**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES**

**Confiabilidade de Rede GPS de Referência
Cadastral Municipal - Estudo de Caso: Rede do
Município de Vitória (ES)**

Geraldo Passos Amorim

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil: Transportes.

Orientador: Prof. Associado Paulo Cesar Lima Segantine

São Carlos - SP
2004

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

A524c Amorim, Geraldo Passos
Confiabilidade de rede GPS de referência cadastral
municipal : estudo de caso : rede do município de Vitória
(ES) / Geraldo Passos Amorim. -- São Carlos, 2004.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2004.

Área: Transportes

Orientador: Prof. Assoc. Paulo Cesar Lima Segantine.

1. Rede de referência cadastral. 2. Ajustamento de
rede. 3. Confiabilidade. 4. Teste de hipóteses. 5. Elipse
de erros. 6. Detecção de outliers. 7. Erros grosseiros.
8. Resíduos normalizados. 9. Teste data snooping.
I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GERALDO PASSOS AMORIM**

Dissertação defendida e julgada em 25-03-2004 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Assoc. **PAULO CÉSAR LIMA SEGANTINI** (Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **IRINEU DA SILVA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **SEGUNDO CARLOS LOPES**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Aprovado

Prof. Assoc. **JOSÉ REYNALDO ANSELMO SETTI**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Transportes

Profa. Assoc. **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

DEDICATÓRIA

A meus pais Mauricio e Annita

A minha esposa Rita

A meus filhos: Vinicius e Gabriela

A meus irmãos: Jader, Emilia, Emiliana, Mauricinho e Vera Lucia

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo que tem me permitido viver.

À minha esposa Rita pela compreensão e o apoio irrestrito no período de ausência para os estudos.

Aos meus pais Mauricio e Annita pelos ensinamentos de respeito ao próximo, o caráter e a honestidade.

Ao meu orientador e conterrâneo Prof. Dr. Paulo César Lima Segantine pela oportunidade, apoio, orientação e sugestões para realização deste trabalho.

A meu irmão Jader pelo grande incentivo e apoio para o sucesso desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Ricardo Ernesto Schaal pelos ensinamentos extra-sala de aula que enriqueceram meus conhecimentos, em especial, pelo apoio prestado na fase de análise e conclusão desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Irineu da Silva pela sugestão do estudo da teoria de confiabilidade de redes.

Aos funcionários do Departamento de Transportes da Escola de Engenharia de São Carlos pela presteza e cordialidade do dia-a-dia.

Aos professores do Curso de Geomática do CEFETES pela liberação e absorção de minhas aulas durante o período de afastamento para os estudos de Mestrado, em particular, aos professores: Fardin e Pilon, pela ajuda na coleta de dados de campo.

À Prefeitura Municipal de Vitória por disponibilizar os dados da Rede GPS Cadastral Municipal de Vitória, usados nesta pesquisa.

Aos amigos da Mensuração: Artur, Anderson, Antônio, Ana Paula, Genival, João, Mauricio, Rodrigo, Sérgio, Tule e Uchoa pela amizade e convivência harmoniosa, nestes dois últimos anos.

RESUMO

AMORIM, G. P. (2004). CONFIABILIDADE DE REDE GPS DE REFERÊNCIA CADASTRAL MUNICIPAL. ESTUDO DE CASO: REDE DO MUNICÍPIO DE VITÓRIA (ES). Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

A proposta deste trabalho é estudar as teorias de análise de qualidade de rede GPS, baseando-se nas teorias de confiabilidade de rede propostas por Baarda, em 1968. As hipóteses estatísticas para detecção de “outliers” constituem a base desse estudo, pois são fundamentais para elaboração dos testes de detecção de “outliers”, localização e eliminação de erros grosseiros e, também, para a análise da confiabilidade da rede. A confiabilidade, que traduz a controlabilidade da rede e depende do número de redundância, é estudada em dois aspectos: confiabilidade interna e confiabilidade externa. A rede de referência cadastral do município de Vitória – ES, escolhida para o estudo de caso foi estabelecida por GPS, em 2001, tendo como concepção básica a implantação de 37 pares de vértices intervisíveis, privilegiando locais públicos e de livre acesso. Essa rede foi ajustada em 2001 pela Prefeitura Municipal de Vitória, e as coordenadas ajustadas dos vértices são usadas, deste então, para apoiar todos os levantamentos topográficos e cadastrais realizados no município. O ajustamento dessa rede, em 2001, constituiu-se de um ajustamento simples em que os testes estatísticos de detecção de “outliers”, a localização e eliminação dos erros grosseiros não foram levados em conta. A parte prática desta pesquisa compreendeu a medição de 21 novos vetores (linhas bases) para formar uma rede de controle, conforme estabelece a NBR-14166, o ajustamento dessa rede de controle (15 vértices) e o ajustamento da rede principal (78 vértices), tendo por injunção a rede de controle previamente ajustada. A principal diferença entre o ajustamento de 2001, feito pela Prefeitura Municipal de

Vitória, e ajustamento de 2004, feito para esta pesquisa, foi a consideração no novo ajustamento dos testes estatísticos baseados nas teorias de confiabilidade propostas por Baarda. A comparação entre os resultados dos dois ajustamentos da rede cadastral de Vitória não apontou diferenças significativas entre as coordenadas ajustadas.

Palavras-chave: rede de referência cadastral, ajustamento de rede, confiabilidade, teste de hipóteses, elipse de erros, detecção de outliers, erros grosseiros, resíduos normalizados, teste data snooping.

ABSTRACT

AMORIM, G. P. (2004). RELIABILITY OF NETWORK GPS OF MUNICIPAL CADASTRAL REFERENCE. STUDY OF CASE: NETWORK OF THE MUNICIPAL DISTRICT OF VITÓRIA (ES). Dissertation (Master's degree). School College of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2004.

The proposal of this work is to study the theories of analysis of network quality GPS, basing on the theories of reliability network proposed by Baarda, in 1968. The statistical hypotheses for outlier's detection constitute the base of this study, because they are fundamental for elaboration of the tests of outlier's detection tests, location and elimination of observations with gross errors as well as for the analysis of the reliability of the network. The reliability, that translates the controllability of the network and it depends of the redundancy number, it was studied in two aspects: internal reliability and external reliability. The network of cadastral reference of the municipal district of Vitória (ES), chosen for the case study it established by GPS, in 2001. The basic conception of this network was the implantation of 37 pair of vertexes inter-visible, privileging public places (of free access), as sidewalks and central stonemasons. This network adjusted in 2001 by the Municipal City hall of Vitória, and the adjusted coordinates of the vertexes used, of this then, to support all topographical and cadastral survey accomplished in the municipal district. The adjustment of this network, in 2001, constituted of a simple adjustment in that did not take into account the statistical tests of outlier's detection and location and elimination of observations with gross errors. The practical part of this research was constituted of the measurement of 21 new vectors (lines bases) to form a control network, as it establishes NBR-14166, the adjustment of

that control network (15 vertexes) and the adjustment of the main network (78 vertexes), tends previously for injunction the control network adjusted. To principal it differentiates being the adjustment of 2001, done by the Municipal City hall of Vitória, and adjustment of 2004, done for this research; it was the consideration in the new adjustment of the based statistical tests, mainly, in the reliability theories proposed by Baarda. The results of the adjustment of 2001 and of 2004 compared, and it verified that, in the case of the cadastral network of Vitória, there was not significant difference among results found in the two adjustments.

Keywords: network of cadastral reference, network adjustment, reliability, ellipse of error, hypothesis test, outlier's detection, gross errors, normalized residues, data snooping test.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Estações da realização do WGS-84 (G873)	19
Figura 2.2 - Rede de estações do IGS	21
Figura 2.3 - Estrutura do Projeto SIRGAS	23
Figura 2.4 - Realização do SIRGAS 2000	25
Figura 2.5 - Estrutura da RBMC	27
Figura 4.1 - Círculo de Mohr para análise da elipse de erro	51
Figura 4.2 - Outras relações do círculo de Mohr	52
Figura 4.3 - Padrão da elipse para $\sigma_{xy} = 0$	53
Figura 4.4 - Padrões da elipse para $\sigma_{xy} > 0$	53
Figura 4.5 - Padrões da elipse para $\sigma_{xy} < 0$	54
Figura 5.1 - Quadro de decisões e suas probabilidades	59
Figura 5.2 - Representação dos erros Tipo I (α) e Tipo II (β)	59
Figura 6.1 - Regiões de aceitação e rejeição do teste bilateral.....	75
Figura 6.2 - Fluxograma para detecção de “outlier” e erro grosseiro	85
Figura 7.1 - Parâmetro de não-centralidade multidimensional	89
Figura 7.2 - Determinação do erro marginal detectável - teste dos resíduos padronizados	92
Figura 7.3 - Nomograma de Baarda para $\beta_0 = 0,80$	95
Figura 8.1 - Triângulos da Rede Referência Cadastral de Vitória	101
Figura 8.2 - Visualização das 37 bases para apoio topográfico	102
Figura 8.3 - Configuração padrão do nível de significância, potência de teste e valor de compensação do otimismo do processamento GPS (sigma a priori-GPS).....	105

Figura 8.4 - Ajustamento com restrição e ajustamento com restrição com peso	106
Figura 8.5 - Visualização dos novos vetores rede de controle.....	107
Figura 8.6 - Vértices e linhas base da Rede de controle	112
Figura 8.7 - Geometria da Rede principal com as elipses de erro e a confiabilidade externa.	116
Figura 9.1 - Rede de controle ajustada mostrando as elipses de erro e os retângulos de confiabilidade externa.....	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Procedimentos do DGFI e NIMA para processamento da rede SIRGAS	24
Tabela 2.2 – Níveis de precisão cadastral da Suíça	30
Tabela 2.3 - Precisões dos Azimutes de Referência	32
Tabela 7.1 – Valores de parâmetro não - centralidade λ_0 para ($1 - \beta_0 = 0,80$). Fonte: Kuang, 1996	90
Tabela 7.2 -Níveis de significância e Parâmetros de não-centralidade.....	93
Tabela 8.1 – Resumo dos espaçamentos entre as bases	103
Tabela 8.2 - Coordenadas dos pontos de injeção	103
Tabela 8.3 - Parâmetros estatísticos do ajustamento de 2001	104
Tabela 8.4 – Exemplo de observações brutas e suas precisões.....	109
Tabela 8.5 – Parâmetros do ajustamento da rede de controle	111
Tabela 8.6 – Coordenadas da rede de controle ajustadas com o programa MOVE 3, no sistema WGS-84	113
Tabela 8.7 - Parâmetros estatísticos do ajustamento da rede principal	115
Tabela 9.1 – Coordenadas da rede controle (ajustadas em 2004) e as coordenadas ajustadas em 2001 (SAD-69).....	120
Tabela 9.2 – Confiabilidade externa da rede de controle.....	124
Tabela 9.3 – Comparação dos azimutes e as distâncias das bases topográficas dos ajustamentos de 2004 e 2001	133

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 9.1 - Resíduos normalizados de X e Y do ajustamento da rede de controle.....	119
Gráfico 9.2 - Resíduos normalizados em Z do ajustamento final da rede de controle.....	119
Gráfico 9.3 - Diferença entre coordenadas da rede de controle e as coordenadas de 2001	120
Gráfico 9.4 - Comparação da precisão das coordenadas ESTE da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004.....	121
Gráfico 9.5 - Comparação da precisão das coordenadas NORTE da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004 (1,96 x desvio padrão).....	121
Gráfico 9.6 - Comparação da precisão das altura da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004 (1,96 x desvio padrão).....	122
Gráfico 9.7 - Confiabilidade interna da rede de controle.....	122
Gráfico 9.8 - Confiabilidade externa da rede de controle	123
Gráfico 9.9 - Resíduos normalizados da rede principal ajustada em 2001	126
Gráfico 9.10 - Resíduos normalizados da rede ajustada em 2004	127
Gráfico 9.11 - Diferenças das coordenadas Este do processamento 2001 e 2004	127
Gráfico 9.12 - Diferenças das coordenadas Norte do processamento 2001 e 2004	128
Gráfico 9.13 - Diferenças das alturas elipsoidais do processamento 2001 e 2004	128
Gráfico 9.14 - Precisão nas coordenadas Norte dos vértices da rede ajustada em 2004	129
Gráfico 9.15 - Precisão nas coordenadas Norte dos vértices da rede ajustada em 2004	130
Gráfico 9.16 - Precisão na altura dos vértice da rede ajustada em 2004.....	130
Gráfico 9.17 - Confiabilidade externa da rede ajustada em 2004	131

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BTS	Bureau International de L’Heure Terrestrial System
CIGNET	Cooperativa International de GPS Network
CEFETES	Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo
CTS	Conventional Terrestrial System
DGFI	Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
DGH	Datum Astro-geodésico Horizontal
DMA	Defense Mapping Agency, atual NIMA
DoD	Departamento de Defesa dos EUA
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
EOP	Earth Orientation Parameter
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IAG	International Association of Geodesy
ICRS	International Celeste Reference System
IERS	International Earth Rotation Service
IGS	International GPS Service
IPGH	Instituto Pan-Americano de Geografia e História
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
GPS	Global Positioning System

GRS-80	Elipsóide Internacional de referência recomendado pela IUGG em 1980
LLR	Lunar Laser Range
LTM	Local Transversa de Mercator
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
NBR	Normas Brasileiras
NAVSTAR	Navigation Satellite with Time and Ranging
NGS	US National Geodetic Survey
NIMA	National Imagery and Mapping Agency
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RCM	Rede Referência Cadastral Municipal
RRNN	Rede de Referência de Nível
RTM	Regional Transversa de Mercator
SAD-69	South American Datum of 1969
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
SIRGAS	Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
SLR	Satellite Laser Range
TRANSIT	Navy Navigation Satellite System
UTM	Universal Transverso de Mercator
WGS-84	Sistema Geodésico Mundial de 1984 (World Geodetic System 1984)
VLBI	Very Long Baseline Interferometry

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}$	matriz dos coeficientes dos parâmetros da equação das observações
A_i	absorção
E	esperança matemática ou expectância
$F_{\alpha; r1, r2}$	teste da distribuição F de SNEDECOR
H_a	hipótese alternativa
H_0	hipótese nula
$\mathbf{I}$:	matriz Identidade
$\mathbf{L}$	vetor da diferença entre o vetor das observações brutas e o vetor das observações aproximadas
$\mathbf{L}_a$	vetor das observações ajustadas
$\mathbf{L}_b$	vetor das observações brutas
l_a	observação ajustada
l_b	observação bruta
$\mathbf{L}_o$	vetor das observações aproximado, obtido através dos parâmetros aproximados
$\mathbf{N}$	matriz dos coeficientes dos parâmetros desconhecidos da equação normal
$\mathbf{N}^{-1}$	matriz dos co-fatores dos parâmetros ajustados ($\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$)
$N(\mu, \sigma)$	distribuição normal
$n(0, 1)$	distribuição normal reduzida

n	número de observações
$\mathbf{P}$	peso das observações
p_i	peso da i -ésima observação (elemento diagonal da matriz $\mathbf{P}$)
$\mathbf{R}$:	matriz com informações sobre a geometria da rede ($\mathbf{R} = \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$)
r	redundância total ($r = n - u$)
r_i	número de redundância (elemento da diagonal da matriz $\mathbf{R}$)
$(1 - r_i)$	número de absorção
$\mathbf{Q}_{ll}$	matriz dos co-fatores dos pesos das observações ($\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$)
$\overline{\mathbf{Q}}_{ll}$	matriz dos co-fatores das observações ajustadas
$\mathbf{Q}_{vv}$	matriz dos co-fatores dos resíduos
$\mathbf{Q}_{xx}$	matriz dos co-fatores dos parâmetros ajustados (igual a $\mathbf{N}^{-1}$)
q_{vv}	elementos da diagonal da matriz co-fator dos resíduos
q_{ll}	elementos da diagonal da matriz co-fator das observações brutas
$\overline{q}_{ll}$	elementos da diagonal da matriz co-fator das observações ajustadas
t_r	distribuição t de Student
u	número de parâmetros desconhecidos
$\hat{\mathbf{V}}$	vetor dos resíduos
$\tilde{v}_i$	resíduos individuais correspondentes aos erros aleatórios e grosseiros
$\hat{v}_i$	resíduos individuais correspondentes aos erros aleatórios
$\mathbf{X}$	vetor correção dos parâmetros desconhecidos
$\mathbf{X}_a$	vetor dos parâmetros desconhecidos ajustados
$\mathbf{X}_o$	vetor dos parâmetros desconhecidos aproximados
x, y, z	coordenadas cartesianas do ponto nos eixos X, Y, Z
w_i	resíduo normalizado da i -ésima observação
$\tilde{w}$	resíduos normalizados devidos de erro grosseiro

α	nível de significância do teste estatístico multidimensional
α_o	nível de significância do teste estatístico unidimensional
β	probabilidade do erro tipo II em testes multidimensionais
β_o	probabilidade do erro tipo II em testes unidimensionais
$1 - \beta$	potência do teste de hipótese
$\chi^2(r, \alpha)$	distribuição qui-quadrado
∇_l	vetor erro grosseiro
∇_{l_i}	erro grosseiro individual
∇_{oli}	erro marginal detectável
∇_{xoi}	efeito de erro grosseiro não detectável em uma observação nas coordenadas de um vértice.
∇v_i	resíduos correspondentes ao vetor erros grosseiro ∇_l
δ_o	parâmetro de não-centralidade do teste unidimensional ($\delta_o = \sqrt{\lambda_o}$)
λ_o	parâmetro de não-centralidade do teste global
γ_{oi}	indicador da confiabilidade externa global
μ	média populacional
$\hat{\mu}$	média amostral
σ^2	variância populacional
$\hat{\sigma}^2$	variância amostral
σ_o^2	variância “a priori”
$\tilde{\sigma}_o^2$	variância “a priori” incorreta
$\hat{\sigma}_o^2$	variância “a posteriori”
σ_x^2, σ_y^2	variância das coordenadas ajustadas X e Y
σ_{xy}	covariância x,y

σ_{l_i}	desvio padrão da i -ésima observação
σ_{v_i}	desvio padrão do resíduo da i -ésima observação
$\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$	desvio padrão do resíduo da i -ésima observação estimada através da variância a posteriori $\hat{\sigma}_o^2$
Σ_{ll}	matriz variância-covariância das observações
$\hat{\Sigma}_{ll}$	matriz variância-covariância das observações escalonadas
$\Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$	matriz variância-covariância dos resíduos
$\tilde{\Sigma}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$	matriz variância-covariância dos resíduos incorreta
$\Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$	matriz variância-covariância dos parâmetros desconhecidos e das coordenadas ajustadas
ψ	ângulo do semi-eixo principal da elipse de erro
τ_r	distribuição τ (tau)

SUMÁRIO

Resumo.....	i
Abstract.....	iii
Lista de Ilustrações	v
Lista de tabelas.....	vii
Lista de Gráficos	viii
Lista de abreviaturas e siglas	ix
Lista de símbolos	xi
Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Generalidades	1
1.2 O Problema.....	3
1.3 Justificativa.....	4
1.4 Objetivos	5
Capítulo 2 - Redes Geodésicas.....	6
2.1 Introdução.....	6
2.2 Redes Geodésicas Clássicas	7
2.2.1 Redes Geodésicas Horizontais	8
2.2.2 Redes Geodésicas Verticais	11
2.3 Redes Geodésicas Modernas	12
2.3.1 Sistema de Referência Modernos	13
2.3.2 Redes Mundiais	15

2.3.3 Sistema Geodésico Brasileiro – SGB.....	25
2.3.4 Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo – RBMC	26
2.4 Redes Estaduais GPS.....	28
2.5 Redes de Referência Cadastral Municipal.....	29
2.5.1 Conceito de Rede de Referência Cadastral Municipal.....	29
2.5.2 Precisão da Rede de Referência Cadastral Municipal.....	30
2.5.3 Especificações da NBR-14166 para Implantação de Rede GPS	31
2.6 Considerações.....	33
Capítulo 3 - Ajustamento e Precisão de Redes.....	35
3.1 Introdução.....	35
3.2 Modelo Matemático	36
3.2.1 Matriz de Peso	37
3.3 Ajustamento de Observações	38
3.3.1 Equação das observações	39
3.3.2 Equação Normal.....	44
Capítulo 4 - Precisão e Elipses de Erro	47
4.1 Análise Clássica da Elipse de Erro	48
4.2 Análise da Elipse de Erro através do Círculo de Mohr	50
4.3 Padrões das Elipses de Erro.....	52
Capítulo 5 - Hipóteses para Detecção de Erros Grosseiros.....	56
5.1 Teste de Hipóteses.....	56
5.2 Hipóteses para Detecção de Erros Grosseiros	60
5.2.1 Hipótese Nula relacionada às Observações.....	60
5.2.2 Hipóteses Alternativas relacionadas às Observações.....	60
5.2.3 Hipóteses Relacionadas aos Resíduos.....	62
5.3 Detecção “Outlier” e Localização de Erro Grosseiro	64
5.3.1 Resíduos e Detecção de “Outliers”	65
5.3.2 Número de Redundância - r	68
5.3.3 Elementos Não-Diagonais da Matriz R.....	71
Capítulo 6 - Testes para Detecção e Localização de Erros Grosseiros	73

6.1	Teste Global da Variância “a Posteriori”	73
6.1.1	Teste Bilateral	74
6.1.2	Teste Unilateral	76
6.1.3	Análise dos Resultados do Teste Global	76
6.2	Teste “Data Snooping”	79
6.2.1	Detecção de “Outlier”	79
6.2.2	Localização e Eliminação do Erro Grosseiro	81
6.3	Teste Tau - τ	82
6.4	Fluxograma para Detecção de “Outlier” e Eliminação de Erro Grosseiro	84
Capítulo 7 - Confiabilidade de Redes.....		87
7.1	Vetor Erro Marginal Detectável – Teste Global.....	87
7.1.1	Erro Marginal Individual Detectável.....	90
7.2	Erro Marginal Individual Detectável – Teste Unidimensional.....	91
7.3	Consistência entre o Teste Global e o Teste “Data Snooping”	94
7.4	Confiabilidade Interna, Absorção e Confiabilidade Externa.....	95
7.4.1	Confiabilidade Interna.....	95
7.4.2	Absorção	96
7.4.3	Confiabilidade Externa.....	97
Capítulo 8 - Rede de Referência de Vitória		100
8.1	Informações Gerais.....	100
8.1.1	Bases de Apoio Topográfico	102
8.1.2	Processamento e Ajustamento da Rede em 2001	103
8.2	Procedimentos usados no ajustamento da rede em 2004.....	104
8.2.1	Rede de Controle.....	107
8.2.2	Processamento e Ajustamento da Rede de Controle com SKI-Pro	108
8.2.3	Processamento e Ajustamento da Rede Completa	114
Capítulo 9 - Resultados e Análises.....		117
9.1	Introdução.....	117
9.2	Resultados da rede de controle	117
9.2.1	Teste de Detecção de “Outliers”	119

9.2.2 Diferenças de coordenadas dos vértices da rede de controle e os vértices correspondentes no ajustamento de 2001	120
9.2.3 Precisoões das coordenadas dos vértices da rede de controle	121
9.2.4 Confiabilidade interna da rede de controle.....	122
9.2.5 Confiabilidade externa da rede de controle.....	123
9.3 Resultados da Rede Principal	125
9.3.1 Teste “Data snooping” da rede principal.....	126
9.3.2 Diferenças das coordenadas do ajustamento 2004 e ajustamento 2001	127
9.3.3 Precisoões do ajustamento 2004	129
9.3.4 Confiabilidade Externa do ajustamento 2004	130
9.3.5 Diferença entre azimutes e espaçamentos das bases topográficas	133
Capítulo 10 - Conclusão e Recomendações	134
10.1 Conclusões	134
10.2 Recomendações.....	135
ANEXO 1- Ajustamento 2001 - Coordenadas e precisoões (1,96. σ) - Sistema SAD-69	136
ANEXO 2 – Ajustamento 2004 - Coordenadas e precisoões (1,96. σ) - Sistema SAD-69	139
APÊNDICE A – Parâmetros Estocásticos do Ajustamento Paramétrico.....	142
APÊNDICE B – Número de redundância e redundância total do ajustamento	145
APÊNDICE C – Parâmetro (λ) da distribuição Qui-Quadrado não-centralizada.	146
Referências Bibliográficas	147

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Várias atividades de levantamentos topográficos em áreas urbanas, públicas ou particulares, dependem de uma rede de referência cadastral municipal. Entre essas atividades, o cadastro urbano municipal é o que mais se beneficia desse tipo de rede. Todo administrador ou planejador público precisa dispor de informações cadastrais confiáveis e atualizadas para suporte de suas decisões, em quantidade maior ou menor, em função da densidade populacional e do estágio de desenvolvimento de sua cidade.

O cadastro urbano é, em essência, constituído por um binômio: representado, de um lado, pelas informações espaciais tais como pontos, retas e polígonos contidos nos mapas e nas plantas cadastrais da cidade; e do outro, por informações alfanuméricas, extraídas de bancos de dados cadastrais, tais como: informações sobre proprietários de bens imobiliários, tipos de construções e outras, de relevância para o cadastro municipal. Mesmo em regiões economicamente menos favorecidas é desejável que as informações espaciais sejam referenciadas a uma rede de pontos de apoio imediato que estejam referenciados ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Essa rede de pontos de apoio imediato é denominada, pela NBR¹-14166, de rede de Referência Cadastral Municipal (RCM).

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), através do Procedimento NBR-14166 de 1998, estabelece que uma rede de referência cadastral municipal deve compatibilizar os procedimentos para sistematização de todos os levantamentos

¹ NBR – Normas Brasileiras

topográficos e cadastrais realizados nos municípios brasileiros. Até a criação desse procedimento, as normas cartográficas nacionais não abrangiam, de forma explícita, os municípios. Tal procedimento possibilita aos municípios brasileiros implantarem e manterem uma infra-estrutura cartográfica urbana capaz de georreferenciar todas as atividades geodésicas e topográficas ao sistema de referência nacional. A NBR-14166, além de contemplar os métodos clássicos de levantamentos geodésicos, como a triangulação, a trilateração e a poligonação, ou mesmo a aerofotogrametria, também, oferece suporte aos métodos de levantamentos modernos, como os que usam o posicionamento por satélites artificiais do sistema NAVSTAR/GPS². Este sistema será designado, neste texto, pelo termo sistema GPS ou simplesmente pela sigla GPS.

Em analogia com a pirâmide de hierarquia dos extratos sociais, a rede de referência cadastral municipal situa-se na base de uma pirâmide hipotética, considerada a estratificação das redes geodésicas. Na pirâmide hipotética do Sistema Geodésico Brasileiro, as redes posicionadas mais ao topo constituem o arcabouço estrutural formado pelas redes de alta precisão, científicas ou fundamentais de abrangência nacional, às quais as redes de ordem inferior devem estar submetidas.

A NBR-14166 mostra em detalhes os procedimentos básicos para implantação e realização da RCM, que dá apoio às atividades cadastrais dos municípios e aos levantamentos destinados à cartografia sistemática, usualmente representados em projeção UTM³, e também presta suporte àquelas atividades do dia-a-dia das diversas especializações da engenharia, as quais geralmente precisam de coordenadas no plano topográfico local.

Uma rede cadastral é constituída por marcos geodésicos de apoio imediato cujas coordenadas podem ser obtidas, tanto por métodos clássicos de observações (poligonação, triangulação, trilateração), como através de métodos modernos como o sistema GPS. Os marcos de apoio imediato devem observar o princípio de hierarquia e vizinhança; portanto, necessariamente precisam apoiar-se em vértices geodésicos do

² NAVSTAR/GPS – Navigation Satellite with Time and Ranging / Global Positioning System

³ UTM – Universal Transverso de Mercator

IBGE⁴ próximos à área de implantação da rede. Caso não haja vértices nas proximidades, deve-se providenciar a implantação de marcos geodésicos de precisão, os quais constituem o adensamento do apoio geodésico básico do SGB.

Neste trabalho, além de aspectos teóricos da análise de confiabilidade, será analisado o caso prático do ajustamento da rede de referência cadastral do município de Vitória (ES), implantada, no início de 2001 pela prefeitura de Vitória, usando-se a técnica de rastreamento de satélites GPS.

1.2 O Problema

Embora os procedimentos, a metodologias e as prescrições da NBR-14166 fossem conhecidos, eles não foram totalmente observados no projeto e na implantação da rede de Vitória em função de particularidades locais, como por exemplo, a já existência de diversos vértices do IBGE, implantados com GPS em locais do município pouco acessíveis para os serviços diários.

A concepção básica da rede foi a implantação de pares de vértices intervisíveis, privilegiando locais públicos (de livre acesso), como calçadas e canteiros centrais. Devido à existência de muitos obstáculos e condições pouco favoráveis da geometria das ruas da cidade de Vitória, alguns pares de vértices tiveram seu espaçamento inferior a 200 metros, o que pode comprometer a precisão dos azimutes, conforme NBR-14166. Entretanto, a opção por esses locais objetivou facilitar a ocupação destes vértices por agentes públicos e privados, pois a partir da implantação desta rede, todos os levantamentos e cadastros, obrigatoriamente, são referenciados a esta RCM.

A Prefeitura Municipal de Vitória (ES) escolheu locais acessíveis para os vértices, mesmo sabendo dos riscos que esses locais poderiam apresentar para a qualidade das observações coletadas. Ou seja, à medida que se aumenta a acessibilidade aos pontos da rede em uma cidade, a execução da coleta de dados GPS nos vértices pode ficar mais exposta aos efeitos degradadores da qualidade dos resultados, como por

⁴ IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

exemplo: multicaminhamentos, perda de ciclos bem como a redução do número de satélites disponíveis, devido à expressiva concentração de construções dos centros urbanos; além da pouca segurança à integridade dos vértices.

1.3 Justificativa

Alguns estados, tais como: São Paulo, Espírito Santo, Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul, Mato Grosso do Sul, Rio de Janeiro, Pernambuco e Minas Gerais já implantaram suas Redes Estaduais GPS; entretanto, essas redes estaduais não suprem as necessidades das atividades cadastrais dos seus respectivos municípios, porque os espaçamentos entre os vértices destas redes são significativos (entre 100 e 150 km). O mapeamento cadastral dos municípios deve atender pequenas áreas, em dimensões de lotes. Dessa forma, é imprescindível a implantação de redes municipais, conectadas às redes estaduais, e, conseqüentemente, ao SGB. Os vértices dessas redes municipais devem situar-se em locais estratégicos que atendam, satisfatoriamente, às operações topográficas dos levantamentos cadastrais. Alguns municípios como: Campinas (SP), Guarulhos (SP), Ilha Solteira (SP), São Carlos (SP), Paulínia (SP) Poços de Caldas (MG), Belém (PA), já implantaram suas redes GPS de referência cadastral municipal.

No Espírito Santo apenas a cidade de Vitória já implantou sua rede de referência cadastral municipal. A Serra, município vizinho ao norte de Vitória, está em fase de implantação da sua rede cadastral.

A literatura tem mostrado que as poucas redes municipais de referência implantadas têm-se preocupado bem mais com a precisão do que com a acessibilidade, seguindo orientações previstas na NBR-14166. Esta pesquisa, entretanto, busca verificar a precisão e confiabilidade de uma rede GPS de referência municipal projetadas e implantada em região urbanas com GPS, tendo os vértices situados em locais públicos e acessíveis, tais como, calçadas, canteiros centrais e outros, em desacordo com as indicações da referida norma.

Uma rede de referência cadastral municipal para suportar, de forma dinâmica, as várias atividades de levantamentos topográficos urbanos precisam ter seus pontos situados em locais estratégicos de modo a evitar grandes poligonais adicionais para os

trabalhos do dia-a-dia, e mais ainda, esses locais devem ter fácil e livre acesso. Entretanto, esses requisitos não podem degradar a precisão e confiabilidade da rede além de limites pré-estabelecidos, sob pena de torná-la incompatível com a qualidade desejável ao cadastro municipal.

Esta pesquisa justifica-se pelo estudo das técnicas de detecção de “outliers” (resíduos provocados por erros grosseiros que conforme determinado teste estatístico ultrapassam certos valores críticos), localização de observações com erros grosseiros, análise de precisão e confiabilidade, aplicados a um caso prático de rede cadastral municipal implantada com GPS.

1.4 Objetivos

O objetivo deste trabalho é analisar a qualidade da rede GPS de referência cadastral do município de Vitória, usando testes de detecção de “outliers”, localização e eliminação de erros grosseiros, e verificação da confiabilidade desta rede.

De forma resumida este trabalho se propõe:

- ✓ Apresentar um estudo teórico dos métodos de análise de precisão e confiabilidade de redes ajustadas;
- ✓ Executar levantamentos complementares para compor uma rede de controle;
- ✓ Processar a rede de controle e ajustá-la com o programa SKI-PRO, avaliando sua precisão e confiabilidade interna e externa;
- ✓ Fazer o processamento das observações com e o ajustamento dos vetores da rede completa com o programa SKI –PRO, versão 2.1, tendo por injunção a rede de controle;
- ✓ Analisar os resultados obtidos, e
- ✓ Sugerir pesquisas realizar-se em futuro próximo.

CAPÍTULO 2 - REDES GEODÉSICAS

2.1 Introdução

O mapeamento de grandes áreas da superfície terrestre, o cadastro técnico municipal, o monitoramento de grandes estruturas e muitas outras atividades científicas e de engenharia precisam do apoio de pontos de controle pré-estabelecidos. Estes pontos de controle constituem o que se denomina “sistema de referência”. A materialização, ou seja, a fixação de um sistema tridimensional exige, em princípio, três pontos. Mas para torná-lo apto às atividades de pesquisa, de Cartografia e de Engenharia é preciso que este sistema de referência seja confiável. Rodrigues (2002) observa que a praticidade e a confiabilidade de um sistema de referência são obtidas com a materialização de um conjunto maior de pontos no campo, com distribuição adequada e com coordenadas definidas com precisão. Este conjunto de pontos definidos com precisão e exatidão é denominado “rede geodésica”

Um sistema de referência necessita da definição de uma superfície de referência, matematicamente modelável, que melhor represente forma Terra, e sobre a qual serão processados os dados dos levantamentos de controle horizontal, usando métodos clássicos, ou modernos, como por exemplo, o posicionamento por satélites artificiais.

A forma aproximada da Terra é o geóide, definido como uma superfície equipotencial coincidente com nível médio dos mares, em suposto repouso, que hipoteticamente se estende através dos continentes. A superfície do geóide, pela definição de superfície equipotencial, é perpendicular à vertical gravimétrica em todos os seus pontos. Essa superfície equipotencial é irregular, o que torna sua modelagem matemática complexa, com exigência de grande quantidade de parâmetros e medições

gravimétricas. A solução encontrada pela Geodésia geométrica foi escolher o elipsóide de revolução como superfície de referência, pois esta figura geométrica, matematicamente definida, além de representar com boa aproximação a forma da Terra, facilita de sobremaneira os cálculos geodésicos. Entretanto, o elipsóide de revolução não pode ser usado como superfície de referência altimétrica, por não ser uma superfície física de nível, como é o geóide, mas sim uma superfície “fictícia” geométrica.

O sistema geodésico de referência materializado jamais coincidirá com o modelo matemático definido como sistema de referência, pois toda medida física, mesmo as mais cuidadosas, sempre serão eivadas ao menos de erros acidentais. A esse respeito, Gemaél (1994) afirma que todas as observações jamais estarão isentas dos erros de medições que ocorrem em razão, não somente das falhas humanas, mas também da imperfeição dos equipamentos e da influência das condições ambientais onde se processa a mensuração. Veronez (1998) sugere ser mais racional dizer que o sistema geodésico materializado se encontra bem próximo do modelo matemático definido, mas nunca coincidente; e que uma melhor aproximação entre os dois modelos, o definido e o materializado, somente pode ser obtida por métodos de observações e equipamentos mais adequados bem como a realização de ajustamento de redes.

2.2 Redes Geodésicas Clássicas

As redes geodésicas sempre tiveram dois sistemas de referências e, conseqüentemente, duas superfícies de referência, o primeiro, usa o elipsóide de revolução para expandir a rede geodésica horizontal, e o segundo, o geóide como referência para expansão da rede geodésica vertical. Vanicek e Krakiwsky (1986) consideram histórica a principal razão desta divisão, afirmando que, no passado, era mais fácil e mais econômico determinar as posições horizontais e verticais separadamente, especialmente porque cada uma delas requer tipos diferentes de observações de campo, e, também por ser pouco significativa a dependência uma da outra.

Assim, o terno coordenado que descreve a posição única dos pontos na superfície da Terra é obtido por dois procedimentos diferentes: o primeiro,

correspondente à posição horizontal, latitude e longitude; e o segundo, à altitude ortométrica. Esta duplicidade de sistemas de referência propicia a existência de pontos na rede de nivelamento sem as respectivas coordenadas de posição, ou de pontos da rede horizontal sem suas respectivas altitudes ortométricas.

2.2.1 Redes Geodésicas Horizontais

Os pares coordenados, latitude e longitude, das estações de uma rede geodésica horizontal clássica sempre foram associados a um sistema de referência geodésico, que por sua vez, é associado a um elipsóide de revolução que melhor se ajuste à região de abrangência da rede geodésica. Estes sistemas de referência são conhecidos como datum astro-geodésico horizontal (DGH) e sua obtenção, conforme IBGE consiste de três fases:

- a) Escolha de um elipsóide de referência, ou seja, a definição do semi-eixo maior, **a**, e o achatamento, **f**;
- b) Definição do posicionamento e orientação do referencial através dos seis parâmetros topocêntricos: as duas coordenadas do ponto, o azimute inicial, a ondulação geoidal, e as componentes do desvio da vertical correspondentes às seções, meridiana e primeiro vertical, (VANICEK e KRAKIWSKY, 1986). Este conjunto de parâmetros, que se denomina datum, busca assegurar uma boa adaptação entre o elipsóide escolhido e o geóide.
- c) Realização (ou materialização) do referencial através das coordenadas dos pontos resultantes do processamento das observações terrestres, obtidas por métodos tradicionais: triangulação, trilateração ou poligonação.

O datum oficial do SGB, o SAD-69⁵, foi obtido através do método astro-geodésico tendo como referência o elipsóide internacional recomendado pela IUGG⁶ em 1967.

⁵ SAD-69 - South American Datum of 1969

⁶ IUGG – International Union of Geodesy and Geophysics (União Internacional de Geodésia e Geofísica)

As fases **a** e **b** abordam os aspectos definidores do sistema, enquanto a fase **c** aborda o aspecto prático da sua obtenção, isto é, sua materialização através da expansão dos pontos de controle da rede. Deste modo, as coordenadas geodésicas estão sempre associadas a um determinado referencial, mas estas coordenadas não definem este referencial (COSTA, 1999). Esta afirmativa fundamenta-se no fato de o referencial ser um modelo idealizado, enquanto as coordenadas são determinadas a partir de observações sempre eivadas de erros.

2.2.1.1 Expansão de Redes Geodésicas Horizontais

Os métodos clássicos de expansão dos pontos de controles de uma rede geodésica horizontal são três: triangulação, trilateração e poligonação.

A **triangulação** baseia-se na medição de ângulos de uma série de triângulos justapostos, formando figuras geométricas. Esta foi uma das técnicas mais usadas para a expansão de redes geodésicas clássicas. As redes de triangulação podem ser formadas por simples triângulos, polígonos, quadriláteros, ou combinação destas figuras. O princípio da triangulação fundamenta-se em simples procedimentos trigonométricos, ou seja, se a distância de um lado do triângulo e dois ângulos são medidos cuidadosamente, os outros dois lados e o ângulo restante podem ser estimados. Na prática todos os ângulos de cada triângulo são medidos de forma a terem-se observações redundantes, requisito básico para a aplicação do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados. A fase crítica da triangulação consiste na medição precisa da linha base, denominação dada ao lado medido do triângulo. A popularidade deste método ocorreu na época em que a precisão da medição de ângulos era, basicamente, a mesma dos dias de hoje, mas em contrapartida, as técnicas de medições de distância deixavam a muito a desejar.

A **trilateração**, como a triangulação, consiste da união de uma série de triângulos, dos quais, em vez de ângulos, os comprimentos dos lados é que são medidos, e apenas uns poucos ângulos ou direções são medidos para estabilizar os azimutes. Anderson e Mikail (1998) afirmam que o contínuo desenvolvimento dos equipamentos de medições eletrônicas tornou a trilateração possível e competitiva com a triangulação.

O IBGE, no anexo da Resolução PR N° 22, de 27 de julho de 1983, considera que a evolução dos medidores de distância eletrônicos tornou a trilateração uma prática

economicamente viável que, em alguns casos, pode oferecer resultados melhores que a triangulação ou a poligonação.

A **poligonação** consiste na medição sucessiva de ângulos e distâncias e objetiva transportar as coordenadas, a partir de dois pontos conhecidos, para outros cujas coordenadas se deseja determinar. Desse modo, são estabelecidas as linhas poligonais. As poligonais eletrônicas, nome pelo qual a poligonação é conhecida atualmente, é um método mais rápido e mais econômico, embora não proporcione o mesmo rigor na determinação das coordenadas dos vértices geodésicos. De acordo com o objetivo e as condições locais, a poligonação pode ser, ainda hoje, uma opção a se considerar no transporte de coordenadas. Neste método, diferente dos outros dois, não é necessária a análise quanto à rigidez, uma vez que não são formadas figuras que permitam adotar mais de um caminho para o transporte de coordenadas. Na poligonação só há um caminho para o transporte de coordenadas, o que torna este método menos sensível que os outros.

2.2.1.2 Classificação das Redes Geodésicas

Classicamente, as redes são divididas em quatro ordens: redes de primeira ordem formadas por polígonos com lados de 20 a 50 km; redes de segunda ordem com lados entre 10 e 20 km; redes de terceira ordem com lados de 5 a 20 km e, por fim, as redes de quarta ordem com lados medindo de 1 a 3 km, (SEGANTINE, 1995).

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, no anexo da Resolução PR Nº22, de 21 de julho de 1983, apresenta uma nova classificação para os levantamentos geodésicos brasileiros; e se não descarta ao todo a terminologia clássica de primeira, segunda e terceira ordem, estabelece uma nomenclatura mais moderna e coerente com a teoria do ajustamento de observações geodésicas. A nova classificação de levantamentos, embora não textualmente, deixa implícita uma nova classificação para as redes brasileiras. Esta suposta nova divisão compreende três classes:

- Redes Geodésicas de Alta Precisão;
- Redes Geodésicas de Precisão e
- Redes Geodésicas para fins Topográficos.

As redes de alta precisão, de âmbito nacional, subdividem-se, segundo o fim a que se destinam em: científico e fundamental. O primeiro voltado ao atendimento de programas de pesquisa internacional e o segundo, ao estabelecimento de pontos primários para suporte dos trabalhos geodésicos de menor precisão e às aplicações em Cartografia.

2.2.2 Redes Geodésicas Verticais

Os pontos da rede vertical são definidos por uma única coordenada, a altitude sobre o nível médio dos mares (altitude ortométrica). Algumas vezes, as redes geodésicas verticais possuem as outras duas coordenadas de posição, latitude e longitude. Quando isto ocorre, deve-se verificar se o ponto da rede vertical é coincidente com pontos da rede horizontal ou se as coordenadas horizontais foram obtidas por um método de menor precisão. É comum encontrar pontos da rede vertical em que as coordenadas horizontais foram obtidas a partir de uma carta do IBGE.

O método que permite determinar a diferença de altitude entre pontos é conhecido como nivelamento, que juntamente com o processamento dos dados das redes geodésicas verticais são, conceitualmente, mais simples que os procedimentos usados no levantamento das redes horizontais ou das tridimensionais. Entretanto, Vanicek e Krakiwsky (1986) consideram que para a obtenção de precisão, compatível com o nivelamento das redes geodésicas verticais, é indispensável um bom entendimento dos fenômenos físicos envolvidos no processo. Eles argumentam que o campo gravitacional da Terra e a refração atmosférica desempenham papel mais expressivo no nivelamento geodésico do que na determinação do posicionamento horizontal.

Uma das questões principais das redes geodésicas verticais é a determinação do referencial de altitude, o chamado datum altimétrico. O geóide, superfície equipotencial que corresponde ao nível médio dos mares, é a superfície escolhida para esta referência, o que remete a questão à determinação do nível médio dos mares. Deakin (1996) diz ser a determinação do nível médio dos mares um procedimento empírico baseado em

observações instantâneas em um marégrafo. Montgomery⁷ (1937) citado por Vanícek e Krakiwsky (1986) enumera alguns fenômenos como responsáveis pela variação do nível médio do mar: variação da pressão atmosférica, efeito dinâmico das correntes marinhas, variação dos ventos, mudança de temperatura, flutuações de descargas dos rios, mudança da configuração batimétricas, derretimento glacial e maré de longo período.

No Brasil, a determinação do datum vertical deu-se a partir do marégrafo instalado no litoral catarinense, mais precisamente no Porto Henrique Lajes, localizado na cidade de Imbituba-SC.

O método para adensar a rede geodésica vertical, como já mencionado anteriormente, é uma operação topográfica denominada nivelamento, que consiste em determinar a diferença vertical entre os pontos de controle da rede. Os principais tipos de nivelamento usados são o trigonométrico e o geométrico. Atualmente, a consolidação das técnicas de posicionamento espaciais e as pesquisas de modelos geoidais podem transformar o GPS em ferramenta valiosa para a determinação das altitudes ortométricas dos pontos de controle das redes geodésicas verticais.

O IBGE, no anexo da Resolução PR N° 22, de 21 de julho de 1983, diz que os nivelamentos geodésicos de alta precisão desenvolvem-se na forma de circuitos que acompanham a malha viária do país, preferencialmente, ao longo de vias asfaltadas. As cidades, vilas e povoados adjacentes a essas vias ou mesmo distante até 20 km são atendidos por ramais. Esses circuitos apresentam perímetros menores que 400 km e as estações de referência (Referências de Nível – RRNN) espaçadas ao máximo de 3 km no interior das linhas formadoras do circuito.

2.3 Redes Geodésicas Modernas

A Geodésia moderna tem-se servido, de forma sistemática e crescente, da tecnologia de posicionamento global, proporcionada pelos sistemas de satélites artificiais desenvolvidos inicialmente com intuito militar pelas forças armadas,

⁷ MONTGOMERY, R.B. (1937). *Fluctuations in monthly sea level on eastern U.S. coast as related to dynamics of western North Atlantic ocean..* J. Mar. Res. 1 (2), pp. 165-185.

americanas e russas, para determinar as coordenadas de seus navios e aviões em manobras ou, em serviço. Embora desenvolvidos com finalidades militares, esses sistemas de posicionamento têm-se mostrado úteis à comunidade civil, de maneira particular, à comunidade ligada à Geodésia. O uso destes sistemas obrigou a Geodésia rever alguns de seus paradigmas, não só aqueles referentes às tecnologias de levantamento, mas também os conceitos de estabelecimento de sistemas de referências. Wilson e Christie⁸ (1992) citados por Monico (2000) afirmam haver uma tendência mundial dos países em trocar seus antigos sistemas de referência topocêntricos locais, definidos por métodos clássicos da Geodésia, por sistemas geocêntricos globais, não só para fins geodésicos, mas também para fins de mapeamento. Uma confirmação desta tendência pode ser vista nos estudos de implantação do Sistema Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS), do qual o Brasil é um dos principais signatários.

2.3.1 Sistema de Referência Modernos

Os Sistemas Geodésicos de Referência Modernos são fundamentados no sistema terrestre de referência (CTS)⁹, que apesar de exigir para sua definição procedimentos diferentes dos usados nos sistemas clássicos, mantêm a essência daqueles, entre outras razões, por também necessitar de uma definição, materialização e adensamento.

Snay e Soler (2000a), afirmam que a definição de um sistema terrestre de referência 3D pode ser dividida em quatro etapas. Sendo que a primeira etapa consiste na ligação de uma configuração, fisicamente mensurável, localizada sobre a superfície da Terra a um sistema de eixos de coordenadas cartesianas 3D. Como resultado, dessa primeira etapa, a localização e orientação dos três eixos coordenados ficam definidas. A segunda etapa refere-se ao conceito de unidade de comprimento que permite a medição das distâncias fisicamente. A terceira etapa introduz uma superfície geométrica auxiliar que se aproxima do tamanho e da forma da Terra. Finalmente, eles dizem que a quarta

⁸ WILSON, J.I.; CHISTIE, R.R. (1992). A new Geodetic Datum for Great Britain: The Ordnance survey Scientific GPS Network: SCINET92, Ordnance Survey, Southampton, UK.

⁹ CTS – Conventional Terrestrial System.

etapa investiga a contribuição do campo gravitacional da Terra para a noção de posição, especialmente, a de altura.

O IBGE (2003) considera as seguintes etapas para obtenção de um Sistema de Referência Terrestre:

- a) Adoção de um sistema de referência que represente a forma e dimensões da Terra em caráter global. Estes sistemas de referência, chamados Sistemas Geodésicos de Referência (SGR), são resultantes de extensas observações do campo gravitacional terrestre a partir de observações de satélites, fornecendo assim, o fundamento preciso para a organização de todas as informações relacionadas à Terra (NIMA¹⁰, 2000). Estes sistemas são definidos por modelos, parâmetros e constantes (ex: um sistema de coordenadas cartesianas geocêntrico e constantes do elipsóide de referência GRS-80¹¹). Além das constantes geométricas definidoras, os SGR modernos são definidos, também, por constantes físicas. A Terra por ser um corpo com rotação e massa, sua melhor aproximação física é definida através dos parâmetros: raio equatorial (equivalente ao semi-eixo maior do elipsóide de referência), constante gravitacional geocêntrica GM (com ou sem atmosfera), o coeficiente zonal de segunda ordem do potencial gravitacional da Terra (J_2), o achatamento terrestre (f) e a velocidade de rotação da Terra (ω). Estas constantes estão implicitamente relacionadas às órbitas dos satélites, que por sua vez são usadas para definir as coordenadas de pontos na superfície da Terra.
- b) A materialização de um sistema de referência terrestre geocêntrico é feita através de redes geodésicas semelhantes ao sistema clássico. Entretanto, os procedimentos para o estabelecimento das coordenadas dos vértices são

¹⁰ NIMA - National Imagery and Mapping Agency

¹¹ GRS-80 – Elipsóide internacional de referência recomendado pela IUGG em 1980

feitos com técnicas espaciais de posicionamento, por exemplo, o VLBI¹², SLR¹³ ou GPS.

Estas técnicas possuem duas vantagens em relação às tradicionais terrestres. A primeira é a alta precisão e a segunda é o posicionamento 3D das estações geodésicas. A alta precisão favorece o surgimento de uma quarta componente associada à época de obtenção das coordenadas. Assim, as estações que materializam um sistema de referência terrestre geocêntrico moderno possuem quatro componentes, três de definição espacial e uma de definição temporal. Um exemplo de sistema de referência terrestre geocêntrico é o ITRS¹⁴, realizado anualmente pelo escritório central do IERS¹⁵. Monico e Segantine (1996) dizem que a realização do ITRS é feita através do ajustamento de várias séries de coordenadas (Set of Station Coordinates – SSC) obtidas de técnicas espaciais como SLR, LLR¹⁶, VLBI, GPS (a partir de 1991) e DORIS¹⁷ (a partir 1994).

2.3.2 Redes Mundiais

O refinamento das técnicas espaciais para medir distância, como SLR, LLR, VLBI, GPS possibilitaram a obtenção de posicionamento de pontos com precisões compatíveis com as necessidades de atividades científicas, tais como monitoramento das placas tectônicas e o movimento do eixo de rotacional da Terra, além é claro, de atividades mais aplicadas como, Cartografia, redes geodésicas nacionais, mapeamento e outras. O alcance da exatidão baseada em técnicas de GPS implica a existência de redes de referência mundiais para apoiar a produção de efemérides precisas que são usadas no pós-processamento dos dados coletados. O processamento das observáveis GPS usando efemérides transmitidas é indicado para posicionamento absoluto ou posicionamento relativo de menor precisão.

¹² VLBI – Very Long Baseline Interferometry

¹³ SLR – Satellite Laser Range

¹⁴ ITRS - International Terrestrial Reference System

¹⁵ IERS – International Earth Rotation Service

¹⁶ LLR – Lunar Laser Range

¹⁷ DORIS - Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite

Para suprir algumas necessidades indispensáveis ao posicionamento de alta precisão, instituições como União Internacional de Geodésia e Geofísica (IUGG) e Associação Internacional de Geodésia (IAG) associaram-se a outras instituições para o estabelecimento de redes de referência de alcance mundial, tais como: ITRF¹⁸ e IGS¹⁹.

2.3.2.1 Sistema Geodésico Mundial de 1984 - WGS-84

Conforme Snay e Soler (2000b), o sistema de referência WGS-84 pode ser usado para apoiar atividades globais de mapeamento, posicionamento, e navegação e outras. Mas ele foi desenvolvido especificamente para expressar as órbitas dos satélites GPS, ou seja, o posicionamento de satélite em função de tempo. Esses mesmos autores afirmam que nas atividades de posicionamento “absoluto”, assume-se que as órbitas dos satélites são, suficientemente, precisas para servir como única fonte de controle no posicionamento de pontos. E, também, que o posicionamento absoluto não precisa de pontos de controle preexistentes com coordenadas terrestres, exceto indiretamente, já que as órbitas são derivadas de um pequeno conjunto de estações de controle, das quais o usuário comum não precisa saber suas posições.

Ainda, segundo Snay e Soler (2000b), o DoD fornece dois tipos de efemérides, as transmitidas e as precisas, no sistema de referência WGS-84. Das duas, as efemérides pós-processadas são mais precisas, pois além de não resultarem de previsões, em seu processamento é usado um grande número de estações de controle. As órbitas preditas e os parâmetros dos relógios dos satélites GPS são gerados pelo Segmento Operacional de Controle de GPS.

Estas informações preditas são enviadas aos satélites GPS que as transmitem na mensagem de navegação moduladas no sinal dos satélites. Já as órbitas pós-processadas dos satélites GPS e os parâmetros dos relógios dos satélites são gerados pela Agência Nacional de Imagem e Mapeamento dos EUA (NIMA). Outras organizações também geram órbitas pós-processadas de GPS que normalmente são expressas em uma particular realização do Sistema do ITRS.

¹⁸ ITRF – International Terrestrial Reference Frame

¹⁹ IGS - International GPS Service

O fato de os satélites GPS transmitirem as efemérides no sistema WGS-84 tornou este sistema de referência muito popular entre os usuários que usam o posicionamento em tempo real, e mesmo entre os que fazem pós-processamento. Entretanto, usuários que precisam de pontos com grande precisão não usam o WGS-84 em suas atividades posicionamento. Assim, conforme Snay e Soler (2000b), para o sistema WGS-84 tornar-se capaz de apoiar atividades de posicionamento de alta precisão foi necessário estabelecer uma rede terrestre de pontos de controle no sistema WGS-84, bastante precisa e extensa.

A rede de referência original do WGS-84 foi realizada com observações Doppler ao conjunto de estações do sistema TRANSIT²⁰. O objetivo principal desta realização foi tornar a origem, a escala e a orientação da rede de referência WGS-84 compatíveis com a rede de referência do BTS-84²¹, então o melhor referencial disponível. O conjunto das coordenadas das estações que participaram da rede de referência original WGS-84 apresentaram uma precisão da ordem de 1 a 2 metros, em relação ao BTS-84. Essa realização, baseada no sistema TRANSIT, começou a ser usada em janeiro de 1987 pela DMA²², atual NIMA, para a produção de efemérides precisas (NIMA, 2000).

Entretanto, diversos estudos demonstraram a existência de um erro sistemático de escala na altitude elipsoidal existente entre as coordenadas obtidas por GPS e as obtidas pela realização Doppler do WGS-84 para um mesmo local. Este erro de escala foi atribuído, provavelmente, às limitações das técnicas usadas para estimar coordenadas derivadas do Doppler (NIMA, 2000).

Para remover este erro e obter uma autoconsistência de realização GPS, em 1994 o DoD dos EUA fez outra realização do WGS-84, agora completamente baseada em observações de GPS, em vez de observações Doppler. Esta nova realização ficou oficialmente conhecida como WGS-84 (G730). O **G** significa “GPS” e “**730**” o número da semana GPS (iniciada a 0h UTC, 2 de janeiro 1994) em que o NIMA começou

²⁰ TRANSIT – Navy Navigation Satellite System

²¹ BTS – Bureau International de L’Heure Terrestrial System

²² DMA - Defense Mapping Agency

expressar as efemérides precisas baseadas nesta realização. Conforme Swift²³ (1994), citado por Costa (1999), esta realização contou com 32 estações; 10 estações do DoD (5 delas pertencentes ao NIMA), correspondentes à rede de referência WGS-84 original (GPS) e 22 estações pertencentes à rede IGS, das quais oito estações IGS tiveram injunção com o ITRF. Segundo Costa (1999), o método usado para a determinação das novas coordenadas foi similar ao usado no IGS, e que este método estima as órbitas, simultaneamente, com as coordenadas das estações. Esta realização atingiu a precisão de 10 cm (1σ) para cada componente das coordenadas das estações permanentes do DoD, e tornou-se consistente com o ITRF-92 em 10 cm, (NIMA, 2000).

A mais recente realização, WGS-84 (G873), foi baseada em observações GPS de 12 estações do DoD, das quais 7 pertencentes ao NIMA (Figura 2.1). Novamente, a letra G significa GPS, e “873” o número da semana que começa à 0h UTC, 29 de setembro 1996. Nesta data, a agência NIMA iniciou o processamento das órbitas precisas dos satélites GPS usando a nova realização, entretanto, o Segmento Operacional de Controle GPS somente adotou o WGS-84 (G873) em 29 de janeiro de 1997. As componentes das coordenadas das estações permanentes do DoD foram determinadas com precisão de 5 cm (1σ). Antes da determinação dos parâmetros de transformação do WGS-84 (G873), extensivas comparações diárias entre efemérides precisas WGS-84 (G873) e efemérides IGS/ITRF-94, revelaram diferenças sistemáticas inferiores a 2 cm entre as duas materializações, (NIMA, 2000).

²³ SWIFT, E, (1994). *Improved WGS-84 Coordinates for DMA and Air Force GPS Tracking Sites, Proceedings of ION-94*. The Seventh International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. Salt Lake City, pp.285-292.

Figura 2.1 - Estações da realização do WGS-84 (G873)

2.3.2.2 International Terrestrial Reference Frame - ITRF

O IERS foi criado em 1988 com o propósito de fornecer à comunidade internacional dados atualizados dos ICRS²⁴, ITRS e EOP²⁵, para apoiar atividades científicas que precisam de coordenadas de posição altamente precisas; por exemplo, monitoramento do movimento de crosta terrestre e o movimento do eixo de rotacional da Terra. Este serviço substituiu o BIH (Bureau International L'Heure) que estabeleceu em 1984 o BTS 84, baseado em observações VLBI, SLR, LLR e Doppler. Os dois sistemas de referência, ICRS e ITRS, são anualmente atualizados pelo IERS, com valores obtidos através das novas materializações da Rede de Referência Terrestre - ITRF e da Rede de Referência Celeste - ICRF. A primeira realização de ITRS foi a Rede de Referência Terrestre Internacional zero (ITRF-0), a qual adotou a origem, orientação e escala do BTS-87 (BOUCHER E ALTAMINI²⁶, 1989) apud (SEGANTINE, 1998).

²⁴ ICRS – International Celeste Reference System.

²⁵ EOP – Earth Orientation Parameter

²⁶ BOUCHER, C.; ALTAMIMI, Z. (1989) – The Initial IERS Terrestrial Reference Frame, IERS Technical Note 1, Observatoire de Paris, Paris, France.

Nos anos seguintes, desde a introdução do ITRF-0, o IERS desenvolveu novas realizações do ITRS; ITRF-88, ITRF-89, ITRF-90,..., ITRF-97, ITRF-2000, a partir das quais foram publicadas posições e velocidades revisadas para locais pré-existentes, como também novas posições e velocidades para locais estabelecidos depois da última realização. Cada nova realização não só incorporou, pelo menos um ano adicional de dados, mas também a compreensão mais atual do comportamento dinâmico de Terra. A estrutura do ITRF-96 foi definida pelas posições e velocidades de 508 estações dispersas entre 290 locais globalmente distribuídos. É conveniente lembrar que um mesmo local pode ser monitorado por um ou mais instrumentos co-situados que empregam várias técnicas espacial-relacionadas (por exemplo, GPS, VLBI, SLR, LLR, e DORIS).

Além disso, o ITRS é o primeiro sistema de referência internacional direcionado a movimento da placa tectônica e outras formas de movimento da crosta que divulga a velocidades bem como as posições dos seus pontos de controle.

2.3.2.3 Internacional GPS Service – IGS

A primeira rede operacional GPS foi estabelecida pelo DoD dos EUA em 1980. Em 1985, essa rede era formada por dez estações (5 estações da Força aérea dos EUA e outras 5 estações do NIMA) e produzia efemérides precisas que eram disponibilizadas apenas para usuários autorizados (MONICO, 2000). Outras informações podem ser encontradas no site (http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/gps_survey/chap12/1222.htm, acesso em 2/02/2004).

No final da década de oitenta, varias instituições civis, sob a coordenação do NGS²⁷, uniram esforços para organizar uma rede civil que se tornou operacional em 1990. Esta rede ficou conhecida por Rede CIGNET²⁸, e foi o embrião do serviço, hoje, conhecido como IGS, (MONICO, 2000).

²⁷ NGS – US National Geodetic Survey

²⁸ CIGNET – Cooperative International de GPS Network

O IGS tornou-se operacional a partir de janeiro 1994. Atualmente, esta instituição é formada por mais de 200 organizações associadas, espalhadas em mais de 75 países. Através destas organizações, de seus membros associados, de centenas de cientistas e engenheiros participantes, e as muitas agências patrocinadoras, o IGS opera uma rede global de estações de GPS que corresponde a uma das mais precisa rede tridimensional de referência geocêntrica existente, baseada em satélite GPS.

A rede de pontos de controle do IGS é composta de aproximadamente 286 estações espalhadas por todo mundo (Figura 2.2), em operação contínua com receptores de dupla frequência. O controle e a análise dos dados são feitos por 3 Centros Globais, 5 Centros Regionais, 8 Centros de Análise e 23 Centros Operacionais, todos coordenados por uma Agência Central.

Figura 2.2 - Rede de estações do IGS

<http://www.auslig.gov.au/geodesy/sgc/wwwgps/igs.htm>: acesso em 2/02/2204

As observações de GPS coletadas pelo IGS representam insumo para produtos, como: efemérides precisas, parâmetros de rotação da Terra, posições e velocidades das estações IGS, informação de relógio das estações. A exatidão destes produtos permite apoiar atividades como monitoramento da crosta terrestre, determinação das órbitas dos satélites, monitoramento da ionosfera e outras.

2.3.2.4 Sistema de Referência Geocêntrica para as Américas – SIRGAS

O desenvolvimento do Projeto SIRGAS compreende as atividades necessárias à adoção no continente americano de sistema de referência de precisão compatível com as técnicas atuais de posicionamento, notadamente, as associadas ao GPS. O SIRGAS tem por objetivo eliminar a multiplicidade de sistemas geodésicos clássicos, adotados pelos países sul-americanos, que muitas vezes dificulta a solução de problemas tecnicamente simples, tais como a definição de fronteiras internacionais. Por outro lado, a adoção do ITRS como sistema de referência, além de garantir a homogeneização de resultados internamente ao continente americano, permitirá uma integração consistente com as redes dos demais continentes, contribuindo cada vez mais para o desenvolvimento de uma geodésia "global", (IBGE, 2003).

O projeto SIRGAS foi criado em uma Conferência Internacional para a Definição de um Referencial para a América do Sul, em outubro de 1993, em Assunção, Paraguai. Essa conferência, convocada pelas instituições: Associação Internacional de Geodésia (IAG), Instituto Pan-Americano de Geografia e História (IPGH), Agência de Defesa e Mapeamento do EUA (DMA), teve expressiva participação de vários países da América do Sul, (IBGE, 1997).

Os principais objetivos desta conferência foram:

- Definição de um sistema geocêntrico de referência para a América do Sul, adotando-se inicialmente o ITRF-93 e elipsóide do GRS-80.
- Estabelecimento e manutenção de uma rede de referência; tarefa atribuída ao Grupo de Trabalho I - Sistema de Referência.
- Estabelecimento e Manutenção de um datum geocêntrico; tarefa atribuída ao Grupo de Trabalho II - Datum Geocêntrico.

A Figura 2.3 mostra a estrutura do Projeto SIRGAS

Figura 2.3 - Estrutura do Projeto SIRGAS. Fonte: IBGE, 2004

A sua primeira realização foi feita entre os meses de maio e junho de 1995, quando foi estabelecida a rede SIRGAS composta de 57 estações, observadas com GPS e distribuídas pelo continente. As coordenadas finais desta realização foram referidas ao sistema internacional ITRF-94.

O processamento e ajustamento dos dados foram efetuados pelo DGFI²⁹ e NIMA, com o uso de diferentes metodologias e programas. A Tabela 2.1 ilustra de forma comparativa os procedimentos adotados por cada instituição.

²⁹ DGFI - Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut

Tabela 2.1 – Procedimentos do DGFI e NIMA para processamento da rede SIRGAS

	DGFI	NIMA
Programa	Bernese, versão 3.4	Gipsy – Oassis II
Efemérides	Precisas Combinadas IGS	Precisas JPL
Modelagem	Simples diferença	Zero diferença
Ajustamento	Rede livre	Rede livre
Sistema de Referência	ITRF-93 (época 1995,4)	ITRF-93 (época 1995,4)
Estações de Referência IGS usadas na transformação do ITRF-93 para ITRF-94	Arenquipa, Ilha da Páscoa, Fortaleza, Kourou, Santiago, Richmond, O'Higgins	Arenquipa, Ilha da Páscoa, Fortaleza, Kourou, Santiago

Fonte: Costa, 1999

As instituições DGFI e NIMA geraram soluções diárias (sessões processadas) de redes livres, uma para cada tipo de conjunto receptor e antena. Na época da divulgação dos resultados, já estavam disponíveis informações do ITRF-94, mas todo processamento foi referido ao sistema das efemérides e dados da época da campanha - ITRF-93. Assim, as duas instituições transformaram seus resultados para ITRF-94, época 1995,4 usando algumas estações IGS pertencentes à rede SIRGAS (Tabela 2.1). A maior diferença encontrada entre as soluções NIMA e DGFI foi de 0,9 cm (IBGE, 1997).

O projeto da rede SIRGAS prevê campanha de observação a cada cinco anos, visando a manutenção da rede como referencial geodésico capaz de atender aos padrões atuais de posicionamento. As observações da campanha SIRGAS 2000 foi orientada para atender, também, a componente altimétrica do SIRGAS. Com este propósito, o planejamento da segunda campanha desse projeto incluiu a ocupação das estações maregráficas que definem o referencial altimétrico de cada país. Além destas estações, foram observadas as estações altimétricas próximas às fronteiras entre os países bem como aquelas que participaram da campanha de 1995, (IBGE, 2003).

A campanha do SIRGAS-2000 ocupou 184 estações e contou com a participação de países da América Central, do Norte e Caribe, estabelecendo-se uma rede geodésica que cobre inteiramente o continente americano de norte a sul. As novas coordenadas correspondentes à campanha do ano 2000 foram publicadas no final de 2002.

A Figura 2.4 mostra as estações, que compõem a nova realização do SIRGAS, na América do Sul, América Central, América do Norte e Caribe.

Figura 2.4 - Realização do SIRGAS 2000. Fonte: IBGE, 2003

2.3.3 Sistema Geodésico Brasileiro – SGB

O Sistema Geodésico Brasileiro – SGB é definido pelo IBGE, através do anexo da Resolução PR N° 22, de 21 de julho de 1983, como o conjunto de pontos geodésicos implantados na porção da superfície terrestre delimitada pelas fronteiras do Brasil. Estes pontos, aos quais todas as informações espaciais no Brasil devem estar referidas, são

determinados por procedimentos operacionais e suas coordenadas calculadas, segundo modelos geodésicos de precisão compatível com suas finalidades.

O SGB é composto das redes planimétrica, altimétrica e gravimétrica. O desenvolvimento da tecnologia de satélites artificiais para posicionamento, em particular o sistema GPS, permite uma delimitação clara de duas fases da história do Sistema Geodésico Brasileiro. Uma fase clássica, em que predominou o uso de técnicas tradicionais de triangulação, de trilateração e de poligonação; e outra fase, moderna (ou espacial), na qual há predominância no uso da tecnologia de observações de satélites artificiais. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística considera que esta nova tecnologia tem possibilitado a expansão do Sistema Geodésico Brasileiro às regiões, como a região Amazônica, que dificilmente se lograria êxito com as técnicas tradicionais. Assim, torna-se possível o estabelecimento de um arcabouço de apoio ao mapeamento sistemático de toda a superfície do território brasileiro.

A ruptura com as técnicas clássicas de levantamentos no SGB iniciou-se, na década de setenta, com as primeiras observações aos satélites do Sistema TRANSIT. Em 1988 a Divisão de Geociências do IBGE deu os primeiros passos, ainda não sistemáticos, no uso das técnicas de posicionamento com satélites GPS. Mas, somente a partir de 1991, o IBGE sistematizou os procedimentos para levantamentos com técnicas de posicionamento espacial.

A evolução tecnológica dos receptores, das técnicas de observação e dos programas de processamento contribuiu, decisivamente, para o IBGE sistematizar os procedimentos para o pleno uso da tecnologia GPS que se apresentava como uma evolução dos métodos clássicos de posicionamento geodésico, e mostrava-se amplamente superior em precisão, rapidez e economia de recursos humanos e financeiros.

2.3.4 Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo – RBMC

Em 1991, o IBGE e algumas instituições públicas iniciaram um projeto para o estabelecimento da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), cujo objetivo era oferecer cobertura a todo território nacional para a aplicação da tecnologia do GPS.

O projeto da RBMC previa o estabelecimento de dezessete estações com raio de abrangência de aproximadamente 500 km, distribuídas conforme Figura 2.5.

Figura 2.5 - Estrutura da RBMC. Fonte: adaptada do IBGE (2004)

Em 1997, nove estações estavam em operação, sendo oito operadas diretamente pelo IBGE e uma estação operada pelo INPE. Atualmente, a RBMC está composta por quinze estações equipadas com receptores de dupla frequência, isso a transforma em uma importante ferramenta de suporte para pesquisas acadêmicas e utilização da tecnologia GPS no território nacional. A permanente coleta de observações GPS permite o cálculo contínuo das coordenadas sobre a superfície terrestre, podendo inclusive, monitorar as deformações da crosta terrestre.

Outro aspecto importante da RBMC é a sua integração à rede IGS através das estações de Brasília e Fortaleza, transformando-a em um dos principais elos com os sistemas de referência internacionais.

2.4 Redes Estaduais GPS

O SGB é constituído por mais de 60.000 mil estações e é atribuição legal do IBGE manter essa rede em condições operacionais para suprir a comunidade usuária de dados geodésicos, com informações sobre a realidade física dos pontos implantados no território brasileiro. Tal atribuição tem se tornado, ao longo dos anos, uma tarefa complexa devido, notadamente, às grandes transformações físicas, sociais e econômicas ocorridas no país. Neste contexto, os avanços tecnológicos da Geodésia nos últimos anos trouxeram consigo um novo enfoque para a manutenção e ampliação do SGB, constituindo-se, dessa forma, nas bases para o surgimento das Redes Estaduais GPS.

As Redes Estaduais GPS têm seus vértices implantados em locais que garantam sua integridade física, mas de fácil acesso, que atendam a aspectos sócio-econômicos, e propiciem uma rigidez geométrica compatível com as especificações do IBGE.

Estas redes têm observado o princípio de hierarquia e vizinhança, por meio de conexão ao SGB, através de pontos da RBMC, e conexão a vértices de Redes Estaduais vizinhas, já implantadas. Por exemplo, a Rede Estadual de Minas Gerais possui conexão a vértices das redes dos estados do Espírito Santo, Rio de Janeiro e São Paulo. Desta forma, as Redes Estaduais GPS vêm constituindo-se em um adensamento consistente do SGB.

A concepção dessas redes estaduais visa permitir o seu uso tanto pela topografia clássica quanto pela tecnologia GPS. Os marcos estabelecidos obedecem às especificações, no tocante a sua estrutura física, emanadas dos órgãos estaduais e avalizadas pelo IBGE (IBGE, 2003).

A concretização dessas redes tem sido por meio de convênios de cooperação técnica entre o IBGE, instituições públicas e instituições privadas.

Atualmente, já implantaram suas Redes Estaduais GPS, os estados: São Paulo, Rio de Janeiro, Santa Catarina, Paraná, Rio Grande do Sul, Mato Grosso do Sul, Espírito Santo, Minas Gerais e Pernambuco.

2.5 Redes de Referência Cadastral Municipal

As Redes Estaduais GPS já implantadas têm os seus vértices espaçados entre 60 a 150 km, o que as torna incompatíveis com as atividades cadastrais municipais. Por exemplo, o cadastro técnico precisa de detalhamento da malha urbana na ordem das dimensões dos lotes, por isso, é desejável ter-se pontos de apoio com espaçamentos bem menores aos da Rede Estaduais GPS. Dessa forma, torna-se imprescindível a implantação de redes cadastrais municipais, conectadas às redes estaduais, e conseqüentemente ao SGB, com vértices em locais estratégicos que atendam, de forma satisfatória, às operações topográficas dos levantamentos cadastrais.

Conforme informações disponíveis em artigos de congressos nacionais e publicações em periódicos especializados, alguns municípios como: Campinas, Guarulhos, São Carlos, Ilha Solteira, Paulínia Poços de Caldas, Belém, Vitória e outros já implantaram suas redes GPS de referência cadastral municipal.

2.5.1 Conceito de Rede de Referência Cadastral Municipal

A ABNT, por meio da NBR-14166, define a rede de referência cadastral municipal como sendo “a rede de apoio básico de âmbito municipal para todos os serviços que se destinem a projetos, cadastros ou implantação e gerenciamento de obras, sendo constituída por pontos de coordenadas planimétricas, materializados no terreno, referenciados a uma única origem, o SGB, e a um sistema de representação cartográfica, permitindo a amarração e conseqüente incorporação de todos os trabalhos, de topografia e cartografia na construção e manutenção da Planta Cadastral Municipal e Planta Geral do Município. Sendo esta rede amarrada ao SGB, fica garantida a posição dos pontos de representação e a correlação entre os vários sistemas de projeção ou representação”.

Os elementos da RCM podem ter suas coordenadas plano-retangulares determinadas no sistema Transverso de Mercator (UTM, RTM³⁰, LTM³¹), bem como no sistema Topográfico Local (NBR-14166, 1998).

³⁰ RTM – Regional Transversa de Mercator

2.5.2 Precisão da Rede de Referência Cadastral Municipal

A RCM para atender às necessidades do cadastro urbano deverá ser projetada de forma que apresente precisão suficiente para ser usada em todas as atividades que necessitem ser referenciadas à superfície terrestre.

A tolerância posicional na definição dos vértices dos lotes e parcelas varia de país para país em função do desenvolvimento histórico-cartográfico e do valor da propriedade (ROCHA e BRANDÃO, 1999).

O estatuto civil da Suíça, por exemplo, definiu os níveis de precisões para os pontos de divisa de propriedade, conforme Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Níveis de precisão cadastral da Suíça

Regiões	Níveis de precisão	Características
01	3 cm	Regiões urbanas
02	9 cm	Regiões suburbanas
03	30 a 60 cm	Regiões rurais

Fonte: Rocha e Brandão, 1999

No Brasil, ainda, não existe uma definição do nível de precisão para os pontos de divisa de propriedade para o cadastro urbano. Entretanto, um passo significativo nesta direção foi dado pela Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais homologada pela Portaria do INCRA n.1101, de 17 de novembro de 2003, que estabeleceu a precisão de 50 cm (1σ) para os pontos de divisa de imóveis para o cadastro rural. Esta portaria atendeu ao estabelecido no artigo 9º do Decreto n. 4.449, de 30 de outubro de 2002, que regulamentou a Lei 10.267 (conhecida como Lei do INCRA), de 28 de agosto de 2001.

³¹ LTM- Local transversa de Mercator

2.5.3 Especificações da NBR-14166 para Implantação de Rede GPS

Nesta sessão serão apresentadas partes da especificação da NBR-14166, de relevância para esta pesquisa, referente à implantação de marcos de apoio imediato com o uso observações GPS.

A NBR-14166 estabelece que os marcos geodésicos de apoio imediato devem ser determinados a partir dos marcos geodésicos de precisão, por intermédio de poligonal da classe I-P (NBR-13133), ou por rastreamento de satélites, no método diferencial; triangulação ou trilateração ou outro método, desde que em termos de exatidão, seja igual ou melhor, que a obtida por essa classe de poligonal.

2.5.3.1 Receptores e Precisão de uma Linha Base

O desvio padrão das componentes horizontais (dX , dY , dZ) da linha base obtida pelo método relativo estático devem ser inferior a $10\text{ mm} + 2\text{ ppm} \cdot D$, o desvio da componente vertical inferior a $20\text{ mm} + 2\text{ ppm} \cdot D$. Além disso, o desvio do azimuth da linha base deve ser inferior a $1'' + \frac{5''}{D}$, sendo D o comprimento da linha base em quilômetros.

Para alcançar estas precisões com receptores de uma frequência, as sessões de observação devem ter duração de, pelo menos, 60 minutos com cinco satélites contínuos durante todo tempo de rastreio, observação e processamento de fase da portadora, coordenadas orbitais com precisão igual, ou melhor, que 1 ppm e baixo nível de multicaminhamento.

Para linhas base de comprimento superior a 50 km é necessário o uso de receptores de dupla frequência, possibilitando assim o processamento do sinal L3 ou sinal livre dos efeitos da ionosfera (ionosphere free). Contrariando a NBR, o comprimento aconselhável para uso de receptores de uma frequência não deve ultrapassar 25 km, pois acima desse valor dificilmente se consegue fixar ambigüidade.

2.5.3.2 Marcos de Apoio Imediato e Marcos de Azimute

Os locais escolhidos para a implantação dos marcos de apoio devem propiciar boa visibilidade do horizonte, tanto para aplicação da tecnologia de satélites quanto para o emprego da geodésica clássica. Os marcos geodésicos, sem intervisibilidade, devem ser acompanhados de um ou dois marcos de azimute (determinados por GPS), instalados a uma distância mínima, conforme Tabela 2.3. A precisão máxima de um azimute, determinado a partir do posicionamento relativo GPS, baseia-se no espaçamento mínimo entre os pares de estações intervisíveis. O valor do azimute entre um par de estações é determinado após os vetores serem ajustados e transformados para o sistema de referência local. A Tabela 2.3 fornece o espaçamento mínimo entre as estações considerando as precisões relativas do posicionamento e do azimute a ser obtido com 95% de confiança. A NBR-14166 usou a expressão a seguir para determinar o espaçamento mínimo em função da precisão desejada dos azimutes e a precisão da posição ajustada do vértice.

$$\text{espaçamento mínimo} = \frac{\text{precisão da posição}}{\tan(\text{precisão azimutal})}$$

Tabela 2.3 - Precisões dos Azimutes de Referência

	Precisão Azimutal requerida em segundos (95% de nível de confiança)					Espaçamento mínimo entre os pares de estações (m)
	1	2	4	6	10	
Precisão em mm da posição com GPS (com 95% de nível de confiança)	-	-	02	03	05	100
	-	02	04	06	10	200
	-	03	06	9	14	300
	02	04	08	12	19	400
	03	05	10	14	24	500
	03	06	12	18	29	600

Fonte: NBR-14166 da Associação Brasileira de Normas técnicas - ABNT

Essa norma recomenda que se realize, preliminarmente, uma rede de controle fechada por um polígono, sempre que o número de pontos geodésicos de apoio imediato a se implantar for superior a cinco. Essa rede de controle será formada por três ou mais pontos, denominados pontos de controle e conectados a pelo menos dois pontos

geodésicos de primeira classe (classe AP) do SGB. Caso haja disponível nas imediações da área, ao menos, um pilar de classe superior a AP, tais como os da Rede Geodésica GPS de São Paulo ou similares, pode-se usá-lo como único ponto de apoio para a rede de controle.

Preocupada com a ação de vandalismo e a operacionalidade da rede, a norma recomenda implantar os marcos geodésicos, de controle ou de apoio imediato, em locais com proteção adequada, tais como: monumentos estáveis e visibilidade para aplicação de metodologia clássica. A norma ainda recomenda evitar locais onde haja a possibilidade de implantação de obras futuras que poderiam prejudicar a estabilidade do marco ou a sua utilização.

2.5.3.3 Precisão das operações das medidas e exatidão dos resultados

Após o processamento das observações, os vetores independentes da rede de pontos de controle devem passar por um ajustamento vetorial pelo método dos mínimos quadrados, empregando-se como injunções os pontos de apoio do SGB. A precisão final dos vetores ajustados em relação aos pontos do SGB deve ser superior a 10 ppm ($\geq 1:100000$), considerando-se em 95% de nível de confiança.

Somente após o ajustamento da rede de controle com injunção ao SGB, é que os vetores pertencentes à rede de marcos geodésicos de apoio imediato poderão ser ajustados, empregando-se o mesmo processo de ajustamento vetorial e usando como injunções os pontos da rede de controle. A precisão dos vetores ajustados deve ser superior a 20 ppm ($\geq 1:50000$), com 95% de nível de confiança.

2.6 Considerações

Nesse Capítulo foram apresentados alguns conceitos e histórico sobre as redes geodésicas das clássicas às modernas redes atuais. Esse estudo iniciou-se com conceitos gerais sobre sistemas de referências de abrangência global e culminou com os conceitos de Redes de Referências de Cadastro Municipal. As redes globais representam o aspecto macro dos sistemas de referência, enquanto as municipais, o aspecto micro ou local. A

importância do conhecimento dos aspectos macro dos sistemas de referência é criar-se uma consciência de que os sistemas locais não são isolados, mas que eles representam, em última instância, um adensamento dos sistemas de referências situados no topo da pirâmide hipotética, que conforme analogia feita na parte introdutória deste trabalho. Na última parte desse capítulo foram apresentados alguns tópicos da NBR-14166 de relevância para a análise da precisão e confiabilidade de Redes de Referência Cadastral Municipal realizada com a tecnologia GPS.

CAPÍTULO 3 - AJUSTAMENTO E PRECISÃO DE REDES

3.1 Introdução

Ao se determinar o valor de grandezas físicas, certos fatores tais como: limitação humana, imperfeição dos instrumentos e instabilidade das condições ambientais contribuem, inevitavelmente, para imperfeição das observações. Assim, a desconfiança no resultado de uma única medição induz a necessidade de repetição de observações, sempre que se desejar uma medida confiável. Desta forma, obtêm-se medições redundantes e discrepantes que geram um problema a ser resolvido; ou seja, extrair destas observações um resultado único que represente com confiança a grandeza medida. Este problema é solucionado pelo ajustamento das medições que além oferecer um resultado de maior confiança, avalia a presença de erros grosseiros nas observações e estima a precisão da solução adotada. Por isso, o ajustamento constitui-se em uma ferramenta fundamental para a ciência, a engenharia e é, particularmente, indispensável para a Mensuração.

Os casos mais simples de ajustamento ocorrem quando medições são efetuadas sobre as próprias grandezas incógnitas, ou seja, quando a observação é direta. Menos simples é o ajustamento condicional, em que as incógnitas de interesse ligam-se entre si por equações de condição. Outro caso é o ajustamento paramétrico, no qual as incógnitas procuradas são expressas por relações funcionais conhecidas. Por último, tem-se o caso geral, conhecido como método de ajustamento combinado, que se constitui na combinação dos dois métodos anteriores, ou seja, dos métodos condicional e paramétrico. Em quaisquer dos casos, procura-se livrar as observações das inconsistências inerentes a qualquer medição, ajustando-as e a seus parâmetros. Esse

procedimento conduzirá a uma solução única, coerente com o modelo matemático escolhido, (GEMAEL, 1994).

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), proposto de forma independente por Legendre (1752 – 1833) e por Gauss (1777 – 1855), há quase dois séculos, é atualmente o método aceito pela Geodésia como critério mais adequado para ajustamento de observações repetidas. Esse método consiste em aceitar como melhor estimativa das observações redundantes o valor que torne mínima a soma dos quadrados dos resíduos. Desde sua proposição, ele teve tamanha empatia com os trabalhos geodésicos que Perrier³² (1939), citado por Gemael (1994), afirma que a história deste método se confunde com a própria história da Geodésia.

O MMQ se manteve inalterado até bem pouco tempo, mas os avanços da Estatística mostraram a conveniência da revisão de alguns conceitos. Assim, algumas restrições da teoria clássica, tais como, a não-correlação das observações e a necessidade de os resíduos obedecerem à distribuição normal são hoje dispensáveis, já que as grandezas observadas são encaradas como variáveis aleatórias ou estocásticas.

3.2 Modelo Matemático

É um sistema teórico ou um conceito abstrato pelo qual se descreve um fenômeno físico ou uma série de eventos. Este modelo obviamente não representa fielmente o fenômeno real, mas apenas relaciona alguns aspectos ou propriedades que interessam à investigação. Desta forma, o modelo é vinculado a um propósito particular de tal sorte que um mesmo fenômeno físico pode ser descrito por mais de um modelo. Portanto, os modelos matemáticos são artifícios muito usuais nas investigações científicas e tecnológicas, por que reproduzem, conceitualmente, as interligações entre as variáveis conhecidas e as variáveis desconhecidas de um fenômeno físico, de uma maneira simplificada e adequada aos cálculos. Por exemplo, para se determinar o efeito da refração sobre as coordenadas de um astro, o geodesta substitui a atmosfera real por um esquema físico mais simples: um conjunto de camadas gasosas concêntricas e

³² PERRIER, G. (1939). *La petite histoire de la Géodésie*. Paris: Presses Universitaires de France.

homogêneas. Essa idealização conduz a um modelo matemático relativamente simples, mas capaz de resolver grande número de problemas, (GEMAEL, 1994).

Mikhail e Ackermann (1976), afirmam ser os modelos matemáticos, freqüentemente, compostos por dois elementos igualmente importantes: o modelo funcional e modelo estocástico. O modelo funcional geralmente descreve as propriedades determinísticas do fenômeno físico ou considerações sobre o evento. Por outro lado, o modelo estocástico descreve as propriedades não-determinísticas ou estocásticas (probabilísticas) das variáveis envolvidas, particularmente aquelas que representam as observações.

Na Mensuração, particularmente em ajustamento usando o MMQ, alguns parâmetros desconhecidos não podem ser medidos diretamente, então é necessário formular funções (modelos funcionais) que relacione tais parâmetros com as grandezas observáveis. Os modelos matemáticos da Mensuração são bem conhecidos, pois se baseiam em conceitos da geometria e leis físicas simples. Esses modelos contrastam-se com os modelos das ciências sociais, pois os modelos matemáticos fundamentais destas ciências freqüentemente são desconhecidos e necessitam do auxílio técnicas especiais que para sua elaboração (VANICEK e KRAKIWSKY, 1986).

Atualmente, o modelo estocástico tem grande importância no ajustamento de observações devido à tendência moderna de substituir a idéia de “erros de observações” pelo conceito de “propriedades estatísticas das observações”. Assim, as observações passam ser consideradas como amostras extraídas de uma população contínua; ou seja, uma variável aleatória com sua correspondente distribuição probabilística, (GEMAEL, 1994).

3.2.1 Matriz de Peso

As observações efetuadas podem ser consideradas como amostra de uma população cujos parâmetros, média μ e variância σ^2 , podem ser estimados pelas estatísticas amostrais, $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$, que representam, respectivamente, a média da amostra e o indicativo de precisão das observações. Esse indicativo de precisão, conhecido como variância, é muito importante para a análise da qualidade do ajustamento.

Normalmente, as observações não oferecem o mesmo “grau de confiança”, entretanto, pode-se “homogeneizá-las”, multiplicando-as por “pesos”, tanto maior quanto maior for a confiança que as observações inspirem. Os valores dos pesos são inversamente proporcionais aos valores de $\hat{\sigma}^2$.

Designando por Σ_{ll} a matriz simétrica variância-covariância (estimada) do vetor observações; e por σ_o^2 um fator de escala, valor adimensional numericamente igual à variância da observação a qual atribuiu-se “peso unitário” (variância “*a priori*”), então dividindo Σ_{ll} por σ_o^2 obtém-se uma nova matriz simétrica, denominada matriz dos coeficientes do peso (ou matriz dos co-fatores das observações):

$$\mathbf{Q}_{ll} = \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \Sigma_{ll} \quad (3.1)$$

A matriz dos pesos é obtida pela inversão da matriz $\mathbf{Q}_{ll}$.

$$\mathbf{Q}_{ll}^{-1} = \sigma_o^2 \cdot \Sigma_{ll}^{-1} = \mathbf{P} \quad (3.2)$$

3.3 Ajustamento de Observações

O ajustamento de observações, como dito anteriormente, é um procedimento matemático que usa o princípio dos mínimos quadrados para tornar consistente um conjunto de observações redundantes e discrepantes. Classicamente, o ajustamento pode ser feito por dois métodos diferentes: método paramétrico (ou indireto) e método condicional (ou dos correlatos), ou ainda pela combinação desses dois métodos (método combinado ou Gauss-Helmert). Evidentemente, quaisquer dos métodos chegam aos mesmos resultados. Os métodos, condicionais e paramétricos, diferenciam-se em alguns aspectos significativos ao longo de suas operações.

O método condicional consiste do ajustamento das observações a um modelo matemático (equações de condição), através do qual se determinam as respectivas correções de cada observação. As observações corrigidas são obtidas pela adição das

correções às observações originais (brutas). A amarração das observações corrigidas ao sistema de referência e a determinação das coordenadas de seus vértices é uma operação feita após o término do ajustamento.

Por outro lado, o método paramétrico fundamenta-se na estimativa da variação dos parâmetros desconhecidos para obter esses mesmos parâmetros ajustados, ao fim do processo de compensação. Uma vantagem deste método é que as grandezas observadas são expressas em função dos parâmetros desconhecidos (incógnitas), que são as próprias coordenadas, no caso de redes em geral. Assim, a ligação das observações corrigidas ao sistema de referência é feita de maneira integrada durante o processo de ajustamento.

O método condicional é mais indicado quando o grau de liberdade (diferença entre o número de observações e o número de incógnitas) é menor que o número de incógnitas. Esse método foi classicamente o mais usado até a popularização dos recursos computacionais que possibilitaram a resolução de sistemas com grande número de equações (DUPRAZ, 1985).

O método paramétrico apresenta um elevado número de equações de observações, pois a cada observação corresponde uma equação (também chamada equação de erro). Entretanto, o sistema de equações normais resultante possui o número de equações idêntico ao número de incógnitas. Nos dias atuais, esse método é mais usado devido à grande disponibilidade de recursos computacionais bem como pela facilidade e simplicidade na elaboração das equações de erro, apesar de serem numerosas (KAVOURAS, 1982). Assim, o ajustamento dos vetores GPS é, na maioria das vezes, feito pelo método de ajustamento paramétrico. Por esta razão, a seguir são mostrados alguns detalhes gerais sobre método paramétrico, contextualizando-os ao ajustamento de vetores GPS.

3.3.1 Equação das observações

O vetor das linhas bases ajustadas pode ser escrito como função do vetor da linha base bruta (sem ajustamento) e os resíduos:

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_b + \mathbf{V} \quad (3.3)$$

onde:

$\mathbf{L}_b$: Vetor (3n x 1) das componentes das linhas bases processadas a partir de observações GPS;

$\mathbf{V}$: Vetor (3n x 1) dos resíduos, ou seja, diferença entre os valores ajustados e os valores brutos;

$\mathbf{L}_a$: Vetor (3n x 1) das componentes das linhas bases ajustadas;

Já o vetor dos parâmetros ajustados (na realidade, as coordenadas procuradas) pode ser escrito em função do valor de parâmetros aproximados acrescido de uma correção.

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_o + \mathbf{X} \quad (3.4)$$

onde:

$\mathbf{X}_o$: Vetor (3u x 1) dos parâmetros aproximados, isto é, as coordenadas aproximadas dos pontos;

$\mathbf{X}$: Vetor correção (3u x 1);

$\mathbf{X}_a$: Vetor (3n x 1) dos parâmetros ajustados, ou seja, as coordenadas ajustadas dos pontos.

No método paramétrico, as observações ajustadas, ou seja, os valores das componentes dos vetores ajustados podem ser escritos em função dos parâmetros ajustados. Em outras palavras, as observações verificam o modelo matemático:

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{F}(\mathbf{X}_a) \quad (3.5)$$

Substituindo o primeiro membro da Eq. (3.5) pela Eq. (3.3) e linearizando o segundo membro com a fórmula de TAYLOR³³, desconsiderando os termos de potência igual ou superiores à segunda ordem:

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_a} \right|_{\mathbf{X}_a=\mathbf{X}_0} \mathbf{X} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_a} \right|_{\mathbf{X}_0} \quad (3.7)$$

onde:

$\mathbf{A}$: Matriz coeficiente dos parâmetros da equação das observações linearizada através da fórmula de Taylor.

O modelo matemático de ajustamento das observações GPS pode ser considerado linear. Portanto, nesse caso, a matriz $\mathbf{A}$ será igual à matriz dos coeficientes da equação dos erros.

Denominando a matriz dos parâmetros aproximados por $\mathbf{L}_0$:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) \quad (3.8)$$

E por $\mathbf{A}$, a matriz dos coeficientes da correção, tem-se:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.9)$$

Assim, substituindo a Eq. (3.7) e (3.8) na Eq. (3.6), têm-se:

³³ Fórmula de TAYLOR : $f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{L}_o \quad (3.10)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_o \quad (3.11)$$

E, finalmente, fazendo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_b - \mathbf{L}_o \quad (3.12)$$

Obtém-se o modelo linearizado das equações das observações para o método dos parâmetros para o ajustamento GPS:

$${}_{3n}\mathbf{V}_1 = {}_{3n}\mathbf{A}_{3u} \cdot {}_{3u}\mathbf{X}_1 - {}_{3n}\mathbf{L}_1 \quad (3.13)$$

onde:

n : número de vetores;

u : número de pontos desconhecidos (incógnitos).

As equações de erro podem ser escritas na forma algébrica, conforme a seguir:

$$v_{x_{12}} = -X_1 + 0Y_1 + 0Z_1 + X_2 + 0Y_2 + 0Z_2 + \dots + 0X_n - 0Y_n + 0Z_n - l_{x_{12}}$$

$$v_{y_{12}} = 0X_1 - Y_1 + 0Z_1 + 0X_2 + Y_2 + 0Z_2 + \dots + 0X_n - 0Y_n + 0Z_n - l_{y_{12}}$$

$$v_{z_{12}} = 0X_1 + 0Y_1 - Z_1 + 0X_2 + 0Y_2 + Z_2 + \dots + 0X_n - 0Y_n + 0Z_n - l_{z_{12}}$$

.....

$$v_{x_{n1}} = X_1 + 0Y_1 + 0Z_1 + 0X_2 + 0Y_2 + 0Z_2 + \dots - X_n + 0Y_n + 0Z_n - l_{x_{n1}}$$

$$v_{y_{n1}} = 0X_1 + Y_1 + 0Z_1 + 0X_2 + 0Y_2 + 0Z_2 + \dots + 0X_n - Y_n + 0Z_n - l_{y_{n1}}$$

$$v_{z_{n1}} = 0X_1 + 0Y_1 + Z_1 + 0X_2 + 0Y_2 + 0Z_2 + \dots + 0X_n + 0Y_n - Z_n - l_{z_{n1}}$$

3.3.2 Equação Normal

Aplicando o MMQ na equação matricial dos resíduos obtém-se, sucessivamente:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = (\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{L}^T) \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{L}) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (3.16)$$

Obs: Os dois termos da Eq. (3.16) são escalares, então esses termos são iguais.

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} - 2 \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (3.17)$$

Derivando a Eq. (3.17), em função de $\mathbf{X}$ e igualando a zero, obtém-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V})}{\partial \mathbf{X}} = 2 \cdot \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Fazendo uma transposição, obtém-se a equação normal:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T - (\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{0}$$

fazendo-se:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

obtêm-se:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{n} \quad (3.19)$$

A maioria dos termos das equações foi descrita na seção anterior (3.3.1). A seguir são identificados os termos não descritos naquela seção:

O termo da Eq. (3.19), $\mathbf{N}^{-1}$ (inversa da matriz dos coeficientes dos parâmetros desconhecidos da equação normal), é igual à matriz co-fator dos parâmetros ($\mathbf{Q}_{xx}$) que multiplicada pela variância “*a posteriori*” $\left(\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{r} \right)$, resulta na matriz variância-covariância dos parâmetros (Σ_{xx}).

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{xx} \quad (3.20)$$

$\mathbf{P}$: matriz dos pesos atribuídos às observações;

É importante lembrar que a equação (3.19) somente é válida para o caso em que a matriz dos coeficientes das equações normais ($\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$) admita a inversa ordinária $\mathbf{N}^{-1}$. A não fixação de uma ou mais injunções (ajustamento livre) torna o sistema indeterminado, fato traduzido algebricamente pela singularidade da matriz $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$. No caso do ajustamento livre, a singularidade pode ser resolvida pelo uso da inversa generalizada pseudo inversa $\mathbf{N}^+$ que pode ser obtida decompondo-se a matriz $\mathbf{N}$ em seus valores próprios e vetores próprios (PELZER³⁴, 1980; BRONSON³⁵, 1993) citados por (MORAES, 1998a).

Neste capítulo foram discutidos os princípios do ajustamento usando o MMQ. Hoje, quando se dispõem de recursos computacionais a baixo custo, o método paramétrico tem sido o mais usado, por essa razão ele foi mostrado em algumas de suas particularidades, ou seja, a formação das equações dos erros e a seqüência para se obter às equações normais. Assim, o método paramétrico será o método usado nesta pesquisa.

³⁴ PELSER, H. (1980). “Some criteria for accuracy and the reliability of network”. Beiträge aus der Bundesrepublik Deutschland zur Vorlage bei der XVII. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik vom 2.

³⁵ BRONSON, R. (1993). “Matrizes”. Lisboa: MacGraw-Hill.

Foram, também, discutidos alguns aspectos de precisão do ajustamento, como a atribuição de peso às observações e a matriz variância-covariância das observações. Nos capítulos seguintes serão discutidos aspectos relacionados à precisão e confiabilidade de redes geodésicas, os quais em conjunto buscam analisar a qualidade das redes geodésicas.

CAPÍTULO 4 - PRECISÃO E ELIPSES DE ERRO

Após o ajustamento das observações GPS, obtém-se a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados em cuja diagonal se encontram as variâncias das coordenadas ajustadas. As raízes dessas variâncias fornecem o erro médio ou precisão (σ_x , σ_y e σ_z) das coordenadas ajustadas. Uma análise de precisão da posição é fornecida pela teoria da elipse de erros bidimensional através da qual se avalia a precisão em todas as direções do plano, e não somente na direção X, Y.

Neste capítulo serão mostradas duas abordagens de estudo da teoria da elipse de erros bidimensionais: a clássica e outra usando a tecnologia do círculo de Mohr.

A determinação da elipse erro consiste, basicamente, em calcular o valor dos seus semi-eixos principais e a direção do semi-eixo maior. Esses valores são obtidos através da aplicação da teoria de propagação erros à matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas e à equação de rotação de eixos. A matriz variância-covariância, que é representada por Σ_{xx} , é obtida pela Eq. (4.1).

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde:

Σ_{xx} : matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas;

$\hat{\sigma}_o^2$: variância “*a posteriori*”;

$\mathbf{A}$: matriz dos coeficientes das equações de observação;

$\mathbf{P}$: matriz dos pesos das observações;

$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$: matriz co-fatores da matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas;

σ_x^2, σ_y^2 : variância das coordenadas ajustadas X e Y, respectivamente;

σ_{xy} : covariância x, y;

4.1 Análise Clássica da Elipse de Erro

Aplicando-se a teoria de propagação dos erros à matriz variância-covariância, através dos coeficientes da função de rotação dos eixos coordenados X, Y, obtém-se a matriz variância-covariância correspondente a uma direção qualquer φ .

$$\Sigma_{xx\varphi} = \begin{pmatrix} \sigma_{x\varphi}^2 & \sigma_{xy\varphi} \\ \sigma_{yx\varphi} & \sigma_{y\varphi}^2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Os valores dos elementos da matriz $\Sigma_{xx\varphi}$ podem ser calculados pelas equações: (4.3), (4.4) e (4.5).

$$\sigma_{x\varphi}^2 = \sigma_x^2 \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (4.3)$$

$$\sigma_{y\varphi}^2 = \sigma_x^2 \cdot \sin^2 \varphi + \sigma_y^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (4.4)$$

$$\sigma_{xy\varphi} = -(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sigma_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (4.5)$$

A Eq. (4.3) é a expressão de uma curva conhecida como podária com origem no ponto, (GEMAEL, 1994), desta curva obtém-se o valor da variância para qualquer direção φ desejada. Derivando essa equação e igualando-a a zero, obtém-se a Eq. (4.6), que fornece o ângulo correspondente à direção da maior ou menor variância da

curva podária. A raiz quadrada da variância calculada com esse ângulo corresponde a um dos semi-eixos principais da elipse de erro. O outro eixo principal da elipse é perpendicular a esse primeiro eixo principal. Neste estudo, foram considerados positivos os ângulos de sentido anti-horário, e tendo por origem, o eixo das abscissas do sistema de coordenadas X, Y.

$$\operatorname{tg}(2\psi) = \frac{2 \cdot \sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (4.6)$$

A fim de diferenciar do ângulo φ , correspondente a uma direção qualquer da podária, o ângulo do eixo principal determinado pela Eq. (4.6) será representado por ψ . E em função deste ângulo podem-se determinar os valores dos semi-eixos principais da elipse de erro ($\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$), a partir das Eq. (4.7) e (4.8).

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_x^2 \cdot \cos^2 \psi + \sigma_y^2 \cdot \sin^2 \psi + \sigma_{xy} \cdot \sin(2\psi) \quad (4.7)$$

$$\sigma_{\min}^2 = \sigma_x^2 \cdot \sin^2 \psi + \sigma_y^2 \cdot \cos^2 \psi - \sigma_{xy} \cdot \sin(2\psi) \quad (4.8)$$

As Eq. (4.7) e (4.8) podem ser reescritas através do uso de identidades trigonométricas para substituir as funções quadráticas $\sin^2 \psi$ e $\cos^2 \psi$ por outras mais simples. Então, têm-se as Eq. (4.9) e (4.10) que são idênticas às que aparecem na literatura sobre elipse de erro.

$$\sigma_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2} \right) \cdot \cos(2\psi) + \sigma_{xy} \cdot \sin(2\psi) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\min}^2 = \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2} \right) \cdot \cos(2\psi) - \sigma_{xy} \cdot \sin(2\psi) \quad (4.10)$$

Os valores máximos e mínimos da variância, também, podem ser expressos de forma mais compacta pelas Eq. (4.11) e (4.12). Essas expressões, embora mais simples, são pouco encontradas na literatura.

$$\sigma_{máx}^2 = \sigma_y^2 + \sigma_{xy} \cdot \cotg \psi \quad (4.11)$$

$$\sigma_{mín}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \cdot \cotg \psi \quad (4.12)$$

4.2 Análise da Elipse de Erro através do Círculo de Mohr

A técnica do círculo de Mohr foi desenvolvida pelo engenheiro Otto Mohr em 1882, e é usada normalmente para representação gráfica do estado plano de tensões, análise de esforços cisalhantes da mecânica dos solos.

O uso dessa técnica para avaliar a precisão de ajustamento, da mesma forma que na análise clássica, baseia-se nos valores da matriz variância-covariância dos parâmetros desconhecidos ajustados (Σ_{xx}). Os valores de variância e covariância dos pontos são representados em posições diametralmente opostas no círculo de Mohr, através de dois pontos X e Y. As coordenadas desses pontos correspondem aos valores da variância (σ) e covariância (σ_{xy}). A variância é marcada no eixo horizontal (abscissa) e covariância na vertical (ordenada), (HAUG,1984).

Figura 4.1 - Círculo de Mohr para análise da elipse de erro. Fonte: Adaptado de Haug,1984

O uso da técnica do círculo de Mohr, por ser uma solução gráfica, torna fácil a obtenção dos valores máximos e mínimos da variância, bem como dos ângulos correspondentes a esta direção, (HAUG, 1984). A Figura 4.1 mostra os elementos do círculo de Mohr para a análise da elipse de erro. Nessa figura, a variância da direção-X foi assumida como maior que a da direção-Y. Assim as coordenadas dos pontos X (σ_x^2, σ_{yx}) e Y (σ_y^2, σ_{yx}) correspondem às variâncias e covariâncias da posição ajustada na direção-X e na direção-Y, respectivamente.

A linha XY entre estes pontos é o diâmetro do círculo de Mohr para esta posição. Embora, as covariâncias σ_{xy} e σ_{yx} tenham valores iguais, elas são consideradas de sinais contrários na análise com círculo de Mohr. Assim, o centro C do círculo situa-se sobre o eixo de variância, exatamente no meio da linha XY. As variâncias principais, máxima e mínima, são encontradas pela construção do círculo através dos pontos X e Y, e centro em C. A interseção do círculo com o eixo de variância em B e A, corresponde aos valores máximo e mínimo da variância, respectivamente (HAUG, 1984).

Figura 4.2 - Outras relações do círculo de Mohr

As expressões das variâncias máxima e mínima, Eq. (4.9) e (4.10), podem ser facilmente observadas na Figura 4.1, enquanto as Eq. (4.11) e (4.12) são observadas na Figura 4.2.

4.3 Padrões das Elipses de Erro

Os valores de σ_x^2 , σ_y^2 e σ_{xy} são os indicadores do comportamento da elipse de erro em relação ao sistema cartesiano X, Y. A covariância, por exemplo, é o elemento que caracteriza a existência do ângulo de rotação (ψ) dos eixos principais da elipse. A análise da Eq. (4.6), mostra que o valor do ângulo ψ é zero, quando a

covariância (σ_{xy}) é igual a zero. Como consequência, os eixos principais da elipse corresponderão às raízes dos valores σ_x^2 e σ_y^2 , conforme Figura 4.3.

Quando os valores σ_x^2 e σ_y^2 são iguais e σ_{xy} igual a zero, a elipse de erro se degenerará em um círculo.

Figura 4.3 - Padrão da elipse para $\sigma_{xy} = 0$

Mais dois casos podem ser analisados: o primeiro quando $\sigma_{xy} > 0$ e o segundo quando $\sigma_{xy} < 0$. O primeiro caso é mostrado na Figura 4.4, na qual se pode perceber o eixo principal maior da elipse orientado na direção na NE – SW do sistema de eixo cartesiano X, Y.

Figura 4.4 - Padrões da elipse para $\sigma_{xy} > 0$

O segundo caso, quando $\sigma_{xy} < 0$, é mostrado na Figura 4.5, nesse caso o eixo principal maior da elipse está orientado na direção na NW – SE do sistema de eixo cartesiano X, Y.

Figura 4.5 - Padrões da elipse para $\sigma_{xy} < 0$

Analisando as Figuras 4.3, 4.4, 4.5, algumas características da elipse de erro em relação aos eixos coordenados X, Y podem ser destacadas. A primeira corresponde ao fato de o eixo principal maior da elipse sempre se aproximar do eixo que possui maior valor de variância. A segunda característica, não tão óbvia quanto a primeira, mostra o fato de que o ângulo ψ obtido pela Eq. (4.6), tanto pode corresponder ao eixo principal maior como ao eixo principal menor da elipse (Figuras 4.4.b e 4.5.b).

Embora não retratado claramente nas três figuras anteriores, quando $\sigma_{xy} \neq 0$ e $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, o ângulo $\psi = 45^\circ$, que é a situação desejável para a elipse erro, pois nesse caso particular, as variâncias σ_x^2 e σ_y^2 contribuem de forma idênticas para formação da elipse.

As Figuras 4.4.a e 4.5.a mostram o caso em que $\sigma_{xy} \neq 0$ e $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$, no qual se observa que o ângulo formado entre o semi-eixo maior da elipse de erro e a abscissa do sistema de eixos coordenados X, Y é menor que 45° .

Já as Figuras 4.4.b e 4.5.b mostram o outro caso em que o ângulo anterior é maior que 45° que corresponde à situação de $\sigma_{xy} \neq 0$ e $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$.

Vale salientar que os valores dos eixos da elipse de erro obtidos pelas Eq. (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) correspondem a um desvio padrão (39%). No caso da Rede Referência Cadastral Municipal da Cidade de Vitória os valores dos eixos da elipse de erro foram multiplicado por 2,447 desvios padrão (95%).

Este capítulo mostrou um dos aspectos da qualidade do ajustamento pelo MMQ, a precisão das coordenadas, que é obtida a partir da matriz variância-covariância (Σ_{xx}). Essa precisão é, na verdade, a propagação da matriz variância-covariância das observações através do modelo matemático, sem qualquer influencia do valor das observações, supostas eivadas apenas de erros aleatórios. Nos próximos capítulos serão vistos aspectos relacionados à confiabilidade, iniciando-se pelo estudo de testes de hipóteses.

CAPÍTULO 5 - HIPÓTESES PARA DETECÇÃO DE ERROS GROSSEIROS

O controle de qualidade de redes deve dispor de mecanismo de teste estatístico para detectar e remover possíveis erros grosseiros e, além disso, avaliar os efeitos dos erros grosseiros não detectáveis nos parâmetros desconhecidos. A eficiência desses testes dependerá da controlabilidade da rede, ou seja, quanto mais controlável for a rede, maior será a probabilidade de se detectar falhas através dos testes estatísticos. Esse controle sobre as observações expressa a confiabilidade da rede, (LEICK, 1995).

Neste capítulo serão analisadas as hipóteses nas quais os testes de detecção e localização dos erros grosseiros se baseiam.

5.1 Teste de Hipóteses

Testes de hipóteses consistem em ferramentas estatísticas amplamente usadas por engenheiros e cientistas em combinação com o método dos mínimos de quadrados. Esses testes são freqüentemente usados para comparar resultados experimentais com determinado padrão. Nestes testes busca-se avaliar, através de certas estatísticas amostrais, a consistência da suposição de que uma certa amostra foi realmente extraída de uma população com determinada função de distribuição, (MIKHAIL E ACKERMANN, 1976).

As suposições (hipóteses) estatísticas formalizam-se através de sentenças (explícita ou implícita) sobre a probabilidade de distribuição de uma determinada variável estocástica. Assim, os testes de hipóteses são procedimentos que conduzem a

uma decisão acerca de suposições (com base em uma amostra). Por exemplo, a detecção dos erros grosseiros é feita através da formulação de hipóteses estatísticas sobre existência ou não de erros grosseiros nas observações de determinado ajustamento.

As hipóteses básicas são formuladas com o propósito de serem refutadas ou invalidadas. Dessa forma, quando se deseja decidir se uma moeda é viciada, formula-se a hipótese de que ela não o seja, isto é, $p = 0,5$; em que p é a probabilidade de caras (SPIEGEL, 1993). Entretanto, nos testes aplicados em ajustamentos de redes, quase sempre, são formuladas hipóteses básicas no pressuposto de que sejam verdadeiras. Essas hipóteses estatísticas são chamadas hipóteses nulas (H_0) ou hipóteses básicas. Quaisquer outras hipóteses diferentes dessas são denominadas hipóteses alternativas (H_a).

No ajustamento de redes geodésicas, o modelo matemático e modelo estocástico são baseados em um conjunto de suposições que correspondem às hipóteses estatísticas. Neste caso, testes estatísticos são usados para verificar a validade dessas hipóteses. Por exemplo, os pressupostos básicos dos modelos matemáticos e estatísticos dos ajustamentos de rede geodésicas são:

- ✓ Inexistência de erros grosseiros nas observações;
- ✓ O modelo matemático fornece uma descrição correta das relações entre as observações e os parâmetros desconhecidos;
- ✓ O modelo estocástico escolhido para as observações descreve corretamente as propriedades estocásticas das observações.

A decisão de um teste de hipótese implica a **não rejeição ou a rejeição** da hipótese nula, que correspondem a quatro casos possíveis, mostrados na Figura 5.1:

- não rejeição de uma hipótese realmente verdadeira;
- rejeição de uma hipótese realmente verdadeira – erro tipo I;
- rejeição de uma hipótese realmente falsa;
- não rejeição de uma hipótese realmente falsa – erro tipo II.

O erro indicado na letra (b) é conhecido como erro do tipo I (ou erro alfa - α). A probabilidade máxima admitida de se correr o risco de um erro tipo I é conhecida como *nível de significância*. Em outras palavras, nível de significância é probabilidade de se rejeitar uma hipótese H_0 verdadeira:

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$$

O nível de significância geralmente é fixado “*a priori*”, e os valores usuais em Geodésia são $\alpha = 0,05$ (5%) ou $\alpha = 0,1$ (10%), (GEMAEL,1994).

O erro indicado na letra (d) é conhecido como erro do Tipo II (ou erro beta - β). A probabilidade de se incorrer em um erro desse tipo é expressa por:

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$$

Chama-se *potência do teste* à probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira, ou seja, tomar a decisão correta de rejeitar observação com erros grosseiros. A importância da potência do teste é sua capacidade de revelar a falsidade de H_0 quando a hipótese alternativa H_a é verdadeira.

$$1 - \beta = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$$

É importante ressaltar que as observações obtidas na Mensuração são consideradas amostras extraídas de uma população, por isso a razão de testá-las por meio de testes de hipóteses, a fim de concluir sobre sua aceitação ou não. Os dados de amostras que resultem em valores discordantes da hipótese nula devem ser testados para verificar: se a discordância é significativa (não aleatória), o que implicaria sua rejeição, ou se essa discordância pode ser simplesmente atribuída ao acaso, o que não invalidaria a hipótese (GEMAEL, 1994).

Situação Real \ Decisão	Hipótese H_0 é VERDADEIRA	Hipótese H_0 é FALSA
H_0 NÃO É REJEITADA	Decisão Correta $P = 1 - \alpha$	Decisão Incorreta $P = \beta$ (erro Tipo II)
H_0 É REJEITADA	Decisão Incorreta $P = \alpha$ (erro Tipo I)	Decisão Correta $P = 1 - \beta$

Figura 5.1 - Quadro de decisões e suas probabilidades

O investigador deve planejar os testes de hipóteses que suportarão suas decisões, buscando minimizar o risco de uma decisão incorreta. Entretanto, a Figura 5.2 ressalta uma situação paradoxal; pois a área hachurada da direita mostra a região de rejeição da hipótese nula H_0 , ou seja, a probabilidade de um erro do tipo I, já a área hachurada da esquerda corresponde à probabilidade de não rejeição de H_0 quando H_a é verdadeira; ou seja, probabilidade de se cometer um erro do tipo II. Mikhail e Ackermann (1976), constataam não ser possível tornar ambos os erros α e β , arbitrariamente pequenos, pois a tentativa de diminuir a probabilidade de um erro implica o aumento da probabilidade do outro. O equilíbrio entre os erros tipo I e tipo II depende do propósito do teste.

Figura 5.2 - Representação dos erros Tipo I (α) e Tipo II (β)

5.2 Hipóteses para Detecção de Erros Grosseiros

Como visto na seção anterior, uma das primeiras providências na elaboração de testes estatísticos é definir as suposições básicas, isto é, a hipótese nula H_0 e a hipótese alternativa H_a . Embora o ajustamento pelo MMQ não exija que as observações obedeçam à função de distribuição normal, essa exigência é um pressuposto obrigatório para aplicação de testes estatísticos nas estatísticas amostrais destas observações, (VANICEK e KRAKIWSKY, 1986).

A seguir são apresentadas as hipóteses mais usuais relacionadas às observações.

5.2.1 Hipótese Nula relacionada às Observações

O MMQ pressupõe observações livres de erros grosseiros e erros sistemáticos. Assim, a suposição de ajustamento de rede pode ser expressa nos seguintes termos: as observações são normalmente distribuídas com valor médio esperado $A \cdot X$ e matriz variância-covariância Σ_{ll} . De uma forma geral, a hipótese nula adequada ao teste estatístico de ajustamentos de observações pode ser uma afirmação como a que se segue:

$$H_0: l_b \sim N(A X, \sigma_o^2 \cdot P^{-1}) \quad (5.1)$$

onde:

$l_b \sim N(\mu, \sigma)$: observações normalmente distribuídas com os parâmetros: valor médio esperado μ e desvio padrão σ ;

$A X$: vetor observações ajustadas;

$\Sigma_{ll} = \sigma_o^2 \cdot P^{-1}$: matriz variância-covariância das observações;

5.2.2 Hipóteses Alternativas relacionadas às Observações

Para cada hipótese nula, existem infinitas escolhas para hipótese alternativa. No caso de ajustamento de observações, quando a hipótese nula falha, a primeira suposição,

naturalmente candidata, é a hipótese alternativa que afirma que as observações não saíram de uma população com distribuição normal, ou seja:

$$H_a: l_b \neq N(\mathbf{A}\mathbf{X}, \sigma_o^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}) \quad (5.2)$$

O teste estatístico da hipótese nula H_0 contra a hipótese alternativa H_a , definida acima, é feito através do chamado “teste de aderência - χ^2 ”, que determina se o histograma dos resíduos é compatível com a suposta função de densidade probabilística, usualmente, a distribuição normal. Vanicek e Krakwisky (1986) afirmam que esse teste é crucial, pois todos os outros testes fundamentam-se na suposição de normalidade da distribuição.

Kuang (1996), considerando que várias experiências têm mostrado que os processos típicos de medição em Mensuração seguem a lei estatística da distribuição normal, propõe e discute quatro hipóteses alternativas de observações supostas com distribuição normal, cujas estatísticas amostrais, média e variância, diferem dos valores especificados na hipótese nula. As hipóteses propostas e seus respectivos significados são mostradas a seguir:

$$1^a) \quad H_{a1}: l_b \sim N(\mathbf{A}\mathbf{X}, \tilde{\sigma}_o^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}) \quad (5.3)$$

A primeira das hipóteses alternativa, H_{a1} , considera que um esquema de peso incorreto pode ter sido adotado (isto é, $\tilde{\sigma}_o^2 \neq \sigma_o^2$).

$$2^a) \quad H_{a2}: l_b \sim N(\mathbf{A}\mathbf{X} + \nabla_1, \sigma_o^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}) \quad (5.4)$$

A segunda hipótese alternativa proposta, H_{a2} , supõe a existência de erro grosseiro ($\nabla_l \neq 0$).

$$3^a) \quad H_{a3}: l_b \sim N(\mathbf{B}\mathbf{Y}, \sigma_o^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}) \quad (5.5)$$

A terceira hipótese alternativa proposta, H_{a3} , considera que o modelo matemático funcional pode estar incorreto ($\mathbf{B}\mathbf{Y} \neq \mathbf{A}\mathbf{X}$).

$$4^a) \quad H_{a4}: l_b \sim N(\mathbf{B}\mathbf{Y}, \tilde{\sigma}_o^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}) \quad (5.6)$$

Já a quarta hipótese alternativa proposta, H_{a4} , considera que tanto o modelo matemático funcional quanto a estimativa de precisão podem estar incorretos ($\mathbf{B}\mathbf{Y} \neq \mathbf{A}\mathbf{X}$ e $\tilde{\sigma}_o^2 \neq \sigma_o^2$).

Mesmo reduzindo o universo das hipóteses alternativas que justifiquem a rejeição da hipótese nula às quatro anteriores, ainda assim, decidir-se pela hipótese alternativa correta não é uma tarefa trivial. A seleção da hipótese alternativa mais apropriada requer conhecimento significativo dos procedimentos de coletas de dados bem como da análise dos resultados, (KUANG, 1996).

Felizmente, os modelos matemáticos funcionais que relacionam as observáveis da Mensuração com os parâmetros desconhecidos são bem definidos, já que essa relação funcional fundamenta-se em conceitos de geometria relativamente simples e em leis físicas básicas, (VANICEK e KRAKIWSKY, 1986). Assim, Kuang (1996), afirma que as duas primeiras hipóteses, anteriormente propostas (H_{a1} e H_{a2}), são as mais freqüentes suposições examinadas quando a hipótese nula falha em um teste estatístico, e que, em função da consistência dos modelos matemáticos funcionais usados na Mensuração, as duas últimas hipóteses (H_{a3} e H_{a4}), relacionadas à falha do modelo matemático, não apresentam maior interesse nesse contexto.

5.2.3 Hipóteses Relacionadas aos Resíduos

A grandeza de maior importância para análise do ajustamento da rede é o resíduo. A distribuição normal é um pressuposto obrigatório para aplicação de testes estatísticos nas estatísticas amostrais das observações, conseqüentemente, a distribuição dos resíduos $\hat{V}$, também, obedece a essa distribuição. Assim sendo, as hipóteses mais

adequadas correspondentes à hipótese nula, H_0 , e às hipóteses alternativa, H_{a1} e H_{a2} , discutidas na seção anterior, são:

$$H_0 : \hat{\mathbf{V}} \sim N(0, \Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}}) \quad (5.7)$$

$$H_{a1} : \hat{\mathbf{V}} \sim N(0, \tilde{\Sigma}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}) \quad (5.8)$$

$$H_{a2} : \hat{\mathbf{V}} \sim N(\nabla_{\hat{\mathbf{V}}}, \Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}}) \quad (5.9)$$

sendo:

$$\Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \sigma_o^2 \cdot (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T) \quad (5.10)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \tilde{\sigma}_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \tilde{\sigma}_o^2 \cdot (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T) \quad (5.11)$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{V}}} = -(1 - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}) \cdot \nabla_l = -\mathbf{R} \cdot \nabla_l \quad (5.12)$$

onde:

$\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$: matriz co-fator dos resíduos ajustados (Apêndice A);

$\Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$: matriz variância-covariância dos resíduos ajustados;

$\tilde{\Sigma}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$: matriz incorreta variância-covariância dos resíduos ajustados;

$\tilde{\sigma}_o^2$: variância “*a priori*” incorreta.

A Eq. (5.1) mostra que a suposição da hipótese nula corresponde à observações l_b eivadas somente de erros aleatórios com média igual a $\mathbf{A}\mathbf{X}$. Nesta caso, o vetor dos resíduos das observações ajustadas $\hat{\mathbf{V}}$, também, consistem de variáveis aleatórias com média igual a zero. Um dos propósitos da análise pós-ajustamento é examinar os resíduos ajustados, usando os testes estatísticos para determinar possíveis discrepâncias da suposição básica; em outras palavras, deseja-se verificar se os resíduos apresentam evidências de observações eivadas ou não de erros grosseiros.

Conforme Kuang (1996), existem basicamente duas abordagens bem conhecidas para o teste da hipótese nula H_0 , usando o resíduo estimado. Estas duas abordagens diferem apenas da disponibilidade ou não da variância “*a priori*” σ_o^2 das observações. A primeira abordagem, que pressupõe o conhecimento da variância “*a priori*”, é creditada a Baarda (1968), quem propôs o teste global para a detecção de “outliers” e o teste “data snooping” para a localização de erros grosseiros. A segunda abordagem, denominada “teste-tau” foi desenvolvida por Pope (1976), que considera ser desconhecida a variância “*a priori*”.

5.3 Detecção “Outlier” e Localização de Erro Grosseiro

A teoria do ajustamento pelo MMQ pressupõe a eliminação dos erros grosseiros e os sistemáticos por algum processo anterior ao ajustamento, portanto apenas erros aleatórios deveriam perturbar os dados. Mas como nem sempre esses pressupostos são atendidos, é imprescindível a verificação da confiabilidade das observações e do modelo matemático. Assim, os resíduos das observações ajustadas são submetidos a testes estatísticos que buscam detectar “outliers”, localizar e eliminar os erros grosseiros. É importante relembrar que os procedimentos de pós-ajustamento buscam detectar e eliminar, somente, erros grosseiros de pequena magnitude, pois é assumido que erros grosseiros de grande magnitude foram eliminados por procedimentos de controle anteriores ao ajustamento.

Os procedimentos de pós-ajustamento baseiam-se em testes estatísticos sobre os resíduos estimados das observações, que são, em princípio, indicativo do comportamento do modelo matemático e das observações. Portanto, ambas as observações e modelo são testados de forma simultânea. Como já expresse anteriormente, a modelagem matemática dos diversos tipos de observações de redes geodésicas é bem consistente, por isso, Kuang (1996), diz que as falhas nos testes estatísticos dos resíduos podem ser atribuídas às observações eivadas de erros grosseiros.

5.3.1 Resíduos e Detecção de “Outliers”

Um resíduo de observação em ajustamento MMQ é definido pela diferença entre o valor ajustado da observação e o valor correspondente observado. O vetor dos resíduos ($\hat{\mathbf{V}}$) é o elemento principal da análise de confiabilidade de redes.

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{L}_a - \mathbf{L}_b$$

$$\hat{\mathbf{V}} = (\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_b \quad (5.13)$$

$$\hat{\mathbf{V}} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{L}_b$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \quad (5.14)$$

onde:

$\mathbf{A}$: matriz coeficiente dos parâmetros desconhecidos da equação das observações, tornada linear através da aplicação fórmula de Taylor;

$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$: matriz coeficiente dos parâmetros desconhecidos da equação normal;

$\mathbf{P}$: matriz dos pesos das observações;

$\mathbf{I}$: matriz Identidade;

$\hat{\mathbf{V}}$: vetor dos resíduos ajustados (estimados);

$\mathbf{L}_a$: vetor das observações ajustadas;

$\mathbf{L}_b$: vetor das observações brutas;

$\mathbf{R}$: matriz que contém informações sobre a geometria da rede, é representada:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & r_{12} & \cdot & r_{1j} & \cdot & r_{1n} \\ r_{21} & r_2 & \cdot & r_{2j} & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdot & r_i & \cdot & r_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & r_{nj} & \cdot & r_n \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Onde, r_i ($i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n$) e r_{ij} ($i \neq j : 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n$) são, respectivamente, elementos diagonais e elementos não-diagonais da matriz $\mathbf{R}$. Os elementos r_i são conhecidos como número de redundância (mais informações sobre r_i na seção 5.3.2).

Cada resíduo individual $\hat{v}_i$ ($i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n$) pode ser expresso pela equação:

$$\hat{v}_i = l_{ai} - l_{bi} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot l_{bj} \quad (i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n) \quad (5.16)$$

A matriz variância-covariância “*a priori*” de $\hat{\mathbf{V}}$ é:

$$\Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (5.17)$$

onde:

$\Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$: matriz variância-covariância “*a priori*” dos resíduos;

σ_o^2 : variância “*a priori*”;

$\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$: matriz co-fator dos resíduos ($\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$).

Os resíduos do ajustamento do MMQ deveriam originar-se somente dos erros aleatórios, mas quase sempre as observações são contaminadas por erros grosseiros, os quais representam um grande distúrbio das observações. Esses distúrbios indesejáveis não deveriam ser transmitidos aos parâmetros desconhecidos, mas sua ocorrência é bastante freqüente. Para simular essas ocorrências será suposto que o vetor observação $\mathbf{L}_b$ contem um vetor erro grosseiro, cuja influência no vetor dos resíduos estimado será:

$$\nabla_{\hat{v}} = - \mathbf{R} \cdot \nabla_l \quad (5.18)$$

E para um resíduo em particular:

$$\nabla_{\hat{v}_i} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot \nabla_{l_{bj}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.19)$$

O resíduo total correspondente aos erros aleatório e grosseiro presentes nas observações pode ser expresso por:

$$\tilde{v}_i = \hat{v}_i + \nabla_{\hat{v}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.20)$$

onde:

$\tilde{v}_i$: resíduo total;

v_i : resíduo correspondente ao erro aleatório;

∇v_i : resíduo correspondente ao erro grosseiro;

∇_l : vetor erro grosseiro

A existência de erro grosseiro eleva a amplitude dos resíduos que se manifesta pelo aparecimento dos “outliers”. Caspary³⁶, (1987) citado por Kuang (1996), define “outlier” como um resíduo que, conforme determinado teste estatístico, excede um certo valor limite, baseado em suposições das propriedades dos parâmetros estocásticos das observações. A definição de Caspary (1987) considera como resíduo o resultado do efeito da mistura de todos os tipos de erro (erro sistemático, erro grosseiro e erro aleatório), mas, na maioria das vezes, considera-se “outlier” apenas os resíduos causados por erro grosseiro contido na medição.

³⁶ CASPARY, W. F.(1987): Concepts of network and deformation analysis. Monograph II. School of Surveying. The University the New South Wales. Kensington, N.S.W. Australia.

A matriz variância-covariância do resíduo estimado Σ_{vv} (Eq. 5.17), mostra que, mesmo em observações não correlacionadas, os resíduos são correlacionados, uma vez que em geral a matriz $\mathbf{R}$ é não-diagonal. Em outras palavras, comumente a matriz $\mathbf{R}$ é completa e contém suficientes informações sobre a geometria da rede.

As Eq. (5.16) e (5.19) mostram os resíduos individuais como combinação linear de todas as observações e a elevada correlação entre os resíduos. Assim, uma variação em qualquer observação do conjunto afetará mais de um resíduo. Somente no caso de correlação zero, isto é, quando $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$ forem matrizes diagonais (conseqüentemente Σ_{vv} , também, será diagonal), a variação em uma observação afetará apenas o resíduo correspondente.

De forma análoga, se os resíduos forem correlacionados, uma variação em qualquer observação afetará mais de um parâmetro desconhecido, caso contrário, somente o parâmetro correspondente à observação em questão será influenciado. Devido à existência de correlação entre os resíduos estimados, Kuang (1996) observa que, mesmo quando um “outlier” é detectado, localizar a observação incorreta é tarefa árdua, pois o erro grosseiro, certamente, espalhou-se por todos os resíduos.

5.3.2 Número de Redundância - r

Baarda (1968) propôs um modelo simplificado, “data snooping” para análise da relação entre um “outlier” e um erro grosseiro, no qual supõe-se que apenas uma observação contém erro grosseiro, ∇_{l_i} .

$$\nabla_i \mathbf{l} = (0, 0, \dots, \nabla_{l_i}, \dots, 0, 0)^T \quad (5.21)$$

O vetor $\nabla_i \mathbf{l}$ é formado por zeros, exceto ∇_{l_i} da enésima posição. Expressando-se o vetor resíduo em função do vetor erro, tem-se:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{v}}} = - \mathbf{R} \cdot \nabla_i \mathbf{l} \quad (5.22)$$

$$\nabla_{i \mathbf{v}_i} = - r_i \cdot \nabla_{l_i} \quad (5.23)$$

Onde, r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são elementos diagonal da matriz $\mathbf{R}$, conhecidos como número de redundância.

O número de redundância r_i pode ser interpretado como a contribuição de uma simples observação l_i à redundância total do sistema r , e constitui-se em uma medida da controlabilidade local (KAVOURAS, 1982).

$$r = \sum_{i=1}^n r_i = \text{traço} (\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \cdot \mathbf{P})^{37} \quad (5.24)$$

Conforme o Apêndice B, verifica-se que:

$$r = n - u \quad (5.25)$$

onde:

r : redundância total da rede ajustada;

n : número de equações de erro das observações;

u : número de parâmetros desconhecidos.

Substituindo a equação da matriz co-fator das observações ajustadas, $\bar{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$, na equação da matriz co-fator dos resíduos ajustados, $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T)$ (Apêndice A), tem-se a equação que relaciona os elementos da diagonal das matrizes co-fator dos resíduos, das observações brutas e das observações ajustadas:

$$q_{\mathbf{V}\mathbf{V}_i} = q_{\mathbf{L}_i} - \bar{q}_{\mathbf{L}_i} \quad (5.26)$$

onde:

³⁷ Traço : É o somatório dos elementos da diagonal de uma matriz.

q_{vv_i} : elementos da diagonal da matriz co-fator dos resíduos;

q_{Π_i} : elementos da diagonal da matriz co-fator das observações brutas;

$\bar{q}_{\Pi_i}$: elementos da diagonal da matriz co-fator das observações ajustadas.

Da expressão (5.26), conclui-se que os termos q_{vv_i} , q_{Π_i} e $\bar{q}_{\Pi_i}$, por serem elementos da diagonal das matrizes co-fator, são maiores (ou iguais) a zero, conseqüentemente, o termo q_{vv_i} é menor ou igual q_{Π_i} , Eq. (5.27):

$$0 \leq q_{vv_i} \leq q_{\Pi_i} \quad (5.27)$$

$$r_i = q_{vv_i} \cdot p_i \quad (5.28)$$

logo:

$$0 \leq q_{vv_i} \cdot p_i \leq q_{\Pi_i} \cdot p_i$$

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad (5.29)$$

5.3.2.1 Considerações sobre o Número de Redundância

O número de redundância indica a controlabilidade do ajustamento de uma particular observação. O limite inferior ($r_i = 0$) indica nenhuma controlabilidade na detecção de erro grosseiro, enquanto o limite superior ($r_i = 1$) indica máxima controlabilidade na detecção de erros grosseiros, (MORAES, 1998b).

As considerações de Leick (1995) esclarecem as afirmações anteriores. Na primeira consideração, Leick leva em conta as relações entre as matrizes $Q_{LL} = Q_{\Pi} - Q_{VV}$, a Eq. (5.28) e supõe r_i próximo de **um**, então constata que a variância do resíduo v_i ficará próxima da variância da observação bruta l_{bi} , e, dessa forma, a variância da observação ajustada l_{ai} aproximar-se-á de zero. Ao contrario, na segunda consideração, ele supõe o número de redundância próximo de zero, isso fará a

variância do resíduo, também, aproximar-se de **zero**, conseqüentemente a variância da observação ajustada ficará próxima da variância da observação bruta.

Observando a expressão $Q_{LL} = Q_{ll} - Q_{VV}$, é desejável que a variância dos resíduos fique próxima da variância das observações brutas, porque Q_{LL} aproximará de zero e assim ter-se-á alta precisão.

As expressões (5.23) e (5.29) permitem considerar que o valor máximo do resíduo devido ao erro grosseiro é o próprio erro grosseiro, quando $r_i = 1$. Neste caso, todo erro grosseiro é absorvido pelo resíduo, deixando o parâmetro desconhecido isento de erro grosseiro, ou seja, sujeito apenas aos efeitos estocásticos das observações. O outro extremo, quando $r_i = 0$, o erro grosseiro é totalmente absorvido pelos parâmetros desconhecido, deixando os resíduos iguais a zero.

5.3.3 Elementos Não-Diagonais da Matriz **R**

O efeito dos resíduos $\nabla_{i \nabla_j}$ ($j \neq i$) correspondentes ao erro grosseiro ∇_{l_i} sobre os outros resíduos $\hat{\nabla}_j$ ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$) é determinado pelos elementos não-diagonais da matriz **R**, como mostrado a seguir:

$$\nabla_{i \hat{\nabla}_j} = r_{ji} \cdot \nabla_{l_i} \quad (j \neq i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.30)$$

$$r_{ji} = \mathbf{R}_{ji} \quad (j \neq i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.31)$$

A localização de observações eivadas de erros grosseiros é feita pelo exame dos seus correspondentes resíduos. Assim quando $\nabla_{i \hat{\nabla}_i}$ for maior que os outros resíduos, $\nabla_{i \hat{\nabla}_j}$ ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$), Eq. (5.32), tem-se a indicação de que l_i é a observação incorreta e pode-se estimar o erro ∇_{l_i} da observação, a partir do resíduo estimado, assumindo-se que $\hat{\nabla} = \nabla_{i \hat{\nabla}_i}$ em presença do erro grosseiro, obtendo-se a Eq. (5.33).

$$r_i > |r_{ji}| \quad (j \neq i, j = 1, 2, \dots, n,) \quad (5.32)$$

$$\nabla_{l_i} = \frac{V_i}{r_i} \quad (5.33)$$

Neste capítulo discutiram-se dois aspectos da detecção de erros grosseiros: as hipóteses de detecção de erros e o número de redundância. As hipóteses de detecção de erros grosseiros são baseadas na suposição de que as observações devem conter apenas de erros aleatórios, ou seja, essas observações bem como os resíduos ajustados devem obedecer à função de densidade probabilística normal. Do outro aspecto, o número de redundância, que é uma medida de controlabilidade das observações, foi discutido sua relação com erro grosseiro e o resíduo ajustado. Os conceitos expostos neste capítulo são requisitos para compreensão dos testes para detecção e localização de erros grosseiros em redes geodésicas que serão discutidos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 6 - TESTES PARA DETECÇÃO E LOCALIZAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS

6.1 Teste Global da Variância “*a Posteriori*”

Este teste estatístico multidimensional que foi proposto por Baarda (1968) para detectar a existência de inconsistências do ajustamento é sempre o primeiro teste a ser aplicado após o ajustamento. Ele é, também, conhecido como teste do modelo geral, pois testa o modelo como um todo. Por ser muito geral, esse teste não é capaz de definir a natureza das inconsistências detectadas e muito menos localizá-las. Entretanto, uma qualidade importante deste teste é sua simplicidade e sua capacidade de indicar as prováveis causas da falha da suposição básica.

Este teste faz a comparação entre a variância “*a priori*” e a variância “*a posteriori*”. Obviamente esse teste somente tem significado quando variância “*a priori*” (σ_o^2) é conhecida, isto é, quando se tem algum conhecimento prévio sobre a precisão das observações (KAVOURAS, 1982). Já a variância “*a posteriori*” ($\hat{\sigma}_o^2$) é uma estimativa imparcial da variância “*a priori*” e é obtida, após o ajustamento das observações, a partir da matriz dos resíduos ($\mathbf{V}$), pela Eq. (6.1):

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{r} \quad (6.1)$$

onde:

$\mathbf{V}$: Matriz dos resíduos do ajustamento;

$\mathbf{P}$: Peso das observações;

r : Grau de liberdade, obtido pela diferença entre o número de equações e o número de incógnitas a ser determinado.

A comparação entre a variância “*a priori*” e a variância “*a posteriori*” é um indicador da qualidade do ajustamento. Caso haja discrepância entre a variância “*a priori*” e a variância “*a posteriori*”, aplica-se o teste de hipótese que se baseia na distribuição qui-quadrado (χ^2) para verificar a significância da discrepância em relação ao nível de confiança pré-estabelecido. Uma discrepância significativa (não aleatória) indica a existência de problemas no ajustamento (GEMAEL, 1994).

O teste de hipótese da variância “*a posteriori*” baseia-se na estatística definida pela expressão:

$$\chi^{*2}(r) = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_o^2} = \frac{\hat{\sigma}_o^2 \cdot r}{\sigma_o^2} \quad (6.2)$$

Portanto:

$$\frac{\hat{\sigma}_o^2 \cdot r}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(r) \quad (6.3)$$

A esperança matemática da distribuição qui-quadrado é grau de liberdade - r , a qual somente será atendida se a relação entre a variância “*a posteriori*” e a variância “*a priori*” for igual a um. Então, pode-se formular a hipótese básica a seguir:

$$H_0 : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = 1 \quad (6.4)$$

6.1.1 Teste Bilateral

Conforme os propósitos do teste, definido pela hipótese nula, pode-se aplicar um teste bilateral (duas caudas) ou unilateral (uma cauda).

As hipóteses para o teste bilateral são:

$$H_0 : \hat{\sigma}_o^2 = \sigma_o^2 \quad (6.5)$$

$$H_a : \hat{\sigma}_o^2 \neq \sigma_o^2 \quad (6.6)$$

Então para o nível de significância α , de acordo com o princípio do teste estatístico bilateral, a hipótese nula não será rejeitada, se:

$$\chi^{*2} > \chi_{r, \frac{\alpha}{2}}^2 \quad (6.7)$$

$$\text{ou} \quad \chi^{*2} < \chi_{r, 1 - \frac{\alpha}{2}}^2 \quad (6.8)$$

onde:

χ^{*2} : Valor calculado para o teste qui-quadrado Eq. (6.2);

χ^2 : Valor obtido da tabela de distribuição qui-quadrado.

α : Nível de significância multidimensional. Este nível de significância será melhor discutido seção 7.3.

Figura 6.1 - Regiões de aceitação e rejeição do teste bilateral

6.1.2 Teste Unilateral

Segundo Kavouras (1982), quando o teste global é usado para detectar “outliers” tem-se a expectativa de que a variância “*a posteriori*” seja maior que a variância “*a priori*” ($\hat{\sigma}_o^2 > \sigma_o^2$). Portanto, as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \hat{\sigma}_o^2 = \sigma_o^2 \quad (6.9)$$

$$H_a : \hat{\sigma}_o^2 > \sigma_o^2 \quad (6.10)$$

Assim o teste recomendado é:

$$\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} < \frac{\chi_{r, 1-\alpha}^2}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} < F_{r, \infty; 1-\alpha} \quad (6.11)$$

onde:

$F_{r, \infty, 1-\alpha}$: Teste “F” de SNEDECOR para os graus de liberdade do numerador igual e a r e do denominador ∞ , e nível de significância $1-\alpha$.

6.1.3 Análise dos Resultados do Teste Global

Quando a hipótese zero do teste global falhar, uma análise cuidadosa do ajustamento deve ser feita, pois a matriz variância-covariância das observações foi mal estimada, ou os resíduos mostram-se grandes devido a erros grosseiros ou sistemáticos, ou então, o modelo matemático escolhido pode ser inconsistente, (UOTILA³⁸ apud (GEMAEL, 1994), (KUANG, 1996).

Entretanto, Kuang (1996) considera os modelos funcionais geodésicos simples e consistentes e aconselha que a análise das hipóteses alternativas especiais discutidas anteriormente, através das Eq. (5.8) e (5.9).

³⁸ UOTILA, J.M. (1975). Statistical test a guide lines in analyses of adjustment of control nets. Surv. and Mapping (ACSM).

$$H_{a1}: \hat{\mathbf{V}} \sim N(0, \tilde{\Sigma}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}) \quad (5.8)$$

$$H_{a2}: \hat{\mathbf{V}} \sim N(\nabla_{\hat{\mathbf{V}}}, \Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}}) \quad (5.9)$$

- H_{a1} : estimativa incorreta dos pesos das observações, ou seja, erro na matriz variância-covariância das observações;
- H_{a2} : existência de erros grosseiros nos dados de observações.

Para verificar qual das hipóteses alternativas anteriores causou a falha da hipótese zero, inicia-se a análise pela estimativa de peso.

$$\begin{aligned} \chi^{*2}(r) &= \frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{\sigma_o^2} = \frac{\sigma_o^2 \cdot \hat{\mathbf{V}}^T \Sigma_{ll}^{-1} \hat{\mathbf{V}}}{\sigma_o^2} \\ \chi^{*2}(r) &= \hat{\mathbf{V}}^T \Sigma_{ll}^{-1} \hat{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

A Eq. (6.12) mostra que o cálculo da estatística $\chi^{*2}(r)$ não depende da variância “*a priori*”, mas é diretamente proporcional aos resíduos $\hat{\mathbf{V}}$ e inversamente proporcional à matriz variância-covariância Σ_{ll} das observações. Portanto, a hipótese alternativa adequada para justificar a falha da hipótese zero corresponde à Eq. (5.8), a qual avalia as estatísticas: resíduos (cuja esperança matemática é igual a zero) e a variância-covariância dos resíduos.

Assim, uma estimativa muito pessimista dos erros aleatórios (suposição da matriz variância-covariância pouco precisa) tornará o valor $\chi^{*2}(r)$ menor que o limite inferior do nível de significância (Eq. 6.7).

Já uma estimativa muito otimista dos erros aleatórios (suposição da matriz variância-covariância muito precisa) tornará o valor $\chi^{*2}(r)$ maior que o limite superior do nível de significância (Eq. 6.8).

Assim, no teste bilateral, uma estimativa muito pessimista ou muito otimista dos erros aleatórios das observações gera valores para $\chi^{*2}(r)$ além dos limites de aleatoriedade da hipótese zero, o que provoca sua rejeição.

No caso do teste unilateral, a rejeição do teste global só ocorre quando a estimativa dos erros aleatórios é muito otimista.

Conforme Kuang (1996), a rejeição da hipótese zero H_0 causada por uma estimativa imprópria da matriz variância-covariância é facilmente reconhecida. Pois, nesses casos, os resíduos obedecem à função de distribuição normal, com esperança de média igual a zero, e provavelmente nenhuma observação produz resíduos excessivos. Portanto se o teste global for rejeitado, mas amplitude dos resíduos se mostrarem compatíveis com a precisão dos equipamentos usados nas medições, tem-se razão suficiente para acreditar que a precisão das observações não foi corretamente estimada e por isso uma nova matriz variância-covariância Σ_{II} pode ser proposta. Na prática, isso pode ser feito escalonando a matriz Σ_{II} com variância “*a posteriori*” estimada $\hat{\sigma}_o^2$, ou seja:

$$\hat{\Sigma}_{II} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot \Sigma_{II} \quad (6.13)$$

onde:

$\hat{\Sigma}_{II}$: matriz variância-covariância das observações escalonada.

Então, a rede será novamente ajustada usando essa nova matriz variância-covariância $\hat{\Sigma}_{II}$, que testará aceitação da hipótese nula. Caso esse novo teste falhe, e se algum resíduo mostrar-se grande em demasia, então a hipótese alternativa H_{a2} , Eq. (5.9), deverá ser examinada, aplicando-se o teste “data snooping”, a fim de localizar e eliminar possíveis erros grosseiros das observações.

6.2 Teste “Data Snooping”

A aplicação da técnica “*data snooping*” é um processo combinado para detecção de “outlier”, localização e eliminação dos erros grosseiros. Este método pesquisa por “outlier” e em seguida investiga quais observações contém os erros grosseiros que causaram os “outliers” e, então, as elimina, caso necessário.

6.2.1 Detecção de “Outlier”

O ajustamento de observações torna explícito os resíduos, mas não revela os erros grosseiros, que os causaram, em outras palavras, após o ajustamento não se têm informações suficientes para apontar as observações incorretas. Logo, não se dispõe nenhuma evidência para rejeitar a hipótese nula devido a erros grosseiros nas observações e aceitar hipótese alternativa $H_{a2} : \sim N(\nabla_{\hat{V}}, \Sigma_{\mathbf{V}\mathbf{V}})$ - Eq. (5.9), como verdadeira. Kuang (1996), afirma que a tarefa crucial, após o ajustamento, é localizar e eliminar os erros grosseiros das observações. Entretanto, a hipótese alternativa H_{a2} é ainda muito geral, porque pouco informa sobre os elementos individuais do vetor erro grosseiro ∇_l .

Baarda (1968) propôs a denominada “hipótese alternativa convencional”, que é uma relação simples e específica entre o vetor dos resíduos estimados $\hat{\mathbf{V}}$ e o erro grosseiro ∇_l , a qual assume a existência de erro grosseiro em apenas uma observação de cada vez.

$$H_{ac} : \nabla_{li} = e_i \cdot \nabla_l \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.14)$$

onde:

$e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, n)^T$: é um vetor com elementos iguais a zeros, exceto do valor 1 na i -ésima posição;

∇_{li} : é o valor do erro grosseiro da i -ésima observação l_i .

A concepção da hipótese nula para análise de ajustamento pelo MMQ supõe observações contendo somente erros aleatórios, ou seja, as observações se ajustam à função de densidade probabilística normal. Assim os resíduos ajustados, também, devem obedecer a essa distribuição. A Eq. (5.7) mostra a hipótese nula proposta para os resíduos $H_0 : \hat{\mathbf{V}} \sim N(0, \Sigma_{\mathbf{V}})$. A divisão dos resíduos por seus respectivos desvios padrão resulta em uma estatística conhecida como resíduo normalizado ou resíduo reduzido que são expressos por pela Eq. (6.15)

$$w_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{l_i} \cdot \sqrt{r_i}} \quad (6.15)$$

Esses resíduos normalizados ajustam-se à função de distribuição normal reduzida, portanto sua esperança matemática de média é zero e variância igual a 1. Assim, uma outra hipótese nula mais específica pode ser proposta:

$$H_0 : w_i \sim n(0, 1) \quad (6.16)$$

onde:

$n(0, 1)$: Distribuição de densidade normal reduzida.

Assim, para um nível de significância pré-definido α_o do teste bilateral, a hipótese nula H_0 será rejeitada, ou seja, um “outlier” será detectado, se:

$$w_i < n \frac{\alpha_o}{2} \quad \text{ou} \quad w_i > n \frac{1 - \alpha_o}{2} \quad (6.17)$$

A técnica “data snooping” consiste de um teste unidimensional que examina apenas um resíduo de cada vez. Esse procedimento é repetido tantas vezes quantas forem as observações supostamente eivadas de erros grosseiros. O nível de significância sugerido por Baarda (1968) é $\alpha_o = 0,001$ (0,1%), que corresponde a 3,29 desvios padrão. Para este nível de significância a hipótese zero será rejeitada, se:

$$|w_i| > 3,29 \quad \text{ou} \quad |v_i| > 3,29 \cdot \sigma_{v_i} \quad (6.18)$$

Kuang (1996) esclarece que, em função do teste estatístico w_i basear-se no conhecimento de σ_{l_i} , a técnica “data snooping” somente é confiável quando associada a um significativo conhecimento das propriedades estatísticas das observações.

6.2.2 Localização e Eliminação do Erro Grosseiro

O próximo procedimento, após a detecção dos resíduos, é localizar os erros grosseiros, isto é, verificar se o resíduo detectado v_i é ou não causado por um erro grosseiro ∇_{l_i} , correspondente à observação l_i . Em geral, a correta localização do erro grosseiro depende da geometria da rede, do número e da amplitude dos erros grosseiros presentes nas observações.

Por causa da correlação entre os resíduos estimados, mesmo quando se assume existir apenas um erro grosseiro de cada vez, um resíduo suspeito v_i indicará um erro grosseiro ∇_{l_i} , na correspondente observação l_i , se e somente se, o número de redundância for superior ao valor absoluto individual dos outros elementos da coluna a que este número redundância pertence.

$$r_i > |r_{ji}| \quad (j \neq i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.19)$$

Por outro lado, a falsidade da Eq. (6.19) indica forte correlação entre os resíduos, o que implica grande dificuldade em determinar qual observação l_i contém o erro grosseiro ∇_{l_j} ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$) que produz o resíduo suspeito v_i . Melhor dizendo, nesse caso, qualquer observação l_j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$) pode produzir o resíduo suspeito v_i .

O fato de um resíduo suspeito v_i não ser causado, necessariamente, por um erro grosseiro correspondente à observação l_i , implica que um erro grosseiro em l_i pode produzir “outlier” em qualquer observação l_j . Por essa razão, não é aconselhável a

eliminação automática de observação a partir de resíduos suspeitos. Dito de outra forma, resíduos suspeitos devem ser usados, tão somente, para destacar as correspondentes observações como presumíveis candidatas à rejeição. Kuang (1996) diz que uma apropriada rejeição de observações deve fundamentar-se em outras análises pautadas na experiência e senso crítico do analista. Normalmente, um procedimento iterativo é usado para ordenar, por acurácia, todos possíveis erros existentes nas observações. O conhecimento profundo dos tipos de erros grosseiros e como eles afetam as observações é de grande valia para a decisão correta do analista de ajustamento de rede.

6.3 Teste Tau - τ

Os testes propostos por Baarda, teste global e “data snooping”, assumem o conhecimento da covariância “*a priori*” σ_o^2 , o que significa que a todas as variâncias podem ser escaladas corretamente. Mas se σ_o^2 não é adequadamente conhecida, deve-se usar o teste estatístico - τ (tau), proposto por Pope (1976), no qual a estimativa da variância dos resíduos $\hat{\sigma}_{v_i}^2$ é feita através da variância “*a posteriori*” $\hat{\sigma}_o^2$, (KAVOURAS, 1984).

$$\tau_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}} = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{q_{\hat{v}_i}}} \quad (6.20)$$

onde:

τ_i : Teste estatístico proposto por Pope (1976).

Esse teste segue a distribuição τ (distribuição Tau) e é semelhante ao teste dos resíduos reduzidos, Eq. (6.15), diferindo-se, apenas, quanto à estimativa da variância dos resíduos.

A hipótese nula proposta para essa distribuição, correspondente ao grau de liberdade r é:

$$H_0 : \tau_i \sim \tau(r) \quad (6.21)$$

Matematicamente, esse teste é uma estatística multi-variada de resíduos, padronizados por $\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$, obtida através da variância estimada $\hat{\sigma}_o^2$. Definido o nível de significância α , a estatística τ_i será destacada como “outlier”, se:

$$|\tau_i| > \tau_{\frac{\alpha}{2}} \quad (6.22)$$

Nesta distribuição o valor crítico $\tau_{\alpha/2}$ é calculado de acordo com Eq. (6.23), baseada na distribuição Student:

$$\tau_{\frac{\alpha}{2}}(r) = \frac{\sqrt{r} \cdot t_{r-1, \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{r-1 + \left(t_{r-1, \frac{\alpha}{2}}\right)^2}} \quad (6.23)$$

onde:

$t_{r-1, \frac{\alpha}{2}}$: Desvio da distribuição Student para o nível de significância $\frac{\alpha}{2}$ e grau de liberdade $(r-1)$.

De forma incorreta, freqüentemente, a estatística τ_i é considerada como parte da distribuição t de Student, em razão da distribuição τ ser poucas vezes discutida nos livros textos de estatística, assim, ela é raramente conhecida por este nome, (KAVOURAS, 1982). No entanto, quando o grau de liberdade (r) é incrementado, os valores críticos dessas duas distribuições tornam-se próximos. E, quando o grau de liberdade tende a infinito, ambas as distribuições aproximam-se da curva normal.

Segundo Kuang (1996), a presença de erros grosseiros grandes nas observações influencia o valor da estimativa da variância “a posteriori”. Uma grande estimativa de $\hat{\sigma}_o^2$ tende reduzir o valor da estatística τ_i . Assim, existe sempre grande chance de alguns erros grosseiros não serem detectados pelo teste- τ , especialmente os de pequenas magnitudes.

Após a detecção de “outlier”, a localização e a eliminação dos erros seguem a mesma filosofia do “teste snooping” de Baarda.

6.4 Fluxograma para Detecção de “Outlier” e Eliminação de Erro Grosseiro

A síntese da estratégia, proposta por Kuang (1996), para detecção de “outlier” e eliminação de erros grosseiros é mostrada na Figura 6.2.

Nessa estratégia, Kuang considera que o procedimento de detecção de erros grosseiros inicia-se no pré-ajustamento, que objetiva eliminar os erros grosseiros de grande magnitude.

Figura 6.2 - Fluxograma para detecção de “outlier” e erro grosseiro. Fonte: Adaptado de Kuang,1996

Neste capítulo foram apresentados os principais testes para detecção e eliminação de erros grosseiros em uma rede ajustada. Mas para uma completa análise de uma rede é preciso que se tenha uma medida da sensibilidade de detecção de erros da técnica usada é indispensável (KAVOURAS, 1982). Esta sensibilidade é expressa pela confiabilidade interna.

Além da confiabilidade interna, o próximo capítulo discutirá a confiabilidade externa, a qual estima a influência de possíveis erros não detectáveis nos parâmetros desconhecidos.

CAPÍTULO 7 - CONFIABILIDADE DE REDES

A limitada sensibilidade da detecção de erros permite que erros grosseiros de pequenas magnitudes não sejam detectados. Portanto, é importante definir os limites inferiores dos erros detectáveis para um nível de significância e de potência de teste escolhidos previamente.

Esse limite inferior do erro grosseiro detectável com a potência de teste predefinida $(1 - \beta)$ é definido como confiabilidade interna. Outro elemento importante na análise de redes é a confiabilidade externa que corresponde à influência que os erros não detectáveis possam causar aos parâmetros desconhecidos do ajustamento.

Os detalhes da confiabilidade interna e externa serão discutidos neste capítulo, iniciando-se pela determinação do erro marginal detectável, pois este é o elemento essencial na conceituação de confiabilidade.

7.1 Vetor Erro Marginal Detectável – Teste Global

Denomina-se vetor erro marginal detectável ao limite inferior do vetor erro grosseiro que pode ser detectado, segundo um nível de significância α e uma potência de teste $(1 - \beta_o)$, previamente escolhidos.

A expectativa da hipótese nula do teste global é que a relação entre a variância “a posteriori” e “a priori” seja igual a 1, $(\hat{\sigma}_o^2 / \sigma_o^2 = 1)$, Eq. (6.4). Entretanto, isso não ocorre com a hipótese alternativa.

$$E \left\{ H_{a2} : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \right\} = E \left\{ \frac{(\hat{\mathbf{V}} + \nabla_{\hat{\mathbf{V}}})^T \mathbf{P} (\hat{\mathbf{V}} + \nabla_{\hat{\mathbf{V}}})}{r} \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \right\}$$

$$E \left\{ H_{a2} : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \right\} = E \left\{ H_0 : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \right\} + \frac{\nabla_{\hat{\mathbf{V}}}^T \mathbf{P} \nabla_{\hat{\mathbf{V}}}}{r} \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \quad (7.1)$$

$$E \left\{ H_{a2} : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \right\} = 1 + \frac{\lambda}{r}$$

onde:

λ : Parâmetro de não-centralidade correspondente ao mínimo desvio da hipótese alternativa em relação à hipótese nula, que pode ser detectado com a probabilidade β ;

E : Esperança matemática.

A Eq. (7.1) mostra que a hipótese alternativa supõe $\hat{\mathbf{V}}$ é calculado sob a hipótese H_0 , assim $\nabla_{\hat{\mathbf{V}}}$ corresponde à influência do vetor erro grosseiro ∇_l em $\hat{\mathbf{V}}$, e

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_o^2} \nabla_{\hat{\mathbf{V}}}^T \mathbf{P} \nabla_{\hat{\mathbf{V}}} \quad (7.2)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_o^2} \nabla_l^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} \nabla_l$$

Conforme Apêndice C:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_o^2} \nabla_l^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \nabla_l \quad (7.3)$$

onde:

∇_l : Vetor erro grosseiro.

Assim, a hipótese alternativa H_{a2} , obedece a estatística qui-quadrado não centralizada $\chi^2(r, \lambda)$ com desvio detectável λ em relação a H_0 , Figura 7.1.

$$H_{a2} : \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(r, \lambda) \quad (7.4)$$

Figura 7.1 - Parâmetro de não-centralidade multidimensional. Fonte: Adaptado de Kuang,1996

O vetor erro grosseiro normalmente não é conhecido, conseqüentemente o parâmetro de não-centralidade multidimensional λ não pode ser calculado. Baarda (1968) propôs uma relação entre níveis de probabilidade α , β e o grau de liberdade, na qual se admite uma probabilidade aceitável β_o para o erro tipo II e determina-se o respectivo parâmetro λ_o .

$$\lambda_o = \lambda(\alpha, \beta_o, r) \quad (7.5)$$

Esse parâmetro representa o mínimo desvio detectável da hipótese alternativa em relação a hipótese nula com o nível de significância α e a potência de teste $(1-\beta_o)$. Esses valores podem ser obtidos nos nomogramas de Baarda (1968).

A Tabela (7.1) mostra alguns valores de λ_o para a potência de teste $(1-\beta_o = 0,80)$, os níveis de significância $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$, e diversos graus de liberdade.

Tabela 7.1 – Valores de parâmetro não - centralidade λ_0 para (1- $\beta_0 = 0,80$). Fonte: Kuang, 1996

Grau de Liberdade (r)								
α	2	5	10	20	30	40	50	85
0,05	9,6	13,4	16,5	21,0	25,3	28,5	32,0	40,0
0,01	14,0	18,3	22,7	29,0	34,5	39,0	42,0	50,0

O comprimento mínimo detectável do vetor erro grosseiro pode ser calculado pela Eq. (7.6):

$$\bar{\nabla}_l = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{u}}} \quad (7.6)$$

onde:

$\bar{\nabla}_l$: Comprimento mínimo detectável do vetor erro grosseiro;

∇_l : Vetor erro grosseiro;

$\mathbf{u}$: Vetor unitário de direção ∇_l , obtido pela divisão do vetor erro grosseiro ∇_l

por sua norma, $\mathbf{u} = \frac{\nabla_l}{\|\nabla_l\|}$.

7.1.1 Erro Marginal Individual Detectável

A Eq. (7.6) calcula o comprimento do mínimo vetor erro grosseiro detectável, mas nada informa sobre o mínimo erro individual. No entanto, estas informações podem ser obtidas da hipótese alternativa convencional, proposta por Baarda (1968), que supõe um vetor erro grosseiro composto de elementos zero, exceto o elemento da enésima posição cujo valor é a unidade ($\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, n)^T$). Substituindo esse vetor na Eq. (7.6), obtém-se:

$$\nabla_{oli} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{e}_i}} \quad (7.7)$$

$$\nabla_{oli} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{p_i}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_o}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{q}_{vi} p_i \mathbf{e}_i}}$$

$$\nabla_{oli} = \sigma_{li} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_o}{r_i}} \quad (7.8)$$

∇_{oli} : Erro marginal individual detectável.

7.2 Erro Marginal Individual Detectável – Teste Unidimensional

O limite inferior do erro grosseiro detectável ∇_{oli} , também, pode ser obtido pelo teste unidimensional dos resíduos padronizados w , Eq. (6.15).

$$w_i = -\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{li} \cdot \sqrt{r_i}} \quad (6.15)$$

O resíduo total correspondente aos erros aleatório e grosseiro presente nas observações pode ser expresso, conforme Eq. (5.20), por:

$$\tilde{v}_i = \hat{v}_i + \nabla_{\hat{v}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.20)$$

onde:

$\tilde{v}_i$: Resíduo total;

v_i : Resíduo correspondente ao erro aleatório;

∇v_i : Resíduo correspondente ao erro grosseiro;

Escrevendo a Eq. (5.20) na forma de resíduos padronizados, tem-se:

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{v}_i}{\sigma_{vi}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}} + \frac{\nabla_{\hat{v}_i}}{\sigma_{vi}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}\} = E\left\{\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}} + \frac{\nabla_{\hat{v}_i}}{\sigma_{vi}}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} = E\left\{H_o : \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{vi}}\right\} + \delta_i$$

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} = 0 + \delta_i$$

onde:

$$\delta_i = \frac{\nabla_{l_i} \cdot \sqrt{r_i}}{\sigma_{l_i}} \quad (7.9)$$

Assim, a hipótese alternativa correspondente à Eq. (7.10), cuja expectância corresponde ao parâmetro de não-centralidade unidimensional δ_i da curva normal, deverá ser testada em oposição à hipótese H_o , Eq. (6.16).

$$E\{H_{a2} : \tilde{w}_i\} \sim n(\delta_i, 1) \quad (7.10)$$

$$H_o : w_i \sim n(0, 1)$$

Figura 7.2 - Determinação do erro marginal detectável - teste dos resíduos padronizados.

Fonte: Adaptado de Leick,1995

O parâmetro de não-centralidade unidimensional δ_i corresponde à uma translação da curva normal, mostrado na Figura 7.2. Essa figura mostra que probabilidade $\beta\%$ (erro tipo II) de rejeitar a hipótese alternativa (e aceitar a hipótese zero) mesmo que a hipótese alternativa seja correta, depende do parâmetro de não-centralidade δ_i . Da mesma forma que no teste multidimensional assume-se uma probabilidade aceitável β_0 para o erro tipo II e calcula-se respectivo o parâmetro de não-centralidade δ_0 admissível. Esse parâmetro é usado para calcular o limite inferior do erro grosseiro detectável, (LEICK, 1995).

$$\nabla_{oli} = \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (7.11)$$

O limite inferior dos erros grosseiros detectáveis baseia-se em probabilidades adotadas para erro tipo I e tipo II da distribuição normal. O nível de probabilidade α_0 e β_0 refere-se a um teste unidimensional para resíduos individuais v_i , com um parâmetro de não-centralidade igual δ_0 .

Entre em duas distribuições normais, Figura 7.2, há uma simples relação funcional $\delta_0 = \delta(\alpha_0, \beta_0)$.

$$\delta_0 = Z\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + Z(1 - \beta_0) \quad (7.12)$$

A Tabela 7.2 mostra os níveis de probabilidade e os respectivos valores de δ_0 .

Tabela 7.2 - Níveis de significância e Parâmetros de não-centralidade

α	β_0	δ_0
0,05	0,20	2,80
0,01	0,20	3,42
0,05	0,10	3,24
0,01	0,10	3,86

7.3 Consistência entre o Teste Global e o Teste “Data Snooping”

As decisões tomadas a partir dos testes propostos por Baarda (1968), global e “data snooping”, para detecção e de erros grosseiros e sua localização devem ser consistentes, ou seja, os limites de erros marginais detectáveis devem ser iguais ao se usar o teste global ou o unidimensional. Assim, a partir das Eq. (7.8) e (7.11), tem-se:

$$\delta_o = \sqrt{\lambda_o} \quad (7.13)$$

Kavouras (1982) diz que filosofia de Baarda consiste em encontrar o desvio mínimo da hipótese alternativa em relação à hipótese nula (parâmetro de não-centralidade) que pode ser detectado com a potência de teste $(1 - \beta_o)$. Baarda propôs manter a potência do teste constante, mas o nível de significância variável. Assim o nível de significância para o teste global é α , mas para o teste unidimensional (“data snooping”), o valor do nível significância muda para α_o . Como a potência do teste é constante ($\beta = \beta_o$), os níveis de significância dos dois testes se relacionam através do parâmetro de não-centralidade λ_o .

Os procedimentos para definição dos níveis de significância multidimensional e potência de teste são os seguintes, conforme Kavouras (1982):

- Escolhem-se os parâmetros do teste unidimensional α_o e β_o ;
- Calcula-se parâmetro de não-centralidade unidimensional $\delta_o = \delta(\alpha_o, \beta_o)$, a partir da Eq. (7.12);
- Calcula-se o parâmetro não-centralidade multidimensional λ_o , através da Eq. (7.13), $\lambda_o = \delta_o^2$
- Calcula-se nível de significância multidimensional α , a partir de $\lambda_o = \lambda(\alpha, \beta_o, r)$. Os valores de α são obtidos através do nomograma de Baarda (1968), mostrado na Figura 7.3

Figura 7.3 - Nomograma de Baarda para $\beta_0 = 0,20$. Fonte: Baarda (1968)

7.4 Confiabilidade Interna, Absorção e Confiabilidade Externa

7.4.1 Confiabilidade Interna

Muito embora, o teste “data snooping” suponha a existência de somente um erro grosseiro, de cada vez, o limite inferior do erro grosseiro (erro marginal detectável) é determinado para todas as observações. Dessa forma, os erros marginais detectáveis das diversas observações, tornam-se uma medida da capacidade da rede em detectar erros grosseiros com a probabilidade $(1 - \beta_0)$. Essa capacidade constitui-se no que Baarda (1968) definiu como confiabilidade interna da rede.

Um aspecto importante é o fato das equações dos erros marginais Eq.(7.8) e Eq. (7.11) não dependerem dos valores das observações nem dos resíduos (depende da precisão das observações, do número de redundância e do parâmetro de não

centralidade), assim eles podem ser calculados tão logo a configuração da rede e o modelo estocástico sejam conhecidos (LEICK, 1995).

$$\nabla_{oli} = \sigma_{li} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_o}{r_i}} \quad (7.8)$$

$$\nabla_{oli} = \sigma_{li} \cdot \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}} \quad (7.11)$$

Ainda, segundo Leick (1995), se os limites dos erros marginais detectáveis para toda rede forem em torno do mesmo valor, diz-se que as observações são igualmente bem controláveis, e a confiabilidade interna é consistente.

7.4.2 Absorção

A absorção é a parcela do erro grosseiro que se propaga para a estimativa dos parâmetros desconhecidos e alteram a solução.

$$A_i = (1 - r_i) \cdot \nabla_{li} \quad (7.14)$$

O fator $(1 - r_i)$ é chamado de número de absorção. Um grande valor do número de redundância corresponde a uma pequena absorção do erro grosseiro, isto é, menor adulteração da solução. Se $r_i = 1$, a observação é dita completamente controlada, pois o erro grosseiro se transferirá inteiramente para o resíduo.

Devido ao fato de observações com pequena redundância poder ter pequenos resíduos e infundir falsa segurança ao analista, é conveniente expressar o número de absorção como função do resíduo:

$$A_i = \frac{(1 - r_i)}{r_i} \cdot v_i \quad (7.15)$$

Leick (1995) diz que o resíduo pode ser considerado a parte visível do erro grosseiro, enquanto a absorção a parte não visível do erro grosseiro. Ou seja, a parcela do erro grosseiro transformado em resíduo pode ser detectada, entretanto, a parcela do erro grosseiro absorvida pelos parâmetros desconhecidos não pode ser detectada.

7.4.3 Confiabilidade Externa

Segundo Leick (1995), a confiabilidade interna consistente de uma rede não garantem, automaticamente, coordenadas confiáveis. É preciso estimar os efeitos dos erros grosseiros não detectáveis nos parâmetros desconhecidos. A influência do erro marginal detectável nos parâmetros de ajustamento é chamada confiabilidade externa.

A estimativa dos parâmetros em presença de erro grosseiro é:

$$\hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{L}_b - \mathbf{e}_i \nabla_{l_i}) \quad (7.16)$$

O efeito do erro grosseiro na observação é:

$$\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla_{l_i} \quad (7.17)$$

Um erro grosseiro afeta todos os parâmetros. O impacto de um erro marginal detectável $\nabla_{l_{oi}}$ é:

$$\nabla_{\mathbf{X}_{oi}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla_{l_{oi}} \quad (7.18)$$

A existência de n observações causa a necessidade de processar n vetores. A Eq. (7.18), mostra o impacto de cada erro marginal detectável nos parâmetros. Devido ao fato da Eq. (7.18) ser dependente da definição do sistema de coordenadas (injunção mínima), Baarda propôs uma outra estatística padronizada que não depende do sistema de coordenadas para expressar a confiabilidade externa.

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{xoi}^T \mathbf{N} \nabla_{xoi}}{\sigma_o^2} \quad (7.19)$$

Substituindo (7.18) e (7.11) em (7.19), obtém-se:

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{l_{oi}} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla_{l_{oi}}}{\sigma_o^2} = \frac{\nabla_{l_{oi}}^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_v \mathbf{P}) \mathbf{e}_i}{\sigma_o^2} \quad (7.20)$$

$$\gamma_{oi} = \frac{\nabla_{l_{oi}}^2 p_i (1 - r_i)}{\sigma_o^2} = \frac{(1 - r_i)}{r_i} \cdot \delta_o^2 \quad (7.21)$$

Os valores γ_{oi} são as medidas da confiabilidade externa global. Existe um valor para cada observação. Se os valores γ_{oi} são de mesma ordem de magnitude, a rede é homogênea em relação a confiabilidade externa. Se r_i é pequeno, o fator de confiabilidade externa torna-se grande, e a adulteração global causada pelo erro grosseiro pode ser significativa. Conclui-se, portanto, que pequenos números de redundância não são desejáveis. O número de confiabilidade externa (γ_{oi}) e o número de absorção (A_i) têm a mesma dependência do número de redundância (r_i).

A Eq. (7.22) derivada da confiabilidade externa global (Eq. 7.21), segundo Kavouras (1982), apresenta uma aplicação mais prática que a Eq. (7.21), pois ela relaciona a confiabilidade externa com a precisão dos parâmetros desconhecidos.

$$\frac{\nabla_{xoi}}{\sigma_x} \leq \sqrt{\gamma_{oi}} \quad (7.22)$$

onde:

∇_{xoi} : Efeito de um erro grosseiro não detectável de uma observação nas coordenadas de um vértice;

σ_x : Precisão das coordenadas desse vértice.

A Eq. 7.22 depende apenas da geometria da rede e do nível de significância dos testes, não dependendo das reais medidas no campo, então a confiabilidade externa de uma rede pode ser feita ainda na fase de projeto. Kok³⁹ (1982) citado por Kavouras (1982) diz que um critério baseado na experiência, que é freqüentemente usado, considera que $\sqrt{\gamma_{oi}} \leq 10$ para cada observação.

A confiabilidade de rede, discutida neste capítulo, é uma ferramenta de grande importância na análise, pois mesmo depois dos procedimentos de detecção de erros grosseiros, certamente ainda haverá erros não detectados. Assim, a análise da matriz de variância-covariância dos parâmetros desconhecidos (Σ_{xx}), através da técnica da elipse de erros, pode ser insuficiente, já que supõe a existência de apenas erros aleatórios nas observações. A matriz variância-covariância dos parâmetros baseia-se, somente, na geometria da rede (matriz A dos coeficientes da equação de observação) e na precisão das observações (matriz Σ_{ll}), presumindo a ausência de erros grosseiros e sistemáticos. Por outro lado, a confiabilidade estabelece uma sensibilidade estatística para definir os limites inferiores de erros detectáveis e prever a influência dos erros não detectáveis nas coordenadas ajustadas.

³⁹ Kok, J.J (1982), “ Personal Communication”

CAPÍTULO 8 - REDE DE REFERÊNCIA DE VITÓRIA

8.1 Informações Gerais

A Rede de Referencia Cadastral Municipal de Vitória⁴⁰, implantada no início do ano 2001, pela Prefeitura de Vitória, é constituída por 37 pares de vértices intervisíveis. Esses pares de vértices intervisíveis constituem-se em bases de apoio para partidas e fechamentos de levantamentos topográficos no município de Vitória. Neste texto, os vértices intervisíveis serão chamados de bases de apoio topográficos.

Os vértices foram materializados com marcos de concreto com forma de tronco de pirâmide com dimensões aproximadas de 20 cm e 30 cm, respectivamente, para as bases superiores e inferiores, e altura (profundidade) de 60 cm. Estes marcos foram feitos “in loco”, deixando a base superior nivelada com as calçadas ou canteiros centrais.

Os equipamentos GPS usados nos levantamentos foram da marca Leica modelo System 200. Esse sistema é composto pelo sensor SR9400, a coletora CR233 e antena AT201. O sensor SR9400 é de simples frequência (L1) e 12 canais para recebimento dos sinais dos satélites GPS. A precisão nominal desse sistema em medições de linhas bases, através do o método de posicionamento relativo estático é de 10 mm +/- 2 ppm.

⁴⁰ O autor participou diretamente na elaboração, medições e ajustamento dos dados da Referência Cadastral Municipal de Vitória no período de janeiro de 2001 a maio de 2001.

8.1.1 Bases de Apoio Topográfico

Algumas bases de apoio topográfico, devido à limitação de geometria e à grande concentração de obstáculos da cidade, tiveram seus espaçamentos menores que 200 metros. A Figura 8.2 mostra as bases de apoio topográfico simbolizadas por círculos. O espaçamento e as orientações de cada base são indicados pela linha dentro de cada círculo. Na extremidade de cada linha há um vértice da Rede de Referência Cadastral Municipal de Vitória.

Figura 8.2 - Visualização das 37 bases para apoio topográfico

A Tabela 8.1 mostra o resumo do espaçamento das bases de apoio topográfico, na qual se verifica que nove bases ficaram com espaçamento inferior a 200 m.

Tabela 8.1 – Resumo dos espaçamentos entre as bases

Espaçamento (m)	Número de Bases
< 200	9
200 - 300	10
300 - 400	9
400 - 500	2
500 - 600	1
600 - 700	3
700 - 800	1
800 - 900	1
> 1000	1

8.1.2 Processamento e Ajustamento da Rede em 2001

As observações GPS foram processadas usando programa SKI-PRO, versão 2.1, da Leica. Todos os vetores obtidos no processamento das observações GPS, independentes e triviais foram ajustados (embora seja recomendado que apenas vetores independentes sejam ajustados), com o programa MOVE 3, versão 3.0.2, da Leica.

O ajustamento da rede teve como injeção horizontal três vértices de 2^a ordem da Rede Geodésica do IBGE, APN8, P11 e 3R7 (Tabela 8.2), e como injeção vertical o vértice da empresa de aerolevantamento MAPLAN, de cujo vértice se conhecia a diferença entre a altura elipsoidal no Sistema de Referência WGS-84 (obtida por GPS) e a altura ortométrica em relação a RRNN do IBGE (obtida por nivelamento geométrico). O valor da diferença entre essas duas alturas (ondulação geoidal) é $-14,555m$.

Tabela 8.2 - Coordenadas dos pontos de injeção

VÉRTICE	SISTEMA DE REFERÊNCIA WGS-84		
	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIPSOIDAL
AP – N8	20° 18' 38,027620"S	40° 17' 06,064190"W	-
P11	20° 17' 58,745060"S	40° 18' 06,216550"W	-
3R7	20° 17' 52,805710"S	40° 20' 27,365810"W	-
MAPLAN	20° 18' 37,674700"S	40° 19' 15,556900"W	-1.5295

Neste ajustamento foram usados os parâmetros estatísticos padrão do programa (nível de significância $\alpha_0 = 5\%$ e potência de teste $1 - \beta = 80\%$). A análise dos

resultados desse ajustamento mostrou a rejeição do teste global (teste “F” do programa MOVE 3) e uma quantidade significativa de “outliers”. As coordenadas resultantes do ajustamento de 2001, mesmo com a rejeição do teste global e sem a eliminação das prováveis observações com erros grosseiros, são hoje usadas para georreferenciar serviços levantamentos topográficos e cadastrais do município de Vitória.

Concluindo, o ajustamento de 2001 constituiu-se de um ajustamento simples, do qual todos os vetores, independentes e triviais, participaram e não se procedeu nenhuma análise de confiabilidade da rede. A Tabela 8.2 mostra os parâmetros estatísticos e valores críticos dos testes usados no ajustamento da rede cadastral de Vitória em 2001. As coordenadas e as precisões do ajustamento de 2001 são apresentadas no Anexo 1.

Tabela 8.3 - Parâmetros estatísticos do ajustamento de 2001

ESTAÇÕES	
Número de (em parte) estações conhecidas	5
Número de estações desconhecidas	74
OBSERVAÇÕES	
Diferenças de coordenadas GPS (267 linhas base)	801
Coordenadas conhecidas	12
Total	813
PARÂMETROS DESCONHECIDOS	
Coordenadas	237
Total	237
Graus de liberdade	576
PARÂMETROS DOS TESTES ESTATÍSTICOS	
Alfa (multidimensional)	0.73
Alfa 0 (uma dimensão)	0.05
Beta	0.8
Valor crítico do teste W	1.96
Valor crítico do teste T (3 dimensões)	1.89
Valor crítico do teste T (2 dimensões)	2.42
Valor crítico do teste F	0.96
Teste F (Rejeitado)	7.315

8.2 Procedimentos usados no ajustamento da rede em 2004

Nesta seção serão descritos os principais procedimentos para ajustamento de rede com uso do programa MOVE 3 (módulo de ajustamento do programa SKI-PRO). Inicialmente a rede é ajustada internamente, ou seja, é feito um ajustamento livre de injunção. O objetivo desse ajustamento é eliminar as inconsistências internas através da detecção de “outliers”, localização e a eliminação dos erros grosseiros. Para isso é

aplicado o teste global (teste “F” do MOVE 3) que avalia a rede de forma geral. Em seguida são aplicados os testes “data snooping” e, ou, teste- τ (tau) para a detecção de “outliers”. O programa MOVE 3 usa dois testes para detecção de “outlier”, o teste “W” e o teste “T”. O teste “W” corresponde ao teste unidimensional “data snooping”, apresentado na seção 6.2. O teste “T” é um teste multidimensional, mas difere-se do teste- τ , pois não considera a redundância da rede na definição dos valores críticos para a detecção de “outlier”.

Na primeira tentativa de ajustamento livre podem ser usados os parâmetros padrão dos programas de ajustamento. No caso do programa de ajustamento MOVE-3, os parâmetros padrão são: nível de significância $\alpha_o = 5\%$, potência de teste $1 - \beta = 80\%$, e um fator igual a 10 para compensar o otimismo da precisão do processamento GPS (Figura 8.3).

Caso o teste global não seja aceito, conforme se discutiu na seção 6.1.3, significa que da matriz variância-covariância obtida pelo processamento dos vetores foi muito otimista, então o fator de compensação do otimismo da precisão do processamento GPS pode ser aumentado, tendo-se o cuidado para que a precisão obtida do vetor não ultrapasse a precisão nominal do equipamento de medida.

Figura 8.3 - Configuração padrão do nível de significância, potência de teste e valor de compensação do otimismo do processamento GPS (sigma a priori-GPS)

Aceito o teste global passa-se para análise dos “outliers”. “Outliers” detectados não necessariamente correspondem à observações com erros grosseiros, assim deve-se verificar o número de redundância da observação suspeita. Quanto maior o valor do

número de redundância maior a probabilidade do “outlier” corresponder à observação com erro grosseiro, conforme discutido na seção 6.2.2. Entretanto, quando um número elevado de “outliers” é detectado pode ser conveniente modificar o nível de significância dos testes. A redução do nível de significância diminui o risco de rejeição de uma observação correta (erro tipo I), mas, em contrapartida, aumenta o risco de se aceitar observações incorretas. Em outras palavras, reduzindo o nível de significância e mantendo a potência do teste, o valor crítico para detecção de “outliers” é aumentado.

Após o ajustamento livre, a rede é considerada internamente consistente, isto é, “livre de erros grosseiros”, então, pode-se injuncioná-la a pontos de coordenadas conhecidas, e proceder-se um novo ajustamento. Novos “outliers” podem surgir, agora, provocados pela não consistência das injunções, já que as coordenadas das injunções são normalmente resultantes de outros ajustamentos, portanto não possuem exatidão absoluta. Isso pode ser contornado introduzindo um desvio padrão nas coordenadas do ponto de injunção, ou seja, não se considera as coordenadas da injunção como absolutamente fixa. O programa MOVE 3 apresenta duas alternativas de ajustamento em relação ao ponto de injunção, uma que considera o ponto de injunção absolutamente fixo (ajustamento com restrição) e outra que o considera relativamente fixo em função do seu desvio padrão (Figura 8.4).

Figura 8.4 - Ajustamento com restrição e ajustamento com restrição com peso

Após as etapas de ajustamento descritas anteriormente, somente os erros grosseiros detectáveis pelo nível de significância adotado são eliminados. Isso implica que ainda podem existir observações com erros grosseiros não detectados. O programa MOVE 3 faz uma análise dos limites inferiores dos erros grosseiros detectáveis, ou seja,

determina-se a confiabilidade interna das observações (seção 7.4.1). A análise do ajustamento é complementada com a determinação da confiabilidade externa das coordenadas dos pontos ajustados (seção 7.4.3).

8.2.1 Rede de Controle

Para melhorar geometria e a rigidez da rede de controle, foram observados 21 novos vetores, em 2003, conforme apresentado na Figura 8.5. Esses vetores foram observados durante uma hora, à taxa de armazenamento de 10 segundos, com ângulo de corte 15° , usando os mesmos receptores das medições realizadas em 2001. Estes vetores, juntamente com outros medidos em 2001, formaram uma rede de pontos controle, conforme recomenda a NBR-14166.

Daqui por diante, a Rede Cadastral Municipal de Vitória (78 vértices) será denominada de rede principal, para diferenciá-la da rede de controle da qual fazem parte apenas os 15 vértices que podem ser vistos na Figura 8.5.

Figura 8.5 - Visualização dos novos vetores rede de controle

8.2.2 Processamento e Ajustamento da Rede de Controle com SKI-Pro

O processamento foi feito somente para os vetores independentes. Para modelar a troposfera foi usado o modelo Hopfield e para a modelagem da ionosfera usou-se o modelo padrão do programa, baseado em hipóteses sobre o número total de elétrons e sua distribuição nessa camada. Nesse modelo, o atraso causado pela ionosfera é calculado para cada época de cada satélite.

Os satélites de cada linha base tiveram sua qualidade verificada, antes do processamento. Ocasão em que se procurou eliminar trechos de rastreamento com falhas significativas. Por exemplo, satélites com tempo de rastreamento menores que 10 minutos foram excluídos e aqueles com perdas de ciclo significativas foram excluídos em parte ou completamente, em função da extensão da perda de ciclos. Este procedimento minimizou os distúrbios causados nas observações por satélites parcialmente obstruídos por construções, árvores, espelhos d'água e outros..

Os critérios básicos para aceitação da fixação da ambigüidade foi o RMS (Root Mean Square) e a razão entre o RMS calculado do segundo melhor conjunto de ambigüidades (RMS fixo 2) e o RMS do primeiro melhor conjunto de ambigüidades (RMS fixo). O valor adotado para o RMS limite foi 10 mm e a razão entre a segunda melhor e a melhor solução de ambigüidade foi 1,5.

Como os vértices da rede de controle foram escolhidos dentre os vértices da rede principal estabelecidos em locais com menos obstruções, não houve dificuldades para fixação da ambigüidade dos vetores da rede de controle.

8.2.2.1 Ajustamento da Rede de Controle

Os vetores processados pelo programa SKI-PRO foram ajustados com programa MOVE 3. (módulo de ajustamento do programa SKI-PRO).

Na primeira tentativa do ajustamento livre da rede foram usados os parâmetros padrão do programa MOVE 3 para os testes de detecção de “outliers”: nível de significância do teste unidimensional $\alpha_0 = 5\%$, potência do teste $1 - \beta = 80\%$ e o fator para compensar o otimismo do processamento GPS igual a 10 (Figura 8.3). Esse primeiro processamento não passou no teste global (teste “F” do MOVE 3). Então, o

valor do fator de compensação foi gradativamente aumentado, até o valor 15, que atendeu ao teste global e, ainda assim, apresentava as observações com precisões compatíveis com a precisão nominal do equipamento usado (10 mm + 2ppm). A Tabela 8.4 mostra as componentes (DX, DY, DZ) de algumas observações e a matriz de precisão, cujos elementos da diagonal correspondem aos desvios padrão das componentes (já multiplicados pelo fator de compensação 15) e os elementos abaixo da diagonal, que correspondem às correlações entre as componentes da linha base (vetor).

Tabela 8.4 – Exemplo de observações brutas e suas precisões.

	Estação	Alvo	Observ. (m)	Precisão das Observações		
				dp-x(m) cor-xy cor-xz	dp-y (m) cor-yz	dp-z (m)
DX	CEFETES	3R7	-1016.5054	0.0102		
DY			-2083.9607	-0.9026	0.0090	
DZ			1301.7583	-0.5648	0.5285	0.0045
DX	CEFETES	AP-N8	2333.8536	0.0073		
DY			2732.5482	-0.8175	0.0066	
DZ			26.6572	-0.6996	0.7915	0.0045
DX	CEFETES	AP-N8	2333.8423	0.0121		
DY			2732.5622	-0.8785	0.0105	
DZ			26.6681	-0.5251	0.4799	0.0056
DX	CEFETES	P11	1584.1665	0.0049		
DY			1080.1854	-0.7039	0.0041	
DZ			1130.9104	-0.5749	0.6591	0.0035

Com o ajustamento livre aceito no teste global passou-se a analisar o teste de detecção de “outlier” que destacou uma quantidade significativa de observações como possíveis erros grosseiros. Para minimizar a eliminação de vetores (linhas base), optou-se por modificar o nível de significância do teste para $\alpha_0 = 1\%$, mantendo-se a potência do teste em $1 - \beta = 80\%$. Assim, somente seis vetores foram eliminados (18 componentes) e a redundância total ficou em 101 (Tabela 8.5). Todas as observações suspeitas eliminadas apresentaram o número de redundância maior que 0,50.

Depois de obtida a consistência interna da rede através do ajustamento livre, a rede de controle teve como injunção horizontal os vértices AP-N8, P11 e 3R7 (Tabela 8.1) e como injunção vertical, os vértices P11 e CEFETES, cujas alturas elipsoidais no sistema WGS-84, são 92,593 e 7,490 metros, respectivamente. Estas alturas foram obtidas do ajustamento executado em 2001. Elas foram usadas, porque o vértice MAPLAN, responsável pela injunção de altura no ajustamento de 2001, foi desabilitado devido à detecção de “outlier” nos vetores que esse vértice integrava.

A rede foi ajustada com as injunções externas, mas o teste global falhou e novos “outliers” foram detectados nas observações. Além do teste das observações, o programa MOVE 3 também verifica as coordenadas conhecidas (injunção). O teste das coordenadas indicou “outliers” nos vértices 3R7 e AP-N8. Como a rede havia sido ajustada internamente, ou seja, possuía consistência interna, resolveu-se o problema atribuindo desvios gradativos às coordenadas, latitude e longitude dos vértices 3R7 e AP-N8, repetindo-se o ajustamento da rede, e verificando a presença de “outliers”. Esse procedimento foi repetido até atingir-se o valor 9 mm, que após o ajustamento não mais se detectou “outliers”. Assim o ajustamento final da rede foi feito com restrição relativa dos pontos de injunção em função do desvio padrão atribuído. A Figura 8.6 mostra os vértices de injunções 3R7 e AP-N8 com seus respectivos desvios, representados na forma de elipse de erro.

Os parâmetros usados no ajustamento da rede de controle, tais como: número de vetor (cada vetor contribui para três equações de observação), grau de liberdade (redundância), os parâmetros estatísticos, os valores críticos dos testes “W” e do teste “T”, são mostrados na Tabela 8.4. O valor crítico do teste “W” (2,58) é obtido pela Eq. 6.17, em função do nível de significância unidimensional α_o . O valor crítico do teste global (teste “F”) é calculado pela Eq. 6.11, em função do nível de significância multidimensional α (a definição do α é discutida na seção 7.3). A Tabela 8.5 mostra o valor do nível de significância multidimensional igual $\alpha=0,531$ e o valor crítico do teste “F” igual a 0,98. Na literatura pesquisada e nos manuais do programa MOVE 3 não foi encontrado o algoritmo para determinar o valor crítico do teste “T”.

Tabela 8.5 – Parâmetros do ajustamento da rede de controle

ESTAÇÕES		
Número de estações conhecidas (em parte)		4
Número de estações desconhecidas		11
	Total	15
OBSERVAÇÕES		
Diferenças de coordenadas GPS (46 linhas base)		138
Coordenadas conhecidas		8
	Total	146
PARÂMETROS DESCONHECIDOS		
Coordenadas		45
Graus de liberdade		101
TESTES		
Alfa (multidimensional)		0.531
Alfa 0 (unidimensional)		0.01
Beta		0.8
Valor crítico do teste W		2.58
Valor crítico do teste T (3 dimensões)		2.83
Valor crítico do teste T (2 dimensões)		3.81
Valor crítico do teste F		0.98
Teste F	(aceito)	0.87

As coordenadas ajustadas dos vértices da rede de controle no sistema WGS-84, apresentadas na Tabela 8.6, foram usadas como injeção do ajustamento da rede principal.

As coordenadas dos vértices da rede de controle, ajustadas no sistema WGS-84, foram transformadas para o sistema SAD-69 através dos parâmetros oficiais do IBGE, usando método Molodenski disponível no programa SKI-PRO. Essas coordenadas na projeção UTM (SAD-69) e suas precisões foram comparadas com os valores das coordenadas dos 15 vértices correspondentes do ajustamento executado no ano 2001.

A Figura 8.6 apresenta os 15 vértices e as linhas bases da rede controle.

Figura 8.6 - Vértices e linhas base da Rede de controle

Tabela 8.6 – Coordenadas da rede de controle ajustadas com o programa MOVE 3, no sistema WGS-84

Estação	Coordenadas Geográficas		Prec(95.0)
3R7	Latitude	20 17 52.80571 S	injunção
	Longitude	40 20 27.36581 W	injunção
	Altitude	93.9201	0.0146
AP-N8	Latitude	20 18 38.02762 S	injunção
	Longitude	40 17 06.06419 W	injunção
	Altitude	9.8845	0.0067 m
CEFETES	Latitude	20 18 38.98060 S	0.0024 m
	Longitude	40 19 09.93203 W	0.0023 m
	Altitude	7.4899	injunção
P11	Latitude	20 17 58.74506 S	injunção
	Longitude	40 18 06.21655 W	injunção
	Altitude	92.5928	injunção
PMV013	Latitude	20 19 14.97681 S	0.0058 m
	Longitude	40 19 37.28294 W	0.0049 m
	Altitude	-1.8606	0.0085 m
PMV017	Latitude	20 19 13.04055 S	0.0054 m
	Longitude	40 21 08.52029 W	0.0048 m
	Altitude	-12.5899	0.0137 m
PMV024	Latitude	20 18 25.67243 S	0.0051 m
	Longitude	40 21 16.85767 W	0.0050 m
	Altitude	-13.1378	0.0133 m
PMV032	Latitude	20 16 23.35935 S	0.0059 m
	Longitude	40 19 27.45784 W	0.0051 m
	Altitude	-10.7539	0.0129 m
PMV034	Latitude	20 17 22.85447 S	0.0055 m
	Longitude	40 18 41.90274 W	0.0050 m
	Altitude	13.3282	0.0151 m
PMV051	Latitude	20 16 28.30816 S	0.0040 m
	Longitude	40 16 56.79850 W	0.0041 m
	Altitude	-9.9815	0.0105 m
PMV053	Latitude	20 15 51.79961 S	0.0067 m
	Longitude	40 15 43.53034 W	0.0059 m
	Altitude	-10.8908	0.0128 m
PMV054	Latitude	20 15 19.33592 S	0.0084 m
	Longitude	40 16 02.45085 W	0.0072 m
	Altitude	-9.8887	0.0195 m
PMV05HF	Latitude	20 16 53.51654 S	0.0048 m
	Longitude	40 20 20.85753 W	0.0042 m
	Altitude	-12.2166	0.0128 m
PMV071	Latitude	20 16 06.52128 S	0.0068 m
	Longitude	40 17 33.65353 W	0.0061 m
	Altitude	-11.6523	0.0170 m
UFES-001	Latitude	20 16 43.14754 S	0.0035 m
	Longitude	40 18 26.94474 W	0.0032 m
	Altitude	11.6011	0.0091 m

8.2.3 Processamento e Ajustamento da Rede Completa

A rede principal foi processada com o programa SKI-PRO usando os mesmos parâmetros e critérios usados no processamento da rede de controle. A fixação da ambigüidade dos vetores da rede principal foi mais trabalhosa, devido à quantidade de perda de ciclos, satélites com pouco tempo de rastreo e multicaminhamento. Mesmo assim, conseguiu-se fixar a ambigüidade de 202 vetores. Não tendo sido possível fixar ambigüidade de 13 vetores. Isso, entretanto, não representou nenhum transtorno, porque estes vetores foram medidos mais de uma vez.

8.2.3.1 Ajustamento da Rede Principal

A rede principal é formada por 78 vértices, os quais compõe as 37 bases de apoio topográfico. Esta rede teve como injeção aos pontos da rede de controle, previamente ajustados, cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 8.6.

Os procedimentos, o nível de significância e a potência de teste, adotados para o ajustamento da rede principal, foram idênticos aos descritos, anteriormente, para a rede de controle. Entretanto, o fator de compensação do otimismo do processamento GPS foi fixado em 12. Mais informações sobre a rede principal e sobre os parâmetros estatísticos são mostrados na Tabela 8.7. Esta tabela mostra que foram ajustados 202 vetores (606 equações de observação). Ressalta-se que valor crítico do teste “T”, difere do cálculo do valor crítico do teste- τ (Eq. 6.23). Isso pode ser verificado pela igualdade dos valores crítico do teste “T” da rede principal e da rede de controle (2,83), embora tenham valores de redundância diferentes (417 e 101, respectivamente).

Dezenove vetores suspeitos de erro grosseiros detectados foram excluídos (47 observações). Mesmo com eliminação desses vetores, a redundância apresentou valor de 417.

Tabela 8.7 - Parâmetros estatísticos do ajustamento da rede principal

ESTAÇÕES		
Número de (em parte) estações conhecidas		15
Número de estações desconhecidas		63
OBSERVAÇÕES		
Diferenças de coordenadas GPS (202 linhas base)		606
Coordenadas conhecidas		45
	Total	651
PARÂMETROS DESCONHECIDOS		
Coordenadas		234
	Total	234
Graus de liberdade		
		417
PARÂMETROS DOS TESTES ESTATÍSTICOS		
Alfa (multidimensional)		0.673
Alfa 0 (uma dimensão)		0.01
Beta		0.8
Valor crítico do teste W		2.58
Valor crítico do teste T (3 dimensões)		2.83
Valor crítico do teste T (2 dimensões)		3.81
Valor crítico do teste F		0.97
Teste F	(Aceito)	0.798

A rede principal é mostrada na Figura 8.7, na qual se observam os vetores ajustados, as elipses de erro e os retângulos que representam a confiabilidade externa de cada vértice. Os vetores desabilitados devido a erros grosseiros são mostrados em cor cinza.

Figura 8.7 - Geometria da Rede principal com as elipses de erro e a confiabilidade externa

CAPÍTULO 9 - RESULTADOS E ANÁLISES

9.1 Introdução

A precisão da rede é obtida pela propagação da matriz variância-covariância das observações através da geometria da rede. No entanto, a confiabilidade estima o valor do limite inferior do erro grosseiro que a rede é capaz de detectar e avalia os efeitos dos erros grosseiros não detectados nos parâmetros desconhecidos, a partir de parâmetros estatísticos predefinidos. É importante destacar que a credibilidade da confiabilidade pressupõe que os erros grosseiros detectáveis tenham sido eliminados.

Assim, os resultados obtidos do novo ajustamento, basearam-se na análise de precisão e confiabilidade. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados do ajustamento executado em 2001.

9.2 Resultados da rede de controle

Nesta seção são mostrados os resultados obtidos do ajustamento da rede de controle e comparações com o ajustamento feito em 2001.

A Figura 9.1 mostra os vértices da rede de controle, as elipses de erro e os retângulos representando a confiabilidade externa. Nesta figura, os semi-eixos das elipses de erro dos vértices de junção AP-N8 e 3R7 são mostrados com valor de 9 mm (relativamente fixo), enquanto os outros vértices de junção CEFETES e P11 são mostrados como absolutamente fixo.

Figura 9.1 - Rede de controle ajustada mostrando as elipses de erro e os retângulos de confiabilidade externa

9.2.1 Teste de Detecção de “Outliers”

As observações com resíduos normalizados acima do valor crítico (2,58) não foram consideradas. Isso é visto nos gráficos 9.1 e 9.2 que apresentam os resíduos normalizados do ajustamento (X, Y e Z) da rede de controle.

Gráfico 9.1 - Resíduos normalizados de X e Y do ajustamento da rede de controle

Gráfico 9.2 - Resíduos normalizados em Z do ajustamento final da rede de controle

9.2.2 Diferenças de coordenadas dos vértices da rede de controle e os vértices correspondentes no ajustamento de 2001

As diferenças entre as coordenadas da rede de controle e as correspondentes coordenadas ajustadas em 2001, mostradas na Tabela 9.1 e no Gráfico 9.3, apresentam valores médios de 10 mm, tanto para a posição como para a altura elipsoidal, exceto os pontos PMV053 e PM054 que apresentaram uma diferença em torno de 20 mm na posição.

Tabela 9.1 – Coordenadas da rede controle (ajustadas em 2004) e as coordenadas ajustadas em 2001 (SAD-69)

PONTO	COORDENADAS 2001			COORDENADAS 2004			DIFERENÇAS DE COORDENADAS		
	ESTE (m)	NORTE (m)	A. ELIPS.(m)	ESTE (m)	NORTE (m)	A. ELIPS.(m)	ESTE (m)	NORTE (m)	A. ELIPS.(m)
3R7	360 026.277	7 755 019.802	108.081	360026.277	7755019.802	108.079	0.000	0.000	-0.002
AP-N8	365 876.395	7 753 675.846	24.074	365876.395	7753675.846	24.069	0.000	0.000	-0.005
CEFETES	362 283.804	7 753 618.191	21.659	362283.815	7753618.197	21.658	0.011	0.006	0.000
P11	364 122.141	7 754 869.952	106.783	364122.141	7754869.952	106.783	0.000	0.000	0.000
PMV013	361 499.384	7 752 505.09	12.293	361499.389	7752505.089	12.293	0.005	-0.001	0.000
PMV017	358 852.687	7 752 543.122	1.556	358852.682	7752543.132	1.547	-0.005	0.010	-0.009
PMV024	358 598.913	7 753 997.535	1.021	358598.909	7753997.551	1.010	-0.004	0.016	-0.011
PMV032	361 742.039	7 757 783.931	3.438	361742.039	7757783.953	3.446	0.000	0.022	0.008
PMV034	363 078.201	7 755 965.246	27.522	363078.217	7755965.254	27.521	0.016	0.008	-0.001
PMV051	366 114.166	7 757 666.241	4.246	366114.183	7757666.256	4.245	0.017	0.015	-0.001
PMV053	368 231.226	7 758 805.069	3.369	368231.250	7758805.086	3.359	0.024	0.018	-0.010
PMV054	367 674.632	7 759 798.988	4.385	367674.653	7759799.000	4.366	0.021	0.012	-0.019
PMV05HF	360 200.292	7 756 844.243	1.958	360200.293	7756844.255	1.966	0.002	0.013	0.008
PMV071	365 039.708	7 758 327.77	2.574	365039.714	7758327.783	2.573	0.006	0.013	-0.001
UFES-001	363 502.474	7 757 189.512	25.803	363502.477	7757189.520	25.807	0.003	0.008	0.004

Gráfico 9.3 - Diferença entre coordenadas da rede de controle e as coordenadas de 2001

9.2.3 Precisões das coordenadas dos vértices da rede de controle

Os gráficos 9.4, 9.5 e 9.6 comparam as precisões das coordenadas dos vértices da rede de controle e as precisões coordenadas ajustadas em 2001 desses mesmos vértices. Nestes gráficos constata-se uma melhoria na precisão das coordenadas do ajustamento da rede de controle de 2004 em relação ao ajustamento de 2001.

Gráfico 9.4 - Comparação da precisão das coordenadas ESTE da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004

Gráfico 9.5 - Comparação da precisão das coordenadas NORTE da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004 (1,96 x desvio padrão)

Gráfico 9.6 - Comparação da precisão da altura da rede de controle entre o ajustamento de 2001 e 2004 (1,96 x desvio padrão)

9.2.4 Confiabilidade interna da rede de controle

A confiabilidade interna da rede de controle é resumida no Gráfico 9.7. Neste gráfico, observa-se que a capacidade da rede em detectar erros grosseiros de observações corresponde ao valor médio de 20 mm (o menor valor do erro grosseiro detectável é 13 mm e o maior 43 mm).

Gráfico 9.7 - Confiabilidade interna da rede de controle

9.2.5 Confiabilidade externa da rede de controle

A confiabilidade externa é mostrada no Gráfico 9-8 e na Tabela 9.2, nos quais se observa que os valores de confiabilidade externa para coordenadas, Este e Norte, variam em torno de 9 mm, enquanto a confiabilidade da altura mostra uma maior amplitude de variação, com extremos entre -15 mm e 10 mm.

Gráfico 9.8 - Confiabilidade externa da rede de controle

A Tabela 9.2 mostra a o efeito do erro grosseiro não detectável (confiabilidade externa) de cada componente das coordenadas dos vértices da rede e a componente da observação (ou estação) responsável por este efeito. Por exemplo, os responsáveis pela confiabilidade externa das coordenadas do vértice PMV013 são: pela latitude, a componente DZ da linha base CEFETES - P11; pela longitude, a componente DY linha base CEFETES - P11 e pela altura elipsoidal, a componente DY da linha base AP-N8-PMV013.

Tabela 9.2 – Confiabilidade externa da rede de controle

CONFIABILIDADE EXTERNA DA REDE DE CONTROLE						
CONFIABILIDADE EXTERNA DO VÉRTICE			OBSERVAÇÃO OU VÉRTICE RESPONSÁVEL			
Estação	Coordenada	Conf. Ext.	Estação	Coordenada	Compon. da Observação	Alvo
3R7	Latitude	-0.0060 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0053 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	-0.0064 m	3R7		DX	PMV017
AP-N8	Latitude	-0.0052 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0045 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	-0.0089 m	P11		DY	AP-N8
CEFETES	Latitude	-0.0065 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0056 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	-0.0024 m	P11		DY	AP-N8
P11	Latitude	0.0000 m	AP-N8	Latitude		
	Longitude	0.0000 m	AP-N8	Longitude		
	Altitude	0.0000 m	P11		DY	AP-N8
PMV013	Latitude	-0.0061 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0053 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	-0.0135 m	AP-N8		DY	PMV013
PMV017	Latitude	0.0077 m	CEFETES		DZ	PMV017
	Longitude	0.0065 m	CEFETES		DY	PMV017
	Altitude	-0.0079 m	CEFETES		DY	PMV017
PMV024	Latitude	0.0091 m	CEFETES		DZ	PMV024
	Longitude	0.0070 m	CEFETES		DY	PMV024
	Altitude	0.0098 m	CEFETES		DX	PMV024
PMV032	Latitude	0.0073 m	CEFETES		DZ	PMV032
	Longitude	0.0064 m	CEFETES		DY	PMV032
	Altitude	0.0102 m	UFES-001		DX	PMV032
PMV034	Latitude	0.0070 m	CEFETES		DZ	PMV034
	Longitude	0.0066 m	UFES-001		DY	PMV034
	Altitude	-0.0092 m	UFES-001		DY	PMV034
PMV051	Latitude	0.0050 m	P11		DZ	PMV051
	Longitude	0.0047 m	P11		DX	PMV051
	Altitude	0.0051 m	P11		DX	PMV051
PMV053	Latitude	0.0091 m	CEFETES		DZ	PMV053
	Longitude	0.0059 m	CEFETES		DY	PMV053
	Altitude	-0.0126 m	PMV051		DY	PMV053
PMV054	Latitude	0.0104 m	PMV071		DZ	PMV054
	Longitude	-0.0080 m	PMV054		DY	PMV053
	Altitude	-0.0114 m	PMV054		DX	PMV053
PMV05HF	Latitude	-0.0064 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0055 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	0.0059 m	CEFETES		DX	PMV05HF
PMV071	Latitude	0.0082 m	UFES-001		DZ	PMV071
	Longitude	0.0061 m	UFES-001		DY	PMV071
	Altitude	-0.0078 m	PMV071		DX	PMV051
UFES-001	Latitude	-0.0051 m	CEFETES		DZ	P11
	Longitude	-0.0046 m	CEFETES		DY	P11
	Altitude	-0.0043 m	P11		DY	UFES-001

Outra análise da confiabilidade é feita através da relação entre o efeito de um erro grosseiro não detectável de uma observação nas coordenadas de um vértice (confiabilidade externa) e a precisão dessas coordenadas, Eq. (7.22). Na Figura 9.1 pode-se estimar a relação média entre a confiabilidade, representada pelo retângulo e a precisão, representada pela elipse de erro, em aproximadamente 3. Kok (1982) citado por Kavouras (1982) diz que um critério baseado na experiência, que é frequentemente usado, considera a relação entre a confiabilidade externa e a precisão das coordenadas $\sqrt{\gamma_{oi}} \leq 10$ para cada observação. Assim, baseado no valor médio 3 dessa relação, estimado na Figura 9.1, pode-se concluir que a rede de controle possui boa confiabilidade, além da boa precisão mostrada pelas elipses de erro.

$$\frac{\nabla_{x_{oi}}}{\sigma_x} \leq \sqrt{\gamma_{oi}} \quad (7.22)$$

onde:

$\nabla_{x_{oi}}$: Efeito de um erro grosseiro não detectável de uma observação nas coordenadas de um vértice;

σ_x : Precisão das coordenadas do vértice;

γ_{oi} : Estatística proposta por Baarda para representar a confiabilidade externa, obtida pela Eq. (7.21).

9.3 Resultados da Rede Principal

A geometria da rede principal é apresentada na Figura 8.7, bem como as elipses de erro e os retângulos representando a confiabilidade externa. Nesta figura, os semi-eixos das elipses de erro dos vértices de junção AP-N8 e 3R7 são mostrados com valor de 9 mm, enquanto os outros vértices de junção CEFETES e P11 são mostrados como absolutamente fixo.

9.3.1 Teste “Data snooping” da rede principal

O Gráfico 9.9 mostra o resultado do teste de detecção de “outliers” “data snooping” do ajustamento de 2001. Nele verifica-se a presença de “outliers” não eliminados. O nível de significância adotado para o ajustamento de 2001 foi de 5% e a potência de teste 80%, os quais correspondem a um valor crítico de 1,96 para detecção de “outliers”.

No ajustamento de 2004, as observações correspondentes aos “outliers”, supostamente contendo erros grosseiros foram eliminadas. O Gráfico 9.10 mostra somente os resíduos inferiores ao valor crítico do teste (2.58) presentes na rede ajustada, em 2004. A eliminação de erros grosseiros torna o ajustamento coerente com a suposição básica de que somente erros aleatórios devem estar presentes nas observações ajustadas.

Gráfico 9.9 - Resíduos normalizados da rede principal ajustada em 2001

Gráfico 9.10 - Resíduos normalizados da rede ajustada em 2004

9.3.2 Diferenças das coordenadas do ajustamento 2004 e ajustamento 2001

Os gráficos 9.11, 9.12 e 9.13 mostram, respectivamente, as diferenças das coordenadas, nas direções Este, Norte e Altura elipsoidal, entre os ajustamentos de 2001 e 2004.

O Gráfico 9.11 mostra que apenas nove estações apresentam diferenças de coordenadas, na direção Este, com valores absolutos acima de 20 milímetros.

Gráfico 9.11 - Diferenças das coordenadas Este do processamento 2001 e 2004

A diferença das coordenadas, na direção Norte (Gráfico 9.12), apresentam, em sua maioria, menores que 20 milímetros. Apenas uma estação apresenta o valor da diferença igual a 21 milímetros.

Gráfico 9.12 - Diferenças das coordenadas Norte do processamento 2001 e 2004

Já as diferença entre as alturas elipsoidais são todas menores que 20 milímetros. (Gráfico 9.13).

Gráfico 9.13 - Diferenças das alturas elipsoidais do processamento 2001 e 2004

O valor 20 mm, que pode ser considerado como representativo da diferença entre as coordenadas do ajustamento de 2001 e o ajustamento de 2004, não é significativo quando confrontado com a Tabela 2.2 (níveis de precisão cadastral da urbana Suíça). Esta tabela foi tomada como referência, porque no Brasil ainda não há normas que estabeleça a precisão dos limites de propriedade para cadastro urbano (existe norma apenas para o cadastro rural - Lei 10.267).

A diferença de 20 mm considerada como representativa das coordenadas ajustadas não influenciam significativamente no espaçamento das bases topográficas embora o mesmo ocorra com os azimutes, (Tabela 9.3).

9.3.3 Precisões do ajustamento 2004

Os gráficos 9.14, 9.15 e 9.16 mostram as precisões com 95% de probabilidade nas direções Este, Norte e Altura do ajustamento de 2004. O Anexo 2 mostra as precisões na forma de tabela. As precisões nas direções Este e Norte apresentam valores que 10 milímetros para um nível de confiança 95%.

Gráfico 9.14 - Precisão nas coordenadas Este dos vértices da rede ajustada em 2004

Gráfico 9.15 - Precisão nas coordenadas Norte dos vértices da rede ajustada em 2004

Gráfico 9.16 - Precisão na altura dos vértices da rede ajustada em 2004

Já o gráfico 9.16, mostra nove vértices com valores de precisão superior a 20 milímetros.

9.3.4 Confiabilidade Externa do ajustamento 2004

A confiabilidade externa da rede ajustada em 2004 é mostrada no Gráfico 9.14. Este gráfico mostra a confiabilidade externa das três direções (Este, Norte e Altura elipsoidal), neste gráfico observa-se que a maior parte dos valores da confiabilidade é menor que 20 milímetros.

Gráfico 9.17 - Confiabilidade externa da rede ajustada em 2004

A Figura 9.1 mostra a relação entre a confiabilidade e precisão do ajustamento de 2004. Nela a confiabilidade é representada por um retângulo que corresponde aos efeitos dos erros não detectáveis relacionados às direções Norte e Este, e por uma barra que corresponde aos efeitos desses erros na direção da altura elipsoidal. Por exemplo, vértice PMV032, esta relação é de aproximadamente 7 vezes para eixos Este e Norte, 8 vezes para altura. A relação avaliada, visualmente na Figura 9.1, foi duplicada em função da diferença de escala entre a elipse de erro e o retângulo da confiabilidade.

9.3.5 Diferença entre azimutes e espaçamentos das bases topográficas

A Tabela 9.3 apresenta os azimutes e os espaçamentos das bases topográficas obtidas nos ajustamentos 2004 e 2001. A diferença entre os espaçamentos é pouco significativa, com apenas duas bases apresentando diferença superior a 10 mm. Já as diferenças entre os azimutes mostram-se mais significativas, apresentando cinco bases com diferenças superiores a 5 segundos.

Tabela 9.3 – Comparação dos azimutes e as distâncias das bases topográficas dos ajustamentos de 2004 e 2001

AJUSTAMENTO 2004		AJUSTAMENTO 2001		Diferença de	Difer. de
Azimute	Espaç. (m)	Azimute	Espaç. (m)	Azimute	espaç.(m)
35°41'17.4"	139.852	35°41'18.9"	139.856	-0°00'01.5"	-0.004
42°04'52.4"	153.612	42°04'53.8"	153.611	-0°00'01.4"	0.001
340°02'41.8"	165.490	340°02'33.7"	165.488	0°00'08.1"	0.002
148°22'37.3"	170.635	148°22'40.7"	170.633	-0°00'03.4"	0.002
76°53'09.2"	171.802	76°53'04.4"	171.800	0°00'04.8"	0.002
208°21'50.3"	172.234	208°21'50.5"	172.231	-0°00'00.2"	0.003
234°52'25.7"	180.194	234°52'23.3"	180.197	0°00'02.5"	-0.003
36°40'14.7"	191.886	36°40'21.9"	191.890	-0°00'07.2"	-0.004
18°02'50.0"	210.254	18°02'51.7"	210.253	-0°00'01.6"	0.002
62°11'18.0"	229.291	62°11'16.0"	229.289	0°00'02.0"	0.002
263°29'16.4"	236.579	263°29'27.3"	236.594	-0°00'10.9"	-0.014
214°55'28.5"	240.968	214°55'24.3"	240.962	0°00'04.1"	0.006
261°38'17.0"	246.112	261°38'15.2"	246.118	0°00'01.8"	-0.006
34°01'01.1"	249.075	34°01'13.5"	249.070	-0°00'12.4"	0.005
355°01'06.7"	254.985	355°01'10.5"	254.984	-0°00'03.8"	0.001
37°18'33.7"	260.676	37°18'45.8"	260.671	-0°00'12.1"	0.005
60°47'53.3"	270.598	60°47'52.7"	270.596	0°00'00.6"	0.003
52°43'00.5"	295.744	52°43'02.9"	295.742	-0°00'02.4"	0.002
265°45'46.2"	301.057	265°45'45.8"	301.056	0°00'00.4"	0.001
59°19'50.5"	311.036	59°19'55.3"	311.037	-0°00'04.7"	-0.002
105°25'01.2"	323.119	105°24'57.3"	323.103	0°00'03.9"	0.015
300°20'11.3"	339.880	300°20'10.3"	339.882	0°00'01.0"	-0.002
142°27'39.7"	344.466	142°27'38.9"	344.464	0°00'00.8"	0.002
242°19'51.0"	346.766	242°19'51.2"	346.765	-0°00'00.1"	0.001
72°38'21.2"	347.921	72°38'22.7"	347.922	-0°00'01.5"	-0.001
239°54'22.1"	374.004	239°54'22.6"	374.006	-0°00'00.4"	-0.001
305°09'03.8"	380.348	305°09'02.1"	380.349	0°00'01.7"	-0.001
153°36'21.9"	478.007	153°36'23.2"	478.006	-0°00'01.3"	0.001
224°13'48.5"	487.477	224°13'48.2"	487.475	0°00'00.3"	0.002
265°39'32.4"	523.131	265°39'36.6"	523.141	-0°00'04.1"	-0.009
91°08'32.3"	603.567	91°08'32.4"	603.565	-0°00'00.1"	0.002
262°35'02.2"	606.059	262°35'01.5"	606.057	0°00'00.7"	0.002
72°53'19.9"	647.846	72°53'23.2"	647.851	-0°00'03.3"	-0.004
258°32'14.1"	784.858	258°32'16.7"	784.855	-0°00'02.6"	0.003
263°23'34.9"	810.192	263°23'34.2"	810.197	0°00'00.7"	-0.005
215°54'00.8"	1 013.828	215°54'00.3"	1 013.822	0°00'00.5"	0.006

CAPÍTULO 10 - CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

10.1 Conclusões

- Análise de confiabilidade interna e externa de uma rede GPS deve ser feita na fase de projeto, através de simulações. A determinação da confiabilidade não depende de medidas reais, mas da geometria da rede expressa pelo número de redundância e da matriz variância-covariância das observações projetadas. A matriz variância-covariância das observações projetadas pode ser obtida da precisão nominal do equipamento escolhido para as medições projetadas.
- A matriz variância-covariância do processamento de linhas bases GPS é sempre muito otimista. Este fato é traduzido pela elevação da variância a “posteriori”, o que pode causar a rejeição do teste global. Entretanto, a aceitação do teste global pode ser conseguida aplicando fator de compensação à matriz variância-covariância. Entretanto, deve manter-se atento para que não ultrapassar a precisão nominal do equipamento usado na observação.
- As coordenadas resultantes do ajustamento de 2004, no qual se observou os procedimentos aconselháveis pela NBR-14166 e os conceitos de confiabilidade (como por exemplo, a criação da rede de controle, eliminação das observações com evidências de erros grosseiros e outros), apresentaram valores de coordenadas muito próximos dos valores do ajustamento de 2001 (diferença de coordenadas menores que 20 milímetros). Essa proximidade dos resultados dos dois ajustamentos,

provavelmente, está relacionada com a grande redundância do ajustamento de 2001 (grau de liberdade igual a 576).

- A pequena variação dos espaçamentos das bases topográficas associada com a variação mais significativa dos azimutes (Tabela 9.3) é um indicativo de uma pequena rotação da rede.
- As coordenadas dos vértices, obtidas do ajustamento da rede em 2004, devem ser mais precisas e mais confiáveis do que as obtidas em 2001, em função dos testes e análises estatísticas a que foram submetidas.

10.2 Recomendações

- A teoria de confiabilidade proposta por Baarda em 1968 é pouco difundida no Brasil, mas devido sua importância na análise de ajustamento, ela deveria complementar a disciplina de ajustamento nos cursos de Agrimensura, Cartografia e nos cursos de pós-graduação nas áreas de Mensuração.
- Estudo das equações que relacionam o nível de significância unidimensional e nível de significância multidimensional. A literatura consultada, nesta pesquisa, apresentou esta relação através dos nomogramas de Baarda;
- Estudo mais detalhado sobre o teste multidimensional teste- τ (tau) proposto por Pope (1976);
- Estudo das abordagens modernas sobre confiabilidade externa, como o método da robustez;
- Pesquisa sobre a detecção de erros grosseiros nas coordenadas dos vértices de junção.

ANEXO 1- Ajustamento 2001 - Coordenadas e precisões (1,96.σ) - Sistema SAD-69

AJUSTAMENTO 2001 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
3R7	20° 17' 51.03663"	40° 20' 25.98868" W	7755019.802	360026.277	108.081	Injunção	Injunção	0.0353
AP-N8	20° 18' 36.25782"	40° 17' 04.68874" W	7753675.846	365876.395	24.074	Injunção	Injunção	0.0103
CEFETES	20° 18' 37.21126"	40° 19' 08.55572" W	7753618.191	362283.804	21.659	Injunção	Injunção	Injunção
P11	20° 17' 56.97564"	40° 18' 04.84067" W	7754869.952	364122.141	106.779	Injunção	Injunção	0.017
PMV003	20° 18' 19.27915"	40° 19' 21.91744" W	7754166.436	361891.820	8.063	0.006	0.006	0.018
PMV004	20° 18' 19.92425"	40° 19' 32.27343" W	7754144.192	361591.588	9.907	0.008	0.008	0.023
PMV005	20° 17' 44.16536"	40° 19' 17.76948" W	7755247.019	362003.497	5.436	0.009	0.008	0.023
PMV006	20° 17' 38.40037"	40° 19' 09.60889" W	7755426.163	362238.807	3.950	0.010	0.009	0.026
PMV007	20° 17' 47.67104"	40° 18' 57.64316" W	7755143.894	362588.188	2.710	0.006	0.006	0.017
PMV008	20° 17' 43.43858"	40° 18' 49.46478" W	7755275.915	362824.392	2.600	0.007	0.008	0.024
PMV009	20° 19' 00.24333"	40° 18' 46.70504" W	7752915.095	362923.230	1.206	0.005	0.005	0.014
PMV010	20° 19' 03.11714"	40° 18' 35.99020" W	7752829.207	363234.709	1.915	0.006	0.006	0.017
PMV011	20° 19' 01.39553"	40° 19' 04.69968" W	7752875.508	362401.590	1.184	0.006	0.005	0.015
PMV013	20° 19' 13.20712"	40° 19' 35.90618" W	7752505.090	361499.384	12.293	0.010	0.007	0.020
PMV014	20° 19' 16.02779"	40° 20' 03.67896" W	7752411.867	360694.568	1.310	0.013	0.009	0.023
PMV015	20° 19' 10.46900"	40° 20' 13.90093" W	7752580.380	360396.707	18.781	0.011	0.012	0.034
PMV016	20° 19' 13.80211"	40° 20' 19.01094" W	7752476.696	360249.328	19.851	0.011	0.014	0.038
PMV017	20° 19' 11.27141"	40° 21' 07.14240" W	7752543.122	358852.687	1.556	0.009	0.008	0.024
PMV018	20° 19' 12.08094"	40° 21' 15.25409" W	7752516.301	358617.619	1.982	0.007	0.006	0.020
PMV019	20° 18' 49.90309"	40° 21' 07.09842" W	7753200.136	358848.579	29.779	0.008	0.009	0.028
PMV020	20° 18' 41.63600"	40° 21' 07.78980" W	7753454.157	358826.443	20.136	0.017	0.020	0.058
PMV021	20° 18' 58.71262"	40° 21' 23.31758" W	7752925.412	358380.365	11.894	0.010	0.010	0.027
PMV022	20° 18' 55.04026"	40° 21' 20.47264" W	7753039.003	358461.954	9.377	0.010	0.010	0.027
PMV023	20° 18' 30.60403"	40° 21' 20.98557" W	7753790.213	358440.904	1.2765	0.009	0.009	0.028
PMV024	20° 18' 23.90377"	40° 21' 15.47986" W	7753997.535	358598.913	1.021	0.008	0.008	0.022
PMV025	20° 17' 57.86401"	40° 20' 58.15629" W	7754802.283	359094.867	15.760	0.008	0.009	0.026
PMV026	20° 17' 56.64064"	40° 20' 52.37767" W	7754841.267	359262.186	6.283	0.011	0.011	0.032
PMV027	20° 17' 33.74535"	40° 20' 34.78949" W	7755549.374	359766.658	18.958	0.011	0.011	0.036
PMV028	20° 17' 28.65647"	40° 20' 25.52328" W	7755708.022	360034.193	8.520	0.007	0.007	0.021
PMV029	20° 16' 56.68728"	40° 19' 57.13437" W	7756697.621	360849.808	3.474	0.008	0.008	0.024

AJUSTAMENTO 2001 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
PMV030	20° 17' 02.12219"	40° 19' 55.50136" W	7 756 530.900	360 898.530	4.047	0.014	0.014	0.040
PMV031	20° 16' 28.26884"	40° 19' 30.94131" W	7 757 577.493	361 602.687	3.322	0.017	0.019	0.0575
PMV032	20° 16' 21.59131"	40° 19' 26.08145" W	7 757 783.931	361 742.039	3.438	0.012	0.010	0.031
PMV033	20° 17' 24.51242"	40° 18' 47.54694" W	7 755 858.265	362 875.399	9.821	0.009	0.008	0.0183
PMV034	20° 17' 21.08556"	40° 18' 40.52719" W	7 755 965.246	363 078.201	27.522	0.008	0.008	0.028
PMV035	20° 17' 16.79649"	40° 18' 14.88358" W	7 756 103.007	363 821.067	1.539	0.009	.010	0.026
PMV036	20° 17' 10.31170"	40° 18' 12.58396" W	7 756 302.915	363 886.205	4.223	0.016	0.014	0.039
PMV037	20° 17' 42.65949"	40° 18' 08.30258" W	7 755 309.326	364 018.249	20.870	0.014	0.014	0.0533
PMV038	20° 17' 33.83751"	40° 18' 26.14069" W	7 755 576.480	363 498.648	20.305	0.011	0.010	0.029
PMV039	20° 17' 47.81757"	40° 18' 18.93276" W	7 755 148.301	363 711.138	13.388	0.012	0.010	0.0321
PMV040	20° 17' 42.01676"	40° 18' 15.07348" W	7 755 327.538	363 821.680	1.220	0.007	0.006	0.021
PMV041	20° 17' 38.72567"	40° 18' 03.59848" W	7 755 431.351	364 153.754	1.642	0.008	.009	0.0169
PMV042	20° 18' 00.05500"	40° 17' 55.48953" W	7 754 777.410	364 394.139	1.211	0.012	0.011	0.034
PMV043	20° 18' 04.80334"	40° 17' 52.44487" W	7 754 632.111	364 483.605	1.179	0.014	0.013	0.03
PMV044	20° 18' 30.18483"	40° 17' 42.73194" W	7 753 853.943	364 771.471	2.643	0.012	0.010	0.023
PMV045	20° 18' 36.57503"	40° 17' 47.54096" W	7 753 656.374	364 633.525	.511	0.008	0.008	0.0126
PMV046	20° 16' 53.02250"	40° 17' 53.71900" W	7 756 838.798	364 429.300	4.022	0.007	0.007	0.018
PMV047	20° 17' 01.95923"	40° 17' 46.55863" W	7 756 565.660	364 639.184	4.605	0.008	.008	0.0209
PMV048	20° 16' 18.30141"	40° 17' 38.43518" W	7 757 909.808	364 864.340	2.345	0.013	0.012	0.016
PMV049	20° 16' 13.22813"	40° 17' 40.33998" W	7 758 065.359	364 807.855	1.752	0.012	0.011	0.033
PMV04HF	20° 16' 40.47774"	40° 20' 07.66336" W	7 757 193.540	360 540.325	36.279	0.007	0.007	0.023
PMV050	20° 16' 20.88245"	40° 17' 05.48856" W	7 757 837.907	365 820.821	5.811	0.010	0.009	0.0286
PMV051	20° 16' 26.53955"	40° 16' 55.42403" W	7 757 666.241	366 114.166	4.246	0.008	0.007	0.020
PMV052	20° 15' 56.07620"	40° 16' 03.54677" W	7 758 614.464	367 612.048	3.831	0.017	0.017	0.056
PMV053	20° 15' 50.03114"	40° 15' 42.15688" W	7 758 805.069	368 231.226	3.369	0.012	0.010	0.0329
PMV054	20° 15' 17.56751"	40° 16' 01.07718" W	7 759 798.988	367 674.632	4.385	0.010	0.009	0.026
PMV055	20° 15' 18.67094"	40° 16' 09.47826" W	7 759 763.194	367 431.131	4.154	0.015	0.014	0.0477
PMV056	20° 17' 39.74873"	40° 17' 20.77960" W	7 755 409.636	365 396.108	4.148	0.005	0.005	0.014
PMV057	20° 17' 32.54800"	40° 17' 31.44058" W	7 755 628.613	365 085.119	6.900	0.006	.006	0.0179
PMV058	20° 18' 36.42087"	40° 17' 04.61349" W	7 753 670.850	365 878.617	23.451	0.006	0.006	0.020
PMV059	20° 19' 01.34953"	40° 17' 17.92282" W	7 752 901.384	365 498.559	17.606	0.012	0.010	0.0094
PMV05HF	20° 16' 51.74814"	40° 20' 19.48063" W	7 756 844.243	360 200.292	1.958	0.007	0.006	0.024
PMV060	20° 19' 06.22600"	40° 17' 44.48385" W	7 752 745.419	364 729.357	17.331	0.009	0.006	0.0092
PMV061	20° 18' 03.94031"	40° 16' 37.49620" W	7 754 675.598	366 657.437	4.868	0.012	0.013	0.035
PMV062	20° 18' 09.95787"	40° 16' 48.70131" W	7 754 488.066	366 333.845	12.845	0.011	0.011	0.0329
PMV063	20° 18' 28.65428"	40° 16' 47.73144" W	7 753 913.446	366 366.434	1.740	0.013	0.013	0.033
PMV064	20° 18' 33.56257"	40° 16' 50.59270" W	7 753 761.892	366 284.613	16.768	0.011	.012	0.0299
PMV065	20° 18' 43.61053"	40° 16' 44.86719" W	7 753 454.246	366 453.078	2.018	0.008	0.009	0.028
PMV066	20° 18' 39.92860"	40° 16' 41.28762" W	7 753 568.255	366 556.026	1.237	0.008	0.008	0.024
PMV067	20° 18' 39.41261"	40° 19' 09.54392" W	7 753 550.279	362 255.682	1.878	0.010	0.014	0.018

AJUSTAMENTO 2001 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
PMV068	20° 19' 05.96604"	40° 19' 30.26530" W	7 752 729.042	361 661.203	27.803	.010	.009	.021
PMV070	20° 16' 09.72913"	40° 17' 36.26974" W	7 758 173.863	364 925.103	1.901	0.013	0.013	0.0205
PMV071	20° 16' 04.75281"	40° 17' 32.27841" W	7 758 327.770	365 039.708	2.574	0.014	0.012	.038
PMV072	20° 18' 04.65128"	40° 17' 27.47683" W	7 754 642.464	365 207.818	2.367	0.010	0.010	0.0308
PMV073	20° 18' 05.19573"	40° 17' 06.67792" W	7 754 630.432	365 811.263	2.581	0.009	0.009	.026
PMV074	20° 18' 40.36589"	40° 18' 14.36606" W	7 753 533.689	363 856.371	.369	0.009	0.007	0.0201
PMV075	20° 18' 42.75526"	40° 18' 35.10602" W	7 753 455.461	363 255.385	.520	0.018	0.017	.026
UFES-001	20° 16' 41.37882"	40° 18' 25.56897" W	7 757 189.512	363 502.474	25.803	0.006	0.006	0.011

ANEXO 2 – Ajustamento 2004 - Coordenadas e precisões (1,96.σ) - Sistema SAD-69

AJUSTAMENTO 2004 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
3R7	20°17'51.03663" S	40°20'25.98868" W	7 755 019.802	360 026.277	108.079	Injunção	Injunção	0.013
AP-N8	20°18'36.25783" S	40°17'04.68874" W	7 753 675.846	365 876.395	24.069	Injunção	Injunção	0.006
CEFETES	20°18'37.21108" S	40°19'08.55533" W	7 753 618.197	362 283.815	21.658	0.002	0.002	Injunção
P11	20°17'56.97564" S	40°18'04.84068" W	7 754 869.952	364 122.141	106.783	Injunção	Injunção	Injunção
PMV003	20°18'19.27896" S	40°19'21.91707" W	7 754 166.442	361 891.831	8.061	0.003	0.003	0.009
PMV004	20°18'19.92402" S	40°19'32.27310" W	7 754 144.199	361 591.597	9.903	0.004	0.004	0.011
PMV005	20°17'44.16506" S	40°19'17.76913" W	7 755 247.028	362 003.507	5.436	0.004	0.004	0.010
PMV006	20°17'38.39996" S	40°19'09.60856" W	7 755 426.176	362 238.816	3.940	0.008	0.005	0.015
PMV007	20°17'47.67077" S	40°18'57.64279" W	7 755 143.903	362 588.198	2.708	0.003	0.003	0.010
PMV008	20°17'43.43827" S	40°18'49.46432" W	7 755 275.925	362 824.405	2.597	0.004	0.004	0.012
PMV009	20°19'00.24288" S	40°18'46.70501" W	7 752 915.109	362 923.231	1.204	0.005	0.003	0.008
PMV010	20°19'03.11700" S	40°18'35.98971" W	7 752 829.211	363 234.723	1.914	0.002	0.002	0.007
PMV011	20°19'01.39540" S	40°19'04.69929" W	7 752 875.512	362 401.601	1.184	0.003	0.002	0.007
PMV013	20°19'13.20715" S	40°19'35.90602" W	7 752 505.089	361 499.389	12.293	0.005	0.004	0.007
PMV014	20°19'16.02770" S	40°20'03.67866" W	7 752 411.870	360 694.577	1.309	0.006	0.005	0.012
PMV015	20°19'10.46886" S	40°20'13.90066" W	7 752 580.384	360 396.715	18.776	0.004	0.004	0.013
PMV016	20°19'13.80185" S	40°20'19.01062" W	7 752 476.704	360 249.337	19.839	0.005	0.006	0.018
PMV017	20°19'11.27107" S	40°21'07.14258" W	7 752 543.132	358 852.682	1.547	0.005	0.004	0.012
PMV018	20°19'12.08096" S	40°21'15.25374" W	7 752 516.301	358 617.629	1.978	0.004	0.004	0.017
PMV019	20°18'49.90303" S	40°21'07.09811" W	7 753 200.138	358 848.588	29.772	0.004	0.005	0.016
PMV020	20°18'41.63590" S	40°21'07.78968" W	7 753 454.160	358 826.446	20.140	0.009	0.010	0.032
PMV021	20°18'58.71257" S	40°21'23.31732" W	7 752 925.413	358 380.372	11.888	0.004	0.004	0.011
PMV022	20°18'55.04028" S	40°21'20.47250" W	7 753 039.002	358 461.958	9.376	0.004	0.004	0.011
PMV023	20°18'30.60396" S	40°21'20.98538" W	7 753 790.215	358 440.909	1.291	0.005	0.004	0.013
PMV024	20°18'23.90323" S	40°21'15.48000" W	7 753 997.551	358 598.909	1.010	0.004	0.004	0.011
PMV025	20°17'57.86366" S	40°20'58.15614" W	7754802.294	359094.871	15.746	0.0035	0.004	0.0114
PMV026	20°17'56.64041" S	40°20'52.37744" W	7754841.274	359262.192	6.277	0.0059	0.0051	0.0154
PMV027	20°17'33.74515" S	40°20'34.78915" W	7 755 549.380	359 766.668	18.942	0.006	0.006	0.021
PMV028	20°17'28.65609" S	40°20'25.52314" W	7 755 708.034	360 034.197	8.526	0.003	0.004	0.010
PMV029	20°16'56.68694" S	40°19'57.13414" W	7 756 697.632	360 849.815	3.472	0.004	0.004	0.012

AJUSTAMENTO 2004 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
PMV030	20°17'02.12186" S	40°19'55.50117" W	7 756 530.910	360 898.536	4.049	0.008	0.007	0.020
PMV031	20°16'28.26857" S	40°19'30.94096" W	7 757 577.501	361 602.697	3.326	0.007	0.009	0.026
PMV032	20°16'21.59060" S	40°19'26.08144" W	7 757 783.953	361 742.039	3.446	0.005	0.004	0.011
PMV033	20°17'24.51214" S	40°18'47.54648" W	7 755 858.274	362 875.412	9.820	0.004	0.004	0.013
PMV034	20°17'21.08529" S	40°18'40.52662" W	7 755 965.254	363 078.217	27.521	0.005	0.004	0.013
PMV035	20°17'16.79621" S	40°18'14.88313" W	7 756 103.015	363 821.080	1.536	0.003	0.004	0.010
PMV036	20°17'10.31134" S	40°18'12.58354" W	7 756 302.926	363 886.217	4.219	0.007	0.006	0.016
PMV037	20°17'42.65918" S	40°18'08.30204" W	7 755 309.336	364 018.264	20.873	0.006	0.006	0.021
PMV038	20°17'33.83719" S	40°18'26.14028" W	7 755 576.490	363 498.660	20.297	0.006	0.006	0.019
PMV039	20°17'47.81725" S	40°18'18.93225" W	7 755 148.311	363 711.153	13.388	0.006	0.005	0.014
PMV040	20°17'42.01643" S	40°18'15.07297" W	7 755 327.548	363 821.695	1.225	0.003	0.003	0.010
PMV041	20°17'38.72529" S	40°18'03.59805" W	7 755 431.363	364 153.766	1.655	0.005	0.005	0.014
PMV042	20°18'00.05469" S	40°17'55.48899" W	7 754 777.419	364 394.155	1.215	0.005	0.005	0.014
PMV043	20°18'04.80306" S	40°17'52.44420" W	7 754 632.120	364 483.624	1.179	0.006	0.007	0.019
PMV044	20°18'30.18456" S	40°17'42.73122" W	7 753 853.951	364 771.492	2.639	0.006	0.005	0.015
PMV045	20°18'36.57483" S	40°17'47.54048" W	7 753 656.380	364 633.539	.505	0.004	0.004	0.013
PMV046	20°16'53.02214" S	40°17'53.71849" W	7 756 838.809	364 429.315	4.021	0.003	0.003	0.008
PMV047	20°17'01.95896" S	40°17'46.55814" W	7 756 565.668	364 639.198	4.600	0.004	0.004	0.010
PMV048	20°16'18.30100" S	40°17'38.43464" W	7 757 909.821	364 864.355	2.348	0.005	0.006	0.017
PMV049	20°16'13.22757" S	40°17'40.33925" W	7 758 065.376	364 807.876	1.752	0.006	0.006	0.016
PMV04HF	20°16'40.47732" S	40°20'07.66322" W	7 757 193.553	360 540.329	36.284	0.003	0.003	0.009
PMV050	20°16'20.88195" S	40°17'05.48788" W	7 757 837.922	365 820.841	5.812	0.004	0.003	0.010
PMV051	20°16'26.53907" S	40°16'55.42344" W	7 757 666.256	366 114.183	4.245	0.004	0.004	0.009
PMV052	20°15'56.07591" S	40°16'03.54568" W	7 758 614.473	367 612.080	3.819	0.009	0.009	0.028
PMV053	20°15'50.03058" S	40°15'42.15604" W	7 758 805.086	368 231.250	3.359	0.006	0.005	0.011
PMV054	20°15'17.56712" S	40°16'01.07646" W	7 759 799.000	367 674.653	4.366	0.007	0.006	0.017
PMV055	20°15'18.67046" S	40°16'09.47732" W	7 759 763.209	367 431.158	4.135	0.005	0.005	0.016
PMV056	20°17'39.74849" S	40°17'20.77911" W	7 755 409.643	365 396.122	4.143	0.002	0.002	0.007
PMV057	20°17'32.54770" S	40°17'31.44001" W	7 755 628.622	365 085.135	6.896	0.003	0.003	0.009
PMV058	20°18'36.42078" S	40°17'04.61324" W	7 753 670.853	365 878.624	23.458	0.003	0.003	0.009
PMV059	20°19'01.34914" S	40°17'17.92218" W	7 752 901.396	365 498.577	17.618	0.004	0.004	0.011
PMV05HF	20°16'51.74773" S	40°20'19.48057" W	7 756 844.255	360 200.293	1.966	0.004	0.004	0.011
PMV060	20°19'06.22595" S	40°17'44.48325" W	7 752 745.420	364 729.374	17.339	0.003	0.003	0.009
PMV061	20°18'03.94004" S	40°16'37.49553" W	7 754 675.607	366 657.456	4.868	0.006	0.006	0.015
PMV062	20°18'09.95762" S	40°16'48.70061" W	7 754 488.074	366 333.865	12.845	0.005	0.005	0.016
PMV063	20°18'28.65388" S	40°16'47.73101" W	7 753 913.458	366 366.447	1.754	0.009	0.009	0.023
PMV064	20°18'33.56228" S	40°16'50.59230" W	7 753 761.901	366 284.624	16.776	0.007	0.007	0.018
PMV065	20°18'43.61040" S	40°16'44.86650" W	7 753 454.250	366 453.098	2.023	0.005	0.005	0.014
PMV066	20°18'39.92843" S	40°16'41.28695" W	7 753 568.260	366 556.046	1.243	0.004	0.004	0.011
PMV067	20°18'39.41245" S	40°19'09.54352" W	7 753 550.284	362 255.693	1.872	0.004	0.003	0.010

AJUSTAMENTO 2004 - SISTEMA SAD-69

VÉRTICE	COORDENADAS GEODÉSICAS		UTM		ALTURA	PRECISÕES - 95% (m)		
	LATITUDE	LONGITUDE	NORTE	ESTE	ELIPSOIDAL	LATITUDE	LONGITUDE	ALT. ELIP.
PMV068	20°19'05.96597" S	40°19'30.26510" W	7 752 729.044	361 661.209	27.811	0.004	0.003	0.010
PMV070	20°16'09.72873" S	40°17'36.26925" W	7 758 173.875	364 925.117	1.902	0.005	0.006	0.0151
PMV071	20°16'04.75238" S	40°17'32.27819" W	7 758 327.783	365 039.714	2.573	0.006	0.005	0.0146
PMV072	20°18'04.65107" S	40°17'27.47620" W	7 754 642.471	365 207.836	2.367	0.006	0.005	0.0152
PMV073	20°18'05.19549" S	40°17'06.67722" W	7 754 630.439	365 811.283	2.576	0.005	0.004	0.0134
PMV074	20°18'40.36577" S	40°18'14.36551" W	7 753 533.693	363 856.387	.371	0.003	0.003	0.009
PMV075	20°18'42.75508" S	40°18'35.10552" W	7 753 455.467	363 255.399	.518	0.005	0.005	0.016
UFES-001	20°16'41.37856" S	40°18'25.56886" W	7 757 189.520	363 502.477	25.807	0.003	0.003	0.0078

APÊNDICE A – Parâmetros Estocásticos do Ajustamento Paramétrico

- Expressões das funções dos vetores: observação $\mathbf{l}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{x}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{v}}$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{L}_a \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{l}$$

- Expressão das Matrizes co-fator das funções: observação $\mathbf{l}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{x}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{v}}$.

$$\mathbf{Q}_{ff} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}_{ll} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$$

- Substituindo as expressões dos coeficientes das funções: observação $\mathbf{l}$, parâmetro desconhecido $\mathbf{X}$, observações ajustadas $\mathbf{L}_a$ e resíduos ajustados $\hat{\mathbf{V}}$, e executando a sequência de cálculos, tem-se:

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \overline{\mathbf{Q}} & \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \overline{\mathbf{Q}} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \overline{\mathbf{Q}} & \overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{Q}} \\ \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - 2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix}$$

- Matriz das funções Co-fator do ajustamento Paramétrico

$$\mathbf{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \overline{\mathbf{Q}} & \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T & 0 \\ \overline{\mathbf{Q}} & \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} & \overline{\mathbf{Q}} & 0 \\ \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} & 0 & 0 & \mathbf{P}^{-1} - \overline{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}$$

- Elementos diagonais da matriz função co-fator:

$$\mathbf{Q}_{ff} = \mathbf{P}^{-1} \quad \mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} \quad \mathbf{Q}_{ll} = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{P}^{-1} - \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_{ff} - \overline{\mathbf{Q}}$$

- Elementos não-diagonais da matriz função co-fator:

$$\mathbf{Q}_{\text{IX}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{IL}} = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{Q}_{\text{IV}} = \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} = \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}_{\text{II}}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{VI}} = \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1} = \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}_{\text{II}}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{XI}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \quad \mathbf{Q}_{\text{XL}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \quad \mathbf{Q}_{\text{XV}} = \mathbf{0}$$

- Verificação

$$\mathbf{Q}_{\text{IV}} = \mathbf{Q}_{\text{IL}} - \mathbf{Q}_{\text{II}} = \overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}_{\text{II}}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{XV}} = \mathbf{Q}_{\text{XL}} - \mathbf{Q}_{\text{XI}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{LV}} = \mathbf{Q}_{\text{LL}} - \mathbf{Q}_{\text{LI}} = \overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{VV}} = \mathbf{0} - (\overline{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}^{-1})$$

APÊNDICE B – Número de redundância e redundância total do ajustamento

A expressão (5.25) pode ser demonstrada pela seqüência a seguir:

$$r = \sum_{i=1}^n r_i = \text{traço} (\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \cdot \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{R}) = \text{traço} (\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} \cdot \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

$$r = \text{traço} (\mathbf{I}) - \text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})$$

Pela propriedade cíclica dos traços, $\text{traço} (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{traço} (\mathbf{B} \mathbf{A})$, tem-se:

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})$$

$$r = n - \text{traço} (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N})$$

$$r = n - u$$

APÊNDICE C – Parâmetro (λ) da distribuição Qui-Quadrado não-centralizada.

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_I^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} \nabla_I$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_v = (1 - \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{P}^{-1} - \overline{\mathbf{Q}})$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - \overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{P} \overline{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - 2\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - 2\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_v = \mathbf{P}^{-1} - \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_v$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_I^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \nabla_I$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, J. M.; MIKHAIL, E.M. (1998). Surveying: Theory and Practice. 7th.ed. New York: Web Mcgraw-Hill.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1994). NBR 13.133: Execução de levantamento topográfico. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). NBR-14166: Rede de referência cadastral municipal - Procedimento. Rio de Janeiro.

BAARDA, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. Série 2. N. 5. Delft , Netherlands.

COSTA, S. M. A. (1999). Integração da rede geodésica brasileira aos sistemas de referência terrestres. Tese (Doutorado)- Universidade Federal do Paraná. Curitiba. Paraná. 1999.

DUPRAZ, H. (1985). Theorie des erreurs 2 – Statistique et calculs de compensation applliqués à la Géodesie et á la Mensuration. Institut des Mensurations. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (1985).

GEMAEL, C. (1994). Introdução ao ajustamento de observações: aplicações de Geodésia. 1.ed. Curitiba: UFPR. 319p.

DEAKIN, R. E. (1996). The geoid what's it got to do with me?. The Australian Surveyor, Melbourne, p.294-305, dez.

HAUG, M. D. (1984). Application of Mohr's circle technique in error analysis. Survey and Mapping, Vol. 44, No 4, pp. 309-321.

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1983). Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos. Resolução PR No 22. Rio de Janeiro.

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1992). Especificações e normas gerais para levantamentos GPS (Preliminares). Rio de Janeiro

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (2003). Sistema de referência. Disponível em: <<http://www1.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/sisref.pdf>>. Acesso em: 2 de março

IBGE - FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1997). Sirgas – Relatório Final GPS. Grupo de Trabalho I e II. Rio de Janeiro.

KAVOURAS, M. (1982). On detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks. Technical report No 87. Department surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton. Canada.

KUANG, S. (1996). Geodetic network analysis and optimal design: Concepts and Applications. 1st.ed. Michigan: Ann Arbor, Inc. Chelsea, Michigan.

LEICK, A.; (1995). GPS: Satellite Surveying. 2nd.ed. New York: John Wiley & Sons, Incorporation. 560p.

MIKHAIL, E.M; ACKERMANN, F. (1976). Observations and Least Squares. 1st.ed. New York: IEP.

MONICO, J.F.G.; SEGANTINE, P.C.L. (1996). ITRF: Definições, realizações e aplicações. Revista Cartografia e Cadastro, Lisboa, Instituto Português de Cartografia e Cadastro, p.31-36, abr. 1996, n.5.

MONICO, J.F.G. (2000). Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS. 1.ed. São Paulo: UNESP. 287p.

MORAES, C. V. (1998a). Análise de erros grosseiros e confiabilidade de redes geodésicas. Revista Cartografia e Cadastro, Lisboa, Instituto Português de Cartografia e Cadastro, p.77-86, jun. 199, n.8.

MORAES, C. V. (1998b). Aplicação do ajustamento às poligonais. 162p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba. Paraná. 1998.

SPIEGEL, M. R. (1993). Estatística. Trad. João Consentino. 3.ed. São Paulo: Makron Books. 643p.

NIMA – NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY. (2000). Technical Report 8350.2. 3th.ed. St. Louis. Department of Defense Word Geodetic Sistem 1984.

ROCHA, R. S.; BRANDÃO, A. C. (1999). Referencial geodésico no cadastro urbano. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, XIX, 1999, Recife. Anais... Recife. CII-49/99.

RODRIGUES, D. D. (2002). Rede geodésica de precisão no estado de Minas Gerais: avaliação de diferentes estratégias de processamento e ajustamento. Tese (Doutorado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2002.

SEGANTINE, P. C. L. (1995). Estabelecimento e ajuste de uma rede geodésica no estado de São Paulo com o sistema de posicionamento NAVSTAR/GPS. Tese (Doutorado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo. 1995.

SEGANTINE, P. C. L. (2002). Sistema de posicionamento global. São Carlos: Publicações EESC/USP.

SNAY, R. A.; SOLER, T. (2000a). Modern terrestrial reference system: WGS-84 and ITRF. em: <<http://www.ngs.noaa.gov/CORS/Articles/Reference-Systems-Part-1.pdf>>. Acesso em 15 de março. 2003

SNAY, R. A.; SOLER, T. (2000b). Modern terrestrial reference system: WGS-84 and ITRF. em: <<http://www.ngs.noaa.gov/CORS/Articles/Reference-Systems-Part-3.pdf>>. Acesso em 16 de março. 2003.

VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E.J. (1986). Geodesy: The Concepts. 2nd ed. Amsterdam – New York – Oxford: North_Holland Publishing Company. 697p.

VERONEZ, M. R. (1998). Proposta de parâmetros de transformação entre sistemas WGS-84 e o SAD-69 para a região de São Carlos-SP. 111p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.SP. 1999.