2 = 1,0$. Estes são os números que produzem o menor espalhamento dos pontos (F_1, f) e que resultam em $0,053 < f < 0,33$, para $2,58 \leq F_1 \leq 9,51$. A Figura 8.7 contém as curvas obtidas e os pontos calculados. Nota-se que a aproximação simplificada por meio de uma potência apresentou excelente concordância com os valores calculados com a equação completa, como ilustrado pela Figura 8.7b. O coeficiente de correlação resultou igual à unidade e as constantes da equação 8.8 são: $\Omega_1 = 1,2$ e $\Omega_2 = 1,39$.

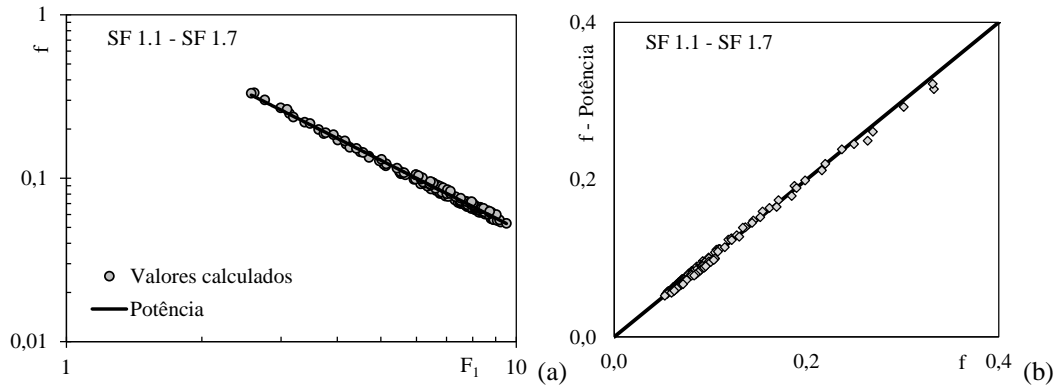


Figura 8.7 - Resultados obtidos para o fator de resistência calculado com dados numéricos (SF 1.1-SF 1.7), modelo proposto e curva obtida com a equação 8.8 (a); comparação entre os pontos gerados com a equação 7.80 (f), equação 8.8 (Potência) e a reta de ajuste perfeito.

A mudança de declividade de 1V:0,75H para 1V:1V não alterou os valores das constantes $\kappa_1 = 32$ e $\kappa_2 = 1,0$, mas levou a um melhor ajuste para a potência com $\Omega_1 = 1,1$ e $\Omega_2 = 1,4$, com coeficiente de correlação igual a um. A Figura 8.8 contém os resultados desta análise. Os intervalos associados a ela são: $0,057 < f < 0,33$ e $2,40 \leq F_1 \leq 8,28$.

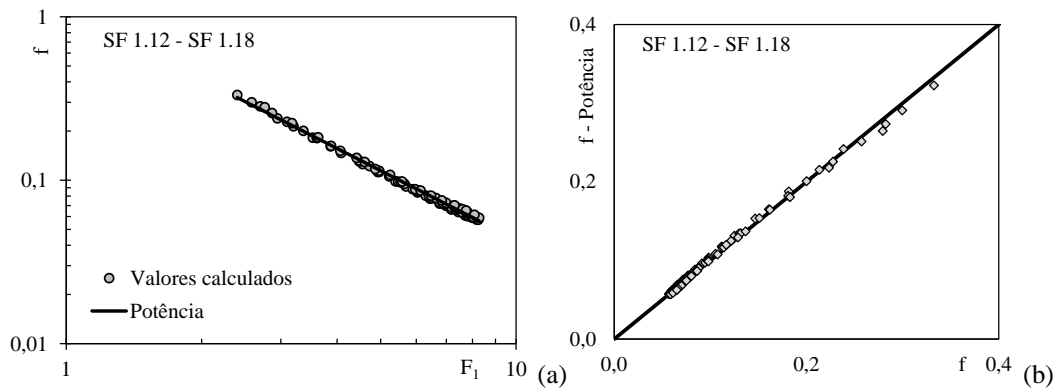


Figura 8.8 – Resultados obtidos para o fator de resistência calculado com dados numéricos (SF 1.12-SF 1.18), modelo proposto e curva obtida com a equação 8.8 (a); comparação entre os pontos gerados com a equação 7.80 (f), equação 8.8 (Potência) e a reta de ajuste perfeito.

Os resultados obtidos para $\alpha=31^\circ$, com os dados das simulações SF 1.19 a SF 1.25, levaram a um melhor ajuste com o uso das mesmas constantes κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 = 32$ e $\kappa_2 = 1,0$). A Figura 8.9 contém comparações semelhantes às apresentadas anteriormente. As constantes Ω_1 e Ω_2 resultaram iguais a 0,84 e 1,44, respectivamente, com coeficiente de correlação unitário. Estes resultados são válidos para $2,22 \leq F_1 \leq 6,0$ e correspondem a $0,064 < f < 0,28$.

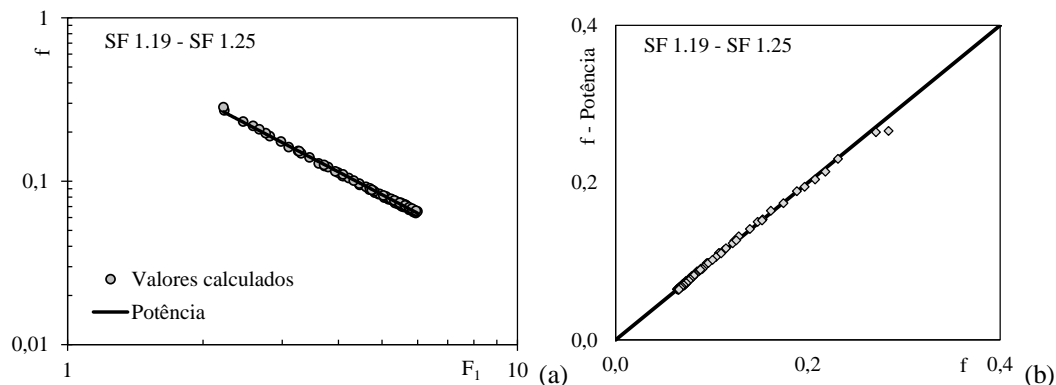


Figura 8.9 – Resultados obtidos para o fator de resistência calculado com dados numéricos (SF 1.19-SF 1.25), modelo proposto e curva obtida com a equação 8.8 (a); comparação entre os pontos gerados com a equação 7.80 (f), equação 8.8 (Potência) e a reta de ajuste perfeito.

As constantes obtidas para $\alpha=11,31^\circ$ foram diferentes das anteriores, com os seguintes valores: $\kappa_1 = 4,5$, $\kappa_2 = 1,0$, $\Omega_1 = 0,64$ e $\Omega_2 = 1,34$ (com coeficiente de correlação igual a 0,99). Os resultados obtidos com estas constantes podem ser vistos na Figura 8.10, que está atrelada aos seguintes intervalos: $0,061 < f < 0,24$ e $2,14 \leq F_1 \leq 5,68$. A Tabela 8.4 contém uma síntese dos resultados obtidos, com os valores das constantes e demais informações.

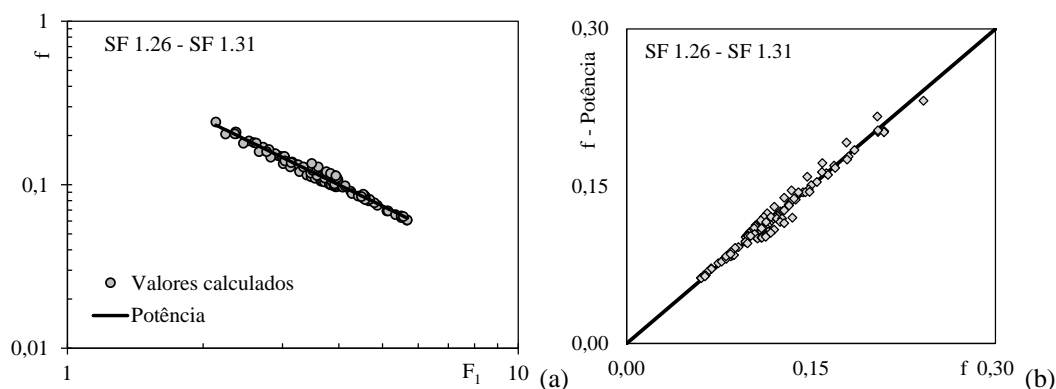


Figura 8.10 – Resultados obtidos para o fator de resistência calculado com dados numéricos (SF 1.26-SF 1.31), modelo proposto e curva obtida com a equação 8.8 (a); comparação entre os pontos gerados com a equação 7.80 (f), equação 8.8 (Potência) e a reta de ajuste perfeito.

Tabela 8.4 – Síntese dos resultados obtidos para o fator de resistência com os dados numéricos

α	κ_1	κ_2	Ω_1	Ω_2	f	F_1	R	Simulações
	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	
$53,13^\circ$	32	1,0	1,2	1,39	0,053-0,33	2,58-9,51	1,0	SF 1.1-SF 1.7
45°	32	1,0	1,1	1,4	0,057-0,33	2,40-8,28	1,0	SF 1.12-SF 1.18
31°	32	1,0	0,84	1,44	0,064-0,28	2,22-6,0	1,0	SF 1.19-SF 1.25
$11,31^\circ$	4,5	1,0	0,64	1,34	0,061-0,24	2,14-5,68	0,99	SF 1.26-SF 1.31

8.4 Comprimento de transição para o escoamento bifásico

8.4.1 Primeiro equacionamento baseado nas leis de conservação – Parte 1

O primeiro modelo proposto para o comprimento de transição é composto por duas equações algébricas não lineares com dez constantes de ajuste. A quantidade de constantes, embora grande, foi justificada ao longo da dedução apresentada, desenvolvida a partir das leis de conservação escritas com a forma integral. Para encontrar os valores das constantes foi necessário minimizar os erros quadráticos entre valores medidos e experimentais ao mesmo tempo em que era solucionado o sistema de equações formado pelas duas equações do modelo matemático (equações 7.94 e 7.110). A Figura 8.11 contém os valores de L/k .

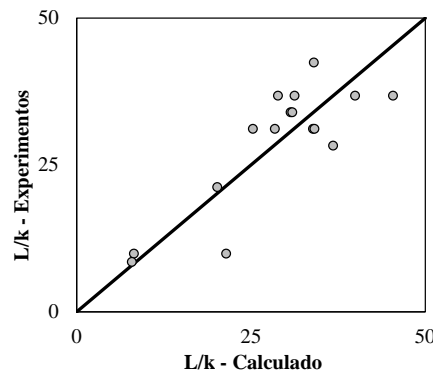


Figura 8.11 – Comparação entre dados experimentais e valores calculados com as equações 7.94 e 7.110.

Como resultados foram obtidos os seguintes valores: $\omega_0=0,78$, $\omega_1=1,49$, $\omega_2=0,456$, $\omega_3=1,22$, $\omega_4=0,629$, $\omega_5=0$, $\beta_1=1,03$, $\alpha_{c1}=1$, $K=0,295$ e $f=0,0198$. Embora tenha sido obtido coeficiente de correlação igual a 0,84, para os dados da Figura 8.11, observa-se certo espalhamento dos pontos. O coeficiente de correlação para o adimensional escolhido inicialmente, $L^* = L/h_1$, resultou inferior a 0,6.

8.4.2 Analogia com as leis básicas – Parte 2

As equações 7.114 e 7.115 tiveram as suas constantes calculadas a partir dos dados experimentais originais para o comprimento de transição. As constantes obtidas foram: 1) Equação 7.114: $\omega_0/\dot{C} = 290,7$, $\omega_1/(2\dot{C}) = -2290,1$ e coeficiente de correlação igual a 0,90; 2) Equação 7.115: $\theta_1 = 789,12$, $\theta_2 = -976,5$, $\theta_3 = -10610,5$, $\theta_4 = 17265,15$, $\theta_5 = 0,192$ e coeficiente de correlação igual a 0,98. As Figuras 8.12a e 8.12b comparam os resultados experimentais com os valores teóricos do adimensional L/k calculados com as referidas equações. Observa-se que as equações mais simples produziram resultados superiores em relação aos apresentados no item anterior. A equação 7.115, cujos resultados encontram-se na Figura 8.12b, mantêm características semelhantes com a equação 7.114, mas com cinco

constantes de ajuste, o que possibilitou a obtenção de uma dispersão menor em relação aos resultados da Figura 8.12a.

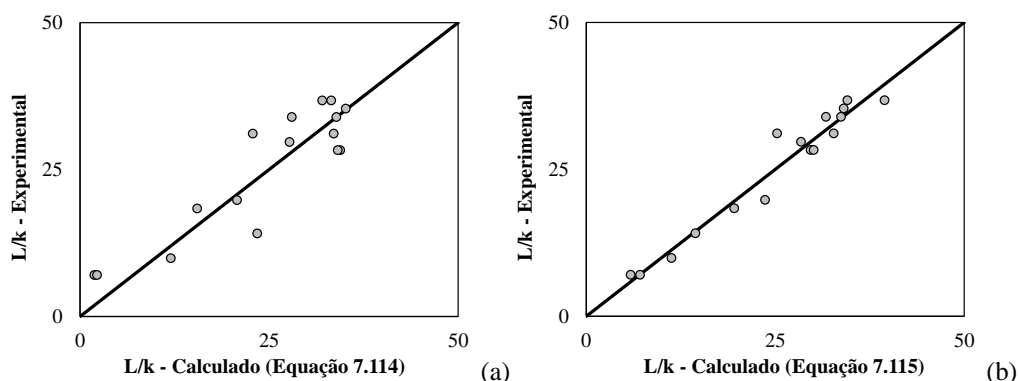


Figura 8.12 – Comparação entre valores experimentais de L/k e valores calculados.

8.4.3 Resultados para o comprimento de transição total, entre h_1 e h_3

A equação 7.127, proposta para o cálculo do comprimento entre as seções com profundidades h_1 e h_3 , possui três constantes de ajuste. Utilizando os dados experimentais foram obtidos os seguintes resultados: $\varpi_1 = 51,8$, $\varpi_3 = -93,63$ e $\varpi_5 = -0,00554$. Estes valores correspondem a um coeficiente de correlação entre dados experimentais e calculados igual a 0,91 e com distribuição dos pontos formados entre valores medidos e calculados como aquela apresentada na Figura 8.13a. Utilizando os mesmos dados, porém com adimensionais L°/k , o coeficiente de correlação é igual a 0,92. A comparação entre valores de L°/k é apresentada na Figura 8.13b.

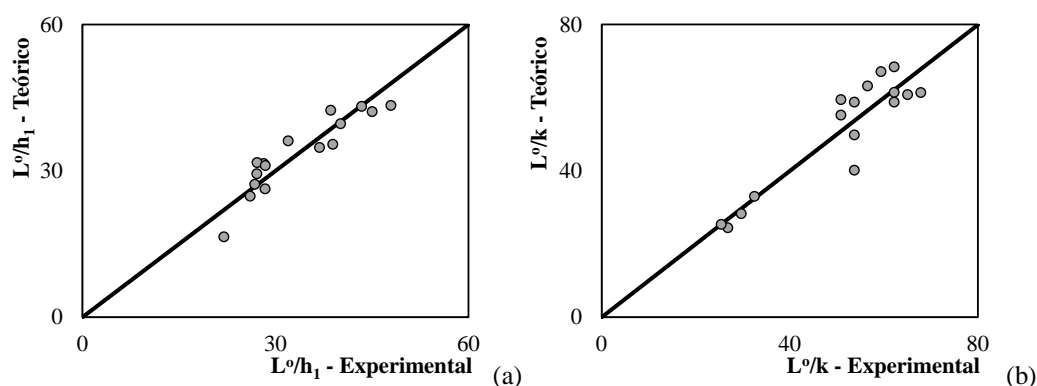


Figura 8.13 – Comparação entre valores medidos e calculados para L°/h_1 (a) e L°/k (b).

8.5 Análise da formulação integral para camada limite

8.5.1 Aplicação para o cálculo de L_A e L_A^* com dados experimentais

No Capítulo 7 foi proposta uma formulação para o cálculo do comprimento L_A , necessário para que se inicie a aeração superficial, definido como a posição a partir da qual a espessura

da camada limite coincide com h (como é usual na literatura). A equação 7.148 é o resultado final da dedução, reescrito a seguir:

$$\frac{L_A}{k} = c_{14} Fr_k^2 \ln | c_{15} h_{A^*}^{c_9} Re_k^{c_4} Fr_k^{-2} + 1 | \quad (7.148)$$

em que $Fr_k = V_\infty / \sqrt{g k \sin \alpha}$, $h_{A^*} = h_A / k$ e $Re_k = V_\infty k / \nu$.

Nota-se que é necessário adotar um valor apropriado para a velocidade do escoamento potencial, V_∞ , considerada constante por simplificação. O valor escolhido foi q/h_c , ou seja, a velocidade crítica. Para o primeiro caso, ou seja, para o cálculo de L_A , as constantes assumiram os seguintes valores: $c_4=0,513$, $c_9=c_4+1$, $c_{14}=2,53$ e $c_{15}=-0,0617$. Para L_A^* (extrapolação para estruturas sem comportas, considerando o comprimento de transição), os resultados foram: $c_4=0,972$, $c_9=c_4+1$, $c_{14}=1$ e $c_{15}=-1$. A comparação entre teoria e experimentação para este caso é apresentada na Figura 8.14(a,b), com coeficientes de correlação iguais a 0,94 e 0,96, respectivamente.

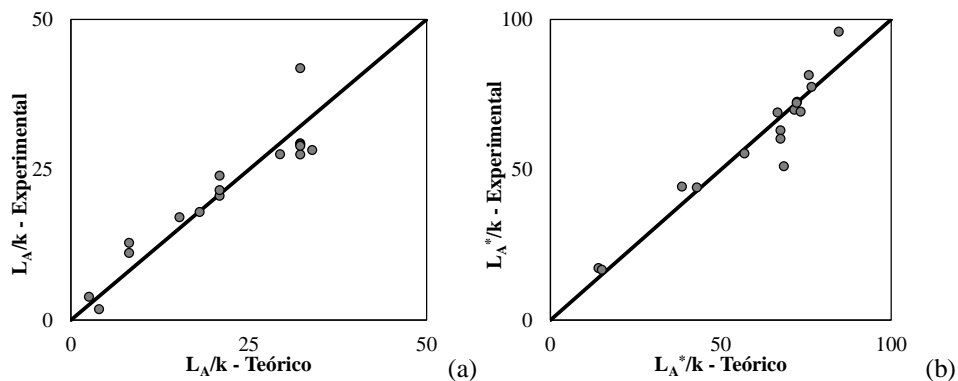


Figura 8.14 – Comparações entre valores medidos e calculados de L_A/k e L_A^*/k .

A constante c_3 resultou igual a 16,21 para o cálculo de L_A . Já o valor encontrado na formulação proposta por Blasius é igual a 0,0225. A constante $c_4=0,513$ e a constante equivalente a esta, proposto por Blasius é igual a 0,25. Isto significa que a tensão de cisalhamento utilizada na formulação, que representa os efeitos dissipativos, é muito maior no problema com canal inclinado e com o fundo em degraus em relação à geometria da placa plana horizontal. Assumindo $c_1=1$, pode-se calcular $c_2=0,41$, que é um número maior que a potência $1/7$. Este resultado é próximo do valor calculado por Qian *et al.* (2009), igual a $1/3$. Estes autores utilizaram o modelo multifásico de mistura e o modelo de turbulência Realizable $k-\varepsilon$. O ajuste realizado para L_A^* resultou em $c_2=0,36$, valor mais próximo da potência $1/3$. Além dos aspectos relacionados ao fenômeno, que sugerem maiores tensões de cisalhamento no vertedor em degraus em relação a uma placa plana lisa, cabe destacar que as

constantes foram obtidas de forma indireta, ou seja, não foram medidas tensões ou perfis de velocidades.

8.5.2 Aplicação aos dados numéricos

Os resultados numéricos apresentados no capítulo 6 foram utilizados para avaliar os valores das constantes presentes na formulação apresentada. Concluiu-se que as constantes dependem do ângulo α , como indicado na Tabela 8.5. A disposição dos pontos formados pelas constantes e α indica que há uma inversão no sinal, com a ocorrência de máximos para c_4 e c_{15} e mínimo para c_{14} . Sugere-se que, para ângulos intermediários, seja realizada interpolação linear. A Figura 8.15 compara os pontos numéricos e calculados com a reta de ajuste perfeito, indicando o bom ajuste do modelo aos dados simulados.

Tabela 8.5 – Constantes calculadas a partir dos resultados das simulações numéricas.

α	c_4	c_{14}	c_{15}	Fr_k	$Re_k \times 10^{-6}$	R	Simulações
	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	
53,13°	0,345	5,27	-0,1855	2,17-3,96	1,32-2,39	0,99	SF 1.1-SF 1.7
45°	0,612	1,54	-0,0715	2,13-4,27	1,55-3,11	0,99	SF 1.12-SF 1.18
31°	0,706	2,24	-0,0011	2,27-4,54	1,88-3,77	0,99	SF 1.19-SF 1.25
11,31°	0,223	5,53	-0,769	3,44-6,25	2,15-3,91	0,96	SF 1.26-SF 1.31

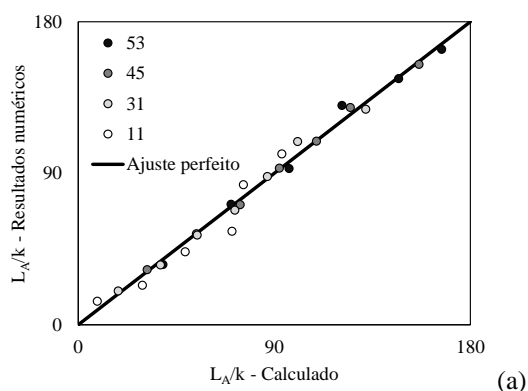


Figura 8.15 – Comparação entre os resultados numéricos e os valores calculados com a formulação semi-empírica para camada limite (Notação: 53= α =53,13°, 45= α =45°, 31= α =31° e 11= α =11,31°).

8.6 Comparação entre os resultados experimentais, numéricos e dados da literatura

A Figura 8.16a contém dados experimentais obtidos neste trabalho, curva geradas com as equações empíricas dos autores citados na legenda, dados numéricos de Arantes (2007), a curva obtida com a equação 3.30 (ver Capítulo 3) e os resultados numéricos para todos os ângulos (uma vez que foi constatada independência com α). Observa-se que os resultados numéricos situaram-se um pouco abaixo dos demais. Os resultados numéricos para a posição

de início da aeração correspondentes a $1V:1H$ e $1V:0,75H$ podem ser vistos na Figura 8.16b. Nota-se que houve uma excelente concordância com a maior parte dos demais resultados apresentados.

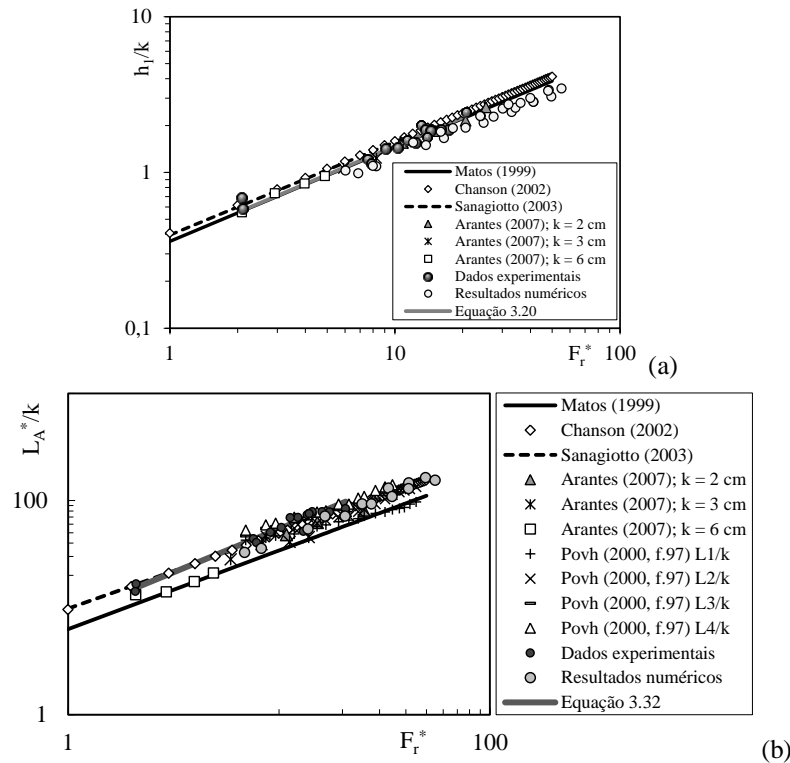


Figura 8.16 – Comparação entre dados experimentais, numéricos e de outros autores: (a) Comparação relacionada às profundidades no início da aeração e (b) comparação relacionada à posição de início da aeração para vertedores sem comportas.

8.7 Comprimento de ressalto hidráulicos a jusante de vertedores em degraus

8.7.1 Considerações iniciais

Existem diferentes definições para o comprimento do ressalto hidráulico. Como consequência de diversos estudos realizados ao longo de quase um século, há variadas formulações empíricas para o cálculo do comprimento do ressalto e do comprimento do rolo do ressalto. Elevatorski (1959, p.31) apresenta quinze equações de referências diferentes para o comprimento do ressalto, dentre as quais a mais antiga é a de Riegel e Beebe (1917)¹, citado por Elevatorski (1959). Segundo Hager *et al.* (1990), o primeiro estudo sistemático sobre o comprimento do rolo do ressalto é atribuído a Safranez (1929). Bakhmeteff e Matzke (1936) definiram o final do ressalto como a posição onde o perfil da superfície livre alcança a sua altura máxima e onde a curva ascendente do escoamento em expansão (confinado entre o

¹ Riegel, R.M.; Beebe, J.C. (1917). The hydraulic jump as a means of dissipating energy. Miami Conservancy District Tech. Rep., part III.

fundo do canal e rolo) coincide com a superfície e passa a decair em direção ao escoamento gradualmente variado subsequente. Esta definição conduziu a comprimentos maiores que os comprimentos dos rolos dos ressaltos. Schröder (1963), citado por Hager *et al.* (1990), determinou o comprimento do rolo visualizando a superfície livre. Como mencionado por Hager *et al.* (1990), tal procedimento envolve a decisão pessoal para escolha do comprimento uma vez que a superfície livre está em constante movimento devido às ondas. Malik (1972), citado no trabalho de Hager *et al.* (1990), empregou uma sonda de medições de força ligeiramente imersa no escoamento e movida axialmente até que a força fosse anulada.

8.7.2 Definição do comprimento do ressalto com o auxílio de quantidades estatísticas

Os trabalhos mencionados no parágrafo anterior são alguns exemplos de definições empregadas ao longo dos anos para o comprimento do ressalto e do rolo do ressalto hidráulico. Marques *et al.* (1997) apresentaram resultados de estudos experimentais que empregaram transdutores de pressão ao longo do fundo de um canal horizontal, onde foram estabelecidos ressaltos hidráulicos com números de Froude entre 4,9 e 9,3. A partir dos sinais obtidos com os transdutores, foram calculados coeficientes de assimetria e de curtose. Os referidos autores concluíram que o coeficiente de curtose assume valor três e se torna praticamente independente da posição a partir de $x/(y_2-y_1)=8,5$. Com base neste resultado, Marques *et al.* (1997) definiram o fim do ressalto hidráulico e, portanto, o seu comprimento, $L_{js}=8,5(y_2-y_1)$, em que y_1 =conjugado supercrítico e y_2 =conjugado subcrítico. O fim do rolo do ressalto também foi estudado por estes autores, que apresentaram a seguinte relação: $L_r=6,0(y_2-y_1)$. Com base nos resultados experimentais de Marques *et al.* (1997) e no resultado obtido com o sensor ultrassônico empregado nesta pesquisa, considera-se adequado o uso de uma função com a forma apresentada a seguir:

$$\frac{L_{js}}{y_2} = cb \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{-1} \right] \quad (8.9)$$

em que L_{js} = comprimento do ressalto definido com quantidades estatísticas, cb é um número real, igual a 8,5, de acordo com o trabalho de Marques *et al.* (1997), para medições realizadas com transdutores de pressão instalados no fundo do canal, ou 9,5 para $Fr_1=3$ (correspondente às medições de flutuações da posição da superfície livre, obtidas neste trabalho).

Se for empregada a equação clássica que relaciona y_2/y_1 com Fr_1 , (Equação 8.10) pode-se reescrever a equação 8.9 em função de Fr_1 . Uma segunda alternativa mais adequada consiste em utilizar os pontos experimentais apresentados por Marques *et al.* (1997). Deste

modo, ao estabelecer uma relação entre L_{js}/y_2 e y_2/y_1 , torna-se possível comparar os resultados clássicos de Peterka (1984), para bacias de dissipação por ressalto hidráulico Tipo I, com aqueles correspondentes às medições de pressões no fundo. A equação 8.11, com coeficiente de correlação próximo da unidade, corresponde ao ajuste obtido a partir dos dados de Marques *et al.* (1997). A Figura 9.17a contém uma comparação entre os dados medidos e os valores calculados com a equação 8.11. Substituindo a equação 8.11 na equação 8.9 com $cb=8,5$ o resultado é a equação 8.12. Este modelo empírico foi utilizado para compor a Figura 8.17b, que ilustra também os dados experimentais de Peterka (1984), curvas para diferentes valores de cb (calculadas com a equação 8.13) e a equação de Simões (2008), $L_{jp}/y_2=(Fr_1^2-81,85Fr_1+61,13)/(-0,62-10,71Fr_1)$, que se ajusta aos dados de Peterka (1984).

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad (8.10)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = 1,4Fr_1^{0,94} \quad (8.11)$$

$$\frac{L_{js}}{y_2} = 8,5 \left(1 - \frac{1}{1,4Fr_1^{0,94}} \right) \quad (8.12)$$

$$\frac{L_{js^*}}{y_2} = cb \left(1 - \frac{2}{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1} \right) \quad (8.13)$$

L_{js^*} é o comprimento do ressalto calculado com a equação 8.13, obtida pela combinação das equações 8.9 e 8.10 (o * é empregado para diferenciá-la da equação 8.12, que é o resultado da combinação entre as equações 8.9 e 8.11).

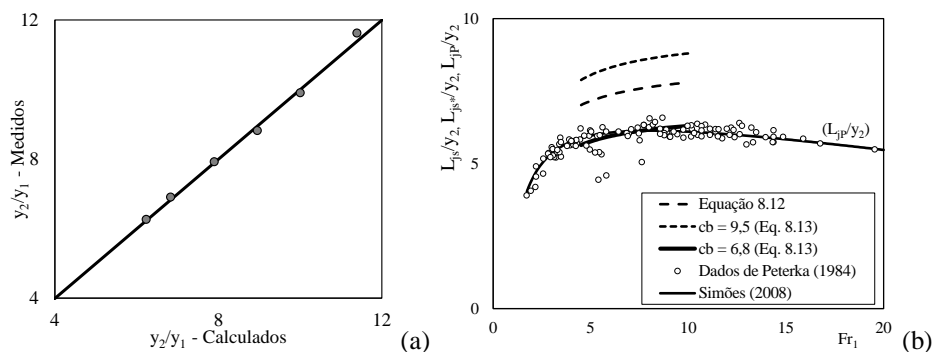


Figura 8.17 – (a) Comparação entre valores medidos e calculados com a equação 8.11, correspondentes ao adimensional y_2/y_1 , e obtida com os dados de Marques *et al.* (1997); (b) Comparação entre os pontos experimentais de Peterka (1984), a equação proposta por Simões (2008), equação 8.12 (obtida a partir do trabalho de Marques *et al.*, 1997) e equação 8.13.

Como ilustrado pela Figura 8.17b, a curva obtida com a equação 8.13 requer um valor de $cb = 6,8$ para se aproximar dos dados de Peterka (1984). Este número corresponde aproximadamente à equação proposta por Simões (2008), também utilizada por Simões,

Schulz e Porto (2010a). A solução para $cb = 9,5$ está vinculada ao fim do decaimento da intensidade turbulenta junto à superfície livre e também foi apresentada para o intervalo correspondente a números de Froude entre 4,5 e 10. Esta curva apenas ilustra mais uma possibilidade e deve ser verificada experimentalmente para este intervalo de Fr_1 , uma vez que foi obtida para $Fr_1=3,0$.

8.7.3 Comprimento do ressalto hidráulico a jusante de vertedores em degraus

O número de Froude pode ser escrito em função de $\Gamma=h/h_c$ com a seguinte forma:

$$Fr = \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2} = \Gamma^{-3/2} \quad (8.14)$$

Com esta igualdade e considerando $y_1=h(z)$, as equações 8.11 e 8.12 possibilitam obter

$$\frac{L_{js}}{z} = \frac{8,5}{H} (1,4\Gamma^{-0,41} - \Gamma) \quad (8.15)$$

Observa-se que com a equação 8.15 é possível estabelecer curvas formadas por L_{js}/z e $H=z/h_c$ se forem conhecidos os pontos (H, Γ) . As equações 8.10, 8.14 e a equação de Simões (2008), que se ajusta aos dados de Peterka (1984), resultam em:

$$\frac{L_{jP}}{z} = \frac{\Gamma}{H} \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+8\Gamma^{-3}} - 1 \right) \left(\frac{\Gamma^{-3} - 81,85\Gamma^{-3/2} + 61,13}{-0,62 - 10,71\Gamma^{-3/2}} \right) \quad (8.16)$$

As equações 8.15 e 8.16 foram utilizadas para calcular os comprimentos do ressalto definidos por elas com os resultados numéricos obtidos para (H, Γ) com o intuito de verificar o acréscimo decorrente do uso da equação 8.15, que considera a invariância das quantidades estatísticas calculadas a partir das pressões medidas no fundo da bacia. A Figura 8.18 contém os resultados obtidos para as simulações SF 1.1 a SF 1.7. Junto com os pontos são apresentadas as curvas obtidas, representadas pelas equações 8.17 e 8.18, com coeficientes de correlação unitários. As equações 8.17 e 8.18 são válidas para $4,50 \leq Fr_1 \leq 9,51$ e $3,30 \leq H \leq 77,33$.

$$\frac{L_{js}}{z} = \frac{9,49}{H^{0,07093 \ln(H) + 0,5514}} \quad (8.17)$$

$$\frac{L_{jP}}{z} = \frac{7,63}{H^{0,083 \ln(H) + 0,4849}} \quad (8.18)$$

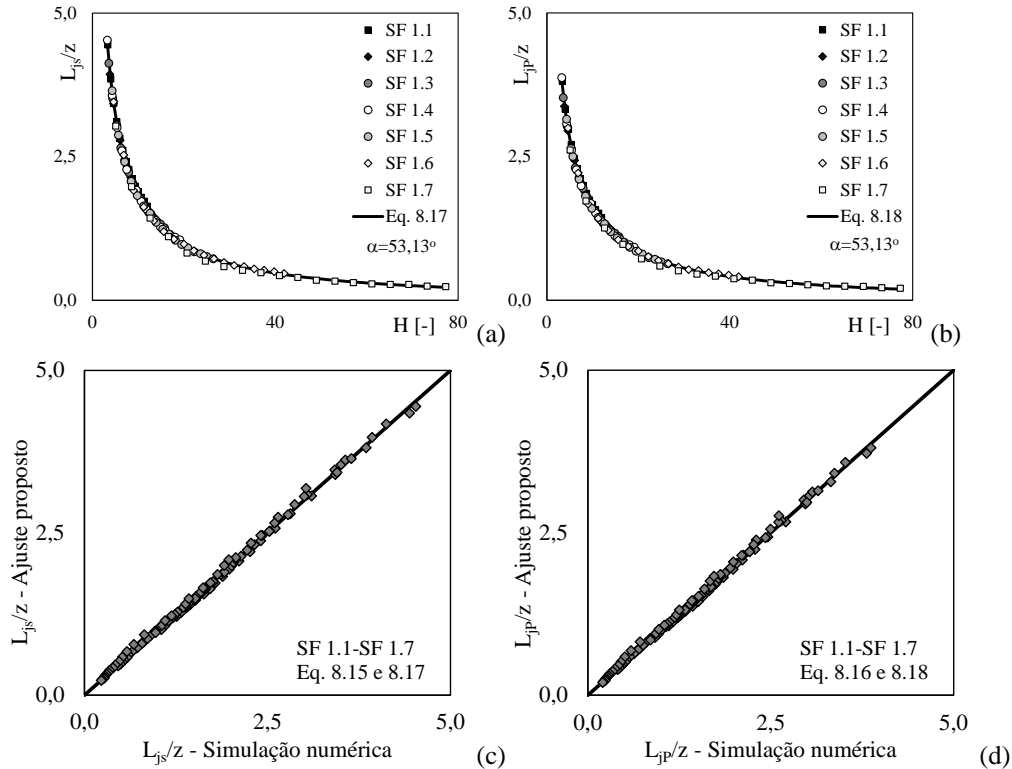


Figura 8.18 – L_{jp}/z e L_{jp}/z em função de $H (=z/h_c)$ para os experimentos numéricos SF 1.1 a SF 1.7 ($\alpha=53,13^\circ$): (a) Valores calculados com a equação 8.15 (comprimento do ressalto de acordo com Marques *et al.*, 1997); (b) Valores calculados com a equação 8.16 (comprimento do ressalto de acordo com Peterka, 1984); (c, d) comparação entre dados numéricos e calculados com as equações 8.17 e 8.18.

A relação entre os valores calculados com a equação 8.15 e a equação 8.16 assumiu valor máximo igual a 1,17 e mínimo igual a 1,138, com a distribuição apresentada na Figura 8.19. A Figura 8.20 contém os dados calculados com o uso das soluções numéricas para $\alpha=45^\circ$. Como pode ser observado, a aplicação das equações 8.17 e 8.18 também é apropriada para este ângulo. Os desvios máximo e mínimo obtidos para $\alpha=45^\circ$ com as duas metodologias resultaram iguais aos calculados para $1V:0,75H$, *i.e.*, 1,17 e 1,138. Considerando $\alpha=45^\circ$, as equações 8.17 e 8.18 são válidas para $4,56 \leq Fr_1 \leq 8,28$ e $3,39 \leq H \leq 34,09$.

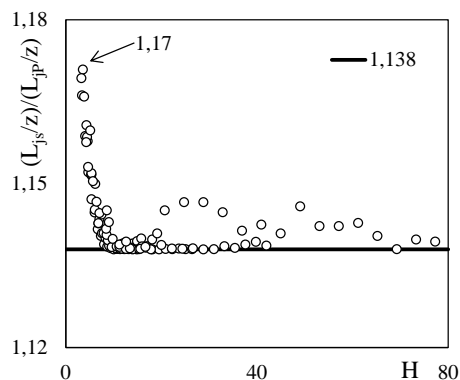


Figura 8.19 – Comparação entre os valores calculados com a equação 8.15 e equação 8.16.

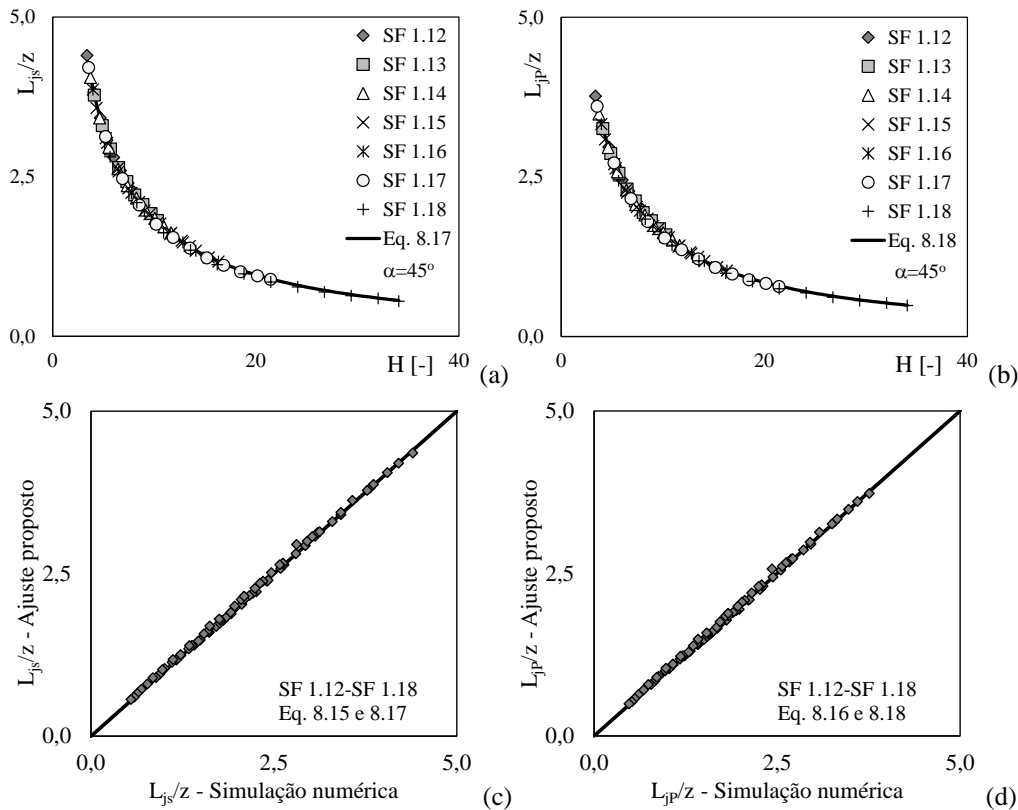
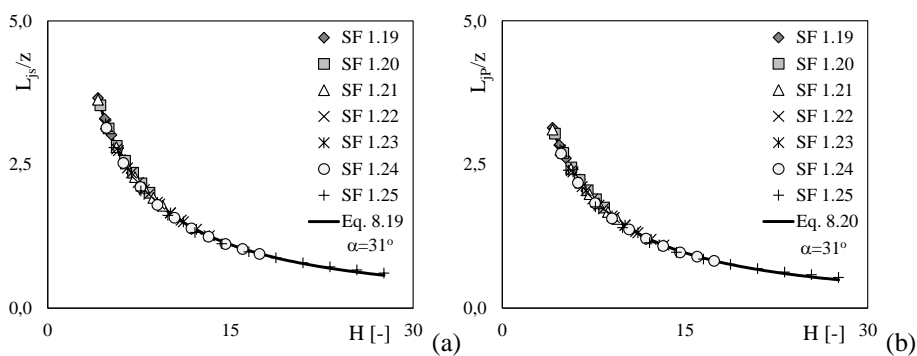


Figura 8.20 – L_{js}/z e L_{jp}/z em função de H para os experimentos numéricos SF 1.12 a SF 1.18 (1V:1H): (a) Valores calculados com a equação 8.15 (comprimento do ressalto de acordo com Marques *et al.*, 1997); (b) Valores calculados com a equação 8.16 (comprimento do ressalto de acordo com Peterka, 1984); (c, d) comparação entre dados numéricos e calculados com as equações 8.17 e 8.18.

Os resultados numéricos obtidos para $\alpha=31^\circ$ possibilitaram o cálculo de novas constantes, apresentadas a seguir nas equações 8.19 e 8.20. Os coeficientes de correlação para estas equações resultaram iguais a um e a distribuição dos pontos numéricos em relação às curvas propostas e resultados calculados com elas pode ser vista na Figura 8.21. As equações 8.19 e 8.20 são válidas para $4,61 \leq Fr_1 \leq 5,99$ e $4,13 \leq H \leq 27,6$.

$$\frac{L_{js}}{z} = \frac{9,81}{H^{0,08363 \ln(H) + 0,5795}} \tag{8.19}$$

$$\frac{L_{jp}}{z} = \frac{7,81}{H^{0,09817 \ln(H) + 0,5073}} \tag{8.20}$$



(continua na próxima página)

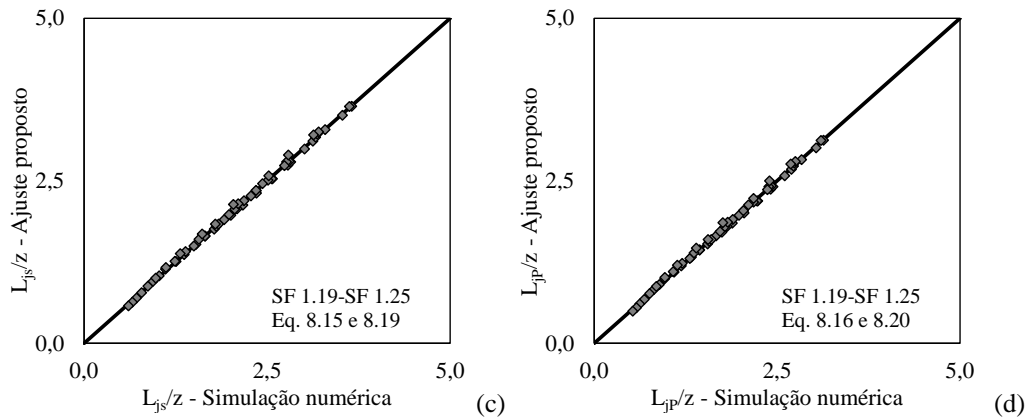
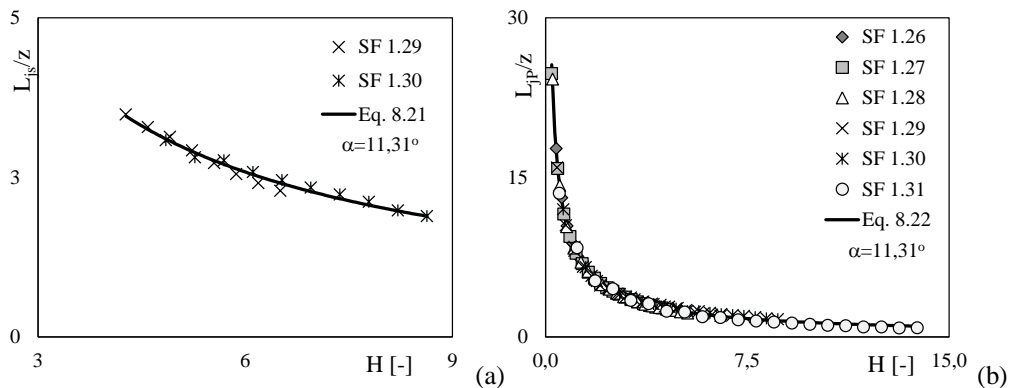


Figura 8.21 – L_{js}/z e L_{jp}/z em função de H para os experimentos numéricos SF 1.19 a SF 1.25 ($\alpha=31^\circ$): (a) Valores calculados com a equação 8.15 (comprimento do ressalto de acordo com Marques *et al.*, 1997); (b) Valores calculados com a equação 8.16 (comprimento do ressalto de acordo com Peterka, 1984); (c, d) comparação entre dados numéricos e calculados com as equações 8.19 e 8.20.

Ao simular os escoamentos no canal com $\alpha=11,31^\circ$ o máximo número de Froude obtido resultou igual a 5,68. As equações obtidas para interpolação dos dados são apresentadas a seguir e possuem coeficientes de correlação iguais a 0,99 e 1,0. A equação 8.21, correspondente ao comprimento definido com base nas pressões junto ao fundo, foi obtida para dados das simulações SF 1.29 e SF 1.30, com $4,53 \leq Fr_1 \leq 5,68$ e $4,27 \leq H \leq 8,63$. Os pontos que a geraram podem ser vistos na Figura 8.22a e a Figura 8.22c compara os valores originais com os interpolados. O mesmo foi feito com a segunda metodologia, tendo sido obtida a equação 8.22 e as Figuras 8.22b e 8.22d. A equação 8.22 está atrelada ao intervalo $1,75 \leq Fr_1 \leq 5,68$ e $0,23 \leq H \leq 13,82$.

$$\frac{L_{js}}{z} = \frac{12,03}{H^{0,8583}} \tag{8.21}$$

$$\frac{L_{jp}}{z} = \frac{8,77}{H^{0,02459n(H)+0,7603}} \tag{8.22}$$



(continua na próxima página)

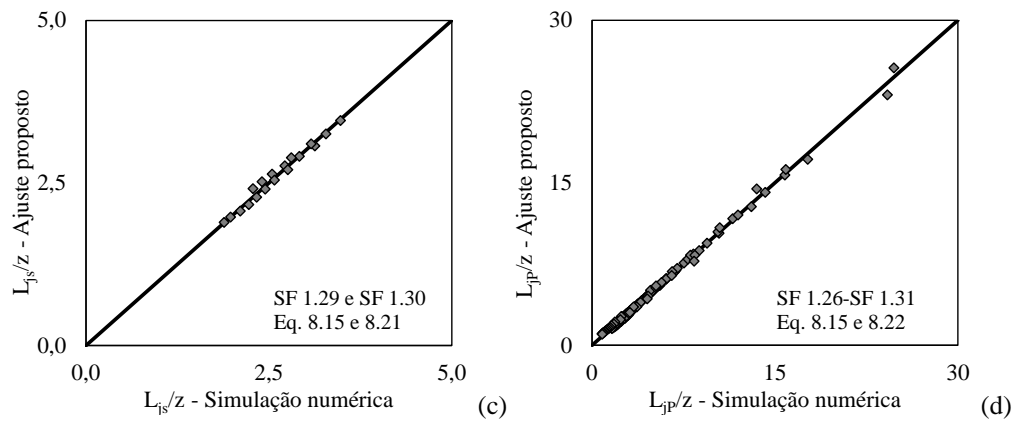


Figura 8.22 – L_{js}/z e L_{jp}/z em função de H para os experimentos numéricos SF 1.26 a SF 1.31 ($\alpha=11,31^\circ$): (a) Valores calculados com a equação 8.15 (comprimento do ressalto de acordo com Marques *et al.*, 1997); (b) Valores calculados com a equação 8.16 (comprimento do ressalto de acordo com Peterka, 1984); (c, d) comparação entre dados numéricos e calculados com as equações 8.21 e 8.22.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E REFERÊNCIAS

Sumário

9.1 Conclusões	423
9.2 Referências.....	428

9.1 Conclusões

As decorrências dos assuntos tratados neste trabalho foram descritas ao longo do texto junto aos desenvolvimentos apresentados. Sintetizando-as de forma ordenada neste item, é possível evidenciar as conclusões expostas a seguir.

O Capítulo 2 contém a revisão bibliográfica sobre os estudos relacionados aos vertedores em degraus de forma direta e inclui itens secundários, mas com grande importância devido à aplicação aos escoamentos em canais de extravasores, como a descrição sobre a cavitação, por exemplo. Com este capítulo foi possível vislumbrar o estado atual do conhecimento sobre o tema, incluindo o modo de classificação empregado para os tipos de escoamentos, as geometrias adotadas até então, as quantidades medidas em canais em degraus e os diferentes pontos de vista adotados para abordar o problema com o uso de métodos experimentais e teóricos, que incluem as simulações numéricas. Pôde-se perceber que a instrumentação empregada para estudos em vertedores em degraus é composta por ferramentas clássicas, como pontas para medições da posição da superfície livre e tubos de Pitot para obtenção de velocidades, além de instrumentos sofisticados, como sensores eletrônicos de pressão, sondas para obtenção de fração de vazios, velocimetria por imagem de partícula e filmadoras com alta velocidade de aquisição de imagens. Foi observado também que há estudos numéricos que utilizaram diferentes modelos de turbulência e modelos para representação do escoamento multifásico. Entre todos os textos, notou-se que as pesquisas são elaboradas para declividades específicas, mas com algumas exceções que apresentaram resultados mais amplos, envolvendo canais com diferentes ângulos entre o pseudofundo e a horizontal. O texto é um apanhado dos principais resultados existentes, organizados de forma a compor um corpo coerente para o entendimento do presente estudo e para futuros pesquisadores, representando uma contribuição neste tema em língua portuguesa;

O tema central do terceiro capítulo é o uso de um sensor ultrassônico de deslocamento para obtenção da posição da superfície livre. Concluiu-se que o sensor empregado possibilita obter excelentes dados experimentais, levando em conta as suas características e os demais detalhes vinculados à metodologia exposta. A posição média da superfície livre para a maior parte dos experimentos e até o início da aeração superficial é decrescente, com o padrão S_2 previsto pela teoria. O final deste perfil é claramente identificado pelo início do crescimento das profundidades médias, tendo sido definido como o início da aeração superficial. A posição de início da aeração definida desta forma pôde ser bem relacionada com adimensionais como F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$ com o uso de potências. Esta conclusão sobre a forma da função concorda com os resultados propostos na literatura, desde os estudos sobre

vertedores lisos. As medidas foram realizadas em um canal controlado por uma comporta em sua extremidade inicial e grande parte dos estudos apresentados por outros autores corresponde a vertedores sem comportas. Isto levou ao uso de uma extrapolação semelhante à empregada por Boes (2000) para que os dados fossem então comparados aos de outros autores. Concluiu-se que a maior parte dos resultados experimentais extrapolados de tal maneira se aproxima dos dados de outros autores, mas situam-se um pouco abaixo da maioria dos pontos utilizados na comparação. Ao identificar a existência do comprimento de transição entre a última seção de água essencialmente deaerada e a máxima profundidade e somá-lo ao comprimento necessário para que se inicie a aeração superficial, verificou-se que os pontos experimentais deste trabalho foram reunidos entre os demais. Esta análise também levou à conclusão de que as posições desta soma, medidas conforme descrito, (e após a extrapolação descrita) correspondem de forma muito aproximada à posição definida por Boes (2000) e Boes e Hager (2003b) de início da aeração de fundo (*bottom inception point*, na terminologia dos autores citados), onde há 1% de ar junto ao fundo. Já as profundidades médias no início da aeração superficial, ou seja, os valores no final do perfil S_2 , situaram-se muito próximas dos pontos propostos por outros autores quando comparada a sua relação com F_r^* . Os perfis médios ondulados, como exposto no Capítulo 3, também levaram à identificação de profundidades características que estão bem correlacionadas entre si e com F_r^* , $h(0)/k$ e $Re(0)$. As últimas conclusões extraídas dos resultados medidos com ultrassom têm como base as quantidades estatísticas obtidas a partir dos sinais das profundidades e de suas derivadas temporais. A partir das intensidades turbulentas, números de Strouhal, coeficiente de assimetria e coeficientes de curtose foi possível identificar diferentes regiões de crescimento e decaimento. Tais regiões indicam o início do aumento da intensidade turbulenta junto à superfície livre devido à entrada de ar, sendo observado claramente um pico em todos os casos. A jusante deste ponto de máximo há decaimentos cujas posições finais coincidem. Isto levou à definição da posição final do decaimento das quantidades estatísticas junto à superfície e, após analisar esta posição em comparação aos dados de outros autores sobre a ocorrência do escoamento uniforme, concluiu-se que o seu uso é adequado como metodologia de identificação da ocorrência do escoamento uniforme. Além disto, os sinais permitiram a obtenção de profundidades máximas e boas correlações com grandezas que possibilitam o seu uso prático para as condições experimentais empregadas. Concluiu-se também que as intensidades turbulentas máximas são proporcionais à velocidade crítica de acordo com uma lei de potência. Outros resultados e conclusões acerca do uso dos sensores acústicos foram obtidos ao aplicar este instrumento para a medição da posição da superfície livre de um

ressalto hidráulico. Do mesmo modo, verificou-se a ocorrência de regiões de decaimento de quantidades estatísticas, tendo sido definida a posição final de decaimento e o comprimento do ressalto hidráulico com base em tal posição. Os dados do equipamento utilizado foram, portanto, explorados de forma bastante completa e original, o que não foi observado em outros estudos com tal dispositivos;

Os capítulos 4 e 5 constituem uma revisão direcionada ao tema em tela acerca dos princípios fundamentais da mecânica dos fluidos, transição e turbulência. Eles antecedem os textos sobre simulações numéricas dos escoamentos e desenvolvimentos teóricos propostos, sendo necessários como revisão das bases que compõem a metodologia adotada para a segunda parte da tese. O ponto de vista empregado para a realização das simulações numéricas foi o euleriano. Com esta abordagem, os primeiros resultados inéditos do Capítulo 6 são comparações entre os pontos experimentais do perfil S_2 obtido com o Exp. 18 e soluções numéricas calculadas com diferentes modelos de turbulência. Concluiu-se que o modelo $k-\varepsilon$ é uma boa opção para simular a posição média da superfície livre do escoamento monofásico. Entre os modelos testados há uma opção ainda mais simples (e menos onerosa computacionalmente) que é o modelo sem equações. Entretanto, optou-se pelo uso do modelo $k-\varepsilon$ como uma alternativa intermediária entre o modelo sem equações e os modelos mais avançados (e mais custosos) como o RNG $k-\varepsilon$ e o modelo de tensões de Reynolds SSG. Além disto, a revisão da literatura indicou que o modelo $k-\varepsilon$ conduz a soluções próximas de resultados experimentais para a posição da superfície livre, como pode ser visto em Bombardelli *et al.* (2010). Uma simulação tridimensional do referido experimento também indicou excelente concordância entre os pontos experimentais e numéricos calculados com $k-\varepsilon$ para a região monofásica. Cabe destacar que nesta fase também foram testados os modelos homogêneo e não-homogêneo para representação do escoamento bifásico (não o escoamento da mistura de ar e água, mas o escoamento monofásico de água e ar, separados pela interface, que é a superfície livre). Para malhas uniformes e refinadas como aquelas empregadas neste trabalho, concluiu-se que os modelos produzem interfaces com espessuras semelhantes. Para malhas grosseiras, o modelo homogêneo calcula interfaces mais espessas do que o modelo heterogêneo. Deste modo, considera-se que a opção escolhida é apropriada para simulação da posição média da superfície livre do escoamento a montante do início da aeração. A segunda parte dos resultados do Capítulo 6 contém as soluções obtidas em domínios com dimensões de protótipos. Concluiu-se que as posições de início da aeração definidas com a igualdade entre a espessura da camada limite e a profundidade do escoamento se comportam de acordo

com uma composição de uma potência com uma função logarítmica em relação ao número de Froude F_r^* . Nesta função foi inserido o ângulo α , dando um caráter geral à formulação para as condições simuladas. As profundidades na posição de início da aeração não apresentaram dependência com o referido ângulo e puderam ser bem relacionadas com F_r^* por meio de uma única potência. Os adimensionais h_A/L_A e L_A/k também foram relacionados, tendo sido obtidas excelentes correlações com o uso de potências diferentes.

As conclusões finais foram extraídas do Capítulo 8, que reúne os resultados experimentais, numéricos e as proposições teóricas. O primeiro item trata da solução analítica para o perfil da superfície livre em comparação aos dados experimentais e numéricos. Concluiu-se que a solução unidimensional tendo como constante de ajuste o fator de resistência apresenta excelente concordância com os dados experimentais e numéricos. As comparações com os dados experimentais indicaram haver dependência do fator de resistência com $Re=q/v$ e s/h_c . Esta conclusão reforça a hipótese de que um único valor para o fator de resistência é suficiente para ajustar bem o modelo analítico aos dados medidos uma vez que tais adimensionais são constantes na integração da equação diferencial ordinária. Os dados numéricos e a solução para um canal largo indicam que o fator de resistência está relacionado com k/h_c , $k=scos\alpha$, por meio de potências para os diferentes ângulos α . No item seguinte é discutida a metodologia de previsão do perfil bifásico em comparação aos dados experimentais. Concluiu-se que não há boa concordância entre a forma ondulada do perfil médio experimental e a curva crescente calculada com o método descrito, havendo regiões com valores superestimados e sobrestimados. A formulação proposta para o fator de resistência permitiu reunir os dados de diversos pesquisadores por meio de uma fórmula mais simples, uma potência, com valores de f em função do número de Froude. O mesmo foi possível para os dados experimentais e numéricos. Entre os modelos propostos para o cálculo do comprimento de transição, aquele com caráter semi-empírico resultante da formulação baseada em analogia com as leis básicas foi o que resultou em melhores ajustes. O equacionamento apresentado para o comprimento entre h_1 e h_3 também forneceu excelentes resultados em relação aos dados experimentais. A formulação integral proposta para a camada limite foi comparada aos dados experimentais e numéricos, tendo sido encontradas excelentes correlações e pouca dispersão dos dados em relação ao modelo. Os dados experimentais, numéricos e os resultados apresentados por diferentes autores referentes ao início da aeração foram comparados. As profundidades no início da aeração obtidas numericamente situaram-se um pouco abaixo dos demais dados. Já os pontos correspondentes à posição de início da

aeração formaram uma distribuição estabelecida entre a maior parte dos dados empregados nas comparações. O último item é uma breve discussão sobre a definição do comprimento do ressalto hidráulico e a sua influência no comprimento da bacia de dissipação a jusante dos vertedores em degraus simulados numericamente. Foi possível concluir que o uso das metodologias de Peterka (1984) e Marques *et al.* (1997) levam a resultados diferentes. O comprimento definido com base nas quantidades estatísticas obtidas com os sinais de transdutores de pressão instalados ao longo do fundo da bacia de dissipação podem ser 17% maiores que o comprimento definido com os resultados clássicos de Peterka (1984).

Além das proposituras comentadas acima, cabe destacar o último desenvolvimento do Capítulo 7, relacionado à reoxigenação da água em escoamento no canal em degraus. Foi sugerido um modelo para avaliar o coeficiente de reoxigenação, K_2 , em vertedores em degraus. A relação básica considerada inclui este coeficiente, a taxa de dissipação de energia por unidade de massa e a altura de escoamento. Trata-se de uma equação que envolve potências, como foi tratado classicamente pelos diversos autores citados. Uma vez que foram medidas intensidades turbulentas junto à superfície livre, assumiu-se isotropia para turbulência, calculando-se a energia cinética turbulenta. O uso da equação clássica que relaciona esta grandeza com a taxa de dissipação de energia e de uma relação linear entre a escala integral e a altura de escoamento levou a um coeficiente de reoxigenação adimensional cujo comportamento foi avaliado. Concluiu-se que, com os expoentes utilizados, tal adimensional segue aproximadamente a distribuição da energia cinética turbulenta ao longo do canal. Em seguida, baseado no trabalho de Schulz (1990), incluiu-se a altura de rugosidade dos degraus na formulação. Os dados experimentais de Chanson (2002) puderam ser aproximados por uma função matematicamente análoga à função analítica que envolve K_2 . Isto possibilitou a comparação entre os seus dados experimentais e os dados experimentais deste trabalho com a inclusão do adimensional z/h_c , com o expoente médio para a altura de escoamento (obtido com base nos trabalhos dos diferentes autores citados) e o expoente 1/4 para a taxa de dissipação de energia deduzido por Schulz (2001). A sobreposição dos pontos de Chanson (2002) aos deste trabalho indica que o procedimento clássico fundamentado na teoria estatística da turbulência, associado às considerações propostas, conduz a excelentes resultados.

9.2 Referências

Capítulos 1, 2 e 3.

A

AKSOY, S.; ETHEMBABA OGLU, S. (1979). Cavitation damage at the discharge channels of Keban Dam. *Comissão Internacional de Grandes Barragens*. Q. 50, R. 21, ICOLD, New Delhi.

AMADOR, A.; SÁNCHEZ-JUNY, M.; DOLZ, J.; (2009). Developing flow region and pressure fluctuations on steeply sloping stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.135, n.12, p.1092-1100, December.

ANDRÉ, S., MANSO, P.A., SCHLEISS, A. AND BOILLAT, J.L. (2003). “Hydraulic and Stability Criteria for the Rehabilitation of Appurtenant Spillway Structures by Alternative Macro-roughness Concrete Linings”. *Proceedings of the 21st ICOLD Congress, Montreal, Canada*, Q. 82, R. 6, pp. 63–93.

ANDRIOLLO, F. R. (1998). *The use of roller compacted concrete*. São Paulo: Oficina de Textos, 554 p.

_____. (2002). **RCC brasilian practices**. São Paulo: Oficina de Textos, 95 p.

ARANTES, E. J. (2007). **Caracterização do escoamento sobre vertedouros em degraus via CFD**. 206 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ARANTES, E. J.; PORTO, R. M. (2005). **Simulação do escoamento sobre vertedouros em degraus via CFD**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 16, 2005, João Pessoa, **Anais...** Porto Alegre: ABRH: 2005. 18p.

AUBIN, L.; LEFEBVRE, D.; McNEIL, N.; STOIAN, A. (1979). *Les evacuateurs de crue des aménagements hydroélectriques LG 2 et LG 1 du complexe La Grande*. *Comissão Internacional de Grandes Barragens*. Q. 50, R. 8, ICOLD, New Delhi.

B

BAUER, W.J. (1954). Turbulent boundary layer on steep slopes. *Transactions, ASCE*, Vol. 119, Paper No 2719, pp. 1212-1232.

BERNOULLI, J. (1743) *Hydraulics*. Dover Publications (2005), Obra publicada junto com o livro *Hydrodynamics* de Daniel Bernoulli.

BIRD, ; STEWART ; LIGHTFOOT, (2002) *Transport phenomena*. J. Wiley.

BLAKE, F.G. (1949). The onset of cavitation in liquids. *Acoustics Res. Lab., Harvard Univ., Tech. Memo. No. 12*

BOES, R. (2000). Zweiphasenströmung und Energieumsetzung an Grosskaskaden. 309 f. Tese (Doutorado) – Instituto Federal Suíço de Tecnologia - Laboratório de Hidráulica, Hidrologia e Glaciologia, Zurich.

BOES, R. M.; HAGER, W. H. (2003a). Hydraulic design of stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.129, n.9, p.671-679, Sep..

BOES, R.M.; HAGER, W.H. (2003b). Two-Phase flow characteristics of stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.129, n.9, p.661-670, 2003b.

BOMBARDELLI, F.A.; MEIRELES, I.; MATOS, J. (2010). Laboratory measurements and multi-block numerical simulations of the mean flow and turbulence in the non-aerated skimming flow region of steep stepped spillways. *Environ. Fluid Mech.*, Vol.11(3), pp.263-288. Publisher: Springer Netherlands (DOI 10.1007/s10652-010-9188-6).

BRENNEN, C. (1995). *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press.

BRODKEY, R.S. (1967). *The phenomena of fluid motions*. Dover/Brodkey Publishing, 737 p.

BUSCAGLIA, G.C. (2004). *Mecánica de Fluidos. Notas de clase*, Instituto Balseiro, Comisión Nacional de Energía Atómica, Universidad Nacional de Cuyo, pp.57.

C

CAIN, P.; WOOD, I.R. (1981). Instrumentation for aerated flow on spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**, Vol. 107, No HY11.

CAROSI, G.; CHANSON, H. (2006). **Air-water time and length scales in skimming flows on a stepped spillway. Application to the spray characterization**. The University of Queensland, Brisbane, Austrália.

CARVALHO, P.D. (1997). *Aeração de Escoamentos de Alta velocidade em Canais de Forte Declividade*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - São Paulo.

CARVALHO, R.F.; MARTINS, R. (2009). Stepped Spillway with Hydraulic Jumps: Application of a Numerical Model to a Scale Model of a Conceptual Prototype. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.135, No.7, p.615-619, July.

CHAMANI, M. R. (2000). Air inception in skimming flow regime over stepped spillways. In. H. E. Minor e W. H. Hager (Ed.) **International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways**, Zürich, Switzerland: 61-67. Balkema, 2000.

CHAMANI, M. R.; RAJARATNAM, N. (1994). Jet flow on stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.120, n.2, p.254-259, Feb, 1994.

CHAMANI, M. R.; RAJARATNAM, N. (1999a) Characteristic of skimming flow over stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.125, n.4, p.361-368, April.

CHAMANI, M. R.; RAJARATNAM, N. (1999b) Onset of skimming flow on stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.125, n.9, p.969-971, Sept, 1999b.

CHANSON, H. (1993). Stepped spillway flows and air entrainment. **Canadian Journal of Civil Engineering**. v.20, n.3, p.422-435, Jun, 1993.

_____. (1994a). Hydraulics of nappe flow regime above stepped chutes and spillways. **Journal of Hydraulic Research**, v.32, n.3, p.445-460, Jan., 1994a.

_____. (1994b). Comparison of energy dissipation between nappe and skimming flow regimes on stepped chutes. **Journal of Hydraulic Research, IAHR, Delft**, v.32, n.2, p.213-218, Oct., 1994b.

_____. (1994c). **Hydraulic design of stepped cascades, channels, weirs and spillways**. Pergamon Oxford, 1994d.

_____. (1996). **Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows**. Academic Press, San Diego, California, 1996.

_____. (2001). Hydraulic design of stepped spillways and downstream energy dissipation. **Dam Engineering**, v.11, n.4, p.205-242, 2001.

_____. (2002). **The hydraulics of stepped chutes and spillways**. The Netherlands: A. A. Balkema Publishers. 384 p.

_____. (2004). **The Hydraulics of open channel flow: an introduction**. Oxford: Elsevier, 2004. 585 p.

CHANSON, H.; TOOMBES, L. (2004). Hydraulics of stepped chutes: the transition flow. **Journal of Hydraulic Research, IAHR** v.42, n.1, p.43-54, Jun., 2004.

CHEN, Q.; DAI, G.; LIU, H. (2002). Volume of fluid model for turbulence numerical simulation of stepped spillway overflow. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.128, n.7, p.683-688, July, 2002.

CHEN, QUN; GUANG-QING, DAI; HAO-WU, LIU. (2002). Numerical simulation for the stepped spillway overflow with turbulence model. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 2, 58-63. China Ocean Press, Beijing.

CHEN, QUN; GUANG-QING, DAI; ZHU, FEN-QING; QING, YANG. (2004). Three-dimensional turbulence numerical simulation of a stepped spillway overflow. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 1, 74-79. China Ocean Press, Beijing.

CHINNARASRI, C.; WONGWISES, S. (2004). Flow regime and energy loss on chutes with upward inclined steps. **Canadian Journal of Civil Engineering**. v.31, p.870-879, Oct..

CHINNARASRI, C.; WONGWISES, S. (2006). Flow patterns and energy dissipation over various stepped chutes. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**, v.132, n.1, p.70-76, Jan/Feb.

CHOW, V.T. (1959). **Open channel hydraulics**. New York: McGraw-Hill.

CHRISTODOULOU, G. C. (1993). Energy dissipation on stepped spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.119, n.5, p.644-650, May..

CREAGER, W. P. (1917). **Engineering of Masonry dams**. John Wiley & Sons: New York, 1917.

D

DAI PRÁ, M. (2004). **Características do escoamento sobre vertedouros em degraus de declividade 1V:1H**. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DER (1991) Taludes de rodovias: orientação para diagnóstico e soluções de seus problemas. Manual de Geotecnia. Departamento de Estradas de Rodagens do Estado de São Paulo.

DIEZ-CASCON, J. *et al.* (1991). Studies on the hydraulic behavior of stepped spillways. **Water Power & Dam Construction**, v.43, n.9, p.22-26, Sept..

DONG, Z.; LEE, J.H.; (2006). Numerical simulation of skimming flow over mild stepped channel. **Journal of Hydrodynamics**. Ser.B, 2006, 18(3): 367-371.

DRYDEN, H.L.; KUETHE, A.M. (1930). Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., n. 342.

E

ELLIS, A.T. (1953). Observations on cavitation bubble collapse. Tese (Doutorado), California Institute of Technology.

ELVIRO GARCÍA, V.; MATEOS IGUACEL, C. (1995). Aliviaderos escalonados. Diseño de la transición entre al umbral y la rapida escalonada. Ingeniería Civil, n.99.

EHRENBERGER, R. (1926). Flow of Water in Steep Chutes with Special Reference to Self-Aeration. Translated by E.F. Wilsey from “Wasserbewegung in Steilen Rinnen (Schusstennen) mit besonder Berücksichtigung der Selbstbeluftung”, Österreichischer Ingenieur—und Architektverein, No. 15/16 and 17/18.

ESSERY, I.T.S.; HORNER, M.W. (1978). **The hydraulic design of stepped spillways**. 2a ed London: Construction Industry Research and Information Association, 1978. 45p. (Ciria Report 33)

F

FALVEY, H.T. (1990). Cavitation in chutes and spillways. Engineering Monograph N° 42. Bureau of Reclamation, Denver, Colorado.

FRIZELL, K.H. (1992). Stepped overlays can protect your embankment dam during overtopping. **Water Resources Researches Laboratory**. Reports/USBR, Denver, Colorado. Disponível no endereço eletrônico:

http://www.usbr.gov/pmts/hydraulics_lab/damsafety/steps/reports/hr96art.html#N_1_

Último acesso em 03/10/2011, às 13h 55min.

FRIZELL, K.H. (2006). Research state-of-the-art and needs for hydraulic design of stepped spillways. **Water Resources Researches Laboratory**. Denver, Colorado, Junho.

FRIZELL, K.H.; MATOS, J.; PINHEIRO, A.N. (2000). Design of concrete stepped overlay protection for embankment dams. In: H. E. Minor e W. H. Hager (Ed.) **International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways**, Zürich, Switzerland: 179-86. Balkema.

FROST, D.L. (1985) Effects of ambient pressure on the instability of a liquid boiling explosively at the superheat limit. Tese (Doutorado), California Institute of Technology.

G

GARCÍA, V.E.; IGUACEL, C. M. (1995). Aliviaderos escalonados. Diseño de la transición entre al umbral y la rapida escalonada. *Ingeneria Civil*, n.99.

GOMES, J.F. (2006). **Campo de pressões: condições de incipiência à cavitação em vertedouros em degraus com declividade 1V:0,75H**. 161 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GONZALEZ, C.A.; CHANSON, H. (2008). Turbulence and cavity recirculation in air-water skimming flows on stepped spillway. **Journal of Hydraulic Research**, v.46, n.1. p.65-72, 2008.

H

HAGER, W.H. (1991). Uniform aerated chute flow. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.117, n.4, p.528-533.

HAGER, W.H. (1995). Cascades, drops and rough channels. In.: VISCHER, D.L.; HAGER, W.H. (Ed.). **Energy dissipators IAHR, Hydraulics Structures Design Manual**. v.9, p.151-165, Rotterdam, Netherlands.

HAGER, W.H.; BREMEN, R.; KAWAGOSHI, N. (1990). Classical hydraulic jump: length of roller. **Journal of Hydraulic Research**. v. 28, p. 591-608, 1990.

HAGER, W.H.; BLASER, F. (1998). Drawdown curve and incipient aeration for chute flow. **Canadian Journal of Civil Engineering**. v.25, p.467-473, 1998.

HARVEY, E.N.; MCELROY, D.; WHITELEY, A.H. (1947). On cavity formation in water. *Journal of Applied Physics*. Vol.18, Feb..

HENDERSON, F. M. (1966). **Open Channel Flow**. New York: MacMillan, 1966.

HINZE, J.O. (1959). Turbulence. McGraw-Hill, Inc. second edition, 1975 (ISBN: 0-07-029037-7).

HORNER, M.W. (1969). **An analysis of flow on cascades of steps**. 1969. Tese (Doutorado) – Universidade de Birmingham, UK.

HUNT, S.L.; KADAVY, K.C.; ABT, S.R.; TEMPLE, D.M. (2008). “Impact of Converging Chute Walls for Roller Compacted Concrete Stepped Spillways” Journal of Hydraulic Engineering. v. 134, no 7, July, p.1000-1003.

K

KANASHIRO, W. H. (1995). **Vertedores em degraus: avaliação de efeitos do espaçamento dos degraus na dissipação da energia**. 1995. 62 f. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

KANT, I. (1781). Crítica da razão pura. Martin Claret, 2003.

KELLER, R.J., LAI, K.K. and WOOD, I.R. (1974). Developing Region in Self-Aerated Flows. Journal of Hydraulic Division, ASCE, 100(HY4), 553-568.

KELLER, R.J.; RASTOGI, A.K. (1977). Prediction of flow development on spillway. Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 101, No HY9, Proc. Paper 11581, Sept..

KHATSURIA, R.M. (2005). **Hydraulic of spillways and energy dissipators**. CRC Press: Marcel Dekker, 629p.

KILLEN, J.M. (1968). The Surface Characteristics of Self Aerated Flow in Steep Channels. PhD Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
Available at <http://www.safl.umn.edu>.

KNAPP, R.T.; DAILY, J.W.; HAMMITT, F.G. (1970). Cavitation. McGraw-Hill.

KNAUSS, J. (1995). ΤΗΣ ΓΡΙΑΣ ΤΟ ΠΗΔΗΜΑ, der Altweibersprung. Die Rätselhafte Alte Talsperre in der Glosses-Schlucht bei Alyzeia in Arkarnanien. **Archäologischer Anzeiger**, 1995, Helft 5: 138-162 (in German).

KOLMOGOROV, A.N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 301-305.

L

LAMB, O.P.; KILLEN, J.M. (1950) An electrical method for measuring air concentration in flowing air-water mixtures.” Tech. Paper 2, Series B, St. Anthony Falls Hydraulics Laboratory, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

LOBOSCO, R.J.; SCHULZ, H.E. (2010). Análise computacional do escoamento em estruturas de vertedouros em degraus. Mecánica Computacional, v. XXIX, p. 3593-3600.

LOPARDO, R.A.; DE LIO, J.C.; VERNET, G.F. (1982). Physical modeling cavitation tendency for macroturbulence of hydraulic jump. In: International Conference on the Hydraulic Modelling of Civil Engineering Structures, Sept. 1982, Coventry, England. Papers ... Cranfield: BHRA Fluid Engineering, 1982, Paper C3, p.109-121.

LUEKER, M.L.; MOHSENI, O.; GULLIVER, J.S.; SCHULZ, H.E.; CHRISTOPHER, R.A. (2008). The physical model study of the Folsom Dam Auxiliary Spillway System, St. Anthony Falls Lab. Project Report 511. University of Minnesota, Minneapolis, MN.

M

MATOS, J. S.G., QUINTELA, A. C. (1995a). Flow resistance and energy dissipation in skimming flow over stepped spillways. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON WATER RESOURCES ENGINEERING, 1., 1995a, San Antonio, Texas. **Proceedings...** New York, ASCE, 1995a, v.2, p. 1121-1126.

MATOS, J. S.G., QUINTELA, A. C.. (1995b). Descarregadores de cheias em degraus: posição actual da avaliação da dissipação de energia. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 11, Recife, **Anais...** Recife: ABRH, 1995b, v. 4, p. 65-71.

MATOS, J.; QUINTELA, A. (1995c). Guidelines for the hydraulic design of stepped spillways for concrete dams. ICOLD Energy Dissipation Bull..

MATOS, J.S.G. (1999). Emulsionamento de ar e dissipação de energia do escoamento em descarregadores em degraus. Research Report, IST, Lisbon, Portugal.

MATOS, J.S.G. (2000a). Characteristics of skimming flow over stepped spillways. **Journal of Hydraulics Engineering**, v.126, n.11, p.865-869, Nov. 2000. Discussão de: CHAMANI, M. R.; RAJARATNAM, N. Characteristic of skimming flow over stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.125, n.4, p.361-368, April, 1999a.

MATOS, J.S.G. (2000b). Hydraulic design of stepped spillways over RCC dams. Proc., Int. Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways, VAW, ETH Zurich, H.-E. Minor and W.H. Hager, eds., Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 187-194.

MEIRELES, I.; MATOS, J.; MELO, J.F.. (2004). Energia específica residual do escoamento em descarregadores de cheias em degraus. Aplicação do ressalto hidráulico. 7º Congresso da Água, Associação Portuguesa dos Recursos Hídricos, 2004.

MILLAN, A. N. (1993). **Estruturas hidráulicas adaptadas a barragens de concreto compactado a rolo (CCR)**. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MINOR, H.E.; Hager, W.H. (2000). **International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways**. Zürich, Switzerland: 3-10. Balkema.

MURZYN, F.; CHANSON, H. (2009). Free-surface fluctuations in hydraulic jumps: Experimental observations. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 33, pp.1055-1064.

O

OHTSU, I.; YASUDA, Y. (1997). Characteristics of flow conditions on stepped channels. In: BIENNIAL CONGRESS, 27, San Francisco, **Anais...** San Francisco: IAHR, 1997, p. 583-588.

OHTSU, I.; YASUDA, Y. (1999). Flow resistance of skimming flows in stepped channels. Proc., 28th IAHR Congr., International Association for Hydraulic Research, Delft, The Netherlands, Session B14 (CDROM)

OHTSU I., YASUDA Y., TAKAHASHI, M. (2000). Discussion of “Hydraulics of skimming flow on modeled stepped spillways”. Dec., 2000, p.950-951. Discussão de: PEGRAM, G. G. S.; OFFICER, A. K.; MOTTRAM, S. R. (1999). Hydraulics of skimming flow on modeled stepped spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.125, n.5, p.500-510, May 1999.

OHTSU, I., YASUDA Y., TAKAHASHI, M. (2001). Onset of skimming flow on stepped spillways – Discussion. **Journal of Hydraulic Engineering**. v. 127, p. 522-524, 2001. Discussão de: CHAMANI, M. R.; RAJARATNAM, N. Onset of skimming flow on stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v. 125, n.9, p.969-971, Sept, 1999b.

OHTSU, I., YASUDA, Y., TAKAHASHI, M. (2004). Flows characteristics of skimming flows in stepped channels. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.130, n.9, p.860-869, Sept, 2004.

OLINGER, J.C. (2001). **Contribuição ao estudo da distribuição de pressões nos vertedouros em degraus**. 230 f. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

OLINGER, J.C. BRIGHETTI, G. (2004). Distribuição de Pressões em Vertedouros em Degraus. **RBRH: Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v.9, n.1, p.67-83, Jan/Mar., 2004.

P

PEGRAM, G. G. S.; OFFICER, A. K.; MOTTRAM, S. R. (1999). Hydraulics of skimming flow on modeled stepped spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.125, n.5, p.500-510, May 1999.

PETERKA, A. J. (1953). The effect of entrained air on cavitation pitting. **Joint Meeting Paper, IAHR/ASCE**, Minneapolis, Minnesota, Aug., 1953

PETERKA, A. J. (1984). **Hydraulic design of spillways and energy dissipators**. A Water Resources Technical Publication, Engineering Monograph N° 25, United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation. Denver, Colorado: eight printing, May,1984.

PEYRAS, L.; ROYET, P.; DEGOUTTE, G. (1992). Flow and energy dissipation over stepped gabion weirs. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.118, n.5, p.707-717, May..

PFISTER, M. (2008). Schussrinnenbelüfter: Lufttransport ausgelöst durch interne Abflussstruktur. Mitteilungen 203, VAW. H.-E. Minor, Hrsg. ETH Zürich.

PFISTER, M.; HAGER, W.H.; MINOR, Hans-Erwin. (2006a). Bottom aeration of stepped spillways. (**Technical Notes**) **Journal of Hydraulic Engineering**, v.132, n.8, p.850-853, Aug., 2006.

PFISTER, M.; HAGER, W.H.; MINOR, Hans-Erwin. (2006b). Stepped chutes: pre-aeration and spray reduction. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 32, p.269-284, 2006b.

PINTO, Nelson L. de S. **Noções básicas sobre cavitação e aeração em fluxos de alta velocidade: notas de aula, Agosto de 1983**. Revista latino americana de hidráulica, n.3, Maio 1988. Associação internacional de pesquisas hidráulicas (AIPH), 1988.

PINHEIRO, A. N.; FAEL, C.S. (2000). Nappe flow in stepped channels – Occurrence and energy dissipation. In. H. E. Minor e W. H. Hager (ed.) **International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways**, Zürich, Switzerland: 119-126. Balkema, 2000.

PLESSET, M.S. (1949). The dynamics of cavitation bubbles. **ASME J. Appl. Mech.**, 16, 228-231.

POGGI, B. (1949). Sopra gli scaricatori a scala di stramazzi. *L'Energia Elettrica*, 26(10), 600-604.

POGGI (1956). Lo scaricatori a scala di stramazzi (Flow in a ladder of cascades) *L'Energia Elettrica*, 33(1), 33-40.

POINCARÉ, H. (1905). *A ciência e a hipótese*. Editora Universidade de Brasília, 1984.

PORTO, R.M. (2006). **Hidráulica básica**. 4.ed. São Carlos: EESC-USP, 2006. 540p.

POVH, P.H. (2000). **Avaliação da energia residual a jusante de vertedouros em degraus com fluxos em regime skimming flow**. 142 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

POVH, P.H.; TOZZI, M.J. (2001a). **Concentração média de ar do escoamento na base de vertedouros em degraus**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 14, 2001, Aracaju, **Anais...** Porto Alegre: ABRH: 2001. 18p.

Q

QIAN, ZHONGDONG; HU, XIAOQING; HUAI, WENXIN; AMADOR, ANTÓNIO (2009). Numerical simulation and analysis of water flow over stepped spillways. *Science in China Series E: Technological Sciences*, V.52(7), pp.1958-1965.

R

RAD, I.N.; TEIMOURI, M. (2010). An Investigation of Flow Energy Dissipation in Simple Stepped Spillways by Numerical Model. *European Journal of Scientific Research*. Vol.47(4), pp.544-553.

RAYLEIGH, Lord (Strutt, John William) (1917). On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, 34, 94-98.

RAJARATNAM, N. (1990). Skimming flow in stepped spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.116, n.4, p. 587-591, April.

RAND, W. (1955). Flow geometry at straight drop spillways. **Journal of the Hydraulics Division, Proceedings, ASCE**, v. 81, n°791, Sept., p. 1-13, 1955.

REGAN, R.P.; MUNCH, A.V.; SCHRADER, E.K.; (1979). Cavitation and erosion damage of sluices and stilling basins at two high-head dams. Comissão Internacional de Grandes Barragens. Q. 50, R. 11, ICOLD, New Delhi.

RELVAS, A.T.; PINHEIRO, A.N. (2008). Inception Point and Air Concentration in Flows on Stepped Chutes Lined with Wedge-Shaped Concrete Blocks. **Journal of Hydraulic Engineering, ASCE**, v.134, n.8, Aug.

RICHTER, Jean Paul (1883). **Scritti letterari di Leonardo da Vinci**. Sampson Low, Marston, Searle & Rivington, Londra. In due parti, p.1198 (volume 2, p.236). Disponível em: <<http://www.archive.org/details/literaryworksof101leonuoft>>, Acesso em: 16/04/2008.

S

SANAGIOTTO, D.G. (2003). **Características do escoamento sobre vertedouros em degraus de declividade 1v:0,75h**. 137 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SÁNCHEZ-JUNY, M.; DOLZ, J. (2005). Experimental study of transition and skimming flows on stepped spillways in RCC dams: qualitative analysis and pressures measurements. **Journal of Hydraulic Research**. v. 43, n.5, p. 540-548.

SARFARAZ, M.; ATTARI, J. (2011). Numerical Simulation of Uniform Flow Region over a Steeply Sloping Stepped Spillway. 6th National Congress on Civil Engineering, April 26-27, 2011, Semnan University, Semnan, Iran.

SCHULZ, H.E. (2003). **O essencial em fenômenos de transporte**. São Carlos: EESC/USP, 2003. 398 p.

SCHULZ, H.E.; LOMBARDI, G.; NASCIMENTO, F.J.; TREBI, H.J.D.; SANTOS, J.N.; SIMÕES, A.L.A. (2010). Usable work of macro-scale cavities in liquids (Em fase de publicação).

SCHULZ, H.E.; LOBOSCO, R.J.; SIMÕES, A.L.A. (2011). Multiphase analysis of entrained air in skimming flows along stepped chutes. In: ACOMEN 2011 (5th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering), 2011, Liège. Proceedings of the ACOMEN 2011. Liège, 2011. v. 1. p. 1-10.

SCIMEMI, E. (1930). Sulla Forma delle Vene Tracimanti. **L'Energia Elettrica**, v.7, n.4, p. 293-305, 1930.

SIMÕES, A.L.A. (2006). **Considerações sobre a hidrodinâmica de extravasores em degraus**. 90 f. Monografia (Graduação) – Universidade Salvador, Salvador.

SIMÕES, A.L.A. (2008). Considerações sobre a hidráulica de vertedores em degraus: metodologias adimensionais para pré-dimensionamento. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMÕES, A.L.A.; PORTO, R.M.; SCHULZ, H.E. (2009). Uma síntese acerca de estudos em hidráulica de canais e vertedores em degraus. XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Campo Grande, Mato Grosso do Sul.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010a). Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths. *Journal of Hydraulic Research* v.48, n.3, p.329-337.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010b). Simulação numérica e verificação experimental da posição da superfície livre de um ressalto hidráulico em um canal retangular. XXIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica Punta del Este, Uruguay, Nov.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010c). Solução analítica para o perfil da superfície livre em canais retangulares de forte declividade. XXIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica Punta del Este, Uruguay, Nov.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M.; DARZÉ, M.S. (2010). Discussão acerca de diferentes métodos para o pré-dimensionamento de vertedores em degraus. X Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; LOBOSCO, R.J.; PORTO, R.M. (2011). Stepped spillways: theoretical, experimental and numerical studies. In: Schulz, H.E.; Simões, A.L.A.; Lobosco, R.J. *Hydrodynamics - Natural Water Bodies*, ISBN 978-953-307-893-9, InTech Open Access Publisher.

SORENSEN, R.M. (1985). Stepped spillway hydraulic model investigation. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.111, n.12, p. 1461-1472. Dec..

STEPHENSON, D. (1979). Gabion energy dissipators. Proc. 13th ICOLD Congress, New Delhi, Q. 50, R.3, p. 33-34, 1979.

STEPHENSON, D. (1991). Energy dissipation down stepped spillways. **Water Power & Dam Construction**, v. 43, n. 9, p. 27-30, Sept. 1991.

STRAUB, L.G.; ANDERSON, A.G. (1958). Experiments on self-aerated flow in open channels. **Journal of Hydraulic Division, ASCE Proc. ASCE**, v.87, n.HY7, paper 1890, p.1890-1 a 1890-35.

SUSLICK, K.S. (1989). Die chemischen Wirkungen von Ultraschall. *Spektrum der Wissenschaft*. 4, pp.60-66.

T

TABBARA, M.; CHATILA, J.; AWWAD, R.. (2005). Computational simulation of flow over stepped spillways. *Computers and Structures* 83, 2215-2224. (doi:10.1016/j.compstruc.2005.04.005)

TAKAHASHI, M.; YASUDA, Y.; OHTSU, I. (2008). Discussion of “Flow patterns and energy dissipation over various stepped chutes.” **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**, ASCE, p.114-116, Jan/Feb, 2008. CHINNARASRI, C.; WONGWISES, S. (2006). Flow patterns and energy dissipation over various stepped chutes. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**, v.132, n.1, p.70-76, Jan/Feb, 2006.

TOOMBES, L. (2002). **Experimental study of air-water flow properties on low-gradient stepped cascades**. 2002, 262 p. Tese (Doutorado) – Universidade de Queensland, Brisbane, Austrália, 2002.

TOZZI, M.J. (1992). **Caracterização/comportamento de escoamentos em vertedouros com paramento em degraus**. 302 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

TOZZI, M.J.; TANIGUCHI, E.; OTA, J.J. (1996). Concentração de ar em escoamentos sobre vertedouros com degraus. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE CONCRETO COMPACTADO COM ROLO, 2, 1996, Curitiba. **Anais...** Curitiba: COPEL, 1996, p. 52-56.

Y

YASUDA, Y.; OHTSU, I. (2000). Characteristics of plunging flows in stepped channel chutes. In: H. E. Minor e W. H. Hager (Ed.) **International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways**, Zürich, Switzerland: 147-152. Balkema, 2000.

U

U.S. Army Corps of Engineers. (1997). **Hydraulic design criteria**. Vicksburg, 1977. Sheets 111-18.

V

VERSLUIS, M.; SCHMITZ, B.; HEYDT, ANNA VON DER; LOHSE, D. (2000). How Snapping Shrimp Snap: Through Cavitating Bubbles. *Science*, v.289. (DOI: 10.1126/science.289.5487.2114).

VISCHER, D.; HAGER, W.H. (1998). *Dam hydraulics*. Wiley.

VITTAL, N.; POREY, P.D.; (1987). Design of Cascade Stilling Basins for High Dam Spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.113, n.2, Feb..

W

WILHELMS, S.C.; GULLIVER, J.S. (2005). Bubbles and waves description of self-aerated spillway flow. **Journal of Hydraulic Research**, v. 43, n.5, p. 522-531. 2005

WOOD, I.R.; ACKERS, P.; LOVELESS, J. (1983). General method for critical point on spillways. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 109, n. 27, p. 308-312, 1985.

WOOD, I.R. (1984). Air entrainment in high speed flows. **Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures**, IAHR, KOBUS, H. (Ed.), paper 4.1, September, 1984.

X

XIANGJU, CHENG; YONGCAN, CHEN; LIN, LUO. (2006). Numerical simulation of air-water two-phase flow over stepped spillways. *Science in China Series E: Technological Sciences*, Vol.49, No.6, 674-684.

Y

YILDIZ, D.; KAS, I. (1998). Hydraulic performance of stepped chute spillways. *Hydropower Dams*, 5(4), 64–70.

Z

ZAMORA, A.S.; PFISTER, M.; HAGER, W.H.; MINOR, Hans-Erwin (2008). Hydraulic performance of step aerator. **Journal of Hydraulic Engineering, ASCE**. v.134, n.2, p. 127-137, Feb., 2008.

*Capítulo 4***A**

ALAMY FILHO, J.E. (2006). Modelação numérica de processos de sedimentação em escoamentos turbulentos e análise da ressuspensão em canais. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 233 p.

ARIS, R. (1989). *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, 320 p.

B

BATCHELOR, G.K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, UK.

BEJAN (1982). *Entropy generation through heat and fluid flow*. John Wiley & Sons Inc., 248 p.

BENNON, W.D; INCROPERA, F.P. (1987). A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems- I. Model Formulation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v.30(10), pp. 2161-2170.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. (2004). *Fenômenos de transporte*. LTC, 2a ed., 838 p.

BLASIUS, H. (1908). Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung. *Z. math. Phys.* V.56, p.1-37.

BRODKEY, R.S. (1967). *The phenomena of fluid motions*. Dover (Brodkey Publishing), 737 p.

BUTKOV, E. (1988). Física matemática. LTC, 725 p.

C

CFX. CFX Solver Theory. Ansys Canada Ltda., Waterloo, Ontario, p. 250, 2004.

CHANDRASEKHARAIHAH, D.S.; DEBNATH, L. (1994). Continuum mechanics. Academic Press, 595 p.

CHOU, P.C.; PAGANO, N.J. (1992). Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches. Dove Publications, 290 p.

CROCCO, L. (1937). Eine neue Stromfunktion fuer die Erforschung der Bewegung der Gase in Rotation. Z. angew. Math. Mech. 17, I.

D

DURST, F. (2008). Fluid mechanics: An introduction to the theory of fluid flows. Springer, 742 p.

F

FOX, R.W.; MCDONALD, A.T. (2001). Introdução à mecânica dos fluidos. LTC, 5ª ed. 504 p.

G

GONZALEZ, O.; STUART, A.M. (2008). A first course in continuum mechanics. Cambridge Texts in applied Mathematics, 394 p.

I

IGUCHI, M.; ILEGBUSI, O.J. (2011). Modeling multiphase materials process. Springer, 413 p.

K

KLEWICKI, J.C.; SARIC, W.S.; MARUSIC, I.; EATON, J.K. (2007). Wall-Bounded Flows. Pp.871-902, Chapter 12, In. Tropea, C.; Yarin, A.L.; Foss, J.F. (eds.) Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Springer-Verlag Berlim Heidelberg, 2007.

KREYSZIG, E. (2009). Matemática superior para engenharia. LTC, 9ª ed., 3 Volumes.

KUNDU, P.K.; COHEN, I.M. (2008). Fluid mechanics. Academic Press, 4th ed., 872 p. (with contributions by P.S. Ayyaswamy and H.H. Hu.).

L

LAMB, H. (1879), Hydrodynamics (Regarded as the sixth edition of a Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids, published in 1879). Dover Publications, New York., sixth edition, 1993 (ISBN-10: 0486602567).

LENCASTRE, A. (1996). Hidráulica geral. Edição do Autor, 651 p.

M

MASE, G.E. (1970). Theory and problems of continuum mechanics. McGraw-Hill (Schaum's Outline Series), 221 p.

N

NIKURADSE, J. (1942). Laminare reibungsschichten an der langsangestromten platte. Monographie, Zentrale f. wiss. Berichtswesen, Berlim.

P

PIMENTA, C.F. (1981). Curso de hidráulica geral. Guanabara Dois. 918 p. (2 volumes).

S

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. (2000). Boundary layer-theory. Springer, 8th ed., 801 p. (corrected printing 2003).

SCHULZ, H.E. (2001). *Alternativas em turbulência*. EESC/USP, 127 p.

SCHULZ, H.E. (2003). *O essencial em fenômenos de transporte*. EESC/USP, 382p.

SHAMES, I.H. (1962). Mechanics of fluids. McGraw-Hill, 558 p.

SISSOM, L.E.; PITTS, D.R. (1979). Fenômenos de transporte. LTC, 765 p.

STOKES, G.G. (1845). On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, v(8).

STREETER, V.L.; WYLIE, E.B.; BEDFORD, K.W. (1998). Fluid mechanics. 9th ed., 740 p.

T

TANEDA, S. Visualization of Separating Stokes Flows. J Phys. Soc. Jpn. 46:1935-1942.

Thomson, W. (Lord Kelvin). (1869). On vortex motion. Trans. Roy. Soc. Edinburgh., 25, 217-260.

TROPEA, C.; YARIN, A.L.; FOSS, J.F. (2007). Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Springer-Verlag Berlim Heidelberg.

V

VAN DYKE, M. (1982). An album of fluid motion. The Parabolic Press, Stanford, California, 176 p.

VANYO, J.P. (1993). Rotating Fluids in Engineering and Science. Dover Publications, 429 p.

W

WHITE, F. M. (2002). Mecânica dos fluidos. 4a ed. McGraw-Hill.

WHITE, F. M. (2006). Viscous fluid flow. 3a ed. McGraw-Hill International Edition.

WREDE, R.C. (1972). Introduction to vector and tensor analysis. Dover Publications, 418 p.

Capítulo 5

A

ANDERSON-JR, J.D. (1995). Computational fluid dynamics: the basics with applications. McGraw-Hill, 574 p.

B

BATCHELOR, G.K. (2000). An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, UK.

BLAZEK, J. (2001). Computational fluid dynamics: principles and applications. Elsevier, 440p.

BOUSSINESQ, J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. Mém. Prés. Par div. savants à l'Acad. Sci., Paris, 23, No.1, 1-680.

BRADSHAW, P.; Ferriss, D.H.; Atwell, N.P. (1967). Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. J. Fluid Mech., 28(3), pp.593-616.

BRADSHAW, P.; Ferriss, D.H. (1973). Applications of a general method of calculating turbulent shear layers. J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, 94, p.345.

BRODKEY, R.S. (1967). The phenomena of fluid motions. Dover (Brodkey Publishing), 737 p.

BROWN, G.L.; ROSHKO, A. (1974). On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech., Vol.64, pp. 775-816.

C

CHANDRASEKHAR, S. (1961). Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press edition, 1961. Dover edition, first published in 1981 (ISBN: 0-486-64071-X).

CHANSON, H. (2002). **The hydraulics of stepped chutes and spillways.** The Netherlands: A. A. Balkema Publishers. 384 p.

CHOU, P.Y. (1945). On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. Appl. Math.* 3, 38-54.

CHUNG, T.J. (2002). *Computational fluid dynamics*. Cambridge University Press. 1012 p.

D

DAVIDOV, B.I. (1961). On the statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid. *Dokl. Acad. Nauk S.S.S.R.* 136, 47-50.

DRAZIN, P.G. & REID, W.H. (1981), *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press (second edition 2004). (ISBN: 0 521 52541 1).

DURST, F. (2008). *Fluid mechanics: An introduction to the theory of fluid flows*. Springer, 742 p.

F

FERZIGER, J.H.; PERIĆ, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. 3th ed., Springer, 423 p.

G

GIBSON, C.H.; SCHWARZ, W.H. (1963). Detection of conductivity fluctuations in a turbulent flow field. *J. Fluid Mech.*, 16, No. 3, pp. 357-364.

GRANT, H.L.; STEWART, R.W.; MOILLIET, A. (1962). Turbulence spectra from a tidal channel. *J. Fluid Mech.*, 12, No.2, pp. 241-268.

H

HAGEN, G.H.L. (1839). Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie* vo.46, pp. 423-442.

HANJALIĆ, K. (1970). Two-dimensional asymmetric turbulent flow in ducts. Ph.D. thesis, University of London.

HARLOW, F.H.; NAKAYAMA, P.I. (1968). Transport of turbulence energy decay rate. University of California Report LA-3854, Los Alamos Science Laboratory.

HINZE, J.O. (1959). *Turbulence*. McGraw-Hill, Inc. second edition, 1975 (ISBN: 0-07-029037-7).

J

JONES, W.P.; LAUNDER, B.E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 15(2), pp. 301-314.

K

KÁRMÁN, T. VON (1930). Mechanische Ähnlichkeit and Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. K1., 58-76;

KIM, J.; MOIN, P.; MOSER, R. (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid. Mech.* 177: 133-166.

KOLMOGOROV, A.N. (1941a). Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30: 299-303;

KOLMOGOROV, A.N. (1941b). Logarithmically normal distribution of the size of particles under fragmentation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 31 : 99-101;

KOLMOGOROV, A.N. (1941c). Decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 31: 538-41;

KOLMOGOROV, A.N. (1941d). Energy dissipation in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32: 19-21;

KUNDU, P.K.; COHEN, I.M. (2008). Fluid mechanics. Academic Press, 4th ed., 872 p. (with contributions by P.S. Ayyaswamy and H.H. Hu.).

L

LANDAHL, M.T.; CHRISTENSEN, E. MOLLO- (1994). Turbulence and random processes in fluid mechanics. 2th ed. Cambridge University Press, 168 p.

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. (1987). Fluid Mechanics. Elsevier Ltd., 2th ed., 539 p.

LAUNDER, B.E.; REECE, G.J.; RODI, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68: pp.537-566.

LAUNDER, B.E.; SHARMA, B.I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 131-137.

LAUNDER, B.E.; SPALDING, D.B. (1972). Lectures in Mathematical models of turbulence. Academic Press, 169 p.

LESIEUR, M. (2008). Turbulence in fluids. 4th ed. Springer. 558 p.

M

MONIN, A.S.; YAGLOM, A.M. (1965). Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence. Originally published in 1965 by Nauka Press, Moscow, under the title Statisticheskaya Gidromekhanika-Mekhanika Turbulentnosti. Dover edition, first published in 2007. Vol.(1,2).

N

NOVOPASHIN, S.; MURIEL, A. (2002). Is the Critical Reynolds Number Universal? *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, Vol. 95, No. 2, 2002, pp. 262–265.

P

POPE, S.B. (2009). Turbulent flows. Cambridge University Press, 771 p.

PORTO, R.M. (2006). **Hidráulica básica**. 4.ed. São Carlos: EESC-USP, 2006. 540p.

R

REYNOLDS, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174, pp. 935-982 (artigo sobre escoamento laminar, transição e turbulência).

REYNOLDS, O. (1894). On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 186, 123-164. (artigo com as conhecidas decomposições de Reynolds).

RICHARDSON, L.F. (1922). Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press.

RODI, W. (2000). Turbulence models and their application in hydraulics: a state-of-art review. IAHR/AIRH. Taylor & Francis, 3th ed., second print., 104 p.

ROTT, N. (1990). Note on the history of the Reynolds number. Annu. Rev. Fluid Mech. 1990.22:1-12. Downloaded from arjournals.annualreviews.org. by Universidade de Sao Paulo (USP) on 09/08/09.

S

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. (2000). Boundary layer-theory. Springer, 8th ed., 801 p. (corrected printing 2003).

SCHULZ, H.E. (1985). Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto à superfície. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 299 p.

SCHULZ, H.E. (1990). Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto à superfície. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 896 p.

SCHULZ, H.E. (2001). *Alternativas em turbulência*. EESC/USP, 127 p.

SCHULZ, H.E. (2003). *O essencial em fenômenos de transporte*. EESC/USP, 382p.

SILVEIRA NETO, ARISTEU DA (2003). Turbulência nos fluidos aplicada. Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG.

SPEZIALE, C.G.; SARKAR, S.; GATSKI, T.B. (1991). Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227: pp.245-272.

STEWART, R.W.; TOWNSEND, A.A. (1951). Similarity and self-preservation in isotropic turbulence. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A243, No.867, 359-386.

T

TAYLOR, G.I. (1935). *Statistical Theory of Turbulence*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 151(873) (Sep. 2), pp. 421-444

TENNEKES, H.; LUMLEY, J.L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, 300 p.

V

VAN DYKE, M. (1982). *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford, California, 176 p.

W

WHITE, F. M. (2006). *Viscous fluid flow*. 3a ed. McGraw-Hill International Edition.

Y

YAGLOM, A.M. (1994). A. N. Kolmogorov as a fluid mechanician and founder of a school in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. 26: 1-22.

Capítulo 6

A

ABECASIS, F.M.M. (1961). *Soleiras descarregadoras*. Memórias 175, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

B

BAZIN, H. (1889) “Recent experiments on the flow of water over weirs” Tradução inglesa de Arthur Marichal e John C. Tantwine, Jt. Proceedings, Engineering Club of Philadelphia, Vol VII, 1889, pp.259-310.

BUREAU OF RECLAMATION (1987). *Design of small dams*. United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation. A Water Resources Technical Publication. 3th ed., Denver, CO, USA.

C

CHANSON, H. (2002). **The hydraulics of stepped chutes and spillways**. The Netherlands: A. A. Balkema Publishers. 384 p.

CHANSON, H.; LUBIN, P. (2010). Discussion of “Verification and validation of a computational fluid dynamics (CFD) model for air entrainment at spillway aerators”. *Can. J. Civ. Eng.* 37: 135-138.

CHAUDHRY, M. H. (2008) *Open-channel flow*. Springer, p.523.

D

DAUTRAY, R.; LIONS, JACQUES-LOUIS. (2000). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, Berlin.

F

FERZIGER, J.H.; PERIĆ, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. 3th ed., Springer, 423 p.

L

LAX, P.D. (1954). Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 159–193.

LAX, P.D.; RICHTMYER, R.D. (1956). Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, V. 9, Issue 2, pages 267–293, May.

P

PFISTER, M.; HAGER, W.H.; MINOR, Hans-Erwin. (2006a). Bottom aeration of stepped spillways. (**Technical Notes**) *Journal of Hydraulic Engineering*, v.132, n.8, p.850-853, Aug., 2006.

PFISTER, M.; HAGER, W.H.; MINOR, Hans-Erwin. (2006b). Stepped chutes: pre-aeration and spray reduction. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 32, p.269-284, 2006b.

PORTO, R.M. (2006). **Hidráulica básica**. 4.ed. São Carlos: EESC-USP, 2006. 540p.

S

SCIMEMI, E. (1930). Sulla Forma delle Vene Tracimanti. *L'Energia Elettrica*, v.7, n.4, p. 293-305, 1930.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010a). Simulação numérica e verificação experimental da posição da superfície livre de um ressalto hidráulico em um canal retangular. XXIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica Punta del Este, Uruguay, Nov.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010b). escoamento laminar desenvolvido em seção genérica: simulação numérica e cálculo do fator de resistência. XXIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica Punta del Este, Uruguay, Nov.

SIMÕES, A.L.A.; CANDEZANO, M.A.C.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M.; FERREIRA, V.G. (2011). Comparação de esquemas numéricos para as equações de Saint-Venant usando códigos livres. XIX Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Maceió.

T

TOZZI, M.J. (1992). **Caracterização/comportamento de escoamentos em vertedouros com paramento em degraus**. 302 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

Capítulo 7

B

BOES, R. (2000). **Zweiphasenströmung und Energieumsetzung an Grosskaskaden**. 309 f. Tese (Doutorado) – Instituto Federal Suíço de Tecnologia - Laboratório de Hidráulica, Hidrologia e Glaciologia, Zurich.

C

CHANSON, H. (2002). **The hydraulics of stepped chutes and spillways**. The Netherlands: A. A. Balkema Publishers. 384 p.

CHOW, V.T. (1959). **Open channel hydraulics**. New York: McGraw-Hill.

CORRSIN, S. (1957). Simple theory of an idealized turbulent mixer. A.I.Ch. E. Journal. U.S.A., V.3(3), pp.329-330.

CORRSIN, S. (1964). The isotropic turbulent mixer: Part II-Arbitrary Schmidt Number. A.I.Ch. E. Journal, V.10(6), pp.870-877.

H

HAGER, W.H.; BLASER, F. (1998). Drawdown curve and incipient aeration for chute flow. **Canadian Journal of Civil Engineering**. v.25, p.467-473, 1998.

HENDERSON, F. M. (1966). **Open Channel Flow**. New York: MacMillan, 1966.

N

NEZU, I.; NAKAGAWA, H. (1993). Turbulence in open-channel flows. IAHR/AIRH Monograph. A.A. Balkema, 281 p.

P

PFISTER, M.; HAGER, W.H. (2010). Self-entrainment of air on stepped spillways. *International Journal of Multiphase Flow* 37 (2011) 99–107.

R

RATHBUN, R.E. (1977). Reaeration Coefficients of Streams-State-of-the-Art. Journal of the Hydraulics Division, Vol. 103, No. 4, April 1977, pp. 409-424

ROBERTS, P.V. (1984). Dependence of oxygen transfer rate on energy dissipation during surface aeration and in stream flow. In: Brutsaert, W. & Jirka, G.H. (eds.), Gas Transfer at Water Surfaces. Dordrecht. D. Reidel Publishing Company, 639 p., 1984.

S

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. (2000). Boundary layer-theory. Springer, 8th ed., 801 p. (corrected printing 2003).

SCHULZ, H.E.; GIORGETTI, M.F. (1986). Um modelo de transferência de oxigênio na interface ar-água a partir da teoria estatística da turbulência. II Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria. Volume 1, São Paulo.

SCHULZ, H.E. (1990). Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto à superfície. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 896 p.

SCHULZ, H.E.; BICUDO, J.R.; BARBOSA, A.R.; GIORGETTI, M.F. (1990). Analytical approach and experimental data. In.: Wilhelms, S.C. and Gulliver, J.S (eds.), Air Water Mass Transfer: Selected Papers from the Second International Symposium on Gas Transfer at Water Surfaces.

SCHULZ, H.E.; SIMÕES, A.L.A. (2011). Desenvolvimento da superfície livre em escoamentos aerados: analogia com leis básicas de transferência. Laboratório de Fenômenos de Transporte, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Relatório I/I/11, (vertedoresemdegraus.blogspot.com;stoa.usp.br/ltr/files/).

SILVEIRA NETO, ARISTEU DA (2003). Turbulência nos fluidos aplicada. Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG.

SIMÕES, A.L.A. (2008). Considerações sobre a hidráulica de vertedores em degraus: metodologias adimensionais para pré-dimensionamento. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010a). “Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths” Journal of Hydraulic Research Vol.48, No.3, p.329-337.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010c). Solução analítica para o perfil da superfície livre em canais retangulares de forte declividade. XXIV Congresso Latinoamericano de Hidráulica Punta del Este, Uruguay, Nov.

SIMÕES, A.L.A. (2011). Escoamentos em canais e vertedores com o fundo em degraus: desenvolvimentos experimentais, teóricos e numéricos. Relatório (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 157 pp.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2011). Transition length between water and air-water flows on stepped chutes. *Computational Methods in Multiphase Flow VI*, pp.95-105, doi:10.2495/MPF110081, Kos, Greece.

T

TAKAHASHI, M.; OHTSU, I. (2011). Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths. Discussion and Reply by the authors: Simões, A.L.A.; Schulz, H.E.; Porto, R.M. (2011). *Journal of Hydraulic Research*, Vol.49(3), pp.404-408 (DOI: 10.1080/00221686.2011.568200);

U

URBAN, A.L.; WILHELMS, S.C.; GULLIVER, J.S. (2005). Decay of Turbulence Downstream of a Stilling Basin. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(9), pp. 825-829.

Capítulo 8

A

ARANTES, E. J. (2007). **Caracterização do escoamento sobre vertedouros em degraus via CFD**. 206 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

B

BOES, R. M.; HAGER, W. H. (2003a). Hydraulic design of stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.129, n.9, p.671-679, Sep..

BOES, R.M.; HAGER, W.H. (2003b). Two-Phase flow characteristics of stepped spillways. **ASCE, Journal of Hydraulic Engineering**. v.129, n.9, p.661-670, 2003b.

BAKHMETEFFF, B.A.; MATZKE, A.E. (1936). The hydraulic jump in terms of dynamic similarity. *Trans. ASCE*, Vol. 101, pp. 630-680.

C

CHANSON, H. (2002). **The hydraulics of stepped chutes and spillways**. The Netherlands: A. A. Balkema Publishers. 384 p.

E

ELEVATORSKI, E.A. (1959). *Hydraulic energy dissipators*. McGraw-Hill, 214 p.

H

HAGER, W.H.; BREMEN, R.; KAWAGOSHI, N. (1990). Classical hydraulic jump: length of roller. **Journal of Hydraulic Research**. v. 28, p. 591-608, 1990.

HAGER, W.H. (1992). Energy dissipators and hydraulic jump. Water Science and Technology Library. Kluwer Academic Publisher, 288 p.

HENDERSON, F. M. (1966). **Open Channel Flow**. New York: MacMillan, 1966.

M

MALIK, M. (1972). Die hydromechanischen Parameter und ihr Einfluss auf die charakteristischen Größen des Wechselsprunges (The Hydromechanic Parameters and Their Effect on the Characteristic Quantities of the Hydraulic Jump). Thesis, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, T.U. Berlin, Berlin.

MARQUES, M.G.; DRAPEAU, J.; VERRETTE, J-L. (1997). Flutuação de pressão em um ressalto hidráulico. Revista Bras. de Recursos Hídricos, v.2(2), pp. 45-52.

MATOS, J.S.G. (1999). Emulsão de ar e dissipação de energia do escoamento em descarregadores em degraus. Research Report, IST, Lisbon, Portugal.

P

PETERKA, A. J. (1984). **Hydraulic design of spillways and energy dissipators**. A Water Resources Technical Publication, Engineering Monograph N° 25, United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation. Denver, Colorado: eight printing, May, 1984.

POVH, P.H. (2000). **Avaliação da energia residual a jusante de vertedouros em degraus com fluxos em regime skimming flow**. 142 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Q

QIAN, ZHONGDONG; HU, XIAOQING; HUAI, WENXIN; AMADOR, ANTÓNIO (2009). Numerical simulation and analysis of water flow over stepped spillways. Science in China Series E: Technological Sciences, v.52(7), pp.1958-1965.

R

RIEGEL, R.M.; BEEBE, J.C. (1917). The hydraulic jump as a means of dissipating energy. Miami Conservancy District Tech. Rep., part III.

S

SANAGIOTTO, D.G. (2003). **Características do escoamento sobre vertedouros em degraus de declividade 1v:0,75h**. 137 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SAFRANEZ, K. (1929). Untersuchung über den wechelsprung (Investigation on the Hydraulic Jump), Der Bauingenieur, Vol. 10, Heft 37, pp. 649-651; Heft 38, pp. 668-678.

SCHRODER, R. (1963). Die turbulente Strömung im freien Wechselsprung (The Turbulent Flow in the Free Hydraulic Jump). Habilitation Thesis, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, T.U. Berlin, Mitteilung Nr. 59, Berlin.

SIMÕES, A.L.A. (2008). Considerações sobre a hidráulica de vertedores em degraus: metodologias adimensionais para pré-dimensionamento. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. (2010a). “Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths” *Journal of Hydraulic Research* Vol.48, No.3, p.329-337.

SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M.; DARZÉ, M.S. (2010b) Discussão acerca de diferentes métodos para o pré-dimensionamento de vertedores em degraus. X Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste.

T

TAKAHASHI, M.; OHTSU, I. (2011). Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths. Discussion and Reply by the authors: Simões, A.L.A.; Schulz, H.E.; Porto, R.M. (2011). *Journal of Hydraulic Research*, Vol.49(3), pp.404-408 (DOI: 10.1080/00221686.2011.568200);

TOZZI, M.J. (1992). **Caracterização/comportamento de escoamentos em vertedouros com paramento em degraus**. 302 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

APÊNDICE 1. ALGUMAS FOTOGRAFIAS

As fotografias apresentadas neste item correspondem aos experimentos expostos no Capítulo 3 e outras estão relacionadas a esta tese de alguma forma. Não foi possível vincular as primeiras imagens aos experimentos correspondentes, embora elas tenham sido utilizadas para ilustrar aspectos do escoamento. A câmera utilizada na ocasião dos experimentos foi uma máquina simples, modelo Sony DSC T90.



Figura A1.1 - Visão geral do canal em degraus (esquerda) e alvo utilizado para medir a distância desde o sensor até o pseudo fundo e para verificar a posição do emissor/receptor (direita).

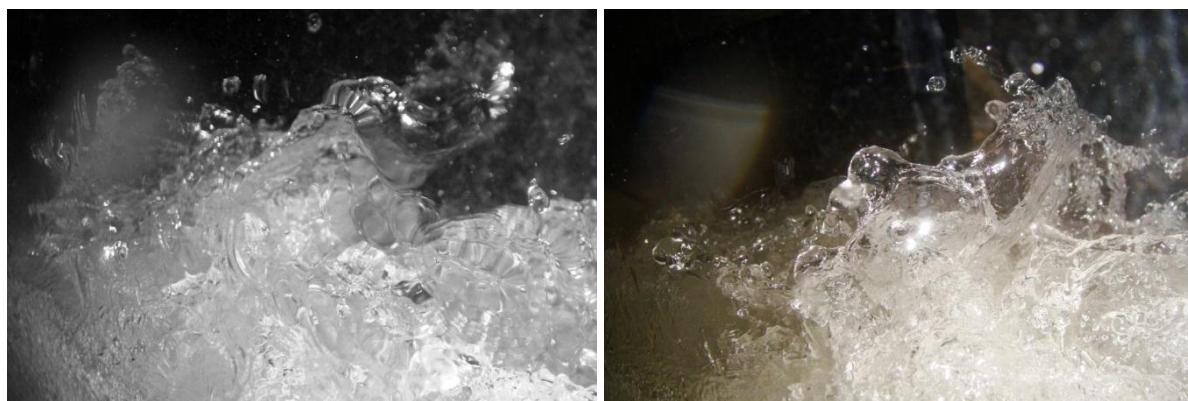


Figura A1.2 - Exemplos que ilustram a forma contorcida da superfície livre na região do escoamento composta pela mistura ar-água. Observa-se a formação de gotas com a fotografia à direita.



Figura A1.3 - Superfície livre do escoamento monofásico a jusante da comporta. Estas imagens destacam a estrutura real da superfície livre (imagem à esquerda) e a superfície livre lisa e bem definida obtida em uma fotografia com tempo de exposição um pouco maior e sem o uso de flash (à direita). A segunda fotografia se aproxima mais da imagem percebida pela visão humana para escoamentos com velocidades semelhantes às velocidades correspondentes a estas fotos. Tempo de exposição, T_e , 1/40 s (esquerda/com flash) e 1/2 s (direita/sem flash).



Figura A1.4 - Imagens do escoamento bifásico do Experimento 5. Nota-se na primeira fotografia a forma irregular da superfície livre, que é mais aparente na segunda fotografia (observa-se uma forma alongada que emerge do escoamento principal, voltada para montante).



Figura A1.5 - Neste caso, na primeira imagem, foi traçada uma linha vermelha que, de forma aproximada, se sobrepõe à posição da superfície livre do escoamento monofásico. Observa-se que para estas condições de escoamento o trecho monofásico é translúcido. O mesmo não ocorre na imagem ao lado, que ilustra o aumento da opacidade ao longo do canal devido ao aumento da concentração de bolhas (a fotografia está inclinada, ou seja, o canal possui degraus com pisos horizontais). Dados: $T_e=1/40$ s com flash (esquerda) e $T_e=1/13$ s sem flash (direita).



Figura A1.6 - A primeira fotografia foi obtida com $T_e=1/40$ s e com flash. Esta imagem ilustra o mesmo que a segunda imagem anterior, isto é, a evolução da concentração de bolhas ao longo do escoamento. Entretanto, não é observada a sobreposição das bolhas e sim as próprias bolhas, inclusive no interior das cavidades formadas pelos degraus. A segunda imagem é mais um exemplo que mostra irregularidades na superfície livre.

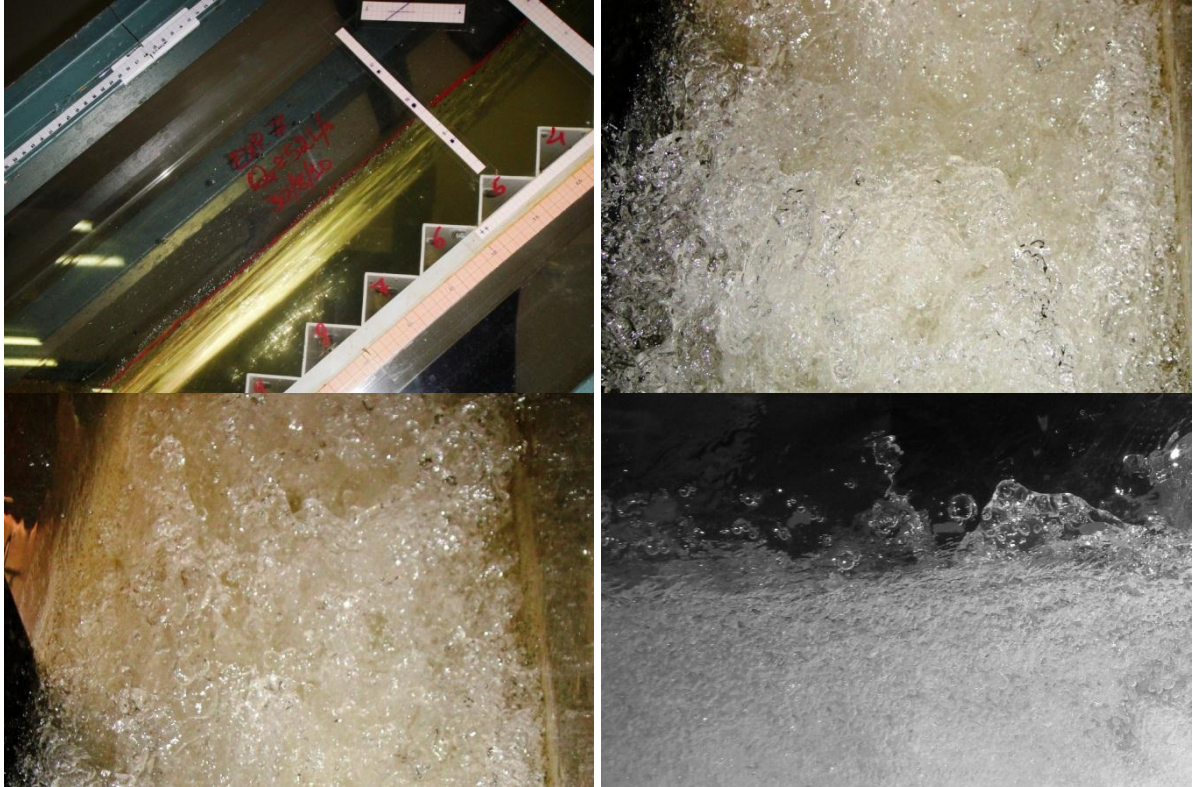


Figura A1.7 - A primeira fotografia corresponde ao experimento 7 e não contém novidades em relação ao que já foi apresentado. As duas fotos seguintes ilustram a superfície livre do escoamento bifásico, em uma vista superior. Nota-se claramente a ocorrência de ondas e outras erupções que a transformam em uma superfície contorcida e irregular. A quarta fotografia é uma vista lateral que destaca as gotas.

Experimento 8

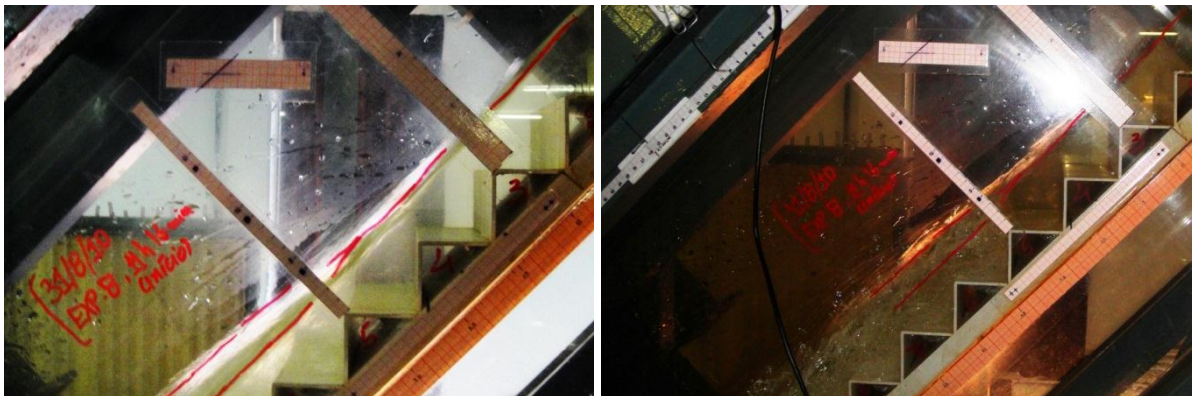


Figura A1.8 - A primeira foto é particularmente interessante porque mostra um aparente aumento da espessura da interface, que na verdade é a sobreposição de imagens a partir do início da aeração superficial. Ela foi obtida com $T_e=1/15$ s e sem flash. A imagem à direita mostra a ocorrência de bolhas e as irregularidades da superfície livre aerada ($T_e=1/40$ s e com flash). Em ambos os casos, a água é transparente a montante do início da aeração.

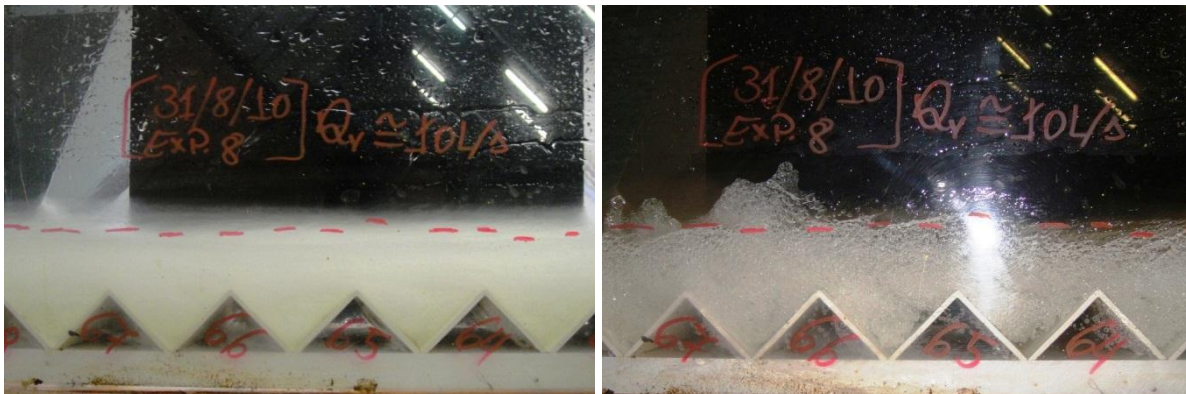


Figura A1.9 - Destaca-se que estas fotografias correspondem ao mesmo experimento e ao mesmo trecho do canal (ver numeração dos degraus). À esquerda é mostrada uma sobreposição de imagens obtida sem flash e com $T_e=1/10$ s. A segunda fotografia foi obtida com $T_e=1/40$ s e com flash. Nela é possível observar bolhas, gotas e a forma distorcida da superfície livre. Trata-se de fotografias giradas, ou seja, o canal está inclinado a 45° .



Figura A1.10 - A primeira foto destaca o canal e o escoamento, de uma forma geral, correspondente. A segunda é mais um exemplo obtido na região bifásica. Nota-se uma elevada concentração de bolhas.



Figura A1.11 - Vistas superiores da superfície livre do escoamento bifásico.

Experimento 9



Figura A1.12 - A primeira foto foi obtida com flash e $T_e=1/40$ s. Ela permite observar uma forma alongada que emerge do escoamento principal e uma enorme quantidade de bolhas. Entre estas bolhas, há formas elipsoidais, bolhas disformes, como a segunda e a terceira em destaque, e bolhas esféricas, como a quarta. A Fotografia à direita mostra o aspecto esbranquiçado obtido com $T_e= 1/10$ s e sem flash. Neste caso, a profundidade de aproximadamente 4 cm não é a mesma profundidade média apresentada no Capítulo 3. Certamente o valor indicado na fotografia se aproxima de um valor máximo, mas sem considerar os máximos ocasionados por ejeções que ocorrem com certa frequência não capturada pela máquina fotográfica.

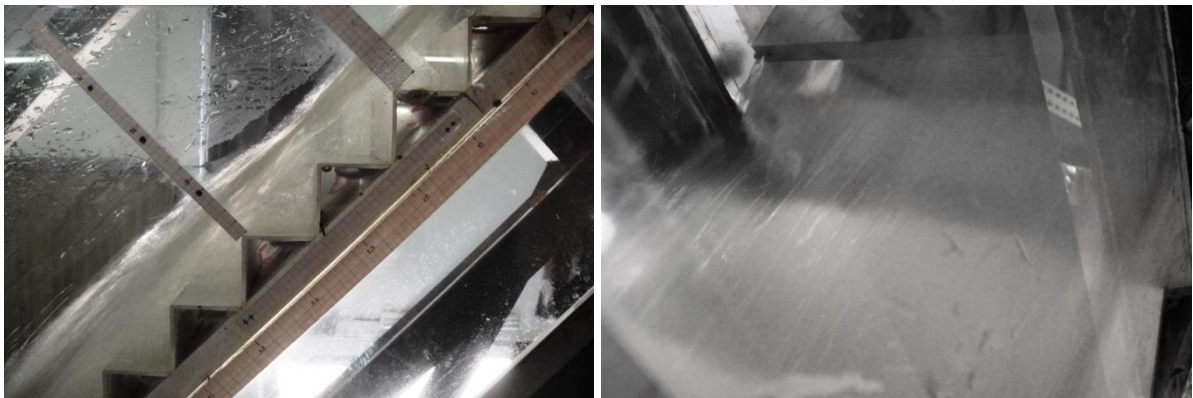


Figura A1.13 - Nota-se à esquerda a evolução espacial da fração de vazios e à direita a superfície livre ondulada a jusante da entrada do canal. Tal ondulação se deve às condições de escoamento. Nota-se que a superfície acompanha, aproximadamente, a forma do fundo, condição esperada para o escoamento supercrítico.

Experimento 10



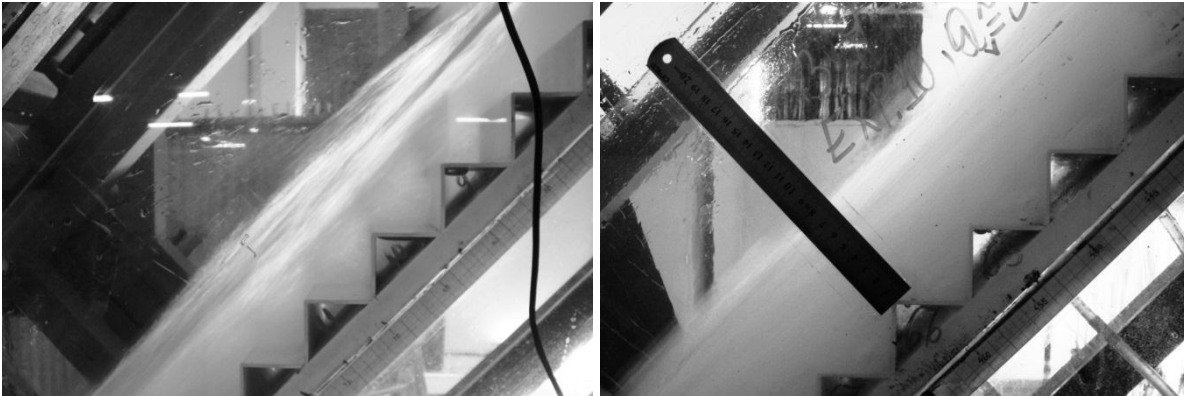


Figura A1.14 - As imagens apresentadas acima possuem características semelhantes às comentadas anteriormente.

Experimento 11

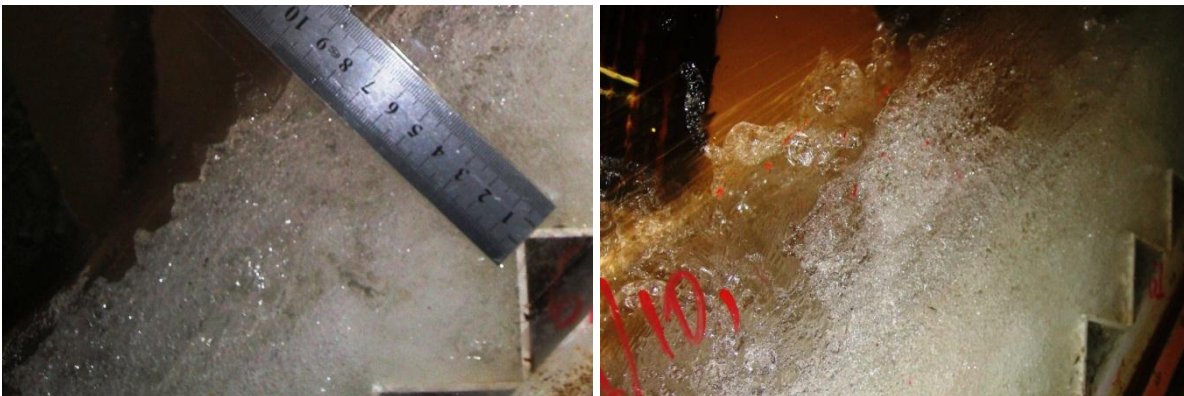


Figura A1.15 - A intenção principal de apresentar a primeira fotografia foi ilustrar a forma irregular da superfície livre, aproximadamente serrilhada, neste caso. A imagem à direita contém bolhas, gotas e volumes de líquido ejetados. O perfil médio deste escoamento, como apresentado no Capítulo 3, é próximo de um perfil S_3 .

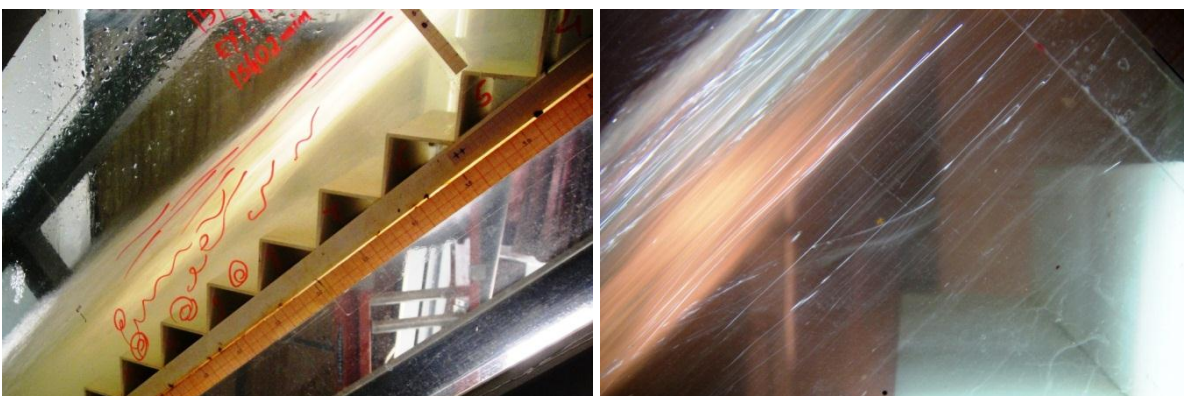


Figura A1.16 - Os desenhos feitos na parede do canal, apresentados na primeira foto, correspondem aproximadamente ao caminho percorrido por volumes de ar incorporados ao escoamento (observados visualmente). A fotografia à direita contém traços interessantes, causados pelo movimento de pequenas bolhas presentes no escoamento. Esta foto foi obtida com $T_e=1/40$ s e sem flash, produzindo este efeito. Nota-se que as linhas são aproximadamente paralelas ao pseudo-fundo do canal em degraus.



Figura A1.17 - Estas fotos são as mesmas. A primeira é a original, obtida na região de escoamento bifásico com $T_e=1/400$ s e sem flash (com ISSO 3200, maior do que os anteriores). A segunda é uma modificação obtida com um ajuste nos tons com o intuito de destacar o turbilhão formado na cavidade.



Figura A1.18 - Ao ocorrer uma injeção de ar, ela pode penetrar até abaixo do pseudo-fundo, como ilustrado na fotografia à esquerda, que corresponde à região de transição, ou seja, com injeções intermitentes de ar. À direita é possível observar o turbilhão na região de escoamento monofásico por meio dos traços deixados pelo movimento de pequenas bolhas introduzidas no escoamento ($T_e=1/500$ s, sem flash).

Experimento 14



Figura A1.19 – Imagens do Experimento 14, obtidas no trecho inicial do canal, onde o escoamento era monofásico. Observa-se a aparência transparente da água.



Figura A1.20 – A primeira imagem fornece uma visão geral do escoamento. A segunda foto evidencia, por meio de uma imagem instantânea (obtida com flash e $T_e=1/40$ s), a distribuição espacial das bolhas, com um aumento da concentração ao longo do canal.

Experimento 16

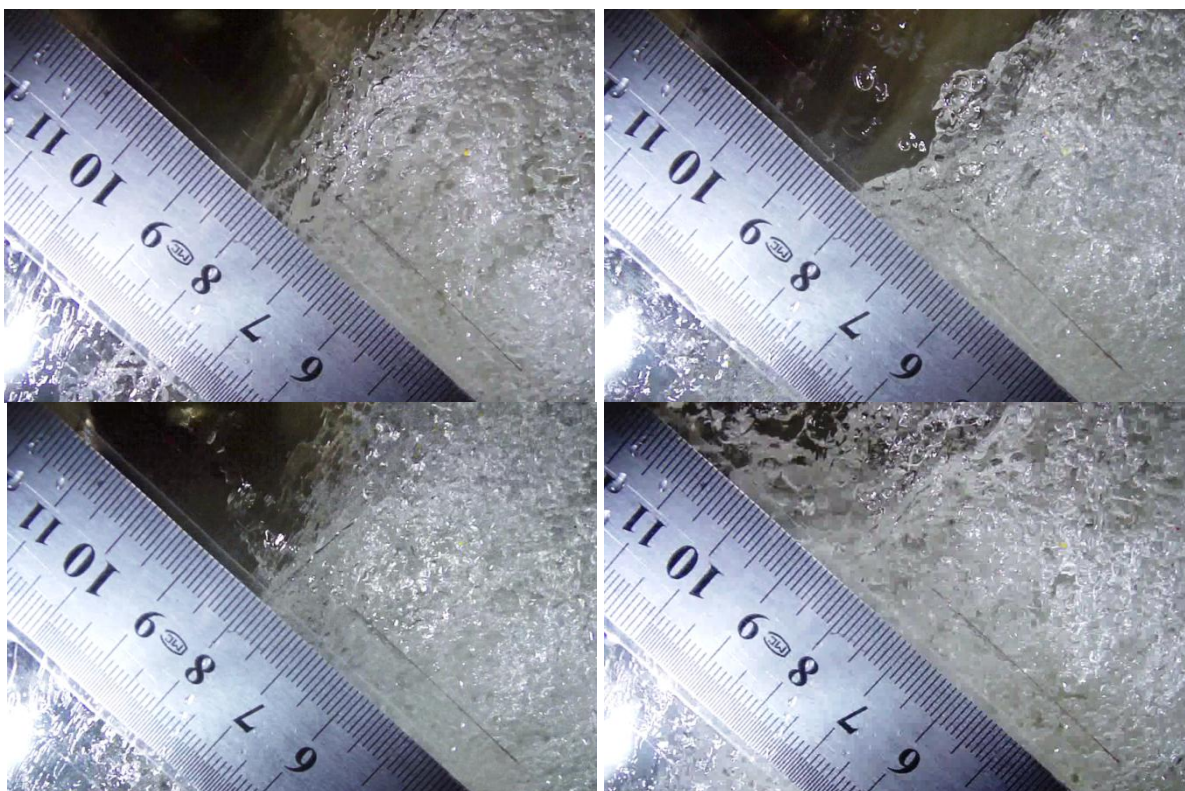


Figura A1.21 – Detalhes da superfície livre do escoamento bifásico.





Figura A1.22 – Estes são exemplos de imagens extraídas de um filme obtido com a mesma máquina citada anteriormente, 29 frames/s e o auxílio de um estroboscópio. É interessante notar a formação de diferentes estruturas na posição iluminada.



(continua na próxima página)

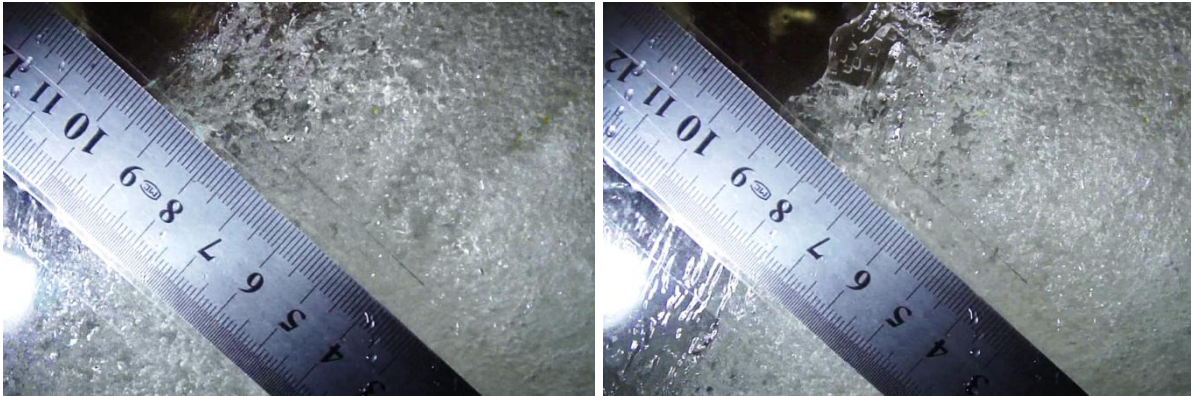


Figura A1.23 – Estas fotografias são interessantes por ilustram a variação da posição da superfície livre. As duas primeiras imagens indicam que a posição da superfície está próxima de 8,4 cm e 8,2 cm. A terceira corresponde a um valor próximo de 8 cm. Em um tempo menor que 1 s ocorrem variações que levam às figuras seguintes, com posições que ultrapassam os 8 cm. Nota-se que na quarta foto um filme ascendeu junto à parede de acrílico ultrapassando os 12 cm. A Fotografia 5 indica uma altura de 9,8 cm e a 6 uma altura de 9,1 cm. Imagens extraídas de um filme obtido com 29 frames/s e o auxílio de um estroboscópio.

OUTRAS IMAGENS

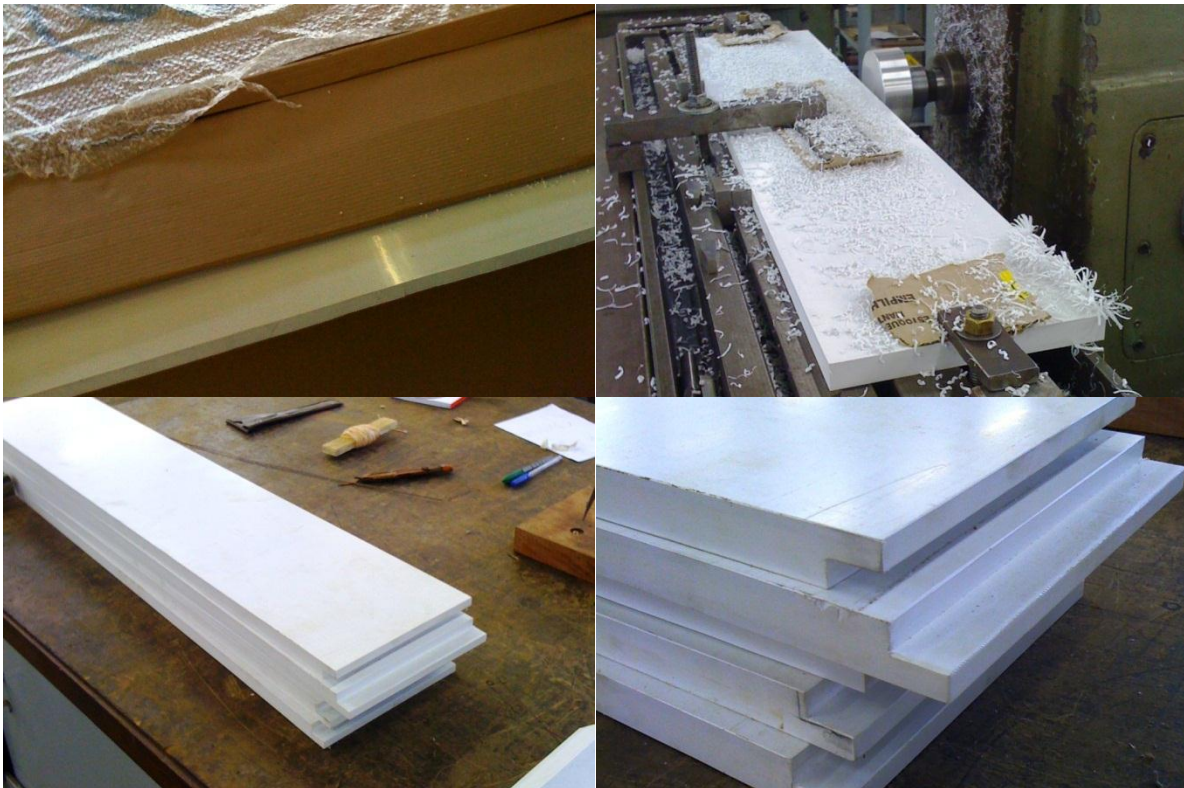


Figura A1.24 – Construção do fundo em degraus: placas para fixação dos degraus.

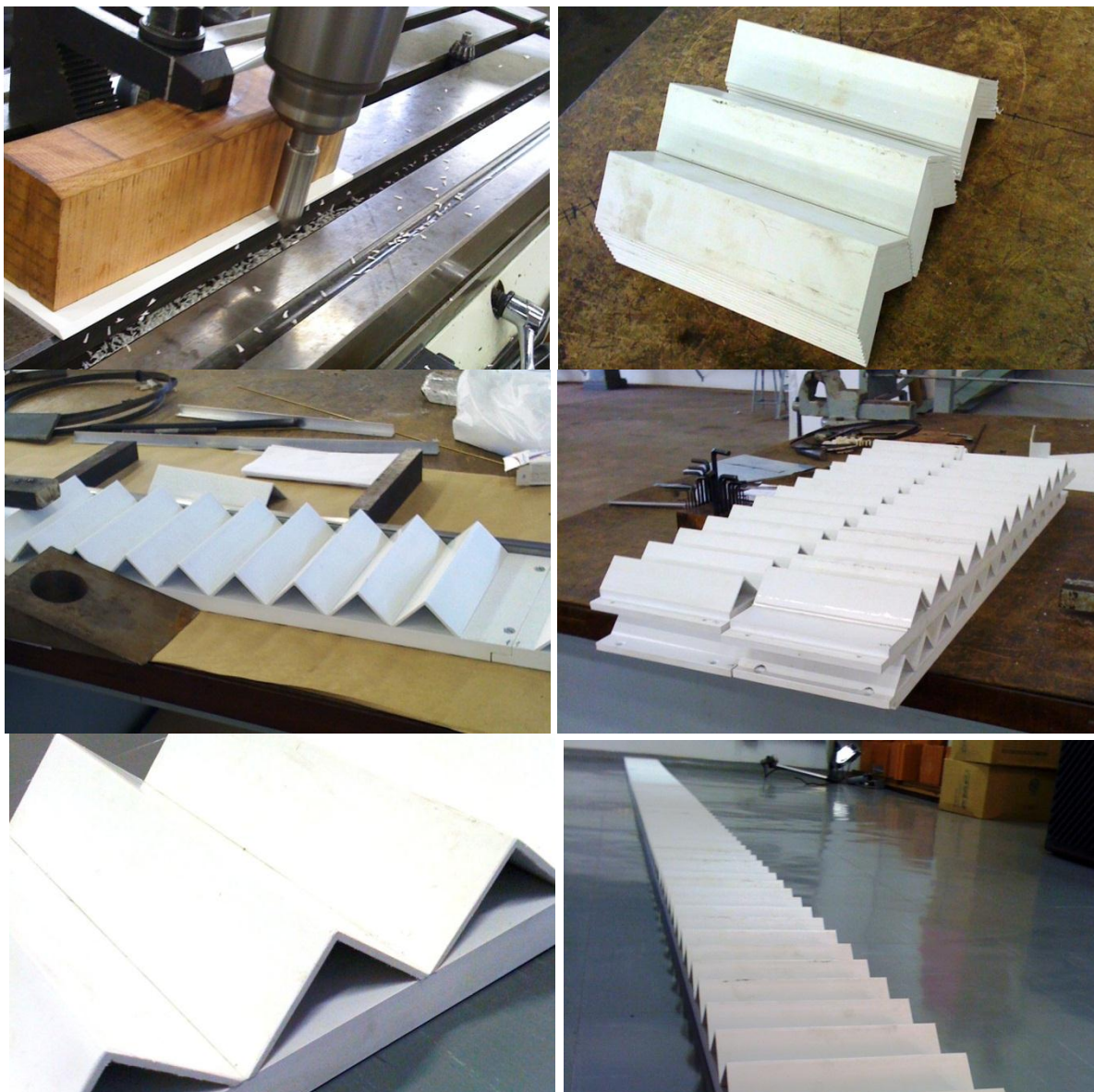


Figura A1.25 – Construção do fundo em degraus: degraus (materiais: PVC).

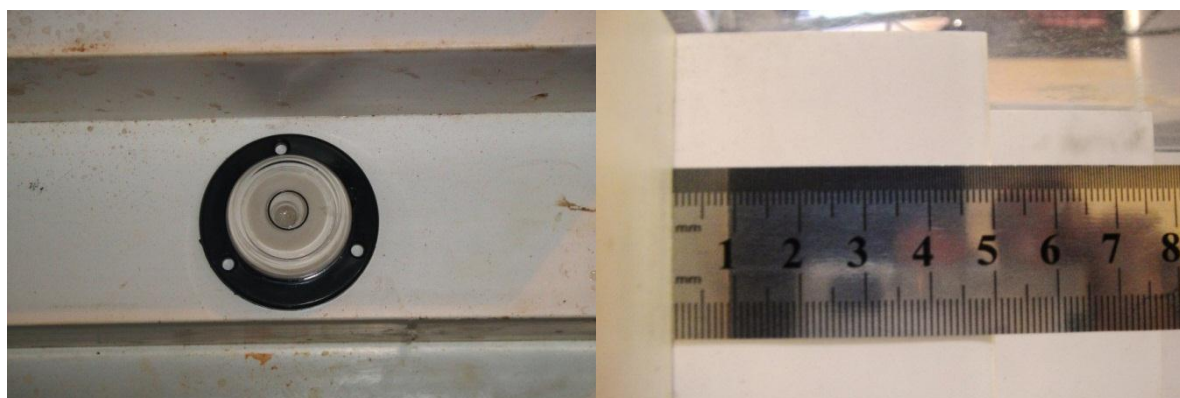


Figura A1.26 – Verificação da geometria do fundo em degraus: a primeira imagem mostra o uso de um nível de bolha para o plano, indicando que o piso está horizontal (com um desvio muito pequeno).



Figura A1.27 – Substituição da haste da válvula principal situada a jusante do conjunto motor-bomba: as duas primeiras fotografias mostram a haste antiga e a haste nova. As duas seguintes são fotos da válvula aberta e da haste nova presa ao disco. A penúltima fotografia mostra o papel utilizado para vedação e a última a válvula pronta para o uso com a sua nova haste.



Figura A1.28 – Foto do canal em funcionamento, sensor sobre o veículo e a plataforma utilizada para acessar a extremidade inicial do canal (esquerda); vista do vertedor de parede delgada e do medidor eletromagnético.

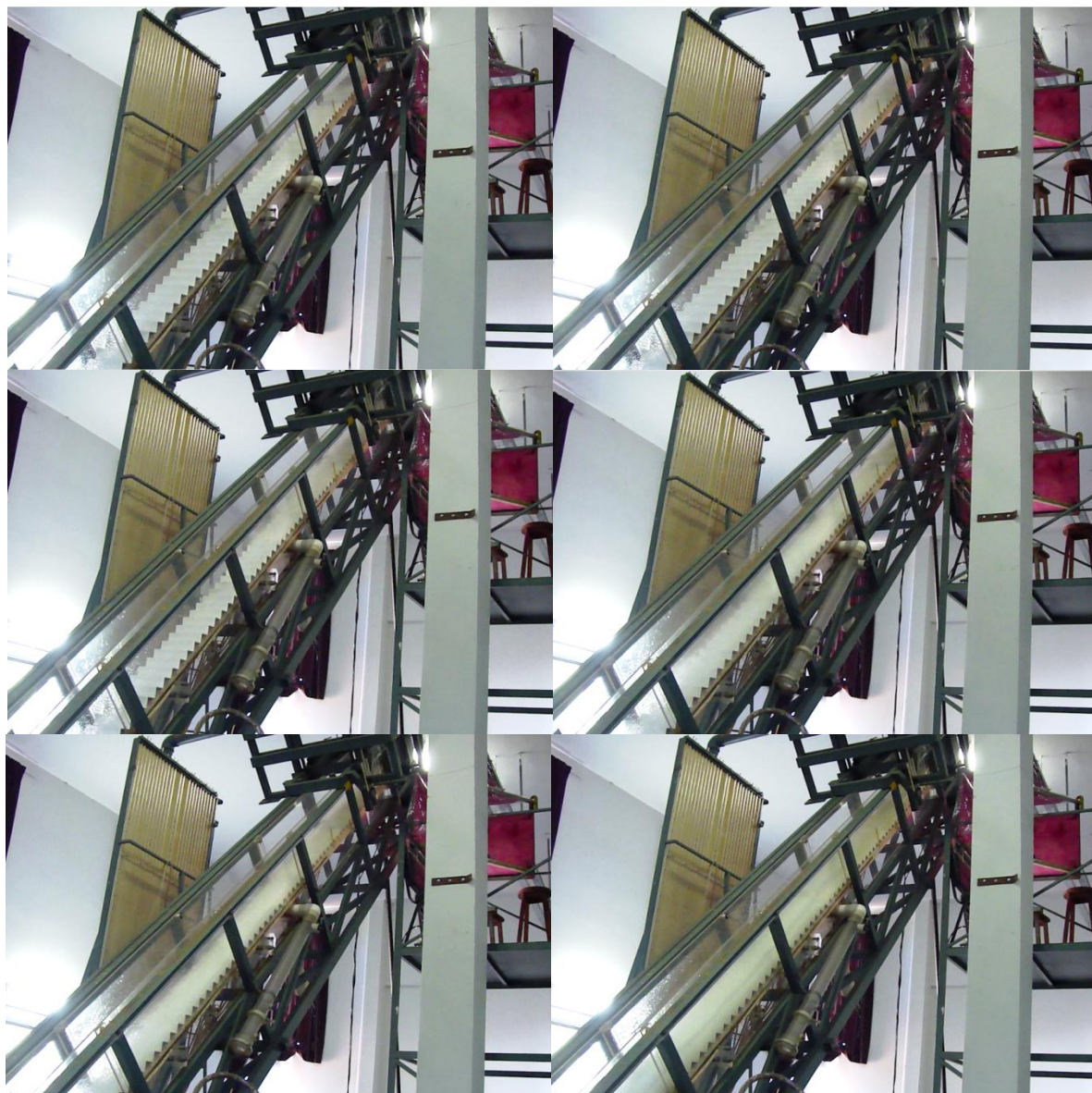


Figura A1.29 – Regime transitório inicial ocasionado pela abertura da válvula situada a montante do canal. Observa-se com estas imagens a propagação de uma onda resultante da abertura da válvula, que levou de 2 a 3 segundos para alcançar o final do canal.



(Continua na próxima página)



Figura A1.30 – Canal em degraus utilizado no sistema de drenagem do Campus II da USP em São Carlos. Nota-se que há uma entrada lateral e pedras incrustadas nos pisos. As duas últimas fotografias foram obtidas em 03/04/2010, às 18 h, aproximadamente. Nota-se que o escoamento ocorre em quedas sucessivas e com grande quantidade de ar incorporado desde o início do canal.

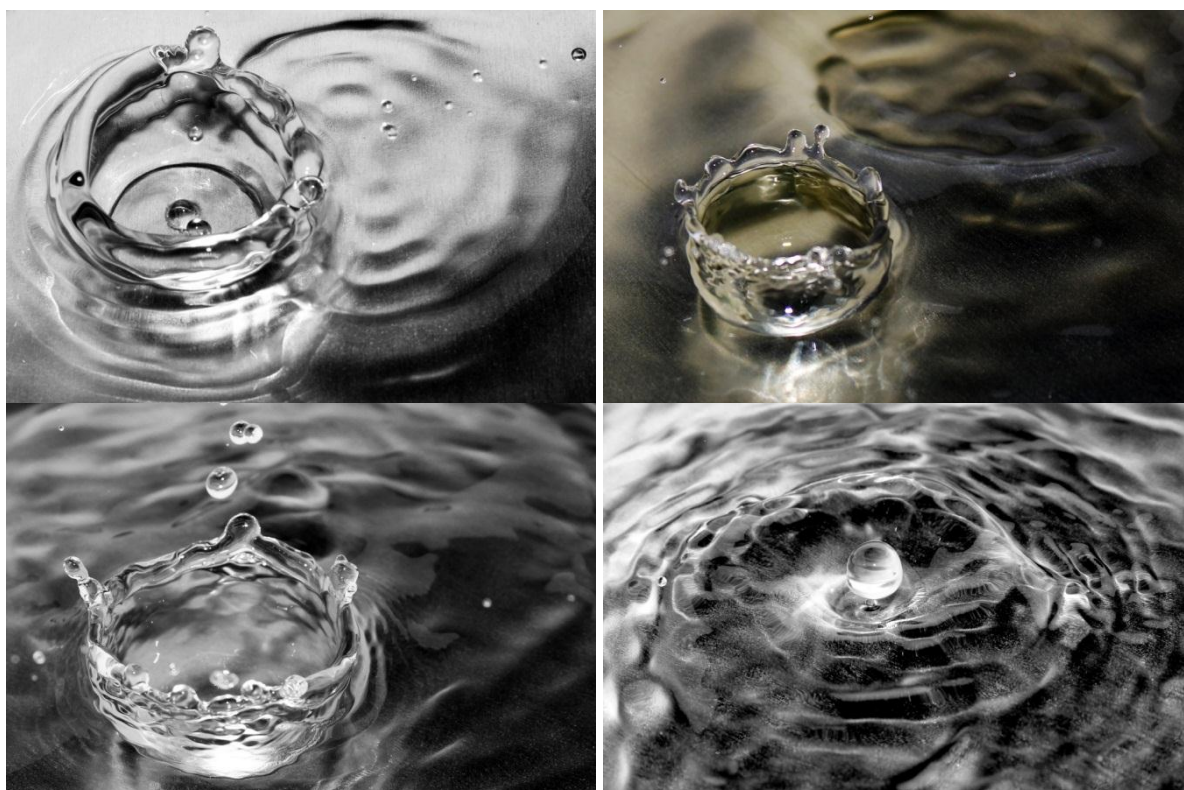


(Continua na próxima página)



Figura A1.31 – Canais em degraus utilizados em sistemas de drenagem em rodovias (seis primeiras imagens: Rodovia Bandeirantes-SP; penúltima: Córrego Tijuco Preto, São Carlos-SP; última: canal do sistema de drenagem próximo à entrada de São Carlos-SP).

Estruturas originadas a partir de colisões de gotas



(continua na próxima página)

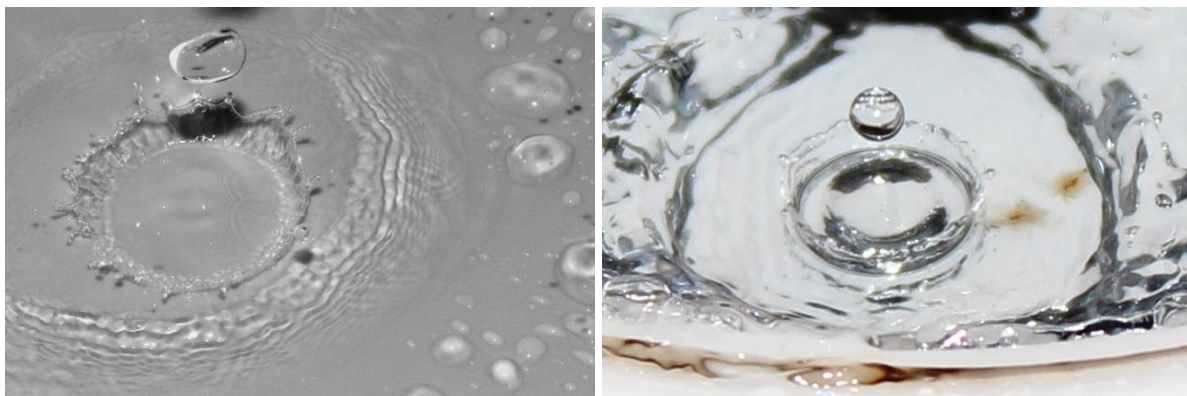


Figura A1.32 – Estes são alguns exemplos de estruturas formadas no meio líquido inicialmente estático após a colisão de uma gota de água. Imagens obtidas com $T_e=1/200$ s e flash (Canon T3i).



Figura A1.33 – As cinco primeiras fotos foram obtidas em experimentos individuais e ilustram a sequência de eventos de um experimento. A sexta imagem contém dezesseis fotografias sequenciais extraídas de um vídeo obtido com 60 fps (com uma máquina Canon T3i). Nota-se que a colisão da gota forma uma coroa que se fecha impulsionando o líquido para cima, havendo separação e a formação de uma nova gota. O retorno da coluna de líquido favorece a formação da bolha, que é impulsionada para baixo, sendo desacelerada pelos efeitos viscosos até parar e inverter o sentido do seu movimento, regressando à superfície.

Ressalto hidráulico

Figura A1.34 – Imagens correspondentes ao estudo de Simões, Schulz e Porto (2010) sobre o ressalto hidráulico.

A primeira fotografia mostra uma visão geral o canal utilizado, ainda sem o estabelecimento do ressalto hidráulico. O vertedor triangular de parede delgada, utilizado para medir a vazão, é apresentado na segunda imagem. As demais fotografias mostram o ressalto hidráulico ($Fr_1=3$).

APÊNDICE 2. EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES: COMPLEMENTOS.**Conteúdo**

A.2.1 SIMPLIFICAÇÃO DO TENSOR DE 4ª ORDEM	475
A.2.2 DETALHES SOBRE A SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO 4.128 (Capítulo 4)	484
A.2.3 REFERÊNCIAS.....	487

A.2.1 SIMPLIFICAÇÃO DO TENSOR DE 4ª ORDEM

Pretende-se simplificar a equação A2.1 de tal maneira que o tensor a_{ijkl} possa ser representado pela equação A2.2.

$$\tau_{ij} = a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = a_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial X_l}, \text{ em que } i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (\text{A2.1})$$

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A2.2})$$

A equação A2.2 é fruto do seguinte teorema:

Teorema 1. Se a_{ijkl} são componentes de um tensor isotrópico de quarta ordem, então

$$a_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{A2.3})$$

em que: α , β e γ são escalares.

A prova do Teorema 1, por ser relativamente extensa, fez com que os elementos do tensor fossem separados em cinco classes. Esta prova está fundamentada no fato de que um tensor isotrópico é aquele tensor que permanece inalterado para qualquer transformação de coordenadas. A primeira classe envolve os componentes do tensor que possuem índices iguais ($i=j=k=l$). A segunda classe envolve aqueles que possuem os dois primeiros e os dois últimos subscritos iguais e o segundo e o terceiro diferentes ($i=j$ e $k=l$ e $j \neq k$). Em seguida, na terceira classe, considera-se as componentes com $i=k$ e $j=l$ e $i \neq j$ e $k \neq l$. O penúltimo caso inclui $i=l$ e $j=k$ com $i \neq k$ e $k \neq l$. Estas quatro classes podem ser resumidos da seguinte maneira (Chandrasekharaiah e Debnath, 1994):

Classe 1: $a_{1111}; a_{2222}; a_{3333}$ (3 componentes)

Classe 2: $a_{1122}; a_{2233}; a_{3311}; a_{2211}; a_{3322}; a_{1133}$ (6 componentes)

Classe 3: $a_{1212}; a_{2323}; a_{3131}; a_{2121}; a_{3232}; a_{1313}$ (6 componentes)

Classe 4: $a_{1221}; a_{2332}; a_{3113}; a_{2112}; a_{3223}; a_{1331}$ (6 componentes)

A classe 5 envolve os sessenta componentes restantes ($81 - 3 + 3 \times 6 = 81 - 21 = 60$). Nesta classe um dos subscritos é diferente dos demais (dos 3 restantes), sendo possível identificar duas sub-classes: 5.1 – Três índices iguais e 5.2 – Dois índices iguais e dois diferentes. A matriz apresentada a seguir ilustra a divisão adotada.

τ_{11}	a_{1111}	a_{1112}	a_{1113}	a_{1121}	a_{1122}	a_{1123}	a_{1131}	a_{1132}	a_{1133}	$\dot{\epsilon}_{11}$
τ_{12}	a_{1211}	a_{1212}	a_{1213}	a_{1221}	a_{1222}	a_{1223}	a_{1231}	a_{1232}	a_{1233}	$\dot{\epsilon}_{12}$
τ_{13}	a_{1311}	a_{1312}	a_{1313}	a_{1321}	a_{1322}	a_{1323}	a_{1331}	a_{1332}	a_{1333}	$\dot{\epsilon}_{13}$
τ_{21}	a_{2111}	a_{2112}	a_{2113}	a_{2121}	a_{2122}	a_{2123}	a_{2131}	a_{2132}	a_{2133}	$\dot{\epsilon}_{21}$
τ_{22}	a_{2211}	a_{2212}	a_{2213}	a_{2221}	a_{2222}	a_{2223}	a_{2231}	a_{2232}	a_{2233}	$\dot{\epsilon}_{22}$
τ_{23}	a_{2311}	a_{2312}	a_{2313}	a_{2321}	a_{2322}	a_{2323}	a_{2331}	a_{2332}	a_{2333}	$\dot{\epsilon}_{23}$
τ_{31}	a_{3111}	a_{3112}	a_{3113}	a_{3121}	a_{3122}	a_{3123}	a_{3131}	a_{3132}	a_{3133}	$\dot{\epsilon}_{31}$
τ_{32}	a_{3211}	a_{3212}	a_{3213}	a_{3221}	a_{3222}	a_{3223}	a_{3231}	a_{3232}	a_{3233}	$\dot{\epsilon}_{32}$
τ_{33}	a_{3311}	a_{3312}	a_{3313}	a_{3321}	a_{3322}	a_{3323}	a_{3331}	a_{3332}	a_{3333}	$\dot{\epsilon}_{33}$

Legenda

 Classe 1	 Classe 3	 Classe 5.1
 Classe 2	 Classe 4	 Classe 5.2

Matriz 1 – Matriz 9x9 que representa a equação 123

Após esta separação, são consideradas algumas transformações, sendo a primeira delas a seguinte (rotação de 90°):

$$\left. \begin{aligned} \delta_1' &= \delta_2 \\ \delta_2' &= \delta_3 \\ \delta_3' &= \delta_1 \end{aligned} \right\} \tag{A2.4}$$

Os deltas são vetores unitários e os índices indicam os eixos coordenados. A linha junto ao delta representa a transformação no sistema de coordenadas. Se a_{ij} são componentes de um tensor isotrópico de segunda ordem, então é possível provar:

Teorema 2.

$$a_{ij} = \alpha \delta_{ij} \tag{A2.5}$$

em que: α é um escalar.

Prova do Teorema 2. Para qualquer escolha de um sistema de coordenadas, tem-se $a_{ij}' = a_{ij}$ já que o tensor é isotrópico. Inicialmente, considera-se a transformação definida pela equação 1. Uma representação geométrica de tal transformação pode ser vista na Figura A2.1 e, como consequência, obtém-se:

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 1$$

e, para os demais, $\alpha_{ij} = 0$ (A2.6)

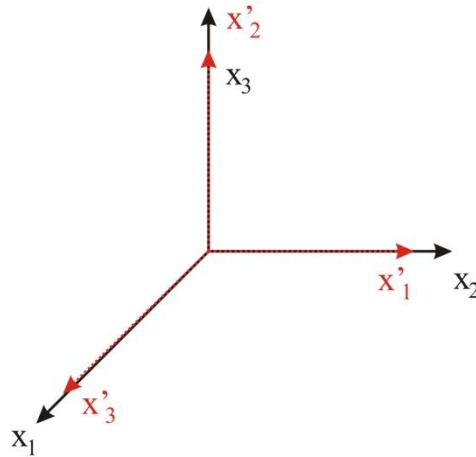


Figura A2.1 – Teorema 2 – Os símbolos vermelhos tracejados compõem o sistema transformado.
Fonte: adaptado de Chandrasekharaiah e Debnath (1994).

O uso da equação anterior, lembrando que $a_{ij}' = a_{ij}$, permite escrever que:

$$a_{11} = a_{11}' = \alpha_{1p} \alpha_{1q} a_{pq} = a_{22} \quad (\text{A2.7})$$

Em que $\alpha_{1p} \alpha_{1q} a_{pq}$ é a regra de transformação de coordenadas para tensores de segunda ordem.

Foi considerada a única possibilidade que não anula a operação, isto é, $p=q=2$. De modo similar, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{33} = a_{11} \\ a_{12} &= a_{23} = a_{31} \\ a_{21} &= a_{32} = a_{13} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

Utiliza-se agora a seguinte transformação:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1' &= \delta_2 \\ \delta_2' &= -\delta_1 \\ \delta_3' &= \delta_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.9})$$

Esta transformação tem as seguintes conseqüências:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_{33} = 1 \\ \alpha_{21} &= -1 \\ \alpha_{ij} &= 0, \text{ para os demais} \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

O uso da equação A2.10, lembrando que $a_{ij}' = a_{ij}$, permite escrever que:

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{13}' = \alpha_{1p} \alpha_{3q} a_{pq} = a_{23} \\ a_{23} &= a_{23}' = \alpha_{2p} \alpha_{3q} a_{pq} = -a_{13} \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

Estas equações mostram que:

$$a_{13} = a_{23} = 0 \quad (\text{A2.12})$$

Finalmente, pode-se chegar à seguinte conclusão (combinando a equação A2.12 com parte da equação A2.8):

$$a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0 \quad (\text{A2.13})$$

As equações A2.12 e A2.13 contém 6 termos do tensor a_{ij} e mostram que apenas os termos da diagonal principal são diferentes de zero. Definindo os termos da diagonal principal como sendo iguais à unidade, tem-se: $a_{ij} = \alpha \delta_{ij}$. Com isto fica demonstrado o Teorema 2.

A regra de transformação para um tensor de quarta ordem junto com a condição de isotropia e o uso da equação A2.6 leva aos seguintes desenvolvimentos e conclusões:

$$1) a_{1111} = a_{1111}' = \alpha_{1p} \alpha_{1q} \alpha_{1r} \alpha_{1s} a_{pqrs} = a_{2222} \quad (\text{A2.14})$$

De modo análogo, obtém-se:

$$a_{2222} = a_{3333} \quad (\text{A2.15})$$

$$2) a_{1122} = a_{1122}' = \alpha_{1p} \alpha_{1q} \alpha_{2r} \alpha_{2s} a_{pqrs} = a_{2233} \quad (\text{A2.16})$$

De modo análogo, obtém-se:

$$a_{2233} = a_{3311} \quad (\text{A2.17})$$

$$3) a_{2211} = a_{2211}' = \alpha_{2p} \alpha_{2q} \alpha_{1r} \alpha_{1s} a_{pqrs} = a_{3322} \quad (\text{A2.18})$$

De modo equivalente, obtém-se:

$$a_{3322} = a_{1133} \quad (\text{A2.19})$$

$$4) a_{1212} = a_{1212}' = \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{1r} \alpha_{2s} a_{pqrs} = a_{2323} \quad (\text{A2.20})$$

De modo análogo, obtém-se:

$$a_{2323} = a_{3131} \quad (\text{A2.21})$$

$$5) a_{2121} = a_{2121}' = \alpha_{2p} \alpha_{1q} \alpha_{2r} \alpha_{1s} a_{pqrs} = a_{3232} \quad (\text{A2.22})$$

De modo análogo, obtém-se:

$$a_{3232} = a_{1313} \quad (\text{A2.23})$$

$$6) a_{1221} = a_{1221}' = \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{2r} \alpha_{1s} a_{pqrs} = a_{2332} \quad (\text{A2.24})$$

De modo análogo, obtém-se:

$$a_{2332} = a_{3113} \quad (\text{A2.25})$$

$$7) a_{2112} = a_{2112}' = \alpha_{2p} \alpha_{1q} \alpha_{1r} \alpha_{2s} a_{pqrs} = a_{3223} \quad (\text{A2.26})$$

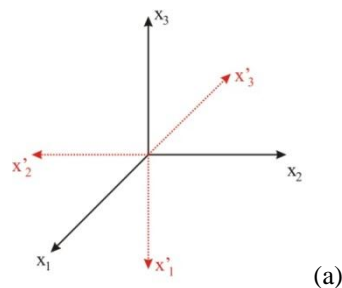
De modo análogo, obtém-se:

$$a_{3223} = a_{1331} \quad (\text{A2.27})$$

A próxima transformação de coordenadas é:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1' &= -\delta_3 \\ \delta_2' &= -\delta_2 \\ \delta_3' &= -\delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.28})$$

A sua representação geométrica pode ser vista na Figura A2.2(a), que segue a mesma lógica da Figura A2.1 quanto aos símbolos utilizados.



Em que :

	δ_1	δ_2	δ_3
δ_1'	0	0	-1
δ_2'	0	-1	0
δ_3'	-1	0	0

(b)

Figura A2.2 – Teorema 1: (a) representação geométrica e (b) tabela direcional de co-senos

Para esta transformação, é verdade afirmar que (ver Figura A2.2(b)):

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \alpha_{22} = \alpha_{31} = -1 \\ \alpha_{ij} &= 0, \text{ para os demais} \end{aligned} \quad (\text{A2.29})$$

Utilizando a equação A2.29 e a regra de transformação de coordenadas para tensores de quarta ordem junto com a condição de isotropia, obtém-se:

$$a_{1122} = a_{1122}' = \alpha_{1p} \alpha_{1q} \alpha_{2r} \alpha_{2s} a_{pqrs} = a_{3322} \quad (\text{A2.30})$$

O resultado positivo encontrado na equação A2.30 se deve às operações sucessivas com o número -1, ou seja: $(-1).(-1).(-1).(-1) = 1$. De modo análogo ao que foi feito para obtenção da equação A2.30, chega-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} a_{1212} &= a_{3232} \\ a_{1221} &= a_{3223} \end{aligned} \tag{A2.31}$$

Os resultados obtidos para a Classe 1, expressos pelas equações 11 e 12, mostram que todos os componentes desta classe são iguais, de tal maneira que podem ser representados por um escalar η :

$$a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = \eta \tag{A2.32}$$

As equações A2.16 a A2.19 e a equação A2.30 mostram que todos os componentes pertencentes a Classe 2 são iguais:

$$a_{1122} = a_{2233} = a_{3311} = a_{2211} = a_{3322} = a_{1133} = \alpha \tag{A2.33}$$

Todos os componentes pertencentes a Classe 3 são iguais, de acordo com as equações A2.20 a A2.23 e a equação A2.31:

$$a_{1212} = a_{2323} = a_{3131} = a_{3232} = a_{1313} = a_{2121} = \beta \tag{A2.34}$$

As equações A2.24 a A2.27 e a equação A2.31 mostram que todos os componentes da Classe 4 são iguais:

$$a_{1221} = a_{2332} = a_{3113} = a_{2112} = a_{3223} = a_{1331} = \gamma \tag{A2.35}$$

A partir do que foi exposto anteriormente, pode-se afirmar que η , α , β e γ possuem os mesmos valores em qualquer sistema de coordenadas. Neste estágio da prova, a atenção é voltada para os sessenta elementos da classe restante (Classe 5). Nesta classe um dos subscritos é diferente dos 3 restantes. Sendo um diferente dos três restantes, existem as seguintes possibilidades (ver matriz no início da prova): Classe 5.1 - Componentes com três índices iguais (ex.: a_{1112} , a_{1113} , a_{1131} , etc.) e Classe 5.2 - Componentes com dois índices iguais e os outros dois diferentes (ex.: a_{1123} , a_{1132} , a_{2132} , etc.). Considera-se a seguinte transformação de coordenadas (giro de 180° em torno de x_1):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1' = \delta_1 \\ \delta_2' = -\delta_2 \\ \delta_3' = -\delta_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A2.36})$$

Isto tem como consequência o seguinte resultado:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{22} = -1 \\ \alpha_{33} = -1 \\ \text{e zero para os demais } a_{ij} \end{array} \quad (\text{A2.37})$$

Para $i, j, k \neq 1$, pode-se escrever (na equação seguinte, equação A2.38, o caractere 1 é o número um e não a letra “L” minúscula):

$$a_{ijk} = a_{ijk}' = \alpha_{ip}\alpha_{iq}\alpha_{jr}\alpha_{ks}a_{pqrs} = \alpha_{iq}\alpha_{jr}\alpha_{ks}a_{iqr} = -a_{ijk} \quad (\text{A2.38})$$

Como exemplo, apresenta-se avaliações para as componentes a_{1222} e a_{1131} (Classe 5.1) e a_{3312} (Classe 5.2):

$$a_{1222} = a_{1222}' = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{22}\alpha_{22}a_{1222} = (1)(-1)(-1)(-1) = -a_{1222} \Rightarrow a_{1222}(1+1) = 0 \Rightarrow a_{1222} = 0$$

$$a_{1131} = a_{1131}' = \alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{33}\alpha_{11}a_{1131} = (1)(1)(-1)(1) = -a_{1131} \Rightarrow a_{1131}(1+1) = 0 \Rightarrow a_{1131} = 0$$

$$a_{3312} = a_{3312}' = \alpha_{33}\alpha_{33}\alpha_{11}\alpha_{22}a_{3312} = (-1)(-1)(1)(-1) = -a_{3312} \Rightarrow a_{3312}(1+1) = 0 \Rightarrow a_{3312} = 0$$

Uma vez que i, j e k devem ser diferentes de 1, conclui-se que a_{ijk} só pode ser igual a zero.

De modo similar, pode-se demonstrar que:

$$a_{ijk} = a_{ijk} = a_{ijk} = 0, \text{ para } i, j, k \neq 1 \quad (\text{A2.39})$$

Considera-se agora mais duas transformações, representadas pelas equações A2.40 e A2.41 (estas transformações são necessárias para provar que os demais termos pertencentes à classe 5 são iguais a zero. A transformação anterior mostra que alguns destes termos são iguais mas não provam que são nulos.):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1' = -\delta_1 \\ \delta_2' = \delta_2 \\ \delta_3' = -\delta_3 \end{array} \right\} \quad (\text{Rotação de } 180^\circ \text{ em torno de } x_2) \quad (\text{A2.40})$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1' = -\delta_1 \\ \delta_2' = -\delta_2 \\ \delta_3' = \delta_3 \end{array} \right\} \quad (\text{Rotação de } 180^\circ \text{ em torno de } x_3) \quad (\text{A2.41})$$

Pode-se mostrar que:

$$a_{2ijk} = a_{i2jk} = a_{ij2k} = a_{ijk2} = 0, \text{ para } i, j, k \neq 2 \quad (\text{A2.42})$$

$$a_{3ijk} = a_{i3jk} = a_{ij3k} = a_{ijk3} = 0, \text{ para } i, j, k \neq 3 \quad (\text{A2.43})$$

Deste modo, conclui-se que todos os componentes da Classe 5 são iguais a zero. Conseqüentemente, pelo menos um dos componentes pertencentes às classes 1 a 4 deve ser diferente de zero. Em outras palavras, pelo menos uma das constantes η , α , β e γ deve ser diferente de zero. O último estágio da prova requer a introdução dos números c_{ijkl} (que formam um tensor isotrópico de quarta ordem) definidos como:

$$c_{ijkl} = a_{ijkl} - (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A2.44})$$

O segundo termo do segundo membro da equação A2.44 é obtido como uma combinação linear das componentes não nulas do tensor a_{ijkl} . Utilizando as equações A2.32 a A2.35 e o fato de que todos os componentes de a_{ijkl} são iguais a zero para a Classe 5, verifica-se, por meio da equação A2.44, que:

$$\begin{aligned} c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} &= \eta - (\alpha + \beta + \gamma) \\ c_{ijkl} &= 0 \text{ para os demais.} \end{aligned} \quad (\text{A2.45})$$

Na equação A2.44, c_{ijkl} é diferente de zero se todos os índices forem iguais (Isto pode ser verificado substituindo-se i, j, k, l pelos diferentes valores pertencentes às classes 1 a 4). Até então foram efetuadas rotações de 90° e 180° . Rotações arbitrárias devem produzir os mesmos resultados, respeitando a isotropia assumida no enunciado do teorema. Uma última transformação é necessária, sendo realizada considerando-se uma rotação de 45° em torno de x_3 (lembrando que $\cos 45^\circ = 2^{1/2}/2 = 1/2^{1/2}$):

$$\left. \begin{aligned} \delta_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1 + \delta_2) \\ \delta_2' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_2 - \delta_1) \\ \delta_3' &= \delta_3 \\ \alpha_{33} &= 1 \\ \alpha_{11} = \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \alpha_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ os demais } \alpha_{ij} \text{ são nulos} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.46})$$

Com esta transformação e a equação A2.45, lembrando que o tensor c é isotrópico ($c_{ijkl}=c_{ijkl}$), vem:

$$c_{1111} = c_{1111}' = \alpha_{1p}\alpha_{1q}\alpha_{1r}\alpha_{1s}c_{pqrs} = (\alpha_{11}^4 + \alpha_{12}^4 + \alpha_{13}^4)c_{1111} = (\alpha_{11}^4 + \alpha_{12}^4 + 0)c_{1111} = 2\alpha_{11}^4 = 2\frac{1}{(2^{1/2})^4} = \frac{1}{2}c_{1111} \Rightarrow c_{1111} = \frac{1}{2}c_{1111} \Rightarrow c_{1111} = 0 \quad (\text{A2.47})$$

Portanto, $c_{1111} = 0$. Conseqüentemente, a equação A2.45 resulta $c_{2222}=c_{3333}=0$. Assim, todos os 81 números definidos por c_{ijkl} na equação A2.44 são anulados, restando a equação A2.3, enunciada no Teorema 1. A prova do Teorema 1 termina aqui.

A prova apresentada para o teorema 1 foi construída com base na referência [4] e com elementos encontrados nas referências [1], [2], [3], [5], [6], [8] e [9]. A matriz 1, após as conclusões obtidas anteriormente, assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{32} \\ \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}$$

Figura A2.3 - Matriz 2 – Após as conclusões envolvidas na demonstração do Teorema 1

Butkov (1988, p.689) segue um caminho diferente, representando o tensor a_{ijkl} da seguinte maneira:

$$a_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} + \eta\delta_{ijkl} \quad (\text{A2.48})$$

em que δ_{ijkl} é o delta de Kronecker generalizado, igual a um se todos os índices forem iguais e igual a zero nos demais casos. O referido autor argumenta que para uma rotação arbitrária infinitesimal, o último termo da equação A2.48 viola a exigência de isotropia. Como consequência, obtém-se a equação do Teorema 1.

Conclusão da demonstração da equação A2.2. O Teorema 1 afirma: “se a_{ijkl} são componentes de um tensor isotrópico de quarta ordem, então é válida a seguinte relação”:

$$a_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{A2.2})$$

em que α , β e γ são escalares.

Os desenvolvimentos precedentes estão baseados na condição de isotropia, não tendo sido utilizada a exigência de simetria. Ao aplicar a condição $a_{ijkl} = a_{ijlk}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} a_{ijkl} = a_{ijlk} &= \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} = \alpha \delta_{ij} \delta_{lk} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl} \Rightarrow \\ \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} &= \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl} \Rightarrow \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) = 0 \Rightarrow \\ \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) - \gamma (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) &\Rightarrow (\beta - \gamma) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = 0 \Rightarrow \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \gamma \end{aligned}$$

Com este resultado a equação anterior assume a forma:

$$a_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A2.49})$$

Fazendo $\alpha = \lambda$ e $\gamma = \mu$, a equação A2.49 passa a ser idêntica à equação procurada:

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A2.50})$$

A.2.2 DETALHES SOBRE A SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO 4.128 (Capítulo 4)

Esta parte deste apêndice tem como objetivo demonstrar de que maneira a equação A2.51 (Equação 4.129) pode ser obtida a partir da equação A2.52 (Equação 4.128).

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A2.51})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \quad (\text{A2.52})$$

Parte 1. A primeira parte da dedução envolve apenas a substituição do tensor viscoso no tensor das tensões, sendo esta a razão da existência do campo hidrostático. A segunda parte tem como objetivo analisar a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A2.53})$$

Lembrando que o delta de Kronecker é igual a 1 se $i=j$ e igual a zero se $i \neq j$, o termo entre parênteses pode ser simplificado para:

$$\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) = 2 \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \quad (\text{A2.54})$$

Isto leva em conta que $l=k$, pois, caso contrário, a expressão é anulada por δ_{kl} . Combinando as equações A2.53 e A2.54, obtém-se:

$$\lambda \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \quad (\text{A2.55})$$

Assim fica demonstrado o primeiro termo do segundo membro da equação A2.52.

Parte 2. Analisa-se agora a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A2.56})$$

Mais uma vez será utilizado o fato de que o delta de Kronecker é igual a 1 se $i=j$ e igual a zero se $i \neq j$. Aplicando a propriedade distributiva, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \mu \left[\delta_{ik} \delta_{jl} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) + \delta_{il} \delta_{jk} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) \right] \quad (\text{A2.57})$$

Para que o delta não anule o termo a seguir, efetuam-se as seguintes operações:

$$\delta_{ik} \delta_{jl} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)$$

$$\text{A) } k=l: \delta_{il} \delta_{jk} \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_1} \right)$$

$$\text{B) } k=j: \delta_{il} \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_1} \right) \text{ em que: } \delta_{jk} = \delta_{jj} = 1$$

$$\text{C) } l=i: \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_1} \right), \text{ em que } \delta_{ii} = 1$$

Para o termo $\delta_{il} \delta_{jk} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_1} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right)$, efetua-se a mesma análise:

$$\text{A) } l=k: \delta_{ik} \delta_{jl} \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_1} \right)$$

$$\text{B) } k=j: \delta_{ij}\delta_{jl}\left(\frac{\partial V_l}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_l}\right)$$

$$\text{C) } l=i: \delta_{ij}\delta_{ji}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\text{D) } i=j: \delta_{ii}\delta_{ii}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Combinando os resultados:

$$\frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right] = \frac{2}{2}\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Portanto:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Solução alternativa da Parte 2:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mu\left[\delta_{ik}\delta_{jl}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k}\right) + \delta_{il}\delta_{jk}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k}\right)\right] \stackrel{k=i}{=} \frac{1}{2}\mu\left[\delta_{ii}\delta_{jl}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_i}\right) + \delta_{il}\delta_{ji}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_i}\right)\right] \stackrel{l=j}{=} \\ & \frac{1}{2}\mu\left[\delta_{ij}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\delta_{ji}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right] \stackrel{j=i}{=} \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ii}\delta_{jj}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] = \\ & \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

Com este apêndice a dedução da equação de Navier-Stokes está finalizada.

A2.3 REFERÊNCIAS

- [1] BATRA, R.C. Elements of continuum mechanics. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [2] BUTKOV, E. Física matemática. LTC, Rio de Janeiro, 1988.
- [3] CHADWICK, P. Continuum mechanics: concise theory and problems. Dover , 1999.
- [4] CHANDRASEKHARAI AH, D.S.; DEBNATH, L. Continuum mechanics. Academic Press, Inc., San Diego, 1994.
- [5] COIMBRA, A.L. Mecânica dos meios contínuos. AO Livro técnico S.A. Rio de Janeiro, 1967.
- [6] COIMBRA, A.L. Lições de mecânica do contínuo. Edgar Blücher, São Paulo, 1978.
- [7] HUGHES, W.F.; BRIGHTON, J.A. Fluid dynamics. McGrawHill, 1999.
- [8] SÁNCHEZ, E. Tensores. Rio de Janeiro, Interciência, 2008.
- [9] SPENCER, A.J.M. Continuum mechanics. Dover, 2004.

APÊNDICE 3. INFORMAÇÕES ADICIONAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES.**SUMÁRIO**

A3.1 - experimento numérico 18.1, apresentado na Figura 6.5.	491
A3.2 - Experimento numérico 18.2, apresentado na Figura 6.5.....	494
A3.3 - Experimento numérico 18.3, apresentado na Figura 6.5.....	497
A3.4 - Experimento numérico 18.4, apresentado na Figura 6.5.....	500
A3.5 - Experimento numérico 18.5, apresentado na Figura 6.5.....	503
A3.6 - Experimento numérico 18.6 (3D), apresentado na Figura 6.6.	506
A3.7 - Experimento numérico SF 1.1.....	509
A3.8 - Experimento numérico SF 1.2.....	512
A3.9 - Experimento numérico SF 1.3.....	515
A3.10 - Experimento numérico SF 1.8.....	517
A3.11 - Experimento numérico SF 1.12.....	520
A3.12 - Experimento numérico SF 1.19.....	523
A3.13 - Experimento numérico SF 1.26.....	526

A3.1 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.1, APRESENTADO NA FIGURA 6.5.

Tabela 3.1 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.1.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	494958	492392

Tabela 3.2 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.1.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B118
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.3 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.1.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F152.118
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F156.118
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F155.118
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F120.118, F119.118
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.2 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.2, APRESENTADO NA FIGURA 6.5.

Tabela 3.4 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.2.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	229686	227276

Tabela 3.5 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.2

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B118
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.6 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.2.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F152.118
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F156.118
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	-
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F120.118, F119.118
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.3 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.3, APRESENTADO NA FIGURA 6.5.

Tabela 3.7 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.3.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	390884	194238

Tabela 3.8 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.3.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B118 2
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	RNG k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.9 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.3.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F152.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F156.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F155.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F120.118 2, F119.118 2
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.4 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.4, APRESENTADO NA FIGURA 6.5.

Tabela 3.10 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.4.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	390884	194238

Tabela 3.11 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.4.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B118 2
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	SSG Reynolds Stress
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.12 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.4.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F152.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F156.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F155.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F120.118 2, F119.118 2
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.5 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.5, APRESENTADO NA FIGURA 6.5.

Tabela 3.13 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.5.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	390884	194238

Tabela 3.14 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.5.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B118 2
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	Zero Equation
Homogeneous Model	On

Tabela 3.15 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.5.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F152.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F156.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F155.118 2
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Boundary - simetria	
	Type	SYMMETRY
	Location	F120.118 2, F119.118 2

	<i>Settings</i>	
	Boundary - Default Domain Default	
	Type	WALL
	Location	-
	<i>Settings</i>	
	Mass And Momentum	No Slip Wall
	Wall Roughness	Smooth Wall

A3.6 - EXPERIMENTO NUMÉRICO 18.6 (3D), APRESENTADO NA FIGURA 6.6.

Tabela 3.16 – Informações sobre a malha para o experimento numérico 18.6.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	3163724	3082500

Tabela 3.17 – Dados sobre o domínio do experimento numérico 18.6.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B100
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	On
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.18 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico 18.6.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F117.100
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.9100e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F121.100
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F120.100
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.7 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.1.

Tabela 3.19 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.1.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	402584	400228

Tabela 3.20 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.1.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B571
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.21 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.1.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F730.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	1.5000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F734.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F733.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F573.571, F572.571
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Rough Wall
Sand Grain Roughness Height	1.5000e-01 [mm]

A3.8 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.2.

Tabela 3.22 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.2.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	585882	583298

Tabela 3.23 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.2.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B571
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.24 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.2.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F730.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	1.2500e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F734.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F733.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F573.571, F572.571
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.9 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.3.

Tabela 3.25 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.3.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	585882	583298

Tabela 3.26 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.3.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B571
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.27 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.3.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F730.571
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	1.0000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio

Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Boundary - saida	
Type	OPENING
Location	F734.571
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Zero Gradient
Fluid	ar
Volume Fraction	Zero Gradient
Boundary - topo	
Type	OPENING
Location	F733.571
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F573.571, F572.571
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Smooth Wall

A3.10 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.8.

Tabela 3.28 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.8.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	946798	944210

Tabela 3.29 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.8.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B169
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.30 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.8.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F224.169
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	1.5000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio

Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Boundary - saida	
Type	OPENING
Location	F173.169
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Zero Gradient
Fluid	ar
Volume Fraction	Zero Gradient
Boundary - topo	
Type	OPENING
Location	F172.169
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F170.169, F171.169
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall

	Wall Roughness	Rough Wall
	Sand Grain Roughness Height	1.5000e-01 [mm]

A3.11 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.12.

Tabela 3.31 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.12.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	921602	919195

Tabela 3.32 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.12.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B493
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.33 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.12.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - Entrada	
	Type	INLET
	Location	F554.493
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.0000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio

Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Boundary - Saida	
Type	OPENING
Location	F558.493
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Zero Gradient
Fluid	ar
Volume Fraction	Zero Gradient
Boundary - Topo	
Type	OPENING
Location	F557.493
<i>Settings</i>	
Flow Regime	Subsonic
Mass And Momentum	Entrainment
Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
Turbulence	Zero Gradient
Fluid	agua
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	0.0000e+00
Fluid	ar
Volume Fraction	Value
Volume Fraction	1.0000e+00
Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F495.493, F494.493
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall

	Wall Roughness	Rough Wall
	Sand Grain Roughness Height	1.5000e-01 [mm]

A3.12 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.19.

Tabela 3.34 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.19.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	531752	528719

Tabela 3.35 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.19.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B424
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.36 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.19.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F559.424
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	2.0000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F565.424
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F564.424, F562.424, F563.424
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F426.424, F425.424
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Rough Wall
Sand Grain Roughness Height	1.5000e-01 [mm]

A3.13 - EXPERIMENTO NUMÉRICO SF 1.26.

Tabela 3.37 – Informações sobre a malha para o experimento numérico SF 1.26.

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	682598	679495

Tabela 3.38 – Dados sobre o domínio do experimento numérico SF 1.26.

Domain - Default Domain	
Type	Fluid
Location	B229
<i>Materials</i>	
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.1850e+00 [kg m ⁻³]
Gravity X Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Gravity Y Component	-g
Gravity Z Component	0.0000e+00 [m s ⁻²]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+01 [C]
Homogeneous Model	False
Turbulence Model	k epsilon
Homogeneous Model	On
Turbulent Wall Functions	Scalable

Tabela 3.39 – Dados sobre os contornos para o experimento numérico SF 1.26.

Domain	Boundaries	
Default Domain	Boundary - entrada	
	Type	INLET
	Location	F282.229
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Normal Speed
	Normal Speed	1.5000e+00 [m s ⁻¹]
	Turbulence	Low Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Boundary - saida	
	Type	OPENING
	Location	F287.229
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Zero Gradient
	Boundary - topo	
	Type	OPENING
	Location	F286.229, F285.229
	<i>Settings</i>	
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Entrainment
	Relative Pressure	0.0000e+00 [Pa]
	Turbulence	Zero Gradient
	Fluid	agua
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+00
	Fluid	ar
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+00

Boundary - simetria	
Type	SYMMETRY
Location	F231.229, F230.229
<i>Settings</i>	
Boundary - Default Domain Default	
Type	WALL
Location	-
<i>Settings</i>	
Mass And Momentum	No Slip Wall
Wall Roughness	Rough Wall
Sand Grain Roughness Height	1.5000e-01 [mm]