**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES**

**ANÁLISE DE TÉCNICAS PARA O ESTABELECIMENTO DE
MODELOS DIGITAIS DE TERRENOS - DTM**

ILCE DE OLIVEIRA CAMPOS

DEDALUS - Acervo - EESC

31100017493

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Transportes.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Irineu da Silva

**São Carlos
1994**

A meu pai e à minha mãe, por todo carinho e
confiança.

A minha irmã Jrenice, um dos maiores presentes
que ganhei da vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Irineu da Silva pela orientação e apoio.

A Profa. Maria Cristina F. de Oliveira do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP e ao Prof. José Eduardo Castilho do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, pela colaboração às muitas dúvidas.

Aos Professores do Departamento de Transportes EESC - USP, em especial ao Prof. Glauco Túlio P. Fabri, Prof. José Reynaldo A. Setti e Prof. Paulo Cesar L. Segantine.

Aos funcionários, Heloisa Helena M. Belo, Carlos Mariano e Paulo Sérgio Batista, pela constante atenção.

A todos os Amigos da Pós graduação, cada um em especial.

Ao Eder Gomes Penetra, pela paciente colaboração com o trabalho de campo, e pelo seu exemplo de dedicação e disciplina.

Ao Jorge Miguel Nucci e a sua família, pelo carinho.

Aos amigos de sempre, Bolivar A. Matos, João Augusto Antunes Filho, Glauco Pontes Filho e Mônica S. Santos, por tudo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
1. INTRODUÇÃO	1
2. TÉCNICAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS	3
2.1. Aquisição de dados por levantamentos topográficos	6
2.2. Aquisição de dados por restituição fotogramétrica	11
2.3. Aquisição de dados através de mapas existentes	14
2.3.1. Método manual de seguimentos de linhas	15
2.3.2. Método automático "Raster Scan"	16
3. INTRODUÇÃO A TEORIA DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO APLICADAS A MODELOS DIGITAIS DE TERRENOS	18
3.1. Funções de interpolação polinomial	21
3.1.1. Métodos de Interpolação polinomiais bidimensionais	21
3.1.1.1. Método de interpolação bidimensional polinomial global.	22
3.1.1.2. Método de interpolação bidim. polinomial local-spline	23
3.1.1.3. Método de interpolação bidimensional local B-Spline	27
3.1.2. Métodos de interpolação tridimensionais	31
3.1.2.1. Método de interpolação tridimensional global	31
3.1.2.2. Método de interpolação tridim.: Análise Multiquádrica	31
3.1.2.3. Método de interpolação tridimensional local	34
3.1.2.4. Método de interpolação tridimensional pontual	34
3.2. Funções de Aproximação	36
3.2.1. Técnica de aproximação por mínimos quadrados	36
4. TÉCNICAS DE GERAÇÃO DE MODELOS DIGITAIS DE TERRENOS	41
4.1. Geração da malha para modelos locais	41

4.1.1. Malha regular	43
4.1.1.1. Método de aproximação por definição de vizinhança de nós	44
4.1.2. Malha Irregular	45
4.1.2.1. Triangulação de Delaunay	47
4.2. Representação da superfície	52
4.2.1. Interpolação sobre uma malha regular	53
4.2.2. Interpolação sobre uma malha irregular	56
 5. APLICAÇÕES DE DTM	 59
5.1. Traçado de curvas de nível	60
5.1.1. Traçado de curvas de nível a partir de malhas quadradas	60
5.1.2. Traçado de curvas de nível a partir de triangulação	62
5.2. Softwares aplicativos	64
5.3. Exemplo de aplicação de DTM para um caso prático	65
 6. CONCLUSÃO	 78
 BIBLIOGRAFIA	 80

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1. Classificação das malhas para diferentes tipos de levantamento de dados	5
FIGURA 2.2. Relação entre a ondulação geóidal, a altura elipsóidal, e a altura ortométrica . .	9
FIGURA 2.3. Sistema modular de registro e medição.	10
FIGURA 2.4. Escalas de fotografias aéreas a partir da altura de voo e distância focal	12
FIGURA 4.1. Tipos de malhas regulares	43
FIGURA 4.2. Localização de elementos em malhas quadradas	44
FIGURA 4.3. Técnicas para definir região de vizinhança.	45
FIGURA 4.4. Construção do polígono de Thiessen.	48
FIGURA 4.5. Triangulação de Delaunay: método de procura de vizinho por expansão de círculos	50
FIGURA 4.6. Critério do ângulo máximo e mínimo	51
FIGURA 4.7 Critério do círculo	51
FIGURA 4.8. Equivalência entre o critério do ângulo MAX-MIN e o critério do círculo	52
FIGURA 5.1. Malha regular: Interpolação linear de contorno para uma célula.	61
FIGURA 5.2. Possíveis aspectos de curvas de nível cruzando uma célula quadrada.	61
FIGURA 5.3. Subdivisão de célula.	62
FIGURA 5.4. Refinamento da malha triangular para traçado de curvas de nível.	63
FIGURA 5.5. Pontos amostrados	67
FIGURA 5.6. Primeira triangulação feita pelo programa DCA-DTM.	68
FIGURA 5.7. Detalhe do refinamento da triangulação para o programa DCA-DTM.	69
FIGURA 5.8. Triangulação final do DCA-DTM	69
FIGURA 5.9. Curvas de nível geradas pelo programa DCA-DTM	70
FIGURA 5.10. Detalhe para a figura 5.9	70
FIGURA 5.11 Vista em perspectiva do terreno modelado	71
FIGURA 5.12. Triangulação do programa LI Countour	72
FIGURA 5.13. Curvas de nível do programa LI Countour	72
FIGURA 5.14. Mapa topográfico digitalizado com curvas de 2 em 2m	74
FIGURA 5.15. Detalhe da triangulação das curvas de nível	75
FIGURA 5.17. Triangulação total para curvas de 10 em 10m	76
FIGURA 5.17. Vista em perspectiva do terreno, modelado para curvas de 10 em 10m. . . .	77

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1. Tabela comparativa de caracterização de DTM.	4
TABELA 4.1. Equações polinomiais mais usadas para DTM	54
TABELA 5.1. Classificação de software para modelagem de terrenos	64

RESUMO

A representação do relevo topográfico, foi durante muito tempo uma preocupação para os profissionais da área de topografia. O traçado de curvas de nível a partir de um levantamento era feito manualmente, com a determinação dos valores intermediários através de interpolação linear. Com o desenvolvimento da informática e sua introdução para o tratamento de dados em mensuração, surgiu uma nova tecnologia que permite a geração automática de um modelo que descreve analiticamente a superfície topográfica, trata-se dos **MODELOS DIGITAIS DE TERRENOS (DTM)**. Esses modelos constituem uma ferramenta importante no desenvolvimento de vários projetos, tais como, projetos de vias, intersecções, movimento de terra (corte/aterro), drenagem, parcelamento do solo (loteamentos) e outros. O presente trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem dos aspectos relativos às técnicas para o estabelecimento desses modelos, descrevendo os principais métodos de aquisição de dados, de interpolação e o processo de geração dos modelos. Finalmente é descrito um panorama do desenvolvimento desses sistemas com suas principais aplicações.

ABSTRACT

The representation of the topography surface was for a long time the main proposal by the surveyer engenneres. Threading of the contour for surveying is usually made handly with the mean values obtained through the linear interpolation. The developmente of computer science provide an easier manner of data tratment in measuring. As a result, a new technology was introduced to generate automatically a model for the mathematic description of the topography. They are called of Digital Terrain Model (DTM). These models are very important tool for the development of several projects, such as, highway and intersection projectes and land movements (cut/fill), draining, lands parceling and others. This paper has as objective to focus the technics to use these models, describing the main methods to obtain the data, interpolation and process to generate the models. Finally, it is described the development of these systems and it's main application.

1. Introdução

A técnica clássica de representação de relevo, utilizada pelos profissionais da mensuração foi, durante muito tempo, o traçado manual de curvas de nível a partir de um levantamento topográfico ou por meios fotogramétricos com a determinação dos valores intermediários por simples interpolação linear. Com a introdução da informática para o tratamento de dados em mensuração, surgiu uma nova técnica que permite a automatização desse procedimento. Essa nova técnica consiste na descrição matemática do terreno através de uma função de interpolação e recebeu o nome de Modelo Digital de Terreno. (SILVA, 1990)

Historicamente, o termo **Modelo Digital de Terreno (DTM)** tem sido o termo genérico usado para referir-se a qualquer representação numérica da superfície topográfica. (MILLER & LEFLAMAMME, 1985) (in CARTER, 1988).

Em princípio, a idéia de superfície digital pode ser aplicada para qualquer situação cujas informações numéricas sejam suficientes para a modelagem. Nesse contexto, pode-se citar muitas outras superfícies, como por exemplo, camadas geológicas, camadas de sedimentação de material assoreado e até mesmo para a representação de regiões do corpo humano.

O DTM pode ser aplicado para problemas de automatização de mapas, otimização de projetos de estradas, desenvolvimento regional, etc. Sendo que

para cada aplicação deverão ser considerados critérios diferentes de coleta e tratamento de dados, uma generalização seria difícil e em algumas instâncias, perigosa.

O conceito de DTM foi aplicado pela primeira vez para projetos de estradas no Massachusetts Institute of Technology (MIT), na década de 1950. O seu aperfeiçoamento foi impulsionado pelo desenvolvimento da informática, a qual não só reduziu as dificuldades das rotinas de cálculo, como também ampliou suas áreas de aplicação.

Segundo CINTRA (1988), existem diversas formas de apresentar e classificar os programas de modelagem digital de terrenos: de acordo com a origem dos dados e a sua forma de distribuição espacial; de acordo com a extensão e a abrangência, local ou global; de acordo com o modo de representar os valores fornecidos, interpolação ou aproximação. E ainda de acordo com o tipo de malha utilizada para representar o terreno, que podem ser: regulares e irregulares, ou composta pelos dois tipos em diferentes estágios. A seguir descreve-se o processo de geração das malhas utilizadas em DTM.

Dentro desse contexto o principal objetivo do presente trabalho é fazer uma análise da metodologia empregada para a geração de Modelos Digitais de Terrenos. Para tanto, discutir-se-á o problema desde a coleta dos dados de campo, até a utilização do produto final nos trabalhos de engenharia. Por se tratar de um trabalho descritivo do estado da arte da modelagem digital de terrenos, optou-se pela não inclusão de um capítulo especial para a revisão bibliográfica. A revisão está inserida nos capítulos subsequentes. O trabalho está estruturado em 6 capítulos que em linhas gerais tratam do seguinte:

No capítulo 2 foi feito um estudo dos métodos de aquisição de dados frequentemente usados em DTM, destacando as suas principais características. O Capítulo 3 faz uma descrição sucinta dos métodos de interpolação utilizados para descrever a superfície e o Capítulo 4 trata dos processos de geração de modelos considerando as formas de distribuição dos dados. O Capítulo 5 apresenta uma visão geral dos softwares disponíveis no mercado e um exemplo prático, listando os pontos importantes da tecnologia disponível. O Capítulo 6 traz as principais conclusões e algumas sugestões que foram consideradas relevantes.

2. Técnicas de Aquisição de Dados

A aquisição das coordenadas tridimensionais (X, Y, Z), representativas da superfície do terreno, é uma das etapas fundamentais do processo de geração do modelo digital de terreno. É possível obter esses dados usando diferentes técnicas. A técnica particular a ser usada depende de vários fatores, tais como, o tamanho da área a ser levantada, a precisão desejada e a aplicação do modelo gerado.

O avanço dos métodos de aquisição de dados e dos sistemas de processamento estão diretamente ligados ao atual estado da arte, da ciência e da tecnologia. Atualmente é essencial o uso de computadores para facilitar e agilizar os cálculos topográficos. Visando isso, os instrumentos topográficos estão sendo fabricados com interfaces para microcomputadores, permitindo maior confiabilidade na coleta de dados e mais rapidez na execução dos trabalhos, principalmente no que concerne ao estabelecimento de modelos digitais de terreno.

Os modelos digitais de terreno são, de maneira geral, derivados a partir de três alternativas: levantamento direto de campo, restituição fotogramétrica e digitalização de mapas existentes. Vide Tabela 2.1.

TABELA 2.1. Tabela comparativa de caracterização de DTM (PETRIE, 1987)

Origem dos dados	Equipamento usado	Precisão do DTM	Area de cobertura	Aplicações principais
Levantamento topográfico	Equipamentos topográficos	boa	limitada a áreas específicas	planejamento e projetos de pequenas áreas
Restituição fotogramétrica	Stereoplotters	(i)alta (se a partir de cotas) (ii)baixa (se a partir de curvas de nível)	projetos de áreas de grandes dimensões especialmente em terrenos de difícil acesso	(i)Projetos de represas-diques; reservatórios, rodovias e exploração de minas (ii)Extensão nacional, especialmente associado a ortofotos
Mapas existentes	(i)semi-automático (digitalização) (ii)automático (raster scanning)	baixa: se derivados a partir de curvas de nível em média e pequena escala.	grande extensão em escala pequena	simulação para vôos, representação de relevo para fins militares, e outros.

Os levantamentos diretos de campo e a restituição fotogramétrica caracterizam um levantamento por amostragem primária. A digitalização de mapas existentes caracteriza um levantamento secundário, pois os mapas em geral são derivados de levantamentos fotograméticos.

No caso de levantamento por amostragem, os pontos levantados não devem ser escolhidos aleatoriamente. O processo de amostragem deve levantar os pontos que são representativos da topografia da superfície real. Assim, deve-se considerar as depressões, as elevações, as linhas de crista e drenagem, as estradas e as áreas construídas. No caso de levantamentos controlados, por digitalização ou "scanner", os pontos a serem levantados são definidos pelas curvas de nível já existentes.

Em relação aos métodos de aquisição por amostragem, pode-se classificar os dados levantados segundo a forma de distribuição em que eles são coletados. Essa distribuição pode ser: regular, irregular e semi-regular. Vide Figura 2.1.

FIGURA 2.1 - Classificação das malhas para diferentes tipos de levantamento de dados.

No caso de uma distribuição regular, a posição de todos os pontos medidos é fixa em relação aos vizinhos. Isso significa que não há flexibilidade na escolha de onde as medidas devem ser tomadas. Nesse tipo de distribuição, os pontos são amostrados em malhas triangulares, retangulares ou quadradas.

A distribuição irregular é realizada sem a preocupação com a distribuição dos pontos na superfície, mas há uma relação entre alguns pontos que formam o modelo. O grau e o tipo de relação varia de acordo com o padrão de armazenamento do software. Em geral particularizam-se as linhas de estruturas, (rios, linhas de drenagem), "break-lines", (pontos de uma estrada ou de muro de arrimo) e áreas mortas (construções).

Na distribuição semi-regular, percebe-se uma certa regularidade na distribuição dos dados. De modo geral os pontos são ordenados em uma direção.

Apesar de serem distintas, as três classificações do processo de aquisição de dados estão diretamente relacionadas. Os levantamentos de campo são geralmente caracterizados por uma distribuição irregular, porém criteriosa, dos pontos amostrados.

Não se deve confundir a distribuição irregular com distribuição aleatória. Esta última é característica de dados estatísticos. Em levantamentos topográfico executados por técnicos especializados existe uma certa lógica na distribuição das amostras que é determinada pela necessidade de se levantar pontos representativos da superfície, como já foi mencionado anteriormente. (FELGUEIRAS, 1987)

Um outro fator importante a ser considerado é a atual desempenho dos métodos de aquisição de dados e os sistemas de processamento disponíveis. Não há dúvidas que os trabalhos de campo e escritório podem ser, atualmente, realizados com mais facilidades, rapidez, e de forma mais precisa do que os métodos convencionais, principalmente no que diz respeito aos erros cometidos no processo manual de anotação e cálculos. A seguir descrevem-se as principais características de cada método de aquisição de dados, levando em conta as especificações dos instrumentos e dos métodos modernos disponíveis.

2.1. AQUISIÇÃO DE DADOS POR LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O processo de aquisição de dados a partir de levantamento topográfico, é baseado em métodos topométricos clássicos para a determinação das coordenadas (X, Y), e em métodos de nivelamento para a determinação da cota (Z). A precisão dos dados obtidos depende do método e do instrumento usado para a execução do trabalho. Um outro método, mais recente, que pode ser incluído é a técnica GPS de posicionamento tridimensional de pontos. Esse método, no entanto, ainda tem custos muito alto para ser aplicado na aquisição de dados para DTM.

O posicionamento de pontos no plano, mais exatamente no plano de projeção (X, Y), é feito através de medições angulares e lineares sobre o terreno e de cálculos topométricos que se baseiam nas relações

trigonométricas existentes entre os elementos conhecidos e as grandezas medidas.

A coordenada altimétrica de um ponto é calculada através de medidas de distâncias verticais ou diferença de nível entre dois ou mais pontos. Para que sejam medidas as distâncias verticais, há necessidade de tomar uma superfície de comparação, chamada de superfície de nível, que equivale a um plano de referência. Existem dois tipos de superfície de nível: a de nível real ou verdadeiro, que o plano de referência tomado é nível médio dos mares; e a de nível aparente, que é uma superfície plana situada acima ou abaixo do nível dos mares.

Sendo duas, as superfícies tomadas para comparação das distâncias verticais entre pontos, teremos também dois tipos de diferença de nível: altitude, quando um ponto é medido em relação ao nível médio dos mares; e a cota, quando se mede a distância vertical de um ponto em relação a um plano de referência arbitrário.

Essas medidas podem ser obtidas por um processo de nivelamento, e os métodos de nivelamento compreendem dois métodos gerais: um, que relaciona as medidas referenciadas à superfície de nível verdadeira, e o outro, que se refere as medidas de nível aparente. Desse modo, podem ser classificados em: nivelamento barométrico (referência ao nível verdadeiro); nivelamento trigonométrico e geométrico (referência ao nível aparente).

No nivelamento barométrico, utiliza-se a diferença de pressões atmosféricas entre os pontos para determinar a diferença de nível entre eles. Esse método não é muito usado em mensuração por ser um método de baixa precisão.

No nivelamento trigonométrico, as diferenças de nível são determinadas através da resolução de triângulos (equações trigonométricas) situados em planos verticais que passam pelos pontos cuja diferença de nível se deseja avaliar.

O nivelamento geométrico, é um método de determinação de diferença de nível, fundamentado em medidas direta de distâncias verticais com um nível de precisão. O nível pode ser instalado em qualquer ponto do local a ser

levantado, e as leituras são feitas na interseção do plano horizontal descrito pelo eixo óptico do instrumento, com a mira verticalizada. Sempre que possível, para compensar os efeitos da curvatura da Terra e da refração, é aconselhável que os pontos de ré e de vante estejam a distâncias aproximadamente iguais.

O "Navigation Satellite Time and Ranging" (NAVSTAR), ou "Global Position System" (GPS), também conhecido pela junção das duas siglas, proveniente da fusão em 1973 de dois projetos do Departamento de Defesa dos Estados Unidos, o TIMATION (Time Navigation) da Marinha e o 621B da Força Aérea, foi projetado para fornecer a posição instantânea de um ponto sobre a superfície da Terra, (coordenadas do observador), bem como a velocidade (caso do observador em movimento), num referencial tridimensional. (BLITZKOW, 1992).

No caso específico do posicionamento de um ponto pela técnica GPS, a grandeza fundamental que teoricamente deriva das observações é a distância estação-satélite. São necessários, no mínimo, quatro satélites para determinar as quatro incógnitas do método. As incógnitas são as coordenadas cartesianas da estação X , Y , Z e o erro de sincronização entre os relógios do receptor e do satélite.

Originalmente, o sistema prevê a obtenção dessa distância através de um dos códigos emitidos pelo satélite. Para tanto, o receptor tendo um relógio sincronizado com o relógio do satélite, deve gerar uma réplica do sinal (código) transmitido pelo satélite. O sinal gerado é deslocado (atrasado) no tempo e comparado com o sinal recebido até se obter uma correlação máxima (alinhamento) entre eles. O intervalo de tempo necessário para atingir a correlação corresponde ao tempo de percurso do sinal transmitido entre o satélite e o receptor. O tempo de percurso multiplicado pela velocidade da luz, resulta na referida distância. (BLITZKOW, 1992).

Através das observações GPS no método diferencial, obtém-se as coordenadas cartesianas de um ponto desconhecido em função das diferenças de coordenadas fornecidas pelo GPS e das coordenadas conhecidas do ponto de partida. Dessa forma, é possível estabelecer uma relação entre as coordenadas cartesianas (X , Y , Z) e as coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h). A grandeza altimétrica que compõe o termo geodésico é a altura geométrica h .

Esta se relaciona com a altitude ortométrica H de maneira aproximada, através da altura geoidal N : ($h=N+H$), vide Figura 2.2.

FIGURA 2.2 - Relação entre a ondulação geoidal, a altura elipsoidal, e a altura ortométrica.

Devido ao custo elevado e ao problema da ondulação geoidal, o método GPS não tem sido utilizado para o levantamento de pontos no estabelecimento de um DTM. É possível, contudo supor que, uma vez conhecida a ondulação geoidal, aplicando-se os métodos de levantamento "stop and go" e cinemático, é possível alcançar rendimentos superiores aos métodos convencionais de levantamentos e, dessa maneira, viabilizar a aplicação do método GPS. Durante a pesquisa bibliográfica realizada para o desenvolvimento deste trabalho, não se encontrou, entretanto, nenhuma indicação de aplicações desse tipo.

Segundo SILVA (1993), nas últimas décadas, com o avanço da eletrônica e da informática, a área de levantamentos topográficos recebeu um novo enfoque em termos de instrumentação. Os teodolitos mecânicos, estão sendo substituídos pelos teodolitos eletrônicos, a trena foi substituída pelos medidores eletrônicos de distâncias (distanciômetros-MED), que recentemente foram acoplados aos teodolitos eletrônico, formando a estação total. A planilha de campo foi substituída pela caderneta eletrônica e os níveis topográficos mecânicos estão sendo substituídos pelos níveis eletrônicos e à laser.

Os instrumentos topográficos modernos possuem alta precisão nominal, são programáveis e podem ser conectados a um computador para transferência automática de dados, ou ainda, usam periféricos para

transferência automática. Com o advento desses instrumentos e a sua conexão aos computadores, houve um avanço nos sistemas de medição e nas suas aplicações. (ver Figura 2.3)

FIGURA 2.3 - Sistema modular de registro e medição (Leica, 1993. Catálogo Técnico)

Essa modernização facilitou significativamente o levantamento de campo, principalmente porque os instrumentos eletrônicos de alta qualidade permitem caracterizar, ainda no campo, o tipo de ponto levantado em relação a estrutura de um DTM, ou seja, se esses pontos são pontos de massa, pontos de estruturas ou pontos limitantes de áreas mortas.

Além dos instrumentos, estão disponíveis para o usuário, uma grande variedade de softwares, desde programas simples para cálculo de poligonais, até os mais sofisticados, que executam os mais diversos cálculos com rapidez e com um alto grau de confiabilidade, e ainda, tem ampla variedade de importação e exportação de dados, para diversos formatos de arquivos. A maioria desses programas são desenvolvidos para o sistema operacional MS-DOS e possuem uma interface gráfica como por exemplo o WINDOWS, ou ainda, são executáveis dentro de um programa gráfico específico, como por

exemplo o CAD (Computer Aided Design). A maioria deles possuem um módulo aplicativo para geração de um DTM.

A escolha do programa que melhor se adapta ao trabalho a ser desenvolvido, deve ser baseada nas diferenças conceituais entre um programa e outro, ou seja, devem ser analisados, os tipos de entrada de dados, as técnicas de geração do modelo, os padrões de saída, entre outros. No capítulo 5 será descrito de forma mais detalhada alguns dos softwares aplicativos para processamento de dados topográficos, principalmente no que concerne ao módulo aplicativo para geração de um DTM.

2.2. AQUISIÇÃO DE DADOS POR RESTITUIÇÃO FOTOGRAFIMÉTRICA

O processo fotogramétrico de obtenção de dados é feito por instrumentos denominados restituidores fotogramétricos. Esses instrumentos reproduzem, a partir de um par de fotografias adjacentes e recobertas, as mesmas características geométricas do momento da tomada da imagem. Dessa forma, por meio de uma marca de referência que pode ser movida em três dimensões sobre o modelo estereoscópico, obtém-se as medidas desejadas na forma gráfica ou numérica.

Os métodos fotogramétricos oferecem maior flexibilidade na coleta de dados para modelagem de terrenos do que os métodos topográficos clássicos, principalmente no que concerne a densidade da amostra que podem variar de acordo com a necessidade do usuário. Isto pode ser feito utilizando fotografias aéreas obtidas em diferentes escalas e alturas de vôo, e ainda usando vários tipos de instrumentos fotogramétricos, com capacidade variada em termos de precisão e grau de automação. De maneira geral a precisão de um ponto determinado por fotogrametria depende dos seguintes fatores:

- da escala e resolução da foto aérea;
- da altura de vôo que foi obtida a foto;
- da relação base/altura, do recobrimento da foto; e
- da precisão do equipamento restituidor. (PETRIE, 1987)

A escala de uma foto aérea está diretamente relacionada com a altura de vôo e com a distância focal da câmara usada para a tomada da imagem. A

figura 2.4 mostra um gráfico das possíveis variações mais comuns das escalas em função da distância focal (f), em fotografias aérea usadas para aquisição de dados topográficos. Essas distâncias são: $f=300\text{mm}$ (ângulo normal); $f=210\text{mm}$ (ângulo médio); $f=152\text{mm}$ (grande angular) e $f=85\text{mm}$ (super grande angular).

FIGURA 2.4 - Escalas de fotografias aérea a partir da altura de voo e distância focal
(KENNIE & PETRIE, 1990)

Quanto à precisão dos restituidores (stereoplotters), em geral, eles são projetados para criarem soluções precisas para o posicionamento de pontos em função das posições, em imagens, de pares de fotografias recobertas. Se estes instrumento são calibrados corretamente, e se as várias distorções intervenientes no processo são corrigidas, os resultados são muito confiáveis.

O princípio básico de um restituidor é recriar o modelo 3D do terreno a partir de fotografias aéreas. Dessa forma os fotogrametristas podem obter as medidas que precisam, a partir desse modelo, sem a necessidade de ir até o terreno.

Um grande avanço nessa área ocorreu com o aparecimento do restituidor analítico, no qual os modelos ópticos ou mecânicos foram substituídos por soluções matemáticas equivalentes. Essas soluções são

executadas em tempo real por programas de computador, o que possibilita que o operador se desloque sobre o modelo e obtenha o seu posicionamento em tempo real, semelhante aos antigos restituidores óptico-mecânicos, porém com maior precisão, mais rapidez e portanto mais produção.

Mais recentemente, com os desenvolvimentos da eletrônica e da informática, e o avanço da técnica do tratamento de imagens ligado ao desenvolvimento dos sistemas de medidas em tempo real, possibilitaram o aparecimento de uma nova fotogrametria: a fotogrametria digital.

A fotogrametria digital engloba tanto a aquisição quanto a análise de dados. É totalmente baseada em algoritmos matemáticos que controlam todo o processo. O restituidor analítico foi substituído por uma estação de trabalho ou um micro computador que, juntamente com os algoritmos matemáticos constituem um sistema denominado restituidor digital. (SILVA, 1990). Um exemplo dessa inovação é o DVP (Digital Video Plotter) da Wild, disponível no mercado brasileiro.

Na origem, os restituidores fotogramétricos geram diretamente as curvas de nível da superfície levantada. Essas curvas podem ser desenhadas diretamente no papel base, no caso do restituidor analógico, ou arquivados em editores gráficos informatizados, no caso de restituidores analíticos ou numéricos.

Os restituidores analíticos ou numéricos possibilitam ainda, realizar um levantamento através de uma malha regular, gerada sobre o modelo estereoscópico. A marca flutuante, nesse caso, desloca-se entre os pontos da malha cabendo ao operador apenas localizar-se sobre o terreno. Os pontos característicos do terreno (pontos estruturais e áreas mortas) são levantados posteriormente pelo operador. Obtem-se dessa forma um arquivo de dados semelhante ao arquivo gerado pelos métodos de aquisição de dados por levantamento topográfico.

Embora não faça parte dos objetivos deste trabalho, vale a pena ressaltar que com o advento da fotogrametria numérica e o desenvolvimento dos métodos de correlação de imagens, em muitos casos, já é possível a geração automática de um Modelo Digital de Terreno. Para maiores detalhes consultar SILVA (1990).

2.3. AQUISIÇÃO DE DADOS ATRAVÉS DE MAPAS EXISTENTES

A digitalização de mapas existentes, é o nome dado ao processo de transferência de informações gráficas para um computador, utilizando uma mesa digitalizadora ou um "scanner". Obtem-se um arquivo de dados denominado mapa na forma numérica, que poderá ser utilizado para geração de um DTM.

Segundo KENNIE & PETRIE (1990), a digitalização de mapas pode ser dividida em duas formas distintas de acordo com o tipo de dado a ser digitalizado: dados de pontos, como por exemplo, um objeto individual descrito por um símbolo cartográfico, cotas, etc.; e dados de linha, como por exemplo, linhas contínuas como uma rodovia, estradas de ferro, rios e canais, limites de vegetações e florestas, muros e cercas, construções e curvas de nível.

Em geral, a quantidade de pontos presentes em um mapa a ser digitalizado incluem somente uma pequena proporção dos dados totais contidos no documento. Esses dados nem sempre são capturados pelos métodos de digitalização devido a sua natureza intrínseca e sua representação na forma cartográfica. Símbolos, nomes, e valores de altura, requerem uma interpretação humana, por isso, os dados de pontos são introduzidos por um operador que mede a coordenada usando uma mesa digitalizadora e entra com o texto associado, códigos ou atributos de informações, via teclado ou através de alguma função do programa (menu).

A digitalização de dados na forma de linhas, são geralmente em grande proporção, e podem ser digitalizados manualmente por um operador utilizando um periférico semi-automático (mesa digitalizadora), ou por um processo automático (scanner).

A digitalização manual, porém, é ainda hoje a forma mais usada, especialmente para o caso de detalhes planimétricos presentes em áreas urbanas, como também, em áreas de alta densidade e complexidade em termos de uso do solo e tipo de edificações. Para outros tipos de linhas, como curvas de nível, que não exibem grande complexidade de interpretação e classificação, os métodos automáticos de digitalização são empregados com mais frequência.

A digitalização de pontos bem como a digitalização de linhas são realizados por instrumentos denominados digitalizadores. Esses instrumentos convertem dados gráficos em vetores de dados nas direções das coordenadas X e Y. Separadamente são adicionadas as coordenadas Z. Basicamente existem dois métodos de digitalização de linhas a partir de mapas existentes:

- Método manual de seguimento de linhas,
- Automático "Raster-scanning" (varredura).

2.3.1. MÉTODO MANUAL DE SEGUIMENTOS DE LINHAS

— No método manual de seguimento de linhas, utiliza-se uma mesa digitalizadora acoplada a um computador, um software que faz a interface da mesa digitalizadora com o computador e um operador que irá efetuar a transferência dos dados. Para o caso específico de curvas de nível é necessário ainda que o software possibilite a geração de desenhos 3D ou possibilite a edição posterior da informação altimétrica.

Estão disponíveis no mercado um grande número de digitalizadoras manuais. Convencionalmente, pode-se considerar que as digitalizadoras são um periférico usado para traduzir a posição do transdutor (cursor) na mesa (superfície de digitalização) em informação numérica, expressando-a em par de coordenadas (X, Y), as quais serão enviadas para o terminal (computador).

— O operador obtém as medidas das curvas de nível percorrendo cada curva com o cursor equipado com uma marca de medida. Durante o processo de digitalização ele decide a localização dos pontos sucessivos necessários para uma boa representação de cada curva. Este modo de digitalização é chamado de modo "ponto a ponto". Esta operação de digitalização também pode ser feita através de uma seleção automática com uma digitalizadora eletrônica. Esse modo de digitalização é conhecido como "modo contínuo". Neste caso o intervalo de registro entre os pontos sucessivos é pré-fixado pelo operador sobre uma base de tempo (por exemplo 0.1 a 10 s), ou uma base de distância (por exemplo 0.1 a 20 mm).

É importante contudo salientar, que na conversão de mapas para a forma digital é preciso preservar ao máximo a precisão original do documento.

Qualquer erro cometido na digitalização é propagado durante todo o processo e somado a possíveis erros introduzidos no processamento dos dados e plotagem do mapa. Para minimizar a ocorrência desses erros, recomenda-se executar, periodicamente, a aferição da mesa segundo alguns procedimentos típicos. Para maiores detalhes consultar, (GIOVACHINO, in PEIXOTO, 1993).

A precisão das coordenadas X e Y medidos manualmente pelas mesas digitalizadoras ainda é pequena, e a resolução (menor distância medida) comumente encontrada pelas mesas digitalizadoras está na faixa de $50\mu m$ a $100\mu m$.

Levando em consideração todos esses problemas, segundo as normas de operação, a precisão da coordenada final do ponto ou linha digitalizados manualmente será da ordem de ± 100 a $250\mu m$ (0.1 a 0.25mm), equivalente a ± 0.1 a 0.3m para uma escala 1:1250. (KENNIE & PETRIE, 1990).

2.3.2. MÉTODO AUTOMÁTICO "RASTER SCAN"

A digitalização é dita automática em função da sua execução ser feita utilizando um varredor digital "scanner", dispensando a participação direta de um operador. Os digitalizadores "raster-scan" disponíveis, atualmente, para digitalização de documentos gráficos, como os mapas, são periféricos capazes de produzir e armazenar um arquivo de dados no formato raster para todas as linhas e símbolos contidos no documento.

Originalmente, estes sistemas são baseados em um tipo de sensor que ilumina e varre uma área para estabelecer a presença e a direção de uma linha, permitindo sua localização contínua. Esse sensor é montado sobre um sistema mecânico que se movimenta no sentido de um eixo com uma velocidade constante.

O termo "raster" está ligado ao tipo de estrutura que é gerado o arquivo, ou seja, uma estrutura "raster" divide o espaço em elementos discretos através de um malha com linhas verticais e horizontais espaçadas regularmente, formando células. Estas células também chamadas de "pixels" ou quadrículas, possuem dimensões verticais e horizontais que definem a resolução da malha, ou seja, a área coberta no terreno por cada quadrícula.

Isto equivale dizer que ocorre um processo de generalização onde os vários elementos que podem constituir uma quadrícula deixam de ser individualizados.

Com esse tipo de periférico, é possível capturar imagens de mapas tanto em preto e branco (monocromático), como coloridos. Para o caso de mapas monocromáticos, um único fotodetector será usado, já para o colorido, filtros diferentes serão usados para efetuar a separação de cores de cada detalhe contido no mapa. Cada canal separador de cor tem um sensor para captar a presença ou ausência de dado através do seu fotodetector individual.

Para utilizar os arquivos no formato "raster", é necessário um tratamento para garantir a correspondência entre os dados originais e os dados obtidos no formato "raster". Esse tratamento é feito usando um "software" de edição "raster". O "software" transforma o arquivo em dados no formato vetorial (divide o espaço em elementos contínuos), individualizando as entidades para que possam ser manipuladas pelos aplicativos de DTM.

Atualmente, existem muitos tipos de "scanners" disponíveis no mercado. Basicamente eles se dividem em três modelos: os de mão, os de mesa (plano) e os de cilindro. A escolha de um ou outro modelo, deve levar em conta: primeiro o que se pretende fazer com o equipamento e depois escolher a resolução desejada. Os "scanners" de mão na sua maioria possuem resolução de 100ppp (pontos por polegadas) a 400ppp, os scanners de mesa tem resolução de 600 a 1200ppp e os de cilindro possuem resolução variando entre 2500 a 5000ppp.

3. Teoria das Funções de Interpolação aplicada a Modelos Digitais de Terrenos

As funções de interpolação e as funções de aproximação são funções utilizadas para descrever uma superfície para o qual se mediu seus valores discretos. Essas funções podem ser utilizadas para descrever tanto os problemas bidimensionais como os de superfícies. (SILVA, 1990).

São raros os casos nos quais os dados da superfície existem para toda localização desejada, ou seja, a superfície é definida por uma função contínua ou por uma malha de dados densa o suficiente para fornecer todas as posições de interesse. Desse modo, para o caso mais geral, um processo de interpolação dos dados amostrados é necessário para se obter os resultados finais desejados. (FELGUEIRAS, 1987).

Em mensuração, existe um vasto campo de aplicação para essa teoria, sobretudo no domínio da fotogrametria. Podemos citar por exemplo as aplicações para a determinação do índice de refração atmosférica, para a correção da deformação de filmes fotogramétricos, para o estabelecimento de um Modelo Digital de Terrenos entre outros. (LEBERL, 1975) (in SILVA, 1990).

A teoria das funções de interpolação e das funções de aproximação possuem as mesmas bases primárias, ou seja, encontrar uma classe de função, a mais simples possível (polinômios por exemplo), que seja a expressão exata ou aproximada de uma função desconhecida descrita por uma dependência funcional entre suas variáveis.

A diferença principal entre as duas teorias é que para as funções de interpolação deseja-se encontrar, para uma dada função $f(x)$, uma função $P(x)$ que passe pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, onde, $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$; enquanto que para as funções de aproximação se deseja encontrar para uma dada função $f(x)$, uma função aproximada $P(x)$ que se ajuste aos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, segundo uma regra de aproximação escolhida.

Tanto para a interpolação como para a aproximação, a função $f(x)$ só é conhecida para os seus valores discretos, geralmente medidos de maneira descontínua ou irregular, a duas ou mais dimensões. A escolha de uma ou de outra teoria, depende do tipo e da precisão dos dados levantados. (SILVA, 1990).

Segundo SILVA (1990), o problema de interpolação ou de aproximação, para aplicações gerais em engenharia, é ainda muito aberto. Não existe ainda um método que possa ser aplicado com sucesso, em qualquer caso, sem levar em consideração o tipo de dado levantado, as propriedades do fenômeno estudado e a dimensão espacial.

Para estudar os métodos de interpolação e de aproximação, pode-se classificá-los em três grupos distintos, segundo um modo de regionalização do domínio das variáveis. Adotando-se a classificação proposta por (LEBERL 1973), tem-se:

- Método de interpolação ou de aproximação global;
- Método de interpolação ou de aproximação local;
- Método de interpolação ou de aproximação pontual.

As funções de interpolação global, envolvem o ajuste de uma superfície simples passando por todos os pontos medidos, por uma superfície

que pode ser gerada por uma função $P(x)$, do tipo, trigonométrica, exponencial ou polinomial, onde $P(x_k) = f_k, (k = 1, 2, \dots, n)$.

É possível determinar-se uma função global para toda a região definida, essa função é conhecida como superfície de tendência. No entanto os métodos globais raramente são utilizados para grande quantidade de pontos tendo em vista que esses métodos envolvem a solução de um sistema de equações de grau igual ao número de pontos amostrados.

Para o método de interpolação local o espaço de referência é subdividido em subespaço e para cada subespaço é definido uma função de interpolação. As funções mais utilizadas são as funções segmentadas que descrevem o comportamento do problema por parte.

Os métodos locais são muito usados para definição de funções para descrever elementos da superfície que são polígonos convexos (células) determinados a partir dos pontos amostrados. Esses métodos apresentam um bom desempenho na determinação das cotas dos pontos dentro de células, mas deve-se ter cuidado com a continuidade das funções em células vizinhas.

O método pontual interpola os novos valores usando somente os pontos de referência vizinhos. Desse modo, a adição, substituição ou movimentação de um ponto no domínio da função afetará apenas os pontos próximos ao local da mudança. Isto é o mesmo que considerar que apenas os pontos vizinhos ao novo ponto, dentro de um critério de proximidade, influenciam o valor estimado para o novo ponto interpolado. Segundo LEBERL (1973), os métodos de interpolação pontual utilizam menos memória de cálculo que os outros métodos, mas por outro lado, exigem um tempo de cálculo maior.

A comparação entre os métodos globais, locais e pontuais não é uma tarefa simples, suas características e escopo de aplicação nem sempre coincidem, e não existe unanimidade quanto aos critérios a aplicar. FRANKE, (1983) (in FELGUEIRAS, 1987), propôs a utilização dos seguintes critérios de avaliação de um método de interpolação: precisão, aspectos visuais, sensibilidade à parâmetros, tempo de processamento, necessidades de memória e facilidades de implementação. Como já foi dito anteriormente, ainda

não existe um consenso acerca do que seria o melhor método, e o mais adequado para todos os casos.

Considerando que para a superfície Terrestre seria muito difícil prever que forma teria a porção estudada, neste caso a classe de função mais adequada para descrever o fenômeno são as funções polinomiais, a preferência pelos polinômios deve-se a facilidade de manipulação de suas equações. Para os casos onde se conhece o comportamento do fenômeno estudado pode-se escolher uma classe de função que melhor descreva o problema que se deseja resolver. A seguir descreve-se as funções de interpolação polinomial.

3.1. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Uma função de interpolação $P(x)$ é, por definição, uma função contínua que descreve aproximadamente o comportamento matemático de um fenômeno, para o qual se conhece apenas os seus valores discretos. Por exemplo, para os casos de um domínio a duas dimensões, o problema consiste em: dados os valores discretos medidos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, valores estes que, em geral, são valores de uma função, deseja-se determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que: $P_n(x_0) = y_0; P_n(x_1) = y_1; \dots; P_n(x_n) = y_n$.

Para estabelecer uma função de interpolação, três fases distintas devem ser realizadas. A primeira é, naturalmente, o levantamento dos valores que caracterizaram o fenômeno ou, mais especificamente, a caracterização da dependência funcional entre as variáveis. A segunda, é a escolha de uma classe de função que será utilizada para a interpolação. A terceira é o estabelecimento e a resolução das equações para todos os coeficientes da função de interpolação.

3.1.1. MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAIS BIDIMENSIONAIS

Considerando a classificação anterior para a divisão do domínio das funções de interpolação, os itens seguintes descrevem os métodos de

interpolação global e local, levando em consideração as particularidades de cada método. Os métodos de interpolação pontual não são adequados para serem aplicados em problemas bidimensionais. Portanto, não serão tratados neste item.

No caso do método de interpolação global, a função de interpolação polinomial será uma função cujo grau do polinômio de interpolação é suficientemente elevado para que a curva passe por todos os pontos medidos. No caso do método de interpolação local, os polinômios possuem um grau menor, ajustados aos pontos de referência pré determinados.

Os métodos de interpolação bidimensionais tem como principal aplicação o traçado de curvas, para DTM o traçado de curvas de contorno ou curvas de isovalor.

3.1.1.1. Método de interpolação bidimensional polinomial global

Considere $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, como sendo números reais distintos e $f(x_1), \dots, f(x_n)$, são valores da função $f(x)$ nos pontos. Os pontos $(x_k, f(x_k))$, $k = 1, \dots, n$, podem ser imaginados como sendo valores pertencentes a uma curva. Qualquer função $P(x)$ satisfazendo as condições:

$$P(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

é denominada função de interpolação global.

Desse modo, considerando-se que $P(x)$ é um polinômio de grau m da forma,

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

obtem-se uma função de interpolação polinomial global.

Pela condição (3.1) tem-se a seguinte relação:

$$a_m x_k^m + a_{m-1} x_k^{m-1} + \dots + a_1 x_k + a_0 = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ são os $m + 1$ coeficientes polinomiais desconhecidos.

Para um número de equações igual a n , tem-se:

- Uma única solução se $n = m + 1$
- Não há solução possível para $m + 1 < n$
- Existe infinitas soluções para $m + 1 > n$

Portanto, para um conjunto de n pares de pontos, é possível estabelecer um sistema de n equações e calcular os coeficientes desconhecidos $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$.

Existe na literatura uma série de procedimentos que permitem estabelecer um polinômio de interpolação. Entre os mais comuns, podem ser citados, particularmente, a fórmula de interpolação de Newton e a fórmula de interpolação de Lagrange, facilmente encontradas em livros de métodos numéricos. No entanto, em muitos casos, a melhor solução é desconsiderar os métodos de interpolação global (devido ao elevado grau dos seus polinômios) e adotar um método de interpolação local que utilizam funções segmentadas. Um exemplo dessas funções são as funções **splines**.

3.1.1.2. Método de interpolação bidimensional polinomial local - spline

As funções de interpolação splines são funções polinomiais locais definidas em subconjuntos de um conjunto de pontos. O termo **spline**, originalmente, se refere a uma régua flexível usada pelos desenhistas e construtores de navios para facilitar o traçado de uma curva regular passando por uma série de pontos dados. Sua propriedade elástica garante a suavidade da inclinação e da curvatura nos pontos amostrados, ou seja, a continuidade dos segmentos da curva.

Desse modo, considerando o intervalo $[a, b]$ como sendo um intervalo finito que contém os valores $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. A função spline $S(x)$, de grau m , com pontos interpolantes $x_k, k = 1, \dots, n$, é uma função polinomial que satisfaz as seguintes propriedades:

- $S(x)$ é $m - 1$ vezes diferenciável em cada ponto $x_i; 1 \leq i \leq n$.

- Em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ ($1 \leq k \leq n-1$), $S(x)$ é um polinômio de grau $\leq m$.

A ordem m do polinômio pode, teoricamente, ter grandes variações. Mas na prática, no entanto, a função spline cúbica (grau 3) é a mais utilizada. As funções spline de grau inferior a 3 produzem as mesmas instabilidades nas curvas, que as funções de interpolação de grau elevado. Descreve-se a seguir a técnica para o estabelecimento de uma função de interpolação spline cúbica para duas dimensões.

Considere $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$, como sendo, uma série de pontos para os quais se deseja encontrar um polinômio de interpolação $P(x)$.

De acordo com a definição das funções spline, deve-se passar uma função cúbica $S_i(x)$ para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ que definem o intervalo i .

As funções spline cúbica tem a forma:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

onde,

$S_i(x)$: função de interpolação
 a_i, b_i, c_i, d_i : coeficientes do polinômio
 x_i : primeiro ponto do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$

Para determinar os quatro parâmetros a_i, b_i, c_i, d_i , é necessário usar a definição de spline cúbica e os requisitos de interpolação.

$$S_i(x_{i+1}) = f_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1})$$

então,

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1} =$$

$$a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^3 \quad (3.3)$$

fazendo $h_i = x_{i+1} - x_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$, a equação (3.3) pode ser escrita como:

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} = a_{i+1} \quad (3.4)$$

A spline cúbica possui duas derivadas nos nós x_{i+1} , a primeira garante a inclinação e a segunda a curvatura:

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

Usando a equação (3.2), tem-se,

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \quad (3.5a)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \quad (3.5b)$$

Resolvendo a equação (3.5b) para d_i e substituindo nas equações (3.4) e (3.5a), obtém-se as seguintes relações,

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (3.6)$$

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1}) \quad (3.7)$$

A relação final envolvendo os coeficientes é obtida resolvendo a equação (3.6) para b_i , tem-se então;

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (3.8)$$

De maneira análoga pode-se obter;

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.8) e (3.9) na equação (3.7), e considerando $a_j = f_j, 1 \leq j \leq n-1$, obtém-se a equação geral;

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 3 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (3.10)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-2)$$

Com as equações acima determina-se o coeficiente c_i . Os demais coeficientes são determinados a partir das equações (3.4), (3.5), (3.6),

$$\begin{aligned} a_i &= f_i \\ b_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \\ d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \end{aligned} \quad (3.11)$$

A função de interpolação spline cúbica não é a única função definida por segmentos. Uma outra função de interpolação definida dessa forma, também tem sido muito utilizada pelos algoritmos desenvolvidos atualmente para a computação gráfica. Trata-se da função conhecida como B-spline.

A função B-spline difere das funções spline natural pela condição fundamental de possuir controle local, ou seja, a alteração de um ponto de controle não interfere sobre toda a curva, mas somente sobre parte dela. Esta condição permite a modificação de intervalos da curva sem alterar as partes que já estão ajustadas. Isso certamente, minimiza o segundo trabalho de cálculo da curva quando os pontos de controle são modificados. A seguir descreve-se a formulação para o método B-spline.

3.1.1.3. Método de interpolação bidimensional local B-Spline

O esquema de representação por B-spline é baseado na definição de uma malha de pontos de controle no espaço de referência, definidos por suas coordenadas, e um conjunto de funções-base, chamadas funções "blending"¹ paramétricas.

Uma B-spline é definida, analiticamente, como um conjunto de equações polinomiais sobre um vetor de números reais, chamado vetor de nós, em ordem não decrescente. Isso, especialmente para curvas, representa uma flexibilidade a mais na manipulação das formas. (MINGHIM, 1990).

¹ Funções que identificam um determinado método de representação.

As funções da base, geralmente, possuem controle local, pois sua formulação é dedicada a limitar a região de influência de um dado nó ou vértice de controle. Os dados necessários para sua manipulação são os pontos da malha de controle e a sua ordem. O método combina a facilidade da manipulação polinomial com a suavidade da construção de formas.

As funções base B-spline são formadas como sendo um caso especial das equações base de Bernstein. Essas equações representam a distribuição binomial de probabilidade, e formam uma base no espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m . As equações de base Bernstein estão descritas em detalhe em ROGERS & ADAMS (1990).

Considerando os aspectos matemáticos, o método B-spline apresenta-se na forma paramétrica. A formulação paramétrica de curvas possui vantagens sob vários aspectos, principalmente, pela independência dos eixos de coordenadas e pela facilidade de avaliação de pontos da curva. Por esse motivo, para a maioria dos problemas de engenharia, os métodos matemáticos de representação se dá pela forma paramétrica. Dentre eles, os que utilizam malhas de controle são os mais recomendados, e também mais usados em computação gráfica, devido à grande flexibilidade para o projeto da forma do objeto.

A formulação paramétrica de uma curva em duas dimensões é usualmente representada como sendo:

$$Q(t) = (X(t), Y(t))$$

onde $X(t)$ e $Y(t)$ são os valores da função para o parâmetro t , das coordenadas X e Y , de um ponto sobre a curva em questão para qualquer valor de t . Pode-se assim, avaliar toda a curva variando o valor de t entre um valor inicial $t_{\min}$ e um valor final $t_{\max}$.

A forma paramétrica para a função B-spline, é calculada pela combinação linear de funções-base ("blending"), a determinação dos coeficientes dessa combinação linear utilizando um conjunto de pontos de controle, pertencentes ou não à curva resultante, que formam o chamado polígono de controle. A equação geral de uma curva definida parametricamente em função do parâmetro t é dada por:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t) V_i \quad (3.12)$$

onde:

- n : é o número dos vértices do polígono de controle,
- V_i : são os vértices de controle,
- F_i : são as funções-base específicas,
- Q_n : equação vetorial, (possui uma componente em (x,y))

Os vários métodos de representação de formas se diferenciam no que diz respeito ao tipo de função-base utilizada. Para modelagem de terrenos são usadas as funções polinomiais. A formulação para B-spline é dada a seguir.

Uma B-spline de ordem k é formulada analiticamente como uma polinomial por partes, de grau $k - 1$, definida sobre um vetor de nós. Um vetor de nós é um vetor de números reais quaisquer em ordem não decrescente, ou seja:

$$[t_0, t_1, \dots, t_q] \text{ tal que } t_{i-1} \leq t_i \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Além do vetor de nós, uma B-spline é obtida como função dos pontos de controle e da ordem da curva na direção de variação do parâmetro. Assim, a i -ésima função polinomial B-spline de ordem k , para o vetor de nós, será denotada por $N_{i,k}(t)$ e foi definida por COX & DeBOOR (1972)(in ROGERS & ADAMS, 1990) pela seguinte relação recursiva:

$$N_{i,1}(t) = 1 \quad \text{se} \quad t \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$N_{i,1}(t) = 0 \quad \text{se} \quad t \notin [x_i, x_{i+1}]$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

Com as funções-base B-spline, a equação vetorial que expressa a curva, é dada por:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t < t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (3.13)$$

Segundo MINGHIM (1990), pela formulação do método, observa-se:

- A ordem da função base (e portanto, seu grau) pode ser escolhida, desde que seja maior ou igual ao número de pontos de controle.
- O cálculo de $N_{i,k}(t)$ envolve todos os nós de t_i a t_{i+k} , mas não outros, e então a amplitude de sua influência (ou apoio) na construção da curva é a de k intervalos. Essa característica habilita o controle local da curva. O controle local implica em, modificando a posição de um ponto de controle da curva, altera apenas uma região limitada ao redor do ponto.
- As funções $N_{i,k}(t)$ formam realmente uma base. Assim qualquer spline de ordem k ou menor, definida sobre um dado vetor de nós, pode ser escrita como a combinação linear de funções base B-spline, definidas sobre o mesmo vetor de nós, estendido em ambos os extremos por $k-1$ nós arbitrários.
- A repetição de um ponto de controle no polígono implica numa redução da continuidade da curva naquele ponto, o que é mais uma flexibilidade de projeto admitida pelo método.

As propriedades das curvas B-spline são extensíveis à formulação para superfícies, sua formulação matemática possui várias características que fornecem flexibilidade a forma da curva ou superfície, entre elas a definição da ordem, e, portanto do grau da curva ou superfície, o controle local, como já mencionado, e a definição do vetor de nós.

As funções spline tem sido muito usadas em sistemas de auxílio a projetos, os conhecidos CAD, têm grande utilização nas indústrias aeronáutica, automobilísticas e naval, para geração de curvas e superfícies que simulam carrocerias de automóveis, cabinas de avião, cascos de navios, etc. Em modelos digitais de terrenos as curvas spline são usadas para suavização de curvas de nível, produzindo curvas esteticamente semelhantes ao traçado manual de curvas de nível.

3.1.2. MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO TRIDIMENSIONAIS

Um método de interpolação tridimensional consiste em determinar uma função que representa uma superfície, que passa pelas coordenadas espaciais (X, Y, Z) , medidas. Supõe-se, geralmente, que as coordenadas espaciais X, Y são as variáveis independentes e Z a variável dependente.

3.1.2.1. Método de interpolação tridimensional global

O método mais simples para estabelecer uma interpolação tridimensional global, a exemplo dos métodos de interpolação bidimensionais globais, é também adotar uma função polinomial que descreva o comportamento global da superfície. O método consiste em utilizar um polinômio bidimensional do tipo:

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$$

para o qual os coeficientes $a_{i,j}$ serão determinados pela solução de um sistema de equações gerado por;

$$P(x_i, y_i) = z_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Este método, é impróprio para aplicações em DTM, devido ao elevado número de pontos envolvidos nesse problema. Mesmo para os casos dos métodos de interpolação bidimensional global, o polinômio torna-se instável a medida que seu grau é aumentado, não sendo conveniente a sua aplicação, para este problema de interpolação, especificamente.

3.1.2.2. Método de interpolação tridimensional global:

Análise Multiquádrica

HARDY (1972), sugeriu a aplicação de equações multiquádricas para representação analítica da superfície Terrestre, a partir de um conjunto discreto de pontos observados. A sugestão do método deve-se a insatisfação

do autor com os resultados obtidos usando as equações polinomiais e de Fourier, que segundo ele não apresentavam precisão suficiente para aplicação em engenharia.

Análise multiquádrica é um método de derivação de equações topográficas e de outras superfícies irregulares, baseado na hipótese fundamental, que qualquer superfície plana, mas irregular (analiticamente indefinida), pode ser aproximada para um grau de exatidão por um somatório das superfícies regulares (analiticamente definidas), (HARDY, 1972).

Um tipo de superfície multiquádrica pode ser representado pela série:

$$\sum_{j=1}^n c_j q(x_j, y_j, x, y) = z \quad (3.14)$$

Onde, z é função de x e y , resultando a partir do somatório de classes singulares de superfície quádricas q . O eixo vertical de simetria de cada termo quádrico está localizado em posição horizontal discreta x_j, y_j . O coeficiente associado c_j determina o sinal algébrico e a igualdade do termo quádrico.

Um exemplo particular de superfície multiquádrica que se enquadra na forma geral (3.14), é o somatório de uma série de hiperbolóides circulares. Nesse caso a equação geral (3.14) será da forma:

$$\sum_{j=1}^n c_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + C]^{\frac{1}{2}} = z \quad (3.15)$$

As equações multiquádricas envolvendo parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma superfície, cilindros, esferas, elipsóide e variações elípticas de cilindros, parabolóides ou hiperbolóides; ainda podem ser desenvolvidas para aplicações em topografia. Cones e segmentos de reta são representados pela equação (3.14), quando a constante arbitrária C é considerada igual a zero.

Resolvendo a equação (3.15) para aplicação topográfica, tem-se:

Seja uma série de pontos, $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$; para os quais os termos quádricos $c_1, \dots, c_n$ são desconhecidos. É conveniente expandir a equação (3.15) da notação de somatório para um sistema de n equações com n incógnitas. O lado esquerdo da equação é arranjado em i linhas e j colunas, enquanto que do lado direito tem-se uma coluna com i linhas. Escrevendo a equação (3.14) para o conjunto de pontos dados, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n c_j [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} = z_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

As coordenadas cartesianas dos n pontos amostrados, podem ser substituídos na equação (3.17), e somente os coeficientes c_j são desconhecidos. Usando a notação matricial o sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_j)_{n \times 1} = X$$

Para cada elemento conhecido tem-se:

$$[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} = a_{i,j}$$

Dessa forma a matriz $(a_{i,j})_{n \times n} = A$; e a matriz do termo absoluto é dada por:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (z_i)_{n \times 1} = B$$

A equação (3.17) reduz-se a: $AX = B$ e, a solução usual é: $X = A^{-1}B$.

Uma vez calculados os coeficientes c_j , e substituindo na equação (3.17) tem-se a equação topográfica para os pontos dados. A principal limitação é a dimensão dos sistemas, porque será sempre igual ao número de pontos dados. Assim, a medida que o número de pontos aumenta, deve-se resolver sistemas lineares cada vez maiores, isso demanda um tempo de cálculo muito grande, tornando o procedimento praticamente inviável, tal como os demais métodos globais.

3.1.2.3. Métodos de interpolação tridimensional local

A solução mais adequada para os problemas de interpolação tridimensionais, a exemplo dos problemas bidimensionais, é a interpolação local. Nesse caso, divide-se o domínio de definição do problema em diversos sub-domínios e descreve-se o comportamento de cada sub-domínio por uma função espacial simples. Segundo SILVA (1990), o problema de interpolação tridimensional local pode ser dividido em dois casos principais:

- Os casos dos pontos de referência distribuídos sobre uma malha regular;
- Os casos dos pontos de referência distribuídos de maneira irregular.

A maioria dos programas aplicativos de modelagem digital de terrenos utiliza essa metodologia. Por isso os detalhes desse método serão descritos em um capítulo especial (vide cap. 4).

3.1.2.4. Métodos de interpolação tridimensional pontual

Existem vários métodos de interpolação tridimensional pontual, de maneira geral são de fácil compreensão e simples aplicação. Apresenta-se a seguir os métodos mais comuns.

• Interpolação pela média aritmética

O método de interpolação pela média aritmética é um método muito simples. O valor interpolado é calculado pela média dos valores dos pontos vizinhos ao ponto em questão. Dessa forma;

$$z_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

Este é um método fácil de utilizar, mas possui a desvantagens de ser empírico e de exigir a definição de uma vizinhança.

• Interpolação pela média aritmética ponderada

Esse método utiliza também a média dos valores comuns ao vizinho do ponto x_0 . A diferença está no fato que ele utiliza um peso para ponderar a média. Assim,

$$z_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \quad \text{com} \quad \sum \lambda_i = 1$$

Para escolher o valor de λ_i , diversas funções foram propostas, por exemplo:

$$\frac{1}{d}, \frac{1}{d^2}, e^{-kd}, e^{-kd^2}, \dots$$

onde d é a distância espacial entre o ponto a interpolar x_0 e os pontos de referência x_i .

Segundo BURROUGHS (1988), (in SILVA, 1990), a função mais utilizada é a que fornece a ponderação seguinte:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n z_i d_i^{-2}}{\sum_{i=1}^n d_i^{-2}}$$

Um outro método de interpolação pontual é o método de Krigagem, idealizado pelo geólogo D.G. Erige nos anos 1950. Mais detalhes sobre o método consultar, MELGUEIRAS (1987) e SILVA, (1990).

3.2. FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

Uma função de aproximação $P(x)$ é, por definição, a função contínua que descreve aproximadamente o comportamento matemático de uma experiência a qual só se conhece os seus valores discretos, segundo uma regra de aproximação. (SILVA, 1990).

Um fator preponderante para a estabelecimento de uma função de aproximação é a escolha da regra de aproximação. Esta regra indica o grau de aproximação.

Existe na literatura muitas técnicas que utilizam regras de aproximação diferentes e que são bastante conhecidas. Pode se citar entre outras a técnica dos mínimos quadrados, método de Fourier e a técnica de aproximação uniforme. No entanto, a técnica de aproximação pelos mínimos quadrados é a mais utilizada.

3.2.1. TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

Apresenta-se a seguir as bases matemáticas gerais da técnica de aproximação por mínimos quadrados. Para aplicações particulares será necessário adaptar a técnica ao caso específico.

A aproximação por mínimos quadrados se adapta facilmente a um grande número de problemas. É por exemplo, a técnica de base para os problemas de compensação de observação onde deseja-se conhecer os valores mais prováveis de uma série de observações. A técnica pode também ser utilizada para os problemas de aproximação de uma função, onde se deseja conhecer os valores entre os pontos medidos.

Para o caso de serem feitas n observações L_i de uma grandeza qualquer para um problema a u incógnitas ($u < n$), pode-se querer calcular os valores compensados $\bar{L}_i = L_i + v_i$, para as n observações, sendo v_i o erro de cada medida, ou querer determinar uma função de aproximação $P(L_i) = f(L_i) + v_i$, que descreva o comportamento do problema pelo cálculo das variáveis de uma função considerada como a função que descreve o fenômeno estudado.

A técnica dos mínimos quadrados utiliza uma regra de aproximação baseada na condição de que a soma ao quadrado dos erros residuais v_i seja mínima, ou mais precisamente,

$$V^T P V \rightarrow \text{mínimo}$$

onde: V = matriz dos erros residuais

P = matriz dos pesos das observações

Para aplicação da técnica é necessário primeiramente estabelecer, para cada observação, uma relação matemática inicial entre as observações e suas incógnitas. Essas relações são chamadas equações de erros e são da forma:

observação + erros residuais = função linear das incógnitas

$$L_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z + (\text{termo constante})$$

x, y, z = incógnitas

Na maioria dos casos esta relação matemática não é linear. Desse modo, é necessário linearizá-la para obter as equações de erros lineares. Para a linearização pode-se, por exemplo, aplicar o teorema de Taylor.

Seja assim, o caso das equações não lineares do tipo;

$$L_i + v_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

n observações

u incógnitas

onde,

$$\bar{x}_k = x_{k_0} + x_k$$

x_{k_0} = valor provisório

x_k = acréscimo na incógnita

$k = 1, \dots, u$

Pelo desenvolvimento de Taylor, teremos:

$$\begin{aligned}
 f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) &= f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + \dots \\
 &= f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0}) + a_i x_1 + b_i x_2 + \dots
 \end{aligned}$$

com;

$$\begin{aligned}
 a_i &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0, b_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \\
 l_i &= L_i - f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0})
 \end{aligned}$$

A equação de erros linearizada tem a forma:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots - l_i$$

Tem-se então, para os casos lineares e não lineares, equações de erros do tipo:

$$v_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots - l_1$$

$$v_n = a_n x_1 + b_n x_2 + \dots - l_n$$

ou matricialmente,

$$V = AX - l$$

onde,

$$A_{(n \times u)} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2u} \\ a_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nu} \end{pmatrix}$$

$$V_{(n \times 1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$l_{(n \times 1)} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad X_{(u \times 1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix}$$

Para um sistema de observações com peso, teremos ainda, a matriz dos pesos P das observações que será do tipo:

$$P(n \times n) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}$$

A matriz P será;

- uma matriz diagonal unitária se as observações são independentes e de mesma precisão,
- uma matriz diagonal se as observações são independentes,
- uma matriz simétrica com os termos exceto a diagonal não nulos se as observações são correlacionadas.

Aplicando o princípio dos mínimos quadrados ao modelo, tem-se:

$$\begin{aligned} V^T P V &= (X^T A^T - l^T) P (AX - l) \\ &= X^T A^T P A X - X^T A^T P l + l^T P l \end{aligned}$$

considerando, $X^T A^T P l = l^T P A X$, tem-se:

$$V^T P V = X^T A^T P A X - 2l^T P A X + l^T P l$$

Esta expressão é mínima quando sua derivada é nula, dessa forma;

$$\frac{\partial V^T P V}{\partial X} = 2X^T A^T P A - 2l^T P A = 0$$

Dividindo a expressão por 2 e fazendo a sua transposta, tem-se;

$$A^T P A X - A^T P l = 0$$

Desse modo, se $N = A^T P A$ e $n = A^T P l$, tem-se:

$$N X = n \quad \text{e a expressão final é:} \quad X = N^{-1} n$$

onde, de acordo com a definição acima, X é o vetor das incógnitas. Os erros residuais V podem ser calculados pela expressão $V = A X - l$.

Além da técnica dos mínimos quadrados, existem muitas outras que também são utilizadas para aproximação. Não faz parte dos objetivos desse trabalho a descrição mesmo que sumária dessas técnicas. Para maiores detalhes consultar, SILVA (1990), YAKOWITZ & SZDAROVSKY (1986), ZIENKIEWICZ & MORGAN (1983).

4. Técnicas de Geração de Modelos Digitais de Terrenos

Para construir um modelo digital de terreno (DTM), a primeira etapa do processo consiste no levantamento dos dados representativos da superfície em estudo, como descrito no capítulo 2. Esses dados são adquiridos, em sua maioria, segundo uma distribuição irregular no plano (X, Y), onde alguns deles possuem relações topológicas definidas entre as suas posições.

O segundo passo do processo de geração de modelos de terrenos é a edição dos dados amostrados, a qual depende do formato de entrada do programa. Por exemplo, para dados obtidos a partir de levantamento topográfico, é possível tanto lançar os dados diretamente via teclado como usar a interface do instrumento com o computador, no caso de instrumentos eletrônicos.

✕ Os dados fotogramétricos e digitalizados, em geral, já estão na forma numérica, ou seja, os dados obtidos são registrados em uma unidade de transferência em formatos que possam ser importados pelos aplicativos DTM. O formato mais usado é o código ASCII (American Standard Code for Information Interchange). Esse código é uma tabela de 8 bits, que define um

padrão e garante a comunicação de dados entre equipamentos de computação. Os dados digitalizados, em geral, são informações na forma gráfica (linhas contínuas), que também devem ser armazenados em formatos possíveis de intercâmbio.

Após a aquisição e edição de dados, a terceira etapa é criar o modelo propriamente dito. Para isso, foram desenvolvidos de forma independente um grande número de programas, os quais têm sido otimizados para aplicação específica ou para serem usados em computadores específicos.

Os modelos digitais de terrenos, segundo a sua extensão e abrangência podem ser classificados de duas formas: os modelos globais ou de superfícies, que são os modelos representados por uma única equação matemática que descreve o comportamento da porção estudada, e os modelos locais onde os pontos amostrados são agrupados em malhas, que podem ser regulares ou irregulares. A superfície de cada elemento da malha (célula), deve ser descrita por uma função matemática que se adapte ao problema da melhor forma possível.

As equações matemáticas mais usadas para descrever um problema global estão descritas em detalhes no capítulo 3. No entanto, a maioria dos modelos desenvolvidos atualmente são modelos locais. Portanto, os itens seguintes tratam do processo de geração dos modelos locais. A seguir descreve-se as técnicas usadas para geração das malhas, e para a representação das superfícies de cada elemento.

4.1. GERAÇÃO DA MALHA PARA OS MODELOS LOCAIS

A partir de uma amostra discreta de pontos, constroem-se sobre esse espaço amostral uma malha regular ou irregular. Para as malhas irregulares as coordenadas dos nós são as mesmas dos pontos levantados. Para o caso da malha regular calcula-se ainda as altitudes dos nós da malha construída. Posteriormente cada elemento da malha é descrito analiticamente e a partir dessa superfície pode-se realizar uma série de cálculos, como por exemplo, traçado de curvas de nível, cálculo de volumes, etc. Os itens seguintes descrevem os dois tipos de malha utilizadas para construção de modelos digitais de terrenos: as malhas regulares e as malhas irregulares.

4.1.1. MALHA REGULAR

A malha regular aproxima superfícies através de poliedros de faces regulares que podem ser: quadrados, retângulos, triângulos ou hexágonos, (Figura 4.1). Os vértices desses poliedros podem ser os próprios pontos amostrados, caso estes tenham sido levantados com a mesma configuração que define os nós da malha. No entanto, isto raramente ocorre, tendo em vista que os levantamentos, em sua maioria, são feitos de forma irregular ou semi-regular. Neste caso, é necessário uma interpolação ou uma aproximação a partir dos pontos levantados, para estimar os valores das coordenadas em cada nó da malha gerada.

FIGURA 4.1 - Tipos de malhas regulares (KENNIE & PETRIE, 1990)

A malha regular mais utilizada é a malha quadrada, que por possuir elementos simples apresenta uma série de vantagens, principalmente no que concerne ao armazenamento dos pontos. Esse tipo de arranjo ocupa menos memória, tendo em vista que ele utiliza uma matriz para gravar as cotas Z de cada ponto, dispensando o armazenamento das coordenadas X e Y , que ficam implícitas na posição i, j do elemento da matriz, (CINTRA, 1985), (Figura 4.2).

A qualidade do modelo de uma malha regular dependem do tamanho da malha e do método de interpolação utilizado para avaliar a cota de cada nó da malha. Uma malha grande demais pode causar distorções para as regiões muito irregulares, e uma malha muito pequena pode gerar cotas "falsas" para

as regiões regulares. O método utilizado para avaliar cada nó da malha, por sua vez, depende do tipo de levantamento adotado no campo, (regular, irregular ou semi-regular).

FIGURA 4.2 - Localização de elementos em malhas quadrada

Para os levantamentos irregulares, que constituem a maioria dos levantamentos, os nós da malha são calculados basicamente de duas formas: utilizando métodos de interpolação (como os descritos no capítulo 3), ou utilizando métodos de aproximação, como por exemplo, definindo uma vizinhança para cada nó da malha e calculando a sua cota através de uma média ponderada das cotas dos pontos vizinhos. Descreve-se a seguir, de forma sucinta esse método de aproximação.

4.1.1.1. Método de aproximação por definição de vizinhança de nós

Para os métodos de aproximação por definição de vizinhança de nós, existem muitas formas de definir a região de vizinhança. Um primeiro critério estima um raio R , em função da densidade de pontos e da conformação do terreno, considerando todos os pontos que caem dentro do círculo assim definido. Um segundo critério impõe a existência de um número mínimo de pontos, esse número tem sido estimado entre 6 - 10. Um terceiro critério,

pesquisa a distribuição dos pontos por quadrantes ou octantes e exige de 2 - 4 pontos por setor. (ver Figura 4.3).

FIGURA 4.3 - Técnicas para definir região de vizinhança (KENNIE & PETRIE, 1990)

4.1.2. MALHA IRREGULAR

Apesar das facilidades de implementação das malhas regulares, a partir da década de 80, chegou-se a um consenso que, para aplicação em DTM, a geração de malhas irregulares diretamente sobre os pontos levantados representa melhor o terreno a ser modelado. Entretanto, a maioria dos programas de geração de modelos, seguem um processo híbrido, primeiro gera uma malha irregular sobre os pontos amostrados, descreve a superfície desses elementos por uma equação matemática, e depois ajusta uma malha regular quadrada sobre a irregular. Isso facilita o armazenamento dos dados fornecidos pelo DTM e o seu posterior uso pelos aplicativos que utilizam o produto do DTM.

As malhas irregulares aproximam o terreno através de poliedros de faces irregulares, sendo mais utilizado os poliedros de faces triangulares. O método para construção dos triângulos segue basicamente o mesmo esquema que se utiliza quando o desenho é feito manualmente, primeiramente une-se os pontos dois a dois formando uma rede de triângulos no plano (X, Y),

chamada triangulação. Essa rede deve ser estabelecida de maneira a não haver cruzamento de linhas que unem dois pontos e evitando-se ainda pontos isolados ou não conectados. Por exemplo, cada vértice de fronteira deve estar unido a pelo menos duas arestas e cada vértice interno a pelo menos três. (CINTRA, 1985).

Embora o modelo digital seja tridimensional, é usual trabalhar com a triangulação utilizando apenas a sua projeção sobre o plano horizontal. Esta simplificação, que em nada altera a topologia do modelo, reduz de modo significativo a complexidade dos algoritmos envolvidos.

Com as condições acima, pode-se notar que, mesmo para uma mesma amostra de pontos, não existe uma triangulação única. Entre as diversas opções deve-se preferir aquela que gera triângulos equiláteros, com o mínimo comprimento de lados e que não possuam ângulos muito agudos.

A malha irregular subdividida em forma de triângulos é conhecida internacionalmente pelo termo TIN (Triangular Irregular Network), este tipo de malha tem sido empregada intensivamente nos programas de modelagem de terrenos desenvolvidos atualmente. A principal razão para usar esse tipo de malha é a facilidade que a triangulação oferece para a incorporação ao modelo de descontinuidades do terreno, como por exemplo, "break-line", áreas mortas e linhas de estrutura. Os primeiros algoritmos para geração de malhas triangulares foram desenvolvidos ainda na década de 70, e uma das principais dificuldades de sua implantação era o tempo de cálculo, muitas vezes impraticável devido ao volume de dados a ser processado.

Existem vários métodos para gerar uma triangulação a partir de uma série finita de pontos. Em geral, os métodos de triangulação são divididos em duas categorias: a primeira é uma construção por otimização. Nesse caso parte-se de uma triangulação qualquer, depois otimiza as formas dos triângulos, alterando a conectividade entre os pontos amostrados para gerar a triangulação final. Um exemplo desse tipo de triangulação é o método "Radial Sweep" desenvolvido por MIRANTE & WEINGARTEN, 1982.

A segunda categoria de triangulação consiste de métodos que buscam a triangulação supostamente ótima com um único passo, ou seja, não há refinamento na triangulação obtida. Esse método explora os princípios

geométricos básicos da organização de uma triangulação irregular (TIN) e produz o que se conhece como **Triangulação de Delaunay**. (McKENNA, 1985). Descreve-se a seguir a triangulação de Delaunay.

4.1.2.1. Triangulação de Delaunay

Associado com a triangulação de Delaunay¹ (também conhecida como Direchlet² Tessellation), está o polígono de Thiessen³ ou diagrama de Voronoi⁴. Uma partição é dual da outra, isto é, estão associadas segundo uma regra fixa de transformação, podendo se obter uma a partir da outra. Portanto, para definir a triangulação de Delaunay e estabelecer as regras para sua construção, é necessário definir o polígono de Thiessen.

O polígono de Thiessen é definido como sendo a subdivisão mais simples de um plano determinado por uma série finita de pontos, em superfícies poligonais em que cada ponto é circundado por um polígono particular. Portanto, para cada ponto P_i amostrado, é possível determinar à sua volta uma região que seja o lugar geométrico dos pontos do plano mais próximos de P_i do que de qualquer outro ponto da amostra. O conjunto destas regiões forma um agrupamento de polígonos convexos cobrindo todo o plano. Essa construção recebe o nome de polígono de Thiessen. (BOWYER, 1981), (In PETINATTI, 1983).

Analiticamente o polígono de Thiessen, segundo ROGERS (1964), (in GREEN & SIBSON, 1978), pode ser definido da seguinte forma: dado uma série finita de pontos $P_1, P_2, \dots, P_N$, no plano, o polígono que circunda P_n é definido pela série T_n , onde, $T_n = \{x: d(x, P_n) < d(x, P_m)\}$ para todo $m \neq n$, onde d é a distância euclidiana. A interseção das mediatrizes traçadas no meio dos segmentos que unem os pontos P_n aos pontos P_m são os vértices de Thiessen. (ver Figura 4.4).

¹ B. Delaunay, matemático francês, descobriu a triangulação que leva o seu nome, publicou seu trabalho em 1934 no boletim da Academia de Ciências da URSS.

² Pedro-Gustavo L. Direchlet, matemático alemão que fez a primeira referência ao assunto em 1850.

³ A. H. Thiessen, em 1911 usou o polígono para calcular precipitações atmosférica em grandes áreas, daí o termo polígono de Thiessen para os geógrafos.

⁴ Georges Voronoi, matemático polonês, tratou o problema de forma geral, o trabalho é datado de 1908.

Figura 4.4 - Construção do polígono de Thiessen (KENNIE & PETRIE, 1990).

Entre os diversos algoritmos criados para gerar uma rede triangular de pontos, a maioria deles possui um algoritmo recursivo para construção do polígono de Thiessen. A triangulação de Delaunay é obtida a partir daí.

O polígono de Thiessen não tem aplicação direta na modelagem digital de terrenos, o que se utiliza é a triangulação obtida a partir dele. A aplicação mais frequente do polígono de Thiessen é na área de hidrologia, para calcular precipitações atmosféricas em grandes áreas e polígonos de secas.

CINTRA (1985), descreveu o polígono de Thiessen, supondo a sua partição como sendo um conjunto de cristais em um processo de crescimento a partir do núcleo. Transcreve-se a seguir a descrição de Cintra.

*"Suponhamos que cada vértice P seja um núcleo e que os cristais se expandem simultaneamente com velocidade uniforme até que encontrem outra fonte de expansão, quando então se cria um ponto de contato e também uma borda de fronteira. Nesse processo o plano ficará dividido em polígonos convexos, cada um em torno de um núcleo. Nas bordas da região os polígonos são abertos (ou semi-infinitos). Fica assim definida a **partição de Voronoi** (ou polígono de Thiessen)."*

*Examinando com mais detalhe o processo, vemos que o ponto de contato de duas células cristalinas ocorre inicialmente no ponto médio da aresta que une os dois núcleos e que continua a acontecer nos pontos eqüidistantes dos núcleos, ou seja, na mediatriz desse seguimento que é chamada de **aresta de Voronoi**. Tem a propriedade de ser eqüidistante dos núcleos e formar a fronteira entre as células. Essa aresta comum continua a expandir-se até que encontre uma outra aresta representando a expansão a partir de outros núcleos. O ponto de encontro é denominado ponto de Voronoi. Tem a propriedade de ser eqüidistante dos núcleos das células que concorrem nesse ponto, sendo portanto, o circuncentro de um triângulo construído pelos três núcleos.*

Unindo-se o centro de cada célula com o centro de todas as células vizinhas obtém-se a triangulação de Delaunay para os pontos da amostra. Cada ponto de Voronoi está associado a um triângulo de Delaunay sendo o seu circuncentro. Cada aresta de Voronoi está associado a uma aresta de Delaunay sendo sua mediatriz."

Vários algoritmos foram desenvolvidos para calcular o polígono de Thiessen, e por conseguinte a triangulação de Delaunay, entre eles, BOWYER (1981), GREEN & SIBSON (1978), BRASSEL & REIF (1979). Foram desenvolvidos também, alguns que calculam a triangulação de Delaunay por um método de procura de vizinhos de Thiessen, com um processo iterativo de expansão de círculos (Figura 4.6). Segundo McCULLAGH (1980), que propôs um algoritmo para calcular a triangulação de Delaunay usando esse processo, isso reduz o volume de cálculo e o problema de locação de memória para esse procedimento.

O algoritmo proposto por McCULLAGH sempre inicia por um ponto de rotação qualquer e um vizinho conhecido que formam a linha base de cálculo. A área de interesse para a procura do vértice de Thiessen, é a área definida pelo círculo cujo diâmetro é a linha base. Na Figura 4.5 por exemplo, o ponto 3 está dentro do círculo A, portanto, será um vizinho de Thiessen que formará um triângulo de Delaunay com a linha base.

FIGURA 4.5 - Triangulação de Delaunay: método de procura de vizinho por expansão de círculos (McCULLAGH, 1983).

Entretanto, se existir mais de um ponto dentro do círculo, o ponto a ser considerado será o primeiro no sentido horário, partindo da linha base. Porém, quando não se encontrar nenhum ponto no limite do primeiro círculo construído, constroem-se um segundo com um fator de acréscimo em seu diâmetro. Alguns autores consideram esse fator em torno de 2. O procedimento será executado até que toda a área a ser modelada esteja coberta pela malha de triângulos.

Além dos algoritmos para gerar a triangulação de Delaunay, foram propostos também, alguns métodos que convergem para a triangulação de Delaunay. LAWSON (1972/77), propôs um método para o cálculo de uma triangulação localmente ótima e considerando que existem três critérios para se definir uma triangulação: o critério do ângulo MAX-MIN, o critério do círculo e o critério da região de Thiessen. O critério de Thiessen está descrito nos itens acima, a seguir descreve-se os critérios sugeridos por LAWSON.

Para o critério do ângulo MAX-MIN, chamaremos de Q um quadrilátero convexo cujo os ângulos internos são menores que 180° , deve-se escolher dentre as duas possíveis partições de triângulos, a que maximiza o mínimo ângulo interior de dois triângulos resultantes. Na Figura 4.6, nota-se que o ângulo $\hat{c}ab$ é o menor nos triângulos 1 e 2, $\hat{c}db$ é o menor ângulo nos triângulos 3 e 4, e $\hat{c}db$ é maior que $\hat{c}ab$. Então a triangulação 2 é melhor que

a triangulação 1. No entanto apesar de testes feitos por AKIMA e LAWSON, segundo CINTRA (1985), a triangulação produzida por esse método não foi identificada como sendo explicitamente a triangulação de Deulanay.

Figura 4.6 - Critério do ângulo máximo e mínimo (LAWSON, 1977)

O critério do círculo foi estabelecido como uma melhoria para o critério acima, sendo formulado da seguinte maneira. Suponha C um círculo passando por 3 pontos de um quadrilátero Q . Se o quarto vértice está no interior de C , insira a diagonal a partir do quarto vértice para o vértice oposto. Se o quarto vértice está fora de C , insira a outra diagonal, (Figura 4.7).

Figura 4.7 - Critério do círculo (LAWSON, 1977)

A equivalência entre o critério do ângulo MAX-MIN e o critério do círculo pode ser feita considerando os 4 pontos do quadrilátero Q pertencentes ao mesmo círculo, Figura 4.8. Suponha que o arco bc é menor que os arcos cd , da , ou ab . Se a medida angular do arco bc é 2α , então o ângulo $\hat{c}ab$ e $\hat{c}db$ tem a mesma medida α , e os dois ângulos são o mínimo ângulo, desse modo

qualquer uma das diagonais pode ser escolhida, o mesmo acontecendo com o critério do círculo.

Figura 4.8 - Equivalência entre o critério do ângulo MAX-MIN e o critério do círculo

Muitos dos algoritmos propostos, sugerem que seja construída uma janela de forma regular para facilitar a limitação da área a ser triangulada. Essa janela pode ser construída a partir de pontos pertencentes ou não à amostra, e esses pontos depois de completa a triangulação podem ou não ser incorporados aos pontos da amostra original.

Atualmente, a maioria dos algoritmos desenvolvidos usam o próprio limite da amostra para definir a área a ser triangulada. Em geral, esse polígono em volta da amostra tem uma forma bem irregular. Pode ocorrer, em alguns casos quando não existe a opção para criar uma fronteira restrita, haver a criação de triângulos de má conformação gerando distorções no trabalho final. Nesses casos, deve-se ter a opção de adicionar ou apagar linhas, para que seja feita uma correção na triangulação.

4.2. REPRESENTAÇÃO DA SUPERFÍCIE

Com a malha definida, seja regular ou irregular, o passo seguinte consiste na descrição analítica de cada elemento da superfície. A superfície pode ser descrita de três formas diferentes: como um todo, método global; por partes, método local, ou pontual. Os estudos atuais mostram que o método que apresenta os melhores resultados é o método local. Neste item será descrito somente o método de interpolação local.

O método de interpolação local descreve cada elemento da superfície, gerando uma equação para cada ponto individual i , do modelo. Conforme descrito no capítulo 3, as equações polinomiais são as mais utilizadas para representação de superfícies de terrenos, devido a facilidade para a formulação de suas equações, e por ser a função que melhor se adapta para a resolução desse problema onde não se conhece o comportamento da superfície a ser modelada.

Dentre os diversos métodos locais normalmente utilizados, a seleção recaiu sobre o método dos elementos finitos. Neste trabalho será feito somente um breve comentário sobre o método dos elementos finitos, maiores detalhes ver SILVA (1990), cap. 3, ZIENKIEWICZ & MORGAN (1990).

O método dos elementos finitos consiste em subdividir um meio contínuo, por linhas imaginárias, em um certo número de figuras geométricas simples. Os elementos são ligados entre si por um número finito de pontos nodais situados sobre sua fronteira. Esse método tem vasta aplicação, principalmente para os problemas que possuem formulações bem definidas.

Uma vez fixada a rede que discretiza o objeto em estudo (no caso a superfície do terreno), o próximo passo é calcular a função $z = f(x, y)$ em cada nó. Na modelagem digital de terrenos os valores de z são conhecidos e são as altitudes obtidas por algum processo de levantamento altimétrico. A partir dos valores nodais, calculam-se os valores da função no interior do elemento através de uma função de interpolação polinomial.

O estabelecimento da função de interpolação polinomial difere para o caso dos pontos de referência distribuídos de forma regular e irregular. Descreve-se a seguir os detalhes para cada caso.

4.2.1. INTERPOLAÇÃO SOBRE UMA MALHA REGULAR

A construção de uma malha de elementos finitos regulares não impõe grandes dificuldades. O problema principal é a escolha da função de interpolação mais apropriada. Pode-se escolher, por exemplo, uma função bilinear, uma função biquadrática ou ainda, uma função bicúbica.

Segundo (KENNIE & PETRIE, 1990), para fazer a escolha certa dos termos que melhor representarão o modelo do terreno, deve-se conhecer a forma produzida por cada termo da equação polinomial escolhida. As equações freqüentemente usadas para modelagem estão apresentadas na Tabela 4.1.

TABELA 4.1 - Equações polinomiais mais usadas para DTM

Termo individual	Ordem do termo	Descrição	Nº de termos
a_0	Zero	Plano	1
$+a_1x + a_2y$	Primeiro	Linear	3
$+a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$	Segundo	Quadrático	6
$+a_6x^3 + a_7y^3 + a_8x^2y + a_9xy^2$	Terceiro	Cúbico	10
$+a_{10}x^4 + a_{11}y^4 + a_{12}x^3y + a_{13}x^2y^2 + a_{14}xy^3$	Quarto	Biquadrático	15
$+a_{15}x^5 + \dots\dots\dots$	Quinto	Quíntuplo	16

Dessa forma, podem ser utilizados diferentes arranjos polinomiais com o número de termos diferentes. Na literatura encontra-se exemplo de aplicações com polinômios variando de 4 até 21 termos. Mais detalhes ver LEBERL (1973), KENNIE & PETRIE (1990), SILVA (1990).

•Interpolação bicúbica spline

A idéia básica para interpolação pelas equações bicúbica splines, por analogia com as curvas cúbicas, consiste em adaptar um polinômio bicúbico e utilizar suas propriedades de continuidade, isso significa em termos práticos, utilizar um polinômio de 16 termos sobre uma grelha de elementos regulares e resolver o problema adaptando as condições de continuidade. Desse modo será utilizado uma função polinomial do tipo:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} a_{i,j} x^i y^j \quad (4.1)$$

definida sobre uma grelha regular $[a,b] \times [c,d]$ ou $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$.

Pelo mesmo raciocínio utilizado para os casos de funções splines bidimensionais, os coeficientes $\alpha_{i,j}$ do polinômio são determinados utilizando os valores comuns como a continuidade da inclinação da curva nos pontos de referência, que permite respeitar a condição de derivação. Para maiores detalhes consultar ROGERS & ADAMS (1990).

• Interpolação B-spline

Para superfícies, o que normalmente ocorre é uma generalização do processo usado para curvas. Os pontos de controle formam uma malha de controle, que é uma rede pontos que modelam o formato final da superfície.

A equação geral para superfície em função de dois parâmetros t, w .

$$Q(t, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{i,j} N_{i,k}(t) M_{j,l}(w) \quad (4.2)$$

onde $N_{i,k}(t)$ e $M_{j,l}(w)$ são as funções bases B-spline nas direções biparamétricas t, w . Maiores detalhes das definições ver capítulo 3. As funções bases são definidas pelas seguintes relações:

$$N_{i,1}(t) = 1 \quad \text{se} \quad t \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$N_{i,1}(t) = 0 \quad \text{se} \quad t \notin [x_i, x_{i+1}]$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

$$M_{j,1}(w) = 1 \quad \text{se} \quad w \in [y_j, y_{j+1}]$$

$$M_{j,1}(w) = 0 \quad \text{se} \quad w \notin [y_j, y_{j+1}]$$

$$M_{j,l}(w) = \frac{(w - y_j) M_{j,l-1}(w)}{y_{j+l-1} - y_j} + \frac{(y_{j+l} - w) M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l} - y_{j+1}}$$

onde (x_i, y_i) são os elementos do vetor de nós, k e l são a ordem da equação b-spline nas direções t e w e n e m são o número de pontos do polígono nas direções t e w , respectivamente. Aqui $Q(t, w)$ são os pontos conhecidos sobre a superfície. As funções de base N e M podem ser determinadas a partir do vetor de nós e dos valores dos parâmetros t e w , B_{ij} são os pontos do polígono de controle a serem determinados.

4.2.1. INTERPOLAÇÃO SOBRE UMA MALHA IRREGULAR

Existem diversos estudos sobre esquemas e superfícies de interpolação, a forma mais simples de interpolação sobre elementos triangulares é a utilização de uma interpolação linear. Esse tipo de função tem forma simples e os resultados, para uma série de pontos bem distribuídos sobre o domínio das variáveis, são bastante aceitáveis.

Para utilizar as funções de interpolação polinomial o problema assemelha-se, a primeira vista, com as formas usadas para as malhas regulares. sendo possível usar polinômios de grau variado. A precisão da solução do problema é função da densidade da malha e do grau do polinômio escolhido para a modelagem.

Os esquemas mais simplificados adotam superfícies planas em cada domínio, o que transforma o modelo num poliedro de faces triangulares com continuidade C^0 , isto é, somente a função é contínua, formando arestas vivas nas interfaces. Outras adotam superfícies de classe C^1 , garantindo a continuidade também da primeira derivada. Dentre os métodos de classe C^1 , o mais usado é o polinômio de interpolação bicúbico do tipo:

$$P(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

Para preservar a aparência de simetria, pode-se conservar os 10 termos e igualar dois coeficientes, por exemplo, $a_8 = a_9$, limitando assim a 9 o número de coeficientes a ser encontrado. Para encontrar os coeficientes, utiliza-se os 3 valores das variáveis dependentes mais 6 valores das derivadas parciais.

Para o cálculo dos valores das derivadas parciais, pode-se por exemplo utilizar o procedimento proposto por KLUCEWICZ (1978).

Para um ponto (x_i, y_i) dado, encontra-se os n triângulos os quais possuem este ponto como vértice. Para cada triângulo encontrado, considerando a componente z dos 3 vértices de cada triângulo, constroem-se um plano passando por suas coordenadas tridimensionais. A equação do plano é da forma:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ triângulos}$$

ou

$$F_i(x, y) = z = -\left(\frac{a_i}{c_i}\right)x - \left(\frac{b_i}{c_i}\right)y - \frac{d_i}{c_i}$$

Diferenciando a equação do plano com relação a x e a y , tem-se as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x} = -\frac{a_i}{c_i}, \quad \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y} = -\frac{b_i}{c_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

As derivadas parciais finais são calculadas pela média aritmética das n derivadas parciais calculadas pelo procedimento acima. Os valores a_i , b_i e c_i são calculados pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} a_i &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \\ b_i &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \\ c_i &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

onde, (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) são as coordenadas espaciais dos nós de cada triângulo utilizado. Obtém-se dessa forma os valores das derivadas parciais.

Além da função polinomial descrita acima, outra equação que é freqüentemente citada na literatura é a função polinomial bivariada do 5º grau.

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{5-i} a_{i,j} x^i y^j$$

Est função possui 21 coeficientes a serem determinados a partir dos dados do triângulo que esta sendo refinado, que são os seguintes: as coordenadas dos pontos, derivadas parciais de primeira ordem, e as derivadas parciais de segunda ordem.

Desse modo, cada vértice do triângulo gera 6 diferentes informações, isso soma 18 equações, para obter as 3 restantes, considera-se a derivada normal calculada no ponto médio de cada aresta do triângulo. Para evitar o cálculo explícito das derivadas normais, considera-se que o seu valor seja dado por uma função cúbica; esta aproximação permite que a derivada normal a uma aresta seja calculada diretamente com os dados dos vértices. (BELL, 1969, in PETTINATI, 1983).

Os tipos de superfícies a serem incorporados a um sistema de modelagem são diretamente associados à aplicação. A escolha entre as várias formulações deve se concentrar nas características matemáticas do método em si, no comportamento das formas resultantes e na sua eficiência de implementação método. Cabe ressaltar a vantagem dos métodos paramétricos que admitem independência do sistema de coordenadas e também a possibilidade de representação de uma superfície por partes.

5. Aplicações de DTM

Os modelos digitais de terrenos correspondem a uma nova maneira de enfocar o problema da elaboração e implantação de projetos. A partir dele pode-se fazer diretamente diversos cálculos. Nessa nova concepção o traçado de curvas de nível continua sendo um instrumento muito útil mas não o principal pois as medições e quantificações já não se faz sobre elas mas sobre o modelo matemático representativo do terreno, (CINTRA, 1985).

O crescimento da utilização de um DTM e suas várias aplicações tem importância fundamental para a estrutura do DTM, ou seja, deve-se garantir a adaptação de uma estrutura de dados apropriada para cada aplicação. Esse fator tem importância relevante para o resultado que se deseja obter. Um DTM tem diferentes aplicações. Entre as mais importantes podemos citar:

- Armazenamento de dados de elevação para mapas topográficos digitais.
- Problemas de corte e aterro em projetos de rodovias e outros projetos de engenharia civil e militar.
- Desenho de perspectivas tridimensionais (superfície 3D) para fins militares, como orientação de sistemas de armamento e simulação de vôos.
- Planejamento de rodovias e locação de represas.

- Determinação de uma base geográfica para combinar dados de relevo com dados temáticos, como solos, uso do solo ou vegetação, e outros.
- Determinação da intervisibilidade de pontos.
- Cálculo de volumes.
- Desenho de perfis e seções transversais.

Comprova-se então, as inúmeras aplicações dos modelos digitais de terrenos, porém, neste trabalho será descrito somente a parte referente ao traçado de curvas de nível, ou mapa topográfico numérico. Apresenta-se a seguir os esquemas utilizados para o traçado de curvas de nível.

5.1. TRAÇADO DE CURVAS DE NÍVEL

O mapa de curvas de nível é obtido por interpolação ou por intersecção de planos horizontais com a superfície. Portanto o mapa de curvas de nível é composto por curvas que unem entre si pontos da superfície que tenham o mesmo valor de altitude. As curvas de nível podem ser visualizadas como sendo a projeção no plano (x,y) das intersecções entre a superfície e uma família de planos horizontais eqüidistantes, (FELGUEIRAS, 1987).

As curvas de nível possuem algumas propriedades importantes: todas as curvas são fechadas, a menos que interceptem as fronteiras de definição do mapa; as curvas não se cruzam; o mapa de curvas de nível fornece informações de caráter quantitativo.

O traçado automático do conjunto de curvas de nível pode ser feito partindo tanto de uma malha regular (normalmente quadrada), quanto de uma malha irregular (triangulação). A seguir descreve-se os detalhes para cada caso.

5.1.1. Traçado de curvas de nível a partir de malhas quadradas

O problema consiste em desenhar linhas de níveis iguais através de uma malha, em que se conhece o valor da função em seus nós. Considerando um elemento único, que pode ser chamado de célula, (Figura 5.1), pode-se fazer uma simples interpolação linear ao longo de cada lado da célula, baseando-se nos valores dos seus nós. A posição de cada curva de nível é determinado para

cada lado. Depois eles são conectados entre si, garantindo-se que para cada ponto de entrada no elemento, haja apenas um ponto de saída.

Figura 5.1 - Malha regular: interpolação linear de contorno para uma célula (KENNIE & PETRIE, 1990).

No entanto, ambigüidades podem aparecer em alguns casos, com algumas alternativas de solução e situações impossíveis. Por exemplo, para os pontos dados na Figura 5.2, existem 3 possibilidades de solução as quais possuem diferentes posições para as curvas de nível. A alternativa 3 é eliminada tendo em vista que curvas de nível não podem se cruzar. A solução recomendada para o problema, emprega o cálculo da cota do centro da célula, através da média aritmética das altitudes dos quatro cantos. Se o valor no centro for maior do que o nível da curva a ser traçada, escolhe-se a alternativa 2, se o valor do centro for menor escolhe-se a alternativa 1. Isso equivale na prática dividir a célula em quatro triângulos, com um vértice comum, o centro da célula.

FIGURA 5.2 - Possíveis aspectos de curvas de nível cruzando um célula quadrada

Para a interpolação da posição dos trechos de uma curva, utiliza-se uma função que descreva o comportamento da superfície dentro das diversas células. Se não for utilizada alguma função de interpolação, as curvas de nível serão compostas por segmentos de retas.

Para aplicação de uma função de interpolação dentro das células de um modelo, elas devem ser subdivididas em sub-células semelhantes entre si, (Figura 5.3). Supõe-se, com esta divisão, que o comportamento da superfície dentro de cada sub-célula seja linear.

FIGURA 5.3 - Subdivisão de Célula (a) Células subdivididas em 9 sub-células formando 16 nós, (b) Traçado das curvas nas sub-células, (KENNIE & PETRIE, 1990)

Muitos programas estão utilizando esse tipo de técnica para traçar curvas de nível. As funções de interpolação mais utilizadas são as funções spline cúbica. Esse tipo de função produz uma melhor representação para as curvas do que as linhas retas. A dificuldade aparece quando se tem um terreno muito acidentado onde pode ocorrer das curvas de nível se interceptarem, o que não é permitido quando se trata de desenho de mapas topográficos.

5.1.2. Traçado de curvas de nível a partir de triangulação

A solução neste caso é análoga ao das malhas quadradas. Pode-se fazer uma simples interpolação linear ao longo das arestas dos triângulos e traçar as

curvas a partir desses novos nós, utilizando uma função para traçar o contorno de forma mais suave.

A diferença da situação das malhas quadradas, é que para as malhas triangulares é comum o uso de interpolação linear, e obtém-se bons resultados, com a vantagem de que as malhas triangulares não apresentam problemas de ambigüidade. A curva começa em um dos limites do triângulo e tem um ponto de saída em um dos lados adjacentes. No entanto, os triângulos possuem dimensões fixadas pela configuração da triangulação e por isso fornecem poucos pontos interpolados para cada curva, o que resulta num traçado pouco suave.

Para adensar os pontos pode-se fazer um refinamento da malha subdividindo os triângulos originais em sub-triângulos, (Figura 5.4). A subdivisão encontrada na maioria dos programas, divide o triângulo em 16 sub-triângulos. O valor do vértice de cada sub-triângulo pode ser calculado por simples interpolação linear. Os pontos intermediários são determinados nos sub-triângulos para cada curva de nível que se deseja obter. As curvas (valores inteiros) são traçadas determinando-se os valores intermediários nos sub-triângulos.

FIGURA 5.4 - Refinamento da malha triangular para traçado de curvas de nível.

Para se obter curvas suavizadas, podem ser usadas uma série de curvas spline sobre os pontos intermediários (altitudes inteiras) determinados ao longo do lado dos sub-triângulos. Nesses casos deve-se ter cuidado com as curvas cruzadas, principalmente para as área de curvas muito próximas.

Atualmente a maioria dos programas de modelagem de terrenos utilizam um processo híbrido, primeiramente faz a triangulação e em seguida superpõe uma malha quadrada para facilitar o armazenamento do modelo.

A primeira tarefa nesta etapa consiste em superpor a malha quadrada ao modelo triangular e determinar os pontos que caem dentro de cada triângulo. Os algoritmos costumam estar divididos em duas etapas; primeiro verifica se o ponto pertence ou não ao retângulo envolvente ao triângulo e a seguir, verifica-se a pertinência ao interior da região triangular identificando qual a superfície que deve ser usada. Depois se reordenam os pontos, não por triângulos, mas de acordo com a sua posição i, j na matriz representativa do modelo do terreno.

5.2 SOFTWARES APLICATIVOS

Uma grande variedade de softwares para modelagem de terrenos tem sido desenvolvido nos últimos anos, para as mais diversas áreas, como: mapeamento geológico, topografia, projeto geométrico de vias e visualização 3D.

TABELA 5.1 - Classificação de softwares para modelagem de terrenos.

Categoria	Exemplo
1. Modelos para topografia	SCOPO, HIFI, CIP, LI-Countor, LISCAD, Wild System 9
2. Modelo para projetos de engenharia civil	MOSS, HASP, ECLIPSE CARTOMAP, STRADA, TOPOGRAPH
3. Modelos que fazem parte de CAD	GDS-SITES, Pro Surveyor
4. Modelos para dados geológicos e geofísicos	DCA-DTM Z-Map, UNIMAP,
5. Modelos para aplicações militares	CPS, PANACEA EAMACS,
6. Modelos gerais para série de dados científicos	Scicon Viewfinder GINOSURF, GHOST GPCP, SURFER

Entre os muitos softwares desenvolvidos para modelagem de terreno, cita-se alguns dentre os comercializados no Brasil, são eles:

- Contor Interpolation Program - CIP. (Steidler et al., 1984).
- LISCAD PLUS (LEICA, 1994).
- DCA-DTM, (Softdesk Inc. 1992, 1993)
- LI Contour; (A.B. Consulting Co., Inc. 1990)
- DTM - Topograph, (Santiago e Cintra, sd)
- STRADA - Topografia (sd)
- CARTOMAP (ANEBA, sd)

Os programas para modelagem de terrenos disponíveis no mercado, em sua maioria operam no sistema operacional MS - DOS, em versões compatíveis para IBM PC/AT. Alguns possuem uma interface gráfica para o AutoCAD ou WINDOWS.

Os dados de entrada podem ser regulares ou irregulares, juntamente com as descontinuidades do terrenos como, "break-lines", áreas mortas, etc. A maioria dos pacotes desenvolvidos atualmente permite a entrada de dados via caderneta eletrônica.

O modelo é criado usando triangulação de Delaunay, assegurando que as linhas ou os polígonos os quais possuem coordenadas tridimensionais conhecidas também formem as fronteiras dos triângulos. Posteriormente faz-se a superposição de uma malha regular quadrada, de tamanho a ser escolhido pelo usuário, e essa malha guarda todas as informações do modelo que serão usadas para os cálculos que se deseja fazer.

O item seguinte descreve dois exemplos práticos utilizando dois programas diferentes, DCA-DTM e LI - countour.

5.3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DE DTM

O objetivo desse exemplo é estudar os softwares disponíveis no Laboratório de Mensuração (USP-EESC), permitindo a observação de algumas particularidades de cada software e a sua operacionalidade.

Para o primeiro caso, os dados foram obtidos a partir de um levantamento topográfico e foram medidos 682 pontos distribuídos irregularmente. A superfície do terreno levantado é composta por uma estrada, taludes, patamares e áreas

construídas. A superfície foi delimitada por uma poligonal, posteriormente nivelada através de um nivelamento geométrico utilizando-se um nível NIB5-MOM, automático.

Os dados foram editados manualmente, utilizando a opção do programa de edição manual de dados. O arquivo de pontos foi criado em código ASCII, podendo ser editado em qualquer aplicativo. Esses dados foram definidos separadamente em: pontos de massa, "break-lines" e áreas mortas.

Para o segundo exemplo, foram digitalizadas curvas de nível de 2 em 2 metros, ponto a ponto e posteriormente foram atribuídas as alturas (z), para cada curva, o programa utilizado para digitalização foi o AutoCAD, e as alturas foram atribuídas utilizando uma opção do aplicativo DCA-DTM. Se o aplicativo possuir um modo de aquisição de dados via digitalização, isso pode ser feito diretamente, e o atributo altura introduzido simultaneamente.

•Resultados do programa DCA-DTM para a primeira amostra de dados

O programa DCA-DTM faz parte de um pacote de nome original "AddCAD Civil Survey", composto por 8 módulos, desenvolvido pela empresa de engenharia de "software" Softdesk, para engenharia civil, e faz uso do AutoCAD como interface gráfica. Hoje já está disponível no mercado brasileiro a versão 12 (1994), que acompanha as versões do AutoCAD.

Os módulos são divididos basicamente em sub-módulos, que compreende a parte básica, com 3 módulos de entrada e redução de dados "INPUT/REDUCTION", "COGO" e o "DTM". Os demais módulos fazem uso dos resultados dos módulos básicos, que uma vez calculados são armazenados em um diretório criado pelo programa que ele denomina de "P" (projeto). Sempre que se deseja usar algum dos dados anteriormente calculado, deve-se primeiramente selecionar o projeto que vai ser trabalhado.

Para o módulo de DTM, o programa permite a edição de linhas de estrutura, muros de arrimo, áreas mortas e "break-lines". Após a edição de dados o modelo é gerado utilizando a triangulação de Delaunay, porém não permite que seja delimitado a área a ser triangulada; desse modo é necessário que sejam eliminadas as linhas que forem consideradas desnecessárias para a geração do

modelo. Cada vez que é feita uma correção na triangulação o programa calcula novamente com os novos limites da amostra fornecidos pelo usuário.

A figura 5.5 mostra os pontos amostrados para o exemplo 1, separados da forma que foram editados, a linha representada constitui uma estrada e está definida por pontos. Os pontos sobre a estrada estão ligados por linhas apenas para uma melhor visualização; o mesmo vale para o polígono que representa para esse conjunto de dados uma área construída ou área morta.

FIGURA 5.5 - Pontos amostrados

Com os dados editados, o próximo passo é criar o modelo, que se inicia com a geração da malha triangular sobre os pontos amostrados. Para isso utiliza-se o comando "TIN" do quadro de funções do módulo DTM. Todos os cálculos são feitos por esse comando e armazenados no diretório projeto com o nome específico do projeto.

A figura 5.6, traz a triangulação feita pelo programa sem as correções. Ele cria uma borda para a triangulação que é considerada como sendo os limites da amostra e a triangulação sugerida é baseada nesses limites, essa borda

(fronteira restrita) não pode ser sugerida pelo usuário. O primeiro limite de triangulação é dado pelo programa, isso pode ser considerado uma desvantagem frente aos programas que permitem que seja delimitado uma fronteira restrita para a amostra, entretanto o programa dispõe de um comando "DEL LINE" executado dentro do comando "TIN", com esse comando pode-se apagar as linhas consideradas desnecessárias e a triangulação é calculada novamente, e os novos limites serão considerados para triangulação final e para os demais cálculos.

FIGURA 5.6 - Primeira triangulação feita pelo programa DCA - DTM

As Figuras 5.7 e 5.8 mostram, para o detalhe indicado na Figura 5.6, a definição pelo usuário da nova fronteira de triangulação e a triangulação final definida.

FIGURA 5.7 - Detalhe do refinamento da triangulação para o programa DCA - DTM.

FIGURA 5.8 - Triangulação final do DCA - DTM

Desse modo, a partir do modelo criado pode-se fazer diversos cálculos. A aplicação mais freqüente é o traçado de curvas de nível, para essa amostra de pontos a representação em curvas de nível e a representação em bloco perspectivo (3D) estão apresentadas nas Figuras 5.9 e 5.11. Observa-se nessas figuras a representação das discontinuidades da superfície.

FIGURA 5.9 - Curvas de nível geradas pelo programa DCA-DTM

A Figura 5.10 apresenta o detalhe da figura 5.9, para melhor visualização visto que a figura acima foi impressa de forma ajustada não permitindo uma definição clara dessa parte da superfície modelada.

Figura 5.10 - Detalhe para a Figura 5.9.

FIGURA 5.11 - Vista em perspectiva do terreno modelado

Considera-se que para esse conjunto de dados os resultados são bastante satisfatórios, considerando principalmente a representação gráfica e o tempo de processamento. Para esse programa não foi verificado o limite de pontos que podem ser processados, essa informação não consta nos manuais do usuário.

•Resultados do programa LI - Countor para a primeira amostra de dados

As figuras seguintes foram geradas para os mesmos pontos usando o programa LI - Countor. A triangulação é feita delimitando a fronteira da amostra de dados, portanto, não há necessidade de refinamento.

O programa tem um limite de amostra para ser processado, sendo de no máximo 5000 pontos, o tempo de processamento para amostras pequenas, ou seja inferior a 1000 pontos pode ser considerado satisfatório. É executável no sistema operacional MS-DOS, não possui opções para a introdução de facilidades como por exemplo o uso de "mouse", todos os comandos devem ser executados via teclado. Os desenhos gerados pelo programa podem ser impressos diretamente do programa, com varias opções de impressoras e

traçadores gráficos, bem como editados no AutoCAD, com seus arquivos gerados nos formatos possíveis de intercâmbio.

FIGURA 5.12 - Triangulação do programa LI Countour.

FIGURA 5.13 - Curvas de nível do programa LI Countour

• Resultados do programa DCA - DTM para a segunda amostra de dados

Para este exemplo foram digitalizadas curvas de nível a partir de um mapa topográfico na escala 1:2000. Utilizou-se uma mesa digitalizadora e o programa AutoCAD para a obtenção desses dados. Devido ao grande volume de dados obtidos com todas as curvas do mapa, optou-se por digitalizar somente as curvas de 2 em 2m. Ao final obteve-se um arquivo de dados com aproximadamente 3MB somando 88.726 pontos digitalizados. (Figura 5.14)

O programa possui duas opções para modelagem, com dados a partir de pontos e dados de curvas, os dados de curvas também são posteriormente transformados num conjunto de pontos e pode-se até criar um modelo e comparar os resultados desse modelo com os dados originais.

Desse modo, ao optar que o modelo seja criado a partir de curvas ele transforma cada curva em "break-line", e triangula os pontos entre curvas, (ver detalhe da Figura 5.15).

Para dados digitalizados o programa possui um algoritmo de redução de dados que utiliza dois fatores para fazer os cálculos; um linear e outro angular, esses fatores removem os vértices considerados muito próximos um do outro. O cálculo do fator linear é baseado na diagonal máxima, isto é, a distância entre a menor e a maior coordenada. Para o fator angular os cálculos são baseados no ângulo de deflexão entre três pontos adjacentes, mais detalhes sobre o cálculo desses fatores ver guia de aplicação do programa, página 6-15.

Para esse conjunto de pontos os fatores sugeridos pelo programa reduziram de 88.726 pontos para 58.550 pontos, para gerar um modelo para esse número de pontos usando um computador 486 DX4, 16MB de memória ram, 100mhz de "clock" e um tempo de acesso máximo de 60 ns, o tempo de cálculo foi de aproximadamente 3,5 minutos. Para computadores de configuração de menor porte esse tempo pode chegar a 5 horas. Com isso constata-se que o limite maior aqui fica para as máquinas de processamento (computadores). Os arquivos criados para esse volume de dados são da ordem de 12MB, esse tamanho para arquivos gráficos dificulta a regeneração na tela de trabalho. Isso pode resolvido utilizando os aceleradores de tela ou ainda separar o desenho em níveis diferentes e deixar disponível na tela apenas os níveis que estão sendo usados.

Figura 5.14 - Mapa topográfico digitalizado com curvas de nível de 2 em 2m.

Figura 5.15 - Detalhe da triangulação das curvas de nível de 2 em 2m.

Figura 5.16 - Vista total da Triangulação para curvas de 10 em 10m.

Figura 5.17 - Vista em perspectiva do terreno, modelado para curvas de 10 em 10m.

6. Conclusões

Os modelos digitais de terrenos têm hoje vasta aplicação e já conquistaram o seu lugar junto à comunidade técnica que faz uso constante de mapas topográficos para elaboração de seus projetos. A resistência de alguns profissionais em adotar os resultados gerado com essa nova tecnologia, deve-se a falta de informações, que esclareça a viabilidade da técnica desses softwares.

É importante salientar, entretanto, que essa nova tecnologia não pode ser aplicada indiscriminadamente. Um fator importante a ser considerado na utilização de um DTM é o método de aquisição de dados. Se possível, adotar um método que possa assegurar a maior precisão possível, o uso de instrumentos eletrônicos, por exemplo, evitam que se cometam erros no processo de anotação e permitem que as discontinuidades do terreno sejam caracterizadas ainda no campo. Utilizando-se um instrumento eletrônico e um software de tratamento de dados facilita-se a edição dos dados que é outro fator que pode produzir erros.

Para escolher o modelo que vai ser utilizado deve-se ainda, tomar o cuidado de analisar o seu embasamento teórico, se o modelo é local ou global

se representa os seus valores fornecidos por interpolação ou aproximação e ainda quanto ao tipo de malha utilizada para representar o terreno. A maioria dos estudos convergem para os métodos locais de interpolação e ainda alguns que se apresentam na forma paramétrica porque permitem variações de trechos da curva sem variar os trechos já ajustados, como é o caso de interpolação usando B-Spline.

A malha utilizada é frequentemente a malha irregular triangular. Construída diretamente sobre os pontos amostrados, essa malha caracteriza melhor o terreno levantado principalmente porque as descontinuidades são representadas diretamente, e ainda, sendo a malha construída diretamente sobre os pontos levantados não há necessidade de interpolação ou aproximação dos valores nos nós da malha como é o caso das malhas regulares.

O cuidado com a precisão dos dados de entrada e os procedimentos para o tratamento desses dados estão diretamente ligados ao produto final do DTM. Deve-se, por isso, para cada aplicação, tratar o problema de maneira diferenciada.

O desenvolvimento e utilização dos softwares para modelagem digital de terrenos, está diretamente ligado com o desenvolvimento da informática. Os softwares atuais permitem a inclusão de rotinas de cálculo sofisticadas e maior flexibilidade nos formatos de armazenamento e saída de dados de informações topográficas.

Embora o DTM seja uma teoria de uso corrente, existem ainda alguns estudos necessários para torná-lo mais eficiente. A pesquisa bibliográfica mostrou, por exemplo, que muito pouco foi estudado sobre a precisão dos modelos. Essa poderia ser uma idéia para o prosseguimento desse trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- AdCADD Civil / Survey, (1993). DTM Application Guide. Softdesk, Release 11.0, Inc. 7 Liberty Hill Road, Henniker, NH 03242
- ARTHUR, D. W. G. (1973). Interpolation of a function of many variables, II. Photogrammetric Engineering, p. 261-266.
- BARTELS, R. H.; BEATTY, J.C.; BARSKY, B.A. (1985). An introduction to the use of spline in computer graphics. Siggraph'85, San Francisco, Vol. 1 e 2.
- BETHEL, J. S.; MIKHAIL, E. M. (sd). Terrain surface approximation and on-line quality assessment. Commission III, WG III-3, p. 23-32.
- BHATTACHARYYA, B. K. (1969). Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data. Geophysics, vol. 34, n. 3, p. 402-423.
- BLITZKOW, D.; LEICK, A. (1992). Posicionamento geodésico NAVSTAR/GPS, Apostila de curso da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.
- BOSMAN, R.E.; ECKHART, D.; KUBIK, K. (sd). Delft - A program system for surface approximation.
- BOWYER, A. (1981). Computing Dirichlet tessellations. The Computer Journal, vol. 24, n. 2, p. 162-166.
- BRASSEL, K. E.; REIF, D. (1979). A procedure to generate Thiessen polygons. Geographical Analysis, vol. 11, n. 3, p. 289-303.
- BURROUGHS, P.A. (1988). Principles of geographical information systems for land resources assessment. Clarendon Press - Oxford, England. Cap. 8, p. 147-166.
- CAMPOS, I. O.; SILVA, I. (1993). O Estado da Arte da Modelagem Digital de Terrenos, e suas principais aplicações em Engenharia. In: XVI Congresso Brasileiro de Cartografia, Rio de Janeiro, outubro de 1993. p.632-640.
- CARTER, R. J. (1988). Digital representations of topographic surfaces. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, vol. 54, n. 11, p. 1577 - 1580.

- CATLOW, D. R. (1986). The multi-disciplinary applications of DEM's. In: Auto Carto London, International Conference on The Acquisition, Management and presentation of Spatial data. p. 447-475.
- CINTRA, J. P. (1985). Contribuição ao estudo de representação de superfície com o auxílio de computadores. Tese de doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.
- _____. (1988). Modelagem Digital de Terrenos, (Automação da topografia). Apostila de curso, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, departamento de Tranpostes.
- CLARKE, A. L.; GRUEN, A.; LOON, J.C. (sd). A contour-specific interpolation for DEM generation. The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1958 Neil Avenue, Columbus, Ohio 43210, p. 68-81.
- CHRISTENSEN, A. H. J. (s.n.t.). Fitting a triangulation to contour lines. GEONEX Corporation, 7836 Muirfield Court, POTOMAC, Maryland 20854, 6 p.
- DOUGLAS, D. H.; PEUCKER, T. K. (1973). Algorithms for the Reduction of the Number of Points required to represent a digitized line or its caricature. The Canadian Cartographer, vol. 10, n. 2, p. 112-122.
- DUFFOUR, H. M. (1984). Models Numeriques de Terrain Recherché Automatique de Points et Lignes Remarquables. In: Congrès International de l'Association Française de Topographie, Décembre 84.
- EBNER, H.; STRUNZ, G.; COLOMINA, I. (1991). Block triangulation with aerial and space imagery using DTM as control information. In: Baltimore 1991, ACSM-ASPRS, Annual Convention.
- _____; REISS, P. (1984). Experience with height interpolation by finite elements. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, vol. 50, n. 2, p. 177-182.
- ELFICK, M. H. (1979). Contouring by use of a triangular Mesh. The Cartographic Journal, vol. 16, n. 1, p. 24-29.
- FAINTICH, M. B. (1984). State of the art and future needs for development of digital terrain models. In: ISPRS, Rio de Janeiro, XVth Congress, Commission III, p. 180-191.

- FELGUEIRAS, C. A. (1987). Desenvolvimento de um sistema de modelagem digital de terrenos para microcomputadores. Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada. INPE. 243 p., São José dos Campos.
- FILHO, H. A. G.; CRÓSTA, A. P. (1994). Diguitação de mapas: Um roteiro. Fator GIS - Revista de Geoprocessamento, Janeiro - Março, nº 4.
- FREY, W. H.; FIELD, D. A. (1991). Mesh Relaxation: A New Technique for Improving Triangulation's. International Journal for Numerical Methods in engineering, vol. 31, p. 1121-1133.
- GREEN, P. J.; SIBISON, R. (1977). Computing Dirichlet Tessellation's in the Plane. The Computer Journal, vol. 21, n. 2, p. 168-173.
- GRIST, M. W., (1988). Terrain and surface Modeling Systems: Theory an Practice. Photogrammetric Record, 12(72), p. 747-779
- HARD, R. L. (1972), Geodetic Applications of Multiquadric Analysis, AVN 10/1972, p. 398-406.
- _____. (1971). Multiquadric equations of topography an other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research. vol. 76, n. 8, p. 1905-1915.
- HAYES, J. G.; HALLYDAY, J. (1972). The least-squares fitting of cubic spline surfaces to general data sets. Presented at the SIAM-SIGNUM Fall Meeting, Austin, Texas, October, 1972, p. 89-103.
- JANCAITIS, J. R.; JUNKINS, J. L. (1973). Modeling Irregular surfaces. Photogrammetric Engineering and Remoted Sensing, p. 413-420.
- JUNIOR, M. M.; MENEGUETTE, A. A. C. (1990). Modelagem Numérica do Terreno: Aquisição, Processamento e Aplicação. In: XIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Aguas de Lindóia, São Paulo, 14 p.
- KENNIE, T. J. M.; McLAREN, R. A. (1988). Modeling for digital terrain and landscape visualization. Photogrammetric Record, 12(72), p. 711-745.
- _____.; PETRIE, G. (1990). Engineering surveying technology. Blackie Glasgow and London. First published, Part C.
- KÖSTLI, A.; WILD, E. (s.n.t.). A digital Elevation Model Featuring Varying Grid Size.

- KRAUS, K.; MIKHAIL, E. M. (1972). Linear Least-squares interpolation. In: Twelfth Congress of the International Society of Photogrammetry, Ottawa, Canada, July 23-August 5, Presented Paper, Commission III, 14 p.
- LAM, N. S., (1983), Spatial Interpolation Methods: A Review. The American Cartographer, Vol. 10, N.2, p. 124-149.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. (1981). Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. Mathematics of Computation, vol. 37, n. 155, p. 141-158.
- LEBERL, F. (1973). Interpolation in square grid DTM. The ITC Journal, n° 5, p. 756 - 807.
- _____. (1974). Photogrammetric Interpolation. In: XIV Congress, Federation Internationale des Geometres, Washington, D.C., September 7-16.
- _____. (1982). Raster scanning for operational digitizing of graphical data. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing. p. 615 - 627.
- LAWSON, C. L.; (1977). Software for C^1 Surfaces Interpolation. Mathematical Software III, Ed. John R. Rice, Academic Press, N.Y., p. 161 - 194.
- LEE, D.T.; SCHACHTER, B. J. (1980). Two Algorithms for constructing a Delaunay Triangulation. International Journal of computer and Information Sciences, vol. 9, n. 3. p 219 - 242.
- LEWIS, B. A.; ROBINSON, J. S. (1976). Triangulation of planar regions with applications. The Computer Journal, vol. 21, n. 4, p. 324-332.
- MAKAROVIC, B., (1976), A digital Terrain Model System. The ITC Journal 1976-1, p. 57-83.
- _____. (s.n.t.). Progressive Sampling for Digital Terrain Models.
- MCCULLAGH, M. J. (1981). Creation of smooth contours over irregularly distributed data using local surface patches. Geographical Analysis, (Ohio State University Press), vol. 13, n. 1. p. 51-63.
- _____; ROSS, C. G. (1980). Delaunay triangulation of random data set for isarithmic mapping. The cartographic Journal, vol. 17, n. 2, p. 93-99.

- McKENNA, D.G. (1985)(s.l.). The Inward Spiral Method: An Improved TIN Generation Technique and data Structure for Land Planning Applications.
- _____. (s.n.t.), The Inward Spiral Method: An improved TIN Generation Technique and Data Structure for Land Planning Applications.
- MINGHIN, R. (1980). Modelagem de objetos por splines. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Faculdade de Engenharia Elétrica, Campinas, São Paulo.
- MIRANTE, A.; WEINGARTEN, N. (1982). The Radial Sweep Algorithm for Constructing Triangulated Irregular Networks. p. 11-21.
- OPHEIM, H. (1982). Fast Reduction of a Digitized Curve. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Geo-processing, vol.2, p. 33-40.
- PEIXOTO, R. S. S. L. (1992). Operação de mesas digitalizadoras, Publicação interna do Laboratório de Mensuração do Departamento de Transportes da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, São Paulo, 10p.
- PETINATTI, F. (1983). Modelamento digital e representação gráfica de superfícies. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.
- REINHARDT, W.; HOBLER, R. (s.n.t.). Interactive Generation of Digital Terrain Models.
- ROGERS, D.F.; ADAMS, J. A. (1990). Mathematical elements for computer graphics, Second Edition, McGRAW - HILL, Cap. 4 e 5.
- SCHUT, G. H. (1976). Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models. The canadian Surveyor, Vol. 30, n. 3, p. 389-412.
- _____. (1974). Two interpolation methods. Photogrammetric Engineering. p. 1447-1453.
- SCHWARZ, K. P.; SIDERIS, M. G. (1993). Heights and GPS. GPS World, Fevereiro 1993, p. 50-56.
- SILVA, I. (1990). Méthodologie pour le Lissage et le Filtrage des Données Altimétriques Dérivées de la Corrélation D'Images, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Département de Génie Rural, 204 p.

- SILVA, I. (1993). Instrumentos Topográficos Modernos: Topografia Moderna. In: XVI Congresso Brasileiro de Cartografia, Rio de Janeiro, p. 252-260.
- STEIDLER, F.; ZUMOFEN, G.; HAITZMANN, H. (1984). "CIP" A program package for interpolation and plotting of digital height models. In: ISPRS Congress, Rio de Janeiro, Commission III, p. 1040 - 1049.
- _____.; DUPONT, C.; FUNCKE, G.; VUATTOUX, C.; WYATT, A. (1986). Digital Terrain Models and their applications. Wild Heerbrugg (Switzerland), Boletim Técnico, 10 p.
- TARVYDAS, A. (1983). Terrain Approximation by Triangular Facets. In: Auto-Carto Six, Sixth International Symposium on Automated Cartography, 16-21, Ottawa, Ontario, Canada.
- YAKOWITZ, S.; SZDAROVSKY, F. (1986). An introduction to a numerical computation. Macmillan Publishing Company. 383 p.
- YOELI, R. L. (1986), Computer Executed Production of a Regular Grid of High Point from Digital Contours. The American Cartographer, Vol. 13, n.3, p. 219-229.
- WATSON, G. S. (1984). Smoothing an interpolation by kiging and with splines. Mathematical Geology, vol. 16, n. 6, p. 601-615.
- WATSON, D.F. (1981). Computing the n - dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polygon. The Computer Journal, vol. 24, n. 2, p. 167-172.
- WOLF, P. R. (1983). Elements of Photogrammetry, with air photo interpretation and remote sensing. Second Edition, McGRAW - HILL, cap. 12.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; MORGAN, K. (1983), Finite Elements an Approximation. A Wiley-Interscience publication. University of Wales, Swansea, United Kingdom. 328 p.