

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Escola de Engenharia de São Carlos**  
**Departamento de Transportes**

**Solos não saturados e drenagem de  
camadas próximas da superfície de  
vias e pavimentos**

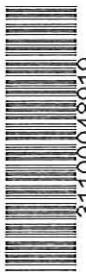
Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

**EXEMPLAR REVISADO**

Data de entrada no Serviço... 04/08/04

Ass.: 

DEDALUS - Acervo - EESC



Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, Área de Pós-graduação em Transportes.



**Orientador: Professor Titular Doutor José Bernardes Felex**

**São Carlos - SP**

**2004**

**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **BERNARDO LUIZ COSTAS FUMIÓ**

Tese defendida e julgada em 28-05-2004 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Titular **JOSÉ BERNARDES FELEX** (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Associado **JOSÉ LEOMAR FERNANDES JUNIOR**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **VLADIMIR COELHO**  
(UNESP/Campus de Bauru)

APROVADO

Prof. Dr. **LUIZ ROBERTO CAVICCHIA**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Prof. Associado. **BENEDITO DE SOUZA BUENO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Associado **JOSÉ LEOMAR FERNANDES JUNIOR**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Transportes

Profa. Titular **MARIA DO CARMO QALIJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

## AGRADECIMENTOS

---

Ao Professor Doutor José Bernardes Felex, pela orientação deste trabalho e pelo estímulo;

À UNILINS – Centro Universitário de Lins e à FPTE - Fundação Paulista de Tecnologia e Educação, pelo auxílio financeiro;

À Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pela oportunidade;

Aos professores, funcionários e amigos do Departamento de Transportes da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, pela acolhida e convivência;

Ao professor Dagoberto Dario Mori;

Aos que me auxiliaram na execução deste trabalho.

## **DEDICATÓRIA**

---

**Aos meus pais, Fumio e Arlinda**

**À minha esposa Dani  
e aos meus filhos Bernardo e Veridiana**

## SUMÁRIO

---

<i>AGRADECIMENTOS</i> .....	<i>i</i>
<i>DEDICATÓRIA</i> .....	<i>ii</i>
<i>SUMÁRIO</i> .....	<i>iii</i>
<i>LISTA DE FIGURAS</i> .....	<i>v</i>
<i>LISTA DE TABELAS</i> .....	<i>viii</i>
<i>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</i> .....	<i>x</i>
<i>LISTA DE SÍMBOLOS</i> .....	<i>xi</i>
<i>RESUMO</i> .....	<i>xiv</i>
<i>ABSTRACT</i> .....	<i>xv</i>
1 <i>Introdução</i> .....	<i>1</i>
2 <i>Da bibliografia sobre drenagem de estrutura de vias</i> .....	<i>6</i>
2.1     Evolução do estudo de movimento de água em solos não saturados .....	<i>14</i>
3 <i>Uso de propriedades de solos não saturados</i> .....	<i>16</i>
3.1     Propriedades de solos não saturados.....	<i>16</i>
3.2     Movimento de água em sólidos não saturados.....	<i>23</i>
4 <i>Elementos finitos e estudo de movimento de água</i> .....	<i>33</i>
4.1     Elementos de volume em formato de tetraedro e estimativa de vazão .....	<i>43</i>

4.2	A simulação com uso dos elementos de volume de sólido.....	48
5	<i>Estudo de caso</i> .....	59
5.1	Os solos e a geometria usados para simulação.....	59
5.2	Preparação de dados e simulação do movimento de água.....	63
6	<i>Testes de hipóteses sobre os dados obtidos</i> .....	80
6.1	Um pouco sobre a teoria da decisão estatística.....	80
6.2	O teste da diferença de médias para vazões percolada e infiltrada.....	85
7	<i>Conclusões e sugestões</i> .....	91
8	<i>Referências bibliográficas</i> .....	94

## LISTA DE FIGURAS

---

<i>Figura 1 – O formato de rodovia (adaptado de DNER, 1981).....</i>	3
<i>Figura 2 – Seção transversal de rodovia (adaptado de DNER, 1981).....</i>	3
<i>Figura 3 - Efeitos de carga dinâmica em base de pavimento, CEDERGREN (1974).....</i>	7
<i>Figura 4 - Ação de tráfego e infiltração de água em rodovia, DYNATEST (2002 ) .....</i>	7
<i>Figura 5 – Água e componentes de pavimento, CEDERGREN (1974).....</i>	8
<i>Figura 6 – Pavimento e saída de água de subleito sem drenos laterais, CEDERGREN (1974).....</i>	8
<i>Figura 7 – Pavimento e saída de água de subleito com drenos laterais, CEDERGREN (1974) .....</i>	8
<i>Figura 8 - Limites de região para movimento de água em pavimento, CEDERGREN (1967, 1974) .....</i>	9
<i>Figura 9 – Áreas de movimento de água em sólidos não saturados e região de saturação de solos.....</i>	12
<i>Figura 10 - Altura de saturação para relações entre condutividade hidráulica saturada de solos para drenar e a drenar, CEDERGREN (1974), página 74.....</i>	12
<i>Figura 11 – Um padrão para rede de percolação de água, de CEDERGREN, 1974, página 73.....</i>	13
<i>Figura 12 - Rede de fluxo por infiltração de água em pavimento, CEDERGREN (1974 ), página 82. ....</i>	13
<i>Figura 13 - Função condutividade hidráulica para argilas, BRUCH (1993).....</i>	14
<i>Figura 14 - Geometria e componentes de vazios em solos ou agregados.....</i>	16
<i>Figura 15 – Ilustração de interações entre a água e as partículas de solos ou agregados .....</i>	17
<i>Figura 16 - Elemento de volume e parcelas de vazios em sólido poroso.....</i>	17
<i>Figura 17 – Ilustração sobre a tensão de succão.....</i>	18
<i>Figura 18 - Funil de placa porosa para estudo sobre sucção (REICHARDT, 1985) .....</i>	19
<i>Figura 19 – Esquema de câmara de pressão para estudos sobre sucção (SMEC, 1985) .....</i>	19
<i>Figura 20 – Montagem de câmara de pressão para estudos sobre sucção (SMEC, 1985).....</i>	20
<i>Figura 21 - Curva de retenção segundo FREDLUND (1993) .....</i>	22
<i>Figura 22 – Planos e direções para estudo de movimento de água em meios porosos .....</i>	24
<i>Figura 23 – Valores de cargas em dois pontos na direção de movimento de água .....</i>	24
<i>Figura 24 – Visão no espaço, coordenadas e pressões aplicadas em elemento triangular .....</i>	28

<i>Figura 25 – Elementos trapezoidais e pressões aplicadas em um paralelepípedo .....</i>	28
<i>Figura 26 – Notação para vazões em um elemento triangular .....</i>	31
<i>Figura 27 – Ilustração da divisão de um sólido em elementos finitos .....</i>	34
<i>Figura 28 – Nós e ações sobre elementos finitos. ....</i>	35
<i>Figura 29 – Esquema de equilíbrio de forças no interior de um sólido.....</i>	36
<i>Figura 30 – Sistema de coordenadas absoluto e local.....</i>	36
<i>Figura 31 – Projeção de região de sólido e problema a descrever para estudo com elementos finitos ...</i>	37
<i>Figura 32 – Propostas de malhas para estudo com uso de elementos finitos.....</i>	38
<i>Figura 33 – Descontinuidade inaceitável em malha ao descrever região de sólido.....</i>	38
<i>Figura 34 - Descontinuidade inaceitável em malha, que pode levar a dificuldade na descrição de ação de variáveis sobre processo físico.....</i>	38
<i>Figura 35 – Argila e parcela de água que se move misturada com ar.....</i>	40
<i>Figura 36 – Concentração de água e ar acima da linha freática e movimento de água .....</i>	41
<i>Figura 37 – Compatibilidade entre nós e elementos em malhas.....</i>	41
<i>Figura 38 – Condição de contorno e “movimento de água zero na superfície” .....</i>	42
<i>Figura 39 - Sistemas de coordenadas absoluto e local para preparar dados para processamento, elemento finito triangular.....</i>	48
<i>Figura 40 - Sistemas de coordenadas absoluto e local para preparar dados para processamento, elemento finito retangular.....</i>	49
<i>Figura 41 - Estimativa de <math>m_w</math> a partir da curva de retenção de umidade de solo .....</i>	57
<i>Figura 42 - Exemplo de seção de controle para estimativa de vazão .....</i>	58
<i>Figura 43 - Curvas granulométricas de solos de São Carlos, SOTO (1999).....</i>	60
<i>Figura 44 – Curva de retenção por secagem e umedecimento da amostra de solo à profundidade de 0,30m, SOTO (1999) .....</i>	60
<i>Figura 45 – Curvas de retenção de água e função condutividade hidráulica da amostra de solo à profundidade de 0,30m, SOTO (1999) .....</i>	61
<i>Figura 46 – Distribuição média de tamanho de grãos de solo de Saskatoon, BRUNCH (1993).....</i>	61
<i>Figura 47 – Função condutividade hidráulica de solo do tipo argiloso, BRUCH (1993) .....</i>	62
<i>Figura 48 – Aterro hipotético para estudos sobre vazões em função de condutividade hidráulica.....</i>	62
<i>Figura 49 – Ilustração de malha para obter redes de percolação e linhas de fluxo para estimativa de vazões usando o método dos elementos finitos.....</i>	64
<i>Figura 50 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo arenoso de características obtidas de SOTO, 1999, não incluindo a vazão acima da linha freática.....</i>	66
<i>Figura 51 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo arenoso de características obtidas de SOTO, 1999, incluindo a vazão acima da linha freática.....</i>	66
<i>Figura 52 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo argiloso de características obtidas de BRUNCH (1993), não incluindo a vazão acima da linha freática.....</i>	67
<i>Figura 53 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo argiloso de características obtidas de BRUNCH (1993), incluindo a vazão acima da linha freática.....</i>	67

---

Figura 54 – Vazão percolada em $10^{-5} \text{m}^3/\text{s/m}$ em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	76
Figura 55 - Vazão percolada em $10^{-5} \text{m}^3/\text{s/m}$ em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	76
Figura 56 - Vazão percolada em $10^{-8} \text{m}^3/\text{s/m}$ em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43 .....	77
Figura 57 - Vazão percolada em $10^{-8} \text{m}^3/\text{s/m}$ em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43 .....	77
Figura 58 - Vazão infiltrada ( $10^{-6} \text{m/s}$ ) em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	78
Figura 59 - Vazão infiltrada ( $10^{-6} \text{m/s}$ ) em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	78
Figura 60 - Vazão infiltrada em $10^{-9} \text{m/s}$ , em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	79
Figura 61 - Vazão infiltrada em $10^{-9} \text{m/s}$ , em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43.....	79
Figura 62 - Região crítica do teste t , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “>” (cauda à direita) .....	82
Figura 63 - Região crítica do teste t , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “<” (teste com cauda à esquerda).....	83
Figura 64 - Região crítica do teste t , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “≠” (duas caudas).....	83
Figura 65 – Confiança estatística em diferenças entre vazões (percoladas, ou infiltradas) para solos do tipo argiloso .....	88
Figura 66 – Confiança estatística em diferenças entre vazões percoladas para solos do tipo arenoso, taludes de aterro 1:1 e 1:2 .....	88
Figura 67 - Confiança estatística em diferenças entre vazões (percoladas, ou infiltradas) para solos do tipo arenoso, taludes 1:1 ou 1:2.....	89
Figura 68 - Confiança estatística em diferenças entre vazões infiltradas para solos do tipo arenoso.....	90

## LISTA DE TABELAS

---

<i>Tabela 1 - Rodovias implantadas no Brasil (DNER, 2000) .....</i>	2
<i>Tabela 2 – Origem de conceitos usados no Brasil para estudos sobre movimento de água em estrutura de vias e camadas próximas à superfície .....</i>	11
<i>Tabela 3 – Exemplos de tipos de análise para uso do método dos elementos finitos.....</i>	34
<i>Tabela 4 – Forma de elementos nas malhas e classificação de comportamento durante as estimativas de medidas sobre variáveis características de campo .....</i>	39
<i>Tabela 5 - Funções de interpolação para elementos finitos triangulares .....</i>	50
<i>Tabela 6 - Funções de interpolação para elementos finitos trapezoidais .....</i>	50
<i>Tabela 7 - Derivadas das funções para interpolação para elementos finitos trapezoidais .....</i>	53
<i>Tabela 8 - Derivadas das funções para interpolação para elementos finitos triangulares .....</i>	54
<i>Tabela 9 – Nós e pesos para ponderação, elemento finito trapezoidal, descrito por quatro funções.....</i>	56
<i>Tabela 10 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito triangular, descrito por uma função .....</i>	56
<i>Tabela 11 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito triangular, descrito por três funções de variáveis de campo .....</i>	56
<i>Tabela 12 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito trapezoidal, descrito por nove.....</i>	56
<i>Tabela 13 – Hipóteses adotadas para estudo de caso.....</i>	65
<i>Tabela 14 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso saturado, talude de declividade 1 na vertical, por 2 na horizontal .....</i>	68
<i>Tabela 15 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal .....</i>	69
<i>Tabela 16 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal .....</i>	70
<i>Tabela 17 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal .....</i>	71
<i>Tabela 18 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal.....</i>	72

<i>Tabela 19 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal.....</i>	73
<i>Tabela 20 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal.....</i>	74
<i>Tabela 21 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal.....</i>	75
<i>Tabela 22 - Estimativa de médias de diferenças de médias e desvios padrão de vazões percoladas , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso.....</i>	86
<i>Tabela 23 - Estimativa de intervalos de confiança de vazões percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso .....</i>	87

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

<b>AASHTO</b>	<i>American Association of State Highway and Transportation Officials</i>
<b>ABNT</b>	<i>Associação Brasileira de Normas Técnicas</i>
<b>ASCE</b>	<i>American Society of Civil Engineers</i>
<b>DNER</b>	Departamento Nacional de Estradas de Rodagem
<b>FHWA</b>	<i>Federal Highway and Waterways Administration</i>
<b>HRB</b>	<i>Highway Research Board</i>
<b>TRB</b>	<i>Transportation Research Board</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$\alpha$  = nível de significância estatística

$A$  = área da seção de fluxo

$a_1, a_2$  e  $a_3$  = coeficientes de combinação linear utilizada para estimativa de pressões nos nós

**A** = matriz dos coeficientes  $a_1, a_2, a_3$

$\alpha$  = ângulo que define a rotação de eixos

**B<sub>e</sub>** = matriz para operar sobre coeficientes de estimativa de vazão

**C** = matriz de condutividade hidráulica

$\Delta h_j$  = diferença de carga entre duas iterações sucessivas

$\Delta H$  = diferença de cargas entre duas seções observadas

$D$  = metade da área do elemento triangular

$\sigma$  = desvio padrão da população, definido no teste de hipóteses

$\partial$  = derivada de uma função em relação a uma variável

$\Delta L$  = distância entre seções observadas

**D<sub>e</sub>** = matriz auxiliar

$D_f$  = espaçamento entre drenos

$\overline{\Delta \mu}$  = média de diferenças entre as médias na amostragem, definida no teste de hipóteses

$D_r$  = altura de aterro mais altura da camada de solo

$\Delta t$  = incremento de tempo

**E** = matriz dos gradientes hidráulicos

**E<sub>e</sub>** = matriz de gradiente hidráulico sobre um elemento

$\xi$  = número aleatório entre 0 e 1

$F_e$  = função de variação de concentração de água

$\Phi$  = energia potencial total na fase não saturada de material

$g$  = aceleração da gravidade

$g_r$  = componente da aceleração da gravidade na direção do eixo r

$g_s$  = componente da aceleração da gravidade na direção do eixo s

$\gamma_w$  = peso específico da água

**G** = matriz auxiliar

$H$  = carga total

$h$  = projeção horizontal de segmento para definição de inclinação de talude

**H** = vetor de cargas totais nos nós

$\mathbf{H}_0$  = carga total no começo do incremento de tempo

$\mathbf{H}_1$  = carga total no fim do incremento de tempo

**H<sub>e</sub>** = matriz dos coeficientes  $n_{ij}$  do elemento triangular e

$H_f$  = altura de um aterro

$H_0$  = hipótese nula sobre os dados obtidos, definida no teste de hipóteses

- $H_1$  = hipótese alternativa sobre os dados obtidos, definida no teste de hipóteses  
 $h_{sat}$  = altura da saturação na camada de solo para drenar  
 $i, j$ , e  $k$  = nós do elemento triangular  
 $i_x$  = gradiente hidráulico na direção x  
 $i_y$  = gradiente hidráulico na direção y  
 $\mathbf{J}$  = matriz Jacobiana  
 $k$  = coeficiente de permeabilidade para solo saturado  
 $k$  = condutividade hidráulica para solo não saturado  
 $\mathbf{K}_e$  = matriz permeabilidade para o elemento e  
 $k_f$  = condutividade hidráulica do material para drenar  
 $\mathbf{K}$  = matriz de condutividades hidráulicas  
 $k_m$  = condutividade hidráulica do material a drenar  
 $k_r$  = condutividade hidráulica na direção do eixo r  
 $k_s$  = condutividade hidráulica na direção do eixo s  
 $k_\Theta$  = condutividade hidráulica para meio poroso não saturado  
 $k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, k_{yx}$  = elementos da matriz permeabilidade do elemento e  
 $l$  = distância entre seções para controle de movimento de água, definida no elemento genérico trapezoidal  
 $L$  = dimensão comprimento, em análise dimensional  
 $m$  = nó interno do elemento trapezoidal  
 $\mu_{ar}$  = pressão no ar dos vazios do solo não saturado  
 $\mu_w$  = pressão na água dos vazios do solo não saturado  
 $\bar{x}$  = média da amostra, definida no teste de hipóteses  
 $\mu$  = média da população, definida no teste de hipóteses  
 $\mathbf{M}$  = matriz de massa  
 $M$  = massa, em análise dimensional  
 $m_{wi}$  = variação do teor de umidade por volume pela pressão de água nos vazios  
 $n$  = número de elementos de amostra  
 $\langle N \rangle$  = vetor de função para transformação de coordenadas locais em coordenadas absolutas ou vetor da função de interpolação  
 $n_{11}, n_{12}, n_{13}$  = termos de expressão que define o valor da área do elemento triangular  
 $N_{1,r}, N_{2,r}$  = derivadas de funções de interpolação para elementos finitos triangulares  
 $n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{31}, n_{32}, n_{33}$  = expressões que definem a diferença entre coordenadas dos nós no elemento triangular  
 $p$  = pressão no líquido  
 $\mathbf{P}$  = vetor das pressões nos nós  $i, j, k$  de um elemento triangular  
 $\mathbf{P}_e$  = expressão da combinação linear de estimativa da pressão no elemento e  
 $p_i, p_j$ , e  $p_k$  = pressões nos nós do elemento triangular  
 $q$  = vazão percolada  
 $\mathbf{Q}_0$  = vazão no nó, no começo do incremento de tempo  
 $\mathbf{Q}_1$  = vazão no nó, no fim do incremento de tempo  
 $q_r$  = vazão na direção do eixo r

$q_s$  = vazão na direção do eixo s

$q_v$  = vazão infiltrada, por unidade de área

$\bar{Q}$  = vazão affluente

$\mathbf{Q}$  = matriz de vazões, definida na expressão para controle do movimento de água

$q_x$  = vazão na direção do eixo x

$Q_{x_i}, Q_{x_j}, Q_{x_k}, Q_{y_i}, Q_{y_j}, Q_{y_k}$  = volumes de água no elemento triangular e

$q_y$  = vazão na direção do eixo y

$q_z$  = vazão na direção do eixo z

$\mathbf{R}$  = matriz de rotação

$\mathbf{R}^T$  = matriz transposta da matriz de rotação

$R$  = resíduo para controle do processo de iteração no método dos elementos finitos

$r, s$  = par de coordenadas de posição de um ponto, em relação a um sistema local

$\rho_w$  = massa específica da água

$s$  = desvio padrão da amostra, definido no teste de hipóteses

$s_d$  = desvio padrão das diferenças entre médias nas amostras, definido no teste de hipóteses

$\sum |\Delta h_j|$  = somatória das diferenças de carga hidráulica total no processo de iteração do

método dos elementos finitos

$\sigma$  = pressão total no volume observado

$s^2$  = variância da amostra, definido no teste de hipóteses

$t$  = variável tempo

$t = t$  de Student

$\Theta$  = teor de umidade por unidade de volume

$\Theta_s'$  = teor de umidade por unidade de volume para o material saturado, durante o processo de umedecimento, definido na curva de retenção de água

$\Theta_s$  = teor de umidade por unidade de volume para o material saturado, durante o processo de secagem, definido na curva de retenção de água

$\Theta_s - \Theta_s'$  = volume residual de ar, definido na curva de retenção de água

$T$  = tempo, em análise dimensional

$v$  = projeção vertical de definição de segmento para definição de inclinação de talude

$v$  = velocidade de descarga da Lei de Darcy

$v_x$  = velocidade de descarga na direção x

$v_y$  = velocidade de descarga na direção y

$W$  = largura de infiltração de água na superfície superior de aterro

$W_{1j}, W_{2j}$  = pesos para ponderação

$\mathbf{X}$  = vetor das coordenadas x do elemento triangular e

$x, y$  = par de coordenadas de posição de um ponto, em relação a um sistema absoluto

$x_i, x_j, x_k$  = abcissas dos nós do elemento triangular

$y$  = altura do elemento em relação a um plano de controle, na equação da energia

$\mathbf{Y}$  = vetor das coordenadas y dos nós do elemento triangular e

$z$  = altura de um ponto em relação a uma referência, ou carga hidráulica

## RESUMO

---

FUMIO, Bernardo Luiz Costas Fumió (2004). *Solos não saturados e drenagem de pavimentos e camadas próximas da superfície*. São Carlos, 2004, 113 páginas. Tese de doutoramento – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho relata resultados de estudos sobre drenagem de camadas próximas à superfície que visam contribuir para aperfeiçoar o entendimento de comportamento da fase não saturada de solos, e disseminar o uso de elementos finitos para estudo de movimento de água em componentes que constituem a plataforma de vias. Descreveram-se e comentaram-se tópicos sobre as relações entre o formato de vias e a drenagem na estrutura de vias, processos para estimativas de vazões percoladas e infiltradas em solos por métodos simplificados, tópicos sobre a evolução do estudo de movimento de água e estimativa de medidas sobre propriedades de solos não saturados. Para estudo de caso se adotou a simulação com elementos de volume de sólido e método dos elementos finitos para com dados publicados sobre propriedades de solo arenoso ou argiloso obter dados para testes estatísticos que ressaltassem as diferenças entre as vazões estimadas com uso da condutividade hidráulica constante e de solo saturado, e a condutividade que incluísse o solo não saturado. Os dados usados foram obtidos por simulação, que estimou vazões percoladas e infiltradas, que foram submetidos a teste de hipóteses sobre diferenças de médias. O objetivo proposto foi atingido discutindo resultados de análise sobre a significância estatística de diferenças entre vazões percoladas.

Palavras-chave: drenagem de pavimentos; materiais não saturados; percolação; elementos finitos.

## ABSTRACT

---

FUMIO, Bernardo Luiz Costas Fumió (2004). *Non saturated soils, pavement and near surface drainage*. São Carlos, 2004, 113 páginas.. Doctor Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work reports the conclusions of studies on draining water from surface layers of a way structure that aim to contribute to the knowledge on the behavior of non saturated ground, and to spread the use of the finite element technique for studies on the water movement inside components that constitute these platforms. It was discussed: an introduction on highways in Brazil, topics that had motivated the studies, methods and processes for treatment of the non saturated phase of the water movement. It was described and commented topics on the relations between the format of ways and the draining in their structure, processes to estimate the percolation and infiltration outflows using simplified methods, topics on the evolution of the study on movement of water and estimating measures on non saturated ground properties. For case study it was adopted the simulation using elements of solid volume and the finite element technique obtained from bibliographical data on saturated and non saturated sand and clay properties, including the hydraulic conductivity. The tested data had been gotten by simulation, and had been submitted to the test of hypotheses on differences of percolated water volumes. The main objective was reached discussing statistical results on the significance of the differences among percolated volume of water.

Keywords: pavement drainage; non saturated materials; percolation; finite element technique

## 1 Introdução

---

“Saturação” é nome aqui reservado para indicar que os vazios de um solo estão totalmente preenchidos por água. “Movimento de água em material não saturado” é nome aqui reservado para o fluxo de líquido pelos vazios do solo quando o teor de umidade por volume é menor que o de saturação. O líquido e os gases contidos nos vazios de sólido não saturado se movimentam pela influência de forças potenciais que agem sobre o sólido e esses componentes dos vazios.

Este trabalho relata resultados de estudos sobre drenagem de camadas próximas à superfície que visam contribuir para melhorar o entendimento de comportamento da fase não saturada de solos e disseminar o uso de técnicas recentes para estudo de movimento de água em componentes que constituem a plataforma de vias.

Espera-se contribuir para melhorar o entendimento e aperfeiçoar a informação sobre o comportamento de solos e agregados, processos de escolha e dimensionamento de equipamentos para drenagem, por se incluir a fase não saturada de materiais em análises e orientar medidas que aumentem a vida útil de pavimentos e infra-estrutura de vias.

A questão a ser respondida é: adotar parâmetros que governam o movimento de água em solos saturados, condutividade hidráulica constante, e comportamento de solo tipo arenoso para explicar o movimento de água em componentes da estrutura de vias é correto? Isso encaminha o roteiro de trabalho para análise e argumentação sobre resultados de estudo de casos, identificação e processamento de dados sobre as teorias que regem o movimento de água na fase não saturada de sólidos porosos, e busca de meios para testar hipóteses sobre as respostas à questão formulada.

Os investimentos para construir e manter rodovias no Brasil somam bilhões de dólares ao longo de décadas, e há muito que fazer. A inclusão adequada de equipamentos para retirada da água de pavimento e camadas próximas à superfície pode aumentar a vida útil de pavimento, reduzir custos de manutenção, e contribuir para conforto e segurança de movimento de veículo.

Conhecer o comportamento de componentes de via é importante porque, por exemplo, no Brasil, são estimados 1.700.000km de rodovias, conforme resumido na Tabela 1 (DNER, 2000). As rodovias com pavimentos revestidos são aproximadamente 10% deste total, 34%, de responsabilidade federal, 46% estaduais e 10% municipais.

E, análise sobre dados publicados em DNER (1999) mostra que rodovias brasileiras em “mau estado de conservação” provocaram: acréscimo de 58% no consumo de combustível, 38% no custo na manutenção de veículos, dobrou-se tempos em viagem, e aumentaram em 50% os acidentes. A conservação de rodovias sob jurisdição da União gerou um dispêndio de R\$1,7 bilhão, por acréscimo a custos operacionais e perda de 78 mil vidas humanas.

Tabela 1 - Rodovias implantadas no Brasil (DNER, 2000)

UNIDADE DA FEDERAÇÃO	quilômetros	UNIDADE DA FEDERAÇÃO	quilômetros
REGIÃO NORTE	103.096	REGIÃO SUDESTE	512.496
Rondônia	22.433	Minas Gerais	264.971
Acre	5.399	Espírito Santo	30.225
Amazonas	6.200	Rio de Janeiro	22.229
Roraima	5.284	São Paulo	195.071
Para	34.575		
Amapá	2.138	REGIÃO SUL	476.122
Tocantins	27.067	Paraná	261.319
		Santa Catarina	62.498
REGIÃO NORDESTE	405.390	Rio Grande do Sul	152.305
Maranhão	53.247		
Piauí	56.804	REGIÃO CENTRO-OESTE	227.825
Ceará	50.374	Mato Grosso do Sul	54.144
Rio Grande do Norte	27.428	Mato Grosso	84.555
Paraíba	33.764	Goiás	87.660
Pernambuco	41.658	Distrito Federal	1.466
Alagoas	12.932		
Sergipe	9.411		
Bahia	119.772		
TOTAL: 1.724.929 quilômetros			

Formato é a forma, levando-se em conta as dimensões. As vias têm, no espaço, o formato de sólidos (Figura 1). Dentre as funções do formato das vias para transporte destacam-se: a) fornecer a superfície para movimento de veículos; b) contribuir para que o movimento de veículos seja governado pelos menores esforços decorrentes das leis da física aplicadas ao movimento; c) contribuir para que o movimento de veículos seja confortável, seguro e econômico, coerente com as expectativas e necessidades de motoristas e passageiros.

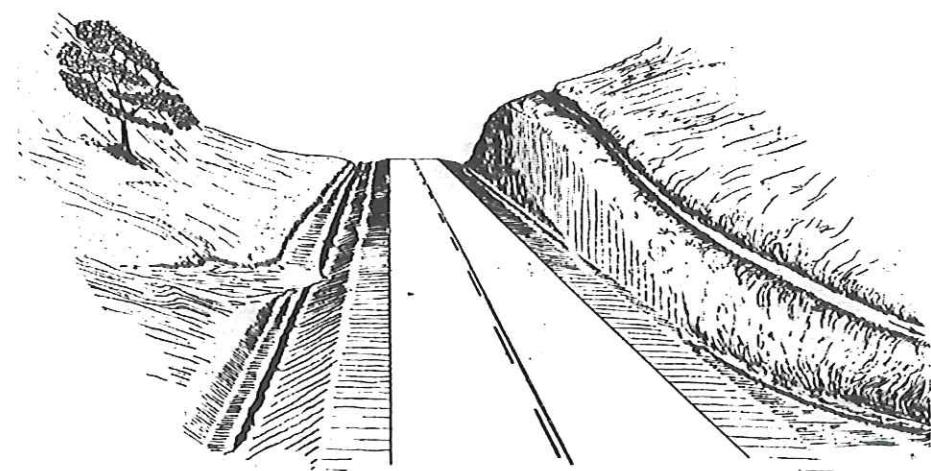


Figura 1 – O formato de rodovia (adaptado de DNER, 1981)

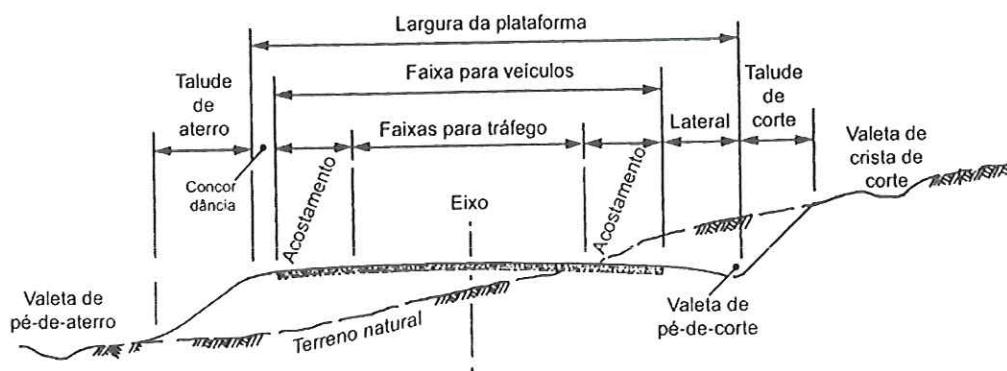


Figura 2 – Seção transversal de rodovia (adaptado de DNER, 1981)

Seção transversal de via é o formato da seção perpendicular à direção de movimento de veículos. Seção longitudinal, idem na direção do movimento de veículos. O formato da seção transversal de vias repete-se ao longo de comprimentos muito maiores que suas larguras, porque vias têm a função de

prover transporte entre locais que podem ser distantes milhares de quilômetros. A Figura 2 ilustra a seção transversal de rodovia.

A escolha do formato de componentes de seção transversal pode partir de padrões recomendados por órgãos responsáveis por via, ou entidades de pesquisa, combinando-se informação sobre características de formato de terrenos, formato, larguras e declividades de elementos de seção transversal, conforto e segurança para o movimento de veículos ou pedestres.

Nas vias, *o formato de toda a seção transversal participa da condução de água*. Mas, os elementos específicos para drenar contribuem para assegurar o controle do fluxo de águas nos pavimentos e outros componentes da via. Drenar água das faixas de tráfego, acostamentos e áreas laterais às rodovias envolve a coleta, a condução, a remoção, e a deposição de água do corpo da via para fora da faixa de domínio.

É indispensável porém, comentar que o movimento de água nos vazios de solos é um assunto presente, e tem grande volume de ocorrências nas ações de construção e manutenção de vias. Para exemplo, nos anos 2002 e 2003, apenas no entorno da cidade de São Carlos, estado de São Paulo, Brasil, em 142 quilômetros de rodovias em manutenção:

- a) Foram necessárias tentativas para diminuir custos de manutenção, executando mais de 250 quilômetros de trincheiras para drenar laterais de vias principais visando controlar umidade e movimento de água em solos. O dado foi estimado por levantamento sobre ordens de serviço emitidas por concessionárias de rodovias como a Centroviás e a Triângulo do Sol;
- b) Verificou-se que, em média, há três ocorrências por quilômetro da necessidade de obra complementar para drenagem de pavimento. Isto permite sugerir que o número de análises sobre a condução de água em solos não saturados é grande, e por isto justificaria a divulgação de padrões, ou seja, casos pré-processados para auxiliar engenheiros envolvidos com tal assunto, padronizados para os solos típicos da região.

Por isso, diferente da Mecânica dos Solos aplicada aos solos saturados e às obras usuais da Engenharia Civil, o técnico envolvido com meios para transporte recorre a soluções padrões, dados pré-processados e simplificações teóricas. E, a maioria dessas soluções data da década dos 40 ou 50, e foram apenas ajustadas até a presente data. E, há que se insistir em ressaltar que a diferença entre o estudo de drenagem subterrânea em grandes obras de terra, como as barragens, e a construção de vias de transporte e obras assemelhadas é principalmente a dimensão longitudinal, o número e o volume de pequenas obras que se devem analisar de maneira quase repetitiva ao longo de quilômetros e mais quilômetros de vias.

## 2 Da bibliografia sobre drenagem de estrutura de vias

---

Há poucos registros sobre a capacidade de controlar a concentração e o movimento de água em componentes de estrutura de vias, típicos do Brasil. Aqui este tópico estará dentre os objetivos de estudo porque CEDERGREN (1974) sugere que a infiltração de água em componentes de vias produz degradação, e comenta que, para corrigir danos que poderiam ser evitados com boa drenagem subterrânea, uma correção pode custar mais de 10 vezes o valor de elementos para controlar a concentração de água.

A estrutura de vias é construída com materiais cujas propriedades variam na presença de água, que pode saturar vazios e transmitir pressões provenientes das cargas aplicadas pelos veículos. Também, pressões transmitidas pela água podem levar à expulsão deste líquido e de partículas finas responsáveis pela estabilidade destes elementos de transmissão e suporte das cargas de veículos. A repetição desse processo aumentará deformações na estrutura de via, e causará danos à superfície de movimento de veículos. A superfície de via é submetida ao rigor de tráfego, intemperismo e ação de água.

Nos métodos usuais para dimensionamento de infra-estrutura de vias, que definem as espessuras das diferentes camadas de seus componentes, pouco se incluem de efeitos decorrentes da presença de água. Aí se esquece de alterações em materiais, como erosão entre revestimento e base. A alteração das características dos materiais aumenta com a presença de água nos vazios. E, isto reforça a idéia de que infra-estrutura bem drenada terá maior vida útil.

Ou seja, a água que penetra no revestimento de pavimentos, por exemplo, Figura 3, base, sub-base e subleito pode contribuir para redução de vida útil da via. Caso não seja controlado o efeito da água, se compromete a segurança e o conforto de movimento de veículos. Também, se prejudica a capacidade da estrutura de via em resistir a esforços impostos pelo tráfego. Em pavimentos

revestidos com concreto betuminoso, por exemplo, os agentes que provocam esta perda são ações de pressões neutras e perda de resistência de bases, sub-bases e subleitos. Pressões na água podem ser suficientes para provocar a saída de líquidos e finos pelas trincas de pavimento.

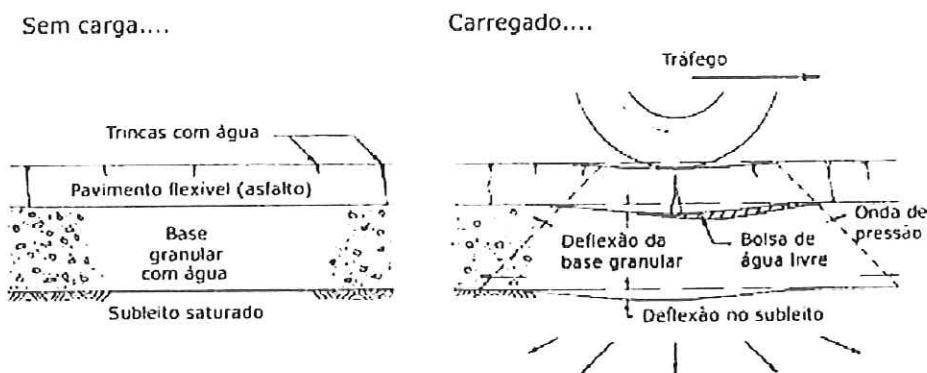


Figura 3 - Efeitos de carga dinâmica em base de pavimento, CEDERGREN (1974)

No Século 19, já era consenso entre técnicos que drenagem de componentes de pavimento e camadas próximas à superfície contribui para ampliar a durabilidade e facilitar a manutenção de vias. Retirar água e controlar a umidade em regiões e camadas próximas à superfície de vias é uma necessidade conhecida desde primeiras experiências para construção de vias. Ver, por exemplo a Figura 4.



Figura 4 - Ação de tráfego e infiltração de água em rodovia, DYNATEST (2002 )

A capacidade de drenagem de camadas do pavimento, aterros ou materiais do entorno e a pequena condutividade hidráulica pode tornar lenta a saída de água. E, provocar a saturação temporária de solos, e inundar pavimentos. As Figura 5, Figura 6 e Figura 7 ilustram o que aqui se expõe. Em particular,

Figura 6 e Figura 7 ilustram a forma típica de executar a drenagem de pavimentos na construção de rodovias e aeroportos.

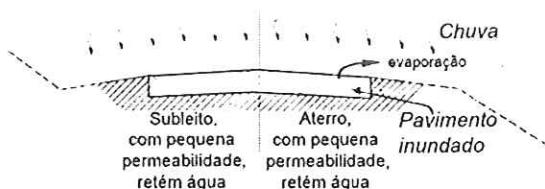


Figura 5 – Água e componentes de pavimento, CEDERGREN (1974)

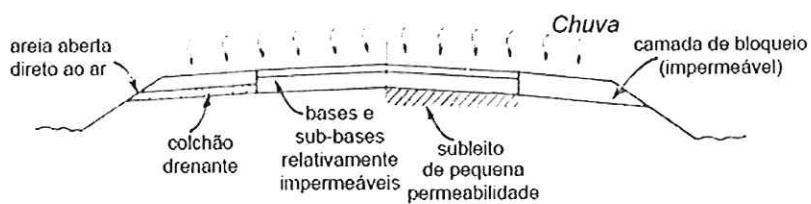


Figura 6 – Pavimento e saída de água de subleito sem drenos laterais, CEDERGREN (1974)

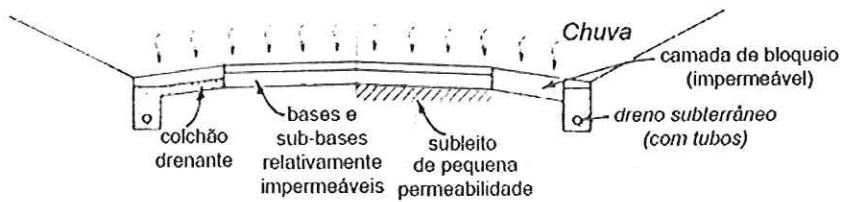


Figura 7 – Pavimento e saída de água de subleito com drenos laterais, CEDERGREN (1974)

A compactação de componentes de vias para obter a resistência adequada diminui a capacidade de movimento de água, e altera o comportamento do movimento de água aumentando as diferenças entre propriedades deste material nas direções horizontal e vertical. Solos compactados têm condutividade hidráulica que pode ser menor que  $10^{-3} \text{ cm/s}$ .

Para relatar resultados de estudos de “pré-processamento” de soluções para estimativa de características de movimento de água em componentes de infra-estrutura de vias e regiões próximas à superfície, a contribuição mais importante foi o exposto em CEDERGREN (1967, 1974), “Seepage, Drainage and Flow Nets”, e “Drainage of Highway and Airfield Pavements”. Nestes trabalhos, são expostos resultados práticos de estudos e pré-processamento de casos que se tornaram padrões para solução de problemas sobre a percolação em vias de transporte.

CEDERGREN (1967, 1974) contém relatos de produto de análise sobre investigações em campo por diversos órgãos dos Estados Unidos da América, e fizeram disseminar a afirmativa de que a infiltração de água de chuva é uma fonte de água que interfere nos componentes de pavimento e obras de terra. Em prefácio, foi dito, CEDERGREN (1967): "Em mais de 30 anos de experiência com rodovias, aeroportos e barragens, no United States Army Corps of Engineers, no California Division of Highways e no California Department of Water Resources, e como Engenheiro Consultor, concluiu-se que a análise e o controle de percolação de água geram importantes questões a serem respondidas pelos engenheiros civis".

O que CEDERGREN (1967) disseminou foram resultados de estudos sobre redes de fluxo em seções transversais, e os propôs como processo genérico de solução para as equações de movimento de água em meio poroso.

Em síntese, a maioria das soluções reduziu-se a usar nomogramas para obter graficamente as estimativas de vazões e velocidades de fluxo. Isso foi efetuado adotando casos particulares de geometria para o domínio da ação da carga hidráulica e quatro condições de contorno: duas linhas equipotenciais e as duas linhas de fluxo delimitando a região onde ocorreria saturação de vazios entre as partículas por onde se movimentaria a água. Também, os solos foram tratados como não coesivos, ou seja, propriedades de agregados inertes, ou areias. A Figura 8 ilustra limites de região de movimento de água em um pavimento exemplo. Ao analisar, não se pode esquecer que essa região, por hipótese, contém materiais cujo grau de saturação é cem por cento.

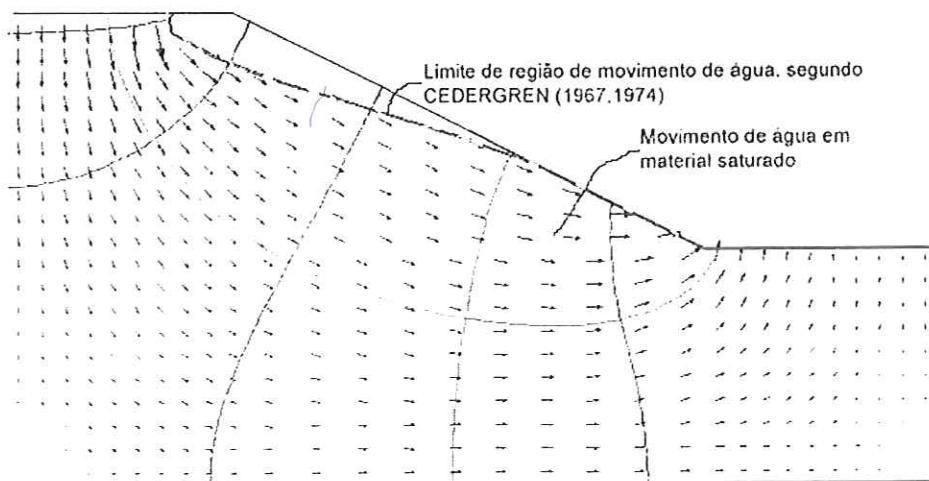


Figura 8 - Limites de região para movimento de água em pavimento, CEDERGREN (1967, 1974)

O Relatório FHWA-TS-80-224, MOULTON (1980), foi publicado com o título de "Highway Subdrainage Design". Ao exposto em CEDERGREN (1967, 1974) acrescentaram-se novos dados para uso em estudos sobre drenagem para pavimento. Por expor mais de vinte e três tipos de resultados de estudos padrão, MOULTON (1980) foi adotado nos Estados Unidos como "manual" recomendado para orientar projetos.

Também em MOULTON (1980), a estimativa de características de percolação de água de chuva pelas camadas de pavimento recorreu a nomogramas semelhantes ao exposto em CEDERGREN (1974), e por consequência o movimento de água é estudado como uma função de características de materiais saturados. E, dentre as hipóteses expostas em CEDERGREN (1967, 1974) se adotou o fato de que a condutividade hidráulica seria igual em todas as direções e coincidiria com a de solos saturados, hipótese que também se adotou neste trabalho.

Verificando o especificado em RIDGEWAY (1982), CHRISTOPHER e MCGUFFEY (1997, 2000), publicações do "National Cooperative Highway Research Program" - NCHRP, obtém-se afirmativas de que os processos para manuseio de informação sobre percolação de água, em estrutura e camadas próximas a este componente da via, utilizam conceitos propostos por CEDERGREN (1967, 1974).

Ou seja, considerando a dependência que o meio técnico da construção e manutenção de vias tem das sugestões do "Transportation Research Board", provavelmente a instituição que mais publica informação sobre construção e manutenção de vias no mundo, pode-se afirmar que métodos e processos para tratamento da percolação em componentes de pavimentos mantêm-se conforme o proposto por CEDERGREN (1967, 1974). É a disseminação de modelos e nomogramas padrões, condutividade hidráulica constante e função de características de solos saturados.

Por fim, para obter dados, e identificar os conceitos usados no Brasil, foram entrevistados (julho 2003) engenheiros que participaram de projetos e obras, especificados conforme lista contida na Tabela 2.

**Tabela 2 – Origem de conceitos usados no Brasil para estudos sobre movimento de água em estrutura de vias e camadas próximas à superfície**

Obra	Número de entrevistados	Obra	Número de entrevistados
Rodovia dos Imigrantes	3	Rodovia dos Imigrantes, pista descendente	3
Rodovia dos Bandeirantes	4	Anchieta (Marginal Santos)	4
Transamazônica (Campina Grande)	6	Rodovia D. Pedro	3
Washington Luis (duplicação)	3	Anhanguera (duplicação)	5

As respostas fornecidas pelos engenheiros listados na Tabela 2, sem exceção, contêm a informação que constata que cem por cento dos engenheiros envolvidos com aquelas obras, as mais importantes da estrutura de transporte do Brasil, usam o que CEDERGREN (1967, 1974) publicaram. Ou seja, poder-se-ia inferir que, também no Brasil, os engenheiros usam soluções padrão, dependentes da condutividade hidráulica de solos saturados e características de solos tipo arenoso, para estudar o movimento de água pelos vazios da estrutura de vias.

A afirmativa que se pode fazer, e que poderia parecer um pouco forte, é que a imagem que o engenheiro, envolvido no tratamento do movimento de água no pavimento e camadas que lhe são próximas, é a "não existência" de movimento de líquido além da região contida na condição de contorno disseminada por CEDERGREN (1967, 1974). A Figura 9 ilustra áreas onde ocorre o movimento de água em materiais não saturados nas vizinhanças de pavimentos.

Mas, é preciso insistir que a realidade é que acima dos limites fixados pelas condições de contorno sugeridas em CEDERGREN (1967, 1974) há alterações de concentração de água em vazios de solos, características de solos não saturados, que contribuem para movimentar água naquela região, Figura 9.

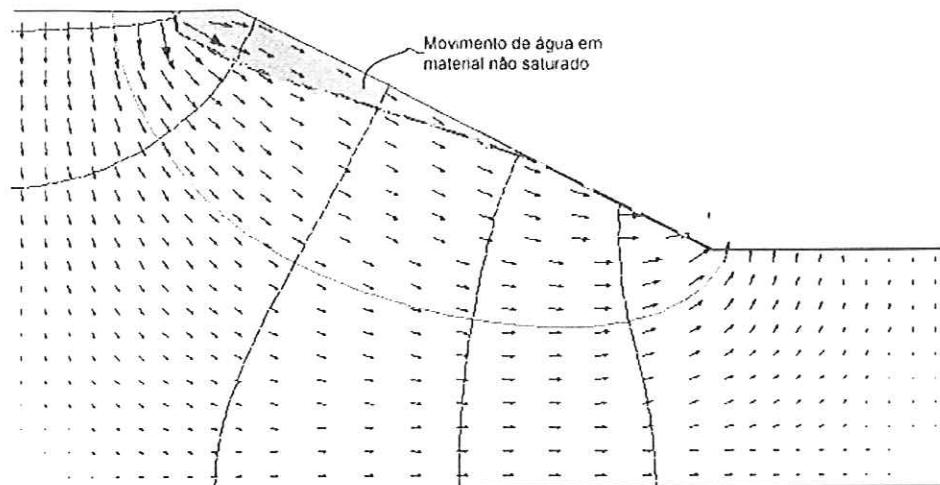


Figura 9 – Áreas de movimento de água em sólidos não saturados e região de saturação de solos

Para melhor ilustrar, em CEDERGREN (1974), página 73, por exemplo, expõe-se solução padrão para estimar vazão percolada associada à geometria de estrutura de via exposta na Figura 10, trincheiras para drenar de comprimento longitudinal muito maior do que o transversal, usualmente analisado por sua projeção num plano, uma seção tipo.

A notação adotada é:  $D_f$  = espaçamento entre drenos em trincheiras;  $h_{sat}$  = altura da saturação na camada de solo para drenar,  $k_f$  = condutividade hidráulica do material para drenar e  $k_m$  = condutividade hidráulica do material a drenar. A seção de análise de fluxo tem dimensões nas direções  $x$  e  $y$  iguais a  $D_f$  e  $0,5D_f$ .

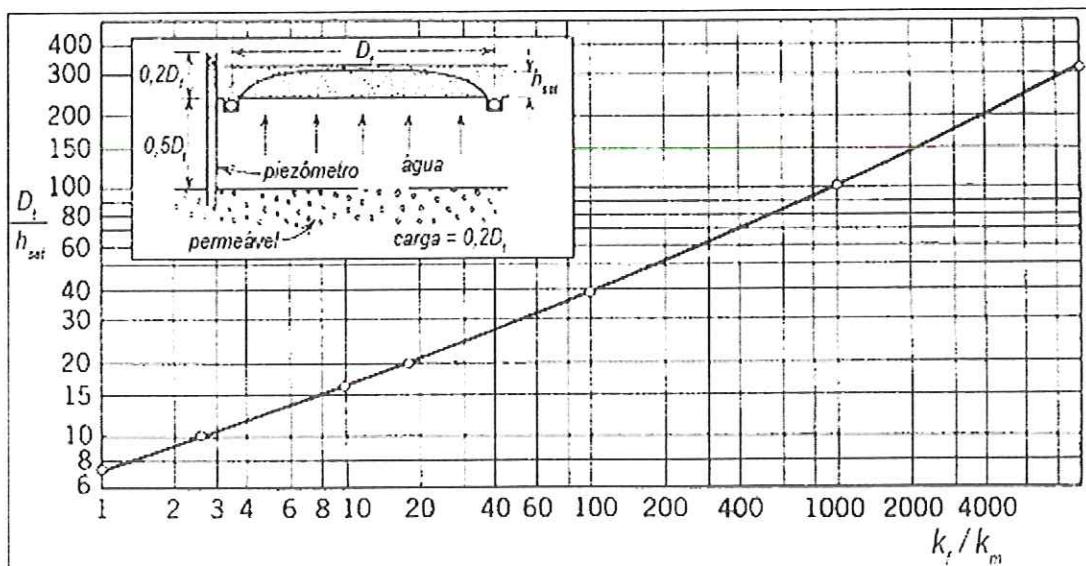


Figura 10 - Altura de saturação para relações entre condutividade hidráulica saturada de solos para drenar e a drenar, CEDERGREN (1974), página 74

Dentre os padrões de solução publicadas em CEDERGREN (1974), a Figura 11 orienta o traçado de redes de percolação associada às alturas de saturação expostas na Figura 10.

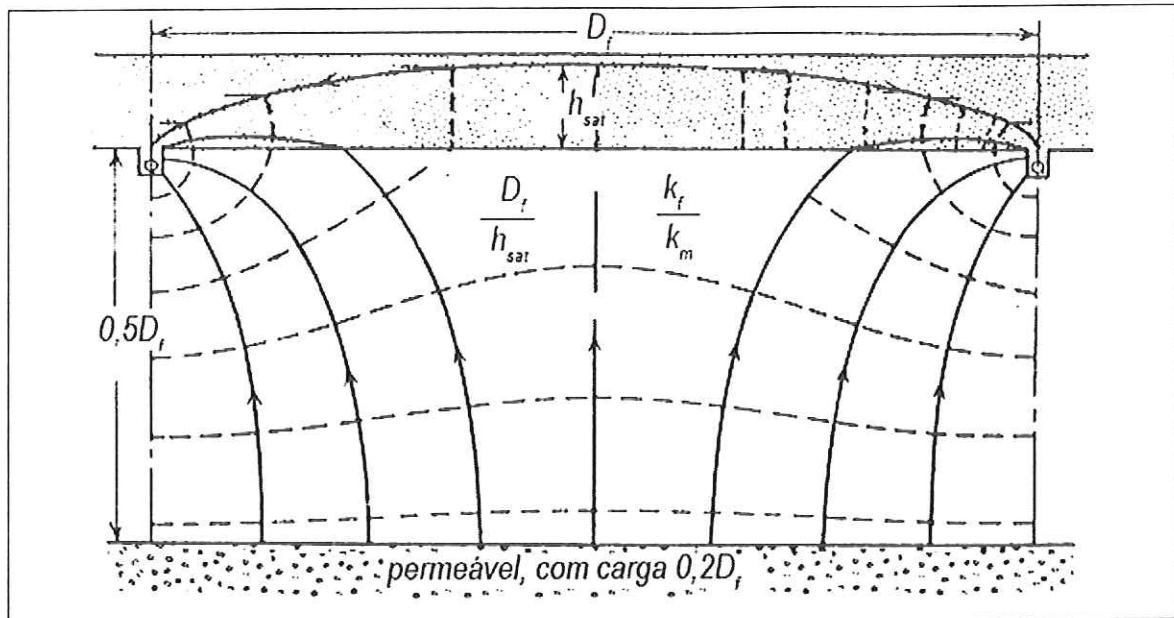


Figura 11 – Um padrão para rede de percolação de água, de CEDERGREN, 1974, página 73

A Figura 12 ilustra outra proposta típica de CEDERGREN (1974), um solo de condutividade hidráulica  $k = 10^{-5} \text{ cm/s}$ , valor que indica comportamento de argila para o solo a drenar. Ou seja, ressalta que solo, quando não saturado, poderia ter propriedades que são função do valor assumido pela condutividade hidráulica, uma expressão da ação de forças internas que define o movimento de água na fase não saturada desse sólido poroso.

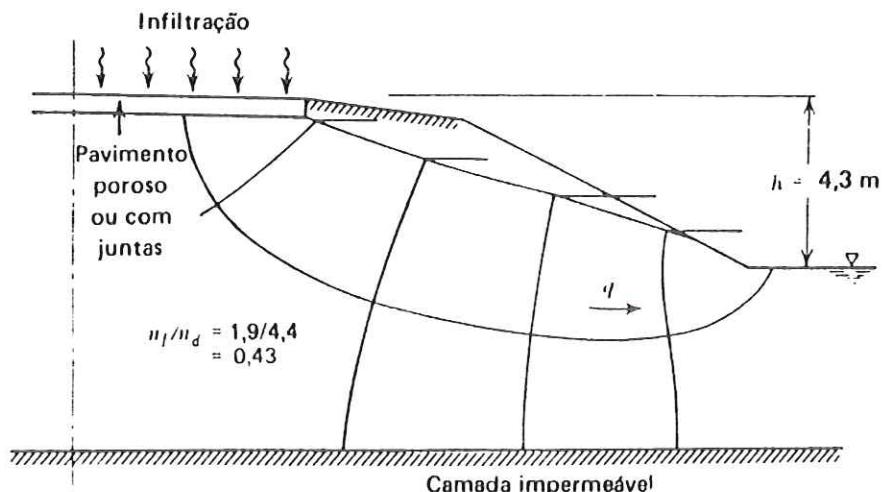


Figura 12 - Rede de fluxo por infiltração de água em pavimento, CEDERGREN (1974 ), página 82.

A Figura 13 ilustra o gráfico de uma função que relaciona a condutividade hidráulica com pressão externa para retirar água de solo, resultado de ensaios em laboratório publicado em BRUCH (1993), para solos com comportamento de argila, como é o caso do exemplo exposto em CEDERGREN (1974).

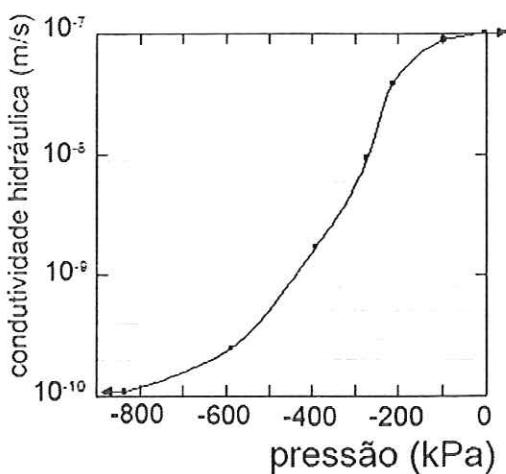


Figura 13 - Função condutividade hidráulica para argilas, BRUCH (1993)

A variação da condutividade hidráulica exposta na Figura 13, sugere respostas negativas à questão que se dispõe a responder neste trabalho, e deixa dúvidas sobre ser correto adotar parâmetros que governam o movimento de água em solos saturados, condutividade hidráulica constante, e comportamento de solo tipo arenoso para explicar o movimento de água em componentes da estrutura de vias. Resta efetuar experimentos que corroborem na verificação de solução à esta questão.

## 2.1 Evolução do estudo de movimento de água em solos não saturados

No século XX, a construção de obras de terra provocou a necessidade de obtenção de explicações sobre o comportamento de materiais porosos como solos, rochas e agregados ao conduzir água por percolação. Destacam-se os fatos publicados em TERZAGHI (1943), CASAGRANDE (1937, 1961), HAAR (1962), MUSKAT (1946), POLUBARINOVA-KOSHINA (1952).

A evolução da análise do movimento de água continuou. Hoje, 2004, há disponíveis métodos e processos para tratamento de fluxo em materiais não saturados que ampliam a capacidade de processamento de dados e obtenção

de soluções e explicações sobre o comportamento de componentes de pavimentos quando submetidos às ações do movimento de líquidos.

Uma síntese de evolução da capacidade de manuseio de dados e obtenção de explicações sobre o movimento de água em materiais não saturados contém destaques como BROOKS e COREY (1966), GREEN e COREY (1971), FELEX (1973), RICHARDS (1974), VAN GENUCHTEN (1980), FREDLUND e RAHARDJO (1993), RÖHM (1993), LIBARDI, (1995), SOTO (1999), COTÉ e KONRAD (2003), que contribuíram para o conhecimento de propriedades de materiais e suas relações com líquidos e gases, e disseminaram ensaios que ampliam o conhecimento sobre as medidas de características que podem ser usadas para estudos sobre o movimento de água.

Conceitos, métodos e processos necessários para obter estimativas sobre o movimento de água em solos são dependentes de métodos matemáticos e estatísticos sofisticados. A complexidade de raciocínios e teorias usadas é grande. Mas, vale ressaltar que, para uso generalizado na Mecânica dos Solos, foram desenvolvidos programas para computador que processam os dados e informações necessárias para estimativa de características do movimento de água na fase não saturada de materiais. Ou seja, há programas de computador que podem contribuir para resolver os problemas de escoamento de água nos solos não saturados. Por exemplo, consultar GEO-SLOPE (2002), que expõe o programa para processamento de dados em computador SEEPW, e publicou justificativas, métodos e conceitos teóricos que se adotou.

Mas, também, programas para processamento de dados em computador para uso no estudo de movimento de água na fase não saturada de solos têm preço alto e esse custo não é aceitável pelas empresas que contratam tais soluções. A licença desse tipo de programa é cara, e somam-se treinamento de técnicos para operação, computadores, assistência técnica de profissionais, etc.

Há que se admitir que, em um mercado para consultoria livre como é o brasileiro, pouco se arriscaria tal investimento, porque há muito pequena probabilidade de existirem serviços contínuos que justifiquem tal dispêndio. Mais uma vez tem-se que admitir o porquê do uso de exposto em CEDERGREN (1967, 1974) ser até então (2004) justificado com louvor pelos engenheiros brasileiros.

### 3 Uso de propriedades de solos não saturados

Dentre os problemas da Engenharia está verificar a propagação de solicitações provocadas por forças externas transmitidas às partículas que compõem um sólido. Nos vazios de solos ou agregados a presença das partículas do sólido, da água e de gases faz ocorrer um grande número de ações entre esses componentes de um arcabouço geométrico que vai governar o movimento de água. A Figura 14 ilustra a geometria e componentes de vazios em sólidos constituídos por solos ou agregados.

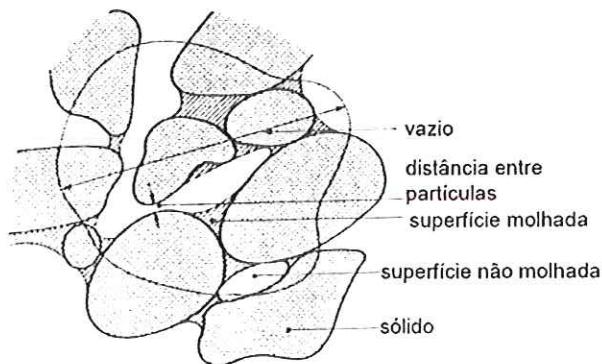
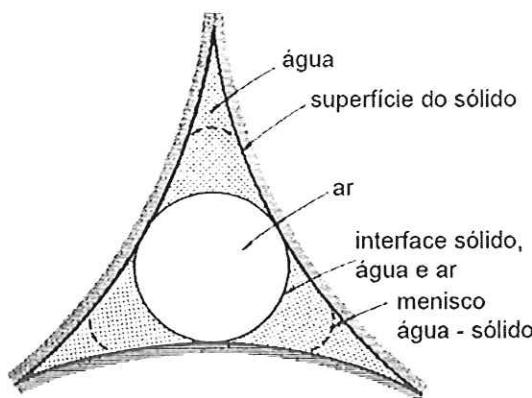


Figura 14 - Geometria e componentes de vazios em solos ou agregados

#### 3.1 Propriedades de solos não saturados

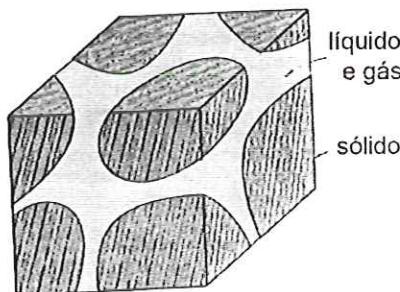
Discorre-se a seguir sobre propriedades físicas de solos, principalmente aquelas cujas medidas e entendimento podem contribuir para esclarecer as relações entre as concentrações e sua variação nos vazios que contêm água e ar. Isto se faz porque a melhoria do conhecimento de propriedades e comportamento das forças que agem sobre a água, seja na interface entre partículas, seja livre nos vazios, contribuiu para aperfeiçoar a informação sobre o movimento de água em fase não saturada de solos.

As forças que governam o movimento de água e gases provêm principalmente de ações entre as partículas do próprio sólido, do ar e da água. A Figura 15 ilustra um pouco das interações entre a água, o ar nos vazios e as partículas de solos ou agregados.



**Figura 15 – Ilustração de interações entre a água e as partículas de solos ou agregados**

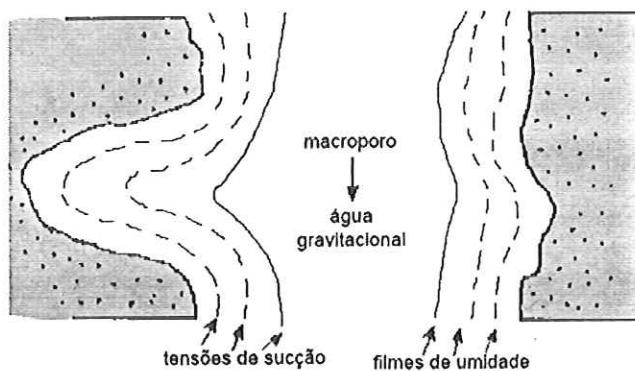
Ilustrar pode parecer simples. Medir e estimar as consequências de interações entre componentes de vazios de solos contém dificuldades típicas desse tipo de problema. As soluções começam ao definir:  $\Theta = \frac{V_w}{V}$ , com  $\Theta$  = teor de umidade por volume,  $V_w$  = volume de água nos vazios e  $V$  = volume total, ao teor de umidade por volume em um meio poroso. A Figura 16 ilustra um elemento de volume, com as parcelas de vazios em sólido poroso.



**Figura 16 - Elemento de volume e parcelas de vazios em sólido poroso**

O *potencial de pressão* ou *carga piezométrica* é uma expressão da energia contida na água, atribuída à pressão sobre o líquido, consequência da pressão atmosférica e gravidade, e adesão do líquido à superfície das partículas sólidas.

A ação entre a água e os sólidos da estrutura de materiais é conhecida como *tensão de sucção*, reflete a energia necessária para romper a adesão de água às superfícies hidrofilicas, atribuídas às ligações de hidrogênio e interações dipolares. A tensão de sucção e a pressão negativa que se opõem à saída de água de materiais são a mesma coisa, mas para formulações matemáticas sobre o movimento de água nos vazios têm sinais opostos, por refletir a adesão ou o potencial que provocou o movimento de água. A Figura 17 ilustra o que aqui se expôs.



**Figura 17 – Ilustração sobre a tensão de sucção**

Definiremos “tensão de sucção” como o acréscimo de pressão necessário para movimentar um volume de água unitário do arcabouço sólido de um material. Segundo REICHARDT (1985), os equipamentos de laboratório mais usuais para estudo da tensão de sucção são os funis com placa porosa (Figura 18) e as câmaras de pressão (Figura 19).

O funil com placa porosa é equipamento utilizado para estimar tensões de sucção de materiais não muito ávidos por água, provocam tensões máximas de retenção de 70kPa, porque nesse equipamento a pedra porosa pode estar sujeita à cavitação, ou a ações da pressão com que o ar flui. A Figura 18 ilustra o funil com placa porosa.

O “funil com placa porosa” contém duas câmaras, uma de ar e outra de água separada por uma pedra porosa. A tensão de sucção é acionada com a saída de água de um recipiente abaixo da placa porosa. Na Figura 18 ilustra-se a aplicação de tensão de sucção à amostra de solo solicitada por pressão de uma coluna de água, (REICHARDT, 1985).

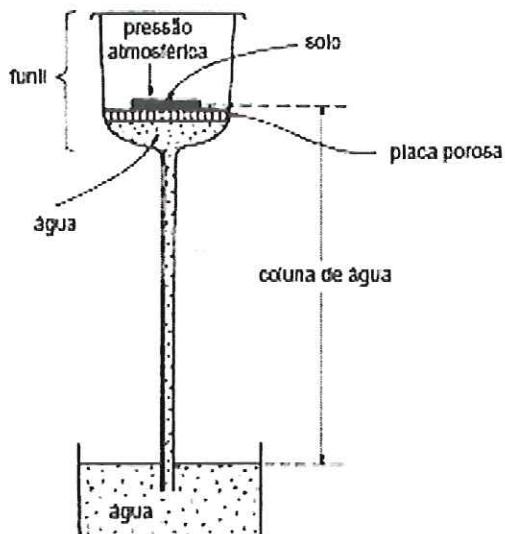


Figura 18 - Funil de placa porosa para estudo sobre sucção (REICHARDT, 1985)

Câmaras de pressão possuem uma placa porosa ou membrana de celulose resistente à pressão de entrada de ar, ver Figura 19 e Figura 20, SMEC (1985). Aparatos deste tipo permitem solicitar o solo com pressões que podem atingir  $1.500\text{kPa}$  (pedras cerâmicas), ou  $10.000\text{kPa}$  (membranas de celulose).

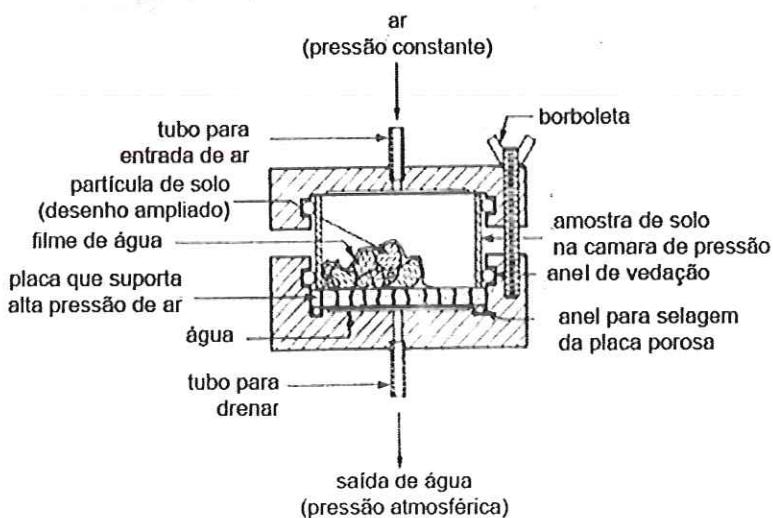


Figura 19 – Esquema de câmara de pressão para estudos sobre sucção (SMEC, 1985)

As ações para obter dados sobre o comportamento da sucção com uso de câmara de pressão consistem em colocar um corpo de prova em contato com a placa porosa saturada, aplicar pressões de ar, e obter o equilíbrio depois da eliminação parcial da água em cada estágio de pressão aplicada. Em cada estágio, o corpo de prova ensaiado é pesado para determinar o seu teor de umidade na condição de equilíbrio, e a pressão aí aplicada é igual à tensão de sucção do solo.

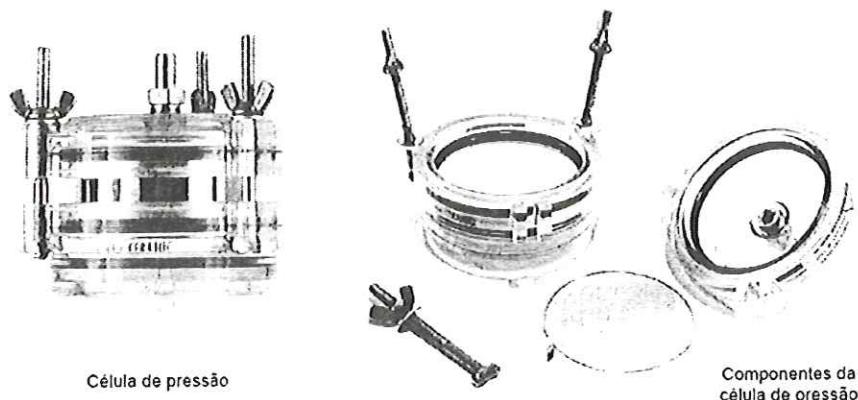


Figura 20 – Montagem de câmara de pressão para estudos sobre sucção (SMEC, 1985)

O arranjo e as cargas nas superfícies de partículas dos sólidos definem as características de retenção de água nos seus vazios. Solos do tipo arenoso, por exemplo, drenam rápido e retêm pouca água.

As moléculas de água são dipolares, e isto provoca forças de coesão internas ao líquido porque os átomos de hidrogênio de uma molécula são atraídos pelo oxigênio de outra, criando uma cadeia de ligações entre partículas. Em função desta interação a água tem alta tensão superficial, ponto de ebulição e capacidade calorífica. Também, as moléculas de água são atraídas por superfícies eletricamente carregadas, e esta atração provoca adesão da água a estas superfícies.

Um produto similar à adesão molecular e coesão de água é a capilaridade, a subida de água acima da superfície livre em canais de ligação nos vazios do solo, como se fossem pequenos tubos. Estas superfícies são chamadas de hidrofílicas, e geralmente contêm átomos de oxigênio. A altura da subida capilar depende do equilíbrio entre diversas forças. Uma força ascendente é exercida na água pela adesão entre moléculas e coesão.

A pressão da água em vazios de solos pode ser positiva ou negativa. A pressão positiva ocorre quando as moléculas de água são “empurradas” uma em direção à outra, geralmente por peso de coluna de água. Quando o solo não está saturado, as moléculas de água estão ligadas às partículas de solo por atração de superfície. A magnitude desta força é proporcional ao vácuo necessário para separar as moléculas de água destas superfícies. Quanto mais próxima a água estiver da superfície eletricamente carregada, maior será o

esforço necessário para retirá-la. Em outras palavras, a pressão negativa é grande.

A condutividade hidráulica varia em função do grau de saturação ou teor de umidade por volume. Experiências de RICHARDS (1931), CHILDS e COLLIS-GEORGE (1950), disseminaram a hipótese de que o movimento de água na fase não saturada pode ser regido pela generalização da Lei de Darcy, obtida usando expressões para a condutividade hidráulica, que não é constante.

Quando a água flui através dos vazios de materiais, uma parcela de água é retida dentro da estrutura do solo. A quantidade de água retida é função da pressão na água e das características da estrutura do solo. Para a análise sobre percolação de misturas de líquidos e gases, é conveniente especificar esta quantidade em relação ao volume total de sólidos. Esta relação é conhecida como teor de umidade por volume.

Para o sólido saturado, o teor de umidade por volume é igual à porosidade do solo, definida pela relação entre o volume de vazios e o volume total.

Em sólido saturado e em equilíbrio, a pressão nos vazios está próxima a zero e a pressão total é uma constante. Se a pressão nos vazios for positiva, a tensão efetiva entre partículas irá diminuir. Isto provoca aumento de volume e de teor de umidade. Se a pressão nos vazios se tornar negativa, o solo perde umidade. Há um limite onde solo não mais perde água ao diminuir a pressão nos vazios.

A inclinação da curva que representa a função teor de umidade,  $m_w$ , é a razão de variação da quantidade de água retida pelo solo em função da pressão nos vazios. Quando a pressão nos vazios é positiva,  $m_w$ , é equivalente ao coeficiente de compressibilidade definido no adensamento unidimensional,  $m_v$ . A inclinação desta curva para solos finos (argilas) é menor do que para solos grossos (areias).

Segundo FREDLUND et al. (1994), uma função que expressa o teor de umidade pode ser definida com estudo da relação entre tensão de sucção e capacidade de retenção da água nos poros de materiais. E por isso, também chamada “curva de retenção”.

A relação entre a tensão de succção e as variáveis dependentes de presença da água livre no solo (grau de saturação, teor de umidade por volume) é

importante para caracterizar materiais não saturados. A representação gráfica dessa relação é denominada “*curva de retenção da água no solo*”. A natureza dessa relação está diretamente associada à distribuição de tamanho de grão e mineralogia do solo, tipo de solo e densidade. A geometria dos poros, a magnitude e composição mineralógica da fração fina definem posição, forma, e inclinação desta curva.

Segundo FREDLUND (1993), a curva de retenção pode ser caracterizada conforme ilustrado na Figura 21, com a notação:  $\Theta_s$  = teor de umidade por unidade de volume para o material saturado, durante o processo de secagem,  $\Theta'_s$  = teor de umidade por unidade de volume para o material saturado, durante o processo de umedecimento,  $\Theta_s - \Theta'_s$  = volume residual de ar, pressão de entrada de ar ou tensão de sucção na entrada de ar,  $\Theta_r$  = teor de umidade por unidade de volume residual.

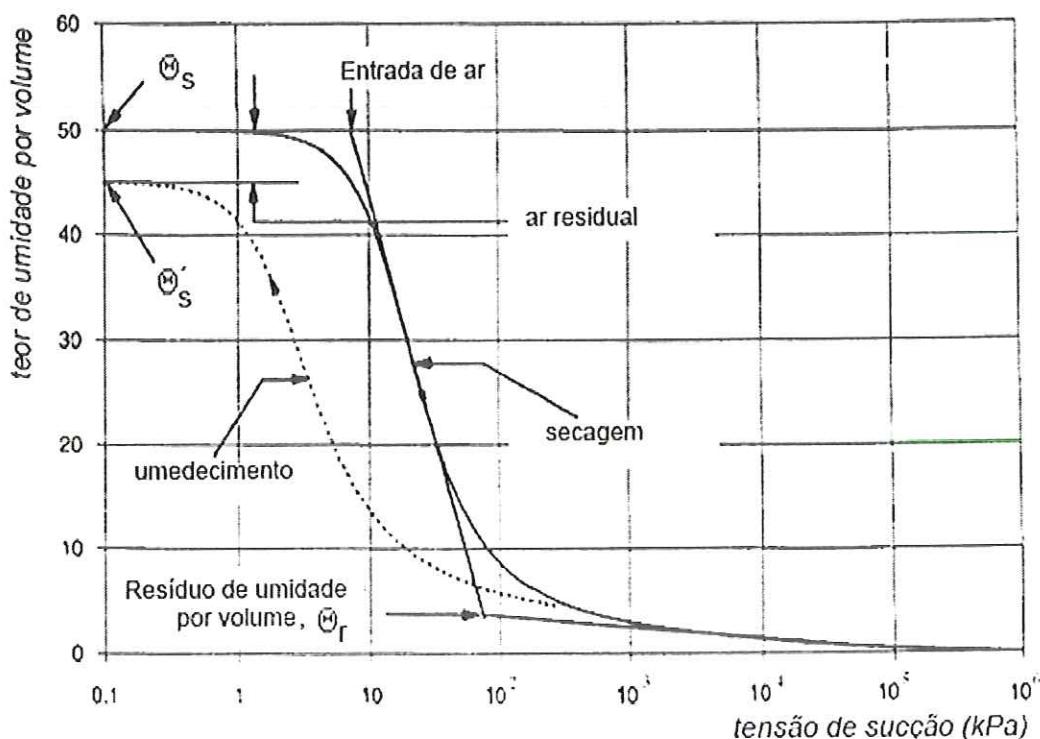


Figura 21 - Curva de retenção segundo FREDLUND (1993)

A relação entre a condutividade hidráulica e a tensão de sucção, “*função condutividade hidráulica*”, pode ser obtida, ao processar dados de ensaios em

laboratório, cujo procedimento é medir a condutividade hidráulica por solicitar as forças nos vazios do solo ao aplicar pressões, e medir concentrações de água que permanecem no sólido.

Executar tais ensaios é complexo, e exige análise sobre a difusão de ar na água e vazios do sólido, e medidas sobre pequenos volumes de líquido. Em função destas dificuldades, a definição da função condutividade hidráulica é indireta, utilizam-se o teor de umidade por volume, ou a curva de retenção, e a condutividade hidráulica saturada. Os métodos para estimativa foram descritos em BROOKS e COREY (1971), VAN GENUCHTEN (1980) e FREDLUND et al (1994).

### **3.2 Movimento de água em sólidos não saturados**

Expõem-se, a seguir, tópicos sobre a formulação teórica adotada em estudos sobre o movimento de água em sólidos não saturados. O relato neste item contém história e o limitante adotado é a época onde as estimativas não eram facilitadas pelos computadores.

Nos primórdios de estudos sobre o movimento de água em solos se colocou dentre as hipóteses admitirem que os vazios do sólido fossem preenchidos apenas e tão só pelo líquido. Para movimentos provocados pela ação da gravidade, a única solicitação externa era atribuída à variação de altitude. A viscosidade da água era tida como a variável responsável pelo atrito entre o líquido e as partículas sólidas. Os canais de fluxo eram os vazios do sólido.

Os estudos sobre movimento de água em meios porosos são usualmente formulados em duas direções perpendiculares de sua projeção em plano que coincide com uma delas. Também, o volume de líquido movimentado é estudado em seções de controle contidas em planos perpendiculares a uma das duas direções de controle, definindo um volume de controle. Não se tratará no que se estudará adiante de movimento de água radial. Assim, um modelo simples da geometria estudada pode ser o contido na Figura 22.

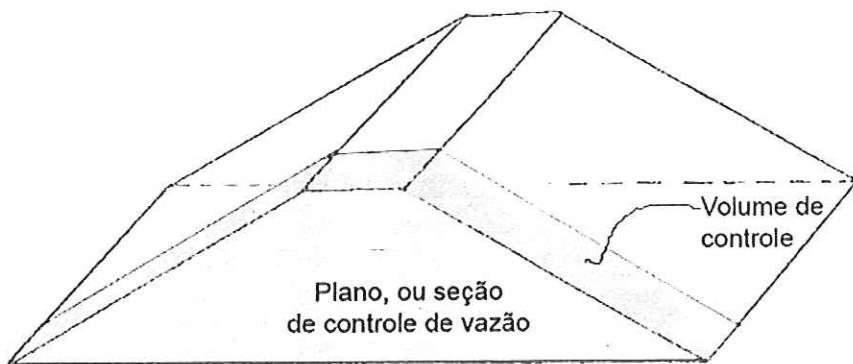


Figura 22 – Planos e direções para estudo de movimento de água em meios porosos

A água se movimenta de pontos de maior carga para pontos de menor carga hidráulica. Outros tipos de energia também provocam o movimento da água: a energia térmica, as energias química ou osmótica, eletromagnética, cinética e potencial associado à pressão atmosférica ou assemelhado. A energia total num fluido em movimento contém a soma de energia potencial ou gravitacional, e da pressão que age sobre o fluido. É comum usar a carga hidráulica, soma de altura gravitacional com a carga piezométrica.

Adotando  $L$  para indicar a dimensão “comprimento”,  $M$ , para “massa” e  $T$ , para “tempo”, se:  $H$  = carga hidráulica ( $L$ ),  $p$  = pressão no líquido ( $ML^{-2}$ ),  $\rho$  = massa específica da água ( $ML^{-3}$ ),  $g$  = aceleração da gravidade ( $LT^{-2}$ ),  $z$  = altura em relação a uma referência ( $L$ ),  $v$  = velocidade da água ( $LT^{-1}$ ) é usual expressar (Figura 23) a energia em uma partícula do sólido por onde a água escorre por:

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}$$

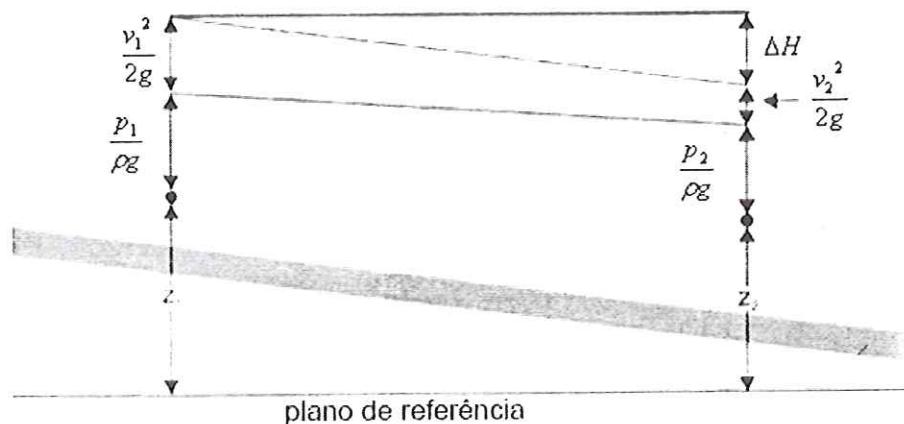


Figura 23 – Valores de cargas em dois pontos na direção de movimento de água

Na análise sobre movimento de água em solos, o termo  $\frac{v^2}{2g}$  é usualmente omitido por ser próximo a zero. Por exemplo, para uma velocidade de 10cm/s, que é grande comparada com os valores nos solos ,  $\frac{v^2}{2g}$  é estimado em 0,5mm.

Para vazios de solos e movimento lento de água, DARCY (1856) relatou resultados de suas deduções, a conhecida *Lei de Darcy*:

$$q = -k \frac{\Delta H}{\Delta L}$$

Onde:

$q$  = vazão específica ou velocidade de descarga ( $LT^{-1}$ );

$\Delta H$  = diferença entre as cargas hidráulicas em duas seções de controle;

$\Delta L$  = distância entre seções de controle;

$k$  = coeficiente de permeabilidade saturado, ou condutividade hidráulica, do material observado ( $LT^{-1}$ ).

A *Lei de Darcy*, quando usada para estimar vazão em meio poroso onde se move uma mistura de água e gases, o dito *movimento de água em meio não saturado*, pode ser expressa por:

$$q = -k(\Theta) \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Onde:  $k(\Theta)$  = condutividade hidráulica para meio poroso não saturado (m/s);

$q$  = vazão de água na fase não saturada do meio por unidade de área, equivale à velocidade (ou densidade) de descarga (m/s);

$\Theta$  = teor de umidade por unidade de volume;

$z$  = coordenada de posição (m);

$\Phi$  = energia potencial total na fase não saturada do material (m).

Ao adotar a condutividade hidráulica como elemento de controle da vazão por uma seção de um sólido se está em realidade transformando o estudo de

movimento de água em estudo das concentrações de água e ar nos vazios do meio poroso. A análise da variação dessa concentração por ação da carga hidráulica ao longo do tempo é o conjunto de raciocínios que pode fornecer soluções às estimativas de velocidade e características de movimento de água. Isso se dá porque as concentrações de água ( $\mu_{ar}$ ) e de ar ( $\mu_w$ ) nos vazios definem as variáveis de estado que governam o processo de movimento da água no solo (FREDLUND e MORGENSTERN, 1977).

Admitido um elemento de fluxo  $e$ , num plano de escoamento com um sistema de coordenadas de direções principais da condutividade hidráulica  $r$  e  $s$ , para estudos sobre movimento de água em meios porosos não saturados, típicos da Mecânica dos Solos aplicada a soluções onde a estimativa pode não ser rigorosa: adota-se a generalização da Lei de Darcy, o que leva a reduzir a formulação das relações entre o movimento de água e a condutividade hidráulica de um meio admitido como homogêneo a:

$$\begin{pmatrix} q_r \\ q_s \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial r} \\ \frac{\partial H}{\partial s} \end{pmatrix}_e$$

Diferenciando os termos da equação em relação à  $r$  e  $s$ , obtém-se a estimativa de vazão específica através de um elemento de fluxo em função da condutividade hidráulica:

$$\begin{pmatrix} q_r \\ q_s \end{pmatrix}_e = -\frac{1}{\rho g} \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \\ \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \end{pmatrix}_e$$

Quando o movimento de água estudado é gravitacional, assim se assume que as coordenadas de posição podem ser reduzidas a um sistema de coordenadas absoluto horizontal e vertical. As coordenadas locais podem se transformar em coordenadas absolutas por rotação obtida quando a matriz de rotação  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  e as vazões específicas podem ser expressas:

$$\begin{pmatrix} q_r \\ q_s \end{pmatrix}_e = \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e , \text{ e,}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \\ \frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s \end{pmatrix}_e = \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \end{pmatrix}_e \quad \text{ou,}$$

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e = \mathbf{R} \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix}_e \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} - 1 \end{pmatrix}_e ,$$

No elemento  $e$  :  $\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix}_e = \mathbf{R} \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix}_e \mathbf{R}^T$

É usual a notação:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e = \text{Vetor vazão específica no elemento } e.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} - 1 \end{pmatrix}_e = \text{Vetor gradiente hidráulico no elemento } e.$$

A solicitação fundamental para estudo de movimento de água em meios porosos é a pressão. O ente fundamental para esta análise, quando se usa elementos finitos é a projeção do tubo de fluxo a ser analisado em um plano.

A Figura 24 ilustra uma seção plana de elemento triangular de volume e pressões aplicadas nos nós  $i$ ,  $j$ , e  $k$ , designadas por  $p_i$ ,  $p_j$ , e  $p_k$  e vazões específicas  $q_i$ ,  $q_j$ , e  $q_k$  pelos lados do triângulo.

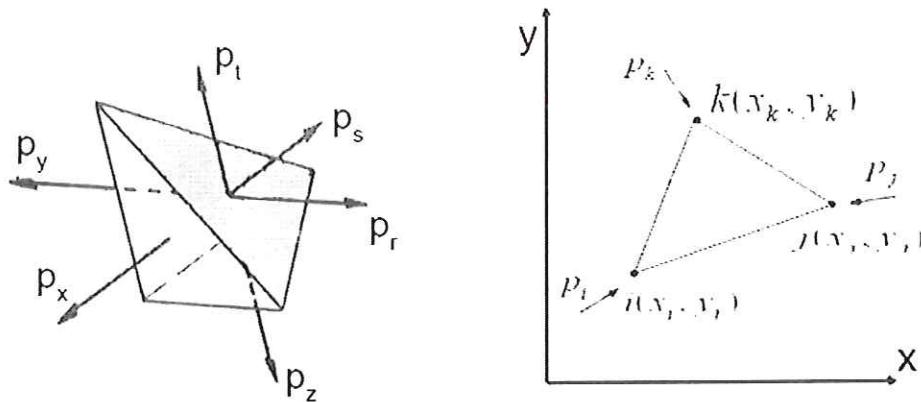


Figura 24 – Visão no espaço, coordenadas e pressões aplicadas em elemento triangular

Os elementos de volume trapezoidais são estudados usando um artifício que consiste em dividir as seções para estudo em quatro triângulos (Figura 25), com coordenadas do nó interno *m* iguais à média aritmética das coordenadas dos outros nós. Também ali se representam as resultantes de pressão em um paralelepípedo de onde se extraem elementos trapezoidais submetidos a ações de pressão internas a um sólido. Neste trabalho, há a observar que não serão objetos de análise outras formas geométricas que podem assumir os elementos finitos.

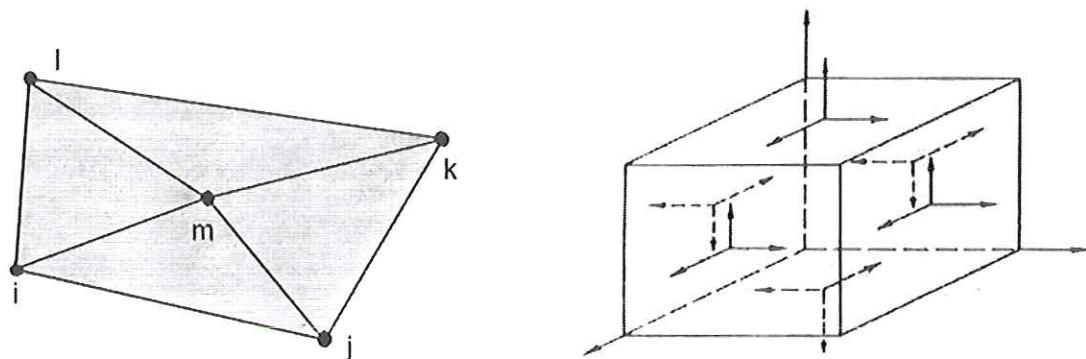


Figura 25 – Elementos trapezoidais e pressões aplicadas em um paralelepípedo

Num ponto genérico do interior de um elemento de sólido, a resultante de solicitação de pressão pode ser estimada por uma combinação linear das solicitações nos nós em função de suas coordenadas. Esta combinação linear pode ser uma expressão do tipo:

$$p = a_1 + a_2x + a_3y$$

Os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  para o centro do elemento são estimadores confiáveis de pressão aplicada em cada nó:

$$\begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}_e \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

A propagação de pressão e condutividade hidráulica que aqui se estuda varia de elemento a elemento e ao longo do tempo onde ocorre o movimento da água, é um campo de ações entre o meio poroso, o líquido e o ar. Para estimativas de vazões impõe-se a hipótese de que, para todos os pontos de cada elemento, as solicitações são iguais às dos nós. Isto equivale a dizer que a pressão tem o mesmo valor em toda a seção do elemento.

A geometria associada ao elemento triangular (Figura 24) permite escrever que a área da projeção do elemento é:  $2D = (x_jy_k - x_ky_j) + (x_ky_i - x_iy_k) + (x_iy_j - x_jy_i)$ , expressão cujos termos serão designados por  $n_{11} = (x_jy_k - x_ky_j)$ ,  $n_{12} = (x_ky_i - x_iy_k)$ ,  $n_{13} = (x_iy_j - x_jy_i)$ , e as diferenças entre coordenadas dos nós são estimadas por  $n_{21} = (y_j - y_k)$ ,  $n_{22} = (y_k - y_i)$ ,  $n_{23} = (y_i - y_j)$ ,  $n_{31} = (x_k - x_j)$ ,  $n_{32} = (x_i - x_k)$ ,  $n_{33} = (x_j - x_i)$ .

Assim, a resultante de pressão no elemento  $p_e$  pode ser aproximada por uma

função linear:  $\mathbf{P}_e = a_1 + a_2 \mathbf{X} + a_3 \mathbf{Y}$ , onde  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{pmatrix}_e$ , e  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{pmatrix}_e$ .

A estimativa dos coeficientes  $a_1, a_2$  e  $a_3$  pode ser efetuada escrevendo

$$\begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e, \text{ que pode ser escrita: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}_e^{-1} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e,$$

ou,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e$$

Denominando  $\mathbf{H}_e = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}_e$ , pode-se definir a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \mathbf{A}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e$$

Conhecida a estimativa para  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  pode-se escrever que:

$$\begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e = \langle \mathbf{1} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{Y} \rangle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e, \text{ que diferenciada em relação a}$$

$x$  e  $y$ , e leva a:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e, \text{ onde substituindo a estimativa}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e, \text{ resulta } \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{H}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e.$$

E, se definirmos a matriz  $\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{H}_e$ , pode-se escrever

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \mathbf{B}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e.$$

O gradiente hidráulico pode ser escrito:  $\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_e + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix},$

que, se substituído na estimativa de vazão específica faz deduzir a expressão:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e = -\frac{1}{\rho g} \mathbf{K}_e \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix} \right),$$

Ou a vazão específica no elemento é estimada igual a:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e = -\frac{1}{\rho g} \mathbf{K}_e \mathbf{B}_e \mathbf{P}_e - \frac{1}{\rho g} \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

Ou seja, em cada nó, as solicitações  $p_i$ ,  $p_j$ , e  $p_k$  tratadas anteriormente estimam vazões específicas  $q_i$ ,  $q_j$ , e  $q_k$ , que podem ser usadas para obter vazões pelos elementos de volume que, para facilitar raciocínios, serão representadas pelos fluxos equivalentes nos nós, conforme ilustrado e resumido na Figura 26.

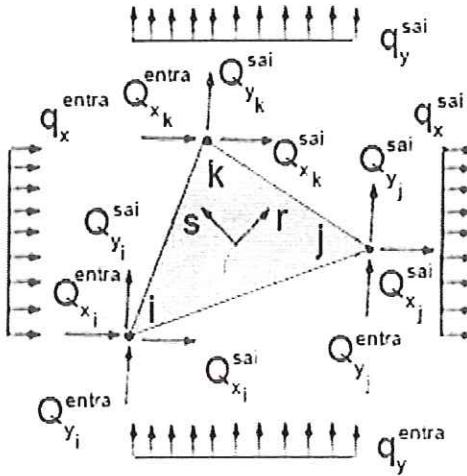


Figura 26 – Notação para vazões em um elemento triangular

Assim os volumes de água movimentados em cada direção e cada nó, são expressos nas direções  $x$  e  $y$ :  $\mathcal{Q}_{y_i}^{sai} = \frac{1}{2} q_y (x_k - x_i)$ ;  $\mathcal{Q}_{y_k}^{sai} = \frac{1}{2} q_y (x_j - x_i)$ ;  $\mathcal{Q}_{y_j}^{sai} = \frac{1}{2} q_y (x_j - x_k)$ ;  $\mathcal{Q}_{y_i}^{entra} = \mathcal{Q}_{y_j}^{entra} = \frac{1}{2} q_y (x_j - x_i)$ ;  $\mathcal{Q}_{x_k}^{entra} = \frac{1}{2} q_x (y_k - y_i)$ ;  $\mathcal{Q}_{x_i}^{entra} = \frac{1}{2} q_x (y_k - y_j)$ ;  $\mathcal{Q}_{x_j}^{entra} = \frac{1}{2} q_x (y_i - y_j)$ ;  $\mathcal{Q}_{x_i}^{sai} = \mathcal{Q}_{x_j}^{sai} = \frac{1}{2} q_x (y_k - y_j)$ .

Para cada nó ( $i$ ,  $j$ , ou  $k$ ), a contribuição à vazão será função da soma dos volumes de água que se movimentam. Convencionando-se que os efluentes tenham sinal positivo e os afluentes, negativo, as vazões pelos nós ( $i$ ,  $j$ , ou  $k$ ) podem ser escritas:

$$Q_i = \sum q_i = Q_{x_i}^{sai} + Q_{y_i}^{sai} - Q_{x_i}^{entra} - Q_{y_i}^{entra}$$

$$Q_j = \sum q_j = Q_{x_j}^{sai} + Q_{y_j}^{sai} - Q_{x_j}^{entra} - Q_{y_j}^{entra}$$

$$Q_k = \sum q_k = Q_{x_k}^{sai} + Q_{y_k}^{sai} - Q_{x_k}^{entra}$$

Ou:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{1}{2}q_y(x_k - x_j) + \frac{1}{2}q_x(y_j - y_k) \\ Q_j &= \frac{1}{2}q_y(x_i - x_k) + \frac{1}{2}q_x(y_k - y_i) \\ Q_k &= \frac{1}{2}q_y(x_j - x_i) + \frac{1}{2}q_x(y_i - y_j) \end{aligned}$$

Ou ainda, em cada elemento:

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (y_j - y_k) & (x_k - x_j) \\ (y_k - y_i) & (x_i - x_k) \\ (y_i - y_j) & (x_j - x_i) \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e$$

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_e^T \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}_e$$

A expressão é a estimativa de vazão por um elemento, aqui representada pelos fluxos de água em seus nós. Como cada nó é comum a vários elementos, a reunião das expressões de vazão por todos os elementos vizinhos representará o total pelos nós na seção estudada, ou, se  $\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_e$ , e se

a área do elemento triangular é:  $2D = (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i)$ , a vazão pelos nós pode ser estimada:

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix}_e = \frac{1}{2\rho g D} \mathbf{B}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{B}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}_e - \frac{1}{2\rho g} \mathbf{B}_e \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}$$

## 4 Elementos finitos e estudo de movimento de água

---

Para simular os efeitos da propagação de campos de forças, tensões, pressões e outras características de campos de solicitações físicas aos sólidos, e outros problemas da Dinâmica pode-se usar o chamado *método dos elementos finitos*. Ou seja, a subdivisão de sólidos em pequenas regiões, os *elementos finitos*, e uso de teorias matemáticas sobre o comportamento de *campos* para análise das conseqüências de sua propagação em sólidos, líquidos ou gases que se misturem e conseqüências de ações características de solicitações de agentes externos ao arcabouço de sólidos, partículas e seu arranjo no espaço.

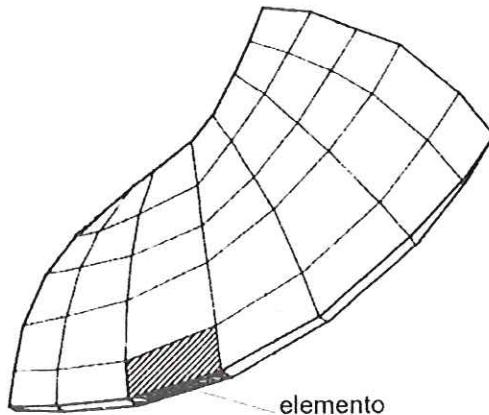
Poder-se-ia afirmar que o método dos elementos finitos é um conjunto de técnicas para análise numérica sobre o comportamento de processos discretos para processar e obter soluções de equações diferenciais que descrevem um processo físico.

O método dos elementos finitos é aplicável à solução de problemas da Física caracterizados por um campo definido por ações de variáveis físicas no espaço e no tempo. Uma grandeza física cujo valor varie no espaço, é denominada *campo*, e a região onde age esta grandeza é o *domínio espacial* do campo. Grandezas ou variáveis características de um campo podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais.

Segundo ASTLEY (1992) o termo *elementos finitos* data de 1960, época em que membranas elásticas foram subdivididas em pequenos volumes discretos (os chamados *elementos finitos*) para estudos sobre tensões, conforme propostas que vinham de matemáticos clássicos desde a década dos 40. Diz-se que os computadores e estudos sobre tensões internas em materiais foram os responsáveis pela disseminação da técnica de análise e simulação com uso do *método dos elementos finitos*.

Os princípios de estudos sobre elementos finitos são aplicados à mecânica dos sólidos, hidráulica, aerodinâmica, estruturas, eletromagnetismo, eletricidade, etc. Em particular nos diz respeito o que se disseminou sobre método dos elementos finitos para montar modelos que são úteis e adequados para estimativa de características de movimento de líquidos ou misturas de líquidos e gases. Para detalhes e exemplos de aplicação do método dos elementos finitos, destacam-se o que foi publicado em SMITH (1971), DESAI (1972), SEGERLIND (1984), LEWIS (1987), COOK (1989), KAZDA (1990), ZIENKIEWICZ e TAYLOR (1991)

A Figura 27 ilustra a divisão de um sólido em elementos finitos.



**Figura 27 – Ilustração da divisão de um sólido em elementos finitos**

A Tabela 3 resume alguns exemplos de tipos de análise onde o método dos elementos finitos pode ser aplicado, os tipos de campo que definem processo físico, e a variável típica a ser analisada.

**Tabela 3 – Exemplos de tipos de análise para uso do método dos elementos finitos**

Tipo de análise	Campo	Variável
Tensão e deformação	Tensão	Deslocamento
Transferência de calor	Fluxo térmico	Temperatura
Movimento de fluido	Velocidade do fluido	Pressão
Eletricidade	Campo elétrico	Tensão
Magnetismo	Campo magnético	Potencial magnético

O método dos elementos finitos não é a única ferramenta para a solução numérica dos problemas listados na Tabela 3. Outros processos podem ser utilizados, como o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos de Contorno.

Delimitado um problema a resolver, poder-se-á recorrer ao auxílio de teorias sobre o comportamento de materiais divulgadas em publicações como FELEX (1973), COREY (1977), BORGES (1975), SMITH (1971), KAZDA (1990), ZIENKIEWICZ e TAYLOR (1991) e suas relações com malhas de elementos finitos.

A complexidade do tratamento matemático associado ao método dos elementos finitos, e o mercado que a aplicação desse processo tem na prática da engenharia, fizeram surgir o investimento de empresas que hoje comercializam programas para computador, que podem ser eficientes para análises sofisticadas, e fornecer resultados gráficos apurados. No entanto, resultados provenientes das respostas decorrentes de manuseio sobre os elementos finitos devem ser analisados de forma crítica, e o profissional envolvido deverá ter conhecimento suficiente para análise de soluções, e informação sobre comportamento de variáveis e campos correspondentes.

Do vocabulário associado aos elementos finitos destaca-se que a intersecção entre arestas de um elemento é denominada *nó*, e ações sobre o elemento são, por hipótese, aplicadas nos nós, conforme ilustra a Figura 28.

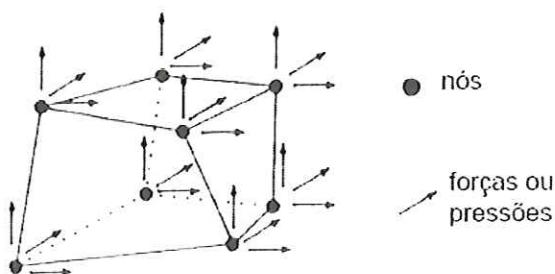


Figura 28 – Nós e ações sobre elementos finitos.

Estudos sobre as teorias aplicáveis aos elementos finitos admitem que o comportamento de materiais submetidos a solicitações externas pode ser expresso em função da continuidade de sólidos quando os problemas a analisar decorrem de estudo sobre o equilíbrio de forças internas e externas

decorrente da distribuição de ações internas na geometria e estrutura das partículas componentes de sólido. A Figura 29 ilustra, esquematicamente o exposto. Mas, duas outras suposições são adotadas: as solicitações devem ser compatíveis com as partículas no sólido, não as levando à ruína, e que o arranjo de partículas faz as forças transmitirem-se continuamente pelo sólido.

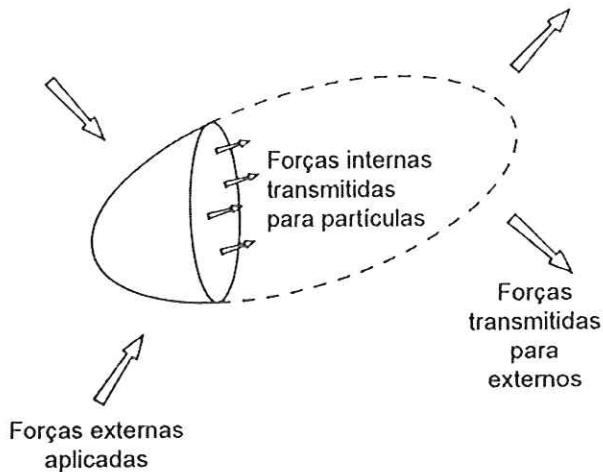


Figura 29 – Esquema de equilíbrio de forças no interior de um sólido

Para formulações matemáticas, as reações às solicitações em um elemento finito são decompostas em direções perpendiculares aos planos que o delimitam, conforme ilustrado na Figura 30. O sistema de coordenadas: ( $x, y, z$ ), é denominado *absoluto*. Em plano oblíquo ao sistema de coordenadas, definem-se coordenadas ( $r, s, t$ ), que pertenceriam a um sistema de coordenadas denominado *local* ou *relativo*, quando  $r$  e  $s$  pertencem, ou tangenciam a superfície do elemento.

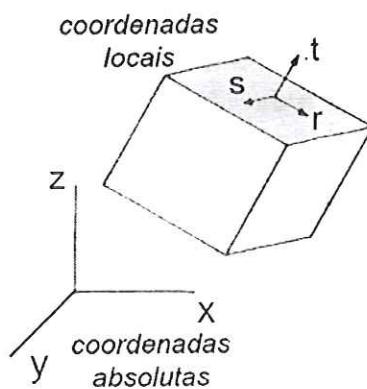


Figura 30 – Sistema de coordenadas absoluto e local

Analizar um processo físico com auxílio de elementos finitos contém dois passos:

- Obter um modelo para simulação, uma malha da geometria que defina os elementos finitos, definir as propriedades de materiais que compõem o sólido onde ocorre o processo, e especificar condições para controle de variáveis para descrever o processo;
- Analizar o modelo geométrico do sólido para formular e resolver equações que descrevam o comportamento das variáveis que definem as relações físicas decorrentes do processo que venha sendo estudado.

Uma subdivisão prática para as ações sobre os tópicos acima contém sete etapas:

- Descrever a geometria do sólido estudado, também conhecido como *obter a malha de elementos finitos*.

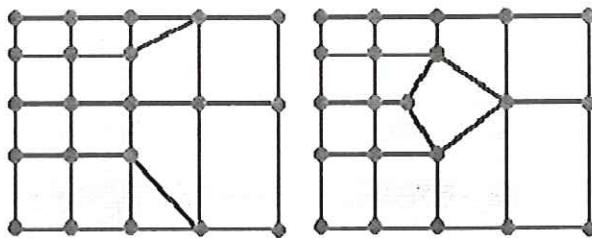
É a subdivisão de uma projeção em um plano de uma região de sólido em elementos coerentes, usualmente triangulares ou trapezoidais, no domínio espacial onde as ações do campo estudado ocorrem. A geometria das malhas não pode conter descontinuidades por ausência de conexão entre os elementos, ou falta de cobertura de toda a região observada.

Para exemplo imagine-se a tentativa de solução de um problema que conduza à necessidade de subdividir uma região retangular em elementos conforme descrito na Figura 31. A transição de quatro elementos à esquerda para dois elementos à direita é a condição de contorno. Isso pode ser efetuado, por exemplo, pelas soluções ilustradas na Figura 32.



**Figura 31 – Projeção de região de sólido e problema a descrever para estudo com elementos finitos**

As soluções indicadas na Figura 32 contêm uma geometria conceitualmente contínua para o que se tenta descrever a partir da Figura 31. As malhas podem ser constituídas de combinações entre mais de um tipo de elemento.

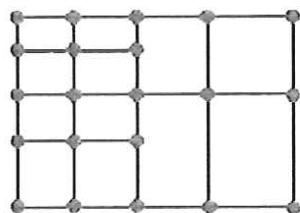


**Figura 32 – Propostas de malhas para estudo com uso de elementos finitos**

Uma tentativa de conexão de nó a um lado de um elemento, ao invés de conectá-lo a nó do outro elemento, pode levar a falhas de cobertura da região a estudar, ou a dificuldades em estudos sobre a descrição de variáveis de campo. A Figura 33 ilustra uma descontinuidade na descrição geométrica da área de uma região. A Figura 34 ilustra uma descontinuidade em malha, que pode levar à dificuldade na descrição de ação de variáveis sobre processo físico. As ligações devem ser dar nó a nó.



**Figura 33 – Descontinuidade inaceitável em malha ao descrever região de sólido**



**Figura 34 - Descontinuidade inaceitável em malha, que pode levar a dificuldade na descrição de ação de variáveis sobre processo físico**

Embora a forma de numeração dos nós possa ser arbitrária, a numeração afeta diretamente a eficiência de processamento de dados em termos de tempo de processamento e uso de memória de computadores. Comenta GEO-SLOPE (2002) que o comportamento de elementos é função de sua forma e uma classificação pode ser a que se resume na Tabela 4.

**Tabela 4 – Forma de elementos nas malhas e classificação de comportamento durante as estimativas de medidas sobre variáveis características de campo**

Trapezoidal	Triangular	Comportamento
		<i>Os melhores</i>
		<i>Aceitáveis</i>
		<i>Ruins</i>
	—	<i>Inaceitáveis</i>

#### b) Seleção da função de interpolação

Escolhida a malha e a forma dos elementos, a próxima atividade é definir como será a ação das variáveis características do campo que se propaga no volume do sólido, ao longo do domínio analisado. Normalmente uma função polinomial obtida por diferenciação e integração é a relação usada para essa descrição. O controle do equilíbrio nos nós de elementos estabelece a ordem de funções para interpolação. Este tipo de função também é denominado de forma ou de aproximação.

Uma vez escolhidas as funções de interpolação, as características de variáveis que descrevem a propagação de ações de um campo por um elemento são estimadas como se ocorressem apenas nos nós. As estimativas são obtidas com uso de sistema de equações que expressam as propriedades dos elementos com se ocorressem apenas nos nós. Por exemplo, para o

movimento de água em regime permanente, as vazões são relacionadas com as pressões nos nós.

c) Definição das propriedades físicas e de materiais nos elementos

Trata-se de identificar quais as relações entre o campo de ações externas que se propagam com as forças internas entre os constituintes do sólido.

Por exemplo, para estudo de movimento de misturas solo mais ar, participam o arranjo geométrico das partículas do sólido, as forças de adesão entre líquido e sólido, líquido e ar, sólido e ar, líquido e líquido, etc. Em particular participam a umidade por volume no sólido e as forças que tendem a reter o líquido junto ao sólido.

A escolha e as hipóteses que se façam sobre as propriedades de sólido interferem na solução que se obtém para o que se estude. Por exemplo, adotar o coeficiente de permeabilidade de solo saturado implica em obter soluções para o movimento de água que, numa argila para fixar raciocínios, despreza a parcela de água que se move misturada com o ar acima da linha freática (Figura 35).

E, esquecer-se de que a variação de concentração de água e ar acima da linha freática pode contribuir para estimar o volume de água que se movimenta acima da linha freática (Figura 36), anulando a hipótese de que a condutividade hidráulica varia com a saturação.

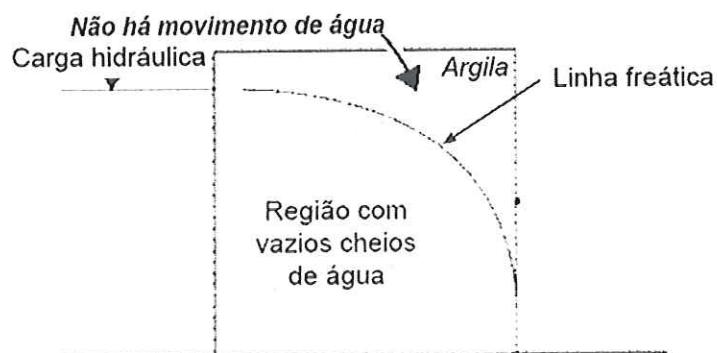


Figura 35 – Argila e parcela de água que se move misturada com ar

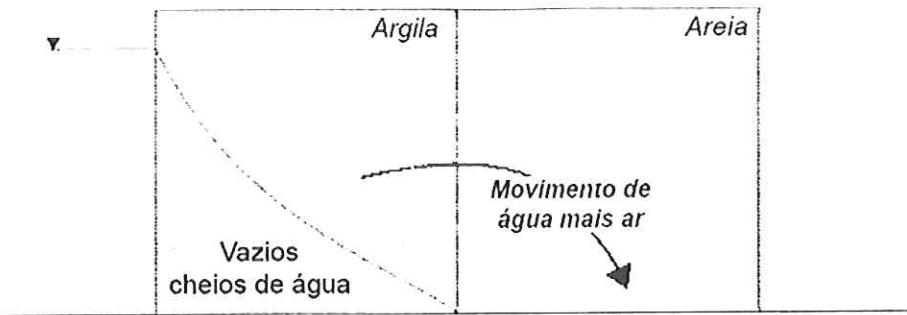


Figura 36 – Concentração de água e ar acima da linha freática e movimento de água

#### d) Compatibilização entre elementos e nós

Compatibilizar entre elementos e nós pode significar reunir as ações das variáveis de campo sobre os nós de elementos para aproximar, de maneira discreta, o comportamento da disseminação do campo pelo domínio no sólido. O controle dessa atividade é o fato de que cada variável característica do campo é única para os elementos que compartilham um mesmo nó.

A Figura 37 é uma tentativa de ilustrar que três elementos conectados correspondem a um só nó, e cada conjunto contido nos círculos assinalados tem um único valor de variável de campo, e na malha corresponde a um só nó.

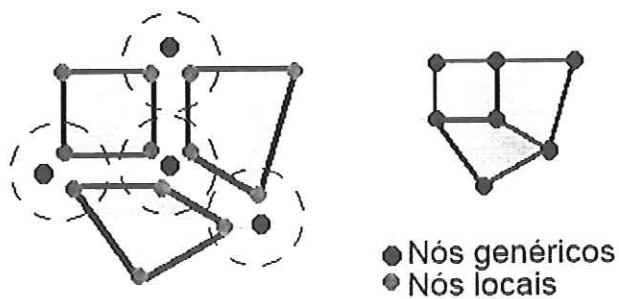


Figura 37 – Compatibilidade entre nós e elementos em malhas

#### e) Controle por condições de contorno

Em alguns pontos da região analisada são conhecidas as medidas sobre a variável de campo. E, as matrizes que expressam relações entre as variáveis de campo e pontos no espaço levam a um número de equações que poderão constituir sistemas indeterminados para o elemento observado.

Para individualizar as propriedades de cada sólido e problema a analisar, usam-se as chamadas *condições de contorno*, ou seja, propriedades de pontos na região onde são conhecidas as medidas sobre as variáveis de campo. Por

exemplo, nós na interface entre a mistura água mais ar que se movimente pelos vazios de um sólido e a atmosfera têm pressão igual à atmosférica, a chamada *linha freática*.

Usar condições de contorno impondo-as aos sistemas de equações é uma das atividades que facilita o uso de técnicas de análise numérica para estimar medidas sobre variáveis de campo na região analisada. Por exemplo, a condição “o movimento de água é zero na superfície” impõe a existência de pressões positivas e negativas nos vazios de sólidos (Figura 38).



**Figura 38 – Condição de contorno e “movimento de água zero na superfície”**

#### f) Resolver o sistema de equações

Se o sistema de equações que descreve a propagação das ações da variável de campo é linear, o Método de Gauss ou Método de Cholesky podem ser usados para obter as soluções do sistema de equações. Se o sistema de equações é não linear, então os procedimentos de resolução podem ser mais sofisticados, e exigir outros processos para obter informação sobre a propagação de propriedades de um campo criado por ações externas pelo arcabouço de um sólido.

Em particular, para as misturas água mais ar, é a concentração de água que pode facilitar o estudo da difusão da carga hidráulica e a estimativa de volume de água que se movimente em um sólido.

#### g) Modelos e estimativas adicionais

A prática exige lançar mão de pré-processamento e modelos para auxiliar as estimativas numéricas, principalmente durante a tentativa de solução de problemas complexos e processamento de dados em computador. Por

exemplo, para estudos sobre o movimento de água, fixar a distribuição de velocidades pela região pode ser um desses artifícios.

Também, para estudos sobre movimento de misturas água mais ar podem ser usados pesos definidos por modelos para representar a propagação de concentração de água pelo arcabouço de sólido, como por exemplo, o proposto por SEGERLIND (1984), páginas 183 a 185.

Assim, para estudos de movimento de água em uma determinada região de sólido é definida como um domínio, e denomina-se *discretização* ao processo de subdividir um domínio em um número finito de elementos. Os elementos adotados são conectados em pontos específicos, denominados nós, e existirá um processo de ligação entre os nós, contínuo entre contornos e elementos adjacentes.

#### **4.1 Elementos de volume em formato de tetraedro e estimativa de vazão**

LEWIS e SCHREFLER (1987) relatam que um procedimento para estudar o movimento de água por solos não saturados é utilizar a condutividade hidráulica, variável que pode ser tratada de maneira semelhante ‘a concentração de líquido mais ar nos vazios do solo.

Para aproximar a solução, pode-se partir do comportamento do movimento de água previsto na formulação proposta por Darcy (1856). Assim, a equação da continuidade permite escrever que a água afluente a um volume de sólido é:

$$\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial r} \left( k_r \frac{\partial H}{\partial r} + k_s \frac{\partial H}{\partial s} \right).$$

E, depois, estudar a função de variação de concentração de água e ar que esse afluente de água provoca nos vazios do sólido. Isto pode ser efetuado

procurando o mínimo da função  $F_e = \frac{1}{2} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{do} \\ \text{elemento}}} \left( k_r \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + k_s \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)^2 \right) dr ds$ , que é

equivalente a  $F_e = \frac{1}{2} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{do} \\ \text{elemento}}} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial H}{\partial r} & \frac{\partial H}{\partial s} \end{array} \right) \begin{pmatrix} k_r & 1 \\ 1 & k_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial r} \\ \frac{\partial H}{\partial s} \end{pmatrix} dr ds$ , que diferenciada

em relação às coordenadas locais,  $r$  e  $s$ , e explicitados as cargas hidráulicas,  $H$ , fornece nas direções  $x$  e  $y$ :

$$F_e = \frac{1}{2} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{do} \\ \text{elemento}}} \frac{1}{\rho g} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho g \end{array} \right) \mathbf{R} \begin{pmatrix} k_x & 1 \\ 1 & k_y \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} \\ \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho g \end{pmatrix}_e dx dy$$

Ou ainda:

$$F_e = \frac{1}{2\rho g} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{do} \\ \text{elemento}}} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho g \end{array} \right) \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} \\ \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho g \end{pmatrix}_e dx dy$$

Se escrevermos o gradiente hidráulico

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} + 1 \end{pmatrix}_e = \frac{1}{D} \mathbf{B}_e \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \end{pmatrix}$$

E, ao substituirmos em  $F_e$  obtém-se:

$$F_e = \frac{1}{2\rho g D} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{do} \\ \text{elemento}}} \left( \begin{pmatrix} p_j & p_j & p_k \end{pmatrix} \mathbf{B}^T + D(0 \quad \rho g) \right) \mathbf{K}_e \left( \mathbf{B} \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix} \right) dx dy$$

Ao adotar:

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{B}_e,$$

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e^T \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{D}_e (0 - \rho g) \mathbf{K}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

Na área constituída de conjunto de  $n$  seções de elementos finitos, a função  $F$  é a soma das funções  $F_e$  em todos os elementos,  $F = \sum_1^n F_e$ .

$\mathbf{E}$ , se  $\mathbf{C} = \sum_1^n \mathbf{C}_e = \sum \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}_e$ ,  $\mathbf{E} = \sum_1^n \mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{G} = \sum_1^n \mathbf{G}_e$ , procurar o mínimo da

função  $F$  equivale a procurar as raízes de  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}}$ , onde  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix}$ , o que leva a:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{\rho g} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R} \right) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{C}$  é matriz simétrica. Assim:

$$\begin{pmatrix} p_2 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T, \text{ então:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left( \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{R} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left( \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{R} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \left( \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{R} \right)$$

$$E, \quad \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{P} - \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou:}$$

$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{P} - \mathbf{R} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , é a equação matricial que fornece as vazões pelo elemento observado. Mas, a estimativa de vazão de água percolada,  $\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{P} - \mathbf{R} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , é uma equação matricial cuja solução exige manuseio de muitas variáveis e processamento de grande volume de dados e cálculos. Isso fez desenvolver uma série de programas de computador para auxiliar a busca de vazões de misturas água e ar (e outros ...) pelos poros de sólidos.

A umidade por volume é a variável usada para expressar a concentração de água e gases nos vazios de solos. A Lei de Darcy aplicada para um tubo de fluxo no meio poroso pode ser escrita para um elemento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + Q = 0, \quad \text{onde } Q \text{ é a vazão afluente, externa ao elemento de fluxo; } H \text{ = carga hidráulica total, } k_x \text{ = condutividade hidráulica na direção } x, \text{ } k_y \text{ = condutividade hidráulica na direção } y.$$

Se  $\Theta$  = teor de umidade por volume, e  $t$  = tempo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] + Q = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

Se o fluxo é permanente, a vazão afluente e a efluente são iguais num volume elementar, em qualquer intervalo de tempo, ou:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] + Q = 0$$

As variações do teor de umidade por volume dependem do estado de pressão e das características do meio poroso. A variação de pressão para meio poroso saturado ou não saturado pode ser descrita por duas variáveis de estado (FREDLUND e MORGENSTERN, 1977),  $(\sigma - \mu_a)$  e  $(\mu_a - \mu_w)$ , onde  $\sigma$  é a pressão total no volume observado;  $\mu_a$  é a pressão de ar, e  $\mu_w$  é a pressão de água.

Assumem-se as hipóteses de que a pressão total é constante, a pressão externa (de ar) é constante e igual à pressão atmosférica, mesmo nos transientes. Ou seja,  $(\sigma - \mu_a)$  é constante, e o teor de umidade por volume não se altera. Ou ainda,  $(\mu_a - \mu_w)$  é uma variável de estado. Se  $\mu_a$  é constante, o movimento de água é governado pelas variações de pressão de água.

A variação do teor de umidade por volume pode então ser relacionada com uma variação de pressão de água pela expressão:  $\partial\Theta = m_w \partial u_w$ , onde  $m_w$  é a inclinação da curva de retenção.

A carga hidráulica total  $H$  é definida por:  $H = \frac{u_w}{\gamma_w} + y$ , onde:  $u_w$  = pressão de água,  $\gamma_w$  = peso específico da água,  $y$  = altura do elemento em relação a um plano de controle. Assim,  $u_w = (H - y)\gamma_w$  e  $\partial\Theta = m_w \partial(H - y)\gamma_w$  levam a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] + Q = m_w \gamma_w \frac{\partial(H - y)}{\partial t},$$

$$\text{e como } \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] + Q = m_w \gamma_w \frac{\partial(H)}{\partial t}$$

## 4.2 A simulação com uso dos elementos de volume de sólido

O que se descreve a seguir fixa a base de raciocínios para simular o movimento de água com uso de elementos de volume de sólido.

A primeira parcela de ações é representar a geometria do sólido poroso onde se estuda o movimento de água. Assim:

- No plano que contém a direção do movimento, estuda-se o primeiro quadrante de um sistema de coordenadas absolutas, cartesiano de eixos  $x$  e  $y$  (Figura 39 e Figura 40);
- No sistema de coordenadas adotado, Figura 39 e Figura 40, numeram-se os nós das projeções de elementos de volume;
- E, a cada coordenada  $(x, y)$ ; se associa uma coordenada local,  $(r, s)$  do elemento de volume.

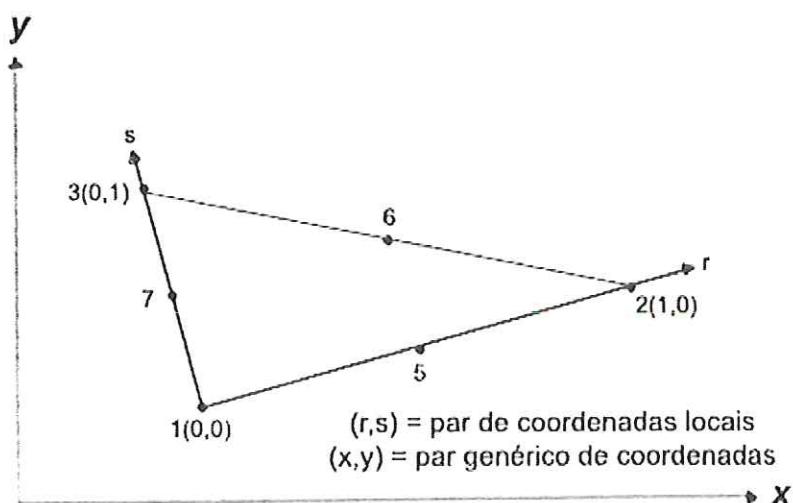
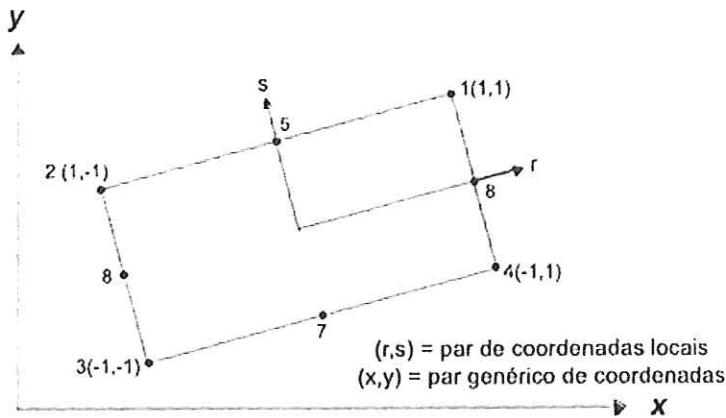


Figura 39 - Sistemas de coordenadas absoluto e local para preparar dados para processamento, elemento finito triangular



**Figura 40 - Sistemas de coordenadas absoluto e local para preparar dados para processamento, elemento finito retangular**

Para auxiliar a simulação adotam-se:

- O quarto nó, com número zero, distingue o elemento triangular do trapezoidal;
- O nó de número quatro define o elemento trapezoidal;
- Os nós 5, 6, 7, e 8 são secundários ou “virtuais”.

Para mudar das coordenadas locais ao sistema absoluto definem-se funções de transformação, que também descrevem a variável de campo, e as cargas hidráulicas no elemento observado. Assim, as coordenadas em qualquer ponto de um elemento em função das coordenadas  $(x, y)$  podem ser representadas:

$$x = \langle N \rangle \mathbf{X} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \langle N \rangle \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Onde:  $\langle N \rangle$  é um vetor de funções para transformação de coordenadas locais em coordenadas absolutas, contidas nas matrizes  $\mathbf{X}$ , cujos elementos são coordenadas absolutas  $(x, y)$  dos nós dos elementos de volume num plano de controle.

BATHE (1982) publica um conjunto de funções para a mudança de coordenadas  $(r, s)$  para  $(x, y)$ , resumidas nas Tabela 5 e Tabela 6, que levam

aos sistemas de equações lineares quando os nós secundários não são incluídos, e do segundo grau quando se incluir nós secundários.

Tabela 5 - Funções de interpolação para elementos finitos triangulares

Função	Inclusão, se existir o nó virtual		
	5	6	7
$N_1 = 1 - r - s$	$-\frac{1}{2}N_5$	-	$-\frac{1}{2}N_7$
$N_2 = r$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$	-
$N_3 = s$	-	$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$
$N_5 = 4r(1-s)$	-	-	-
$N_6 = 4rs$	-	-	-
$N_7 = 4s(1-r-s)$	-	-	-

Tabela 6 - Funções de interpolação para elementos finitos trapezoidais

Função	Inclusão, se existir o nó virtual			
	5	6	7	8
$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$	-	-	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$	-	-
$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$	-	$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	-
$N_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$	-	-	$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$	-	-	-	-
$N_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$	-	-	-	-
$N_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$	-	-	-	-
$N_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$	-	-	-	-

Para estimar vazões deve-se adotar um modelo para a distribuição da variável de campo, ou seja, da carga hidráulica pelo elemento, formalmente igual à geometria que descreve o meio poroso, ou seja:



$$h = \langle N \rangle \mathbf{H} = \langle N \rangle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Onde:  $h$  = carga num ponto genérico,  $\langle N \rangle$  = vetor da função de interpolação  $\mathbf{H}$  = vetor das cargas nos nós. Os gradientes hidráulicos nas direções  $x$  e  $y$  serão:

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} \mathbf{H}, \text{ e } i_y = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \mathbf{H}$$

As funções para transformação de coordenadas são escritas em termos de  $r$  e  $s$ , e não de  $x$  e  $y$ . E se,  $\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial s} = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$ ,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}, \text{ é uma matriz Jacobiana, assim se pode escrever:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial s} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \end{pmatrix}$$

A derivada da função de interpolação em relação a  $x$  e  $y$  é denominada matriz  $\mathbf{E}$ , ou:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial s} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial < N >}{\partial r} \mathbf{X}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial < N >}{\partial s} \mathbf{X}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial < N >}{\partial r} \mathbf{Y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial < N >}{\partial s} \mathbf{Y}$$

E, a matriz  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (N_1, N_2, \dots, N_8)}{\partial r} \\ \frac{\partial (N_1, N_2, \dots, N_8)}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{pmatrix}$$

As derivadas das funções de transformação de coordenadas em relação à  $r$  e  $s$  fornecem os elementos da matriz  $\mathbf{J}$  e os gradientes hidráulicos.

Nas expressões a seguir, usa-se a notação:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \quad (\det \mathbf{J}) = j_{11} \cdot j_{22} - j_{21} \cdot j_{12},$$

$$N_{1,r} = \frac{\partial N_1}{\partial r}, \quad N_{1,s} = \frac{\partial N_1}{\partial s},$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{(\det \mathbf{J})} \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{pmatrix}.$$

Para processar dados em computador, GEO-SLOPE (2002) recomenda manter pré-processadas as derivadas das funções usadas para obter as matrizes jacobianas As Tabela 8 e Tabela 8 são uma transcrição dessas funções.

Tabela 7 - Derivadas das funções para interpolação para elementos finitos trapezoidais

Nós	5	6	7	8
$N_{1,r} = \frac{1}{4}(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_{5,r}$	-	-	-
$N_{2,r} = -\frac{1}{4}(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_{5,r}$	$-\frac{1}{2}N_{6,r}$	-	-
$N_{3,r} = -\frac{1}{4}(1-s)$	-	$-\frac{1}{2}N_{6,r}$	$-\frac{1}{2}N_{7,r}$	-
$N_{4,r} = \frac{1}{4}(1-s)$	-	-	$-\frac{1}{2}N_{7,r}$	$-\frac{1}{2}N_{8,r}$
$N_{5,r} = -\frac{1}{2}(2r+2sr)$	-	-	-	-
$N_{6,r} = -\frac{1}{2}(1-s^2)$	-	-	-	-
$N_{7,r} = -\frac{1}{2}(2r-2sr)$	-	-	-	-
$N_{8,r} = \frac{1}{2}(1-s^2)$	-	-	-	-
$N_{1,s} = \frac{1}{4}(1+r)$	$-\frac{1}{2}N_{5,s}$	-	-	$-\frac{1}{2}N_{8,s}$
$N_{2,s} = \frac{1}{4}(1-r)$	$-\frac{1}{2}N_{5,s}$	$-\frac{1}{2}N_{6,s}$	-	-
$N_{3,s} = -\frac{1}{4}(1-r)$	-	$-\frac{1}{2}N_{6,s}$	$-\frac{1}{2}N_{7,s}$	-
$N_{4,s} = -\frac{1}{4}(1+r)$	-	-	$-\frac{1}{2}N_{7,s}$	$-\frac{1}{2}N_{8,s}$
$N_{5,s} = \frac{1}{2}(1-r^2)$	-	-	-	-
$N_{6,s} = -\frac{1}{2}(2s-2sr)$	-	-	-	-
$N_{7,s} = -\frac{1}{2}(1-r^2)$	-	-	-	-
$N_{8,s} = -\frac{1}{2}(2s+2sr)$	-	-	-	-

Tabela 8 - Derivadas das funções para interpolação para elementos finitos triangulares

Nós	5	6	7
$N_{1,r} = -1,0$	$-\frac{1}{2}N_{5,r}$	-	-
$N_{2,r} = 1,0$	$-\frac{1}{2}N_{5,r}$	$-\frac{1}{2}N_{6,r}$	
$N_{3,r} = 0,0$	-	$-\frac{1}{2}N_{6,r}$	$-\frac{1}{2}N_{7,r}$
$N_{5,r} = (4 - 8r - 4s)$	-	-	-
$N_{6,r} = 4s$	-	-	-
$N_{6,r} = -4s$		-	-
$N_{1,s} = -1,0$	$-\frac{1}{2}N_{5,s}$		-
$N_{2,s} = 0,0$	$-\frac{1}{2}N_{5,s}$	$-\frac{1}{2}N_{6,s}$	
$N_{3,s} = 1,0$	-	$-\frac{1}{2}N_{6,s}$	$-\frac{1}{2}N_{7,s}$
$N_{5,s} = -4r$	-	-	-
$N_{6,s} = 4r$	-	-	-
$N_{7,s} = (4 - 4r - 8s)$	-	-	-

Assim, a vazão pelo elemento de volume pode ser obtida por integração pelo volume, ou seja:

$$\int_V (\mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E}) \mathbf{H} dv + \int_V (m_w \gamma_w \langle N \rangle^T \langle N \rangle) dv \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = q \int_A \langle N \rangle^T dA$$

Com:  $\mathbf{E}$  = matriz dos gradientes hidráulicos;  $\mathbf{C}$  = matriz da condutividade hidráulica;  $\mathbf{H}$  = vetor de cargas nos nós;  $\langle N \rangle^T \langle N \rangle = \mathbf{M}$  = matriz da distribuição da massa de água pelos poros do sólido;  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  = variação da carga no tempo;  $q$  = vazão unitária por um lado do elemento;  $\langle N \rangle$  = vetor função para transformação de coordenadas locais em absolutas,  $m_w$  é a inclinação da função de retenção,  $\gamma_w$ , a massa específica da água.

Usando a projeção em duas dimensões, a espessura do elemento,  $f$ , pode ser suposta constante, e a expressão pode ser escrita:

$$f \int_A (\mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E}) \mathbf{H} dA + f \int_A (m_w \gamma_w \langle N \rangle^T \langle N \rangle) dA \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = q f \int_L \langle N \rangle^T dL ,$$

Onde:  $L$  é o comprimento observado,  $e$ ,  $f$ , a espessura do elemento, uma constante, que faz a integral sobre o volume reduzir-se à integral sobre uma área. Se  $t$  é o tempo.

Adotando:

$$\mathbf{K} = f \int_A (\mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E}) \partial A, \quad \mathbf{M} = f \int_A (m_w \gamma_w \langle N \rangle^T \langle N \rangle) \partial A, \quad \mathbf{Q} = q f \int_L \langle N \rangle^T dL$$

$\mathbf{K} \mathbf{H} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{Q}$  é a expressão para controle do movimento de água, que, para

uma carga hidráulica aplicada na entrada constante no tempo, reduz-se a  $\mathbf{K} \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mathbf{Q}$ . Ou ainda, para o movimento permanente a  $\mathbf{K} \mathbf{H} = \mathbf{Q}$ .

Com  $\Delta t$  = incremento de tempo,  $\xi$  = número aleatório entre 0 e 1,  $\mathbf{H}_1$  = carga hidráulica no fim do incremento de tempo;  $\mathbf{H}_0$  = carga hidráulica no começo do incremento de tempo;  $\mathbf{Q}_0$  = vazão no nó, no começo do incremento de tempo;  $\mathbf{Q}_1$  = vazão no nó, no fim do incremento de tempo, a expressão da vazão pelo elemento pode ser escrita conforme propõe SEGERLIND (1984) para simular aleatoriamente a vazão:

$$(\xi \Delta t \mathbf{K} + \mathbf{M}) \mathbf{H}_1 = \Delta t ((1 - \xi) \mathbf{Q}_0 + \xi \mathbf{Q}_1) + (\mathbf{M} (1 - \xi) \Delta t \mathbf{K}) \mathbf{H}_0$$

Que, para o teor de umidade por volume  $\Theta = 1,0$ , primeira tentativa de solução, se reduz a:

$$(\Delta t \mathbf{K} + \mathbf{M}) \mathbf{H}_1 = \Delta t \mathbf{Q}_1 + \mathbf{M} \mathbf{H}_0$$

Com:  $j$  = ponto de integração;  $n$  = número de pontos adotados durante a integração;  $W_{1j}, W_{2j}$  = pesos para ponderação, para integração numérica é usual o Método de Gauss, e amostragem durante a simulação em pontos especificamente definidos nos elementos controlando-se as somas de massa para os pontos no sólido.

A integral  $\mathbf{K} = f \int_A (\mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E}) \partial A \approx \sum_{j=1}^n \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} (\det \mathbf{J}_j) W_{1j} W_{2j}$  é a expressão

utilizada para integração numérica, controlada em função do número de nós adotado para os elementos. Os pesos para ponderação foram publicados em SEGERLIND (1984), que os obteve a partir de modelos para os sólidos que

constituem solos ou agregados, e resumidos em GEO-SLOPE (2002), Tabela 9 a Tabela 12.

Tabela 9 – Nós e pesos para ponderação, elemento finito trapezoidal, descrito por quatro funções

Nó	r	s	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>
1	+0,57735	+0,57735	1,0	1,0
2	-0,57735	+0,57735	1,0	1,0
3	-0,57735	-0,57735	1,0	1,0
4	+0,57735	-0,57735	1,0	1,0

Tabela 10 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito triangular, descrito por uma função

Nó	r	s	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>
1	0,33333	0,33333	1,0	0,5

Tabela 11 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito triangular, descrito por três funções de variáveis de campo

Nó	r	s	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>
1	0,16666	0,16666	1/3	1/2
2	0,66666	0,16666	1/3	1/2
3	0,16666	0,66666	1/3	1/2

Tabela 12 - Nós e pesos para ponderação, elemento finito trapezoidal, descrito por nove

Nó	r	s	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	Nó	r	s	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>
1	+0,77459	+0,77459	5/9	5/9	6	-0,77459	+0,00000	5/9	8/9
2	-0,77459	+0,77459	5/9	5/9	7	+0,00000	-0,77459	8/9	5/9
3	-0,77459	-0,77459	5/9	5/9	8	+0,77459	+0,00000	5/9	8/9
4	+0,77459	-0,77459	5/9	5/9	9	+0,00000	+0,00000	8/9	8/9
5	+0,00000	+0,77459	8/9	5/9	-				

Ao projetar sobre um plano:

a) Se as condutividades hidráulicas são  $k_x$  e  $k_y$ , a matriz das

$$\text{condutividades é } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix};$$

b) Os componentes da matriz da massa de água,

$$\mathbf{M} = \int_A (m_w \gamma_w \langle N \rangle^T \langle N \rangle) dA, \text{ são estimados ponto a ponto ao inserir os}$$

valores estimados para a pressão ao longo dos elementos de volumes, e estimada a inclinação  $m_w$ , conforme ilustrado na Figura 41

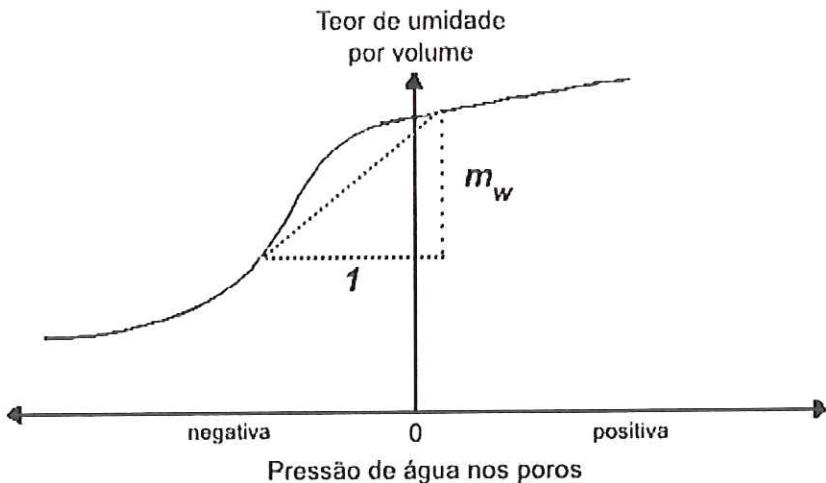


Figura 41 - Estimativa de  $m_w$  a partir da curva de retenção de umidade de solo

Resolver as equações que descrevem o movimento de água é estimar a carga hidráulica em cada nó da malha de elementos finitos. Quando a condutividade hidráulica é constante a solução é direta. Quando a condutividade hidráulica é função da pressão nos vazios, as propriedades dos vazios do sólido não são conhecidas ao iniciar a análise.

Recorrer às iterações pode ser um processo para obter as soluções procuradas. Repetir o processo de iteração, a partir de uma tentativa de fixar a carga que se usa para estimar perdas de carga que definirão medidas para controle do processo de iteração, sucessivamente se reinicia com a carga hidráulica estimada na iteração anterior. O resíduo para controle pode ser:

$$R = |\Delta h| = \left( \sum_{j=1}^n |\Delta h_j|^2 \right)^{2/3}$$

Onde:  $R$  = resíduo,  $n$  = número total de nós,  $j$  = número de nó,  
 $\Delta h_j$  = diferença de carga entre duas iterações sucessivas.

Depois de estimadas as cargas hidráulicas em nós conhecidos, obtém-se os gradientes hidráulicos e as velocidades em cada nó de integração, onde o gradiente é:

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{H},$$

Onde:  $i_x$  = gradiente hidráulico na direção  $x$ ,  $i_y$  = gradiente hidráulico na direção  $y$ ,  $\mathbf{E}$  = matriz de gradientes hidráulicos,  $\mathbf{H}$  = vetor das cargas hidráulicas nos nós.

As velocidades em cada ponto de integração são estimadas:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{E} \mathbf{H}$$

Onde:  $v_x$  = velocidade na direção  $x$ ,  $v_y$  = velocidade na direção  $y$ ,  $\mathbf{C}$  = matriz de condutividade hidráulica.

O volume de água que flui através de uma seção transversal perpendicular à direção do fluxo pode ser estimado em função das cargas hidráulicas nos nós e dos coeficientes das equações de estimativa em cada elemento finito. Por exemplo, considere-se uma malha com um único elemento, Figura 42. O objetivo será estimar a vazão através de seção vertical do elemento.

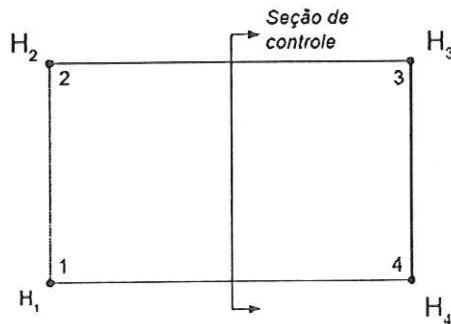


Figura 42 - Exemplo de seção de controle para estimativa de vazão

Para esse caso,  $\mathbf{K} \mathbf{H} = \mathbf{Q}$ , ou:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

E, a Lei de Darcy permite escrever que o volume de água movimentado no tempo, entre duas seções, seria  $Q = kA \frac{\Delta H}{l}$ , sendo  $l$  a distância entre estas seções. Os coeficientes  $c_{ij}$  são expressos por  $\frac{kA}{l}$ , e a vazão entre o nó  $i$  e o nó  $j$  será:

$$Q_i = c_{ij}(H_i - H_j).$$

## 5 Estudo de caso

---

Os processos e teorias expostos anteriormente podem ser usados para estimativas de vazão em casos onde se conheçam geometria e funções de retenção de água em solos. Escolheu-se para estudo de caso adotar dois tipos de solo, um arenoso, outro argiloso e testar hipóteses sobre os resultados obtidos para vazões percoladas, ou infiltradas, em uma geometria escolhida dentre as muitas possíveis na estrutura de vias.

Lembramos que, em CEDERGREN (1974) e MOULTON (1980), os resultados fornecidos foram obtidos por processamento manual de dados e nomografia para definir funções que expressassem vazões em solo. Adotou-se a hipótese: *a condutividade hidráulica de material percolado coincide com o coeficiente de permeabilidade saturado de solos ou agregados*. Aqui, também se adotaram fatos sobre o movimento de água na fase não saturada de solos, hipótese que leva em conta a condutividade de sólido não saturado, e cujo manuseio agora foi simplificado pela evolução de teoria, ensaios de laboratório e disseminação de programas para computador que facilitaram estimativas de características de materiais e vazões em sólidos não saturados.

### 5.1 Os solos e a geometria usados para simulação

A técnica de execução de ensaios não é assunto deste trabalho. Para estudo de caso aqui se adotaram *dois tipos de solos*, um *arenoso* (características publicadas em SOTO, 1999, funções sobre condutividades hidráulicas expostas nas Figura 44 e Figura 45), e outro, *argiloso* (cujas características foram publicadas em BRUCH, 1993, função condutividade hidráulica exposta na Figura 47). Isto se justifica pelas seguintes razões:

- a) SOTO (1999) relata e discute ensaios de laboratório realizados com funil de pedra porosa e câmara de pressão sobre solos da região de São Carlos, cujas curvas granulométricas estão ilustradas na Figura 43;
- b) Segundo a NBR 7181 da ABNT (1984), com 67% de areia, 7% de silte, e 26% de argila, o solo à profundidade de 0,30m é classificado como *areia argilosa*;
- c) Também, em SOTO (1999) publicaram-se curvas de retenção de água e função condutividade hidráulica, obtidas com valores estimados pelos métodos e critério expostos por VAN GENUCHTEN (1980), Figura 44 e Figura 45.

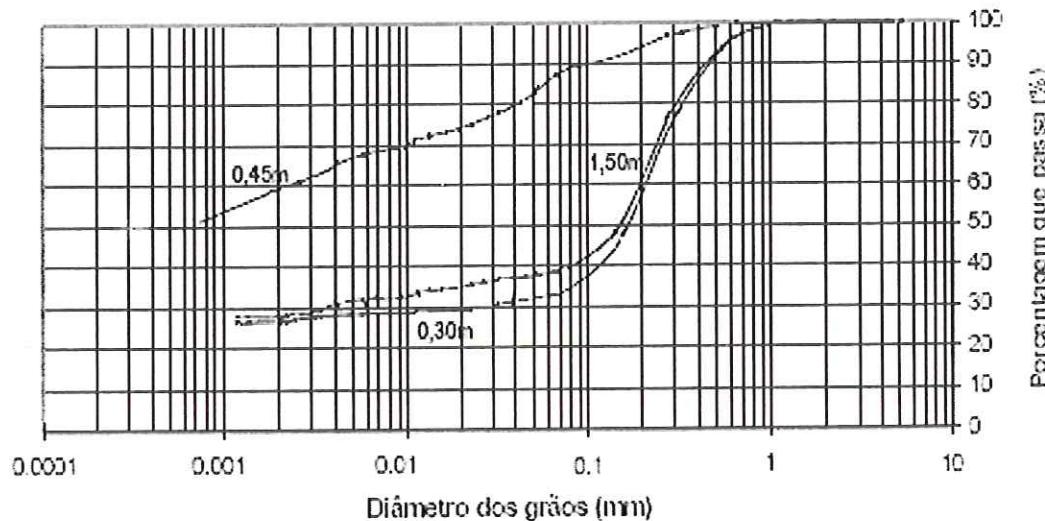


Figura 43 - Curvas granulométricas de solos de São Carlos, SOTO (1999)

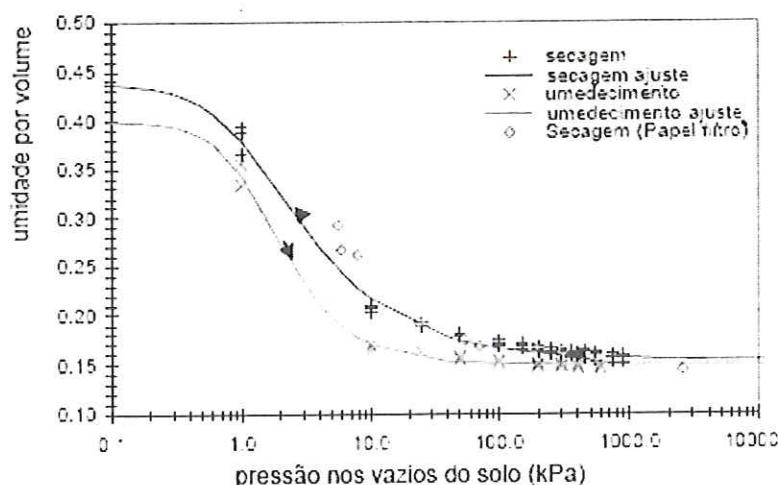
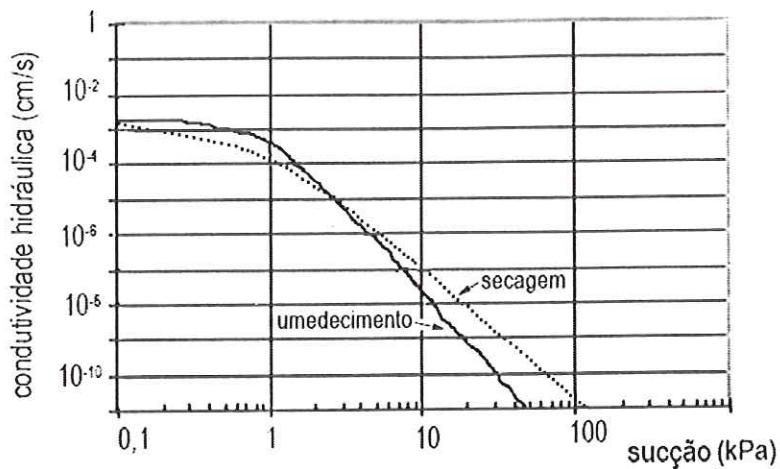
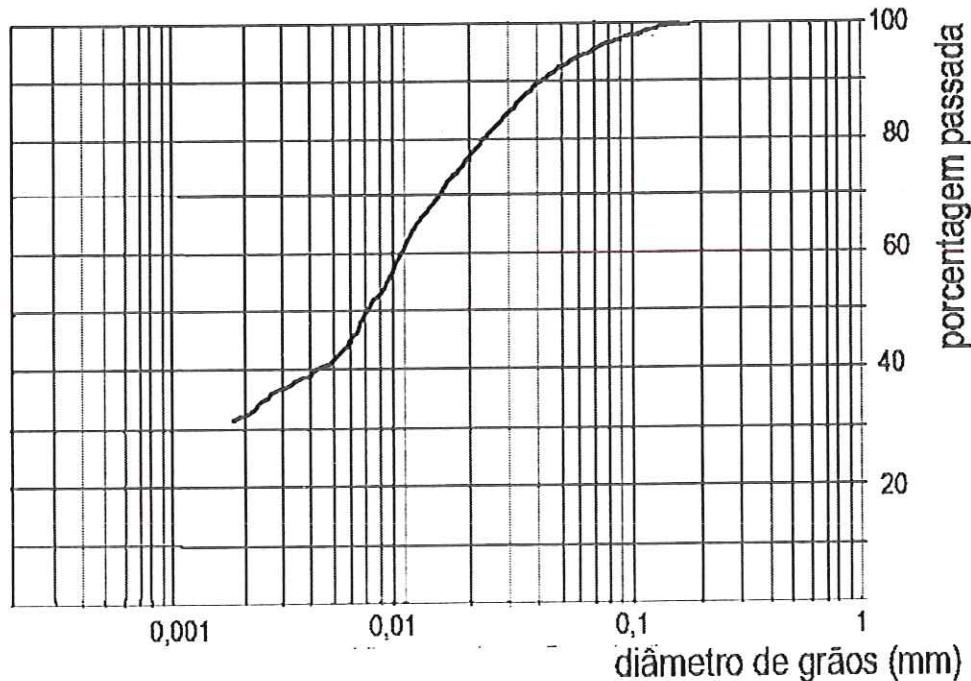


Figura 44 – Curva de retenção por secagem e umedecimento da amostra de solo à profundidade de 0,30m, SOTO (1999)



**Figura 45 – Curvas de retenção de água e função condutividade hidráulica da amostra de solo à profundidade de 0,30m, SOTO (1999)**

- d) BRUCH (1993) relata e discute ensaios de laboratório sobre solos da região de Saskatoon, Canadá, cuja curva granulométrica média está ilustrada na Figura 46;



**Figura 46 – Distribuição média de tamanho de grãos de solo de Saskatoon, BRUNCH (1993)**

- e) Segundo NBR 7181 da ABNT (1984), com 24% de areia, 32% de silte, e 44% de argila, o solo descrito é classificado como *argila siltosa*, também caracterizado por condutividade hidráulica saturada estimada em  $8,4 \times 10^{-9} m/s$ ;

- f) Também, em BRUCH (1993) publicou-se a função condutividade hidráulica do solo que ensaiou, ilustrada na Figura 47.

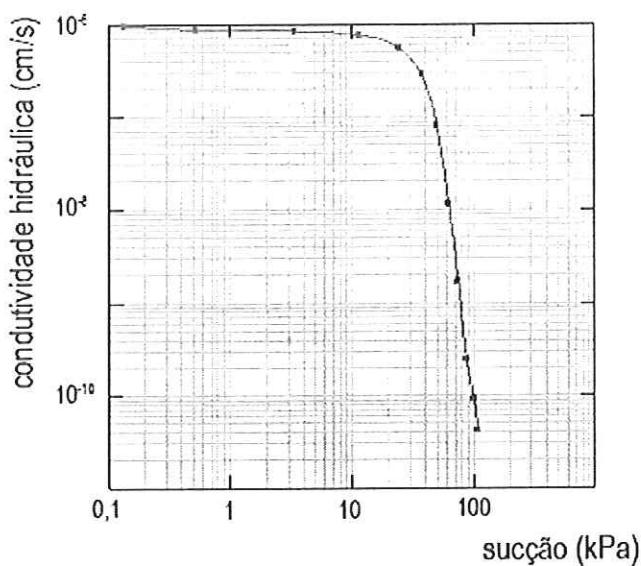


Figura 47 – Função condutividade hidráulica de solo do tipo argiloso, BRUCH (1993)

A Figura 48 ilustra um aterro hipotético, a *geometria de componente típico de estrutura de via* que, para análise de diferenças entre vazões percoladas ou infiltradas, será testada nas hipóteses:

- "Solo ou agregado sem percolação de água acima da linha freática, ou seja, ação para percolação de água atribuída apenas à condutividade hidráulica do solo saturado";
- "Solo ou agregado com percolação de água acima da linha freática, ou seja, ação para percolação de água atribuída também à condutividade hidráulica do solo não saturado".

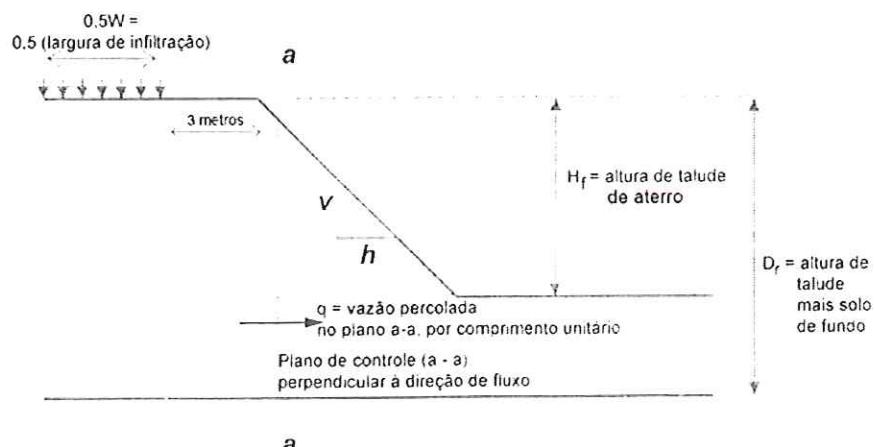


Figura 48 – Aterro hipotético para estudos sobre vazões em função de condutividade hidráulica

Onde:  $H_f$  = altura de um aterro,

$D_r$  = altura de aterro mais altura da camada de solo,

$W$  = largura de infiltração de água na superfície superior de aterro,

$h$  = projeção horizontal de segmento de inclinação de talude,

$v$  = projeção vertical de definição de segmento de inclinação de talude,

$a - a$  = projeção de plano de controle, perpendicular à direção de fluxo de água,

$q$  = vazão percolada através do plano  $a - a$  de controle, por comprimento unitário,

$q_v$  = vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície do aterro,

$k$  = condutividade hidráulica de solo.

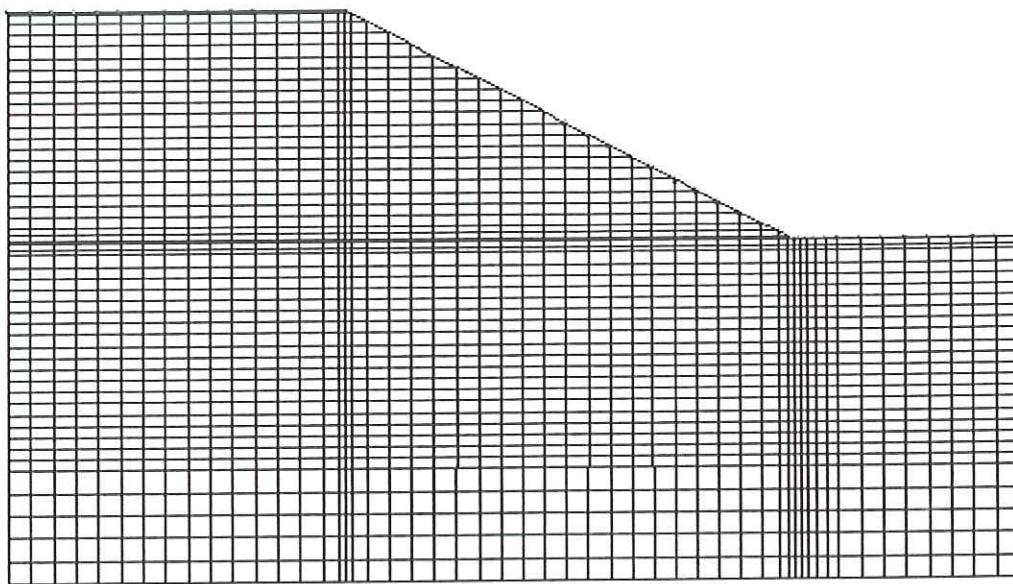
A origem primeira da Figura 48 é CEDERGREN (1974), página 82, e foi escolhida por se tratar de um dos tipos de geometria que mais ocorrem nos estudos sobre movimento de água em solos da estrutura de vias.

Adotando o símbolo tradicional da dimensão “comprimento”, “ $L$ ”, e do tempo, “ $T$ ”, para andamento de raciocínios:

- a) Observe-se que:  $q_v = \frac{q}{0,5W(1 \text{ comprimento unitário})}$ , ou as dimensões de  $q_v$  são  $|q_v| = LT^{-1}$ ;
- b) A condutividade hidráulica tem dimensões  $|k| = LT^{-1}$ ;
- c)  $\frac{H_f}{D_r}$ , a relação entre as alturas de um aterro e aterro mais altura de camada de solo, é um adimensional;

## 5.2 Preparação de dados e simulação do movimento de água

À Figura 48 corresponderia um tipo de “malha para estimativa de vazões processando dados e teorias com uso do método dos elementos finitos, ilustrado na Figura 49”.



**Figura 49 – Ilustração de malha para obter redes de percolação e linhas de fluxo para estimativa de vazões usando o método dos elementos finitos**

Há a esclarecer que uma lista de tipos de malhas para cobrir hipóteses de estudos sobre a percolação de água no sólido representado na Figura 48, se considerados os tipos de hipóteses sobre a condutividade hidráulica e saturação de sólidos ou agregados, conteria pelo menos 288 casos. E, adotando seis observações para a relação altura de aterro por largura de infiltração, e idem, para altura de aterro por altura de aterro mais solo de fundo, em cada simulação:

- a) estariam sendo estudadas 36 combinações de hipóteses para cada tipo de vazão observada, visando obter dados sobre a vazão no aterro hipotético da Figura 48
- b) e, comparando (ou testando hipótese estatística) para a estimativa de vazão que parte da condutividade hidráulica saturada e constante, ou variável e não saturada.

Ou, se estudam hipóteses sobre o movimento da água em domínios com relações geométricas entre a altura de um aterro,  $H_f$ , altura de aterro mais altura da camada de solo,  $D_r$ , largura de infiltração de água na superfície superior de aterro  $W$ ; projeção vertical de definição de segmento para definição de inclinação de talude,  $v$ , e projeção horizontal de segmento para definição de inclinação de talude,  $h$ , conforme listado na Tabela 13.

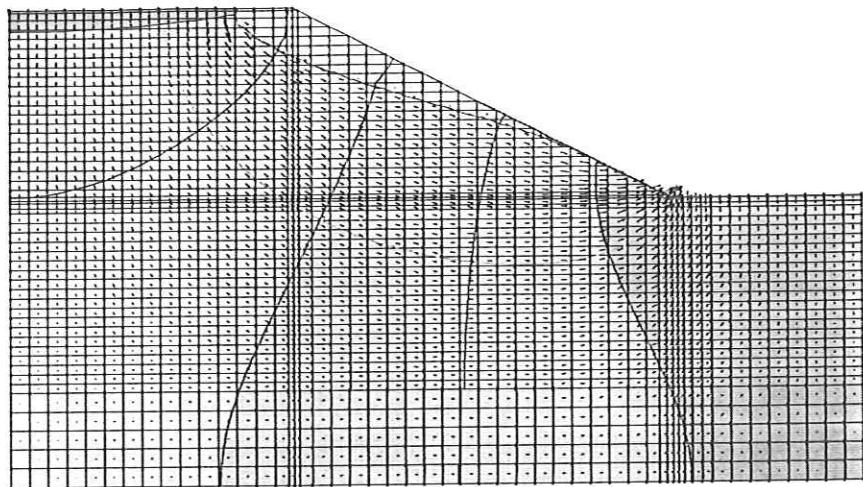
Tabela 13 – Hipóteses adotadas para estudo de caso

Tipo de solo	Inclinações de talude de aterro	Relações entre altura de aterro e aterro mais camada de solo, $\frac{H_f}{D_r}$	Relações entre altura do aterro e largura de infiltração, $\frac{H_f}{W}$
Arenoso, apud SOTO, 1999	<i>"1"</i> na vertical para <i>"1"</i> na horizontal, ou	0,40 0,50 0,57 0,66	0,42 0,55 0,70 1,00
Argiloso, apud BRUCH, 1993	<i>"1"</i> na vertical para <i>"2"</i> na horizontal	0,80 1,00	1,25 1,43

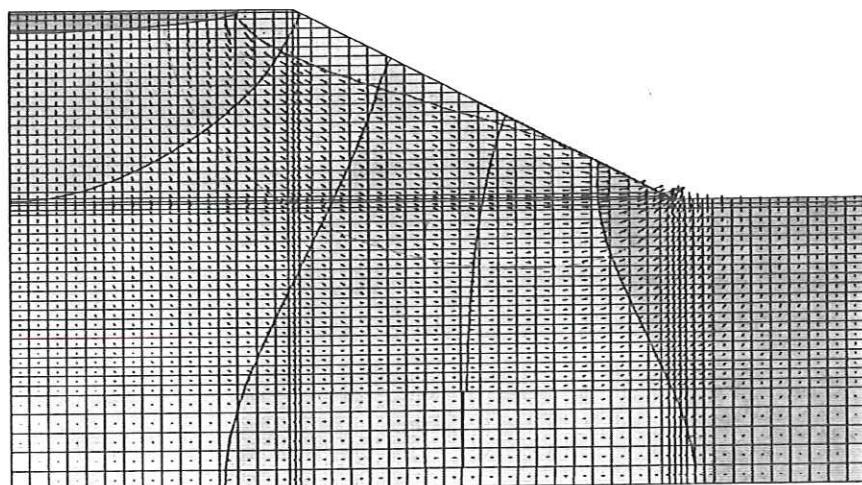
As malhas que discretizaram a geometria e as condições de contorno associadas às Figura 48 e Figura 49, as funções condutividade hidráulica (Figura 45 e Figura 47) forneceram os dados para processamento de estimativas de vazões. Adotou-se o Método dos Elementos Finitos e o auxílio de rotinas contidas no programa para computador SEEPW (GEO-SLOPE, 2002).

Com a geometria definida pela relação entre altura de aterro e aterro mais camada de solo,  $\frac{H_f}{D_r} = 0,50$ , e relação entre altura do aterro e largura de infiltração,  $\frac{H_f}{W} = 1,43$ , talude aterro de inclinação 1:2 (um na vertical, para dois na horizontal), para solo do tipo arenoso (características publicadas em SOTO, 1999):

- A Figura 51 ilustra a rede de percolação e linhas de fluxo para estimativas de vazão para solo do tipo arenoso (características obtidas de SOTO, 1999), incluindo a vazão acima da linha freática, correspondente à condutividade hidráulica de solo não saturado.
- A Figura 50, para solo saturado, ou condutividade hidráulica coincidente com o coeficiente de permeabilidade de solo saturado.



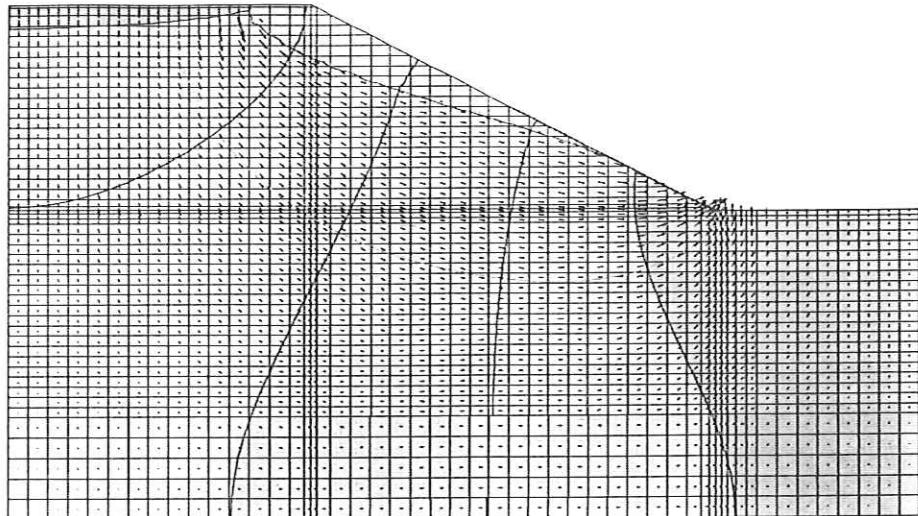
**Figura 50 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo arenoso de características obtidas de SOTO, 1999, não incluindo a vazão acima da linha freática**



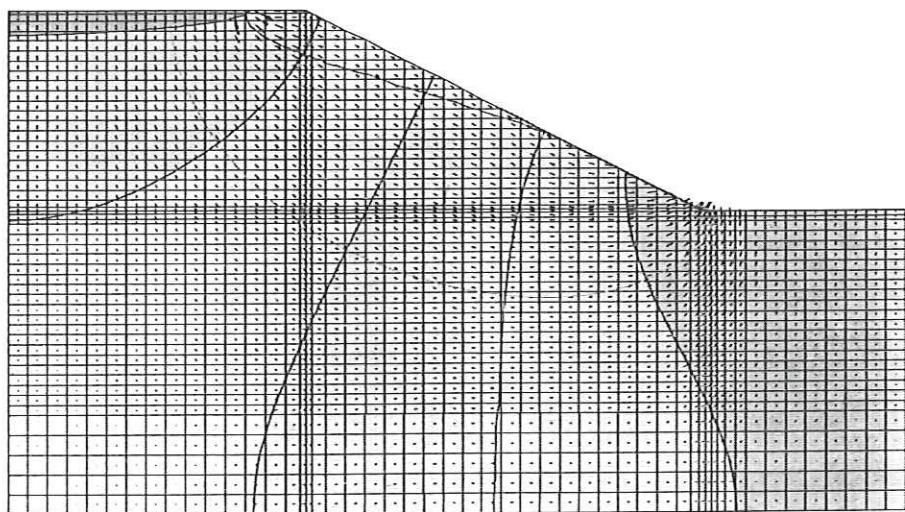
**Figura 51 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo arenoso de características obtidas de SOTO, 1999, incluindo a vazão acima da linha freática**

Há a comentar que, na parcela correspondente à condutividade de solo não saturado, ocorrem algumas (mas, são poucas!) linhas de fluxo acima da linha freática. Só uma observação parcimoniosa permite detectar tais contribuições à vazão pelos poros.

Para a mesma geometria, são ilustradas, nas Figura 52 e Figura 53, redes de percolação e linhas de fluxo para estimativas de vazão para solo do tipo argiloso (características obtidas em BRUNCH, 1993), na hipótese de condutividade hidráulica variável e de solo não saturado.



**Figura 52 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo argiloso de características obtidas de BRUNCH (1993), não incluindo a vazão acima da linha freática**



**Figura 53 – Rede de percolação e linhas de fluxo para solo do tipo argiloso de características obtidas de BRUNCH (1993), incluindo a vazão acima da linha freática**

As Tabela 14 até a Tabela 19 resumem dados e resultados de processamento de dados para obtenção da estimativa de vazão percolada em plano de controle por comprimento unitário,  $q$ , e infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro,  $q_v$ , para as hipóteses adotadas neste estudo de caso.

**Tabela 14 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso saturado, talude de declividade 1 na vertical, por 2 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q$ ( $10^{-5} \text{ m}^3/\text{s/m}$ )	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v$ ( $10^{-6} \text{ m/s}$ )
1,43	1,00	1,72	4,91
	0,80	2,03	5,80
	0,66	2,28	6,51
	0,57	2,45	7,00
	0,50	2,56	7,31
	0,40	2,68	7,66
1,25	1,00	1,77	4,43
	0,80	2,11	5,28
	0,66	2,38	5,95
	0,57	2,56	6,40
	0,50	2,70	6,75
	0,40	2,84	7,10
1,00	1,00	1,85	3,70
	0,80	2,22	4,44
	0,66	2,53	5,06
	0,57	2,76	5,52
	0,50	2,92	5,84
	0,40	3,10	6,20
0,71	1,00	1,94	2,77
	0,80	2,37	3,39
	0,66	2,74	3,91
	0,57	3,02	4,31
	0,50	3,23	4,61
	0,40	3,49	4,99
0,56	1,00	1,98	2,20
	0,80	2,46	2,73
	0,66	2,87	3,19
	0,57	3,20	3,56
	0,50	3,45	3,83
	0,40	3,76	4,18
0,42	1,00	2,01	1,68
	0,80	2,53	2,11
	0,66	2,98	2,48
	0,57	3,36	2,80
	0,50	3,65	3,04
	0,40	4,05	3,38

**Tabela 15 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q (10^{-5} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-6} m/s)$
1,43	1,00	1,9	5,43
	0,80	2,26	6,46
	0,66	2,53	7,23
	0,57	2,72	7,77
	0,50	2,84	8,11
	0,40	2,96	8,46
1,25	1,00	1,97	4,93
	0,80	2,35	5,88
	0,66	2,64	6,60
	0,57	2,85	7,13
	0,50	3,00	7,50
	0,40	3,15	7,88
1,00	1,00	2,05	4,10
	0,80	2,48	4,96
	0,66	2,83	5,66
	0,57	3,08	6,16
	0,50	3,26	6,52
	0,40	3,46	6,92
0,71	1,00	2,17	3,10
	0,80	2,66	3,80
	0,66	3,07	4,39
	0,57	3,39	4,84
	0,50	3,63	5,19
	0,40	3,91	5,59
0,56	1,00	2,23	2,48
	0,80	2,76	3,07
	0,66	3,21	3,57
	0,57	3,59	3,99
	0,50	3,87	4,30
	0,40	4,23	4,70
0,42	1,00	2,26	1,88
	0,80	2,84	2,37
	0,66	3,35	2,79
	0,57	3,77	3,14
	0,50	4,11	3,43
	0,40	4,56	3,80

**Tabela 16 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q (10^{-5} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-6} m/s)$
1,43	1,00	2,27	6,49
	0,80	2,60	7,43
	0,66	2,77	7,91
	0,57	2,87	8,20
	0,50	2,93	8,37
	0,40	2,97	8,49
1,25	1,00	2,37	5,93
	0,80	2,75	6,88
	0,66	2,95	7,38
	0,57	3,08	7,55
	0,50	3,14	7,85
	0,40	3,21	8,03
1,00	1,00	2,52	5,04
	0,80	2,97	5,94
	0,66	3,25	6,50
	0,57	3,40	6,80
	0,50	3,50	7,00
	0,40	3,59	7,18
0,71	1,00	2,71	3,87
	0,80	3,27	4,67
	0,66	3,64	5,20
	0,57	3,88	5,54
	0,50	4,03	5,76
	0,40	4,19	5,99
0,56	1,00	2,81	3,12
	0,80	3,44	3,82
	0,66	3,90	4,33
	0,57	4,20	4,67
	0,50	4,41	4,90
	0,40	4,61	5,12
0,42	1,00	2,88	2,40
	0,80	3,59	2,99
	0,66	4,12	3,43
	0,57	4,51	3,76
	0,50	4,78	3,98
	0,40	5,09	4,24

**Tabela 17 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo arenoso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q (10^{-5} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-6} m/s)$
1,43	1,00	2,50	7,14
	0,80	2,86	8,17
	0,66	3,06	8,74
	0,57	3,15	9,00
	0,50	3,22	9,20
	0,40	3,26	9,31
1,25	1,00	2,62	6,55
	0,80	3,03	7,58
	0,66	3,26	8,15
	0,57	3,39	8,48
	0,50	3,48	8,70
	0,40	3,53	8,83
1,00	1,00	2,81	5,62
	0,80	3,29	6,58
	0,66	3,60	7,20
	0,57	3,78	7,56
	0,50	3,88	7,76
	0,40	3,98	7,96
0,71	1,00	3,03	4,33
	0,80	3,64	5,20
	0,66	4,06	5,80
	0,57	4,34	6,20
	0,50	4,50	6,43
	0,40	4,67	6,67
0,56	1,00	3,14	3,49
	0,80	3,85	4,28
	0,66	4,36	4,84
	0,57	4,71	5,23
	0,50	4,93	5,48
	0,40	5,18	5,76
0,42	1,00	3,21	2,68
	0,80	4,01	3,34
	0,66	4,62	3,85
	0,57	5,06	4,22
	0,50	5,36	4,47
	0,40	5,70	4,75

**Tabela 18 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo, $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q (10^{-8} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-9} m/s)$
1,43	1,00	1,81	5,17
	0,80	2,20	6,29
	0,66	2,53	7,23
	0,57	2,77	7,91
	0,50	2,94	8,40
	0,40	3,14	8,97
1,25	1,00	1,84	4,55
	0,80	2,25	5,45
	0,66	2,59	6,18
	0,57	2,84	6,70
	0,50	3,03	7,05
	0,40	3,24	7,45
1,00	1,00	1,89	3,78
	0,80	2,33	4,58
	0,66	2,69	5,22
	0,57	2,97	5,70
	0,50	3,17	6,02
	0,40	3,41	6,42
0,71	1,00	1,95	2,79
	0,80	2,43	3,46
	0,66	2,83	3,99
	0,57	3,15	4,40
	0,50	3,39	4,71
	0,40	3,69	5,09
0,56	1,00	1,98	2,22
	0,80	2,49	2,77
	0,66	2,93	3,23
	0,57	3,28	3,60
	0,50	3,55	3,88
	0,40	3,90	4,24
0,42	1,00	2,00	1,69
	0,80	2,54	2,13
	0,66	3,01	2,51
	0,57	3,40	2,83
	0,50	3,71	3,00
	0,40	4,12	3,33

**Tabela 19 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 1 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada por comprimento unitário, $q (10^{-8} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-9} m/s)$
1,43	1,00	2,57	7,34
	0,80	3,04	8,69
	0,66	3,34	9,54
	0,57	3,52	10,06
	0,50	3,62	10,34
	0,40	3,71	10,60
1,25	1,00	2,63	6,58
	0,80	3,13	7,83
	0,66	3,45	8,63
	0,57	3,65	9,13
	0,50	3,76	9,40
	0,40	3,86	9,65
1,00	1,00	2,73	5,46
	0,80	3,28	6,56
	0,66	3,64	7,28
	0,57	3,87	7,74
	0,50	4,01	8,02
	0,40	4,14	8,28
0,71	1,00	2,87	4,10
	0,80	3,49	4,99
	0,66	3,93	5,61
	0,57	4,21	6,01
	0,50	4,40	6,29
	0,40	4,58	6,54
0,56	1,00	2,94	3,27
	0,80	3,62	4,02
	0,66	4,12	4,58
	0,57	4,46	4,96
	0,50	4,68	5,20
	0,40	4,92	5,47
0,42	1,00	2,99	2,49
	0,80	3,73	3,11
	0,66	4,29	3,58
	0,57	4,70	3,92
	0,50	4,98	4,15
	0,40	5,30	4,42

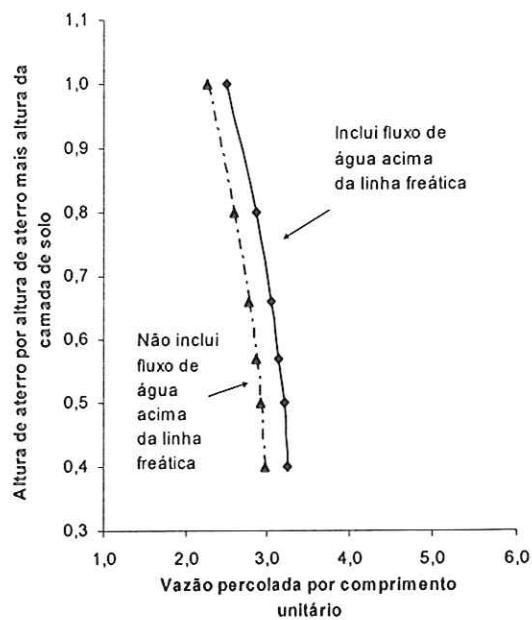
**Tabela 20 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal**

Allura de aterro por largura de infiltração de água na superficie superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário, $q$ ( $10^{-8} m^3/s/m$ )	Vazão infiltrada, por unidade de área, na superficie superior do aterro, $q_v$ ( $10^{-9} m/s$ )
1,43	1,00	1,78	5,09
	0,80	2,12	6,06
	0,66	2,39	6,83
	0,57	2,58	7,37
	0,50	2,70	7,71
	0,40	2,84	8,11
1,25	1,00	1,82	4,60
	0,80	2,18	5,63
	0,66	2,47	6,48
	0,57	2,68	7,10
	0,50	2,82	7,58
	0,40	2,98	8,10
1	1,00	1,89	3,78
	0,80	2,29	4,66
	0,66	2,61	5,38
	0,57	2,85	5,94
	0,50	3,01	6,34
	0,40	3,21	6,82
0,71	1,00	1,95	2,79
	0,80	2,42	3,47
	0,66	2,79	4,04
	0,57	3,08	4,50
	0,50	3,30	4,84
	0,40	3,56	5,27
0,56	1,00	2,00	2,20
	0,80	2,49	2,77
	0,66	2,91	3,26
	0,57	3,24	3,64
	0,50	3,49	3,94
	0,40	3,82	4,33
0,42	1,00	2,03	1,67
	0,80	2,55	2,12
	0,66	3,01	2,51
	0,57	3,39	2,83
	0,50	3,60	3,09
	0,40	3,99	3,43

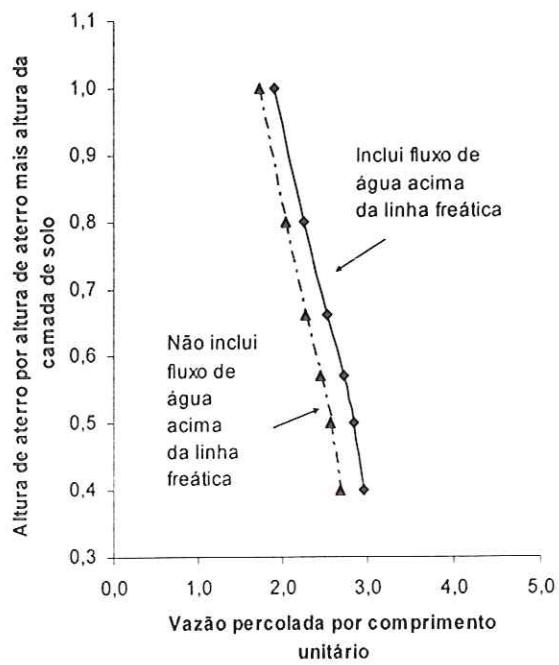
**Tabela 21 - Estimativa vazão percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso, solo argiloso não saturado, talude de declividade 1 na vertical por 2 na horizontal**

Altura de aterro por largura de infiltração de água na superfície superior de aterro, $\frac{H_f}{w}$	Altura de aterro por altura de aterro mais altura da camada de solo $\frac{H_f}{D_r}$	Vazão percolada por comprimento unitário, $q (10^{-8} m^3/s/m)$	Vazão infiltrada por unidade de área, na superfície superior do aterro, $q_v (10^{-9} m/s)$
1,43	1,00	2,41	6,89
	0,80	2,78	7,94
	0,66	2,99	8,54
	0,57	3,1	8,86
	0,50	3,17	9,06
	0,40	3,23	9,23
1,25	1,00	2,50	6,25
	0,80	2,91	7,28
	0,66	3,15	7,88
	0,57	3,28	8,20
	0,50	3,36	8,40
	0,40	3,43	8,58
1,00	1,00	2,63	5,26
	0,80	3,10	6,20
	0,66	3,40	6,80
	0,57	3,58	7,16
	0,50	3,69	7,38
	0,40	3,78	7,56
0,71	1,00	2,81	4,01
	0,80	3,38	4,83
	0,66	3,77	5,39
	0,57	4,02	5,74
	0,50	4,17	5,96
	0,40	4,33	6,19
0,56	1,00	2,89	3,21
	0,80	3,54	3,93
	0,66	4,00	4,44
	0,57	4,32	4,80
	0,50	4,52	5,02
	0,40	4,74	5,27
0,42	1,00	2,96	2,47
	0,80	3,67	3,06
	0,66	4,21	3,51
	0,57	4,60	3,83
	0,50	4,87	4,06
	0,40	5,18	4,32

As Figura 54 até à Figura 61 ilustram exemplos de estimativas que ressaltam diferenças entre as estimativas de vazão percolada por comprimento unitário, infiltradas por área unitária de superfície de aterro obtidas.



**Figura 54 – Vazão percolada em  $10^{-5}\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$  em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43**



**Figura 55 - Vazão percolada em  $10^{-5}\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$  em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43**

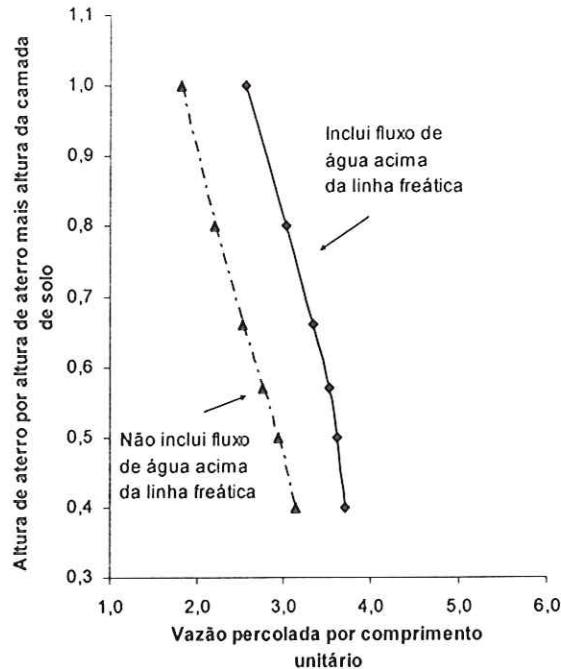


Figura 56 - Vazão percolada em  $10^{-8}\text{m}^3/\text{s/m}$  em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

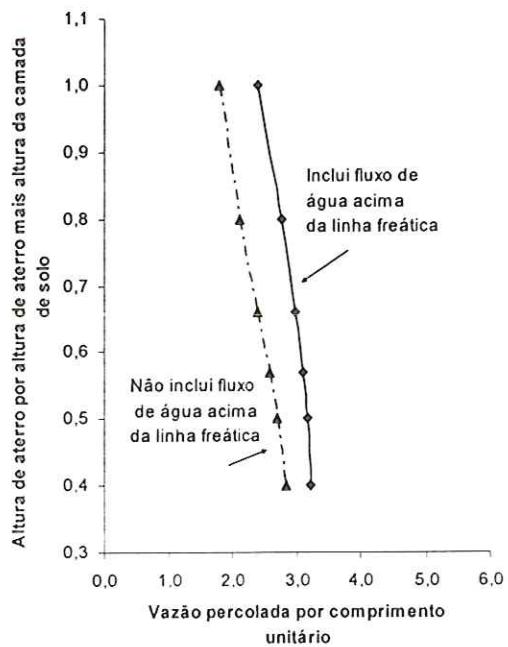


Figura 57 - Vazão percolada em  $10^{-8}\text{m}^3/\text{s/m}$  em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

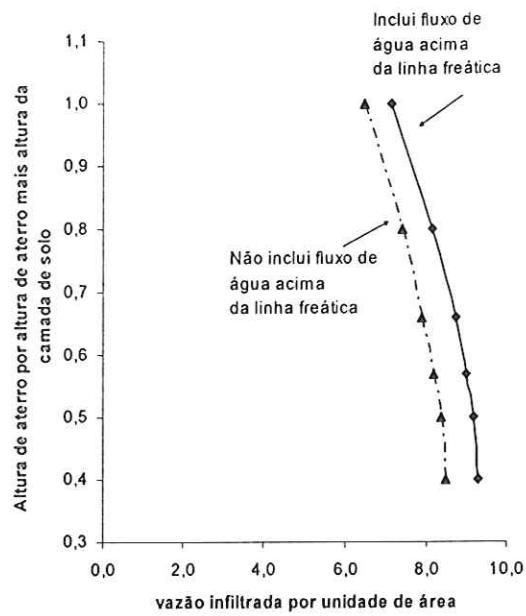


Figura 58 - Vazão infiltrada ( $10^{-6}\text{m/s}$ ) em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999),  
talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

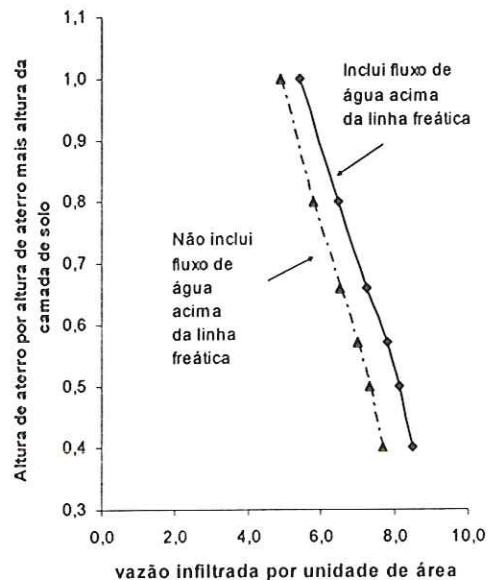


Figura 59 - Vazão infiltrada ( $10^{-6}\text{m/s}$ ) em solo arenoso de características obtidas em SOTO (1999),  
talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

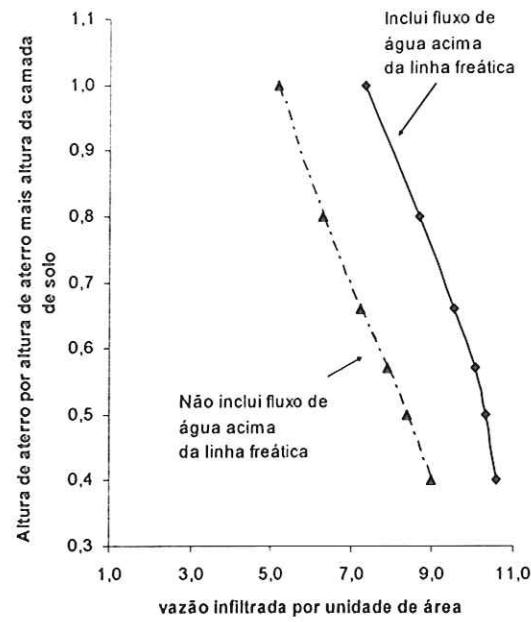


Figura 60 - Vazão infiltrada em  $10^{-9}$ m/s, em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 1 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

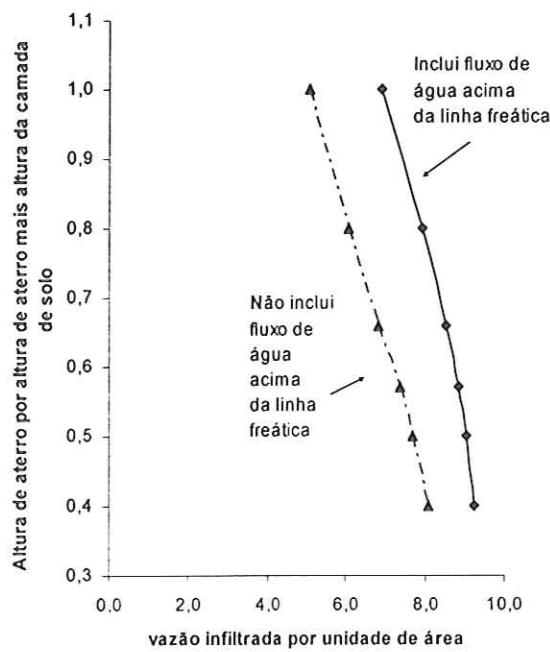


Figura 61 - Vazão infiltrada em  $10^{-9}$ m/s, em solo argiloso de características obtidas em BRUCH (1993), talude 2 na horizontal por 1 na vertical, altura de talude por largura de infiltração 1,43

## 6 Testes de hipóteses sobre os dados obtidos

---

Para os estudos que se seguem, supõe-se que as medidas simuladas para vazões específicas, percoladas, ou infiltradas, (resultados expostos nas Tabela 14 até Tabela 19) representem valores médios de volume de movimento de água do processo de percolação de água nos solos usados no estudo de caso exposto a partir da Figura 48.

A comprovação, usando técnicas da estatística, de que sejam diferentes as vazões percolada e infiltrada pode adotar, por exemplo, o estudo de decisões sobre a significância de parâmetros obtidos para medidas sobre a população correspondente à simulação decorrente do uso de elementos finitos para estudo sobre esse tipo de processo de movimento de água.

### 6.1 Um pouco sobre a teoria da decisão estatística

A *tomada de decisões usando amostras de medidas sobre populações*, mais conhecido como *teste de hipóteses*, consiste em escolher entre duas afirmativas opostas sobre o comportamento de variáveis que descrevem características de população - uma estatisticamente verdadeira, e outra falsa. Essas afirmativas são chamadas *hipóteses*.

Chama-se *hipótese nula* à afirmativa que contém informações de que não ocorrem *nenhum efeito, mudança, ou diferença entre características de elementos de população*. Trata-se de uma sentença lógica cujos sujeitos são parâmetros de população, e que contém uma igualdade (*sinal de =*). A notação adotada para a hipótese nula é  $H_0$ .

Chama-se *hipótese alternativa* uma afirmativa que se admite seja verdadeira, em oposição à hipótese nula. Esse tipo de sentença lógica contém afirmações

sobre parâmetros de população que estabeleceriam diferenças entre características de elementos de população (a notação adotada é resumida pelos sinais  $\neq, >, <, \dots$ ). A notação usual para a hipótese alternativa é  $H_1$ .

Um número usado para tomar decisões em um teste de hipóteses é um controle chamado de *teste estatístico*. Por exemplo, o escore  $z$ , da distribuição normal, associado à média obtida por amostragem,  $\bar{x}$ , e, ao desvio padrão,  $\sigma$ , de população.

Chama-se *região crítica de um teste de hipótese*, ou simplesmente *região crítica*, aos valores de um teste estatístico que fornece evidências em favor da aceitação da hipótese alternativa. Ou seja, os *valores na região crítica sugerem a rejeição de validade da hipótese nula*. Se, a *hipótese nula for verdadeira*, a probabilidade de que um teste estatístico pertença à região crítica é chamado de *nível de significância* do teste,  $\alpha$ .

O roteiro usual para os testes de hipótese é:

- a) *Identificar e escrever a hipótese nula,  $H_0$ , e a hipótese alternativa,  $H_1$*  - que serão usualmente *conjecturas (suspeitas ou crenças)* sobre um, ou mais, parâmetros de população;
- b) *Escolher  $\alpha$ , o nível de significância* - o valor de  $\alpha$  é usualmente pequeno,  $\alpha \leq 0,10$ ;
- c) *Escolher o teste estatístico e estimar seu valor a partir de dados observados* - o chamado *valor observado, ou estimativo, do teste estatístico*;
- d) *Determinar a região crítica* - as dimensões da região crítica são funções do nível de significância  $\alpha$  ;
- e) *Testar a hipótese* - caso o valor do teste estatístico pertença à região crítica, rejeitar  $H_0$ , em favor da hipótese alternativa. Diz-se que os resultados são *estatisticamente significantes*. Se o valor do teste não pertence à região crítica, falhou-se ao rejeitar  $H_0$  - *não há evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula* - deve-se decidir em linguagem de leigos, porque para isto não é possível usar o vocabulário técnico.

Segundo CHASE & BROWN, 1992, página 354, sob o pseudônimo de *Student*, em 1908, Gosset introduziu o teste  $t$ , uma variável aleatória para análise de parâmetros de populações a partir de pequenas amostras. A significância da média de medidas sobre uma população pode ser efetuada usando para controle a estatística  $t$  de *Student*. Se a população tem média  $\mu$ ; a amostra,  $n$

$$\text{elementos e média } \bar{x} \text{ e desvio padrão estimado } s: t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Dentre as propriedades da distribuição do  $t$  de *Student* destacam-se:

- a) Existem infinitas distribuições  $t$ , associáveis ao número de graus de liberdade - o que mais se utiliza, entretanto tem  $n-1$  graus de liberdade;
- b) A forma da curva da distribuição  $t$  é similar à distribuição normal;
- c) Para  $n \geq 30$ , a distribuição  $t$  é aproximadamente normal.

Assumindo-se que:

- a) A população tem distribuição normal, ou aproximadamente normal;
- b) O tamanho de cada amostra adotada ( $n$ ) é menor que 30;
- c) E o desvio padrão de população ( $\sigma$ ) é desconhecido.

Para testar hipóteses sobre a média  $\mu$ , usa-se o teste estatístico  $t$  de *Student observado*, obtido substituindo-se  $\mu$ , pelo valor atribuído à média na hipótese nula - o valor observado para  $t$  é estimado usando dados de amostragem. Esta estatística tem a distribuição do  $t$  de *Student*, com  $n-1$  graus de liberdade. Caso o valor do teste caia na região crítica, rejeita-se a hipótese  $H_0$ . Se  $\alpha$  é o nível de significância do teste, as regiões críticas podem ser descritas, em resumo nas Figura 62 até a Figura 64.

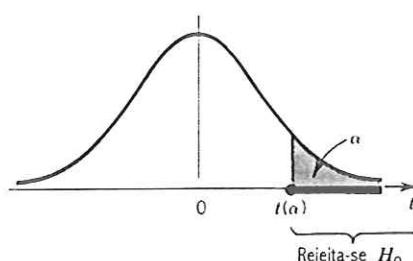


Figura 62 - Região crítica do teste  $t$ , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “>” (cauda à direita)

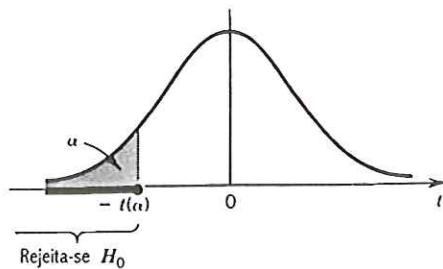


Figura 63 - Região crítica do teste  $t$ , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “ $<$ ” (teste com cauda à esquerda)

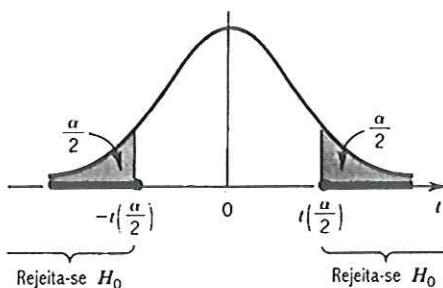


Figura 64 - Região crítica do teste  $t$ , para a média de população, quando a hipótese alternativa contém o símbolo “ $\neq$ ” (duas caudas)

O teste estatístico a ser usado para testar hipóteses sobre médias de populações é função de um grande número de fatores. Um deles é o método usado para obter as amostras. Duas amostras são *independentes* se os dados observados em uma não possuem relações com os dados observados na outra. E, duas amostras são *dependentes*, se os dados de uma amostra são alinhados naturalmente com os dados da outra.

Para comparar as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$  de amostras sobre populações “1” e “2”, cujos dados são representados por  $X_1$  e  $X_2$ , usa-se a diferença entre médias,  $\Delta\mu = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , e hipóteses sobre o parâmetro que representa a média da população  $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ .

O teste de hipótese é formulado:

$$H_o : \mu_{\Delta\mu} = 0$$

$$H_1 : \mu_{\Delta\mu} > 0$$

Para amostras pequenas, usa-se como o controle a estatística  $t$  de Student. Se  $\overline{\Delta\mu}$  é a média das diferenças entre as médias na amostragem;  $s_d$ , o desvio padrão das diferenças entre médias nas amostras e  $n$  o número diferenças entre médias e número de graus de liberdade  $n - 1$ , usa-se o teste estatístico:

$$t = \frac{\overline{\Delta\mu} - \mu_{\Delta\mu}}{s_d / \sqrt{n}}$$

O intervalo de confiança  $1 - \alpha$  pode ser estimado

$$\overline{\Delta\mu} \pm t \left( \frac{\alpha}{2} \right) \frac{s_{\Delta\mu}}{\sqrt{n}}$$

Quando uma das amostras é pequena, número de observações menor que 30, para testar diferenças entre médias se podem usar as distribuições observadas sobre a população, que são aproximadamente normais. Se  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são conhecidos, pode-se adotar o *t de Student para estudos sobre parâmetros das diferenças entre médias,  $\mu_1 - \mu_2$* :

a) Se  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \cdot \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}}$

Onde:  $s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

A estatística estimada  $t$  tem a distribuição aproximada ao *t de Student*, com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade.

b) Se  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)}}$

Outro teste estatístico usual para controle da diferença entre médias é o  $t$ , que tem a distribuição aproximada ao *t de Student*, com o menor,  $n_1 - 1$ , ou,  $n_2 - 1$ , graus de liberdade. É usual que as diferenças  $\mu_1 - \mu_2$ : sejam especificadas na

hipótese nula. E, para os *intervalos de confiança*  $1 - \alpha$  da diferença entre médias,  $\mu_1 - \mu_2$ :

a) Se  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ , com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade.

b) Se  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ , com o menor,  $n_1 - 1$ , ou  $n_2 - 1$ , graus de liberdade.

## 6.2 O teste da diferença de médias para vazões percolada e infiltrada

As variáveis escolhidas para descrição de comportamento do movimento de água nos solos saturados e não saturados foram, seja para vazões percolada ou infiltrada, a diferença entre o valor obtido em simulação com uso de coeficiente de permeabilidade hidráulica saturada, conforme o que se expôs em CEDERGREN (1967), ou seja, com uso da condutividade hidráulica para solo não saturado.

Assim, para testar a diferença de médias pode-se supor que a diferença de médias na população,  $(\mu_1 - \mu_2)$ , é zero,  $(\mu_1 - \mu_2) = 0$ . E se,  $\overline{q_{não\ saturado}}$  é a média de vazões específicas percoladas por um tipo de solo não saturado, e  $\overline{q_{saturado}}$ , idem para o mesmo solo saturado, optando por testar a hipótese de que existe a contribuição da parcela de solo não saturado, um teste de hipóteses para a significância da diferença de médias de medidas para vazão poderia ser formulado:

$$H_0 : \overline{q_{não\ saturado}} - \overline{q_{saturado}} = 0$$

$$H_1 : \overline{q_{não\ saturado}} - \overline{q_{saturado}} > 0$$

Analogamente, se,  $\overline{q_{vnão\ saturado}}$  é a média das vazões infiltradas específicas percoladas por um tipo de solo não saturado, e  $\overline{q_{vsaturado}}$ , idem para o mesmo tipo de solo saturado, um teste de hipóteses para a existência da diferença de

médias de medidas de vazão para estes dois tipos de solo poderia ser formulado:

$$H_o : \overline{q_{v \text{ não saturado}}} - \overline{q_{v \text{ saturado}}} = 0$$

$$H_1 : \overline{q_{v \text{ não saturado}}} - \overline{q_{v \text{ saturado}}} > 0$$

Com os dados expostos nas Tabela 14 até Tabela 19, pode-se estimar um conjunto de diferenças de médias cujas médias e desvios padrão se resume na Tabela 22.

**Tabela 22 - Estimativa de médias de diferenças de médias e desvios padrão de vazões percoladas , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso**

Tipo de solo	Talude (vertical para horizontal)	Vazão percolada através do plano de controle, por comprimento unitário		Vazão infiltrada, por unidade de área, na superfície superior do aterro	
		Solo saturado	Solo não saturado	Solo saturado	Solo não saturado
Arenoso $10^{-5} q$ $m^3/s/m,$ $10^{-6} q_v$ $m/s$	1:2	Média	2,68	3,00	4,58
		Desvio padrão	0,59	0,67	1,64
	1:1	Média	3,41	3,81	5,74
		Desvio padrão	0,71	0,80	1,74
	1:2 e 1:1	Média	3,05	3,40	5,16
		Desvio padrão	0,75	0,85	1,77
Argiloso $10^{-8} q$ $m^3/s/m,$ $10^{-9} q_v$ $m/s$	1:2	Média	2,85	3,80	4,76
		Desvio padrão	0,62	0,70	1,91
	1:1	Média	2,75	3,57	4,84
		Desvio padrão	0,56	0,68	1,89
	1:2 e 1:1	Média	2,68	3,00	4,58
		Desvio padrão	0,59	0,67	1,64

Os desvios padrão em cada um dos experimentos são diferentes. Assim, para as estimativas do *t de Student* se podem adotar as fórmulas expostas na Tabela 23, que também contém os resultados de estimativa e intervalos de confiança que levam à rejeição das hipóteses nulas sobre o comportamento de diferenças entre vazões para quando se adota a condutividade hidráulica de solo saturado, ou não saturado.

Há a informar que os valores do  $t$  de Student usados para controle foram obtidos da tabela B.4, Appendix B, página A-16, de CHASE & BROWN (1992).

**Tabela 23 - Estimativa de intervalos de confiança de vazões percolada , por comprimento unitário e infiltrada por unidade de área, estudo de caso**

Tipo de solo	Talude (vertical para horizontal)	Diferenças entre vazões percoladas através do plano de controle, por comprimento unitário	Diferenças entre vazões infiltradas, por unidade de área, na superfície superior do aterro
		$t = \frac{q_{não\ saturado} - q_{saturado}}{\sqrt{(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)}}$	$t = \frac{q_{v\ não\ saturado} - q_{v\ saturado}}{\sqrt{(s_3^2/n_3) + (s_4^2/n_4)}}$
Arenoso $10^{-5} q$ $m^3/s/m,$ $10^{-6} q_v$ $m/s$	1:2	2,127419 $t_{estimado} > t (.025)=1,96$	1,3208108 $t_{estimado} > t (.10)=1,282$
	1:1	2,201701 $t_{estimado} > t (.025)=1,96$	1,492211 $t_{estimado} > t (.10)=1,282$
	1:1 e 1:2	2,653156 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$	1,346034 $t_{estimado} > t (.10)=1,282$
Argiloso $10^{-8} q$ $m^3/s/m,$ $10^{-9} q_v$ $m/s$	1:2	6,341566 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$	3,35089 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$
	1:1	5,487626 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$	2,615243 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$
	1:2 e 1:1	8,116978 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$	4,307565 $t_{estimado} > t (.005)=2,5766$

O exposto na Tabela 23 permite classificar a significância das simulações efetuadas em quatro grupos:

- Figura 65, solo argiloso,  $\alpha = 0,005$ , ou seja, conjunto onde 0,5% das medidas têm probabilidade de não pertencer ao grupo estatístico constituído pelas diferenças entre as vazões percoladas ou infiltradas estimadas com uso de condutividade hidráulica para argila de grau de saturação variável entre as características de sólido com vazios cheios de água e a vazão estimada com condutividade correspondente ao vazio preenchido com água e ar;

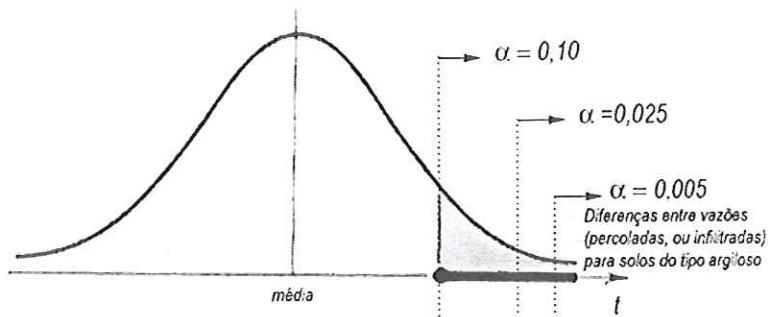


Figura 65 – Confiança estatística em diferenças entre vazões (percoladas, ou infiltradas) para solos do tipo argiloso

Para esse conjunto, a evidência é o fato de que proporcionalmente ao volume de água que percola, ou que infiltra, pela argila há uma contribuição ao movimento de água da parcela não saturada do solo, que tem significância estatística.

A análise da diferença entre médias indicou que o acréscimo de vazões seria positivo, com 99,5% de confiança. Isto ocorreu, para trinta e seis observações em cada um dos tipos de geometria de talude adotados, ou para a união das observações sobre os dois tipos de inclinações adotadas, 1:1 e 1:2.

- b) Figura 66, solo arenoso,  $\alpha = 0,005$ , ou seja, 0,5% das medidas têm probabilidade de não pertencer ao grupo estatístico constituído pelas diferenças entre as vazões percoladas estimadas com uso de condutividade hidráulica para argila de grau de saturação variável entre as características de sólido com vazios cheios de água e a condutividade de solo com vazio preenchido com água e ar.

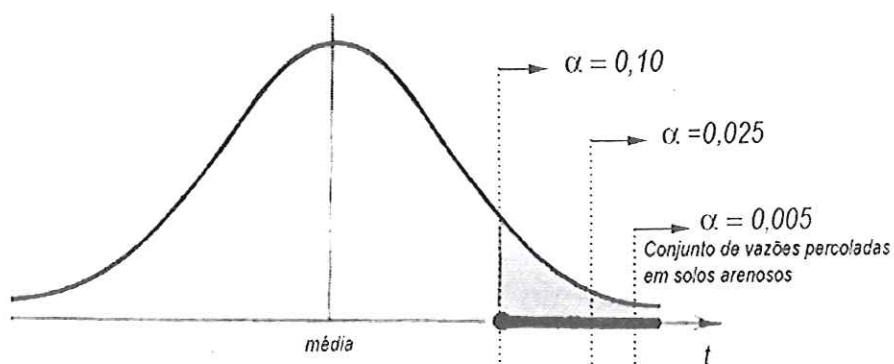
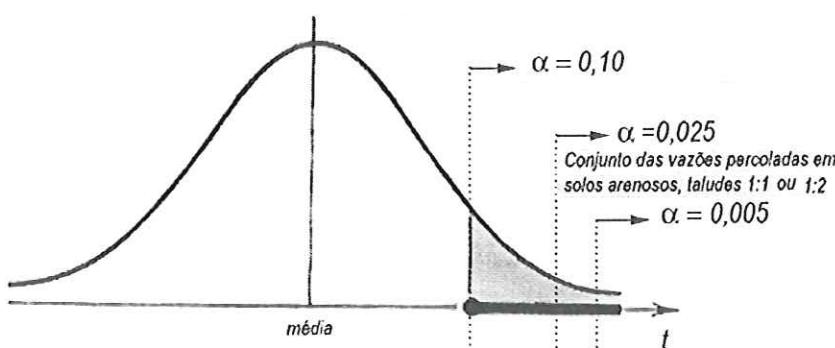


Figura 66 – Confiança estatística em diferenças entre vazões percoladas para solos do tipo arenoso, taludes de aterro 1:1 e 1:2

Há a observar que este grupo tem por elementos o conjunto de observações sobre taludes de aterro de inclinações 1:1 e 1:2, ou seja, dois tipos de geometria de taludes, 72 observações.

Mas, também para esse conjunto, a evidência também é o fato de que, proporcionalmente ao volume de água que percola pela areia, há uma contribuição ao movimento de água da parcela não saturada do solo, que tem significância estatística. A análise da diferença entre médias indicou que o acréscimo de vazões seria positivo, com 99,5% de confiança.

- c) Figura 67, solo arenoso,  $\alpha = 0,025$ , ou seja, conjunto onde 2,5% das medidas têm probabilidade de não pertencer ao grupo estatístico constituído pelas diferenças entre as vazões percoladas estimadas com uso de condutividade hidráulica para areia de grau de saturação variável entre as características de sólido com vazios cheios de água e a condutividade de solo com vazio preenchido com água e ar;



**Figura 67 - Confiança estatística em diferenças entre vazões (percoladas, ou infiltradas) para solos do tipo arenoso, taludes 1:1 ou 1:2**

Para esse conjunto, também a evidência é o fato de que proporcionalmente ao volume de água que percola pela areia há uma contribuição ao movimento de água da parcela não saturada do solo, que tem significância estatística.

A análise da diferença entre médias indicou que o acréscimo de vazões seria positivo, com 97,5% de confiança. Isto ocorreu para trinta e seis observações

em cada um dos tipos de geometria de talude adotados isoladamente para as observações sobre os dois tipos de inclinações, 1:1 ou 1:2.

- d) Figura 68, solo arenoso,  $\alpha = 0,10$ . Ou seja, conjunto onde 10% das medidas têm probabilidade de não pertencer ao grupo estatístico constituído pelas diferenças entre vazões infiltradas estimadas com uso de condutividade hidráulica para areia de grau de saturação variável entre as características de sólido com vazios cheios de água e a condutividade de solo com vazio preenchido com água e ar.

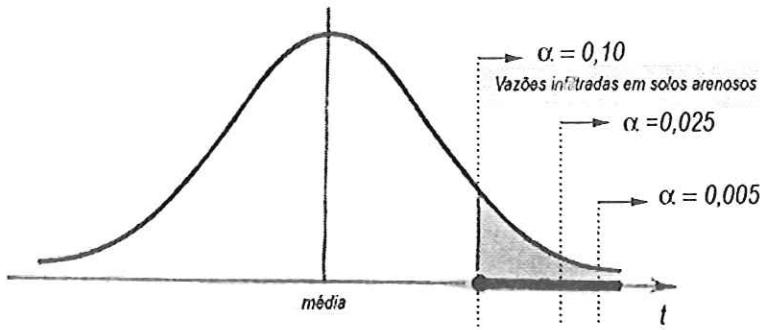


Figura 68 - Confiança estatística em diferenças entre vazões infiltradas para solos do tipo arenoso

Para esse conjunto, também a evidência é o fato de que proporcionalmente ao volume de água que infiltra pela areia há uma contribuição ao movimento de água da parcela não saturada do solo, que tem significância estatística.

A análise da diferença entre médias indicou que o acréscimo de vazões seria positivo, com 90% de confiança. Isto ocorreu, para trinta e seis observações em cada um dos tipos de geometria de talude adotados, ou para a união das observações sobre os dois tipos de inclinações, 1:1 e 1:2.

## 7 Conclusões e sugestões

---

Descreveram-se e comentaram-se tópicos sobre as relações entre o formato de vias e a drenagem na estrutura de vias para mostrar que a análise do movimento de água é um processo que convive com uma geometria de seções transversais repetidas ao longo de quilômetros. Isto levou ao uso de processos para estimativas de vazões percoladas e infiltradas em solos por métodos simplificados, que contêm dentre suas hipóteses o uso de condutividade hidráulica constante e coincidente com a do solo saturado.

Também, resumiram-se tópicos sobre a evolução do estudo de movimento de água e estimativa de medidas sobre propriedades de solos não saturados. Isto foi relacionado ao estudo de movimento de água em sólidos não saturados, com ênfase no uso de elementos de volume e método dos elementos finitos para estimativa de vazões percoladas e infiltradas.

Para estudo de caso se adotou simulação com elementos de volume de sólido e método dos elementos finitos para, com dados publicados sobre propriedades de solo arenoso ou argiloso, obter dados para testes estatísticos que ressaltassem as diferenças entre as vazões estimadas com uso da condutividade hidráulica constante e de solo saturado, e a condutividade que incluisse o solo não saturado. O estudo de caso se ateve a uma geometria.

Os dados obtidos por simulação, que estimou vazões percoladas e infiltradas, foram submetidos a teste de hipóteses sobre diferenças de médias. O objetivo proposto, “mostrar que estudos sobre drenagem de camadas próximas à superfície podem contribuir para aperfeiçoar o entendimento de comportamento da fase não saturada de solos, e disseminar o uso de elementos finitos para estudo de movimento de água em componentes que constituem a plataforma

de vias" foi atingido porque resultados de análise sobre a significância forneceram evidências estatísticas de que:

- a) Fixado o tipo de solo, é possível estimar vazões percoladas e infiltradas em estruturas (aterros, etc.) de vias;
- b) A condutividade hidráulica, inclusive de solo não saturado, associada à generalização da Lei de Darcy para estudo de movimento de água em solos e hipóteses sobre distribuição de pressão em elementos finitos de sólidos fornece o arcabouço que facilitaria o processamento de dados para disseminação de respostas pré-processadas e de fácil acesso ao meio técnico das rodovias.
- c) Ou, que partindo de casos típicos, se estimam vazões percoladas e infiltradas que facilitam obter soluções típicas para problemas que se repetem na geometria de segmentos longitudinais com as seções transversais fixadas para as vias.

Mas, considerando que o comportamento de tipos diferentes de solo leva a diferentes relações entre água e as forças internas de sólido onde se percola pelos vazios, é de se esperar diferentes funções para expressar a condutividade hidráulica, e, portanto diferentes estimativas para as vazões percolada e infiltrada nas areias e argilas. Em particular, resultados obtidos indicam que:

- a) Para solos do tipo argiloso, a expressão da condutividade hidráulica por funções obtidas a partir de ensaios correntes de laboratório levou à grau de confiança mais respeitável dentre o grupo de estudos que aqui se fizeram. Uma justificativa para isto seria o maior domínio que há no meio técnico para ensaios e manuseio de funções que explicam o comportamento da condutividade hidráulica para as argilas. Também, há, para orientar raciocínios, a informação de que a intensidade de forças internas, tamanho de partículas e atividade de superfície nas argilas fez conhecer melhor o comportamento da sucção para estes tipos de materiais;
- b) Para solos do tipo arenoso, há que se raciocinar que é mais difícil ensaiar e equacionar o comportamento desses sólidos e as relações

entre seus vazios, à água e ao ar. Se comparado com as argilas, isto se refletiu em um menor grau de confiança nos resultados de simulação sobre o comportamento de areias, acentuadamente para as vazões infiltradas neste tipo de solo;

Dentre as *sugestões* que poderiam decorrer do exposto destacam-se:

- a) Repetir o procedimento de simulação para tentar permitir que, uma vez conhecidos os tipos de solo, um órgão responsável por vias em determinada região possa cadastrar seções transversais típicas de suas rodovias;
- b) Ampliar informação sobre o comportamento de estrutura de vias quando solicitada pela água que percola, ou infiltra, para melhor explicar o processo de movimento de água pelos seus componentes, uma contribuição às ações e decisões sobre projeto, ou manutenção;
- c) Verificar se o uso de outras expressões para a vazão em meios porosos, leva a melhores resultados;
- d) Verificar a influência da anisotropia nas vazões em solos e componentes das vias.

## 8 Referências bibliográficas

---

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT (1984). NBR 7181: *Solo – análise granulométrica*. Rio de Janeiro.
- ASTLEY, R.J. (1992). *Finite elements in solids and structures – an introduction*. London: Chapman & Hall.
- BAGARELLO V. & PROVENZANO G. (1996). *Factors affecting field and laboratory measurement of saturated hydraulic conductivity*. Transactions of the ASAE, v. 39, nº1, pp. 153 - 159.
- BATHE, P. (1982) *Finite element procedures in engineering analysis*. New York: Prentice-Hall.
- BEAR, J.; BACHMAT, Y.(1991) *Introduction to modeling of transport phenomena*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- BENSON, C. H.; ZHAI, H. & WANG, X. (1994). *Estimating hydraulic conductivity of compacted clay liners*. Journal of Geotechnical Engineering, v. 120, nº2.
- BETTESS, P. (1992). *Infinite elements*. New York: Penshaw Press.
- BORGES, C.M. (1975) *Fluxo estacionário ou axissimétrico em meios porosos pelo método dos elementos finitos* 117p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro.
- BROOKS, R.; COREY, A. (1966). *Properties of porous media affecting fluid flow*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. New York .
- BRUSH, P.G. (1993). *A laboratory study of evaporative fluxes in homogeneous and layered soils*. M. Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.
- CAMPOS, T. M. P.; DELGADO, C. C.; TIBANA, S.; AGUILAR, S. & FONSECA E.C. (1992). *Determinação da curva característica de sucção em laboratório*. In: Conferência Brasileira sobre Estabilidade de Encostas (I COBRAE), 1992, Rio de Janeiro : ABMS .
- CASAGRANDE, A. (1937).. *Seepage through dams*. Harvard University Publication 209.
- CASAGRANDE, A. (1961). *Control of seepage through foundations and abutments of dams*. Geotechnique, vol. XI September 1961, pp161-181.
- CEDERGREN, H. R. (1967). *Seepage, drainage and flow nets*. New York : John Wiley and Sons.
- CEDERGREN, H. R. (1974). *Drenagem de pavimentos de rodovias e aeródromos*. Tradução de Hugo Nicodemo Guida. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 177 p
- CEDERGREN, H. R. (1977). *Seepage, drainage and flow nets*. Second Edition, New York : John Wiley and Sons.
- CEDERGREN, H. R. (1980). *Drenagem dos pavimentos de rodovias e aeródromos*. Tradução. Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos Editora.
- CEDERGREN, H. R.; ARMAN, J. A.; O'BRIEN, K. H., (1973). *Development of Guidelines for the Design of Subsurface Drainage Systems for Highway Pavement Structural Sections, Final Report*, Washington, D.C: Federal Highway Administration.
- CHASE, W; BROWN, F. (1992) *General Statistics*. New York: John Wiley & Sons.
- CHILDS, E. C. & COLLINS-GEORGE, N. (1950). *The permeability of porous materials*. Royal Society Proceedings. London.
- CHRISTOPHER, B R.; MCGUFFEY, V. C. (1997). *Pavement Subsurface Drainage Systems* . Transportation Research Board. NCHRP Synthesis n. 239 . Washington D.C.
- CHRISTOPHER, B. R.; MCGUFFEY, V. C. (2000). *Maintenance of Highway Edgedrains* . Transportation Research Board. NCHRP Synthesis n. 285. Washington D.C.

- COOK, R. D.(1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. 3rd ed. New York : John Wiley.
- COREY,A. (1977). *Mechanics of heterogeneous fluids in porous media*. Fort Collins, Colorado: Waters Resources Publications.
- COTÉ, J.; KONRAD, J. (2003). *Assessment of the hydraulic characteristics of unsaturated base-course materials: a practical method for pavement engineers*. Canadian Geotechnical Journal. 40: 121–136.
- DARCY, H., (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris.
- DESAI, C.S.(1972). *Introduction to the finite element method, a numerical method for engineering analysis*". New York: Van Nostrand Reinhold.
- DESAI, C.S.(1975). *Finite element methods for flow in porous media*. New York: John Wiley and Sons.
- DESAI, C.S.(1977). *Numerical methods in geotechnical engineering*. New York: McGraw-Hill.
- DNER - DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM (1981). *Instrução para drenagem de rodovias*. Rio de Janeiro.
- DNER - DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM (1999). Dados disponíveis em: <<http://www.estradas.com.br/faq/ibiranga.asp>>. Acesso em: 5 julho. 2003.
- DNER - DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM (2000). Dados disponíveis em: <<http://www.dnit.gov.br>>. Acesso em: 5 julho. 2003.
- DYNATEST ENGENHARIA LTDA (2002). Dados disponíveis em <<http://www.dynatest.com.br/pirrf/mapas/riogrande do norte/fotos/405rn80.jpg>>. Acesso em 23 de julho de 2003.
- FELEX, J. B.(1973). *Teste de um modelo de escoamento de água em solos insaturados*. 120 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- FREDLUND, D. G. AND MORGENSTERN, N. R. (1977). *Stress state variables for unsaturated soils*. Journal of Geotechnical Engineering Division.-ASCE., Vol. .103.GT5.
- FREDLUND, D. G.; XING, A. & HUANG, S. (1994). *Predicting the permeability functions for unsaturated soil using the soil-water characteristic curve*. Canadian Geotechnical Journal, v. 31, nº 4.
- FREDLUND, D.; RAHARDJO, H (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils*. New York : John Wiley.
- FREITAS, R.R. (2000). *Seção transversal de rodovias vicinais, qualidade de vias e comportamento de pavimentos*. 61 p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- GEO-SLOPE INTERNATIONAL LTD. (2002). *Seep/W for finite element seepage analysis, Version 5, User's Guide*. Calgary, Canada.
- GREEN, R.; COREY, J. (1971). *Calculation of hydraulic conductivity: a further evaluation of predictive methods*. Soil Science Society of America Proceedings, Vol. 35.
- HARR, M. E. (1962). *Groundwater and seepage*. New York : McGraw Hill.
- HILLEL, D. (1980). *Fundamentals of soil physics*. New York : Academic Press.
- HILLEL, D., (1971). *Soil and water physical principles and processes*. New York: Academic Press.
- HO, P.G. (1979). *The prediction of hydraulic conductivity from soil moisture suction relationship*. B.Sc. Thesis, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.
- HUANG, S.Y., 1994. *Measurement and prediction of the coefficient of permeability in unsaturated soils*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.
- KAZDA, I. (1990). *Finite element techniques in groundwater flow studies :with applications in hydraulic and geotechnical engineering*. Translation Zdeénka Jeniková. New York : Elsevier.
- KLUTE, A. (1965). *Laboratory measurement of hydraulic conductivity of unsaturated soil*. In: Methods of soil Analysis, Journal of Agronomy, 09, p.253-261.
- KLUTE, A. (1972): *The determination of the hydraulic conductivity and diffusivity of unsaturated soil*. Soil Science, 113(4), pp.264-276.
- LEWIS,R. W.; SCHREFLER, B.(1987). *The finite element method in the deformation consolidation of porous media*. New York: John Wiley.

- LIBARDI, P. L. (1995). *Dinâmica da água no solo*. Edição do Autor, ESALQ, Departamento de Física e Meteorologia, Piracicaba, 497 p.
- MASSAD, F. (2003). *Obras de terra: curso básico de geotecnia*. 1ª. Edição. São Paulo: Oficina de Textos.
- MITCHELL, J. K. (1993). *Fundamentals of soil behavior*. New York: John Wiley.
- MIYAZAKI, T. (1993). *Water flow in soils*. First Edition. New York: Marcel Dekker, Inc.
- MOULTON, L. K (1980), *Highway sub drainage design, Report FHWA-TS-80-224*. Washington D.C.: Federal Highway Administration.
- MOULTON, L. K.; SEALS, R. K. (1979). *Determination of the in situ permeability of base and subbase course, Final Report*, Washington, D.C. Report FHWA-RD-79-88, Federal Highway Administration.
- MUSKAT, M., (1946). *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Ann Arbor: J. W. Edwards Publisher.
- NCHRP - National Cooperative Highway Research Program (1982). "Pavement subsurface drainage systems, Synthesis of Highway Practice 96 ". Washington, D.C.
- NCHRP - National Cooperative Highway Research Program (1997). "Pavement subsurface drainage systems, Synthesis of Highway Practice 239 ". Washington, D.C.
- OLSON, R. E. & LANGFELDER, L. J. (1965). *Pore water pressures in unsaturated soils*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, 91(Sm4): 127 - 150, July 1965.
- PINTO, C.S. (2000). *Mecânica dos solos em 12 lições*. 1ª. Edição. São Paulo: Oficina de Textos.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. (1962) *Theory of groundwater movement*, Translated by J.M. DeWiest, Princeton University Press pp. 153 - 159.
- REICHARDT, K. (1985). *Processos de transferência no sistema solo-planta-atmosfera*. Campinas: Fundação Cargill, 466p.
- RICHARDS, B. G. (1931). *Capillary conduction of liquids through porous medium*. Physics, New York, 1, p. 318 – 333.
- RICHARDS, B. G. (1974). *Behavior of unsaturated soils*. Soil Mechanics. New York:: American Elsevier Publishing Company, Inc.
- RIDGEWAY, H. H. (1976), *Infiltration of water through the pavement surface* Transportation Research Record No. 616, Transportation Research Board, Washington, D. C.
- RIDGEWAY, H. H. (1982) *Pavement subsurface drainage systems*. Washington D.C.: Transportation Research Board. NCHRP Synthesis n. 96.
- RÖHM, S. A. (1993). *Solos não saturados*. Monografia Geotécnica. nº 4, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Publicação 081/93, 135 p.
- RÖHM, S. A. (1992). *Resistência ao cisalhamento de um solo arenoso laterizado não saturado da região de São Carlos*. 180 p. Tese (Doutoramento). Escola de Engenharia de São Carlos , Universidade de São Paulo. São Carlos.
- SÃO MATEUS, M. (1994). *Determinação em laboratório da condutividade hidráulica de solos não saturados*. 121 p. Dissertação (Mestrado) . Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.
- SEGERLIND, L. J. (1984). *Applied finite element analysis*. New York: John Wiley.
- SMITH, G.N. (1971). *An introduction to matrix and finite elements methods in engineering*. London Applied Science.
- SMEC-SOILMOISTURE EQUIPMENT CORPORATION (1985) Commercial Publications, Santa Barbara: SMEC Technical Division Publications
- SOTO, M. A. (1999). *Estudo da condutividade hidráulica em solos não saturados*. 117p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- STEPHENS, D. B. AND NEUMAN, S. P. (1982). *Vadose zone permeability test: steady state results*. ASCE Proceedings. Journal of Hydrology Division. Vol. 108.
- TERZAGHI, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*. New York: John Wiley.
- VAN GENUCHTEN, M.T. (1980). *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Science Society of America Journal, vol. 44, nº 5.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R.L.(1991). *The finite element method*. New York: McGraw-Hill.