ANTONIO JOSÉ PRADO MARTINS SANTOS

**PROPOSTA DE AJUSTAMENTO PARA
MELHORIA DA CONFIABILIDADE E PRECISÃO
DOS PONTOS DE REDES GEODÉSICAS PARA
FINS TOPOGRÁFICOS LOCAIS**

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Engenharia Civil:
Transportes

Orientador: Prof. Dr. RICARDO ERNESTO SCHAAAL

São Carlos

2006

*A DEUS, inteligência Suprema e causa primária de toda
as coisas.*

*Aos meus pais que muito amo, Altair Prado Martins
Santos e Derivaldo Martins Santos, meus exemplos de
vida.*

*Aos meus queridos e amados irmãos, Jacqueline,
Jane, Zenaide, Patrícia, Derivaldo e Natália.*

*À minha adorada avó, Isolina e minha querida tia
Lita.*

*Aos meus queridos sobrinhos, Victor, Dhiovane,
Ingride, Isis e Dhiovana, que são meus amores.*

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Ricardo Ernesto Schaal, pelas críticas e sugestões neste trabalho.

Aos Professores Drs. Paulo César Lima Segantine e Irineu da Silva, pelo embasamento teórico que proporcionou o desenvolvimento deste trabalho e pelo apoio na pós-graduação.

Aos Professores Dra. Maria Teresa Françoso e Dr. Segundo Carlos Lopes

A amiga Prof. Doutora. Ana Paula Camargo Larocca pelo incentivo, críticas e ajuda na estruturação e revisão final deste trabalho.

Ao amigo Prof. Dr. Genival Corrêa, pelos conselhos.

Ao amigo Prof. Mst. Geraldo Passos Amorim, pela colaboração no entendimento e obtenção de materiais.

Ao amigo Mst. Rodrigo Leandro, pelo esclarecimento de dúvidas e envio de materiais solicitados.

Ao grande e especial amigo, José Antonio Bernardino Junior pelo constante apoio e incentivo.

Aos amigos João Olympio, Shirley, Lia, Cláudio, Rogério, Aline, Vivian, Daniela, Cida, Vitor, Deise, Cynthia, Idalíria, Celane, Viviane, Lucas, Artur, Cláudia, Rodrigo Pires, Karina, Anderson, Fernando, Luciano, Vanessa e Queli, pelo incentivo e força nos momentos difíceis.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Transportes da EESC-USP.

Aos demais amigos que sempre me incentivaram para esta conquista.

Ao CNPq, pela bolsa de estudos concedida.

*“Uma longa viagem começa com
um único passo”*

Lao-Tsé

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE SIMBOLOS	vi
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
CAPÍTULO 1	1
1 Considerações Iniciais	2
1.1 Motivação	5
1.1.1 Contextualização Dentro da Área de Transportes	6
1.2 Objetivo	6
1.2.1 Objetivos subjacentes	6
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
2 Redes Geodésicas	9
2.1 Generalidades	9
2.2 Ajustamento de Redes Geodésicas	10
2.2.1 Introdução	10
2.2.2 Conceituação Básica	11
2.2.2.1 Modelo Matemático	12
2.2.2.2 Matriz Variância-Covariância	13
2.2.2.3 Fator de Variância	13
2.2.2.4 Atribuição de Pesos nas Observações	14
2.2.3 Método Paramétrico	18
2.2.4 Ajustamento de Redes GPS pelo Método Paramétrico	18
2.2.5 Precisão e Elipse de Erro	23
2.2.6 Tipos de erros e análises estatística dos erros	25
2.2.6.1 Erros	25
2.2.6.2 Tipos de erros	26
2.2.6.3 Análise estatística dos erros	27
2.3 Detecção e Eliminação de Erros Grosseiros (Outliers)	29
2.3.1 Introdução	29
2.3.2 Hipóteses para Detecção de Outliers	31

2.3.2.1	Hipóteses Relacionadas às Observações	31
2.3.2.2	Hipóteses Relacionadas aos Resíduos	33
2.3.2.3	Relação entre Resíduos e Erros Grosseiros	35
2.3.3	Testes para Detecção e Localização de Outliers	39
2.3.3.1	Teste Global sobre os Resíduos	40
2.3.3.1.1	Teste Bilateral	41
2.3.3.1.2	Teste Unilateral	42
2.3.3.1.3	Análise do Resultado do Teste Global	42
2.3.3.2	Teste Data Snooping	44
2.3.3.3	Teste Tau (τ) sobre os Resíduos	46
2.3.4	Eliminação e Localização de Erros Grosseiros	48
2.4	Confiabilidade de Redes Geodésicas	49
2.4.1	Vetor Erro Marginal Detectável	49
2.4.1.1	Erro Marginal Detectável de um Erro Grosseiro Individual	51
2.4.1.2	Escolha do Nível de Significância α , α_0 e da Potência do Teste $1 - \beta_0$	54
2.4.2	Confiabilidade Interna, Absorção e Confiabilidade Externa	56
2.4.2.1	Confiabilidade Interna	56
2.4.2.2	Absorção	57
2.4.2.3	Confiabilidade Externa	58
CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS		60
3	Introdução	61
3.1	Materiais utilizados	61
3.2	Método	61
3.2.1	Área de Estudo e Implantação dos Marcos em Campo	62
3.2.2	Levantamento de Campo	65
3.2.3	Processamento das Observações	65
3.2.4	Ajustamento e Análise da Qualidade da Rede	66
3.2.4.1	Apresentação para as Estratégias de Ajustamento e Análise da Qualidade da Rede em estudo de caso.	70
3.2.5	Análise da confiabilidade da rede	77
3.2.6	Teste da Qualidade da Rede	78
3.2.6.1	Procedimentos de campo para o controle linear e angular	79
CAPÍTULO 4 – RESULTADOS		83
4	Introdução	84
4.1	Levantamento da Rede	84
4.2	Processamento GPS.	84
4.3	Ajustamento	85
4.3.1	Ajustamento no MathCAD.	86
4.3.2	Estratégias aplicadas:	89
4.3.3	Alterando os erro de componentes	90
CAPÍTULO 5 – NÁLISE DOS RESULTADOS		93
5	Introdução	94

5.1	Comparação do resultado do ajustamento das três estratégias com os resultados do Ski-Pro e Ashtech Solution	94
5.2	Análise da Confiabilidade Interna e Externa da Rede	98
5.3	Análise da Qualidade da Rede	105
5.3.1	Linear	105
5.3.2	Orientação	106
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES		108
6.1	Conclusões	109
6.2	Recomendações	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		111
ANEXO A		117
ANEXO A1		123
ANEXO A2		125
ANEXO A3		130
ANEXO B		133
ANEXO C		137
ANEXO D		140
ANEXO E		141
ANEXO F		147
ANEXO G		148
ANEXO H		149
APENDICE I		I
APENDICE II		III
APENDICE III		IV

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Elipse de erro de um ponto _____	23
Figura 2 Elipse de erro e sua curva podária _____	25
Figura 3 Representação dos erros Tipo I e Tipo II _____	28
Figura 4 Regiões de aceitação e rejeição do teste bidimensional _____	41
Figura 5 Determinação do erro marginal detectável - teste dos resíduos padronizados _____	53
Figura 6 Monograma de Baarda para $\beta_0 = 80\%$ _____	56
Figura 7 Campus II da EESC _____	62
Figura 8 Projeto da rede do Campus II _____	63
Figura 9 Organograma para ajustamento da rede _____	68
Figura 10 Proposta de ajustamento e Análise estatística da rede _____	69
Figura 11 Controle linear e angular da rede ajustada (situação hipotética) _____	81
Figura 12 Gráficos de comparação das coordenadas do ponto M01 obtidos dos diversos ajustamentos _____	95
Figura 13 Gráficos de comparação das coordenadas do ponto M06 obtidos dos diversos ajustamentos _____	96
Figura 14 Gráficos de comparação das coordenadas do ponto M09 obtidos dos diversos ajustamentos _____	97
Figura 15 Gráfico da confiabilidade Externa nas 3 estratégias _____	99
Figura 16 Gráfico da confiabilidade externa dos vértices da rede _____	102
Figura 17 Precisão das coordenadas obtidas no ajustamento _____	106
Figura 18 Controle linear realizado com Estação Total _____	105
Figura 19 Controle angular realizado com Estação Tota _____	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Quadro de decisões e suas probabilidades	29
Tabela 2 Controlabilidade de observações por meio de redundância parcial	38
Tabela 3 Valores de parâmetro não - centralidade χ^2_0 para ($1 - \beta_0 = 0,80$).	51
Tabela 4 níveis de probabilidade e parâmetro de não centralidade	54
Tabela 5 Tempo gasto no processamento dos vetores	84
Tabela 6 Teste Qui-quadrado aceito após escalonamento da MVC ($1 - \alpha = 59\%$)	87
Tabela 7 Erros detectados pelo teste data snooping	88
Tabela 8 Significância dos erros	89
Tabela 9 Novos erros grosseiros detectados ao eliminar componentes	90
Tabela 10 Teste Data Snooping para erros de 5 cm	91
Tabela 11 Teste Data Snooping para erros de 10 cm	91
Tabela 12 Significância dos erros	91
Tabela 13 Coordenadas topográficas do ponto M01 pelos 5 ajustamentos	95
Tabela 14 Coordenadas topográficas do ponto M06 pelos 5 ajustamentos	96
Tabela 15 Coordenadas topográficas do ponto M09 pelos 5 ajustamentos	97
Tabela 16 Confiabilidade interna média	98
Tabela 17 Configuração do equipamento (E.T.) para análise da qualidade em campo	105
Tabela 18 Resíduos das distâncias entre estação e ré nas diferentes estratégias e Estação Total	105
Tabela 19 Resultados das distâncias entre pontos irradiados da rede	106
Tabela 20 Qualidade angular do ajustamento na estratégia 1	107
Tabela 21 Qualidade angular do ajustamento na estratégia 2	107
Tabela 22 Qualidade angular do ajustamento na estratégia 3	107

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbf{A}$	matriz coeficiente dos parâmetros da equação das observações
A_i	absorção
E	esperança matemática ou expectância
$F_{\alpha; r1, r2}$	teste da distribuição F de SNEDECOR
H_a	hipótese alternativa
H_0	hipótese nula
$\mathbf{I}$	matriz Identidade
$\mathbf{L}$	diferença entre o vetor das observações brutas e o vetor das observações aproximadas
$\mathbf{L}_a$	vetor das observações ajustadas
$\mathbf{L}_b$	vetor das observações brutas
l_a	observação ajustada
l_b	observação bruta
$\mathbf{L}_o$	vetor observação aproximado, obtido através dos parâmetros aproximados.
$\mathbf{N}$	matriz dos coeficientes dos parâmetros desconhecidos da equação normal
$\mathbf{N}^{-1}$	matriz dos co-fatores dos parâmetros ajustados ($\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$)

$N(\mu, \sigma) = qnorm(\mu, \sigma)$	distribuição normal
$n(0, 1)$	distribuição normal reduzida
n	número de observações
$\mathbf{P}$	peso das observações
p_i	peso da i -ésima observação (elemento diagonal da matriz $\mathbf{P}$)
$\mathbf{R}$:	Matriz com informações sobre a geometria da rede ($\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P}$)
r	redundância total ($r = n - u$)
r_i	número de redundância (elemento da diagonal da matriz $\mathbf{R}$)
$(1 - r_i)$	número de absorção
$\mathbf{Q}_{ll}$	matriz co-fator dos pesos das observações ($\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$)
$\bar{\mathbf{Q}}_{LL}$	matriz co-fator das observações ajustadas
$\mathbf{Q}_{vv}$	matriz co-fator dos resíduos
$\mathbf{Q}_{xx}$	matriz dos co-fatores dos parâmetros ajustados (igual a $\mathbf{N}^{-1}$)
q_{vv}	elementos da diagonal da matriz co-fator dos resíduos
u	número de parâmetros desconhecidos
$\mathbf{V}$	vetor dos resíduos
$\hat{v}_i$	resíduos individuais correspondentes aos erros aleatórios
$\mathbf{X}$	vetor correção dos parâmetros desconhecidos
$\mathbf{X}_{ajust}$	vetor dos parâmetros desconhecidos ajustados
$\mathbf{X}_0$	vetor dos parâmetros desconhecidos aproximados
x, y, z	coordenadas cartesianas do ponto nos eixos X, Y, Z
w_i	resíduo padronizado da i -ésima observação

$\tilde{w}$	resíduos padronizados eivados de erro grosseiro
α	nível de significância de teste estatístico multidimensional
α_o	nível de significância de teste estatístico unidimensional
β	probabilidade do erro tipo II em testes multidimensionais
β_o	probabilidade do erro tipo II em testes unidimensionais
$1 - \beta$	potência do teste de hipótese
χ^2	distribuição qui-quadrado
∇_l	vetor erro grosseiro
∇_{l_i}	erro grosseiro individual
∇_{oli}	erro marginal detectável
∇_{xoi}	efeito de erro grosseiro não detectável em uma observação nas coordenadas de um vértice.
∇v_i	resíduos correspondentes ao vetor erros grosseiro ∇_l
δ_o	parâmetro não-centralidade do teste unidimensional ($\delta_o = \sqrt{\lambda_o}$)
λ_o	parâmetro de não-centralidade do teste global
γ_{oi}	medida de confiabilidade externa global
σ_o^2	variância “a priori”
$\tilde{\sigma}_o^2$	variância “a priori” incorreta
$\hat{\sigma}_o^2$	variância “a posteriori”
σ_x^2, σ_y^2 ou σ_e^2, σ_n^2	variância das coordenadas ajustadas X e Y ou E e N
Σ_{lb}	matriz variância-covariância das observações
$\hat{\Sigma}_{lb}$	matriz variância-covariância das observações escalonadas

$\Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$	matriz variância-covariância dos resíduos
$\tilde{\Sigma}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$	matriz variância-covariância dos resíduos incorreta
$\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$	matriz variância-covariância dos parâmetros desconhecidos e das coordenadas ajustadas
θ	ângulo do semi-eixo principal da elipse de erro
τ_r	distribuição τ (tau)
S	grau de liberdade

RESUMO

SANTOS, A. J. P. M. (2006). *Proposta de ajustamento para melhoria da confiabilidade e precisão dos pontos de redes geodésicas para fins topográficos locais*. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

Em levantamentos geodésicos planialtimétrico se faz necessário conhecer a qualidade das coordenadas estimadas de acordo com o tipo de aplicação a que se destinam. Este trabalho mostra de modo didático o estudo das teorias de análise de qualidade de rede GPS, baseando-se nas teorias de confiabilidade de rede propostos por Baarda, em 1968. As hipóteses estatísticas são fundamentais para elaboração dos testes para detecção de erros grosseiros (*outliers*), que constitui a base para a análise da confiabilidade de rede. Neste trabalho são propostas três estratégias, desenvolvidas em MathCAD, para a análise da qualidade do ajustamento. Os resultados obtidos foram comparados com os dos programas comerciais, Ski-Pro e Ashtech Solution, e também validados por medidas de campo feitas com estação total. As três estratégias propostas, para a rede em estudo implantada no Campus II da USP, apresentaram bons resultados.

Palavras chave: redes geodésicas, modelo paramétrico, *outliers*, confiabilidade.

ABSTRACT

SANTOS, A. J. P. M. (2006). *Adjustment proposal for improving of the reliability and precision of geodetic network points for local*. Dissertation (Master's degree). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

Geodetic planimetric survey requires the knowledge of the coordinates quality, estimated according to the final application. This work shows a didactic way on the study on theoretical analyses on quality of GPS networks, based on reliability network proposed by Baarda in 1968. Statistical hypotheses are fundamental to development of outliers' detection tests, which consists the base for network reliability. In this work, three strategies are proposed, developed in MathCAD, to analyze adjustment quality. The results were compared with the results of two commercial programs, Ski-Pro and Ashtech Solution, and also field validation measurements with total station. The three proposed strategy, applied on a pilot network located at the Campus II of USP, gave good results.

Key words: Geodetic networks, parametric model, outliers, reliability

CAPÍTULO 1

---

*“Quem sabe concentrar-se numa
coisa e insistir como único objetivo
obté-m, ao cabo, a capacidade de
fazer qualquer coisa.”*

Mahatma Gandhi

1 Considerações Iniciais

Desde os primórdios, um dos interesses principais do homem foi desenvolver meios para descrever sua localização na Terra. Este interesse evidencia-se pelos estudos sobre o tamanho, forma e composição da Terra (Burkard, 1974).

Os babilônicos, os egípcios, os gregos, os chineses, os árabes e os romanos foram os povos que legaram instrumentos e processos que, embora rudimentares, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades tanto urbanas como rurais com finalidades cadastrais.

Ciências como matemática e astronomia tiveram, em conjunto, grande contribuição para o estudo do posicionamento sobre a Terra. O posicionamento horizontal astronômico é o mais antigo de todos e seu uso tornou-se fundamental no final do século XV com as grandes navegações marítimas. Séculos depois, esse tipo de posicionamento combinado com técnicas de levantamentos como a trilateração¹ e a triangulação² forneciam aos geodestas, pontos com posições planimétricas referenciadas a um ponto de controle e utilizados para os cálculos de distâncias e direções. (Burkard, 1974). O conjunto destes pontos forma as redes geodésicas. Torge (2001), diz que as redes geodésicas consistem de pontos de controle monumentados e que provêm os sistemas de referência para posicionamento em todas as escalas de desenho. Elas se dividem em redes globais, as quais permitem a realização dos sistemas de referência definidos por convenções internacionais; redes regionais, que formam a base fundamental para os levantamentos geodésicos nacionais ou continentais, que são a base de sistemas de geo-informação e mapas; e em redes locais que são usualmente estabelecidas para projetos de engenharia, exploração e para investigações no campo da geodinâmica.

Valores redundantes das coordenadas estimadas no levantamento de uma rede podem ser ajustados mediante a aplicação de modelos matemáticos adequados, como, por exemplo, pelo M.M.Q (Método dos Mínimos Quadrados), que estimam os valores mais prováveis para cada coordenada.

---

¹ Técnica de levantamento geodésico em que leva em consideração apenas a medida dos lados do triângulo.

² Técnica de levantamento geodésico através apenas de medidas de ângulos

Nas décadas de 60 e 70 uma grande contribuição foi dada por Willem Baarda ao desenvolver a teoria da confiabilidade em redes geodésicas e o teste *Data Snooping*, o qual pode ser definido como “[...] a investigação em relação à observação na qual um erro grosseiro foi cometido durante a medição” (Baarda 1968). Estes estudos tiveram bastantes aplicações nos trabalhos aerofotogramétricos para a localização de erros grosseiros ocorridos em blocos fotogramétricos.

No Brasil, resoluções, normas e leis existentes e que se referem aos trabalhos voltados às medições geodésicas e topográficas, fazem menção sobre os procedimentos de levantamentos, exigências quanto à precisão dos trabalhos dentre outros. Porém, as normas ABNT - NBR 13133³ e NBR⁴ 14166 nada dizem sobre a análise de confiabilidade dos levantamentos, o que seria de grande relevância no contexto de medição e de melhoria da qualidade dos trabalhos no Brasil.

Trabalhos de Engenharia Civil necessitam de pontos de coordenadas conhecidas proveniente por redes de referência confiável e de boa qualidade, que possam dar suporte ao controle de estruturas (torres, pontes, barragens, edificações, túneis, extração de minérios), demarcação e retificação de áreas rurais e aplicações ligadas ao controle e monitoramento de recursos naturais (demarcação e monitoramento do desmatamento de florestas nativas; áreas atingidas por incêndios, etc.).

O sistema de implantação de redes planimétricas, no Brasil, teve início em 17 de março de 1944, sob a responsabilidade do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Inicialmente o sistema foi oficializado pelo Decreto-lei n. 9210 de 29 de abril de 1946 e posteriormente pelo Decreto-lei n.243, de 28 de fevereiro de 1967, sendo este último usual nos dias atuais. Esta implantação do SGB (Sistema Geodésico Brasileiro) fez uso de métodos denominados clássicos (triangulação e poligonação⁵ geodésica) as quais utilizados até 1990.

---

³ NBR 13133 Execução de Levantamentos Topográficos

⁴ NBR 14166 Rede de Referência Cadastral Municipal

⁵ Técnica de levantamento realizada com a medição de distâncias e direções em uma sequência de pontos

A partir do ano de 1991, o IBGE passou a empregar o sistema GPS (Global Positioning System) para a densificação da componente planimétrica do SGB, constituindo, desta forma, a Rede Nacional GPS.

Para a obtenção de coordenadas mais confiáveis nas redes geodésicas, faz-se necessário o ajustamento das observações, o qual envolve operações matemáticas que são facilitadas pelo auxílio de programas computacionais como TG-OFFICE (Trimble), SKI (Leica GeoSystem), Pathfinder (Trimble), Ashtech Solution, (Ashtech), dentre outros. A maior parte destes programas computacionais fazem uso de modelos matemáticos e estatístico para a análise de redes geodésicas no que tange à precisão e estimativas da confiabilidade.

Muitos dos programas comerciais utilizados na mensuração dão bons resultados no ajustamento, porém nem todos possibilitam uma análise bem detalhada da detecção de erros grosseiros nem da confiabilidade interna e externa da rede geodésica. Um outro problema encontrado nestes programas computacionais comerciais é o fato de que alguns deles não possibilitam ao usuário analisar passo a passo todas as etapas feitas no ajustamento da rede, não podendo testá-la de acordo com parâmetros próprios na tentativa de melhores resultados durante as etapas de ajustamento e pós-ajustamento das observações de campo. Uma análise mais detalhada é possível em programas científicos como o COLUMBUS e o STAR NET ou mesmo em pequenas rotinas programáveis em ferramentas como MathCAD ou MatLab.

Tradicionalmente, o estudo da qualidade de uma rede geodésica é descrito através das medidas de precisão de coordenadas obtidas através da matriz de covariâncias das coordenadas estimadas (Teixeira e Ferreira, 2003). Porém, segundo Leick (2004) e Kuang (1996), as quantidades contidas nesta matriz não possibilitam a detecção de erros grosseiros nas observações, nem a influencia dos mesmos nas coordenadas finais do ajustamento, sendo necessário para isso, o estudo da confiabilidade de redes.

Kuang (1996) afirma que a avaliação desta qualidade refere-se também ao estudo da economia, a qual expressa o custo total envolvendo para isso, operações de planejamento, execução, coleta de dados, processamento etc. Souza (2005) acrescentou o fator operacionalidade como mais um critério para estimativa da qualidade em redes. A condição da rede que retrata a sua

operacionalidade é expressa por características tais como: densidade e distribuição espacial dos vetores, acessibilidade e ambiente onde se localiza o vértice, tipo de monumento empregado para materialização, entre outros.

Neste trabalho, além de aspectos teóricos da análise de confiabilidade, será analisado o caso prático da qualidade do ajustamento de uma rede local, usando-se a técnica de rastreamento de satélites GPS.

1.1 Motivação

Atualmente, o estudo da análise de confiabilidade de redes geodésicas é um dos temas com maior aplicação e utilidade na Fotogrametria, Geodésia e outras ciências que façam uso de medidas, afirma Aguilera (2001). Trata-se de um assunto complexo, ainda com muitos caminhos a serem explorados para o aperfeiçoamento de normas técnicas, de projetos e implantação de trabalhos referentes à mensuração como: levantamentos topográficos, trabalhos cartográficos, dentre outros.

Destacam-se os seguintes fatores que motivaram o desenvolvimento deste trabalho:

- ✓ No Brasil, quase não se encontra trabalhos que levam em consideração a análise de qualidade de redes. Na literatura pesquisada, existem poucos estudos que apresentam trabalhos técnicos – científicos de implantação e análise de qualidade de redes geodésicas. Podem ser citados como alguns dos estudos mais recentes: Teixeira (2003), Amorim (2004) e Schünemann (2005).
- ✓ Necessidade de coordenadas confiáveis pelos profissionais da engenharia civil.
- ✓ Muitos programas comerciais resultam em bons ajustamentos, porém não possibilitam que os usuários analisem passo a passo, o que ocorre durante todas as etapas do ajustamento nem mesmo manipular estes dados de forma a buscar melhores resultados.

1.1.1 Contextualização dentro da Área de Transportes

Uma rede geodésica é de fundamental importância em obras de engenharia em geral inclusive transportes, uma vez que para a implantação desses tipos de obras é necessário que o projeto se apoie em coordenadas terrestres em relação a algum sistema de referência conhecido. Como exemplo, pode-se citar a criação da rede geodésica da Companhia do Metro de São Paulo, que elaborou sua rede para transporte das direções requeridas pelo projeto das linhas Norte-Sul e Leste-Oeste para o nível subterrâneo. Esta rede foi apoiada na Rede Geodésica do Estado de São Paulo, com o principal objetivo de evitar erros de coordenadas dos pontos de partida de cada uma das frentes de escavação. Atenção semelhante foi dada para a construção do Eurotunnel que liga a Inglaterra a França.

1.2 Objetivo

- ✓ Esta dissertação visa aplicar o método paramétrico para o ajustamento de redes GPS e a análise da qualidade, no que diz respeito à precisão e confiabilidade, aplicando estudos teóricos e práticos para um caso real.

1.2.1 Objetivos subjacentes

- ✓ Implantar uma rede GPS local no Campus II - USP, observando os critérios de análise e pré-processamento de forma a analisar sua confiabilidade;
- ✓ Disponibilizar uma rotina programável para o ajustamento de pequenas redes em programas matemáticos e estatísticos que trabalhem com matrizes como MathCad, MathLab, etc.
- ✓ Realizar o processamento dos vetores observados da rede através do programa Ski-Pro e Ashtech e realizar o ajustamento, bem como, as análises de precisão e confiabilidade através do programa MathCad, facilitando a elaboração de rotinas programáveis para profissionais da área de mensuração.
- ✓ Realizar medições de controle na rede implantada para analisar, na prática, a qualidade da rede.

- ✓ Disponibilizar material técnico e didático para usuários realizarem ajustamento de redes de vetores locais, de forma independente dos programas comerciais.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

*“A liberdade de manifestação de
pensamento possibilita a cada um,
não dizer tudo aquilo que pensa,
mas de não dizer o que não pensa.”*

Francesco Carnelutti
Jurista italiano

2 Redes Geodésicas

2.1 Generalidades

O conjunto de marcos materializados no terreno e referenciados a um sistema de coordenadas geodésicas horizontais e/ou verticais forma a chamada rede geodésica, que serve de base para trabalhos como: atualização e elaboração de plantas cadastrais, referência a todos os serviços topográficos de demarcação, de anteprojeto, implantação e acompanhamento de obras de engenharia, cadastro imobiliário, registros públicos, multifinalitários etc.. Desta forma, uma rede geodésica é de fundamental importância para o desenvolvimento ordenado de um município, estado ou país.

Classicamente, as redes podem ser divididas em quatro ordens: redes de primeira ordem formadas por polígonos de lados de 20 a 50 km; redes de segunda ordem com lados entre 10 e 20 km; redes de terceira ordem com lados de 5 a 20 km e, por fim, as redes de quarta ordem com lados medindo de 1 a 3 km.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, no anexo da Resolução PR Nº 22, de 21 de julho de 1983, apresentou uma classificação para os levantamentos geodésicos brasileiros e estabeleceu uma nomenclatura mais moderna e coerente com a teoria do ajustamento de observações geodésicas. Esta classificação compreende três classes:

- Redes Geodésicas de Alta Precisão;
- Redes Geodésicas de Precisão; e,
- Redes Geodésicas para fins Topográficos.

As redes também podem ser definidas como redes nacionais, estaduais e locais (cadastrais municipais) dependendo da área de abrangência e do referenciamento dos pontos de apoio.

No final da década de 70, teve início a implementação do sistema NAVSTAR/GPS pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DoD). Este sistema de navegação tornou possível um posicionamento tridimensional em qualquer lugar do globo terrestre de maneira rápida, precisa, econômica e

confiável em relação ao método clássico de triangulação e trilateração, adotados até o início da década de 90.

A implantação de redes geodésicas segue toda uma análise de precisão, acurácia e confiabilidade após seu ajustamento. Como visto na literatura pesquisada e nos trabalhos encontrados na bibliografia brasileira, o estudo da confiabilidade, não tem sido tratado com relevância necessária na implantação de redes no Brasil.

2.2 Ajustamento de Redes Geodésicas

2.2.1 Introdução

Trabalhos que requerem confiança exigem uma série de repetições de observações possibilitando desta forma a obtenção do valor mais provável para uma determinada medida. Este valor mais provável é obtido através do ajustamento de observações.

O ajustamento de observações leva a uma única solução e à coerência de observações a modelos matemáticos apropriados a cada caso. Existem casos em que são realizadas medidas sobre as próprias incógnitas e outros em que são medidas as grandezas que se vinculam às incógnitas através de conhecidas relações funcionais, como exemplo as observações diretas ou parâmetros (área, coordenadas, etc.).

Gemael (1994) destaca que em qualquer dos casos citados acima, busca-se depurar as observações das inconsistências que as acompanham, ou seja, ajustá-las junto a parâmetros quando esses são definidos através de um modelo matemático, podendo estes conter injunções⁶ particulares ou não. Este modelo matemático, em redes geodésicas e principalmente nos casos de estudo de rede GPS, torna-se o elemento principal, devido à possibilidade que o modelo tem em relacionar as observações com os parâmetros a serem definidos.

O método de ajustamento a ser abordado neste estudo, é usual para ajustamento de redes Geodésicas e topográficas obtidos pelas técnicas

---

⁶ Pontos com coordenadas conhecidas e utilizadas como pontos de amarração.

clássicas como triangulação, trilateração e poligonação, bem como, para redes modernas obtidas por GPS em que as equações são formadas pelos vetores observados.

O princípio do sistema GPS está na medição e processamento das pseudodistâncias e da fase da onda portadora. Após estes tratamentos com as observáveis é necessário ajustar vetorialmente a rede de modo a homogeneizá-la e vinculá-la a uma rede fiducial ativa ou passiva. Esse ajustamento é realizado utilizando o método dos mínimos quadrados (MMQ) aplicado a uma formulação matemática que proporcione um tratamento vetorial a pares de pontos da rede, observados numa única sessão de levantamento (Vasconcelos e Blitzkow, 2003).

O princípio dos 'Mínimos Quadrados' estima o melhor valor para um parâmetro baseando-se numa série de observações ou medições (Dupraz, 1985). Fornece parâmetros estimados com menores variâncias e é representado matricialmente pela seguinte equação:

$$V^T P V = \text{mínimo} \quad (2.1)$$

onde:

V , é o vetor resíduo do ajustamento;

P , a matriz peso utilizada no ajustamento.

O ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, com o intuito de estimar os parâmetros desconhecidos, pode fazer uso dos métodos paramétricos, correlatos e combinados. O mais usual para o ajustamento de redes GPS é o método paramétrico e este será discutido neste trabalho.

2.2.2 Conceituação Básica

Torna-se imprescindível fazer uma abordagem de alguns conceitos que serão bastante usuais no decorrer do estudo de ajustamento e análise de rede.

As notações utilizadas nas equações matemáticas para ajustamento de redes foram baseadas em Gemael (1994).

2.2.2.1 Modelo Matemático

Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação da vida real formalizado com símbolos e expressões matemáticas. Obviamente, este modelo não representa de forma fiel um fenômeno real, porém, relaciona propriedades que interessam às investigações deste fenômeno.

De acordo com cada propósito a ser investigado, pode ser desenvolvido um modelo matemático específico. Desta forma, para um mesmo fenômeno podem ser desenvolvidos diferentes modelos que o descreva.

O modelo matemático também possibilita as interligações entre as variáveis conhecidas e as variáveis desconhecidas de um fenômeno em estudo, de maneira simplificada e que seja adequado aos cálculos. Devido a esta possibilidade é que o estabelecimento do modelo matemático, nas investigações científicas e tecnológicas, é uma das etapas iniciais de maior importância. Um exemplo prático desta importância é citado por Gemael (1994) da seguinte forma: “para se determinar o efeito da refração sobre as coordenadas de um astro, o geodesta substitui a atmosfera real por um esquema físico mais simples: um conjunto de camadas gasosas concêntricas e homogêneas. Essa idealização conduz a um modelo matemático relativamente simples, mas capaz de resolver grande número de problemas”

Mikhail e Ackermann (1976) dizem que os modelos matemáticos são freqüentemente compostos pelos modelos funcionais e estocástico. O primeiro descreve as propriedades determinísticas do fenômeno físico ou considerações sobre o evento, enquanto o modelo estocástico descreve as propriedades não determinísticas ou estocásticas das variáveis estatísticas, principalmente as variáveis que representam as observações.

O modelo estocástico não oferece soluções únicas, mas apresentam uma distribuição de soluções associadas a uma probabilidade, ou seja, o modelo incorpora elementos probabilísticos onde os resultados são expressos em termos de probabilidade.

Gemael (1994) menciona que inúmeras distribuições teóricas de probabilidades de variáveis aleatórias (“modelo estocástico”) têm sido

estudadas e que o conhecimento destas distribuições leva o investigador a escolher o modelo que melhor adapta-se ao seu problema específico. Como exemplo, o número de variáveis aleatórias que ocorrem em ciências naturais apresenta uma distribuição de probabilidade muito próxima da distribuição NORMAL ou de GAUSS, fazendo com que esta se torne uma das mais importantes e usuais em aplicações tecnológicas e científicas.

2.2.2.2 Matriz Variância-Covariância - MVC

A matriz variância-covariância é de fundamental importância tanto na fase de pré-ajustamento como na fase de pós-ajustamento, pois através dela se tem as precisões finais das observações ajustadas, efetuando os cálculos da confiabilidade interna da rede, bem como dos erros marginais detectáveis.

Estimar a precisão das medidas efetuadas, antes do ajustamento, é importante para formar a matriz variância-covariância dos valores observados (Σ_{Lb}) que, juntamente com o fator de variância de peso a priori (σ_0^2) determinará a matriz dos pesos.

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \quad (2.2)$$

Na fase de pós-ajustamento podemos estimar a matriz variância-covariância das variáveis aleatórias envolvidas X, X_a, V, L_a . As equações para estimar estas matrizes estão apresentadas no item 2.2.3.

2.2.2.3 Fator de Variância

O fator σ_0^2 é conhecido como variância de unidade de peso a priori e é arbitrado pelo calculista. Geralmente o valor atribuído é 1 (um).

O fator $\hat{\sigma}_0^2$, obtido, após o ajustamento em função dos resíduos, é conhecido como variância a posteriori e é representado pela seguinte equação:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{S} \quad (2.3)$$

onde:

V , vetor dos resíduos;

P , matriz dos pesos;

S , grau de liberdade, obtido pela diferença entre o número de observação (n) e o número de incógnitas (u);

2.2.2.4 Atribuição de Pesos nas Observações

O peso de uma observação é uma estimativa das precisões relativas das observações. Uma medida precisa apresenta pequenos valores no desvio padrão e, desta forma, podemos dizer que a observação é boa e tem um grande peso.

A matriz peso (P) é obtida da matriz co-fatora (quando não singular), também conhecida como matriz dos coeficientes de peso (Q) que é dada por:

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{lb} \quad (2.4)$$

logo,

$$P = Q_{ll}^{-1} = \sigma_0^2 \sum_{lb}^{-1} \quad (2.5)$$

A atribuição de pesos não deve ser feita sem cuidado, como no caso de atribuir pesos diferentes devido ao fato do número de repetições serem diferentes, mas deve-se sim levar em considerações várias outras causas como:

- ✓ tipo de instrumento (GPS, Estação Total (ET));
- ✓ operador;
- ✓ condições atmosféricas para o instrumento utilizado;
- ✓ horário de observação indicado;
- ✓ instalação no campo de cada instrumento;

Vale ressaltar que, quando as observações são independentes e de igual precisão, tanto a matriz peso como a matriz co-fatora serão matrizes identidade (I) e que quando as observações forem independentes e com

precisão diferente a matriz peso será representada por uma matriz diagonal formada pelo inverso de cada precisão.

Os programas comerciais para processamento e ajustamento, normalmente, faz as seguintes considerações para formulação da matriz dos pesos:

- ✓ as observações são independentes;
- ✓ pesos inversamente proporcionais aos comprimentos das linhas de base; e
- ✓ variância a priori (σ_0^2) unitária.

Estes procedimentos não são rigorosos para formulação da matriz dos pesos. Para se obter melhor confiabilidade do ajustamento melhor seria considerar a variância de cada observação, bem como as correlações existentes entre as componentes de cada linha de base, ou ainda com mais rigor, considerar a correlação existente entre as componentes do conjunto de vetores observadas de forma simultânea, onde é o caso de resultado de processamento GPS de dados advindos de posicionamento relativo estático. Vale ressaltar que a matriz variância-covariância (Σ_{Lb}) irá depender também da correlação da combinação de fase.

Maiores detalhes em Hofmann, Lichtenegger e Collins (1992).

A formulação da matriz peso pode ser feita pelas seguintes formas:

- Pela correlação entre as componentes da linha de base, onde, se faz uso dos desvios padrão de cada linha de base e sua matriz correlação $(\rho\rho)$. A matriz do desvio será chamada aqui de (ϖ_i) .

$$\varpi_i = \begin{bmatrix} \sigma\Delta X_i & & \\ & \sigma\Delta Y_i & \\ & & \sigma\Delta Z_i \end{bmatrix} \text{ com } (i = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

$$\rho\rho_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho\Delta X_i\Delta Y_i & \rho\Delta X_i\Delta Z_i \\ \rho\Delta Y_i\Delta X_i & 1 & \rho\Delta Y_i\Delta Z_i \\ \rho\Delta Z_i\Delta X_i & \rho\Delta Z_i\Delta Y_i & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Com estas duas matrizes encontra-se a matriz variância-covariância pela seguinte forma:

$$\Sigma_{lb_i} = \varpi_i \rho \rho_i \varpi_i \quad (2.8)$$

A partir de (2.8) e juntamente com a variância da unidade de peso a priori (σ_0^2) encontra-se a matriz peso pela equação (2.2).

- Pela variância dos vetores de linha de base.

Os valores de cada linha de base (vetor) são independentes entre si e a $MVC(\Sigma_{lb})$ uma matriz diagonal que forma sua inversa tomando o inverso da variância de cada observação.

Neste caso tem-se:

$$P^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \sigma^2\Delta X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2\Delta Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2\Delta Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2\Delta X_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2\Delta Y_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2\Delta Z_n \end{bmatrix}$$

- Pela estimação da matriz variância-covariância usando o método do Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation (MINQUE).

Segundo Jones⁷ (1991) apud Teixeira, Costa e Ferreira (2001), este método baseia-se no modelo empírico dado abaixo:

⁷ Jones, h, W, (1991): Na Error Budget for GPS Relative Positioning. **Surveying and Land Systems**, vol51, p.133-137

Resultados mais consistentes podem ser obtidos se levar em consideração a correlação entre o conjunto de observáveis dos receptores envolvidos na coleta.

A correlação é de fundamental importância e pode ser abordada de três formas, que são:

- ✓ Ignorá-las;
- ✓ Considerar o efeito individual para cada linha de base;
- ✓ Considerar o efeito conjunto para cada linha de base;

A última situação apresentada, segundo Teixeira, Costa e Ferreira (2001), é considerada como a melhor (mais rigorosa), pois se aplica a vetores observados simultaneamente.

2.2.3 Método Paramétrico

O método Paramétrico é também conhecido como ajustamento de observações indiretas ou como métodos das equações de observações. As observações indiretas, como o próprio nome diz não se processam diretamente sobre as grandezas procuradas ou sobre os parâmetros que se quer conhecer. Elas se vinculam aos parâmetros desconhecidos através de modelos matemáticos, ou seja, é necessária a formulação de equações, para que relacionem os parâmetros às observações. Estas grandezas são geralmente obtidas por medições diretas.

Em um método de ajustamento seja ele, paramétrico, condicional ou mesmo combinado, um fator importante que deve ser levado em consideração é o estudo da correlação entre as observações e que estão presentes na matriz variância-covariância.

2.2.4 Ajustamento de Redes GPS pelo Método Paramétrico

O estudo do Método Paramétrico nesta seção será direcionado a redes GPS, por ser o assunto estudado no trabalho.

Nas observações relativas de GPS, são medidos vetores entre os pontos observados. Desta forma, os vetores de posição $(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$ são medidos

entre as estações fixas e as estações relativas, sendo estes os parâmetros a serem ajustados.

As equações de observação obtidas por GPS já são lineares e não precisarão de linearização, como ocorre quando se trabalha com ajustamento de redes obtidas por triangulação, trilateração, ou poligonação.

Sendo assim, no caso de redes GPS o modelo é expresso por:

$$L_b = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_j - X_k \\ Y_j - Y_k \\ Z_j - Z_k \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Onde L_b , é o vetor (nx1) dos valores observados; (X_j, Y_j, Z_j) são as coordenadas das estações relativas e (X_k, Y_k, Z_k) são as coordenadas das estações fixas ou de referência.

Sejam ainda:

$$L_a = L_b + V \quad (2.11)$$

onde:

V , Vetor (nx1) dos resíduos obtidos do ajustamento;

L_a , Vetor (nx1) dos valores observados ajustados;

$$X_a = X_0 + X \quad (2.12)$$

onde:

X_0 , é o vetor (ux1) cuja componente são os valores aproximados dos parâmetros;

X , é o vetor correção (ux1) dos parâmetros desconhecidos;

X_a , é o vetor dos parâmetros ajustados;

O Modelo clássico do Método Paramétrico é:

$$f(X_a) = f \begin{bmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{bmatrix} = L_a \quad (2.13)$$

O modelo matemático linearizado dos parâmetros, obtidos pela fórmula de Taylor⁸ é dado por:

$$V = A X - L \quad (2.14)$$

Onde:

A , é a matriz das derivadas parciais das equações de observações

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i} \right);$$

L , é o vetor dos termos independentes das equações de observação (diferença entre os valores aproximados e o os valores observados). No caso de redes GPS este termo é dado pela diferença das componentes de vetores aproximados e observados);

O vetor correção é dado por:

$$X = -(A^T P A)^{-1} (A^T P L) \quad (2.15)$$

Em que P , é a matriz peso já estudado na seção (2.2.2.4).

$(A^T P A) = N$ e $(A^T P L) = n$ são as equações normais

As coordenadas aproximadas corrigidas ou ajustadas são dadas por:

$$X_a = X_0 + X$$

As observações aproximadas (L) e os resíduos estimados (V) são obtidos por:

$$L = L_0 - L_b \quad (2.16)$$

onde L_0 , é obtido em função dos parametros aproximados

$$L_0 = F(X_0) = A X_0$$

$$V = L_a - L_b$$

Matriz variância-covariância:

---

⁸ Fórmula de TAYLOR : $f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$

MVC das correções e MVC dos parâmetros

$$\Sigma_X = \Sigma_{Xa} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

(2.17)

MVC dos valores observados ajustados

$$\Sigma_{La} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T \quad (2.18)$$

MVC dos resíduos

$$\Sigma_{VV} = \sigma_0^2 (A N^{-1} A^T - P^{-1}) \quad (2.19)$$

Cálculo do controle do ajustamento:

$$\text{Condição 1: } V^T P V = -L^T P V$$

$$\text{Condição 2: } A^T P V = 0$$

Após o ajustamento, um estudo comparativo entre a variância a priori (σ_0^2) e posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) é realizado de forma a avaliar a qualidade do ajustamento.

No início do ajustamento se arbitra um valor para a variância a priori e geralmente, se adota a unidade para este valor. O valor atribuído à variância a priori, seja ele qual for, não influencia no vetor solução do ajustamento, porém irá repercutir sobre a matriz N dos coeficientes das equações normais.

No caso de haver discrepância entre a variância a priori e posteriori pode-se deduzir que a variância das observações foi avaliada para menos, em outras palavras, a qualidade das observações foi superestimadas, sendo necessário para este caso aplicar um teste de hipótese, visando detectar se a discrepância entre as variâncias são ou não significativas à um certo nível de confiança.

Segundo Gemael (1994), devido a forma quadrática $V^T P V = V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V$ ter distribuição de X^2 com S graus de liberdade, tem-se, então:

$$V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V \approx X^2_{(s)} \quad (2.20)$$

A equação (2.20) pode ser escrita como:

$$\frac{V^T PV}{\sigma_0^2} \approx X^2_{(s)} \quad (2.21)$$

Testando as hipóteses básicas contra uma outra alternativa se tem:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \quad H_a = \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Comparando o valor calculado com os valores teóricos tem-se:

$$X^2_{calc} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} S = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2} \quad X^2_{teór} = X^2_{S, \frac{\alpha}{2}} \text{ e } X^2_{S, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Não haverá rejeição da hipótese básica, ao nível α de confiança se:

$$X^2_{calc} < X^2_{S, 1-\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } X^2_{calc} > X^2_{S, \frac{\alpha}{2}}$$

O nível de confiança (α) a ser aplicado (σ , 2σ ou 3σ), é escolhido pelo usuário de acordo com seus interesses.

Havendo rejeição da hipótese básica, várias podem ser a causa, dentre as principais:

- ✓ Erro na MVC dos valores observados (problema no modelo estocástico);
- ✓ Erros grosseiros e ou sistemáticos causando resíduos grandes;
- ✓ Inconsistência do modelo matemático com as observações.

No caso particular de ciências geodésicas, Vanicek & Krakiwsky (1986), afirmam que o modelo matemático relacionando os dados coletados para certos parâmetros desconhecidos é muito bem definido, porque eles são baseados em leis geométricas e simples leis físicas.

Nas redes geodésicas obtidas por GPS a análise da matriz variância-covariância das observações é importante quando ocorre a rejeição do teste global, pois os desvios padrão contidos nesta matriz podem estar super ou subestimados. Outro fator importante e que pode influenciar na rejeição do teste é a existência de erros grosseiros. Desta forma, neste trabalho será dada maior ênfase para estas causas na ocorrência de rejeição do teste global.

2.2.5 Precisão e Elipse de Erro

O ajustamento da posição dos pontos gera, entre outras, a matriz covariância das coordenadas planas ajustadas. A diagonal desta matriz contém a variância das coordenadas ajustadas da qual se obtêm o erro médio ou a precisão, σ_e e σ_n , relativos às coordenadas ajustadas. Esses erros possuem a mesma direção dos eixos de coordenadas (E, N), porém, para a análise do ajustamento, torna-se necessário conhecer a precisão dessas coordenadas independente dos eixos, ou seja, em qualquer direção.

Dentre os procedimentos para avaliação do erro de um ponto se tem a elipse de erro.

A elipse de erro, também chamada de elipse do desvio padrão é a representação gráfica da precisão dos resultados do ajustamento. É especialmente significativa em ajustamento de redes horizontais, uma vez que as informações de determinadas posições podem ser obtidos de sua orientação, tamanho e forma.

Figura 1 Elipse de erro de um ponto

Ao sistema de eixos ortogonais na figura 1, foi aplicado uma rotação de um ângulo (θ) , que pode ser expresso pela seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Aplicando a lei de propagação da variância em (2.22) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} \\ \sigma_{en} & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{EN} & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Resolvendo o sistema matricial em (2.23) obtém-se:

$$\sigma_e^2 = \cos^2 \theta \cdot \sigma_E^2 + \sin^2 \theta \cdot \sigma_N^2 - 2 \cos \theta \sin \theta \sigma_{EN} \quad (2.24)$$

$$\sigma_n^2 = \sin^2 \theta \cdot \sigma_E^2 + \cos^2 \theta \cdot \sigma_N^2 - 2 \cos \theta \sin \theta \sigma_{EN} \quad (2.25)$$

$$\sigma_{en} = \sigma_{ne} = (\sigma_e^2 - \sigma_n^2) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{en} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.26)$$

As equações (2.24) e (2.25) nos permite calcular os novos valores dos desvios padrão para várias posições do sistema de coordenadas, os quais variarão de acordo com o valor de θ , calculado em função da variância e do desvio padrão de cada estação após o ajustamento.

A equação que fornece o valor de θ é dada por:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2\sigma_{EN}}{\sigma_N^2 - \sigma_E^2} \right] \quad (2.27)$$

Obtém-se a partir desta equação, dois valores para θ que se pode chamar de $\theta_{\max}$ e $\theta_{\min}$ e que são diferentes entre si de 90° . Estes valores ao serem substituídos nas equações, fornecem, nesta ordem, as variâncias máximas e mínimas.

O ângulo $\theta \leq \pi$ é o azimuth da direção do semi-eixo a e $\theta + \pi/2$ é o azimuth da direção do semi-eixo b .

Segundo Gemael (1994), o valor das variâncias obtidas nos fornecerá uma curva chamada de podária (figura 2), a qual é descrita por uma equação do segundo grau. Para fins práticos é usada a elipse, em que a extremidade dos dois eixos é tangente à curva podária.

Figura 1 Elipse de erro e sua curva podária
Fonte: VERESS, 1973, p. 436.

A interpretação geométrica da elipse de erro, na hipótese da distribuição normal de erros, é que ela delimita a porção do plano que, com 39% de probabilidade, contém a posição verdadeira do ponto (Surace⁹, 1995, apud Moraes, 2001).

A Curva podaria e a Elipse tendem a se equívaler, quando esta se aproxima de uma circunferência. Equivalência entre a curva podaria e a elipse é dada pela condição de isotropicidade de erros sob um nível de significância α .

2.2.6 Tipos de erros e análises estatística dos erros

2.2.6.1 Erros

O valor de uma medida seja ângulo, distância, etc., mesmo obtido por uma série de repetições em condições suposta idênticas, não é considerado como o valor verdadeiro da medida, pois estas possuem erros inevitáveis advindos de:

- ✓ Falha Humana
- ✓ Imperfeição do equipamento
- ✓ Influência das condições ambientais (temperatura, pressão, etc.)

⁹SURACE, L. (1995).; *Analisi delle precisioni della rete geodetica fondamentale nel sistema IGM 83*. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Firenze, v. 54, n. 2, p. 177-208.

2.2.6.2 Tipos de erros

Os erros podem ser classificados em grosseiros, sistemáticos e acidentais.

Os erros grosseiros são resultantes, no decorrer da observação, de falhas do operador ou do próprio instrumento. Para Dalmolin (2002) os erros grosseiros são aqueles superiores a 3 vezes o desvio padrão. Estes tipos de erros devem ser evitados pelo operador.

Com o advento de equipamentos eletrônicos, tornou-se mais difícil para o operador realizar o controle das observações devido a estas serem capturadas automaticamente e processadas no computador, fazendo com que erros grosseiros passem despercebidos. Um exemplo clássico de erros grosseiros em levantamentos com GPS é a altura da antena, em que anotações erradas quanto a este fator ou mesmo entradas de dados em valores de off-set e centro de fase da antena podem gerar a presença de *outliers*.

Devido a estes problemas, faz-se necessário, no processamento das observações a aplicação de testes estatísticos que detectem erros grosseiros, sendo este estudo conhecido, no ajustamento de observações, como detecção de *outliers*.

Os erros sistemáticos podem ser descritos por uma função matemática, pois conserva o erro em medições sucessivas (cumulativos) e ocorrem em um mesmo sentido, em igualdade de condições. Este tipo de erro provém de deficiência do observador, do instrumento e do método (modelo matemático) usado. A correção desses erros pode ser obtida comparando-se o instrumento utilizado com um instrumento padrão, ou podem ser eliminados a posteriori mediante fórmulas fornecidas pela teoria (Gemael 1994).

Os erros acidentais são também chamados de erros aleatórios e ao contrário dos erros sistemáticos não ocorrem em apenas um sentido e por isso não são vinculados a uma causa conhecida. Geralmente são erros inevitáveis e o seu tratamento é baseado na teoria da probabilidade.

Os erros acidentais assumem maior importância, pois se devem a causas desconhecidas e são impossíveis de serem previstos e eliminados, restando apenas o fato de poderem ser estimados por métodos estatísticos. Gemael (1994) menciona que a experiência tem demonstrado que quando em uma medida realiza-se um grande número de observação, os erros revelam algumas regularidades, onde segue uma distribuição de frequência em que se aproxima da distribuição normal. Daí a necessidade de repetições de medidas.

Os programas de processamento GPS, fazem uso de testes estatísticos como *teste tau*, *data snooping* dentre outros, nas diversas medidas obtidas para administrar os erros grosseiros e acidentais mencionados acima. O processamento nada mais é que um ajustamento de vários vetores e para isso são aplicados teste a um determinado nível de probabilidade, rejeitando assim as observações que acusaram erros.

2.2.6.3 Análise estatística dos erros

Uma forma usual para detecção da presença de erros nas observações é a realização de um apropriado teste estatístico (Kavouras, 1982).

O teste estatístico envolve duas hipóteses básicas que são:

- ✓ Hipótese nula (H_0), formulada sobre a população;
- ✓ Hipótese alternativa (H_a), diferente da hipótese nula;

Uma hipótese nula será testada com base em uma amostra aleatória extraída da população com o objetivo de concluir sobre sua aceitação ou não. Sendo os dados amostrais discordantes da H_0 , torna-se necessário testar se a discordância é significativa ou não.

Ao aceitar o resultado de um teste estatístico, pode-se ou não incorrer em erros. Existem quatro possibilidades:

- ✓ Aceitação de uma hipótese realmente verdadeira;
- ✓ Erro Tipo I - Rejeição de uma hipótese realmente verdadeira. A probabilidade de cometer este tipo de erro é chamado de nível de

significância (α), a probabilidade de fazer a decisão correta é dado pelo nível de confiança ($1 - \alpha$).

- ✓ Rejeição de uma hipótese realmente falsa
- ✓ Erro Tipo II - Aceitação de uma hipótese realmente falsa. A probabilidade de cometer este tipo de erro é ($1 - \beta$) e a probabilidade de fazer a decisão correta é dada pela potência do teste (β).

A figura (3) mostra uma situação paradoxal; pois a área rachurada da direita mostra a região de rejeição da hipótese nula H_0 , ou seja, a probabilidade de um erro do tipo I.

Já a área rachurada da esquerda corresponde à probabilidade de não rejeição de H_0 quando H_a é verdadeira; ou seja, probabilidade de se cometer um erro do tipo II.

Figura 2 Representação dos erros Tipo I e Tipo II

Observações repetidas obtidas na Mensuração são consideradas amostras extraídas de uma população. Desta forma, é necessário testá-las por meio de testes estatísticos, objetivando, assim, concluir sobre a aceitação ou não das hipóteses apresentadas na tabela 1. Os dados de amostras que resultarem em valores discordantes da hipótese nula devem ser testados de maneira a verificar se a discordância é significativa, implicando desta forma na sua rejeição, ou se a discordância foi atribuída ao acaso, o que não levaria a invalidar a hipótese (Gemael, 1994).

Tabela 1 Quadro de decisões e suas probabilidades

Situação Real \ Decisão	Hipótese H_0 é VERDADEIRA	Hipótese H_0 é FALSA
H_0 NÃO É REJEITADA	Decisão Correta $P = 1 - \alpha$	Decisão Incorreta $P = \beta$ (erro Tipo II)
H_0 É REJEITADA	Decisão Incorreta $P = \alpha$ (erro Tipo I)	Decisão Correta $P = 1 - \beta$

O teste de hipótese deve ser planejado de forma a suportar as decisões do investigador, minimizando o risco de uma decisão incorreta. Mikhail e Ackermann (1976) constataram não ser possível tornar ambos erros α e β , arbitrariamente pequenos, pois a tentativa de diminuir a probabilidade de um erro implica o aumento da probabilidade do outro. O equilíbrio entre os erros tipo I e tipo II depende do propósito do teste.

2.3 Detecção e Eliminação de Erros Grosseiros (*Outliers*)

2.3.1 Introdução

Uma medida com *outlier* apresenta-se de forma distinta em relação às outras e é considerada como observações inconsistentes, daí a denominação de *outliers*. Este tipo de observação é definida também, segundo alguns autores:

“[...] resíduo que de acordo com alguma regra de teste estatístico excede um pouco do valor de limite que é estabelecido baseado em algumas suposições sobre as propriedades estocásticas das observações [...]”, Caspary¹⁰ (1987) Apud Kuang, (1996).

“[...] Nós consideramos um outlier como sendo causado por um erro grosseiro contido nas medidas [...]”, Kuang (1996).

¹⁰ Caspary, W. F. (1987). Concepts of network and deformation analysis. Monograph II. School of Surveying the University of New South Wales, Kensington, N. S.W., Australia.

“[...] um outlier é caracterizado pela sua relação com as restantes observações que fazem parte da amostra. O seu distanciamento em relação a essas observações é fundamental para se fazer a sua caracterização. Esta observação é também designada por observação “anormal”, contaminante, estranha, extrema ou aberrante [...]”, Figueira (1998).

“[...] são observações que são inesperadamente diferente (distintas) das demais. Elas não estão necessariamente errados e são frequentemente as observações mais interessantes e informativas na amostra[...]”, Annis (2004).

“[...] Detecção de erros grosseiros (*outliers*) é uma ferramenta de análise de estatística que identifica erros de observação, assim eles podem ser removidos do ajustamento. Os erros grosseiros são chamados de “blunders”. Tipicamente, eles são pequenos bastante para ser descoberto em um pré-ajustamento que confere técnica, porém são grandes o bastante para causarem resíduos significativos[...]”, Altaha e Arnold (1996).

O estudo de *outliers* é de fundamental importância para trabalhos que requerem análise estatística dos dados observados. Todo pesquisador que faz medidas em seus experimentos já se deparou com observações que se distanciam das demais.

Pode-se a partir das afirmações anteriores, dizer que *outliers* são erros que aparecem nos resíduos pós-ajustados e que não são detectados no pré-ajustamento, como o caso do erro grosseiro de grande magnitude, sendo necessário, para sua detecção, a realização de testes estatísticos específicos.

Para o caso de redes geodésicas, será considerada a definição dada por Kuang (1996), que associa *outliers* como sendo causado por erros grosseiros nas medidas.

Segundo Kuang (1996), a teoria do Método dos Mínimos Quadrados considera que todos os efeitos dos erros grosseiros e sistemáticos tenham sido eliminados antes da realização do ajustamento e que somente os dados são

afetados por erros randômicos. No pós-ajustamento dos dados, concentra-se na detecção de erros que não foram ainda detectados levando em consideração, neste caso, que parte dos erros grosseiros (erros detectados) já foram eliminados por técnicas de pré-projeto, por procedimentos durante o processo, por coleta de dados, por pré-ajustamento dos dados ou nestas situações em conjunto.

Leick (2004) menciona ainda que a eficiência dos testes estatísticos para erros grosseiros está associada ao grau de confiabilidade da rede, ou seja, quanto mais confiável for a rede, maior será a probabilidade de se detectar os erros através dos testes estatísticos e que esse controle sobre as observações expressa a confiabilidade da rede.

Antes de iniciar o estudo dos testes estatísticos para detecção de *outliers*, será estudada as hipóteses usuais para a aplicação destes testes.

2.3.2 Hipóteses para Detecção de Outliers

Como já estudado anteriormente, os primeiro passo para a aplicação de um teste estatístico, é a definição dos postulados básicos que também são chamados de hipótese nula e hipótese alternativa.

O método de ajustamento do MMQ, não exige que as observações obedeçam à função de distribuição normal. Por outro lado Vanicek e Krakiwsky (1986) dizem ser essa exigência, um pressuposto obrigatório para aplicação de testes nas estatísticas amostrais das observações. Estatísticas estas que necessitam da formulação de hipóteses

Desta forma torna-se essencial a normalização dos resíduos para a aplicação dos testes estatísticos para a detecção de erros grosseiros.

2.3.2.1 Hipóteses Relacionadas às Observações

A suposição básica de ajustamento de rede pode ser expressa nos seguintes termos: as observações são normalmente distribuídas com o respectivo valor médio esperado $A.X$ e a matriz variância-covariância das observações $\sum_{Lb}$ que fornece a matriz peso.

A hipótese nula é dada por:

$$H_0 : l \in N\left(AX, \sigma_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.28)$$

Não sendo H_0 verdadeira, tem-se a hipótese alternativa H_a , que, como já mencionado anteriormente, pode existir infinitas destas hipóteses. A primeira das hipóteses alternativas poderia ser de que as observações não vêm de população normalmente distribuída, ou seja:

$$H_a : l \notin N\left(AX, \sigma_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.29)$$

O teste estatístico das hipóteses H_0 x H_a definidas acima, é feito através do teste *qui-quadrado* (χ^2), o qual determina se o histograma dos resíduos é compatível com a suposta função de densidade probabilística, a qual geralmente faz uso da distribuição normal.

Kuang (1996) menciona que os processos típicos de medição em mensuração seguem leis estatísticas de distribuição normal e propõe quatro hipóteses alternativas de observações supostas na distribuição normal, em que estatísticas amostrais, média e variância diferem dos valores especificados na hipótese nula. As hipóteses propostas que mostram as possíveis causas de rejeição de H_0 são:

$$H_{a1} : l_b \in N\left(AX, \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.30)$$

Esta hipótese significa que uma importante observação, porém com peso incorreto, deve ter sido adotada, ou seja, $(\hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2)$.

$$H_{a2} : l_b \in N\left(AX \sim \nabla l, \sigma_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.31)$$

$$H_{a3} : l_b \in N\left(By, \sigma_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.32)$$

A H_{a2} e H_{a3} indicam que pode existir erros nas observações ($\nabla l \neq 0$) e que o modelo matemático funcional pode estar errado, ($By \neq AX$).

A H_{a4} representa o caso onde tanto o modelo funcional como os pesos das observações podem estar incorretos.

$$H_{a4} : l_b \in N\left(By, \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}\right) \quad (2.33)$$

Como já mencionado anteriormente que os modelos matemáticos são muitos bem definidos (Item 2.2,4), as hipóteses H_{a3} e H_{a4} não são de grande importância no contexto e as hipóteses H_{a1} e H_{a2} são freqüentemente as mais examinadas quando existe falha na hipótese nula.

Fazer a decisão pela hipótese alternativa correta não é uma tarefa fácil. A seleção da hipótese alternativa mais apropriada requer conhecimento significativo dos procedimentos de coletas de dados bem como da análise dos resultados, (Kuang, 1996).

2.3.2.2 Hipóteses Relacionadas aos Resíduos

Após o ajustamento, faz-se necessário um exame nos resíduos (V), que é a grandeza de maior importância para analisar o ajustamento da rede. Como o pressuposto obrigatório para aplicação de testes estatísticos nas observações é que estas descrevam a distribuição normal, conseqüentemente, a distribuição dos resíduos V , também, obedece a essa distribuição. As hipóteses nulas e alternativas mais usuais nestes casos podem ser derivadas como se seguem:

$$V/H_0 \in N(0, \Sigma_{vv}) \quad (2.34)$$

$$V/H_{01} \in N(0, \tilde{\Sigma}_{vv}) \quad (2.35)$$

$$V/H_{02} \in N(\nabla_v, \Sigma_{vv}) \quad (2.36)$$

onde Σ_{vv} , $\tilde{\Sigma}_{vv}$ e ∇_v podem ser calculados por:

$$\Sigma_{vv} = \sigma_o^2 \cdot Q_{vv} = \sigma_o^2 \cdot (P^{-1} - AN^{-1}A^T) \quad (2.37)$$

$$\tilde{\Sigma}_{vv} = \tilde{\sigma}_o^2 \cdot Q_{vv} = \tilde{\sigma}_o^2 \cdot (P^{-1} - AN^{-1}A^T) \quad (2.38)$$

$$\nabla_v = -(1 - AN^{-1}A^TP) \cdot \nabla_l = -R \cdot \nabla_l \quad (2.39)$$

Onde:

Q_{vv} , é a matriz co-fatora dos resíduos (Apêndice I);

Σ_{vv} , é a matriz variância “a priori” dos resíduos ;

$\tilde{\Sigma}_{VV}$, é a matriz variância “a priori” incorreta dos resíduos;

σ_0^2 , é a variância “a priori”;

$\tilde{\sigma}_0^2$, é a variância “a priori” incorreta e

∇_v , é o resíduo correspondente ao vetor erro grosseiro;

A equação (2.31) mostra que na formulação da hipótese nula H_0 , as observações L_b são carregadas de apenas erros grosseiros com média igual a zero. Neste caso, segundo Kuang (1996), o vetor dos resíduos de observação V também consiste de variáveis aleatórias com média zero.

O propósito da análise no pós-ajustamento é examinar os resíduos estimados (ajustados) usando para isto, como ferramenta, testes estatísticos para determinar se algo deu errado ou não com o postulado básico, ou seja, verificar se os resíduos foram influenciados pelas observações que contêm erros grosseiros.

Basicamente existem duas maneiras de testar a H_0 usando os resíduos estimados, sendo estes diferenciados somente no conhecimento ou não do fator de variância a priori (σ_0^2) usado para a escala da matriz variância-covariância das observações.

O primeiro método foi desenvolvido por Baarda (1968), que propôs um teste global para detecção de *outliers* e o teste Data Snooping para localização de erros grosseiros no caso em que σ_0^2 é conhecido. O segundo método foi desenvolvido por Pope (1976) e este leva em consideração o não conhecimento de σ_0^2 . O princípio destes dois métodos para detecção de *outliers* e localização de erros grosseiros é também chamada de métodos clássicos e serão estudados nos itens posteriores.

Antes do estudo dos testes para detecção de *outliers* serão estudados alguns assuntos de fundamental importância em redes geodésicas que são: a relação entre resíduos e erros grosseiros e a matriz de número de redundância das observações. Esta última fornecerá uma idéia da geometria da rede, bem como a existência de erros grosseiros presente detectados e absorvidos no

processo, sendo desta forma, essencial para uma posterior análise dos testes estatísticos para a detecção e eliminação de *outliers*, e também para a análise da confiabilidade da rede pelo método clássico.

2.3.2.3 Relação entre Resíduos e Erros Grosseiros

Um resíduo pode ser dado pela seguinte equação:

$$V = Q_{vv} P \varepsilon = R \varepsilon \quad (2.40)$$

em que R , conhecida como matriz R ou matriz redundância, é dado como se segue:

$$R = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \sum_{vv} P = Q_{vv} P = I - A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (2.41)$$

Onde

Q_{vv} , é a matriz co-fatora dos resíduos.

Um erro verdadeiro ε_{ri} é constituído de erros sistemáticos e erros grosseiros ∇l e desta forma tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ri} + \nabla l_i \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.42) na equação (2.40) temos que:

$$V = Q_{vv} P (\varepsilon_r + \nabla l) = V_r + \nabla_r \quad (2.43)$$

onde:

V_r , é a influência dos erros sistemáticos nos resíduos e

∇_r , é a influência dos erros grosseiros nos resíduos,

Como já mencionado anteriormente o MMQ não distingue erros grosseiros dos erros randômicos dificultando desta forma a detecção dos erros grosseiros através dos resíduos.

De acordo com as propriedades da matriz indepotente¹¹ se tem:

¹¹ 1- Os valores próprios da matriz são 0 e 1, 2-Uma matriz indepotente não singular é a matriz identidade, 3- Apresenta traço igual a seu posto, 4-Se A é indempotente então $A^* \cdot A = A A^*$, onde A^* é a inversa generalizada da pseudo inversa da matriz A

Traço¹² da matriz $[Q_{vv}P] = n - u = r$ (apêndice II) onde

r , é o valor de redundância total.

Sendo r_i um elemento da diagonal da matriz R temos:

$$\sum_{i=1}^n r_i = r \text{ e que } r_i = (Q_{vv}P)_{ii} = q_{vvi} \cdot P_i \quad (2.44)$$

A matriz R é descrita da seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

O valor de r_i está no intervalo de $0 \leq r_i \leq 1$.

Fostner¹³ (1979) apud Kavouras (1982) chama o r_i de número de redundância e que expressa a contribuição de cada observação simples l_i para uma redundância total r , e Kavouras (1982) diz que este r_i serve como medida de controlabilidade local.

A redundância relativa é dada pela média dos elementos da diagonal de R como:

$$\bar{r} = \frac{\text{traço}[Q_{vv}P]}{n} = \frac{r}{n} \quad (2.46)$$

Através da matriz redundância (R), é possível também estudar o número de absorção (U), ou seja, quanto de erro grosseiro é absorvido pelo parâmetro.

A equação que relaciona redundância e absorção é:

$$R = Q_{vv}P = I - Q_iP = I - U \quad (2.47)$$

U também é uma matriz indepotente sendo assim:

---

¹² Soma da diagonal de uma matriz

¹³ FORSTNER, W. (1979). On the Internal and External Reliability of Photogrammetric Coordinates, presented paper at ASP-ASCM Convention, Washington, D.C.

$$\text{traço}[U] = \text{ordem}[U]$$

Pela equação (2.47) pode-se tirar que:

$$u_i = 1 - r_i \quad \text{com} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.48)$$

sendo u o número de absorção.

Ainda pode-se escrever:

$$\sum u_i = n - \sum r_i \quad \text{ou} \quad U = n - r$$

Com a presença de erro grosseiro (∇l_i) na observação, a equação (2.46) fica:

$$\nabla l_i \cdot u_i = \nabla l_i - r_i \nabla l_i \quad (2.49)$$

ou seja

$$\nabla l_i = u_i \nabla l_i + \nabla V_i \quad (2.50)$$

A equação (2.50) mostra que na ocorrência de um erro grosseiro na observação, parte deste erro será absorvido pelo parâmetro desconhecido e parte irá para o resíduo.

Da equação (2.49) pode-se observar que valores de redundância grande implicam em menor absorção do erro nos parâmetros, ou seja, se $r = 1$, por exemplo, o valor absorvido pelos parâmetros será igual a zero, o que mostra que todo o erro grosseiro está presente no resíduo e pode ser detectado fazendo uma melhor análise deste resíduo. Desta forma quanto maior for o valor de r_i implicará em um maior controle da absorção.

Sendo $r_i = 0$, significa que não existe nenhum controle sobre a observação e que o erro grosseiro não afeta o resíduo, não sendo possível a detecção de erros grosseiros. Além disto, o erro não detectado afetará a solução final em 100%. São desejáveis, em uma rede, valores grandes de r_{is} e que estes sejam uniformes (Kavouras, 1982).

Pope¹⁴ (1976) apud Kavouras (1982), afirma que a redundância relativa é constante na maioria das redes e que deve ser de $\bar{r} = \frac{r}{n} \cong 0,5$ não sendo bom valores menores.

Já Murle¹⁵ e Bill (1984) apud Teixeira e Ferreira (2003) apresentam os valores na tabela (2) para controlabilidade da redundância parcial.

Tabela 2 Controlabilidade de observações por meio de redundância parcial

INTERVALO	CONTROLABILIDADE
$0 \leq r_i < 0,01$	Não Há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	Ruim
$0,1 \leq r_i \leq 0,3$	Suficiente
$0,3 \leq r_i < 1$	Boa

Fonte: Murle e Bill (1984)

Pope¹⁶ (1976) apud Kuang (1996), diz que se uma rede não é adequadamente projetada (planejada) quanto a sua geometria, a redundância individual (local) r pode variar significativamente e não conservar próximo de $\bar{r}$, o que significa que a controlabilidade não será a mesma para todas as observações. Esta controlabilidade pode ser obtida pela equação (2.41) que descreve o número de redundância. Nesta equação vê-se a não dependência dos parâmetros envolvidos com a observação em campo (no caso os vetores rastreados), sendo dependente apenas da matriz dos coeficientes (A) e da matriz dos pesos (P) das observações, facilitando assim o estudo de redundância na fase de projeto de uma rede, de forma a minimizar os efeitos dos erros grosseiros sobre os parâmetros da rede a ser implantada.

A análise da redundância está diretamente ligada à geometria das estações da rede no terreno. Um fator importante que não influencia na geometria da rede, mas sim na qualidade dos dados, é a posição dos satélites

¹⁴ Pope, A. J. (1976). The Statistical of Residuals and The detection of *outliers*, U.S. Dept. of Commerce, NOAA Technical Reports NOS. 65 NGS 1, Rockville, Md.

¹⁵ MÜRLE, M.; BILL, R. (1984). Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Kalsruhe, v.91, n.2.

em relação ao ponto observado (configuração geométrica dos satélites). O ideal em trabalhos com GPS seria uma boa geometria dos satélites e que esta fosse obtida uniformemente para todos os pontos da rede em todos os vetores rastreados, porém, na prática, não se tem o controle da configuração da constelação dos satélites. O que se pode fazer é planejar para o dia do rastreo os satélites a serem observados e os horários que apresentam melhor configuração ou seja, conseguir GDOP<6 e PDOP<4.

O bom planejamento também envolve uma boa qualidade das medidas, as quais estão ligadas à precisão das observações originais tais como pseudo-distâncias e fase de batimento da portadora. Esta precisão esta condicionada diretamente ao tipo de receptor utilizado.

2.3.3 Testes para Detecção e Localização de *Outliers*

Os testes mais usuais para a detecção de *outliers* no pós-ajustamento são o teste Global e o teste Data Snooping. Baarda (1968) propôs a utilização do teste global para detecção de *outliers* e o teste Data Snooping para a localização dos erros grosseiros. Após o ajustamento da rede, o teste global é aplicado primeiro e compara o fator da variância a priori com o fator da variância a posteriori. Falhando o teste global, significa que algum problema está acontecendo com a hipótese nula H_0 e uma análise dos resíduos deve ser feito através do teste Data Snooping. Este exige o conhecimento à priori da precisão da observação.

Um outro teste usual para a localização de erros grosseiros foi desenvolvido por Pope (1972) e é chamado teste tau (τ). Esse teste, ao contrário do teste Data Snooping, não requer o conhecimento da variância à priori. Nos itens que se seguem serão abordados os três testes acima mencionados.

---

¹⁶ Pope, A. J. (1976) . The Statistical of Residuals and The detection of *outliers*, U.S. Dept. of Commerce, NOAA Technical Reports NOS. 65 NGS 1, Rockville, Md.

2.3.3.1 Teste Global sobre os Resíduos

O fator de variância a posteriori estimado de uma rede ajustada pelo MMQ é dado por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{S} \quad (2.51)$$

onde:

V , é o vetor resíduo obtido pós-ajustamento;

P , matriz peso das observações;

S , grau de liberdade das observações;

O teste global serve para examinar a compatibilidade do fator de variância a posteriori estimada $\hat{\sigma}_0^2$ com o fator de variância a priori arbitrado σ_0^2 e indica a qualidade do ajustamento (Gemael, 1994). Para este exame faz-se uso da seguinte equação:

$$Y = \frac{S \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (2.52)$$

Este teste segue a distribuição Qui-quadrado (χ^2) , com grau de liberdade S como mostrado na hipótese abaixo:

$$Y / H_0 \in \chi^2(S) \quad (2.53)$$

e cuja esperança matemática é dada por:

$E\{Y / H_0\} = S$, que implica em:

$$E\left\{\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} / H_0\right\} = 1 \quad \text{e} \quad E\{\hat{\sigma}_0^2 / H_0\} = \sigma_0^2 \quad (2.54)$$

O propósito do teste é definido pela hipótese nula e de acordo com este propósito pode-se aplicar um teste bilateral (duas caudas) ou um teste unilateral (uma cauda).

2.3.3.1.1 Teste Bilateral

De acordo com a hipótese H_0 espera-se obter para a variância a posteriori um valor igual ao da variância a priori, não sendo compatível valores maiores ou menores.

As hipóteses a serem testadas serão:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_0 = \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Dado o nível de significância α , a hipótese nula será rejeitada se:

$$\chi_{Calc}^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}(S)}^2 \quad (2.55)$$

$$\chi_{Calc}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}(S)}^2 \quad (2.56)$$

sendo aceita no caso em que:

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}(S)}^2 \leq \chi_{Calc}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}(S)}^2 \quad (2.57)$$

onde:

χ_{calc}^2 , valor Calculado para Qui-quadrado;

χ^2 , valor obtido na tabela de distribuição para Qui-quadrado;

α , nível de significância multidimensional;

Figura 3 Regiões de aceitação e rejeição do teste bilateral

2.3.3.1.2 Teste Unilateral

No teste global, com a finalidade de detecção de *outliers*, espera-se normalmente que $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$. Para isso as seguintes hipóteses são testadas:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$$

Segundo Kavouras (1982), é recomendado para esta situação, onde se quer detectar *outliers*, o seguinte teste unilateral:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < F_{S, \infty; 1-\alpha} \quad (2.58)$$

Sendo $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{V^T P V}{S \sigma_0^2}$, a equação (2.55) pode ser escrita como se segue:

$$V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V < r F_{r, \infty; 1-\alpha} = \chi_{S; 1-\alpha}^2 \quad (2.59)$$

$F_{gl, \infty, 1-\alpha}$: Teste “F” de SNEDECOR para os graus de liberdade do numerador igual a S e do denominador ∞ , e nível de significância $1-\alpha$.

2.3.3.1.3 Análise do Resultado do Teste Global

Existindo erros sobre a forma quadrática, o teste pode falhar ou não, dependendo disso da magnitude destes erros e da forma como eles encontram-se distribuídos nos resíduos. Falhando o teste de hipótese, ou seja, rejeitando H_0 , pode-se existir mais que um motivo para que ocorra esta rejeição. Dentre alguns citados por Uotila¹⁷ (1976), apud, Kavouras (1982), temos:

- ✓ Estimativa dos pesos incorretos;
- ✓ Erros nas observações;
- ✓ Modelo matemático incorreto.

¹⁷ Uotila, A.U. Statistical Tests as Guidelines in Analysis of Adjustment of Control Nets, Presented paper, Federation Internationale des geometres, 14th Congress, Washington, D.C.

Como discutido no item (2.3), uma vez rejeitada a H_0 existirá infinitas hipóteses alternativas e, nestes casos, segundo Kuang (1996) as duas principais serão:

H_{a1} pesos incorretos nas observações;

H_{a2} existe erro grosseiro em um dado de observação;

Sendo a variância estimada diferente de um ($\hat{\sigma}_0^2 \neq 1$), o pesquisador não sabe qual das Hipóteses alternativas anteriores causou o fracasso do teste, então um procedimento passo a passo deve ser seguido como:

Examinar primeiramente a H_{a1} , de forma a verificar se as observações têm pesos corretos.

Como já visto, a matriz peso é dada por:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1}$$

Na prática o fator de variância a priori é usualmente um ($\sigma_0^2 = 1$) e a matriz peso passa a ser igual ao inverso da MVC da observação, sendo assim:

$$\chi^2(gl) = \frac{V^T \mathbf{P} V}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma_0^2 \cdot V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V}{\sigma_0^2}$$

$$\chi_{Calc}^2(g) = V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V \quad (2.60)$$

Verifica-se claramente que o cálculo do teste Qui-quadrado é totalmente independente da variância a priori, sendo dependente dos V e da matriz variância-covariância Σ_{Lb} das observações.

Segundo Amorim (2004), uma estimativa muito pessimista dos erros aleatórios, ou seja, suposição da matriz variância-covariância pouco precisa, fará com que o valor de $\chi_{Calc}^2(gl)$ seja menor que o limite inferior do nível de significância (Eq. 2.56). Por outro lado, uma estimativa muito otimista dos erros aleatórios em que se supõe uma MVC muito precisa, fará com que $\chi_{Calc}^2(gl)$ seja maior que o limite superior do nível de significância (Eq. 2.55).

Desta forma no teste bilateral, uma estimativa muito pessimista ou muito otimista dos erros aleatórios das observações irá gerar valores para $\chi^2_{Calc}(gl)$ além dos limites de aleatoriedade da hipótese zero, provocando sua rejeição.

No teste unilateral, irá ocorrer a rejeição do teste global somente se a estimativa dos erros aleatórios for muito otimista.

Segundo Kuang (1996), é fácil reconhecer a rejeição da H_0 causada por uma estimativa imprópria da matriz variância-covariância devido aos resíduos obedecerem à função de distribuição normal e terem esperança de média igual a zero, o que, provavelmente, implica que nenhuma observação produzirá resíduos excessivos.

Sendo o teste global rejeitado, mas, a amplitude dos resíduos mostrarem-se compatíveis com a precisão dos equipamentos usados nas medições, pode-se dizer que a precisão das observações não foi corretamente estimada e por isso uma nova matriz variância-covariância Σ_{Lb} pode ser proposta.

A nova matriz MVC, na prática, pode ser feito escalonando a matriz Σ_{Lb} com a variância “a posteriori” estimada $\hat{\sigma}_o^2$, ou seja:

$$\hat{\Sigma}_{Lb} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot \Sigma_{Lb} \quad (2.61)$$

onde:

$\hat{\Sigma}_{Lb}$: matriz variância-covariância das observações escalonada.

Com a nova MVC $\hat{\Sigma}_{Lb}$, a rede será mais uma vez ajustada, e testará aceitação da hipótese nula. Caso esse novo teste falhe e se algum resíduo mostrar-se inconsistente, então a hipótese alternativa H_{a2} será examinada, aplicando-se o teste “data snooping”, a fim de localizar e eliminar possíveis erros grosseiros das observações.

2.3.3.2 Teste Data Snooping

Como já discutido anteriormente, os resíduos são conhecidos após o ajustamento da rede, mas os erros grosseiros não o são. Entretanto, se a

hipótese zero foi rejeitada porque existem erros grosseiros nas observações, torna-se crucial localizá-los e eliminá-los (Kuang, 1996).

A hipótese alternativa H_{a2} , mencionada no item anterior, é pouco específica para ser testada, sendo necessária sua reformulação. A hipótese proposta então, deve conter uma relação entre erros grosseiros (∇l) e resíduos estimados. A técnica sugerida por Baarda, assume que somente uma observação de cada vez é errônea e desta forma a hipótese alternativa H_{a2i} fica:

$$H_{a2i} : \nabla l_i = c_i \quad (2.62)$$

$$\text{com } \nabla l_i \neq 0 \quad \text{e} \quad (i = 1 \dots n)$$

Onde:

$c_i = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0)$ vetor de zeros, com 1 na enésima posição;

∇l_i Magnitude do erro grosseiro na enésima observação l_i .

O teste estatístico para testar a H_0 contra a H_{a2i} é constituído como se segue:

$$w_i = \frac{V_i}{\sqrt{r_i} \sigma_{li}} = \frac{V_i}{\sigma_{vi}} \quad (2.63)$$

Onde:

$$\sigma_{vi} = \sqrt{r_i} \sigma_{li}$$

A estatística w_i possui distribuição normal com média zero e variância unitária, sendo assim, a H_0 pode ser dado por:

$$w_i / H_0 \in N(0,1)$$

De acordo com o princípio bilateral, dado o nível de significância α_0 , será rejeitada a hipótese nula se:

$$w_i < N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1)$$

ou

$$w_i > N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1)$$

e será aceita no intervalo:

$$N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) \leq w_i \leq N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1)$$

O teste data snooping refere-se ao teste unidimensional examinando somente um resíduo de cada vez, sendo repetido o processo na existência de mais de um erro grosseiro.

Segundo Kuang (1996), o valor sugerido para α_0 é de 0,001, que dá um valor limite de **3.29**. Desta forma, a hipótese nula será rejeitada e o enésimo resíduo será rejeitado se:

$$|w_i| > 3.29 \text{ ou}$$

$$|V_i| > 3.29\sigma_{vi}$$

Deve-se notar que o valor de w_i é calculado, baseando-se em σ_{li} como sendo conhecido, entretanto o procedimento “data snooping” é confiável somente quando um bom conhecimento das propriedades estocásticas das observações é avaliado.

2.3.3.3 Teste Tau (τ) sobre os Resíduos

O teste Tau foi introduzido por Pope em 1976. Este teste pertence ao grupo dos testes de Students e faz uso da variância a posteriori de unidade de peso estimados das observações. O teste estatístico é dado por:

$$\tau_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}} = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{q_{\hat{v}_i}}}$$

Onde:

τ_i : Teste estatístico proposto por Pope (1976).

Esse teste segue a distribuição τ (distribuição Tau) e é semelhante ao teste dos resíduos reduzidos, Eq. (2.63), diferindo-se, apenas, quanto à estimativa da variância dos resíduos.

A hipótese nula proposta para essa distribuição, correspondente ao grau de liberdade S é:

$$H_0 : \tau_i \sim \tau(r)$$

Matematicamente, esse teste é uma estatística multi-variada de resíduos, padronizados por $\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$, obtida através da variância estimada $\hat{\sigma}_0^2$. Definido o nível de significância α , a estatística τ_i será destacada como “outlier”, se:

$$|\tau_i| > \tau_{\frac{\alpha}{2}}$$

O valor crítico $\tau_{\frac{\alpha}{2}}$ é calculado da seguinte forma:

$$\tau_{\frac{\alpha}{2}}(S) = \frac{\sqrt{S} \cdot t_{S-1, \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{S-1 + \left(t_{S-1, \frac{\alpha}{2}}\right)^2}} \text{ onde:}$$

onde:

$t_{S-1, \frac{\alpha}{2}}$ é o desvio da distribuição de Students para o nível de significância

$\frac{\alpha}{2}$ e grau de liberdade $(S-1)$.

Leick (2004) diz ser importante entender que se o resíduo não passa no teste tau, não significa que exista um erro naquela observação. Se a observação é sinalizada (apresenta algum problema), podem-se fazer futuros exames e decidir sobre a rejeição desta. Um erro significativo usualmente afeta os resíduos em outras observações.

Observações com *outliers*, do ponto de vista estatístico, não podem ser consideradas como pertencentes à amostra, não devendo ser usadas com as outras observações (Kuang 1996). Todas as observações contaminadas com

outliers devem simplesmente ser rejeitadas. Esta fase de rejeição se dá após a localização dos erros, que será visto no item a seguir.

Após a detecção de erros grosseiros pelo teste Data Snooping ou mesmo o teste *Tau*, apresentarem um limitado número de rejeições e assumindo que as rejeições não são causadas pelos modelos matemáticos, e que erros óbvios como de digitação foram corrigidos, pode-se ter algumas opções a serem tomadas:

- ✓ Remover a observação correspondente;
- ✓ Medir novamente a observação correspondente;
- ✓ Aumentar o desvio padrão das observações correspondente;
- ✓ Ignorar as rejeições;

Após a detecção de “*outlier*”, a localização e a eliminação dos erros seguem a mesma filosofia do “teste Data Snooping” de Baarda.

2.3.4 Eliminação e Localização de Erros Grosseiros

Após a detecção de *outliers*, o próximo passo é fazer a localização dos erros grosseiros, ou seja, verificar se o resíduo detectado v_i é ou não causado por um erro grosseiro ∇l_i , correspondente à observação l_i .

Segundo Kuang (1996), um erro grosseiro será indicado se o número de redundância for superior ao máximo valor absoluto individual dos outros elementos da coluna da matriz R a que ele pertença, ou seja:

$$r_i > |r_{ji}| \quad (j \neq i, j = 1, \dots, n)$$

em que:

$$r_i, (i = 1, \dots, n) \text{ e } r_{ij}, (i = 1, \dots, n; i \neq j)$$

se a situação acima é verdadeira o erro pode ser localizado pelo resíduo

estimado : $\nabla l_i = -\frac{\hat{v}_i}{r_i}$

Existindo falsidade na equação acima, isto indicará a existência de forte correlação entre os resíduos, o que implicará na grande dificuldade em

determinar qual observação l_i contém o erro grosseiro ∇l_j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$), que produz o resíduo suspeito v_i .

Sendo assim, não é aconselhável a eliminação automática de observações a partir de resíduos suspeitos e estes devem ser usados, tão somente, para destacar as correspondentes observações como possíveis candidatas à rejeição.

Um erro grosseiro será indicado (detectado) se o resíduo embutido (presente nos resíduos) for maior que o erro marginal detectável. $\nabla l_i > \nabla l_{0i}$. O erro marginal detectável será estudado no próximo item.

2.4 Confiabilidade de Redes Geodésicas

Pequenos resíduos não indicam necessariamente que a qualidade do ajustamento, ou seja, que todos os erros nos dados tenham sido identificados e removidos. Sendo assim torna-se importante definir os limites inferiores dos erros detectáveis para um nível de significância α e de potência de teste $(1 - \beta)$ escolhidos previamente.

Esse limite inferior do erro grosseiro detectável com a potência de teste predefinida é definido como confiabilidade interna. Amorim (2004) diz que, um segundo elemento de grande importância na análise da rede é a confiabilidade externa, que, grosso modo, é a influência de cada um dos erros detectáveis nos parâmetros do ajustamento.

Antes de iniciar o estudo sobre confiabilidade, será feita uma abordagem sobre erro marginal detectável, por ser este o elemento mais importante nos conceitos de confiabilidade.

2.4.1 Vetor Erro Marginal Detectável

A esperança matemática (E) na hipótese nula (H_0) é de que $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 1$, o que não acontece na hipótese alternativa (H_{a2}), pois esta hipótese especifica a existência de erros significativos nas observações.

A hipótese alternativa pode ser dada como se segue:

$$E\left\{\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\middle|H_{a2}\right\}=1+\frac{\lambda}{r} \quad (2.64)$$

onde:

λ , é o parâmetro central que é dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla v^T P \nabla v \quad \text{em que:} \quad (2.65)$$

∇v , é a influência do vetor erro grosseiro (∇l) sobre o resíduo.

Maiores detalhes ver em Kuang (1996) pág. 135.

Sabendo-se que $\nabla v = -R \nabla l$ e substituindo na equação acima se obtém:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla l^T R^T P R \nabla l = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla l^T P Q_{vv} P \nabla l \quad (2.66)$$

Na hipótese alternativa (H_{a2}), a estatística y segue a distribuição Qui-quadrado não central $\chi^2(r, \lambda)$, em que λ é o parâmetro central, mostrado na equação 2.66, desta forma pode-se escrever:

$$y|H_{a2} = \frac{r \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \middle| H_{a2} \in \chi^2(r, \lambda) \quad (2.67)$$

O vetor erro grosseiro (∇l), em geral, não é conhecido, sendo assim, o valor de λ não pode ser calculado e a probabilidade β não pode ser calculada na prática. Baarda (1968) propôs inverter a relação entre a potência de teste e parâmetro de não centralidade e chegou à seguinte dedução:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha, \beta_0, r)$$

Em que λ_0 representa o desvio mínimo detectável de H_{a2} em relação a H_0 dado o nível de significância α e potência de teste $1 - \beta_0$, na qual se admite uma probabilidade aceitável β_0 para o erro tipo II. Esses valores podem ser obtidos nos monogramas de Baarda (1968).

A Tabela (3) mostra alguns valores de λ_0 para a potência de teste ($1 - \beta_0 = 0,80$), para os níveis de significância $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$ e diversos graus de liberdade.

Tabela 3 Valores de parâmetro não - centralidade para (1- β) = 0,80).

Grau de Liberdade (r)								
α	2	5	10	20	30	40	50	85
0,05	9,6	13,4	16,5	21,0	25,3	28,5	32,0	40,0
0,01	14,0	18,3	22,7	29,0	34,5	39,0	42,0	50,0

Fonte: Kuang, 1996

O comprimento mínimo detectável do vetor erro grosseiro pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\bar{\nabla}l = \sigma_o \cdot \sqrt{\frac{\lambda_o}{u^T P Q_{vv} P u}} \quad (2.68)$$

em que:

$\bar{\nabla}l$: Comprimento mínimo detectável do vetor erro grosseiro;

∇_l : Vetor erro grosseiro;

u : Vetor unitário da direção ∇_l , e que é obtido pela divisão do vetor erro grosseiro ∇_l por sua norma, $u = \frac{\nabla_l}{\|\nabla_l\|}$.

2.4.1.1 Erro Marginal Detectável de um Erro Grosseiro Individual

A equação (2.68) não fornece nenhuma informação sobre a magnitude mínima detectável para um erro grosseiro individual. Este pode ser obtido da hipótese alternativa H_{a2} , proposta por Baarda (1968), que supõe um vetor erro grosseiro composto de elementos zero, exceto o elemento da enésima posição cujo valor é a unidade ($e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, n)^T$). Substituindo esse vetor na Eq. (2.68), obtém-se:

$$\nabla_0 l_i = \sigma_o \sqrt{\frac{\lambda_o}{e_i^T P Q_{vv} P e_i}} = \sigma_o \sqrt{\frac{\lambda_o}{r_i}} \quad (2.69)$$

Uma outra forma para derivar $\nabla_0 l_i$ é usar o teste estatístico unidimensional dos resíduos padronizados w_i definido pela seguinte equação:

$$w_i = -\frac{\hat{v}_i}{\sqrt{r_i} \sigma l_i} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma \hat{v}_i} \quad (2.70)$$

O resíduo total é expresso pela seguinte equação

$$\tilde{v}_i = \hat{v}_i + \nabla \hat{v}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.71)$$

em que:

$\tilde{v}_i$, corresponde ao resíduo total;

$\hat{v}_i$, representa o resíduo correspondente ao erro aleatório e

∇l_i , Ao resíduo proveniente do erro grosseiro.

Fazendo a padronização dos resíduos na equação (2.71) temos:

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{v}_i}{\sigma_{vi}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}} + \frac{\nabla \hat{v}_i}{\sigma_{vi}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}\} = E\left\{\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}} + \frac{\nabla \hat{v}_i}{\sigma_{vi}}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} = E\left\{H_o : \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}}\right\} + \delta_i$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} = 0 + \delta_i \quad (2.72)$$

onde:

$$\delta_i = \nabla \tilde{w}_i = -\frac{\nabla \hat{v}_i}{\sigma l_i \sqrt{r_i}} = \frac{\nabla l_i \sqrt{r_i}}{\sigma l_i} \quad (2.73)$$

em que δ_i corresponde à influência de um erro ∇l_i em l_i , num teste estatístico w_i .

Desta forma testam-se as seguintes hipóteses:

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} \sim n(\delta_i, 1)$$

$$E\{H_o : w_i\} \sim n(0, 1)$$

Figura 4 Determinação do erro marginal detectável - teste dos resíduos padronizados

Fonte: Adaptado de Leick, 1995.

Segundo Leick (2004), o parâmetro de não-centralidade unidimensional δ_i é uma translação da curva normal, mostrado na Figura (5), a qual mostra que a probabilidade $\beta\%$ (erro tipo II) de rejeitar a hipótese alternativa (e aceitar a hipótese zero) mesmo que a hipótese alternativa seja correta, depende do parâmetro de não-centralidade δ_i .

Assume-se uma probabilidade aceitável β_o para o erro tipo II e calcula-se respectivamente o parâmetro de não-centralidade δ_o admissível, parâmetro esse que é usado para calcular o limite inferior do erro grosseiro detectável.

$$\nabla_{oli} = \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}} \quad (2.74)$$

Onde:

σ_{li} , é a precisão da na enésima observação,

r , é da diagonal da matriz R da enésima observação.

O limite inferior dos erros grosseiros detectáveis baseia-se em probabilidades adotadas para erro tipo I e tipo II da distribuição normal. As probabilidades α_o e β_o referem-se a um teste unidimensional para resíduos individuais v_i , com um parâmetro de não-centralidade igual δ_o dando desta forma, a seguinte relação funcional: $\delta_o = \delta(\alpha_o, \beta_o)$.

A equação que possibilita encontrar o parâmetro de não centralidade segue a distribuição normal com média zero e variância 1 e é dado por:

$$\delta_0 = N\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}, 0,1\right) + N(1 - \beta_0, 0,1) \quad (2.75)$$

A Tabela (4) mostra os níveis de probabilidade e os respectivos valores de δ_0 .

Tabela 4 níveis de probabilidade e parâmetro de não centralidade

α	β_0	δ_0
0,05	0,20	2,80
0,01	0,20	3,42
0,05	0,10	3,24
0,01	0,10	3,86

Fonte: Leick, 2004

2.4.1.2 Escolha do Nível de Significância α , α_0 e da Potência do

Teste $1 - \beta_0$

Como visto anteriormente, Baarda (1968) propôs o uso do teste global para a detecção de erros grosseiros e o teste Data Snooping para sua localização. Para estes dois testes, diferentes valores para níveis de significância e potências do testes podem ser escolhidos.

Para a potência do teste, Baarda (1968) propôs que esta seja constante para ambos os testes. Para os níveis de significância, ele propôs a utilização de α para o teste global e α_0 para o teste *Data Snooping*.

Sendo $\beta = \beta_0$ (constantes), os níveis de significância serão interceptados pelo parâmetro de não centralidade λ_0 . Segundo Kavouras (1982), os seguintes procedimentos podem ser tomados:

- ✓ Passo 1: Escolher α_0 e β_0 de forma a encontrar o parâmetro de não centralidade unidimensional δ_0 pela equação (2.75) e desta forma, obter o parâmetro de não centralidade multidimensional pela equação $\lambda_0 = \delta_0^2$.

- ✓ Passo 2: Calcular o nível de significância multidimensional α para $\lambda_0 = \lambda(\alpha, \beta_0, r)$.

A seleção de β_0 , para o resultado do teste, não é tão crítica como a seleção de α_0 . A relação de α e α_0 pode também ser obtida pelo monograma de Baarda ,(ver Figura 6 e Apêndice III). Segundo Kuang (1996), o valor usual para a potência do teste é de 80% e de 0.1% para α_0 . Estes valores recomendados para potência do teste e nível de significância resultam em um parâmetro de não centralidade grande. A tabela 4 mostra que quanto menor o valor de potência de teste e menor o nível de significância maior será o valor encontrado para o parâmetro de não centralidade, resultando na não identificação de muitos dos erros grosseiros presentes e influentes.

Os valores recomendados eram bastante usuais em épocas anteriores onde os equipamentos de medições não eram tão precisos e confiáveis como os modernos equipamentos de hoje. Ao utilizar, por exemplo, dados advindos de levantamento GPS e valores de potência do teste de 80% e α_0 de 0.1%, diversos *outliers* presentes nas observações, provavelmente, não serão detectados como significativamente influentes, o que leva os usuários utilizarem potência do teste de 80% e α_0 de 5%.

Figura 6 monograma de Baarda para $\beta_0 = 80\%$

Fonte: Baarda (1968)

2.4.2 Confiabilidade Interna, Absorção e Confiabilidade Externa

Atualmente o estudo da confiabilidade é um dos temas com mais aplicação e utilidade na fotogrametria, geodesia e muitas outras ciências em geral.

Baarda (1968) foi o primeiro a conceituar confiabilidade de redes geodésicas. O conceito atribuído por Baarda, segundo Kuang (1996), é de que a confiabilidade refere-se à habilidade da rede em detectar erros grosseiros nas observações e que é dividida em confiabilidade interna e externa.

O primeiro refere-se à habilidade da rede em detectar os erros grosseiros pelo teste de hipótese, feito com o nível de confiança $(1-\alpha)$ e potência $(1-\beta)$, enquanto que a confiabilidade externa é utilizada para descrever a influência dos erros grosseiros sobre os parâmetros estimados.

2.4.2.1 Confiabilidade Interna

Segundo Leick (2004), a confiabilidade interna pode ser definida como a capacidade da rede em detectar erros grosseiros com probabilidade de $1-\beta_0$.

A confiabilidade interna indica o erro mínimo que está presente em uma observação e que é sensível ao teste aplicado. O limite para os erros grosseiros detectáveis com nível de probabilidade α e β_0 é dado por:

$$\begin{aligned}\nabla_{oli} &= \sigma_{li} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_o}{r_i}} \\ \nabla_{oli} &= \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}\end{aligned}\quad (2.76)$$

A equação que descreve a confiabilidade interna global é dada por:

$$|\overline{\nabla}_{oli}| = \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_o \sqrt{n}}{\sqrt{r}} = \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_o}{\bar{r}}$$

Onde:

$\bar{r}$, é a redundância média e σ_{li} passa a representar o menor desvio das observações.

A porcentagem de erros possíveis detectáveis é de $100(1-\beta_0)\%$ e a porcentagem que permanece não detectável é de $100\beta_0\%$ (Leick, 2004).

2.4.2.2 Absorção

A absorção é a porção dos erros grosseiros que propaga nos parâmetros e falsifica a solução. A absorção é dada em função do r_i e v_i da observação l_i .

Ou seja:

$$A_i = \frac{1-r_i}{r_i} v_i \quad (2.77)$$

Quanto maior o valor de r_i implicará em menor absorção de erros pela solução.

Moraes (1998) faz uma analogia da seguinte forma:

“[...] Os resíduos são a parte visível do erro, enquanto a absorção é a parte não visível”.

2.4.2.3 Confiabilidade Externa

A confiabilidade externa é definida como a influência de cada um dos erros grosseiros detectáveis, nos parâmetros do ajustamento ou nas funções dos parâmetros. Segundo Leick (2004), a confiabilidade interna consistente de uma rede não garante automaticamente, coordenadas confiáveis. Para isso, o estudo necessita ser complementado com a análise da confiabilidade externa, a qual irá estimar o efeito dos erros nos parâmetros finais.

A estimativa dos parâmetros com presença de erro grosseiro é dada por:

$$\hat{X} = -N^{-1} A^T P (L_b - e_i \nabla_{l_i}) \quad (2.78)$$

A influência do erro ∇_l sobre as coordenadas estimadas é dada pela equação:

$$\nabla_X = N^{-1} A^T P e_i \nabla_{l_i} \quad (2.79)$$

Um erro grosseiro afeta todos os parâmetros. O impacto de um erro marginal detectável $\nabla_{l_{oi}}$ é:

$$\nabla_{X_{oi}} = N^{-1} A^T P e_i \nabla_{l_i} \quad (2.80)$$

A Equação (2.81) mostra o impacto de cada erro marginal detectável nos parâmetros e sua dependência na definição do sistema de coordenadas (injunção mínima). Baarda (1968) propôs uma outra estatística padronizada que não depende do sistema de coordenadas para expressar a confiabilidade externa, indicada na equação a seguir:

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{X_{oi}}^T N \nabla_{X_{oi}}}{\sigma_o^2} \quad (2.81)$$

Substituindo as equações (2.80) e (2.76) em (2.81), obtém-se:

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{l_{oi}} e_i^T P A N^{-1} A^T P e_i \nabla_{l_i}}{\sigma_o^2} = \frac{\nabla_{l_{oi}}^2 e_i^T P (I - Q_{vv} P) e_i}{\sigma_o^2} \quad (2.82)$$

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{l_i}^2 p_i (1 - r_i)}{\sigma_o^2} = \frac{(1 - r_i)}{r_i} \cdot \delta_o^2 \quad (2.83)$$

Pode-se observar nas equações (2.83) e (2.77), uma dependência do número de redundância (r_i). Sendo a redundância pequena, o fator de confiabilidade externa global torna-se grande, e sendo assim, a adulteração causada pelos erros grosseiros pode ser significativa. Desta forma, deseja-se obter uma boa confiabilidade externa com um número de redundâncias grande.

Uma aplicação mais prática pode ser dada pela seguinte equação;

$$\frac{\nabla_{x\ o i}}{\sigma_x} \leq \sqrt{\gamma_{oi}} \quad (2.84)$$

em que:

$\nabla_{x\ o i}$: Efeito de um erro grosseiro não detectável de uma observação nas coordenadas de um vértice;

σ_x : Precisão das coordenadas desse vértice.

A Equação (2.84) é derivada da confiabilidade externa global (2.83), e relaciona a confiabilidade externa com a precisão dos parâmetros desconhecidos. Esta equação é dependente apenas da geometria da rede e do nível de significância do teste, independentemente assim, das reais medidas de campo. Desta forma, se pode estudar a confiabilidade externa de uma rede ainda na fase de projeto. Kok¹⁸ (1982) apud Kavouras (1982) diz que um critério baseado na experiência, que é freqüentemente usado, considera $\sqrt{\gamma_{oi}} \leq 10$ para cada observação. Se os resultados apresentarem-se homogêneos, isso significa que a rede possui uma boa confiabilidade externa.

A confiabilidade de rede, discutida nesta sessão, é uma ferramenta de grande importância na análise, pois mesmo depois dos procedimentos de detecção de erros grosseiros, certamente ainda haverá erros não detectados. A confiabilidade estabelece uma sensibilidade estatística para definir os limites inferiores de erros detectáveis e prever a influência dos erros não detectáveis nas coordenadas ajustadas. Detalhes do estudo de confiabilidade também podem ser vistos em Amorim (2004); Leick (2004); Kuang (1996); kavouras (1982).

---

¹⁸ Kok, J.J (1982), “ Personal Communication”

CAPITULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS

---

*“Sempre que te perguntarem se podes
fazer um trabalho, responde que sim e
te ponhas em seguida a aprender
como se faz.”*

F. Roosevelt
Presidente dos EUA

3 Introdução

Este capítulo apresenta a forma como foi conduzida a investigação experimental deste trabalho, a fim de alcançar o objetivo proposto, que é a análise e critérios de ajustamento para a obtenção de uma rede GPS de apoio a levantamentos geodésicos, para fins topográficos locais, de acordo com a Resolução PR 22 de 21/07/1983 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

3.1 Materiais utilizados

- a) Dois receptores geodésicos de frequência L marca LEICA, modelo 9400. Precisão nominal para o vetor: distância horizontal $\pm 10 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$; distância vertical $\pm 20 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$ e azimuth $\pm \left(1'' + \frac{5''}{D} \right)$ onde, D distância em quilômetro.
- b) Dois bi-pés com altura fixa de 1.90 m para instalação da antena.
- c) Estação Total Leica TC-403 com precisão linear de 2 mm + 2ppm e angular de 3 segundos.
- d) Planta planialtimétrica da área de estudo em meio digital juntamente com as plantas das presentes e futuras edificações
- e) Recursos computacionais de programas (Ski-Pro, Ashtech Solution) e computadores do Laboratório de Topografia do STT/EESC-USP.

3.2 Método

Para aplicar os estudos propostos e facilitar o entendimento do conteúdo, (o cálculo de ajustamento e análise da melhoria da qualidade de redes) foi planejada a implantação no Campus II da USP de São Carlos de uma rede constituída por 13 vértices.

3.2.1 Área de Estudo e Implantação dos Marcos em Campo

A área de estudo é o Campus II da USP de São Carlos (figura 7). Está localizada próximo ao bairro Santa Angelina na cidade de São Carlos, com uma área de 78 hectares e encontra-se, aproximadamente, a 4 km do Campus I. A rede foi projetada com base na planta topográfica fornecida pela Prefeitura do Campus da Escola de Engenharia de São Carlos, contendo a localização das edificações em construção e as já existentes.

Figura 7 Campus II da EESC
Fonte: Prefeitura do Campus I da USP

A distribuição dos pontos foi planejada buscando observar fatores como: posição dos pontos da rede em relação à acessibilidade, proximidade de áreas construídas e regiões com tendência de crescimento (construções futuras).

Locais altamente refletivos para o espectro eletromagnético no comprimento de ondas para a frequência L do sistema GPS e que são favoráveis à presença de multicaminhamentos, foram descartados para a implantação de marcos. A Figura 8 apresenta a rede planejada e as

Para compor a matriz R , foram utilizados os 29 vetores da rede em projeto, sendo que cada vetor é composto de 3 componentes (dx, dy, dz), totalizando assim 87 equações de observações. Desta forma a matriz A é formada por 87 linhas e 36 colunas, a matriz peso (P) por uma matriz quadrada de 89 linhas e 89 colunas e a matriz identidade (I) na mesma ordem da matriz peso.

Nesta fase não foi considerada correlação cruzada entre os vetores, onde a matriz peso seria proveniente da matriz variância-covariância (MVC) das observações, ver item 2.2.2.4. Assim, a matriz peso foi obtida em função da precisão nominal e da distância aproximadas entre as estações. No caso em estudo, por ser os comprimentos dos vetores muito pequenos (150 m a 500 m), os pesos das observações tenderam a ser iguais, desta forma a matriz peso pôde ser substituída pela matriz identidade, ou seja, $P = I$.

O resultado da matriz redundância é uma matriz $n \times n$ em que o valor da diagonal representa a redundância parcial de cada componente do vetor. Segundo Leick (2004) estes valores de redundância deve ser maior ou igual a 0,5 para se obter um bom resultado de confiabilidade na rede. Os componentes de vetores que apresentaram valores de redundância abaixo de 0,5 devem ser reocupados.

Cabe ressaltar aqui que a matriz redundância utilizada na análise preliminar, não é obtida da mesma forma que a matriz redundância utilizada no cálculo de confiabilidade interna e externa da rede. A utilizada no cálculo de confiabilidade é obtida no momento do ajustamento, levando em consideração a matriz peso em função da MVC e da variância a priori. (eq. 2.5). Ambas resultam em valores idênticos.

Após a análise de redundância, os 13 vértices foram monumentados com marcos de concreto possuindo placas de identificação de metal. Os pontos M01 e M02 foram implantados pela firma Aerobase Fotogrametria, na ocasião do voo fotogramétrico do Campus II. Suas coordenadas, obtidas por GPS, têm como referência o ponto de Valinhos da Rede Estadual de São Paulo (RESP).

O marco original M01 foi deslocado em 2002 e recolocado no local no mesmo ano. Este ponto foi reocupado com GPS tendo como referência o ponto

M02 e não mais pontos da rede estadual. Devido a estas condições, optou-se por utilizar na pesquisa, apenas o marco M02 como injunção.

3.2.2 Levantamento de Campo

O levantamento de campo das **29** sessões mais as sessões a serem reocupadas foi realizado no período de **25/11/2004 a 12/12/2004**, com **sete** visitas.

Observações contínuas com no mínimo cinco satélites foram realizadas durante todas as seções de rastreo, buscando sempre valores de GDOP²⁰ (<6) e PDOP²¹ (≤ 4). Estas informações foram obtidas pelo módulo de elaboração de missão de observação, existente no programa Ski-Pro, da Leica.

De forma a otimizar o tempo de coleta de dados, em algumas estações, um dos receptores permaneceu estacionado por mais de 30 minutos. Como exemplo, menciona-se o ponto M09 (Figura 8), onde o tempo de coleta total foi de aproximadamente 04:00h, ficando o outro receptor estacionado por períodos de 30 minutos nos pontos (M03,M04,M05,M08,M10, M11, M12, M13).

3.2.3 Processamento das Observações

Os dados coletados foram descarregados nos programas Ski-Pro (Leica) e Ashtech Solution (Ashtech), por meio dos quais foram realizadas a preparação dos dados brutos e o processamento dos vetores.

Tanto no Ski como no Ashtech foram realizados processamentos individuais dos vetores.

Durante a fase de processamento, retirou os satélites que apresentavam resíduos altos, bem como horários de GDOP (>6).

Para o processamento foi realizado estudo dos programas para identificar a configuração dos parâmetros de entrada.

---

²⁰ Diluição geométrica da precisão, relativo à combinação de TDOP e PDOP.

²¹ Diluição da precisão, relativo ao posicionamento tridimensional TDOP-Relativo à medição dos intervalos de tempo

3.2.4 Ajustamento e Análise da Qualidade da Rede

Após a fase de processamento dos vetores, foi dado início as etapas para o ajustamento.

Antes de iniciar o ajustamento propriamente dito, fez-se necessário realizar um pré-ajustamento objetivando determinar, segundo Gemael (1994), a qualidade do levantamento, ou seja, a consistência interna das medidas. Uma rede livre pode ser definida como uma rede em que o layout geométrico é determinado somente pelas observações, sendo a posição, escala e orientação da rede fixada por um número mínimo de restrições através das estações bases. O ajustamento livre utiliza-se também do método dos MMQ, podendo ser aplicado testes estatísticos como Qui-quadrado, teste F, Data Snooping, e Tau.

Vale ressaltar que o ajustamento livre pode ser realizado tanto nos programas comerciais, como em rotinas programáveis em ferramentas computacionais como Mathcad e Matlab. Não sendo o objetivo deste trabalho preferiu-se realizar as fases de pré-processamento no programa comercial.

Além do ajustamento livre, foi realizado o teste de loops, aplicado para verificar erro de conectividade e numeração das estações. Este teste detecta se está faltando ou sobrando alguma estação, bem como as interligações entre elas.

Tanto o ajustamento livre como o teste de loops foi realizado no Ski-Pro.

Depois do pré-ajustamento, foram feitos três ajustamentos; o primeiro no Ski-Pro versão 2.1 com os dados de processamento do próprio Ski; o segundo no Ashtech Solution com dados do processamento do Ashtech e o terceiro em uma rotina desenvolvida na ferramenta computacional Mathcad 2001 Professional com os dados advindos do processamento do Ski-Pro.

O Ski-Pro foi utilizado por ser um programa comercial já consagrado pela comunidade especializada e também, por ser do mesmo fabricante dos receptores GPS utilizados na pesquisa, o que tornou mais direta e rápida a realização da fase de descarregamento e processamento das observações.

O Programa Computacional Ashtech Solution foi escolhido para comparação com os resultados obtidos pelo programa Ski-Pro, por ser de fabricante diferente dos equipamentos utilizados na pesquisa, sendo utilizado para controle de exatidão. A utilização destes dois programas para a realização do ajustamento da rede deu-se devido à necessidade de referências seguras e confiáveis para comparação dos resultados obtidos pelo programa elaborado pelo autor, no Mathcad versão 2.1 Professional.

Os dados de processamento do Ski-Pro utilizados pelo Mathcad para o ajustamento foram:

- ✓ MVC das observações;
- ✓ Vetores processados (componentes dos vetores);
- ✓ Coordenadas aproximadas das estações;

Além dos dados de entrada acima, houve a necessidade de formulação das equações de observações, obedecendo a ordem em que a MVC apresentava os dados dos vetores.

Grande atenção deve ser dada quanto às coordenadas aproximadas para o ajustamento. Nesta pesquisa, nas coordenadas iniciais para o ponto M02, foi utilizado o valor ajustado deste ponto, uma vez que este é considerado como ponto de junção.

Nos demais pontos, aqueles que resultaram em mais de um valor de coordenada, foi extraído uma média dos distintos valores de coordenadas obtidas no processamento. Como exemplo observa-se o ponto M01, na figura 8, em que sua coordenada aproximada para o ajustamento foi obtida pela média aritmética dos cinco valores encontrados e advindos dos vetores M07>M01, M04>M01, M08>M01, M05>M01, M013>M01.

Uma forma mais correta seria considerar os pesos nestas medidas, extraíndo para cada ponto a média ponderada. Porém, para o ajustamento inicial, é necessário apenas de pontos aproximados, sendo utilizado interações no fim de cada ajustamento obtendo assim o melhor valor de coordenadas.

A qualidade das coordenadas aproximadas para cada ponto é que definirá a quantidade de interação necessária para o ajustamento da rede, ou

seja, quanto mais próxima dos valores ajustados estiver as coordenadas dos pontos, menor número de interações serão necessárias.

As figuras 9 e 10 apresentam o fluxograma mostrando passo a passo a estratégia proposta de ajustamento da rede no Mathcad

Figura 9 Organograma para ajustamento da rede

Figura 10 Proposta de ajustamento e Análise estatística da rede

3.2.4.1 Apresentação para as Estratégias de Ajustamento e Análise da Qualidade da Rede em estudo de caso.

A matriz dos coeficientes (A_0) é formada em função das equações de observações.

Para o caso de redes GPS tem-se:

Equações de observações:

$$\begin{aligned}
 l_1^X &= X_2^a - X_1^a \\
 l_1^Y &= Y_2^a - Y_1^a \\
 l_1^Z &= Z_2^a - Z_1^a \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 l_1^X &= X_n^a - X_{n-1}^a \\
 l_1^Y &= Y_n^a - Y_{n-1}^a \\
 l_1^Z &= Z_n^a - Z_{n-1}^a
 \end{aligned}$$

Para a rede em estudo tem-se como dados de entrada, 29 vetores mais setes vetores a serem reocupados, que multiplicado por 3, que são as componentes que formam os vetores, resulta num total de 108 equações de observações. Por serem vetores GPS, já estão linearizadas e as seguintes matrizes e vetores foram formados:

Matriz dos coeficientes das observações ($A, A0$):

$$A0 = \begin{pmatrix} XM01 & YM01 & ZM01 & XM02 & YM02 & ZM02 & . & . & . & XM013 & YM013 & ZM013 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}_{n,u}$$

A matriz A é igual, em parte, a matriz $A0$ com a diferença da não existência do ponto de injeção. Esta medida é para evitar a singularidade nas operações algébricas, o que tornaria necessário trabalhar com matrizes inversas generalizadas.

Vetor das observações:

$$L_b = \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta Y_2 \\ \Delta Z_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \Delta X_n \\ \Delta Y_n \\ \Delta Z_n \end{pmatrix}_{n,1}$$

Matriz Variância-Covariância das observações:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{pmatrix} \sigma_{X1}^2 & \rho_{Y1}\rho_{X1} & \rho_{Z1}\rho_{X1} & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{X1}\rho_{Y1} & \sigma_{Y1}^2 & \rho_{Z1}\rho_{Y1} & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{X1}\rho_{Z1} & \rho_{Y1}\rho_{Z1} & \sigma_{Z1}^2 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & \sigma_{Xn}^2 & \rho_{Yn}\rho_{Xn} & \rho_{Zn}\rho_{Xn} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & \rho_{Xn}\rho_{Yn} & \sigma_{Y1}^2 & \rho_{Zn}\rho_{Yn} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & \rho_{Xn}\rho_{Zn} & \rho_{Yn}\rho_{Zn} & \sigma_{Zn}^2 \end{pmatrix}_{n,n}$$

Vetor das coordenadas aproximadas (X_0, X_{01}) :

$$X_{01} = \begin{pmatrix} XM_{01} \\ YM_{01} \\ ZM_{01} \\ XM_{02} \\ YM_{02} \\ ZM_{02} \\ . \\ . \\ . \\ XM_n \\ YM_n \\ ZM_n \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} XM_{01} \\ YM_{01} \\ ZM_{01} \\ XM_{03} \\ YM_{03} \\ ZM_{03} \\ . \\ . \\ . \\ XM_n \\ YM_n \\ ZM_n \end{pmatrix}$$

O vetor X_{01} é uma modificação do vetor X_0 . A diferença está na presença das coordenadas de injeção em X_{01} de forma a facilitar os cálculos.

Após a introdução dos dados no Mathcad, passou-se para os seguintes cálculos matemáticos:

$$L = A_0 X_{01} - L_b$$

Equações normais:

$$N = A^T P A \quad \text{e} \quad n = A^T P L$$

$$X = Q_{xx} n \quad \text{e} \quad X_a = X_0 + X$$

Matrizes obtidas:

$$Q_{xx} = N^{-1} \quad Q_{ll} = A N^{-1} A^T \quad Q_{vv} = P^{-1} - A N^{-1} A^T$$

Vetores dos resíduos e observações ajustadas:

$$V = AX - L \quad L_a = L_b + V$$

Precisão das incógnitas X :

$$\sigma_X = Q_{xx} \sigma_0$$

Precisão das observações ajustadas:

$$\sigma_{la} = Q_{ll} \sigma_0$$

Controle do ajustamento:

$$V^T P V = -L^T P V \quad \text{e} \quad A^T P V = 0$$

Após os cálculos de controle do ajustamento realizou-se a análise de variância pelo teste global (unidimensional e bidimensional) ao nível de confiança α obtido no gráfico de Baarda (1964) em função do α_0 e β escolhidos pelo operador e em função do gl do sistema., foi aplicado a estatística multidimensional por estar testando a rede como um todo. Cabe observar que se estivesse

ajustando vetores isolados, o correto seria utilizar a estatística univariável para um α_0 de 5%.

Caso não passe no teste global será aplicado um escalonamento da matriz variância-covariância das observações e um novo ajustamento torna-se necessário devido à interferência deste escalonamento na matriz peso.

O processo de escalonamento é repetido até que passe no Teste global, porém deve-se tomar cuidado para que as precisões das observações não fiquem superestimadas ou subestimadas, não condizendo com a precisão nominal do aparelho.

Teste Global Bidimensional e Teste Global Unidimensional:

- Variância a Posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{S}$$

- Teste Bidimensional

Hipóteses testadas

- ✓ $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ - As variâncias *a priori* e *a posteriori* não diferem estatisticamente no nível de significância α ;
- ✓ $H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ - As variâncias *a priori* e *a posteriori* diferem estatisticamente no nível de significância α .

Qui - quadrado $\left[\frac{\alpha}{2}, S \right] < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}(S) < \text{Qui - quadrado} \left[1 - \frac{\alpha}{2}, S \right]$, resultados neste intervalo serão aceitos.

- Teste unidimensional

Hipóteses testadas

- ✓ $H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ - As variâncias *a priori* e *a posteriori* não diferem estatisticamente no nível de significância α ;

- ✓ $H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$ - A variância a posteriori obtida é maior que a variância a priori arbitrada.

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}(S) < \text{Qui-quadrado}[1 - \alpha, S], \text{ resultados neste intervalo serão aceitos.}$$

No estudo realizado foram aplicados ambos os testes Qui-quadrado independente do resultado de variância a posteriori obtido. Buscou-se com que passasse em ambos os testes, alterando a MVC das observações, para dar prosseguimento à localização de erros com o *data snooping*.

Os valores abaixo foram utilizados para o teste Qui-quadrado:

- ✓ Qui-quadrado bilateral para $\alpha = 59\%$
- ✓ Qui-quadrado unilateral para $\alpha = 59\%$

$\alpha = 59\%$ é o alfa multidimensional obtido no monograma de Baarda (figura 6) em função do grau de liberdade (S), do alfa unidimensional (α_0) que para o trabalho foi de 5%, e da potência do teste (β_0) que foi de 80%.

3.2.4.1.1 Localização e eliminação de Erros Grosseiros com a aplicação do teste Data Snooping.

O teste Data Snooping (w_{ii}) será aceito se:

$$N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) \leq w_i \leq N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1)$$

sendo:

$$w_{ii} = \frac{V_n}{\sqrt{\sum L_{b_{n,n}}} \sqrt{R_{n,n}}}, \text{ onde } n \text{ é o número de equações do sistema e}$$

$w_{creit} = N\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}, 0,1\right)$ que é o valor crítico para o Data Snooping obtido pela distribuição normal, duas situações podem ser encontradas:

- 1) Não existindo erros grosseiros, se processa o cálculo da confiabilidade interna e externa mostradas abaixo.

2) Existindo erros grosseiros procede-se da seguinte forma:

Antecipa-se a análise da confiabilidade interna do sistema de forma a ter uma idéia se os erros detectados são significativamente influentes ou não no resultado final.

Desta forma calcula-se:

- Valor mínimo detectável:

$$\nabla_0 l_i = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{li}, (i = 1, \dots, n) \text{ e}$$

- Os possíveis erros embutidos nas observações:

$$\nabla l_i = \frac{|V_i|}{r_i}, (i = 1, \dots, n)$$

δ_0 é o parâmetro de não centralidade e é obtido em função do nível de significância α 0 unidimensional e da potência do teste β 0 (Eq. 2.76).

Para este trabalho o valor obtido para δ_0 foi de 2.86.

Se $\nabla l_i \geq \nabla_0 l_i$, implica que o erro detectado será influente.

No trabalho proposto foram analisadas as estratégias apresentadas a seguir, independentemente da significância ou não dos erros obtidos na etapa anterior.

- ✓ Estratégia 1- IGNORAR A EXISTÊNCIA DE ERROS GROSSEIROS:

Os erros grosseiros detectados são ignorados, ou seja, todos eles são considerados como insignificantes na rede (considerada a observação como ótimas, sem presença de erros grosseiros). Continua-se com a análise estatística até a etapa final de confiabilidade externa.

- ✓ Estratégia 2- ELIMINAÇÃO DE UMA OU MAIS COMPONENTES ($\Delta X, \Delta Y$ ou ΔZ) DAS OBSERVAÇÕES QUE POSSUEM ERROS GROSSEIROS:

Para a realização desta etapa, alteram-se as matrizes A, A_0, Σ_{Lb} e L_b , retirando-se destas, as componentes ($\Delta X, \Delta Y$ ou ΔZ) que venham a ser detectadas como erros grosseiros presentes. Novos ajustamentos são realizados, (segue-se esta etapa até a eliminação total dos erros existentes, ou seja, novos reajustamentos podem ser realizados caso novas componentes sejam detectadas). Após a eliminação total dos erros finaliza-se com a análise da confiabilidade

✓ Estratégias 3- ELIMINAÇÃO DOS VETORES QUE APRESENTAREM ERROS GROSSEIROS.

Da mesma forma que a eliminação de componentes, elimina-se os vetores que apresentarem componentes com erros e novos ajustamentos serão realizados. O processo se repete até a eliminação total dos erros.

3.2.5 Análise da confiabilidade da rede

Erro Marginal Inferior Detectável (Confiabilidade Interna do Sistema):

O cálculo da confiabilidade interna do sistema já foi antecipado quando se realizou a análise $\nabla l_{0i} < \nabla l_i$. Nesta etapa será calculada a confiabilidade interna global, ou confiabilidade interna média dada por:

$$|\overline{\nabla}_{0i} l_i| = \frac{\delta_0}{\bar{r}} \sigma_{li}, \text{ onde:}$$

$\bar{r}$ é a redundância média obtido pelo traço da matriz R dividido pelo seu número de linha.

Absorção:

A equação abaixo descreve a parte do erro absorvido pelo sistema e que não pôde ser detectado pelos testes. É um passo que fica a critério do usuário caso queira saber a porcentagem de erros que foram absorvidos. Neste trabalho, optou-se por descartar este cálculo.

$$A = \frac{1-r_i}{r_i} v_i$$

Confiabilidade Externa:

$$\nabla x_{0i} = N^{-1} A^T P e \nabla_0 l_i$$

ou

$$\gamma_{0i}^2 = \left[\frac{1-r_n}{r_n} \right] \delta_0^2 \quad \text{para } n \in 1....108 \text{ e } \sqrt{\gamma_{0i}^2} \leq 10, \text{ em cada observação do sistema.}$$

Além da aplicação acima descrita, foi realizado um estudo considerando erros significativos nos vetores, em que foram alterados para mais e para menos os valores dos erros grosseiros detectados pelo teste data snooping. Nesta fase, entrou-se manualmente com erros de 5 cm e 10 cm nas componente detectadas pelo teste Data Snooping e todo o processo de ajustamento foi realizado novamente.

3.2.6 Teste da Qualidade da Rede

Com as etapas de ajustamento e sua análise de qualidade concluída, foi realizado em campo levantamentos com Estação Total (E.T.) objetivando testar a qualidade da rede tanto linearmente como angularmente.

Considerando que o sistema GPS, não corresponde com a realidade no plano local e pela necessidade de estar trabalhando com Estação Total nas medidas de campo para controle de qualidade do ajustamento, foi necessário transformar as coordenadas ajustadas que estavam em WGS – 84, geocêntricas, para coordenadas Topográficas Local.

O processo de transformação de coordenadas geocêntricas para topográfica local necessita trabalhar com grande conjunto de expressões trigonométricas. Como o objetivo do trabalho não se trata de transformar sistemas

de coordenadas, optou-se por trabalhar com programas comerciais, existentes e específicos para este tipo de operação.

Os programas escolhidos foram:

- ✓ GeoBase VB50 gentilmente cedido pela Baseaerofotogrametria;
- ✓ DataGeosis (demo) da Alezi Teodolini e,
- ✓ ProjetGeo desenvolvido por Rogério Rodrigues Amarante disponível no endereço eletrônico <http://www.exetecnet.com.br/projectgeo.htm>, pesquisado em 10/10/2004

Os três programas foram testados com o intuito de se obter coordenadas confiáveis uma vez que se busca nesta pesquisa analisar a qualidade do ajustamento. Foram feitas transformações de todas as coordenadas obtidas nos ajustamentos nos três programas citados acima sendo aceito (a critério do autor) para controle de qualidade, diferenças de no máximo milimétricas entre os diversos resultados extraídos. Um quarto ou quinto programa para transformação seria aplicado no caso de divergir os resultados nos três programas utilizados.

Nesta etapa, as coordenadas tiveram o M02 como marco de origem e atribuindo a este as coordenadas $X=150000$ e $Y=250000$ (ver anexo F) e altura média do plano topográfico de 840,00 m.

3.2.6.1 Procedimentos de campo para o controle linear e angular

Foi utilizado, para o levantamento, tripé e bipé (o mesmo utilizado no levantamento GPS) com altura fixa de 1,90 m.

Todas as medidas foram realizadas antes das 09:00 AM objetivando minimizar os efeitos de refração.

Controle linear.

O controle linear na rede foi realizado de duas formas distintas. Ver exemplo hipotético:

- 1- Foram medidas as distâncias entre os pontos da rede com Estação Total, como mostrado na figura 11 os pontos MF→ME e MC→MB. Estas distâncias obtidas em campo foram comparadas com as distâncias obtidas em função das coordenadas do ajustamento nas 3 estratégias propostas.
- 2- Com a Estação Total foram lançados 3 novos pontos a partir de pontos conhecidos da rede, exemplos:
  - Estacionada a Estação Total em MB e fazendo visada de ré em MA, lançou o ponto PT01 (ver figura 11).
  - Estacionada em MF e fazendo visada de ré em ME, lançou o ponto PT02 (ver figura 11).

Após colocar os novos pontos em campo, foi medida a distância entre eles com a E.T. Ver na figura 11 as distâncias PT01→PT02.

As coordenadas topográficas dos pontos lançados foram calculadas em função das coordenadas topográficas conhecidas dos pontos de ré e estação e dos ângulos e das distâncias obtidos com a ET.

Em seguida, foram calculadas as distâncias entre os pontos através das coordenadas obtidas e comparado estas com as distâncias encontradas com a estação total.

Figura 11 Controle linear e angular da rede ajustada (situação hipotética)

Controle Angular

De forma a testar a qualidade angular da rede ajustada foi realizado levantamentos de campo das seguintes formas:

- Foram lançados pontos no Campus partindo-se sempre de dois pontos conhecidos da rede.

Na figura 11 observa-se o ponto PT03 obtido da seguinte forma:

1. Estacionado a ET no ponto MB e com visada de ré no ponto MA, visa em vante o ponto PT03.
2. Estacionado no ponto MF e fazendo visada de ré no ponto ME visa-se em vante o ponto PT03.
3. Estacionada em MA com visada de ré em MC visa-se o ponto PT3 e os pontos MD e ME da própria rede.

Com as coordenadas de ré e da estação conhecidas, com os ângulos e distâncias de campo calcula-se as coordenadas do ponto PT03. Na seqüência se compara estas coordenadas, tanto em X como em Y.

As coordenadas encontradas para o ponto MD e ME obtidos em função das coordenadas dos pontos de ré, estação e das medidas de ângulo e distância são então, comparadas com as coordenadas do M03 da rede.

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS

---

*“Algumas pessoas nunca
aprendem nada porque entendem
tudo muito depressa.”*

Alexandre Pope
Poeta inglês

4 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados do estudo de implantação da rede, processamentos dos vetores, bem como, dos ajustamentos realizados na pesquisa.

4.1 Levantamento da Rede

O levantamento da rede foi composta por **36** seções de rastreo com taxa de coleta de **10** segundos e ângulo de corte de **15** graus. Destas, **29** vetores são independentes e **7** vetores reocupados de forma a melhorar a confiabilidade da rede. Os vetores reocupados foram detectados pela matriz redundância e estão listados a seguir:

M11>M12 M09>M12 M12>M13 M13>M05 M05>M08 M08>M04 M07>M06

4.2 Processamento GPS.

Apenas **2** dos **36** vetores não conseguiram fixar a ambigüidade, tanto no Ski-Pro como no Ashtech Solution, pois apresentavam altos ruídos e horários em que o GDOP encontrava-se com valores superior a 6. Foram retirados destes vetores os horários críticos e realizados novos processamentos.

Os anexos D e E mostram os vetores formados, seus respectivos comprimentos e os resultados dos processamentos.

A tabela 5 apresenta o tempo gasto no processamento dos vetores.

Tabela 5 Tempo gasto no processamento dos vetores

Atividade	Tempo (h)
Compreensão dos programas de processamento	72
Processamento propriamente dito	16

No processamento GPS, tanto no Ski-Pro como no Ashtech Solution foram obtidos os seguintes resultados:

- ✓ Todos os vetores rastreados foram processados e utilizados no ajustamento da rede.

- ✓ Os dois programas chegaram a soluções de vetores com diferença centimétricas. Nenhum vetor apresentou diferença maior que 1 cm.
- ✓ Nos processamentos dos vetores no Ski-Pro, os RMS's a posteriori foram todos obtidos com valores abaixo de 1, o que mostra que tiveram bons resultados (ver anexo E).

O anexo G mostra, respectivamente, os desvios padrão das coordenadas X, Y e Z (WGS-84) de 10 vetores obtidos nos dois programas de controle.

4.3 Ajustamento

Nos três ajustamentos foi considerado somente o ponto M02 como injeção (ver item 3.2.1) e de acordo com o número de equações e incógnitas (considerando os vetores da figura 8 mais a reocupação), a rede possuiu inicialmente, grau de liberdade igual a 72 e número de equações igual a 108.

Para o ajustamento da rede no Ski-Pro, foi configurado no próprio programa os seguintes parâmetros estatísticos (valores escolhidos pelo autor conforme item 2.4.1.2):

- nível de confiança de 68%;
- nível de significância unidimensional α_0 de 5% e
- potência do teste β_0 de 80%;

Os seguintes teste, disponíveis no programa, foram aplicados.

- análise do teste F , (análise de variância);
- teste *Data Snooping* w e
- análise da confiabilidade interna e externa da rede.

Para o ajustamento no Programa Ashtech Solution, utilizou-se:

- nível de confiança de 68% (igual ao configurado para o Ski-Pro com objetivo de comparação).
- análise das variâncias pelo teste F .

Resultados dos ajustamentos no Ski-Pro e Ashtech Solution podem ser vistos nos anexos B e C.

Para a implementação do ajustamento no MathCAD gastou-se aproximadamente 240h e os parâmetros e testes estatísticos foram os mesmo utilizados no Ski-Pro, com exceção do teste F que foi substituído pelo teste Qui-quadrado.

Antes da execução do ajustamento da rede pelos critérios propostos, foi realizada a análise da consistência interna da rede, no programa Ski-Pro. Para isso, foi utilizado o modulo de pré-processamento disponível neste programa computacional através de testes estatísticos e análises matemáticas para verificar a rede antes do ajustamento, submetendo os dados a controle de qualidade. As observações apresentaram bons resultados quanto aos testes estatísticos e ao teste de loops.

4.3.1 Ajustamento no MathCAD.

Neste trabalho, as coordenadas iniciais obtidas pela média aritmética das demais coordenadas do processamento (utilizadas na matriz (X_0)), resultaram em bons valores aproximados, o que pode ser confirmado pela necessidade de apenas uma interação no valor das coordenadas iniciais.

Aplicou-se o teste global recomendado por Gemael (1994), onde analisou a variância de unidade de peso a posteriori, utilizando o teste estatístico Qui-quadrado (χ^2) unilateral e bilateral como mostrados a seguir:

A variância a priori (σ_0^2) arbitrada pelo autor foi de 1 e a variância a posteriori $(\hat{\sigma}_0^2)$ encontrada pós ajustamento foi de 9,16.

O nível de confiança no ajustamento foi de 68%.

Utilizando um nível de significância $\alpha_0 = 5\%$ e β_0 de 80% com $S = 72$ encontrou-se no monograma de Baarda (1968) (figura 6) um valor de $\alpha = 59\%$ e de acordo com as equações 2.53, 2.56 e 2.57 tem-se:

✓ Teste Qui-quadrado bilateral

$$Y = \frac{gl\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = X^2_{cal} = 72 \frac{9,16}{1} = 659,94$$

$$X_{cal}^2 < X_{1-\frac{\alpha}{2}(S)}^2 = X_{1-\frac{0.59}{2}(72)}^2 = 77,89 \quad \text{falso}$$

$$X_{cal}^2 > X_{\frac{\alpha}{2}(S)}^2 = X_{\frac{0.59}{2}(72)}^2 = 65,16 \quad \text{verdadeiro}$$

Região de aceitação: $X_{\frac{\alpha}{2}(S)}^2 < X_{cal}^2 < X_{1-\frac{\alpha}{2}(S)}^2$ **O teste bilateral foi**

rejeitado

✓ Teste Qui-quadrado Unilateral

$$V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V = V^T P V = \frac{S \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 659,64$$

$$V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V < SF_{S,\infty;1-\alpha} = X_{S,1-\alpha}^2 = X_{72,1-0.05}^2 = 68,53 \quad \text{falso}$$

Região de Aceitação: $V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V < X_{S,1-\alpha}^2$ **O teste Unilateral foi rejeitado**

Neste ajustamento observa-se que o teste global foi rejeitado, indicando que algum problema ou erro existe no ajustamento ou nos dados observados, (erro na matriz peso ou erro grosseiro existentes nas observações).

Considerando a existência de possíveis erros nos resultados (dx, dy, dz), e buscando fazer com que as observações passassem nos teste Global aplicados, foi realizado um escalonamento na MVC das observações de forma a aumentar o desvio padrão das observações correspondentes. As tentativas realizadas indicaram que o valor mais adequado para o escalonamento e que possibilitou a aceitabilidade do teste Qui-quadrado (ver tabelas 6) foi de 10 vezes o valor da MVC das observações.

Tabela 6, Teste Qui-quadrado aceito após escalonamento da MVC para ($\alpha_0 = 59\%$)

Variâncias		Intervalo de aceitação do teste X^2 bidimen.		X^2 unidimen.		Result.
Priori	Posteriori	Inferior	Superior	Crítico	Calcu.	
σ_0^2	$\hat{\sigma}_0^2$	$X_{\left(S, \frac{\alpha}{2}\right)}^2$	$X_{\left(S, 1-\frac{\alpha}{2}\right)}^2$	$X_{(S, 1-\varepsilon)}^2$	χ^{*2}	
1	0,92	65,16	77,89	68,53	65,97	Aceito

Em seguida foi aplicado o teste Data Snooping (w) (equação 2.64) para localizar a existência de erros nas componentes dos vetores.

Foi encontrado um valor para cada componente do vetor em função de cada resíduo, redundância parcial (obtido pela diagonal da matriz redundância) e da precisão de cada componente, fornecido pela MVC das observações escalonadas.

Estes valores foram comparados com os valores críticos que são obtidos pela distribuição normal de média 0 e variância 1 dados por:

$$N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) = N_{\frac{0.05}{2}}(0,1) = -1,96$$

$$N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) = N_{1-\frac{0.05}{2}}(0,1) = 1,96$$

então

$$-1,96 \leq w_i \leq 1,96$$

Das 108 componentes de vetores analisadas apenas 3 apresentaram estimados acima do valor crítico,(ver tabela 7).

Tabela 7, Erros detectados pelo teste Data Snooping:

Vetor	Componente do Vetor	(W) Estimado	(W) Crítico
M01-M05	ΔY	2,05	$-1.96 \leq W_{EST} \leq 1.96$
M06-M10	ΔY	-2,96	
M03-M10	ΔY	2,30	

Um procedimento que poderia ser utilizado (aplicado por Teixeira e Ferreira, 2003) seria a não detecção de erros grosseiros pelo teste Data Snooping, passando diretamente para o cálculo da confiabilidade interna que será apresentado no próximo item. Porém tomar esta decisão torna-se perigoso uma vez que um erro grosseiro pode camuflar a existência de outros erros na rede e, conseqüentemente, a sua influência como será visto no item 4.3.3.

A detecção pelo Data Snooping torna-se crucial uma vez que ele detecta os erros, mesmo não sendo estes prejudiciais no resultado final da rede.

Após a localização dos erros, foi aplicada uma análise da sua significância (Tabela 8), de forma a observar se eles são influentes ou não.

Tabela 8 Significância dos erros

Est. Ref.	Relat.	$\alpha_0 = 5\%, \beta_0 = 20\%, \delta_0 = 2.8$						Aceitação das observações		
		(∇l_0) $\Delta X(mm)$	(∇l_0) $\Delta Y(mm)$	(∇l_0) $\Delta Z(mm)$	(∇l_i) $\Delta X(mm)$	(∇l_i) $\Delta Y(mm)$	(∇l_i) $\Delta Z(mm)$			
M01	M05	16,38	15,76	10,13	4,36	12,89	6,79	SIM	SIM	SIM
M06	M10	16,47	18,36	11,85	9,24	21,65	2,86	SIM	NÃO	SIM
M03	M10	20,97	24,08	10,94	7,77	22,11	0,46	SIM	SIM	SIM

Pela tabela 8, dos erros grosseiros detectados pelo teste Data Snooping apenas a componente y do vetor M06>M10, seria significativamente influente no resultado de confiabilidade da rede. Nesta pesquisa, foi levado em consideração que todos os erros detectados seriam influentes, passando assim para o cálculo das estratégias propostas.

Resultados passo a passo do ajustamento 3 (MathCAD) podem ser vistos no anexo A.

4.3.2 Estratégias aplicadas:

✓ Estratégia 1

Os erros detectados e localizados (anexo A) foram ignorados considerando a rede em perfeitas condições. Os resultados finais da confiabilidade e da precisão da rede para esta estratégia podem ser visto no anexo A1. Esta estratégia pode-se dizer que foi a continuação do ajustamento 3, partindo para a etapa de confiabilidade logo após o teste Qui-quadrado.

✓ Estratégia 2

Ao eliminar somente as componentes dos vetores que possuíam *outliers* tabela (8), foi realizado novo ajustamento na rede. Mais uma vez, o teste χ^2 para o alfa multidimensional de Baarda (1968), que é de 59%, foi rejeitado, necessitando, para ser aceito, de um escalonamento da matriz variância-covariância. Foi aplicada constante igual a 8, denominada de fator de escala.

Vale ressaltar aqui, que o valor parcial e médio de redundância foi reduzido, caindo o grau de liberdade (S) para 69, o que segundo Kuang (1996), e Leick (2004), causaria uma degradação na confiabilidade e precisão. Ao multiplicar a MVC por um fator de escala, a variância também é alterada e consequentemente a precisão. A confiabilidade é degradada devido a redução da redundância do sistema, isto pode ser observado nas equações 2.75 e 2.84.

Ao realizar mais uma vez a detecção de outliers pelo teste *Data Snooping*, novos outliers surgiram e podem ser vistos na tabela 9.

Tabela 9, Novos erros grosseiros detectados ao eliminar componentes

Vetor	Componente do Vetor	(W) Estimado	(W) Crítico
M011-M02	ΔX	-1.97	$1.96 \leq W_{EST} \leq 1.96$
M06-M10	ΔX	2.01	

O mesmo processo foi repetido e nenhum outlier foi detectado após a eliminação dos vetores e ajustada a rede (ver ajustamento no anexo A2), partindo daí, para a análise de confiabilidade.

✓ Estratégia 3.

A eliminação dos vetores que possuíam outliers passou por três NOVOS AJUSTAMENTOS sendo que no final foram eliminados 6 vetores. A redundância média do sistema caiu para 0.60, o que equivale a uma redução de 10% e o traço da matriz redundância ou grau de liberdade, caiu para 54, ou seja, uma redução de aproximadamente 25% na redundância do sistema.

Resultados da estratégia 3 podem ser vistos no anexo A3.

4.3.3 Alterando os erro de componentes

Alterando os erros nas observações (M01>M05, M03>M10) e mantendo o erro já existente em M06>M10, por ter sido antes detectado como significativamente influente, obteve-se os seguintes resultados:

- ✓ Ao acrescentar os erros de 5 cm e 10 cm, observou-se dificuldade de escalonamento da MVC das observações. Para que passasse no teste Qui-quadrado foi necessário multiplicar a matriz variância-covariância

(MVC) das observações por um fator de escala igual a 85 (escalamento). O mesmo ocorreu para erros impostos na ordem de 10 cm, em que foi necessário escalonar a MVC por um fator de 280 vezes o valor obtido no processamento. Esta situação tornou a precisão das medidas de campo subestimadas, não condizendo com as condições nominais do equipamento GPS.

- ✓ Os erros impostos e o erro do vetor M06>M10 foram detectados pelo teste Data Snooping (tabela 10 e tabela 11). Já o teste de significância detectou apenas como significativamente influente a componente Y do vetor M05>M01 (tabela 12).

Tabela 10, Teste Data Snooping para erros de 5 cm

Vetor	Componente do Vetor	(W) Estimado	(W) Crítico
M05-M01	ΔY	3,39	$-1.96 \leq W_{EST} \leq 1.96$
M06-M10	ΔY	-2,38	
M03-M10	ΔY	2,55	

Tabela 11, Teste Data Snooping para erros de 10 cm

Vetor	Componente do Vetor	(W) Estimado	(W) Crítico
M01-M05	ΔY	3,35	$-1.96 \leq W_{EST} \leq 1.96$
M06-M10	ΔY	-2,07	
M03-M10	ΔY	2,40	

Tabela 12, Significância dos erros

Estação Referência	Estação Relativa.	5%		10%		Aceitação da observação
		(∇l_0)	(∇l_i)	(∇l_{0i})	(∇l_i)	
		$\Delta Y(mm)$	$\Delta Y(mm)$	$\Delta Y(mm)$	$\Delta Y(mm)$	
M01	M05	50	60	93	110	Não
M06	M10	60	50	110	80	Sim
M03	M10	80	70	140	120	Sim

Na análise de confiabilidade observa-se que a componente Y de M06>M10 e Y de M03>M10 não foram detectadas como significativamente influentes (tabela 12). Estes erros não foram detectados devido às novas MVC escalonadas influenciarem diretamente nestes cálculos.

Ao subestimar a MVC, os dados de precisão ficaram abaixo das especificações do aparelho, sendo assim, o erro marginal detectável (∇l_{0i}), que está em função desta precisão tende a ter valores altos em relação ao (∇l_i), que está em função da redundância e do resíduo. (ver capítulo 2).

Observa-se que na análise de significância dos erros, um determinado erro grosseiro é capaz de camuflar a existência de outros erros e isto pode ser visto na tabela 12, quando a componente ΔY do vetor M01>M05 com erros de 5 cm ou 10 cm a mais (impostos pelo autor) passou a ser detectado enquanto que a componente ΔY do vetor M06>M10, que antes era tido como significativamente influente (ver tabela 8), passou a ser aceito pela análise de significância.

Ao eliminar a componente e feito novo ajustamento, notou-se que os demais erros detectados no teste Data Snooping (componentes Y dos vetores M06>M10 e M03>M10) passaram a ser presentes no teste de significância (confiabilidade interna).

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

---

*“Tentar e falhar é, pelo menos,
aprender, Não chegar a tentar é
sofrer a inevitável perda do que
poderia ter sido.”*

Geraldo Eustáquio
Poeta

5 Introdução

Neste trabalho a análise da rede limitou-se à relatividade entre os resultados dos diversos ajustamentos, não permitindo efetuar considerações sobre a exatidão por falta de uma rede de referência.

5.1 Comparação do resultado do ajustamento das três estratégias com os resultados do Ski-Pro e Ashtech Solution

Os resultados finais dos ajustamentos forneceram coordenadas cartesianas em WGS-84. Para fim de comparação entre os ajustamentos, as coordenadas finais foram transformadas de cartesianas em WGS-84 para Topográficas na altitude de 840,00 m.

Foram escolhidas, para fim de comparação, as coordenadas dos pontos M01, M06 e M09, devido à localização em que estes se encontram na rede:

- ✓ M01 por encontrar-se mais afastado possível do ponto M02, que foi tomado como ponto de injunção para os ajustamentos.
- ✓ M06 por encontrar-se mais próximo do ponto M02.
- ✓ M09 por ser o ponto que gerou o maior número de vetores da rede, ou seja, o ponto que apareceu em maior número de vezes nas equações de observações.

Os resultados apresentados nos gráficos de dispersão nas figuras 13, 14 e 15, comparam a fração decimal em milímetros dos pontos M01, M06 e M09, fornecidos pelos três ajustamentos, sendo que o terceiro ajustamento subdividiu-se em três estratégias.

Tabela 13 Coordenadas Topográficas do ponto M01 pelos 5 ajustamentos

Ponto M01	Coord (X) (m)	Coord (Y) (m)	Altura (h) (m)
Ski-Pro	149723.1064	249071.3156	840.3537
Ashtech	149723.1055	249071.3147	840.3450
Estratégia 1.	149723.1061	249071.3162	840.3509
Estratégia 2	149723.1061	249071.3153	840.3508
Estratégia 3	149723.1069	249071.3162	840.3562

Figura 12, Gráficos de omparação da fração decimal em mm das coordenadas topográficas do ponto M01 obtidos dos diversos ajustamentos

Tabela 14, Coordenadas topográficas do ponto M06 pelos 5 ajustamentos

Ponto M06	Coord (X) (m)	Coord (Y) (m)	Altura (h) (m)
Ski-Pro	150081.7953	249865.0521	838.2767
Ashtech	150081.7948	249865.0511	838.2810
Estratégia 1	150081.7962	249865.0524	838.2740
Estratégia 2	150081.7945	249865.0508	838.2700
Estratégia 3	150081.7973	249865.0511	838.2682

Figura 13, Gráficos de omparação da fração decimal em mm das coordenadas topográficas do ponto M06 obtidos dos diversos ajustamentos

Tabela 15 Coordenadas Topográficas do ponto M09 pelos 5 ajustamentos

Ponto M09	Coord (X) (m)	Coord (Y) (m)	Altura (h) (m)
Ski-Pro	149607.5777	249534.4079	846.3680
Ashtech	149607.5779	249534.4082	846.3600
Estratégia 1	149607.5777	249534.4079	846.3587
Estratégia 2	149607.5748	249534.4070	846.3592
Estratégia 3	149607.5785	249534.4082	846.3623

◆ Ski-Pro   ■ Ashtech Solution   ▲ Estratégia 1   ● Estratégia 2   × Estratégia 3

Figura 14, Gráficos de omparação da fração decimaldas em mm das coordenadas topográficas do ponto M09 obtidos dos diversos ajustamentos

Os resultados dos ajustamentos apresentados nas figuras 12, 13 e 14 mostram que as maiores diferenças planimétricas são de aproximadamente 4 mm o que é irrelevante para uma rede para apoio de trabalhos topográficos.

Cabe observar que cada programa de ajustamento apresenta diferentes formas para a construção da matriz peso (ver item 2.2.2.4), bem como, a atribuição do fator de escalonamento.

As diferenças altimétricas mais elevadas devem ser decorrentes do próprio GPS que não deve ser considerado como instrumento de nivelamento de precisão. Seeber (2003), diz que a sensibilidade desta componente é decorrente da configuração da geometria dos satélites GPS, chegando a erros de duas vezes maior que os da componente horizontal.

Devido as componentes em Y apresentarem mais *outliers* na análise estatística, esperava-se uma degradação ou diferenciação maior das coordenadas nesta componente.

5.2 Análise da Confiabilidade Interna e Externa da Rede

A análise da confiabilidade interna da rede, tanto na Estratégia 2, como na Estratégia 3 apresentaram boa aceitação onde o valor mínimo detectável (erro marginal) foi maior que o valor significativo encontrado na rede.

Na Estratégia 1, apenas o erro da componente ΔY do vetor M06>M10 não foi aceito, podendo ser significativamente influente no resultado final de confiabilidade externa da rede.

A rede, nas três estratégias, apresentou as seguintes confiabilidades interna média:

Tabela 16 Confiabilidade interna média

Confiabilidade interna média (mm)			
	X	Y	Z
Estratégia 1	14,3	15,4	9,7
Estratégia 2	12,4	13,4	8,3
Estratégia 3	12,4	13,3	8,4

A tabela 16 mostra que as diferenças entre os valores de confiabilidade interna média são poucos significativos, podendo-se afirmar que as três estratégias apresentaram boa confiabilidade interna.

Os resultados para a confiabilidade externa obtidas pelo método simplificado estão apresentados na figura 15.

Figura 15, Gráfico da confiabilidade Externa nas 3 estratégias

Nas três estratégias propostas foram obtidos bons resultados para a confiabilidade externa. Os valores obtidos pelo modelo simplificado, ficaram abaixo do valor limite.

Pelos gráficos, observa-se que a estratégia 3 apresentou o pior resultado em confiabilidade externa, porém não significativo. A causa dessa degradação nos dados está na diminuição do número de redundância do sistema devido à redução dos vetores que foram eliminados. Ao eliminar os vetores e componentes, o número de redundância diminui, e isto afetou diretamente os cálculos de confiabilidade, uma vez que esta é inversamente proporcional ao número de redundância (eq. 2.84).

A figura 16 mostra a confiabilidade externa para os vértices da rede tanto nas três estratégias como no programa Ski-Pro. Pode-se notar que nas estratégias propostas como no Ski-Pro a confiabilidade externa para cada ponto ficou na ordem milimétrica.

Se considerássemos a precisão utilizada para o cálculo do erro mínimo detectável como superestimada (como advinda do processamento sem a necessidade de escalonamento) ou subestimada, as análises no MathCAD apresentariam diferentes resultados de confiabilidade uma vez que as precisões das observações estão diretamente ligadas ao erro marginal detectável que, por sua vez, poderia resultar em um número maior de erros significativos na fase de análise de significância (comparação entre (∇l_0) e (∇l_i)). Observa-se com isto que o fator de escala é de fundamental importância e influencia, mesmo que indiretamente, na confiabilidade, devendo ser bastante estudada e aplicada de forma correta no ajustamento das redes.

Na estratégia 1 (figura 16), o erro grosseiro significativo presente na componente Y do vetor *M06-M10* e que não foi eliminado apresentou maior influência nas coordenadas de M06, M07 e M10. Era esperada uma maior influência na componente Y por ser esta componente a que apresentou maior número de *outliers*.

As estratégias 2 e 3 apresentaram bons resultados. Isto já era esperado uma vez que todos os erros grosseiros identificados foram eliminados. Ainda

assim, nota-se que a estratégia 2 (somente eliminação de componentes) apresentou melhores resultados que a estratégia 3. Esta pequena diferença está devido a grande eliminação de componentes na terceira estratégia.

Analizando os dados de confiabilidade externa do Ski-Pro as influencias dos erros foram homogêneas porem, houve uma maior influencia em todos os pontos da rede em relação às estratégias 1, 2 e 3. Isto ocorreu devido ao programa ter detectado maior número de erros que as estratégias aplicadas.

Comparando a estratégia 3 nas duas figuras anteriores, a estimativa da confiabilidade pelo método simplificado (figura 15) resultou em piores valores para a estratégia 3, ocorrendo o contrário para esta estratégia na figura 16. O motivo desta diferenciação está nas equações utilizadas. Na equação prática que tem dependência apenas do número de redundância e do parâmetro de não centralidade em que desconsidera a influência do erro detectado, a estratégia 3 devido a eliminação de 6 vetores ou de 18 componentes teve um valor estimado para a confiabilidade inferior às estratégias 1 e 2. Esta equação pratica serve apenas como estimativa geral da confiabilidade externa e deve ser usada para estimativa do estudo da confiabilidade na fase de projeto de implantação das redes, deixando a análise de confiabilidade externa propriamente dita (eq. 2.80) para após a detecção de erros.

Nesta pesquisa as três estratégias tiveram bons resultados de confiabilidade externa o que pode ser observado nas figuras 15 e 16. Em situações semelhantes o usuário pode optar pelos resultados obtidos em uma das três estratégias propostas.

Para a obtenção das coordenadas topográficas oficiais da rede do Campus II, optou-se em utilizar os resultados da estratégia 2, uma vez que esta eliminou o erro grosseiro significativo (ΔY do vetor M06>M10) que foi considerado pela estratégia 1 e também porque apresentou uma menor perda de componentes de vetores que a estratégia 3.

Figura 16, Gráficos da confiabilidade externa dos vértices da rede

A figura 17 apresenta as precisões de 1σ , obtidas nos ajustamentos propostos, bem como as precisões obtidas nos dois programas computacionais utilizados.

Observa-se pelos gráficos que os resultados em X, Y e Z foram subcentimétricos em todos os ajustamentos, ocorrendo pequenas diferenças na ordem de 1 mm a 2 mm nos diversos resultados.

Na análise de precisão das coordenadas estimadas do ajustamento o fator de escala a ser multiplicado pela MVC é de grande influência. Cada programa utiliza internamente diferentes fatores de escala podendo a chegar a diferente (mesmo que próximas) resultados de precisão.

Um fator que pode influenciar na precisão final é a obtenção de diferentes MVC pelos programas computacionais após o processamento dos dados de campo, isto devido a diferentes modelos matemáticos usados por cada programa.

Outro fator observado neste estudo e que influencia no resultado de precisão é a forma de eliminação de *outliers*. Mesmo pouco perceptivo, nota-se pelo gráfico da figura 17 que a estratégia 2, teve melhores resultados que a estratégia 1 e 3. Ao eliminar apenas as componentes com *outliers* (estratégia 2), melhores resultados foram obtidos e isto pode ser visto nas coordenadas de X e Y da figura 17 que tiveram maior número de componentes eliminados.

Figura 17, Precisão das coordenadas obtidas no ajustamento

5.3 Análise da Qualidade da Rede

Para esta fase do trabalho as condições do equipamento, E.T., são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 17 Configuração do equipamento (E.T) para análise da qualidade em campo

Altitude	Temperatura	Pressão Atmosférica	PPM Atm.	Precisão Angular	Precisão Linear
840 m	25 ⁰ C	913 mbar	39 PPM	3"	2 mm+2 PPM

Fonte :Especificações da Laica

5.3.1 Linear

Figura 18 – Controle Linear realizado com Estação Total

A tabela 18 mostra a comparação da fração decimal das distâncias em mm obtidas em campo (ver modelo na figura 18) entre os pontos da rede, tomados com a estação total e suas respectivas distâncias obtidas matematicamente em função das coordenadas encontrada pelas estratégias aplicadas.

Tabela 18, Resíduos das distâncias entre estação e ré nas diferentes estratégias e Estação Total

Distâncias em (m) obtidas por coordenadas						Diferença Obtida (mm)			
Vetor	SKI	ESTR. 1	ESTR. 2	ESTR. 3	Est. Total				
M03-M02	448.245	448.245	448.246	448.245	448.245	0	0	1	0
M03-M06	339.925	339.926	339.925	339.926	339.925	0	1	0	1
M04-M03	214.618	214.618	214.619	214.617	214.618	1	1	2	0
M08-M04	154.312	154.312	154.312	154.312	154.312	0	0	0	0

Analisando a tabela 18, pode-se observar que a variação entre a distância medida com Estação Total (E.T.) e as obtidas nas estratégias propostas ficaram na ordem milimétrica. Sendo assim, a rede implantada tem uma boa amarração linear entre seus vértices. Isto quer dizer que se um operador com E.T. de precisão milimétrica, cuja aferição e configuração estejam nas condições ideais e desconsiderando a ocorrência de erros grosseiros, realizar medidas de distâncias entre dois ou mais pontos da rede, este obterá diferenças milimétricas ao comparar com as distâncias obtidas matematicamente pelas coordenadas dos vértices.

O mesmo ocorre com a comparação de distâncias de pontos irradiados dos marcos da rede (ver tabela 19). Podemos observar aí que houve uma boa relação erro/distância. Na pior situação (distância entre os pontos PT1-PT3) o erro relativo foi de 1 m para cada 278.242,00 m.

Tabela 19, Resultado das distâncias entre pontos irradiados da rede

	DISTÂNCIA	DISTÂNCIA	DIFERENÇA
	(m) (E.T)	(m)	(mm)
PT1-M03	407,097 m	407,096 m	1 mm
PT1-PT2	599,772 m	599,769 m	2 mm
PT1-PT3	1112,968 m	1112,964 m	4 mm

5.3.2 Orientação

Figura 19 – Controle angular realizado com Estação Total

As tabelas 20, 21 e 22 mostram o resultado da rede quanto a orientação (figura 19), ou seja, como as medidas angulares em função dos vértices da rede se comportam.

Tabela 20, Qualidade angular do ajustamento na estratégia1

	ESTRATÉGIA 1			
RÉ	ESTACAO	VANTE	X (M)	Y (M)
M03	M02	PT01	150126,666	249974,226
M03	M06	PT01	150126,666	249974,226
M04	M03	M10*	149855,157	249724,020
M08	M04	PT02	149880,543	249362,310
M01	M08	PT02	149880,549	249362,315

*M10 (X = 149855,161 m ; Y = 249724,017 m) - obtido no ajustamento

Tabela 21, Qualidade angular do ajustamento na estratégia2

	ESTRATÉGIA 2			
RÉ	ESTACAO	VANTE	X (M)	Y (M)
M03	M02	PT01	150126,667	249974,227
M03	M06	PT01	150126,667	249974,228
M04	M03	M10*	149855,158	249724,021
M08	M04	PT02	149880,549	249362,310
M01	M08	PT02	149880,551	249362,316

*M10 (X = 149855,159 m ; Y = 249724,017 m) – obtido no ajustamento

Tabela 22, Qualidade angular do ajustamento na estratégia3.

	ESTRATÉGIA 3			
RÉ	ESTACAO	VANTE	X (M)	Y (M)
M03	M02	PT01	150126,667	249974,227
M03	M06	PT01	150126,669	249974,226
M04	M03	M10*	149855,157	249724,022
M08	M04	PT02	149880,549	249362,310
M01	M08	PT02	149880,553	249362,316

*M10 (X = 149855,164 m ; Y = 249724,017 m) – obtido no ajustamento

Nas diversas estratégias foram obtidos bons resultados quanto a orientação, pois a diferença entre os pontos obtidos por caminhos distintos ficaram abaixo de 6 mm na coordenada X e de 6 mm na coordenada Y e ocorrendo em proporções semelhantes.

Pode-se afirmar que a rede piloto nas diversas estratégias obteve bons resultados angulares e lineares e que um operador partindo de qualquer ponto da rede fechará com erros milimétricos em qualquer outro ponto da mesma.

É muito importante lembrar que esta é uma rede piloto e que está em um local privilegiado com poucas construções e com dimensões quilométricas. No caso de uma rede de maior envergadura e em local de maior densidade urbana se pode esperar divergência maior entre os ajustamentos, mas, a análise de qualidade sempre procede.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

---

*“A felicidade é a única coisa que
podemos dar sem possuir”*

Voltaire
Autor e Filósofo

6.1 Conclusões

- ✓ A análise de redundância é de fundamental importância para o estudo de redes, pois através dela é possível minimizar os custos envolvidos na implantação e processamentos, bem como prever, juntamente com a Matriz Variância Covariância (MVC) das observações projetada e obtida pela precisão nominal do equipamento escolhido para as futuras medições, a tendência da confiabilidade interna e externa a ser encontrada para a rede.
- ✓ Escalonar a MVC das observações, de forma a passar no teste global, é uma medida eficiente, porém perigosa, uma vez que com esta técnica pode-se subestimar ou superestimar as precisões das observações, bem como influenciar que erros grosseiros passem pelos testes estatísticos. O usuário deve estar muito atento de forma a não permitir valores de escalonamento da MVC que ultrapasse o valor nominal da precisão do equipamento utilizado.
- ✓ Nem todos os erros detectados como outliers, ou mesmo identificados como significativamente influentes são prejudiciais no resultado final da rede. O usuário deve tomar bastante cuidado e de preferência utilizar as três estratégias propostas de forma a observar qual medida de ajustamento fornecerá o melhor resultado.
- ✓ Na possibilidade de eliminação de outliers (quando se consideram influentes os erros detectados), a estratégia 2 (eliminação de componentes) possibilita melhores resultados devido a este método eliminar apenas as componentes com presença de outliers, não reduzindo tanto o número de redundância do sistema (R). Ocorre o contrário com a estratégia 3 uma vez que para uma componente com presença de outliers todas as demais que compõem aquele vetor também serão eliminados.
- ✓ O método de controle de campo possibilitou uma confirmação prática da qualidade do ajustamento, porém este controle é inviável em redes com bases grandes devido a dificuldade de intervisibilidade entre estações.

- ✓ A técnica de ajustamento aplicada na forma de rotinas programáveis em softwares matemáticos e estatísticos possibilita ao usuário um melhor entendimento em todo processo de ajustamento, bem como também, a condição de manipulação dos dados, buscando resultados que melhor satisfaçam seus objetivos.

6.2 Recomendações

- ✓ A teoria de confiabilidade proposta por Baarda em 1968 é importante na análise de ajustamento, porém é pouco difundida no Brasil, desta forma, os cursos de Agrimensura, Cartografia e os cursos de pós-graduação nas áreas de Mensuração deveriam dar mais importância a esta teoria.
- ✓ A literatura consultada, nesta pesquisa, apresentou uma relação entre o nível de significância unidimensional e nível de significância multidimensional através dos monogramas de Baarda, desta forma ,recomenda-se desenvolver estudos que relacionem estas equações.
- ✓ Estudo das abordagens modernas sobre confiabilidade externa, como o método da robustez e comparar com o método de Baarda.
- ✓ Estudo sobre estimadores robustos como Danes, McClure, Minima Soma e Huber para a detecção de *outliers*, seguido da análise de confiabilidade pelo teste de Baarda.
- ✓ Pesquisa sobre a detecção de erros grosseiros nas coordenadas dos vértices de junção e sua propagação na rede.
- ✓ Aplicação da metodologia proposta em redes que possuam comprimentos de vetores maiores (acima de 1 km).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILERA, G.D. (2001). *Consideraciones sobre el analisis de la fiabilidad em el patrimonio edificado*. Disponível em
< <http://www.redcientifica.com/doc/doc200111070001.html> >. Acesso em novembro de 2004.

ALTAHA, K. and Arnold, D. (1996). *Advanced GPS surveying*. The National GIS–GPS Curriculum Consortium. Kansas State University. Lawrence, Kans.

AMORIM, G. P. (2004). *Confiabilidade de Rede GPS de Referência Cadastral Municipal, Estudo de Caso: Rede do Município de Vitória (ES)*.194 p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2004.

ANNIS, C.P.E. *Outliers*. Disponível em
<http://www.statisticalengineering.com/outliers.htm>>. Acesso em junho de 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1994). *NBR 13,133, Execução de levantamento topográfico – procedimento*. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). *NBR-14166, Rede de referência cadastral municipal – Procedimento*. Rio de Janeiro.

BAARDA, W. (1968). *A testing procedure for use in geodetic networks*. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. Série 2, N^o 5. Delft . Netherlands, 1968.

BURKARD, R. K. (1974). *Geodésia*. Secretaria da Agricultura. Coordenadoria da pesquisa de recursos naturais, IGG. São Paulo, 1974.

DALMOLIN, Q. (2002). *Ajustamento por Mínimos Quadrados*. Edição Revisada. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2002.

DUPRAZ, H. (1985). *Theorie des erreurs 2 - Statistique et calculs de compensation applliqués à la Géodesie et á la Mensuration*. Institut des Mensurations. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.

FIGUEIRA, M. M. C.(1998). *Identificação de outliers*. Disponível em <<http://www.ipv.pt/millennium/arq12.htm>>.

GEMAEL, C. (1994). *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações de Geodésia*. 1^a edição. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1994.

IBGE-FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1983). *Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos*. Resolução PR No 22. Rio de Janeiro.

KAVOURAS, M. (1982). *On detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks*. Technical report No 87. Department Surveying Engineering. University of New Brunswick Fredericton, Canada.

KUANG, S. (1996). *Geodetic network analysis and optimal design: Concepts and Applications*. 1st,ed. Michigan: Ann Arbor. Inc. Chelsea, Michigan.

LEICK, A. (2004). *GPS: Satellite Surveying*. 2nd,ed. New York: John Wiley & Sons, Incorporation.

MIKHAIL, E.M.; ACKERMANN, F. (1976). *Observations and Least Squares*. 1st,ed. New York: IEP.

MORAES, C. V. (1998). *Análise de erros grosseiros e confiabilidade de redes geodésicas*. Revista Cartografia e Cadastro. Lisboa. Instituto Português de Cartografia e cadastro. N^o 8.

MORAES, C.V. (2001). *Aprimoramento da Concepção do Modelo Geodésico para a Caracterização de Extremas no Espaço Geométrico*. Curitiba. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2001.

SCHUNEMANN, A. L. (2005). *Ordenação de parâmetros para ajustamento e análise da qualidade de redes geodésicas altimétricas geométricas*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2005.

SEEBER, G. (2003). *Satellite Geodesy*. 2nd completely revised and extended edition. Berlin: Walter de Gruyter.

SOUZA, G. C. (2005). *Operacionalidade de Redes Geodésicas de Apoio ao Cadastro Rural*. 148 p. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005.

TEIXEIRA, N. N.; FERREIRA, L. D. D. (2003). *Análise da confiabilidade de redes geodésicas*. Artigo. Boletim de Ciências Geodésicas. Curitiba. Paraná v.9, nº 2.

TEIXEIRA, N. N.; COSTA, M. F.; FERREIRA, L. D. D. (2001). *Considerações sobre a matriz dos pesos no ajustamento de redes*. Rio de Janeiro. Disponível em
<http://geodesia.ufsc.br/Geodesiaonline/ARQUIVO/GeoColoq_2001/cbcq2072.pdf>. Acesso em maio de 2004.

TORGE, W. (2001). *Geodesy*. Editora Walter de Gruyter. New York, 2001

VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. (1986). *Geodesy: The Concepts*. 2nd ed, Amsterdam. New York. Oxford: North_Holland Publishing Company.

VASCONCELOS, C. P.; BLITZKOW, D. (2001). *Ajustamento de redes geodésicas de densificação e extensão*. Rio de Janeiro. Disponível em
<http://www.cartografia.org.br/xxi_cbc/012-G02.pdf>. Acesso em agosto de 2004.

Bibliografia consultada

ANDERSON, J. M.; MIKHAIL, E. M. (1998). *Surveying: Theory and Practice*. 7th,ed. New York: Wcb Mcgraw-Hill.

CAROSIO, A. (1990a). *Introduction à la statistique mathématique*. Rapport n^o 169. Institute de géodesie et photogrammétrie. Escole polytechnique federale, Zurich.

CAROSIO, A. (1990b). *La théorie de la confiabilité dans le domaine de la mensuration*. Rapport n^o 169. Institute de géodesie et photogrammétrie. Escole polytechnique federale, Zurich.

HOFMANN, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J. (1992). *GPS theory and practice*. Fourth revised edition. Springer Wine. New York .

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Disponível em <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em (março de 2004).

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1992). *Especificações e normas gerais para levantamentos GPS (Preliminares)*. Rio de Janeiro.

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1997). *Sirgas – Relatório Final GPS, Grupo de Trabalho I e II*. Rio de Janeiro.

LAROCCA, A. P. C. (2000). *Análise de estratégias para processamento de redes geodésicas com o sistema GPS*. 203 p. Dissertação (mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2000.

RODRIGUES, D. D. (2002). *Rede geodésica de precisão no estado de Minas Gerais: avaliação de diferentes estratégias de processamento e ajustamento*. 223 p. Tese (Doutorado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3138/tde-06122002-115813/>. Acesso em março de 2004.

SCHAAL, R. E. (1995). *Efeitos da refração na atmosfera em observações geodésicas próximas ao solo*. 120 p. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1995.

SEGANTINE, P. C. L. (1995), *Estabelecimento e ajuste de uma rede geodésica no estado de São Paulo com o sistema de posicionamento NAVSTAR/GPS*. 216 p. Tese (Doutorado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1995.

ANEXO A – AJUSTAMENTOS DA REDE NO MATHCAD

Ajustamento Inicial

Dados de entrada obtidos no processamento dos vetores.

$$A_0 =$$

	0	1	2	3	4	5
0	-1	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0
2	0	0	-1	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	0
4	0	-1	0	0	0	0
5	0	0	-1	0	0	0

$$A =$$

	0	1	2	3	4	5
0	-1	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0
2	0	0	-1	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	0
4	0	-1	0	0	0	0
5	0	0	-1	0	0	0

$$\Sigma_{II} =$$

	0	1	2	3	4	5
0	0.00000249	-0.00000226	-0.00000146	0	0	0
1	-0.00000226	0.00000319	0.00000191	0	0	0
2	-0.00000146	0.00000191	0.00000171	0	0	0
3	0	0	0	0.00000313	-0.00000227	-0.00000091
4	0	0	0	-0.00000227	0.00000276	0.00000103
5	0	0	0	-0.00000091	0.00000103	0.00000082

$$X_0 =$$

	0
0	3964556.313
1	-4392497.234
2	-2375263.157
3	3964821.695
4	-4392463.699
5	-2374801.785

$$X_{01} =$$

	0
0	3964556.313
1	-4392497.234
2	-2375263.157
3	3964985.183
4	-4392556.983
5	-2374394.493

$$L = A_0 X_0 - L_b$$

$$L_b =$$

	0
0	165.9498
1	8.7992
2	269.3673
3	-149.3437
4	-267.846
5	243.833

$$L =$$

	0
0	13.7698
1	-17.6068
2	-9.7887
3	13.7763
4	-17.624
5	-9.794
6	13.7832

Cálculo das matrizes dos coeficientes dos parâmetros das equações

$$\sigma_0^2 = 1 \quad P = \sigma_0^2 \Sigma_{ll}^{-1}$$

$$N := A^T \cdot P \cdot A$$

N =

	0	1	2	3	4	5
0	5714967.27351544	3904400.54593253	1443687.5852051	0	0	0
1	3904400.54593253	6752572.97806235	-3185253.25396062	0	0	0
2	1443687.58520509	-3185253.25396062	8462345.10684773	0	0	0
3	0	0	0	5365950.80530206	3594202.01932061	880813.12541153
4	0	0	0	3594202.01932061	5444149.4484115	-2667645.86349245
5	0	0	0	880813.12541153	-2667645.86349245	8520459.71928395

$$n := A^T \cdot P \cdot L$$

$$Q_{xx} = N^{-1}$$

$$X = Q_{xx} r$$

$$X_a = X_0 + X$$

n =

	0
0	4175036.44813879
1	33947862.2176896
2	6871754.56674787
3	19587.81327088
4	26153.44666672
5	-10476.66142976

$X_a =$

	0
0	3964543.9859
1	-4392481.4508
2	-2375254.0215
3	3964823.1452
4	-4392465.5228
5	-2374802.4404

Calculo dos vetores dos resíduos (**V**) e observações ajustada (**LAjst**)

$$V = AX - L$$

$$LAjst := L + V$$

$$L_a = L + V$$

V =

	0
0	0.0016
1	-0.0002
2	-0.0007
3	-0.0032
4	0.009
5	0.0034

$L_a =$

	0
0	165.9514
1	8.799
2	269.3666
3	-149.3469
4	-267.837
5	243.8364

Verificação dos controles

$$V^T P V = -L^T P V \text{ e } A^T P V = 0$$

$$V^T \cdot P \cdot V = (659.63973716) \quad -L^T \cdot P \cdot V = (659.6397371) \quad \blacksquare$$

$$A^T P V \neq \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 3 & -0 \\ \hline 4 & -0 \\ \hline 5 & -0 \\ \hline \end{array} \quad \blacksquare$$

Cálculo das precisões do ajustamento

Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0 := \sqrt{\frac{V^T \cdot P \cdot V}{\text{rows}(L) - \text{rows}(X0)}} \quad \boxed{\hat{\sigma}_0 = (3.02682392) \quad \blacksquare}$$

Cálculo das precisões da incógnita **X**

$$Sx1 := \begin{array}{|l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{xx}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow Q_{xxn,n} \\ v \end{array}$$

$$\boxed{\sigma_x := \sqrt{Sx1} \cdot \sigma_0}$$

$$\sigma_x = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0.004235 \\ \hline 1 & 0.00450862 \\ \hline 2 & 0.0030542 \\ \hline 3 & 0.00374226 \\ \hline 4 & 0.00416211 \\ \hline 5 & 0.00252784 \\ \hline 6 & 0.0039415 \\ \hline \end{array} \quad \blacksquare$$

Matriz Co-fatora das Observações Compensadas e Precisão das Observações Ajustadas

$$Q_{ll} := A \cdot N^{-1} \cdot A^T$$

Precisão das observações ajustadas.

$$SLL1 := \begin{array}{|l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{LL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \sqrt{Q_{LLn,n}} \\ v \end{array}$$

$$\boxed{\sigma_l := SLL1 \cdot \sigma_0}$$

$$\sigma_l = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0.0028873 \\ \hline 1 & 0.00298446 \\ \hline 2 & 0.00209368 \\ \hline 3 & 0.00297928 \\ \hline 4 & 0.00290913 \\ \hline 5 & 0.00182509 \\ \hline \end{array} \quad \blacksquare$$

Teste Global (Bidimensional e unidimensional) - Comparação da variância a priori com posterior $\alpha_0=5\%$ e Beta(0) de 80% para análise do ajustamento e

$$r := (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))$$

detecção de erros grosseiros simultaneamente.

Para $r = 72$ implica em α de 59%.

Teste Bidimensional

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (659.63973716) \blacksquare$$

Rejeitado

$$\text{qchisq}\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))\right] = 65.0953352 \blacksquare$$

$$\text{qchisq}\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))\right] = 77.96035628 \blacksquare$$

Teste Unidimensional

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (659.63973716) \blacksquare \quad \text{Rejeitado}$$

$$\text{qchisq}[1 - 0.594, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X_0))] = 68.53328243 \blacksquare$$

Escalonamento da matriz

$$\sigma_0^2 := 1$$

$$\Sigma_{//} = 10 \cdot \Sigma_{//} :$$

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{//}^{-1}$$

Repete todo o procedimento de ajustamento anterior e faz nova avaliação para o teste Qui-quadrado.

Teste Bilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2 = (65.96397372) \blacksquare$$

$$\text{qchisq}\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 65.0953352 \blacksquare$$

$$\text{qchisq}\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 77.96035628 \blacksquare$$

Teste Unilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2 = (65.96397372) \blacksquare$$

Aceito

$$\text{qchisq}[1 - 0.594, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))] = 68.53328243 \blacksquare$$

Matriz Covariância dos Resíduos

$$Q_{vv} := P^{-1} - A \cdot N^{-1} \cdot A^T$$

Cálculo da Redundância Parcial

$$R := Q_{vv} \cdot P$$

$$r := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{ll}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow R_{n,n} \\ v \end{array} \right|$$

$$r = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0.55 \\ 1 & 0.66 \\ 2 & 0.7 \\ 3 & 0.73 \\ 4 & 0.7 \\ 5 & 0.5 \\ 6 & 0.83 \\ \hline \end{array} \blacksquare$$

Teste Data Snooping Sobre os Resíduos

$qnorm(0.975, 0, 1) = 1.95996398$ ■ Data Snooping Crítico

$$w := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{ll}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \frac{V_n}{\left(\sqrt{\Sigma_{ll_{nn}}} \cdot \sqrt{R_{n,n}} \right)} \\ v \end{array} \right.$$

$w =$

	0
0	0.4384
1	-0.0375
2	-0.1965
3	-0.6642
4	2.0471
5	1.6777
6	-0.1664

■

Foram detectados três componentes com possíveis erros grosseiros

ANEXO A1- ESTRATÉGIA 1

Nesta estratégia foi dado continuidade com a análise da confiabilidade da rede sem se preocupar com a existência dos Três erros detectados pelo Data Snooping.

Erro Marginal Inferior Detectável

Parâmetro de Não Centralidade

$$qnorm\left(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1\right) = 1.95996398 \blacksquare$$

$$qnorm(1 - .2, 0, 1) = 0.84162123 \blacksquare$$

$$\delta_0 := qnorm\left(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1\right) + qnorm(1 - .2, 0, 1) \quad \delta_0 = 2.80158522 \blacksquare$$

Análise de significância do(s) erro(s)

$$\Delta l_0 i := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{ll}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ v_n \leftarrow \frac{\delta_0 \cdot \sqrt{\sum \hat{r}_{nn}}}{\sqrt{r_n}} \\ v \end{array}$$

$$\Delta l_0 i =$$

	0
70	0.0205
71	0.0132
72	0.017
73	0.0181
74	0.0115
75	0.0234
76	0.0269

$$\Delta l i := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{ll}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ v_n \leftarrow \frac{|V_n|}{r_n} \\ v \end{array}$$

$$\Delta l i =$$

	0
70	0.02164605
71	0.00286137
72	0.00522269
73	0.00030319
74	0.00121526
75	0.00777938
76	0.02211811

$\Delta l i > \Delta l_0$ Implica que o erro é significativo

Confiabilidade Externa (equação prática)

$$\gamma := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(r) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \left[\frac{(1 - r_n)}{r_n} \right] \cdot \delta 0^2 \\ v \end{array}$$

$$\sqrt{\gamma} =$$

	0
0	2.51987122
1	2.00275199
2	1.83000438
3	1.6989524
4	1.84487143
5	2.78929015
6	1.24955136

Boa Confiabilidade Externa se $\sqrt{\gamma} \leq 10$

ANEXO A2 - ESTRATÉGIA 2

Modificou os dados de entrada iniciais (Matrizes A, A_0, Σ_{II} , e o vetor L_b) eliminando os três componentes detectados pelo data Snooping no anexo A .

O modo de ajustamento é o mesmo do anexo A, portanto será mostrado aqui apenas a aplicação dos teste a partir do teste global:

Novo escalonamento foi necessário para que passasse no teste Qui-quadrado

Para $r = 72$ implica em α de 59% .

Foi utilizado nível de confiança de 68%.

Teste Bilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (515.86674939)$$

$$qchisq\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 62.2322421$$

$$qchisq\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 74.82353274$$

Rejeitado

Teste Unilateral

$$qF(1 - 0.594, \text{rows}(L) - \text{rows}(X0), 10^9)_r = 65.59376848$$

Rejeitado

Escalonamento da matriz

$$\sigma_0^2 := 1$$

$$\Sigma_{ll} := 8 \cdot \Sigma_{ll}$$

$$P := \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{ll}^{-1}$$

Repete todo o procedimento de ajustamento anterior e faz nova avaliação para o teste Qui-quadrado.

Teste Bilateral

Teste Bilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (64.48334367)$$

$$\text{qchisq}\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 62.2322421 \quad \text{Aceito}$$

$$\text{qchisq}\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 74.82353274$$

Teste Unilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (65.96397372) \blacksquare$$

Aceito

$$\text{qchisq}[1 - 0.594, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))] = 68.53328243 \blacksquare$$

Cálculo da redundância parcial

$$R := Q_{vv} \cdot P$$

$$r := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{LL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0 \dots i \\ \quad v_n \leftarrow R_{n,n} \\ v \end{array}$$

$$r =$$

	0
0	0.54
1	0.64
2	0.7
3	0.73
4	0.53
5	0.84
6	0.28

Teste Data Snooping Sobre os Resíduos

$$q_{\text{norm}}(0.975, 0, 1) = 1.95996398 \quad \blacksquare \quad \text{Data Snooping Crítico}$$

$$w := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{LL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0 \dots i \\ \quad v_n \leftarrow \frac{V_n}{\left(\sqrt{\Sigma_{ll,n,n}} \cdot \sqrt{R_{n,n}} \right)} \\ v \end{array}$$

$$w =$$

	0
64	0.3492
65	0.8372
66	-1.6269
67	-0.0084
68	2.001
69	-0.7821
70	0.65

 $\blacksquare$
r

Foram detectados dois novas componentes com possíveis erros grosseiros. Desta forma , todo o processo se repetiu e ajustou tudo sem a presença das novas componentes com erros.

Com todas as componentes com erros eliminadas, processou a confiabilidade da rede dado por:

Erro Marginal Inferior Detectável

Parâmetro de Não Centralidade

$$\text{qnorm}\left(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1\right) = 1.95996398 \blacksquare$$

$$\text{qnorm}(1 - .2, 0, 1) = 0.84162123 \blacksquare$$

$$\delta 0 := \text{qnorm}\left(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1\right) + \text{qnorm}(1 - .2, 0, 1) \quad \delta 0 = 2.80158522 \blacksquare$$

$$\Delta l0i := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(\text{QLL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \frac{\delta 0 \cdot \sqrt{\Sigma l_{h,n}}}{\sqrt{r_n}} \\ v \end{array} \right|$$

$$\Delta li := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(\text{QLL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \frac{|V_n|}{r_n} \\ v \end{array} \right|$$

Análise de significância do(s) erro(s)

$\Delta li > \Delta l0i$ Implica que o erro é significativo

$$\Delta l0i =$$

	0
0	0.0161
1	0.0168
2	0.0118
3	0.0156
4	0.0094
5	0.0188
6	0.0264

$$\Delta li =$$

	0
0	0.00360235
1	0.00009272
2	0.00143106
3	0.00414765
4	0.005651
5	0.00196057
6	0.00523551

Confiabilidade Externa (equação prática)

$$\gamma := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(r) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \left[\frac{(1 - r_n)}{r_n} \right] \cdot 80^2 \\ v \end{array} \right.$$

$$\sqrt{\gamma} =$$

	0
0	2.60996408
1	2.10849469
2	1.84494728
3	1.70202264
4	2.64885096
5	1.27500994
6	4.57583987

Boa confiabilidade externa se $\sqrt{\gamma} \leq 10$

ANEXO A3 – ESTRATÉGIA 3

Modificou os dados de entrada iniciais (Matrizes A , A_a , Σ_{ll} , e o vetor L_b) eliminando os três vetores que apresentaram componentes detectados pelo data Snooping no anexo A.

Foi necessário novo escalonamento da MVC.

Novas componentes com erros surgiram e todo o processo se repetiu.

Novo escalonamento foi realizado e mais uma vez surgiram componentes com erros.

Ao todo ocorreram três eliminação de vetores (necessitando de 3 ajustamento) totalizando 6 vetores ou 18 componentes.

Após a terceira eliminação nenhum erro mais apareceu e o resultado está apresentado abaixo:

O modo de ajustamento é o mesmo do anexo A, portanto será mostrado aqui apenas a aplicação dos teste a partir do teste global:

Detecção de erros grosseiros simultaneamente.

Para $r = 54$ implica em α de 59%.

Foi utilizado nível de confiança de 68%.

Teste Bilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (336.26133302)$$

$$\text{qchisq}\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 47.96714278 \quad \text{Rejeitado}$$

$$\text{qchisq}\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 59.08918948$$

$$\text{qF}(1 - 0.594, \text{rows}(L) - \text{rows}(X0), 10^9) = 50.91842607$$

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (336.26133302) \quad \text{Rejeitado}$$

Escalonamento da matriz

$$\sigma_0^2 := 1$$

$$\Sigma_{ii} = 6,87 \cdot \Sigma_{ii}$$

$$P := S0^2 \cdot \Sigma_{ii}^{-1}$$

Repete todo o procedimento de ajustamento anterior e faz nova avaliação para o teste Qui-quadrado.

Teste Bilateral

$$\chi^2 := \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\sigma_0^2} \quad \chi^2 = (50.18825866)$$

$$\text{qchisq}\left[\frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 47.96714278$$

$$\text{qchisq}\left[1 - \frac{0.59}{2}, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))\right] = 59.08918948$$

Teste Unilateral

$$qchisq[1 - 0.05, (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))] = 72.15321481$$

$$qF(1 - 0.594, \text{rows}(L) - \text{rows}(X0), 10^9) = 50.91842607$$

$$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2 (\text{rows}(L) - \text{rows}(X0))}{\chi^2 = (50.18825866)}$$

Cálculo da redundância parcial

$$R := Q_{vv} \cdot P$$

$$r := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(Q_{LL}) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow R_{n,n} \\ v \end{array}$$

	0
0	0.5
1	0.65
2	0.64
3	0.82
4	0.25
5	0.64
6	0.7

Da mesma forma que na estratégia 2 a partir da terceira eliminação de vetores com erros, foi feito a análise da significância dos erros e nenhum erro foi identificado como influente.

No cálculo da confiabilidade externa obteve-se:

$$\gamma := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{rows}(r) - 1 \\ \text{for } n \in 0..i \\ \quad v_n \leftarrow \left[\frac{(1 - r_n)}{r_n} \right] \cdot \delta_0^2 \\ v \end{array}$$

	0
0	2.82110205
1	2.04748121
2	2.0902521
3	1.3096528
4	4.79295069
5	2.08315407
6	

Boa confiabilidade se $\sqrt{\gamma} \leq 10$

ANEXO B – AJUSTAMENTO NO SKI - PRÓ

3D minimally constrained network on WGS'84 ellipsoid

STATIONS

Number of (partly) known stations	1
Number of unknown stations	12
Total	13

OBSERVATIONS

Directions	0
Distances	0
Zenith angles	0
Azimuth angles	0
Height differences	0
GPS coordinate differences	108 (36 baselines)
Known coordinates	3
GPS transformation parameters	0
Total	111

UNKNOWNNS

Coordinates	39
Orientations	0
Scale factors	0
Vertical refraction coefficients	0
Azimuth offsets	0
GPS transformation parameters	0
Deflections of the vertical	0
Additional transformation parameters	0
Total	39

Degrees of freedom	72

ADJUSTMENT

Number of iterations	1
Max coord correction in last iteration	0.0000 m

TESTING

Alfa (multi dimensional)	0.5940
Alfa 0 (one dimensional)	0.0500
Beta	0.80
Critical value W-test	1.96
Critical value T-test (3 dimensional)	1.89

Critical value T-test (2 dimensional) 2.42
 Critical value F-test 0.95
 F-test 0.432 accepted

Results based on a-posteriori variance factor

ELLIPSOID CONSTANTS

Ellipsoid WGS'84
 Semi major axis 6378137.0000 m
 Inverse flattening 298.257223563

COORDINATES (MINIMALLY CONSTRAINED NETWORK)

Station	Coordinate	Corr	Prec(95.0%)
M01 Latitude	22 00 18.45333 S	0.9846	0.002 m
Longitude	47 55 52.96637 W	1.4244	0.002 m
Height	840.3537	-21.9406	0.005 m
M02 Latitude	21 59 48.26444 S*	0.0000	fixed m
Longitude	47 55 43.31400 W*	0.0000	fixed m
Height	844.4300*	0.0000	fixed m
M03 Latitude	22 00 02.70889 S	0.2635	0.002 m
Longitude	47 55 45.37061 W	-0.1450	0.002 m
Height	833.6246 2.4025		0.005 m
M04 Latitude	22 00 09.06012 S	0.2636	0.002 m
Longitude	47 55 48.46650 W	-0.1495	0.002 m
Height	836.4671 2.4001		0.005 m
M05 Latitude	22 00 09.90131 S	0.2657	0.001 m
Longitude	47 56 03.08665 W	-0.1525	0.002 m
Height	840.5698 2.4079		0.004 m
M06 Latitude	21 59 52.65122 S	0.2645	0.002 m
Longitude	47 55 40.46280 W	-0.1480	0.002 m
Height	838.2767 2.4136		0.005 m
M07 Latitude	22 00 10.56973 S	0.2644	0.002 m
Longitude	47 55 43.88587 W	-0.1438	0.002 m
Height	829.8237 2.4074		0.005 m
Longitude	47 55 53.37869 W	-0.1510	0.002 m
Height	836.1390 2.3994		0.005 m
M09 Latitude	22 00 03.39940 S	0.2644	0.001m
Longitude	47 55 56.99324 W	-0.1503	0.002m
Height	846.3600 2.3990		0.004m
M10 Latitude	21 59 57.23587 S	0.2663	0.001m
Longitude	47 55 48.36280 W	-0.1528	0.001m
Height	836.9752 2.4004		0.003m
M11 Latitude	21 59 52.86451 S	0.2635	0.001m
Longitude	47 55 55.08770 W	-0.1520	0.001 m
Height	840.3706 2.4027		0.003m
M12 Latitude	22 00 01.04433 S	0.2651	0.001m
Longitude	47 56 00.98728 W	-0.1491	0.001 m
Height	848.9296 2.4047		0.004m
M13 Latitude	22 00 07.13654 S	0.2649	0.001m
Longitude	47 56 04.11500 W	-0.1505	0.002m
Height	845.0896 2.4021		0.004m

EXTERNAL RELIABILITY

Station	Ext Rel	Station	Target

M01 Latitude	0.0033 m	DZ	M02	M11
Longitude	-0.0037 m	DX	M01	M13
Height	-0.0056 m	DY	M02	M11
M02 Latitude	-0.0000 m	DZ	M02	M11
Longitude	-0.0000 m	DX	M02	M11
Height	-0.0000 m	DY	M02	M11
M03 Latitude	0.0031 m	DZ	M09	M03
Longitude	0.0033 m	DY	M02	M11
Height	-0.0055 m	DY	M02	M11
M04 Latitude	0.0032 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0037 m	DY	M02	M11
Height	-0.0058 m	DY	M02	M11
M05 Latitude	0.0034 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0039 m	DY	M02	M11
Height	-0.0058 m	DY	M02	M11
M06 Latitude	-0.0052 m	DZ	M06	M02
Longitude	-0.0047 m	DX	M06	M02
Height	0.0060 m	DZ	M06	M02
M07 Latitude	0.0031 m	DZ	M03	M07
Longitude	0.0032 m	DY	M02	M11
Height	-0.0052 m	DY	M02	M11
M08 Latitude	0.0034 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0038 m	DY	M02	M11
Height	-0.0058 m	DY	M02	M11
M09 Latitude	0.0035 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0039 m	DY	M02	M11
Height	-0.0058 m	DY	M02	M11
M10 Latitude	0.0035 m	DZ	M02	M10
Longitude	0.0034 m	DX	M02	M10
Height	-0.0052 m	DY	M02	M11
M11 Latitude	0.0040 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0044 m	DY	M02	M11
Height	-0.0055 m	DY	M02	M11
M12 Latitude	0.0036 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0040 m	DY	M02	M11
Height	-0.0057 m	DY	M02	M11
M13 Latitude	0.0035 m	DZ	M02	M11
Longitude	0.0039 m	DY	M02	M11
Height	-0.0058 m	DY	M02	M11

ABSOLUTE CONFIDENCE REGIONS (ERROR ELLIPSES) 2D - 39.4% 1D - 95.0%

Station	A	B	A/B	Psi	Hgt(95.0%)
M01	0.0022	0.0019 m	1.2	37 deg	0.0128 m
M02	0.0000	0.0000 m	0.0	0 deg	0.0000 m
M03	0.0023	0.0019 m	1.2	44 deg	0.0126 m
M04	0.0024	0.0019 m	1.3	45 deg	0.0126 m
M05	0.0020	0.0016 m	1.3	38 deg	0.0109 m
M06	0.0022	0.0019 m	1.1	45 deg	0.0116 m
M07	0.0024	0.0020 m	1.2	41 deg	0.0130 m
M08	0.0021	0.0017 m	1.3	37 deg	0.0114 m
M09	0.0017	0.0013 m	1.2	43 deg	0.0093 m
M10	0.0014	0.0012 m	1.2	51 deg	0.0076 m
M11	0.0014	0.0011 m	1.3	41 deg	0.0080 m
M12	0.0017	0.0013 m	1.3	42 deg	0.0094 m
M13	0.0019	0.0015 m	1.3	40 deg	0.0106 m

TEST OF OBSERVATIONS

ESTIMATED ERRORS FOR OBSERVATIONS WITH REJECTED W-TESTS (max 10)

Record	Station	Target	W-test	Fact	Est err	
34	DX	M02	M11	2.89	1.5	0.0093 m
32	DY	M13	M05	-2.84	1.4	-0.0065 m
16	DX	M09	M13	2.79	1.4	0.0078 m
15	DX	M09	M12	-2.67	1.4	-0.0067 m
33	DX	M02	M10	-2.51	1.3	-0.0081 m
15	DY	M09	M12	-2.34	1.2	-0.0044 m
16	DY	M09	M13	2.24	1.1	0.0063 m
33	DY	M02	M10	-2.04	1.0	-0.0070 m
18	DX	M12	M13	-2.04	1.0	-0.0063 m
13	DY	M09	M10	2.00	1.0	0.0068 m

ANEXO C – RESULTADO DO AJUSTAMENTO NO ASHTech SOLUTION

Site		Control Site			68%
Control	ID	Fix	Descriptor	Position	Error
Type	Status				
1	M02_			Lat. 21° 59' 48.26444"	0.000
Hor/Ver		Fixed		Lon. 47° 55' 43.31400"	0.000
Fixed				Elv. 844.430	0.000
Fixed					

Site	Control Site	Elevation
ID	Descriptor	Factor
1	M02_	0.99986730

Adjustment Type: Minimally Constrained

Variance of Unit Weight: 2.9

Adjustment scale factor: 1.00

Vectors Failing Tau Test: 0

Site Pairs Failing Relative Accuracy QA Test: 0

Vector Total: 36

Site Total: 13

Horizontally Constrained Sites: 1

Vertically Constrained Sites: 1

Horizontal Coordinate System: Univ. Transverse Merc.

(S)

Height System: Ellips. Ht.

Desired Horizontal Accuracy: 0.010m + 2ppm

Desired Vertical Accuracy: 0.020m + 2ppm

Confidence Level: 95% Err.

Network connectivity test: passed

Number of sites: 13

Number of vectors: 36

Adjustment Tests

Confidence level: 95.0%
 Number of
   obs. equations 109
   unknowns 37
   degrees of freedom 72
 Chi-square test: **failed**
   Lower limit: 50.427915
   Upper limit: 97.353054
   Chi-square: 616.642646
 Variance of Unit Weight: 8.564481
 Standard Error of Unit Weight: 2.926513
 Critical value for Tau-test: 3.385978
 Scale factor for a-priori vector sigmas: 1.00

Adjustment type: Minimally constrained

Control sites   Constraints
 M02_   Latitude   Longitude   Elevation

Site		68%		
Fix	Position			
	ID	Site Descriptor	Position	Error
Status		Status		
1 M13_ Adjusted			Lat. 22° 00' 07.13660" S	0.003
			Lon. 47° 56' 04.11504" W	0.003
			Elv. 845.095	0.004
2 M04_ Adjusted			Lat. 22° 00' 09.06011" S	0.003
			Lon. 47° 55' 48.46650" W	0.003
			Elv. 836.472	0.006
3 M05_ Adjusted			Lat. 22° 00' 09.90133" S	0.003
			Lon. 47° 56' 03.08666" W	0.002
			Elv. 840.574	0.006
4 M08_ Adjusted			Lat. 22° 00' 11.10444" S	0.002
			Lon. 47° 55' 53.37870" W	0.004
5 M09_ Adjusted			Lat. 22° 00' 03.39939" S	0.003
			Lon. 47° 55' 56.99323" W	0.002
			Elv. 846.368	0.004
6 M10_ Adjusted			Lat. 21° 59' 57.23583" S	0.003
			Lon. 47° 55' 48.36281" W	0.003
			Elv. 836.980	0.005
7 M11_ Adjusted			Lat. 21° 59' 52.86449" S	0.003
			Lon. 47° 55' 55.08773" W	0.003
			Elv. 840.375	0.005
8 M12_ Adjusted			Lat. 22° 00' 01.04430" S	0.003
			Lon. 47° 56' 00.98728" W	0.002
			Elv. 848.935	0.005

9 M03_
Adjusted

Lat. 22° 00' 02.70891" S 0.003
Lon. 47° 55' 45.37065" W 0.002
Elv. 833.634 0.005

10 M06_
Adjusted

Lat. 21° 59' 52.65125" S 0.003
Lon. 47° 55' 40.46282" W 0.002
Elv. 838.281 0.004

11 M07_
Adjusted

Lat. 22° 00' 10.56974" S 0.003
Lon. 47° 55' 43.88592" W 0.002
Elv. 829.835 0.004

12 M02_
Fixed Adjusted

Fixed

Fixed

Lat. 21° 59' 48.26444" S 0.000
Lon. 47° 55' 43.31400" W 0.000
Elv. 844.430 0.000

13 M01_
Adjusted

Lat. 22° 00' 18.45336" S 0.004
Lon. 47° 55' 52.96640" W 0.004
Elv. 840.345 0.004

ANEXO D –VETORES E SEUS COMPRIMENTOS

Station	target	Lenght Vector
M01	M04	316,505
M01	M05	391,787
M01	M07	356,065
M01	M08	226,419
M01	M13	472,762
M10	M11	235,190
M07	M04	139,528
M07	M06	559,960
M09	M03	334,343
M09	M04	300,426
M09	M05	265,699
M09	M08	258,916
M09	M10	311,990
M09	M11	328,712
M09	M12	135,587
M09	M13	234,433
M12	M13	207,819
M04	M03	214,637
M06	M02	157,923
M06	M03	339,959
M06	M10	266,938
M03	M07	245,571
M03	M10	189,013
M05	M08	280,977
M08	M04	154,313
M13	M05	90,136
M02	M10	311,772
M02	M11	366,235
M11	M12	303,375

ANEXO E – RESULTADOS DOS PROCESAMENTOS

Resultado do processamento no Ski-Pro

Rov:M13 Ref:M01 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.1 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5350
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +1.7463000E-006 -1.5551360E-006 -1.0798920E-006
qy   +2.0050480E-006 +1.1079060E-006
qz   +1.2995890E-006

Rov:M04 Ref:M01 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.2 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.8010
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.4448720E-006 -2.2647030E-006 -1.4563800E-006
qy   +3.1894360E-006 +1.9066300E-006
qz   +1.7062520E-006

Rov:M05 Ref:M01 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.3 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.7944
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.1298200E-006 -2.2657800E-006 -9.1165600E-007
qy   +2.7636240E-006 +1.0293580E-006
qz   +8.2132100E-007

Rov:M07 Ref:M01 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.4 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5754
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +5.1845280E-006 -3.6820210E-006 -1.9267380E-006
qy   +3.3637820E-006 +1.8011410E-006
qz   +1.8946140E-006

Rov:M08 Ref:M01 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.5 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5360
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.5914850E-006 -2.5281810E-006 -1.8120380E-006
qy   +3.2205610E-006 +1.6966700E-006
qz   +1.6741530E-006

Rov:M10 Ref:M02 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.6 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3508
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.0371570E-006 -2.1066970E-006 -9.0141100E-007
qy   +3.8434800E-006 +1.5460320E-006
qz   +1.3160630E-006

Rov:M06 Ref:M02 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.7 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6193
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.3938590E-006 -2.4114650E-006 -6.9867100E-007
qy   +4.0032660E-006 +9.6591500E-007
qz   +8.1430800E-007

Rov:M11 Ref:M02 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.8 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3032
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.3327270E-006 -3.0303990E-006 -2.1184670E-006
qy   +3.8811020E-006 +2.6157880E-006
qz   +2.4890020E-006

Rov:M04 Ref:M03 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.9 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.8436
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.1342970E-006 -2.0226400E-006 -1.2039980E-006
qy   +3.1614960E-006 +1.6741850E-006
qz   +1.4096950E-006

Rov:M06 Ref:M03 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.10 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.8897
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.6642680E-006 -3.1739570E-006 -8.9478100E-007
qy   +5.1950290E-006 +1.6028140E-006
qz   +1.1279060E-006

Rov:M07 Ref:M03 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.11 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5853
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.2804370E-006 -1.8238200E-006 -9.0742800E-007
qy   +2.8060860E-006 +1.0798160E-006
qz   +9.7895100E-007

Rov:M10 Ref:M03 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.12 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.7431
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +6.3313940E-006 -4.3849780E-006 -1.5305010E-006
qy   +3.6757710E-006 +1.2294260E-006
qz

Rov:M07 Ref:M04 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.13 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6760
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.4809860E-006 -2.8820960E-006 -9.4914400E-007
qy   +5.0626160E-006 +1.5265000E-006
qz   +1.0407500E-006

Rov:M13 Ref:M05 Amb:Y Proc: L1 phase
BL_VC.14 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.4209
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +4.6374780E-006 -3.0769330E-006 -1.2434420E-006
qy   +2.7973070E-006 +1.0195980E-006
qz   +9.8243200E-007

Rov:M08 Ref:M05 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.16 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6071
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.0997270E-006 -2.2009210E-006 -8.7014300E-007
qy   +3.8610360E-006 +1.2816860E-006
qz   +1.0006660E-006

Rov:M13 Ref:M05 Amb:Y Proc: L1 phase
BL_VC.16 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3007
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +6.9773560E-006 -4.7171160E-006 -1.6828650E-006
qy   +3.9274820E-006 +1.3214360E-006
qz   +1.1376510E-006

Rov:M08 Ref:M05 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.17 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3645
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +6.1115940E-006 -4.2136220E-006 -2.0630650E-006
qy   +3.7115990E-006 +1.8702130E-006
qz   +1.9542940E-006

Rov:M07 Ref:M06 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.18 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.7520
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.5183450E-006 -2.3682940E-006 -1.1060920E-006
qy   +2.4871850E-006 +9.8514700E-007
qz   +1.0050130E-006

Rov:M06 Ref:M07 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.19 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6778
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.7846410E-006 -2.2120510E-006 -1.5018590E-006
qy   +3.2786690E-006 +2.7924090E-006
qz   +3.8461410E-006

Rov:M04 Ref:M08 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.20 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6201
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.4072970E-006 -2.5200510E-006 -1.5665240E-006
qy   +3.3068890E-006 +1.5680820E-006
qz   +1.3627750E-006

Rov:M04 Ref:M08 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.21 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6302
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.5896770E-006 -1.8847350E-006 -9.5311500E-007
qy   +2.5264960E-006 +1.0093530E-006
qz   +9.9187400E-007

Rov:M13 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.22 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3403
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.4075110E-006 -2.0398560E-006 -9.2756400E-007
qy   +3.1970420E-006 +1.1631100E-006
qz   +1.0165590E-006

Rov:M04 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.23 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5386
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.3392590E-006 -2.3035240E-006 -1.6546820E-006
qy   +3.1224520E-006 +2.4962700E-006
qz   +3.1823600E-006

Rov:M05 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.24 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3127
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.4214130E-006 -4.7373460E-006 -1.3346950E-006
qy   +8.4507120E-006 +2.4570480E-006
qz   +1.4013660E-006

Rov:M08 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.25 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3276
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.6866020E-006 -2.2423050E-006 -1.1289150E-006
qy   +3.2517100E-006 +2.0114830E-006
qz   +2.5286120E-006

Rov:M10 Ref:M09 Amb:Y Proc: L1 phase
BL_VC.26 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3697
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.3195780E-006 -2.2587130E-006 -1.2543460E-006
qy   +3.9819100E-006 +1.8636500E-006
qz   +1.4778710E-006

Rov:M11 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.27 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.4566
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +5.0473070E-006 -4.3673410E-006 -3.3884130E-006
qy   +4.8906550E-006 +3.8328060E-006
qz   +4.0438990E-006

Rov:M12 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.28 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.2834
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +6.2768310E-006 -4.2214430E-006 -1.5278610E-006
qy   +3.5478310E-006 +1.2045430E-006
qz   +1.0529660E-006

Rov:M03 Ref:M09 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.29 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.5618
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.8928040E-006 -2.2080150E-006 -1.0364840E-006
qy   +2.9936890E-006 +1.0690440E-006
qz   +1.1097320E-006

Rov:M11 Ref:M10 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.30 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.2615
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.2884240E-006 -2.3503360E-006 -1.6211800E-006
qy   +3.0549150E-006 +1.5603610E-006
qz   +1.4899050E-006

Rov:M06 Ref:M10 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.31 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.6892
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +3.1088580E-006 -2.0641020E-006 -1.3006920E-006
qy   +2.5333150E-006 +1.4056410E-006
qz   +1.6611630E-006

Rov:M13 Ref:M12 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.32 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3843
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +4.8859560E-006 -3.6337290E-006 -2.1654820E-006
qy   +3.5148070E-006 +2.1517880E-006
qz   +2.2958340E-006

Rov:M11 Ref:M12 Amb:Y Proc: L1 phase
BL_VC.33 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3668
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +2.6257670E-006 -2.4394830E-006 -1.5636350E-006
qy   +3.4687650E-006 +2.0676310E-006
qz   +1.8442960E-006

Rov:M09 Ref:M12 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.34 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.2673
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +1.9875890E-006 -1.5206270E-006 -7.5945400E-007
qy   +2.1989950E-006 +8.5749400E-007
qz   +8.0793600E-007

Rov:M11 Ref:M12 Amb:Y Proc: L1 phase
BL_VC.35 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3466
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +6.1591150E-006 -4.2581610E-006 -1.7064960E-006
qy   +3.6372760E-006 +1.4401170E-006
qz   +1.3532830E-006

Rov:M13 Ref:M12 Amb:Y* Proc: L1 phase
BL_VC.36 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----
a posteriori rms : 0.3149
Co-factor matrix (upper triangle [m*m]) :
                  qx   qy   qz
qx +5.0260820E-006 -4.2311630E-006 -3.2923680E-006
qy   +4.5839560E-006 +3.6277530E-006
qz   +3.9194190E-006

Resultado do processamento no Ashtech Solution

Processed Vectors

rede campus II

Vector Stage: Processed **Date:**
 12/15/04
Horizontal Coordinate System: Univ. Transverse Merc. (S) **Project**
file: rede campus II.spr
Height System: Ellips. Ht.
Desired Horizontal Accuracy: 0.010m + 2ppm
Desired Vertical Accuracy: 0.020m + 2ppm
Confidence Level: 95% Err.
Linear Units of Measure: Meters

<u>PDOP</u>	<u>Vector Identifier</u>	<u>Vector Length</u>	<u>95% Error</u>		<u>Vector Components</u>	<u>95% Error</u>	<u>Process QA</u>	<u>SVs</u>
	<u>Meas. Type</u>							
1 1.8	M09_-M13_ 11/26 15:40 L1 GPS	234.429	0.005	X	-181.312	0.002	pass	7
				Y	-104.032	0.003		
				Z	-106.115	0.003		
2 2.5	M09_-M04_ 11/26 17:39 L1 GPS	300.425	0.007	X	131.724	0.003	pass	6
				Y	219.134	0.004		
				Z	-157.748	0.005		
3 2.6	M09_-M05_ 11/26 16:18 L1 GPS	265.698	0.007	X	-183.572	0.002	pass	6
				Y	-57.498	0.004		
				Z	-183.278	0.005		
4 1.8	M09_-M08_ 11/26 16:58 L1 GPS	258.917	0.005	X	11.128	0.002	pass	7
				Y	142.432	0.004		
				Z	-215.933	0.003		
5 3.0	M09_-M10_ 11/26 13:17 L1 GPS	311.991	0.006	X	225.555	0.002	pass	6
				Y	119.625	0.003		
				Z	179.314	0.005		
6 2.8	M09_-M11_ 11/26 14:05 L1 GPS	328.713	0.009	X	118.197	0.003	pass	6
				Y	-49.367	0.004		
				Z	302.729	0.008		
7 2.6	M09_-M12_ 11/26 14:55 L1 GPS	135.589	0.005	X	-65.285	0.002	pass	6
				Y	-98.684	0.003		
				Z	66.211	0.004		
8 1.8	M09_-M03_ 11/26 18:22 L1 GPS	334.337	0.008	X	244.927	0.003	pass	7
				Y	226.259	0.005		
				Z	24.468	0.005		
9 2.2	M11_-M10_ 12/01 12:19 L1 GPS	235.191	0.004	X	107.360	0.002	pass	7
				Y	168.991	0.002		
				Z	-123.413	0.003		
10 2.8	M12_-M11_ 12/01 13:13 L1 GPS	303.375	0.006	X	183.480	0.002	pass	6
				Y	49.310	0.003		
				Z	236.517	0.005		

11	M12_-M13_ 12/01 13:59	207.823	0.006	X	-116.039	0.002	pass	7
2.6	L1 GPS			Y	-5.352	0.003		
				Z	-172.327	0.005		
12	M13_-M05_ 12/01 14:42	90.137	0.006	X	-2.258	0.002	pass	7
2.3	L1 GPS			Y	46.537	0.004		
				Z	-77.161	0.004		
13	M05_-M08_ 12/01 15:24	280.978	0.007	X	194.702	0.003	pass	8
1.9	L1 GPS			Y	199.934	0.004		
				Z	-32.651	0.005		
14	M03_-M04_ 12/07 12:38	214.637	0.010	X	-113.212	0.004	pass	6
2.8	L1 GPS			Y	-7.126	0.005		
				Z	-182.212	0.008		
15	M03_-M06_ 12/07 15:37	339.959	0.013	X	185.060	0.004	pass	7
2.2	L1 GPS			Y	5.110	0.008		
				Z	285.129	0.009		
16	M03_-M07_ 12/07 14:48	245.570	0.007	X	-31.449	0.003	pass	6
1.8	L1 GPS			Y	98.402	0.004		
				Z	-222.784	0.005		
17	M03_-M10_ 12/07 13:57	189.017	0.012	X	-19.378	0.004	pass	6
2.7	L1 GPS			Y	-106.644	0.008		
				Z	154.851	0.008		
18	M06_-M07_ 12/07 16:28	559.962	0.009	X	-216.507	0.004	pass	7
2.1	L1 GPS			Y	93.297	0.006		
				Z	-507.915	0.006		
19	M06_-M10_ 12/07 17:12	266.940	0.009	X	-204.448	0.004	pass	7
1.8	L1 GPS			Y	-111.736	0.005		
				Z	-130.280	0.006		
20	M06_-M02_ 12/07 17:57	157.923	0.008	X	-23.022	0.003	pass	6
2.0	L1 GPS			Y	-96.568	0.006		
				Z	122.818	0.005		
21	M02_-M10_ 12/07 18:41	311.772	0.005	X	-181.417	0.002	pass	7
1.7	L1 GPS			Y	-15.185	0.003		
				Z	-253.099	0.003		
22	M04_-M08_ 12/07 11:49	154.316	0.007	X	-120.603	0.003	pass	7
2.1	L1 GPS			Y	-76.700	0.004		
				Z	-58.184	0.005		
23	M09_-M12_ 12/08 14:37	135.589	0.003	X	-65.280	0.002	pass	7
1.9	L1 GPS			Y	-98.687	0.002		
				Z	66.210	0.002		
24	M12_-M11_ 12/08 13:47	303.373	0.006	X	183.473	0.002	pass	7
2.6	L1 GPS			Y	49.314	0.004		
				Z	236.519	0.004		

25	M02_-M11_ 12/08 12:56	366.233	0.005	X	-288.763	0.002	pass	6
2.8	L1 GPS			Y	-184.180	0.002		
				Z	-129.692	0.004		
26	M01_-M13_ 12/09 10:04	472.763	0.007	X	-147.084	0.003	pass	6
2.2	L1 GPS			Y	-314.377	0.004		
				Z	320.997	0.006		
27	M01_-M04_ 12/09 12:39	316.505	0.010	X	165.958	0.004	pass	6
2.7	L1 GPS			Y	8.790	0.005		
				Z	269.363	0.008		
28	M01_-M05_ 12/09 11:03	391.790	0.010	X	-149.336	0.004	pass	8
2.0	L1 GPS			Y	-267.855	0.006		
				Z	243.828	0.007		
29	M01_-M07_ 12/09 13:32	356.065	0.008	X	247.723	0.003	pass	7
2.6	L1 GPS			Y	114.325	0.005		
				Z	228.791	0.006		
30	M01_-M08_ 12/09 11:49	226.420	0.006	X	45.364	0.003	pass	8
2.1	L1 GPS			Y	-67.912	0.003		
				Z	211.178	0.005		
31	M06_-M07_ 12/09 14:17	559.953	0.011	X	-216.505	0.005	pass	7
2.0	L1 GPS			Y	93.294	0.006		
				Z	-507.907	0.007		
32	M07_-M04_ 12/09 14:59	139.525	0.007	X	-81.765	0.003	pass	8
2.1	L1 GPS			Y	-105.525	0.004		
				Z	40.574	0.005		
33	M12_-M13_ 12/10 13:11	207.821	0.007	X	-116.037	0.002	pass	6
2.9	L1 GPS			Y	-5.352	0.003		
				Z	-172.326	0.006		
34	M13_-M05_ 12/10 13:55	90.133	0.005	X	-2.251	0.002	pass	6
2.6	L1 GPS			Y	46.525	0.004		
				Z	-77.165	0.004		
35	M04_-M08_ 12/12 14:19	154.314	0.008	X	-120.602	0.004	pass	7
1.8	L1 GPS			Y	-76.700	0.004		
				Z	-58.181	0.006		
36	M05_-M08_ 12/12 13:28	280.976	0.006	X	194.702	0.002	pass	7
2.7	L1 GPS			Y	199.930	0.004		
				Z	-32.660	0.004		

ANEXO F –COORDENADAS TOPOGRÁFICAS DA REDE

Tabela 1 Coordenadas Topográficas da Rede nas Três Estratégias

	Estratégia 1		Estratégia 2		Estratégia 3	
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)
M01	149723,106	249071,316	149723,106	249071,315	149723,107	249071,316
M02	150000,000	250000,000	150000,000	250000,000	150000,000	250000,000
M03	149941,001	249555,655	149940,997	249555,654	149941,001	249555,655
M04	149852,189	249360,275	149852,186	249360,275	149852,190	249360,276
M05	149432,779	249334,388	149432,778	249334,386	149432,783	249334,388
M06	150081,796	249865,052	150081,795	249865,051	150081,797	249865,051
M07	149983,594	249313,836	149983,592	249313,835	149983,595	249313,836
M08	149711,274	249297,385	149711,271	249297,385	149711,275	249297,386
M09	149607,578	249534,408	149607,575	249534,407	149607,579	249534,408
M10	149855,161	249724,017	149855,159	249724,017	149855,164	249724,017
M11	149662,236	249858,488	149662,232	249858,487	149662,237	249858,488
M12	149492,997	249606,852	149492,994	249606,851	149492,997	249606,853
M13	149403,276	249419,438	149403,274	249419,438	149403,278	249419,439

ANEXO G- DESVIO PADRÃO DAS ESTAÇÕES RELATIVAS

Desvio padrão em X Y e Z (WGS-84) das estações relativas obtidas no Ski-Pro

Figura 1 Desvio padrão em X Y e Z (WGS-84) das estações relativas obtidas no Ashtech Solution

Valor em X
  Valor em Y
  Valor em Z

ANEXO H – MONOGRAFIAS DOS MARCOS DA REDE

NOME: M01
TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.
MUNICÍPIO: SÃO CARLOS
UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 18,4533" S		
Longitude	47° 55' 52,9664" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.723,106		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.071,315		
Sigma X (m)	0,003		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	840,35

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BASE DE CONCRETO EM QUE NO CENTRO CONTÉM UMA ESTRUTURA PIRAMIDAL. EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. PRÓXIMO AO PONTO ENCONTRA-SE UM PILAR DE CONCRETO PARA IDENTIFICAÇÃO DO MARCO BASE DO CAMPUS.
ITINERÁRIO
O PONTO M03 LOCALIZA-SE PRÓXIMO A QUARTA TORRE CONTANDO A PARTIR DA ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS.

NOME: M02**TIPO:** ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.**MUNICÍPIO:** SÃO CARLOS**UF:** SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	21° 59' 48,2644" S		
Longitude	47° 55' 43,3140" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	150.000,000	Altitude Geométrica (m)	844,43
TOPOGRÁFICA (Y)	250.000,000		
Sigma X (m)	0,000		
Sigma Y (m)	0,000		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BASE DE CONCRETO EM QUE NO CENTRO CONTÉM UMA ESTRUTURA PIRAMIDAL. EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. PRÓXIMO AO PONTO ENCONTRA-SE UM PILAR DE CONCRETO PARA IDENTIFICAÇÃO DO MARCO BASE DO CAMPUS.
ITINERÁRIO
O PONTO M02 LOCALIZAVA-SE RÓXIMO À ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS. POSSUIA EM SUAS PROXIMIDADES UMA IDENTIFICAÇÃO DE CONCRETO.
OBSERVAÇÃO
O PONTO M02 FOI DESTRUÍDO NA CONSTRUÇÃO DO CAMPUS II.

NOME: M03
TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.
MUNICÍPIO: SÃO CARLOS
UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 02,7089" S		
Longitude	47° 55' 45,3706" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.940,997		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.555,654		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	833,62

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BASE DE CONCRETO EM QUE NO CENTRO CONTÉM UMA ESTRUTURA PIRAMIDAL. EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO.
ITINERÁRIO
O PONTO M06 ESTÁ LOCALIZADO SOBRE A TERCEIRA TORRE LOGO APÓS A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS.

NOME: M04

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 09,0601" S		
Longitude	47° 55' 48,4665" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.852,186	Altitude Geométrica (m)	836,47
TOPOGRÁFICA (Y)	249.360,275		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BASE DE CONCRETO EM QUE NO CENTRO CONTÉM UMA ESTRUTURA PIRAMIDAL. EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO.
ITINERÁRIO
O PONTO M04 ESTÁ LOCALIZADO SOBRE A TERCEIRA TORRE LOGO APÓS A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS.

NOME: M05
TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE
TOPOGRÁFICA LOCAL.
MUNICÍPIO: SÃO CARLOS
UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 09,9013" S		
Longitude	47° 56' 03,0867" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.432,778	Altitude Geométrica (m)	840,57
TOPOGRÁFICA (Y)	249.334,386		
Sigma X (m)	0,003		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
OBSERVAÇÃO
ESTE PONTO ENCONTRA-SE DESTRUÍDO. FOI ARRANCADO NO PERÍODO DE CONSTRUÇÃO DO CAMPUS II.

NOME: M06

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	21° 59' 52,6512" S		
Longitude	47° 55' 40,4628" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	150.081,795		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.865,051		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	838,28

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BASE DE CONCRETO EM QUE NO CENTRO CONTÉM UMA ESTRUTURA PIRAMIDAL. EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO.
ITINERÁRIO
O PONTO M06 ESTÁ LOCALIZADO SOBRE A PRIMEIRA TORRE LOGO APÓS A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS.

NOME: M07

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 10,5697" S		
Longitude	47° 55' 43,8859" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.983,592		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.313,835		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	829,82

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
O PONTO ESTA LOCALIZADO PROXIMO A GHIA EM FRENTE AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AMBIENTAL.

NOME: M08

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 11,1044" S		
Longitude	47° 55' 53,3787" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.711,271		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.297,385		
Sigma X (m)	0,003		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	836,14

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
O PONTO ESTA LOCALIZADO PROXIMO A GHIA DO LADO DIREITO DO PAVILHÃO DE AULA NO SENTIDO DA ÁREA DE PRESERVAÇÃO.

NOME: M09**TIPO:** ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.**MUNICÍPIO:** SÃO CARLOS**UF:** SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 03,3994" S	Altitude Geométrica (m)	842,36
Longitude	47° 55' 56,9932" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.607,575		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.534,407		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,003		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
OBSERVAÇÃO
PONTO DESTRUÍDO POR TRATOR QUANDO REALIZANDO TERRAPLANAGEM

NOME: M10

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	21° 59' 57,2359" S		
Longitude	47° 55' 48,3628" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.855,159		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.724,017		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,003		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	836,98

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
PASSANDO A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS II DA USP SEGUE ATÉ A SEGUNDA ROTATÓRIA . DAÍ VIRA A DIREITA EM SENTIDO À CAIXA D'ÁGUA. O PONTO ENCONTRA-SE LOGO APÓS A PRIMEIRA CURVA.

NOME: M11
TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE
 TOPOGRÁFICA LOCAL.
MUNICÍPIO: SÃO CARLOS
UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	21° 59' 52,8645" S		
Longitude	47° 55' 55,0878" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.662,232		
TOPOGRÁFICA (Y)	249.858,487		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		
		Altitude Geométrica (m)	840,37

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
PASSANDO A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS II DA USP SEGUE ATÉ A SEGUNDA ROTATÓRIA . DAÍ VIRA A DIREITA EM SENTIDO À CAIXA D'AGUA ATÉ A ROTATÓRIA SEGUINTE. O PONTO M11 ESTÁ LOCALIZADO NO CENTRO DESTA ROTATÓRIA.
OBSERVAÇÃO
ESTE PONTO ENCONTRA-SE DESTRUÍDO. FOI ARRANCADO NO PERÍODO DE CONSTRUÇÃO DO CAMPUS II.

NOME: M12

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 01,0444" S		
Longitude	47° 56' 00,9874' W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.492,994	Altitude Geométrica (m)	848,93
TOPOGRÁFICA (Y)	249.606,851		
Sigma X (m)	0,002		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
PASSANDO A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS II DA USP SEGUE ATÉ A SEGUNDA ROTATÓRIA . DAÍ VIRA A DIREITA EM SENTIDO A CAIXA D'AGUA DO CAMPUS. O PONTO M12 ESTÁ LOCALIZADO NO CENTRO DA ROTATÓRIA EM FRENTE À CAIXA D'AGUA DO CAMPUS.

NOME: M13

TIPO: ESTAÇÃO PLANIMÉTRICA – REDE TOPOGRÁFICA LOCAL.

MUNICÍPIO: SÃO CARLOS

UF: SP

DADOS PLANIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	22° 00' 07,1366" S		
Longitude	47° 56' 04,1151" W		
Fonte	GPS Topográfico		
Datum	WGS-84		
TOPOGRÁFICA (X)	149.403,274	Altitude Geométrica (m)	845,09
TOPOGRÁFICA (Y)	249.419,438		
Sigma X (m)	0,003		
Sigma Y (m)	0,004		
MC	-45		

LOCALIZAÇÃO
CAMPUS II DA USP,BAIRRO SANTA ANGELINA. MUNICIPIO DE SAO CARLOS/SP
DESCRIÇÃO
A ESTACAO E MATERIALIZADA POR UMA BARRA CILINDRICA DE 10 cm DE DIAMETRO ONDE EM SUA PARTE SUPERIOR ESTÁ FIXADA UMA PLACA DE METAL COM A NUMERAÇÃO DO PONTO. EM SUA PROXIMIDADE ESTÁ UM PIQUETE DE MADEIRA PINTADO EM VERMELHO.
ITINERÁRIO
PASSANDO A ENTRADA PRINCIPAL DO CAMPUS II DA USP SEGUE ATÉ A SEGUNDA ROTATÓRIA . DAÍ VIRA A DIREITA EM SENTIDO A CAIXA D'AGUA DO CAMPUS. O PONTO M13 ESTÁ PRÓXIMO À GUIA, NA MARGEM DIREITA EM SENTIDO A ÁREA DE RESERVA E A APROXIMADAMENTE 120 M DO CENTRO DA ROTATÓRIA LOCALIZADO EM FRENTE À CAIXA D'ÁGUA.

APENDICE I - PARÂMETROS ESTOCÁSTICOS DO AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO

Expressões das funções dos vetores: observação $\mathbf{I}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{X}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{V}}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{L}_a \\ \hat{\mathbf{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{I}$$

$$f = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{I}$$

Expressão das Matrizes co-fator das funções: observação $\mathbf{I}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{X}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{V}}$,

$$\mathbf{Q}_{ff} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}_{ll} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$$

Substituindo as expressões dos coeficientes das funções: observação $\mathbf{I}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{X}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{V}}$, e executando a seqüência de cálculos, tem-se:

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$Q_{rr} = \begin{pmatrix} P^{-1} & AN^{-1} & AN^{-1}A^T & AN^{-1}A^T - P^{-1} \\ N^{-1}A^T & N^{-1}A^T P A N^{-1} & N^{-1}A^T P A N^{-1}A^T & N^{-1}A^T P A N^{-1}A^T - N^{-1}A^T \\ AN^{-1}A^T & AN^{-1}A^T P A N^{-1} & AN^{-1}A^T P A N^{-1}A^T & AN^{-1}A^T P A N^{-1}A^T - AN^{-1}A^T \\ \overline{Q} - P^{-1} & AN^{-1}A^T P A N^{-1} - AN^{-1} & AN^{-1}A^T P A N^{-1}A^T - AN^{-1}A^T & AN^{-1}A^T P A N^{-1}A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q_{rr} = \begin{pmatrix} P^{-1} & AN^{-1} & \overline{Q} & \overline{Q} - P^{-1} \\ N^{-1}A^T & N^{-1} & N^{-1}A^T & N^{-1}A^T - N^{-1}A^T \\ \overline{Q} & AN^{-1} & \overline{Q} & \overline{Q} - \overline{Q} \\ \overline{Q} - P^{-1} & AN^{-1} - AN^{-1} & AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T & AN^{-1}A^T - 2 \cdot AN^{-1}A^T + P^{-1} \end{pmatrix}$$

Matriz das funções Co-fator do ajustamento Paramétrico

$$Q_{rr} = \begin{pmatrix} P^{-1} & AN^{-1} & \overline{Q} & \overline{Q} - P^{-1} \\ N^{-1}A^T & N^{-1} & N^{-1}A^T & 0 \\ \overline{Q} & AN^{-1} & \overline{Q} & 0 \\ \overline{Q} - P^{-1} & 0 & 0 & P^{-1} - \overline{Q} \end{pmatrix}$$

Elementos diagonais da matriz função co-fator:

$$Q_{rr} = P^{-1} \quad Q_{xx} = N^{-1} \quad Q_{LL} = \overline{Q} = AN^{-1}A^T$$

$$Q_{vv} = P^{-1} - \overline{Q} = Q_{rr} - \overline{Q}$$

Elementos não-diagonais da matriz função co-fator:

$$Q_{rx} = AN^{-1}$$

$$Q_{rL} = \overline{Q} = AN^{-1}A^T$$

$$Q_{rv} = \overline{Q} - P^{-1} = \overline{Q} - Q_{rr}$$

$$Q_{vL} = \overline{Q} - P^{-1} = \overline{Q} - Q_{rr}$$

$$Q_{xL} = N^{-1}A^T \quad Q_{xL} = N^{-1}A^T \quad Q_{xv} = 0$$

Verificação

$$Q_{rv} = Q_{rL} - Q_{rr} = \overline{Q} - Q_{rr}$$

$$Q_{xv} = Q_{xL} - Q_{xL} = N^{-1}A^T - N^{-1}A^T = 0$$

$$Q_{Lv} = Q_{LL} - Q_{Lr} = \overline{Q} - \overline{Q} = 0$$

$$Q_{vv} = 0 - (\overline{Q} - P^{-1})$$

APÊNDICE II - NÚMERO DE REDUNDÂNCIA E REDUNDÂNCIA TOTAL DO AJUSTAMENTO

A equação $r = n - u$ é deduzida da seguinte forma:

$$r = \sum_{i=1}^n r_i = \text{traço} (\mathbf{Q}_{VV} \cdot \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{R}) = \text{traço} (\mathbf{Q}_{VV} \cdot \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{I}) - \text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

Pela propriedade cíclica dos traços, $\text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{traço} (\mathbf{B} \mathbf{A})$, tem-se:

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})$$

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N})$$

$$r = n - u$$

APENDICE III – MONOGRAMAS DE BAARDA

Potência do teste de 70%

Potência do teste de 90%