Campus de São Carlos

**MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS
PARA O CONTROLE DE OBRAS DE ENGENHARIA**

ATTUS PEREIRA MOREIRA

ORIENTADOR: PROF. DR. IRINEU DA SILVA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

***MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS
TRIDIMENSIONAIS PARA O CONTROLE DE OBRAS DE
ENGENHARIA***

Engº Civil Attus Pereira Moreira

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Transportes.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Irineu da Silva

São Carlos - SP

1998

Class.	TESE - EESC
Cutt.	13803
Tombo	0003/99

5/5 10040/6

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M838m Moreira, Attus Pereira
Métodos de cálculo de coordenadas tridimensionais
para o controle de obras de engenharia / Attus Pereira
Moreira. -- São Carlos, 1998.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 1998.
Área: Transportes.
Orientador: Prof. Dr. Irineu da Silva.

1. Coordenadas tridimensionais. 2. Precisão.
3. Recalques. 4. Deslocamentos. 5. Mensuração.
I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **ATTUS PEREIRA MOREIRA**

Tese defendida e aprovada em 09.12.1998
pela Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **IRINEU DA SILVA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. **JOÃO BATISTA PENEIREIRO**
(Universidade Federal de Santa Maria)

Prof. Assoc. **OZIRIDE MANZOLI NETO**
(Instituto de Ciências Matemáticas e Computação - Universidade de São Paulo)

Prof. Assoc. **JORGE PIMENTEL CINTRA**
(Escola Politécnica da Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. **ANTONIO SIMÕES DA SILVA**
(Universidade Federal de Viçosa)

Prof. Doutor **ANTÔNIO NELSON R. DA SILVA**
Coordenador da Área de Transportes

JOSÉ CARLOS ANGELO CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Aos meus familiares e amigos, pelo apoio
recebido,

dedico este trabalho

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Aos meus pais, Evolete e Manoel (in memorian),
pela minha existência,

agradeço.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Suprema Inteligência, pela vida;

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela bolsa de estudo concedida;

À Escola de Engenharia de São Carlos e ao Departamento de Transportes, pela oportunidade de realização do curso;

Ao Departamento de Engenharia Rural da UFSM e, particularmente, aos professores Gelson Dal’Forno e Gomercindo Marques, que assumiram as minhas funções didáticas;

À Secretaria da Pós-Graduação do Departamento de Transportes, pelo zelo e eficiência, concernentes às exigências burocráticas da CAPES e da Universidade de Santa Maria, no acompanhamento das atividades curriculares do curso;

Aos professores e funcionários do Departamento de Transportes, pela amizade e tratamento dispensados durante o curso;

Ao Laboratório de Mensuração, em especial ao funcionário Paulo Batista, pela ajuda nos trabalhos de campo, e aos colegas Maurício Roberto Veronez e Hilário Sérgio Ferrari pela ajuda nos trabalhos de campo e graficação;

Ao Professor Irineu da Silva, pela amizade, e pela segurança transmitida na indicação do rumo que, juntamente com os equipamentos disponibilizados, permitiram alcançar o objetivo;

A todos os colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o êxito do trabalho, meus sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	xiv
LISTA DE TABELAS.....	xviii
ABREVIATURAS E SIGLAS.....	xxi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xxii
RESUMO	xxxvi
<i>ABSTRACT</i>	xxxvii

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	01
1.1 - Aspectos gerais	01
1.2 - Objetivo do Trabalho	10

CAPÍTULO 2

INSTRUMENTOS TOPOGRÁFICOS E MEDIÇÕES ANGULARES NA MENSURAÇÃO	13
2.1 - Introdução	13
2.2 - Tipos de ângulos na Mensuração	14
2.2.1 - Ângulos horizontais	14
2.2.2 - Ângulos verticais	15
2.3 - Instrumentos topográficos - teodolitos	17
2.3.1 - Classificação geral dos teodolitos	19

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS	43
4.1 – Introdução	43
4.2 – Principais métodos de determinação de coordenadas tridimensionais	44
4.2.1 - Método de interseção espacial trigonométrica - visadas exteriores	44
4.2.2 - Método da interseção espacial analítica	47
4.2.3 - Método de interseção espacial analítica com superdeterminação de medidas	52
4.2.4 - Método polar	63

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO DOS PRINCIPAIS SISTEMAS OPERACIONAIS USADOS PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS	67
5.1 - Considerações gerais	67
5.2 - Sistema eletrônico de determinação de coordenadas - ECDS3	67
5.3 - Sistema de acompanhamento com laser, para determinação de coordenadas espaciais - SMART 310	69
5.4 - Sistema de medição de coordenadas espaciais baseado no método da interseção espacial -SPACE	72
5.5 - Sistema de medição de coordenadas espaciais através do Sistema de Posicionamento Global (GPS)	76
5.6 - Sistema de medição de coordenadas espaciais com a estação total de precisão - PCMSplus	79
5.7 - Sistema automático de medição de coordenadas polares para windows - APSWin	81
5.7.1 – Aplicação prática com o sistema de medição de coordenadas polares com teodolitos motorizados - APSWin	84

CAPÍTULO 6

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES	91
6.1 – Generalidades.....	91
6.2 - Indicadores de precisão para a Mensuração	92
6.3 - Lei de propagação de erros para funções lineares	94
6.4 - Propagação de erros em uma irradiação	97
6.5 - Método dos mínimos quadrados	99
6.6 - Modelo de compensação de observações mediatas ou indiretas	101
6.6.1 – Aplicação genérica do modelo.....	102

CAPÍTULO 7

METODOLOGIA PROPOSTA: DETERMINAÇÃO DO SISTEMA REFERENCIAL E DAS COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS DAS ESTAÇÕES E DO CENTRO ÓPTICO DOS APARELHOS	109
7.1 - Generalidades	109
7.2 - Ponto de orientação	111
7.3 - Determinação do sistema referencial local	112
7.4 - Determinação das coordenadas tridimensionais das estações	112
7.5 - Determinação das coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos	118
7.6 - Implementação do modelo	120
7.6.1 – Coordenadas tridimensionais das estações e do centro óptico dos aparelhos	120
7.6.2 - Precisão das coordenadas do centro óptico dos aparelhos obtidas pela propagação dos erros	121
7.7 - Considerações finais	122

CAPÍTULO 8

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS:

MÉTODO TOPOGRÁFICO-TRIGONOMÉTRICO	123
8.1 – Apresentação do método	123
8.2 - Elementos envolvidos no processo de cálculo	125
8.2.1 - Elementos conhecidos	125
8.2.2 - Elementos observados no campo	126
8.2.3 - Elementos calculados conforme metodologia proposta	126
8.2.4 – Finalidades e aplicações do método	127
8.3 - Formulação matemática	128
8.3.1 - Cálculo do número de combinações	128
8.3.2 - Cálculo da distância plana entre os aparelhos i e j	128
8.3.3 - Cálculo do azimute entre os aparelhos i e j	129
8.3.4 - Cálculo do azimute entre o aparelho i e o ponto de orientação (PO)	130
8.3.5- Cálculo do azimute $Teo_{(i-Alvo)}$	131
8.3.6 - Cálculo do azimute $Teo_{(j-PO)}$	131
8.3.7 - Cálculo do azimute $Teo_{(j-Alvo)}$	132
8.3.8 - Cálculo do ângulo a_1 da base do triângulo	133
8.3.9 - Cálculo do ângulo a_2 da base do triângulo	133
8.3.10 - Cálculo do ângulo a_3 do vértice do triângulo	134
8.3.11 - Cálculo da distância plana $d_{(i-Alvo)}$, entre o aparelho i e o alvo	134
8.3.12 - Cálculo da distância plana $d_{(j-Alvo)}$, entre o aparelho j e o alvo	135
8.3.13 - Cálculo da abcissa $X_{(d-i)}$ do alvo, usando a distância $d_{(i-Alvo)}$	135
8.3.14- Cálculo da abcissa $Y_{(d-j)}$ do alvo, usando a distância $d_{(j-Alvo)}$	135
8.3.15 - Cálculo da abcissa(XP) do alvo	136
8.3.16 - Cálculo da ordenada $Y_{(d-i)}$ do alvo, usando-se a distância $d_{(i-Alvo)}$	136
8.3.17 - Cálculo da ordenada $Y_{(d-j)}$ do alvo, usando-se a distância $d_{(j-Alvo)}$	137
8.3.18 - Cálculo da ordenada (YP) do alvo	137

8.3.19 - Cálculo da cota ou altitude $Z_{(d-i)}$ do alvo, usando a distância $d_{(i-Alvo)}$	137
8.3.20 - Cálculo da cota ou altitude $Z_{(d-j)}$ do alvo, usando a distância $d_{(j-Alvo)}$	138
8.3.21 - Cálculo da cota ou altitude (ZP) do alvo	139
8.3.22 - Cálculo da precisão aparente das coordenadas	139
8.4 - Validação do modelo matemático	141
8.4.1 - Determinação e análise das coordenadas tridimensionais calculadas.....	141
8.5 - Considerações finais	143

CAPÍTULO 9

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS: MÉTODO DAS DISTÂNCIAS MÍNIMAS	145
9.1 – Apresentação do método.....	145
9.2 - Modelo matemático proposto	146
9.2.1 - Determinação das equações das retas definidas pelas linhas de visada dos n aparelhos até o alvo P	148
9.2.2 - Determinação de um ponto genérico $G_i(t_i)$, sobre a reta r_i	149
9.2.3 - Determinação da distância entre os pontos genéricos e o alvo P	150
9.2.4 - Determinação do somatório das distâncias entre o ponto genérico, em cada reta, e o alvo P	150
9.2.5 - Determinação das derivadas parciais em função das incógnitas	152
9.2.6 - Formulação matricial	154
9.2.7 - Determinação das coordenadas dos pontos de distância mínima (G_i), entre as linhas de visada e o alvo P	156
9.2.8 - Determinação das distâncias entre os pontos (G_i) e o alvo P	157
9.2.9 - Determinação das distâncias média, mínima e máxima, entre os pontos (G_i) e o alvo P	158
9.2.10 - Determinação da precisão aparente das coordenadas dos pontos G_i , sobre as retas definidas pelas linhas de visada	159
9.2.11 - Determinação da precisão aparente das coordenadas do alvo P	160

9.2.12 - Precisão do posicionamento espacial do alvo P	160
9.2.13 - Determinação das coordenadas ajustadas do centro ótico dos aparelhos	161
9.2.14 - Verificações importantes	162
9.3 - Validação do modelo matemático	163
9.3.1 - Determinação e análise das coordenadas tridimensionais calculadas	163
9.4 - Considerações finais	168

CAPÍTULO 10

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS:

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO E AJUSTE	171
10.1 – Apresentação do método	171
10.2 - Modelo matemático proposto	172
10.2.1 - Determinação dos azimutes E_i -PO	173
10.2.2 - Determinação das coordenadas dos versores das linhas de visadas	174
10.2.3 - Determinação das equações de erros	174
10.2.4 – Resolução matricial	176
10.2.5 - Aplicação do modelo para observações mediatas utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q)	177
10.2.6 - Cálculo dos erros e das matrizes variância-covariância (MVC)	180
10.3 - Validação do modelo matemático	181
10.3.1 - Determinação e análise das coordenadas tridimensionais calculadas.....	181
10.4 - Considerações finais	183

CAPÍTULO 11

MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS:

ANÁLISE COMPARATIVA	185
11.1 – Considerações gerais	185

11.2 – Considerações sobre as coordenadas obtidas em cada método	187
11.3 - Considerações sobre as precisões das coordenadas obtidas em cada método....	188

CAPÍTULO 12

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	191
12.1 – Conclusões	191
12.2 – Recomendações	193

ANEXO A

LEVANTAMENTO DOS DADOS DE CAMPO	197
1. - Generalidades	197
2. – Disposições gerais para a determinação das coordenadas tridimensionais	
das estações e do centro óptico dos aparelhos	197
2.1 - Determinação do sistema referencial	197
2.2 – Centragem forçada para a determinação das coordenadas	
tridimensionais das estações	198
2.3 – Distribuição genérica das estações no processo de irradiação.....	199
2.4 – Dados de campo	199
3. – Dados de campo para a determinação das coordenadas tridimensionais	
das extremidades da mira horizontal.....	200

CAPÍTULO 13

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	203
----------------------------------	-----

APÊNDICE I - PROGRAMA COMPUTACIONAL 01

Determinação das coordenadas tridimensionais das estações e do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões.

APÊNDICE II - PROGRAMA COMPUTACIONAL 02

Cálculo de coordenadas tridimensionais – método topográfico-trigonométrico.

APÊNDICE III - PROGRAMA COMPUTACIONAL 03

Cálculo de coordenadas tridimensionais – método clássico.

APÊNDICE IV - PROGRAMA COMPUTACIONAL 04

Determinação das coordenadas tridimensionais dos alvos com superdeterminação de visadas – IBIAPINA (1993).

APÊNDICE V – PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL

Determinação das coordenadas tridimensionais: Método das Distâncias Mínimas.

APÊNDICE VI - PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL

Cálculo de coordenadas tridimensionais: Método de Minimização e Ajuste.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - Representação gráfica do método de Interseção Plana (HOWALD, 1989)	04
FIGURA 1.2 - Esquema representativo do nivelamento trigonométrico (HOWALD, 1989)	04
FIGURA 1.3 - Representação da discrepância no posicionamento do ponto calculado pelo método de Interseção Espacial Trigonométrico (WILD/TMS, 1992)	06
FIGURA 1.4 - Princípio de Medida do SPATIN	09
FIGURA 2. 1 - Ângulo diedro entre dois planos verticais (SILVA, 1995)	14
FIGURA 2. 2 - Orientação dos ângulos horizontais na mensuração	15
FIGURA 2. 3 - Representação do sentido do ângulo de altura	16
FIGURA 2. 4 - Representação do ângulo zenital	16
FIGURA 2. 5 - Principais componentes de um teodolito - vista externa (SILVA, 1995)	17
FIGURA 2. 6 - Principais componentes de um teodolito - vista interna do teodolito Wild T-2 (Deumlich, 1982).....	18
FIGURA 3. 1 - Representação do erro de horizontalidade do eixo secundário ...	26
FIGURA 3. 2 - Representação do erro de colimação horizontal	28
FIGURA 3. 3 - Representação do erro de verticalidade do eixo principal	30
FIGURA 3. 4 - Representação dos erros de excentricidade dos círculos	32
FIGURA 3. 5 - Representação das leituras em dois pontos diametralmente opostos	33

FIGURA 3. 6 - Representação esquemática de um compensador mecânico- eletrônico	40
FIGURA 4. 1 - Representação gráfica do método de interseção plana	45
FIGURA 4. 2 - Representação gráfica do método de Interseção espacial analítica	48
FIGURA 4. 3 - Coordenadas Espaciais do ponto lançado $P(X,Y,Z)$, utili- zando vetores, de acordo com CARNEIRO & BRANDÃO, (1992)	49
FIGURA 4. 4 - Representação dos ângulos de referência entre OP e os semi- eixos positivos, conforme CARNEIRO E BRANDÃO (1992) apud IBIAPINA (1993)	50
FIGURA 4. 5 - Posicionamento dos teodolitos de acordo com Carneiro & Brandão, 1992, apud (IBIAPINA, 1993)	50
FIGURA 4. 6 - Esquema representativo do método Interseção Espacial Analí- tica com Superdeterminação de Medidas	53
FIGURA 4. 7 - Representação gráfica do método de interseção espacial analí- tica de acordo com Leica Herbrugg, Wild/TMS, 1992, apud (IBIAPINA, 1993)	54
FIGURA 4. 8 - Representação da reta perpendicular comum pertencente aos planos A_{ij} e A_{ji}	55
FIGURA 4. 9 - Representação do plano A_{ij} formado pelo versor w_i e pelo versor perpendicular comum n_{ij} com origens no ponto i	56
FIGURA 4. 10 - Representação da reta de interseção r_j com origem no ponto j .	58
FIGURA 4. 11 - Representação do posicionamento do ponto de interseção P_{ji} onde $(P_{ji} = A_{ij} \cap r_j)$	59
FIGURA 4. 12 - Esquema do posicionamento dos pontos de interseção P_{ij} e P_{ji} e do ponto médio $\bar{P}$ utilizando o método de Interseção Espacial Analítica.....	61
FIGURA 4. 13 - Esquema representativo do método polar	64
FIGURA 5. 1 - Esquema de funcionamento do sistema ECDS3, de acordo com LARDELLI (1984)	68

FIGURA 5. 2 – Princípio de determinação de coordenadas tridimensionais, pelo sistema SMART 310, LEICA (1993)	70
FIGURA 5. 3 – Componentes do sistema SMART 310, Leica AG, Heerbrug, Switzerland, 1993.....	71
FIGURA 5. 4 - Barra de calibração para obtenção da escala no sistema SPACE	73
FIGURA 5. 5 - Calibração de robôs	74
FIGURA 5. 6 - Calibração de antena para captação de imagens de satélites	75
FIGURA 5. 7 - Princípio de medida do sistema PCMSplus, de acordo com LEICA (1993)	80
FIGURA 5. 8 - Representação esquemática do fluxo de dados no sistema APSWin	82
FIGURA 5. 9 – Casa para proteção do equipamento do sistema APSwin – Mina de Itabirito, Ouro Preto, MG.....	85
FIGURA 5. 10 – Visão geral do talude, estando o observador no interior da Casa	86
FIGURA 5. 11 – Aparelho em funcionamento, instalado sobre o pilar com o dispositivo de centragem forçada.....	87
FIGURA 5. 12 – Talude onde os prismas para monitoramento estão distribuídos	88
FIGURA 7. 1 – Configuração do sistema destrógiro ortogonal.....	113
FIGURA 7. 2 – Dispositivo para o processo de centragem forçada.....	113
FIGURA 7. 3 – Irradiações para a determinação das coordenadas das estações	114
FIGURA 7. 4 – Situação relativa dos aparelhos, do ponto de orientação e do alvo visualizadas de duas estações fixas A e B	116
FIGURA 7. 5 – Determinação das coordenadas altimétricas das estações	117
FIGURA 7. 6 - Instalação da mira no ponto de orientação	119
FIGURA 8. 1 – Elementos envolvidos no processo de cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos	125

FIGURA 8. 2 – Elementos medidos no campo para o cálculo das coordenadas tridimensionais de um alvo	126
FIGURA 9. 1 – Representação genérica dos elementos que compõem o Método	147
FIGURA 9. 2 – Pontos de distância mínima entre as linhas de visada e o alvo...	156
FIGURA A. 1 – Configuração do sistema referencial adotado	198
FIGURA A. 2 – Dispositivo para o processo de centragem forçada.....	198
FIGURA A. 3 – Distribuição genérica das estações no processo de irradiação..	199
FIGURA A. 4 – Mira horizontal.....	201

LISTA DE TABELAS

TABELA 3. 1 - Erro da direção horizontal em segundos, função do ângulo de altura	27
TABELA 3. 2 - Erro da direção horizontal em segundos, função do ângulo de altura, para $c = 10''$	29
TABELA 5. 1 - Tipos de receptores, distâncias de emprego, resolução da ambigüidade e precisões nominais	78
TABELA 7.1 - Coordenadas tridimensionais das estações e respectivas precisões, calculadas pelo calculadas pelo programa 01	121
TABELA 7. 2 –coordenadas do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões.....	121
TABELA 8.1 - Identificação do quadrante topográfico em função dos sinais de ΔX e ΔY	130
TABELA 8.2 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 6 casas decimais e respectivas precisões	141
TABELA 8.3 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 4 casas decimais e respectivas precisões	142
TABELA 8.4 – Precisão aparente do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2.....	142
TABELA 8.5 – Valores reais e calculados do comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças, para os dois níveis de significância propostos.....	142

TABELA 9.1 – Coordenadas dos alvos 1 e 2, com o nível de significância de 6 casas decimais e precisões aparentes	164
TABELA 9. 2 - Coordenadas dos alvos 1 e 2, com o nível de significância de 4 casas decimais e precisões aparentes	164
TABELA 9. 3 - Coordenadas dos pontos genéricos com nível de significância de 6 casas decimais.....	164
TABELA 9. 4 - Médias das coordenadas dos pontos genéricos com nível de significância de 6 casas decimais e respectivas precisões.....	165
TABELA 9. 5 - Distâncias entre os alvos 1 e 2 e os pontos genéricos (G_i)	165
TABELA 9. 6 - Distâncias mínimas, médias e máximas entre os alvos 1 e 2 e os pontos genéricos (G_i)	165
TABELA 9. 7 - Precisão aparente das coordenadas dos pontos genéricos (G_i) ..	166
TABELA 9.8 - Precisão aparente (s_p) do posicionamento espacial dos alvos	166
TABELA 9. 9 - Coordenadas do centro óptico dos aparelhos	166
TABELA 9. 10 – Diferenças entre os valores das determinações de campo e calculados pelo método proposto.....	167
TABELA 9. 11 - Comparação entre os valores esperados e calculados para as precisões ou erros das coordenadas do centro ótico dos aparelhos.....	167
TABELA 9. 12 - Comparação entre os prováveis deslocamentos relativos do centro ótico dos aparelhos em função dos erros estimados e ajustados	168
TABELA 9. 13 - Valores ajustados das distâncias inclinadas entre o centro ótico dos aparelhos e os pontos genéricos.....	168
TABELA 9. 14 - Valor padrão e valores calculados para o comprimento da mira horizontal e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância	169
TABELA 10.1 - Coordenadas da mira horizontal (m), com o nível de significância de 6 casas decimais	181
TABELA 10.2 - Coordenadas da mira horizontal (m), com o nível de significância de 4 casas decimais	182

TABELA 10.3 – Precisões ajustadas das coordenadas das extremidades 1 e 2	182
TABELA 10.4 – Precisões do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2	182
TABELA 10.5 – Valores padrão e calculado para o comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância.....	183
TABELA 11.1 - Coordenadas tridimensionais das extremidades 1 e 2 da mira, obtidas pelos métodos de determinação estudados.....	187
TABELA 11.2 – Precisões das coordenadas das extremidades 1 e 2 da mira horizontal	188
TABELA 11.3 – Posicionamento relativo das extremidades 1 e 2 da mira horizontal.....	189
TABELA 11.4 – Comprimentos da mira horizontal, calculados pelos diferentes métodos e suas precisões, calculadas através da propagação das precisões aparentes de cada coordenada ...	189
TABELA A.1 – Dados de campo para a determinação das coordenadas das estações e do centro óptico dos aparelhos	200
TABELA A.2 – Leituras da mira (mm) para a determinação da coordenada altimétrica do centro óptico dos aparelhos	200
TABELA A.3 – Levantamento angular para as extremidades 1 e 2 da mira horizontal.....	201

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATMS	- Sistema automatizado de medição com teodolitos
CCD	- charge-coupled-device - dispositivo para captura de imagens na forma digital
ECDS	- Eletronic Coordinate Determination System - Sistema eletrônico de determinação de coordenadas
ECDS 3	- Versão 3.0 do sistema eletrônico de determinação de coordenadas
GPS	- Global Positioning System - Sistema de posicionamento global
LEICA	- Nome de uma empresa suíça, fabricante de aparelhos topográficos e aplicativos para a área de Mensuração
M.M.Q.	- Método dos mínimos quadrados
SPATIN	- Spatial Intersection - Sistema de medições cujo modelo computacional está baseado nas direções espaciais
WGS84	- World Geodetic System - Sistema de referencia mundial recomendado para fins de mapeamentos

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1

- β - ângulo de altura;
- β_A e β_B - ângulos de altura medidos das estações A e B;
- ΔN - distância vertical entre o ponto visado na mira, em B; e o centro ótico do aparelho, em A;
- A e B - estações fixas de coordenadas planas conhecidas;
- Az_A e Az_B - azimutes determinados a partir das estações fixas;
- CO_A e CO_B - centro ótico dos aparelhos estacionados em A e B;
- DH - distância horizontal entre as estações A e B;
- DN - distância vertical entre o centro ótico dos aparelhos.
- DN - diferença de nível entre as estações A e B;
- HI - altura do instrumento na estação A;
- HS - altura do sinal na estação B;
- H_{z_A} e H_{z_B} - ângulos horizontais medidos;
- P - alvo ou ponto lançado;
- Teo_i e Teo_j - aparelhos empregados para as leituras angulares;
- X_A , Y_A - coordenadas planas da estação A;
- X_B , Y_B - coordenadas planas da estação B;
- X_P , Y_P - coordenadas planas do alvo ou ponto lançado;
- X_P , Y_P , Z_P - coordenadas espaciais do alvo, situadas fora do ponto de interseção das duas linhas de visada;
- Z_A - cota ou altitude da estação A;
- Z_B - cota ou altitude da estação B.

CAPÍTULO 2

- β - ângulo de altura;
 π e π' - planos verticais;
 H_z - ângulo horizontal;
 O - origem do ângulo diedro;
 P e Q - pontos pertencentes aos planos verticais;
 Zen - ângulo zenital

CAPÍTULO 3

- α - ângulo correto entre as direções AP_1 e AP_2 ;
 $\alpha' = I_2 - I_1$ - ângulo medido;
 β - ângulo de altura da visada OP ;
 β_1 - ângulo vertical para a primeira linha visada;
 β_2 - ângulo vertical para a segunda linha visada;
 $\varepsilon = \alpha - \alpha'$ - erro sobre o ângulo medido;
 γ - ângulo entre o plano vertical da direção OP com o plano vertical que contém o eixo principal OZ' ;
 δ_a - erro de nivelamento em um nível;
 δ_L - desvio padrão da leitura de um ângulo ;
 δ_L - 0,2 da sensibilidade do nível;
 ξ - precisão da pontaria, em segundos;
 Ω - magnitude da luneta;
 η - número de séries executadas;
 c - erro de colimação;
 d'' - valor angular ou menor divisão do limbo, normalmente $1''$ a $1'$;
 e - excentricidade de C em relação a A ;
 i - erro de horizontalidade;
 r - raio, considerado unitário;

$r = CI_1$	- raio do círculo;
A	- centro do ângulo a ser medido;
C	- centro do círculo;
HH'	- eixo secundário horizontal;
HH'	- eixo secundário perpendicular ao eixo principal;
HH'	- eixo secundário com inclinação i em relação ao horizonte;
I_1	- direção AP_1 lida no círculo;
I_2	- direção AP_2 lida no círculo;
I' e I''	- índices diametralmente opostos;
I'_1	- direção AP_1 lida sobre o índice I' ;
I'_2	- direção AP_2 lida sobre o índice I' ;
I''_1	- direção AP_1 lida sobre o índice I'' ;
I''_2	- direção AP_2 lida sobre o índice I'' ;
OP	- eixo de visada dirigido para o ponto P;
OTI	- plano inclinado de basculamento do eixo de visada;
OZ	- eixo principal vertical;
OZ'	- eixo principal não vertical;
OZ'I	- plano de basculamento do eixo de visada;
OZE	- plano vertical da direção OP;
OZI	- plano vertical perpendicular a HH';
V	- erro de verticalidade do eixo principal.

CAPÍTULO 4

β	- ângulo de altura medido;
μ	- ângulo entre $\vec{U}$ e $\vec{V}$;
ΔH	- diferença de nível entre os dois teodolitos;
d_{inc}	- distância inclinada;
h_i	- altura do instrumento no ponto i;
h_j	- altura do instrumento no ponto j;
i	- índice com variação de 1 a n-1;

j	- índice com variação de 2 a n ;
m	- número total de interseções;
m	- número total de combinações das n estações;
m_{ji}	- parâmetro da reta de interseção r_j .
n	- número de estações;
n_{ij}	- versor perpendicular comum aos versores w_i e w_j ;
s_{ij} e t_{ij}	- parâmetros do plano A_{ij} .
v_i	- erros residuais;
x_i, y_i, z_i	- coordenadas espaciais do ponto de origem i ;
x_j, y_j, z_j	- coordenadas espaciais do ponto de origem j ;
$x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}$	- coordenadas do versor n_{ij} ;
x_{wi}, y_{wi}, z_{wi}	- coordenadas do versor w_i ;
x_{wj}, y_{wj}, z_{wj}	- coordenadas do versor w_j ;
x_{wj}, y_{wj}, z_{wj}	- coordenadas do versor w_j ;
w_i e w_j	- versores em direção ao alvo P ;
Az	- azimuth lido;
Az_A e Az_B	- azimuthes das direções A-P e B-P, respectivamente;
HI	- altura do instrumento na estação;
H_z	- ângulo horizontal medido;
H_{z_i} e H_{z_j}	- ângulos horizontais medidos de cada ponto;
$\bar{P}$	- média das m combinações;
$\bar{P}_i$	- ponto médio, determinado em cada combinação;
PO	- Ponto de Orientação
R	- distância da origem até o ponto P ;
R_A e R_B	- distância dos respectivos aparelhos ao alvo;
V_x, V_y, V_z	- ângulos entre os eixos positivos x, y, z , respectivamente;
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	- coordenadas espaciais compensadas do alvo;
X_0, Y_0, Z_0	- coordenadas do marco, na estação;
XP, YP, ZP	- coordenadas do alvo;
$\overline{XP}_{ij}, \overline{YP}_{ij}, \overline{ZP}_{ij}$	- coordenadas espaciais do alvo obtidas em cada interseção;

Zen	- ângulo zenital lido;
Zen _A e Zen _B	- ângulos zenitais medidos a partir das estações A e B, respectivamente, em direção ao alvo P;
Zen _i e Zen _j	- ângulos zenitais medidos de cada ponto.

CAPÍTULO 6

σ^2	- variância, considerando-se os erros verdadeiro;
ψ	- matriz somatória dos quadrados dos erros residuais;
$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_K} \right)_0$	- diferenciais parciais das funções em relação as incógnitas no ponto inicial;
a_i, b_i, c_i	- coeficientes das relações matemáticas;
$a_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_K} \right)_0$	- coeficiente de direção;
e	- vetor unitário;
e^T	- transposta do vetor unitário;
e_i^2	- erros aparentes ao quadrado;
e_r	- erro relativo;
$f_i(x_0)$	- funções das incógnitas provisórias;
$f_i(\bar{X}_{K0})$	- funções das leituras provisórias;
$f_i(\bar{X}_K)$	- funções das incógnitas compensadas;
i	- número de observações, variando de 1 até n;
k	- variação, cujo limite máximo é o número de incógnitas u;
l	- vetor das observações;
l	- matriz das leituras reduzidas;
l_i	- leituras reduzidas;
l_i	- observação;

$\bar{l}$	- valor médio da grandeza observada;
$\tilde{l}$	- valor real da grandeza observada;
n	- número de observações;
s	- desvio padrão aparente ou precisão aparente;
s^2	- variância, considerando-se os erros aparentes;
u	- número de incógnitas;
v	- erro residual;
v_i	- erros residuais das leituras;
v_n	- erros residuais;
x_0	- valor observado;
x_{0n}	- valores observados;
$\bar{x}$	- média ou valor mais provável da grandeza;
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	- incógnitas compensadas;
x_k	- incógnitas reduzidas;
$\bar{x}_k$	- incógnitas compensadas;
x_{k0}	- valores provisórios das incógnitas;
A	- matriz dos coeficientes parciais;
Az	- azimute da direção PO-E;
$D_{inc} = d$	- distância inclinada PO-E, medida por meio eletrônico;
E	- erro absoluto aparente;
E_i	- erro verdadeiro;
E_i^2	- erros verdadeiros quadrado;
$E^T.E$	- somatório dos erros verdadeiros ao quadrado;
$\bar{L}$	- matriz dos valores compensados das leituras,
L_i	- valores observados ou leituras provisórias;
P	- matriz dos pesos das observações;
PO	- Ponto de Orientação;
V	- matriz dos erros residuais;
V^T	- matriz transposta dos erros residuais;
$V^T.V$	- somatório dos erros residuais ao quadrado.

X	- matriz das incógnitas;
X_E, Y_E, Z_E	- coordenadas da estação;
X_K	- incógnitas reduzidas;
X_{PO}, Y_{PO}, Z_{PO}	- coordenadas do ponto de orientação;
Zen	- ângulo zenital em relação à estação E.

CAPÍTULO 7

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	- ângulos internos nos triângulos definidos pelas estações A e B, com vértice em P;
ΔH_i	- distância vertical ou diferença de nível entre o PO e a estação i;
$\cotg(Zen)_i$	- cotangente do ângulo zenital lido do PO, referente a estação i;
i	- número de ordem das estações;
x, y, z	- eixos coordenados;
A e B	- estações fixas de coordenadas conhecidas;
Az_{A-B}	- azimute entre as estações A e B, com origem em A;
Az_{A-P}	- azimute entre a estação A e o alvo P;
Az_{A-PO}	- azimute entre a estação A e o PO;
Az_{B-A}	- azimute entre as estações B e A, com origem em B;
Az_{B-P}	- azimute entre a estação B e o alvo P;
Az_{B-PO}	- azimute entre a estação B e o PO;
Azm_i	- azimute da direção PO estação i;
D_{AP}	- distância plana ou horizontal entre a estação A e o alvo P;
D_{BP}	- distância plana ou horizontal entre a estação B e o alvo P;
DH	- distância plana ou horizontal entre as estações A e B;
DH_i	- distância horizontal entre o PO e a estação i;
D_{inc}	- distância inclinada entre o PO e cada estação;
D_{inc_i}	- distância inclinada, do PO até a estação i;
HI	- altura do instrumento no PO;
HI	- altura do instrumento na estação;

HI_i	- altura do instrumento na estação i ;
HS	- altura do prisma, ou alvo com centragem forçada;
HS_i	- altura do prisma ou sinal na estação i ;
H_z	- ângulo horizontal, igual ao azimute da direção PO estação i ;
H_{zA} e H_{zB}	- visadas horizontais entre o PO e o alvo P, respectivamente, das estações A e B;
L_{MIRA}	- leitura da mira verticalizada no PO;
$(LMIRA)_i$	- leitura na mira, executada com cada aparelho;
PO	- ponto de orientação;
XE_i e YE_i	- coordenadas planas da estação i ;
XPO , YPO	- coordenadas planas do PO;
ZCO	- cota ou altitude do centro ótico do aparelho;
ZCO_i	- cota ou altitude do centro ótico de cada aparelho;
ZE	- cota ou altitude da estação;
ZE_i	- cota ou altitude da estação i ;
Zen	- ângulo zenital medido do PO, referente a cada estação;
Zen_A e Zen_B	- ângulos zenitais lidos em relação ao alvo P, respectivamente, das estações A e B;
Zen_i	- ângulo zenital da direção PO estação i ;
ZPO	- cota ou altitude do PO.

CAPÍTULO 8

ΔH	- médias das diferença de cota ou altitude entre os aparelhos 1 e 2;
ΔH_1	- diferença de cota ou altitude em relação ao aparelho 1, na combinação;
ΔH_2	- diferença de cota ou altitude em relação ao aparelho 2, na combinação;
ΔX	- diferença entre as abcissas dos aparelhos j e i ;
ΔY	- diferença entre as ordenadas dos aparelhos j e i ;
a_1	- ângulo da base do triângulo junto ao aparelho i ;

a_2	- ângulo da base do triângulo, junto ao aparelho j ;
a_3	- ângulo do vértice referente ao alvo;
$\cotg (Zen_{(j-Alvo)})$	- co-tangente do ângulo zenital do teodolito j , em relação ao alvo;
$d_{(i-Alvo)}$	- distância plana entre o aparelho i e o alvo;
$d_{(j-Alvo)}$	- distância plana entre o aparelho j e o alvo;
$d_{(i-j)}$	- distância plana entre as estações i e j ;
$\cos (Az_{(i-Alvo)})$	- cosseno do azimute da direção $Teo_{(i-Alvo)}$;
$\cos (Az_{(j-Alvo)})$	- cosseno do azimute da direção $Teo_{(j-Alvo)}$;
$\cotg (Zen_{(i-Alvo)})$	- co-tangente do ângulo zenital do teodolito i , em relação ao alvo;
n	- é o número de estações envolvidas no processo;
p	- somatório dos ângulos internos do triângulo;
q	- número de vezes em que as coordenadas da cala alvo são calculadas;
q	- valor equivalente ao dobro do número de combinações;
$\text{sen}(a_1)$	- seno do ângulo da base, referente ao aparelho i ;
$\text{sen}(a_2)$	- seno do ângulo da base, referente ao aparelho j ;
$\text{sen}(a_3)$	- seno do ângulo do vértice, referente ao alvo;
$\text{sen } Az_{(i-Alvo)}$	- seno do azimute da direção aparelho i - alvo;
$\text{sen } (Az_{(j-Alvo)})$	- seno do azimute da direção aparelho j - alvo;
s_{XP}, s_{YP}, s_{ZP}	- precisão aparente das coordenadas XP_i, YP_i, ZP_i , respectivamente;
$s_{\bar{X}_i}, s_{\bar{Y}_i}, s_{\bar{Z}_i}$	- é a precisão aparente das coordenadas XP, YP, ZP do alvo;
Az_{i-j}	- azimute plano entre os aparelhos i e j ;
$Az_{(i-j)}P$	- ângulo auxiliar que serve para identificar o quadrante;
$Az_{(j i)}$	- azimute entre os aparelhos j e i ;
$Az_{(j i)}P$	- azimute auxiliar que serve para identificar o quadrante;
$Az_{(i-Alvo)}$	- azimute entre o aparelho i e o alvo;
$Az_{(j Alvo)}$	- azimute entre o aparelho j e o alvo;
$Az_{(i-PO)}$	- azimute ente o aparelho i e o PO;
$Az_{(j PO)}$	- azimute ente o aparelho j e o PO;
$Dcal_i$	- distância horizontal calculada, entre aparelho e o alvo;
D_{i-j}	- distância plana entre os aparelhos i e j ;

$(DH)_i$	- diferença de cotas entre o aparelho e o alvo;
LHz_j	- ângulo horizontal lido pelo aparelho j , entre o PO e o alvo;
L_{MIRA}	- leituras da mira instalada no PO;
$(LMIRA)_i$	- leitura da mira, executada pelo teodolito i ;
$(LMIRA)_j$	- leitura da mira executada pelo aparelho j ;
$(LHz)_i$ e $(LHz)_j$	- ângulos horizontais entre o PO e os alvos,
N_{COMB}	- é o número de combinações das estações, tomadas duas a duas;
$X_{(d-i)}$	- abcissa do alvo usando a distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;
$X_{(d-j)}$	- abcissa do alvo usando a distância plana aparelho j - alvo;
$X_{(d-i)}$	- abcissa do alvo, função da distância plana entre o aparelho i e o alvo;
$X_{(d-j)}$	- abcissa do alvo, função da distância plana entre o aparelho j e o alvo;
X_i, Y_i	- coordenadas planas da estação do aparelho i ;
X_j, Y_j	- coordenadas planas da estação do aparelho j .
XE_i	- abcissa da estação do aparelho i ;
XE_i e YE_i	- coordenadas planas da estação do aparelho i ;
XE_j	- abcissa da estação do aparelho j ;
XE_j e YE_j	- coordenadas planas da estação do Teo_j ;
XP	- abcissa do alvo;
XPO e YPO	- coordenadas planas do PO;
$\overline{XP}_i, \overline{YP}_i, \overline{ZP}_i$	- média das coordenadas de cada alvo;
YP	- ordenada do alvo;
$Y_{(d-i)}$	- ordenada do alvo usando a distância plana $Teo_{(i-alvo)}$;
$Y_{(d-j)}$	- ordenada do alvo usando a distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$;
YE_i	- ordenada do ponto estação do aparelho i ;
YE_j	- ordenada da estação do teodolito j ;
$Z_{(d-i)}$	- cota ou altitude do alvo, em função da distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;
$Z_{(d-j)}$	- cota ou altitude do alvo, em função da distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$;
$(Zen)_i$	- ângulo zenital medido;
$(Zen)_i$ e $(Zen)_j$	- ângulos zenitais;

ZP	- cota ou altitude do alvo;
ZPO	- cota ou altitude do PO.

CAPÍTULO 9

$\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{zi}$	- precisões calculadas para as coordenadas do centro ótico;
a_i	- coordenada do versor, na direção do eixo x;
a_i, b_i, c_i	- coordenadas do versor direção das retas;
b_i	- coordenada do versor, na direção do eixo y;
c_i	- coordenada do versor, na direção do eixo z;
d_1	- menor distância entre a reta $\bar{v}_1$ e o alvo P;
d_1, d_n	- distância entre o alvo P e os pontos G_1 e G_n , respectivamente;
d_i	- distância entre os pontos G_i e o alvo P;
d_{max}	- maior distância entre os pontos G_i e o alvo P;
d_{medio}	- média das distâncias entre os pontos G_i e o alvo P;
d_{min}	- menor distância entre os pontos G_i e o alvo P;
d_n	- menor distância entre a reta $\bar{v}_n$ e o alvo P;
n	- número de estações ou aparelhos envolvidos no processo;
r_1, r_n	- retas definidas pelas linhas de visada;
$s_{xG_i}, s_{yG_i}, s_{zG_i}$	- precisão aparente das coordenadas dos pontos G_i ;
s_P	- precisão do posicionamento espacial do alvo P;
$s_{\overline{XP}}, s_{\overline{YP}}, s_{\overline{ZP}}$	- precisão aparente das coordenadas do alvo P;
t_i	- parâmetro da reta genérica;
t_i	- parâmetros das, retas definidas pelas linhas de visada, (com $i= 1, 2, 3, \dots, n$);
$\bar{v}_1$	- reta direção da linha de visada do aparelho 1;
$\bar{v}_1, \bar{v}_n$	- vetores direção das linhas de visadas;
$\bar{v}_i$	- versor, direção da reta r_i ;
$\bar{v}_n$	- reta direção da linha de visada do aparelho n;

V_{xi}, V_{yi}, V_{zi}	- precisões ajustadas das coordenadas do centro ótico;
x, y, z	- eixos do sistema ortogonal de referência;
Az_1	- azimute da direção estação 1 - alvo ;
Az_n	- azimute da direção estação n - alvo;
CO_1	- centro ótico do aparelho 1, de coordenadas XCO_1, YCO_1, ZCO_1 ;
CO_1, CO_n	- centro ótico dos aparelhos;
CO_i	- centro ótico do aparelho, de coordenadas XCO_i, YCO_i, ZCO_i ;
CO_n	- centro ótico do aparelho n, de coordenadas XCO_n, YCO_n, ZCO_n ;
Est_1	- estação do aparelho 1, de coordenadas XE_1, YE_1, ZE_1 ;
Est_1, Est_n	- estações, materializadas com marcos;
Est_n	- estação do aparelho n, de coordenadas XE_n, YE_n, ZE_n ;
F	- equação escrita em função das incógnitas;
G_1, G_n	- pontos de distância mínima entre o alvo e a linha de visada;
$G_i(t_i)$	- ponto genérico, função do parâmetro t_i ;
HI_1	- altura do aparelho da estação 1;
HI_n	- altura do aparelho da estação n;
HZ_1	- ângulo lido, na estação 1, entre o PO e o alvo P;
HZ_n	- ângulo lido, na estação n, entre o PO e o alvo P;
M_{COEF}	- matriz dos coeficientes das incógnitas;
M_{INC}	- matriz das incógnitas;
M_{IND}	- matriz dos termos independentes.
P	- alvo ou ponto de coordenadas desconhecidas, XP, YP, ZP ;
PO	- ponto de orientação de coordenadas XPO, YPO, ZPO ;
Teo_1	- aparelho estacionado na estação 1;
Teo_1, Teo_n	- aparelhos estacionados nas n estações;
Teo_n	- aparelho estacionado na estação n;
$XCO_{aji}, YCO_{aji}, ZCO_{aji}$	- coordenadas ajustadas do centro ótico;
XCO_i, YCO_i, ZCO_i	- coordenadas do centro ótico dos aparelhos;
XG_i, YG_i, ZG_i	- coordenadas dos pontos genéricos;
$\overline{XG_i}, \overline{YG_i}, \overline{ZG_i}$	- média das coordenadas dos pontos G_i ;
XP, YP, ZP	- coordenadas do alvo P;

- Zen_1 - ângulo zenital lido, da estação 1 em relação ao alvo P;
 Zen_n - ângulo zenital lido, da estação n em relação ao alvo P.

CAPÍTULO 10

- a_i, b_i, c_i - coordenadas dos versores sobre os eixos coordenados (x,y,z);
 i - número da estação;
 n - número de equações de erros;
 n - número de estações envolvidas no processo;
 l - matriz dos valores observados ou das observações;
 l - vetor das observações;
 $\bar{l}$ - vetor das observações compensadas;
 s_0 - precisão das determinações;
 u - número de incógnitas;
 A - matriz dos coeficientes das incógnitas;
 Az_{Ei-P} - azimuth entre a estação (i) e o alvo (P);
 Az_{E_i-PO} - azimuth entre a estação i e o PO;
 Az_i - azimuth da direção E_i-PO ;
 E_i-PO - direção a direção definida pela estação i e o PO;
 Hzi - ângulo horizontal lido entre as direções E_i-PO e E_i-P , no sentido horário;
 Q_{ll} - matriz variância-covariância das observações, igual a P^{-1} ;
 $Q_{\bar{l}\bar{l}}$ - matriz variância-covariância observações compensadas;
 Q_{vv} - matriz dos resíduos, igual a $P^{-1} - \bar{Q}$, sendo $\bar{Q} = A.N^{-1}.A^T$.
 Q_{xx} - matriz variância-covariância das incógnitas, igual a N^{-1} ;
 V - vetor dos erros residuais;
 $V^T.P.V$ - somatório dos quadrados dos resíduos;
 X - matriz das incógnitas;
 X - vetor das incógnitas;
 XCO_i, YCO_i, ZCO_i - coordenadas do centro ótico dos aparelhos;

XE_i, YE_i	- coordenadas planas das estações;
XPO, YPO	- coordenadas planas do PO;
Zen_i	- ângulo zenital lido em relação ao alvo P.

CAPÍTULO 11

ER	- erro relativo da grandeza medida;
V_{ap}	- valor aproximado, obtido em cada método, em função das coordenadas das extremidades da mira;
V_p	- valor padrão, <i>2000mm</i> para a mira horizontal.

RESUMO

MOREIRA, A. P. *Métodos de cálculo de coordenadas tridimensionais para o controle de obras de engenharia*. São Carlos, 1998. 206p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O presente trabalho propõe duas novas metodologias para a determinação de coordenadas tridimensionais visando o emprego no controle de obras de engenharia. Os dois métodos propostos fundamentam-se na concepção de um ponto fixo, visível simultaneamente por todos os aparelhos envolvidos no processo e em uma direção de orientação. O primeiro método tem como princípio básico a minimização de uma função matemática, definida pelo somatório das distâncias entre as linhas de visadas dos aparelhos e o alvo. O segundo fundamenta-se no ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados, aplicado às equações de erros, que são determinadas em função das coordenadas do centro ótico de cada aparelho e dos ângulos zenitais e azimutais medidos. Esse segundo método proporciona, ao mesmo tempo, que sejam estimadas as precisões dos elementos envolvidos no cálculo das coordenadas do alvo e, ainda, ajusta os valores iniciais das coordenadas do centro ótico dos aparelhos. Ambos os métodos podem ser empregados para a verificação de recalques ou deslocamentos estruturais nas provas de carga em obras de engenharia. Os resultados obtidos comprovam que os métodos propostos determinam coordenadas tridimensionais com maior precisão que os principais métodos apresentados na revisão da literatura e podem ser empregados no controle de obras de engenharia.

Palavras-chave: Coordenadas tridimensionais, deslocamentos, recalques, precisão

ABSTRACT

MOREIRA, A. P. *3-D coordinates determination methods to check engineer works.*

São Carlos, 1998. 206p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The purpose of this work is to present new methodologies to determine 3-D coordinates to check engineer works. The two proposed methods are well-founded on a conception of a fixed point and a direction that are proposed. This fixed point must be visible by all surveying equipments involved in the process to determine 3-D coordinates. The first method presented in this work is based on a mathematic function that must be minimized and this function is defined by the sum of the distances of the target and the sightlines from the surveying equipments directed to the target. The second method presented is based on the L.S.M. adjustment process. This method uses the errors equations that are functions of the 3-D coordinates of the optic center of the surveying equipments involved in this process. It also uses the azimuth and zenith angles related to the target measured. This method provides at the same time, a way to estimate the precisions of all elements involved in 3-D coordinates determination calculus of the target and it also provides the adjustment of the 3-D coordinates of the optic centers of the surveying equipments used to measure the angles. The conception of the orientation point provides more flexibility in a performance of these two methods. The two methods can be employed to check structural displacements and pressing down in charge experiments in engineer works. The results presented in this work validate that these two proposed methods determine 3-D coordinates with more precision and accuracy than the main methods presented in literature revision and may be able to check engineer works.

Keywords: 3-D coordinates, displacements, pressing down, precision.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Aspectos gerais

A determinação de coordenadas tridimensionais, na Mensuração, vem sendo constantemente aperfeiçoada, tendo sido facilitada, nos últimos tempos, pelo emprego de teodolitos eletrônicos e programas computacionais, denominados programas aplicativos. Esse aperfeiçoamento, entretanto, tem ocorrido com maior rapidez nos países mais avançados tecnologicamente, onde se encontram as empresas que desenvolvem equipamentos topográficos e os referidos programas aplicativos.

Os programas aplicativos são empregados em todas as áreas relacionadas à Mensuração, tanto para a redução do tempo de obtenção dos resultados, evitando-se os cálculos manuais, plausíveis de erros, como para alcançar maior confiabilidade nos mesmos.

Os países em desenvolvimento, que não dominam integralmente as tecnologias de ponta, importam estes aplicativos, na maioria das vezes, porque não dispõem de recursos para as pesquisas básicas, empregando-os, principalmente, no controle de qualidade em linhas de produção industrial, na calibração de instrumentos e na robótica.

Como a Topografia está associada as mais variadas atividades humanas, é fácil enumerar vários casos e locais onde tais aplicativos podem ser empregados, com rapidez e eficiência, bem como prever sua rápida aceitação dentro da Topografia Industrial; e, mesmo na Topografia Clássica.

Estes fatos são relevantes para a pesquisa em pauta, pois um grande número de setores, desde a construção civil até a área industrial, são beneficiados com o emprego destes aplicativos em suas atividades correntes. Com a finalidade de mostrar a amplitude do campo de ação do presente trabalho, apresentam-se a seguir os diferentes ramos de atividades, onde os programas aplicativos de determinação de coordenadas tridimensionais podem ser empregados.

Para a preservação ou recuperação de fachadas de prédios e monumentos antigos, a Arquitetura recorre à Fotogrametria, através da utilização de fotografias de pequeno formato, processadas por restituidores digitais, como o DVP (Digital Vídeo Plotter). Esse processo necessita de programas aplicativos para a determinação das coordenadas tridimensionais dos pontos de controle, com rapidez e precisão, podendo, para isso, utilizar também os métodos propostos nesta tese.

Na Engenharia Civil, que trata da construção e manutenção de grandes estruturas, quase sempre submetidas a carregamentos adicionais ou sobrecargas, os métodos de cálculo para a determinação de coordenadas tridimensionais possibilitam o monitoramento destes deslocamentos estruturais, inclusive de elementos isolados, como vigas e pilares; ou ainda possibilitam a determinação de recalques diferenciais. Estes mesmos métodos servem, também, para verificar a verticalidade de prédios ou grandes estruturas, em áreas de risco, sujeitas a abalos sísmicos ou recalques, bem como, para a avaliação dos deslocamentos das placas tectônicas, constituintes da crosta terrestre.

Na Topografia Clássica, os referidos aplicativos, empregando diferentes métodos de cálculo, são utilizados para a determinação das coordenadas e, em consequência, das distâncias e cotas ou altitudes, de pontos inacessíveis, mas que podem ser visados por algum tipo de aparelho topográfico, capaz de medir ângulos, verticais e horizontais. Através dos ângulos medidos, os métodos propostos nesta tese permitem calcular as coordenadas espaciais de quaisquer pontos, mesmo inacessíveis.

Na Engenharia Naval, estes mesmos métodos possibilitam determinar a orientação de guindastes, que transportam chapas móveis, as quais devem ser soldadas ou encaixadas na estrutura fixa do navio ou grande embarcação, quando da sua construção ou reparo, dentro ou fora dos Estaleiros. Na Engenharia Aeronáutica,

servem para orientar, durante o processo de soldagem, o encaixe das peças que compõem a estrutura e a fuselagem das aeronaves em geral.

Para servir a todas estas finalidades, foram desenvolvidos vários sistemas de determinação de coordenadas espaciais, empregando modelos matemáticos diversos.

Basicamente existem dois tipos de sistemas para a determinação de coordenadas tridimensionais. Os sistemas que empregam métodos de interseções, isto é, todos os cálculos são executados somente com valores angulares medidos e os sistemas denominados polares que medem os ângulos e as distâncias entre o ponto considerado e os equipamentos de medição.

Os sistemas disponíveis no mercado, presentemente, baseiam-se nos seguintes métodos para o cálculo das coordenadas tridimensionais de um ponto fixo:

- Interseção Espacial Trigonométrica (Visadas Exteriores);
- Interseção Espacial Analítico;
- Polar;
- Sistema de Posicionamento Global (GPS).

O Método de Interseção Espacial Trigonométrica é constituído de duas fases operacionais. A primeira fase consiste em aplicar um método topométrico de interseção plana, mais conhecido na literatura clássica como visadas exteriores, para a determinação das coordenadas planas, X e Y; a segunda fase consiste em aplicar o método do nivelamento trigonométrico para a determinação da coordenada altimétrica Z.

Um ponto determinado por interseção plana é um ponto visado partindo-se de duas estações de coordenadas conhecidas, das quais são medidas direções, em relação a um sistema plano horizontal. Diz-se que é executado um posicionamento por visadas exteriores, porque as estações são exteriores ao ponto a ser determinado (P), conforme Figura 1.1. Cada combinação de duas visadas exteriores denomina-se interseção plana.

Este método determina as coordenadas planas do ponto P, a partir das coordenadas das estações A e B e dos azimutes das direções $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$. As coordenadas do ponto P resultam referenciadas ao mesmo sistema de coordenadas plano retangular das estações fixas, A e B, de coordenadas conhecidas.

FIGURA 1.1 - Representação gráfica do método de Interseção Plana (HOWALD, 1989)

A coordenada Z pode ser determinada através de um nivelamento trigonométrico. A Figura 1.2 mostra as grandezas envolvidas nesse processo de nivelamento topográfico.

FIGURA 1.2 - Esquema representativo do nivelamento trigonométrico (HOWALD, 1989)

A determinação das coordenadas espaciais de um ponto, utilizando-se o método de Interseção Espacial Trigonométrico tem a desvantagem de dividir o processo em duas etapas: cálculo das coordenadas planimétricas (X e Y), e cálculo da coordenada altimétrica (Z). Estes cálculos são executados por dois métodos completamente independentes um do outro. As coordenadas planas são calculadas em

funções dos ângulos horizontais medidos e a coordenada altimétrica é função do ângulo zenital ou do ângulo de altura medido (β).

Assim, na prática, um erro cometido na leitura de um ângulo vertical não influencia o valor das coordenadas planas; e, um erro na leitura de um ângulo horizontal não altera o valor da coordenada altimétrica. Este fato torna o método inconsistente para a determinação de coordenadas tridimensionais. Já que, na realidade, um erro cometido em qualquer uma das leituras angulares implica, necessariamente, em um erro no cálculo do posicionamento tridimensional do alvo. Essa discrepância pode ser vista na Figura 1.3.

Esta possibilidade de ocorrência da discrepância no posicionamento do ponto, calculado pelo presente método, é uma desvantagem em relação a outros métodos, como o da Interseção Espacial Analítico, que leva em consideração os ângulos horizontais e verticais, conjuntamente.

O nivelamento trigonométrico tem sido utilizado, com bons resultados, para controle vertical de coberturas, conforme TESKEY (1989) e TESKEY & BIACS (1991). Uma vez que, para este tipo de controle só interessa o deslocamento do ponto no plano vertical, a inconsistência do método não inviabiliza a sua aplicação.

O método de Interseção Espacial Analítico é constituído por uma única etapa de cálculo, onde as linhas de visada dos aparelhos são consideradas vetores, partindo das estações, cujas coordenadas são conhecidas, direcionando-se aos alvos.

Neste caso deve-se conhecer as coordenadas tridimensionais do centro ótico de cada aparelho, com a máxima precisão possível; deve-se conhecer, também, o ângulo horizontal relacionado a um sistema de referência e o ângulo zenital ou de altura, para cada alvo.

De posse desses elementos e, em função dos cossenos diretores dos ângulos medidos, tendo-se como referencial um sistema de eixos ortogonais, pré-estabelecido, definem-se as equações das retas, que partem de cada centro ótico, direcionadas ao alvo.

Devido aos erros cometidos nas visadas e aos erros relativos ao funcionamento do mecanismo dos aparelhos, as linhas de visada direcionadas ao alvo,

não são concorrentes. Estas retas espaciais são reversas, isto é, não se interceptam em um ponto comum.

FIGURA 1.3 - Representação da discrepância no posicionamento do ponto calculado pelo método de Interseção Espacial Trigonométrico (WILD/TMS, 1992)

Fundamentado-se na proposição acima descrita, as coordenadas do alvo são determinadas pelo lugar geométrico, definido pelo ponto médio da perpendicular comum entre cada conjunto de duas retas, resultantes da combinação dos referidos aparelhos, tomados dois a dois. Isto evita que ocorra a discrepância mostrada na Figura 1.3.

No cálculo desse ponto médio, um erro cometido em qualquer uma das leituras angulares, na realidade, implica em um erro no posicionamento tridimensional do alvo. No caso de várias estações fixas, formando várias combinações duas a duas, recomenda-se um tratamento estatístico, para convergir todos os valores determinados, para o lugar geométrico mais provável, que é o ponto de interseção procurado, ou alvo (SANTALA, 1994).

O Método Polar para a determinação de coordenadas tridimensionais de um ponto é o mais simples dentre todos os métodos conhecidos. Emprega um único aparelho, que é referenciado a um sistema pré-estabelecido. Neste caso deve-se medir

o ângulo horizontal, o ângulo zenital ou de altura e a distância inclinada referentes ao alvo. Neste caso o ponto não pode ser inacessível.

As coordenadas do alvo são determinadas em função das coordenadas do centro ótico do aparelho, através de equações trigonométricas, que envolvem as leituras angulares, e da distância inclinada entre o aparelho e o alvo.

A distância inclinada determina-se eletronicamente, com o uso de prismas ou alvos retro-refletores apropriados. Para o cálculo das coordenadas tridimensionais dos pontos, não é considerado, nem a refração da luz solar, nem a esfericidade da Terra. Devido a isso, este método pode ser empregado, unicamente, em locais restritos, onde as condições ambientais são praticamente constantes e as distâncias da estação até o alvo, sejam da ordem de 30 metros.

O sistema que utiliza o método GPS surgiu a partir da colocação em órbita terrestre dos primeiros satélites artificiais. Sua principal vantagem sobre os métodos clássicos, empregados para a determinação de coordenadas espaciais, consiste em não necessitar que as estações sejam intervisíveis. Entretanto, no campo visual, ao redor dessas estações, não deve haver superfícies refletoras próximas à antena receptora, para evitar-se o efeito denominado multicaminhamento, prejudicial à precisão das determinações.

O sistema GPS foi projetado e desenvolvido pelo Departamento de Defesa americano. As intenções iniciais eram utilizá-lo, principalmente, para a navegação, com propósitos militares. Somente com a comprovação da grande precisão do sistema e com o aumento da eficiência dos receptores é que ele passou a ser também utilizado pela comunidade civil.

Neste sistema os sinais são captados e decodificados através de programas aplicativos, com métodos de cálculos próprios, desenvolvidos por instituições públicas ou por empresas privadas, que fabricam e comercializam estes receptores. São exigidos, no mínimo, quatro satélites, captados simultaneamente pelos receptores, para que seja possível o cálculo das coordenadas tridimensionais de um ponto. A constelação atual de satélites GPS garante a denominada cobertura bidimensional, ou seja, garante que a todo instante, em qualquer lugar da superfície terrestre, pelo menos quatro satélites, possam ser observados, simultaneamente

Dentro do sistema GPS pode-se estabelecer um posicionamento absoluto ou relativo. O posicionamento é absoluto quando mede-se simultaneamente as distâncias entre o receptor e , pelo menos, quatro satélites. Conhecendo-se a posição atual de cada satélite, pode-se calcular, em tempo real, a posição do receptor. Trata-se simplesmente de um problema de resecção espacial, no qual os satélites são os pontos de estação conhecidos. Esse método, entretanto, não permite obter precisões topográficas. Por outro lado, se for conhecido, de antemão, um ponto sobre um sistema de coordenadas, utilizando-se dois receptores, determina-se, com boa precisão, um ponto em relação ao outro, de onde a denominação posicionamento relativo.

Os cálculos são executados em relação ao sistema geodésico mundial (WGS84) e, devido a essa particularidade, todas as medidas GPS devem ser transformadas para o sistema de referência adotado em cada país, antes de serem utilizadas. Há programas específicos para a execução de todas as transformações que se fizerem necessárias.

O Método GPS não pode ser empregado em ambiente coberto, exigido na Topografia Industrial, pelo fato de perder-se o contato com os satélites. A grande precisão e a economia de tempo, nas determinações, onde as estações podem estar distantes, até mesmo centenas de quilômetros, fez com que o seu emprego superasse às expectativas mais otimistas quanto ao emprego.

O modelo matemático para o cálculo das coordenadas, no sistema GPS, já é de domínio público (HOFMANN et al., 1994), fazendo parte da tecnologia empregada em cada tipo de receptor, modificando-se de acordo com a empresa que o produz.

Com base nos métodos descritos acima, existem vários programas aplicativos, que calculam as coordenadas do alvo. Entre os aplicativos de maior importância podemos citar o SPATIN, que é um sistema de medições, cujo modelo computacional está baseado nas direções espaciais para a determinação de coordenadas tridimensionais. Trata-se de um sistema que opera em tempo real.

O princípio de medição do SPATIN está representado na Figura 1.4, (SANTALA, 1994).

A empresa suíça LEICA desenvolveu e lançou no mercado internacional vários sistemas de medições para o cálculo de coordenadas tridimensionais, baseados no método da interseção espacial. Entre eles destacam-se o Sistema Automatizado de Medição por Teodolitos (ATMS), o Sistema Eletrônico de Determinação de Coordenadas (ECDS), em várias versões, e o sistema MANCAT.

Um outro sistema existente no mercado é o SPACE. Nele são empregados teodolitos de precisão e, para que exista uma efetiva e completa automação, pode-se empregar, também, teodolitos motorizados de precisão.

FIGURA 1.4 - Princípio de Medição do SPATIN

O programa aplicativo do SPACE mostra, instantaneamente, as coordenadas dos pontos levantados e permite comparações com valores pré-estabelecidos. Este sistema emprega o método da interseção espacial e serve para inspecionar ferramentas e instalações, painéis que compõem os veículos automotores, inspecionar a instalação de antenas parabólicas, entre muitos outros serviços especializados.

A LEICA oferece um outro sistema, baseado no método da interseção ou triangulação, que requer, no mínimo, dois aparelhos (Teodolito ou Estação Total), podendo ser utilizados um número limite de oito aparelhos, (ECDS 3), onde são

medidos somente ângulos horizontais e zenitais ou de altura, dependendo do caso em estudo. O ponto procurado resulta da interseção das linhas de visada de, no mínimo, dois instrumentos.

Esta empresa lançou, também, recentemente, um sistema baseado no método polar, utilizando somente um sensor (neste caso, uma Estação Total). Nele são medidos os ângulos zenital e horizontal e a distância inclinada do aparelho ao alvo. As coordenadas resultam da solução de equações trigonométricas, que as relacionam com as coordenadas do centro ótico do referido sensor. É um sistema prático, de grande versatilidade, por ser totalmente portátil. É empregado também para a calibração de robôs em linhas de montagem, na produção industrial. Este sistema polar automático de medições denomina-se APSWin e usa os teodolitos TM3000x, podendo também utilizar, os teodolitos da série TPS1000. Deve-se ressaltar, entretanto, que se trata de um método de medição que exige a medida da distância, ou seja, o ponto não pode ser inacessível.

Um outro sistema existente no mercado é o sistema MONMOS, que possui esta denominação por ser a abreviação de *Mono Mobile 3D Station*. É de origem japonesa e pode ser manipulado por um único operador depois de efetuada a instalação inicial dos pontos a observar. É um sistema integrado, constituído essencialmente pela Estação Total SOKKIA NET 2 e por uma caderneta SDR4C. Esta estação é provida de software apropriado para controle das observações e respectivos cálculos.

Na literatura, que trata da Topografia Industrial, não é encontrado nenhum sistema que faça uso do método trigonométrico.

1.2 - Objetivo do Trabalho

O objetivo geral desta pesquisa é estudar as metodologias existentes para o cálculo de coordenadas tridimensionais de pontos fixos e propor novos procedimentos, visando o emprego na determinação de recalques e deslocamentos estruturais em obras de engenharia, principalmente durante a execução de provas de carga.

Especificamente, os objetivos da pesquisa são:

- 1- Estudo e implementação dos métodos apresentados na revisão bibliográfica, adaptando-os à concepção do ponto de orientação, para as comparações com os métodos desenvolvidos;
- 2 - Proposição e desenvolvimento de novas metodologias;
- 3 - Validação dos métodos propostos através de um trabalho prático.

CAPÍTULO 2

INSTRUMENTOS TOPOGRÁFICOS

E

MEDIÇÕES ANGULARES NA MENSURAÇÃO

2.1 - Introdução

Para a determinação de coordenadas tridimensionais, por todos os métodos que operam em pós-processamento ou em tempo real, a preocupação fundamental é a medição de ângulos e distâncias, bem como as precisões com que estas medições são executadas.

As medições angulares com teodolitos eletrônicos dispensam a intervenção humana, para as interpolações ou as aproximações, sendo apresentadas de forma digital. O armazenamento dos dados de campo em meio magnético, fez com que fossem eliminados, quase que totalmente, os erros relacionados às deficiências do operador, quanto ao processo de anotação.

As medições lineares também alcançaram altíssimas precisões, devido ao emprego de medidores eletrônicos de distâncias (EDMs). Nestes aparelhos os princípios da ótica física e a eletrônica, juntos, possibilitaram um grande e rápido avanço, fazendo com que o uso dos referidos aparelhos, nas áreas de atuação da Mensuração, fosse implementado de maneira muito rápida.

A resolução simultânea de dois problemas fundamentais: precisão nas medições e armazenamento dos dados em meio magnético, possibilitaram um refinamento nos aparelhos eletrônicos-digitais, atualmente à disposição no mercado.

Somente estes dois fatos, aparentemente simples, trouxeram à Mensuração um desenvolvimento incalculável, devido à alta precisão e a flexibilidade de emprego que conferiram aos referidos aparelhos, devido à redução no peso total e à portabilidade, características indispensáveis para a melhoria no desempenho do operador.

2.2 - Tipos de ângulos na Mensuração

A Mensuração trabalha com ângulos horizontais e verticais, em função dos quais são determinadas, diretamente, coordenadas de pontos no plano ou no espaço. Indiretamente, através destas coordenadas, determinam-se distâncias e áreas. Devido a isso, dedica-se uma atenção muito grande à precisão com que tais medidas são tomadas. Para melhorar ainda mais os resultados obtidos, lança-se mão de procedimentos estatísticos, com a finalidade de depurar possíveis erros. Deste modo, melhora ainda mais a confiabilidade nos trabalhos. Os resultados esperados devem ser, ao mesmo tempo, tanto precisos, quanto exatos.

2.2.1 - Ângulos horizontais

Ângulo horizontal é o ângulo diedro entre dois planos verticais, conforme mostrado na Figura 2.1.

FIGURA 2. 1 - Ângulo diedro entre dois planos verticais (SILVA, 1995)

onde:

π e π' - planos verticais;

O - origem do ângulo diedro;

P e Q - pontos pertencentes aos planos verticais;

H_z - ângulo horizontal.

A noção de ângulo horizontal é aplicável a duas direções espaciais quaisquer, desde que coincidentes em um vértice comum, denominado origem (O). O ângulo horizontal entre as duas direções OP e OQ, contidas nos dois planos verticais π e π' , coincide com o ângulo diedro H_z, compreendido entre esses dois planos.

Na Mensuração, o sentido de orientação de um ângulo horizontal, normalmente adotado como positivo, é o sentido horário. Isso deve-se ao fato deste sentido coincidir com o sentido adotado, por construção, para o crescimento da graduação do limbo, na maioria dos aparelhos topográficos.

Isto permite que os ângulos horizontais sejam medidos, conforme mostrado pelas setas, na Figura 2.2, crescendo sempre no sentido horário, a partir de uma direção de origem.

FIGURA 2. 2 - Orientação dos ângulos horizontais na Mensuração

2.2.2 - Ângulos verticais

Ângulo vertical é o ângulo situado em um plano vertical. Sendo que, na Mensuração distinguem-se dois tipos de ângulos verticais: (i), o ângulo de altura ou de declividade e, (ii), o ângulo zenital, assim definidos:

1. ângulo de altura ou de declividade (β) de uma direção espacial (OP), é o ângulo vertical que essa direção faz com a sua projeção no plano horizontal. Esse ângulo, convencionalmente, é considerado positivo acima do plano horizontal e negativo abaixo do referido plano, conforme mostrado na Figura 2.3;

FIGURA 2. 3 - Representação do sentido do ângulo de altura

2. ângulo zenital (Zen) de uma direção espacial (OP), é o ângulo vertical que essa direção faz em relação ao Zênite, indicado pela vertical do local, conforme mostrado na Figura 2.4.

FIGURA 2. 4 - Representação do ângulo zenital

2.3 - Instrumentos topográficos - teodolitos

Em Mensuração, o instrumento utilizado para a medida de ângulos é o teodolito, empregado para as medições de direções horizontais e ângulos verticais.

Segundo os historiadores a palavra teodolito vem do árabe “ali-idada” = braço-índice, combinado com o artigo inglês “the” para dar “the alhidada” e, com as transformações lingüísticas, chegar até a palavra “theodolite”, (SILVA, 1995).

Encontra-se na literatura inglesa menção do uso do teodolito já em 1570. Por esse motivo, supõe-se que foram os ingleses os principais idealizadores do instrumento. Durante a primeira metade do Século XIX ele foi modificado pelos alemães, e a partir do Século XX, completamente modernizado e utilizado em larga escala nos trabalhos de engenharia em geral.

A Figura 2.5, apresentada a seguir, mostra esquematicamente, os principais componentes genéricos de um teodolito.

FIGURA 2.5 - Principais componentes de um teodolito - vista externa (SILVA, 1995)

A parte inferior do teodolito, que é fixada ao tripé, denomina-se base. Esta suporta a parte superior, denominada alidade, a qual gira em torno do eixo principal do teodolito. A alidade possui dois montantes, que suportam um outro eixo, perpendicular ao eixo principal: o eixo secundário, em torno do qual gira a luneta do teodolito. O eixo de visada da luneta é perpendicular ao eixo secundário, por construção.

Os ângulos horizontais e verticais são lidos através dos círculos horizontal e vertical graduados, fixos na alidade e na luneta do instrumento.

Os três eixos do teodolito são concorrentes, por construção, em um único ponto. Este ponto é o vértice dos ângulos medidos, coincidindo com o centro ótico do aparelho. A perpendicularidade dos três eixos entre si é requisito essencial à precisão e funcionalidade de qualquer aparelho topográfico.

A Figura 2.6, mostra os componentes internos, através de um corte longitudinal executado no aparelho.

FIGURA 2. 6 - Principais componentes de um teodolito - vista interna do teodolito Wild T-2 (Deumlich, 1982)

2.3.1 - Classificação geral dos teodolitos

Modernamente, pode-se classificar os teodolitos de maneira mais genérica, em dois tipos distintos:

1. teodolitos ótico-mecânicos;
2. teodolitos eletrônicos.

2.3.1.1 - Teodolitos ótico-mecânicos

As diferenças fundamentais entre os teodolitos ótico-mecânicos ocorrem em função dos detalhes construtivos do círculo horizontal. Devido a isso, existem diferentes processos para a execução das medições angulares, utilizando-se estes aparelhos.

Tecnicamente classificam-se os teodolitos ótico-mecânicos em três grupos:

1. teodolitos reiteradores;
2. teodolitos repetidores;
3. teodolitos-bússola.

A maioria dos teodolitos são ditos reiteradores. Nesse tipo de teodolito o círculo horizontal tem a liberdade de girar no seu próprio plano, através de um comando de rotação do círculo. Pode-se assim dar-lhe uma rotação particular antes de iniciar-se uma série de medidas, e modificar-se a orientação para a série posterior. Tem-se assim uma medida de ângulos por reiteração.

Com esse tipo de teodolito efetuam-se as medidas angulares, recomeçando-as várias vezes, variando-se a orientação da origem. Operando-se dessa maneira, as leituras são repartidas uniformemente sobre a graduação do círculo, fato que contribui para a eliminação dos erros de graduação do círculo. Nesse tipo de teodolito o círculo horizontal não se movimenta solidário com a alidade.

Um teodolito repetidor é também denominado teodolito de eixo duplo. A sua característica principal é a de permitir que o círculo horizontal movimente-se solidário

à alidade, ou livremente, conforme se movimenta um ou outro dos parafusos de fixação dos movimentos geral ou particular do instrumento. A repetição ocorre a medida que o círculo movimenta-se solidário à alidade.

Em certos casos pode ser interessante trabalhar em modo magnético, ou seja, medindo-se diretamente os azimutes magnéticos. Nesses casos os teodolitos podem receber uma bússola adicional, ou então utilizar-se teodolitos especiais, construídos especialmente para esse tipo de trabalho - são os teodolitos a bússola.

Esse tipo de instrumento possui uma agulha imantada, solidária ao círculo horizontal, que indica o norte magnético. Portanto, identifica diretamente o azimuth magnético das orientações medidas. Os aparelhos desse tipo possuem uma precisão de leitura da ordem de 1' a 2'.

2.3.1.2 - Teodolitos eletrônicos

Os teodolitos eletrônicos são instrumentos que permitem a medida eletrônica dos ângulos vertical e horizontal.

Um teodolito eletrônico é um aparelho de alta precisão, composto por partes mecânicas e eletrônicas, que formam um conjunto estável e de grande conforto para a utilização.

Os principais fatores, que determinam a qualidade destes aparelhos são os seguintes:

1. Estabilidade das partes mecânicas;
2. Qualidade dos elementos óticos;
3. Precisão da graduação dos círculos e dos dispositivos de leitura e de interpolação;
4. Sensibilidade do sistema compensador, para correção dos ângulos verticais e das direções horizontais;
5. Confiabilidade dos circuitos eletrônicos;
6. Capacidade dos instrumentos para trabalhar sem sofrer influências do meio ambiente, tais como, variação da temperatura, da pressão e das vibrações provocadas por diversos agentes que atingem os aparelhos, quando estacionados.

2.3.2 - Medição de ângulos através de instrumentos topográficos

O instrumento topográfico utilizado na Mensuração, para a medição de ângulos, horizontais e verticais, é o teodolito. Atualmente, os teodolitos eletrônicos permitem ao usuário escolher o tipo de ângulo vertical a ser medido durante as medições, se o zenital ou o ângulo de altura. Pode-se, também, determinar se a direção positiva do ângulo horizontal é para a direita ou para a esquerda, isto é, no sentido horário ou anti-horário. A precisão dos ângulos medidos varia entre 0,5"; 1"; 1,5"; 3"; 5"; 10" e 20", embora a leitura mínima seja, quase sempre, igual a 1".

A resolução angular de um instrumento topográfico representa o menor valor que o instrumento pode ler, ao passo que, sua precisão indica qual o desvio, em relação ao valor real do ângulo medido. Essa precisão é conhecida como desvio padrão da média e determina-se através de um procedimento estatístico estabelecido pela Norma DIN 18.723 ou pela NBR 13.133. Estas normas estabelecem regras para a determinação das precisões dos seguintes aparelhos topográficos: teodolitos, níveis, taqueômetros, giroscópios e equipamentos de prumagem. Esta norma equívale à Norma Européia (EN 29001 - European Norm). Estas duas normas serviram de subsídios para a confecção das normas da Organização Internacional de Padronização (ISO), referentes ao assunto em pauta.

2.3.3 - Medições angulares com teodolitos eletrônicos

Atualmente, para as medições angulares em trabalhos que exijam precisões milimétricas ou sub-milimétricas, utilizam-se teodolitos eletrônicos; e, para as distâncias, medidores eletrônicos, ambos digitais. Para solucionar, de uma só vez, estes dois problemas apresentados à Mensuração, contam-se com os recentes recursos tecnológicos, desenvolvidos na construção das Estações Totais.

As medições angulares, nos aparelhos mecânicos clássicos, são feitas a partir de um círculo em vidro, contendo diferentes tipos de graduação. Estas mesmas medições, nos teodolitos eletrônicos, são feitas através de um dispositivo de leitura, sem que haja necessidade da intervenção do operador. Para isto, nos aparelhos

mecânicos, o refinamento das medidas é feito através de micrômetros de precisão, tanto para ângulos verticais quanto para horizontais. Esta é a diferença fundamental entre as leituras realizadas nas duas classes de aparelhos

Há vários métodos para a execução de leituras angulares. A maioria dos instrumentos utiliza um sistema de medição, composto por uma placa circular de vidro, de 78mm de diâmetro, gravado com 1024 marcas. Estas marcas são codificadas sobre 128 setores, com 8 graduações em cada setor. A leitura é realizada pela iluminação do círculo codificado, através de um LED, e posterior projeção da porção iluminada sobre uma matriz de 128 foto-diodos, distribuídos em 3,2mm (25mm cada diodo). Esta porção iluminada, através de uma combinação diodo-capacitor, cria um código binário, que é enviado a um processador. Através desse processo de medição são obtidas as medidas inteiras e as medidas finas, sendo a precisão da ordem de 1". Muitas Estações Totais usam este sistema de medição.

2.3.4 - Precisão das medições em ângulos horizontais e verticais

Na determinação de coordenadas tridimensionais é muito importante selecionar-se os métodos e os aparelhos a serem utilizados. Estes cuidados fazem com que possam ser conhecidas as diferentes origens dos erros e as precisões das medidas, nos trabalhos de medição. Nestes levantamentos obtém-se, fundamentalmente, ângulos horizontais e verticais, distâncias e diferenças de nível.

Em todos os tipos de levantamentos muitos detalhes devem ser observados, para permitir a execução de uma pré-análise, ou análise "a priori", dos resultados esperados. Esta pré-análise tem por finalidade determinar-se as precisões esperadas para as coordenadas. Este procedimento é muito importante, principalmente, sob o aspecto da confiabilidade no trabalho profissional executado. Daí a preocupação e as recomendações de GRIPP JR. (1995), quanto à necessidade e validade da pré-análise, em levantamentos topográficos ou geodésicos correntes.

CAPÍTULO 3

ERROS INSTRUMENTAIS DE UM TEODOLITO

3.1 - Introdução

Todos os aparelhos topográficos apresentam erros instrumentais, principalmente, devidos às restrições impostas ao processo de fabricação dos mesmos. Os erros instrumentais de um teodolito devem ser conhecidos para que se possa estabelecer a qualidade dos trabalhos topográficos executados e, no presente caso, das coordenadas, obtidas através dos métodos de determinação de coordenadas tridimensionais. Em todos os trabalhos topográficos os erros são propagados de acordo com leis específicas, matematicamente definidas, em função dos elementos envolvidos no processo de cálculo.

Atualmente, as tolerâncias de fabricação de um teodolito são extremamente rígidas e estão no limite das possibilidades da construção mecânica. Existem, entretanto, alguns erros de ajustagem do instrumento, inevitáveis, que permanecem após sua construção. Estes erros, portanto, sempre que detectados, devem ser corrigidos. Nesse capítulo são analisados os principais erros que ocorrem nos instrumentos, bem como a influência exercida sobre as medidas angulares, usadas na determinação de coordenadas tridimensionais.

3.2 - Condições que devem satisfazer os eixos de um teodolito

Os três eixos de um teodolito devem satisfazer as seguintes condições:

1. o eixo secundário deve ser perpendicular ao eixo principal;

2. o eixo de visada deve ser perpendicular ao eixo secundário;
3. o eixo principal deve estar vertical após a calagem.

3.3 - Erros instrumentais que afetam as medidas angulares

Essas condições acima descritas, em geral, não são completamente satisfeitas. As medidas angulares são afetadas por erros de observação e instrumental, que podem ocasionar os denominados erros de eixos do teodolito, cujos efeitos nas medições angulares não podem ser desprezados. Além disso, os três eixos devem ser concorrentes em um mesmo ponto, o centro ótico do aparelho.

Quando, por exemplo, o eixo de visada, que é definido pelo centro do retículo e o centro da objetiva, está descentralizado em relação ao eixo principal, tem-se o erro denominado erro de excentricidade do eixo de visada.

Para a medição angular, os círculos graduados devem estar perfeitamente centralizados sobre os eixos correspondentes. O centro do círculo horizontal deve coincidir com o centro do eixo principal e o centro do círculo vertical deve coincidir com o centro do eixo secundário. Se esse não for o caso, tem-se os erros denominados erros de excentricidade dos círculos.

3.3.1 - Erros de eixos de um teodolito

Os erros de eixos de um teodolito são os seguintes:

1. erro de perpendicularidade do eixo secundário em relação ao eixo principal, que se traduz por um erro de horizontalidade do eixo secundário ou erro do basculamento;
2. erro de perpendicularidade do eixo de visada em relação ao eixo secundário, denominado erro de colimação horizontal;
3. erro de calagem do instrumento, ou seja, o erro de verticalidade do eixo principal.

O erro de horizontalidade do eixo secundário e o erro de colimação horizontal são denominados erros residuais de ajustagem ou de colimação do instrumento, eles podem variar ou ampliar-se ao longo do tempo. O usuário deve ter conhecimentos para poder identificá-los e, se eles ultrapassarem um certo limite, poder ajustá-los, através de correções.

As influências desses erros na medida de uma direção horizontal são analisadas detalhadamente, através de figuras ilustrativas e equacionamento matemático adequado, apresentados a seguir.

3.3.1.1 - Erro de horizontalidade do eixo secundário ou erro do basculamento

Se o eixo secundário de um teodolito não for perpendicular ao eixo principal, quando este último estiver vertical, o eixo secundário não estará horizontal, tem-se então:

$$i = \text{erro de horizontalidade} \quad (3.1)$$

Nesse caso, o eixo de visada, perpendicular ao eixo de basculamento, descreverá um plano inclinado durante o basculamento da luneta, como representado na Figura 3.1.

Onde:

- OZ - eixo principal vertical;
- HH' - eixo secundário com inclinação i em relação ao horizonte;
- OP - eixo de visada dirigido para o ponto P
- β - ângulo de altura da visada OP;
- OZI - plano vertical perpendicular a HH'
- OZE - plano vertical da direção OP;
- OTI - plano inclinado de basculamento do eixo de visada;
- i - erro de horizontalidade;
- r - raio, considerado unitário.

De acordo com a fórm. (3.4) pode-se montar a Tabela 3.1, para um erro de horizontalidade i igual a $10''$, ter-se-iam os seguintes erros na leitura horizontal:

TABELA 3. 1 - Erro da direção horizontal em segundos, função do ângulo de altura

β	ε_i
0°	$0''$
5°	$0,9''$
10°	$1,8''$
15°	$2,7''$
20°	$3,6''$
30°	$5,8''$
45°	$10''$

3.3.1.2 - Erro de colimação horizontal

Se o eixo de visada de um teodolito não for perpendicular ao eixo secundário, tem-se:

$$c = \text{erro de colimação} \quad (3. 5)$$

Nesse caso, durante o basculamento da luneta, o eixo de visada descreve um cone em torno do eixo secundário, como representado na Figura 3.2.

Onde:

OZ - eixo principal vertical;

HH' - eixo secundário horizontal;

OP - eixo de visada dirigido para o ponto P;

r - raio, considerado unitário;

c - erro de colimação;

β - ângulo de altura da visada OP;

OZI - plano vertical perpendicular a HH';

OZE - plano vertical da direção OP.

FIGURA 3. 2 - Representação do erro de colimação horizontal

Quando o eixo de visada é horizontal, ele está dirigido segundo a direção OF e faz um ângulo c com a perpendicular HH' . Com o basculamento da luneta em torno de HH' , o eixo de visada descreve um cone, cujo traço é FSU.

Nesse caso, para a visada OP, o erro de direção horizontal é o arco:

$$IE = \varepsilon_c \quad (3.6)$$

Tem-se, então:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon_c}{\text{sen } c} = \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)} \rightarrow \text{sen } \varepsilon_c = \text{sen } c \cdot \frac{1}{\cos \beta} \quad (3.7)$$

Como os ângulos c e ε_c são pequenos, adota-se que:

$$\varepsilon_c = c \cdot \frac{1}{\cos \beta} \quad (3.8)$$

Dessa forma:

1. O erro de uma direção, devido a um defeito de perpendicularidade do eixo de visada, em relação ao eixo secundário, aumenta com a inclinação da visada;

2. Esse erro possui sinal contrário, conforme a luneta esteja em posição direta ou inversa. Ele é igual a c para visadas horizontais;
3. O erro na leitura do ângulo vertical é desprezível.

Para um erro de colimação horizontal igual a $10''$, ter-se-iam os erros na leitura horizontal, conforme Tabela 3.2, elaborada a partir da eq. (3.8).

TABELA 3. 2 - Erro da direção horizontal em segundos, função do ângulo de altura, para $c=10''$

β	ϵ_c
0°	$10''$
10°	$10''$
15°	$10,5''$
30°	$12''$
45°	$14''$

3.3.1.3 - Erro de verticalidade do eixo principal

Um defeito de calagem de um teodolito produz o erro:

$$V = \text{erro de verticalidade do eixo principal} \quad (3.9)$$

Supõe-se que o eixo secundário HH' é perpendicular ao eixo principal. Quando a alidade é rotacionada, HH' produz um plano inclinado $NLN'L'$. A inclinação do eixo secundário varia entre $+V$ e $-V$, segundo a orientação da visada. Quando o eixo de visada está no plano vertical do eixo principal, ele é horizontal segundo LL' . A Figura 3.3, representa essa situação.

FIGURA 3. 3 - Representação do erro de verticalidade do eixo principal

Onde:

OZ - vertical;

OZ' - eixo principal não vertical;

HH' - eixo secundário perpendicular ao eixo principal;

OP - eixo de visada dirigido para o ponto P;

β - ângulo de altura da visada OP;

OZ'I - plano de basculamento do eixo de visada;

OZE - plano vertical da direção OP;

γ - ângulo entre o plano vertical da direção OP com o plano vertical que contém o eixo principal OZ';

V - erro de verticalidade do eixo principal.

r - raio, considerado unitário.

Nesse caso, para a visada OP, o erro de direção horizontal é o arco:

$$IE = \varepsilon_v \quad (3. 10)$$

Tem-se, então:

$$\frac{\sin \varepsilon_v}{\sin \psi} = \frac{\sin \beta}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \right)} \quad \text{e} \quad \frac{\sin \psi}{\sin V} = \frac{\sin \gamma}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)} \quad (3. 11)$$

Donde:

$$\text{sen } \varepsilon_v = \text{sen } V \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{tg} \beta \quad (3.12)$$

Como os ângulos V e ε_v são pequenos, adota-se:

$$\varepsilon_v = V \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{tg} \beta \quad (3.13)$$

Dessa forma:

1. O erro de uma direção, devido a um defeito de verticalidade do eixo principal, é proporcional à tangente do ângulo de altura;
2. Esse erro possui o mesmo sinal para a posição direta ou inversa da luneta. Ele é nulo para visadas horizontais;
3. O erro de verticalidade não tem efeito na medição dos ângulos verticais.

O erro de verticalidade do eixo principal, depende portanto, da precisão do nível de bolha usado para a calagem do instrumento. Para um nível de precisão igual a $20''$, por exemplo, o erro na leitura horizontal será da ordem de $\pm 7''$. É importante notar que os erros do eixo de basculamento e de colimação horizontal, eliminam-se, medindo-se nas duas posições da luneta e calculando-se as médias das medidas. O erro de verticalidade do eixo principal não se elimina medindo-se nas duas direções da luneta.

O recomendável é a execução de séries de medições com a luneta nas posições direta e inversa. Por uma série compreende-se uma medida de um mesmo ângulo duas vezes, cada uma numa posição da luneta. Uma série inclui, portanto, duas pontarias para cada alvo e duas leituras do círculo horizontal e/ou vertical em cada direção.

3.3.2 - Erro de excentricidade dos círculos

O círculo horizontal deve estar centrado sobre o eixo principal e o círculo vertical deve estar centrado sobre o eixo secundário. Caso isso não ocorra, tem-se uma excentricidade como indicado na Figura 3.4.

ε = erro de excentricidade dos círculos

(3. 14)

FIGURA 3. 4 - Representação dos erros de excentricidade dos círculos

Onde:

C - centro do círculo;

$r=CI_1$ - raio do círculo;

A - centro do ângulo a ser medido;

e - excentricidade de C em relação a A;

α - ângulo correto entre as direções AP1 e AP2;

I_1 - direção AP1 lida no círculo;

I_2 - direção AP2 lida no círculo;

$\alpha'=I_2 - I_1$ - ângulo medido;

$\varepsilon = \alpha - \alpha'$ - erro sobre o ângulo medido.

Considere-se ainda os ângulos β_1 , β_2 e γ :

Nota-se que:

$$\alpha + \beta_1 = \alpha' + \beta_2 \rightarrow \varepsilon = \alpha - \alpha' = \beta_2 - \beta_1 \quad (3. 15)$$

Considerando-se que os ângulos β_1 e β_2 são pequenos, pode-se dizer que:

$$\sin \beta_1 \cong \beta_1 = \frac{e}{r} \cdot \sin(\alpha + \gamma) \quad \text{e} \quad \sin \beta_2 \cong \beta_2 = \frac{e}{r} \cdot \sin \gamma \quad (3. 16)$$

$$\varepsilon = \beta_2 - \beta_1 = \frac{e}{r} \cdot [\sin \gamma - \sin(\alpha + \gamma)] \quad (3.17)$$

A eq.(3.17), mostra que o erro é proporcional à excentricidade e ; e inversamente proporcional ao raio da graduação.

Na prática, entretanto, não se conhece a excentricidade e nem a orientação da linha dos centros AC. Por isso não é possível avaliar a grandeza do erro de um ângulo medido.

A solução para o problema consiste em eliminar o erro lendo-se a medida em dois pontos diametralmente opostos do círculo e calcular a média dos dois valores. A Figura 3.5 mostra essa solução.

FIGURA 3. 5 - Representação das leituras em dois pontos diametralmente opostos

Onde:

- C - centro do círculo;
- A - centro do ângulo a ser medido;
- α - ângulo correto a ser medido;
- I' e I'' - índices diametralmente opostos;
- I'_1 - direção AP_1 lida sobre o índice I' ;
- I'_2 - direção AP_2 lida sobre o índice I'' ;
- I''_1 - direção AP_1 lida sobre o índice I'' ;

I''_2 - direção AP_2 lida sobre o índice I'' .

Tem-se, assim:

$\alpha' = I'_2 - I'_1$ - ângulo medido com o índice I' ;

$\alpha'' = I''_2 - I''_1$ - ângulo medido com o índice I'' .

Ainda, a Figura 3.5, mostra que:

$$\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha''}{2} = \alpha \quad (3.18)$$

Assim:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \quad (3.19)$$

A média das medições feitas com dois índices de leituras diametralmente opostos fornece o ângulo correto.

3.3.3 - Erros de graduação dos círculos

Os erros de graduação dos círculos são acarretados pela imprecisão dos traços que constituem a graduação do círculo. São eles:

1. erros acidentais: são os erros existentes no posicionamento de cada traço individualmente, são indiferentemente positivos e negativos;
2. erros sistemáticos: são os erros que ocorrem devido à imperfeição da máquina de gravar, eles são negativos ou positivos em regiões distintas do círculo.

Para diminuir as conseqüências dos erros de graduação sobre as medidas angulares é necessário repetir as medidas, utilizando-se porções diferentes da graduação do círculo e calcular a média dos resultados; e, para diminuir os efeitos dos erros sistemáticos é necessário repartir as medidas, regularmente, sobre toda a porção

da graduação. Os instrumentos de alta precisão já realizam este tipo de procedimento para as medições angulares (T2002 da LEICA).

3.3.4 - Erro do índice do círculo vertical - colimação vertical

O erro de colimação do círculo vertical em relação ao horizonte ou ao zênite é denominado erro do índice do círculo vertical.

Se o instrumento estiver isento do erro do índice do círculo vertical, a leitura do ângulo vertical (ângulo zenital) deve ser igual a $90^{\circ} 00' 00''$, sempre que a luneta, na posição I (direta), estiver orientada no horizonte.

Essa condição deve ser verificada da seguinte maneira: visar um ponto bem definido em posição I (direta) da luneta e ler o valor angular do círculo vertical. Repetir a mesma operação na posição II (inversa) da luneta. A soma das duas leituras deve ser igual a $360^{\circ} 00' 00''$. Uma diferença eventual, corresponderá ao duplo valor do índice vertical. A média das duas leituras do círculo vertical, nas duas posições da luneta, está isenta do erro do índice vertical.

3.4 - Erros de observação que afetam as medidas angulares

Os erros de observação que afetam as medidas angulares estão relacionados diretamente à capacidade do operador, principalmente aos cuidados que o mesmo deve ter ao estacionar o aparelho e executar a pontaria correta no centro do alvo. Os erros de observação mais freqüentes são os seguintes:

3.4.1 - Erros de centragem

A centragem poderá ser executada de cinco maneiras diferentes:

- prumo ótico;
- prumo de bastão;
- fio de prumo;
- centragem semi-forçada;

- centragem forçada.

Segundo GRIPP JR. & SILVA (1995), com a utilização do prumo ótico, obtém-se na centragem um desvio padrão de até 0,5mm por metro de altura do instrumento ($\delta_c = 0,5 \text{ mm}$), sobre o ponto, isto se o prumo estiver devidamente ajustado e o ponto for bem definido.

Com o prumo de bastão consegue-se aproximadamente a mesma precisão. O sistema de centragem forçada permite chegar-se a erros até menores que 0,1 mm por metro de altura, em relação ao centro ótico do instrumento.

3.4.2 - Erro de nivelamento

Um nível bem ajustado pode fornecer, segundo GRIPP JR. & SILVA (1995), um desvio padrão (δ_L) de cerca de 0,2 da sensibilidade correspondente, sendo esta, para níveis de média e alta precisão, da ordem de 10" a 40" por divisão.

GRIPP JR. & SILVA (1995) apresenta a seguinte fórmula para o cálculo do valor aproximado do desvio padrão de um ângulo α , devido ao erro de nivelamento:

$$\delta_\alpha = \delta_L \cdot \sqrt{(\text{tg} \beta_1)^2 + (\text{tg} \beta_2)^2} \quad (3. 20)$$

Onde:

δ_α – erro de nivelamento em um nível;

δ_L – 0,2 da sensibilidade do nível;

β_1 – ângulo vertical para a primeira linha visada;

β_2 – ângulo vertical para a segunda linha visada.

3.4.3 - Erro de pontaria

O poder de resolução dos sistemas óticos (limite de difração) dão a precisão da pontaria pela fórmula empírica:

$$\xi = \frac{10''}{\Omega} \quad (3.21)$$

Onde:

ξ - precisão da pontaria, em segundos;

Ω - magnitude da luneta.

Magnitude da luneta é definido como o poder de ampliação, ou quantas vezes esta luneta aumenta, quando apontada para o objeto medido.

O erro de pontaria aumenta com os seguintes fatores:

- alvo impróprio para as visadas;
- condições de visibilidade inadequadas;
- focalização imperfeita durante as leituras;
- ocorrências de reverberações.

Define-se como reverberação o fenômeno provocado pelo efeito da radiação solar sobre os objetos medidos.

3.4.4 - Erro de leitura

Em uma simples leitura no círculo horizontal pode-se esperar os seguintes desvios:

- (i). para teodolitos com micrômetros óticos e com divisões menores que 1'' ou 0,5'':

$$\delta_L = 2,5 \cdot d'' \quad (3.22)$$

Onde:

d'' - valor angular ou menor divisão do limbo, normalmente 1'' a 1'.

- (ii). para teodolitos com vernier:

$$\delta_L = 0,3 \cdot d'' \quad (3.23)$$

Onde:

d'' - valor angular ou menor divisão do limbo, normalmente 1'' a 1'.

Se, para um ângulo α executam-se η séries, fazendo-se então em cada direção (2. η) leituras, a influência total de todas as leituras sobre o ângulo pode ser calculada por:

$$\delta_{\alpha_L} = \frac{\delta_L}{\sqrt{\eta}} \quad (3.24)$$

Onde:

δ_L - desvio padrão da leitura de um ângulo ;

η - número de séries executadas.

Recomenda-se a execução das séries de leituras, em diferentes partes do círculo horizontal, para reduzir a influência dos erros de graduação.

3.4.5 - Instabilidade do tripé

Neste caso devemos verificar a movimentação do solo ao redor de onde está instalado o aparelho, se sujeito a vibrações ou a qualquer outro fenômeno. Deve-se, também, verificar se a radiação solar não irá influenciar na dilatação do material do qual é feito o tripé. Recomenda-se o uso de tripés de boa qualidade, para evitar uma dilatação capaz de influenciar nos resultados obtidos.

3.4.6 - Erros devido à refração

Sabe-se que a refração é proporcional à dimensão da linha medida, ou seja, ela varia com a unidade de distância. Pelo fato de não ter-se um método de determinação da magnitude das condições de campo, a refração continuará sendo uma das fontes de erros, nas medições angulares. A prática tem demonstrado que os erros das medições de ângulos horizontais são grandes se os levantamentos são realizados nas vizinhanças de objetos quentes e, ainda, se as linhas de visada passarem próximas às construções, podem ocorrer erros da ordem de segundos. O único caminho para reduzir o

influência da refração, é repetir medidas de ângulos em diferentes condições atmosféricas e em diferentes dias, ou no mínimo, fazer medidas em horas diversas.

O melhor horário recomendado para a execução de medições angulares é nas primeiras horas da manhã, porque o calor do sol não é ainda muito acentuado. Desse modo, evita-se o fenômeno da reverberação, já mencionado. O efeito do calor sobre os objetos que absorvem as radiações solares faz com que o ar, ao redor de tais objetos, se torne mais rarefeito, provocando uma diminuição da densidade e desviando o raio emitido pelo aparelho eletrônico de medição, causando imprecisão no processo.

3.5 - Correção das medidas dos ângulos lidos com um teodolito eletrônico ou com uma estação total

Estes aparelhos possuem capacidade para corrigir, automaticamente, os erros instrumentais. As correções são feitas através de processadores e compensadores mecânicos-eletrônicos.

Em certos aparelhos os erros de índice vertical e colimação horizontal são compensados, através da calibração do instrumento. Esta calibração deve ser executada pelo próprio operador, antes da execução de qualquer trabalho. No entanto, este operador deve ter prática e habilidade, suficientemente comprovadas, para que o aparelho não sofra nenhum tipo de avaria irreparável, tornando-se até inutilizado. Deve-se exigir muito cuidado, da parte do operador, durante o manuseio de qualquer aparelho topográfico.

Os erros calculados, através da calibração, são armazenados no instrumento e compensam, automaticamente, as medidas tomadas durante os trabalhos de campo.

O erro de verticalidade do eixo principal é compensado, também automaticamente, através de um compensador eletrônico, para os dois eixos do teodolito. Este compensador opera através do princípio da incidência de um raio luminoso sobre uma célula de foto-diodos e leitura das coordenadas do ponto de incidência. A resolução de um compensador desse tipo é da ordem de $1\mu\text{m}$. Esta resolução permite detectar-se um defeito de calagem do instrumento da ordem de $1''$.

Os teodolitos eletrônicos e as estações totais possuem um compensador mecânico-eletrônico, conforme representação esquemática da Figura 2.7.

Onde:

1. compensador líquido;
2. sistema de projeção;
3. diodo luminescente;
4. diodo fotoelétrico;
5. prisma;
6. pentaprisma.

FIGURA 3. 6 - Representação esquemática de um compensador mecânico-eletrônico

Um compensador com estas características permite que os erros de verticalidade sejam compensados, automaticamente, quando dentro de um certo limite de tolerância. De outro modo, quando estes erros ficam fora dos limites estabelecidos, o aparelho emite um sinal sonoro ao operador. Ou, ainda, o visor não permite a execução das leituras, tornando-se, instantaneamente, escuro. Sem dúvidas, este

dispositivo permite grande confiabilidade às leituras executadas por esse tipo de aparelho.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS

4.1 - Introdução

Neste capítulo apresentam-se, em detalhes, os principais métodos de cálculo de coordenadas tridimensionais, consagrados pelo uso corrente nos meios técnicos especializados, bem como, a fundamentação matemática de cada um.

Sabe-se que, para o cálculo das coordenadas de um ponto necessita-se, pelo menos, de um dos conjuntos de dados de campo, abaixo relacionados:

- 1 - ângulos horizontais e verticais, referentes a cada ponto;
- 2 - ângulos horizontais e verticais e, ainda, distâncias das estações fixas ao ponto.

São abordados quatro métodos de cálculo, de maneira detalhada, sendo que os métodos de interseção espacial trigonométrico e de interseção espacial analítica com superdeterminação de medidas foram adaptados para uso na metodologia proposta, com a introdução do conceito de ponto de orientação. Estes métodos foram programados em Basic, cujas listagens dos programas estão relacionadas nos Apêndices V e IV, respectivamente.

4.2 – Principais métodos de determinação de coordenadas tridimensionais

Os principais métodos tratados na literatura fundamentam-se, basicamente, na interseção espacial. A interseção espacial, entretanto, apresenta dois aspectos distintos, isto é, os métodos de cálculo utilizam a trigonometria clássica ou a geometria analítica espacial, abordada sob o enfoque puramente analítico ou sob o ponto de vista vetorial.

Quando os métodos de cálculo empregam a trigonometria, podem, ainda, solucionar o problema de duas maneiras, através da solução em função das tangentes dos azimutes, como no caso do método de interseção espacial trigonométrica ou visadas exteriores e, através da aplicação da lei dos senos nos triângulos definidos por duas estações fixas e um alvo, como no caso do método topográfico-trigonométrico. Deste modo, os dois métodos trigonométricos são equivalentes, somente usando artifícios de cálculo diferentes.

O método de interseção espacial é o mais utilizado pelos sistemas desenvolvidos para o cálculo de coordenadas tridimensionais de pontos fixos. A variação apresentada entre os vários sistemas refere-se, principalmente, ao ferramental matemático empregado.

4.2.1 - Método de interseção espacial trigonométrico - visadas exteriores

Este método divide os cálculos em duas etapas distintas: na primeira calculam-se as coordenadas planas e na segunda a coordenada altimétrica do alvo. Este processo de separação dos cálculos, em geral, proporciona inconsistência no resultado final. Mesmo assim, é um método muito utilizado em trabalhos topográficos, que dispensam uma precisão apurada.

Para determinar as coordenadas de um ponto por interseção espacial trigonométrico é necessário conhecer as coordenadas de dois pontos, que servem de base. A partir destas bases, são medidas direções, para a obtenção dos azimutes das visadas realizadas.

As estações são exteriores ao ponto a determinar, e cada combinação de duas

visadas possibilita o cálculo de uma interseção.

A Figura 4.1 mostra a determinação das coordenadas do alvo P, no plano.

FIGURA 4. 1 - Representação gráfica do método de interseção plana

Dados conhecidos:

X_A, Y_A, Z_A - coordenadas da estação A;

X_B, Y_B, Z_B - coordenadas da estação B.

A calcular:

X_P, Y_P, Z_P - coordenadas do alvo P.

Procedimentos para a obtenção dos azimutes Az_A e Az_B , durante os trabalhos de campo:

Na estação A:

- 1 - calcula-se o azimute entre A e B, pelas coordenadas de A e B, conhecidas;
- 2 - registra-se no aparelho da estação A o azimute AB e visa-se a estação B e e fixa-se o círculo;
- 3 - gira-se o aparelho até o alvo P, o ângulo lido é o azimute de A-P: Az_A ;
- 4 - deve-se ler o ângulo zenital (Zen_A), em relação ao alvo.

Na estação B:

- 1 - calcula-se o azimute entre B e A, pelas coordenadas de B e A, conhecidas;
- 2 - registra-se no aparelho da estação B o azimute BA e visa-se a estação A e fixa-se o círculo;
- 3 - gira-se o aparelho até o alvo P, o ângulo lido é o azimute de B-PA: Az_B .
- 4 - deve-se ler o ângulo zenital (Zen_B), em relação ao alvo.

Equacionamento matemático para o cálculo das coordenadas planimétricas do alvo P:

Se:

$$|tg Az_B| < |tg Az_A| \quad (4.1)$$

Então:

$$XP = XB + (YP - YB).tg Az_B \quad (4.2)$$

$$YP = YA + \left(\frac{(XB - XA) - (YB - YA).tg Az_B}{tg Az_A - tg Az_B} \right) \quad (4.3)$$

Se:

$$|tg Az_A| < |tg Az_B| \quad (4.4)$$

Então:

$$XP = XA + (YP - YA).tg Az_A \quad (4.5)$$

$$YP = YB + \left(\frac{(XA - XB) - (YA - YB).tg Az_A}{tg Az_B - tg Az_A} \right) \quad (4.6)$$

onde:

Az_A e Az_B - azimutes das direções A-P e B-P, respectivamente.

A bibliografia ressalta que os dois pares de fórmulas fornecem o mesmo resultado, e que ambos devem ser aplicados quando se deseja controlar os resultados.

No entanto, nos casos em que os ângulos Az_A e Az_B são vizinhos de 90° ou 270° , a tangente tende ao infinito, o que resulta em imprecisões nos cálculos. Tem prioridade, nesses casos, a formulação apresentada em função dos valores absolutos das tangentes de Az_A e Az_B , conforme eq. (4.1) e (4.4).

A coordenada altimétrica ZP de P é dada por:

$$ZP = \frac{ZPA + ZPB}{2} \quad (4.7)$$

onde:

$$ZPA = ZA + \cot gZen_A \cdot \sqrt{(XP - XA)^2 + (YP - YA)^2} \quad (4.8)$$

$$ZPB = ZB + \cot gZen_B \cdot \sqrt{(XP - XB)^2 + (YP - YB)^2} \quad (4.9)$$

e

Zen_A e Zen_B - ângulos zenitais medidos a partir das estações A e B, respectivamente, em direção ao alvo P.

Este método foi adaptado para operar com o apoio de um ponto de orientação (PO), conforme descrito na metodologia proposta no Capítulo 7. Este fato eliminou a necessidade da intervisibilidade entre as estações A e B.

Pela adaptação proposta, os azimutes Az_A e Az_B são calculados em função dos ângulos horizontais lidos, entre as direções A-PO e B-PO, respectivamente, e o alvo P.

Foi desenvolvido em Basic o programa computacional 03, INTER2.BAS, para a adaptação do método à metodologia proposta. Um exemplo numérico e a listagem do programa constam do Apêndice III.

4.2.2 - Método da interseção espacial analítica

No método de interseção espacial analítica as coordenadas espaciais do alvo são calculadas, concomitantemente, em função dos ângulos horizontais e verticais medidos. Assim, na prática, um erro cometido na leitura de um ângulo vertical

influencia no valor das coordenadas planas do alvo, e um erro cometido na leitura de um ângulo horizontal influencia, também, no valor da coordenada altimétrica.

Neste método de cálculo as linhas de visada dos teodolitos são consideradas vetores, que partem das estações conhecidas, em direção ao alvo. Pode-se utilizar nos cálculos, o ângulo zenital, conforme apresentado na Figura 4.2 ou o ângulo de altura.

FIGURA 4. 2 - Representação gráfica do método de interseção espacial analítica

A solução do problema de interseção espacial de visadas, utilizando vetores, foi examinada por Cooper (1987), Allan, (1988), Mok (1990), Kennie & Petrie (1990) e Carneiro e Brandão (1992), apud IBIAPINA (1993).

De acordo com a Figura 4.3, em função do ângulo de altura, as coordenadas do ponto P podem ser expressas matematicamente, como:

$$\begin{aligned} XP &= R \cdot \cos \beta \cdot \cos Hz \\ YP &= R \cdot \cos \beta \cdot \sin Hz \\ ZP &= R \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (4. 10)$$

onde:

- R - distância da origem até o ponto P;
- β - ângulo de altura medido;
- Hz - ângulo horizontal medido.

FIGURA 4. 3 - Coordenadas Espaciais do alvo P(XP,YP,ZP), utilizando-se vetores, de acordo com Carneiro & Brandão, (1992)

Pode-se calcular os cossenos diretores, conforme Figura 4.4, admitindo-se que $R=1$. Assim, os cossenos diretores da direção OP, são:

$$\begin{aligned}\cos \beta \cdot \cos Hz &= \frac{XP}{R} = \cos(V_x) = k \\ \cos \beta \cdot \sin Hz &= \frac{YP}{R} = \cos(V_y) = m \\ \sin \beta &= \frac{ZP}{R} = \cos(V_z) = n\end{aligned}\tag{4. 11}$$

onde:

V_x, V_y, V_z - ângulos de OP com os eixos positivos x, y, z, respectivamente.

FIGURA 4. 4 - Representação dos ângulos de referência entre OP e os semi-eixos positivos, conforme Carneiro e Brandão (1992), apud IBIAPINA (1993)

Como pode ser visto na figura 4.5, os dois aparelhos A e B são colimados reciprocamente, e depois efetuam-se as visadas ao alvo P.

FIGURA 4. 5 - Posicionamento dos teodolitos de acordo com Carneiro & Brandão, 1992, apud (IBIAPINA, 1993)

O aparelho A é considerado origem do sistema de referência e a direção AB é visada com um ângulo horizontal $00^{\circ}00'00''$.

As equações para o cálculo das coordenadas do ponto P, através da estação do aparelho A são:

$$\begin{aligned}
 XP_A &= R_A \cdot k_A \\
 YP_A &= R_A \cdot m_A \\
 ZP_A &= R_A \cdot n_A
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

As equações para o cálculo das coordenadas do ponto P, através da estação do aparelho B são:

$$\begin{aligned}
 XP_B &= R_B \cdot k_B \\
 YP_B &= R_B \cdot m_B \\
 ZP_B &= R_B \cdot n_B
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

onde:

R_A e R_B - distância dos respectivos aparelhos ao alvo.

Para o cálculo de R_A e R_B é preciso solucionar o seguinte sistema de equações de erros:

$$R_A \cdot k_A - R_B \cdot k_B = DH + v_1 \tag{4.14}$$

$$R_A \cdot m_A - R_B \cdot m_B = 0 + v_2 \tag{4.15}$$

$$R_A \cdot n_A - R_B \cdot n_B = \Delta H + v_3 \tag{4.16}$$

Onde:

DH - distância entre os dois teodolitos;

ΔH - diferença de nível entre os dois teodolitos;

v_i - erros residuais.

Para resolver o sistema de equações estabelecido pelas eq. (4.14), (4.15) e (4.16), onde as incógnitas são R_A e R_B , e fazer o ajustamento de medidas lineares, emprega-se o Método dos Mínimos Quadrados. Em seguida, por retro-substituição de R_A e R_B nas eq. (4.12) e (4.13) são calculados dois valores para as coordenadas

espaciais do alvo. O posicionamento de P é obtido calculando-se a média aritmética destes dois valores.

Então:

$$\begin{aligned} XP &= \frac{XP_A + XP_B}{2} \\ YP &= \frac{YP_A + YP_B}{2} \\ ZP &= \frac{ZP_A + ZP_B}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Este método usa o método de ajustamento pelos mínimos quadrados e, no entanto, volta a empregar a média das determinações como o melhor valor para as coordenadas do alvo. Ele é muito trabalhoso, tanto para os trabalhos de campo, quanto para a execução dos cálculos. Isso acontece porque ele exige a visada recíproca dos aparelhos entre si, após cada um deles ter registrado o azimute em relação ao outro.

4.2.3 - Método de interseção espacial analítica com superdeterminação de medidas

O método de interseção espacial analítica com superdeterminação de medidas, foi apresentado por IBIAPINA (1993), apoiado no método de interseção espacial analítica, de acordo com a Figura 4.6. A proposição deste método consiste em associar, a cada ponto da rede com coordenadas conhecidas, versores que definem a direção destes pontos ao alvo.

FIGURA 4. 6 - Esquema representativo do método Interseção Espacial Analítica com Superdeterminação de Medidas

Os pontos i e j e os versores correspondentes w_i e w_j , definem as retas r_i e r_j . As projeções dos versores no sistema de referência adotado são estabelecidas pelos ângulos horizontais H_{z_i} , H_{z_j} e zenitais Zen_i , Zen_j , medidos de acordo com a Figura 4.7.

Considerando-se a figura 4.7 as coordenadas de w_i são:

$$w_i = (\text{sen } Zen_i \cdot \text{sen } H_{z_i}; \text{sen } Zen_i \cdot \cos H_{z_i}; \cos Zen_i) \quad (4. 18)$$

$$w_j = (\text{sen } Zen_j \cdot \text{sen } H_{z_j}; \text{sen } Zen_j \cdot \cos H_{z_j}; \cos Zen_j) \quad (4. 19)$$

onde:

- w_i e w_j - versores em direção ao alvo P;
- Zen_i e Zen_j - ângulos zenitais medidos de cada ponto;
- H_{z_i} e H_{z_j} - ângulos horizontais medidos de cada ponto;
- i - 1, 2, 3,...n-1;
- j - 2, 3, 4,...n;
- n - número de estações.

FIGURA 4. 7 - Representação gráfica do método de interseção espacial analítica de acordo com Leica Herbrugg, Wild/TMS, 1992, apud (IBIAPINA, 1993)

O método exige a determinação da perpendicular comum entre duas retas reversas no espaço, conforme Figura 4.8.

Esse procedimento segue os seguintes passos:

- 1 - Calcular o vetor perpendicular comum n_{ij} a w_i e w_j localizado no ponto i ;
- 2 - Conhecer o plano A_{ij} que contém w_i e n_{ij} localizado em i ;
- 3 - Conhecer a reta de interseção r_j localizada no ponto j ;
- 4 - Determinar o ponto P_{ji} onde a reta r_j intercepta o plano A_{ij} ;
- 5 - Calcular o vetor perpendicular comum n_{ji} a w_i , w_j localizado em j ;
- 6 - Conhecer o plano A_{ji} que contém w_j e n_{ji} localizados em j ;
- 7 - Conhecer a reta de interseção r_i localizada no ponto i ;
- 8 - Determinar o ponto P_{ij} onde a reta r_i intercepta o plano A_{ji} ;
- 9 - Calcular o ponto médio $\bar{P}$ entre P_{ji} e P_{ij} .

FIGURA 4. 8 - Representação da reta perpendicular comum pertencente aos planos A_{ij} e A_{ji}

Para determinar o versor que estabelece a perpendicular comum entre as retas de interseção, baseado nesses referenciais analíticos, calcula-se o produto vetorial de w_i , w_j .

Portanto:

$$n_{ij} = w_i \wedge w_j \quad (4. 20)$$

onde:

n_{ij} - versor perpendicular comum aos versores w_i e w_j ;

w_i , w_j - versores localizados nos pontos i e j , respectivamente.

Os versores n_{ij} e w_i localizados no ponto i , aqui denominado de ponto de origem, definem um plano A_{ij} , conforme Figura 4.9.

FIGURA 4. 9 - Representação do plano A_{ij} formado pelo vetor w_i e pelo vetor perpendicular comum n_{ij} com origens no ponto i

Onde as coordenadas de um ponto qualquer P_{Aij} , pertencente ao plano, são dadas pela eq. (4.21):

$$(x_{Aij}, y_{Aij}, z_{Aij}) = (x_i, y_i, z_i + h_i) + s_{ij}(x_{wi}, y_{wi}, z_{wi}) + t_{ij}(x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}) \quad (4. 21)$$

Onde:

x_i, y_i, z_i - coordenadas espaciais do ponto de origem i ;

h_i - altura do instrumento no ponto i ;

x_{wi}, y_{wi}, z_{wi} - coordenadas do vetor w_i ;

$x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}$ - coordenadas do vetor n_{ij} ;

s_{ij} e t_{ij} - parâmetros do plano A_{ij} .

Portanto, as coordenadas de P_{Aij} são funções dos parâmetros determinantes do plano A_{ij} . Daí:

$$x_{Aij} = x(s_{ij}, t_{ij})$$

$$y_{Aij} = y(s_{ij}, t_{ij}) \quad (4. 22)$$

$$z_{Aij} = z(s_{ij}, t_{ij})$$

A equação paramétrica do plano A_{ij} , conforme figura 4.9, já referida, é a seguinte:

$$A_{ij}(s_{ij}, t_{ij}) = (x_i, y_i, z_i + h_i) + s_{ij}(x_{wi}, y_{wi}, z_{wi}) + t_{ij}(x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}) \quad (4.23)$$

onde:

x_i, y_i, z_i - coordenadas espaciais do ponto de origem i ;

h_i - altura do instrumento no ponto i ;

x_{wi}, y_{wi}, z_{wi} - coordenadas do versor w_i ;

$x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}$ - coordenadas do versor n_{ij} ;

s_{ij} e t_{ij} - parâmetros do plano A_{ij} .

As coordenadas de um ponto P_{rj} pertencente a reta de interseção r_j , com origem no ponto j e estabelecida pelo vetor w_j são dadas por:

$$(x_{rj}, y_{rj}, z_{rj}) = (x_j, y_j, z_j) + m_{ji}(x_{wj}, y_{wj}, z_{wj}) \quad (4.24)$$

onde:

x_j, y_j, z_j - coordenadas espaciais do ponto de origem j ;

h_j - altura do instrumento no ponto j ;

x_{wj}, y_{wj}, z_{wj} - coordenadas do versor w_j ;

m_{ji} - parâmetro da reta de interseção r_j .

Portanto, as coordenadas de P_{rj} são funções dos parâmetros determinantes da reta r_j . Daí:

$$\begin{aligned} x_{rj} &= x(m_{ji}) \\ y_{rj} &= y(m_{ji}) \\ z_{rj} &= z(m_{ji}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

A equação paramétrica da reta de interseção r_j , conforme Figura 4.10, é a seguinte:

$$r_j(m_{ji}) = (x_j, y_j, z_j + h_j) + m_{ji}(x_{wj}, y_{wj}, z_{wj}) \quad (4.26)$$

onde:

x_j, y_j, z_j - coordenadas espaciais do ponto de origem j ;

h_j - altura do instrumento no ponto j ;

x_{wj}, y_{wj}, z_{wj} - coordenadas do versor w_j ;

m_{ji} - parâmetro da reta de interseção r_j .

FIGURA 4. 10 - Representação da reta de interseção r_j com origem no ponto j

O cálculo do ponto de interseção P_{ji} é feito determinando-se o ponto onde a reta r_j intercepta o plano A_{ij} , conforme Figura 4.11. Portanto:

FIGURA 4. 11 - Representação do posicionamento do ponto de interseção P_{ji} onde $(P_{ji} = A_{ij} \cap r_j)$

$$P_{Aij}(s_{ij}, t_{ij}) = P_{rj}(m_{ji}) \quad (4. 27)$$

Da eq.(4.21) obtém-se que as coordenadas do ponto P_{Aij} são dadas pela seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_{Aij}(s_{ij}, t_{ij}) &= x_i + s_{ij} \cdot x_{wi} + t_{ij} \cdot x_{nij} \\ y_{Aij}(s_{ij}, t_{ij}) &= y_i + s_{ij} \cdot y_{wi} + t_{ij} \cdot y_{nij} \\ z_{Aij}(s_{ij}, t_{ij}) &= z_i + h_i + s_{ij} \cdot z_{wi} + t_{ij} \cdot z_{nij} \end{aligned} \quad (4. 28)$$

E da eq.(4.24) obtém-se que as coordenadas do ponto P_{rj} são dadas pela seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_{rj}(m_{ji}) &= x_j + m_{ji} \cdot x_{wj} \\ y_{rj}(m_{ji}) &= y_j + m_{ji} \cdot y_{wj} \\ z_{rj}(m_{ji}) &= z_j + h_j + m_{ji} \cdot z_{wj} \end{aligned} \quad (4. 29)$$

No ponto P_{ji} onde a reta de interseção r_j intercepta o plano A_{ij} , as coordenadas do ponto P_{Aij} são iguais as coordenadas do ponto P_{rj} .

Logo:

$$\begin{aligned}x_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) &= x_{rj} (m_{ji}) \\y_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) &= y_{rj} (m_{ji}) \\z_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) &= z_{rj} (m_{ji})\end{aligned}\tag{4. 30}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}x_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) - x_{rj} (m_{ji}) &= 0 \\y_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) - y_{rj} (m_{ji}) &= 0 \\z_{Aij} (s_{ij}, t_{ij}) - z_{rj} (m_{ji}) &= 0\end{aligned}\tag{4. 31}$$

Os conjuntos de eq.(4.28 e 4.29) estabelecem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}s_{ij} \cdot x_{wi} + t_{ij} \cdot x_{nij} - m_{ji} \cdot x_{wj} &= x_j - x_i \\s_{ij} \cdot y_{wi} + t_{ij} \cdot y_{nij} - m_{ji} \cdot y_{wj} &= y_j - y_i \\s_{ij} \cdot z_{wi} + t_{ij} \cdot z_{nij} - m_{ji} \cdot z_{wj} &= (z_j + h_j) - (z_i + h_i)\end{aligned}\tag{4. 32}$$

As incógnitas do sistema de equações estabelecido pelas equações paramétricas do plano A_{ij} e da reta r_j são os parâmetros s_{ij} , t_{ij} , m_{ji} . Após o cálculo das incógnitas, determina-se as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_{ji} substituindo os valores de s_{ij} e t_{ij} na equação paramétrica do plano A_{ij} ou substituindo o valor de m_{ji} na equação paramétrica da reta r_j .

Optando-se por substituir o parâmetro m_{ji} da reta de interseção r_j obtém-se que:

$$P_{ji} = (x_j, y_j, z_j + h_j) + m_{ji} (x_{wj}, y_{wj}, z_{wj})\tag{4. 33}$$

Assim, as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_{ji} são:

$$\begin{aligned}x_{Pji} &= x_j + m_{ji} \cdot x_{wj} \\y_{Pji} &= y_j + m_{ji} \cdot y_{wj} \\z_{Pji} &= z_j + h_j + m_{ji} \cdot z_{wj}\end{aligned}\tag{4. 34}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}x_{Pji} &= x_j + m_{ji} \cdot \text{sen } H_{zj} \cdot \text{sen } Z_{en_j} \\y_{Pji} &= y_j + m_{ji} \cdot \cos H_{zj} \cdot \text{sen } Z_{en_j}\end{aligned}\tag{4. 35}$$

$$z_{Pji} = z_j + h_j + m_{ji} \cdot \cos Z_{en_j}$$

Os procedimentos de cálculo para determinar as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_{ij} seguem a mesma linha de raciocínio dos procedimentos para o cálculo do ponto de interseção P_{ji} .

Os dois pontos calculados P_{ij} e P_{ji} são os pontos lançados pela interseção ij pertencentes à reta perpendicular comum, conforme mostrado na Figura 4.12.

Com a hipótese de que as leituras angulares realizadas possuem pesos iguais, o posicionamento do ponto lançado é o ponto médio entre os pontos de interseção P_{ij} e P_{ji} , da figura 4.12, já referida. Assim:

$$\bar{P} = \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2} \quad (4.36)$$

FIGURA 4. 12 - Esquema do posicionamento dos pontos de interseção P_{ij} e P_{ji} e do ponto médio $\bar{P}$ utilizando o método de Interseção Espacial Analítica

As coordenada do ponto $\bar{P}$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_{Pij} + x_{Pji}}{2} \\ \bar{y} &= \frac{y_{Pij} + y_{Pji}}{2} \\ \bar{z} &= \frac{z_{Pij} + z_{Pji}}{2}\end{aligned}\tag{4.37}$$

Quando há superdeterminação de medidas, a solução ótima para as coordenadas espaciais do alvo são calculadas considerando-se que os valores compensados destas coordenadas são iguais à média aritmética das m soluções obtidas pela combinação das n estações, duas a duas.

Portanto:

$$\bar{P} = \frac{\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n}{m}\tag{4.38}$$

onde:

- n - número de estações;
- m - número total de combinações das n estações;
- $\bar{P}_i$ - ponto médio, determinado em cada combinação;
- $\bar{P}$ - média das m combinações.

As coordenadas espaciais do ponto lançado P são dadas por:

$$\begin{aligned}\overline{XP} &= \frac{\overline{XP}_{12} + \overline{XP}_{13} + \overline{XP}_{14} + \dots + \overline{XP}_{ij} + \dots}{m} \\ \overline{YP} &= \frac{\overline{YP}_{12} + \overline{YP}_{13} + \overline{YP}_{14} + \dots + \overline{YP}_{ij} + \dots}{m} \\ \overline{ZP} &= \frac{\overline{ZP}_{12} + \overline{ZP}_{13} + \overline{ZP}_{14} + \dots + \overline{ZP}_{ij} + \dots}{m}\end{aligned}\tag{4.39}$$

onde:

- $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ - coordenadas espaciais compensadas do alvo;
- $\overline{XP}_{ij}, \overline{YP}_{ij}, \overline{ZP}_{ij}$ - coordenadas espaciais do alvo obtidas em cada interseção;
- i - índice com variação de 1 a $n-1$;
- j - índice com variação de 2 a n ;
- n - número estações;
- m - número total de interseções.

Um programa computacional, desenvolvido para a adaptação do método à metodologia proposta, juntamente com um exemplo numérico, estão listados no Apêndice IV.

4.2.4 - Método polar

O método polar é bastante simples, sendo diferente dos demais métodos pelo fato de necessitar além do ângulo zenital e do azimuth, também, da medição da distância inclinada do aparelho ao alvo. Após definido um sistema de referência (x, y, z), o aparelho é orientado, passando a fazer as leituras horizontais e verticais. Além disso, são tomadas, eletronicamente, as distâncias inclinadas, para a execução dos cálculos, conforme Figura 4.13.

FIGURA 4. 13 - Esquema representativo do método polar

As coordenadas do alvo são dadas pelas seguintes equações:

$$XP = X_0 + d_{inc} \cdot \sin Zen \cdot \sin Az \quad (4. 40)$$

$$YP = Y_0 + d_{inc} \cdot \sin Zen \cdot \cos Az \quad (4. 41)$$

Como a maioria dos aparelhos topográficos, atualmente, medem diretamente o ângulo zenital, a coordenada altimétrica do alvo é dada por:

$$ZP = Z_0 + HI + d_{inc} \cdot \cos Zen \quad (4. 42)$$

onde:

XP, YP, ZP	- coordenadas do alvo;
X ₀ , Y ₀ , Z ₀	- coordenadas da estação;
HI	- altura do instrumento na estação;
d _{inc}	- distância inclinada;
Az	- azimute lido;
Zen	- ângulo zenital lido.

Este método necessita de um único aparelho, devidamente estacionado e orientado. É de fácil manejo, devido à portabilidade dos aparelhos topográficos,

principalmente, depois da consagração da Estação Total nos trabalhos correntes de Topografia.

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO DOS PRINCIPAIS SISTEMAS OPERACIONAIS USADOS PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS

5.1 - Considerações gerais

Esse capítulo apresenta uma visão geral sobre os sistemas operacionais destinados aos cálculos de coordenadas tridimensionais, em uso corrente, na Topografia Industrial. Estes sistemas empregam os diferentes métodos de cálculos, tratados no Capítulo 4 do presente trabalho. É apresentado, também, um resumo sobre o método de cálculo que cada sistema utiliza, bem como algumas considerações sobre o campo de atuação, comparações, vantagens e desvantagens destes sistemas.

5.2 - Sistema eletrônico de determinação de coordenadas - ECDS3

O ECDS3 é um sistema eletrônico de determinação de coordenadas espaciais, desenvolvido pela KERN, que usa teodolitos digitais para a medida de ângulos horizontais e verticais. Esse sistema opera interligado aos aparelhos de medição de ângulos, acoplados a um computador. A versão atual deste sistema conta com 56 programas aplicativos, destinados à execução, em tempo real ou através de pós-processamento, dos cálculos das coordenadas espaciais de pontos ou alvos, com rapidez e precisão.

Nesse sistema é empregado o método da interseção espacial analítica, para a determinação das três coordenadas dos alvos. Sua principal característica, além de muitas outras bem interessantes, é a capacidade de determinação, com elevada precisão da interseção espacial das linhas de visadas dos teodolitos, no ponto ou objeto que está sendo medido. As coordenadas destes pontos podem, então, ser empregadas para outras finalidades, usando-se uma variedade de funções espaciais do aplicativo, que podem fornecer formas e outros atributos inerentes aos objetos ou superfícies medidas.

O Sistema ECDS3 consiste no emprego de dois ou mais teodolitos eletrônicos de precisão (máximo 8 aparelhos), interligados com um computador pessoal, no qual os programas aplicativos estão implantados, conforme representação esquemática da Figura 5.1.

FIGURA 5.1 - Esquema de funcionamento do sistema ECDS3, de acordo com LARDELLI (1984)

As operações podem ser desenvolvidas em tempo real, isto é, enquanto os teodolitos visam o alvo, os computadores recebem os ângulos lidos, calculam e

gravam as coordenadas espaciais dos respectivos alvos e fornecem a lista de coordenadas, através de uma impressora ou na própria tela.

Para estabelecer as características espaciais de objetos é necessário a determinação de um número suficientemente grande de pontos, através de suas coordenadas. Estas coordenadas podem ser usadas, inclusive para a modelagem digital, entre outros atributos disponíveis ao usuário por intermédios dos aplicativos.

Programas específicos determinam o ajuste dos dados, identificando as várias formas geométricas espaciais, tais como: linhas, planos, círculos, esferas, cilindros e parábolas.

5.3 - Sistema de acompanhamento com laser, para determinação de coordenadas espaciais - SMART 310

O SMART 310 é um sistema desenvolvido para determinar a posição espacial de alvos, também em movimento, através do acompanhamento da trajetória do objeto, por intermédio de um raio laser. Esse sistema aumenta as possibilidades de aplicações da tecnologia de medições tridimensionais, tornando-se ponto importante para novos rumos da Mensuração Industrial, principalmente, na avaliação quantitativa dos processos dinâmicos. O acompanhamento do movimento do alvo, seguindo sua trajetória com o raio laser, é um acréscimo à família dos sistemas que executam as medição em três dimensões. Este sistema emprega um único sensor para captar os deslocamentos espaciais do objeto ou alvo, de modo fácil e com extrema precisão. Determina, instantaneamente, a posição do objeto em pleno movimento, em quaisquer posições da trajetória percorrida durante o deslocamento desse objeto. Esta nova tecnologia ainda é utilizada por um número reduzido de sistemas de medições. Os sistemas que usam teodolitos convencionas estão impossibilitados de empregá-la.

A alta flexibilidade do sistema móvel, com um único sensor, possibilita que grandes peças e torres possam ser regularmente inspecionadas, mesmo sob condições adversas. É de fácil instalação, necessitando somente de um operador. Sua versatilidade oferece soluções para vários problemas de medições, particularmente, se estes problemas relacionam-se a um dos seguintes campos:

- Robótica, atuando na calibração de equipamentos de automação;
- Determinação de formas, fornecendo coordenadas de pontos que permitem a modelagem;
- Engenharia em Geral, determinando recalques ou deslocamentos em obras civis;
- Pesquisa e desenvolvimento, principalmente na Topografia Industrial.

A Figura 5.2 mostra o princípio de medição das coordenadas, pelo sensor do sistema, onde são medidos os ângulos horizontal (Hz) e vertical (Zen) e, ainda, a distância inclinada (D_{inc}), usando-se um único feixe de raios laser.

FIGURA 5.2 - Princípio de determinação de coordenadas tridimensionais, pelo Sistema SMART 310, de acordo com LEICA (1993)

O alvo pode ser estático ou estar em movimento. Os valores medidos definem um sistema local de coordenadas esféricas que serão transformadas, dentro do próprio

computador, em qualquer outro sistema convencional de coordenadas. Estas coordenadas podem ser armazenadas diretamente no disco rígido de um computador, ou em outro meio magnético disponível.

O equipamento SMART 310 consiste de uma cabeça de medição, que tem acoplado a ela um interferômetro a laser; uma controladora; um processador, destinado ao acompanhamento dos movimentos dos alvos; um computador, com o sistema operacional e aplicativos; e, ainda, um dispositivo refletor. O sistema padrão forma um conjunto funcional completo, que permite solucionar-se a maioria das questões referentes às medições, tanto de alvos fixos quanto em movimento, instantaneamente. Seu sistema aplicativo é estruturado graficamente para o ambiente MS-DOS e um menu de controle permite a operação do sistema.

Os componentes do sistema SMART 310, conectados entre si, estão dispostos na Figura 5.3.

FIGURA 5.3 - Componentes do sistema SMART 310, Leica AG, Heerbrug, Switzerland, 1993

5.4 - Sistema de medição de coordenadas espaciais baseado no método da interseção espacial -SPACE

O SPACE é um sistema desenvolvido para a determinação de coordenadas tridimensionais para aplicações industriais, que utiliza, fundamentalmente, o método da interseção espacial.

Um importante requisito na manufatura de produtos industriais é o controle de qualidade. Um dos meios mais utilizados, para assegurar-se do controle desta qualidade, é medir estes objetos, quando de dimensões reduzidas, com máquinas especiais para medição de coordenadas espaciais (CMM). Nestas máquinas as coordenadas X, Y, Z, são determinadas usando-se um braço manipulador e um aparelho de alta precisão, tanto para as medições angulares, quanto para as lineares. Mas para objetos de grandes dimensões o sistema torna-se muito dispendioso, porque as máquinas de medição em três dimensões, com estabilidade e precisão suficientes, são extremamente caras. Além disso, o transporte para o local de instalação é dificultado devido às dimensões dos equipamentos, tornando-se, em certos casos, até impossível.

Para solucionar estes problemas foi introduzido, em 1988, um sistema móvel de medição à distância, baseado em teodolitos eletrônicos de alta precisão, isto é, a precisão da ordem de frações do segundo. Com este sistema é possível medir grandes objetos, com alta precisão, no próprio local em que eles se encontram

Para esta finalidade, um número mínimo de dois teodolitos eletrônicos devem ser instalados nas extremidades de uma linha de base, próximo ao objeto, interligados entre si e conectados a um computador, para a aquisição dos dados e execução dos cálculos das coordenadas, em tempo real, ou pós-processados.

Para executar as medições angulares aponta-se a luneta de ambos os teodolitos para o ponto objeto ou alvo e os ângulos lidos são transmitidos diretamente ao computador do sistema e transformados em coordenadas tridimensionais, através de cálculos efetivados pelos programas e aplicativos do sistema.

Para garantir-se a configuração ótima, com até oito teodolitos, emprega-se o mesmo método preconizado pelo sistema ECDS3, já descrito.

O fator de escala pode ser obtido usando-se uma barra de calibração, disposta horizontalmente entre cada dois aparelhos, conforme dispositivo apresentado na Figura 5.4. O fator de escala ainda pode ser determinado através de transformações de sistemas de coordenadas, devendo ser conhecidas as referidas coordenadas de um número pré-determinado de pontos do objeto medido. Podem ser acrescentadas ao sistema outras informações adicionais sobre o fator de escala desejado para o processo.

FIGURA 5.4 - Barra de calibração para a obtenção do fator de escala no sistema SPACE

Os equipamentos necessários, para o funcionamento deste sistema, começaram a ser desenvolvidos em 1985, quando a Kern começou a estudar a possibilidade de automatizar os procedimentos manuais até então executados. O resultado destas pesquisas foi a concepção do sistema automático de posicionamento e cálculo de coordenadas, (SPACE).

Para implementar este sistema, para a execução de medições de maneira automatizada, foi necessário reprojeter o teodolito de precisão E2. Todos os elementos, que eram operados manualmente, como parafusos de fixação dos

movimentos e de aproximação do foco da luneta, tiveram que ser substituídos por componentes adequados à automação. Para satisfazer-se às especificações, quanto à precisão angular destes novos aparelhos, um grande esforço técnico foi dispendido, obtendo-se leituras com precisões da ordem de $0,5''$.

Para dar uma visão geral da eficiência do sistema apresentam-se dois casos específicos no seu campo de atuação:

1 - calibração de robôs, conforme mostrado na Figura 5.5.

FIGURA 5.5 - Calibração de robôs

Para a calibração de robôs industriais, que executam operações automatizadas de grande precisão, é necessário que o sistema apresente condições de identificar e trabalhar com as propriedades da dinâmica do movimento.

2. - Verificações e reparos em antenas destinadas à captação de imagens de satélites, conforme mostrado na Figura 5.6.

FIGURA 5.6 - Calibração de antenas para a captação de imagens de satélites

Os procedimentos para estas verificações devem executar, desde a orientação da antena, até a determinação de pontos que fogem à configuração parabólica

proporcionando condições para a correção de defeitos de deformação, ocorridos durante as operações de transporte ou montagem da estrutura.

5.5 - Sistema de medição de coordenadas espaciais através do Sistema de Posicionamento Global (GPS)

Atualmente, com o rápido desenvolvimento dos métodos de posicionamento global, como o método utilizado no sistema GPS, a Mensuração ganhou um novo enfoque. Principalmente, quanto às técnicas relacionadas com a execução de trabalhos de campo ligados à Topografia e à Geodésia. A informatização dos cálculos, associada à tecnologia GPS desenvolvida, tornaram o trabalho para a obtenção dos resultados, menos cansativa. Esse desenvolvimento fez surgir vários sistemas aplicativos, compostos por uma série de programas, destinados aos campos da Mensuração, relacionados, principalmente, à Topografia Clássica e à Geodésia.

O Sistema GPS foi desenvolvido em 1973, pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, concebido para utilizar os sinais (códigos), recebidos de satélites orbitais e destes sinais obter as coordenadas espaciais de um observador (aparelho receptor), em um referencial pré-determinado.

O Navigation Satellite With Time and Ranging (NAVSTAR), ou Global Positioning System (GPS) também é conhecido pela união das duas siglas: NAVSTAR/GPS, sendo um sistema muito pesquisado atualmente.

Alternativamente, o sistema GPS pode ser utilizado para determinar a velocidade de um corpo em movimento; e, ainda, obter-se informações precisas na medição do tempo.

O sistema GPS opera com duas fases, de comprimentos de onda diferentes, denominadas L1 e L2. Quando as bases medidas são pequenas, segundo alguns autores, até 20km, não há influência dos fatores ionosféricos nas determinações das coordenadas espaciais dos pontos. Neste caso podem ser realizadas somente observações obtidas da fase L1. Trabalhos de pesquisa, ainda em andamento, com o

SR9400 da Wild, apresentaram precisões da ordem de 5mm para a coordenada altimétrica, em um posicionamento relativo.

O sistema GPS pode operar em tempo real (RTDGPS), servindo para locações em trabalhos topográficos de precisão. Está sendo muito empregado em trabalhos de cadastro rural, para fins de controle de áreas agrícolas ou pastoris e, na área de cadastro urbano multifinalitário.

As vantagens do método GPS, em relação a outros métodos, é que não há a necessidade da intervisibilidade entre os pontos da rede, que está sendo levantada. E, ainda, as observações podem ser realizadas independentemente das condições climáticas ou atmosféricas e do horário. Estas observações podem ser executadas durante o dia ou à noite. No entanto, o sistema exige uma boa configuração, que deve ser apresentada pela rede de satélites, disponíveis para aquele horário em que estas observações estão sendo realizadas. Além disso, esse método possui a precisão exigida pela Geodésia.

A associação dos Sistemas GPS e GLONASS (similar, russo), quando resolvidas as implicações matemáticas, advindas da observação e captação simultâneas de todos os satélites dos dois sistemas, trará, indubitavelmente, um grande aumento na exatidão das determinações. Pesquisas neste sentido estão em adiantado estado de desenvolvimento (LEICK, 1995).

Entanto, o método possui algumas restrições. Entre elas a presença de obstáculo físicos, próximos ao local de instalação do receptor, que impedem a comunicação direta com a rede de satélites emissores. Essas restrições estão relacionadas com a necessidade de manter-se, de maneira ininterrupta, a comunicação entre os satélites e os receptores, sem as interrupções ou perdas de ciclos.

Havendo um desvio na trajetória da onda, esta chega refletida, e não diretamente, no receptor. Ao efeito provocado por este desvio denomina-se multicaminhamento, que tem uma influência muito grande na precisão das determinações. Outras fontes de problemas, além dos obstáculos que impedem essa comunicação, podem ser citados os ruídos da atmosfera, entre muitos outros fatores.

As precisões obtidas, na determinação das coordenadas dos pontos, estão diretamente ligadas ao tipo de receptor empregado; conforme Tabela 5.1, apresentada por SILVA (1996).

TABELA 5.1 - Tipos de receptores, distâncias de emprego, resolução da ambigüidade e precisões nominais¹

Tipo de receptor	Distância entre receptores até:	a	Ambigüidade	Precisão Nominal
b		Tempo		
C/A + L1	-	a b	não resolve -	$\pm 0,50 \text{ m}$
C/A + L1	15 Km	a b	resolve 15 minutos	$\pm 10 \text{ mm} \pm 2 \text{ ppm}$
P + L1	15 Km	a b	resolve 15 minutos	$\pm 10 \text{ mm} \pm 2 \text{ ppm}$
P	15 Km	a b	resolve 15 minutos	0,20 a 0,30 m
C/A, L1, L2 P em L2	20 Km	a b	resolve 7 minutos	$\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$
C/A, L1, L2 P em L1 e L2	20 Km	a b	resolve 5 minutos	$\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$
C/A, L1, L2 P em L1 e L2	Depende do alcance do rádio modem	a b	resolve -	$\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$

¹ Fonte: retirada das notas de aula do Professor Irineu da Silva, (1996). Não publicada.

Para a determinação de coordenadas altimétricas absolutas, o sistema GPS ainda apresenta restrições, devido à imprecisão com que a ondulação geoidal é definida. Mesmo assim, as coordenadas altimétricas, obtidas por um posicionamento relativo, dependendo do receptor utilizado, podem alcançar precisões milimétricas. Este sistema não pode ser empregado na Topografia Industrial, que atua preferencialmente em recintos cobertos, devido às características de emprego do equipamento, para o qual não pode haver obstáculo físico interposto entre os satélites emissores e os aparelhos receptores.

5.6 - Sistema de medição de coordenadas espaciais com a estação total de precisão – PCMSplus

O sistema PCMSplus é um sistema de determinação de coordenadas tridimensionais desenvolvido pela LEICA, que utiliza a Estação Total de precisão TC2002. Esse novo membro da família dos sistemas de medições industriais dessa empresa, faz parte dos sistemas óticos-eletrônicos de medições em três dimensões. Todos estes sistemas são descritos, freqüentemente, como máquinas móveis para medições de coordenadas.

A abreviatura PCMS vem das primeiras letras dos termos em inglês (Polar, Coordinates, Measurement e System) e o plus deve-se ao acoplamento dos programas aplicativos ao sistema. Estes aplicativos permitem a execução de cálculos e as análises estatísticas dos resultados obtidos.

O PCMSplus é um sistema compacto, composto por um único sensor; um computador pessoal; um sistema aplicativo e uma Estação Total de precisão, a TC2002, que mede os ângulos horizontais (Hz), zenitais (Zen) e a distância inclinada (D_{inc}) até o alvo (P), conforme mostrado na Figura 5.7.

Durante a aquisição dos dados, eles podem ser gravados diretamente no computador pessoal e usados em processamentos em tempo real, ou, também armazenados em cartões de gravação interna, que permitem a utilização destes mesmos dados em processos de pós-processamento.

As operações essenciais para o uso do PCMSplus são: coleta dos dados para utilização em tempo real ou em pós-processamento; definição matemática do setor de trabalho; visualização dos pontos de referência, com o fornecimento ao sistema de suas respectivas coordenadas. Estas coordenadas dos pontos de controle permitem a execução da orientação geral do sistema de operação.

FIGURA 5.7 - Princípio de medida do sistema PCMSplus, de acordo com LEICA (1993)

As aplicações do PCMSplus são:

- Controle nas construções navais, como navios e grandes embarcações;
- Ferrovias, na orientação para o assentamento de trilhos;
- Indústria aeronáutica, auxiliando na montagem de grandes aeronaves em geral;
- Indústria petrolífera, no controle das torres de bombeamento;
- Engenharia mecânica, na determinação de formas precisas para a fundição de peças de grandes dimensões;
- Engenharia civil, no controle de recalques ou inclinações em grandes edificações;
- Fábricas e manufaturas, na calibração de robôs destinados ao controle de qualidade;
- Aplicações individuais diversas.

A seguir, apresentam-se alguns itens referentes às vantagens ou benefícios do PCMSplus:

- 1 - Sistema móvel e de fácil manejo, leva menos de cinco minutos para ser instalado e entrar em funcionamento;
- 2 - Sistema operado por um único técnico;

- 3 - Apresenta condições de captação de dados em tempo real, ou armazena os para um pós-processamento;
- 4 - Exige um treinamento reduzido, porque além do aplicativo ser guiado por um menu, ainda possui várias páginas para auxiliar nas consultas;
- 5 - Caracteriza-se por rápida captação dos dados , reduzindo os custos do processo de produção com a economia de tempo;
- 6 - Pode usar tanto os prismas refletores quanto os alvos auto-adesivos;
- 7 - O tipo de alvo que vai ser usado é informado ao sistema pressionando-se de uma tecla específica;
- 8 - Tem módulos adicionais para medições em tempo real;
- 9 - Observando-se somente três pontos de amarração para as transformações pode-se executar as transformações dos sistemas de coordenadas;
- 10 - Quando ligado ao sistema um outro instrumento de precisão, como os teodolitos T2002 ou T3000 e os programas aplicativos do ECDS3/ManCAT, fica com dois módulos para medições, os quais poderão cobrir todos os tipos de aplicações, sempre que as precisões exigidas sejam superiores a 0,05mm.

Cada sensor armazena várias funções computacionais, que tornam o sistema ainda mais versátil. Como exemplo, pode-se citar a possibilidade de estacionar o aparelho em diferentes posições, ao redor dos objetos ou alvos, coletando-se os dados referentes a um único alvo de todas estas posições previamente ocupadas.

O cartão para as gravações é simplesmente encaixado no aparelho, ficando imediatamente disponível para armazenar as medidas.

5.7 - Sistema automático de medição de coordenadas polares para windows - APSWin

O APSWin é um sistema de medição de coordenadas tridimensionais desenvolvido pela LEICA, constituído por um único teodolito, com um aplicativo específico para Topografia, que opera em tempo real ou através de pós-processamento. Este sistema executa trabalhos topográficos que envolvem a

determinação de coordenadas tridimensionais de pontos fixos, instrumentados com prismas ou alvos retro-refletores.

O aplicativo do sistema APSWin comporta operações automáticas, coleta de dados e processamento para todos os teodolitos motorizados, pertencentes à família TPS 1000 e TM3000x, da empresa LEICA.

O sistema completo constitui-se de vários componentes, tais como: teodolito, com ou sem distanciômetro, sensores meteorológicos e periféricos para a entrada de dados. Todos estes elementos, facilmente conectados, formam um sistema compacto, que pode ser operado com certa facilidade. As funções deste sistema são específicas para aplicações em trabalhos topográficos, como controle de pontos sujeitos a abalos, que possam provocar deslocamentos. A Figura 5.8 mostra uma visão geral do fluxo de dados no sistema APSWin.

FIGURA 5.8 - Representação esquemática do fluxo de dados no sistema APSWin

Imediatamente, após a execução das medidas, os dados são transferidos do instrumento para o computador, pelo programa de coleta de dados, que opera em tempo real, que faz parte de um aplicativo específico do sistema. Estes valores são,

então, são armazenados em um banco de dados, juntamente com dados meteorológicos. Estes dados meteorológicos coletados, permitem a execução das correções, que devem ser aplicadas aos valores medidos, para corrigi-los. Pode-se entrar com outras informações suplementares, tais como, dia e hora da execução dos trabalhos de campo.

Os dados transportados, já disponíveis, podem ser incorporados e processados, através do programa para pós-processamento. Para muitas aplicações de alta precisão, os deslocamentos e rotações na estação devem ser levados em consideração nos cálculos e nas análises dos resultados. Um programa específico, implementado na própria estação, leva em consideração estes deslocamentos quando da determinação dos valores finais das coordenadas dos pontos medidos. Os dados podem ser mostrados na tela do monitor, impressos, ou armazenados em arquivos.

Para aplicações e análises adicionais, vários programas que operam em MS-Dos ou em Windows, podem ser chamados, após o ciclo de medidas ter sido concluído. Para teodolitos motorizados, que não reconhecem os alvos automaticamente, está disponível uma função especial, que identifica determinados tipos de alvos, denominada identificação de alvos externos.

Todas as coordenadas são calculadas em função do ângulo vertical e da distância inclinada, definida pelo eixo ótico do teodolito e o centro do prisma. O ângulo vertical é tomado em relação à vertical do lugar, que é dada pelo fio de prumo. As medidas podem ser armazenadas no banco de dados, compensadas ou não, de acordo com a escolha do operador. O limite de tolerância para medidas repetidas é definido como sendo o desvio padrão das mesmas, em relação às próprias medidas.

Este sistema é muito prático, tem alta precisão, pois executa todos os cálculos referindo-se somente às leituras angulares e à determinação eletrônica de distâncias. Ele usa aparelhos topográficos de última geração, portáteis e de fácil manejo. O binômio praticidade-precisão está evidente neste processo de determinação de coordenadas tridimensionais.

5.7.1 - Aplicação prática com o sistema de medição de coordenadas polares com teodolitos motorizados - APSwin

A presente aplicação prática como o sistema, foi realizada no município de Ouro Preto, no estado de Minas Gerais, em outubro de 1997. Foi implementado na mina de Itabirito, de onde é extraído o minério de ferro destinado ao porto de Vitória, no Espírito Santo, sendo a exploração da jazida pertencente à Cia. Vale do Rio Doce.

O objetivo da instalação do sistema é para controlar os movimentos e deslizamentos de taludes, visto que a mina é de exploração a céu aberto. Os deslizamentos dos referidos taludes são evitados, na prática, através de banquetas, executadas por máquinas apropriadas para o corte de grandes maciços rochosos. No entanto, ainda é necessário a implementação de um sistema de controle e alarme, para proteção dos operários e equipamentos. Principalmente, para prever e anunciar, com certa antecedência, o momento exato de abandonar os locais de risco, com a devida segurança.

Fazem parte do sistema os seguintes equipamentos e acessórios:

1. Um TCA1800 (teodolito automático motorizado), com as seguintes características técnicas:

- medidas angulares, segundo determinações das normas DIN 18.723, da ordem de 1", tanto para ângulos horizontais, quanto para os verticais;
- precisão de posicionamento de 1,7" e velocidade do giro motorizado de 27" por segundo;
- o compensador automático tem uma amplitude de oscilação de $\pm 0,3''$ e uma precisão de estabilização de 0,3";
- o aumento da ocular é de 30x, o diâmetro da objetiva de 42mm e a distância mínima de focagem é de 1,7m;
- a bateria interna tem capacidade para 8 horas de trabalho, ininterruptamente;
- o peso, sem a base nivelante e sem a bateria é de 6,5 kg;
- precisão para as medidas de distância 2mm + 2ppm;
- alcance, com apenas 1 prisma é de 2,5km e com 3 prismas de 3,5km.

2. Um computador pessoal onde estão implantados e disponíveis todos os aplicativos e programas dos sistema APSwin, e uma impressora, destinada ao fornecimento dos resultados, em forma de relatório. Interligado ao sistema está uma linha telefônica/fax, que serve para transmitir, instantaneamente, os dados processados pelo computador, ao escritório central, onde fica o sistema de alarme.

3. Estes equipamentos, constantes dos itens 1 e 2, estão protegidos em uma casa de alvenaria, com a frente e parte das laterais em vidro especial. Este vidro é muito resistente às intempéries, tendo ainda a capacidade de não refratar e não refletir os raios que são emitidos pela TCA1800, em direção aos prismas implantados nos taludes sujeitos aos deslizamentos. A figura 5.9 mostra a casa para proteção dos equipamentos.

FIGURA 5.9 - Casa para proteção do equipamento do sistema APSwin - Mina de Itabirito, Ouro Preto, MG.

Esta casa está situada em local dominante, sendo possível, estando no seu interior, visualizar todo o talude circunjacente à mina, conforme apresentado na Figura 5.10.

FIGURA 5.10 - Visão geral do talude, estando o observador no interior da casa

4. No centro da casa está implantado um pilar com todos os dispositivos necessários à centragem forçada do aparelho, para permitir o nivelamento perfeito. Este pilar tem o diâmetro de 32cm, tendo sido construído sobre a cabeça de uma estaca de aço, engastada na rocha. Esta precaução serve para evitar-se o movimento de flambagem do pilar, deixando-o solidário como o maciço rochoso. Todas estas precauções são exigidas devido à sensibilidade do aparelho empregado e à precisão necessária nos trabalhos de monitoramento dos prismas, que indicam os indícios de deslizamentos.

A Figura 5.11 mostra o pilar com o dispositivo completo, para as operações de centragem forçada.

FIGURA 5.11 - Aparelho em funcionamento, instalado sobre o pilar com o dispositivo de centragem forçada

Os dados iniciais, que alimentam o sistema e as operações necessárias ao emprego no monitoramento dos prismas, são apresentados conforme segue:

1. Instalação do sistema e verificações quanto ao fornecimento de energia, para que esta não sofra interrupção;
2. Fornecer ao sistema as coordenadas de, no mínimo 4 pontos de controle para a orientação inicial do aparelho. No caso em questão existem 4 pontos, estabelecidos por uma cadeia geodésica ajustada, que servem de orientação para a determinação das coordenadas do centro ótico do referido aparelho, bem como determinar-se o azimute de orientação de todo o sistema de operações;

Os pontos de controle estão distribuídos, de maneira que sua configuração espacial não influencie, negativamente, no ajustamento necessário à determinação das

coordenadas do centro ótico do aparelho. Após a orientação o aparelho está disponível para os levantamentos, sendo os resultados fornecidos dentro do sistema referencial estabelecido pelos pontos de controle.

As verificações dos deslocamentos dos pontos de monitoramento, implantados nos talude, sujeitos aos deslizamentos são executados do seguinte modo:

1. Informa-se ao sistema, através de um arquivo, as coordenadas destes prismas;
2. O aparelho, já orientado visa, automaticamente, conforme determinação do aplicativo, cada prisma do talude, em varredura no sentido horário. O talude onde os prismas estão distribuídos apresenta-se na figura 5.12;

FIGURA 5.12 - Talude onde os prismas para monitoramento estão distribuídos

3. As coordenadas dos prismas são calculadas em tempo real, e comparadas com os valores registrados no arquivo;

4. O sistema calcula o deslocamento espacial relativo de cada ponto, em função das coordenadas de arquivo e das calculadas, em tempo real. Se este valor for maior que um certo valor pré-determinado, é disparado um alarme, indicando perigo iminente. todos os operários e equipamentos devem ser retirados para local seguro.

No caso em questão foram implantados 12 prismas no talude, visto na Figura 12, somente para efeito de teste do equipamento e do aplicativo.

Essa é uma das finalidades ou opções de emprego desse sistema de determinações de coordenadas polares, através de um aparelho motorizado, juntamente com o emprego de um aplicativo específico, que controla todas as operações, automaticamente, após alimentado o sistema com os dados iniciais e acionados os programas.

CAPÍTULO 6

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

6.1 Generalidades

Em Mensuração deve-se abdicar da pretensão de obter-se o verdadeiro valor de uma grandeza medida, pois todas as observações conduzidas pelo homem se caracterizam pela inevitável presença dos erros de medida. Ainda, a desconfiança no resultado de uma medida isolada, fruto da certeza na falibilidade humana, leva naturalmente à execução de um número maior de observações.

Por este motivo deve-se recorrer ao ajustamento de observações, para que, a partir de dados redundantes, inexatos, se possa extrair um resultado que seja único. Este resultado deve representar, com maior confiança, a grandeza medida.

Na Mensuração Industrial como na Topografia e na Geodésia, trabalha-se com medidas angulares e lineares, genericamente denominadas observações (l_i). Estas observações podem assumir um número compreendido entre a unidade e um valor qualquer (n). Entretanto, o que realmente procura-se é um valor que represente o conjunto dos valores observados, e a precisão deste valor. Apresenta-se como o melhor valor, a média aritmética das observações (l_i), quando todas elas têm o mesmo peso, ou a média ponderada, em caso contrário.

A precisão é dada pelo desvio padrão, calculado em relação à média das observações. Entretanto, muitos erros, evitáveis e inevitáveis pelo operador, concorrem e influenciam no grau de precisão de uma medida. Estes erros devem ser estudados com atenção e tratados estatisticamente, para que todas as suas implicações no processo, sejam detectadas e avaliadas.

6.2 - Indicadores de precisão para a Mensuração

Define-se precisão como sendo a consistência da medida ou o grau de refinamento de um grupo de medidas, GRIPP JR. & SILVA (1995). Nas medições os termos mais empregados, para expressar a precisão, são a variância e o desvio padrão ou erro médio quadrático.

A variância é definida como a média do quadrado dos erros aparentes. Para o cálculo da variância adota-se o seguinte critério:

1. Se o número de observações (n) for menor que 30, a variância é obtida por:

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n-1} \quad (6.1)$$

onde:

s^2 - variância, considerando-se os erros aparentes;

e_i^2 - erros aparentes ao quadrado;

n - número de observações.

ou, matricialmente:

$$s^2 = \frac{V^T V}{n-1} \quad (6.2)$$

onde:

$V^T \cdot V$ - somatório dos erros residuais ao quadrado, sendo:

$$V = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^T = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \dots \quad e_n]$$

2. Se o número de observações (n), for maior do que 30, define-se:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{E_i^2}{n} \quad (6.3)$$

onde:

σ^2 - variância, considerando-se os erros verdadeiro;

E_i^2 - erros verdadeiros ao quadrado;

n - número de observações.

ou, matricialmente:

$$\sigma^2 = \frac{E \cdot E^T}{n} \quad (6.4)$$

onde:

σ^2 - variância, considerando-se os erros verdadeiros;

$E \cdot E^T$ - somatório dos erros verdadeiros ao quadrado, sendo:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E^T = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & \dots & E_n \end{bmatrix}$$

n - número de observações.

O desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância, sendo:

1. Para o número de observações (n) menor do que 30:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n-1}} \quad (6.5)$$

onde:

s - desvio padrão aparente ou precisão aparente.

Ou, matricialmente:

$$s = \sqrt{\frac{V^T V}{n-1}} \quad (6.6)$$

2. Para o número de observações (n) maior do que 30, têm-se:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}} \quad (6.7)$$

Ou, matricialmente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E \cdot E^T}{n}} \quad (6.8)$$

Para qualquer tipo de observação, o resultado terá maior significado, se além de apresentado o valor da grandeza desejada, for apresentado também a precisão com que esta foi obtida.

Dependendo da grandeza medida, ao invés de se usar o desvio padrão como precisão, é preferível apresentar o erro relativo no lugar deste, como no caso específico de distâncias. Então, têm-se:

$$e_r = \frac{E}{\bar{X}} \quad (6.9)$$

onde:

- e_r - erro relativo;
- E - erro absoluto aparente;
- $\bar{X}$ - média ou valor mais provável da grandeza.

Geralmente expressa-se o erro relativo como uma fração de numerador igual a unidade. Então, têm-se:

$$e_r = \frac{1}{\frac{\bar{X}}{E}} \quad (6.10)$$

6.3 - Lei de propagação de erros para funções lineares

A lei de propagação de erros ou variâncias deve ser empregada quando

deseja-se fazer uma análise de erros, visando a realização de uma pré-análise.

Na realidade, parte-se de uma relação matemática entre várias grandezas, relacionadas ou não, para obter-se uma nova grandeza. Como as medidas das grandezas iniciais contém erros, a grandeza final também os conterá. O objetivo, então, é encontrar os erros das grandezas finais através dos erros das grandezas medidas, propagando-os.

Para a propagação dos erros procedemos conforme abaixo especificado:

Seja $y = F(z_1, z_2)$, função das grandezas não correlacionadas z_1 e z_2 de desvios padrões conhecidos σ_{z1} e σ_{z2} . Se numa dada medida da série de observações tivermos os erros e_{z1} e e_{z2} nas grandezas z_1 e z_2 , a correspondente função ficará:

$$y + e_y = F(z_1 + e_{z1}, z_2 + e_{z2}) \quad (6.11)$$

onde:

e_y - erro relativo da função

Desenvolvendo-se a função F em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior à primeira, vem:

$$y + e_y = F(z_1, z_2) + \frac{\partial F}{\partial z_1} e_{z1} + \frac{\partial F}{\partial z_2} e_{z2} \quad (6.12)$$

como:

$$y = F(z_1, z_2) \quad (6.13)$$

então:

$$e_y = \frac{\partial F}{\partial z_1} e_{z1} + \frac{\partial F}{\partial z_2} e_{z2} \quad (6.14)$$

que elevado ao quadrado fica:

$$e_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1} e_{z1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial z_2} \cdot e_{z1} \cdot e_{z2} + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2} e_{z2} \right)^2 \quad (6.15)$$

Considerando-se que as grandezas z_1 e z_2 foram medidas com várias repetições e somando-se os valores obtidos devido a estas repetições, vem:

$$\sum_{i=1}^n e_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \sum_{i=1}^n e_{z_1}^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial z_2}\right) \cdot \sum_{i=1}^n e_{z_1} \cdot e_{z_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 \sum_{i=1}^n e_{z_2}^2 \quad (6.16)$$

mas, como z_1 e z_2 são não correlacionados, então:

$$\sum_{i=1}^n e_{z_1} \cdot e_{z_2} = 0 \quad (6.17)$$

logo:

$$\sum_{i=1}^n e_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n e_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n e_{z_2}^2 \quad (6.18)$$

Dividindo-se pelo número de vezes em que as grandezas foram medidas, vem:

$$\sum_{i=1}^n \frac{e_y^2}{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{e_{z_1}^2}{n} + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{e_{z_2}^2}{n} \quad (6.19)$$

mas:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum \frac{e_y^2}{n} \\ \sigma_{z_1}^2 &= \sum \frac{e_{z_1}^2}{n} \\ \sigma_{z_2}^2 &= \sum \frac{e_{z_2}^2}{n} \end{aligned} \quad (6.20)$$

logo,

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 \quad (6.21)$$

Considerando-se y com função de outras grandezas ou seja:

$$y = F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_k) \quad (6.22)$$

e a equação final da variância fica:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial z_k}\right)^2 \sigma_{z_k}^2 \quad (6.23)$$

Esta é a equação geral da lei de propagação de erros para o caso em que não há correlação entre as grandezas medidas.

6.4 - Propagação de erros em uma irradiação

No presente trabalho, o ponto de orientação é essencial para o desenvolvimento dos métodos propostos. A partir do ponto de orientação são levantadas as estações, por irradiação. Este é o motivo pelo qual apresenta-se a propagação de erros na irradiação.

Sejam σ_d e σ_θ , as precisões de um aparelho respectivamente, para ângulos e distâncias, sendo σ_θ dado em radianos e σ_d em milímetros. Nas fórmulas deve-se trabalhar com radianos em metros, para que as unidades permaneçam coerentes.

Na irradiação, partindo-se de um ponto arbitrário, considera-se as coordenadas deste ponto como isentas de erros.

Sejam, no caso em questão, as coordenadas do PO: XPO, YPO, ZPO, consideradas, por injunção, isentas de erros. Medem-se a partir do PO: a distância inclinada PO-E (D_{inc}), os ângulos zenital (Zen) e horizontal (Az), em relação à estação E. O ângulo Az representa o azimuth da direção PO-E. As coordenadas XE, YE, ZE da estação E são dadas por:

$$XE = XPO + D_{inc} \cdot \sin(Zen) \cdot \sin(Az) \quad (6.24)$$

$$YE = YPO + D_{inc} \cdot \sin(Zen) \cdot \cos(Az) \quad (6.25)$$

$$ZE = ZPO + D_{inc} \cdot \cos(Zen) \quad (6.26)$$

onde:

XE, YE, ZE - coordenadas da estação;

XPO, YPO, ZPO - coordenadas do ponto de orientação;

$D_{inc} = d$ - distância inclinada PO-E, medida por meio eletrônico;

- Zen - ângulo zenital em relação à estação E;
 Az - azimute da direção PO-E.

Aplicando-se a lei de propagação de erros à eq. (6.24) e fazendo $D_{inc} = d$ nas equações que seguem, têm-se:

$$\sigma_{XE}^2 = \left(\frac{\partial XE}{\partial d}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial XE}{\partial Zen}\right)^2 \cdot \sigma_\theta^2 + \left(\frac{\partial XE}{\partial Az}\right)^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 27)$$

Calculando-se as derivadas, têm-se:

$$\sigma_{XE}^2 = [\text{sen}(Zen) \cdot \text{sen}(Az)]^2 \cdot \sigma_d^2 + [d \cdot \cos(Zen) \cdot \text{sen}(Az)]^2 \cdot \sigma_\theta^2 + [d \cdot \cos(Az) \cdot \text{sen}(Zen)]^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 28)$$

Esta é a equação que fornece a precisão da coordenada XE.

Aplicando-se a lei de propagação de erros à eq. (6.25), têm-se:

$$\sigma_{YE}^2 = \left(\frac{\partial YE}{\partial d}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial YE}{\partial Zen}\right)^2 \cdot \sigma_\theta^2 + \left(\frac{\partial YE}{\partial Az}\right)^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 29)$$

Calculando-se as derivadas, têm-se:

$$\sigma_{YE}^2 = [\text{sen}(Zen) \cdot \cos(Az)]^2 \cdot \sigma_d^2 + [d \cdot \cos(Az) \cdot \cos(Zen)]^2 \cdot \sigma_\theta^2 + [-d \cdot \text{sen}(Zen) \cdot \text{sen}(Az)]^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 30)$$

Esta é a equação que fornece a precisão da coordenada YE.

Aplicando-se a lei de propagação de erros à eq. (6.26), têm-se:

$$\sigma_{ZE}^2 = \left(\frac{\partial ZE}{\partial d}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial ZE}{\partial Zen}\right)^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 31)$$

Calculando-se as derivadas, têm-se:

$$\sigma_{ZE}^2 = (\cos(Zen))^2 \cdot \sigma_d^2 + d^2 \cdot (\text{sen}(Zen))^2 \cdot \sigma_\theta^2 \quad (6. 32)$$

Esta é a equação que fornece a precisão da coordenada ZE.

As eq. (6.28), (6.30) e (6.32), fornecem as precisões das coordenadas da estação E, em função das precisões das leituras angulares do aparelho e da precisão da distância. Tais precisões acompanham as especificações técnicas de cada aparelho.

6.5 - Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados é o método de ajustamento de observações redundantes, adotado para torná-las coerentes com um modelo matemático pré-estabelecido. Este método é amplamente tratado na literatura, seu princípio fundamental é minimizar a somatória dos quadrados dos erros residuais das medidas. Os pesquisadores mais modernos, como Bjerhammar (1973), Mikhail & Achermann (1976), Richardus (1976), Mikhail et Gracie (1981), Gemael (1984), Cooper (1987), Gaspary (1987), Da Silva (1990), Konnie et Petrie (1990), Watson (1991), Frank (1991), Curry (1991), Curry e Sawyer (1991), têm empregado estes princípios em seus trabalhos na área da topografia e da Geodésia, apud IBIAPINA (1993)¹.

Em Mensuração nenhuma medida é exatamente determinável, isto é, há erros intrínsecos que apesar de não poderem ser corrigidos, podem ser detectados, analisados e minimizados pela teoria dos erros.

Em ângulos, por exemplo, não há como medir um valor ideal, entretanto, há como obter uma estimativa da medida ideal, um melhor valor para a medida. Esse melhor valor pode substituir o valor ideal para calcular-se os erros cometidos nas observações de campo. A diferença entre o valor estimado, melhor valor, e o valor observado é denominado erro residual.

¹ IBIAPINA, D. S. (1993) *Método de cálculo das coordenadas espaciais de um ponto com superdeterminação de medidas*. São Carlos - S.P. 72p. Dissertação (Mestrado em Transportes) - Curso de Pós-Graduação em Transportes, Escola de Engenharia de São Carlos.

Assim:

$$v = \bar{X} - x_0 \quad (6.33)$$

onde:

- v - erro residual;
 $\bar{X}$ - melhor valor;
 x_0 - valor observado.

Para o caso de superdeterminação de medidas têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{X} - x_{0_1} &= v_1 \\ \bar{X} - x_{0_2} &= v_2 \\ \bar{X} - x_{0_3} &= v_3 \\ &\dots \\ \bar{X} - x_{0_n} &= v_n \end{aligned} \quad (6.34)$$

onde:

- $\bar{X}$ - melhor valor;
 x_{0_i} - valores observados;
 v_i - erros residuais;
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ - número de vezes em que os valores são observados.

Representando em forma matricial, têm-se:

$$V = \bar{X} - X_0 \quad (6.35)$$

Pela existência dos erros residuais, os n valores observados não são coerentes com o modelo utilizado. Não há como saber qual dos valores observados deve ser utilizado no modelo para otimizar a solução. No entanto, para obter-se um único e melhor valor, utiliza-se o método dos mínimos quadrados, cujo princípio é tornar mínima a somatória dos quadrados dos erros residuais.

Definindo a função ψ por:

$$\psi = V^T P V \quad (6.36)$$

e,

$$\psi = \text{mínimo} \quad (6.37)$$

queremos obter o domínio da função ψ em U.

Onde:

U - é o domínio de todas as variáveis envolvidas no processo;

ψ - matriz somatória dos quadrados dos erros residuais;

V - matriz dos erros residuais;

V^T - matriz transposta dos erros residuais;

P - matriz dos pesos das observações.

Quando adotamos a hipótese de que todas as medidas têm pesos iguais, a matriz P é unitária.

São encontrados vários modelos de compensação de medidas na literatura especializada, no entanto, destacam-se para o caso em estudo os três modelos abaixo referidos:

1. - modelo de compensação de observações mediatas ou diretas,
2. - modelo de compensação de observações condicionais;
3. - modelo de compensação generalizada ou modelo de Gauss-Helmert.

6.6 - Modelo de compensação de observações mediatas ou indiretas

Na Mensuração, em muitos casos as grandezas que nos interessam, por exemplo; coordenadas, não são diretamente mensuráveis. Para determinar-se as coordenadas de pontos no espaço medem-se, normalmente, ângulos e distâncias, estas observações servem como intermediárias entre as posições dos pontos no espaço e as suas coordenadas. Diz-se, então, que realiza-se uma observação indireta ou mediata.

Se a quantidade de observações for maior do que a quantidade estritamente necessária para a determinação unívoca das incógnitas, pode-se aplicar um método de ajustamento baseado no método dos mínimos quadrados. Quando este modelo é aplicado para posicionamento de pontos no espaço, as incógnitas são as coordenadas tridimensionais (XP, YP, ZP), do alvo P, ou ponto lançado.

Para a aplicação deste modelo deve-se, inicialmente, estabelecer as equações de erros, que são relações matemáticas entre as observações e as incógnitas.

6.6.1 - Aplicação genérica do modelo

Definimos a equação geral, que fornece os valores compensados das leituras como a soma dos valores observados mais os erros residuais, assim:

$$\bar{L}_i = L_i + V_i \quad (6.38)$$

onde:

$\bar{L}_i$ - valores compensados das leituras;

L_i - valor observado na estação i;

V_i - erro residual da leitura i;

i - número de observações;

n - número de leituras realizadas.

As equações de erros são:

$$L_i + V_i = \bar{L}_i \quad (6.39)$$

$$L_i + v_i = a_i \bar{x} + b_i \bar{y} + c_i \bar{z} + \dots + \text{outros} \quad (6.40)$$

onde estamos desenvolvendo em série de Taylor as funções $\bar{L}_i$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Temos:

outros - são todos os termos de ordem superior que aparecem no desenvolvimento da função;

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - incógnitas compensadas, que são as variáveis de $\bar{L}_i$;

a_i, b_i, c_i - coeficientes lineares do desenvolvimento de $\bar{L}_i$.

Nem sempre a relação matemática adotada é uma função linear das incógnitas. A expansão em série, segundo o Teorema de Taylor, é aplicada para a linearização destas funções. Os valores de ordem superior da série, por serem muito pequenos, devem ser desconsiderados.

Numa situação geral de n observações, $i = 1, 2, \dots, u$, teremos:

$$L_i + V_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) \quad (6.41)$$

onde:

- i - número da observação;
- n - número de observações, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$);
- u - número de incógnitas das funções f_i .

Em que, para cada variável $\bar{x}_k$, com ($k = 1, 2, \dots, u$), têm-se:

$$\bar{x}_k = x_{k_0} + x_k \quad (6.42)$$

onde:

- $\bar{x}_k$ - variáveis compensadas;
- $\bar{x}_{k_0}$ - valores provisórios das variáveis, $k = 1, 2, \dots, u$;
- x_k - variáveis reduzidas, $k = 1, 2, \dots, u$;
- k - índice das variáveis, $k = 1, 2, \dots, u$;

sendo ainda:

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_u) \quad \text{e} \quad \bar{X}_0 = (\bar{x}_{1_0}, \bar{x}_{2_0}, \bar{x}_{3_0}, \dots, \bar{x}_{u_0})$$

Aplicando-se o Teorema de Taylor para cada função f_i , com ($i = 1, 2, \dots, n$), têm-se :

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) = f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}\right)_0 \cdot x_u \quad (6.43)$$

onde:

- $f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u)$ - funções das leituras compensadas;
 $f_i(\bar{x}_{10}, \bar{x}_{20}, \dots, \bar{x}_{u0})$ - valor da função f_i no ponto provisório do domínio;
 $a_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k} \right)_0$ - derivada parcial da função f_i em relação a variável x_k
 calculado no valor provisório da variável;

Daí:

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) = f_i(x_{i0}, x_{20}, \dots, x_{u0}) + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iu}x_u \quad (6.44)$$

onde foram desprezados os termos de ordem superior. Os valores a_{ik} também são chamados coeficientes de direção, ou seja:.

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k} \right)_0 \quad - \text{coeficiente de direção.}$$

Como:

$$L_i + v_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) \quad (6.45)$$

Então:

$$v_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u) - L_i \quad (6.46)$$

onde:

- v_i - erros residuais das leituras;
 $f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_u)$ - funções das incógnitas compensadas;
 L_i - leituras observadas (provisórias).

sendo ainda:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \dots \\ L_u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \dots \\ l_u \end{bmatrix}$$

Logo:

$$v_i = f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0}) + a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{iu} \cdot x_u - L_i \quad (6.47)$$

Denominando:

$$l_i = L_i - f_i(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{u_0}) \quad (6.48)$$

onde:

l_i - leituras reduzidas;

L_i - leituras provisórias;

$f_i(x_0)$ - valor da função f_i no ponto provisório do domínio.

Portanto, a equação de erros linearizada é :

$$v_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{iu} \cdot x_u - l_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.49)$$

Matricialmente, têm-se:

$$V = AX - l \quad (6.50)$$

Onde:

V - matriz dos erros residuais das leituras;

A - matriz dos coeficientes parciais;

X - matriz das incógnitas;

l - matriz das leituras reduzidas.

Tem-se, então, as matrizes:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_u \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

com $A = (a_{ij})$.

Aplicando o método dos mínimos quadrados:

$$V^T P V \rightarrow \text{mínimo} \quad (6.52)$$

$$V^T P V = (X^T A^T - I^T) \cdot P \cdot (AX - I) \quad (6.53)$$

$$V^T P V = (X^T A^T P A X - X^T A^T P I - I^T \cdot P A X + I^T P I) \quad (6.54)$$

Como:

$$X^T A^T P I = -I^T \cdot P A X \quad (6.55)$$

Então:

$$V^T P V = X^T A^T P A X - 2 \cdot I^T \cdot P \cdot A X - I^T P \quad (6.56)$$

A eq. (6.56) é mínima quando sua derivada primeira for nula. Logo:

$$\frac{\partial V^T P V}{\partial X} = 2 \cdot X^T A^T P A - 2 \cdot I^T \cdot P \cdot A = 0 \quad (6.57)$$

Dividindo a eq. (6.57) por 2 e transpondo, obtém-se a seguinte expressão:

$$A^T P A X - A^T \cdot P \cdot I = 0 \quad (6.58)$$

A eq. (6.58) é denominada equação normal. Através dessa equação calcula-se o melhor valor, ou seja, a solução ótima que torna mínima a somatória dos erros residuais ao quadrado.

Denominando:

$$N = A^T P A \quad (6.59)$$

$$n = A^T P I \quad (6.60)$$

A equação normal fica estabelecida por:

$$N X = n \quad (6.61)$$

E a expressão para o cálculo final das incógnitas é dada por:

$$X = N^{-1} \cdot n \quad (6.62)$$

Conhecendo-se os valores de X pode-se calcular os erros residuais das leituras através da expressão:

$$V = AX - l \quad (6. 63)$$

Com os valores dos erros residuais das leituras (V) e os valores das leituras observadas (L_0) determinam-se as leituras compensadas ($\bar{L}$).

Daí:

$$\bar{L} = L_0 + V \quad (6. 64)$$

CAPÍTULO 7

METODOLOGIA PROPOSTA: DETERMINAÇÕES DO SISTEMA REFERENCIAL E DAS COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS DAS ESTAÇÕES E DO CENTRO ÓPTICO DOS APARELHOS

7.1 - Generalidades

Em qualquer processo de determinação de coordenadas tridimensionais a adoção de um sistema referencial único simplifica a sistemática utilizada para a execução dos cálculos. No entanto, muitos métodos que determinam as coordenadas de pontos isolados, ainda usados atualmente, executam os cálculos destas coordenadas utilizando-se simultaneamente vários sistemas referenciais. Estes sistemas referenciais devem ser transformados, para a apresentação final dos cálculos, em um sistema referencial único. As coordenadas dos pontos são apresentadas nesse sistema único.

Quando são empregados vários aparelhos para a obtenção de superdeterminação no número de medidas, cada combinação de 2 aparelhos estabelece um sistema referencial próprio. O aparelho que ficar mais à esquerda é considerado origem do sistema estabelecido. São tantas as origens determinadas, e conseqüentemente, tantos os sistemas referenciais, quantas forem as combinações binárias definidas. Por esse motivo os aparelhos devem ser intervisíveis, e qualquer obstáculo, interposto entre eles, inviabiliza a aplicabilidade do método.

Na metodologia desenvolvida por IBIAPINA, (1993), fundamentada no método de interseção analítica espacial, os aparelhos devem, necessariamente, ser intervisíveis.

Também, no sistema aplicativo do ECDS3 (LEICA, 1993), é exigido que, cada dois aparelhos, possam visar, simultaneamente, as extremidades de uma régua graduada, disposta horizontalmente entre eles. Esta disposição da régua tem por finalidade orientar o sistema e, ainda, fornecer elementos para o estabelecimento de um fator de escala, que é empregado para a determinação das coordenadas tridimensionais do alvo.

Como esse sistema opera, simultaneamente, com até 8 aparelhos, é necessário um número muito grande de visadas às extremidades das miras, colocadas estrategicamente entre cada duas estações. Esse grande número de visadas pode acarretar erros grosseiros nas leituras efetivadas, quando o processo de leitura for executado de maneira não automatizada.

O ideal em um processo de determinação de coordenadas tridimensionais é eliminar-se, ao mesmo tempo, as visadas simultâneas às extremidades das referidas miras horizontais e as visadas recíprocas entre aparelhos. E, ainda, que não sejam necessárias as transformações de sistemas referenciais, evitando-se cálculos matemáticos desnecessários.

Com a finalidade específica de eliminar-se, simultaneamente, os três fatores citados, propõe-se a concepção de um ponto fixo, denominado ponto de orientação. Este ponto fixo constitui-se em um elemento essencial aos métodos propostos, no presente trabalho, para a determinação de coordenadas tridimensionais. Considere-se, ainda, que os métodos já existentes podem adaptar-se, de maneira fácil, à proposta de adoção do ponto de orientação.

A idealização do ponto de orientação não surgiu por acaso. Advém do estudo do emprego militar da Artilharia de Campanha, em que, para a execução do tiro indireto, os canhões são dispostos em linha. O alvo, na maioria das vezes, está localizado muito distante, da ordem de 7,5 até 12,0 km, dependendo das características do referido armamento quanto à distância de emprego. Então para a execução da pontaria, todas as peças devem visar, simultaneamente, um ponto

específico, o PO. Deste ponto, com um aparelho semelhante a um teodolito, denominado goniômetro bússola, são executadas visadas ao dispositivo de pontaria de cada peça. Por esse motivo o PO deve ser visto, simultaneamente, por todas as peças.

A analogia entre os sistemas de pontaria e de determinação de coordenadas tridimensionais, fundamentou a idéia da adoção do ponto de orientação, no segundo caso. Dessa maneira, pelas justificativas apresentadas, o **coração** de qualquer sistema de determinação de coordenadas tridimensionais, passa a ser o **ponto de orientação**.

Todos os métodos, propostos no presente trabalho, para a determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ou alvos fixos, fundamentam-se na concepção do ponto de orientação.

7.2 - Ponto de orientação

O ponto de orientação é essencial ao processo. Ele deve ser visível, simultaneamente, por todos os aparelhos, quando estacionados para as tomadas das leituras angulares.

A função do ponto de orientação, inicialmente, quando da determinação das coordenadas das estações, é servir de base para a execução das irradiações. As estações podem ser levantadas por qualquer processo, entretanto, a irradiação é o processo mais prático, principalmente, após a utilização de aparelhos eletrônicos para a medição de distâncias.

Definido o local do ponto de orientação, para que se possa executar as irradiações, é necessário, ainda, a escolha de uma direção de orientação. Esta direção passa a ser o eixo y do sistema referencial adotado.

A direção de orientação deve ser materializada no terreno por um ponto fixo, de fácil identificação. Esse ponto deve permitir, durante as visadas, um enquadramento perfeito, pois é a origem para todas as tomadas de direções das irradiações. No levantamento angular, para a determinação das coordenadas dos alvos, o ponto de orientação é tomado como origem das leituras angulares horizontais. Os métodos de cálculo de coordenadas tridimensionais, desenvolvidos no presente trabalho, necessitam definir os azimutes das linhas de visadas dos aparelhos.

Então, em função dos azimutes entre as estações e o ponto de orientação, e, ainda, das leituras angulares horizontais, são calculados os azimutes das referidas linhas de visadas. Desse modo, o ponto de orientação serve de base ao levantamento das coordenadas das estações e de origem para as leituras horizontais referentes aos alvos. Todo o processo desenvolve-se em função de azimutes. O ponto de orientação permite que as leituras angulares, quando transformadas em azimutes, permaneçam com a mesma referência do sistema adotado, sem a necessidade de mudanças de sistemas referenciais, preconizados em outros processos.

Definidos o ponto de orientação e a direção de orientação, fica estabelecido e orientado o sistema referencial.

7.3 - Determinação do sistema referencial local

Estando definidos o ponto de orientação, que pode ser arbitrário ou pré-determinado, e a direção de orientação, fica estabelecido o sistema referencial. Este sistema referencial adotado deve ser ortogonal e destrógiro.

O eixo y é definido pela projeção da direção de orientação em um plano horizontal, que passa pelo centro ótico do aparelho; o eixo z é definido pela gravidade, ou seja, é a vertical do local em direção ao Zênite; e o eixo x é perpendicular aos demais eixos. O sistema destrógiro, assim definido, está representado na Figura 7.1.

7.4 - Determinação das coordenadas tridimensionais das estações

Para a determinação das coordenadas das estações é necessário arbitrar-se as coordenadas do ponto de orientação, ou conhecê-las, através de um levantamento prévio. Deve-se, então, definida a direção de orientação, determinar-se tais coordenadas, empregando-se o método das irradiações, tomadas a partir do ponto de orientação.

Deve-se usar o processo de centragem forçada na determinação das coordenadas tridimensionais dos pontos que foram escolhidos como estações para os

levantamentos angulares, para que a precisão angular e linear não sejam comprometidas. Esse processo está representado no dispositivo da Figura 7.2.

FIGURA 7. 1 - Configuração do sistema destrógiro ortogonal do sistema referencial

FIGURA 7.2 – Exemplo de dispositivo usado para o processo de centragem forçada

Os elementos necessários aos cálculos das coordenadas tridimensionais das estações estão dispostos conforme mostrado na Figura 7.3.

FIGURA 7.3 - Irradiações para a determinação das coordenadas das estações

onde:

HI - altura do instrumento estacionado no PO;

HS - altura do prisma, ou alvo com centragem forçada.

x, y, z - eixos coordenados;

H_z - ângulo horizontal, igual ao azimute da direção PO estação i;

Zen - ângulo zenital medido do PO, referente a cada estação;

D_{inc} - distância inclinada entre o PO e cada estação.

Para que o sistema de referência permaneça invariável, é necessário que a direção de orientação seja materializada. Geralmente, isso é feito através de um ponto fixo, localizado à distância do PO. Esse ponto deve ter visibilidade bem definida, para dar precisão às leituras referentes às irradiações, efetivadas para o estabelecimento das coordenadas tridimensionais das estações.

Nas irradiações, as distâncias entre o ponto de orientação e as estações, podem ser medidas eletronicamente, modo mais utilizado após o advento dos medidores eletrônicos de distâncias (EDMs) ou, ainda, executadas pelos métodos clássicos, não recomendáveis no presente caso devido à imprecisão apresentada pelos diversos tipos de trenas.

Nesta proposta a propagação dos erros é calculada em função dos ângulos horizontais e zenitais e das distâncias inclinadas, entre o PO e as referidas estações.

A propagação dos erros nas irradiações está equacionada no item 6.4 do capítulo 6, que trata do ajustamento de observações.

Considerando-se as distâncias inclinadas, as coordenadas planas das estações são definidas por:

$$XE_i = XPO + Dinc_i \cdot \text{sen}(\text{Zen})_i \cdot \text{sen}(\text{Azm})_i \quad (7.1)$$

$$YE_i = YPO + Dinc_i \cdot \text{sen}(\text{Zen})_i \cdot \cos(\text{Azm})_i \quad (7.2)$$

Onde:

- XE_i e YE_i - coordenadas planas da estação i ;
- XPO , YPO - coordenadas planas do PO;
- i - número de ordem das estações;
- $Dinc_i$ - distância inclinada, do PO até a estação i ;
- Zen_i - ângulo zenital da direção PO estação i ;
- Azm_i - azimuth da direção PO estação i .

A Figura 7.4 mostra a situação relativa dos aparelhos, do ponto de orientação e do ponto fixo ou alvo, após determinadas as coordenadas das estações, mostrando ainda os elementos necessários para a determinação das coordenadas do referido alvo.

Onde:

- A e B - estações fixas de coordenadas conhecidas;
- HZA e HZB - visadas horizontais entre o PO e o alvo P , respectivamente, das estações A e B ;

Zen_A e Zen_B	- ângulos zenitais lidos em relação ao alvo P, respectivamente, das estações A e B;
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	- ângulos internos nos triângulos definidos pelas estações A e B, com vértice em P;
DH	- distância plana ou horizontal entre as estações A e B;
$D_{AP'}$	- distância plana ou horizontal entre a estação A e o alvo P;
$D_{BP'}$	- distância plana ou horizontal entre a estação B e o alvo P;
AZ_{A-B}	- azimuth entre as estações A e B, com origem em A;
AZ_{B-A}	- azimuth entre as estações B e A, com origem em B;
AZ_{A-PO}	- azimuth entre a estação A e o PO;
AZ_{B-PO}	- azimuth entre a estação B e o PO;
AZ_{A-P}	- azimuth entre a estação A e o alvo P;
AZ_{B-P}	- azimuth entre a estação B e o alvo P.

FIGURA 7. 4- Situação relativa dos aparelhos, do ponto de orientação e do alvo visualizados de duas estações fixas A e B

A coordenada altimétrica (ZE_i), pode ser determinada de duas maneiras distintas: em função do ângulo zenital (Zen_i) e da distância inclinada entre o PO e

cada estação, ou em função do ângulo zenital (Zen_i) e da distância horizontal, conforme representação esquemática apresentada na Figura 7.5.

FIGURA 7.5 - Determinação da coordenadas altimétricas das estações

Determinam-se as coordenadas altimétricas das estações através das alternativas propostas:

1. em função da distância inclinada, medida diretamente, usando-se prismas óticos e o processo de centragem forçada nas estações. A coordenada altimétrica é dada por:

$$ZE_i = ZPO + HI_i - HS_i + \Delta H_i \quad (7.3)$$

Sendo:

$$\Delta H_i = Dinc_i \cos(Zen)_i \quad (7.4)$$

Onde:

ZE_i - cota ou altitude da estação i;

ZPO - cota ou altitude do ponto de orientação;

DH - distância plana entre o PO e a estação i;

ΔH_i - distância vertical ou diferença de nível entre o PO e a estação i;

$Dinc_i$ - distância inclinada entre o PO e a estação i;

- HI - altura do instrumento no PO;
 HS_i - altura do prisma ou sinal na estação i;
 Zen_i - ângulo zenital medido no PO, referente a estação i.

2.- em função da distância plana ou horizontal, em qualquer outro processo, sem o emprego de medidores eletrônicos de distâncias, a coordenada altimétrica é dada por:

$$ZE_i = ZPO + HI_i - HS_i + \Delta H_i \quad (7.5)$$

Sendo:

$$\Delta H_i = DH_i \cdot \cot g(Zen)_i \quad (7.6)$$

Onde:

- cotg(Zen)_i - cotangente do ângulo zenital lido do PO, referente a estação i;
 DH_i - distância horizontal entre o PO e a estação i.

A coordenada altimétrica (ZE_i) também pode ser obtida através de um nivelamento geométrico composto, onde é executado um transporte de cotas ou altitudes de uma referência de nível (RN), envolvendo o ponto de orientação e todas as estações. Ou, ainda, por um nivelamento geométrico simples, considerando-se a coordenada ZPO arbitrária e determinando-se as demais coordenadas altimétricas das i estações.

7.5 - Determinação das coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos

A determinação da coordenada altimétrica do centro ótico de cada aparelho (ZCO), deve ser realizada com a auxílio de uma mira graduada, instalada no ponto de orientação, para que sejam evitadas as medições com trenas ou outros meios quaisquer, conforme apresentado na Figura 7.6, de acordo com HERWES¹ (1997).

¹ HERWES, Herbert (1997) (Comercial e Importadora Wild Ltda., Consultor Técnico). *Comunicação Pessoal*.

FIGURA 7. 6 - Instalação da mira no ponto de orientação

Onde:

PO - ponto de orientação;

ZCO - cota ou altitude do centro ótico do aparelho;

ZE - cota ou altitude da estação;

HI - altura do instrumento na estação;

ZPO - cota ou altitude do PO;

L_{MIRA} - leitura da mira verticalizada no PO.

Para implementar o processo, uma mira deve ser apurhada sobre o ponto de orientação, sendo realizadas várias séries de leituras, com a linha de visada da luneta do aparelho devidamente horizontalizada. Deve-se proceder a verificação da calagem de todas as bolhas dos dispositivos nivelantes do aparelho, em todas as leituras executadas. Tomando-se a média dessas leituras, melhora-se a precisão na determinação das coordenadas do centro ótico dos aparelhos.

Essa mira deverá ser lida por todos os aparelhos, permitindo a execução do cálculo da coordenada ZCO_i , que é a cota ou altitude do respectivo centro ótico de cada aparelho, sendo:

$$ZCO_i = ZPO + (LMIRA)_i \quad (7.7)$$

onde:

ZCO_i - cota ou altitude do centro óptico de cada aparelho;

ZPO - cota ou altitude do ponto de orientação;

$(LMIRA)_i$ - leitura na mira, executada com cada aparelho.

Se for possível medir a altura do aparelho (HI), com isenção de erros, a cota ou altitude do centro óptico pode ser obtida por:

$$ZCO_i = ZE_i + HI_i \quad (7.8)$$

Onde:

ZE_i - cota ou altitude da estação i ;

HI_i - altura do instrumento na estação i ;

7.6 - Implementação das proposições apresentadas

As propostas apresentadas no presente Capítulo foram validadas com os dados de campo constantes do Anexo A, com o emprego do programa computacional desenvolvido em Basic, denominado CALEST3.BAS, relacionado no Apêndice I.

7.6.1 - Coordenadas tridimensionais das estações e do centro óptico dos aparelhos

O programa computacional desenvolvido para o cálculo das coordenadas das estações também calcula as coordenadas do centro óptico dos aparelhos envolvidos no processo. A listagem do programa, o modo de organizar os arquivos de dados e a relação de variáveis constam do Apêndice I.

Para Estação Total (TC1700), empregada no presente trabalho, a precisão angular é da ordem de $1,5''$ e a linear, da ordem de $2 \text{ mm} \quad 2 \text{ ppm}$. Esses valores das precisões nominais do aparelho foram considerados para a propagação dos erros nas

irradiações, que determinam as coordenadas das estações e do centro óptico dos aparelhos.

A Tabela 7.1 mostra as coordenadas tridimensionais das estações, obtidas com os dados de campo constantes do Anexo A e com o emprego do programa computacional CALEST2.BAS, apresentado no Apêndice I. Os cálculos foram executados em conformidade com o item 6.4 do Capítulo 6.

TABELA 7.1 - Coordenadas tridimensionais das estações e respectivas precisões, calculadas pelo programa 01, CALEST2.BAS

Aparelho Nº	XE (m)	σ_{XE} (mm)	YE (m)	σ_{YE} (mm)	ZE (m)	σ_{ZE} (mm)
1	94,732382	0,81	112,158997	1,86	99,067654	0,17
2	90,975163	1,31	110,739511	1,55	99,116477	0,16
3	88,562036	1,63	108,517576	1,21	99,348047	0,14
4	86,423430	1,91	105,074721	0,72	99,568843	0,12
5	85,652914	2,03	99,345645	0,14	99,452173	0,13

7.6.2 - Precisões das coordenadas do centro óptico dos aparelhos obtidas pela propagação dos erros

Os cálculos das coordenadas do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões, foram executados pelo programa computacional 01, CALEST3.BAS e estão relacionados no Apêndice I. Esses cálculos foram desenvolvidos segundo proposta apresentada no item 6.4 do Capítulo 6. Os resultados constam da Tabela 7.2.

TABELA 7.2 - Coordenadas do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões

Aparelho Nº	XCO (m)	σ_{XCO} (mm)	YCO (m)	σ_{YCO} (mm)	ZCO (m)	σ_{ZCO} ¹ (mm)
1	94,732382	0,81	112,158997	1,86	100,705000	0,66
2	90,975163	1,31	110,739511	1,55	100,717000	0,64
3	88,562036	1,63	108,517576	1,21	100,976000	0,63
4	86,423430	1,91	105,074721	0,72	101,139000	0,59
5	85,652914	2,03	99,345645	0,14	101,278000	0,68

1 - Para o cálculo de σ_z foi considerado um acréscimo de 0,3mm para cada metro da altura do aparelho, conforme disposições apresentadas no item 3.4.1 do Capítulo 3 do presente trabalho.

7.7 - Considerações finais

Todos os métodos de cálculo de coordenadas tridimensionais, tanto os propostos, quanto os métodos estudados, utilizam os cálculos executados neste capítulo para a determinação das coordenadas dos alvos. Por esse motivo, as coordenadas obtidas por todos os métodos podem ser comparadas entre si.

O acréscimo de $0,3mm$ à precisão da coordenada altimétrica do centro ótico dos aparelhos segue as prescrições do item 3.4.1 do Capítulo 3. Nesse valor fica implícito o erro cometido durante as leituras da mira para a determinação da referida coordenada.

Os erros propagados nas irradiações para as coordenadas do centro ótico dos aparelhos (σ_{XCO} , σ_{YCO} , σ_{ZCO}), servem para a composição da matriz de variância-covariância das observações, no método de cálculo apresentado no Capítulo 10.

CAPÍTULO 8

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS: MÉTODO TOPOGRÁFICO-TRIGONOMÉTRICO

8.1 – Apresentação do método

O presente método emprega a metodologia proposta no Capítulo 7 e utiliza, no mínimo, um par de estações fixas para a sua implementação. Esse método difere do método de interseção espacial trigonométrico, apresentado no Capítulo 4, particularmente, sob dois aspectos: (1) calcula as coordenadas planas do alvo pela lei dos senos e não em função das tangentes dos azimutes das linhas de visada entre as estações fixas e o alvo; (2) calcula a coordenada altimétrica em função dos lados do triângulo espacial, cujos vértices são as duas estações fixas e o alvo e, não através das distâncias entre as coordenadas planas do alvo e as coordenadas planas de cada estação fixa.

Esse método admite que as linhas de visada são concorrentes no alvo e, ainda, que o erro angular em cada triângulo está implícito no ângulo do vértice, isto é, no ângulo de interseção dessas linhas. O erro angular, acima referido, engloba tanto os erros referentes ao operador, às condições ambientais, aos defeitos sistemáticos do aparelho, às dificuldades de enquadramento do alvo e todos os outros fatores que possam influenciar no processo de medição angular.

As coordenadas planas do alvo (XP,YP), são determinadas pelas médias das determinações, obtidas pelas resoluções de todos os triângulos, resultantes da

combinação das estações fixas, tomadas duas a duas. As precisões destas coordenadas são, igualmente, calculadas em função dessas médias. Logo são precisões aparentes, conforme definições apresentadas no Capítulo 6.

As coordenadas planimétricas e altimétrica do alvo são calculadas separadamente. No entanto, os erros nas leituras horizontais influenciam no cálculo da coordenada altimétrica. Isso ocorre porque as distâncias ou lados dos triângulos, em todas as combinações, são calculadas em função dos ângulos internos de cada triângulo, que por sua vez, são calculados em função dos azimutes que são calculados em função dos ângulos horizontais lidos. Esta cadeia de dependência faz com que os erros dos ângulos horizontais sejam propagados às coordenadas altimétricas dos alvos.

A coordenada altimétrica (ZP), é definida através de um nivelamento trigonométrico e calculada em função dos ângulos zenitais lidos nas estações fixas e dos lados do triângulo determinado pelas estações e o alvo, em cada combinação.

A diferença de cotas ou altitudes entre o centro do alvo e o eixo ótico do aparelho $(\Delta H)_i$, é dada por:

$$(\Delta H)_i = Dcal_i \cdot \cot g (Zen)_i \quad (8.1)$$

Onde:

- $(\Delta H)_i$ - diferença de cotas entre o aparelho e o alvo;
- $Dcal_i$ - distância horizontal calculada, entre aparelho e o alvo;
- $(Zen)_i$ - ângulo zenital medido.

O ΔH considerado, é dado por:

$$\Delta H = \frac{(\Delta H)_1 + (\Delta H)_2}{2} \quad (8.2)$$

Onde:

- ΔH_1 - diferença de cota ou altitude em relação ao aparelho 1, na combinação;
- ΔH_2 - diferença de cota ou altitude em relação ao aparelho 2, na combinação;
- ΔH - médias das diferença de cota ou altitude entre os aparelhos 1 e 2.

Na proposta são determinadas, também, as precisões aparentes, em função da média das determinações das coordenadas tridimensionais dos pontos. Todos os procedimentos estão detalhados na formulação matemática.

8.2 - Elementos envolvidos no processo de cálculo

Os elementos conhecidos, levantados no campo e calculados durante o processo, com o emprego do método proposto, são detalhados através de figuras esquemáticas apresentadas a seguir.

A Figura 8.1, especifica, de maneira genérica, os elementos conhecidos do processo de cálculo das coordenadas tridimensionais do alvo.

FIGURA 8.1 - Elementos envolvidos no processo de cálculo das coordenadas tridimensionais de um alvo

8.2.1 - Elementos conhecidos

Os elementos previamente conhecidos para implementação do processo, são:

XCO_i, YCO_i, ZCO_i - coordenadas do centro ótico dos aparelhos i e j;

$XP0, YP0, ZP0$ - coordenadas do ponto de orientação (PO).

8.2.2 - Elementos observados no campo

Os elementos medidos no campo, para a determinação das coordenadas tridimensionais dos alvos estão representados na Figura (8.2). São os seguintes:

- $(Zen)_i$ e $(Zen)_j$ - ângulos zenitais;
 $(LHz)_i$ e $(LHz)_j$ - ângulos horizontais entre o PO e os alvos,
 L_{MIRA} - leituras da mira instalada no PO.

FIGURA 8.2 - Elementos medidos no campo para o cálculo das coordenadas tridimensionais de um alvo

8.2.3 - Elementos calculados conforme metodologia proposta

Com os dados já conhecidos, em cada combinação dos aparelhos, tomados dois a dois, calculam-se os elementos abaixo relacionados, que compõem o cálculo das coordenadas dos alvos:

1. - distância entre os aparelhos i e j : $d_{(i-j)}$ e, j e i : $d_{(j-i)}$;
2. - azimuth entre os aparelhos i e j , $Az_{(i-j)}$;

3. - contra-azimute, ou azimute entre os aparelhos **j** e **i**, $Az_{(j-i)}$;
4. - ângulo horizontal, α_1 , com vértice no aparelhos **i**, entre o alvo e o aparelho **j**;
5. - ângulo horizontal, α_2 , com vértice no aparelho **j**, entre o alvo e o aparelho **i**;
6. - ângulo horizontal, α_3 , com vértice no alvo, entre os aparelhos **i** e **j**;
7. - azimute da direção aparelho **i**-alvo, $Az_{(i-Alvo)}$;
8. - azimute da direção aparelho **j**-alvo, $Az_{(j-Alvo)}$;
9. - distância reduzida ao horizonte entre o aparelho **i** e o alvo, $d_{(i-Alvo)}$;
- 10.- distância reduzida ao horizonte entre o aparelho **j** e o alvo, $d_{(j-Alvo)}$;
- 11.- azimute da direção aparelho **i** - PO, $Az_{(i-PO)}$;
- 12.- azimute da direção aparelho **j** - PO, $Az_{(j-PO)}$;
- 13.- coordenada **Z** do centro ótico do aparelho **i**;
- 14.- coordenada **Z** do centro ótico do aparelho **j**;
- 15.- coordenada **X** do alvo usando a distância $d_{(i-Alvo)}$;
- 16.- coordenada **Y** do alvo usando a distância $d_{(i-Alvo)}$;
- 17.- coordenada **Z** do alvo usando a distância $d_{(i-Alvo)}$;
- 18.- coordenada **X** do alvo usando a distância $d_{(j-Alvo)}$;
- 19.- coordenada **Y** do alvo usando a distância $d_{(j-Alvo)}$;
20. - coordenada **Z** do alvo usando a distância $d_{(j-Alvo)}$.
21. - média das coordenadas dos alvos XP_{ij} , YP_{ij} , ZP_{ij} ,

8.2.4 – Finalidades e aplicações do método

O método de cálculo de coordenadas tridimensionais aqui desenvolvido tem por finalidade a determinação das coordenadas de pontos fixos, bem como, o estabelecimento da estimativa das precisões destas determinações. Este método utiliza os conceitos básicos da Topografia Clássica e da Trigonometria, combinados com a idéia da visualização de um ponto de referência, simultaneamente, por todos os aparelhos envolvidos no processo. A visualização deste ponto de referência serve para estabelecer um sistema referencial único para todo o processo. O objetivo do método é calcular os seguintes elementos:

1. - as coordenadas dos alvos, (XP, YP, ZP);
2. - as precisões dessas coordenadas.

8.3 - Formulação matemática

A formulação matemática do método envolve todos os passos propostos, desde o cálculo do número de combinações entre as estações envolvidas, até a apresentação das precisões aparentes das coordenadas tridimensionais dos alvos. O modelo matemático foi transformado para linguagem de computação através de um programa em BASIC, constante do Apêndice II.

8.3.1 - Cálculo do número de combinações

O número de combinações é dado pela fórmula:

$$N_{COMB} = \frac{n!}{(n-2)!(2)!} \quad (8.3)$$

Onde:

N_{COMB} - é o número de combinações das estações, tomadas duas a duas;

n - é o número de estações envolvidas no processo.

8.3.2 - Cálculo da distância plana entre os aparelhos i e j

A distância plana entre os aparelhos i e j é dada pela fórmula:

$$D_{i-j} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (8.4)$$

Onde:

D_{i-j} - distância plana entre os aparelhos i e j;

X_i, Y_i - coordenadas planas da estação do aparelho i;

X_j, Y_j - coordenadas planas da estação do aparelho j.

8.3.3 - Cálculo do azimute entre os aparelhos i e j

Conhecidas as coordenadas planas das estações, calculam-se os azimutes entre os dois pontos de cada combinação. Através dos azimutes, são calculados os ângulos α_1 e α_2 , da base de cada triângulo, no caso, definido pelos dois aparelhos e o alvo.

O azimute entre os dois aparelhos é dado por:

$$Az_{i-j} = \arctg\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right) \quad (8.5)$$

Onde:

- Az_{i-j} - azimute plana entre os aparelhos i e j;
- X_i e Y_i - coordenadas planas da estação do aparelho i;
- X_j e Y_j - coordenadas planas da estação do aparelho j.

Para calcular o azimute da direção Teo_{i-j} é necessário sempre tomar as diferenças das coordenadas $Teo_j - Teo_i$, com o respectivo sinal. Essas fórmulas são gerais e válidas para todos os quadrantes topográficos.

Calculam-se primeiro as diferenças ΔX e ΔY , seguindo-se então o cálculo de um ângulo auxiliar $Az_{(i-j)P}$, como indicado a seguir:

$$\Delta X = X_j - X_i \quad \text{e} \quad \Delta Y = Y_j - Y_i \quad (8.6)$$

Sendo:

$$Az_{(i-j)P} = \arctg\left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right) \quad (8.7)$$

Onde:

- $Az_{(i-j)P}$ - ângulo auxiliar que serve para identificar o quadrante;
- ΔX - diferença entre as abscissas dos aparelhos j e i;
- ΔY - diferença entre as ordenadas dos aparelhos j e i.

O azimute da direção $Teo_{i,j}$, ou seja, $(Az_{i,j})$ será dado pelas regras especificadas na Tabela 8.1.

TABELA 8.1 - Identificação do quadrante topográfico em função dos sinais de ΔX e ΔY .

Quadrante	ΔX	ΔY	$Az_{i,j}$
I	+	+	$Az_{i,j}P$
II	+	-	$\pi - Az_{i,j}P$
III	-	-	$\pi + Az_{i,j}P$
IV	-	+	$(2\pi) - Az_{i,j}P$

Cada vez que o ângulo auxiliar $(Az_{i,j}P)$ é calculado pelo programa 02, uma subrotina executa vários testes, que pelas regras especificadas na Tabela 8.1, determinam o quadrante e o valor do azimute $(Az_{i,j})$, em radianos.

8.3.4 - Cálculo do azimute entre o aparelho i e o ponto de orientação (PO)

Para o processo de cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos são medidos somente ângulos. Estes ângulos são transformados em azimutes e através dos azimutes são calculados os ângulos internos dos triângulos, em cada combinação estabelecida. O objetivo do cálculo do azimute do aparelho i para o ponto de orientação é encontrar, a partir deste, o azimute entre o aparelho i e o alvo.

O azimute $Teo_{i - alvo}$ é função do ângulo horizontal medido e do azimute entre o $Teo_{i - PO}$, sendo este calculado através das coordenadas planas dos pontos estação.

O azimute entre o aparelho i e o ponto de orientação (PO) é dado pela fórmula:

$$Az_{(i-PO)} = \arctg \left| \frac{X_{PO} - X_{E_i}}{Y_{PO} - Y_{E_i}} \right| \quad (8.8)$$

Onde:

- $Az_{(i-PO)}$ - azimute entre o aparelho i e o ponto de orientação;
- X_{PO} e Y_{PO} - coordenadas planas do ponto de orientação (PO);
- X_{E_i} e Y_{E_i} - coordenadas planas da estação do aparelho i.

O quadrante topográfico do azimute é determinado em função dos sinais de ΔX e ΔY , conforme a Tabela 3.1, já referida.

8.3.5- Cálculo do azimute Teo_{i-Alvo}

O azimute entre o $Teo_{(i-Alvo)}$ é calculado em função do azimute $Teo_{(i-PO)}$ e do ângulo horizontal entre o ponto de orientação e o alvo. O azimute $Teo_{(i-Alvo)}$ é dado pela fórmula:

$$Az_{(i-Alvo)} = Az_{(i-PO)} + LHz_i \quad (8.9)$$

Onde:

$Az_{(i-Alvo)}$ - azimute entre o aparelho **i** e o alvo;

$Az_{(i-PO)}$ - azimute ente o aparelho **i** e o PO;

LHz_i - ângulo horizontal lido pelo Teo_i , entre o PO e o alvo.

Quando na eq. (8.9) tivermos:

$$Az_{(i-Alvo)} = (Az_{(i-PO)} + LHz_i) > (2\pi) \quad (8.10)$$

O azimute procurado é:

$$Az = (Az_{(i-PO)} + LHz_i) - (2\pi) \quad (8.11)$$

Se:

$$Az_{(i-Alvo)} = (Az_{(i-PO)} + LHz_i) < (2\pi) \quad (8.12)$$

Então:

O azimute procurado é:

$$Az = Az_{(i-PO)} + LHz_i \quad (8.13)$$

8.3.6 - Cálculo do azimute $Teo_{(j-PO)}$

O objetivo do cálculo do azimute entre o aparelho **j** e o ponto de orientação (PO) é encontrar, a partir deste, o azimute $Teo_{(j-Alvo)}$. O azimute $Teo_{(j-Alvo)}$ é função do ângulo horizontal medido e do azimute $Teo_{(j-PO)}$.

O azimute $Teo_{(j-PO)}$ é calculado através das coordenadas planas destes pontos.

O azimute $Teo_{(j-PO)}$ é dado pela fórmula:

$$Az_{(j-PO)} = \arctg \left| \frac{(XPO - XE_j)}{(YPO - YE_j)} \right| \quad (8.14)$$

Onde:

- $Az_{(j-PO)}$ - azimute entre o aparelho **j** e o PO;
 XPO e YPO - coordenadas planas do PO;
 XE_j e YE_j - coordenadas planas da estação do Teo_j .

O quadrante topográfico do azimute será determinado em função dos sinais de ΔX e ΔY , conforme a Tabela 8.1, já referida.

8.3.7 - Cálculo do azimute $Teo_{(j-Alvo)}$

O azimute $Teo_{(j-Alvo)}$ é calculado em função do azimute $Teo_{(j-PO)}$ e do ângulo horizontal entre o ponto de orientação e o alvo. O azimute $Teo_{(j-Alvo)}$ é dado pela fórmula:

$$Az_{(j-Alvo)} = Az_{j-PO} + LHz_j \quad (8.15)$$

Onde:

- $Az_{(j-Alvo)}$ - azimute entre o aparelho **j** e o alvo;
 $Az_{(j-PO)}$ - azimute ente o aparelho **j** e o PO;
 LHz_j - ângulo horizontal lido pelo aparelho **j**, entre o PO e o alvo.

Se, na eq. (8.15):

$$Az_{(j-Alvo)} = (Az_{(j-PO)} + LHz_j) > (2\pi) \quad (8.16)$$

O azimute procurado é:

$$Az = (Az_{(j-PO)} + LHz_j) - (2\pi) \quad (8.17)$$

Se:

$$Az_{(j-Alvo)} = (Az_{(j-PO)} + LHz_j) < (2\pi) \quad (8.18)$$

Então:

O azimuth procurado é:

$$Az = Az_{j-PO} + LHz_j \quad (8.19)$$

8.3.8 - Cálculo do ângulo α_1 da base do triângulo

O ângulo α_1 está localizado na base do triângulo definido em cada combinação das estações, junto ao aparelho **i**.

Para o cálculo de α_1 é necessário conhecer-se o azimuth entre os aparelhos **i** e **j**, e entre o aparelho **i** e o alvo.

Então:

$$\alpha_1 = | Az_{(i-Alvo)} - Az_{(i-j)} | \quad (8.20)$$

Onde:

α_1 - ângulo da base do triângulo junto ao aparelho **i**;

$Az_{(i-Alvo)}$ - azimuth entre o aparelho **i** e o alvo;

$Az_{(i-j)}$ - azimuth entre os aparelhos **i** e **j**.

8.3.9 - Cálculo do ângulo α_2 da base do triângulo

O ângulo α_2 está localizado na base do triângulo definido em cada combinação das estações, junto ao aparelho **j**. Para o cálculo de α_2 é necessário conhecer-se os azimuths entre os aparelhos **j** e **i** e o azimuth entre o aparelho **j** e o alvo. Então:

$$\alpha_2 = | Az_{(j-Alvo)} - Az_{(j-i)} | \quad (8.21)$$

Onde:

α_2 - ângulo da base do triângulo, junto ao aparelho **j**;

$Az_{(j-Alvo)}$ - azimuth entre o aparelho **j** e o alvo;

$Az_{(j-i)}$ - azimuth entre os aparelhos **j** e **i**.

8.3.10 - Cálculo do ângulo α_3 do vértice do triângulo

O ângulo α_3 está no vértice do triângulo definido pelas duas estações e o alvo. Em cada uma das combinações o seu valor deve ser calculado, para que o triângulo seja resolvido e as distâncias planas entre os aparelhos e o alvo determinadas.

Então:

$$\alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (8. 22)$$

Onde:

- α_3 - ângulo do vértice referente ao alvo;
- π - somatório dos ângulos internos do triângulo;
- α_1 - ângulo do vértice referente ao aparelho i;
- α_2 - ângulo do vértice referente ao aparelho j.

8.3.11 - Cálculo da distância plana $d_{(i-Alvo)}$, entre o aparelho i e o alvo

A distância plana entre o aparelho i e o alvo pode ser calculada aplicando-se a lei dos senos no triângulo, conforme a expressão:

$$\frac{d_{(i-j)}}{\text{sen}(\alpha_3)} = \frac{d_{(i-Alvo)}}{\text{sen}(\alpha_2)} = \frac{d_{(j-Alvo)}}{\text{sen}(\alpha_1)} \quad (8. 23)$$

Onde:

- $d_{(i-j)}$ - distância plana entre as estações i e j;
- $d_{(i-Alvo)}$ - distância plana entre o aparelho i e o alvo;
- $d_{(j-Alvo)}$ - distância plana entre o aparelho j e o alvo;
- $\text{sen}(\alpha_1)$ - seno do ângulo da base, referente ao aparelho i;
- $\text{sen}(\alpha_2)$ - seno do ângulo da base, referente ao aparelho j;
- $\text{sen}(\alpha_3)$ - seno do ângulo do vértice, referente ao alvo.

A distância plana entre o aparelho **j** e o alvo sai da eq. (3.28), sendo:

$$d_{(i - \text{Alvo})} = d_{(i - j)} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha_2)}{\text{sen}(\alpha_3)} \quad (8.24)$$

8.3.12 - Cálculo da distância plana $d_{(j-\text{Alvo})}$, entre o aparelho **j** e o alvo

A distância plana entre o aparelho **j** e o alvo sai da eq. (8.23), sendo:

$$d_{(j - \text{Alvo})} = d_{(i - j)} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_3)} \quad (8.25)$$

8.3.13 - Cálculo da abcissa $X_{(d-i)}$ do alvo, usando a distância $d_{(i-\text{Alvo})}$

Os ângulos medidos a partir do eixo **Y** são considerados azimutes. Para o cálculo da coordenada $X_{(d-i)}$ parte-se da coordenada XE_i do ponto estação do teodolito **i** e da projeção da distância plana $d_{(i-\text{Alvo})}$, sobre o eixo **X**.

Logo, tem-se:

$$X_{(d-i)} = XE_i + d_{(i-\text{Alvo})} \cdot \text{sen } Az_{(i-\text{Alvo})} \quad (8.26)$$

Onde:

- $X_{(d-i)}$ - abcissa do alvo usando a distância plana $Teo_{(i-\text{Alvo})}$;
- XE_i - abcissa da estação do aparelho **i**;
- $d_{(i-\text{Alvo})}$ - distância plana entre o aparelho **i** e o alvo;
- $\text{sen } Az_{(i-\text{Alvo})}$ - seno do azimuth da direção aparelho **i** - alvo.

8.3.14- Cálculo da abcissa $X_{(d-j)}$ do alvo, usando a distância $d_{(j-\text{Alvo})}$

Os ângulos medidos a partir do eixo (**y**) são considerados azimutes. Para o cálculo da coordenada $X_{(d-j)}$ partimos da coordenada XE_j do ponto estação do teodolito **j** e da projeção da distância plana $d_{(j-\text{Alvo})}$, sobre o eixo (**x**).

Logo, tem-se:

$$X_{(d-j)} = XE_j + d_{(j-\text{Alvo})} \cdot \text{sen } (Az_{(j-\text{Alvo})}) \quad (8.27)$$

Onde:

- $X_{(d-j)}$ - abscissa do alvo usando a distância plana aparelho j - alvo;
 XE_j - abscissa da estação do aparelho j ;
 $d_{(j-Alvo)}$ - distância plana entre o aparelho j e o alvo;
 $\text{sen}(Az_{(j-Alvo)})$ - seno do azimute da direção aparelho j - alvo.

8.3.15 - Cálculo da abscissa do alvo, (XP)

A coordenada XP do alvo é dada pela média aritmética das abscissas obtidas pelas form. (8.26) e (8.27).

$$XP = \frac{X_{(d-i)} + X_{(d-j)}}{2} \quad (8.28)$$

Onde:

- XP - abscissa do alvo;
 $X_{(d-i)}$ - abscissa do alvo, função da distância plana entre o aparelho i e o alvo;
 $X_{(d-j)}$ - abscissa do alvo, função da distância plana entre o aparelho j e o alvo;

8.3.16 - Cálculo da ordenada $Y_{(d-i)}$ do alvo, usando-se a distância $d_{(i-Alvo)}$

Os ângulos medidos a partir do eixo (y) são considerados azimutes. Para o cálculo da coordenada $Y_{(d-i)}$ parte-se da coordenada YE_i do ponto estação do teodolito i e da projeção da distância plana $d_{(i-Alvo)}$, sobre o eixo (y).

Logo, têm-se:

$$Y_{(d-i)} = YE_i + d_{(i-Alvo)} \cdot \cos(Az_{(i-Alvo)}) \quad (8.29)$$

Onde:

- $Y_{(d-i)}$ - ordenada do alvo usando a distância plana $Teo_{(i-alvo)}$;
 YE_i - ordenada do ponto estação do aparelho i ;
 $d_{(i-Alvo)}$ - distância plana entre o aparelho i e o alvo;
 $\cos(Az_{(i-Alvo)})$ - cosseno do azimute da direção $Teo_{(i-Alvo)}$.

8.3.17 - Cálculo da ordenada $Y_{(d-j)}$ do alvo, usando-se a distância $d_{(j-Alvo)}$

Os ângulos medidos a partir do eixo(y) são considerados azimutes. Para o cálculo da coordenada $Y_{(d-j)}$ partimos da coordenada YE_j da estação do teodolito j e da projeção da distância plana $d_{(j-Alvo)}$, sobre o eixo (y).

Logo, têm-se:

$$Y_{(d-j)} = YE_j + d_{(j-Alvo)} \cdot \cos (Az_{(j-Alvo)}) \quad (8. 30)$$

Onde:

$Y_{(d-j)}$ - ordenada do alvo usando a distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$;

YE_j - ordenada da estação do teodolito j ;

$d_{(j-Alvo)}$ - distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$;

$\cos (Az_{(j-Alvo)})$ - cosseno do azimute da direção $Teo_{(j-Alvo)}$.

8.3.18 - Cálculo da ordenada do alvo, (YP)

A coordenada YP do alvo será dada pela média aritmética das ordenadas obtidas pelas form. (8.29) e (8.30):

$$YP = \frac{Y_{(d-i)} + Y_{(d-j)}}{2} \quad (8. 31)$$

Onde:

YP - ordenada do alvo;

$Y_{(d-i)}$ - ordenada do alvo, função da distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;

$Y_{(d-j)}$ - ordenada do alvo, função da distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$.

8.3.19 - Cálculo da cota ou altitude $Z_{(d-i)}$ do alvo, usando a distância $d_{(i-Alvo)}$

O cálculo da coordenada $Z_{(d-i)}$ será função da coordenada do ponto de orientação (ZOR), da leitura da mira e da diferença de cotas ou altitudes entre o centro ótico do aparelho e o alvo.

A diferença de cotas ou altitudes entre o centro ótico do aparelho e o alvo é calculada em função da co-tangente do ângulo zenital, referente a cada alvo.

Logo, tem-se:

$$Z_{(d-i)} = ZPO + (LMIRA)_i + d_{(i-Alvo)} \cdot \cotg (Zen_{(i-Alvo)}) \quad (8.32)$$

Onde:

- $Z_{(d-i)}$ - cota ou altitude do alvo usando-se a distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;
- ZPO - cota ou altitude do PO;
- $(LMIRA)_i$ - leitura da mira, executada pelo teodolito i ;
- $d_{(i-Alvo)}$ - distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;
- $\cotg (Zen_{(i-Alvo)})$ - co-tangente do ângulo zenital do teodolito i , em relação ao alvo.

8.3.20 - Cálculo da cota ou altitude $Z_{(d-j)}$ do alvo, usando a distância $d_{(j-Alvo)}$

O cálculo da coordenada $Z_{(d-j)}$, será dada em função da coordenada do ponto de orientação ZOR, da leitura da mira e da diferença de cotas ou altitudes entre o centro ótico do aparelho e o alvo.

A diferença de cotas ou altitudes entre o centro ótico do aparelho e o alvo é calculada em função da co-tangente do ângulo zenital referente a cada alvo.

Logo, tem-se:

$$Z_{(d-j)} = ZPO + (LMIRA)_j + d_{(j-Alvo)} \cdot \cotg (Zen_{(j-Alvo)}) \quad (8.33)$$

Onde:

- $Z_{(d-j)}$ - cota ou altitude do alvo usando a distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$;
- ZPO - cota ou altitude do PO;
- $(LMIRA)_j$ - leitura da mira executada pelo aparelho j ;
- $d_{(j-Alvo)}$ - distância plana entre o aparelho j e o alvo;
- $\cotg (Zen_{(j-Alvo)})$ - co-tangente do ângulo zenital do teodolito j , em relação ao alvo.

8.3.21- Cálculo da cota ou altitude do alvo, (ZP)

A coordenada Z do alvo é dada pela média aritmética das cotas ou altitudes obtidas pelas form. (8.32) e (8.33):

$$ZP = \frac{Z_{(d-i)} + Z_{(d-j)}}{2} \quad (8.34)$$

Onde:

- ZP - cota ou altitude do alvo;
 $Z_{(d-i)}$ - cota ou altitude do alvo, em função da distância plana $Teo_{(i-Alvo)}$;
 $Z_{(d-j)}$ - cota ou altitude do alvo, em função da distância plana $Teo_{(j-Alvo)}$.

8.3.22 - Cálculo da precisão aparente das coordenadas

Pela metodologia proposta, em cada combinação de dois aparelhos, determina-se um par de valores para as três coordenadas do alvo.

O número de vezes que as coordenadas de cada alvo são calculadas é igual ao dobro do número de combinações das estações, tomadas duas a duas. Ou seja:

$$q = 2 \cdot N_{comb} \quad (8.35)$$

Onde:

- q - número de vezes em que as coordenadas do alvo são calculadas;
 N_{comb} - número de combinações das estações.

Logo, a média de cada coordenada é calculada por:

$$\overline{XP} = \frac{\sum_{i=1}^q XP_i}{q} \quad (8.36)$$

$$\overline{YP} = \frac{\sum_{i=1}^q YP_i}{q} \quad (8.37)$$

$$\overline{ZP} = \frac{\sum_{i=1}^q ZP_i}{q} \quad (8.38)$$

Onde:

q - valor equivalente ao dobro do número de combinações;

$\overline{XP}, \overline{YP}, \overline{ZP}$ - média das coordenadas do alvo.

A precisão aparente das três coordenadas do alvo, em função do desvio padrão da média dos valores de todas as determinações, é dada por:

$$s_{XP} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q (\overline{XP} - XP_i)^2}{q-1}} \quad (8.39)$$

$$s_{YP} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q (\overline{YP} - YP_i)^2}{q-1}} \quad (8.40)$$

$$s_{ZP} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q (\overline{ZP} - ZP_i)^2}{q-1}} \quad (8.41)$$

Onde:

s_{XP}, s_{YP}, s_{ZP} - precisão aparente das coordenadas XP, YP, ZP, respectivamente.

A precisão aparente das coordenadas finais do alvo é dada por:

$$s_{\overline{X}_P} = \frac{s_X}{\sqrt{q}} \quad (8.42)$$

$$s_{\overline{Y}_P} = \frac{s_Y}{\sqrt{q}} \quad (8.43)$$

$$s_{\overline{Z}_P} = \frac{s_Z}{\sqrt{q}} \quad (8.44)$$

Onde;

$s_{\overline{X}_P}, s_{\overline{Y}_P}, s_{\overline{Z}_P}$ - precisão aparente das coordenadas XP, YP, ZP do alvo.

8.4 - Validação do modelo matemático

O modelo matemático proposto foi validado com os dados de campo constantes do Anexo A, com o emprego do programa computacional desenvolvido em Basic, relacionado no Apêndice II.

As coordenadas do centro óptico dos aparelhos foram determinadas conforme a metodologia proposta no capítulo 7 e o programa computacional desenvolvido, relacionado no Apêndice I.

8.4.1 - Determinações e considerações sobre as coordenadas tridimensionais dos alvos

Os valores das coordenadas foram obtidos, com seis e quatro casas decimais, respectivamente, para permitir a avaliação das precisões, em comparação com os resultados dos demais métodos. As precisões aparentes das coordenadas do alvo P são dadas em função das médias dessas determinações, conforme item 8.3.22 do desenvolvimento matemático.

Os alvos escolhidos, conforme dados de campo do Anexo A, foram as extremidades de uma mira horizontal (de invar), de comprimento pré-determinado, invariável com as condições climáticas, para que fossem asseguradas a constância e a precisão das determinações angulares envolvidas no processo.

As coordenadas tridimensionais das extremidades da mira horizontal, com dois níveis de significância, são apresentadas nas Tabelas 8.2 e 8.3.

TABELA 8. 2 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 6 casas decimais e respectivas precisões

Coordenadas das extremidades da mira horizontal com 6 casas decimais						
Extremidade	X	S _{XP}	Y	S _{YP}	Z	S _{ZP}
Nº	(m)	(mm)	(m)	(mm)	(m)	(mm)
1	103,530938	2,69	95,239789	2,10	102,152606	0,41
2	102,302767	2,01	93,661270	1,77	102,157808	0,48

TABELA 8. 3 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 4 casas decimais e respectivas precisões

Coordenadas das extremidades da mira horizontal com 4casas decimais						
Extremidade Nº	X (m)	s_{XP} (mm)	Y (m)	s_{YP} (mm)	Z (m)	s_{ZP} (mm)
1	103,5309	2,69	95,2398	2,10	102,1526	0,41
2	102,3028	2,01	93,6613	1,77	102,1578	0,48

A precisão aparente do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2, em milímetros, é dado em função da precisão aparente das suas respectivas coordenadas, conforme item 8.3.22 do desenvolvimento matemático, sendo apresentadas na Tabela 8.4.

TABELA 8.4 - Precisão aparente do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2

Extremidades	s_P (mm)
1	3,44
2	2,72

Foi calculado o comprimento da mira, através das coordenadas determinadas, pelo método proposto, para os dois níveis de significância. Os resultados são apresentados na Tabela 8.5.

TABELA 8. 5 - Valores reais e calculados do comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças, para os dois níveis de significância propostos

Parâmetros avaliados	Níveis de Significância	
	4 casas decimais	6 casas decimais
Valor padronizado (mm)	2000,0000	2000,000000
Valor calculado (mm)	1999,9797	2000,038325
Diferença ¹ (mm)	-0,02	-0,04

1. Diferença entre o valor padronizado e o valor calculado em função das coordenadas obtidas através do método proposto.

8.5 - Considerações finais

Adotou-se nos arredondamentos dos cálculos das coordenadas dos alvos, dois níveis de significância, com 4 e 6 casas decimais. Desse modo, foi calculado o comprimento da mira, através das diferenças das coordenadas de suas extremidades, empregando-se o método. O comprimento padronizado é de 2000mm, considerado exato por injunção.

Visto que, as precisões aparentes calculadas em função das médias das determinações e a precisão do posicionamento espacial dos pontos, foram menores do que 4mm, conforme tabelas (8.3), (8.4), pode-se assegurar que o método proposto tem uma precisão aceitável, ficando na ordem do milímetro, podendo ser considerado preciso.

Comparando-se o valor obtido para o comprimento calculado da mira, com os dois níveis de significância, conforme Tabela (8.5), conclui-se que o método proposto é, também, exato, pois os índices de variação em relação ao comprimento padrão, são da ordem de 1/100000 e 1/50000, respectivamente, para os dois níveis de significância.

CAPÍTULO 9

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS: MÉTODO DAS DISTÂNCIAS MÍNIMAS

9.1 – Apresentação do método

O método proposto fundamenta-se na minimização de uma função matemática, definida pelo somatório das distâncias entre as linhas de visadas de todos os aparelhos envolvidos no processo e o lugar geométrico supostamente ocupado pelo ponto de coordenadas desconhecidas, aqui denominado alvo.

Sabe-se que as linhas de visada, concomitantemente, não são concorrentes no mesmo lugar geométrico, supostamente ocupado pelo alvo. Essa afirmativa deve-se aos vários fatores, intrínsecos e extrínsecos, que influenciam no processo, tais como: restrições técnicas dos aparelhos empregados, ou mesmo do próprio operador, fatores climáticos e atmosféricos, dificuldades na execução da pontaria e enquadramento perfeito do alvo, enumerando-se apenas os mais importantes.

Se as retas não são concorrentes no alvo devem, no entanto passar muito próximas a ele. Sendo assim, quando o alvo é visado por vários aparelhos, simultaneamente, para que os valores das coordenadas sejam corretos e ajustados o somatório dessas distâncias deve ser mínimo,. Dessa premissa resulta a designação: **método das distâncias mínimas.**

O presente método deve ser empregado com um número mínimo de duas estações fixas, sendo que o número máximo de estações deve ser estabelecido pelas

condições de operacionalidade, exigidas para a execução do trabalho. Esse número deve ser definido pelo operador, consideradas as particularidades de cada caso.

A condição necessária para o desenvolvimento do método é a visibilidade do ponto de orientação, por todos os aparelhos envolvidos no processo, conforme descrito no Capítulo 7.

Todos os procedimentos para o cálculo de coordenadas tridimensionais empregando o presente método estão detalhados na formulação matemática e implementados na planilha eletrônica EXCEL, constante do Apêndice VI.

9.2 - Modelo matemático proposto

O desenvolvimento matemático do método proposto fundamenta-se no seguinte princípio: as retas definidas pelas linhas de visada, que vão do centro ótico de cada aparelho ao alvo, não são concorrentes no ponto do espaço, que é teoricamente ocupado pelo referido alvo, mas sim, consideradas retas reversas.

Como decorrência disso, o método admite que o lugar geométrico do espaço, supostamente ocupado pelo alvo, é aquele em que o **somatório das distâncias**, do alvo às referidas retas reversas, é **mínimo**. O desenvolvimento do modelo matemático proposto é descrito nos itens 9.2.1 até 9.2.14.

O ponto inicial para a obtenção do modelo são as coordenadas tridimensionais do centro ótico dos aparelhos, determinados conforme a metodologia desenvolvida no Capítulo 7 e, das leituras angulares referentes ao alvo: ângulos horizontal e zenital, medidos em cada estação.

A metodologia desenvolvida no Capítulo 7 explica a concepção do ponto de orientação, do sistema de referência, das coordenadas tridimensionais das estações e do centro ótico dos aparelhos. Os principais elementos que compõem o método estão esquematicamente representados na Figura 9.1.

FIGURA 9. 1 - Representação genérica dos elementos que compõem o método

Onde:

- P - alvo ou ponto de coordenadas desconhecidas, X_P , Y_P , Z_P ;
- PO - ponto de orientação de coordenadas X_{PO} , Y_{PO} , Z_{PO} ;
- Est₁ - estação do aparelho 1, de coordenadas X_{E1} , Y_{E1} , Z_{E1} ;
- Teo₁ - aparelho estacionado na estação 1;
- CO₁ - centro ótico do aparelho 1, de coordenadas X_{CO1} , Y_{CO1} , Z_{CO1} ;
- HI₁ - altura do aparelho da estação 1;
- Hz₁ - ângulo lido, na estação 1, entre o PO e o alvo P
- Az₁ - azimute da direção estação 1 - alvo ;
- Zen₁ - ângulo zenital lido, da estação 1 em relação ao alvo P;
- $\bar{v}_1$ - vetor direção da linha de visada do aparelho 1;
- d₁ - distância entre a reta $\bar{v}_1$ e o alvo P;
- Est_n - estação do aparelho n, de coordenadas X_{En} , Y_{En} , Z_{En} ;
- Teo_n - aparelho estacionado na estação n;
- CO_n - centro ótico do aparelho n, de coordenadas X_{CO_n} , Y_{CO_n} , Z_{CO_n} ;
- HI_n - altura do aparelho da estação n;

- H_{zn} - ângulo lido, na estação n , entre o PO e o alvo P;
 A_{zn} - azimuth da direção estação n - alvo;
 Z_{en} - ângulo zenital lido, da estação n em relação ao alvo P;
 $\bar{v}_n$ - direção da linha de visada do aparelho n ;
 d_n - distância entre a reta $\bar{v}_n$ e o alvo P;
 x, y, z - eixos do sistema ortogonal de referência.

9.2.1 - Determinação das equações das retas definidas pelas linhas de visada dos n aparelhos até o alvo P

Sabe-se que as linhas de visada dos aparelhos que são dirigidas a um alvo genérico P, não são concorrentes nesse ponto. Isto porque uma infinidade de fatores e erros contribuem para que estas linhas não se interceptem no alvo, mas passem muito próximas a este.

Quando o somatório de todas as distâncias do alvo às retas for mínima, então, os dados angulares obtidos fornecem o melhor resultado para as coordenadas desse ponto P. Para que estas distâncias sejam determinadas e o seu somatório minimizado, deve-se estabelecer, inicialmente, as equações das retas definidas pelas linhas de visada de cada aparelho em direção a cada alvo P.

A origem destas retas é o centro ótico de cada aparelho (CO_i), dado por suas coordenadas XCO_i , YCO_i , ZCO_i .

A direção de cada reta é dada pelo versor $\bar{v}_i$, definido em função dos cossenos diretores destas retas, em relação ao sistema de referência, tomando-se o azimuth e o ângulo zenital do alvo, sendo:

$$\bar{v}_i = (a_i, b_i, c_i) \quad (9.1)$$

Sendo:

$$a_i = \text{sen}(Z_{en_i}) \cdot \text{sen}(A_{zn_i}) \quad (9.2)$$

$$b_i = \text{sen}(Z_{en_i}) \cdot \cos(A_{zn_i}) \quad (9.3)$$

$$c_i = \cos(Z_{en_i}) \quad (9.4)$$

onde:

- $\bar{v}_i$ - versor direção da reta i ;
- a_i - coordenada do versor, na direção do eixo x ;
- b_i - coordenada do versor, na direção do eixo y ;
- c_i - coordenada do versor, na direção do eixo z .

A reta genérica r_i tem como origem o centro ótico de cada aparelho e a direção do versor $\bar{v}_i$, logo:

$$r_i = CO_i + t_i \cdot \bar{v}_i \quad (9.5)$$

Onde:

- CO_i - centro ótico do aparelho, de coordenadas XCO_i, YCO_i, ZCO_i ;
- t_i - parâmetro da reta genérica;
- $\bar{v}_i$ - versor, direção da reta r_i .

9.2.2 - Determinação de um ponto genérico $G_i(t_i)$, sobre a reta r_i

Estes pontos genéricos $G_i(t_i)$ são os pontos sobre as retas genéricas r_i , onde uma perpendicular com origem no alvo (P) intercepta a referida reta. Sabe-se que é único o ponto da reta definida pela linha de visada, em que a distância ao alvo (P) é mínima. Este ponto genérico $G_i(t_i)$ é definido a partir das coordenadas do centro ótico de cada aparelho (CO_i) e do versor direção da reta determinada pelos cossenos diretores dos ângulos zenitais e horizontais, lidos em cada aparelhos, em direção a cada alvo.

As coordenadas do ponto genérico G_i , são dadas por:

$$G_i(t_i) = CO_i + t_i \cdot \bar{v}_i \quad (9.6)$$

ou, ainda:

$$XG_i = XCO_i + t_i \cdot a_i \quad (9.7)$$

$$YG_i = YCO_i + t_i \cdot b_i \quad (9.8)$$

$$ZG_i = ZCO_i + t_i \cdot c_i \quad (9.9)$$

Onde:

$G_i(t_i)$ - ponto genérico, função do parâmetro t_i ;

XG_i, YG_i, ZG_i - coordenadas do ponto genérico G_i , sobre a reta r_i .

9.2.3 - Determinação da distância entre os pontos genéricos e o alvo P

Essa distância a cada reta definida pela linha de visada, deve ser mínima para que os valores obtidos para as coordenadas do alvo (P), em função de todas as visadas angulares, sejam os valores considerados como os mais exatos possíveis.

A referida distância é determinada em função das coordenadas do ponto genérico G_i e do alvo P, pela equação da distância entre dois pontos, Então:

$$d_i = ((XP - (XCO_i + t_i \cdot a_i))^2 + (YP - (YCO_i + t_i \cdot b_i))^2 + (ZP - (ZCO_i + t_i \cdot c_i))^2)^{1/2} \quad (9.10)$$

9.2.4 - Determinação do somatório das distâncias entre o alvo P e o ponto genérico de cada reta

O somatório das distâncias entre as retas definidas pelas linhas de visada dos aparelhos, e o alvo, deve ser definido matematicamente, sendo, em seguida, minimizado. Logo:

$$\sum_1^n d_i^2 = ((XP - (XCO_i + t_i \cdot a_i))^2 + (YP - (YCO_i + t_i \cdot b_i))^2 + (ZP - (ZCO_i + t_i \cdot c_i))^2) \quad (9.11)$$

onde:

n - número de estações envolvidas no processo.

Elevando-se ao quadrado ambos os membros na eq. (9.11), elimina-se a raiz do segundo membro, têm-se, então:

$$(\sum_1^n d_i^2) = ((XP - (XCO_i + t_i \cdot a_i))^2 + (YP - (YCO_i + t_i \cdot b_i))^2 + (ZP - (ZCO_i + t_i \cdot c_i))^2) \quad (9.12)$$

Executando-se as operações indicadas em cada parcela do segundo membro da eq. (9.12), e denominando-se o primeiro termo de MX, o segundo de MY e o terceiro de MZ, temos:

$$MX = (XP)^2 - 2.(XP).(XCO_i) - 2.(XP).a_i.t_i + (XCO_i)^2 + 2.(XCO_i).a_i.t_i + (a_i)^2.(t_i)^2 \quad (9.13)$$

$$MY = (YP)^2 - 2.(YP).(YCO_i) - 2.(YP).b_i.t_i + (YCO_i)^2 + 2.(YCO_i).b_i.t_i + (b_i)^2.(t_i)^2 \quad (9.14)$$

$$MZ = (ZP)^2 - 2.(ZP).(ZCO_i) - 2.(ZP).c_i.t_i + (ZCO_i)^2 + 2.(ZCO_i).c_i.t_i + (c_i)^2.(t_i)^2 \quad (9.15)$$

Então:

$$\sum_1^n (d_i)^2 = MX + MY + MZ \quad (9.16)$$

Desenvolvendo-se o somatório do segundo membro da eq. (9.16) que resulta da combinação das eq. (9.13), (9.14) e (9.15), têm-se:

$$\begin{aligned} \sum_1^n (d_i)^2 &= n.(XP)^2 + n.(YP)^2 + n.(ZP)^2 \\ &- 2.(\sum_1^n (XCO_i)).(XP) - 2.(\sum_1^n (YCO_i)).(YP) - 2.(\sum_1^n (ZCO_i)).(ZP) \\ &- 2.(XP).\sum_1^n (a_i.t_i) - 2.(YP).\sum_1^n (b_i.t_i) - 2.(ZP).\sum_1^n (c_i.t_i) \\ &+ 2.\sum_1^n ((XCO_i).a_i.t_i) + 2.\sum_1^n ((YCO_i).b_i.t_i) + 2.\sum_1^n ((ZCO_i).c_i.t_i) \\ &+ \sum_1^n ((a_i)^2.(t_i)^2) + \sum_1^n ((b_i)^2.(t_i)^2) + \sum_1^n ((c_i)^2.(t_i)^2) \\ &+ \sum_1^n (XCO_i)^2 + \sum_1^n (YCO_i)^2 + \sum_1^n (ZCO_i)^2 \end{aligned} \quad (9.17)$$

Na eq. (9.17), os elementos conhecidos são:

XCO_i, YCO_i, ZCO_i - coordenadas do centro ótico dos aparelhos;

a_i, b_i, c_i - coordenadas dos versores direção das linhas de visada.

E as incógnitas são:

XP, YP, ZP - coordenadas do alvo P;

t_i - parâmetros das, retas definidas pelas linhas de visada, (com $i=1, 2, 3, \dots, n$);

9.2.5 - Determinação das derivadas parciais em função das incógnitas

Determinam-se as derivadas parciais para que se possa minimizar a função que representa o somatório das distâncias entre as linhas de visada e o lugar geométrico supostamente ocupado pelo alvo (P).

Escrevendo-se a eq. (9.17) em função das incógnitas, têm-se:

$$F = F(XP, YP, ZP, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) \quad (9.18)$$

Onde:

F - equação escrita em função das incógnitas.

Derivando-se a eq. (9.18), em função de XP, têm-se:

$$\frac{\partial F}{\partial (XP)} = 2.n.(XP) - 2.\sum_1^n (XCO_1) - 2.\sum_1^n (a_i . t_i) \quad (9.19)$$

Desenvolvendo-se os somatórios:

$$\frac{\partial F}{\partial (XP)} = 2.n.(XP) - 2.((XCO_1) + (XCO_2) + \dots + (XCO_n)) - 2.(a_1 . t_1 + a_2 . t_2 + \dots + a_n . t_n) \quad (9.20)$$

Igualando-se a zero:

$$2.n.(XP) - 2.((XCO_1) + (XCO_2) + \dots + (XCO_n)) - 2.(a_1 . t_1 + a_2 . t_2 + \dots + a_n . t_n) = 0 \quad (9.21)$$

Derivando-se a eq. (9.18), em função de YP, têm-se:

$$\frac{\partial F}{\partial (YP)} = 2.n.(YP) - 2.\sum_1^n (YCO_1) - 2.\sum_1^n (b_i . t_i) \quad (9.22)$$

Desenvolvendo os somatórios:

$$\frac{\partial F}{\partial (YP)} = 2.n.(YP) - 2.((YCO_1) + (YCO_2) + \dots + (YCO_n)) - 2.(b_1 . t_1 + b_2 . t_2 + \dots + b_n . t_n) \quad (9.23)$$

Igualando-se a zero:

$$2.n.(YP) - 2.((YCO_1) + (YCO_2) + \dots + (YCO_n)) - 2.(b_1.t_1 + b_2.t_2 + \dots + b_n.t_n) = 0 \quad (9.24)$$

Derivando-se a eq. (9.18), em função de ZP, têm-se:

$$\frac{\partial F}{\partial (ZP)} = 2.n.(ZP) - 2.\sum_1^n (ZCO_i) - 2.\sum_1^n (c_i.t_i) \quad (9.25)$$

Desenvolvendo os somatórios:

$$\frac{\partial F}{\partial (ZP)} = 2.n.(ZP) - 2.((ZCO_1) + (ZCO_2) + \dots + (ZCO_n)) - 2.(c_1.t_1 + c_2.t_2 + \dots + c_n.t_n) \quad (9.26)$$

Igualando-se a zero:

$$2.n.(ZP) - 2.((ZCO_1) + (ZCO_2) + \dots + (ZCO_n)) - 2.(c_1.t_1 + c_2.t_2 + \dots + c_n.t_n) = 0 \quad (9.27)$$

Derivando-se a eq. (9.18), em função de t₁, têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_1} = & -2.a_1.(XP) - 2.b_1.(YP) - 2.c_1.(ZP) \\ & + 2.a_1.(XCO_1) + 2.b_1.(YCO_1) + 2.c_1.(ZCO_1) \\ & + 2.(a_1)^2.t_1 + 2.(b_1)^2.t_1 + 2.(c_1)^2.t_1 \end{aligned} \quad (9.28)$$

Igualando-se a zero:

$$\begin{aligned} & -2.a_1.(XP) - 2.b_1.(YP) - 2.c_1.(ZP) + 2.a_1.(XCO_1) + 2.b_1.(YCO_1) \\ & + 2.c_1.(ZCO_1) + 2.(a_1)^2.t_1 + 2.(b_1)^2.t_1 + 2.(c_1)^2.t_1 = 0 \end{aligned} \quad (9.29)$$

Derivando-se a eq. (8.18), em função de t₂, têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_2} = & -2.a_2.(XP) - 2.b_2.(YP) - 2.c_2.(ZP) \\ & + 2.a_2.(XCO_2) + 2.b_2.(YCO_2) + 2.c_2.(ZCO_2) \\ & + 2.(a_2)^2.t_2 + 2.(b_2)^2.t_2 + 2.(c_2)^2.t_2 \end{aligned} \quad (9.30)$$

Igualando-se a zero:

$$\begin{aligned} & -2.a_2.(XP) - 2.b_2.(YP) - 2.c_2.(ZP) + 2.a_2.(XCO_2) + 2.b_2.(YCO_2) + 2.c_2.(ZCO_2) \\ & + 2.(a_2)^2.t_2 + 2.(b_2)^2.t_2 + 2.(c_2)^2.t_2 = 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

Derivando-se a eq. (9.18), em função de t_n , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_n} = & -2.a_n.(XP) - 2.b_n.(YP) - 2.c_n.(ZP) \\ & + 2.a_n.(XCO_n) + 2.b_n.(YCO_n) + 2.c_n.(ZCO_n) \\ & + 2.(a_n)^2.t_n + 2.(b_n)^2.t_n + 2.(c_n)^2.t_n \end{aligned} \quad (9.32)$$

Igualando-se a zero, têm-se:

$$\begin{aligned} & -2.a_n.(XP) - 2.b_n.(YP) - 2.c_n.(ZP) + 2.a_n.(XCO_n) + 2.b_n.(YCO_n) + 2.c_n.(ZCO_n) \\ & + 2.(a_n)^2.t_n + 2.(b_n)^2.t_n + 2.(c_n)^2.t_n = 0 \end{aligned} \quad (9.33)$$

Todas estas equações podem ser divididas por 2, pois este número é fator comum em todas elas.

9.2.6 - Formulação matricial

As incógnitas são as coordenadas do alvo P, (XP, YP, ZP) e os parâmetros das retas definidas pelas linhas de visada. A matriz dos coeficientes das incógnitas é sempre uma matriz quadrada.

Logo, o número de equações é sempre igual ao número de estações envolvidas no processo, acrescido de três unidades, sendo a equação matricial dada por:

$$M_{COEF}.M_{INC} = M_{IND} \quad (9.34)$$

Onde:

M_{COEF} - matriz dos coeficientes das incógnitas;

M_{INC} - matriz das incógnitas;

M_{IND} - matriz dos termos independentes.

A matriz dos coeficientes, pela formulação proposta, será sempre uma matriz quadrada. Logo, se for invertível, ter-se-á:

$$M_{INC} = (M_{COEF})^{-1} \cdot M_{IND} \quad (9.35)$$

O resultado do processo é a solução da equação matricial, eq.(9.35). Como a matriz das incógnitas é uma matriz coluna, cada elemento já é o valor procurado para as respectivas incógnitas, de acordo com a ordem disposta na coluna.

A matriz dos coeficientes é da ordem (n x n), dada por:

$$M_{COEF} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 0 & n & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & \dots & -b_n \\ 0 & 0 & n & -c_1 & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_n \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_n & -b_n & -c_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

A matriz das incógnitas é da ordem (nx1), dada por:

$$M_{INC(n \times 1)} = \begin{bmatrix} XP \\ YP \\ ZP \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix} \quad (9.37)$$

A matriz dos termos independentes é da ordem (nx1), dada por:

$$M_{IND(n \times 1)} = \begin{bmatrix} \sum_1^n (XCO_i) \\ \sum_1^n (YCO_i) \\ \sum_1^n (ZCO_i) \\ -(a_1 \cdot XCO_1 + b_1 \cdot YCO_1 + c_1 \cdot ZCO_1) \\ -(a_2 \cdot XCO_2 + b_2 \cdot YCO_2 + c_2 \cdot ZCO_2) \\ -(a_3 \cdot XCO_3 + b_3 \cdot YCO_3 + c_3 \cdot ZCO_3) \\ \dots \\ -(a_n \cdot XCO_n + b_n \cdot YCO_n + c_n \cdot ZCO_n) \end{bmatrix} \quad (9.38)$$

9.2.7 - Determinação das coordenadas dos pontos de distância mínima (G_i), entre as linhas de visada e o alvo P

Este ponto genérico de distância mínima (G_i) sobre a reta definida pela linha de visada de cada aparelho, em relação ao alvo (P), é o lugar geométrico definido pelo pé da perpendicular que vai da referida reta ao alvo (P).

A Figura 9.2 representa, genericamente, a posição dos pontos de distância mínima entre as retas, definidas pelas linhas de visada dos aparelhos e o alvo.

FIGURA 9. 2 - Pontos de distância mínima entre as linhas de visada e o alvo

Onde:

- Teo_1, Teo_n - aparelhos estacionados nas n estações;
 Est_1, Est_n - estações, materializadas com marcos;
 CO_1, CO_n - centro ótico dos aparelhos;
 $\bar{v}_1, \bar{v}_n$ - vetores direção das linha de visada;
 G_1, G_n - pontos de distância mínima entre o alvo e a linha de visada;
 r_1, r_n - retas definidas pelas linhas de visada;
 d_1, d_n - distâncias entre o alvo P e os pontos G_1 e G_n , respectivamente.

As retas r_i têm como origem o centro ótico dos aparelhos e como direção o vetor $\bar{v}_i$, definido por suas coordenadas (a_i, b_i, c_i) . O ponto G_i é definido pela equação:

$$G_i = CO_i + t_i \cdot \bar{v}_i \quad (9.39)$$

Sendo as equações paramétricas dadas por:

$$\begin{aligned} XG_i &= XCO_i + t_i \cdot a_i \\ YG_i &= YCO_i + t_i \cdot b_i \\ ZG_i &= ZCO_i + t_i \cdot c_i \end{aligned} \quad (9.40)$$

Estas são as coordenadas dos pontos de distância mínima, localizados sobre as retas, definidas pelas linhas de visadas entre os aparelhos e os alvos, em função dos cossenos diretores das mesmas. Os valores de (t_i) são obtidos após a minimização da função, que é definida pela eq. (9.17).

9.2.8 - Determinação das distâncias entre os pontos (G_i) e o alvo P

Estes pontos genéricos de distância mínima (G_i), que estão sobre as retas definidas pelas linhas de visadas de todos os aparelhos, em relação ao alvo, são

respectivamente, o lugar geométrico definido pelo pé da perpendicular que vai de cada reta, individualmente, ao alvo (P).

As distâncias entre os pontos (G_i) e o alvo P são dadas pela fórmula:

$$d_i = \sqrt{(XP - XG_i)^2 + (YP - YG_i)^2 + (ZP - ZG_i)^2} \quad (9.41)$$

Onde:

- d_i - distância entre os pontos G_i e o alvo P;
- XP, YP, ZP - coordenadas do alvo, calculadas pela eq. (9.35);
- XG_i, YG_i, ZG_i - coordenadas dos pontos sobre as retas direção das linhas de visadas.

9.2.9 - Determinação das distâncias média, mínima e máxima, entre os pontos (G_i) e o alvo P

As referidas distâncias são determinadas, para que se tenha uma noção exata da amplitude de variação destas grandezas. No entanto, a média deve ser considerada o melhor valor. Sendo:

$$d_{\min} = (d_i)_{\min} \quad (9.42)$$

$$d_{\max} = (d_i)_{\max} \quad (9.43)$$

$$d_{\text{medio}} = \frac{\sum_1^n (d_i)}{n} \quad (9.44)$$

Onde:

- $d_{\min}$ - menor distância entre os pontos G_i e o alvo P;
- $d_{\max}$ - maior distância entre os pontos G_i e o alvo P;
- d_{medio} - média das distâncias entre os pontos G_i e o alvo P;
- n - número de estações ou aparelhos envolvidos no processo.

9.2.10 - Determinação da precisão aparente das coordenadas dos pontos G_i , sobre as retas definidas pelas linhas de visada

Define-se precisão aparente das coordenadas dos pontos genéricos (G_i) como o desvio padrão da média destas determinações. Com a média das coordenadas dos pontos genéricos (G_i) é igual ao valor das coordenadas do alvo (P), os valores obtidos para a precisão aparente das determinações são absolutamente iguais.

A precisão aparente das coordenadas dos pontos G_i é calculada por:

$$s_{XG} = \sqrt{\frac{\sum (XP - XG_i)^2}{n-1}} \quad (9.45)$$

$$s_{YG} = \sqrt{\frac{\sum (YP - YG_i)^2}{n-1}} \quad (9.46)$$

$$s_{ZG} = \sqrt{\frac{\sum (ZP - ZG_i)^2}{n-1}} \quad (9.47)$$

onde:

XP, YP, ZP - coordenadas do alvo;

XG_i , YG_i , ZG_i - coordenadas dos pontos sobre as linhas de visada;

n - número de estações ou aparelhos envolvidos.

Considerando-se que as coordenadas do ponto P são calculadas em função das distâncias mínimas às retas definidas pelas linhas de visada, nas eq. (9.45), (9.46) e (9.47), pode-se, também, empregar a média das coordenadas de G_i em lugar das coordenadas de P.

Isto é:

$$s_{XG} = \sqrt{\frac{\sum (\overline{XG_i} - XG_i)^2}{n-1}} \quad (9.48)$$

$$s_{YG} = \sqrt{\frac{\sum (\overline{YG_i} - YG_i)^2}{n-1}} \quad (9.49)$$

$$s_{ZG} = \sqrt{\frac{\sum (\overline{ZG_i} - ZG_i)^2}{n-1}} \quad (9.50)$$

onde:

$\overline{XG_i}, \overline{YG_i}, \overline{ZG_i}$ - média das coordenadas dos pontos G_i .

Os valores obtidos para as precisões aparentes das determinações das coordenadas (XG_i, YG_i, ZG_i) dos pontos genéricos (G_i) são iguais para o conjunto de eq. (9.45), (9.46) e (9.47) e o conjunto (9.48), (9.49) e (9.50).

9.2.11 - Determinação da precisão aparente das coordenadas finais do alvo P

A precisão aparente ou desvio padrão das coordenadas finais de cada alvo (P) é definida em função da precisão aparente das determinações dos valores das coordenadas dos pontos genéricos (G_i), considerando-se os n aparelhos ou pontos estações envolvidos no processo. Então, a precisão aparente é calculada em função do desvio padrão da média das coordenadas (XG_i, YG_i, ZG_i). Logo:

$$s_{\overline{XP}} = \frac{s_{XG}}{\sqrt{n}} \quad (9.51)$$

$$s_{\overline{YP}} = \frac{s_{YG}}{\sqrt{n}} \quad (9.52)$$

$$s_{\overline{ZP}} = \frac{s_{ZG}}{\sqrt{n}} \quad (9.53)$$

Onde:

$s_{\overline{XP}}, s_{\overline{YP}}, s_{\overline{ZP}}$ - precisão aparente das coordenadas finais de P;

$s_{XG_i}, s_{YG_i}, s_{ZG_i}$ - precisão aparente das coordenadas dos pontos G_i ;

n - número de estações ou aparelhos envolvidos.

9.2.12 - Precisão do posicionamento espacial do alvo P

Determinadas as coordenadas do alvo (P) e suas respectivas precisões aparentes, pode-se estimar um valor médio em torno do qual, provavelmente, fique localizado espacialmente o ponto que define a posição do alvo (P). Neste caso,

definimos precisão do posicionamento espacial do alvo (s_p), como sendo o escalar obtido pela raiz quadrada da soma dos quadrados das precisões aparentes das coordenadas espaciais do alvo (P).

Assim, a precisão do posicionamento espacial do alvo P é dada por:

$$s_P = \sqrt{(s_{\overline{XP}})^2 + (s_{\overline{YP}})^2 + (s_{\overline{ZP}})^2} \quad (9.54)$$

Onde:

s_P - precisão do posicionamento espacial do alvo P;

$s_{\overline{XP}}, s_{\overline{YP}}, s_{\overline{ZP}}$ - precisão aparente das coordenadas do alvo P.

9.2.13 - Determinação das coordenadas ajustadas do centro ótico dos aparelhos

Após a determinação dos escalares (t_i) da eq. (9.37) no desenvolvimento matricial proposto no item 9.2.6, determinam-se as coordenadas dos pontos genéricos (G_i), substituindo-se estes valores no conjunto de eq. (9.40).

As coordenadas ajustadas do centro ótico de cada aparelho são dadas pela eq.(9.55), substituindo-se nas equações paramétricas os valores das coordenadas dos pontos genéricos. Então, têm-se:

$$\begin{aligned} XCOaj_i &= XG_i - t_i.a_i \\ YCOaj_i &= YG_i - t_i.b_i \\ ZCOaj_i &= ZG_i - t_i.c_i \end{aligned} \quad (9.55)$$

Onde:

$XCOaj_i, YCOaj_i, ZCOaj_i$ - coordenadas ajustadas do centro ótico;

XG_i, YG_i, ZG_i - coordenadas dos pontos genéricos;

t_i - escalar na equação paramétrica;

a_i, b_i, c_i - coordenadas do versor direção das retas.

9.2.14 - Verificações importantes

Os valores esperados para os erros nas coordenadas do centro ótico dos aparelhos são calculadas conforme item 6.4 da Capítulo 6, Ajustamento das Observações.

Os valores ajustados para as coordenadas do centro ótico de cada aparelho são dados pelo conjunto de eq. (9.55).

As diferenças entre os valores ajustados e os valores iniciais das coordenadas do centro ótico dos aparelhos, fornecem os erros residuais, aqui denominados precisões ajustadas.

Então, têm-se:

$$\begin{aligned}v_{x_i} &= XCOaj_i - XCO_i \\v_{y_i} &= YCOaj_i - YCO_i \\v_{z_i} &= ZCOaj_i - ZCO_i\end{aligned}\tag{9.56}$$

onde:

$XCOaj_i, YCOaj_i, ZCOaj_i$	- coordenadas ajustadas do centro ótico;
XCO_i, YCO_i, ZCO_i	- coordenadas do centro ótico dos aparelhos;
$v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$	- erros residuais ou precisões ajustadas das coordenadas do centro ótico.

As coordenadas do centro ótico dos aparelhos (XCO_i, YCO_i, ZCO_i) são calculadas conforme metodologia proposta no item 7.5 do Capítulo 7. A propagação dos erros na irradiação para a determinação destas coordenadas, conforme item 6.4 do

Capítulo 6, fornece os valores esperados para as precisões ($\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}, \sigma_{z_i}$) das determinações destas coordenadas. Calculados os erros residuais ($v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$), aqui denominados precisões ajustadas para as coordenadas ajustadas ou finais do centro ótico dos aparelhos, haverá o ajuste esperado se, e somente se:

$$\begin{aligned}v_{x_i} &\leq \sigma_{x_i} \\v_{y_i} &\leq \sigma_{y_i} \\v_{z_i} &\leq \sigma_{z_i}\end{aligned}\tag{9.57}$$

onde:

- V_{xi} , V_{yi} , V_{zi} - precisões ajustadas das coordenadas do centro óptico (a posteriori);
 σ_{xi} , σ_{yi} , σ_{zi} - precisões calculadas para as coordenadas do centro óptico (a priori).

9.3 - Validação do modelo matemático

O modelo matemático proposto foi validado com os dados de campo constantes do Anexo A, com o emprego da planilha eletrônica EXCEL. O desenvolvimento do processo de cálculo e os resultados estão apresentados no Apêndice V.

As coordenadas do centro ótico dos aparelhos foram determinadas conforme a metodologia proposta no Capítulo 7 e o programa computacional desenvolvido está relacionado no Apêndice I.

9.3.1 - Determinação e análise das coordenadas tridimensionais calculadas

O modelo matemático foi implementado na planilha eletrônica EXCEL, onde foram calculadas as coordenadas das extremidades 1 e 2 da mira horizontal. Os valores dessas coordenadas foram obtidos com seis e quatro casas decimais, para permitir a comparação com os demais métodos, quanto ao aspecto precisão.

As precisões aparentes das coordenadas do alvo P são calculadas em função das precisões aparentes das médias das coordenadas de G_i , conforme item 9.2.11 do desenvolvimento matemático. Os valores das coordenadas e respectivas precisões são apresentados na Tabela 9.1.

Os arredondamentos foram executados, também, com 4 casas decimais. Esse nível de significância permite uma nova avaliação, quanto à precisão do método.

TABELA 9. 1 - Coordenadas dos alvos 1 e 2, com o nível de significância de 6 casas decimais e precisões aparentes

Alvo Nº	XP (m)	s _Y (mm)	YP (m)	s _Y (mm)	ZP (m)	s _Z (mm)
1	103,531531	0,39	95,238045	0,59	102,152735	0,43
2	102,303121	0,38	93,659877	0,51	102,157903	0,55

A Tabela 9.2, apresenta as coordenadas dos alvos com esse nível de significância e respectivas precisões.

TABELA 9. 2 - Coordenadas dos alvos 1 e 2, com o nível de significância de 4 casas decimais e precisões aparentes

Alvo Nº	XP (m)	(mm)	YP (m)	(mm)	ZP (m)	(mm)
1	103,5315	0,39	95,2380	0,59	102,1527	0,43
2	102,3031	0,38	93,6599	0,51	102,1579	0,55

As coordenadas dos pontos genéricos, situados sobre as retas definidas pelas linhas de visadas, são apresentados na Tabela 9.3. Através das coordenadas dos pontos genéricos são calculadas as distâncias máxima, média e mínima, desses pontos ao alvo P. Esse cálculo é executado somente para que se tenha a percepção física da ordem de grandeza dessas distâncias.

TABELA 9. 3 - Coordenadas dos pontos genéricos com nível de significância de 6 casas decimais

Reta-Alvo R _i -A _i	XG _i (m)	YG _i (m)	ZG _i (m)
R1-A1	103,530329	95,237473	102,153353
R1-A2	102,302084	93,659509	102,158624
R2-A1	103,531175	95,237815	102,153366
R2-A2	102,103027	93,659900	102,158917
R3-A1	103,532461	95,239184	102,153758
R3-A2	102,303612	93,660406	102,158849
R4-A1	103,532583	95,239723	102,151272
R4-A2	102,304259	93,661319	102,156320
R5-A1	103,531107	95,236029	102,151927
R5-A2	102,302623	93,658249	102,156803

Pelos cálculos executados, as coordenadas médias dos pontos genéricos têm valores idênticos aos valores das coordenadas finais do alvo P, quando calculadas

pelo presente método. Estes resultados idênticos confirmam que a média é o melhor valor para as coordenadas do alvo P. A Tabela 9.4 mostra os valores das médias das coordenadas dos pontos genéricos, cujos valores são iguais aos já apresentados na tabela 9.3.

TABELA 9. 4 - Médias das coordenadas dos pontos genéricos com nível de significância de 6 casas decimais e respectivas precisões

Alvo Nº	XG_i (m)	$s_{\overline{XG_i}}$ (mm)	YG_i (m)	$s_{\overline{YG_i}}$ (mm)	ZG_i (m)	$s_{\overline{ZG_i}}$ (mm)
1	103,531531	0,39	95,238045	0,59	102,152735	0,43
2	102,303121	0,38	93,659877	0,51	102,157903	0,55

As distâncias entre os pontos genéricos (G_i) e os alvos (1 e 2), são dadas em milímetro (mm), de acordo com o item 9.2.8 e constantes da Tabela 9.5.

TABELA 9. 5 - Distâncias entre os alvos 1 e 2 e os pontos genéricos (G_i)

Distâncias entre os alvos e os pontos genéricos (G_i)					
Alvo	G_i	(mm)	Alvo	G_i	(mm)
1	1	1,47	2	1	1,32
1	2	0,76	2	2	1,02
1	3	1,79	2	3	1,19
1	4	2,46	2	4	2,43
1	5	2,21	2	5	2,03

As distâncias mínimas, médias e máximas entre os pontos genéricos e os alvos 1 e 2, de acordo com o item 9.2.9, são dadas em (mm), conforme apresentado na Tabela 9.6.

TABELA 9. 6 - Distâncias mínimas, médias e máximas entre os alvos 1 e 2 e os pontos genéricos (G_i)

Distâncias entre cada alvo e o respectivo ponto genérico			
Alvo- G_i	Distâncias		
	Mínimas (mm)	Médias (mm)	Máximas (mm)
1 - 1	0,76	1,74	2,46
2 - 2	1.02	1,60	2,43

A precisão aparente das coordenadas dos pontos genéricos (G_i) são dadas em função das médias das coordenadas destes pontos (), conforme item 9.2.10 do desenvolvimento matemático e constantes da Tabela 9.7.

TABELA 9. 7 - Precisão aparente das coordenadas dos pontos genéricos (G_i)

G_i			
Nº	(mm)	(mm)	(mm)
1	0,86	1,31	0,96
2	0,85	1,13	1,24

A precisão aparente do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2, em milímetros, é dado em função da precisão aparente das suas respectivas coordenadas, conforme item 9.2.12 do desenvolvimento matemático e constante da Tabela 9.8.

TABELA 9.8 - Precisão aparente (s_p) do posicionamento espacial dos alvos 1 e 2

Alvo	s_p (mm)
1	0,82
2	0,84

A Tabela 9.9 apresenta as coordenadas do centro óptico dos aparelhos, calculadas com os dados de campo do Anexo A, através do programa 01, constante do Apêndice I e as coordenadas calculadas pelo método proposto.

TABELA 9. 9 - Coordenadas do centro óptico dos aparelhos

Aparelho Nº	Coordenadas do centro óptico dos aparelhos					
	Determinações de campo (m)			Calculada pelas Dist. Min.(m)		
	XCO _i	YCO _i	ZCO _i	XCOaj _i	YCOaj _i	ZCOaj _i
1	94,7324	112,1590	100,7050	94,7334	112,1594	100,7050
2	90,9752	110,7395	100,7170	90,9753	110,7395	100,7167
3	88,5620	108,5176	100,9760	88,5615	108,5170	100,9758
4	86,4234	105,0747	101,1390	86,4223	105,0733	101,1413
5	85,6529	99,3456	101,2780	85,6534	99,3473	101,2798

A Tabela 9.10 apresenta as diferenças entre os valores das coordenadas do centro óptico dos aparelhos, calculadas com os dados de campo do Anexo A, através do programa 01, constante do Apêndice I e as coordenadas calculadas pelo método proposto.

TABELA 9. 10 – Diferenças entre os valores das determinações de campo e calculados pelo método proposto

Aparelho Nº	Diferenças entre os valores de campo e calculados (ajustados)		
	XCO _i - XCOaj _i (mm)	YCO _i - YCOaj _i (mm)	ZCO _i - ZCOaj _i (mm)
1	-1,00	-0,04	0,00
2	-0,10	0,00	0,30
3	0,50	0,60	0,20
4	1,10	1,40	-2,30
5	-0,50	-1,70	-1,80

A Tabela 9.11 apresenta os valores esperados (em mm), para os erros ou precisões das coordenadas do centro ótico dos aparelhos, determinadas pela propagação de erros na irradiação (σ_{xi} , σ_{yi} , σ_{zi}), calculadas pela metodologia apresentada no item 6.5 do Capítulo 6 e os erros residuais (v_{xi} , v_{yi} , v_{zi}), encontrados após a aplicação do modelo proposto.

TABELA 9. 11 - Comparação entre os valores esperados e calculados para as precisões ou erros das coordenadas do centro ótico dos aparelhos

Aparelho Nº	Precisões ou erros esperados e valores encontrados					
	Valores esperados (mm)			Valores encontrados (mm)		
	σ_X	σ_Y	σ_Z	v_X	v_Y	v_Z
1	0,81	1,86	0,52	-1,00	-0,04	0,00
2	1,31	1,55	0,51	-0,10	0,00	0,30
3	1,63	1,21	0,51	0,50	0,60	0,20
4	1,91	0,72	0,49	1,10	1,40	-2,30
5	2,03	0,14	0,56	-0,50	-1,70	-1,80

A Tabela 9.12 apresenta os escalares que representam a posição provável, ocupada pelo ponto (P), no espaço calculados com as precisões estimadas na irradiação (a priori) e encontrados após a aplicação do modelo proposto (a posteriori). Vê-se que a média após a aplicação do modelo (1,51mm) é menor que o valor esperado (2,10mm). Logo, houve um ajustamento nos valores representativos das coordenadas do centro ótico dos aparelhos. Em função dos valores apresentados nesta tabela analisa-se o deslocamento relativo que apresentaria o centro ótico dos aparelhos, em ambos os casos, isto é, considerando-se as precisões ou os erros a priori e a posteriori.

TABELA 9. 12 - Comparação entre os prováveis deslocamentos relativos do centro ótico dos aparelhos em função dos erros estimados e ajustados

Prováveis deslocamentos do centro ótico dos aparelhos em função das precisões			
Aparelho Nº	Deslocamento provável (mm)		
	a priori	a posteriori	
1	2,09	1,00	
2	2,09	0,32	
3	2,09	0,81	
4	2,10	2,91	
5	2,11	2,53	
médias	2,10	1,51	

A Tabela 9.13 apresenta os valores ajustados das distâncias inclinadas entre o centro ótico dos aparelhos e as coordenadas dos pontos genéricos (G_i), determinados pelo conjunto de eq. (9.40).

TABELA 9. 13 - Valores ajustados das distâncias inclinadas entre o centro ótico dos aparelhos e os pontos genéricos

Distâncias inclinadas entre o centro ótico e os pontos genéricos		
Pontos genéricos Nº	Alvo 1 (m)	Alvo 2 (m)
1	19,126933	20,041069
2	20,000479	20,545382
3	20,045359	20,272285
4	19,760439	19,583192
5	18,365252	17,616230

9.4 - Considerações finais

Adotou-se para os arredondamentos nos cálculos das coordenadas dos alvos, dois níveis de significância, com 4 e 6 casas decimais. Desse modo, calculou-se o comprimento da mira horizontal, através das coordenadas determinadas pelo método proposto. Os valores encontrados são comparados com o valor padronizado, que é de 2000mm, por injeção, considerado exato.

Observa-se que as precisões aparentes, calculadas em função das médias das determinações e a precisão do posicionamento espacial dos pontos, pelos critérios propostos, são da ordem de 4mm, conforme Tabelas 9.7 e 9.8. Pode-se assegurar que

o método proposto, dentro das restrições técnicas do aparelho topográfico utilizado, apresenta resultados compatíveis com a precisão nominal do referido aparelho.

Comparando-se os valores obtidos para o comprimento da mira horizontal, calculados com os dois níveis de significância, conforme Tabela 9.14, avalia-se que o método proposto apresenta uma precisão dentro do limite do milímetro.

TABELA 9. 14 - Valor padrão e valores calculados para o comprimento da mira horizontal e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância

Parâmetros avaliados	Níveis de Significância	
	4 casas decimais	6 casas decimais
Valor padronizado (mm)	2000,0000	2000,000000
Valor calculado (mm)	1999,8483	1999,908016
Diferença ¹ (mm)	-0,15	-0,09

1. Diferença entre o valor padronizado e o valor calculado em função das coordenadas obtidas através do método proposto.

Considerando-se que os índices de variação em relação ao comprimento padronizado da mira horizontal (2000mm), são da ordem de 1/13.300 e 1/22.200, respectivamente, para os dois níveis de significância que foram considerados nos arredondamentos dos cálculos das coordenadas espaciais dos pontos, pode-se afirmar que o método proposto apresenta precisão aceitável para os trabalhos de topografia industrial (de precisão) ou para controle de obras civis em geral.

Pela análise da Tabela 9.12, verifica-se que os prováveis deslocamentos, ou melhor denominando, as incertezas da localização do centro ótico, em relação às médias, do total de aparelhos envolvidos no processo, caiu de 2,10mm para 1,51mm, indicando que, no caso, houve um ajustamento favorável à melhoria da precisão das coordenadas iniciais do centro ótico de cada aparelho.

Desse fato pode-se concluir que, além da obtenção das coordenadas dos alvos, já ajustadas, pode-se ajustar, também, as coordenadas iniciais do centro óptico dos aparelhos.

CAPÍTULO 10

PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS: MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO E AJUSTE

10.1 – Apresentação do método

Este método proposto, denominado Método de Minimização e Ajuste, serve para o cálculo da determinação de coordenadas tridimensionais de alvos ou pontos fixos. Fundamenta-se no seguinte princípio básico: as coordenadas tridimensionais de um ponto fixo ou alvo (P) são definidas através de uma função, cujas variáveis são as coordenadas do centro ótico dos aparelhos envolvidos no processo, os ângulos zenitais e os azimutes das linhas de visada desses aparelhos, em direção ao referido alvo. Desse modo, os ângulos horizontais lidos devem ser transformados em azimutes, relacionados ao sistema referencial adotado.

O presente método de cálculo executa o cálculo das coordenadas tridimensionais dos pontos fixos ou alvos empregando o ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.), descrito no Capítulo 6.

Cada estação fixa ou aparelho envolvido no processo fornece 3 equações, que segundo o método paramétrico (GEMAEL, 1994) e (SILVA, 1995), são as equações de erros na metodologia proposta. Nesse método, as incógnitas são as coordenadas tridimensionais do alvo (X_P , Y_P , Z_P) e os parâmetros (t_i) das retas (r_i), definidas pela linha de visada de cada aparelho. Desse modo, o menor número de estações empregadas no processo deve ser 2, para que haja, no mínimo, 1 grau de liberdade,

isto é, 6 equações para as 5 incógnitas possíveis: as coordenadas tridimensionais do alvo e os 2 parâmetros das retas definidas pelas linhas de visada.

Denominando-se n , o número de observações (equações de erros) e u , o número de incógnitas, segundo o método de ajustamento proposto: se $n > u$, então, aplica-se o método dos coeficientes. Logo, o requisito mínimo exigido são 2 estações.

Este método calcula as coordenadas tridimensionais dos alvos, em função das coordenadas do centro ótico dos aparelhos e da orientação das retas, definidas pelas linhas de visadas.

A orientação das retas implica na concepção do ponto de orientação, definido no Capítulo 7, que permite a transformação dos ângulos horizontais lidos em azimutes. Em função destes azimutes e dos ângulos zenitais, observados de cada estação em relação ao alvo e pelos cossenos diretores, são determinados os coeficientes ou parâmetros das equações de erros. Estes parâmetros são denominados por a_i , b_i e c_i , que são as coordenadas dos versores unitários que definem as direções das linhas de visadas.

Os valores de $r_i(a_i, b_i, c_i)$ são os parâmetros (escalares) das retas e indicam a localização espacial do alvo, tendo como origem as coordenadas do centro ótico dos aparelhos e dos versores direção destas retas.

Para a presente proposição, a condição necessária e suficiente, é que todos os aparelhos, estacionados nas respectivas estações, possam visar o ponto de orientação, sem a necessidade da intervisibilidade entre aparelhos.

Após a montagem das equações de erros, o desenvolvimento matemático proposto segue o roteiro de cálculo do método de ajustamento referido no Capítulo 6.

10.2 - Modelo matemático proposto

O modelo matemático está fundamentado nos princípios básicos da Geometria Analítica Espacial, que é apresentada sob o aspecto vetorial, conforme BOULOS & CAMARGO (1987), e no ajustamento pelo método paramétrico, conforme (GEMAEL, 1994) e (SILVA, 1995).

10.2.1 - Determinação dos azimutes E_i -PO

Os elementos conhecidos para as determinações, pelo método proposto, são as coordenadas do centro ótico dos aparelhos e suas respectivas precisões. A determinação destas precisões encontram-se especificadas no Capítulo 7 do presente trabalho.

Os ângulos horizontais são tomados em relação ao PO e transformados em azimutes. Para este cálculo toma-se como referência o azimuth estação Az_{E_i-PO} , calculado através das coordenadas planas destes dois pontos, cujas coordenadas são pré-determinadas. Sendo:

$$Az_{E_i-PO} = \arctg \left| \frac{X_{PO} - X_{E_i}}{Y_{PO} - Y_{E_i}} \right| \quad (10.1)$$

Onde:

Az_{E_i-PO}	azimute entre a estação i e o PO;
X_{PO}, Y_{PO}	coordenadas planas do PO;
X_{E_i}, Y_{E_i}	coordenadas planas das estações;
E_i -PO	direção definida pela estação i e o PO;
i	número da estação.

O azimuth entre a estação (E_i) e o alvo (P), em função do ângulo horizontal lido e do azimuth E_i -PO, é definido por:

$$Az_{E_i-P} = Az_{E_i-PO} + Hz_i \quad (10.2)$$

Onde:

Az_{E_i-P}	azimute entre a estação (i) e o alvo (P);
Hz_i	ângulo horizontal lido entre as direções E_i -Po e E_i -P, no sentido horário.

Se:

$$Az_{E_i-P} > 2\pi \quad (10.3)$$

Então, subtrai-se do valor encontrado na eq. (10.2) o valor $(2.\pi)$.

10.2.2 - Determinação das coordenadas dos versores das linhas de visadas

Os versores das linhas de visadas, $\vec{r}_i(\alpha, b_i, c_i)$, em relação aos eixos coordenados (x, y, z), são definidos por:

$$\begin{aligned} a_i &= \text{sen}(\text{Zen})_i \cdot \cos(\text{Az})_i \\ b_i &= \text{sen}(\text{Zen})_i \cdot \text{sen}(\text{Az})_i \\ c_i &= \cos(\text{Zen})_i \end{aligned} \quad (10.4)$$

Onde:

a_i, b_i, c_i coordenadas dos versores;
 Zen_i ângulo zenital de P, lido na estação i;
 Az_i azimute da direção E_i-PO.

10.2.3 - Determinação das equações de erros

Das visadas executadas, em cada estação, são fornecidas 3 equações de erros, uma para cada coordenada de P(XP, YP, ZP). Isto é:

$$\begin{aligned} XP + V1_i &= XCO_i + a_i \cdot \lambda_i \\ YP + V2_i &= YCO_i + b_i \cdot \lambda_i \\ ZP + V3_i &= ZCO_i + c_i \cdot \lambda_i \end{aligned} \quad (10.5)$$

Onde:

XCO_i, YCO_i, ZCO_i - são as coordenadas do centro ótico dos aparelhos em cada estação;
i - estações envolvidas no processo, $i = 1, 2, \dots, n$;

Generalizando-se para as n estações teremos as seguintes equações de erros:

$$\begin{aligned}
 V_{1_i} &= XP - XCO_i - a_1 \cdot \lambda_1 \\
 V_{2_i} &= YP - YCO_i - b_1 \cdot \lambda_1 \\
 V_{3_i} &= ZP - ZCO_i - c_1 \cdot \lambda_1 \\
 V_{1_i} &= XP - XCO_2 - a_2 \cdot \lambda_2 \\
 V_{2_i} &= YP - YCO_2 - b_2 \cdot \lambda_2 \\
 V_{3_i} &= ZP - ZCO_2 - c_2 \cdot \lambda_2 \\
 &\dots \\
 V_{1_i} &= XP - XCO_n - a_n \cdot \lambda_n \\
 V_{2_i} &= YP - YCO_n - b_n \cdot \lambda_n \\
 V_{3_i} &= ZP - ZCO_n - c_n \cdot \lambda_n
 \end{aligned} \tag{10. 6}$$

onde:

XCO_i, YCO_i, ZCO_i - coordenadas do centro ótico dos aparelhos;

XP, YP, ZP - incógnitas, coordenadas do alvo;

$V_{1_i}, V_{2_i}, V_{3_i}$ - resíduos

λ_i - incógnitas, parâmetro das retas definidas pelas linhas de visada;

n - número de estações envolvidas no processo.

Portanto a função de $3n$ valores $(V_{1_i}, V_{2_i}, V_{3_i})$, com $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, com $(3 + n)$ variáveis: XP, YP, ZP e λ_i , com $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, descrita pelo conjunto de eq. (10.3) e que denominamos V , onde:

$(V : \mathfrak{R}^{3+n} \rightarrow \mathfrak{R}^{3n})$, isto é, $V = V(XP, YP, ZP, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ deve ser minimizada para que os resíduos (valores das funções $V_{1_i}, V_{2_i}, V_{3_i}$) tornem-se mínimos.

Para as n estações as incógnitas estão relacionadas por uma função F definida por::

$$F = F(XP, YP, ZP, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{10. 7}$$

10.2.4 – Resolução matricial:

Pela equação geral do método dos Mínimos Quadrados, têm-se:

$$V = AX - l \quad (10.8)$$

onde:

V - matriz dos resíduos;

A - matriz dos coeficientes das incógnitas;

X - matriz das incógnitas;

l - matriz das observações.

A matriz A é obtida derivando-se a função definida pela eq. (10.7), segundo o conjunto das eq. (10.6), em relação às incógnitas.

Sendo assim, têm-se:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n \end{vmatrix} \quad (10.9)$$

O vetor das incógnitas (X), é dada por:

$$X = \begin{vmatrix} XP \\ YP \\ ZP \\ \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \dots \\ \lambda_n \end{vmatrix} \quad (10.10)$$

O vetor dos resíduos (V), é dada por:

$$V = \begin{bmatrix} V_{1_1} \\ V_{2_1} \\ V_{3_1} \\ \dots \\ V_{1_n} \\ V_{2_n} \\ V_{3_n} \end{bmatrix} \quad (10. 11)$$

O vetor (I) é composto pelas coordenadas do centro ótico de todos os aparelhos envolvidos no processo, sendo estes valores considerados como observações, obtidas indiretamente, em função dos valores angulares determinados no levantamento de campo, assim:

$$I = \begin{bmatrix} XCO_1 \\ YCO_1 \\ ZCO_1 \\ \dots \\ XCO_n \\ YCO_n \\ ZCO_n \end{bmatrix} \quad (10. 12)$$

10.2.5 - Aplicação do modelo para observações mediatas utilizando o método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q).

Deve-se considerar que as observações, no caso, não são correlacionadas, pois observam-se ângulos horizontais e zenitais, independentemente, para cada alvo.

Para o caso de considerar-se os pesos das observações, a matriz dos pesos (P) será simétrica e os peso serão as precisões das determinações das coordenadas do centro ótico dos aparelhos, dispostas na diagonal principal da matriz.

Pelo método proposto a equação geral é dada por:

$$V = AX - I \quad (10. 13)$$

Sendo a matriz P simétrica e, ainda, partindo-se do princípio que o produto resultante da transposta da matriz dos vetores dos resíduos multiplicada pela matriz

dos pesos e pela própria matriz dos resíduos, deve ser mínimo, isto é,

$V^T PV = \text{mínimo}$, têm-se:

$$V^T PV = (X^T A^T - I^T) \cdot P \cdot (AX - I) \quad (10.14)$$

Efetuada-se a multiplicação indicada, têm-se:

$$V^T PV = X^T \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot X - X^T \cdot A^T \cdot P \cdot I - I^T \cdot P \cdot AX + I^T \cdot P \cdot I \quad (10.15)$$

Sendo P uma matriz simétrica, têm-se:

$$X^T \cdot A^T \cdot P \cdot I = I^T \cdot P \cdot AX \quad (10.16)$$

Então:

$$V^T PV = X^T \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot X - 2 \cdot I^T \cdot P \cdot AX + I^T \cdot P \cdot I \quad (10.17)$$

Derivando-se parcialmente em relação a X, têm-se:

$$\frac{\partial V^T PV}{\partial X} = 2 \cdot X^T \cdot A^T \cdot P \cdot A - 2 \cdot I^T \cdot P \cdot A \quad (10.18)$$

Igualando-se a zero:

$$A^T P \cdot A \cdot X - A^T \cdot P \cdot I = 0 \quad (10.19)$$

Definindo:

$$N = A^T P \cdot A \quad \text{e} \quad n = A^T P \cdot I \quad (10.20)$$

vem:

$$NX = n \quad (10.21)$$

daí,

$$X = N^{-1} \cdot n \quad (10.22)$$

Obtendo-se X, pode-se calcular V:

$$V = AX - I \quad (10.23)$$

Retornado à eq. (10.19):

$$A^T P \cdot A \cdot X - A^T \cdot P \cdot I = 0 \quad (10.24)$$

Colocando-se em evidência o fator comum, têm-se:

$$A^T P (A \cdot X - I) = 0 \quad (10.25)$$

mas, sabe-se que::

$$A.X - I = V \quad (10.26)$$

Então:

$$A^T P V = 0 \quad (10.27)$$

A eq. (10.27) é o primeiro controle do M.M.Q. Durante a aplicação do método este controle sempre deve ser executado, para que se tenha confiança nos resultados finais.

Retornando-se à eq. (10.17), têm-se:

$$V^T P V = X^T . A^T . P . A . X - 2 . I^T . P . A X + I^T . P . I \quad (10.28)$$

Como já foi definido:

$$A^T P . A = N \quad \text{e} \quad L^T . P . A = n^T \quad (10.29)$$

Deste modo, têm-se:

$$V^T P V = X^T . N . X - 2 . I^T . P . A X + I^T . P . I \quad (10.30)$$

Fazendo-se:

$$- 2 . I^T . P . A X = - I^T . P . A . X - I^T . P . A . X \quad (10.31)$$

e, considerando-se:

$$I^T . P . A = n^T \quad (10.32)$$

Então, substituindo-se a eq. (10.32) em (10.31), vem:

$$- 2 . I^T . P . A X = - n^T . X - I^T . P . A . X \quad (10.33)$$

ou, colocando-se o sinal em evidência, têm-se:

$$- 2 . I^T . P . A X = - (n^T . X + I^T . P . A . X) \quad (10.34)$$

mas, sabendo-se que:

$$n^T . X = X^T . n \quad (10.35)$$

Então:

$$- 2 . I^T . P . A X = - (X^T . n + I^T . P . A . X) \quad (10.36)$$

Substituindo-se a eq. (10.36) na eq. (10.30), têm-se:

$$V^T P V = X^T . N . X - X^T . n + I^T . P . A X + I^T . P . I \quad (10.37)$$

ou, ainda:

$$V^T P V = X^T (N \cdot X - n) - l^T \cdot P \cdot (AX - l) \quad (10.38)$$

Mas, sabe-se que:

$$NX - n = 0 \quad \text{e} \quad AX - l = V \quad (10.39)$$

Então:

$$V^T P V = -l^T \cdot P \cdot V \quad (10.40)$$

A eq. (10.40) é o segundo controle do M.M.Q. Sempre deve ser executado para que se tenha confiança nos resultados finais.

E, finalmente, sabe-se que:

$$s_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n - u} \quad (10.41)$$

Onde:

- s_0^2 - variância a posteriori ou precisão das determinações de peso unitário;
- $V^T \cdot P \cdot V$ - somatório dos quadrados dos resíduos;
- n - número de equações de erros;
- u - número de incógnitas.

10.2.6 - Cálculo dos erros e das matrizes variância-covariância (MVC)

Além do cálculo das incógnitas (matriz X), pode-se ainda explorar os resultados de maneira a obter-se todas as informações estatísticas do modelo, essencialmente as contidas nas matrizes de variância-covariância das incógnitas, das observações compensadas e dos erros residuais.

Os cálculos são feitos utilizando-se a lei de propagação dos erros médios aplicada a um vetor de função f , composto simultaneamente dos vetores:

- l - vetor das observações;
- X - vetor das incógnitas;
- $\bar{l}$ - vetor das observações compensadas;
- V - vetor dos erros residuais.

Simplificadamente, as matrizes variância-covariância destes elementos, são:

- Q_{II} - matriz variância-covariância das observações, igual a P^{-1} ;
 Q_{xx} - matriz variância-covariância das incógnitas, igual a N^{-1} ;
 $Q_{\bar{II}}$ - matriz variância-covariância observações compensadas;
 Q_{vv} - matriz dos resíduos, igual a $P^{-1} - \bar{Q}$, sendo $\bar{Q} = A.N^{-1}.A^T$.

10.3 - Validação do modelo matemático

O modelo matemático proposto foi validado com os dados de campo constantes do Anexo A, com o emprego da planilha eletrônica EXCEL. O desenvolvimento do processo de cálculo e os resultados estão apresentados no Apêndice VII.

As coordenadas do centro ótico dos aparelhos foram determinadas conforme a metodologia proposta no capítulo 7 e o programa computacional desenvolvido está relacionado no Apêndice I.

10.3.1 - Determinação e análise das coordenadas tridimensionais calculadas

O modelo matemático foi implementado na planilha eletrônica EXCEL, onde foram calculadas as coordenadas das extremidades 1 e 2 da mira horizontal, constantes do Apêndice VII. Os valores destas coordenadas foram obtidos com quatro e seis casas decimais, para permitir a comparação com os demais métodos, quanto ao aspecto precisão. As coordenadas tridimensionais das extremidades da mira horizontal, com 6 casas decimais, são apresentadas na Tabela 10.1.

TABELA 10. 1 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 6 casas decimais

Extremidades	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	103,532795	95,236039	102,152911
2	102,303522	93,658496	102,158003

Os arredondamentos foram executados, também, com 4 casas decimais. Este nível de significância permite uma nova avaliação, quanto à precisão do método, em função dos arredondamentos executados. A Tabela 10.2, apresenta as coordenadas dos alvos com este nível de significância.

TABELA 10. 2 - Coordenadas das extremidades da mira horizontal (m), com o nível de significância de 4 casas decimais

Extremidades	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	103,5328	95,2360	102,1529
2	102,3035	93,6585	102,1580

As precisões das coordenadas do alvo P são $s_{\overline{XP}}$, $s_{\overline{YP}}$, $s_{\overline{ZP}}$, calculadas, de acordo com o método, pela diagonal da matriz de variância-covariâncias (MVC) das incógnitas ajustadas, que é a matriz N^{-1} do processo. Os resultados estão na Tabela 10.3.

TABELA 10. 3 - Precisões ajustadas das coordenadas das extremidades 1 e 2

Extremidades	$S_{\overline{XP}}$ (mm)	$S_{\overline{YP}}$ (mm)	$S_{\overline{ZP}}$ (mm)
1	0,29	0,16	0,06
2	0,29	0,23	0,07

A precisão do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2, em milímetros, é calculada em função da precisão com que as respectivas coordenadas das extremidades da mira foram determinadas. A precisão do posicionamento espacial é determinado de acordo com:

$$s_P = \sqrt{(s_{\overline{XP}})^2 + (s_{\overline{YP}})^2 + (s_{\overline{ZP}})^2} \quad (10. 42)$$

e constante da Tabela 10.4.

TABELA 10. 4 - Precisões do posicionamento espacial das extremidades 1 e 2

Extremidades	s_P (mm)
1	0,34
2	0,38

10.4 - Considerações finais

Para os cálculos das coordenadas dos alvos adotou-se para os arredondamentos, dois níveis de significância, com 4 e 6 casas decimais. Desse modo, calculou-se o comprimento da mira horizontal, através das coordenadas determinadas pelo método proposto. Os valores encontrados são comparados com o valor padronizado, que é de 2000mm , por injunção, considerado exato.

Observa-se que as precisões, calculadas pelo método de minimização e ajuste e a precisão do posicionamento espacial dos pontos, pelos critérios propostos, são menores do que $0,5\text{mm}$, conforme tabelas (10.3), e (10.4). Pode-se assegurar que o método proposto, dentro das restrições técnicas do aparelho topográfico utilizado nos trabalhos de campo, apresenta resultados compatíveis com a precisão nominal do referido aparelho que é de 2mm . Os valores para as precisões das coordenadas dos alvos, determinados pelo método proposto, permitem assegurar que esse método pode ser considerado preciso e exato, relativamente às precisões esperadas, que eram da ordem de 2 milímetros.

Comparando-se os valores obtidos para o comprimento da mira horizontal, calculados com os dois níveis de significância, conforme Tabela (10.5), avalia-se que o método proposto confirma o nível de precisão esperado.

TABELA 10.5 - Valores padrão e calculado para o comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância

Parâmetros avaliados	Níveis de Significância	
	4 casas decimais	6 casas decimais
Valor padronizado (mm)	2000,0000	2000,000000
Valor calculado (mm)	1999,9277	1999,927686
Diferença ¹ (mm)	0,07	0,07

1. Diferença entre o valor padronizado e o valor calculado em função das coordenadas obtidas através do método proposto.

Os índices de variação, em relação ao comprimento padronizado, são da ordem de $1/28.570$, para ambos os níveis propostos para os arredondamentos nos cálculos das coordenadas espaciais dos pontos. Sendo assim, a precisão obtida para o comprimento da mira horizontal, calculado em função das coordenadas obtidas com o

presente método é da ordem de décimos de milímetro. Estes resultados nos permitem afirmar que o método proposto apresenta um nível de precisão aceitável para os trabalhos de engenharia em geral, principalmente para o controle de deformações em provas de cargas em estruturas.

CAPÍTULO 11

MÉTODOS DE CÁLCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS: ANÁLISE COMPARATIVA

11.1 - Considerações gerais

Nos Capítulos 8, 9 e 10 os cálculos das coordenadas tridimensionais foram executados com todas as casas decimais disponíveis no computador e os arredondamentos feitos, para 2 níveis de significância propostos, na 4ª e na 6ª casas decimais. Para os métodos correntes foi usado o mesmo critério, conforme Apêndices III e IV.

Com esses níveis de significância calculou-se o comprimento da mira, em função das coordenadas obtidas em cada método. Intuitivamente esperava-se que os valores encontrados para o comprimento da mira com 6 casas decimais fossem mais próximos do valor padrão. Isto porque, intuitivamente pensa-se que, quanto maior o número de casas decimais no arredondamento dos cálculos, tanto maior a precisão obtida para a grandeza calculada. No entanto, isso não acontece. Pode ser constatado na Tabela 8.5, onde as variações entre os comprimentos calculados e padronizados apresentam valores de $-0,02mm$ e $-0,04mm$, respectivamente, para 4 e 6 casas decimais.

Recorrendo-se aos princípios do cálculo numérico, verifica-se que o arredondamento é função do número de casas decimais selecionadas, RUGGIERO & LOPES (1988) e HUMES et al. (1984). Por esse motivo os valores calculados para o

comprimento da mira podem apresentar essas variações, já mostradas no Capítulo 8. No entanto, conforme RUGGIERO & LOPES (1988), dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos nos cálculos de determinada grandeza física, deve ser empregado o erro relativo para descrever a precisão desses cálculos e não o erro absoluto, que muitas vezes é impossível determinar.

Para efeito de padronização dos critérios adotados nas análises apresentadas, optou-se pelo arredondamento na 3ª casa decimal para as coordenadas e na 2ª casa decimal para as precisões das determinações e dos posicionamentos relativos dos pontos e, ainda, na 1ª casa decimal para a precisão com que os comprimentos da mira foram calculados. Este critério foi adotado porque a precisão do aparelho utilizado na determinação das coordenadas do centro ótico é de $2mm \pm 2ppm$ para o cálculo das distâncias.

Nos casos estudados, considerou-se o valor padrão do comprimento da mira horizontal, que é de $2000mm$, como um valor exato. E, ainda, o valor deste mesmo comprimento, obtido em função das coordenadas de cada uma de suas extremidades, como um valor aproximado. Para todos os métodos foram feitas as mesmas considerações.

Por este critério, definiu-se como erro absoluto (RUGGIERO & LOPES, 1988) a diferença entre o valor exato e o valor aproximado, obtido pela determinação, segundo a metodologia desenvolvida em cada método. Seguindo a orientação metodológica proposta pelos referidos autores, optou-se pelo emprego do erro relativo para as análises comparativas entre os diferentes métodos de cálculo, propostos ou correntes. Definido-se como erro relativo, no caso, ao quociente entre a diferença entre do valor padrão ($2000mm$) menos o valor aproximado, que é o valor obtido em cada método, e o valor padrão. Sendo:

$$ER = \frac{V_p - V_{ap}}{V_p} \quad (12.1)$$

Onde:

ER - erro relativo da grandeza medida;

V_p - valor padrão, $2000mm$ para a mira horizontal;

V_{ap} - valor aproximado, obtido em cada método, em função das coordenadas das extremidades da mira.

No presente trabalho, para a avaliação do desempenho de cada método, foi adotado o erro relativo (ER) para o comprimento da mira horizontal, obtido através das coordenadas de suas respectivas extremidades, que foram levantadas por todos os métodos propostos e, também, pelos métodos de uso corrente.

Foram desenvolvidos programas computacionais para o cálculo das coordenadas pelos métodos de uso corrente. Só assim foram possíveis as comparações.

11.2 - Considerações sobre as coordenadas obtidas em cada método

As coordenadas tridimensionais das extremidades da mira horizontal, obtidas em cada método de determinação, são apresentadas na Tabela 11.1.

TABELA 11.1 Coordenadas tridimensionais das extremidades 1 e 2 da mira, obtidas pelos métodos de determinações estudados

Métodos	Coordenadas tridimensionais das extremidades da mira horizontal					
	Extremidade 1			Extremidade 2		
	X1 (m)	Y1 (m)	Z1 (m)	X2 (m)	Y2 (m)	Z2 (m)
1. Clássico	103,531	95,240	102,153	102,303	93,661	102,158
2. Interseção	103,531	95,240	102,153	102,303	93,661	102,158
3. Top. Trig.	103,531	95,240	102,153	102,303	93,661	102,158
4. Dist. Mín.	103,532	95,238	102,153	102,303	93,660	102,158
5. M.Aj.	103,533	95,236	102,153	102,304	93,658	102,158

Os arredondamentos foram realizados na 3ª casa decimal, porque a precisão do aparelho utilizado no cálculo das distâncias, para as determinações das coordenadas do cento óptico de cada aparelho envolvido no processo é da ordem de $2mm \pm 2ppm$. Para as coordenadas calculadas em todos os métodos, as comparações foram feitas dentro do padrão milimétrico. Considerando-se que as diferenças encontradas nas determinações das coordenadas, através dos diversos métodos apresentados nesse trabalho, são mínimas, torna-se dispensável a utilização de testes estatísticos para a sua avaliação.

Através dos resultados apresentados na Tabela 11.1 pode-se verificar que,

mesmo para o observador que não pertença à área da Mensuração, os métodos estudados conduzem a resultados da mesma ordem de grandeza.

11.3 - Considerações sobre as precisões das coordenadas obtidas em cada método

Conforme a metodologia de cada método, foram calculadas as precisões com que as coordenadas das extremidades 1 e 2 da mira foram determinadas. A Tabela 11.2 mostra os resultados obtidos, especificando-se o método, a extremidade e os valores para as coordenadas X, Y e Z dos referidos pontos.

TABELA 11.2 - Precisões das coordenadas das extremidades 1 e 2 da mira horizontal

Precisões das determinações das coordenadas das extremidades da mira horizontal						
Métodos	Extremidade 1			Extremidade 2		
	X1 (m)	Y1 (m)	Z1 (m)	X2 (m)	Y2 (m)	Z2 (m)
1.Clássico	1,90	1,47	0,17	1,44	1,26	0,21
2.Interseção	1,91	1,47	0,17	1,45	1,28	0,21
3.Top. Trig.	2,69	2,10	0,41	2,01	1,77	0,48
4.Dist. Min.	0,39	0,59	0,43	0,38	0,51	0,55
5.M. Aj.	0,29	0,16	0,06	0,29	0,23	0,07

Para os métodos 1, 2, e 3 da Tabela 11.2, as precisões calculadas foram as precisões relativas, dadas em função das médias das determinações, conforme metodologia descrita em cada método. Esta precisão aparente é o erro médio quadrático ou desvio padrão da média, empregado para a estimação da precisão em processos de medições em Mensuração.

No método 4 da Tabela 11.2, a precisão foi calculada, igualmente, em função da média das determinações. No entanto, deve-se considerar que esse método minimiza a função objetivo, conforme proposta apresentada. Desse modo, as precisões obtidas no método 4 devem ter mais confiabilidade do que aquelas apresentadas nos métodos 1, 2 e 3 já analisados.

No método 5, as precisões são calculadas pela minimização e ajustamento, simultaneamente, de todos os parâmetros envolvidos, através dos mínimos quadrados. Nesse caso, refletem a precisão e a exatidão das coordenadas. Como esse método

ajusta os valores estimados para essas precisões, justifica-se que tais valores sejam menores do que aqueles obtidos pelos demais métodos, para as coordenadas dos mesmos pontos. Esse método proposto, além de minimizar ainda ajusta todas as estimativas.

Em função das precisões das determinações, foram calculados os posicionamentos relativos de cada extremidade da mira. A amplitude de variação, diferença entre os valores máximo e mínimo, comparando-se todos os métodos, foi de $3,09\text{mm}$ na extremidade 1 da mira e de $2,34\text{mm}$ na extremidade 2. Isso comprova, mais uma vez, que os métodos apresentam características semelhantes quanto ao aspecto precisão, ficando na ordem do milímetro.

TABELA 11.3 - Posicionamento relativo das extremidades 1 e 2 da mira horizontal

Métodos	Posicionamento relativo das extremidades 1 e 2 da mira horizontal	
	Extremidade 1 (mm)	Extremidade 2 (mm)
1. Clássico	2,41	1,92
2. Interseção	2,42	1,95
3. Top. Trig.	3,43	2,72
4. Dist. Min.	0,83	0,84
5. M. Aj.	0,34	0,38

Com as coordenadas determinadas em cada método foram calculados os comprimentos da mira horizontal, cujo padrão é de 2000mm . Os métodos 1, 2 e 3 da Tabela 11.4 apresentaram os mesmos valores, tanto para os comprimentos, quanto para as precisões das determinações dos comprimentos, calculadas em função de suas respectivas precisões aparentes.

TABELA 11.4 - Comprimentos da mira horizontal, calculados pelos diferentes métodos e suas precisões, calculadas através da propagação das precisões aparentes de cada coordenada

Valores dos comprimentos da mira, calculados através das coordenadas dos diferentes métodos		
Métodos	Valores calculados (mm)	Precisões das determinações
1. Clássico	2000,31	$\pm 4,2\text{ mm}$
2. Interseção	2000,31	$\pm 4,2\text{ mm}$
3. Topográfico-Trigonométrico	2000,31	$\pm 4,2\text{ mm}$
4. Distâncias. Mínimas	2000,14	$\pm 1,4\text{ mm}$
5. M. Aj.	2000,14	$\pm 0,7\text{ mm}$

As precisões das determinações foram calculadas de acordo com a lei de propagação de erros, constante do item 6.3 do Capítulo 6. Isso prova que os métodos têm o mesmo nível de precisão, embora as precisões aparentes tenham valores

diferentes.

As precisões aparentes têm valores diferentes, porque os valores individuais que entram no cálculo, para a determinação da média, em cada método, são diferentes. No entanto, as médias das coordenadas são iguais, independente da metodologia de cálculo desenvolvida, comprovando mais uma vez que a média é o melhor valor para estas coordenadas.

CAPÍTULO 12

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

12.1 - Conclusões

No presente trabalho, a análise comparativa dos métodos estudados, tanto os métodos propostos quanto os métodos de uso corrente, permitem as seguintes conclusões:

1. A concepção do ponto de orientação (PO) possibilita a adaptação dos métodos Clássico e Interseção com superdeterminação de medidas à metodologia proposta de visada em um ponto comum, evitando-se as visadas recíprocas entre aparelhos e eliminando-se a condição de obrigatoriedade de intervisibilidade entre eles;
2. A concepção do ponto de orientação (PO) elimina, também, a utilização de réguas graduadas para a determinação do fator de escala e permite que todas as determinações sejam feitas no mesmo sistema referencial, sem a necessidade de mudanças de sistemas;
3. A concepção do ponto de orientação (PO) ainda amplia o campo de ação de todos os métodos, tanto propostos quanto de uso corrente, pois com esse dispositivo é dispensada a obrigatoriedade de intervisibilidade entre os aparelhos, quando estacionados para as determinações;

4. O método Clássico, também denominado visadas exteriores ou interseção a vante e o método de Interseção com superdeterminação de medidas apresentam as mesmas características quanto à precisão, embora a metodologia de cálculo do primeiro método seja desenvolvida em função das tangentes dos azimutes das linhas de visadas entre os aparelhos e os alvos e a do segundo método desenvolvida em função dos cossenos diretores dessas mesmas linhas de visadas. A metodologia do cálculo só influi nos valores das precisões relativas das determinações e não nos valores das coordenadas assim determinadas. Essas precisões, em ambos os casos, são calculadas em função das médias das determinações;

5. O método proposto, denominado Topográfico-Trigonométrico, foi inicialmente concebido para fornecer valores aproximados (X_0 , Y_0 , Z_0) para as coordenadas espaciais de alvos fixos. No entanto, os resultados mostram que ele apresenta as mesmas características dos métodos Clássico e Interseção com superdeterminação de medidas, relativamente ao fator precisão. As coordenadas calculadas por esses 3 métodos, ao nível de truncamento e arredondamento adotados (3 casas decimais), apresentam valores idênticos;

6. O método proposto, denominado "das distâncias mínimas" apresenta valores menores para as precisões aparentes, porque as coordenadas dos pontos são calculadas a partir da otimização de um função, no caso, minimizando-se um somatório de distâncias espaciais. As determinações dessas distâncias, tendo valores minimizados, proporcionam às precisões, também, valores mínimos. Essas precisões são calculadas em função daquelas coordenadas. Este método, pelo fato da minimização da função objetivo, apresenta valores mais precisos que os métodos analisados nos itens 4 e 5 da presente conclusão.

7. O método proposto, denominado "método de minimização e ajuste" é o mais preciso de todos, isto porque fornece todas as estimativas ajustadas pelo processo de ajustamento pelos Mínimos Quadrados, já referido. É o método mais trabalhoso,

requer um bom conhecimento sobre ajustamento de observações, porém é bastante preciso;

8. Os métodos de minimização das distâncias e método de minimização e ajuste, aqui propostos, apresentarão resultados idênticos, somente quando no segundo método não é considerada a matriz dos pesos (P), isto é, todos os pesos sejam unitários.

No método de minimização e ajuste a matriz P representa as precisões das determinações das coordenadas do centro ótico dos aparelhos. Desconsiderando-se estas precisões, ou seja, considerando-as unitária, os resultados obtidos são numericamente iguais aos resultados obtidos no método das distâncias mínimas;

9. Os dois métodos propostos e os métodos de uso corrente, empregados para a determinação de coordenadas tridimensionais para controle de obras de engenharia, tratados no presente trabalho, podem ser empregados para esta finalidade. Isto porque, as precisões obtidas nas verificações práticas de campo, em todos os métodos, analisados individualmente, indicaram que os resultados obtidos apresentam valores de ordem milimétrica.

12.2 - Recomendações

Quanto ao emprego dos métodos estudados são feitas as seguintes recomendações:

1. Os métodos Clássico, Interseção espacial com superdeterminação de medidas e Topográfico-Trigonométrico, devem ser empregados, somente, quando a distribuição das estações for aproximadamente linear. Isto deverá acontecer para que os ângulos da base de cada triângulo representado por dois aparelhos e o alvo não apresentem ângulos nem muito agudos, nem muito obtusos. Esta situação deve ser evitada porque estes métodos utilizam a lei dos senos para o cálculo das coordenadas dos alvos e na aplicação da lei dos senos, ângulos muito agudos ou muito obtusos provocam inconsistências nos cálculos;

2. Nos métodos Clássico e Interseção espacial com superdeterminação de medidas, deve-se evitar que as distâncias entre estações sejam muito desproporcionais à distância média entre a linha dos alvos e a linha determinada pela duas estações extremas. Esse detalhe evita que os ângulos dos vértices dos triângulos, junto aos alvos, tenham valores reduzidos, fator que proporciona imprecisões nos cálculos. Com essa precaução evita-se, também que os ângulos das bases, em cada combinação, não apresentem valores próximos de 90° e 270° , onde os valores das tangentes se tornem indefinidos, isto é, tendam ao infinito;

3. No método da minimização das distâncias as estações podem ter qualquer distribuição espacial, no entanto, todas devem visualizar o ponto de orientação (PO). Este método pode ser empregado quando deseja-se obter coordenadas ajustadas, porém, não interessando os valores de outras estimativas ajustadas. É um método em que, sempre, o número de equações será igual ao número de incógnitas a determinar. Não oferece perigo algum de indeterminação do sistema de equações, porque o feixe de linhas de visadas é sempre convergente na direção do alvo. A indeterminação só ocorrerá, matematicamente, se e somente se, pelo menos duas retas sejam paralelas ou coincidentes. Esse fato jamais ocorrerá no processo.

4. O Método dos Mínimos Quadrados deve seguir as mesmas recomendações do item 4, no entanto, para esse método, há sempre um maior número de equações do que de incógnitas a determinar-se, sendo possível o ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados. Por esse fato, todas as demais estimativas são ajustadas, e têm suas respectivas precisões definidas no processo de cálculo.

Quanto às sugestões para a continuidade dos trabalhos:

1. Constituir-se uma equipe multidisciplinar, composta por matemáticos, programadores e interessados da área da Mensuração, para a elaboração de um aplicativo, que possa ser empregado, via computador pessoal, por todas as áreas de

abrangência.

2. Divulgar os resultados obtidos em revistas indexadas, nacionais ou estrangeiras, para que as áreas relacionadas à Mensuração possam tomar conhecimento da aplicabilidade e novas propostas de instrumentação dos métodos propostos para a determinação de coordenadas tridimensionais para o controle de obras de engenharia.

ANEXO A

LEVANTAMENTO DOS DADOS DE CAMPO

1 - Generalidades

Para a validação dos modelos matemáticos, foi executado um levantamento de campo, com a estação total TC1700, cujas precisões linear e angular são de 2mm + 2ppm e 1,5", respectivamente. A temperatura ambiente era de 28 °C e a pressão de 923,7 mb. Foram utilizadas cinco estações para a determinação das coordenadas dos alvos. Por injunção, as coordenadas do Ponto de Orientação foram consideradas isentas de erros e os valores arbitrados: $X = 100,000$; $Y = 100,000$ e $Z = 100,000$.

2 - Disposições gerais para a determinação das coordenadas tridimensionais das estações e do centro ótico dos aparelhos

2.1 - Determinação do sistema referencial

O sistema referencial, proposto no Capítulo 7, foi definido conforme representação constante da Figura A.1.

FIGURA A.1 - Configuração do sistema referencial adotado

2.2 – Centragem forçada para a determinação das coordenadas tridimensionais das estações

O processo de centragem forçada foi executado com o auxílio de um tripé metálico e base nivelante, contendo prumo ótico e dispositivo para a adaptação do prisma, conforme apresentado na Figura A.2.

FIGURA A.2 - Dispositivo para o processo de centragem forçada

2.3 – Distribuição genérica das estações no processo de irradiação

Os elementos necessários para a execução dos cálculos das coordenadas tridimensionais das estações foram dispostos conforme representação esquemática apresentado na Figura A.3.

FIGURA A.3 – Distribuição genérica das estações no processo de irradiação

Onde:

- HI - altura do instrumento estacionado no PO;
- HS - altura do prisma, ou alvo com centragem forçada.
- x, y, z - eixos coordenados;
- Hz - ângulo horizontal, igual ao azimute da direção PO estação i;
- Zen - ângulo zenital medido do PO, referente a cada estação;
- D_{inc} - distância inclinada entre o PO e cada estação.

2.4 - Dados de campo

Os dados do levantamento de campo, para o cálculo das coordenadas tridimensionais das estações e do centro ótico dos aparelhos, estão discriminados nas

Tabelas A.1 e A.2.

Os dados da Tabela A.1 foram levantados quando da implantação definitiva dos marcos para a materialização das estações fixas.

TABELA A.1 - Dados de campo para a determinação das coordenadas das estações e do centro ótico dos aparelhos

Estação Nº	Dados de Campo			
	Ângulo Hz GMS	Ângulo Zen GMS	Dist. Inc. m	Dist. Hz m
1	336° 34' 35"	94° 01' 29"	13,284	13,251
2	319° 57' 30"	93° 36' 14"	14,056	14,028
3	306° 40' 27"	92° 37' 03"	14,276	14,261
4	290° 29' 42"	91° 42' 14"	14,500	14,494
5	267° 23' 19"	92° 11' 04"	14,372	14,362

Os dados da tabela A.2 foram levantados para as determinações das coordenadas dos alvos, com o emprego do dispositivo de centragem forçada, porém as alturas do prisma para o levantamento das coordenadas das estações e do centro ótico para a determinação das coordenadas dos alvos, não são iguais. Deste modo, as distâncias inclinadas entre o PO e o centro do prisma, no primeiro caso, não são as mesmas distâncias entre o PO e o centro ótico dos aparelhos em cada estação.

TABELA A.2 - Leituras da mira (mm) para a determinação da coordenada altimétrica do centro ótico dos aparelhos

Estações	Leituras da Mira	
	Leituras em (mm)	
1	0705	
2	0717	
3	0976	
4	1139	
5	1278	

As leituras da mira foram executadas conforme metodologia proposta no Capítulo 7.

3 - Dados de campo para a determinação das coordenadas tridimensionais das extremidades da mira horizontal

No levantamento de campo foi utilizada uma mira horizontal com 2000mm de comprimento, conforme dispositivo constante da Figura A.4.

FIGURA A.4 - Mira horizontal

Em cada uma das extremidades desta mira horizontal há um alvo móvel, acoplado a ela, para permitir a execução das leituras angulares. Estes alvos foram denominados 1, para a extremidade esquerda da mira e 2 para a extremidade direita, tomando-se como referência a estação.

A Tabela A.3 apresenta os dados de campo, referentes às extremidades 1 e 2 da mira, tomadas em relação ao ponto de orientação, para ângulos horizontais (Hz) e em relação ao Zênite, para ângulos zenitais (Zen). Os azimutes (Az), foram calculados de acordo com a metodologia proposta no Capítulo 7.

TABELA A.3 - Levantamento angular para as extremidades 1 e 2 da mira

Ângulos horizontais lidos, azimutes calculados e ângulos zenitais lidos				
Estações	Extremidades	Ângulos Hz	Azimutes Az	Ângulos Zen
1	1	355°57'10"	152°31'44"	85°39'26"
	2	001°10'13"	157°44'47"	85°50'26"
2	1	001°02'07"	140°59'36"	85°52'54"
	2	006°29'17"	146°26'46"	85°58'32"
3	1	004°53'53"	131°34'20"	86°37'54"
	2	010°33'35"	137°14'02"	86°39'18"
4	1	009°23'50"	119°53'31"	87°03'49"
	2	015°12'35"	125°42'16"	87°01'20"
5	1	015°33'25"	102°56'44"	87°16'21"
	2	021°28'16"	108°51'35"	87°08'26"

Para as medidas angulares, constantes das Tabelas A.1 e A.3, foram tomados os valores médios de 3 leituras consecutivas. As séries com leituras direta e inversa, empregando-se aparelhos eletrônicos de alta precisão, segundo resultados obtidos em trabalhos práticos, podem ser substituídas pelas médias de 3 leituras consecutivas, sem alterações nas precisões.

As leituras da mira, constantes da Tabela A.2, foram determinadas pela média de 3 leituras consecutivas. Para o cálculo da precisão da coordenada Z do centro ótico dos aparelhos deve ser considerado um erro de $0,3mm$ por metro de altura do centro ótico, tomado em relação à cota do ponto estação. Este valor de $0,3mm$ é a média entre o valor de $0,5mm$, obtido com o prumo ótico e $0,1mm$, obtido como o processo de centragem forçada. Este procedimento está de acordo com o item 3.4.1, erros de centragem, preconizado no Capítulo 3. Os erros ocorridos durante as leituras da mira ficam implícitos dentro desse valor de $0,3mm$.

CAPÍTULO 13

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AITKEN, A.C. (1955) On least squares and linear combination of observations.
Proc. Roy.Soc.Edin. v.55, p.42-48.

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H. (1980)
Álgebra linear. 3 ed. São Paulo, Harper & Row do Brasil.

BORGES, A.C. (1977) *Topografia aplicada à engenharia civil*. São Paulo,
Edgard Blücher, v. 1.

BORGES, A.C. (1977) *Topografia aplicada à engenharia civil*. São Paulo,
Edgard Blücher, v. 2.

BOULUS, P.; CAMARGO, I. (1987) *Geometria Analítica - Um tratamento
vetorial*. 2.ed. São Paulo, Editora McGraw-Hill Ltda.

CASPARY, W.F. (1987) *Concepts of network and deformation analysis*. South
Wales, Australia, University of New South Wales, (Monograph 11)

CAROLI, A. de; CALLIOLI, C. A.; FEITOSA, M. O. (1982) *Matrizes - Vetores -
Geometria Analítica*. 14. ed. São Paulo, Nobel.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.(1996). *METODOLOGIA CIENTÍFICA*. São
Paulo, MAKRON Books, 1996.

- DAVID, F.N. (1951) *Probability theory for statistical methods*. Londres, Cambridge Press.
- DORN, W.S.; McCracken, D.D. (1981) *Cálculo numérico com estudos de casos em Fortran IV*. São Paulo, Campus, 568p.
- ECO, U. (1989). *Como se faz uma tese*. 2.ed. São Paulo, Perspectiva.
- FEITOSA, M. O.(1977) *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*. São Paulo, Atlas.
- GEMAEL, C. *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas*. Curitiba, Ed. UFPR, 1994, 319p.
- GRIPP JUNIOR, J. & SILVA, A. S.(1995) *Ajustamento de observações*. Viçosa, UFV, 80p.
- HOAR, G.J. (1974) *The analysis, precision and optimization of control surveys*. New South Wales, Australia, University of New South Wales, 220p.
- HUMES, A.F.P.C.; MELO, I.S.H.; YOSHIDA, L.K.; MARTINS, W.T. (1984) *Noções de cálculo numérico*. São Paulo, McGraw-Hill, 201p.
- IBIAPINA, D.S. (1993) *Método de Cálculo das Coordenadas Espaciais de um ponto com superdeterminação de medidas*. São Carlos - SP. 72p. Dissertação (Mestrado em Transportes) - Curso de Pós Graduação em Transportes, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- INTERNATIONAL MEASUREMENT CONFEDERATION TECHNICAL COMMITTEE ON METROLOGY. (1984) *Ensuring measurement accuracy*. Seibersdorf, Austrian, Austrian Research Center, 650p.
- KOLMOGOROV, A.N.K. (1946) Obosnovaniou metoda naimenchikh kvadratov. *Ouspekhi matem. naouk* v. 1, n.1, p.57-70.
- LEICA. (1996) AXYZ - Nuevo concepto de software para la medición dimensional. *Reporter - Revista de Geodesia, topografía y fotogrametría*, n.34.

- LEICA AG. (1996) *APS for Windows - Automatic Polar System*. Heerbrugg, Switzerland Leica.
- LEICA AG. (1993) *ECDS 3 - Program Reference - Version 3.20*. Heerbrugg, Switzerland: Leica, 262p.
- LEICA AG. (1993) *Smart 310 Measuring Movements*. Heerbrugg, Switzerland: Leica.
- LEICA AG. (1993) *SMART 310 3D laser tracker*. Heerbrugg, Switzerland: Leica.
- LINNIK, Y.V. (1963) *Méthode des moindres carrés*. Paris, Dunod, 347p.
- LIPSCHUTZ, S. (1972) *Álgebra linear*. 2 ed. São Paulo, McGraw-Hill.
- LUENBERGER, D.G. (1984) *Linear and Nonlinear Programming*. New York, Addison-Wesley, 491p.
- MACHADO, J.A.M. (1996) Controle de deslocamentos através de processos topográficos - Tecnologias recentes. *Cartografia e Cadastro*, n.5, p.17-30.
- MOLK, E. 3-D (1990) Intersection applied to verticality checking. *Survey Review*, Bristol, v.30, n.237, p.311-319.
- NEYMAN, J. (1944) Statisticheskaya otsenka kak problema klassicheskoi teorii veroiatnostei. *Ouspexhi matem. naouk*, n.10, p.207-229.
- PAKKARI, J. (1994) Evaluating the performance of optical 3-D measurement systems. *Surveying Science in Finland*, Helsinki, v.12, n.1, p.3-13.
- RAO, C.R. (1946) On the linear combination of observations and the general theory of least squares. *Sankhya*, v.7, n.3, p.237-256.
- RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. (1988) *Cálculo numérico - aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo, McGraw-Hill, 295p.

- SANTALA, J. (1995) The calibration of the 3-D theodolite measuring system. *Surveying Science in Finland*, Helsink, v.13, n.1, p.3-17.
- SHORTIS, M.R.; FRASER, C.S. Current trends in close-range optical 3-D measurement for industrial and engineering applications. *Survey Review*, Bristol, v.31, n.242, p.188-200, 1991.
- SILVA, I. (1995). *Curso de Mensuração – The Global Position System-GPS*. Curso ministrado na Universidade Federal de Alagoas, Maceió, no período de 27 a 31 de março de 1995. Apostila não publicada.
- TESKEY, W.F.; BAYLY, D.A.; MARTELL, H.E. (1993) Use of laser targeting in precise machinery surveys. *Journal of Surveying Engineering*, v.119, n.2, p.59-70.
- TESKEY, W.F.; BIACS, Z.F. (1991) Geometrical deformation analysis of large concrete roof structure. *Journal of Surveying Engineering*, v.117, n.1, p.36-49.
- USSISSO, I. (1977) *Adjustment of large geodetic networks - Methods and Experiences*. Sweden, Lantmäteriverket - National Land Survey, 63p.
- WOLF, P.; BRINKER, R.C. (1994) *Elementary Surveying*. USA., Harper Collins College Publishers, 739p.
- ZÜRCHER, W.; LOSER, R.; KYLE, S. (1995) Improved reflector for interferometric tracking in three dimensions. *Optical Engineering*, v.34, n.9, p.2740-2743.

APÊNDICE I

Programa Computacional 01

Determinação das Coordenadas Tridimensionais das estações e do centro ótico dos aparelhos e respectivas precisões

1 - Considerações Gerais

Nesse Apêndice são apresentados os arquivos e a listagem do programa que calcula as coordenadas das estações e do centro ótico dos aparelhos e suas respectivas precisões, em função das precisões nominais do aparelho empregado, apresentando-se, também, um exemplo numérico.

O programa CALEST3.BAS foi elaborado em Basic. A entrada dos dados é feita através de um arquivo texto (DADOSCAM.TXT) com os valores de:

- Número de estações;
- Azimutes em graus, minutos e segundos, (G.MMSS);
- Ângulos Zenitais em graus, minutos e segundos, (G.MMSS);
- Distâncias horizontais entre o PO e as estações, em metros;
- Leituras na mira, em metros.

O programa permite ao usuário a entrada dos dados via arquivo tipo texto. Além dos dados do arquivo DADOSCAM.TXT, o programa necessita dos seguintes dados complementares, com entrada via teclado:

- Número de estações;

- Coordenadas do ponto de orientação (XPO, YPO, ZPO), em metros;
- Altura do instrumento (HI), em metros;
- Altura do prisma (HS), em metros.

Chama-se a atenção para que todos os dados de entrada, que têm como unidade padrão o metro, sejam apresentados com três casas decimais, em função da precisão esperada para os resultados.

2 - Programa Computacional

LISTAGEM DO PROGRAMA CALEST3.BAS

```
DEFDBL A-Z
□
CLS : KEY OFF: COLOR 15, 6, 10:
□
PRINT TAB(10); "*****"
PRINT TAB(10); "*** PROGRAMA PARA O CÁLCULO DAS COORDENADAS ESPACIAIS ***"
PRINT TAB(10); "***      DAS ESTAÇÕES DE INSTALAÇÃO DOS APARELHOS      ***"
PRINT TAB(10); "***      VERSÃO 1.0 - AUTORIA: PROF. ATTUS P. MOREIRA      ***"
PRINT TAB(10); "***      CURSO: DOUTORADO EM TRANSPORTES - MENSURAÇÃO      ***"
PRINT TAB(10); "***      ORIENTADOR: PROF. DR. IRINEU DA SILVA      ***"
PRINT TAB(10); "***      E-MAIL: ATTUSPM@CCR.UFSM.BR      ***"
PRINT TAB(10); "*****"

'PROGRAMA PRINCIPAL - NÚMERO 01
'CÁLCULO DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DE INSTALAÇÃO DOS APARELHOS
DIM XE(15), YE(15), ZE(15), XCO(15), YCO(15), ZCO(15), NEST(15), AZM(15), ZEN(15),
DIST(15), LMIRA(15)
PI = 3.141592654#: PRINT : PRINT : PRINT
INPUT " ENTRE COM O NÚMERO DE ESTAÇÕES QUE VOCE DESEJA CALCULAR: "; NEST
PRINT : PRINT
INPUT " ENTRE COM A PRECISÃO ANGULAR DO APARELHO EM SEGUNDOS: "; PANG
PRINT
INPUT " ENTRE COM A PRECISÃO LINEAR DO APARELHO EM MILÍMETROS: "; PMM
PRINT
INPUT " ENTRE COM A PRECISÃO LINEAR DO APARELHO EM PPM: "; PPM
CLS
PRINT
PRINT " ENTRE COM AS COORDENADAS ESPACIAIS DO PONTO DE ORIENTAÇÃO : "
PRINT
INPUT " ENTRE COM A COORDENADA XPO: "; XPO: PRINT
INPUT " ENTRE COM A COORDENADA YPO: "; YPO: PRINT
INPUT " ENTRE COM A COORDENADA ZPO: "; ZPO: PRINT
CLS
PRINT : PRINT
PRINT " ENTRADA DOS DADOS DE CAMPO : "
PRINT
' INPUT " ALTURA DO INSTRUMENTO EM (m) - HI : "; HI: PRINT
```

```

' INPUT "  ALTURA DO PRISMA EM (m)  - HS : "; HS
CLS
PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
PRINT "      OS DADOS DE ENTRADA SÃO SOMENTE POR ARQUIVO "

OPEN "I", 3, "DADOSCAM.TXT"
  FOR I = 1 TO NEST
    INPUT #3, NEST(I), AZM(I), ZEN(I), DIST(I), LMIRA(I)
  NEXT I
GOSUB 1000
'SUBROTINA PARA TRANSFORMAR A LEITURA DO AZIMUTE DE GG.MMSS EM
RADIANOS

  FOR I = 1 TO NEST
    XE(I) = XPO + (SIN(RADAZM(I)) * DIST(I))
    YE(I) = YPO + (COS(RADAZM(I)) * DIST(I))
    ZE(I) = ZPO + HI - HS + (DIST(I) / TAN(RADZEN(I)))
  NEXT

  FOR I = 1 TO NEST
    XCO(I) = XPO + (SIN(RADAZM(I)) * DIST(I))
    YCO(I) = YPO + (COS(RADAZM(I)) * DIST(I))
    ZCO(I) = ZPO + LMIRA(I)
  NEXT

  FOR I = 1 TO NEST
    HINST(I) = ZCO(I) - ZE(I)
  NEXT
CLS
PRINT
GOSUB 2000
'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DAS PRECISÕES
PRINT
PRINT TAB(10); "  COORDENADAS ESPACIAIS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES"
PRINT
PRINT TAB(6); "ESTAÇÃO"; SPC(5); "XE"; SPC(7); "SXE"; SPC(9); "YE"; SPC(8); "SYE";
SPC(10); "ZE"; SPC(6); "SZE"
PRINT TAB(6); " N°"; SPC(9); "(m)"; SPC(5); "(mm)"; SPC(9); "(m)"; SPC(6); "(mm)"; SPC(9);
"(m)"; SPC(6); "(mm)"
PRINT
OPEN "O", 1, "SAIDCEST.TXT"
  FOR I = 1 TO NEST
    F$ = " ### #####.##### #.## #####.##### #.## #####.##### #.## "
    PRINT USING F$; NEST(I); XE(I); SX(I); YE(I); SY(I); ZE(I); SZ(I)
    PRINT #1, USING F$; NEST(I); XE(I); YE(I); ZE(I)
  NEXT
CLOSE
PRINT : PRINT
PRINT TAB(10); "  COORDENADAS ESPACIAIS DO CENTRO ÓPTICO E PRECISÕES "
PRINT
PRINT TAB(5); "INST."; SPC(2); "HINST."; SPC(5); "XCO"; SPC(4); "SXCO"; SPC(7); "YCO";
SPC(6); "SYCO"; SPC(8); "ZCO"; SPC(6); "SZCO"
PRINT TAB(6); " N°"; SPC(3); "(m)"; SPC(8); "(m)"; SPC(4); "(mm)"; SPC(7); "(m)"; SPC(6);
"(mm)"; SPC(8); "(m)"; SPC(6); "(mm)"
PRINT

```



```

OPEN "O", 2, "SAIDCCOT.TXT"
FOR I = 1 TO NEST
    G$ = " ## ### #####.##### ### #####.##### ### #####.##### ### "
    PRINT USING G$; NEST(I); HINST(I); XCO(I); SX(I); YCO(I); SY(I); ZCO(I),
    SZO(I)
    ' PRINT #2, NEST(I), HINST(I), XCO(I); YCO(I); ZCO(I)
    PRINT #2, XCO(I); YCO(I); ZCO(I)
NEXT
CLOSE
300 END

1000 'SUBROTINA PARA TRANSFORMAR A LEITURA DO AZIMUTE DE GG.MMSS EM
RADIANS
FOR I = 1 TO NEST
    GRAUAZM(I) = INT(AZM(I))
    MINAZMP(I) = (AZM(I) - GRAUAZM(I)) * 100
    MINAZM(I) = INT(MINAZMP(I))
    SEGAZM(I) = (MINAZMP(I) - MINAZM(I)) * 100
    CENTAZM(I) = GRAUAZM(I) + MINAZM(I) / 60 + SEGAZM(I) / 3600
    RADAZM(I) = (PI * CENTAZM(I)) / 180
NEXT
FOR I = 1 TO NEST
    GZEN(I) = INT(ZEN(I))
    MZENP(I) = (ZEN(I) - GZEN(I)) * 100
    MZEN(I) = INT(MZENP(I))
    SZEN(I) = (MZENP(I) - MZEN(I)) * 100
    CENTZEN(I) = GZEN(I) + MZEN(I) / 60 + SZEN(I) / 3600
    RADZEN(I) = PI * CENTZEN(I) / 180
NEXT
RETURN

2000 ' SUBROTINA PARA O CÁLCULO DAS PRECISÕES
'CÁLCULO DA DISTÂNCIA INCLINADA
FOR I = 1 TO NEST
    DINC(I) = DIST(I) / SIN(RADZEN(I))
NEXT

'CÁLCULO DO QUADRADO DAS PRECISÕES DAS DISTÂNCIAS
FOR I = 1 TO NEST
    SDQUAD(I) = (PMM + (PPM * DINC(I) / 1000)) ^ 2
NEXT

□
FOR I = 1 TO NEST
□
    SA(I) = (PI * PANG / 648000) ^ 2
NEXT
FOR I = 1 TO NEST
    AA(I) = COS(RADZEN(I))
    BB(I) = SIN(RADZEN(I))
    MM(I) = (AA(I) ^ 2 * SDQUAD(I)
    NN(I) = ((DINC(I) * 1000) ^ 2) * ((BB(I) ^ 2) * SA(I)
    SZ(I) = SQR(MM(I) + NN(I))
    SZO(I) = SZ(I) + HINST(I) * .3

```



```

CC(I) = COS(RADAZM(I))
DD(I) = SIN(RADAZM(I))
PP(I) = (BB(I) * DD(I) ^ 2) * SDQUAD(I)
QQ(I) = (DINC(I) * 1000 * DD(I)) ^ 2 * (SA(I))
RR(I) = ((DINC(I) * 1000 * BB(I)) ^ 2) * (SA(I))
SX(I) = SQR(PP(I) + QQ(I) + RR(I))
SS(I) = (BB(I) * CC(I)) ^ 2 * SDQUAD(I)
TT(I) = (DINC(I) * 1000 * AA(I) * CC(I)) ^ 2 * SA(I)
UU(I) = ((-DINC(I) * 1000) * BB(I) * DD(I)) ^ 2 * (SA(I))
SY(I) = SQR(SS(I) + TT(I) + UU(I))

NEXT
RETURN

```

3 - Listagem das Variáveis do Programa - relação entre o Texto e o Programa

Símbolo Texto	Símbolo Programa	Variável	Unidade
Azm _i	AZM(I)	azimute PO-estações	g.mmss
dm _i	DIST(I)	distância plana PO-estações	m
LMIRA _i	LMIRA(I)	leituras na mira	m
NEST _i	NEST(I)	número de estações	-
Zen _i	ZEN(I)	ângulo zenital	g.mmss
XCO _i	XCO(I)	coordenada X do centro óptico	m
YCO _i	YCO(I)	coordenada Y do centro óptico	m
ZCO _i	ZCO(I)	coordenada Z do centro óptico	m
XE _i	XE(I)	coordenada X das estações	m
YE _i	YE(I)	coordenada Y das estações	m
ZE _i	ZE(I)	coordenada Z das estações	m
XPO	XPO	coordenada X do PO	m
YPO	YPO	coordenada Y do PO	m
ZPO	ZPO	coordenada Z do PO	m
HI	HI	altura do instrumento	m
HS	HS	altura do prisma	m
-	GRAUZM(I)	azimute em graus	grau
-	MINAZMP(I)	azimute em min e seg	minuto
-	MINAZM(I)	azimute em min	minuto
-	SEGAZM(I)	azimute em seg	segundo
-	CENTAZM(I)	variável auxiliar	-
-	RADAZM(I)	variável auxiliar	-
-	GZEN(I)	variável auxiliar	-
-	MZENP(I)	variável auxiliar	-
-	MZEN(I)	variável auxiliar	-
-	SZEN(I)	variável auxiliar	-
-	CENTZEN(I)	variável auxiliar	-
-	RADZEN(I)	variável auxiliar	-

4 - Implementação do método proposto

Para demonstrar a utilização do programa, apresenta-se um exemplo numérico com os dados de campo constantes da Tabela A1. do Anexo A, usando-se a distância horizontal (Dist. Hz). Esses dados fazem parte do arquivo de entrada, DADOSCAM.TXT.

Os dados de entrada via teclado são:

- número de estações: 5
- coordenadas espaciais do ponto de orientação (valor adotado):
 - XPO: 100,000
 - YPO: 100,000
 - ZPO: 100,000
- altura do instrumento: HI: 1,650m
- altura do prisma: HS: 1,650m

Os resultados obtidos com os dados acima listados são:

1. - Saída na tela das coordenadas das estações e respectivas precisões, em função da precisão nominal do aparelho empregado, especificado na Tabela I.1.

TABELA I. 1 - Coordenadas tridimensionais das estações e respectivas precisões

COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES						
ESTAÇÃO	XE	s_{XE}	YE	s_{YE}	ZE	s_{ZE}
Nº	(m)	(mm)	(m)	(mm)	(m)	(mm)
1	94,732382	0,81	112,158997	1,86	99,067654	0,17
2	90,975163	1,31	110,739511	1,55	99,116417	0,16
3	88,562036	1,63	108,517576	1,21	99,348047	0,14
4	86,423430	1,91	105,074721	0,72	99,568843	0,12
5	85,652914	2,03	99,345645	0,14	99,452173	0,13

- 2 - Saída na tela das coordenadas espaciais do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões, especificadas na Tabela I.2.

TABELA I. 2 - Coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos e respectivas precisões

COORDENADAS DO CENTRO ÓPTICO DOS APARELHOS E PRECISÕES							
APARELHO	HINST.	XCO	s_{XCO}	YCO	s_{YCO}	ZCO	s_{ZCO}
Nº	(m)	(m)	(mm)	(m)	(mm)	(m)	(mm)
1	1,637	94,732382	0,81	112,158997	1,86	100,705000	0,66
2	1,601	90,975163	1,31	110,739511	1,55	100,717000	0,64
3	1,628	88,562036	1,63	108,517576	1,21	100,976000	0,63
4	1,570	86,423430	1,91	105,074721	0,72	101,139000	0,59
5	1,826	85,652914	2,03	99,345645	0,14	101,278000	0,68

3 – Saída, no arquivo SAIDCCOT.TXT, das coordenadas planas (XCO,YCO), do centro óptico dos aparelhos, que servem de dados de entrada para o programa número 02, COORATT.BAS, constante do Apêndice II, no qual são calculadas as coordenadas tridimensionais dos alvos.

4. A coordenada tridimensional do centro óptico de cada aparelho (ZCO), é calculada em função da coordenada do ponto de orientação (ZPO), das leituras executadas na mira (LMIRA), estacionada no PO e recomendações constantes do item 3.4.1 do Capítulo 3. Foi adotado um acréscimo na precisão da coordenada altimétrica do centro óptico de 0,3mm por metro de altura do instrumento.

APÊNDICE II

Programa Computacional 02 Cálculo de coordenadas tridimensionais Método Topográfico-Trigonométrico

1 - Considerações Gerais

Nesse Apêndice apresentam-se os arquivos e a listagem do programa para o cálculo de coordenadas tridimensionais pelo método topográfico-trigonométrico, desenvolvido no Capítulo 8. São apresentadas as coordenadas tridimensionais das extremidades de uma mira padronizada e suas respectivas precisões, dadas pelo desvio padrão em relação à média destas determinações

O programa COORATT.BAS foi elaborado em Quick-Basic e necessita, para a sua execução, de um arquivo de formato texto (SAIDCCOT.TXT), com os valores das coordenadas XCO e YCO, respectivamente, abcissa e ordenada do centro óptico de cada teodolito envolvido no processo. Estes dados saem em forma de arquivo no programa 01, CALEST3.BAS, que calcula as coordenadas das estações e do centro óptico dos aparelhos, constante do Apêndice I.

Os dados do arquivo DADOSCAM.TXT, são:

- Número de estações;
- Azimutes em graus, minutos e segundos, (G.MS);

- Ângulos Zenitais em graus, minutos e segundos, (G.MS);
- Distâncias em metros (m).

O programa permite ao usuário a entrada dos dados através dos arquivos já referidos. Além destes dados de arquivo, o programa necessita de outros dados complementares, com entrada via teclado:

- Número de aparelhos (estações), envolvidos no processo - NTEO;
- Número de alvos - NALVOS
- Coordenadas XPO, YPO, ZPO do ponto de orientação (m).

Salienta-se que todos os dados de entrada, que têm como unidade padrão o metro, devem apresentar três casas decimais, devido à precisão exigida pelo método.

2 - Programa Computacional

LISTAGEM DO PROGRAMA COORD2.BAS

5 DEFDBL A-Z

10 CLS : KEY OFF: COLOR 15, 6, 10:

```
20 PRINT TAB(10); "*****"
30 PRINT TAB(10); "***  PROGRAMA PARA O CÁLCULO DE COORDENADAS ESPACIAIS ***"
35 PRINT TAB(10); "*****          DOS ALVOS          *****"
40 PRINT TAB(10); "***    VERSAO 1.0 - AUTORIA: PROF ATTUS P.MOREIRA    ***"
50 PRINT TAB(10); "***    CURSO: DOUTORADO EM TRANSPORTES - MENSURAÇÃO    ***"
60 PRINT TAB(10); "***    ORIENTADOR: PROF.DR. IRINEU DA SILVA    ***"
70 PRINT TAB(10); "***          E-MAIL: attuspm@ccr.ufsm.br          ***"
80 PRINT TAB(10); "*****"
```

90 'PROGRAMA PRINCIPAL - NÚMERO 2

100 'LEITURA DOS DADOS INICIAIS E DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES

110 DIM X(15), Y(15)

111 PI = 3.141592654#

112 PRINT : PRINT : PRINT

120 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DE TEODOLITOS: "; NTEO: PRINT

121 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DE ALVOS: "; NALVO: PRINT

130 PRINT "ENTRADA DAS COORDENADAS DO PONTO DE ORIENTAÇÃO: ": PRINT : PRINT

140 INPUT "ENTRE COM A COORDENADA XPO: "; XPO: PRINT

150 INPUT "ENTRE COM A COORDENADA YPO: "; YPO: PRINT

160 INPUT "ENTRE COM A COORDENADA ZPO: "; ZPO: PRINT

170 'PRINT "AS COORDENADAS DO PONTO DE ORIENTAÇÃO SÃO: "; XPO; YPO; ZPO

180 OPEN "I", 1, "SAIDCCOT.TXT"

190 FOR I = 1 TO NTEO

200 INPUT #1, X(I), Y(I)

201 NEXT

202 CLOSE

211 OPEN "I", 2, "LMIRA.TXT"

212 FOR I = 1 TO NTEO

213 FOR M = 1 TO NALVO

214 INPUT #2, LMIRA(I, M)

215 NEXT M

```

216 NEXT I
217 CLOSE

224 OPEN "I", 3, "LALVO.TXT"
225 FOR I = 1 TO NTEO
226   FOR M = 1 TO NALVO
227     INPUT #3, LALVO(I, M)
228     GOSUB 2400
229   NEXT
230 NEXT
CLOSE

231 OPEN "I", 4, "LZE.TXT"
232 FOR I = 1 TO NTEO
233   FOR M = 1 TO NALVO
234     INPUT #4, LZE(I, M)
235     GOSUB 2500
236   NEXT
237 NEXT
CLOSE

238 'CÁLCULO DAS COMBINAÇÕES DOS TEODOLITOS DOIS A DOIS

239 FAT = 1
240 FOR I = 1 TO NTEO
250   FAT = FAT * I
260 NEXT
270 'PRINT "O FATORIAL PARA O NÚMERO DE TEODOLITOS DADOS VALE: "; FAT
280 FAT2 = 1
290 FOR I = 1 TO NTEO - 2
300   FAT2 = FAT2 * I
310 NEXT
320 COMB = FAT / (2 * FAT2)
330 'PRINT "O NÚMERO DE COMBINAÇÕES DOS TEODOLITOS VALE: "; COMB
331 'INPUT "DESEJA CONTINUAR (1)SIM (2) NÃO "; F
332 'IF F = 1 THEN GOTO 340 ELSE GOTO 990

333 OPEN "I", 5, "MIRA.TXT"
334 FOR I = 1 TO NTEO
335   INPUT #6, CMIRA(I)
336 NEXT
337 CLOSE

340 'CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS E DOS AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS
342 'DIST(I,J) E AZ(I,J)
348 CLS
349 PRINT "DISTÂNCIAS E AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS"
350 FOR I = 1 TO NTEO
360   FOR J = 1 TO NTEO
370     DIST(I, J) = SQR((X(J) - X(I)) ^ 2 + (Y(J) - Y(I)) ^ 2)
380     GOSUB 1000
390     'IF I <> J AND J > I THEN PRINT I; " - "; J; " - DISTÂNCIA: "; DIST(I, J); "m"; " - AZIMUTE: "; GG; "°"; MM; "";
SS; ""
400   NEXT
410 NEXT
411 'INPUT "DESEJA CONTINUAR (1)SIM (2) NÃO "; F
412 'IF F = 1 THEN GOTO 413 ELSE GOTO 990

413 CLS
414 PRINT "DISTÂNCIAS E CONTRA-AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS"
420 FOR I = 1 TO NTEO - 1
430   FOR J = 1 TO NTEO
440     DISTCAZ(I, J) = SQR((X(J) - X(I)) ^ 2 + (Y(J) - Y(I)) ^ 2)
450     GOSUB 1265
460     'IF I <> J AND J > I THEN PRINT I; " - "; J; " - DISTÂNCIA: "; DISTCAZ(I, J); "m"; " - C-AZIMUTE: "; GGI; "°";
MMI; ""; SSI; ""
470   NEXT
480 NEXT
481 'INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO "; F
482 'IF F = 1 THEN GOTO 490 ELSE GOTO 990

490 'CÁLCULO DOS AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS E O PONTO DE ORIENTAÇÃO
491 CLS

```

```

492 PRINT "DISTÂNCIAS E AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS E O PONTO DE ORIENTAÇÃO"
500 FOR I = 1 TO NTEO
510   GOSUB 2000
520   DISTPO(I) = SQR((XPO - X(I))^2 + (YPO - Y(I))^2)
530   PRINT
540   PRINT I; " - PO - DISTÂNCIA: "; DISTPO(I); "m"; " - AZIMUTE: "; GGPO; "°"; MMPO; "'"; SSPO; ""
550   NEXT
552   INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
553   IF F = 1 THEN GOTO 555 ELSE GOTO 990
555   'CÁLCULO DOS AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS
556   CLS
557   PRINT "AZIMUTES CALCULADOS ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS"
560   FOR I = 1 TO NTEO
565     FOR M = 1 TO NALVO
570       GOSUB 2600
575       PRINT "ESTAÇÃO "; I; " - ALVO "; M; "AZIMUTE (RD): "; AZIM(I, M)
576       IF (I = 1 OR I = 2 OR I = 3 OR I = 4 OR I = 5) AND M = NALVO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
577       IF F = 1 THEN GOTO 580 ELSE GOTO 990
580     NEXT
585   NEXT

590   'CÁLCULO DOS ÂNGULOS DOS TRIÂNGULOS DE CADA COMBINAÇÃO

591   CLS
593   'CÁLCULO DO ÂNGULO ALFA1
594   PRINT "VALORES DE ALFA1 EM RADIANS"
595   FOR I = 1 TO NTEO
600     FOR M = 1 TO NALVO
601       FOR J = 1 TO NTEO
605         IF AZ(I, J) > AZIM(I, M) THEN ALFA1(I, M, J) = AZ(I, J) - AZIM(I, M) ELSE ALFA1(I, M, J) = 2 * PI - AZIM(I, M) + AZ(I, J)
606         IF I < J AND J > I THEN PRINT "TEOD."; I; " - ALVO "; M; "TEOD.VIS."; J; "ALFA1 = "; ALFA1(I, M, J)
607         IF M = NALVO AND J = NTEO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
608         IF F = 1 THEN GOTO 611 ELSE GOTO 990
611       NEXT
615     NEXT
620   NEXT
625   CLS

630   'CÁLCULO DO ÂNGULO ALFA2
635   PRINT "VALORES DE ALFA2 EM RADIANS"
640   FOR I = 1 TO (NTEO - 1)
645     FOR M = 1 TO NALVO
650       FOR J = 1 TO NTEO
655         IF AZTC(I, J) < AZIM(J, M) THEN ALFA2(I, M, J) = AZIM(J, M) - AZTC(I, J) ELSE ALFA2(I, M, J) = 2 * PI - AZTC(I, J) + AZIM(J, M)
660         IF I < J AND J > I THEN PRINT "TEOD."; I; " - ALVO "; M; "TEOD.VIS."; J; "ALFA2 = "; ALFA2(I, M, J)
665         IF M = NALVO AND J = NTEO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
670         IF F = 1 THEN GOTO 675 ELSE GOTO 990
675       NEXT
680     NEXT
690   NEXT

695   CLS
700   'CÁLCULO DO ÂNGULO ALFA3
705   PRINT "VALORES DE ALFA3 EM RADIANS"
710   FOR I = 1 TO NTEO
715     FOR M = 1 TO NALVO
720       FOR J = 1 TO NTEO
730         ALFA3(I, M, J) = PI - (ALFA1(I, M, J) + ALFA2(I, M, J))
735         IF I < J AND J > I THEN PRINT "TEOD."; I; " - ALVO "; M; "TEOD.VIS."; J; "ALFA3 = "; ALFA3(I, M, J)
740         IF M = NALVO AND J = NTEO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
745         IF F = 1 THEN GOTO 750 ELSE GOTO 990
750       NEXT
755     NEXT
760   NEXT

770   'CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS PELOS TRIÂNGULOS DAS COMBINAÇÕES
771   CLS
772   PRINT "DISTÂNCIAS ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS - DIALVO"
775   'DISTÂNCIAS DO TEODOLITO I ATÉ O ALVO - DIALVO(I,M,J)

```



```

780 FOR I = 1 TO NTEO
785   FOR M = 1 TO NALVO
790     FOR J = 1 TO NTEO
795       DIALVO(I, M, J) = DIST(I, J) * SIN(ALFA2(I, M, J)) / SIN(ALFA3(I, M, J))
800       'IF I < J AND J > I THEN PRINT "TEOD."; I; " - ALVO "; M; " - TEOD.VIS. "; J; "DISTÂNCIA: "; DIALVO(I, M, J); "m"
805       'IF M = NALVO AND J = NTEO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
806       'IF F = 1 THEN GOTO 807 ELSE 990
807       NEXT
808     NEXT
809   NEXT
810 CLS
811 'PRINT "DISTÂNCIAS ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS - DJALVO"
812 'DISTÂNCIAS DO TEODOLITO J ATÉ O ALVO - DJALVO(I,M,J)
813 FOR I = 1 TO NTEO
814   FOR M = 1 TO NALVO
815     FOR J = 1 TO NTEO
816       DJALVO(I, M, J) = DIST(I, J) * SIN(ALFA1(I, M, J)) / SIN(ALFA3(I, M, J))
817       PRINT "TEOD."; I; " - ALVO "; M; " - TEOD.VIS. "; J; "DISTÂNCIA: "; DJALVO(I, M, J); "m"
818       'IF M = NALVO AND J = NTEO THEN INPUT "DESEJA CONTINUAR (1) SIM (2) NÃO"; F
819       'IF F = 1 THEN GOTO 820 ELSE 990
820       NEXT
821     NEXT
822   NEXT
825 'CÁLCULO DAS COORDENADAS X E Y DOS ALVOS I
826 PRINT "COORDENADAS DE X E Y DOS ALVOS POR I": PRINT
830 FOR I = 1 TO NTEO - 1
835   FOR M = 1 TO NALVO
840     FOR J = 1 TO NTEO
845       CXALVOI(I, M, J) = X(I) + DIALVO(I, M, J) * SIN(AZIM(I, M))
850       CYALVOI(I, M, J) = Y(I) + DIALVO(I, M, J) * COS(AZIM(I, M))
855       CZALVOI(I, M, J) = ZPO + LMIRA(I, M) + DIALVO(I, M, J) / (TAN(LZERD(I, M)))
855       PRINT "COORD.X("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CXALVOI(I, M, J)
860       PRINT "COORD.Y("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CYALVOI(I, M, J)
861       PRINT "COORD.Z("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CZALVOI(I, M, J)
865     NEXT
868   NEXT
870 NEXT

871 'CÁLCULO DAS COORDENADAS DE X E Y DOS ALVOS POR J
872 PRINT : PRINT : PRINT "COORDENADAS DE X, Y E Z DOS ALVOS POR J": PRINT
875 FOR I = 1 TO NTEO
878   FOR M = 1 TO NALVO
880     FOR J = 1 TO NTEO
883       CXALVOJ(I, M, J) = X(I) + DJALVO(I, M, J) * SIN(AZIM(I, M))
885       CYALVOJ(I, M, J) = Y(I) + DJALVO(I, M, J) * COS(AZIM(I, M))
886       CZALVOJ(I, M, J) = ZPO + LMIRA(J, M) + DJALVO(I, M, J) / (TAN(LZERD(J, M)))
888       PRINT "COORD.X("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CXALVOJ(I, M, J)
890       PRINT "COORD.Y("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CYALVOJ(I, M, J)
891       PRINT "COORD.Z("; I; ", "; M; ", "; J; ") = "; CZALVOJ(I, M, J)
893     NEXT
895   NEXT
898 NEXT
900 GOSUB 3000

910 GOSUB 3200

990 GOSUB 2710: END

1000 ' SUBROTINA PARA O CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE OS TEODOLITOS
1070 IF (X(J) - X(I)) > 0 AND (Y(J) - Y(I)) > 0 THEN GOTO 1080 ELSE GOTO 1100
1080 AZ(I, J) = ATN((X(J) - X(I)) / (Y(J) - Y(I)))
1094 GOTO 1190
1100 IF (X(J) - X(I)) > 0 AND (Y(J) - Y(I)) < 0 THEN GOTO 1110 ELSE GOTO 1130
1110 AZ(I, J) = PI - ABS(ATN((X(J) - X(I)) / (Y(J) - Y(I))))
1124 GOTO 1190
1130 IF (X(J) - X(I)) < 0 AND (Y(J) - Y(I)) < 0 THEN GOTO 1140 ELSE GOTO 1160
1140 AZ(I, J) = PI + ABS(ATN((X(J) - X(I)) / (Y(J) - Y(I))))
1154 GOTO 1190
1160 IF (X(J) - X(I)) < 0 AND (Y(J) - Y(I)) > 0 THEN GOTO 1170 ELSE GOTO 1190
1170 AZ(I, J) = 2 * PI - ABS(ATN((X(J) - X(I)) / (Y(J) - Y(I))))
1184 GOTO 1190
1190 DECIMAL = (180 * AZ(I, J)) / PI

```



```

1210 GG = FIX(DECIMAL)
1215 MMP = (DECIMAL - GG) * 60
1220 MM = FIX(MMP)
1230 SS = FIX((MMP - MM) * 60)
1260 RETURN

```

```

1265 'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DOS CONTRA-AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS
1267 'AZTC(I,J) = CONTRA-AZIMUTE ENTRE OS TEODOLITOS
1270 IF AZ(I, J) > PI THEN GOTO 1280 ELSE GOTO 1300
1280 AZTC(I, J) = AZ(I, J) - PI
1290 GOTO 1310
1300 AZTC(I, J) = AZ(I, J) + PI
1310 DECIMALI = (180 * AZTC(I, J)) / PI
1320 GGI = FIX(DECIMALI)
1330 MMPI = (DECIMALI - GGI) * 60
1340 MMI = FIX(MMPI)
1350 SSI = FIX((MMPI - MMI) * 60)
1360 RETURN

```

```

2000 'SUBROTINA PARA CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE OS TEODOLITOS E O PONTO DE ORIENTAÇÃO
2070 IF (XPO - X(I)) > 0 AND (YPO - Y(I)) > 0 THEN GOTO 2080 ELSE GOTO 2100
2080 AZPO(I) = ATN((XPO - X(I)) / (YPO - Y(I)))
2094 GOTO 2190
2100 IF (XPO - X(I)) > 0 AND (YPO - Y(I)) < 0 THEN GOTO 2110 ELSE GOTO 2130
2110 AZPO(I) = PI - ABS(ATN((XPO - X(I)) / (YPO - Y(I))))
2124 GOTO 2190
2130 IF (XPO - X(I)) < 0 AND (YPO - Y(I)) < 0 THEN GOTO 2140 ELSE GOTO 2160
2140 AZPO(I) = PI + ABS(ATN((XPO - X(I)) / (YPO - Y(I))))
2154 GOTO 2190
2160 IF (XPO - X(I)) < 0 AND (YPO - Y(I)) > 0 THEN GOTO 2170 ELSE GOTO 2190
2170 AZPO(I) = 2 * PI - ABS(ATN((XPO - X(I)) / (YPO - Y(I))))
2184 GOTO 2190
2190 DECPO = (180 * AZPO(I)) / PI
2210 GGPO = FIX(DECPO)
2215 MMPOP = (DECPO - GGPO) * 60
2220 MMPO = FIX(MMPOP)
2230 SSPO = FIX((MMPOP - MMPO) * 60)
2260 RETURN

```

```

2400 'SUBROTINA PARA TRANSFORMAR O ÂNGULO HORIZONTAL (PO-ALVO)
2401 'DE GRAUS EM RADIANOS
2410 GLALVO(I, M) = INT(LALVO(I, M))
2420 MLALVO1(I, M) = (LALVO(I, M) - GLALVO(I, M)) * 100
2430 MLALVO(I, M) = INT(MLALVO1(I, M))
2440 SLALVO(I, M) = (MLALVO1(I, M) - MLALVO(I, M)) * 100
2450 GCLALVO(I, M) = GLALVO(I, M) + MLALVO(I, M) / 60 + SLALVO(I, M) / 3600
2460 LALVORD(I, M) = (PI * GCLALVO(I, M)) / 180#
2470 RETURN

```

```

2500 'SUBROTINA PARA TRANSFORMAR A LEITURA DO ÂNGULO ZENITAL
2501 'DE GRAUS EM RADIANOS
2510 GLZE(I, M) = INT(LZE(I, M))
2520 MLZE1(I, M) = (LZE(I, M) - GLZE(I, M)) * 100
2530 MLZE(I, M) = INT(MLZE1(I, M))
2540 SLZE(I, M) = (MLZE1(I, M) - MLZE(I, M)) * 100
2550 GCLZE(I, M) = GLZE(I, M) + MLZE(I, M) / 60 + SLZE(I, M) / 3600
2560 LZERD(I, M) = (PI * GCLZE(I, M)) / 180#
2570 RETURN

```

```

2600 'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DOS AZIMUTES ENTRE OS TEODOLITOS E OS ALVOS
2610 AZIMP(I, M) = AZPO(I) + LALVORD(I, M)
2620 IF AZIMP(I, M) > 2 * PI THEN GOTO 2630 ELSE 2650
2630 AZIM(I, M) = AZIMP(I, M) - 2 * PI: GOTO 2700
2650 AZIM(I, M) = AZIMP(I, M): GOTO 2700
2700 RETURN

```

```

3000 'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DAS COORDENADAS MÉDIAS DOS ALVOS
'CÁLCULO DOS SOMATÓRIOS
3010 FOR M = 1 TO NALVO
3020   FOR I = 1 TO NTEO
3030     FOR J = I + 1 TO NTEO
3040       SOMATX(M) = SOMATX(M) + CXALVOI(I, M, J) + CXALVOJ(J, M, I)
3050       SOMATY(M) = SOMATY(M) + CYALVOI(I, M, J) + CYALVOJ(J, M, I)

```

```

3051     SOMATZ(M) = SOMATZ(M) + CZALVOI(I, M, J) + CZALVOJ(I, M, J)
3060     NEXT
3070     NEXT
3080     NEXT
3081 'CÁLCULO DAS MÉDIAS
3082 CLS : 'PRINT "COORDENADAS MÉDIAS DOS ALVOS  "
3090 FOR M = 1 TO NALVO
3100     MEDIAZ(M) = SOMATZ(M) / (2 * COMB)
3110     MEDIAZ(M) = SOMATZ(M) / (2 * COMB)
3111     MEDIAZ(M) = SOMATZ(M) / (2 * COMB)
3121     'PRINT "ALVO "; M; " - COORDENADA X = "; MEDIAZ(M)
3123     'PRINT "ALVO "; M; " - COORDENADA Y = "; MEDIAZ(M)
3124     'PRINT "ALVO "; M; " - COORDENADA Z = "; MEDIAZ(M)
3126     'PRINT
3128     NEXT
3129     GOTO 7000
3130     INPUT "DESEJA CONTINUAR "; F
3132     IF F = 1 THEN GOTO 3135 ELSE GOTO 990
3135     RETURN

3200 'SUBROTINA DE IMPRESSAO DOS RESULTADOS
3210 CLS
3220 PRINT "*****"
3230 PRINT "***** IMPRESSÃO DOS RESULTADOS *****"
3240 PRINT "*****"
3250 PRINT "**** < 1 > COORDENADAS MEDIAS DE CADA ALVO (X, Y, Z)  ***"
3260 PRINT "**** < 2 > COORDENADAS DE CADA ALVO (VALOR INDIVIDUAL)***"
3270 PRINT "**** < 3 > PRECISAO DAS COORDENADAS *****"
3280 PRINT "*****"

3320 INPUT "< 1 > CONTINUAR IMPRIMINDO OU < 2 > FINALIZAR "; F
3330 IF F = 1 THEN GOTO 7000 ELSE RETURN

7000 'SUBROTINA PARA IMPRESSÃO DOS RESULTADOS
7004 PRINT
7005 PRINT TAB(10); "-----"
7006 PRINT TAB(13); "COORDENADAS ESPACIAIS DO CENTRO OTICO DOS TEODOLITOS"
7007 PRINT TAB(10); "-----"
7009 PRINT TAB(12); "    TEO. N§"; SPC(4); "XCO(m)"; SPC(8); "YCO(m)"; SPC(8); "ZCO(m)"
7010 PRINT TAB(10); "-----"
7011 FOR I = 1 TO NTEO
7015     Z(I, NTEO) = ZPO + CMIRA(I)
7020     FS = "          #####"
7030     PRINT USING FS; I; X(I); Y(I); Z(I, NTEO)
7050     NEXT
7051 PRINT TAB(10); "-----"

8000 'CÁLCULO DA PRECISÃO APARENTE DAS COORDENADAS Xi
8010 'SEMPRE O NÚMERO DE COORDENADAS Xi SERÁ DUAS VEZES
8020 'O NÚMERO DE COMBINAÇÕES DOS TEODOLITOS DOIS A DOIS
8021 'SX = PRECISÃO APARENTE DAS COORDENADAS X
8022 'SXMEDIA = PRECISÃO DA MÉDIA DAS COORDENADAS X
8030 FOR M = 1 TO NALVO
8040     FOR I = 1 TO NTEO
8050         FOR J = I + 1 TO NTEO
8060             SOMATPX(M) = SOMATPX(M) + ((MEDIAZ(M) - CXALVOI(I, M, J)) ^ 2) + ((MEDIAZ(M) - CXALVOJ(I, M, J))
^ 2)
8100         NEXT
8110     NEXT
8120     NEXT
8130     FOR M = 1 TO NALVO
8140         SX(M) = SQR(SOMATPX(M) / (COMB - 1))
8150         SXMEDIA(M) = (SX(M) / SQR(COMB)) * 1000
8160         'PRINT "ALVO"; M; " - X = "; MEDIAZ(M); "(+ -) "; SXMEDIA(M); " mm "
8170     NEXT

9000 'CÁLCULO DA PRECISÃO APARENTE DAS COORDENADAS Yi
9010 'SEMPRE O NÚMERO DE COORDENADAS Yi SERÁ DUAS VEZES
9020 'O NÚMERO DE COMBINAÇÕES DOS TEODOLITOS DOIS A DOIS
9021 'SY = PRECISÃO APARENTE DAS COORDENADAS Y
9022 'SYMEDIA = PRECISÃO DA MÉDIA DAS COORDENADAS Y
9030 FOR M = 1 TO NALVO
9040     FOR I = 1 TO NTEO
9050         FOR J = I + 1 TO NTEO

```


Símbolo Programa	Variável	Unidade
LMIRA(I,M)	leitura pelo teo(I) para o alvo(M)	m
LALVO(I,M)	ângulo horizontal.PO-teo(I)-alvo	g.ms
LZE(I,M)	ângulo zenital.PO-teo(I)-alvo	g.ms
FAT	fatorial do nº de teodolitos	-
FAT@	fatorial do nº de teodolitos-2	-
COMB	nº de combinações dos teo. 2 a 2	-
CMIRA(I)	leituras na mira pelos (I) teo.	m
DIST(I,J)	dist.(I-J) entre os teo. na comb.	m
AZ(I,J)	az. entre os teo. na combinação	g.ms
DISTCAZ(I,J)	dist.(J-I) entre os teo. na comb.	m
DISTPO(I)	dist. teo.(I)-PO	m
AZIM(I,M)	az.teo.(I)-alvo(M)	g.ms
ALFA1(I,M,J)	âng. da base vértice no teo.(I)	g.ms
AZTC(I,J)	contra-az. teo.(I)-teo.(J)	g.ms
AZIM(J,M)	az.teo.(J)-alvo(M)	g.ms
ALFA2(I,M,J)	âng. da base vértice no teo.(J)	g.ms
ALFA3(I,M,J)	âng. do vértice em cada comb.	g.ms
DIALVO(I,M,J)	dist. teo.(I)-alvo(M) na comb.	m
DIALVO(J,M,I)	dist. teo.(J)-alvo(M) na comb.	m
CXALVOI(I,M,J)	X do alvo com a dist.I-M	m
CYALVOI(I,M,J)	Y do alvo com a dist.I-M	m
CZALVOI(I,M,J)	Z do alvo com a dist.I-M	m
CXALVOJ(I,M,J)	X do alvo com a dist.J-M	m
CYALVOJ(I,M,J)	Y do alvo com a dist.J-M	m
CZALVOJ(I,M,J)	Z do alvo com a dist.J-M	m
SOMATX(M)	somatório das coord. X dos alvos	m
SOMATY(M)	somatório das coord. Y dos alvos	m
SOMATZ(M)	somatório das coord. Z dos alvos	m
MEDIAX(M)	média das abcissas do alvo	m
MEDIAY(M)	média das ordenadas do alvo	m
MEDIAZ(M)	média das cotas ou alt. do alvo	m
SX	precisão da coord. X	mm
SY	precisão da coord. Y	mm
SZ	precisão da coord. Z	mm
SMEDIAX	precisão da média da coord. X	mm
SMEDIAY	precisão da média da coord. Y	mm
SMEDIAZ	precisão da média da coord. Z	mm

4 - Exemplo Numérico

Para a demonstração da utilização do programa, apresenta-se um exemplo com dados numéricos, do levantamento de campo, referente às extremidades 1 e 2 de uma mira horizontal, já utilizados pelos demais métodos. Este programa utiliza os seguintes arquivos para a entrada dos dados:

4.1. - SOIDCCOT.TXT

Os dados de entrada pelo arquivo SAIDCCOT.TXT, fornecidos pelo programa 01, CALEST2.BAS, são as coordenadas planas do centro óptico dos aparelhos, constantes da Tabela I.2 do Apêndice I.

4.2. - LMIRA.TXT

Este arquivo foi introduzido no programa para permitir o cálculo da coordenada Z de cada alvo, em função da coordenada ZPO, do ponto de orientação, evitando-se que sejam introduzidas as alturas dos instrumentos, executadas através da trena. Esses dados constam da Tabela A A.2 do Anexo A.

4.3. - LALVO.TXT

Este arquivo contém os ângulos horizontais lidos pelos aparelhos, instalados nas estações, referindo-se a cada um dos alvos envolvidos no processo, entre o ponto de orientação e cada um deles. Cada linha do arquivo refere-se a um aparelho, pela ordem crescente de numeração. A parte inteira do número refere-se aos graus e a parte decimal aos minutos e segundos. A subrotina do programa reconhece cada uma destas partes na execução dos cálculos. Basta deixar um espaço em branco entre um dado e outro na linha. Esses dados estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

4.4. - LZE.TXT

Este arquivo contém os ângulos zenitais lidos pelos aparelhos, instalados nas estações, referindo-se a cada um dos alvos envolvidos no processo. Cada linha do arquivo refere-se a um aparelho, pela ordem crescente de numeração. A parte inteira do número refere-se aos graus e a parte decimal aos minutos e segundos. A subrotina do programa reconhece cada uma destas partes na execução dos cálculos. Basta deixar um espaço em branco entre um dado e outro na linha. Esses dados estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

4.6. - MIRA.TXT

Este arquivo foi introduzido no programa para permitir o cálculo da coordenada Z do centro óptico de cada aparelho, em função da coordenada ZPO do

ponto de orientação, evitando que seja empregada a altura do instrumento medida através da trena. O objetivo é minimizar os erros na determinação da coordenada ZCO do centro ótico de cada aparelho, ao evitar-se as leituras com trena. O arquivo é composto de uma única linha, com tantas leituras quantos forem os teodolitos envolvidos no levantamento. Esses dados estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

Os dados de entrada via teclado são:

- Número de aparelhos - NTEO: 5;
- Número de alvos - NALVO: 2;
- Coordenada XPO do ponto de orientação: 100,000;
- Coordenada YPO do ponto de orientação: 100,000;
- Coordenada ZPO do ponto de orientação: 100,000.

Os resultados obtidos com os dados acima listados são:

1. Saída na tela das coordenadas tridimensionais do centro ótico dos aparelhos, conforme Tabela II.2.

TABELA II.2 – Coordenadas espaciais do centro ótico dos aparelhos

COORDENADAS ESPACIAIS DO CENTRO ÓTICO DOS APARELHOS			
APARELHO Nº	XCO (m)	YCO (m)	ZCO (m)
1	94.732382	112.158997	100.705000
2	90.975163	110.739511	100.717000
3	88.562036	108.517576	100.976000
4	86.423430	105.074721	101.139000
5	85.652914	099.345645	101.278000

Saída na tela das coordenadas tridimensionais das extremidades 1 e 2 da mira horizontal e suas respectivas precisões, em função da média das determinações, conforme metodologia proposta constam da Tabela II.3.

TABELA II.3 – Coordenadas tridimensionais das extremidades 1 e 2 da mira e respectivas precisões

COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS DOS ALVOS E PRECISÕES						
ALVOS Nº	X (m) (m)	s _x (mm)	Y (m) (m)	s _y (mm)	Z (m) (m)	s _z (mm)
1	103,530938	2,69	95,239789	2,10	102,152606	0,41
2	102,302767	2,01	93,661270	1,77	102,157808	0,48

APÊNDICE III

Programa Computacional 03 Cálculo de coordenadas tridimensionais Método clássico

1 - Considerações Gerais

Nesse Apêndice apresenta-se o programa computacional 03, INTER2.BAS, que calcula as coordenadas tridimensionais dos alvos, empregando o método Clássico, também denominado de visadas exteriores ou interseção à vante. Esse método foi apresentado no Capítulo 4, item 4.1.

Apresenta-se, ainda, o programa MEDIAARI.BAS, que calcula as precisões dessas coordenadas, isto é, o desvio padrão em relação às médias.

São apresentados os resultados de um exemplo numérico, com os mesmos dados de campo que foram empregados para a execução dos cálculos em todos os métodos propostos ou já existente.

O programa INTER2.BAS foi elaborado em Quick-Basic e necessita, para a sua execução, da entrada dos dados de campo via teclado.

2 - Programa Computacional 05

LISTAGEM DO PROGRAMA INTER2.BAS

```
10 DEFDBL A-Z
20 CLS : KEY OFF: COLOR 15, 6, 10
30 PRINT TAB(10); "*****"
```



```

40 PRINT TAB(10); "**** PROGRAMA PARA O CÁLCULO DE INTERSEÇÃO ****"
50 PRINT TAB(10); "*** ATRAVÉS DOS AZIMUTES ****"
60 PRINT TAB(10); "*** DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES - MENSURAÇÃO ****"
70 PRINT TAB(10); "**** ELABORACAO DO PROGRAMA: ATTUS P. MOREIRA ****"
80 PRINT TAB(10); "*** ** E-MAIL: attuspm@ccr.ufsm.br ****"
90 PRINT TAB(10); "*****"
95 PRINT
100 CLS : PRINT TAB(10); " PROGRAMA PRINCIPAL ": PRINT
101 PRINT TAB(10); " OPÇÕES DE ENTRADA ": PRINT
102 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (1) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
103 PRINT TAB(10); " - AZIMUTES ESTAÇÕES-ALVOS ": PRINT
104 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (2) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
105 PRINT TAB(10); " - AZIMUTES DE REFERÊNCIA "
106 PRINT TAB(10); " - ÂNGULOS HORIZONTAIS ": PRINT
107 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (3) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
108 PRINT TAB(10); " - COORDENADAS DOS PONTOS DE REFERÊNCIA "
109 PRINT TAB(10); " - ÂNGULOS HORIZONTAIS ": PRINT
PRINT TAB(10); "OPÇÃO (4) - FINALIZAR O PROGRAMA"
PRINT
110 INPUT " ESCOLHA A OPÇÃO DE ENTRADA: (1) - (2) - (3) - (4)"; F
CLS
130 IF F > 4 THEN GOTO 101
160 IF F = 1 THEN GOSUB 1000
170 IF F = 2 THEN GOSUB 2000
180 IF F = 3 THEN GOSUB 4000
190 IF F = 4 THEN GOTO 1000000

1000000 PRINT "PROGRAMA - INTERSEÇÃO ESPACIAL - MÉTODO CLÁSSICO"
PRINT
PRINT
PRINT "ORIENTADOR: IRINEU DA SILVA - PROFESSOR DOUTOR"
PRINT "ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS - USP - SP"
PRINT
PRINT
PRINT "AUTORIA: ATTUS PEREIRA MOREIRA - PROFESSOR ASSISTENTE"
PRINT "DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA RURAL - UFSM"
PRINT "TELEFONE: (055) 226-16-16 - RAMAL: 3176"
PRINT "SANTA MARIA - RS - 97119-900"
PRINT
PRINT "SOLICITA-SE INTERCÂMBIO"
END

1000 'SUBROTINA PARA O CALCULO DA OPÇÃO 1
1001 OPEN "CPAR.TXT" FOR OUTPUT AS #1
1010 PI = 3.141592654#
1015 CLS
1016 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (1) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
1017 PRINT TAB(10); " - AZIMUTES ESTAÇÕES-ALVOS "
1018 PRINT TAB(10); " - ALTURA DO INSTRUMENTO NAS ESTAÇÕES"
PRINT TAB(10); " - ÂNGULOS ZENITAIS": PRINT
1019 NINT = 0
1050 NINT = NINT + 1
1059 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DO ALVO : "; NALVO: PRINT
1060 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA PRIMEIRA ESTAÇÃO"; XEST1: PRINT
1070 INPUT "COORDENADA X1 = "; X1

```

```

1018 PRINT TAB(10); "      - ALTURA DO INSTRUMENTO NAS ESTAÇÕES"
      PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS ZENITAIS": PRINT
1019 NINT = 0
1050 NINT = NINT + 1
1059 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DO ALVO : "; NALVO: PRINT
1060 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA PRIMEIRA ESTAÇÃO"; XEST1: PRINT
1070 INPUT "COORDENADA  X1 = "; X1
1080 INPUT "COORDENADA  Y1 = "; Y1
1090 INPUT "COORDENADA  Z1 = "; Z1: PRINT
1100 INPUT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA PRIMEIRA ESTAÇÃO : EM
METROS"; HEST1: PRINT
1110 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO .": PRINT
1120 INPUT "      GRAUS ="; GG1A
1130 INPUT "      MINUTOS ="; MM1A
1140 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS1A: PRINT
1150 Z1A = GG1A + MM1A / 60# + SS1A / 3600#
1160 Z1ARAD = PI * Z1A / 180#
1170 PRINT "Z1ARAD="; Z1ARAD: PRINT
1180 PRINT "ENTRE COM O AZIMUTE NA PRIMEIRA ESTAÇÃO .": PRINT
1190 INPUT "      GRAUS ="; GG1
1200 INPUT "      MINUTOS ="; MM1
1210 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS1: PRINT
1220 AZ1 = GG1 + MM1 / 60# + SS1 / 3600#
1230 AZ1RAD = PI * AZ1 / 180#
1240 PRINT "AZ1RAD="; AZ1RAD: PRINT
1250 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA SEGUNDA ESTAÇÃO"; XEST2: PRINT
1260 INPUT "COORDENADA  X2 = "; X2
1270 INPUT "COORDENADA  Y2 = "; Y2
1280 INPUT "COORDENADA  Z2 = "; Z2: PRINT
1290 INPUT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA SEGUNDA ESTAÇÃO : EM
METROS"; HEST2: PRINT
1300 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA SEGUNDA ESTAÇÃO .": PRINT
1310 INPUT "      GRAUS ="; GG2A
1320 INPUT "      MINUTOS ="; MM2A
1330 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS2A: PRINT
1340 Z2A = GG2A + MM2A / 60# + SS2A / 3600#
1350 Z2ARAD = PI * Z2A / 180#
1360 PRINT "Z2ARAD="; Z2ARAD: PRINT
1370 PRINT "ENTRE COM O AZIMUTE NA SEGUNDA ESTAÇÃO .": PRINT
1380 INPUT "      GRAUS ="; GG2
1390 INPUT "      MINUTOS ="; MM2
1400 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS2: PRINT
1410 AZ2 = GG2 + MM2 / 60# + SS2 / 3600#
1420 AZ2RAD = PI * AZ2 / 180#
1430 PRINT "AZ2RAD="; AZ2RAD: PRINT
1435 C = TAN(AZ2RAD): PRINT "TAN AZ2RAD = "; AZ2RAD
1438 D = TAN(AZ1RAD): PRINT "TAN AZ1RAD = "; AZ1RAD
1440 IF ABS(D) < ABS(C) THEN 1450 ELSE 1480
1450 YN = (Y1) + (((X2) - (X1)) - ((Y2) - (Y1)) * TAN(AZ2RAD)) / ((TAN(AZ1RAD)) -
(TAN(AZ2RAD)))
1460 XN = X2 + ((YN) - (Y2)) * (TAN(AZ2RAD))
1470 GOTO 1480
1480 YN = (Y2) + (((X1) - (X2)) - ((Y1) - (Y2)) * TAN(AZ1RAD)) / ((TAN(AZ2RAD)) -
(TAN(AZ1RAD)))
1490 XN = X1 + ((YN) - (Y1)) * (TAN(AZ1RAD))

```



```

1600 PRINT : PRINT
1610 B$ = "      COORDENADAS DO ALVO N$ ### : "
1620 C$ = "DADAS PELA INTERSEÇÃO DAS ESTAÇÕES ### E ### SÃO:"
1630 PRINT USING B$; NALVO: PRINT
1640 PRINT USING C$; XEST1; XEST2: PRINT
1650 F$ = "      XN = #####.#####"
1700 G$ = "      YN = #####.#####"
1710 H$ = "      ZN = #####.#####"
1720 PRINT USING F$; XN: PRINT USING G$; YN: PRINT USING H$; ZN: PRINT
1721 PRINT #1, XN, YN, ZN
1730 PRINT "VOCE DESEJA CALCULAR OUTRA INTERSEÇÃO PARA O MESMO ALVO?":
PRINT
1740 INPUT "      SIM (1)  NAO (2)"; G: PRINT
1750 IF G = 1 THEN 1050 ELSE GOTO 100
1751 PRINT NINT
1752 CLOSE #1
1755 OPEN "I", 2, "CPAR.TXT"
1760 FOR I = 1 TO NINT
1770 INPUT #2, X(I), Y(I), Z(I)
1780 SOMAX = SOMAX + X(I)
1790 SOMAY = SOMAY + Y(I)
1800 SOMAZ = SOMAZ + Z(I)
1810 NEXT
1820 MEDIAX = SOMAX / NINT
1830 ME1840DIAY = SOMAY / NINT
1850 MEDIAZ = SOMAZ / NINT
1860 FOR I = 1 TO NINT
1870 SPX(I) = (MEDIAX - X(I)) ^ 2
1880 SAPX = SAPX + SPX(I)
1890 SPY(I) = (MEDIAY - Y(I)) ^ 2
1900 SAPY = SAPY + SPY(I)
1910 SPZ(I) = (MEDIAZ - Z(I)) ^ 2
1920 SAPZ = SAPZ + SPZ(I)
1930 NEXT
1940 PRECIX = (SAPX / (NINT - 1)) ^ .5
1950 PRECIY = (SAPY / (NINT - 1)) ^ .5
1960 PRECIZ = (SAPZ / (NINT - 1)) ^ .5
1970 PRECIMX = (PRECIX / (NINT) ^ .5) * 1000
1980 PRECIMY = (PRECIY / (NINT) ^ .5) * 1000
1982 PRECIMZ = (PRECIZ / (NINT) ^ .5) * 1000
1984 PRINT "ALVO N  X   +ou-  Y   +ou-  Z   +ou-  "
1986 PRINT "      (m)  (mm)  (m)  (mm)  (m)  (mm)  "
1988 PRINT : PRINT
1990 M$ = "###  #####.###  ##.##  #####.###  ##.##  #####.###  ##.##  "
1992 LPRINT USING M$; NALVO; MEDIAX; PRECIMX; MEDIAY; PRECIMY; MEDIAZ;
PRECIMZ
1994 LPRINT : PRINT
1996 INPUT "FINALIZAR (1) OU RETORNAR AO MENU (2) "; F
1998 IF F = 1 THEN 1999
1999 RETURN

2000 'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DA OPÇÃO 2
2001 OPEN "CPAR1.TXT" FOR OUTPUT AS #3
2010 PI = 3.141592654#

```



```
1998 IF F = 1 THEN 1999
1999 RETURN
```

```
2000 'SUBROTINA PARA O CÁLCULO DA OPÇÃO 2
2001 OPEN "CPAR1.TXT" FOR OUTPUT AS #3
2010 PI = 3.141592654#
2015 CLS
2020 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (2) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
2030 PRINT TAB(10); "      - ALTURA DO INSTRUMENTO NAS ESTAÇÕES"
2040 PRINT TAB(10); "      - AZIMUTES DE REFERÊNCIA  "
2050 PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS HORIZONTAIS  "
2055 PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS ZENITAIS  "
2060 NINT = 0
2100 PRINT : PRINT
2110 NINT = NINT + 1
2120 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DO ALVO : "; NALVO: PRINT
2130 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA PRIMEIRA ESTAÇÃO"; XEST1: PRINT
2140 INPUT "COORDENADA  X1 = "; X1
2150 INPUT "COORDENADA  Y1 = "; Y1
2160 INPUT "COORDENADA  Z1 = "; Z1: PRINT
2170 INPUT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA PRIMEIRA ESTAÇÃO: EM
M"; HINST1: PRINT
2180 PRINT "ENTRE COM O AZIMUTE DE REFERÊNCIA NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :":
PRINT
2200 INPUT "      GRAUS ="; RGG1
2210 INPUT "      MINUTOS ="; RMM1
2220 INPUT "      SEGUNDOS ="; RSS1: PRINT
2230 AZREF1 = RGG1 + RMM1 / 60 + RSS1 / 3600
2240 AZREF1R = PI * AZREF1 / 180
2250 PRINT "AZREF1R="; AZREF1R: PRINT
2260 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO HORIZONTAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :": PRINT
2270 INPUT "      GRAUS ="; HGG1
2280 INPUT "      MINUTOS ="; HMM1
2290 INPUT "      SEGUNDOS ="; HSS1: PRINT
2300 AHZ1 = HGG1 + HMM1 / 60 + HSS1 / 3600
2310 AHZ1R = PI * AHZ1 / 180
2320 PRINT "AHZ1R="; AHZ1R: PRINT
2330 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :": PRINT
2340 INPUT "      GRAUS ="; GGZ1
2350 INPUT "      MINUTOS ="; MMZ1
2360 INPUT "      SEGUNDOS ="; SSZ1: PRINT
2370 ANGZ1 = GGZ1 + MMZ1 / 60# + SSZ1 / 3600#
2380 ANGZ1R = PI * ANGZ1 / 180#
2390 PRINT "ANGZ1R="; ANGZ1R: PRINT

2400 'CÁLCULO DO AZIMUTE ESTAÇÃO 1 - ALVO
2410 AZ1ALVOP = AZREF1R + AHZ1R
2420 IF AZ1ALVOP <= (2 * PI) THEN 2430 ELSE 2460
2430 AZ1ALVO = AZ1ALVOP
2440 PRINT "AZ1ALVO = "; AZ1ALVO: PRINT
2460 AZ1ALVO = AZ1ALVOP - (2 * PI)
2470 PRINT "AZ1ALVO = "; AZ1ALVO: PRINT

2480 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA SEGUNDA ESTAÇÃO"; XEST2: PRINT
```

```

2540 INPUT "          GRAUS ="; RGG2
2550 INPUT "          MINUTOS ="; RMM2
2560 INPUT "          SEGUNDOS ="; RSS2: PRINT
2570 AZREF2 = RGG2 + RMM2 / 60# + RSS2 / 3600#
2580 AZREF2R = PI * AZREF2 / 180#
2590 PRINT "AZREF2R="; AZREF2R: PRINT
2600 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO HORIZONTAL NA SEGUNDA ESTAÇÃO .": PRINT
2610 INPUT "          GRAUS ="; HGG2
2620 INPUT "          MINUTOS ="; HMM2
2630 INPUT "          SEGUNDOS ="; HSS2: PRINT
2640 AHZ2 = HGG2 + HMM2 / 60# + HSS2 / 3600#
2650 AHZ2R = PI * AHZ2 / 180#
2660 PRINT "AHZ2R="; AHZ2R: PRINT
2670 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA SEGUNDA ESTAÇÃO .": PRINT
2680 INPUT "          GRAUS ="; GGZ2
2690 INPUT "          MINUTOS ="; MMZ2
2700 INPUT "          SEGUNDOS ="; SSZ2: PRINT
2710 ANGZ2 = GGZ2 + MMZ2 / 60# + SSZ2 / 3600#
2720 ANGZ2R = PI * ANGZ2 / 180#
2730 PRINT "ANGZ2R="; ANGZ2R: PRINT

2740 'CÁLCULO DO AZIMUTE ESTAÇÃO 2 - ALVO
2750 AZ2ALVOP = AZREF2R + AHZ2R
2760 IF AZ2ALVOP <= 2 * PI THEN 2780 ELSE 2810
2780 AZ2ALVO = AZ2ALVOP
2790 PRINT "AZ2ALVO = "; AZ2ALVO: PRINT
2810 AZ2ALVO = AZ2ALVOP - (2 * PI)
2820 PRINT "AZ2ALVO = "; AZ2ALVO: PRINT

2830 'CÁLCULOS
2840 B = TAN(AZ2ALVO): PRINT "TAN AZ2ALVO = "; B
2850 A = TAN(AZ1ALVO): PRINT "TAN AZ1ALVO = "; A

2860 IF ABS(B) < ABS(A) THEN 2870 ELSE 2900
2870 YN = (Y1) + (((X2) - (X1)) - ((Y2) - (Y1)) * TAN(AZ2ALVO) / ((TAN(AZ1ALVO)) -
(TAN(AZ2ALVO))))
2880 XN = X2 + ((YN) - (Y2)) * (TAN(AZ2ALVO))
2900 YN = (Y2) + (((X1) - (X2)) - ((Y1) - (Y2)) * TAN(AZ1ALVO) / ((TAN(AZ2ALVO)) -
(TAN(AZ1ALVO))))
2910 XN = X1 + ((YN) - (Y1)) * (TAN(AZ1ALVO))
2920 D1A = SQR(((XN) - (X1)) ^ 2 + ((YN) - (Y1)) ^ 2): PRINT D1A
2930 D2A = SQR(((XN) - (X2)) ^ 2 + ((YN) - (Y2)) ^ 2): PRINT D2A
2940 T1 = TAN(ANGZ1R): PRINT T1
2950 T2 = TAN(ANGZ2R): PRINT T2
2960 ZPA = HINST1 + Z1 + (D1A / (T1)): PRINT ZPA
2970 ZPB = HINST2 + Z2 + (D2A / (T2)): PRINT ZPB
2980 ZN = ((ZPA) + (ZPB)) / 2
2990 PRINT : PRINT
3000 B$ = "          COORDENADAS DO ALVO Nº ### ."
3010 C$ = "DADAS PELA INTERSEÇÃO DAS ESTAÇÕES ### E ### SÃO:"
3020 PRINT USING B$; NALVO: PRINT
3030 PRINT USING C$; XEST1; XEST2: PRINT
3040 F$ = "          XN = #####.###"
3050 G$ = "          YN = #####.###"
3060 H$ = "          ZN = #####.###"

```



```

3000 B$ = "      COORDENADAS DO ALVO Nº ### : "
3010 C$ = "DADAS PELA INTERSEÇÃO DAS ESTAÇÕES ### E ### SÃO:"
3020 PRINT USING B$; NALVO: PRINT
3030 PRINT USING C$; XEST1; XEST2: PRINT
3040 F$ = "          XN = #####.###"
3050 G$ = "          YN = #####.###"
3060 H$ = "          ZN = #####.###"
3070 PRINT USING F$; XN: PRINT USING G$; YN: PRINT USING H$; ZN: PRINT
3080 PRINT #3, XN, YN, ZN
3090 PRINT "VOCE DESEJA CALCULAR OUTRA INTERSEÇÃO PARA O MESMO ALVO?":
PRINT
3100 INPUT "          SIM (1)   NAO (2)"; G: PRINT
3110 IF G = 1 THEN 2110 ELSE GOTO 100
3120 PRINT NINT
3130 CLOSE #3
3140 OPEN "I", 4, "CPARI.TXT"
3150   FOR I = 1 TO NINT
3160     INPUT #3, X(I), Y(I), Z(I)
3170     SOMAX = SOMAX + X(I)
3180     SOMAY = SOMAY + Y(I)
3190     SOMAZ = SOMAZ + Z(I)
3200   NEXT
3210 MEDIAX = SOMAX / NINT
3220 MEDIAY = SOMAY / NINT
3230 MEDIAZ = SOMAZ / NINT
3240   FOR I = 1 TO NINT
3250     SPX(I) = (MEDIAX - X(I)) ^ 2
3260     SAPX = SAPX + SPX(I)
3270     SPY(I) = (MEDIAY - Y(I)) ^ 2
3280     SAPY = SAPY + SPY(I)
3290     SPZ(I) = (MEDIAZ - Z(I)) ^ 2
3300     SAPZ = SAPZ + SPZ(I)
3310   NEXT
3320 PRECIX = (SAPX / (NINT - 1)) ^ .5
3330 PRECIY = (SAPY / (NINT - 1)) ^ .5
3340 PRECIZ = (SAPZ / (NINT - 1)) ^ .5
3350 PRECIMX = (PRECIX / (NINT) ^ .5) * 1000
3360 PRECIMY = (PRECIY / (NINT) ^ .5) * 1000
3370 PRECIMZ = (PRECIZ / (NINT) ^ .5) * 1000
3380 PRINT "ALVO N  X   +ou-  Y   +ou-  Z   +ou-  "
3390 PRINT "      (m)  (mm)  (m)  (mm)  (m)  (mm)  "
3400 PRINT : PRINT
3410 M$ = "###  #####.### ##.## #####.### ##.## #####.### ##.##  "
3420 PRINT USING M$; NALVO; MEDIAX; PRECIMX; MEDIAY; PRECIMY; MEDIAZ;
PRECIMZ
3430 PRINT : PRINT
3440 INPUT "FINALIZAR (1) OU RETORNAR AO MENU (2) "; F
3450 IF F = 1 THEN 3999 ELSE GOTO 100
3999 RETURN

4000 'SUBROTINA PARA O CALCULO DA OPÇÃO 3
4010 OPEN "CPAR2.TXT" FOR OUTPUT AS #5
4020 PI = 3.141592654#
4030 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (3) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES  "

```



```
4100 PRINT : PRINT
4110 NINT = NINT + 1

4120 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DO ALVO : "; NALVO: PRINT

4130 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA PRIMEIRA ESTAÇÃO"; XEST1: PRINT
4140 INPUT "COORDENADA X1 = "; X1
4150 INPUT "COORDENADA Y1 = "; Y1
4160 INPUT "COORDENADA Z1 = "; Z1: PRINT

4170 PRINT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA PRIMEIRA ESTAÇÃO"
4175 INPUT "      EM METROS"; HEST1: PRINT

      PRINT "ENTRE COM AS COORDENADAS PLANAS DO PONTO DE REFERÊNCIA: "
      PRINT "      DA PRIMEIRA ESTAÇÃO : "; PRINT
      INPUT "      XR1 = "; XR1
      INPUT "      YR1 = "; YR1

4180 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :"; PRINT
4190 INPUT "      GRAUS ="; GG1A
4200 INPUT "      MINUTOS ="; MM1A
4210 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS1A: PRINT
4220 Z1A = GG1A + MM1A / 60# + SS1A / 3600#
4230 Z1ARAD = PI * Z1A / 180#
4240 PRINT "Z1ARAD="; Z1ARAD: PRINT

4250 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO HORIZONTAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :"; PRINT
4260 INPUT "      GRAUS ="; HGG1
4270 INPUT "      MINUTOS ="; HMM1
4280 INPUT "      SEGUNDOS ="; HSS1: PRINT
4290 AHZ1 = HGG1 + HMM1 / 60# + HSS1 / 3600#
4300 AHZ1R = PI * AHZ1 / 180#
4310 PRINT "AHZ1R="; AHZ1R: PRINT

4320 INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA SEGUNDA ESTAÇÃO"; XEST2: PRINT
4330 INPUT "COORDENADA X2 = "; X2
4340 INPUT "COORDENADA Y2 = "; Y2
4350 INPUT "COORDENADA Z2 = "; Z2: PRINT

4360 PRINT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA SEGUNDA ESTAÇÃO:"
4370 INPUT "      EM METROS = "; HEST2: PRINT

4380 PRINT "ENTRE COM AS COORDENADAS PLANAS DO PONTO DE REFERÊNCIA: "
4390 PRINT "      DA SEGUNDA ESTAÇÃO : "; PRINT
4400 INPUT "      XR2 = "; XR2
4410 INPUT "      YR2 = "; YR2

4420 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA SEGUNDA ESTAÇÃO :"; PRINT
4430 INPUT "      GRAUS ="; GG2A
4440 INPUT "      MINUTOS ="; MM2A
4450 INPUT "      SEGUNDOS ="; SS2A: PRINT
4460 Z2A = GG2A + MM2A / 60# + SS2 / 3600#
4470 Z2ARAD = PI * Z2A / 180#
4480 PRINT "Z2ARAD="; Z2ARAD: PRINT
```

```

4430 INPUT "          GRAUS ="; GG2A
4440 INPUT "          MINUTOS ="; MM2A
4450 INPUT "          SEGUNDOS ="; SS2A: PRINT
4460 Z2A = GG2A + MM2A / 60# + SS2 / 3600#
4470 Z2ARAD = PI * Z2A / 180#
4480 PRINT "Z2ARAD="; Z2ARAD: PRINT

4490 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO HORIZONTAL NA SEGUNDA ESTAÇÃO .": PRINT
4500 INPUT "          GRAUS ="; HGG2
4510 INPUT "          MINUTOS ="; HMM2
4520 INPUT "          SEGUNDOS ="; HSS2: PRINT
4530 AHZ2 = HGG2 + HMM2 / 60# + HSS2 / 3600#
4540 AHZ2R = PI * AHZ2 / 180#
4550 PRINT "AHZ2R="; AHZ2R: PRINT

4560 'CÁLCULOS:

4570 ' CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE A ESTAÇÃO 1 E O PONTO DE REFERÊNCIA

4580 IF (XR1 - X1) > 0 AND (YR1 - Y1) > 0 THEN GOTO 4590 ELSE GOTO 4600
4590 AZ1REF = ATN((XR1 - X1) / (YR1 - Y1)): PRINT "AZ1REF = "; AZ1REF
4595 GOTO 4630
4600 IF (XR1 - X1) > 0 AND (YR1 - Y1) < 0 THEN GOTO 4610 ELSE GOTO 4614
4610 AZ1REF = PI - ABS(ATN((XR1 - X1) / (YR1 - Y1))): PRINT "AZ1REF = "; AZ1REF
4612 GOTO 4630
4614 IF (XR1 - X1) < 0 AND (YR1 - Y1) < 0 THEN GOTO 4616 ELSE GOTO 4620
4616 AZ1REF = PI + ABS(ATN((XR1 - X1) / (YR1 - Y1))): PRINT "AZ1REF = "; AZ1REF
4618 GOTO 4630
4620 IF (XR1 - X1) < 0 AND (YR1 - Y1) > 0 THEN GOTO 4622 ELSE GOTO 4630
4622 AZ1REF = 2 * PI - ABS(ATN((XR1 - X1) / (YR1 - Y1))): PRINT "AZ1REF = "; AZ1REF
4630 ' CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE A ESTAÇÃO 2 E O PONTO DE REFERÊNCIA

4632 IF (XR2 - X2) > 0 AND (YR2 - Y2) > 0 THEN GOTO 4634 ELSE GOTO 4638
4634 AZ2REF = ATN((XR2 - X2) / (YR2 - Y2)): PRINT "AZ2REF = "; AZ2REF
4636 GOTO 4680
4638 IF (XR2 - X2) > 0 AND (YR2 - Y2) < 0 THEN GOTO 4640 ELSE GOTO 4644
4640 AZ2REF = PI - ABS(ATN((XR2 - X2) / (YR2 - Y2))): PRINT "AZ2REF = "; AZ2REF
4642 GOTO 4680
4644 IF (XR2 - X2) < 0 AND (YR2 - Y2) < 0 THEN GOTO 4646 ELSE GOTO 4650
4646 AZ2REF = PI + ABS(ATN((XR2 - X2) / (YR2 - Y2))): PRINT "AZ1REF = "; AZ2REF
4648 GOTO 4680
4650 IF (XR2 - X2) < 0 AND (YR2 - Y2) > 0 THEN GOTO 4660 ELSE GOTO 4680
4660 AZ2REF = 2 * PI - ABS(ATN((XR2 - X2) / (YR2 - Y2))): PRINT "AZ2REF = "; AZ2REF

4680 'CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE A ESTAÇÃO 1 E O ALVO

4690 AZ1ALVOP = AZ1REF + AHZ1R
4700 IF AZ1ALVOP < 2 * PI THEN 4710 ELSE 4720
4710 AZ1ALVO = AZ1ALVOP
4720 AZ1ALVO = AZ1ALVOP - (2 * PI)

4730 'CÁLCULO DO AZIMUTE ENTRE A ESTAÇÃO 2 E O ALVO

4740 AZ2ALVOP = AZ2REF + AHZ2R
4750 IF AZ2ALVOP < 2 * PI THEN 4760 ELSE 4770

```



```

4800 IF ABS(B) <= ABS(A) THEN 4810 ELSE 4830
4810 YN = (Y1) + (((X2) - (X1)) - ((Y2) - (Y1)) * TAN(AZ2ALVO) / ((TAN(AZ1ALVO)) -
(TAN(AZ2ALVO))))
4820 XN = X2 + ((YN) - (Y2)) * (TAN(AZ2ALVO))
4830 YN = (Y2) + (((X1) - (X2)) - ((Y1) - (Y2)) * TAN(AZ1ALVO) / ((TAN(AZ2ALVO)) -
(TAN(AZ1ALVO))))
4840 XN = X1 + ((YN) - (Y1)) * (TAN(AZ1ALVO))
4850 D1A = SQR(((XN) - (X1)) ^ 2 + ((YN) - (Y1)) ^ 2): PRINT D1A
4860 D2A = SQR(((XN) - (X2)) ^ 2 + ((YN) - (Y2)) ^ 2): PRINT D2A
4870 T1 = TAN(Z1ARAD): PRINT T1
4880 T2 = TAN(Z2ARAD): PRINT T2
4890 ZPA = HEST1 + Z1 + (D1A / (T1)): PRINT ZPA
4900 ZPB = HEST2 + Z2 + (D2A / (T2)): PRINT ZPB
4910 ZN = ((ZPA) + (ZPB)) / 2
4920 PRINT : PRINT
4930 B$ = "      COORDENADAS DO ALVO Nº ### : "
4940 C$ = "DADAS PELA INTERSEÇÃO DAS ESTAÇÕES ### E ### SÃO: "
4950 PRINT USING B$; NALVO: PRINT
4960 PRINT USING C$; XEST1; XEST2: PRINT
4970 F$ = "      XN = #####.###"
4980 G$ = "      YN = #####.###"
4990 H$ = "      ZN = #####.###"
5000 PRINT USING F$; XN: PRINT USING G$; YN: PRINT USING H$; ZN: PRINT
5010 PRINT #5, XN, YN, ZN
5020 PRINT "VOCE DESEJA CALCULAR OUTRA INTERSEÇÃO PARA O MESMO ALVO?":
PRINT
5030 INPUT "      SIM (1)  NÃO (2)"; G: PRINT
5040 IF G = 1 THEN 4110 ELSE GOTO 100
5050 PRINT NINT
5060 CLOSE #5
5070 OPEN "I", 6, "CPAR2.TXT"
5080   FOR I = 1 TO NINT
5090     INPUT #5, X(I), Y(I), Z(I)
5100     SOMAX = SOMAX + X(I)
5110     SOMAY = SOMAY + Y(I)
5120     SOMAZ = SOMAZ + Z(I)
5130   NEXT
5140 MEDIAX = SOMAX / NINT
5150 MEDIAY = SOMAY / NINT
5160 MEDIAZ = SOMAZ / NINT
5170   FOR I = 1 TO NINT
5180     SPX(I) = (MEDIAX - X(I)) ^ 2
5190     SAPX = SAPX + SPX(I)
5200     SPY(I) = (MEDIAY - Y(I)) ^ 2
5210     SAPY = SAPY + SPY(I)
5220     SPZ(I) = (MEDIAZ - Z(I)) ^ 2
5230     SAPZ = SAPZ + SPZ(I)
5240   NEXT
5250 PRECIX = (SAPX / (NINT - 1)) ^ .5
5260 PRECIY = (SAPY / (NINT - 1)) ^ .5
5270 PRECIZ = (SAPZ / (NINT - 1)) ^ .5
5280 PRECIMX = (PRECIX / (NINT) ^ .5) * 1000
5290 PRECIMY = (PRECIY / (NINT) ^ .5) * 1000
5300 PRECIMZ = (PRECIZ / (NINT) ^ .5) * 1000
5310 PRINT "ALVO N  X  +ou-  Y  +ou-  Z  +ou-  "

```



```

5320 PRINT "      (m)   (mm)   (m)   (mm)   (m)   (mm)   "
5330 PRINT : PRINT
5340 M$ = "###  #####.### ##.## #####.### ##.## #####.### ##.## "
5350 PRINT USING M$; NALVO; MEDIAX; PRECIMX; MEDIAY; PRECIMY; MEDIAZ;
PRECIMZ
5360 PRINT : PRINT
5370 INPUT "FINALIZAR (1) OU RETORNAR AO MENU (2) "; F
5380 IF F = 1 THEN 6999 ELSE GOTO 100
6999 RETURN

```

LISTAGEM DO PROGRAMA MEDIAARI.BAS

```

DEFDBL A-Z
KEY OFF: COLOR 15, 6, 10
CLS
'PROGRAMA PAR FORNECER A MÉDIA ARITMÉTICA DE UM CONJUNTO DE NÚMEROS
'A PRECISÃO DAS MEDIDAS E A PRECISÃO DA MÉDIA
DIM X(25), Y(25), Z(25), SPX(25), SPY(25), SPZ(25)
NINT = 10
1755 OPEN "I", 1, "CLA-2.TXT"
1760 FOR I = 1 TO NINT
1770 INPUT #1, X(I), Y(I), Z(I)
1780 SOMAX = SOMAX + X(I)
1790 SOMAY = SOMAY + Y(I)
1800 SOMAZ = SOMAZ + Z(I)
1810 NEXT
1820 MEDIAX = SOMAX / NINT
1830 MEDIAY = SOMAY / NINT
1850 MEDIAZ = SOMAZ / NINT
1860 FOR I = 1 TO NINT
1870 SPX(I) = (MEDIAX - X(I)) ^ 2
1880 SAPX = SAPX + SPX(I)
1890 SPY(I) = (MEDIAY - Y(I)) ^ 2
1900 SAPY = SAPY + SPY(I)
1910 SPZ(I) = (MEDIAZ - Z(I)) ^ 2
1920 SAPZ = SAPZ + SPZ(I)
1930 NEXT
1940 PRECIX = (SAPX / (NINT - 1)) ^ .5
1950 PRECIY = (SAPY / (NINT - 1)) ^ .5
1960 PRECIZ = (SAPZ / (NINT - 1)) ^ .5
1970 PRECIMX = (PRECIX / (NINT) ^ .5) * 1000
1980 PRECIMY = (PRECIY / (NINT) ^ .5) * 1000
1982 PRECIMZ = (PRECIZ / (NINT) ^ .5) * 1000
1984 PRINT "ALVO N   X   +ou-   Y   +ou-   Z   +ou-   "
1986 PRINT "      (m)   (mm)   (m)   (mm)   (m)   (mm)   "

1990 M$ = "###  #####.##### ##.## #####.##### ##.## #####.##### ##.## "
1992 PRINT USING M$; NALVO; MEDIAX; PRECIMX; MEDIAY; PRECIMY; MEDIAZ;
PRECIMZ
END

```

3. Dados de entrada que alimentam o programa

Os dados necessários à execução do programa são relacionados a seguir, sendo também indicado qual a origem desse dados.

3.1 Coordenadas tridimensionais das estações

As coordenadas tridimensionais das estações são as mesmas empregadas pelos demais métodos para o cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos, constantes da Tabela I.1 do Apêndice I.

3.2. - Leituras da mira em cada estação

As leituras da mira estão relacionadas na Tabela A.2 do Anexo A.

3.3. - Ângulos horizontais e zenitais lidos em cada estação

Os ângulos horizontais e zenitais lidos em cada uma das estações estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

3.4. - Azimutes calculados

Em cada estação os ângulos horizontais dever ser transformados em azimutes para entrada no programa, via teclado. Os azimutes calculados em função dos ângulos horizontais lidos estão na Tabela A.3 do Anexo A.

4 - Exemplo numérico

Com os dados de campo utilizados pelos demais programas, para calcular-se as coordenadas das extremidades da mira horizontal, pelo programa 03, INTER2.BAS, obteve-se os seguintes resultados apresentados nos itens 4.1 e 4.2.

4.1 - Para a extremidade 1 da mira horizontal

Os valores obtidos para as coordenadas da extremidade 1 da mira horizontal estão gravados no arquivo CLA-1.TXT, criando para saída dos dados no programa 03 e constantes da Tabela III.1.

TABELA III. 1 - Coordenadas calculadas pelo programa 05, para a extremidade 1 da mira.

COORDENADAS DA EXTREMIDADE 1 DA MIRA HORIZONTAL			
COMBINAÇÕES	COORDENADAS (m)		
I-J	XP (m)	YP (m)	ZP (m)
1-2	103,528314	95,241348	102,153096
1-3	103,526853	95,244159	102,152899
1-4	103,527700	95,242529	102,151700
1-5	103,531076	95,236036	102,152614
2-3	103,523958	95,246726	102,153077
2-4	103,527059	95,242898	102,152081
2-5	103,532969	95,235601	102,153120
3-4	103,530512	95,240913	102,152322
3-5	103,537736	95,234505	102,153322
4-5	103,544273	95,233003	102,152275
MÉDIAS (m)	103,531045	95,239772	102,152651
PRECISÕES (m)	1,90 (mm)	1,47 (mm)	0,17 (mm)

4.2 - Para a extremidade 2 da mira horizontal:

Os valores obtidos para as coordenadas da extremidade 2 da mira horizontal estão gravados no arquivo CLA-2.TXT, criando para saída dos dados no programa 03 e constantes da Tabela III.2.

TABELA III. 2 - Coordenadas calculadas pelo programa 05, para a extremidade 2 da mira.

COORDENADAS DA EXTREMIDADE 2 DA MIRA HORIZONTAL			
COMBINAÇÕES	COORDENADAS (m)		
I-J	XP (m)	YP (m)	ZP (m)
1-2	102,300146	93,664243	102,158467
1-3	102,300212	93,664082	102,158261
1-4	102,300128	93,664289	102,156900
1-5	102,302595	93,658258	102,157676
2-3	102,300357	93,663926	102,158835
2-4	102,300105	93,664305	102,157460
2-5	102,304561	93,657587	102,158334
3-4	102,299810	93,664517	102,157224
3-5	102,306896	95,656758	102,158197
4-5	102,313884	93,654402	102,157175
MÉDIAS (m)	102,302878	93,661237	102,157853
PRECISÕES (mm)	1,44 (mm)	1,26 (mm)	0,21 (mm)

5. Resultados obtidos

Adotou-se para os arredondamentos, nos cálculos das coordenadas dos alvos, extremidades 1 e 2 da mira, níveis de significância com 4 e 6 casas decimais. Desse modo, calculou-se o comprimento da mira horizontal, através das coordenadas determinadas pelo método proposto. Os valores encontrados são comparados com o valor padronizado, que é de 2000mm, por injunção, considerado exato.

Observa-se que as precisões aparentes, calculadas em função das médias das determinações, pelos critérios propostos, são menores do que 1mm, conforme Tabelas (III.1) e (III.2). Pode-se assegurar que o método proposto, dentro das restrições técnicas do aparelho topográfico utilizado, apresenta resultados compatíveis.

Comparando-se os valores obtidos para o comprimento da mira horizontal, calculados com os dois níveis de significância, conforme Tabela III.3, avalia-se que o método proposto apresenta boa precisão.

TABELA III. 3- Valor padrão e valores calculados para o comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância

Parâmetros avaliados	Níveis de Significância	
	4 casas decimais	6 casas decimais
Valor padronizado (mm)	2000,0000	2000,000000
Valor calculado (mm)	2000,0586	2000,047882
Diferença ¹ (mm)	-0,06	-0,05

1. Diferença entre o valor padronizado e o valor calculado em função das coordenadas obtidas através do método Clássico.

Pode-se afirmar, porque os índices de variação, em relação ao comprimento padronizado, são da ordem de 1/33.333 e 1/40.000, respectivamente, para os dois níveis de significância, que foram propostos para os arredondamentos nos cálculos das coordenadas espaciais dos pontos.

APÊNDICE IV

Programa Computacional 04

Determinação das coordenadas tridimensionais dos alvos com superdeterminação de visadas - IBIAPINA (1993)

1 - Considerações Gerais

Neste Apêndice apresenta-se o programa computacional 04, DANIELE.BAS, que calcula as coordenadas tridimensionais dos alvos, empregando superdeterminação de visadas; e o programa MEDIAARI.BAS, que calcula as precisões dessas coordenadas (desvio padrão em relação à média), bem como os resultados de um exemplo numérico, com os mesmos dados de campo empregados para a execução dos demais programas.

O programa DANIELE.BAS foi elaborado em Quick-Basic e necessita, para a sua execução, da entrada dos dados de campo via teclado. No programa, somente a opção (1) está ativada e os seguintes dados de entrada são solicitados na tela:

- 1 - número do alvo;
- 2 - número da estação;
- 3 - coordenadas da estação;
- 4 - altura do instrumento;
- 5 - azimute estação-alvo;

6 - ângulo zenital da estação em relação ao alvo.

2 - Programa Computacional 04

LISTAGEM DO PROGRAMA DANIELE.BAS

```

10 DEFDBL A-Z
20 KEY OFF: COLOR 15, 6, 10
30 PRINT TAB(10); "*****"
40 PRINT TAB(10); "***  DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS ESPACIAIS  ***"
50 PRINT TAB(10); "***    COM SUPERDETERMINAÇÃO DE MEDIDAS    ***"
60 PRINT TAB(10); "***  DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES - MENSURAÇÃO ***"
70 PRINT TAB(10); "***  ELABORAÇÃO DO PROGRAMA: ATTUS P. MOREIRA  ***"
80 PRINT TAB(10); "***                      EMAIL: attuspm@ccr.ufsm.br                      ***"
90 PRINT TAB(10); "*****"
95 PRINT
PRINT TAB(10); "  PROGRAMA PRINCIPAL  "; PRINT
101 PRINT TAB(10); "  OPÇÕES DE ENTRADA  "; PRINT
102 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (1) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
103 PRINT TAB(10); "      - ALTURAS DOS INSTRUMENTOS  "
104 PRINT TAB(10); "      - AZIMUTES ESTAÇÕES-ALVOS  "
PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS ZENITAIS  "; PRINT
107 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (2) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
108 PRINT TAB(10); "      - ALTURAS DOS INSTRUMENTOS  "
PRINT TAB(10); "      - COORDENADAS DO PONTO DE ORIENTAÇÃO "
109 PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS HORIZONTAIS  "
PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS ZENITAIS  "; PRINT
PRINT TAB(10); "OPCAO (3) - FINALIZAR O PROGRAMA"
PRINT

110 INPUT "  ESCOLHA A OPÇÃO DE ENTRADA: (1) - (2) - (3) "; F
CLS
130 IF F > 3 THEN GOTO 101
160 IF F = 1 THEN GOSUB 1000
170 IF F = 2 THEN GOSUB 2000

' PRINT "PROGRAMA - INTERCEÇÃO ESPACIAL ANALÍTICA"
' PRINT "      COM SUPERDETERMINAÇÃO DE MEDIDAS"
' PRINT
' PRINT "ORIENTADOR: IRINEU DA SILVA - PROFESSOR DOUTOR"
' PRINT "ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS - USP - SP"
' PRINT
' PRINT
' PRINT "AUTORIA: ATTUS PEREIRA MOREIRA - PROFESSOR ASSISTENTE"
' PRINT "DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA RURAL - UFSM"
' PRINT "TELEFONE: (055) 226-16-16 - RAMAL: 3176"
' PRINT "SANTA MARIA - RS - 97119-900"
' PRINT

```

END

```

1000 'CÁLCULO DA OPÇÃO (1)
1010 PRINT TAB(10); "OPÇÃO (1) - COORDENADAS DAS ESTAÇÕES"
1020 PRINT TAB(10); "      - ALTURAS DOS INSTRUMENTOS  "
1030 PRINT TAB(10); "      - ÂNGULOS ZENITAIS  "
1040 PRINT TAB(10); "      - AZIMUTES ESTAÇÕES-ALVOS  ": PRINT
1050 'ENTRADA DOS DADOS
PI = 3.141592654#
1060 NINT = 0
NINT = NINT + 1
INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DO ALVO : "; NALVO: PRINT
INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA PRIMEIRA ESTAÇÃO"; XEST1: PRINT
INPUT "COORDENADA  X1 = "; X1
INPUT "COORDENADA  Y1 = "; Y1
INPUT "COORDENADA  Z1 = "; Z1: PRINT
PRINT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA PRIMEIRA ESTAÇÃO : "
INPUT "      EM METROS"; HEST1: PRINT
PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL NA PRIMEIRA ESTAÇÃO :": PRINT
INPUT "      GRAUS ="; GG1A
INPUT "      MINUTOS ="; MM1A
INPUT "      SEGUNDOS ="; SS1A: PRINT
Z1A = GG1A + MM1A / 60# + SS1A / 3600#
Z1RAD = PI * Z1A / 180#
PRINT "Z1RAD="; Z1RAD: PRINT
PRINT "ENTRE COM O AZIMUTE ENTRE A PRIMEIRA ESTAÇÃO E O ALVO :": PRINT
INPUT "      GRAUS ="; GG1
INPUT "      MINUTOS ="; MM1
INPUT "      SEGUNDOS ="; SS1: PRINT
AZ1 = GG1 + MM1 / 60# + SS1 / 3600#
AZ1RAD = PI * AZ1 / 180#
PRINT "AZ1RAD="; AZ1RAD: PRINT
INPUT "ENTRE COM O NÚMERO DA SEGUNDA ESTAÇÃO"; XEST2: PRINT
INPUT "COORDENADA  X2 = "; X2
INPUT "COORDENADA  Y2 = "; Y2
INPUT "COORDENADA  Z2 = "; Z2: PRINT
PRINT "ENTRE COM A ALTURA DO INSTRUMENTO NA SEGUNDA ESTAÇÃO : "
INPUT "      EM METROS"; HEST2: PRINT
PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO ZENITAL ENTRE A SEGUNDA ESTAÇÃO E O ALVO :":
PRINT
INPUT "      GRAUS ="; GG2A
INPUT "      MINUTOS ="; MM2A
INPUT "      SEGUNDOS ="; SS2A: PRINT
Z2A = GG2A + MM2A / 60# + SS2A / 3600#
Z2RAD = PI * Z2A / 180#
PRINT "Z2RAD="; Z2RAD: PRINT
PRINT "ENTRE COM O AZIMUTE ENTRE A SEGUNDA ESTAÇÃO E O ALVO :": PRINT
INPUT "      GRAUS ="; GG2
INPUT "      MINUTOS ="; MM2
INPUT "      SEGUNDOS ="; SS2: PRINT
AZ2 = GG2 + MM2 / 60# + SS2 / 3600#

```

```

AZ2RAD = PI * AZ2 / 180#
PRINT "AZ2RAD="; AZ2RAD: PRINT
' CÁLCULOS:
  A1 = SIN(Z1RAD) * SIN(AZ1RAD): ' PRINT "A1 = "; A1
  B1 = SIN(Z1RAD) * COS(AZ1RAD): ' PRINT "B1 = "; B1
  C1 = COS(Z1RAD): ' PRINT "C1 = "; C1
  A2 = SIN(Z2RAD) * SIN(AZ2RAD): ' PRINT "A2 = "; A2
  B2 = SIN(Z2RAD) * COS(AZ2RAD): ' PRINT "B2 = "; B2
  C2 = COS(Z2RAD): ' PRINT "C2 = "; C2

MA1P = (B1 * C2) - (B2 * C1): ' PRINT "MA1P="; MA1P
MB1P = (C1 * A2) - (C2 * A1): ' PRINT "MB1P="; MB1P
MC1P = (A1 * B2) - (B1 * A2): ' PRINT "MC1P="; MC1P

RAIZ = SQR((MA1P) ^ 2 + (MB1P) ^ 2 + (MC1P) ^ 2)
MA1 = MA1P / RAIZ: ' PRINT "MA1="; MA1
MB1 = MB1P / RAIZ: ' PRINT "MB1="; MB1
MC1 = MC1P / RAIZ: ' PRINT "MC1="; MC1
NA2 = (-1) * (MA1)
NB2 = (-1) * (MB1)
NC2 = (-1) * (MC1)

' VERIFICAÇÃO DO MÓDULO DO VERSOR (MA1,MB1,MC1):
MD = SQR((MA1) ^ 2 + (MB1) ^ 2 + (MC1) ^ 2): PRINT MD
' PRINT X1: PRINT Y1: PRINT Z1
' PRINT X2: PRINT Y2: PRINT Z2
T1 = (X2) - (X1): ' PRINT T1
T2 = (Y2) - (Y1): ' PRINT T2
T3 = (Z2) + (HEST2) - (Z1) - (HEST1): PRINT T3

' CÁLCULO DO PRIMEIRO DETERMINANTE PRINCIPAL
A10 = (A1 * MB1) * (-C2): ' PRINT A10
A11 = (B1 * MC1) * (-A2): ' PRINT A11
A12 = (C1 * MA1) * (-B2): ' PRINT A12
B10 = (C1 * MB1) * (-A2): ' PRINT B10
B11 = (B1 * MA1) * (-C2): ' PRINT B11
B12 = (A1 * MC1) * (-B2): ' PRINT B12
DELTA = (A10) + (A11) + (A12) - (B10) - (B11) - (B12)
' PRINT "DELTA = "; DELTA

' CÁLCULO DO PRIMEIRO DETERMINANTE SECUNDÁRIO
C10 = (A1 * MB1) * (T3): ' PRINT C10
C11 = (B1 * MC1) * (T1): ' PRINT C11
C12 = (C1 * MA1) * (T2): ' PRINT C12
D10 = (C1 * MB1) * (T1): ' PRINT D10
D11 = (B1 * MA1) * (T3): ' PRINT D11
D12 = (A1 * MC1) * (T2): ' PRINT D12
DMR = (C10) + (C11) + (C12) - (D10) - (D11) - (D12)
' PRINT "DMR = "; DMR

```



```

' CÁLCULO DO PRIMEIRO COEFICIENTE:
MR = DMR / DELTA
' PRINT "MR = "; MR
'COORDENADAS DA INTERSEÇÃO ENTRE O PLANO QUE PASSA PELA PRIMEIRA ESTAÇÃO
'   E A RETA QUE PARTE DA SEGUNDA ESTAÇÃO
CLS
PRINT ; " AS COORDENADAS SÃO:"
XX = (X2) + ((MR) * (A2))
YY = (Y2) + ((MR) * (B2))
ZZ = ((Z2) + (HEST2)) + ((MR) * (C2))
AA$ = "      XX = #####.##### "
AB$ = "      YY = #####.##### "
AC$ = "      ZZ = #####.##### "
PRINT USING AA$; XX
PRINT USING AB$; YY
PRINT USING AC$; ZZ

' CÁLCULO DO SEGUNDO DETERMINANTE PRINCIPAL
A10B = (A2 * NB2) * (-C1): ' PRINT A10B
A11B = (B2 * NC2) * (-A1): ' PRINT A11B
A12B = (C2 * NA2) * (-B1): ' PRINT A12B
B10B = (C2 * NB2) * (-A1): ' PRINT B10B
B11B = (B2 * NA2) * (-C1): ' PRINT B11B
B12B = (A2 * NC2) * (-B1): ' PRINT B12B
DELTA2 = (A10B) + (A11B) + (A12B) - (B10B) - (B11B) - (B12B)
' PRINT "DELTA2 = "; DELTA2

' CÁLCULO DO SEGUNDO DETERMINANTE SECUNDÁRIO
C10C = (A2 * NB2) * (-T3): ' PRINT C10C
C11C = (B2 * NC2) * (-T1): ' PRINT C11C
C12C = (C2 * NA2) * (-T2): ' PRINT C12C
D10C = (C2 * NB2) * (-T1): ' PRINT D10C
D11C = (B2 * NA2) * (-T3): ' PRINT D11C
D12C = (A2 * NC2) * (-T2): ' PRINT D12C
DMR2 = (C10C) + (C11C) + (C12C) - (D10C) - (D11C) - (D12C)
' PRINT "DMR2 = "; DMR2

' CÁLCULO DO SEGUNDO COEFICIENTE:
MR2 = DMR2 / DELTA2
' PRINT "MR2 = "; MR2
'COORDENADAS DA INTERSEÇÃO ENTRE O PLANO QUE PASSA PELA SEGUNDA ESTAÇÃO
'   E A RETA QUE PARTE DA PRIMEIRA ESTAÇÃO
PRINT : PRINT
XXX = (X1) + ((MR2) * (A1))
YYY = (Y1) + ((MR2) * (B1))
ZZZ = ((Z1) + (HEST1)) + ((MR2) * (C1))
PRINT : PRINT
BA$ = "      XXX = #####.##### "
BB$ = "      YYY = #####.##### "
BC$ = "      ZZZ = #####.##### "
PRINT USING BA$; XXX

```

```

PRINT USING BB$; YYY
PRINT USING BC$; ZZZ
PRINT : PRINT : PRINT
'PONTO M□DIO
XMEDIO = (XX + XXX) / 2
YMEDIO = (YY + YYY) / 2
ZMEDIO = (ZZ + ZZZ) / 2
CA$ = "      XMEDIO = #####.#####"
CB$ = "      YMEDIO = #####.##### "
CC$ = "      ZMEDIO= #####.#####"
PRINT USING CA$; XMEDIO
PRINT USING CB$; YMEDIO
PRINT USING CC$; ZMEDIO
RETURN

```

LISTAGEM DO PROGRAMA MEDIAARI.BAS

```

DEFDBL A-Z
KEY OFF: COLOR 15, 6, 10
CLS
'PROGRAMA PAR FORNECER A MÉDIA ARITM□TICA DE UM CONJUNTO DE NÚMEROS
'A PRECISÃO DAS MEDIDAS E A PRECISÃO DA MÉDIA
DIM X(25), Y(25), Z(25), SPX(25), SPY(25), SPZ(25)
NINT = 10
1755 OPEN "I", 1, "CLA-2.TXT"
1760 FOR I = 1 TO NINT
1770 INPUT #1, X(I), Y(I), Z(I)
1780 SOMAX = SOMAX + X(I)
1790 SOMAY = SOMAY + Y(I)
1800 SOMAZ = SOMAZ + Z(I)
1810 NEXT
1820 MEDIAX = SOMAX / NINT
1830 MEDIAY = SOMAY / NINT
1850 MEDIAZ = SOMAZ / NINT
1860 FOR I = 1 TO NINT
1870 SPX(I) = (MEDIAX - X(I)) ^ 2
1880 SAPX = SAPX + SPX(I)
1890 SPY(I) = (MEDIAY - Y(I)) ^ 2
1900 SAPY = SAPY + SPY(I)
1910 SPZ(I) = (MEDIAZ - Z(I)) ^ 2
1920 SAPZ = SAPZ + SPZ(I)
1930 NEXT
1940 PRECIX = (SAPX / (NINT - 1)) ^ .5
1950 PRECIY = (SAPY / (NINT - 1)) ^ .5
1960 PRECIZ = (SAPZ / (NINT - 1)) ^ .5
1970 PRECIMX = (PRECIX / (NINT) ^ .5) * 1000
1980 PRECIMY = (PRECIY / (NINT) ^ .5) * 1000
1982 PRECIMZ = (PRECIZ / (NINT) ^ .5) * 1000
1984 PRINT "ALVO N   X   +ou-   Y   +ou-   Z   +ou-   "
1986 PRINT "      (m)  (mm)  (m)  (mm)  (m)  (mm)  "

```

```
1990 M$ = "### #####.##### ##.## #####.##### ##.## #####.##### ##.## "  
1992 PRINT USING M$; NALVO; MEDIAX; PRECIMX; MEDIAY; PRECIMY; MEDIAZ; PRECIMZ  
END
```

3. Dados de entrada que alimentam o programa

Os dados necessários à execução do programa são relacionados a seguir, sendo também indicado a origem desses dados.

3.1 Coordenadas tridimensionais das estações

As coordenadas tridimensionais das estações são as mesmas empregadas pelos demais métodos para o cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos, constantes da Tabela I.1 do Apêndice I.

3.2. - Leituras da mira em cada estação

As leituras da mira estão relacionadas na Tabela A.2 do Anexo A.

3.3. - Ângulos horizontais e zenitais lidos em cada estação

Os ângulos horizontais e zenitais lidos em cada uma das estações estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

3.4. - Azimutes calculados

Em cada estação os ângulos horizontais dever ser transformados em azimutes para entrada no programa, via teclado. Os azimutes calculados em função dos

ângulos horizontais lidos estão na Tabela A.3 do Anexo A.

4 - Exemplo numérico

Com os dados de campo utilizados pelos demais programas, para calcular-se as coordenadas das extremidades da mira horizontal, pelo programa 04, DANIELE.BAS, obteve-se os seguintes resultados apresentados nos itens 4.1 e 4.2.

4.1 - Para a extremidade 1 da mira horizontal

Os valores obtidos para as coordenadas da extremidade 1 da mira horizontal estão gravados no arquivo IBIA-1.TXT, criando para saída dos dados no programa 04 e constantes da Tabela IV.1.

TABELA IV. 1 - Coordenadas calculadas pelo programa 04, para a extremidade 1 da mira.

COORDENADAS DA EXTREMIDADE 1 DA MIRA HORIZONTAL			
COMBINAÇÕES	COORDENADAS (m)		
I-J	XP (m)	YP (m)	ZP (m)
1-2	103,528356	95,241279	102,153102
1-3	103,526920	95,244063	102,152908
1-4	103,527622	95,242635	102,151691
1-5	103,531056	95,236072	102,152611
2-3	103,523997	95,246685	102,153081
2-4	103,526772	95,243162	102,152055
2-5	103,532895	95,235671	102,153113
3-4	103,530126	95,241200	102,152295
3-5	103,537671	95,234553	102,153317
4-5	103,544308	95,232985	102,152277
MÉDIAS (m)	103,530972	95,239831	102,152645
PRECISÕES (mm)	1,91 (mm)	1,47 (mm)	0,17 (mm)

4.2 - Para a extremidade 2 da mira horizontal

Os valores obtidos para as coordenadas da extremidade 2 da mira horizontal estão gravados no arquivo IBIA-2.TXT, criando para saída dos dados no programa 04 e constantes da Tabela IV.2.

TABELA IV. 2 - Coordenadas calculadas pelo programa 04, para a extremidade 2 da mira

COMBINAÇÕES	COORDENADAS DA EXTREMIDADE 2 DA MIRA HORIZONTAL		
	COORDENADAS (m)		
I-J	XP (m)	YP (m)	ZP (m)
1-2	102,300175	93,664181	102,158472
1-3	102,300249	93,664016	102,158266
1-4	102,300062	93,664402	102,156891
1-5	102,302579	93,658303	102,157672
2-3	102,300234	93,663926	102,158835
2-4	102,299818	93,664628	102,157432
2-5	102,304486	93,657679	102,158326
3-4	102,299496	93,664804	102,157200
3-5	102,306937	95,656807	102,158193
4-5	102,313900	93,654391	102,157176
MÉDIAS (m)	102,302794	93,661329	102,157845
PRECISÕES (mm)	1,45 (mm)	1,28 (mm)	0,21(mm)

5. Resultados obtidos

Adotou-se para os arredondamentos, nos cálculos das coordenadas dos alvos, extremidades 1 e 2 da mira, níveis de significância com 4 e 6 casas decimais. Desse modo, calculou-se o comprimento da mira horizontal, através das coordenadas. Os valores encontrados são comparados com o valor padronizado, que é de 2000mm, por injunção, considerado exato.

Observa-se que as precisões aparentes, calculadas em função das médias das determinações, em função das respectivas médias, são menores do que 2mm, conforme Tabelas IV.1 e IV.2. Pode-se assegurar que o presente método, dentro das restrições técnicas do aparelho topográfico utilizado, apresenta resultados compatíveis.

Comparando-se os valores obtidos para o comprimento da mira horizontal, calculados com os dois níveis de significância, conforme Tabela IV.3, avalia-se que o método proposto apresenta boa precisão.

TABELA IV. 9- Valor padrão e valores calculados para o comprimento da mira horizontal (mm) e suas respectivas diferenças para dois níveis de significância

Parâmetros avaliados	Níveis de Significância	
	4 CASAS DECIMAIS	6 CASAS DECIMAIS
Valor padronizado (mm)	2000,0000	2000,000000
Valor calculado (mm)	2000,0411	2000,029200
Diferença ¹ (mm)	-0,04	-0,03

1. Diferença entre o valor padronizado e o valor calculado em função das coordenadas obtidas através do método de interseção espacial analítica com superdeterminação de medidas. (IBIAPINA, 1993).

Pode-se afirmar, porque os índices de variação, em relação ao comprimento padronizado, são da ordem de 1/50000 e 1/66666, respectivamente, para os dois níveis de significância, que foram propostos para os arredondamentos nos cálculos das coordenadas espaciais dos pontos.

APÊNDICE V

Cálculo de coordenadas tridimensionais: Método das Distâncias Mínimas

1 - Considerações Gerais

Este apêndice contém os dados de campo e os cálculos, implementados pela planilha eletrônica EXCEL, para a metodologia desenvolvida no Capítulo 9 do presente trabalho. Para a execução de um exemplo prático, usou-se uma mira horizontal calibrada, determinando-se o seu comprimento, através das coordenadas tridimensionais, obtidas pelo referido método. O comprimento assim obtido foi comparado ao comprimento padronizado, para testar-se a validade desse método.

2. Dados necessários para a implementação do método

Os dados de campo são os mesmos utilizados para os cálculos das coordenadas das extremidades da mira pelos demais métodos, tanto os métodos propostos quanto os

já existentes. Em cada uma das extremidades da mira horizontal há um alvo móvel, acoplado a ela, para permitir a execução das leituras angulares. Esses alvos são denominados 1, para a extremidade esquerda da mira e 2 para a extremidade direita, tomando-se como referência a estação.

2.1 – Coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos

As coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos são as mesmas empregadas pelos demais métodos para o cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos, constantes da Tabela I.2 do Apêndice I.

2.2. - Leituras da mira em cada estação

As leituras da mira estão relacionadas na Tabela A.2 do Anexo A.

2.3. - Ângulos horizontais e zenitais lidos em cada estação

Os ângulos horizontais e zenitais lidos em cada uma das estações estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

2.4. - Azimutes calculados

Em cada estação os ângulos horizontais dever ser transformados em

azimutes para entrada no programa, via teclado. Os azimutes calculados em função dos ângulos horizontais lidos estão na Tabela A.3 do Anexo A.

3. Cálculos executados pela planilha EXCEL

DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DAS DISTÂNCIAS

DETERMINAÇÃO DOS VERSORES

TEODOLITO 1 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
85	39	26	1.495001
152	31	44	2.662131

0.459977

-0.884696

0.075723

MODULO= 1

TEODOLITO 2 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
85	52	54	1.498918
140	59	36	2.460798

0.627786

-0.775066

0.071817

MODULO= 1

TEODOLITO 3 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
86	37	54	1.512008
131	34	20	2.296368

0.746827

-0.662417

0.058755

MODULO= 1

TEODOLITO 4 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
87	3	49	1.519547
119	53	31	2.092509
0.865829		MODULO=	1
-0.497712			
0.051227			

TEODOLITO 5- EXTREMIDADE 1 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
87	16	21	1.523192
102	56	44	1.796739
0.973479		MODULO=	1
-0.223771			
0.047586			

CÁLCULO DAS COORDENADAS DA EXTREMIDADE 1

CORDENADAS DO CENTRO ÓTICO DOS TEODOLITOS

Teodolito nº	Xi	Yi	Zi
1	94.732382	112.158997	100.705000
2	90.975163	110.739511	100.717000
3	88.562036	108.517576	100.976000
4	86.423430	105.074721	101.139000
5	85.652914	99.345645	101.278000
SOMA	446.345925	535.836450	504.815000

Teodolito Nº	ai	bi	ci
1	0.459977	-0.884696	0.075723
2	0.627786	-0.775066	0.071817
3	0.746827	-0.662417	0.058755
4	0.865829	-0.497712	0.051227
5	0.973479	-0.223771	0.047586

MATRIZ A

10,000000	0,000000	0,000000	-0,919954	-1,255571	-1,493655	-1,731657	-1,946959
0,000000	10,000000	0,000000	1,769392	1,550132	1,324835	0,995423	0,447543
0,000000	0,000000	10,000000	-0,151446	-0,143633	-0,117509	-0,102454	-0,095172
-0,919954	1,769392	-0,151446	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,255571	1,550132	-0,143633	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,493655	1,324835	-0,117509	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000
-1,731657	0,995423	-0,102454	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000
-1,946959	0,447543	-0,095172	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000

MATRIZ INVERSA DE A

0,742709	-0,528948	0,052979	0,813599	0,880036	0,908172	0,909036	0,843896
-0,528948	0,550796	-0,044641	-0,733971	-0,762175	-0,762513	-0,734403	-0,640297
0,052979	-0,044641	0,104440	0,071772	0,075360	0,075274	0,073439	0,066533
0,813599	-0,733971	0,071772	1,529013	1,084797	1,098030	1,073420	0,959679
0,880036	-0,762175	0,075360	1,084797	1,648623	1,166541	1,145165	1,030836
0,908172	-0,762513	0,075274	1,098030	1,166541	1,687772	1,169689	1,058297
0,909036	-0,734403	0,073439	1,073420	1,145165	1,169689	1,656352	1,052761
0,843896	-0,640297	0,066533	0,959679	1,030836	1,058297	1,052761	1,467961

MATRIZ L

892.691850
1071.672900
1009.630000
96.052444
42.968812
-0.378912
-55.424085
-131.940081

MATRIZ X

XP= 103.531531 m
YP= 95.238045 m
ZP= 102.152735 m
T1= 19.126933 m
T2= 20.000479 m
T3= 20.045359 m
T4= 19.760439 m
T5= 18.365252 M

CÁLCULO DAS COORDENADAS DOS PONTOS GENÉRICOS

PONTOS	X_i	Y_i	Z_i
1	103.530329	95.237473	102.153353
2	103.531175	95.237815	102.153366
3	103.532461	95.239184	102.153758
4	103.532582	95.239723	102.151272
5	103.531107	95.236029	102.151927
MÉDIAS	103.531531	95.238045	102.152735
PRE. CORD.	0.86	1.31	0.96
PRE.MED.	0.39	0.59	0.43
PRE.POSIC.	0.82

CÁLCULO DAS COORDENADAS DOS PONTOS GENÉRICOS

PONTOS	Xi	Yi	Zi
1	103.5303	95.2375	102.1534
2	103.5312	95.2378	102.1534
3	103.5325	95.2392	102.1538
4	103.5326	95.2397	102.1513
5	103.5311	95.2360	102.1519
MÉDIAS	103.5315	1.3083	102.1527
PRE. CORD.	0.86	1.31	0.96
PRE.MED.	0.39	0.59	0.43
PRE.POSIC.	0.82		

DISTÂNCIAS P AOS Gi

1.47 mm	MINIMO=	0.76	mm
0.76 mm			
1.79 mm	MÉDIO=	1.74	mm
2.46 mm			
2.21 mm	MÁXIMO=	2.46	Mm

CÁLCULO DOS VERSORES PARA A EXTREMIDADE 2:

TEODOLITO 1 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
85	50	26	1.498200
157	44	47	2.753194
0.377709			
-0.923079		MODULO=	1
0.072532			

TEODOLITO 2 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
85	58	32	1.500557
146	26	46	2.555967
0.551358			
-0.831311		MODULO=	1
0.070182			

TEODOLITO 3 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
86	39	18	1.512415
137	14	2	2.395183

0.677850
 -0.732881
 0.058348

MODULO= 1

TEODOLITO 4 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
87	1	20	1.518824
125	42	16	2.193956

0.810942
 -0.582816
 0.051949

MODULO= 1

TEODOLITO 5 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
87	8	26	1.520890
108	51	35	1.899961

0.945135
 -0.322850
 0.049886

MODULO= 1

CÁLCULO DAS COORDENADA DA EXTREMIDADE 2 DA MIRA

CORDENADAS DO CENTRO ÓTICO DOS TEODOLITOS

Teodolito Nº	Xi	Yi	Zi
1	94.732382	112.158997	100.705000
2	90.975163	110.739511	100.717000
3	88.562036	108.517576	100.976000
4	86.423430	105.074721	101.139000
5	85.652914	99.345645	101.278000
SOMA	446.345925	535.836450	504.815000

Teodolito N°	ai	bi	ci
1	0.377709	-0.923079	0.072532
2	0.551358	-0.831311	0.070182
3	0.677850	-0.732881	0.058348
4	0.810942	-0.582816	0.051949
5	0.945135	-0.322850	0.049886

MATRIZ A

10	0	0	-0,7554189	-1,102716	-1,355701	-1,621884	-1,89026919
0	10	0	1,8461578	1,6626228	1,465762	1,165632	0,645699567
0	0	10	-0,1450645	-0,140364	-0,116696	-0,103897	-0,09977201
-0,75542	1,846158	-0,145065	2	0	0	0	0
-1,10272	1,66262	-0,14036	0	2	0	0	0
-1,3557	1,465762	-0,116696	0	0	2	0	0
-1,62188	1,165632	-0,103897	0	0	0	2	0
-1,89027	0,6457	-0,099772	0	0	0	0	2

MATRIZ INVERSA DE A

0,654013	-0,554146	0,049448	0,762133	0,824733	0,852331	0,855900	0,799503
-0,554146	0,672237	-0,050624	-0,833505	-0,867924	-0,871251	-0,843800	-0,743299
0,049448	-0,050624	0,104491	0,072986	0,076681	0,076716	0,075032	0,068291
0,762133	-0,833505	0,072986	1,562550	1,118233	1,131731	1,107618	0,993057
0,824733	-0,867924	0,076681	1,118233	1,681620	1,199604	1,178634	1,063518
0,852331	-0,871251	0,076716	1,131731	1,199604	1,720752	1,202955	1,090677
0,855900	-0,843800	0,075032	1,107618	1,178634	1,202955	1,689763	1,085104
0,799503	-0,743299	0,068291	0,993057	1,063518	1,090677	1,085104	1,499018

MATRIZ L

892.691850
1071.672900
1009.630000
120.891850
69.661192
27.213774
-28.198313
-107.864334

MATRIZ X

X= 102.303121
Y= 93.659877
Z= 102.157903
T1= 20.041069
T2= 20.545382
T3= 20.272285
T4= 19.583192
T5= 17.616230

COORDENADAS DOS PONTOS GENÉRICOS

COM 6 CASAS DECIMAIS			
PONTOS	Xi	Yi	Zi
1	102.302084	93.659509	102.158624
2	102.303027	93.659900	102.158917
3	102.303612	93.660406	102.158849
4	102.304259	93.661319	102.156320
5	102.302623	93.658249	102.156803
MÉDIA	102.303121	93.659877	102.157903
PRE. CORD.	0.85	1.13	1.24
PRE.MED.	0.38	0.51	0.55
PRE.POSIC.	0.84		

COORDENADAS DOS PONTOS GENÉRICOS

COM 4 CASAS DECIMAIS			
PONTOS	Xi	Yi	Zi
1	102.3021	93.6595	102.1586
2	102.3030	93.6599	102.1589
3	102.3036	93.6604	102.1588
4	102.3043	93.6613	102.1563
5	102.3026	93.6582	102.1568
MÉDIA	102.3031	93.6599	102.1579
PRE. CORD.	0.85	1.13	1.24
PRE.MED.	0.38	0.51	0.55
PRE.POSIC.	0.84		

DISTÂNCIAS P AOS Gi

1.32 mm	MINIMO=	1.02	mm
1.02 mm			
1.19 mm	MÉDIO=	1.60	mm
2.43 mm			
2.03 mm	MÁXIMO=	2.43	mm

COORDENADAS DO CENTRO ÓTICO - AJUSTADAS

XCOaj	YCOaj	ZCOaj
94.733419	112.159365	100.705000
90.975257	110.739488	100.716707
88.561545	108.517046	100.975774
86.422292	105.073278	101.141304
85.653412	99.347273	101.279821

PRECISÕES - AJUSTADAS

vx (mm)	vy (mm)	vz (mm)
1.04	0.37	0.00
0.09	-0.02	-0.29
-0.49	-0.53	-0.23
-1.14	-1.44	2.30
0.50	1.63	1.82

APÊNDICE VI

Cálculo de coordenadas tridimensionais:

Método de Minimização e Ajuste

1 - Considerações Gerais

Esse apêndice contém os dados de campo e os cálculos, implementados pela planilha eletrônica EXCEL, para a metodologia desenvolvida no Capítulo 10 do presente trabalho. Para a execução de um exemplo prático do emprego do método proposto, usou-se uma mira horizontal calibrada, determinando-se o seu comprimento, através das coordenadas tridimensionais obtidas pelo referido método. O comprimento assim obtido foi comparado ao comprimento padronizado, para testar-se sua validade.

2. Dados necessários para a implementação do método

Os dados de campo são os mesmos utilizados para os cálculos das coordenadas das extremidades da mira pelos demais métodos, tanto os métodos propostos quanto os já existentes. Em cada uma das extremidades da mira horizontal há um alvo móvel, acoplado a ela, para permitir a execução das leituras angulares. Esses alvos são

denominados 1, para a extremidade esquerda da mira e 2 para a extremidade direita, tomando-se como referência a estação.

2.1 – Coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos

As coordenadas tridimensionais do centro óptico dos aparelhos são as mesmas empregadas pelos demais métodos para o cálculo das coordenadas tridimensionais dos alvos, constantes da Tabela I.2 do Apêndice I.

2.2. - Leituras da mira em cada estação

As leituras da mira estão relacionadas na Tabela A.2 do Anexo A.

2.3. - Ângulos horizontais e zenitais lidos em cada estação

Os ângulos horizontais e zenitais lidos em cada uma das estações estão relacionados na Tabela A.3 do Anexo A.

2.4. - Azimutes calculados

Em cada estação os ângulos horizontais dever ser transformados em azimutes para entrada no programa, via teclado. Os azimutes calculados em função dos ângulos horizontais lidos estão na Tabela A.3 do Anexo A.

3. Cálculos executados pela planilha EXCEL

DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS

MÉTODO DAS DISTÂNCIAS MÍNIMAS

E

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

DETERMINAÇÃO DOS VERSORES:

APARELHO 1 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	85	39	26	1,495001
AZ=	152	31	44	2,662131
a1=		0,459977		
b1=		-0,884696	MODULO=	1
c1=		0,075723		

APARELHO 2 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	85	52	54	1,498918
AZ=	140	59	36	2,460798
a2=	0,627786			
b2=	-0,775066		MODULO=	1
c2=	0,071817			

APARELHO 3 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	86	37	54	1,512008
AZ=	131	34	20	2,296368
a3=	0,746827		MODULO=	1
b3=	-0,662417			
c3=	0,058755			

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	87	3	49	1,519547
AZ=	119	53	31	2,092509
a4=		0,865829	MODULO=	1
b4=		-0,497712		
c4=		0,051227		

APARELHO 5 - EXTREMIDADE 1 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	87	16	21	1,523192
AZ=	102	56	44	1,796739
a5=	0,973479		MODULO=	1
b5=	-0,223771			
c5=	0,047586			

CÁLCULO DAS COORDENADAS DA EXTREMIDADE 1 DA MIRA

COORDENADAS DO CENTRO ÓTICO DOS APARELHOS

APARELHOS	Xi	Yi	Zi
1	94,732	112,159	100,705
2	90,975	110,740	100,717
3	88,562	108,518	100,976
4	86,423	105,075	101,139
5	85,653	99,346	101,278
	446,346	535,836	504,815

COORDENADAS DOS VERSORES DIREÇÃO

APARELHOS	ai	bi	ci
1	0,459977	-0,884696	0,075723
2	0,627786	-0,775066	0,071817
3	0,746827	-0,662417	0,058755
4	0,865829	-0,497712	0,051227
5	0,973479	-0,223771	0,047586

MATRIZ A DO MÉTODO DAS DISTÂNCIAS MÍNIMAS

10,000000	0,000000	0,000000	-0,919954	-1,255571	-1,493655	-1,731657	-1,946959
0,000000	10,000000	0,000000	1,769392	1,550132	1,324835	0,995423	0,447543
0,000000	0,000000	10,000000	-0,151446	-0,143633	-0,117509	-0,102454	-0,095172
-0,919954	1,769392	-0,151446	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,255571	1,550132	-0,143633	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,493655	1,324835	-0,117509	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000
-1,731657	0,995423	-0,102454	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000
-1,946959	0,447543	-0,095172	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000

MATRIZ INVERSA DE A

0,742709	-0,528948	0,052979	0,813599	0,880036	0,908172	0,909036	0,843896
-0,528948	0,550796	-0,044641	-0,733971	-0,762175	-0,762513	-0,734403	-0,640297
0,052979	-0,044641	0,104440	0,071772	0,075360	0,075274	0,073439	0,066533
0,813599	-0,733971	0,071772	1,529013	1,084797	1,098030	1,073420	0,959679
0,880036	-0,762175	0,075360	1,084797	1,648623	1,166541	1,145165	1,030836
0,908172	-0,762513	0,075274	1,098030	1,166541	1,687772	1,169689	1,058297
0,909036	-0,734403	0,073439	1,073420	1,145165	1,169689	1,656352	1,052761
0,843896	-0,640297	0,066533	0,959679	1,030836	1,058297	1,052761	1,467961

MATRIZ L - DOS TERMOS INDEPENDENTES

892,692
1071,673
1009,630
96,052
42,969
-0,379
-55,424
-131,940

COORD. DO PTO

X= 103,532
Y= 95,238
Z= 102,153

MATRIZ X - DAS INCÓGNITAS

X= 103,532
Y= 95,238
Z= 102,153
T1= 19,126933
T2= 20,000479
T3= 20,045359
T4= 19,760439
T5= 18,365252

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

MATRIZ A (15X8) - DOS COEFICIENTES

1,000000	0,000000	0,000000	-0,459977	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,884696	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	-0,075723	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,627786	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,775066	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	-0,071817	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,746827	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,662417	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	-0,058755	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,865829	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,497712	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,051227	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,973479
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,223771
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,047586

$(A^T).P$ (8x15) - MULTIPLICAÇÃO DAS MATRIZES

1,56E+06	0,00E+00	0,00E+00	6,01E+05	0,00E+00	0,00E+00	3,87E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,8E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,5E+05	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	2,98E+05	0,00E+00	0,00E+00	4,18E+05	0,00E+00	0,00E+00	7,0E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,0E+06	0,0E+00	0,0E+00	5,2E+07	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	3,70E+06	0,00E+00	0,00E+00	3,89E+06	0,00E+00	0,0E+00	3,9E+06	0,0E+00	0,0E+00	4,2E+06	0,0E+00	0,0E+00	3,2E+06
-7,19E+05	2,64E+05	-2,80E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-3,77E+05	3,24E+05	-2,80E+05	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-2,89E+05	4,6E+05	-2,3E+05	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	-2,5E+05	1,0E+06	-2,2E+05	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	-2,4E+05	1,2E+07	-1,5E+05

MATRIZ $N = (A^T).P.A$ (8x8)

3,08E+06	0,00E+00	0,00E+00	-7,19E+05	-3,77E+05	-2,89E+05	-2,5E+05	-2,4E+05
0,00E+00	5,55E+07	0,00E+00	2,64E+05	3,24E+05	4,63E+05	1,0E+06	1,2E+07
0,00E+00	0,00E+00	1,89E+07	-2,80E+05	-2,80E+05	-2,28E+05	-2,2E+05	-1,5E+05
-7,19E+05	2,64E+05	-2,80E+05	5,85E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00
-3,77E+05	3,24E+05	-2,80E+05	0,00E+00	5,08E+05	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00
-2,89E+05	4,63E+05	-2,28E+05	0,00E+00	0,00E+00	5,36E+05	0,0E+00	0,0E+00
-2,45E+05	9,96E+05	-2,17E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	7,2E+05	0,0E+00
-2,43E+05	1,17E+07	-1,52E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	2,9E+06

N^{-1} (8x8) - MVC DAS INCÓGNITAS AJUSTADAS

1,30E-06	-5,08E-07	9,30E-08	1,87E-06	1,34E-06	1,18E-06	1,2E-06	2,2E-06
-5,08E-07	3,75E-07	-5,00E-08	-8,17E-07	-6,44E-07	-6,19E-07	-7,1E-07	-1,6E-06
9,30E-08	-5,00E-08	6,19E-08	1,66E-07	1,35E-07	1,20E-07	1,2E-07	2,2E-07
1,87E-06	-8,17E-07	1,66E-07	4,46E-06	2,00E-06	1,79E-06	1,8E-06	3,5E-06
1,34E-06	-6,44E-07	1,35E-07	2,00E-06	3,45E-06	1,34E-06	1,4E-06	2,8E-06
1,18E-06	-6,19E-07	1,20E-07	1,79E-06	1,34E-06	3,09E-06	1,3E-06	2,6E-06
1,18E-06	-7,08E-07	1,20E-07	1,82E-06	1,39E-06	1,30E-06	2,8E-06	3,0E-06
2,19E-06	-1,58E-06	2,15E-07	3,51E-06	2,75E-06	2,64E-06	3,0E-06	7,0E-06

PRECISÕES DAS DETERMINAÇÕES - DIAGONAL DE N^{-1}

XP	YP	ZP	R1	R2	R3	R4	R5
1,14	0,61	0,25	2,11	1,86	1,76	1,68	2,6E+00
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm

PRECISÃO DA MÉDIA

XP	YP	ZP	R1	R2	R3	R4	R5
0,29	0,16	0,06	0,55	0,48	0,45	0,43	6,8E-01
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm

MATRIZ L	$n = A^T \cdot P \cdot L \ (8 \times 1)$	MATRIZ X (8×1)
94,732	2,83E+08	103,53279
112,159	5,54E+09	95,23604
100,705	1,91E+09	102,15291
90,975	-6,67E+07	19,13040
110,740	-2,66E+07	20,00256
100,717	1,63E+06	20,04790
88,562	6,15E+07	19,76611
108,518	1,12E+09	18,36541
100,976		
86,423		
105,075		
101,139		
85,653		
99,346		
101,278		

COORDENADAS DO PONTO

X= 103,533
Y= 95,236
Z= 102,153

MATRIZ AX (15×1)	MATRIZ V $(15 \times 1) = AX - L$
94,733	0,001
112,161	0,002
100,704	-0,001
90,975	0,000
110,739	0,000
100,716	-0,001
88,560	-0,002
108,516	-0,001
100,975	-0,001
86,419	-0,005
105,074	-0,001
101,140	0,001
85,654	0,002
99,346	0,000
101,279	0,001

PRIMEIRO CONTROLE : $AT \cdot P \cdot V = 0$

1,571E-07
-6,234E-07
6,800E-08
-2,583E-07
3,121E-07 MUITO BOM!
-6,145E-08
1,502E-07
-3,644E-07

SEGUNDO CONTROLE: $VT \times P \times V = -LT \times P \times L$

MATRIZ VT(1x15)

0,001	0,002	-0,001	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,001	-1,0E-03	-4,7E-03	-8,6E-04	1,3E-03	1,5E-03	4,5E-05	9,8E-04
-------	-------	--------	-------	-------	--------	--------	--------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ VT x P

1364,280	486,277	-2605,940	186,681	-66,990	-2354,851	-603,702	-1023,525	-3,9E+03	-1,3E+03	-1,7E+03	5,7E+03	3,8E+02	2,3E+03	3,1E+03
----------	---------	-----------	---------	---------	-----------	----------	-----------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ LT (1x15)

94,732	112,159	100,705	90,975	110,740	100,717	88,562	108,518	1,0E+02	8,6E+01	1,1E+02	1,0E+02	8,6E+01	9,9E+01	1,0E+02
--------	---------	---------	--------	---------	---------	--------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ VT.P.V

30,776

MATRIZ LT x P

1,48E+08	3,35E+07	3,73E+08	5,47E+07	4,62E+07	3,92E+08	3,43E+07	7,58E+07	3,9E+08	2,5E+07	2,1E+08	4,3E+08	2,1E+07	5,2E+09	3,2E+08
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ LT.P.V

-30,776

CONTROLE: -3,981E-05 OK!

EXTREMIDADE 2 DA MIRA

APARELHO 1 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	85	50	26	1,498200
AZ=	157	44	47	2,753194

a1=	0,377709			
b1=	-0,923079		MODULO=	1
c1=	0,072532			

APARELHO 2 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	85	58	32	1,500557
AZ=	146	26	46	2,555967

a2=	0,551358			
b2=	-0,831311		MODULO=	1
c2=	0,070182			

APARELHO 3 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	86	39	18	1,512415
AZ=	137	14	2	2,395183

a3=	0,677850		MODULO=	1
b3=	-0,732881			
c3=	0,058348			

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNOS	RADIANOS
Z=	87	1	20	1,518824
AZ=	125	42	16	2,193956

a4=	0,810942		MODULO=	1
b4=	-0,582816			
c4=	0,051949

APARELHO 5 - EXTREMIDADE 2 DA MIRA

	GRAUS	MINUTOS	SEGUNDOS	RADIANOS
Z=	87	8	26	1,520890
AZ=	108	51	35	1,899961
a5=	0,945135		MODULO=	1
b5=	-0,322850			
c5=	0,049886			

CÁLCULO DAS COORDENADAS DA EXTREMIDADE 2 DA MIRA

COORDENADAS DO CENTRO ÓTICO DOS APARELHOS

APARELHOS	Xi	Yi	Zi
1	94,732	112,159	100,705
2	90,975	110,740	100,717
3	88,562	108,518	100,976
4	86,423	105,075	101,139
5	85,653	99,346	101,278
	446,346	535,836	504,815

COORDENADAS DOS VERSORES DIREÇÃO

APARELHOS	ai	bi	ci
1	0,377709	-0,923079	0,072532
2	0,551358	-0,831311	0,070182
3	0,677850	-0,732881	0,058348
4	0,810942	-0,582816	0,051949
5	0,945135	-0,322850	0,049886

MATRIZ A DO MÉTODO DAS DISTÂNCIAS MÍNIMAS

10,000000	0,000000	0,000000	-0,755419	-1,102716	-1,355701	-1,621884	-1,890269
0,000000	10,000000	0,000000	1,846158	1,662623	1,465762	1,165632	0,645700
0,000000	0,000000	10,000000	-0,145065	-0,140364	-0,116696	-0,103897	-0,099772
-0,755419	1,846158	-0,145065	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,102716	1,662623	-0,140364	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,355701	1,465762	-0,116696	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000	0,000000
-1,621884	1,165632	-0,103897	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000	0,000000
-1,890269	0,645700	-0,099772	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,000000

MATRIZ INVERSA DE A

0,654013	-0,554146	0,049448	0,762133	0,824733	0,852331	0,855900	0,799503
-0,554146	0,672237	-0,050624	-0,833505	-0,867924	-0,871251	-0,843800	-0,743299
0,049448	-0,050624	0,104491	0,072986	0,076681	0,076716	0,075032	0,068291
0,762133	-0,833505	0,072986	1,562550	1,118233	1,131731	1,107618	0,993057
0,824733	-0,867924	0,076681	1,118233	1,681620	1,199604	1,178634	1,063518
0,852331	-0,871251	0,076716	1,131731	1,199604	1,720752	1,202955	1,090677
0,855900	-0,843800	0,075032	1,107618	1,178634	1,202955	1,689763	1,085104
0,799503	-0,743299	0,068291	0,993057	1,063518	1,090677	1,085104	1,499018

MATRIZ L - DOS TERMOS INDEPENDENTES

MATRIZ X - DAS INCÓGNITAS

892,692		X=	102,303
1071,673		Y=	93,660
1009,630		Z=	102,158
120,892	COORDENADAS DO PON'	T1=	20,041069
69,661		T2=	20,545382
27,214	X=	T3=	20,272285
-28,198	Y=	T4=	19,583192
-107,864	Z=	T5=	17,616230

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

MATRIZ A (15X8) - DOS COEFICIENTES

1,000000	0,000000	0,000000	-0,377709	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,923079	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	-0,072532	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,551358	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,831311	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	-0,070182	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,677850	0,000000	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,732881	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	-0,058348	0,000000	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,810942	0,000000
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,582816	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,051949	0,000000
1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,945135
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,322850
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,049886

$(A^T) \cdot P$ (8x15) - MULTIPLICAÇÃO DAS MATRIZES

1,56E+06	0,00E+00	0,00E+00	6,01E+05	0,00E+00	0,00E+00	3,87E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,8E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,5E+05	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	2,98E+05	0,00E+00	0,00E+00	4,18E+05	0,00E+00	0,00E+00	7,0E+05	0,0E+00	0,0E+00	2,0E+06	0,0E+00	0,0E+00	5,2E+07	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	3,70E+06	0,00E+00	0,00E+00	3,89E+06	0,00E+00	0,0E+00	3,9E+06	0,0E+00	0,0E+00	4,2E+06	0,0E+00	0,0E+00	3,2E+06
-5,90E+05	2,75E+05	-2,68E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-3,31E+05	3,47E+05	-2,73E+05	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-2,62E+05	5,1E+05	-2,3E+05	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	-2,3E+05	1,2E+06	-2,2E+05	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	-2,4E+05	1,7E+07	-1,6E+05

MATRIZ $N = (A^T) \cdot P \cdot A$ (8x8)

3,08E+06	0,00E+00	0,00E+00	-5,90E+05	-3,31E+05	-2,62E+05	-2,3E+05	-2,4E+05
0,00E+00	5,55E+07	0,00E+00	2,75E+05	3,47E+05	5,12E+05	1,2E+06	1,7E+07
0,00E+00	0,00E+00	1,89E+07	-2,68E+05	-2,73E+05	-2,26E+05	-2,2E+05	-1,6E+05
-5,90E+05	2,75E+05	-2,68E+05	4,97E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00
-3,31E+05	3,47E+05	-2,73E+05	0,00E+00	4,90E+05	0,00E+00	0,0E+00	0,0E+00
-2,62E+05	5,12E+05	-2,26E+05	0,00E+00	0,00E+00	5,66E+05	0,0E+00	0,0E+00
-2,30E+05	1,17E+06	-2,20E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	8,8E+05	0,0E+00
-2,36E+05	1,68E+07	-1,60E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	5,7E+06

 N^{-1} (8x8) - MVC DAS INCÓGNITAS AJUSTADAS

1,23E-06	-7,53E-07	9,86E-08	1,94E-06	1,42E-06	1,29E-06	1,3E-06	2,3E-06
-7,53E-07	7,90E-07	-8,36E-08	-1,38E-06	-1,11E-06	-1,10E-06	-1,3E-06	-2,4E-06
9,86E-08	-8,36E-08	6,37E-08	1,98E-07	1,61E-07	1,47E-07	1,5E-07	2,5E-07
1,94E-06	-1,38E-06	1,98E-07	5,19E-06	2,39E-06	2,22E-06	2,4E-06	4,2E-06
1,42E-06	-1,11E-06	1,61E-07	2,39E-06	3,88E-06	1,73E-06	1,9E-06	3,4E-06
1,29E-06	-1,10E-06	1,47E-07	2,22E-06	1,73E-06	3,41E-06	1,8E-06	3,3E-06
1,35E-06	-1,27E-06	1,53E-07	2,39E-06	1,89E-06	1,83E-06	3,2E-06	3,8E-06
2,29E-06	-2,38E-06	2,54E-07	4,18E-06	3,37E-06	3,32E-06	3,8E-06	7,4E-06

PRECISÕES DAS DETERMINAÇÕES - DIAGONAL DE N^{-1}

XP	YP	ZP	R1	R2	R3	R4	R5
1,11	0,89	0,25	2,28	1,97	1,85	1,79	2,7E+00
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm

PRECISÃO DA MÉDIA

XP	YP	ZP	R1	R2	R3	R4	R5
0,29	0,23	0,07	0,59	0,51	0,48	0,46	7,0E-01
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm

MATRIZ L	$n = A^T \cdot P \cdot L \quad (8 \times 1)$	MATRIZ X (8×1)
94,732	2,83E+08	102,30352
112,159	5,54E+09	93,65850
100,705	1,91E+09	102,15800
90,975	-5,21E+07	20,04301
110,740	-1,92E+07	20,54620
100,717	9,49E+06	20,27363
88,562	8,05E+07	19,58717
108,518	1,63E+09	17,61557
100,976		
86,423		
105,075		
101,139		
85,653		
99,346		
101,278		

COORDENADAS DO PONTO

$X = 102,304$
 $Y = 93,658$
 $Z = 102,158$

MATRIZ AX (15×1) MATRIZ V $(15 \times 1) = AX - L$

94,733	0,001
112,160	0,001
100,704	-0,001
90,975	0,000
110,739	-0,001
100,716	-0,001
88,561	-0,001
108,517	-0,001
100,975	-0,001
86,419	-0,004
105,074	-0,001
101,140	0,001
85,654	0,002
99,346	0,000
101,279	0,001

PRIMEIRO CONTROLE : $A^T \cdot P \cdot V = 0$

2,833E-06
 -1,032E-04
 1,634E-06
 -7,768E-07
 -9,737E-07 **MUITO BOM!**
 -1,325E-06
 2,935E-08
 -3,267E-05

SEGUNDO CONTROLE: $V^T x P x V = -L^T x P x L$

MATRIZ $V^T(1 \times 15)$

0,001	0,001	-0,001	0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-9,2E-04	-4,0E-03	-5,0E-04	1,5E-03	1,5E-03	3,3E-05	1,2E-03
-------	-------	--------	-------	--------	--------	--------	--------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ $V^T x P$

1105,517	231,045	-2816,556	26,228	-301,842	-3781,398	-388,099	-644,696	-3,6E+03	-1,1E+03	-1,0E+03	6,2E+03	3,8E+02	1,7E+03	3,9E+03
----------	---------	-----------	--------	----------	-----------	----------	----------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ $L^T(1 \times 15)$

94,732	112,159	100,705	90,975	110,740	100,717	88,562	108,518	1,0E+02	8,6E+01	1,1E+02	1,0E+02	8,6E+01	9,9E+01	1,0E+02
--------	---------	---------	--------	---------	---------	--------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ $V^T.P.V$

30,983

MATRIZ $L^T x P$

1,48E+08	3,35E+07	3,73E+08	5,47E+07	4,62E+07	3,92E+08	3,43E+07	7,58E+07	3,9E+08	2,5E+07	2,1E+08	4,3E+08	2,1E+07	5,2E+09	3,2E+08
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

MATRIZ $L^T.P.V$

-30,993

CONTROLE: -0,00985 OK!