Andréa Cardoso

A Transformada Wavelet aplicada à Identificação Modal Operacional

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador:

Prof. Dr. Eduardo Morgado Belo

Co-orientador:

Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni

<p>Serviço de Pós-Graduação EESC/USP</p> <p>EXEMPLAR REVISADO</p> <p>Data de entrada no Serviço...19/05/06</p> <p>Ass. <i>Maisa R. Cavaglieri</i></p>
--

DEDALUS - Acervo - EESC

31100104197

São Carlos

2006

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **ANDREA CARDOSO**

Tese defendida e julgada em 10-03-2006 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Titular **EDUARDO MORGADO BELO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovada

Prof. Dr. **MARIO FRANCISCO MUCHERONI**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovada

Prof. Dr. **ROBERTO HIDEAKI TSUNAKI**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovada

Prof. Associado **PAULO ROBERTO GARDEL KURKA**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Prof. Livre-Docente **JOÃO ANTONIO PEREIRA**
(UNESP/Ilha Solteira)

Aprovada

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Profª. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedico este trabalho

*À memória de minha mãe Júlia e à José Carlos, meu marido,
amigo e companheiro pelo constante incentivo para a realização
deste trabalho e por sua infinita paciência.*

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo financiamento deste projeto.

Ao meu mestre Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni que compartilhou parte do seu tempo e do seu conhecimento. Agradeço pela exímia condução da pesquisa e pela confiança em minha capacidade de trabalho.

Ao Prof. Dr. Benedito Di Giacomo pela disponibilização do laboratório de Metrologia e aos amigos do laboratório pela disposição e atenção, também pelos momentos de descontração.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais Manoel e Júlia, por sempre me incentivarem.

Às amigas Daniela e Alessandra cuja amizade e discussões sobre o trabalho foram muito valiosas.

Resumo

CARDOSO, A. (2006). *A transformada wavelet aplicada à identificação modal operacional*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Apresenta uma nova técnica de identificação estocástica para estruturas sujeitas a excitação ambiente utilizando um método não recursivo, a análise estatística e a transformada wavelet. A análise estatística contribui para a seleção da melhor ordem para o sistema e automação dos procedimentos computacionais. Em geral há dificuldade para a identificação de baixas frequências. A transformada wavelet é uma ferramenta fundamental para a compressão de dados e torna possível a identificação completa incluindo baixas frequências e modos acoplados, além de melhorar significativamente a eficiência computacional do método. É apresentado o estudo de três sistemas simulados e os resultados obtidos são comparados aos parâmetros modais teóricos.

Palavras-chave: análise modal operacional; métodos de identificação de sistemas; algoritmo de realização de sistemas; identificação estocástica

Abstract

CARDOSO, A. (2006). *The wavelet transform applied to operational modal analysis*. Ph.D. Thesis - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

A new form to carry out stochastic identification of structures in operational conditions using a non recursive method, the statistic analysis and the wavelet transform, is presented. The statistic analysis contributed to select the best system order and to automation of computational procedures. In general the identification of low frequencies is a difficult task. The wavelet transform is an essential tool for compression of data making possible the complete identification including low frequencies. In addition it improves the computational efficiency. The study of three simulated system is presented and the results are compared with the analytical modal parameters.

Keywords: Operational modal analysis; identification methods; eigensystem realization algorithm; output-only identification

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

1	Introdução	1
1.1	Objetivo do Trabalho	6
1.2	Organização da Tese	7
2	Identificação de Sistemas Dinâmicos	8
2.1	Principais Métodos Determinísticos	9
2.2	Identificação Estocástica	13
3	Fundamentos da Análise Modal Operacional	20
3.1	Representação de Sistemas em Espaço de Estado	20
3.1.1	Modelos em Tempo Contínuo	21
3.1.2	Modelos em Tempo Discreto	27
3.2	Identificação Determinística	30
3.2.1	Parâmetros de Markov	30
3.2.2	Cálculo dos Parâmetros de Markov	34
3.2.3	Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas Discretos	39
3.2.4	O Algoritmo de Realização de Sistemas	42
3.3	Identificação Estocástica	47
3.3.1	Estimativa das Funções de Correlação	51
3.3.2	Saídas-referência	53
3.3.3	Ordem do Sistema e Extração dos Parâmetros Modais	55
4	Identificação Estocástica via Algoritmo ERA	57
4.1	Estratégia computacional	58
4.2	Critério para definição da ordem do modelo	60
4.3	Considerações sobre a Transformada Wavelet	65

4.3.1	Transformada Contínua de Wavelets	66
4.3.2	Transformada Discreta de Wavelets	68
4.3.3	Aplicação de Wavelets em Identificação Estocástica	71
4.4	Aquisição não-simultânea	74
4.5	Cálculo dos Modos Normais	76
5	Avaliação da Metodologia Proposta	79
5.1	Sistema mecânico de 4 g.d.l. - caso 1	80
5.2	Sistema mecânico de 4 g.d.l. - caso 2	92
5.3	Viga engastada em vibração transversal	97
5.3.1	Construção do modelo em Elementos Finitos	101
5.3.2	Identificação do sistema mecânico de 20 g.d.l. - caso 1	106
5.3.3	Identificação do sistema mecânico de 20 g.d.l. - caso 2	112
6	Conclusões	118
	Referências Bibliográficas	120
A	Programa Computacional para Construir um Modelo em Elementos Finitos	127

Lista de Figuras

1	Caracterização de alguns problemas em Análise de Estruturas	1
2	Representação do problema de identificação	3
3	Passos computacionais do algoritmo ERA.	46
4	Estrutura do programa principal IDENT.	59
5	Procedimento recursivo para armazenamento das amostras de identificação. . . .	61
6	Diagrama de estabilização de frequências de um sistema de 4 g.d.l.	62
7	Fluxograma da subrotina SELEÇÃO	64
8	Análise no plano tempo-frequência STFT versus WT	67
9	Diagrama esquemático da associação dos subespaços V_j e W_j em ARM.	70
10	Diagrama esquemático da decomposição de um sinal $s(t)$ em ARM, nível 3. . . .	71
11	Família de wavelets Daubechies.	72
12	Fluxograma da subrotina DECOMP	73
13	Pontos de captação de uma viga	74
14	Correção da forma dos modos utilizando referência.	76
15	Limites para determinação do sinal das coordenadas do modo normal.	78
16	Sistema de 4 g.d.l.	80
17	Modos de vibrar teóricos do modelo de 4 g.d.l. - caso 1.	81
18	Auto-vetores teóricos e identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.	83
19	Estabilização das frequências naturais utilizando 5001 pontos - caso 1.	84
20	Estabilização das frequências naturais utilizando 10001 pontos - caso 1.	84
21	Estabilização das frequências naturais utilizando 20001 pontos - caso 1.	85
22	Estabilização das frequências naturais utilizando 40001 pontos - caso 1.	85
23	Estabilização das frequências naturais com aquisição não-simultânea - caso 1. . .	86
24	Estabilização de frequências com referência na massa 2 e WT nível 3 - caso 1. .	87
25	Estabilização de frequências com referência na massa 2 e WT nível 1 - caso 1. .	88
26	Auto-vetores identificados com referência 1 - caso 1.	90
27	Auto-vetores identificados com referência 2 - caso 1.	90
28	Auto-vetores identificados com referência 3 - caso 1.	91
29	Auto-vetores identificados com referência 4 - caso 1.	91
30	Média dos auto-vetores identificados com aquisição não-simultânea - caso 1. . .	92

31	Estabilização das frequências naturais do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.	93
32	Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 3 - caso 2. . . .	94
33	Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 2 - caso 2. . . .	94
34	Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 1 - caso 2. . . .	95
35	Auto-vetores teóricos e identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 2	96
36	Viga em flexão, deformada por uma força distribuída $f(x, t)$	97
37	Malha com 21 nós e 20 elementos de uma viga em flexão.	101
38	Comparação das dez primeiras frequências da viga engastada.	103
39	Primeiro modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.	104
40	Segundo modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.	104
41	Terceiro modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.	105
42	Quarto modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.	105
43	Quinto modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.	106
44	Pontos de medida da resposta do modelo de 20 g.d.l.	106
45	Estabilização de frequências naturais - modelo 20gdl, sem WT - caso 1.	107
46	Estabilização de frequências naturais do modelo 20gdl, com WT db5 nível 8-caso 1.	108
47	Estabilidade de frequências naturais do modelo 20gdl, com WT db5 nível 4-caso 1.	108
48	Primeiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.	110
49	Segundo modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.	110
50	Terceiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.	111
51	Quinto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.	111
52	Estabilização de frequências naturais modelo 20gdl, com WT db5 nível 8 - caso 2.	112
53	Estabilização de frequências naturais modelo 20gdl, com WT db5 nível 4 - caso 2.	113
54	Primeiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	114
55	Segundo modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	115
56	Terceiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	115
57	Quarto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	116
58	Quinto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	116

Lista de Tabelas

1	Parâmetros físicos e parâmetros modais teóricos do sistema de 4 g.d.l. - caso 1. . .	81
2	Auto-vetores teóricos do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.	81
3	Parâmetros modais identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.	82
4	Modos identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.	83
5	Resultado da Identificação com dados não simultâneos - caso 1.	88
6	Média dos parâmetros modais estimados com aquisição não-simultânea - caso 1. .	92
7	Parâmetros físicos e parâmetros modais teóricos do sistema de 4 g.d.l. - caso 2. .	93
8	Resultado da identificação simultânea do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.	95
9	Auto-vetores do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.	96
10	Primeiras soluções da equação $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = -1$	100
11	Primeiras frequências naturais de uma viga engastada em $[Hz]$	101
12	Coeficientes da forma dos modos teóricos.	101
13	Parâmetros modais obtidos por elementos finitos do modelo de 20 g.d.l.	103
14	Resultado da identificação simultânea do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.	109
15	Resultado da identificação simultânea do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.	114

Lista de Símbolos

n	graus de liberdade do sistema
m	número de saídas
r	número de entradas
p	número de parâmetros de Markov independentes
l	Número de pontos observados
M	matriz de massa, $n \times n$
Z	matriz de amortecimento, $n \times n$
K	matriz de rigidez, $n \times n$
$f(t)$	vetor de forças generalizadas, $n \times 1$
$w(t)$	vetor deslocamento, $n \times 1$
$u(t)$	vetor entrada, $r \times 1$
$x(t)$	vetor de estado para o caso contínuo, $2n \times 1$
$y(t)$	vetor aceleração para o caso contínuo, $m \times 1$
t_0	instante inicial
y_i	vetor saída observado no ponto i
x_k	vetor de estado para o caso discreto, $2n \times 1$
y_k	vetor de saída para o caso discreto, $m \times 1$
u_k	vetor de entrada para o caso discreto, $r \times 1$
s_k	Ruído branco de entrada para o caso discreto, $n \times 1$
v_k	Ruído branco de saída para o caso discreto, $m \times 1$
$\hat{A}$	matriz de estado para o caso contínuo, $2n \times 2n$
$\hat{B}$	matriz de influência de entrada para o caso contínuo, $2n \times r$
$\hat{C}$	matriz de influência de saída para o caso contínuo, $m \times 2n$
$\hat{D}$	matriz de transmissão direta para o caso contínuo, $m \times r$
A	matriz de estado para o caso discreto, $2n \times 2n$
B	matriz de influência de entrada para o caso discreto, $2n \times r$
C	matriz de influência de saída para o caso discreto, $m \times 2n$
D	matriz de transmissão direta para o caso discreto, $m \times r$
I	matriz identidade, $2n \times 2n$

P_k	Parâmetros de Markov, $m \times r$
$\bar{P}_k$	Parâmetros de Markov observados, $m \times r$
G	Matriz de correlação estado-saída, $2n \times r$
R_i	Matriz de correlação de saída, $m \times r$
$\hat{R}_i$	Estimativa da matriz de correlação de saída, $m \times r$
H	Matriz Hankel dos parâmetros de Markov
$\hat{H}$	Matriz Hankel das estimativas da matriz de correlação de saída $\hat{R}_i$
$\mathcal{C}_{k+1}$	Matriz de controlabilidade
$\mathcal{O}_{k+1}$	Matriz de observabilidade
$\hat{\Lambda}$	matriz dos autovalores de $\hat{A}$
Λ	matriz dos autovalores de A
Φ	matriz dos autovetores de $\hat{A}$
$\hat{\lambda}_k$	autovalor de $\hat{A}$
λ_k	autovalor de A
Δt	Intervalo de discretização
σ_i	Valor singular
ω_i	Frequência natural amortecida
ζ_i	Fator de amortecimento
φ_i	Ângulo de fase
ϵ_i	Erro relativo na identificação dos parâmetros modais
f_c	Frequência de corte
f_i	Centro do intervalo de variação de frequência
A_j	Conjunto das frequências estimadas no intervalo de variação
$\psi(t)$	Wavelet-mãe
dbN	Família de wavelets Daubechies

Símbolos

$E(\cdot)$	Operador esperança
$\ \cdot\ ^2$	Norma euclidiana
$L^2(\mathbb{R})$	Espaço das funções reais com norma euclidiana finita
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno

Siglas

ARM	Análise de Resolução Múltipla
ARMA	Algoritmo Autoregressivo de Médias Móveis
ARMAV	Algoritmo Autoregressivo de Médias Móveis Vetorial
ARV	Algoritmo Autoregressivo Vetorial
CE	Método da Polireferência
EMA	Análise Modal Experimental
ERA	Algoritmo de Realização de Sistemas
ERA/DC	Algoritmo de Realização de Sistemas com Correlação de Dados
FFT	Transformada Rápida de Fourier
FRF	Função de Resposta em Frequência
FT	Transformada de Fourier
IFFT	Inversa da Transformada Rápida de Fourier
ITD	Método de Ibrahim no Domínio do Tempo
IRF	Função de Resposta ao Impulso
IV	Algoritmo Variáveis Instrumentais
LSCE	Método dos Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas
MIMO	Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas
NExT	Técnica de Excitação Natural
OCID	Algoritmo Observer/Controller Identification
OKID	Algoritmo Observer/Kalman Filter Identification
PE	Método do Erro Preditivo
PRCE	Método da Exponencial Complexa de Polireferência
PSD	Densidade de Potência Espectral
RD	Decremento Aleatório
SSI	Identificação Estocástica de Subespaço
STFT	Transformada de Fourier de Tempo Curto
SVD	Decomposição em Valores Singulares
VRD	Decremento Aleatório Vetorial
WT	Transformada Wavelet

1 Introdução

O estudo da análise modal estrutural pode ser subdividido em dois campos distintos. A *Análise Modal Teórica* ou *Problema Direto* consiste no estudo de métodos para determinar as variáveis de saída de um sistema dinâmico com base nas variáveis de entrada e nas propriedades dinâmicas do sistema. Por outro lado, a *Análise Modal Experimental* ou *Problema Inverso* preocupa-se com técnicas para obtenção das propriedades dinâmicas de um sistema ou identificação das entradas.

Dentre as diversas áreas da Análise Modal Experimental destaca-se a *Identificação de Sistemas Dinâmicos*. O objetivo principal da área é determinar um modelo matemático representativo das características físicas e dinâmicas de um sistema real.

Uma caracterização do problema direto e de alguns problemas inversos na análise de sistemas relacionados com estruturas dinâmicas pode ser vista no diagrama da fig.(1).

Figura 1: Caracterização de alguns problemas em Análise de Estruturas

Problemas inversos aparecem em diversos campos das ciências aplicadas e sua resolução exige o emprego de sofisticadas teorias. Especificamente a sub-classe da Identificação de Sistemas é de fundamental importância pois trata da determinação de modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico de sistemas em função do tempo. Os modelos obtidos são úteis para realizar simulações, controle, monitoramento, detecção de falhas, previsões, otimizações, entre outras aplicações. Modelos matemáticos são tipicamente utilizados em situações onde a realização de um experimento com o sistema real é muito cara, muito perigosa, difícil ou mesmo impossível.

“O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear”. Se esta afirmação fosse levada ao pé da letra, poucos problemas seriam resolvidos em engenharia. Na verdade, dependendo do problema, algumas grandezas são menos importantes que outras e podem ser desprezadas, simplificando-se a solução. Assim, neste âmbito, modelar um problema significa adotar hipóteses que o simplifiquem e permitam equacioná-lo para se chegar a uma solução, ainda que aproximada.

Diz-se que a descrição do sistema está completa quando as matrizes de massa, amortecimento e rigidez podem ser calculadas a partir dos sinais de excitação e resposta da estrutura. Entretanto, é difícil determinar os parâmetros físicos a partir de dados experimentais visto que existem infinitos conjuntos de matrizes de massa, amortecimento e rigidez que produzem as mesmas propriedades dinâmicas numa determinada faixa de frequência [40]. Assim, a determinação do modelo mais conveniente e as limitações impostas pela viabilidade prática, mais especificamente ao truncamento em termos de conteúdo de frequência e ao número limitado de graus de liberdade, figuram entre as principais fontes de erros no processo de identificação.

O interesse primário do problema de identificação em sistemas mecânicos é estimar as propriedades dinâmicas descritas por um conjunto de parâmetros, denominados *Parâmetros Modais* que caracterizam frequências naturais, amortecimentos e modos de vibrar do sistema em análise. Ao contrário dos parâmetros físicos, os parâmetros modais podem ser determinados unicamente. Sendo assim, as técnicas empregadas na análise modal experimental procuram estimar tais parâmetros e em geral não resolvem totalmente o problema de identificação. Neste trabalho, os esforços foram concentrados em técnicas que permitam determinar estimativas dos parâmetros modais das estruturas em análise.

Em resumo, a identificação pode ser vista como um processo para obtenção de parâmetros que representem a dinâmica da estrutura com base nos sinais de excitação e resposta observados, bem como no conhecimento prévio de leis físicas e relações que

descrevem o sistema.

A fig.(2) representa de forma gráfica as relações internas de um sistema real e sua relação com o modelo matemático. Assim, os parâmetros podem ser calculados a partir de equações que relacionam a entrada u e a saída y do sistema considerando a influência de outros sinais v e s denominados distúrbios ou ruídos que estão presentes mas, na maioria dos casos, não podem ser medidos separadamente.

Figura 2: Representação do problema de identificação

O ruído presente tanto nos sinais de saída quanto de entrada é a principal fonte de imprecisões nos modelos obtidos pela identificação. Portanto, o processo de determinação dos parâmetros modais do sistema é eminentemente estatístico e a identificação é vista como realizações de uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade específica.

As aplicações das técnicas empregadas na determinação dos parâmetros modais são cada vez mais surpreendentes, sobretudo quando a correção ou validação de modelos dinâmicos é necessária. A compreensão e o trabalho em Análise Modal Experimental exige a integração com diversas áreas tais como álgebra linear, análise matemática, otimização, métodos numéricos, processamento de sinais, análise de vibrações, controle, entre outras.

Em análise de sistemas a identificação e a modelagem caminham juntas; o modelo é a base para a identificação e a identificação pode ser vista como a validação do modelo ou como parte dele mesmo.

A grande maioria dos métodos de identificação são apresentados de diferentes maneiras, que podem estar apenas na aparência visto que muitos são matematicamente equivalentes. Contudo há uma exata separação no que se refere ao domínio no qual são numericamente tratados os dados, tempo ou frequência.

Os métodos de análise modal experimental no domínio da frequência foram os primeiros a serem utilizados no problema de identificação e por isto são denominados métodos clássicos. Tais métodos foram amplamente assimilados na engenharia e fornecem como resultados intermediários informações qualitativas importantes do comportamento dinâmico

mico do sistema em estudo. No entanto, existem sérias limitações devido a problemas associados com o fenômeno de 'leakage' e a baixa resolução em frequência, principalmente quando se trata de sistemas que apresentam características especiais, como por exemplo, modos acoplados, frequências muito próximas.

Os métodos de identificação no domínio do tempo despontaram como alternativa promissora aos métodos na frequência, visto que podem ser aplicados em estruturas que apresentam frequências naturais próximas. Uma vez que são baseados em séries temporais é possível prever o comportamento futuro e interpretar eventos passados, possibilitando assim o diagnóstico de falhas através de manutenção preventiva e preditiva [25].

Embora as estruturas reais possuam teoricamente infinitas frequências e infinitos modos de vibrar, o limite dinâmico real faz com que o número de coordenadas independentes do modelo seja reduzido drasticamente restringindo a análise a uma faixa de frequência previamente estabelecida. Assim é fundamental na identificação no domínio do tempo, a determinação correta do número de modos de vibrar contido nos sinais observados.

Portanto a falta de um critério de estimação da ordem do modelo é uma das principais desvantagens das técnicas no domínio do tempo. Embora o recurso do uso de sistemas sobre-determinados seja prática usual, tal procedimento pode apresentar problemas de mal condicionamento das matrizes de dados, dificuldade na separação dos modos estruturais e computacionais e conseqüentemente aumento no tempo de processamento de dados. Assim justifica-se o interesse em estudar métodos eficientes no domínio do tempo que minimizem o problema da estimação da ordem do modelo. Estes métodos devem desenvolver técnicas para automatização do processo de identificação que tornem possível a aplicação dos poderosos e complexos métodos da análise modal experimental com pouca intervenção do usuário.

Além da diferenciação quanto ao domínio em que operam, os algoritmos de identificação podem ser também classificados quanto à forma com que os sinais observados são manipulados. Os sinais de excitação e resposta do sistema podem ser tanto armazenados em grande quantidade e pós-processados, quanto coletados numa sequência de curtos períodos de tempo, onde os dados são processados após cada instante de amostragem cujo resultado servirá para efetuar o ajuste dos parâmetros estimados que serão utilizados no próximo processo de identificação. No primeiro caso o processo é denominado *não-recursivo* ou '*batch*' e no segundo, *recursivo* ou *seqüencial*.

O método recursivo é usualmente aplicado aos sistemas submetidos a condições incertas de excitação e que apresentem sinais não-estacionários. O processo de identificação não requer sinais de entrada especiais e os dados são processados em tempo real, mas o

algoritmo deve ser capaz de processar os dados com muita rapidez.

Por outro lado, os métodos não-recursivos são mais precisos pois os dados coletados podem ser processados várias vezes visto que não há a preocupação com a velocidade de processamento.

As técnicas de identificação dividem-se ainda em duas outras categorias, quanto ao conhecimento ou não das forças excitadoras.

Os *algoritmos de identificação determinísticos* necessitam dos dados de excitação e resposta, onde a força aplicada na estrutura pode ser uma varredura senoidal, carregamento impulsivo, excitação aleatória ou pseudo-aleatória, para citar alguns tipos comumente utilizados.

Por sua vez, os *algoritmos de identificação estocásticos* determinam o modelo modal a partir somente dos dados de resposta do sistema onde supõe-se que a estrutura está sujeita à ação permanente de um sinal estocástico ou ruído branco. Estas técnicas são aplicadas em situações em que não é possível monitorar as variáveis de entrada; neste caso diz-se que o sistema dinâmico responde ao carregamento de forças de *excitação natural*.

Os métodos determinísticos são numericamente mais simples e atrativos e o fator que concorre para a escolha de tais métodos é a existência de técnicas de identificação global em sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas relativamente bem consolidadas. A principal desvantagem reside no fato que a qualidade dos parâmetros modais é afetada drasticamente pela presença de ruídos nos sinais observados, tal aspecto afeta principalmente a estimação dos fatores de amortecimento, visto que na maioria dos sistemas estruturais estes parâmetros apresentam valores muito baixos.

Por outro lado, os métodos estocásticos apresentam a vantagem de serem mais eficazes no processo de identificação de sinais na presença de ruídos.

Há forte demanda por técnicas para a identificação de estruturas operando em condições reais de carregamento. Porém, faz-se necessário o desenvolvimento de técnicas que possibilitem a implementação das idéias da análise modal operacional através da aplicação dos poderosos porém complexos algoritmos da análise modal experimental no domínio do tempo, dentro da realidade do parque industrial brasileiro.

Para tanto é preciso adequar a aquisição simultânea de dados experimentais requerida pelos modernos métodos com múltiplas saídas, tais como o algoritmo de realização de sistemas, para a utilização de equipamentos de baixo custo através da aquisição não-simultânea dos dados. A aquisição não-simultânea representa uma economia de equipamentos necessários para a realização dos ensaios, além de requerer quantidades mínimas de instrumentos, tais como analisadores de sinais com número reduzido de canais

e conseqüentemente, uso mínimo de sensores.

Além dos recursos limitados em relação aos equipamentos, a realidade nacional também apresenta escassez de profissionais especializados nesta área. Assim há demanda por técnicas capazes de realizar a identificação e qualificar os resultados com intervenção mínima do usuário, mesmo em estruturas em condições operacionais e modos fortemente acoplados.

1.1 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia robusta e automatizada para identificação de parâmetros modais de sistemas mecânicos utilizando apenas a resposta do sistema.

O procedimento é baseado em métodos estocásticos não-recursivos de identificação no domínio do tempo, especificamente o algoritmo ERA aplicado às funções de correlação.

É proposto a utilização da análise estatística como ferramenta para selecionar, de forma automatizada, as frequências naturais do sistema dentre os parâmetros computacionais gerados pelo alto índice de ruído presente no sinal analisado.

A característica fundamental da metodologia proposta é a utilização da transformada wavelet para aumentar a robustez e a precisão do método assim como para torná-lo um procedimento de menor custo computacional.

A combinação adequada dos métodos estocásticos de identificação com a transformada wavelet e a análise estatística resulta na metodologia desenvolvida.

A metodologia proposta foi avaliada em três tipos de sistemas mecânicos simulados numericamente, onde houve a variação do tamanho das amostras sob influência de vários níveis de contaminação por ruído.

A primeira simulação corresponde a um sistema de quatro graus de liberdade com amortecimento proporcional e frequências naturais separadas. Para este modelo mais simples é proposto um procedimento para identificação utilizando sinais de resposta com aquisição não-simultânea.

A segunda simulação corresponde também a um sistema de quatro graus de liberdade, diferindo da primeira simulação quanto ao tipo de amortecimento adotado, não-proporcional, e com alta densidade modal.

A terceira simulação é mais geral e corresponde a um modelo construído por elementos finitos com vinte graus de liberdade de uma viga prismática esbelta engastada numa das extremidades, com amortecimento proporcional.

1.2 Organização da Tese

O capítulo 2 deste trabalho apresenta uma breve visão histórica do desenvolvimento da área de análise modal experimental e traz a revisão bibliográfica. É dedicado especialmente à discussão dos principais métodos de identificação no domínio do tempo, desde os algoritmos tradicionais de identificação a partir da resposta impulso até a evolução dos métodos modernos de identificação de sistemas sem o conhecimento das forças de excitação.

No capítulo 3 é apresentada uma revisão apropriada da identificação de sistemas. Nesta revisão são abordados os princípios básicos do problema de identificação e os conceitos fundamentais da análise modal operacional que constituirão o suporte para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 4 são apresentados o detalhamento dos objetivos e a metodologia proposta para identificação dos parâmetros modais de um sistema mecânico. Este capítulo ainda contém os fundamentos teóricos da transformada wavelet, da aquisição não-simultânea e cálculo dos modos normais.

No capítulo 5 encontram-se os resultados das simulações numéricas para avaliar a viabilidade e precisão do método para diferentes condições e níveis de ruído. Particularmente a capacidade do método na identificação de sistemas vibratórios com alta densidade modal é validada.

E finalmente, o capítulo 6 traz as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 *Identificação de Sistemas Dinâmicos*

A história da *análise modal experimental* (EMA) remonta ao início do século passado. Desde então muito se tem produzido, especialmente a partir da década de 1970, graças ao vertiginoso desenvolvimento da tecnologia. As técnicas de análise modal experimental no domínio do tempo utilizam diretamente os sinais de excitação e resposta para o cálculo dos parâmetros modais.

Algumas publicações tais como Ewins [24] e Maia [58] apresentaram uma ampla revisão, classificando e descrevendo as técnicas de identificação mais significativas na respectiva época, proporcionando uma visão geral dos testes modais no domínio do tempo e no domínio da frequência.

O desenvolvimento de métodos no domínio do tempo tem obtido sucesso principalmente na identificação de sistemas com alta densidade modal; particularmente as técnicas de identificação de subespaço baseadas na realização de sistemas fornecem modelos em espaço de estado confiáveis para sistemas multivariáveis [77].

O processo tradicional de identificação de sistemas no domínio do tempo pode ser resumido em quatro etapas principais:

1. **Coleta de dados.** Nesta etapa é necessário efetuar experimentos específicos para extrair informação dinâmica do sistema. Problemas importantes relacionados a esta etapa são a escolha dos sinais de excitação e a escolha do tempo de amostragem.
2. **Escolha da representação matemática.** Procedimento conhecido como modelagem, consiste na busca de um conjunto de equações matemáticas com base no conhecimento prévio e nas propriedades físicas do sistema. Várias hipóteses devem ser abordadas nesta fase, tais como modelos lineares ou não-lineares, discretização espacial ou temporal, número de entradas e saídas do sistema.
3. **Estimação dos parâmetros.** Neste momento é necessário escolher o algoritmo de identificação a ser utilizado para obter os parâmetros modais com base nas informações disponíveis, características físicas e conhecimento prévio do sistema.

4. **Validação do modelo.** Consiste em verificar se o modelo incorpora ou não as características de interesse. Este processo baseia-se na análise de consistência estatística dos parâmetros de modo a investigar se o comportamento de tal modelo equivale ao sistema real e quais são os limites de validade.

Nas últimas décadas, a maioria das técnicas de identificação estiveram limitadas ao ambiente controlado de laboratórios onde as estruturas são submetidas a níveis de excitação distintos das situações reais. Frequentemente é possível realizar testes baseados na excitação forçada e nas medidas correlacionadas de entrada e saída em estruturas sob condições operacionais.

Entretanto, as condições normais de operação de máquinas e estruturas podem ser muito diferentes daquelas utilizadas num ensaio modal controlado. Na realidade, as entradas do sistema em condições operacionais são desconhecidas e, quase sempre, nestas situações o sistema está submetido a múltiplas excitações enquanto que em laboratório frequentemente os testes utilizam excitação em um único ponto.

Além disso, existem situações onde o teste em estruturas reais é desejável, por exemplo: plataformas de petróleo sujeitas à excitação das ondas, aeronaves sujeitas a rajadas de vento, prédios, torres e pontes sob a ação do vento, do tráfego e excitações sísmicas. Nestes casos é óbvio que um teste modal controlado na estrutura é quase sempre impossível.

Nestas condições, para realizar a identificação é preciso recorrer à análise modal baseada na excitação natural, onde assume-se que a fonte de excitação são os distúrbios de entrada. O processo de identificação requer o uso de hipóteses estatísticas com respeito à fonte de excitação. Pode-se supor que a entrada do sistema é aproximada por forças aleatórias não correlacionadas aplicadas em vários pontos. Em geral, considera-se a entrada do tipo estacionária.

Desta forma, as técnicas de identificação modal no domínio do tempo podem ser divididas em dois grupos. O primeiro grupo inclui os *métodos determinísticos* que em geral derivam de técnicas onde a função resposta ao impulso é aproximada por uma superposição ponderada de funções exponenciais complexas. O segundo grupo consiste dos *métodos não-determinísticos*. A classe dos métodos não-determinísticos inclui uma subcategoria identificada como *métodos estocásticos*, que é a classe de métodos de identificação de interesse neste trabalho.

2.1 Principais Métodos Determinísticos

Os algoritmos de identificação existentes são apresentados sob diferentes formas, mas em geral são equivalentes no sentido que sua formulação consiste na obtenção de uma

matriz bloco a partir dos dados coletados.

Com os avanços ocorridos na eletrônica digital, Ibrahim e Milkulcik [38]-[39] utilizaram métodos no domínio do tempo que despertaram o interesse dos analistas nesta área. Brown [13] popularizou o *método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas* (LSCE) e Vold [79] desenvolveu um algoritmo de frequências múltiplas, denominado *exponencial complexa de polireferência* (PRCE), em ambos os domínios, do tempo e da frequência. Finalmente Juang e Pappa [44] desenvolveram o *algoritmo de realização de sistemas* (ERA) aplicado primeiramente no domínio do tempo e posteriormente no domínio da frequência.

Os trabalhos deste período constituem o que pode-se chamar de primeiro grupo de técnicas aplicadas à análise modal experimental no domínio do tempo. Em sua grande maioria são baseadas no método de aproximações exponenciais de Prony [72].

Considerado um dos métodos clássicos de identificação de parâmetros modais, o *método de Ibrahim no domínio do tempo* (ITD) ainda passa por constante aprimoramento. Assim para falar sobre o método ITD é necessário recorrer às três versões existentes [37], [38] e [39]. Originalmente foi desenvolvido para análise de sistemas de uma entrada e várias saídas. Posteriormente foram formuladas versões capazes de analisar sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Este método é formulado com base nos dados da resposta livre de sistemas estruturais. Essencialmente o processo de identificação consiste em primeiramente utilizar o conjunto de medidas de vibração livre para construir duas matrizes defasadas de um certo intervalo de tempo. Em seguida é montado um sistema ortogonal a partir das duas matrizes construídas anteriormente e finalmente é resolvido o problema de autovalores obtido. Dos autovalores encontrados provém informações sobre as frequências naturais e os fatores de amortecimento, enquanto os autovetores fornecem os modos de vibrar.

Certo nível de incerteza, devido à não-linearidades, acoplamento entre os modos e alto nível de ruído nos sinais, requer a utilização de um modelo sobredeterminado e conseqüentemente, ao final do processo, o método ITD identifica também modos não-estruturais, ditos modos espúrios ou computacionais. Assim, é imprescindível estabelecer um critério para separar os modos computacionais dos modos estruturais.

Um dos aspectos fundamentais da primeira versão do método ITD é a necessidade da aquisição simultânea dos dados de resposta. Na segunda versão os autores eliminam o problema da simultaneidade sugerindo a realização de testes compostos de várias medições, tomando dois pontos de medida por vez, de modo que um sirva de referência para todas as respostas.

Dentre as vantagens do método ITD destacam-se a necessidade de aparato instrumental mínimo, reduzido tempo computacional e alta precisão na identificação. A principal desvantagem é a sua sensibilidade à presença de ruído.

A técnica da polireferência é um método de estimação global estruturado com base nos sinais de resposta ao impulso de um sistema vibratório. É considerado como núcleo para os métodos determinísticos.

A formulação básica pode ser dividida em dois estágios. No primeiro as frequências naturais amortecidas e os coeficientes de amortecimento são determinados utilizando os dados coletados no domínio do tempo em sistemas de múltiplas referências de saída, enquanto que o segundo estágio consiste na obtenção dos modos de vibrar do sistema.

O método PRCE é uma extensão do *método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas* (LSCE) para sistemas multivariados; este último por sua vez é a evolução do *método da exponencial complexa* (CE). A grande vantagem do método em relação ao seu antecessor é o caráter automático e generalizador.

De acordo com Maia et al [58], a sensibilidade a não-linearidades e a falta de critério para diferenciação entre modos estruturais e computacionais são as maiores desvantagens do método PRCE.

O algoritmo ERA é considerado o primeiro modelo modal de identificação paramétrica a utilizar a formulação baseada na *decomposição em valores singulares* (SVD) [27], que permite estabelecer uma matriz composta por dados que contenham informações relevantes ao comportamento do sistema. Desta forma a análise dos valores singulares pode ser aplicada como um critério para estabelecer a melhor ordem para o modelo inicial de modo a obter um estimador numericamente estável.

É uma técnica de identificação global que evoluiu de uma formulação matemática estabelecida com base na teoria de *realização de sistemas*.

Idéias de realização e o estudo de equações que relacionem entrada e saída de um sistema dinâmico remontam ao século XIX, mas somente no início dos anos 1960 foram desenvolvidas técnicas de representação em espaço de estado. A sua principal característica é a capacidade para analisar sistematicamente sistemas variantes e invariantes no tempo tanto lineares como não-lineares. Em meados dos anos 1960, Kalman [49]-[51] introduziu a aplicação de técnicas algébricas no estudo de realização de sistemas lineares. Alguns autores, motivados pelas técnicas diferenciais-algébricas, sugeriram que a realização poderia ser definida em termos de equações entrada-saída.

Com base no resultado teórico da teoria de realização de sistemas, Ho e Kalman [32] desenvolveram um algoritmo que ajusta um modelo em espaço de estado de ordem mínima

a partir da resposta dinâmica ao impulso, baseado nos conceitos de controlabilidade e observabilidade. O problema da realização mínima foi intensamente estudado do ponto de vista conceitual [52].

Segundo Akaike [4], além de sua aplicação direta na realização de sistemas, o conceito de realização mínima tem uma conexão profunda com o problema de identificação, isto é, com o problema de encontrar um modelo matemático a partir dos dados de entrada e saída do sistema. Assim, mais tarde, Juang e Pappa [44] propuseram a incorporação da análise SVD ao algoritmo de Ho-Kalman. Assim o Algoritmo de Realização de Sistemas é um método de realização balanceado baseado na decomposição em subespaços ortogonais capaz de realizar a identificação em estruturas reais.

Na análise de estruturas grandes e flexíveis o algoritmo ERA apresenta algumas vantagens em relação aos demais métodos. O algoritmo encontra teoricamente o modelo de menor ordem que se ajusta aos dados, dada uma precisão. Portanto reduz a complexidade da solução computacional e elimina a maioria dos modos espúrios e computacionais que ocorrem em modelos sobre-determinados. Além disso é um método eficaz na análise de dados de estruturas com frequências próximas, com ou sem ruído nos dados.

Na grande maioria dos testes de identificação modal no domínio do tempo ainda são calculadas primeiramente as funções de resposta em frequência (FRF). Também no algoritmo ERA é usual a obtenção dos parâmetros de Markov a partir das funções de resposta ao impulso (IRF), especificamente a prática usual é utilizar a transformada rápida de Fourier (FFT) das entradas e saídas observadas para calcular a resposta ao pulso. No entanto, a transformada discreta é freqüentemente afetada por problemas numéricos de mal-condicionamento. Um caminho alternativo que calcula os parâmetros de Markov diretamente no domínio do tempo é proposto por Juang et al. [48]. O método denominado ‘observer/Kalman filter identification algorithm’ (OKID) é formulado inteiramente no domínio do tempo, a técnica é similar a um filtro adaptativo e tem obtido sucesso na identificação de sistemas reais [43]. Uma importante extensão do OKID é o método conhecido como ‘observer/controller identification algorithm’ (OCID) que torna possível a identificação de sistemas inerentemente instáveis, onde os dados experimentais somente podem ser adquiridos com a ação de uma malha de controle [46]. Os dois algoritmos necessitam de aquisição simultânea de dados de entrada e saída no domínio do tempo além da utilização de um grande número de sensores.

2.2 Identificação Estocástica

A área de engenharia civil contribuiu com uma grande quantidade de trabalhos relativos à aplicação das técnicas multi-canal no domínio do tempo de análise modal operacional [76]. Isto deve-se principalmente ao fato que em ensaios de vibração em estruturas civis é freqüentemente impraticável e de custo elevado utilizar excitação artificial, como martelo ou shaker. A excitação ambiente como vento, tráfego ou mesmo pequenos tremores, ao contrário, está disponível livremente. Portanto as técnicas de identificação operacional são muito atraentes, visto que não requerem que a estrutura esteja fora de serviço. No entanto tal abordagem propõe outros desafios pois a excitação ambiente permanece desconhecida e os algoritmos de identificação de sistemas devem trabalhar somente com as medidas de saída. As forças ambientes não-mensuráveis devem ser em geral modeladas matematicamente como um ruído branco.

As técnicas de identificação estocástica provaram ser muito úteis na engenharia mecânica, por exemplo, para obter os parâmetros modais de uma aeronave durante testes de voo. Pappa e Juang [65] utilizaram dados de sistemas naturalmente excitados diretamente no algoritmo ERA. Sugeriram que a utilização de tais dados diretamente no algoritmo ERA com correlação de dados (ERA/DC) [45] é equivalente a utilizar funções de correlação cruzada no algoritmo ERA original.

Clarkson e Mercer [16] estudaram a aplicação das funções de correlação cruzada para determinação das características da resposta em freqüência de uma estrutura ligeiramente amortecida. Neste trabalho foi utilizada a estimativa da função de resposta em freqüência (FRF) de um sistema de um grau de liberdade a partir da medida da correlação cruzada entre a excitação (ruído branco) e a resposta. O método pode ser utilizado para sistemas com vários graus de liberdade desde que os modos de vibrar estejam bem separados em freqüência. A função correlação cruzada apresenta valores não desprezíveis por um longo período de tempo. Assim é necessário a análise do efeito do truncamento da série, em algum limite conveniente, para estimativa da densidade espectral. Embora assuma o conhecimento das forças de excitação, o procedimento merece destaque pela contribuição na disseminação da idéia de utilizar funções de correlação em lugar tradicionais funções de resposta ao impulso quando a excitação não pode ser medida.

Segundo Clarkson e Mercer [16], quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o conjunto de funções de resposta ao impulso (IRFs). Tal constatação pode ser utilizada para abastecer com as funções de correlação os algoritmos clássicos de identificação no domínio do tempo, formulados originalmente para a resposta ao impul-

so. O procedimento proposto por Clarkson e Mercer, aliado às técnicas de extração de parâmetros modais no domínio do tempo tais como ITD, Polireferência e ERA, deram origem a uma poderosa ferramenta para a análise modal de estruturas naturalmente excitadas, denominada *técnica de excitação natural* (NExT). O novo método contribuiu para popularizar, na comunidade de engenharia mecânica, a idéia de que é possível extrair os parâmetros modais de estruturas excitados por forças desconhecidas. Os métodos de excitação natural são usualmente aplicados em estruturas de grande porte, estruturas muito flexíveis ou em sistemas cuja obtenção das propriedades modais dependem das condições de operação.

Nos modelos utilizados para identificação estocástica admite-se por hipótese que a saída do sistema estrutural é oriunda de um sistema linear invariante no tempo. Esta hipótese embora nem sempre verdadeira pode ser adotada com segurança quando os sinais do sistema em estudo são estabelecidos em blocos distintos por faixas de intervalos de tempo. Na estrutura do modelo é admitida a ação permanente de um sinal estocástico ou ruído branco como componente de excitação da estrutura.

A identificação dos parâmetros modais de uma estrutura sob excitação ambiente é discutida na literatura em muitos trabalhos recentes indicando que o tema é um atrativo e emergente campo da análise estrutural. Uma das primeiras tentativas para caracterizar completamente os parâmetros modais de sistemas sob a ação de forças aleatórias foi realizada por McLemore, Hart e Stubbs [61] usando uma extensão da *técnica espectral* desenvolvida por Crawford e Ward [21], onde as frequências associadas aos picos da função *densidade de potência espectral* (PSD) de cada sinal de resposta fornece uma estimativa das frequências de ressonância. Bendat e Piersol [10] resumiram o desenvolvimento do método para identificação de sistemas a partir da resposta à excitação ambiente. De acordo com Abdel-Ghaffar e Housner [3], a técnica necessita de alta resolução em frequência e apresenta dificuldades na identificação de modos próximos devido à sobreposição espectral. As últimas décadas têm sido especialmente prolíferas em trabalhos relacionados ao tema. Alguns resultados e aplicações das técnicas são apresentados em [71] e [8]. Outra aplicação é a detecção de falhas tratada em [1] e [63]. Especificamente a análise modal operacional tem sido realizada em estruturas aeronáuticas [2], para monitoramento em carros esportes [31] e em plataformas oceânicas [33]. Uma alternativa aos métodos de identificação estocástica no domínio do tempo é o método desenvolvido por Guillaume et al [29] que trabalha no domínio da frequência. Benveniste e Fuchs [12] desenvolveram uma extensão para o caso do sinal de excitação ser não-estacionário e em Basseville et al [9] podem ser encontradas aplicações industriais desta abordagem.

Como visto na literatura, existe uma variedade de métodos que podem realizar a identificação de sistemas excitados por forças não medidas. Nestes casos o completo conhecimento da excitação é substituído pela suposição que o sistema é excitado por um ruído branco gaussiano.

Dentre os vários métodos para extração das frequências naturais e fatores de amortecimento de estruturas utilizando somente dados de saída, destaca-se o *algoritmo de predição linear* baseado no modelo *autoregressivo de médias móveis* (ARMA) como sendo a mais clássica das técnicas de identificação estocástica. Este método está fundamentado na teoria de séries temporais e foi inicialmente aplicado à problemas de engenharia elétrica e automação, sendo posteriormente transferido com sucesso à análise modal experimental.

Os parâmetros do modelo estrutural ARMA guardam informações relativas à dinâmica do sistema, uma vez que estes estão relacionados com a covariância equivalente do sistema e ao processo de excitação [19]. Assim, um modelo de ordem satisfatória pode representar muito bem a dinâmica de uma estrutura. Infelizmente os parâmetros MA causam problemas de não-linearidade [57]. Um modelo mais geral para sistemas multivariados invariantes no tempo é o ARMA vetorial (ARMAV) que relaciona o termo autoregressivo das saídas ao termo de médias móveis do ruído branco considerado como entrada do sistema. Baseado na medida dos sinais de saída, o *método de erro de predição* (PE) [57] identifica os parâmetros modais do sistema. Este método tem problemas de convergência, alta sensibilidade às condições iniciais e excessiva carga computacional [68]. Tem sido utilizado na análise de problemas de vibração de máquinas-ferramenta em condições de trabalho [34] e [8], apesar da complexidade dos modelos.

A possível solução para os problemas relacionadas ao ARMAV é omitir os termos MA de médias móveis e resolver um problema linear de mínimos quadrados para encontrar os parâmetros de um modelo ARV. O método denominado Instrumental Variable (IV) é a versão referente aos modelos ARMA que identifica somente os parâmetros AR. A grande desvantagem é a carência de um mecanismo para tratamento do ruído no sinal.

Como alternativa ao modelo ARMA, há a classe de métodos de identificação estocástica baseados em modelos em espaço de estado denominada *identificação estocástica de subespaço* (SSI). Baseados na identificação de subespaço, tais métodos executam primeiramente uma redução no conjunto de estados do sistema e só então o modelo em espaço de estado é identificado a partir do subconjunto encontrado. A terminologia subespaço surgiu na teoria de controle e define o grupo de métodos que compõem a classe de problemas denominada *realização estocástica*. Está estritamente relacionada com a realização determinística que retrocede ao algoritmo de Ho-Kalman e aplica a decomposição SVD

para o tratamento de sinais contaminados por ruído [54].

Os métodos SSI compartilham as vantagens com as técnicas de identificação baseadas no modelo ARMA, visto que o modelo estocástico em espaço de estado identificado por esta classe de métodos é de fato uma transformação do modelo ARMAV sendo mais geral que um modelo ARV. Estes métodos por sua vez não envolvem cálculos não-lineares e portanto são mais rápidos e robustos que o método PE.

Um dos principais membros da família de métodos SSI é a *técnica covariance-driven stochastic subspace identification* (SSI-COV) que ganha eficiência em relação ao método IV aplicando a decomposição SVD. São várias as versões de algoritmos da técnica SSI-COV que diferem somente pela escolha da base em que o sistema será identificado. Dentre as variantes podem ser destacadas as técnicas *balanced realization* (BR), *canonical variate analysis* (CVA) e *principal components* (PC), cujos detalhes podem ser vistos em [76]. A diferença básica entre o método BR e o CVA está no fato que o primeiro seleciona um subconjunto de funções resposta como referência para em seguida calcular as funções de correlação desse subconjunto com todo o conjunto dos dados no tempo originais, enquanto que no segundo todas as respostas são utilizadas no cálculo das funções de correlação. Uma interpretação física para o método CVA é que o sistema de modos são balanceados em termos da energia. Assim modos que são pouco excitados em condições operacionais podem ser melhor identificados. Portanto o método BR é capaz de identificar os modos dominantes sob condições operacionais com esforço computacional bem menor em relação ao método CVA que por sua vez considera todos os modos com igual importância.

Peeters e Roeck [67] propõem uma variação do método SSI-COV, utilizando somente as covariâncias de saídas de referência. A idéia básica do novo método, denominado *reference-based* (SSI/ref), é considerar somente algumas saídas de referência em lugar de tomar todas as saídas. Tal procedimento reduz a dimensão das matrizes e portanto reduz também o tempo computacional. Em aplicações da análise modal, frequentemente muitos sensores são utilizados com certa distribuição espacial ao longo da estrutura originando sinais de diferentes qualidades. Alguns sensores podem estar localizados em pontos nodais de um modo de vibrar e outros podem estar localizados em pontos próximos a bordas fixas. Neste método, é importante a qualidade da localização dos pontos de referência devido ao número limitado delas.

Em oposição ao SSI-COV, que calcula as covariâncias entre os sinais de saída, foi proposta a técnica *data-driven stochastic subspace identification* (SSI-DATA) que faz o tratamento do ruído através da projeção do espaço das saídas futuras no espaço das saídas

passadas [76].

Peeters e Roeck [69] avaliam e comparam os diversos métodos de identificação estocástica em aplicações práticas, concluindo que há diferenças quanto ao tempo computacional necessário para realizar a identificação. No entanto não há diferenças significativas quando se observa os parâmetros modais identificados. Ainda de acordo com este trabalho, o método SSI-COV é considerado mais rápido que o método SSI-DATA. Como este último método utiliza apenas algoritmos numéricos lineares, ele é mais eficiente na predição de erros devido às não-linearidades.

Seguindo outra filosofia a *técnica de excitação natural* (NExT) permite a extração dos parâmetros modais de estruturas sob a ação de excitação natural utilizando para tanto as técnicas clássicas de identificação determinística. A grande vantagem deste método é a utilização de técnicas amplamente estudadas e aplicadas e por isto comprovadamente eficientes na análise modal experimental.

Segundo James et al [42], a justificativa teórica do processo de identificação NExT reside no fato que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), excitado por forças aleatórias, produz funções de autocorrelação e correlação-cruzada que são somas de ‘senos amortecidos’. Além disso cada seno apresenta uma frequência natural amortecida e um fator de amortecimento idênticos aos correspondentes parâmetros dos modos estruturais. Conseqüentemente, se as funções de correlação da resposta são equivalentes à função resposta ao impulso, elas podem ser utilizadas nos métodos conhecidos e extensamente testados de identificação, tais como PRCE, ITD ou ERA, para extrair os parâmetros modais e o modelo da estrutura.

Sendo assim, a idéia central é calcular as estimativas das funções de correlação entre as respostas aleatórias. O resultado pode ser considerado como respostas livres e pode então compor o conjunto de dados para os métodos de identificação da análise modal tradicional. O trabalho de Lauffer et al [55] foi o primeiro a validar a nova técnica aplicando-a a uma turbina; seguiu-se a ele o trabalho de James et al [41] e de Kim et al [53].

O trabalho de James et al [42] é composto por uma demonstração da equivalência entre as funções de correlação e a função de resposta ao impulso. Além disso, apresenta a identificação das frequências naturais e fatores de amortecimento modal de uma estrutura com amortecimento proporcional excitada por um ruído branco. Comprova assim a eficácia do método na estimativa dos parâmetros modais utilizando para tanto o método da Polireferência. No entanto, constata-se que a aplicação da técnica NExT juntamente com o método da Polireferência, da forma como foi implementada, é incapaz de separar

modos próximos. Finalmente os autores sugerem que técnicas mais avançadas de identificação devem ser utilizadas na extração dos parâmetros quando a estrutura apresentar baixas frequências ou alta densidade modal. Também ressaltam que técnicas para filtrar componentes harmônicas devem ser implementadas para melhoria do método.

Hermans e Auweraer [31] estudam a aplicação da técnica NExT em três casos industriais, analisando suas capacidades e limitações. Tanto a técnica NExT utilizando a Polireferência quanto o ERA obtiveram sucesso na caracterização modal de um sistema de suspensão traseira de uma carro durante testes de rodagem, na análise de ‘flutter’ de uma aeronave comercial em voo e na identificação dos modos de uma ponte de concreto em condições normais de operação. A abordagem utilizando o algoritmo ERA se mostrou superior quando houve necessidade de um número alto de respostas devido a sua evidente eficiência computacional.

O processo para identificação de parâmetros modais de estruturas naturalmente excitadas utilizando a técnica NExT é composto basicamente pelas seguintes etapas:

1. **Coleta de dados de resposta da estrutura em operação.** Sensores capazes de medir aceleração ou força devem ser posicionados em pontos específicos da estrutura. É necessária a observação de uma longa série temporal de forma a garantir condições operacionais relativamente estacionárias.
2. **Cálculo das funções de correlação.** As funções de autocorrelação e correlação cruzada são obtidas a partir dos dados de resposta coletados. As funções de correlação cruzada de cada resposta é calcula em relação a um subconjunto das saídas previamente escolhido de forma a conter as informações modais relevantes, que funciona como referência. A seleção dos canais de referência é similar à escolha da localização dos pontos de excitação de um teste modal tradicional.
3. **Identificação no domínio do tempo.** Considerando as funções de correlação, obtidas na etapa anterior, como respostas livres é possível aplicar um dos métodos de identificação no domínio do tempo para estimar as frequências naturais e os fatores de amortecimento modal.
4. **Forma dos modos.** Os modos podem ser obtidos a partir das frequências naturais e fatores de amortecimento identificados anteriormente através de um processo próprio para extração [14]. No entanto, os modos de vibrar não podem ser normalizados pela massa visto que tal procedimento requer a medida das entradas do sistema.

Na prática, as funções de correlação são desconhecidas visto que apenas um conjunto

finito de amostras dos dados em tempo discreto é conhecido. Portanto há a necessidade de métodos para estimar tais funções a partir dos dados experimentais.

As funções de correlação podem ser avaliadas explicitamente a partir dos dados da resposta aleatória. A maneira mais eficiente para obtê-las é calcular a transformada de Fourier (FT) do espectro em potência das saídas. A técnica mais popular para realizar esta tarefa é o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT), devido ao desenvolvimento de equipamentos e programas computacionais no campo de processamento de dados. No entanto, a técnica da transformada de Fourier e de sua inversa, abreviadamente FFT e IFFT [11], apresenta problemas inerentes associados ao fenômeno de 'leakage', tendência e variância da estimativa espectral. Para minimizar tais problemas e reduzir o efeito do ruído, médias do espectro devem ser realizadas.

Alternativamente, o método do *decremento aleatório* (RD) [6] também pode ser utilizado. É um método baseado em um princípio físico para obter a característica do sinal a partir da resposta no tempo de qualquer sistema sujeito a excitação não-mensurável. A simplicidade e rapidez da técnica RD são as maiores vantagens desta abordagem. Além disso a técnica produz uma estimativa sem tendência das funções de correlação. Ibrahim [35] propôs uma técnica que permite extrair as respostas livres de uma estrutura a partir das respostas aleatórias devido a uma excitação desconhecida ou não. Os sinais de resposta aleatória são medidos e processados através da técnica RD de modo a fornecerem respostas livres. Estas respostas foram empregadas nos cálculos dos parâmetros modais das estruturas ensaiadas, através do método ITD.

A técnica RD foi introduzida inicialmente [18] como um método para transformar respostas aleatórias em respostas livres de sistemas de um grau de liberdade. Posteriormente foi estendida para sistemas com múltiplos graus de liberdade e múltiplas saídas. Tanto o desenvolvimento teórico da técnica quanto sua estreita relação com as funções de correlação pode ser visto em [75]. Asmussen, Brincker e Ibrahim [7] desenvolveram uma extensão da técnica RD, denominada *decremento aleatório vetorial* (VRD), que estima as funções de correlação mais eficientemente quando uma grande quantidade de dados é considerada. Assim, a técnica VRD é um método eficiente para transformar respostas aleatórias em respostas livres.

3 *Fundamentos da Análise Modal Operacional*

Este capítulo está dividido em três seções. A primeira contém o desenvolvimento teórico da representação de sistemas em espaço de estado, visto que os métodos estudados e aplicados no presente trabalho utilizam este tipo de representação para construção do modelo matemático para sistemas dinâmicos a partir dos dados de excitação e resposta da estrutura.

A segunda seção é especialmente dedicada ao desenvolvimento do algoritmo ERA, enquanto a terceira estabelece o vínculo entre os métodos de identificação estocástico e determinístico. É possível assim estudar e discutir os problemas inerentes à identificação estocástica utilizando a técnica NExT via algoritmo ERA.

3.1 Representação de Sistemas em Espaço de Estado

Na análise modal a representação em *espaço de estado* é bem conhecida. Com o intuito de estabelecer a notação, é dada uma breve descrição dos principais parâmetros e equações.

Para obter a descrição matemática, ou o modelo de uma situação real é necessário considerar algumas hipóteses simplificadoras. Assim os métodos matemáticos podem ser aplicados para investigar as propriedades do modelo, e as conclusões refletirão a realidade tão bem quanto a precisão do modelo permita. Claro que quanto mais realista for o modelo, em geral, maior será a dificuldade em resolver as equações matemáticas resultantes.

Estruturas físicas reais são de fato um sistema contínuo e portanto têm infinitos graus de liberdades, ou seja, para descrever seu movimento é necessário um número infinito de coordenadas independentes entre si e dependentes do tempo. Para descrever numericamente o comportamento dinâmico de um sistema físico qualquer, utiliza-se na prática um número finito de coordenadas geométricas. Os graus de liberdade representam o número de coordenadas independentes necessárias para a descrição completa do movimento do

sistema. Esta análise restringe-se também às limitações dos equipamentos de aquisição de sinais dinâmicos que são capazes de monitorar o movimento do sistema apenas para uma restrita faixa de frequências. Tais limitações são contornadas com a utilização de modelos sobre-determinados.

No presente estudo admite-se como hipóteses simplificadoras que a estrutura pode ser representada por um modelo dinâmico discreto no espaço de dimensão finita n , linear e invariante no tempo.

A análise desenvolvida corresponderá a sistemas com amortecimento viscoso proporcional ou não proporcional. A adoção desse modelo de amortecimento segue exclusivamente o critério de manutenção do significado físico das grandezas dinâmicas medidas experimentalmente, deslocamentos e forças como grandezas reais.

Sob as hipóteses acima, o comportamento dinâmico do sistema pode ser expresso por meio de um sistema de equações de segunda ordem. No entanto, é freqüentemente mais conveniente expressar o comportamento do sistema por uma única equação vetorial.

Nestas condições, um sistema mecânico típico com n graus de liberdade, linear e invariante no tempo pode ser caracterizado pela seguinte equação diferencial vetorial de segunda ordem, denominada *Equação de Movimento*:

$$M\ddot{w}(t) + Z\dot{w}(t) + Kw(t) = f(t) \quad (3.1)$$

onde t representa o tempo contínuo, $M, Z, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente, $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de forças generalizadas aplicadas ao sistema ou, simplesmente excitação externa, e $w(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor deslocamento. Observe que o vetor força pode ser fatorado em $f(t) = Uu(t)$, onde $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ descreve espacialmente as posições das r entradas e $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ as descreve no tempo.

3.1.1 Modelos em Tempo Contínuo

Apesar da equação de movimento representar muito bem o comportamento de estruturas simples, tal representação é totalmente inadequada para modelos mais gerais. Nestes casos, é mais conveniente expressar o comportamento do sistema por equações diferenciais de primeira ordem do que por uma única equação diferencial vetorial de segunda ordem. As equações de primeira ordem podem também ser representadas por uma única equação de primeira ordem vetorial em termos das chamadas variáveis de estado do sistema.

Do ponto de vista matemático a representação alternativa do modelo dinâmico em espaço de estado é mais elegante e apresenta a vantagem adicional de simplificar a

manipulação numérica no processo de identificação, especialmente na análise de sistemas multivariados.

Seja $u(t)$ um sinal conhecido aplicado a um determinado sistema, começando num instante particular t_0 . Sem informações adicionais, é impossível encontrar a resposta do sistema depois do instante t_0 . Porém, é possível encontrar a resposta para todos os instantes se $u(t)$ for conhecido em todos os instantes de tempo t e, além disso, se os valores de $w(t)$ e de sua derivada forem conhecidos no instante inicial t_0 .

O par de vetores $w(t)$ e $\dot{w}(t)$ representa o estado do sistema e pode ser visto como um ponto do espaço Euclidiano de dimensão $2n$ que usualmente é denominado *Espaço de Estado* ou *Espaço de Fase*, em aplicações mecânicas. Pode-se definir o *estado* de um sistema como a quantidade mínima de informações necessárias para descrever o sistema em qualquer instante.

É importante observar que não existe necessariamente um único conjunto de variáveis de estado para um sistema. Dados dois desses conjuntos, eles podem representar o estado do sistema igualmente bem. No entanto, é comum realizar uma escolha particular e mais conveniente para cada problema.

Em casos extremamente particulares as variáveis de estados podem ser consideradas como saída do sistema. Entretanto, na prática é impossível observar as variáveis de estado diretamente, por motivos de inacessibilidade. Neste caso é preciso encontrar um conjunto de saídas y_i , $i = 1, \dots, m$, ou na notação vetorial um vetor de saída y que possa ser observado.

Apesar da história da teoria de sistemas lineares retroceder ao século XIX, as técnicas em espaço de estado surgiram no início dos anos 1960. A análise sistemática de sistemas variantes e invariantes no tempo tanto lineares como não-lineares é a principal vantagem da formulação em espaço de estado em relação à análise tradicional. Em suma, a representação no espaço de estado é uma classe especial de variáveis internas que possibilita sintetizar o efeito de entradas passadas e distúrbios no sistema.

Reescrevendo convenientemente a eq.(3.1) obtém-se

$$\ddot{w}(t) + M^{-1}Z\dot{w}(t) + M^{-1}Kw(t) = M^{-1}Uu(t) \quad (3.2)$$

As equações de movimento, também chamadas de equações de configuração, formam um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem. Para substituir este por um sistema equivalente composto por equações de primeira ordem é conveniente considerar a

identidade $\dot{w}(t) = \dot{w}(t)$ juntamente com a eq.(3.2). Assim

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) = -M^{-1}Z\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) + M^{-1}Uu(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Seja

$$x(t) = \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

um vetor de dimensão $2n$, denominado *vetor de estado*.

O sistema (3.3) escrito matricialmente resume-se a uma única equação

$$\dot{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{Bmatrix} = \hat{A} \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} + \hat{B}u(t), \quad (3.5)$$

onde,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}Z \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad \text{é a matriz de estado e}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U \end{bmatrix}_{2n \times r} \quad \text{é a matriz de influência de entrada.}$$

Assim, $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, denominadas *Equações de Estado*, podem ser apresentadas como

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t) \quad (3.6)$$

É importante notar que as equações de estado conservam a mesma informação dinâmica das equações de movimento.

Conforme observado anteriormente, o vetor de estado permanece inacessível na maioria dos experimentos práticos. Para realizar a identificação experimental é necessário manipular medidas relacionadas ao vetor de estado ou à sua derivada. Conforme o tipo de sensor utilizado pode-se medir, direta ou indiretamente, deslocamento, velocidade ou aceleração.

Na prática, nem todos os graus de liberdade podem ser monitorados. Assim admite-se que o monitoramento é feito por um conjunto composto por apenas $m \leq n$ sensores distribuídos em pontos específicos da estrutura em teste. Portanto apenas um número reduzido de variáveis de saída $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ dependentes de $x(t)$ e $u(t)$ pode ser medido

através desses sensores.

É possível expressar as saídas y_i pelo seguinte sistema de equações

$$y(t) = G_d w(t) + G_v \dot{w}(t) + G_a \ddot{w}(t) \quad (3.7)$$

onde G_d , G_v e G_a são as matrizes de influência de saída para o deslocamento, a velocidade e a aceleração, respectivamente.

Manipulando a eq.(3.2) obtém-se a igualdade

$$\ddot{w}(t) = -M^{-1}Z\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) + M^{-1}Uu(t) \quad (3.8)$$

Que pode ser utilizada para expressar o vetor de saída da seguinte maneira

$$y(t) = (G_d - G_a M^{-1}K) w(t) + (G_v - G_a M^{-1}Z) \dot{w}(t) + (G_a M^{-1}U) u(t) \quad (3.9)$$

No presente trabalho $y(t)$ é a medida da aceleração do sistema em pontos específicos da estrutura no instante t . Desta forma as matrizes de influência de saída para o deslocamento e a velocidade são identicamente nulas, portanto

$$y(t) = (-G_a M^{-1}K) w(t) + (-G_a M^{-1}Z) \dot{w}(t) + (G_a M^{-1}U) u(t) \quad (3.10)$$

Sejam

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -G_a M^{-1}K & -G_a M^{-1}Z \end{bmatrix}_{m \times 2n} \quad \text{a matriz de influência de saída, e}$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} G_a M^{-1}U \end{bmatrix}_{m \times r} \quad \text{a matriz de transmissão direta.}$$

A eq.(3.10) pode ser reescrita como

$$y(t) = \hat{C}x(t) + \hat{D}u(t) \quad (3.11)$$

As eq.(3.6) e eq.(3.11) caracterizam totalmente a dinâmica do sistema, isto é, o sistema formado pelas duas equações é equivalente à eq.(3.1). Portanto o seguinte sistema constitui o modelo em espaço de estado em tempo contínuo.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}x(t) + \hat{D}u(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

O conjunto de matrizes $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$ é denominado uma *Realização* do sistema de ordem $2n$, e não é única. É possível encontrar infinitas matrizes não-singulares de dimensão apropriada de forma a definir uma nova realização para o sistema. Para exemplificar, seja T uma dessas matrizes então $\{T^{-1}\hat{A}T, T^{-1}\hat{B}, \hat{C}T, \hat{D}\}$ é uma nova realização para o sistema, descrevendo exatamente a mesma relação entrada-saída, isto é, fornece resposta idênticas para entradas idênticas, embora com diferentes variáveis de estado.

Entre todas as realizações possíveis, aquelas onde $\hat{A}$ tem a menor dimensão são chamadas *realizações mínimas*, pois os sistemas correspondentes a elas envolvem o menor número possível de variáveis de estado. É importante observar que todas as realizações mínimas têm o mesmo conjunto de autovalores e portanto fornecem os mesmos parâmetros modais para um sistema em particular.

A dinâmica do sistema está completamente caracterizada pelos autovalores e pelas partes observáveis dos autovetores da matriz de estado $\hat{A}$. A decomposição em autovalor de $\hat{A}$ fornece

$$\hat{A} = \Phi \hat{\Lambda} \Phi^{-1} \quad (3.13)$$

onde $\hat{\Lambda}$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores de $\hat{A}$ e Φ é a matriz dos autovetores de $\hat{A}$.

Como a matriz de estado é real e tem posto $2n$, o sistema admite $2n$ autovalores $\hat{\lambda}_k$ não-nulos na diagonal de $\hat{\Lambda}$ que aparecem em pares de complexos conjugados e correspondem a um conjunto linearmente independente de $2n$ autovetores Ψ_k , que definem a configuração espacial do movimento.

Assumir que as raízes características de $\hat{A}$ são todas distintas não é uma hipótese muito simplificadora, pois em situações reais quaisquer perturbações em certos elementos de $\hat{A}$, que são conhecidos somente com um certo grau de precisão, são suficientes para separar as raízes coincidentes.

Considerando que o sistema foi admitido com amortecimento viscoso, a estabilidade assintótica ocorre em pares complexos conjugados com parte real é negativa.

$$\hat{\lambda}_k = -\sigma_k + i\omega_k \quad (3.14)$$

onde $\hat{\lambda}_k$ é um número complexo enquanto σ_k e ω_k são reais positivos.

Os autovetores são da forma

$$\Phi_k = \begin{Bmatrix} \phi_k \\ \hat{\lambda}_k \phi_k \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.15)$$

onde ϕ_k representa um vetor de dimensão $n \times 1$ referente ao k -ésimo modo de vibrar.

Em teoria de controle, a variável de entrada $u(t)$ é vista como uma função controladora que conduz um estado inicial $x(t_0)$ a um estado arbitrário $x(t)$ no tempo contínuo. A solução da equação de estado descreve a transição.

Pela teoria de equações diferenciais ordinárias, a eq.(3.6) com condição inicial x_0 no tempo t_0 tem solução única. Para encontrar tal solução é necessário estudar primeiramente a *matriz de transição de estado do sistema* definida por

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \hat{A}^k \quad (3.16)$$

onde $\hat{A}^0$ é a matriz identidade de ordem $2n$.

Desde que a matriz $\hat{A}$ seja assintoticamente estável, a série $e^{\hat{A}t}$ converge uniformemente, conforme mostra Chui [15]. Então é possível definir

$$\frac{d}{dt} e^{\hat{A}t} = \hat{A} e^{\hat{A}t} \quad (3.17)$$

Finalmente, há condições de encontrar a solução geral da Equação de Estado para $t \geq t_0$. Considere a seguinte derivada

$$\frac{d}{dt} e^{-\hat{A}t} x(t) = -\hat{A} e^{-\hat{A}t} x(t) + e^{-\hat{A}t} \dot{x}(t) \quad (3.18)$$

Após substituir $\dot{x}(t)$ de acordo com a eq.(3.6), a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} e^{-\hat{A}t} x(t) = \hat{B} e^{-\hat{A}t} u(t) \quad (3.19)$$

Onde a integração de t_0 a t de ambos os membros produz

$$x(t) = x_0 e^{\hat{A}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} u(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

Na eq.(3.20) o primeiro termo à direita representa a contribuição das condições iniciais não-nulas enquanto o segundo termo representa a influência das forças externas de excitação do sistema.

Assim, se $u(t)$ é conhecida para todo $t \geq t_0$ então $x(t)$ pode ser determinado calculando-se a matriz de transição e resolvendo-se a integral.

3.1.2 Modelos em Tempo Discreto

No processo de identificação a representação do sistema no tempo discreto é de fundamental importância, uma vez que os sinais são coletados na forma discreta por amostras em instantes de tempo. Por este motivo a maior parte dos métodos de identificação são apropriados para o tratamento de sinais discretos.

Por outro lado, o estudo do modelo contínuo é importante para a compreensão do comportamento físico do sistema. Ao final do processo os parâmetros físicos do sistema dinâmico devem ser obtidos através de equações que relacionam o sistema discreto com o contínuo.

Assim, por motivos de ordem prática, deve-se analisar a situação onde as variáveis são medidas somente em intervalos discretos de tempo ao invés de serem medidas continuamente, produzindo os denominados *sistemas discretos*.

Suponha que as variáveis estão definidas em intervalos fixos de tempo Δt .

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t, (k+1)\Delta t, \dots \quad (3.21)$$

Como apenas instantes discretos de tempo são conhecidos, admite-se que as funções contínuas $u(t)$ e $x(t)$ são constantes em cada intervalo

$$k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t, \quad k \in \mathbb{N}$$

Desta forma é possível transpor a solução geral encontrada para a equação de estado em tempo contínuo para o tempo discreto. O vetor de estado $x(t)$ num tempo $t = (k+1)\Delta t$, que simplificarmente será denotado por $x(k+1)$ pode ser obtido a partir do instante anterior $t_0 = k\Delta t$ através da eq.(3.20).

$$x(k+1) = e^{\hat{A}\Delta t}x(k) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\hat{A}[(k+1)\Delta t - \tau]} \hat{B}u(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

Como a integração deve ser realizada exatamente no mesmo intervalo onde a função $u(t)$ foi admitida constante, conclui-se que

$$x(k+1) = e^{\hat{A}\Delta t}x(k) + u(k) \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\hat{A}[(k+1)\Delta t - \tau]} \hat{B} d\tau \quad (3.23)$$

Introduzindo uma nova variável de integração, $\eta = (k+1)\Delta t - \tau$, temos

$$x(k+1) = e^{\hat{A}\Delta t}x(k) + u(k) \int_0^{\Delta t} e^{\hat{A}\eta} \hat{B} d\eta \quad (3.24)$$

Para simplificar ainda mais a expressão, define-se

$$A \triangleq e^{\hat{A}\Delta t} \quad (3.25)$$

e

$$B \triangleq \int_0^{\Delta t} e^{\hat{A}\eta} \hat{B} d\eta \quad (3.26)$$

Portanto a equação de estado em sua representação em tempo discreto pode ser escrita como

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.27)$$

onde $x_k = x(k)$ e $u_k = u(k)$.

Como não há derivadas envolvidas na equação de saída, sua representação no tempo discreto processa-se de forma direta, da seguinte maneira

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (3.28)$$

onde $C = \hat{C}$ e $D = \hat{D}$.

As equações de diferenças eq.(3.27) e eq.(3.28) compõem o modelo em espaço de estado em tempo discreto para sistemas dinâmicos que, conforme foi detalhado, é uma aproximação do modelo em tempo contínuo.

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (3.29)$$

Na formulação acima considerou-se que as observações são isentas de ruídos de modo a simplificar a análise matemática. Considerações a respeito da influência dos ruídos serão tratadas ao longo do trabalho.

É importante observar que tal representação em espaço de estado é obtida a partir do pressuposto que o conjunto de informações transmitidas das entradas presentes e passadas para as saídas futuras têm dimensão finita.

As matrizes da representação discreta A e B podem ser calculadas por meio da expansão em série de $e^{\hat{A}\Delta t}$ dada por (3.16) como segue

$$A = I + \hat{A}\Delta t + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 \Delta t^2 + \dots \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned}
B &= \left[\int_0^{\Delta t} \left(I + \hat{A}\eta + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 \eta^2 + \dots \right) d\eta \right] \hat{B} \\
&= \left[I\Delta t + \frac{1}{2!} \hat{A}\Delta t^2 + \frac{1}{3!} \hat{A}^2 \Delta t^3 + \dots \right] \hat{B} \\
&= \left[e^{\hat{A}\Delta t} - I \right] \hat{A}^{-1} \hat{B} \\
&= \left[\hat{A} - I \right] \hat{A}^{-1} \hat{B}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $2n$.

De modo análogo à representação contínua, os autovalores da matriz de estado A contém informações das frequências e fatores de amortecimento do sistema. No entanto, ao final do processo de identificação, é necessário convertê-los para a representação contínua.

Conforme observado anteriormente, os autovalores de $\hat{A}$ estão na matriz diagonal

$$\hat{\Lambda} = \text{diag} \left[\hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2 \quad \dots \quad \hat{\lambda}_n \right] \tag{3.32}$$

Como $\hat{A}$ e $\hat{\Lambda}$ são matrizes similares, assim como as respectivas representações discretas A e

$$\Lambda = \text{diag} \left[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n \right] \tag{3.33}$$

basta estabelecer uma relação entre os autovalores de Λ e $\hat{\Lambda}$.

De acordo com esta observação e valendo-se da eq.(3.25), os autovalores discretos podem ser convertidos para o tempo contínuo com relativa facilidade pois as matrizes são diagonais.

$$\Lambda = e^{\hat{\Lambda}\Delta t} = \text{diag} \left[e^{\hat{\lambda}_i \Delta t} \right] \tag{3.34}$$

Assim, os autovalores de A e $\hat{A}$ se relacionam pela seguinte expressão

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.35}$$

Portanto, autovalores podem ser convertidos um a um do caso discreto para o sistema contínuo, aplicando-se a eq.(3.35).

3.2 Identificação Determinística

O Algoritmo de Realização de Sistemas (ERA) é uma das técnicas de identificação modal mais relevantes da atualidade. O método consiste em construir uma representação em espaço de estado a partir de dados experimentais multivariados de uma estrutura, que por sua vez estabelece um conjunto de parâmetros modais consistentes.

A técnica baseia-se em m conjuntos de amostras no tempo das funções resposta ao impulso unitário de uma estrutura dinâmica, medidos simultaneamente em l pontos de resposta. Cada um dos m conjuntos de amostras das funções resposta ao impulso corresponde a uma referência, isto é, um ponto diferente de aplicação da força.

O objetivo principal do método é obter uma realização mínima equivalente à representação de uma sequência de matrizes contendo os dados de resposta, denominadas *Parâmetros de Markov* que é uma forma especial da função de resposta ao impulso. Dentre muitos métodos para identificação de modelos matemáticos para sistemas dinâmicos lineares, o algoritmo ERA utiliza os parâmetros de Markov como base para o processo de identificação.

Estes parâmetros são obtidos a partir dos dados de entrada e saída do sistema. O modelo identificado é uma representação do sistema real e pode ser utilizado tanto para avaliar as frequências naturais e fatores de amortecimento modal, como para prever a resposta do sistema quando este for excitado por diferentes forças.

3.2.1 Parâmetros de Markov

O sistema de representação em espaço de estado modela a dinâmica da estrutura, mas na forma como está não corresponde às finalidades práticas visto que o vetor de estado permanece inacessível. Na prática, é possível mensurar somente as condições iniciais e os vetores de saída e entrada do sistema. Assim para diminuir a complexidade, é necessário estabelecer, a partir do modelo (3.29), uma relação direta entre a entrada e a resposta do sistema.

Supondo conhecidas a condição inicial x_0 e as entradas passadas num instante de tempo genérico $k\Delta t$ representadas pela sequência de vetores em tempo discreto

$$\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

é possível obter os vetores de estado x_k e de saída y_k iterativamente iniciando em $k = 0$ até obter:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^k A^i B u_{k-i} \quad (3.36)$$

$$y_k = C A^k x_0 + D u_k + \sum_{i=1}^k C A^{i-1} B u_{k-i} \quad (3.37)$$

As equações obtidas descrevem o vetor de estado e de saída em qualquer instante de tempo $k\Delta t$ em função de condições iniciais e excitação quaisquer. Em especial a equação de saída fornece a desejada relação direta entrada-saída. Entretanto, é preciso analisar em detalhes o efeito das condições iniciais.

A maioria dos sistemas dinâmicos utilizados nas aplicações apresentam soluções estáveis ou simplesmente diz-se que a matriz de estado A é estável. No presente trabalho serão estudados sistemas que obedecem à condição de estabilidade assintótica. Devido a esta propriedade das soluções, as raízes características de A encontram-se dentro do círculo unitário no plano complexo.

De fato, os autovalores das matrizes de estado em tempo discreto e contínuo se relacionam pela eq.(3.25). Então

$$\begin{aligned} \|\lambda_k\| &= \|e^{\hat{\lambda}_k \Delta t}\| \\ &= \|e^{(-\sigma_k + i\omega_k)\Delta t}\| \\ &= \|e^{-\sigma_k \Delta t}\| \| \cos(\omega_k \Delta t) + i \sin(\omega_k \Delta t) \| \end{aligned}$$

onde λ_k e $\hat{\lambda}_k$ são os autovalores da matriz de estado em tempo discreto e contínuo, respectivamente e σ_k é um número real positivo.

Sabe-se que $\| \cos(\omega_k \Delta t) + i \sin(\omega_k \Delta t) \| = 1$. Como as raízes características de $\hat{A}$ em tempo contínuo têm seu lugar no semi-plano complexo esquerdo tem-se que $\|e^{-\sigma_k \Delta t}\| < 1$. Portanto, $\|\lambda_k\| < 1$, para todo k .

O lugar das raízes no círculo unitário e a eq.(3.13) garantem que existe um inteiro p tal que

$$A^k \approx 0, \text{ para todo } k \geq p \quad (3.38)$$

Considere a equação de saída após p instantes de tempo

$$y_{k+p} = C x_{k+p} + D u_{k+p} \quad (3.39)$$

Para encontrar a nova relação entrada-saída, basta seguir o mesmo procedimento realizado para as eq.(3.29), obtendo

$$y_{k+p} = CA^p x_k + CA^{p-1} B u_k + \dots + C B u_{k+p-1} + D u_{k+p} \quad (3.40)$$

Como $A^k \approx 0$ quando $k \geq p$ e o vetor de estado observado

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{l-p-1} \end{bmatrix}$$

é limitado, o efeito residual $CA^p x_k$ pode ser desprezado.

Desde que seja desconsiderado um número suficiente de pontos iniciais do sinal de saída e utilizada notação conveniente, definem-se

$$P_0 = D \quad (3.41)$$

$$P_i = CA^{i-1} B$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Assim, a eq.(3.37) pode ser escrita de forma condensada como

$$y_k = \sum_{i=0}^k P_i u_{k-i} \quad (3.42)$$

Portanto, a saída em qualquer instante pode ser escrita como soma das entradas passadas e presente ponderadas por uma seqüência de matrizes $P_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$, conhecidas como *Parâmetros de Markov*.

Os parâmetros de Markov também podem ser deduzidos a partir dos coeficientes da função de transferência na forma racional através da expansão em série de Laurent desta função. Este resultado está detalhado nos trabalhos de Aoki [5] e de Chui e Chen [15].

A descrição analítica dos sinais dinâmicos de resposta livre ou impulso unitário de um sistema em vibração constitui a base dos algoritmos de identificação de parâmetros no domínio do tempo. Os parâmetros de Markov são na realidade a resposta ao impulso.

Basta observar que, se a entrada for considerada o impulso unitário então na seqüência $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_k\}$ os vetores u_i são identicamente nulos, para $i > 0$. Enquanto a entrada no instante inicial $t = 0$ é do tipo

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

onde a coordenada de valor 1 será determinada pelo local de aplicação do impulso.

Deve-se aplicar a seqüência de vetores de entrada na equação de saída eq.(3.42) para obter a seqüência de vetores de saída $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ correspondentes, ou melhor, a resposta do sistema à entrada impulso.

Por exemplo, se $u_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$ então

$$y_0 = Du_0$$

$$y_1 = CBu_0$$

$$y_2 = CABu_0$$

$$\vdots$$

$$y_k = CA^{k-1}Bu_0$$

Assim a resposta ao impulso aplicado no ponto de referência 1 é justamente um conjunto de vetores formado pela primeira coluna de D , primeira coluna de CB , ..., e primeira coluna de $CA^{k-1}B$.

Repetindo a mesma análise para todos os m pontos de excitação conclui-se que a resposta ao impulso aplicada no ponto de referência i é um conjunto de vetores formado pela i -ésima coluna das matrizes D , CB , CAB , ..., $CA^{k-1}B$.

Considerando que foram aplicados impulsos unitários simultâneos em todos os m pontos previamente escolhidos da estrutura e admitindo-se que os vetores de saída de mesmo instante de tempo foram justapostos em matrizes, é fácil verificar que tais matrizes nada mais são do que os parâmetros de Markov definidos anteriormente.

Portanto os parâmetros de Markov são exatamente a resposta ao impulso, e como tal são determinados unicamente. De fato, seja T uma matriz de transformação de coordenadas do vetor de estado, isto é,

$$z_k = Tx_k$$

Recalculando os parâmetros de Markov obtém-se

$$P_i = (CT^{-1}) (TAT^{-1})^{i-1} (TB) = CA^{i-1}B, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.43)$$

Assim o sistema de parâmetros de Markov desempenha um papel importante na manipulação da relação entrada-saída e fornece uma boa caracterização do sistema, podendo

ser utilizado como base para a identificação do modelo matemático de sistemas dinâmicos lineares. Entretanto, não caracteriza completamente o sistema pois não considera as relações internas do sistema, mas descreve a relação entre entrada e saída considerando condições iniciais nulas ou condições de regime permanente.

É importante observar que, na prática, há interesse em obter informações a respeito de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar da estrutura e que os testes em regime permanente são suficientes para extrair tais dados.

3.2.2 Cálculo dos Parâmetros de Markov

Os parâmetros de Markov podem ser obtidos utilizando a transformada rápida de Fourier (FFT) da entrada e saída para obter a função de resposta em frequência (FRF) e então aplicar a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT) para enfim obter a resposta discreta ao impulso no domínio do tempo. No entanto, é possível calcular os parâmetros a partir dos dados experimentais diretamente no domínio do tempo.

Freqüentemente os Parâmetros de Markov são obtidos utilizando as FRF's, conforme Tsunaki [74] descreve em seu trabalho. O presente trabalho concentra-se na proposta alternativa de calcular os parâmetros diretamente no domínio do tempo a partir dos dados de entrada e saída do sistema.

A relação entrada-saída (3.42) na forma como está escrita não é muito prática para a implementação de um algoritmo que calcule os parâmetros de Markov a partir dela. Para tanto, a forma matricial apresenta muitas vantagens.

Primeiramente, suponha que um número l de pontos no intervalo de tempo foram observados, isto é, $k = 0, 1, \dots, l - 1$. Em seguida defina as seguintes matrizes

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{l-1} \end{bmatrix}_{m \times l}$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{l-2}B \end{bmatrix}_{m \times rl}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{l-1} \\ 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_{l-2} \\ 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{l-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}_{rl \times l}$$

A partir dessas definições, é fácil verificar que a seguinte equação matricial é equiva-

lente à eq.(3.42)

$$Y = \tilde{P}\tilde{U} \quad (3.44)$$

Uma breve análise revela que o sistema é indeterminado para o caso geral de múltiplas entradas $r > 1$. Mas a solução P deve ser única pois, como já discutido na seção anterior, os parâmetros de Markov são determinados unicamente para sistemas lineares de dimensão finita. Só há uma conclusão: é possível descrever a relação entrada-saída com um número menor de parâmetros.

A seguir procurar-se-á responder à questão de como calcular o menor conjunto de parâmetros de Markov.

A estabilidade assintótica das soluções garante a existência de um número p suficientemente grande que satisfaça a eq.(3.38). Assim a eq.(3.44) pode ser substituída pela seguinte expressão aproximada

$$Y \approx PU \quad (3.45)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{p-1}B \end{bmatrix}_{m \times r(p+1)}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_p & \dots & u_{l-1} \\ 0 & u_0 & \dots & u_{p-1} & \dots & u_{l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_0 & \dots & u_{l-p-1} \end{bmatrix}_{r(p+1) \times l}$$

Desta forma os p primeiros parâmetros de Markov são determinados unicamente através da expressão

$$P \approx YU^\dagger \quad (3.46)$$

onde $U^\dagger$ denota a pseudo-inversa de U . Claramente, quanto maior p melhor será a aproximação.

O método, tal como está formulado, apresenta uma grande desvantagem. Para estruturas pouco amortecidas o número p necessário é excessivamente grande ocorrendo mal condicionamento das matrizes. Neste caso é necessário introduzir parâmetros auxiliares para calcular indiretamente os parâmetros de Markov que exibem decaimento muito lento.

A idéia principal é considerar uma matriz conveniente $G \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ assintoticamente estável para compor um modelo em espaço de estado estável discreto para o sistema a ser identificado [70]. Efetuando uma manipulação algébrica simples na equação de estado

obtem-se:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\
 &= Ax_k + Bu_k + Gy_k - Gy_k \\
 &= Ax_k + Bu_k + G(Cx_k + Du_k) - Gy_k \\
 &= (A + GC)x_k + (B + GD)u_k - Gy_k
 \end{aligned}$$

E assim, construir uma nova representação do sistema em espaço de estado

$$\begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}v_k \\ y_{k+p} = Cx_{k+p} + Du_{k+p} \end{cases} \quad (3.47)$$

onde

$$\bar{A} = A + GC$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B + GD & -G \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$v_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ y_k \end{Bmatrix}$$

A matriz G tem o efeito de incrementar artificialmente o amortecimento do sistema tornando o sistema tão estável quanto se queira, tendo como principal função a compressão dos dados e melhoraria dos resultados numéricos [43].

Recalculando a relação entrada-saída para o novo modelo, obtém-se a seguinte relação entrada-saída ligeiramente diferente da eq.(3.42)

$$y_{k+p} = C\bar{A}^p x_k + C\bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + \dots + C\bar{B}v_{k+p-1} + Du_{k+p} \quad (3.49)$$

Analogamente a eq.(3.41) podem ser definidos os parâmetros

$$\bar{P}_0 = D \quad (3.50)$$

$$\bar{P}_i = C\bar{A}^{i-1}\bar{B}$$

associados ao sistema descrito na eq.(3.47), denominados *parâmetros de Markov observados*.

A relação acima pode ser convenientemente escrita na forma matricial

$$\bar{Y} = C\bar{A}^p x_k + \bar{P}\bar{V} \quad (3.51)$$

onde

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} y_p & y_{p+1} & \dots & y_{l-1} \end{bmatrix}_{m \times (l-p)}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{p-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} u_p & u_{p+1} & \dots & u_{l-1} \\ v_{p-1} & v_p & \dots & v_{l-2} \\ v_{p-2} & v_{p-1} & \dots & v_{l-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \dots & v_{l-p-1} \end{bmatrix}_{(r+(m+r)p) \times (l-p)}$$

O efeito residual $C\bar{A}^p x_k$ pode ser desprezado visto que, assim como A , $\bar{A}$ é assintoticamente estável.

Portanto os parâmetros de Markov observados podem ser obtidos através da seguinte expressão:

$$\bar{P} \approx \bar{Y}\bar{V}^\dagger \quad (3.52)$$

A partir dos parâmetros de Markov observados, os parâmetros de Markov de estruturas com baixo amortecimento podem ser enfim calculados sem muitos dos problemas relacionados com mal-condicionamento numérico. Para alcançar tal objetivo, é fundamental observar que cada um dos parâmetros de Markov observados pode ser particionado, utilizando a definição de $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Pela eq.(3.50), tem-se que

$$\bar{P}_k = C\bar{A}^{k-1}\bar{B} \quad (3.53)$$

Substituindo a eq.(3.48) na eq.(3.53):

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= C(A + GC)^{k-1} \begin{bmatrix} B + GD & -G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(A + GC)^{k-1}(B + GD) & -C(A + GC)^{k-1}G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sejam,

$$\bar{P}_k^{(1)} = C (A + GC)^{k-1} (B + GD) \quad (3.55)$$

$$\bar{P}_k^{(2)} = C (A + GC)^{k-1} G \quad (3.56)$$

Desta forma, os parâmetros de Markov observados podem ser particionados da seguinte maneira:

$$\bar{P}_k = \begin{bmatrix} \bar{P}_k^{(1)} & -\bar{P}_k^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$

O primeiro parâmetro P_1 é obtido a partir de $\bar{P}_1^{(1)}$ e $\bar{P}_1^{(2)}$ já conhecidos utilizando uma manipulação algébrica

$$\begin{aligned} P_1 &= CB \\ &= CB + CGD - CGD = C(B + GD) - (CG)D \\ &= \bar{P}_1^{(1)} - \bar{P}_1^{(2)} D \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para o cálculo de P_2 é preciso primeiramente decompor $\bar{P}_2^{(1)}$ em parcelas, como segue

$$\begin{aligned} \bar{P}_2^{(1)} &= C(A + GC)(B + GD) \\ &= CAB + C(A + GC)GD + CGCB \\ &= P_2 + \bar{P}_2^{(2)} D + \bar{P}_1^{(2)} P_1 \end{aligned}$$

Portanto

$$P_2 = \bar{P}_2^{(1)} - \bar{P}_1^{(2)} P_1 - \bar{P}_2^{(2)} D \quad (3.59)$$

É possível mostrar por indução que

$$P_k = \bar{P}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{P}_i^{(2)} P_{k-i} \quad (3.60)$$

para $k = 1, 2, \dots, p$.

Existem apenas p parâmetros de Markov linearmente independentes. Assim, para $k > p$, P_k é uma combinação linear dos p parâmetros de Markov anteriores a eles, a saber, $P_{k-1}, P_{k-2}, \dots, P_{k-p}$.

$$P_k = - \sum_{i=1}^p \bar{P}_i^{(2)} P_{k-i}, \quad \text{para } k > p \quad (3.61)$$

Desta forma, os parâmetros de Markov podem ser calculados diretamente dos dados no domínio do tempo.

3.2.3 Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas Discretos

Em problemas típicos de controle é desejável encontrar uma entrada controladora u que leve o sistema de um estado inicial a um estado final, por um caminho ótimo. Para isso é necessário saber se o estado final desejado pode ser realizado, assim tem-se um problema de controlabilidade. Se, por outro lado, é preciso saber quando o estado do sistema pode ser determinado na prática pelas observações da saída do sistema, tem-se um problema de observabilidade. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman.

Em geral, os sistemas físicos são controláveis e observáveis mas, infelizmente os modelos que os representam nem sempre apresentam estas características. Portanto é necessário estabelecer condições para a controlabilidade e a observabilidade nos modelos matemáticos.

Um sistema é dito *controlável* num tempo discreto k_i se for possível transferir, sob a ação de algum controle, o sistema do estado inicial x_{k_i} para outro estado desejado qualquer x_{k_f} num tempo finito. Se todo estado x_k for controlável então o sistema é *completamente controlável*.

Para simplificar as expressões envolvidas na derivação da condição de controlabilidade completa de estado será admitido, sem perda de generalidade, que o tempo inicial é $k_i = 0$.

A partir dessas considerações, a equação de transição de estado eq.(3.36) pode ser reescrita da seguinte forma

$$x_{k_f} = A^k x_0 + \sum_{i=0}^k A^i B u_{k-i} \quad (3.62)$$

Ou na representação matricial

$$x_{k_f} - A^k x_0 = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^k B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

A matriz

$$\mathcal{C}_{k+1} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^k B \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

é comumente denominada *matriz de controlabilidade*.

Se o sistema é completamente controlável, pela definição é possível atingir o estado x_{kf} partindo do estado inicial x_0 através de um vetor de controle em um número finito de instantes de tempo. Então a expressão do lado direito da eq.(3.64) tem solução e para tanto a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ deve ter posto máximo $k + 1$.

Por outro lado, se $\mathcal{C}$ tem posto máximo então pode-se considerar estados final e inicial arbitrários e resolver a eq.(3.64) para a seqüência $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, obtendo uma entrada controladora que transfere o sistema do estado x_0 ao estado x_{kf} .

Portanto fica estabelecida a importante condição:

Um sistema linear discreto invariante no tempo é completamente controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade tem posto máximo.

Estritamente relacionada à idéia de controlabilidade está a observabilidade, que em termos gerais significa que é possível determinar o estado medindo somente a resposta de um sistema.

Um sistema é dito *observável* se as variáveis de estado podem se calculadas a partir do estudo das variáveis de saída, mais precisamente, o sistema é observável no instante k se for possível determinar x_k a partir da observação da saída durante um tempo finito. Se todo estado x_k for observável então o sistema é *completamente observável*.

Desde que seja assumida que $u_k = 0$ para $0 \leq k \leq k_f$, a equação de saída em (3.37) resulta

$$y_k = CA^k x_0 \quad (3.65)$$

Que pode ser convenientemente escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

A matriz

$$\mathcal{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

é comumente denominada *matriz de observabilidade*.

Se $\mathcal{O}$ possui posto máximo $k + 1$, existem $k + 1$ equações independentes que podem ser resolvidas para as componentes de x_0 , e portanto por definição o sistema é completa-

mente observável. Por outro lado, é possível mostrar por contradição que se o sistema é completamente observável então a matriz $\mathcal{O}$ tem posto máximo.

A condição para a observabilidade completa fica assim determinada:

Um sistema linear discreto invariante no tempo é completamente observável se, e somente se, a matriz de observabilidade tem posto máximo.

Efetuada uma translação de $\beta + 1$ instantes de tempo na eq.(3.67) obtém-se

$$\begin{bmatrix} y_{\beta+1} \\ y_{\beta+2} \\ \vdots \\ y_{\beta+\alpha} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_\alpha x_{\beta+1} \quad (3.68)$$

Considerando condições iniciais nulas, a mesma translação aplicada à eq.(3.64) resulta:

$$x_{\beta+1} = \mathcal{C}_\beta \begin{bmatrix} u_\beta \\ u_{\beta-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Pela simples substituição da eq.(3.69) na eq.(3.68), tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_{\beta+1} \\ y_{\beta+2} \\ \vdots \\ y_{\beta+\alpha} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathcal{O}_\alpha \mathcal{C}_\beta}_{H(\alpha, \beta)} \begin{bmatrix} u_\beta \\ u_{\beta-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Portanto, as observações futuras são relacionadas às entradas presentes e passadas pela matriz $H(\alpha, \beta)$ que é o produto das matrizes de observabilidade e controlabilidade.

$$H(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{\beta-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^\beta B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1}B & CA^\alpha B & \dots & CA^{\alpha+\beta-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_\beta \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_\alpha & P_{\alpha+1} & \dots & P_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

A matriz $H(\alpha, \beta)$ tem uma formação especial, seus elementos obedecem a seguinte regra:

$$h_{ij} = h_{rs} \text{ se } i + j = r + s.$$

Uma matriz com tal formação é denominada matriz do tipo Hankel, ou simplesmente *matriz Hankel*.

A matriz Hankel $H(\alpha, \beta)$ pode ser generalizada efetuando-se uma translação de $k - 1$, assim define-se:

$$H_{k-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} P_k & P_{k+1} & \dots & P_{k+\beta-1} \\ P_{k+1} & P_{k+2} & \dots & P_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k+\alpha-1} & P_{k+\alpha} & \dots & P_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta r} \quad (3.72)$$

Sempre que não houver possibilidade de confusão a respeito das constantes α e β , a matriz Hankel $H_{k-1}(\alpha, \beta)$ será denotada simplesmente por H_{k-1} .

3.2.4 O Algoritmo de Realização de Sistemas

Assim como vários dos métodos clássicos de realização de sistemas, o algoritmo ERA utiliza os parâmetros de Markov como base para a identificação, convenientemente agrupados em uma matriz Hankel. Nesta matriz os parâmetros $\alpha, \beta \geq n$ são números naturais arbitrários relacionados às condições particulares de cada experimento de acordo com o nível de ruído presente nos sinais. No próximo capítulo estas constantes serão analisadas detalhadamente.

A matriz Hankel generalizada H_{k-1} pode ser decomposta em função das matrizes de controlabilidade e observabilidade da seguinte forma

$$H_{k-1} = \mathcal{O}_\alpha A^{k-1} \mathcal{C}_\beta \quad (3.73)$$

onde

$$\mathcal{C}_\beta = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\beta-1}B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_\alpha = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix}$$

Como o sistema considerado tem ordem $2n$ e é admitido completamente controlável e observável, uma breve análise da eq.(3.73) revela que a matriz Hankel H_{k-1} tem posto $2n$. Esta propriedade teórica habilita os diversos métodos de realização a calcular as matrizes $\{A, B, C, D\}$ a partir dos dados experimentais contidos nos parâmetros de Markov. O

ERA utiliza particularmente as matrizes Hankel H_0 e H_1 .

$$H_0 = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_\beta \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_\alpha & P_{\alpha+1} & \dots & P_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} P_2 & P_3 & \dots & P_{\beta+1} \\ P_3 & P_4 & \dots & P_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\alpha+1} & P_{\alpha+2} & \dots & P_{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

A principal contribuição do algoritmo foi a aplicação da decomposição em valores singulares na matriz H_0 . Sendo conhecida a matriz H_0 de dimensão $\alpha m \times \beta r$, existem matrizes ortogonais $R_{\alpha m \times \alpha m}$ e $S_{\beta r \times \beta r}$ tais que

$$H_0 = R \Sigma S^T \quad (3.75)$$

onde $\Sigma_{\alpha m \times \beta r}$ é obtida calculando-se os valores singulares de H_0 , ou seja, a raiz quadrada dos autovalores de $H_0 H_0^T$.

Neste ponto um exame criterioso do número de valores singulares relevantes se faz necessário, visto que este número determinará a ordem do modelo e conseqüentemente o número de modos identificados. Sendo $2n$ o número de valores singulares não nulos, então

$$\Sigma_{2n} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n}) \quad (3.76)$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{2n}$

Desta forma, é possível reescrever as matrizes

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_{2n} & R_0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{2n} \\ S_0 \end{bmatrix}$$

onde R_{2n} é a matriz formada pelas primeiras $2n$ colunas de R e S_{2n} pelas $2n$ primeiras linhas de S . Assim,

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{bmatrix} R_{2n} & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{2n}^T \\ S_0^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{2n} & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{2n} S_{2n}^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= R_{2n} \Sigma_{2n} S_{2n}^T \end{aligned} \quad (3.77)$$

A partir da equação acima, é possível expressar a pseudo-inversa de H_0 em termos das matrizes R_{2n} , S_{2n} e Σ_{2n} da seguinte forma

$$H_0^\dagger = S_{2n} \Sigma_{2n}^{-1} R_{2n}^T \quad (3.78)$$

Uma propriedade relacionada à inversa de Moore-Penrose garante que

$$H_0 H_0^\dagger H_0 = H_0 \quad (3.79)$$

Substituindo a eq.(3.73) para $k = 1$ na equação acima obtém-se

$$\mathcal{O}_\alpha \mathcal{C}_\beta H_0^\dagger \mathcal{O}_\alpha \mathcal{C}_\beta = \mathcal{O}_\alpha \mathcal{C}_\beta \quad (3.80)$$

E portanto, pode-se obter uma segunda expressão envolvendo a pseudo-inversa $H_0^\dagger$ que será útil no processo de identificação

$$\mathcal{C}_\beta H_0^\dagger \mathcal{O}_\alpha = I_{2n} \quad (3.81)$$

As matrizes A , B e C serão determinadas através de manipulações algébricas de P_k usando a matriz de Hankel H_1 .

Primeiramente, define-se

$$E_m = \begin{bmatrix} I_m \\ [0_m]_1 \\ \vdots \\ [0_m]_{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad e \quad E_r = \begin{bmatrix} I_r \\ [0_r]_1 \\ \vdots \\ [0_r]_{\beta-1} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

onde I_m e I_r representam as matrizes identidade de ordem m e r , respectivamente. As matrizes $[0_m]_i$ e $[0_r]_i$ são nulas de ordem m e r , respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} P_k &= E_m^T H_{k-1} E_r \\ &= E_m^T (\mathcal{O}_\alpha A^{k-1} \mathcal{C}_\beta) E_r \\ &= E_m^T \mathcal{O}_\alpha (\mathcal{C}_\beta H_0^\dagger \mathcal{O}_\alpha) A^{k-1} (\mathcal{C}_\beta H_0^\dagger \mathcal{O}_\alpha) \mathcal{C}_\beta E_r \\ &= E_m^T H_0 H_0^\dagger \mathcal{O}_\alpha A^{k-1} \mathcal{C}_\beta H_0^\dagger H_0 E_r \end{aligned} \quad (3.83)$$

A eq.(3.79) pode ser reescrita de forma mais conveniente da seguinte maneira

$$H_0^\dagger = S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T \quad (3.84)$$

Substituindo a eq.(3.84) na eq.(3.83), obtém-se

$$P_k = E_m^T H_0 S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \Xi \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T H_0 E_r \quad (3.85)$$

onde

$$\begin{aligned} \Xi &\triangleq \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T \mathcal{O}_\alpha A^{k-1} \mathcal{C}_\beta S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T \mathcal{O}_\alpha A \mathcal{C}_\beta S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \right)^{k-1} \\ &= \left(\Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T H_1 S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} P_k &= E_m^T (R_{2n} \Sigma_{2n} S_{2n}^T) S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \Xi \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T (R_{2n} \Sigma_{2n} S_{2n}^T) E_r \\ &= E_m^T R_{2n} \Sigma_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \Xi \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{2n} S_{2n}^T E_r \\ &= E_m^T R_{2n} \Sigma_{2n}^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T H_1 S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \right)^{k-1} \Sigma_{2n}^{\frac{1}{2}} S_{2n}^T E_r \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por comparação com a expressão de $P_k = C A^{k-1} B$ é possível definir a seguinte realização mínima para o sistema:

$$A = \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} R_{2n}^T H_1 S_{2n} \Sigma_{2n}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

$$B = \Sigma_{2n}^{\frac{1}{2}} S_{2n}^T E_r \quad (3.88)$$

$$C = E_m^T R_{2n} \Sigma_{2n}^{\frac{1}{2}} \quad (3.89)$$

O conjunto de matrizes $\{A, B, C, D\}$ é uma realização do modelo em tempo discreto. Para a identificação dos parâmetros modais, a realização obtida deve ser transformada para um modelo em tempo contínuo.

As frequências naturais e os fatores de amortecimento podem ser obtidos a partir dos autovalores da matriz de estado A , visto que os autovalores da matriz de estado $\hat{A}$ do

modelo contínuo são facilmente calculados pela eq.(3.35).

Para cada autovalor de A existe um autovetor correspondente, que pode ser visto como o vetor da forma do modo. Na sequência, os modos reais são obtidos a partir dos modos complexos.

Portanto os autovetores de A fornecem os modos de vibrar da estrutura, porém para expressá-los em termos das coordenadas físicas é necessário a seguinte transformação:

$$\psi = C\hat{\psi} \quad (3.90)$$

onde $\hat{\psi}$ e ψ são as matrizes dos autovetores de $\hat{A}$ e A , respectivamente.

Em suma, o algoritmo ERA estima uma realização mínima composta pelas matrizes do modelo em tempo discreto a partir dos parâmetros de Markov, que por sua vez são calculados a partir dos dados experimentais de entrada e saída do sistema. A fig.(3) sintetiza os passos computacionais necessários para a identificação de sistemas utilizando o algoritmo ERA.

Figura 3: Passos computacionais do algoritmo ERA.

A análise dos valores singulares através da aplicação da técnica SVD à matriz H_0 reduz consideravelmente o número de modos computacionais, no entanto não os elimina completamente. Para a difícil tarefa de qualificação dos modos estruturais diferentes índices de confiança devem ser combinados. Dentre os vários métodos desenvolvidos para quantificar numericamente a precisão dos parâmetros modais identificados, destacam-se:

- **Critério de Correlação Modal (MAC).** Quantifica o grau de correlação entre as formas dos modos. É utilizado para comparar numericamente a forma entre um par de modos, obtidos teoricamente ou identificados experimentalmente [24].
- **Critério de Correlação Modal Inversa (IMAC).** Este índice foi proposto por Mitchell [64] para compensar a insensibilidade do MAC a pequenas mudanças na forma do modo.
- **Colinearidade da Fase Modal Ponderada (MPCW).** Este índice quantifica o grau de aproximação do modo identificado em relação ao modo normal clássico [66].
- **Coerência da Amplitude Modal Estendida (EMAC).** Também proposto por Pappa [66], o índice de confiança quantifica a consistência temporal dos parâmetros modais identificados.
- **Indicador de Consistência Modal (CMI).** Este índice não é um novo método, mas sim a união dos dois últimos índices citados. Foi criado para quantificar simultaneamente a consistência temporal e a consistência espacial dos modos.

3.3 Identificação Estocástica

Os métodos no domínio do tempo podem ser utilizados para estimar as características do sistema a partir apenas dos dados de saída, supondo a natureza da entrada. Neste caso, o completo conhecimento da excitação é substituído pela suposição que o sistema é excitado por um ruído branco gaussiano. O problema de identificação estocástica consiste portanto em calcular o modelo em espaço de estado utilizando apenas os dados de saída do sistema, e a partir das matrizes A e C identificadas obter os parâmetros modais desejados. Este problema é conhecido como *realização estocástica*.

Os principais métodos da análise modal operacional no domínio do tempo utilizam as funções de correlação calculadas diretamente a partir dos dados no domínio do tempo ou indiretamente a partir da medida da função de densidade espectral utilizando a transformada de Fourier inversa.

Esta seção descreve os fundamentos matemáticos básicos da identificação de parâmetros modais a partir de dados de saída de estruturas em condições operacionais.

Como toda medida contém ruído, o modelo representado na eq.(3.29) em tempo discreto deve ser reformulado para incluir as componentes estocásticas presentes nos dados de entrada e saída do sistema, e assim obter o seguinte modelo determinístico-estocástico em espaço de estado:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + s_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (3.91)$$

onde os vetores $s_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $v_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ representam os ruídos de entrada e de saída, respectivamente. Ambos os sinais são considerados ruído branco de média zero com matrizes de covariâncias dadas por:

$$E \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E[w_p w_q^T] & E[w_p v_q^T] \\ E[v_p w_q^T] & E[v_p v_q^T] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & T \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

onde $E(\cdot)$ é o operador esperança definido por

$$E(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p(\alpha_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(N)}}{N} \quad (3.93)$$

A esperança de x é a média ponderada de todos os valores α_i , onde cada α_i é multiplicado pela probabilidade de α_i ocorrer.

A identificação em sistemas puramente estocásticos é feita considerando-se $u_k \equiv 0$. Como a entrada do sistema não será medida, assume-se que o efeito da excitação está implicitamente modelado nos distúrbios s_k e v_k .

Os processos aleatórios podem ser divididos em duas categorias: estacionários e não-estacionários. Os processo estacionários são aqueles que têm média e covariância constantes ao longo do tempo. A situação ideal ocorre quando o sinal de excitação é um sinal aleatório estacionário.

De acordo com estas considerações, um modelo estocástico em espaço de estado pode ser construído:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + s_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.94)$$

com $E[s_k] = E[v_k] = 0$ e as matrizes de covariâncias dos distúrbios dados pela eq.(3.92).

Assume-se que o processo estocástico satisfaz as seguintes condições.

1. O processo estocástico x_k é estacionário:

$$E[x_k x_k^T] \triangleq \Sigma \quad (3.95)$$

2. O processo estocástico x_k tem média zero:

$$E[x_k] = 0 \quad (3.96)$$

3. Os distúrbios s_k e v_k são independentes do estado atual:

$$E[x_k s_k^T] = 0 \quad (3.97)$$

$$E[x_k v_k^T] = 0 \quad (3.98)$$

A independência da matriz de covariância de estado Σ em relação ao instante de tempo k traduz a hipótese da matriz de estado A ser admitida estável. Na verdade, sabe-se que a função de correlação colapsa numa constante quando o sinal não apresenta componentes determinísticas.

Na prática, o fenômeno aleatório geralmente apresenta algumas variações na densidade espectral, porém um ruído branco ideal de faixa-limitada freqüentemente oferece uma estimativa conveniente para as aplicações.

A dinâmica dos sistemas vibratórios é completamente caracterizada pelos autovalores e pelas partes observáveis dos autovetores da matriz de transição de estado A . Além disso, A contém a informação sobre a ordem do sistema.

As propriedades de dados aleatórios podem freqüentemente ser obtidas pelo conhecimento da tendência central e da dispersão dos dados. A média define a tendência central enquanto a variância caracteriza o grau de dispersão dos dados. A matriz de correlação representa o conjunto completo dos segundos momentos de dois vetores aleatórios. Há duas matrizes de correlação particularmente importantes na realização estocástica associadas aos estados e às saídas do modelo descrito na eq.(3.94):

$$G = E[x_{k+1} y_k^T] \quad (3.99)$$

$$R_i = E[y_{k+i} y_k^T] \quad (3.100)$$

denominadas matriz de correlação estado-saída e matriz de correlação de saída, respectivamente. Onde y_k^T representa o vetor transposto conjugado. Note que os sinais foram considerados de média zero; então não há diferença entre as funções de correlação e as funções de covariância.

Quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o sistema de funções de resposta ao impulso. No caso onde a excitação não é medida, mas a estrutura e as forças podem ser modeladas conforme descrito acima, as funções de correlação de saída R_i são equivalentes à resposta livre do sistema. A demonstração desta importante propriedade para o caso particular de sistemas com amortecimento considerado proporcional é tratada por James et al [42]. A maioria das técnicas de identificação estocástica de subespaços está fundamentada na seguinte propriedade de decomposição das matrizes de correlação de saída em função das matrizes A e C .

$$R_i = CA^{i-1}G \quad (3.101)$$

onde i é um número inteiro maior que 1. De fato,

$$\begin{aligned} R_i &= E[y_{k+i} y_k^T] \\ &= E[(Cx_{k+i} + v_k) y_k^T] \\ &= E[(CA^{i-1}x_{k+1} + CA^{i-2}w_{k+1} + CA^{i-3}w_{k+2} + \dots + Cw_{k+i-1} + v_k) y_k^T] \\ &= CA^{i-1}E[x_{k+1} y_k^T] + CA^{i-2}E[w_{k+1} y_k^T] + \dots + E[w_{k+i-1} y_k^T] + E[v_k y_k^T] \\ &= CA^{i-1}G \end{aligned}$$

A matriz R_0 deve ser calculada separadamente, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_0 &= E[y_k y_k^T] \\ &= E[(Cx_k + v_k)(Cx_k + v_k)^T] \\ &= CE[x_k x_k^T]C^T + CE[x_k v_k^T] + E[v_k x_k^T]C^T + E[v_k v_k^T] \\ &= C\Sigma C^T + T \end{aligned}$$

A eq.(3.101) é extremamente importante pois significa que as matrizes de correlação de saída podem ser consideradas como resposta ao impulso e portanto podem ser aplicadas aos algoritmos clássicos de identificação determinística, que normalmente trabalham com a resposta ao impulso.

Especificamente, esta caracterização das matrizes de correlação de saída em função das matrizes A , G , C e R_0 indica que as matrizes R_i podem ser utilizadas na identificação via algoritmo ERA em lugar dos originais parâmetros de Markov. Isto é, da mesma maneira como os parâmetros de Markov formam a base para identificação do modelo determinístico $\{A, B, C, D\}$, as matrizes de correlação de saída podem ser aplicadas ao algoritmo como parâmetros para a identificação estocástica do modelo $\{A, G, C, R_0\}$.

Portanto, as matrizes Hankel H_0 e H_1 devem ser redefinidas de forma a agrupar as correlações de saída R_i . Como as entradas não serão medidas, admite-se que o número de entradas é igual à quantidade de saídas observadas. Assim, para números naturais α e β arbitrários, tem-se:

$$H_0 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_\beta \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_\alpha & R_{\alpha+1} & \dots & R_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta m} \quad (3.102)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} R_2 & R_3 & \dots & R_{\beta+1} \\ R_3 & R_4 & \dots & R_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\alpha+1} & R_{\alpha+2} & \dots & R_{\alpha+\beta} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta m} \quad (3.103)$$

O problema da identificação estocástica está teoricamente resolvido pois as matrizes R_i podem ser estimadas a partir dos dados de saída coletados. A ordem do sistema e as matrizes $\{A, G, C, R_0\}$ do modelo estocástico podem ser estimadas pela aplicação do algoritmo ERA nas matrizes Hankel obtidas.

Como visto, os algoritmos de realização foram formulados originalmente para a resposta ao impulso e podem ser facilmente estendidos para covariâncias de saída. No entanto as técnicas baseadas na excitação ambiente propõe outros desafios. De acordo com Peeters e Roeck [67], há muito trabalho a ser feito em identificação estocástica. Dentre eles estão a estimativa das funções de correlação, a escolha de saídas-referência e a determinação da ordem do sistema.

3.3.1 Estimativa das Funções de Correlação

A função de correlação ou sua transformada de Fourier, conhecida como função de densidade espectral, mede o grau de dependência linear entre dois ou mais conjuntos de dados. As duas funções fornecem basicamente as mesmas informações. No entanto histori-

camente a função de densidade espectral foi desenvolvida como ferramenta para resolver problemas de engenharia enquanto a função de correlação é produto de matemáticos e estatísticos. Assim a primeira é muito popular na análise de dados experimentais, enquanto que em certas aplicações a segunda função mostrou-se mais conveniente. Neste trabalho as funções de correlação formam a base da identificação estocástica.

Um conceito importante e muito útil associado aos processos aleatórios estacionários é a *hipótese ergódica*. Ela torna possível o cálculo das funções de momento de um processo aleatório estacionário a partir de uma única medida suficientemente longa de forma a conter todas as informações estatísticas sobre o fenômeno. Assim, as matrizes de correlação de saída R_i definidas na eq.(3.100) podem ser obtidas a partir dos vetores de saída y_k medidos em instantes de tempo discretos $k = 0, 1, \dots, l$, assumindo-se a propriedade ergódica, da seguinte maneira:

$$R_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} y_{k+i} y_k^T \quad (3.104)$$

Esta definição da função de correlação envolve operações que não podem ser realizadas efetivamente pois é claramente impossível analisar um número infinito de registros ou um único registro com comprimento infinito. Na prática, apenas um número finito N de dados pode ser observado e cada matriz de correlação poderá ser estimada pelo truncamento da série. Desta forma, os resultados constituem apenas uma estimativa do valor real do parâmetro.

A magnitude dos erros cometidos na aproximação é de fundamental importância para a interpretação e aplicação da análise. Os erros que ocorrem na análise de dados aleatórios podem ser divididos em duas classes: *erro aleatório* e *erro de tendência*. A primeira classe é o resultado direto do fato que as operações são executadas com um experimento de comprimento finito. A segunda classe geralmente evolui a partir de operações associadas ao cálculo de derivadas.

É importante observar que o erro aleatório é inversamente proporcional à raiz quadrada do comprimento do experimento, assim para diminuir pela metade o erro o comprimento das observações deve quadruplicar. Para estimativas no tempo, a faixa de frequência é importante na determinação de um tamanho eficaz para o intervalo amostral e também de um comprimento adequado de observação. Isto significa que para aplicações onde a faixa de frequência é extensa, um comprimento menor pode resultar em estimativas mais precisas. Por outro lado, em aplicações com faixa de frequência estreitas, tempos muito longo são requisitados para obter resultados com precisão aceitável [10].

Estruturas ligeiramente amortecidas apresentam funções de correlação cruzada com

valores não desprezíveis por um longo período de tempo; assim o erro na estimativa aumenta. O trabalho de Clarkson e Mercer [16] analisa o efeito do truncamento na estimativa da densidade espectral.

Neste trabalho foi utilizada a estimativa sem tendência da função de correlação, dada por:

$$\hat{R}_i = \frac{1}{l-i} \sum_{k=0}^{l-i-1} y_k^T y_{k+i} \quad (3.105)$$

A eq.(3.105) é uma maneira para estimar explicitamente as correlações de saída a partir da resposta aleatória do sistema, porém não é o mais rápido. Outra possibilidade é ajustar a correlação por um modelo Auto-regressivo (AR) [20]. No entanto a transformada discreta inversa de Fourier do auto-espectro e de espectro-cruzado de saída podem ser uma maneira mais eficiente de obter a função de autocorrelação. O espectro pode ser obtido pela aplicação da transformada discreta de Fourier aos dados de saída no tempo. A terceira opção é consideravelmente mais rápida que a primeira porém com menos precisão devido aos erros de 'leakage' [67].

A técnica está fundamentada no fato que o processo aleatório é estacionário. Na verdade, nenhum processo aleatório é verdadeiramente estacionário. Entretanto longas observações do processo exibem características que permitem que ele seja tratado como estacionário. Tal hipótese está fundamentada no fato que a maioria dos resultados em identificação de sistemas mecânicos são baseados na resposta de regime permanente, que é considerado um processo estacionário satisfazendo a hipótese ergódica. Desta forma, conceito de estacionaridade de um processo aleatório é análogo ao de comportamento de regime permanente de um processo determinístico.

Em laboratório, para projetar experimentos que produzirão dados estacionários basta realizá-los sob condições idênticas. Há casos onde as estruturas estão sujeitas a forças desconhecidas e não-controláveis, e o experimento produz dados não estacionários. Nestes casos o experimento deve ser repetido diversas vezes até se obter resultados estatisticamente representativos do fenômeno, para posteriormente realizar a análise.

3.3.2 Saídas-referência

Em aplicações da análise modal operacional em grandes estruturas, freqüentemente, são utilizados um grande número de sensores para medir os dados de saída. A distribuição espacial destes sensores ao longo da estrutura origina sinais de diferentes qualidades. Isto ocorre porque alguns deles podem estar localizados em pontos nodais de algum modo

de vibrar ou próximos a bordas fixas enquanto que outros podem estar localizados em pontos ótimos da estrutura. Nestes últimos espera-se que todos os modos de vibrar estejam presentes nos dados observados.

As matrizes de correlação $\hat{R}_i$ definidas na eq.(3.105) medem o grau de dependência de todas as m saídas consideradas. Para reduzir o tempo computacional gasto no cálculo desta estimativa, Peeters e Roeck [67] propuseram um método para construir as matrizes de correlação considerando como referência um subconjunto composto pelas saídas localizadas em pontos estratégicos da estrutura, considerados ótimos.

Supondo que um número r de sinais de saídas foi escolhido para referência devido à sua localização na estrutura, os m elementos da matriz de saída podem ser rearranjados de modo que as r referências componham as primeiras colunas da matriz de saída.

$$y \triangleq \begin{bmatrix} y^{ref} & y^{\sim ref} \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

onde $y^{ref} \in \mathbb{R}^{l \times r}$ é a matriz composta pelas saídas-referência e $y^{\sim ref} \in \mathbb{R}^{l \times m-r}$ é a matriz formada pelas outras saídas. Assim, a matriz das saídas-referência pode ser obtida a partir da matriz completa de saídas e de uma matriz de seleção dada por:

$$L = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{m-r \times r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{m \times r} \quad (3.107)$$

onde I_r representa a matriz identidade de ordem r e $0_{m-r \times r}$ é uma matriz nula.

Desta forma,

$$y^{ref} = yL \quad (3.108)$$

As matrizes de correlação R_i podem ser redefinidas de forma a considerar as correlações entre todas as saídas e as referências.

$$R_i^{ref} = \mathcal{E}[y_{k+i} y_k^{ref \top}] = L^\top R_i \in \mathbb{R}_{r \times m} \quad (3.109)$$

As matrizes de correlação de estado-saída considerando somente as referências é dada por

$$G^{ref} = \mathcal{E}[x_{k+1} y_k^{ref \top}] = L^\top G \in \mathbb{R}_{r \times n} \quad (3.110)$$

De forma análoga à dedução da propriedade descrita na eq.(3.101), segue que

$$R_i^{ref} = C A^{i-1} G^{ref} \quad (3.111)$$

No processo de identificação, a matriz de observabilidade $\mathcal{O}_{k+1}$ definida pela eq.(3.67) permanece inalterada, enquanto que a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}_{k+1}$ definida na eq.(3.64) deve ser redefinida segundo a identificação estocástica utilizando saídas-referência.

$$\mathcal{C}_{k+1} = \begin{bmatrix} G^{ref} & AG^{ref} & \dots & A^k G^{ref} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Portanto, a idéia básica do procedimento é calcular as correlações entre o conjunto de todas as saídas e um subconjunto de algumas saídas de referência, em lugar de calcular todas as correlações possíveis do conjunto de saídas. Assim a dimensão das matrizes fica reduzida e conseqüentemente o tempo computacional necessário também diminui.

A localização das referências é importante, tendo em vista o número limitado delas. Alguns sensores podem ser estrategicamente posicionados na estrutura e serem tomados como referência. Assim, é esperado que a identificação não apresente nenhuma perda significativa de qualidade. Ao contrário, os sensores com posições menos privilegiadas são parcialmente omitidos, os resultados da identificação podem ser até mais precisos.

3.3.3 Ordem do Sistema e Extração dos Parâmetros Modais

Para simplificar a notação, as funções de correlação estimadas $\hat{R}_i^{ref}$ serão denotadas apenas por $\hat{R}_i$ sempre que não houver risco de confusão.

Finalmente, as correlações de saída estimadas compõem as matrizes Hankel estimadas $\hat{H}_0$ e $\hat{H}_1$, obtidas na eq.(3.102) e eq.(3.103) trocando-se cada correlação R_i pela respectiva estimativa $\hat{R}_i$.

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & \hat{R}_2 & \dots & \hat{R}_\beta \\ \hat{R}_2 & \hat{R}_3 & \dots & \hat{R}_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_\alpha & \hat{R}_{\alpha+1} & \dots & \hat{R}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta m} \quad (3.113)$$

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \hat{R}_2 & \hat{R}_3 & \dots & \hat{R}_{\beta+1} \\ \hat{R}_3 & \hat{R}_4 & \dots & \hat{R}_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{\alpha+1} & \hat{R}_{\alpha+2} & \dots & \hat{R}_{\alpha+\beta} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta m} \quad (3.114)$$

O amortecimento do sistema determina quanto rápido ou devagar as funções de correlação vão a zero. Portanto o número de colunas da matriz Hankel é fortemente dependente do amortecimento modal do sistema.

Com a aplicação do algoritmo ERA às matrizes $\hat{H}_0$ e $\hat{H}_1$ os parâmetros modais do sistema podem ser extraídos. No entanto, os modos de vibrar assim obtidos não podem ser normalizados pela massa pois isto requer o medida das forças excitadoras.

Kung [54] introduziu o SVD no algoritmo de Ho-Kalman como ferramenta para reduzir a sensibilidade ao erro de medida da resposta ao impulso. Assim, teoricamente a ordem do sistema pode ser determinada pela análise do número de valores singulares não nulos. Porém, na prática, a matriz Hankel de covariância estimada é afetada pelo ruído e todos os valores singulares são diferentes de zero. É verdade que obtém-se uma redução significativa devido à decomposição SVD que reavalia a ordem do sistema.

Dentre as principais fontes de ruído na identificação estocástica encontram-se:

1. **Imprecisão no modelamento.** O sistema analisado pode apresentar dados que não podem ser fielmente representado por um modelo em espaço de estado estocástico. Neste caso, erros são introduzidos.
2. **Ruído na aquisição.** Introduzido pelos sensores e pela eletrônica dos instrumentos de medida.
3. **Ruído computacional.** Atribuído à precisão finita dos computadores ou truncamento.
4. **Número finito de dados.** As matrizes de covariância podem apenas ser estimadas e portanto a propriedade da fatoração vale apenas como aproximação.

É necessário salientar que os erros discutidos aqui são devidos exclusivamente ao procedimento estatístico. Há, claro, inúmeras fontes potenciais de erros no processo de aquisição de dados que podem ser minimizados pelos procedimentos apropriados de calibração.

4 *Identificação Estocástica via Algoritmo ERA*

A principal proposta deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia eficiente para identificação de sistemas dinâmicos excitados por forças aleatórias, utilizando a técnica NExT e o algoritmo ERA. Vários são os problemas que surgem quando é necessário realizar a identificação dinâmica de estruturas que operam sob condições em que os termos de excitação não podem ser observados. Dentre eles está o problema relacionado ao tratamento de sinais contaminados por ruído com grande número de dados. Assim este problema deve ser resolvido para viabilizar a realização da identificação estocástica automatizada por meio de métodos de identificação modernos e poderosos utilizando para tanto recursos computacionais mínimos.

Como o efeito das entradas está modelado como ruído, os problemas relacionados à determinação da melhor ordem para o modelo tornam-se críticos visto que a contaminação dos sinais por ruído atribui graus de liberdade adicionais à dinâmica do sistema. Os métodos baseados na análise do valor singular apresentam boa performance quando a relação sinal-ruído é moderada. Assim, a análise dos valores singulares efetuada no algoritmo ERA permite uma solução truncada que efetivamente melhora a razão sinal ruído nos dados, mas não resolve completamente o problema da determinação da ordem do sistema. Em geral os métodos tradicionais fazem uso intensivo de índices de confiança. No entanto para sistemas estocásticos é relevante o estudo de técnicas que permitam a determinação da ordem utilizando as ferramentas estatísticas baseadas na teoria de processos estocásticos. Nos casos onde os sistemas são excitados por forças ambiente não-mensuráveis as ferramentas matemáticas determinísticas deixam de ser aplicáveis.

Por outro lado, a falta de informações sobre as entradas do sistema deve ser compensada por longas observações das saídas. Conseqüentemente há considerável aumento da base de dados computacionais exigida para a determinação do modelo e a extração dos parâmetros modais. Assim, é necessário aplicar técnicas para compressão dos dados sem perda de informações no domínio do tempo. Aqui a transformada wavelet (WT) é aplicada aos dados no tempo como proposta alternativa à transformada de Fourier (FT).

Como efeitos adicionais, a utilização da WT minimiza o efeito do ruído na identificação e é capaz de agir como filtro passa-baixa, o que possibilita a estratificação do processo de identificação por faixas de frequência.

Solucionados os problemas relativos à análise de grande quantidade de dados no tempo com alto nível de ruído, torna-se viável a automatização do processo de identificação. Para isto utiliza-se um microcomputador de capacidade média, sem exigência de profissionais altamente especializados visto que é possível obter e qualificar os resultados da identificação sem qualquer intervenção do usuário. No entanto, a completa adaptação das modernas técnicas de identificação estocástica às condições da indústria nacional requer ainda a aquisição de dados experimentais através de equipamentos de baixo custo financeiro.

O algoritmo ERA requer aquisição simultânea de sinais, o que exige a utilização de equipamentos sofisticados de análise e coleta de sinais com grande capacidade de armazenamento e processamento simultâneos de vários canais. Neste trabalho é proposta uma técnica que adapta o algoritmo para o tratamento de sinais de resposta não-simultâneos.

Este capítulo descreve uma nova forma de realizar a identificação estocástica de estruturas em condições operacionais utilizando para tanto um método não-recursivo, a análise estatística e a transformada wavelet. A análise estatística contribuiu na seleção da ordem do sistema e automação do processo. Enquanto a transformada wavelet foi a ferramenta utilizada para compressão das informações tornando possível a identificação principalmente das baixas frequências, além de melhorar a eficiência computacional.

A metodologia proposta para identificação de parâmetros modais no domínio do tempo é capaz de realizar a identificação em uma determinada faixa operacional de interesse de um sistema dinâmico, utilizando como base o algoritmo ERA. Para realizar a identificação de sistemas mecânicos excitados por forças aleatórias foram criados procedimentos computacionais. As etapas do algoritmo de identificação e as considerações sobre a implementação numérica do método proposto são apresentadas na forma de diagramas de blocos.

4.1 Estratégia computacional

Todos os procedimentos computacionais necessários para a identificação estocástica de sistemas mecânicos no domínio do tempo foram implementados em um microcomputador pessoal.

O processo de identificação pode ser dividido basicamente em três etapas: pré-

processamento, algoritmo ERA e pós-processamento. A inovação deste trabalho está concentrado na primeira e na terceira etapa. O método está estruturado em um programa principal denominado IDENT. A fig.(4) apresenta a estrutura básica desse procedimento com todas as suas subrotinas.

Figura 4: Estrutura do programa principal IDENT.

Os dados de entrada são compostos pelas respostas y_k do sistema à excitação aleatória, que correspondem às acelerações em pontos específicos da estrutura. A subrotina DECOMP é responsável pelo tratamento dos sinais de respostas contaminados por ruído através da aplicação da transformada Wavelet. A subrotina MCOV calcula os parâmetros de Markov enquanto que a subrotina HANKEL monta as matrizes Hankel de acordo com o parâmetro p . A subrotina ERA é exatamente o algoritmo ERA, enquanto a AMOSTRA armazena os resultados obtidos. A subrotina SELEÇÃO realiza a análise estatística que

seleciona os modos estruturais do sistema e calcula os parâmetros modais a partir das matrizes de autovalores e de autovetores.

4.2 Critério para definição da ordem do modelo

Um dos aspectos mais importantes no processo de identificação é a determinação da ordem do modelo. De acordo com Juang e Phan [47], um processo de tentativa e erro é exigido para encontrar a melhor ordem. Em geral, a ordem estimada é consideravelmente maior que a ordem real necessária para o modelo, particularmente quando há alta densidade modal e o nível de ruído presente no sinal é alto. Além disso, a definição da ordem que melhor representa o sistema pode mudar de acordo com as informações que o analista deseja obter do modelo.

No caso da aplicação do algoritmo ERA, a escolha da ordem do modelo determina a dimensão das matrizes H_0 e H_1 . A análise dos valores singulares permite a redução significativa da ordem, mas não resolve completamente o problema da determinação da ordem do sistema pois este permanece sobredeterminado. Assim, os resultados obtidos no processo de identificação definem um conjunto de modos estruturais e modos computacionais, os primeiros devido à dinâmica da estrutura e os últimos devido principalmente ao ruído presente no sinal e ao mal-condicionamento numérico.

Os parâmetros α e β podem ser vinculados e definidos a partir do número p de Parâmetros de Markov independentes da seguinte maneira:

$$\alpha = p \quad (4.1)$$

$$\beta = \frac{p}{2} \quad (4.2)$$

Desta forma, p passa a ser o único parâmetro livre no processo de identificação. Cada valor de p determina uma identificação diferente. Portanto, variando p é possível analisar o comportamento estatístico das diversas identificações. Cada identificação associada a um valor de p será denominada *amostra*. De acordo com o vínculo estabelecido na eq.(4.2) e observando que β deve ser um número inteiro, o algoritmo de identificação será aplicado consecutivamente para valores p incrementados de 2, tomados a partir de um valor inicial p_i até um limite pré-determinado p_f . A fig.(5) sintetiza os procedimentos computacionais necessários para o armazenamento das amostras, onde o bloco denominado pré-processamento é composto das subrotinas DECOMP, MCOV e HANKEL.

Antes mesmo de realizar a análise estatística das amostras coletadas, num primeiro momento é possível determinar alguns dos modos computacionais apenas pela observação

Figura 5: Procedimento recursivo para armazenamento das amostras de identificação.

dos pares complexos conjugados e dos fatores de amortecimento identificados. Modos estruturais são, em geral, subamortecidos. Logo eles aparecem em pares complexos conjugados. Se algum autovalor não apresentar um conjugado ele será interpretado como um modo computacional. As informações sobre o amortecimento da estrutura devem ser utilizadas para estabelecer um critério para seleção de fatores de amortecimento viáveis, assim modos computacionais também podem ser caracterizados pelo fator de amortecimento.

Mesmo considerando que as amostras obtidas já estão livres dos modos computacionais especificados anteriormente, ainda há modos provocados pelo ruído no conjunto de dados. Assim é necessário um procedimento efetivo para separar os modos estruturais dos modos computacionais. O fato do ruído ser não-correlacionado com os dados de entrada e saída do sistema assegura que os modos computacionais tendem a variar acentuadamente de uma estimativa para outra, enquanto os modos estruturais tendem a estabilizar em certo intervalo de variação. Esta informação é útil no desenvolvimento de procedimentos que sejam capazes de escolher satisfatoriamente o número de modos devido a dinâmica do sistema.

Assim, uma alternativa ao ‘método de tentativa e erro’ é realizar uma estimativa da ordem do modelo a partir da análise estatística. A ordem do sistema deve ser obtida com base na análise de grandezas estatísticas e critérios baseados na análise algébrica do comportamento dos autovalores, especificamente nas frequências naturais estimadas.

Diagramas de estabilização podem ser construídos para os métodos paramétricos a partir dos modelos identificados obtidos pelo incremento da ordem estimada. Tais diagramas são muito úteis na separação dos pólos reais e pólos espúrios do sistema, visto que caracterizam tendências. Assim, a formulação de um critério analítico inicia-se com a inspeção gráfica de um diagrama de estabilização do valor das frequências em função do parâmetro p , como o exemplo apresentado na fig.(6) referente a um sistema simulado com 4 graus de liberdade.

Figura 6: Diagrama de estabilização de frequências de um sistema de 4 g.d.l.

As frequências naturais do sistema são identificadas consecutivamente em algum intervalo de variação de frequência com centro f_i . Assim é necessário estabelecer analiticamente em qual intervalo acontece a estabilização. Para tanto, considere o intervalo

$$[f_i - passo, f_i + passo] \quad (4.3)$$

onde o passo é definido em função da frequência máxima esperada, denominada frequência de corte f_c . É importante ressaltar que quanto menor o passo melhor será a precisão na identificação das frequências naturais. Neste trabalho, o passo foi definido como:

$$passo = \frac{1}{100} f_c \quad (4.4)$$

O valor do centro do intervalo estabelecido também é definido em função do passo, da seguinte maneira:

$$f_i = i \cdot passo \quad (4.5)$$

Assim, o intervalo descrito pela eq.(4.3) pode ser reescrito como:

$$[(i - 1) \cdot passo, (i + 1) \cdot passo] \quad (4.6)$$

Tal escolha baseou-se no equilíbrio entre precisão e agilidade computacional. A cada um dos intervalos analisados pode ser associado um conjunto de frequências estimadas. O desvio-padrão desses elementos diz analiticamente quão estáveis são as frequências identificadas neste intervalo de f_i . Portanto, desvio-padrão alto indica grande variabilidade nas frequências estimadas ao passo que índices baixos refletem o comportamento aproximadamente linear em algum intervalo de variação de p , o que caracteriza as frequências naturais.

Desta forma, o algoritmo realiza uma varredura dentro da faixa de frequência de interesse, selecionando apenas aquelas frequências que apresentam as características de estacionariedade que as identifiquem como frequências naturais do sistema. O fluxograma apresentado na fig.(7) descreve esquematicamente o critério de seleção adotado.

A subrotina AMOSTRA fornece um conjunto composto por todas as frequências estimadas nas diversas identificações obtidas com a variação de p . Assim, no fluxograma $s(i)$ representa um elemento qualquer deste conjunto e cada A_j é um conjunto formado por aquelas frequências estimadas que estão no intervalo especificado.

Ao final do processo de seleção, o número de conjuntos A_j é exatamente o número de modos estruturais do sistema. Cada A_j contém informações sobre apenas um dos modos. Portanto, basta escolher um representante do conjunto, que será uma frequência natural identificada do sistema, e em seguida calcular o fator de amortecimento modal e a forma do modo relativos a esta frequência. A escolha do representante de A_j pode ser aleatória pois a diferença entre os elementos do conjunto não ultrapassa o dobro do passo estabelecido. Assim, quanto menor o passo melhor será a precisão da identificação.

Os momentos estatísticos são fundamentais no processo de extração dos parâmetros modais a partir de sinais aleatórios estacionários, pois através deles é possível estabelecer um critério analítico para selecionar com segurança todos modos estruturais dentro da faixa de interesse.

Figura 7: Fluxograma da subrotina SELEÇÃO

4.3 Considerações sobre a Transformada Wavelet

Sistemas que apresentam frequências naturais baixas e alta densidade modal agregam maiores dificuldades ao processo de identificação tradicional. Em análise modal operacional os problemas tornam-se ainda maiores e faz-se necessário a utilização de ferramentas que atenuem o efeito do ruído na identificação e que permitam a realização de uma identificação estocástica diferenciada para baixas frequências.

A utilização da tradicional Transformada de Fourier (FT) para executar tal tarefa é inviável visto que ela não permite uma análise local do conteúdo de frequência do sinal.

A análise local de um sinal $f(t)$ pode ser realizada por meio de janelas moduladas no plano tempo-frequência pela Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT), também conhecida como transformada enjanelada de Fourier, definida por:

$$F(w, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - b)e^{-j\omega t} dt \quad (4.7)$$

Na análise no plano tempo-frequência, o sinal analisado pode ser expresso por meio de uma combinação linear de átomos de tempo-frequência, caracterizados por uma duração finita no tempo (Δt) e uma duração finita na frequência ($\Delta \omega$).

A STFT permite a análise local do conteúdo de frequência do sinal mas pode não ser adequada para a análise de determinados sinais, tendo em vista que o tamanho da janela de observação permanece constante para todas as frequências.

Em vista deste problema uma melhor alternativa é a Transformada Wavelet (WT), introduzida por Morlet [28], na qual o tamanho da janela varia com a frequência. De acordo com Mallat e Zhang [60], a WT possui a vantagem de utilizar bases diferentes para o espaço vetorial de uma função, desvinculando-se da base trigonométrica utilizada na FT que possui uma boa precisão no domínio da frequência porém não é capaz de fornecer nenhuma informação a respeito da duração ou posição no tempo de uma determinada frequência.

Literalmente, wavelets significa ‘pequenas ondas’ e constitui uma base conveniente para o espaço das funções. A WT é uma das técnicas de multiresolução que se destaca na área de análise de sinais aplicadas à aeronáutica [26], monitoramento do estado de funcionamento de equipamentos industriais [56], compactação digital de dados e reconhecimento de voz [60], entre outras aplicações. A principal característica dessas aplicações é a sua natureza não-estacionária e a grande quantidade de informações redundantes presentes nos sinais gerados para análise de sistemas.

4.3.1 Transformada Contínua de Wavelets

A maior parte dos sinais relevantes para aplicações em processamento de sinais estão no espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (4.8)$$

denotado por $L^2(\mathbb{R})$. O produto interno neste espaço pode ser definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad (4.9)$$

Uma wavelet-mãe é uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que a família de funções

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.10)$$

onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$, seja uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Em outras palavras, wavelets são funções obtidas a partir de uma função base $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, introduzindo dilatações por meio de um fator de escala a , e translações controladas pelo parâmetro b . Estas operações são realizadas com o intuito de se obter uma família de funções base para descrever todas as outras funções de $L^2(\mathbb{R})$.

A Transformada Wavelet Contínua em relação à uma família wavelets $\psi_{a,b}(t)$ é definida como um produto escalar:

$$Tf(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4.11)$$

Aplicar a WT consiste em decompor um sinal em relação a uma família de funções $\psi_{a,b}(t)$ definidas a partir de uma única função $\psi(t)$.

A função $f(t)$ pode ser recuperada de $Tf(a, b)$ através da Transformada Wavelet Contínua Inversa, dada em função dos termos de dilatação e translação conforme a equação abaixo:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Tf(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \quad (4.12)$$

onde C é uma constante.

Diferentemente da FT, na WT a informação a respeito do posicionamento no tempo de um determinado padrão de onda é mantido tanto na transformada direta quanto inversa. Desta forma, as bases wavelets descrevem completamente o espaço $L^2(\mathbb{R})$ de maneira mais sofisticada que a base senoidal do método de Fourier.

Especificamente para processamento de sinais, a principal diferença entre a STFT e a WT está na resolução da cobertura do plano tempo-frequência. Enquanto a STFT divide o plano tempo-frequência em porções de dimensões regulares e constantes, analisando frequências altas da mesma forma analisa frequências baixas. A WT, por outro lado, permite uma cobertura do plano tempo-escala com resolução diferenciada para as faixas de frequências. A fig.(8) ilustra as janelas de análise para um sinal no plano tempo-frequência comparativamente para a STFT e WT.

Figura 8: Análise no plano tempo-frequência STFT versus WT

Nas palavras de Rioul e Vetterli [73], na análise de frequências mais altas a transformada emprega wavelets mais finas, comprimidas e de curta duração, portanto permitindo a visualização do sinal analisado numa escala mais detalhada, com melhor resolução temporal. Em frequências mais baixas, wavelets mais largas e dilatadas enquadram o sinal numa escala maior, menos detalhada, permitindo visualizar características globais.

A STFT analisa sinais na região de alta frequência com uma janela contendo um número de ciclos muito maior do que contém a janela para análise em baixa frequência,

o que leva à instabilidade numérica na representação de transientes de alta frequência. Tal problema não ocorre com a WT, visto que as wavelets reescalam sua base analisadora para cada banda de frequência, sem alterar o número de ciclos. Na prática, essa diferença implica num desempenho superior da análise tempo-frequência utilizando WT.

Em resumo, a capacidade de resolução simultânea em vários domínios da WT possibilita que componentes de alta frequência sejam analisadas com maior resolução temporal, ao passo que as de baixa frequência com maior resolução no domínio de Fourier. Assim, para altas frequências as wavelets são transladadas por passos pequenos, enquanto que para frequências baixas a translação é feita com passos maiores [78].

4.3.2 Transformada Discreta de Wavelets

Até o momento a WT foi apresentada para casos onde a função é contínua, no entanto em aplicações práticas os sinais digitais são aproximações da função ou do sinal real, obtidos como resultado de amostras discretas ao longo de um determinado tempo de aquisição. Para estes casos é necessário definir a transformada em termos de um conjunto discreto de pontos.

A WT pode ser tratada sob forma matemática discreta sem prejuízo de suas qualidades e propriedades, e de maneira numericamente estável. Para tanto, discretizam-se os parâmetros a e b do sinal transformado $Tf(a, b)$. Os valores de a podem ser tomados como as potências de um parâmetro fixo a_0 e os valores de b em função de a_0 e b_0 também fixo.

$$\begin{aligned} a &= a_0^j \\ b &= k b_0 a_0^j \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $a_0 > 1$, $b_0 > 0$, j e k são inteiros arbitrários.

Valores diferentes de a_0 resultam em famílias diferentes de wavelets, assim para determinar os coeficientes das wavelets discretas é necessário fixar os parâmetros a_0 e b_0 . Na discretização apresentada, o fator a_0 pode ser um número arbitrário maior que 1, no entanto como estamos interessados em obter bases ortonormais de wavelets é necessário fazer restrições em relação aos valores atribuídos a a_0 . Sabe-se que bases ortonormais de wavelets só são conhecidas para valores racionais de a_0 [22].

Tradicionalmente toma-se $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, assim a definição de uma família de wavelets para forma discreta pode ser reescrita como se segue:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \tag{4.14}$$

A escolha feita define wavelets que formam bases ortonormais, e permitem a caracterização de um sinal $f(t)$ sem redundância, visto que qualquer função do espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada numa precisão arbitrária por combinações lineares de wavelets ortonormais [22]. A exigência de ortonormalidade é necessária para que a representação do sinal seja unicamente determinada.

A Transformada Wavelet Discreta e sua inversa podem ser expressas da seguinte forma:

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (4.15)$$

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \quad (4.16)$$

onde $d_{j,k}$ são os coeficientes wavelets, correspondentes a $Tf(a, b)$ da transformada contínua.

A eq.(4.16) representa a reconstrução do sinal $f(t)$ a partir da projeção ortogonal de f na base gerada pela wavelet-mãe ψ .

Assim, uma função contínua $f(t)$ pode ser decomposta sobre uma base de wavelets contínuas $\psi_{j,k}(t)$, e expressa por coeficientes discretos $d_{j,k}$. No entanto, é necessário obter um algoritmo que permita representar sinais discretos $f(n)$ como combinação linear de wavelets discretas $\psi_{j,k}(n)$. A Análise de Resolução Múltipla (ARM) desenvolvida por Mallat e Meyer [59] conduz a um esquema rápido e hierárquico para a computação dos coeficientes wavelets, a idéia básica é decompor um sinal $f(t)$ em aproximações sucessivas de resolução cada vez menor, numa sequência de estágios de processamento consecutivos.

Formalmente, uma ARM é uma sequência $\{V_j\}$ de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$, representando os sucessivos níveis de resolução, tais que satisfaçam às seguintes condições:

- 1) Os subespaços são encaixantes

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

- 2) A intersecção dos subespaços é a trivial

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

- 3) $\bigcup_j V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$

4) Todos os subespaços estão relacionados em escala com V_0

$$f(t) \in V_j \iff f(2^j t) \in V_0$$

5) $f(t) \in V_0 \iff f(t - n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z}$

6) Existe $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, denominada função escala, tal que

$$\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

constitui uma base ortonormal para V_0

Cada subespaço V_j pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva. A aproximação de $f(t)$ na resolução 2^j é a projeção de f sobre V_j ; quanto menor j mais fina é a resolução. Os detalhes adicionais necessários para aumentar a resolução de 2^j para 2^{j+1} são dados pela projeção de f sobre o complemento ortogonal de V_j em relação a V_{j+1} , denotado por W_j . Desta forma, vale a relação matemática:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (4.17)$$

Assim, o espaço de funções todo pode ser decomposto como soma direta de subespaços mutuamente ortogonais $W_j, j \in \mathbb{Z}$:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_j W_j \quad (4.18)$$

A fig.(9) ilustra a hierarquia de relações entre os subespaços V_j e W_j .

Figura 9: Diagrama esquemático da associação dos subespaços V_j e W_j em ARM.

Um subespaço qualquer $V_0 \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser decomposto em um espaço de aproximação V_1 e um espaço de detalhes W_1 . O processo é iterado sucessivamente, culminando com a completa decomposição do espaço. Na direção oposta, qualquer um dos espaços de aproximação V_j pode ser enriquecido de detalhes realizando a soma direta com W_j , ampliando assim sua resolução e formando os níveis imediatamente mais finos.

Dado $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é possível fazer a decomposição do sinal nos subespaços V_j e W_j utilizando a WT nível $j = 3$, conforme ilustrado na fig.(10).

Figura 10: Diagrama esquemático da decomposição de um sinal $s(t)$ em ARM, nível 3.

Pela ARM, o sinal $s(t)$ pode ser reconstruído da seguinte maneira:

$$s(t) = a_3(t) + d_3(t) + d_2(t) + d_1(t) \quad (4.19)$$

4.3.3 Aplicação de Wavelets em Identificação Estocástica

Um problema específico de análise de sinais, principalmente no tratamento de sinais de resposta para identificação estocástica, é a minimização da relação sinal-ruído. A minimização do ruído no sinal utilizando a WT pode ser feita através da eliminação de todos os coeficientes da decomposição do sinal em wavelets que situam-se abaixo de um determinado nível. As componentes localizadas em bandas de frequência altas podem ser eliminadas através da reconstrução do sinal sem utilizar o espaço de detalhes no nível estabelecido. Esse aspecto funcional das wavelets justifica o título de *microscópio matemático* que muitos pesquisadores lhe conferem.

Para realizar a ARM, a escolha de uma wavelet-mãe ψ adequada determina a qualidade da aproximação da expansão do sinal. Existem inúmeras possibilidades, entretanto a escolha da wavelet para realizar a análise não é arbitrária e obedece a critérios matemáticos bem definidos, de acordo com as restrições e necessidades que cada aplicação específica impõe.

Dentre os diversos tipos de famílias de wavelets citados na literatura, as wavelets de Daubechies destacam-se pela excelente capacidade de análise e síntese no processamento de sinais [62].

As wavelets de Daubechies constituem uma base ortonormal de suporte compacto para o espaço das funções $L^2(\mathbb{R})$, e recebem denominações específicas de acordo o grau de regularidade. Uma wavelet de Daubechies é denominada dbN quando possui todos os momentos até ordem $N - 1$ nulos. A wavelet de Haar pode ser vista como uma wavelet de Daubechies quando $N = 1$, e quanto maior o parâmetro N maior a suavidade da função. Na fig.(11) estão representados alguns membros da família Daubechies.

Figura 11: Família de wavelets Daubechies.

Neste trabalho, a principal wavelet utilizada para análise é a $db5$, visto que apresenta equilíbrio entre sintonia, suavidade e desempenho computacional.

Além da relação sinal-ruído ser alta, a grande quantidade de dados necessários para realizar a identificação estocástica é uma característica comum dos sinais estudados. Assim, a capacidade da WT em compactar dados, permite o desenvolvimento de uma metodologia robusta para solução de problemas de análise modal operacional de sistemas mecânicos, com menor custo computacional.

A aplicação da WT nos sinais de resposta do sistema torna possível a estratificação do processo de identificação por faixas de frequência, agindo como um filtro passa-baixa, sem perda de informações no domínio do tempo. Assim, frequências naturais baixas e modos fortemente acoplados podem ser analisados separadamente aumentando consideravelmente a precisão do método. Além disso, WT ainda minimiza o efeito do ruído nos dados.

Portanto as frequências naturais do sistema podem ser classificadas em três níveis diferentes, de acordo com a frequências de corte. As frequências naturais classificadas como baixas, médias e altas são aquelas que estão respectivamente nos intervalos:

$$\left[0, \frac{\text{freq-corte}}{3}\right], \quad \left[\frac{\text{freq-corte}}{3}, 2\frac{\text{freq-corte}}{3}\right], \quad \left[2\frac{\text{freq-corte}}{3}, \text{freq-corte}\right]$$

O fluxograma da subrotina DECOMP é apresentado na fig.(12) e descreve a separação das frequências estimadas no processo de identificação. Uma wavelet-mãe específica, em níveis diferentes de acordo com a faixa de frequência analisada, é utilizada para decomposição do sinal.

Figura 12: Fluxograma da subrotina DECOMP

4.4 Aquisição não-simultânea

O algoritmo ERA requer medidas simultâneas em vários pontos. No entanto, em testes de estruturas grandes nem todos os pontos de saída podem ser observados ao mesmo tempo. Além disso, é imprescindível a utilização de analisadores de sinais com vários canais para a aquisição dos sinais simultaneamente.

Como analisadores com apenas dois canais têm custo financeiro bem menor em relação àqueles com vários canais, há grandes vantagens no desenvolvimento de técnicas que permitam a análise modal operacional utilizando o algoritmo ERA com aquisição não-simultânea de dados de resposta do sistema. Assim tais técnicas tornam possível a identificação de sistemas mecânicos sob a ação de forças de excitação aleatórias através de métodos modernos utilizando equipamento mínimo, com custo relativamente baixo.

Para resolver o problema da aquisição simultânea, uma saída de referência pode ser escolhida em um ponto considerado ‘ideal’ e deve ser observada em todas as medições realizadas, conforme já proposto por Ibrahim e Mikulcik [38] para o método ITD. O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma técnica similar que possibilita a aquisição de dados relativos à várias respostas de um sistema para identificação via ERA utilizando para tanto um analisador de sinais de apenas dois canais.

Desta forma, a exigência de aquisição simultânea pode ser substituída pela simples idéia de utilizar um sensor de referência para realizar a correção dos sinais coletados em tempos diferentes. Em cada medida dois sensores são utilizados, sendo que um deles deve ser mantido em uma posição fixa, tomada como ponto de referência, enquanto o outro muda de posição em cada ensaio realizado, percorrendo todos os pontos em que se deseja medir a resposta do sistema.

Para melhor descrever o procedimento, considere a estrutura mecânica ilustrada na fig.(13) com m pontos de captação $P_1, P_2, \dots, P_m$.

Figura 13: Pontos de captação de uma viga

Dentre todos os pontos de captação selecionados deve ser escolhido um ponto de referência, onde o sensor de referência sr é posicionado e permanecerá fixo em todas as medidas. Por outro lado o sensor móvel sm , em cada medição, é posicionado em um ponto

diferente de forma a percorrer todos os pontos de captação, exceto o ponto de referência.

O conjunto dos sinais assim obtidos corresponde às respostas não-simultâneas do sistema, mas pode ser transformado em um outro conjunto de dados onde os novos sinais são construídos a partir dos sinais originais corrigidos pela referência. A proposta de utilização dos sinais obtidos pela translação no tempo é baseada na hipótese ergódica.

O ponto de referência fornece as informações necessárias para normalização do conjunto de dados. Assim normalizado o conjunto de medidas pode ser utilizado no algoritmo ERA, onde as acelerações em todos os pontos são medidas no mesmo tempo.

A normalização dos sinais é efetuada pela diferença entre os sinais e o sinal de referência em cada tempo. Sejam a_r o sinal de aceleração do ponto de referência e a_k o sinal de aceleração do ponto P_k , para $k = 1, 2, \dots, m$ com $k \neq r$. As saídas y_k consideradas no algoritmo de identificação são:

$$y_k = a_r - a_k, \quad k \neq r \quad (4.20)$$

$$y_k = a_k, \quad k = r \quad (4.21)$$

Cada saída y_k definida pela eq.(4.20) está diretamente relacionada à aceleração a_k de um ponto específico P_k e à aceleração a_r do ponto de referência no mesmo tempo, ou melhor, relaciona-se com as duas medições realizadas no mesmo ensaio. Por outro lado, a aceleração a_r que define a saída y_r pode ser aleatoriamente escolhida entre todas as medidas realizadas.

A seleção de uma saída para referência deve ser criteriosa de forma a conter todas as informações modais relevantes. Na realidade, o problema da seleção do canal de saída como referência é em tudo similar à escolha da localização do ponto de aplicação da força de excitação em um teste modal tradicional utilizando entrada impulsiva.

Portanto, de acordo com a metodologia descrita, para captar as respostas do sistema é necessário apenas a utilização de dois sensores para medida das acelerações e um analisador com dois canais, o que contribui para a diminuição de custos na realização de ensaios para análise modal operacional.

Ao final do processo de identificação a forma dos modos deve ser corrigida visto que a técnica causa distorção nos autovetores estimados. Para melhor ilustrar a distorção ocasionada pela referência e a sua correção, estão representadas na fig.(14) as quatro componentes complexas de um autovetor estimado tomado como exemplo.

A componente indicada por a é relativa ao ponto escolhido para referência enquanto b , c e d representam as outras três componentes do autovetor em questão. Nota-se claramente a desproporção no comprimento das componentes b , c e d em relação à componente

Figura 14: Correção da forma dos modos utilizando referência.

a. Isto deve-se ao fato de que os sinais que alimentaram o algoritmo serem diferenças enquanto a aceleração a_r do ponto de referência mantém a amplitude original.

Para corrigir a distorção causada pela amplitude da referência basta considerar as respectivas diferenças vetoriais entre cada componente b , c e d e a componente correspondente a a relativa ao ponto de referência. Desta forma, obtém-se um autovetor corrigido com novas componentes indicadas por b' , c' e d' , mantendo-se a componente referência a .

4.5 Cálculo dos Modos Normais

Em algumas aplicações, a identificação das frequências naturais já pode ser suficiente. Outros casos exigem uma estimativa precisa de todos os parâmetros modais do sistema. Nestes casos a forma dos modos de vibrar devem ser determinada. Na prática, os modos obtidos pelo processo de identificação estão na forma complexa.

Em estruturas com amortecimento proporcional, os autovetores obtidos pela resolução de um auto-problema em algoritmos de identificação modal apresentam uma característica singular. Todas componentes do autovetor têm a mesma direção no plano complexo. Tais autovetores são frequentemente denominados *modos normais*.

Em ensaios modais, assim como na fase de análise de dados, é frequentemente

assumido que os níveis de amortecimento nas estruturas sob teste sejam muito baixos ou que a matriz de amortecimento seja proporcional à matriz de massa e à matriz de rigidez. Tais suposições refletem uma tentativa de aproximação entre os modos complexos amortecidos identificados e os modos reais. Na análise de estruturas que apresentam baixo amortecimento esta hipótese é aceitável.

Diferentemente dos modos normais, cada coordenada dos autovetores identificados ϕ_k é um número complexo e têm direções distintas no plano complexo. Para simplificar a notação, seja ϕ um autovetor complexo identificado. Cada componente ϕ_j de ϕ é um número complexo:

$$\phi_j = R_j + i I_j \quad (4.22)$$

Uma aproximação real $\bar{\phi}_j$ para cada coordenada complexa ϕ_j pode ser calculada por:

$$\bar{\phi}_j = \pm \sqrt{R_j^2 + I_j^2} \quad (4.23)$$

A definição do sinal, positivo ou negativo, depende do ângulo de fase

$$\theta_j = \text{tg}^{-1} \left(\frac{I_j}{R_j} \right) \quad (4.24)$$

referente à coordenada e da relação que este ângulo mantém com ângulos arbitrários α_1 e α_2 . A definição do sinal equivale à escolha do ângulo de fase 0° ou 180° , respectivamente.

Assim, o ângulo de fase aproximado $\bar{\theta}_j$ referente a coordenada $\bar{\phi}_j$ do modo real aproximado é definido de acordo com o seguinte critério:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j &= 0^\circ & \text{quando } 270^\circ \leq \theta_j < 90^\circ \\ \bar{\theta}_j &= 180^\circ & \text{quando } 90^\circ \leq \theta_j < 270^\circ \end{aligned}$$

A fig.(15) ilustra graficamente a escolha do sinal da coordenada real aproximada em função dos ângulos $\alpha_1 = 90^\circ$ e $\alpha_2 = 270^\circ$ escolhidos. No exemplo em questão a fase da coordenada do modo normal aproximado é 0° e portanto o sinal desta componente é positivo.

Existem técnicas alternativas que transformam os modos complexos identificados em modos reais sem perda de informações no processo de aproximação, no que se refere às matrizes de massa e rigidez do sistema, como propôs Ibrahim [36]. Entretanto, não é necessário a aplicação de técnicas mais sofisticadas para a aproximação quando os sistemas de interesse têm amortecimento baixo. É o caso dos sistemas tratados neste trabalho.

Figura 15: Limites para determinação do sinal das coordenadas do modo normal.

5 *Avaliação da Metodologia Proposta*

Para avaliar a eficiência das técnicas propostas, quanto a identificação de parâmetros modais de estruturas sujeitas a excitação do tipo ruído branco utilizando para tanto apenas os sinais de resposta, foram realizadas experiências com sistemas simulados numericamente. Foram realizadas diversas simulações computacionais em três modelos de sistemas mecânicos:

1. Sistema mecânico de quatro graus de liberdade;
2. Sistema mecânico de quatro graus de liberdade com alta densidade modal;
3. Viga engastada em vibração transversal (dois casos).

Os dados gerados a partir de cada sistema constituem casos distintos onde cada um apresenta particularidades interessantes do ponto de vista do problema de identificação. Os casos relatados têm por finalidade específica ilustrar e avaliar a capacidade da técnica desenvolvida.

O primeiro caso é um modelo didático com amortecimento proporcional e frequências naturais bem definidas. O segundo modelo difere do primeiro com relação ao tipo de amortecimento considerado não-proporcional e por apresentar autovalores mais próximos. O terceiro caso é um modelo de uma viga prismática esbelta engastada construído através do método dos elementos finitos com 20 graus de liberdade.

Em todos os casos, forças aleatórias não correlacionadas foram aplicadas em cada uma das massas, o que deve corresponder à situação onde a entrada não pode ser medida mas apenas aproximada por um ruído branco. No processo de identificação foram utilizadas as acelerações em pontos específicos como dados de saída, e a resposta temporal foi calculada através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Foram consideradas respostas com e sem ruído adicionais. Estes ruídos foram introduzidos visando representar as imprecisões computacionais e de instrumentos de medida.

Para simular uma situação mais próxima da realidade, um ruído branco quantificado em termos da relação sinal-ruído foi adicionado aos dados de resposta. A relação sinal-ruído, denominada nível de ruído (NR), foi estabelecida de acordo com a potência do ruído, isto é de acordo com o número obtido pela raiz média quadrática (RMS) do ruído Gaussiano, em relação à potência da resposta:

$$NR = \frac{\text{RMS}(\text{ruído})}{\text{RMS}(\text{resposta})} \quad (5.1)$$

onde $\text{RMS}(\text{resposta})$ representa o maior valor de RMS dentre todos os sinais de saída considerados. Dois níveis de ruído foram considerados 1% e 5%.

Considerou-se a contaminação por ruído somente nos sinais de saída pois nos casos em estudo o sistema está sujeito à ação de forças aleatórias e portanto a contaminação por ruído nos sinais de entrada está implicitamente modelada no tipo de excitação utilizada.

5.1 Sistema mecânico de 4 g.d.l. - caso 1

Os dados simulados foram gerados de forma a representar um sistema de quatro graus de liberdade com parâmetros concentrados cujo modelo físico está ilustrado na fig.(16).

Figura 16: Sistema de 4 g.d.l.

A tab.(1) apresenta os parâmetros físicos e modais do sistema analisado, onde ω_i é a frequência natural e ζ_i é o fator de amortecimento correspondente ao i -ésimo modo. A matriz de amortecimento Z foi escolhida proporcional à matriz de massa M e à matriz de rigidez K , da seguinte forma:

$$Z = M + 0.001K \quad (5.2)$$

A tab.(2) por sua vez exibe os auto-vetores do sistema simulado com norma euclidiana igual a 1. A forma dos modos de vibrar estão esquematizadas na fig.(17).

Tabela 1: Parâmetros físicos e parâmetros modais teóricos do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.

i	m_i (kg)	k_i (N/m)	λ_i	ω_i (rad/s)	ζ_i
1	10	389000	-2.493+63.09i	63.14	0.0395
2	20	199000	-8.411+125.5i	125.7	0.0669
3	20	138000	-18.33+187.9i	188.8	0.0971
4	10	174000	-32.08+249.2i	251.3	0.1277
5		100000			

Tabela 2: Auto-vetores teóricos do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.

1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
0.1833	0.3202	0.0921	0.9759
0.5050	0.6914	0.1071	-0.2147
0.6770	-0.3587	-0.4246	0.0342
0.5031	-0.5392	0.8943	-0.0166

Figura 17: Modos de vibrar teóricos do modelo de 4 g.d.l. - caso 1.

A identificação foi realizada com dados de resposta aleatória coletados simultaneamente em todas as massas com amostras de 60001 pontos, no intervalo de 0 a 60 segundos. A banda de frequência foi estipulada de 0 a 300 rad/s. O usuário deve fornecer ao algoritmo a frequência máxima que deverá ser analisada. Assim será utilizada uma frequência de corte f_c , que neste caso é igual a $f_c = 300 \text{ rad/s}$.

Para a análise estatística foi considerado o intervalo de amostragem para valores p de parâmetros de Markov independentes variando de 10 a 70.

Na tab.(3) encontram-se os resultados obtidos na identificação de frequências naturais, fatores de amortecimento e seus respectivos erros relativos aos valores teóricos,

denotados por ϵ_1 e ϵ_2 . O processo de identificação utilizou dados com diversos níveis de ruído adicionados somente às respostas do sistema, lembrando que o ruído nas entradas está implicitamente modelado na excitação presumida e principalmente no tipo de identificação realizada.

Tabela 3: Parâmetros modais identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.

Modos	Parâmetros Estimados					
	Nível ruído	p	Frequência Natural [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
Modo 1 $\omega_1 = 10.04$ [Hz] $\zeta_1 = 0.0395$	Nulo	54	10.09	0.4103	0.0481	17.82
	1%	54	10.09	0.4004	0.0483	18.25
	5%	52	10.10	0.5780	0.0395	0.0073
Modo 2 $\omega_2 = 20.01$ [Hz] $\zeta_2 = 0.0669$	Nulo	62	20.27	1.261	0.0664	0.7163
	1%	62	20.27	1.255	0.0664	0.7530
	5%	62	20.27	1.237	0.0666	0.3972
Modo 3 $\omega_3 = 30.05$ [Hz] $\zeta_3 = 0.0971$	Nulo	38	30.37	1.054	0.1011	3.950
	1%	38	30.37	1.044	0.1013	4.146
	5%	30	30.19	0.4477	0.0988	1.752
Modo 4 $\omega_4 = 40.00$ [Hz] $\zeta_4 = 0.1277$	Nulo	34	39.75	0.6332	0.1485	14.02
	1%	46	39.80	0.5096	0.1457	12.55
	5%	46	39.79	0.5345	0.1439	11.30

Nota-se que os valores estimados para as frequências naturais apresentam diferenças inferiores a 2% enquanto os amortecimentos modais identificados possuem diferenças menores que 20%. A partir dos resultados obtidos, constata-se também que a técnica realiza um tratamento eficiente do ruído adicionado ao sinal de resposta visto que as diferenças percentuais em relação à frequências e fatores de amortecimento não sofrem alterações significativas quando o nível de ruído é alterado. É importante ressaltar que o caso excepcional da identificação do fator de amortecimento do primeiro modo com 5% de ruído é um caso a parte e somente foi possível em virtude da escolha do parâmetro ser realizada estatisticamente.

Os autovetores identificados estão descritos numericamente na tab.(4) e podem ser comparados aos autovetores teóricos pela diferença ϵ_3 . Para cada modo teórico foi construída uma curva composta por segmentos de reta cujas extremidades são as coordenadas do modo, em seguida calculou-se a área sob esta curva. O mesmo procedimento foi realizado para cada modo identificado. À diferença percentual entre as áreas sob as curvas relativas à cada modo denominou-se ϵ_3 . A representação geométrica do resultado da identificação com 1% de ruído é apresentada na fig.(18).

Verifica-se também para os modos um bom desempenho da técnica com diferenças inferiores a 8%. Visto que a interferência do nível de ruído na estimativa dos parâmetros

Tabela 4: Modos identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.

Nível de ruído	Auto-vetores identificados			
	1	2	3	4
0%	$0.1824 + 0.0105i$	$0.3251 + 0.0250i$	$0.1303 + 0.1958i$	$0.8657 + 0.0087i$
	$0.5472 + 0.0519i$	$0.7319 + 0.0073i$	$0.2678 + 0.2509i$	$-0.2513 - 0.4194i$
	$0.6807 + 0.0068i$	$-0.2972 + 0.1534i$	$-0.4026 + 0.0627i$	$0.0444 + 0.0669i$
	$0.4483 + 0.0105i$	$-0.4853 + 0.1028i$	$0.8024 + 0.0080i$	$-0.0424 - 0.0558i$
$\epsilon_3(\%)$	0.5216	3.664	5.605	3.032
1%	$0.1829 + 0.0109i$	$0.3251 + 0.0236i$	$0.1312 + 0.1951i$	$0.8808 + 0.0088i$
	$0.5483 + 0.0519i$	$0.7319 + 0.0073i$	$0.2682 + 0.2510i$	$-0.2094 - 0.4135i$
	$0.6804 + 0.0068i$	$-0.2973 + 0.1533i$	$-0.4020 + 0.0630i$	$0.0451 + 0.0411i$
	$0.4473 + 0.0102i$	$-0.4853 + 0.1025i$	$0.8026 + 0.0080i$	$0.0099 - 0.0739i$
$\epsilon_3(\%)$	0.5113	3.655	5.662	7.751
5%	$0.1637 - 0.0090i$	$0.3253 + 0.0235i$	$0.1024 + 0.2178i$	$0.8819 + 0.0088i$
	$0.5408 - 0.0396i$	$0.7320 + 0.0073i$	$0.2672 + 0.2696i$	$-0.2035 - 0.4128i$
	$0.6941 + 0.0069i$	$-0.2976 + 0.1530i$	$-0.3869 + 0.0634i$	$0.0432 + 0.0444i$
	$0.4441 + 0.0011i$	$-0.4853 + 0.1014i$	$0.8026 + 0.0080i$	$0.0135 - 0.0805i$
$\epsilon_3(\%)$	1.371	3.629	2.706	8.00

Figura 18: Auto-vetores teóricos e identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 1.

modais pode ser considerada desprezível, dentro dos níveis pré-estabelecidos, nas simulações subsequentes a resposta do sistema estará corrompida sempre por 1% de ruído.

Trabalhando com os mesmos parâmetros estabelecidos anteriormente, o método foi aplicado a dados de tamanho variado com o objetivo de verificar a performance da identificação utilizando amostras temporais com menor número de pontos. As figuras 19-22 exibem as identificações obtidas variando-se o número p de parâmetros de Markov independentes considerando sinais de resposta com 5001, 10001, 20001 e 40001 pontos, respectivamente.

Figura 19: Estabilização das frequências naturais utilizando 5001 pontos - caso 1.

Figura 20: Estabilização das frequências naturais utilizando 10001 pontos - caso 1.

Figura 21: Estabilização das frequências naturais utilizando 20001 pontos - caso 1.

Figura 22: Estabilização das frequências naturais utilizando 40001 pontos - caso 1.

Da análise gráfica, fica evidente que a identificação obtida é afetada pelo número de pontos do sinal de resposta, neste caso há perda de algumas frequências naturais quando o número de pontos é menor. Portanto a identificação estocástica requer um grande número de instantes de tempo observados mas, é importante ressaltar que o erro relativo das frequências naturais e amortecimentos modais referentes aos modos identificados no processo fica próximo aos índices obtidos na tab.(3).

O algoritmo ERA requer aquisição simultânea de dados para realizar a identificação,

como foi considerado na primeira análise do modelo de 4 g.d.l. No entanto, devido a eventual indisponibilidade de múltiplos canais para análise, é importante discutir também a capacidade da técnica de identificação estocástica quando aplicada a dados cuja aquisição não puder ser simultânea.

Para tanto, foram coletados dados corrompidos com 1% de ruído com aquisição não-simultânea e referência fixa na massa 1. Neste exemplo foram considerados 29901 pontos com mesmo intervalo de discretização, $\Delta t = 0.001$, utilizado no exemplo anterior, assim como mantiveram-se os mesmos parâmetros pré-estabelecidos para o processo de identificação. Salvo menção contrária os parâmetros não citados permanecem constantes. O diagrama de estabilização das frequências naturais obtidas nas identificações realizadas estão representadas na fig.(23). A partir deste gráfico pode-se observar claramente a dificuldade na identificação pois somente a frequência natural associada ao segundo modo pode ser estimada com certa precisão. Neste caso, o aumento do número pontos observados em nada modifica a situação.

Figura 23: Estabilização das frequências naturais com aquisição não-simultânea - caso 1.

O mesmo comportamento pode ser observado variando-se o ponto tomado como referência. A solução para este problema é utilizar a transformada wavelet que permite a realização do processo de identificação em etapas, divididas por faixas de frequências sem perda de informações no domínio do tempo. Mais especificamente a transformada WT permite que eventos de alta frequência possam ser localizados com maior resolução temporal, ao passo que componentes de baixa frequência podem ser analisados com maior resolução no domínio de Fourier.

Neste trabalho, para a decomposição do sinal foi utilizada a wavelet-mãe db5 em níveis variados de acordo com cada tipo de problema analisado. No caso em questão do modelo de 4 g.d.l. foi aplicada a wavelet db5 nível 3, 2 e 1 para as faixas de frequências baixas, médias e altas, respectivamente. Onde as faixas de frequência estão definidas de acordo com a banda de frequência analisada, são consideradas baixas as frequências que pertencem ao intervalo $[0, \frac{f_c}{3}]$, médias são aquelas que estão $[\frac{f_c}{3}, 2\frac{f_c}{3}]$ e finalmente as altas estão em $[2\frac{f_c}{3}, f_c]$, onde f_c é a frequência de corte definida pelo usuário conforme discutido anteriormente.

As fig.(24) e fig.(25) representam graficamente a estabilidade das frequências naturais utilizando-se dados com 49901 pontos, aquisição não-simultânea e ponto de referência localizado na massa 2. A fig.(24) exibe os resultados obtidos utilizando a WT db5 nível 3 para a faixa de frequências consideradas baixas e fig.(25) corresponde à aplicação da WT db5 nível 1 para as faixas de frequências médias e altas.

Figura 24: Estabilização de frequências com referência na massa 2 e WT nível 3 - caso 1.

Pode-se verificar visualmente a estabilização da primeira frequência natural do sistema no gráfico da fig.(24), enquanto no gráfico da fig.(25) é possível observar a estabilização das quatro frequências naturais.

Devido à utilização da WT foi possível obter os parâmetros modais referentes a todos os modos com grau de confiabilidade satisfatório e ainda utilizar um intervalo de amostragem menor que o utilizado anteriormente no caso de identificação com aquisição simultânea. Neste caso, p varia de 10 a 60. Para este caso, as faixas de frequências baixas, médias e altas são $0 - 15.91$, $15.91 - 31.82$ e $31.82 - 47.74$ Hz, respectivamente.

Figura 25: Estabilização de frequências com referência na massa 2 e WT nível 1 - caso 1.

Para analisar o impacto causado pela escolha do ponto de referência no resultado final da identificação estão apresentados na tab.(5) os parâmetros modais estimados para o sistema em estudo contendo todas as possibilidades para escolha da referência.

Tabela 5: Resultado da Identificação com dados não simultâneos - caso 1.

Referência	Parâmetros Estimados				
	p	Frequência Natural [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
massa 1	38	10.05	0.0525	0.0318	24.25
	40	20.22	1.0067	0.0634	5.399
	60	30.00	0.1848	0.0329	194.6
	48	39.18	2.0850	0.1137	12.25
massa 2	48	9.992	0.5788	0.0386	2.221
	42	19.98	0.1721	0.0519	28.91
	48	29.72	1.0989	0.0787	23.40
	38	39.54	1.1702	0.1373	7.005
massa 3	34	10.14	0.9566	0.0321	22.89
	34	20.02	0.0165	0.0471	41.84
	36	30.23	0.6020	0.0867	11.91
	58	39.48	1.3135	0.1469	13.09
massa 4	30	10.11	0.6606	0.0349	13.12
	40	19.93	0.4468	0.0694	3.643
	50	29.29	2.6072	0.0720	34.80
	54	40.42	1.0330	0.1489	14.27

Independentemente da escolha do ponto de referência as frequências naturais foram estimadas com erro percentual baixo enquanto a dificuldade em identificar os fatores de amortecimento modal fica evidente para alguns modos, principalmente quando a referência é fixada na massa 1 e na massa 3. A análise dos níveis de erros percentuais na estimativa dos fatores de amortecimento deixa evidente que a referência fixa no ponto determinado pela massa 2 produz resultados melhores que em qualquer outro ponto da estrutura, no sentido que apresenta distribuição mais balanceada dos erros entre todos os modos.

A constatação anterior de que o posicionamento da referência na massa 2, por ora denotado simplesmente por referência 2, apresenta vantagens no processo de identificação é justificada pela análise da forma dos modos de vibrar apresentada no início deste capítulo na fig.(17). Nesta figura é possível observar que especialmente no ponto 1 a amplitude do quarto modo é muito maior em escala em relação aos outros modos enquanto nos pontos 3 e 4 o mesmo quarto modo tem amplitude próxima de zero e conseqüentemente é muito menor em escala do que os outros modos. Portanto, de acordo com este critério, somente o ponto 2 tomado como referência poderá fornecer resultados não distorcidos porque a distribuição de energia nas massas naquele ponto é mais equânime.

As figuras 26-29 exibem a comparação entre os modos teóricos e os autovetores resultantes da identificação realizada tomando-se os quatro possíveis pontos de referência. Embora os resultados obtidos considerando-se as referências 1, 3 e 4 possam ser considerados razoáveis visto que identificam bem o primeiro modo enquanto os demais modos apresentam alguns pontos discordantes em relação ao sinal convencionado, é a referência 2 que produz melhores resultados, conforme previsto.

A tarefa de localizar a melhor referência como foi descrito pode ser realizada teoricamente. No entanto, na prática ela se torna difícil visto que não é possível analisar a forma dos modos a priori. Assim para atenuar os erros decorrentes da escolha do ponto de referência, é preferível realizar os ensaios considerando o maior número de referências possível e em seguida considerar como resultado final do processo de identificação a média aritmética dos resultados parciais. A média dos parâmetros modais do modelo estudado obtida a partir dos resultados apresentados anteriormente está apresentada na tab.(6) e na fig.(30).

Da análise dos resultados obtidos pode-se concluir que o método de identificação proposto apresentou uma estimativa consistente das características modais do modelo. Embora sem base teórica sólida, a proposta para identificação não-simultânea mostrou-se eficiente para estruturas com baixo amortecimento, visto que nestes casos a variação de fase é baixa.

Figura 26: Auto-vetores identificados com referência 1 - caso 1.

Figura 27: Auto-vetores identificados com referência 2 - caso 1.

Figura 28: Auto-vetores identificados com referência 3 - caso 1.

Figura 29: Auto-vetores identificados com referência 4 - caso 1.

Tabela 6: Média dos parâmetros modais estimados com aquisição não-simultânea - caso 1.

Frequência Natural [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
10.07	0.7710	0.0343	15.16
20.04	0.2034	0.0579	15.54
29.81	0.6221	0.0675	43.85
39.65	0.8605	0.1367	6.583

Figura 30: Média dos auto-vetores identificados com aquisição não-simultânea - caso 1.

5.2 Sistema mecânico de 4 g.d.l. - caso 2

Pretende-se avaliar a utilização do método proposto na análise de sistemas vibratórios com alta densidade modal. Para tanto o modelo considerado no caso 1 sofreu alterações nas massas e nos valores de rigidez, e o modelo escolhido possui matriz de amortecimento não proporcional a fim de realizar uma análise mais geral para a identificação de sistemas com amortecimento viscoso linear.

Os parâmetros físicos e as características modais do sistema simulado estão descritos na tab.(7), onde M é o módulo do autovalor λ e φ é o ângulo de fase. Cada valor M_i é a aproximação de uma frequência natural do sistema, da mesma forma que $\cos(\varphi_i)$

aproxima o fator de amortecimento. Por um abuso de notação, muitas vezes os valores M_i serão denominados frequências naturais e $\cos(\varphi_i)$, fatores de amortecimento.

Tabela 7: Parâmetros físicos e parâmetros modais teóricos do sistema de 4.g.d.l. - caso 2.

i	m_i (kg)	z_i (N.s/m)	k_i (N/m)	λ_i	M_i (Hz)	$\cos \varphi_i$
1	1	8	1000	$-0.5472+15.39i$	2.451	0.0355
2	5	4	8000	$-3.520+95.25i$	15.16	0.0369
3	0.5	4	8000	$-5.079+104.3i$	16.62	0.0486
4	0.25	2	2000	$-8.053+154.5i$	24.63	0.0520
5		0.2	1000			

Para a identificação dos parâmetros estruturais, o sistema foi excitado por forças aleatórias. Em todas as simulações a resposta temporal do sistema foi calculada através do método de Runge-Kutta utilizando 60001 pontos no intervalo de 0 a 60s. No processo de identificação foram consideradas as acelerações das quatro massas como resposta do sistema, corrompidas por 1% de ruído. O algoritmo de identificação foi alimentado por uma frequência de corte de 200 rad/s, o que corresponde a aproximadamente 31.8 Hz.

No caso apresentado na fig.(31), várias realizações foram obtidas de acordo com o número de parâmetros de Markov independentes p . O intervalo de variação de p foi 10 a 200, realizando-se ao todo 95 identificações, afim de obter um número suficiente de amostras dos parâmetros modais para realizar uma análise estatística e poder determinar a ordem mais apropriada para o modelo.

Figura 31: Estabilização das frequências naturais do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.

No entanto, pela simples observação da fig.(31), pode-se concluir que a ordem estimada do modelo é 6, o que não corresponde ao modelo teórico. Isto deve-se à perda da frequência mais baixa. Neste momento, a transformada wavelet foi utilizada com o objetivo de estratificar o processo de identificação por faixas de frequência.

As figuras 32-34 mostram os resultados das identificações com p variando de 10 a 60, utilizando a wavelet-mãe db5 para a decomposição do sinal em faixas de frequências. Para a estratificação foram aplicados diferentes níveis da wavelet db5, a saber nível 1, 2 e 3, respectivamente, para frequências altas, médias e baixas.

Figura 32: Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 3 - caso 2.

Figura 33: Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 2 - caso 2.

Figura 34: Estabilização das frequências naturais utilizando WT db-5 nível 1 - caso 2.

Percebe-se claramente a estabilização das frequências naturais além de obter informações sobre valor de p mais adequado para realizar a identificação de acordo com as faixas de frequência. É interessante notar pela análise gráfica, que a ordem estimada para o modelo neste caso é exatamente 8, conforme esperado.

As tab.(8) e tab.(9) mostram o resultado da identificação com aquisição simultânea. Os auto-vetores teóricos e identificados estão normalizados, a fig.(35) fornece sua representação gráfica aproximada.

Tabela 8: Resultado da identificação simultânea do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.

Modos	Parâmetros Estimados			
	M [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
1	2.419	1.342	0.0390	8.804
2	15.12	0.2844	0.0340	8.523
3	16.63	0.0718	0.0576	15.59
4	24.82	0.7879	0.0515	7.669

A aplicação da transformada wavelet foi importante para a identificação de todos os modos estruturais na faixa de frequência analisada. Este exemplo numérico confirma também a eficácia da técnica na identificação de autovalores próximos e de baixas frequências.

O sucesso da identificação fica evidente pelos baixos índices obtidos nas diferenças

Tabela 9: Auto-vetores do sistema de 4 g.d.l. - caso 2.

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
teóricos	0.5168 - 0.0008i	-0.3192 + 0.0823i	0.5469 + 0.2016i	0.0356 + 0.0005i
	0.5659 + 0.0057i	-0.0017 - 0.0199i	-0.1376 - 0.0280i	-0.0664 + 0.0014i
	0.5312 + 0.0059i	0.3226 - 0.0090i	0.1073 - 0.0243i	0.8275 + 0.0083i
	0.3612 + 0.0059i	0.8870 + 0.0089i	0.7927 + 0.0079i	-0.5549 - 0.0389i
identificados	0.1059 - 0.5049i	0.1579 - 0.1530i	0.0671 - 0.2457i	0.0301 + 0.0211i
	0.1100 - 0.5520i	-0.0145 - 0.0297i	-0.0611 + 0.0696i	-0.0598 - 0.0322i
	0.1008 - 0.5207i	-0.1348 + 0.2761i	0.2153 - 0.1058i	0.7337 + 0.3680i
	0.0643 - 0.3629i	-0.3148 + 0.8701i	0.7384 - 0.5690i	-0.5396 - 0.1704i
$\epsilon_3(\%)$	0.1233	4.736	6.552	0.370

Figura 35: Auto-vetores teóricos e identificados do sistema de 4 g.d.l. - caso 2

porcentuais entre os parâmetros modais identificados e os teóricos. Todos, exceto o fator de amortecimento do terceiro modo, mantiveram-se abaixo de 10%. Portanto, o processo de identificação foi capaz de estimar com grau de confiança aceitável todos os parâmetros modais de um sistema mecânico com alta densidade modal, que apresenta frequências naturais baixas e amortecimento não-proporcional.

5.3 Viga engastada em vibração transversal

Pretende-se avaliar a eficiência do método proposto em um modelo simulado mais complexo que os dois modelos anteriores, especificamente numa viga engastada em vibração transversal modelada por elementos finitos com 20 graus de liberdade.

Neste modelo o principal objetivo é identificar os parâmetros modais correspondentes aos cinco primeiros modos do modelo, o que equivale a analisar a faixa de frequência de 0 a 300 Hz.

O modelo físico de uma viga prismática de seção retangular constante, material homogêneo isotrópico, com condições de contorno engastada-livre é exibido na fig.(36), onde $f(x, t)$ é uma força externa distribuída e aleatória aplicada à estrutura, $M(x, t)$ representa os momentos fletores e $V(x, t)$ as forças cortantes.

Figura 36: Viga em flexão, deformada por uma força distribuída $f(x, t)$.

Deste modo são admitidos como constantes:

- ρ : massa específica do material;
- E : módulo de elasticidade do material;
- I : inércia à flexão da secção transversal;
- A : área da secção transversal;
- m : massa por unidade de comprimento.

O efeito de deformação por cisalhamento tem pequena influência para vigas esbeltas. Desta forma, este efeito pode ser desprezado contabilizando-se apenas o efeito de deformação por flexão.

Ainda como hipóteses do modelo físico considera-se também que o amortecimento é do tipo viscoso, o eixo neutro da estrutura é inextensível e a inércia de rotação de massa é desprezível.

Para construção do modelo matemático considera-se, como hipóteses simplificadas, que o comportamento do sistema pode ser linearizado e que os efeitos não lineares decorrentes de produtos diferenciais podem ser desprezados.

Como objeto de estudo, considera-se a viga de aço com as seguintes especificações:

$$\begin{aligned}\text{módulo de elasticidade: } E &= 2.07 \times 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]} \\ \text{densidade: } \rho &= 7800 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\ \text{comprimento: } L &= 1 \text{ [m]} \\ \text{base da seção transversal: } b &= 0.025 \text{ [m]} \\ \text{altura da seção transversal: } h &= 0.005 \text{ [m]}\end{aligned}$$

De acordo com a teoria de vigas, a deflexão de uma viga com amortecimento do tipo viscoso submetida a um carregamento transversal distribuído pode ser representada pela seguinte equação diferencial de equilíbrio dinâmico:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + c \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x, t) = f(x, t) \quad (5.3)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento por unidade de comprimento dado em $[N.s/m^2]$.

Frequências naturais e modos de vibrar da viga são encontradas considerando-se o problema de vibração livre não amortecida. A partir da eq.(5.3) pode-se desprezar a parcela correspondente ao amortecimento e as forças externas que agem no sistema, para obter a seguinte equação diferencial homogênea:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x, t) = 0 \quad (5.4)$$

Para o problema de vibração de vigas, é bastante razoável supor que o movimento é síncrono ou seja, todas as seções transversais movem-se na mesma frequência quando em vibração livre. Sendo assim é possível assumir que $v(x, t)$ pode ser escrita em função de variáveis separadas:

$$v(x, t) = \phi(x) \tau(t) \quad (5.5)$$

onde $\phi(x)$ determina a forma espacial do movimento e $\tau(t)$ a variação temporal.

Substituindo a eq.(5.5) na eq.(5.4) e em seguida agrupando os termos nas variáveis x e t , obtém-se:

$$-\frac{\frac{d^2}{dt^2}\tau(t)}{\tau(t)} = \frac{EI}{m} \frac{\frac{d^4}{dx^4}\phi(x)}{\phi(x)} \quad (5.6)$$

Funções em variáveis distintas só podem ser iguais quando são constantes. Seja ω^2 esta constante, admitindo-se que a constante é sempre positiva, obtém-se as seguintes equações diferenciais desacopladas:

$$\frac{d^2}{dt^2}\tau(t) + \omega^2\tau(t) = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\phi(x) - \beta^4\phi(x) = 0 \quad (5.8)$$

onde $\beta^4 = \frac{km}{EI}$

As soluções das eq.(5.7) e eq.(5.8), no tempo e no espaço respectivamente, são dadas por:

$$\tau(t) = A_1 \text{ sen}(\omega t) + A_2 \text{ cos}(\omega t) \quad (5.9)$$

$$\phi(x) = B_1 \text{ sen}(\beta x) + B_2 \text{ cos}(\beta x) + B_3 \text{ senh}(\beta x) + B_4 \text{ cosh}(\beta x) \quad (5.10)$$

onde β pode ser escrito como

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{km}{EI}} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{m}{EI}} \quad (5.11)$$

Desta forma, tem-se:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad (5.12)$$

Nas eq.(5.9) e eq.(5.10), as constantes A_i são determinadas pelas condições iniciais e as constantes B_i pelas condições de contorno.

As condições de contorno para a viga engastada em uma extremidade ($x = 0$) e livre na outra extremidade ($x = L$) são:

$$i) \quad v(0, t) = 0, \forall t$$

$$ii) \quad \frac{\partial}{\partial x}v(0, t) = 0, \forall t$$

$$iii) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(L, t) = 0, \forall t$$

$$iv) \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3}v(L, t) = 0, \forall t$$

Impondo as condições de contorno obtém-se um sistema de quatro equações com quatro incógnitas, que pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\beta L) & -\operatorname{cos}(\beta L) & \operatorname{senh}(\beta L) & \operatorname{cosh}(\beta L) \\ -\operatorname{cos}(\beta L) & \operatorname{sen}(\beta L) & \operatorname{cosh}(\beta L) & \operatorname{senh}(\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Renomeando $\lambda = \beta L$, para facilitar a notação, a existência de soluções não triviais para as constantes B_i depende de valores particulares de λ , obtidos impondo-se que o sistema eq.(5.13) seja possível e determinado. Para que a matriz dos coeficientes $A[\lambda]$ seja singular os valores de λ devem ser raízes da seguinte equação hiperbólica:

$$\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = -1 \quad (5.14)$$

As dez primeiras soluções obtidas numericamente estão listadas na tab.(10) abaixo:

Tabela 10: Primeiras soluções da equação $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = -1$.

$\lambda_1 = 1.875$	$\lambda_6 = 17.27$
$\lambda_2 = 4.694$	$\lambda_7 = 20.42$
$\lambda_3 = 7.854$	$\lambda_8 = 23.56$
$\lambda_4 = 10.99$	$\lambda_9 = 26.70$
$\lambda_5 = 14.13$	$\lambda_{10} = 29.84$

Portanto, as infinitas frequências naturais não-amortecidas da viga podem ser calculadas através equação:

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad [Hz] \quad (5.15)$$

Neste trabalho, há particular interesse em identificar apenas as primeiras frequências do sistema, a tab.(11) lista as dez primeiras frequências naturais teóricas da viga considerada.

Como o sistema é indeterminado, logo é necessário arbitrar o valor para uma das constantes de integração para obter as demais constantes B_i resolvendo o sistema eq.(5.13).

Obtidos os valores B_i e retornando à eq.(5.10), a forma como a função $v(x, t)$ distribui-se no espaço é dada por $\phi(x)$:

$$\phi_n(x) = \cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x) - \sigma_n (\sinh(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)) \quad (5.16)$$

Tabela 11: Primeiras frequências naturais de uma viga engastada em [Hz].

$\omega_1 = 4.160$	$\omega_6 = 353.3$
$\omega_2 = 26.07$	$\omega_7 = 493.4$
$\omega_3 = 73.01$	$\omega_8 = 656.9$
$\omega_4 = 143.0$	$\omega_9 = 843.8$
$\omega_5 = 236.5$	$\omega_{10} = 1054$

onde σ_n é dado pela seguinte tabela:

Tabela 12: Coeficientes da forma dos modos teóricos.

$\sigma_1 = 0.7341$
$\sigma_2 = 1.018$
$\sigma_3 = 0.9992$
$\sigma_n = 1.000, \text{ para } n \geq 4$

5.3.1 Construção do modelo em Elementos Finitos

A viga apresentada acima foi modelada através do método dos elementos finitos utilizando 20 elementos, sendo que cada elemento possui dois nós e cada nó tem 2 g.d.l., conforme o esquema descrito na fig.(37).

Figura 37: Malha com 21 nós e 20 elementos de uma viga em flexão.

Como resultado da modelagem da viga por elementos finitos obteve-se as matrizes de massa (M) e rigidez (K) a partir das matrizes de massa e rigidez global com redução da ordem do modelo. O programa computacional utilizado para esta tarefa encontra-se em anexo.

Um dos métodos usuais para construção da matriz de amortecimento C é o proposto por Rayleigh. O método consiste em, uma vez estipulados os fatores de amortecimento ζ_i e ζ_j referentes a dois modos quaisquer do sistema, ajustar fatores de amortecimento para os outros modos.

Em outras palavras, o amortecimento de Rayleigh consiste em considerar C como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (5.17)$$

A matriz modal Φ diagonaliza simultaneamente as matrizes de massa e rigidez, e neste caso também a matriz de amortecimento. Multiplicando ambos os membros da eq.(5.17) pela matriz modal e sua transposta e usando as propriedades da ortogonalidade, é possível obter o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_i^2 \\ 1 & \omega_j^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\zeta_i \omega_i \\ 2\zeta_j \omega_j \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

A solução do sistema determina os escalares a_0 e a_1 :

$$a_0 = 2 \frac{\zeta_j \omega_j \omega_i^2 - \zeta_i \omega_i \omega_j^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad (5.19)$$

$$a_1 = 2 \frac{\zeta_i \omega_i - \zeta_j \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad (5.20)$$

onde ω_i e ω_j são as frequências naturais para os modos considerados. Mais detalhes sobre amortecimento de Rayleigh podem ser encontrados em Clough e Pensien [17].

Os coeficientes a_0 e a_1 e conseqüentemente a matriz de amortecimento do sistema pode ser determinada, considerando-se os seguintes dados para os fatores de amortecimento modal do primeiro e quinto modos:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \zeta_i = 0.03 \quad \text{para} \quad \omega_i = 4.161 \text{ [rad/s]} \\ j = 5 & \quad \zeta_j = 0.05 \quad \text{para} \quad \omega_j = 26.09 \text{ [rad/s]} \end{aligned}$$

A partir do modelo em elementos finitos gerado de acordo com as condições citadas acima, os parâmetros modais foram calculados e estão listados na tab.(13).

A fig.(38) exhibe o gráfico de comparação entre as dez primeiras frequências teóricas obtidas do modelo contínuo da viga engastada em flexão e as frequências obtidas através do modelo em elementos finitos de 20 g.d.l.

A análise da fig.(38) revela uma boa concordância entre o comportamento do sistema físico e o modelo criado por elementos finitos dentro da faixa de frequência considerada,

Tabela 13: Parâmetros modais obtidos por elementos finitos do modelo de 20 g.d.l.

i	ω_i [Hz]	ζ_i
1	4.161	0.0300
2	26.09	0.0100
3	73.13	0.0168
4	143.5	0.0307
5	237.7	0.0500
6	356.0	0.0744
7	498.9	0.1040
8	666.8	0.1389
9	860.6	0.1792
10	1081	0.2252

Figura 38: Comparação das dez primeiras frequências da viga engastada.

$[0 \ 300]$ Hz, que corresponde às cinco primeiras frequências naturais da viga. Os modos de vibrar da viga também podem ser comparados nas figuras 39-43. Verifica-se também em relação aos modos de vibrar que o resultado da modelagem do sistema contínuo através do método dos elementos finitos pode ser considerado satisfatório.

Para cada um dos modos referente ao modelo em elementos finitos apresentados nas figuras 39-43, o conjunto de pontos obtidos foi interpolado por uma função spline cúbica. A spline cúbica é uma função polinomial de grau 3 por partes, contínua, o que faz com que a curva interpolante não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós. Todos os modos apresentados têm norma euclidiana igual a 1.

Figura 39: Primeiro modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.

Figura 40: Segundo modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.

Figura 41: Terceiro modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.

Figura 42: Quarto modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.

Figura 43: Quinto modo de flexão do modelo de 20 g.d.l.

5.3.2 Identificação do sistema mecânico de 20 g.d.l. - caso 1

Como o modelo construído por elementos finitos ajusta-se bem ao modelo teórico da viga, a identificação dos parâmetros modais do sistema considerado será realizada via algoritmo ERA utilizando wavelets a partir dos sinais de resposta gerados pelo modelo em elementos finitos com 20 g.d.l.

A identificação estocástica foi realizada presumindo-se excitação aleatória em todas as massas, a partir de sinais de resposta coletados simultaneamente em dez massas, especificadas na fig.(44).

Figura 44: Pontos de medida da resposta do modelo de 20 g.d.l.

A fig.(44) ilustra esquematicamente os vinte elementos de massa do modelo, onde cada uma das massas recebeu um número 0 a 20 como índice. As acelerações das massas identificadas por números ímpares foram consideradas como resposta do sistema.

O sinal de resposta foi observado no período de 0 a 2 segundos com amostras coletadas

no intervalo de tempo $\Delta t = 10^{-5} s$. A frequência de corte utilizada para este modelo foi $f_c = 300 [Hz]$, levando-se em consideração a faixa de interesse. Para a análise estatística foi considerado o intervalo de amostragem para valores p de parâmetros de Markov independentes variando de 10 a 100.

A fig.(45) representa o diagrama de estabilização das frequências obtidas como resultado das identificações realizadas, a partir do sinal de resposta do sistema sem utilizar a transformada wavelet.

Figura 45: Estabilização de frequências naturais - modelo 20gdl, sem WT - caso 1.

Sabe-se que dentro da faixa de interesse há cinco modos estruturais, mas a simples observação do diagrama de estabilização apresentado na fig.(45) revela que somente estabilizam duas frequências naturais correspondentes ao terceiro e quinto modos. Desta forma apenas os parâmetros modais destes dois modos podem ser identificados se o sinal de resposta do sistema for utilizado no algoritmo sem tratamento adequado para cada faixa de frequência específica.

Assim como ocorreu com o modelo de 4 g.d.l., sem utilizar um filtro adequado para sinais com altos índices de ruído alguns modos podem ser descartados pelo algoritmo visto que eles não apresentam a propriedade de estabilização inerente aos modos estruturais.

Para identificar todos os modos presente na faixa de interesse, é imprescindível a aplicação da transformada wavelet no sinal de resposta do sistema afim de estratificar o processo de identificação por faixas de frequência. As fig.(46) e fig.(47) mostram os diagramas de estabilização de frequências referentes ao resultado do processo de identificação utilizando a wavelet-mãe db5, nível 8 e 4 respectivamente, para decomposição do sinal

em faixas de frequências.

Figura 46: Estabilização de frequências naturais do modelo 20gdl, com WT db5 nível 8-caso 1.

Figura 47: Estabilidade de frequências naturais do modelo 20gdl, com WT db5 nível 4-caso 1.

Para as frequências intermediárias foi necessário a aplicação da WT db5 com nível 4. Apesar de que a última frequência pode ser identificada sem aplicação da transformada wavelet, a aplicação da WT db5 com nível 4 produz uma estimativa com menor erro em relação ao fator de amortecimento correspondente e reduz o tempo gasto no processo.

No diagrama de estabilização apresentado na fig.(46) é possível observar visualmente a estabilização das duas primeiras frequências, enquanto a fig.(47) mostra a evidente estabilização das frequências relativas ao terceiro e quinto modos do sistema. No entanto, é impossível identificar a frequência corresponde ao quarto modo através do algoritmo, visto que não há estabilização das frequências relativas a este modo.

Nestas condições, os parâmetros modais dentro da faixa de interesse foram identificados. A tab.(14) mostra os resultados obtidos na identificação realizada de acordo com os parâmetros estabelecidos, onde estão descritos: frequências naturais, fatores de amortecimento, seus respectivos erros relativos em relação aos parâmetros obtidos pelo modelo em elementos finitos, o nível de wavelet db5 utilizado e o parâmetro p utilizado em cada identificação.

Tabela 14: Resultado da identificação simultânea do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.

Modos	nível wt	p	Parâmetros Estimados			
			Frequência Natural [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
1	8	76	4.019	3.412	0.0318	6.000
2	8	74	27.41	5.059	0.0107	7.000
3	4	80	73.25	0.1641	0.0146	13.50
4	-	-	-	-	-	-
5	4	62	239.2	0.6310	0.0459	8.200

Os valores estimados para as frequências naturais apresentam erros relativos inferiores a 5%, e o percentual de erro cometido na identificação dos fatores de amortecimento não ultrapassa 14%.

Os índices de erro cometidos na identificação podem ser considerados satisfatórios, visto que o amortecimento da estrutura analisada é extremamente baixo. Este fato sempre dificulta a identificação dos fatores de amortecimento mesmo quando se considera a entrada utilizando métodos determinísticos para identificação de sistemas.

Nas figuras 48 a 51, os modos identificados são comparados aos modos de vibrar obtidos a partir do modelo em elementos finitos.

Para obter a forma de cada um dos modos identificados, o conjunto de pontos obtidos foi ajustado por um polinômio de grau específico, utilizando o método dos mínimos quadrados. Para o primeiro modo foi utilizado um polinômio de grau 2, grau 3 para o segundo modo; assim sucessivamente as formas de todos os modos considerados foram obtidas.

Figura 48: Primeiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.

Figura 49: Segundo modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.

Figura 50: Terceiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.

Figura 51: Quinto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 1.

Há um perfeito alinhamento entre o primeiro modo identificado e o teórico. Os outros modos identificados apresentam a mesma forma dos respectivos modos teóricos, porém

constata-se pequena variação de amplitude.

Os resultados da identificação modal do modelo de 20 g.d.l. apresentam boa concordância quando comparados aos parâmetros teóricos da viga em flexão. O problema da identificação realizada reside na perda de um dos modos, que não pode ser identificado por não apresentar o grau de estabilização necessário.

Diante deste fato, faz-se necessária a investigação do modelo com número maior de pontos de captação de resposta.

5.3.3 Identificação do sistema mecânico de 20 g.d.l. - caso 2

Para realizar a identificação presume-se que um ruído branco age como força externa em cada uma das massas, e que as respostas do sistema são as acelerações coletadas simultaneamente em todos os pontos da estrutura.

Os parâmetros de identificação especificados para o caso 1 foram mantidos, isto é: o sinal de resposta foi observado no período de 0 a 2 segundos com amostras coletadas no intervalo de tempo $\Delta t = 10^{-5}s$; a frequência de corte utilizada foi $f_c = 300 [Hz]$; o intervalo de amostragem para valores p de parâmetros de Markov independentes variou de 10 a 100.

A fig.(52) representa o diagrama de estabilização das frequências obtidas como resultado das identificações realizadas, a partir do sinal de resposta do sistema utilizando a wavelet-mãe db5, nível 8. Com objetivo específico de identificar a frequência mais baixa.

Figura 52: Estabilização de frequências naturais modelo 20gdl, com WT db5 nível 8 - caso 2.

Há certa instabilidade da primeira frequência, mas o algoritmo é capaz de ajustar uma reta e identificar os parâmetros do primeiro modo com grau de confiabilidade satisfatório. É possível também observar a estabilização das frequências relativas ao segundo e terceiro modos. No entanto resultados melhores podem ser obtidos com outro nível de wavelets.

A aplicação da WT db5 com nível 4 no sinal de resposta produz o diagrama de estabilização para as frequências mais altas apresentado na fig.(53).

Figura 53: Estabilização de frequências naturais modelo 20gdl, com WT db5 nível 4 - caso 2.

Há nítida estabilização de todas as frequências, exceto a primeira, no diagrama apresentado na fig.(53). É importante ressaltar que a identificação dos parâmetros modais referentes ao segundo e terceiro modos apresentam melhores resultados quando a WT nível 4 é utilizada, principalmente em relação ao fator de amortecimento correspondente.

A tab.(15) contém os parâmetros modais obtidos no processo de identificação realizado de acordo com os parâmetros estabelecidos, onde estão descritos: frequências naturais, fatores de amortecimento, seus respectivos erros relativos em relação aos parâmetros obtidos pelo modelo em elementos finitos, o nível de wavelet db5 utilizado e o parâmetro p utilizado em cada identificação.

As frequências naturais foram identificadas com erros relativos inferiores a 1%, exceto a primeira. Conforme esperado pela análise gráfica preliminar do diagrama de estabilização apresentado na fig.(52), a primeira frequência foi identificada com alto índice de erro.

Tabela 15: Resultado da identificação simultânea do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

Modos	nível wt	p	Parâmetros Estimados			
			Frequência Natural [Hz]	ϵ_1 (%)	Fator de Amortecimento	ϵ_2 (%)
1	8	84	4.716	13.33	0.0717	139.0
2	4	86	26.07	0.0766	0.0112	1.200
3	4	74	73.19	0.0820	0.0132	21.80
4	4	90	143.6	0.0696	0.0281	8.528
5	4	34	235.9	0.7572	0.0622	24.40

Houve oscilação em relação aos erros cometidos na identificação dos fatores de amortecimento. No entanto, para o segundo e quarto modos houve melhora significativa nos índices de erro comparando-se com a identificação do caso 1 apresentada na tab.(14).

Nas figuras 54 a 58, os modos identificados são comparados aos modos de vibrar obtidos a partir do modelo em elementos finitos.

Figura 54: Primeiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

Os resultados da identificação modal do modelo de 20 g.d.l. com respostas em todos os pontos apresentam boa concordância quando comparados aos parâmetros teóricos da viga em flexão, exceto para o primeiro modo.

Figura 55: Segundo modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

Figura 56: Terceiro modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

Figura 57: Quarto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

Figura 58: Quinto modo identificado do modelo de 20 g.d.l. - caso 2.

O caso 1 estudado fornece melhores resultados para a identificação dos parâmetros modais relativos aos primeiro, terceiro e quinto modos. Por outro lado, o caso 2 contribui para a melhor identificação dos segundo e quarto modos. Assim, a união dos melhores resultados provenientes do caso 1 e caso 2 resulta em uma identificação qualitativamente superior, sem perdas.

Devido aos baixos índices de erro apresentados para as frequências naturais é possível concluir a eficácia do método na estimativa desses parâmetros. Por outro lado o percentual de erro em relação aos fatores de amortecimento são aceitáveis considerando que o amortecimento da estrutura analisada é extremamente baixo, o que sempre dificulta a identificação dos mesmos mesmo para os métodos determinísticos.

Assim como ocorreu no modelo de 4 g.d.l. (caso 2), a aplicação da transformada wavelet foi fundamental no processo de identificação. Antes de iniciar o processo de identificação para frequências baixas ao sinal de resposta foi aplicada a transformada wavelet db5 nível 8, o que reduziu o número de pontos da amostra além de permitir uma estimativa mais precisa das duas frequências mais baixas.

6 Conclusões

O procedimento proposto para a análise modal operacional baseado na combinação do algoritmo NEXT/ERA com a Transformada Wavelet é um método eficiente na identificação de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar de sistemas mecânicos. A principal característica do método é sua maior capacidade de processar sinais contaminados por ruído.

Os parâmetros modais foram identificados a partir da matriz Hankel, composta por estimativas das funções de autocorrelação e correlação cruzada apenas com os dados de saída do sistema, associado ao algoritmo ERA.

A utilização das funções de correlação tornou possível a identificação sem o conhecimento da excitação do sistema e os parâmetros modais foram identificados grupo a grupo para compor a identificação completa.

Programas computacionais foram desenvolvidos para realizar a identificação estocástica. Dentre eles foi necessária a implementação de um algoritmo para selecionar sistematicamente as características estruturais de sistemas.

O processo de identificação tornou-se automatizado pela implementação da análise estatística aos resultados obtidos para diferentes modelos em espaço de estado correspondente a várias ordens, considerando-se o efeito dos distúrbios.

A metodologia proposta apresentou também bom desempenho no tratamento do ruído no sinal de resposta permitindo sua aplicação à sinais com ruído moderado sem comprometimento da qualidade da identificação.

A técnica de identificação é extremamente sensível ao número de pontos do sinal de resposta. De fato, a identificação estocástica requer um grande número de instantes de tempo observados. A utilização de amostras com número de pontos insuficientes acarreta perdas de frequências naturais principalmente das frequências mais baixas.

Em virtude da grande quantidade de dados necessários e a dificuldade na identificação de baixas frequências para realizar a identificação estocástica, a aplicação da Transformada Wavelet ao sinal de resposta permitiu o desenvolvimento de um procedimento único de identificação por faixas de frequência. Assim, WT foi fundamental para a via-

bilidade da identificação possibilitando a compressão das informações contidas em uma longa sequência de dados em seqüências menores de acordo com a faixa de freqüência analisada.

A aplicação da WT também é imprescindível para casos onde a aquisição do sinal de resposta não pude ser coletada simultaneamente. Nestes casos é necessário a escolha de pontos de referência onde a distribuição de energia dos modos do sistema seja equilibrada, para uma melhor estimativa dos parâmetros modais. Como a forma não pode ser conhecida a priori, propõe-se a realização de ensaios considerando o maior número de referências possível e em seguida considerar como resultado final do processo de identificação a média aritmética dos resultados parciais.

As medidas de aceleração foram tomadas diretamente no domínio do tempo, sem a necessidade de realizar transformações para outros domínios. Com esta técnica não há necessidade de uso de analisadores espectrais, mas de placas de aquisição e conversão A/D acopladas diretamente a um computador.

A metodologia proposta obteve sucesso em três modelos simulados. Em todos os casos foi possível identificar com grau de confiança aceitável todos os parâmetros modais dentro da faixa de freqüência pré-estabelecida, inclusive para modelos com alta densidade modal, baixas freqüências e amortecimento não-proporcional.

A técnica também foi implementada para sistemas determinísticos, isto é quanto a entrada é conhecida, obtendo-se os parâmetros modais com alta eficiência.

Para trabalhos futuros pretende-se aplicar a técnica desenvolvida a dados experimentais de estruturas excitadas aleatoriamente. Deve-se estudar a implementação da técnica para estruturas excitadas por ruídos diferentes do ruído branco. Esforços também devem ser feitos no sentido de estudar os efeitos de não-linearidades nos resultados.

Referências Bibliográficas

- [1] ABDELGHANI, M.; BASSEVILLE, M.; BENVENISTE, A. (1997). In-operation damage monitoring and diagnostics of vibrating structures, with applications to offshore structures and rotating machinery. *Proceedings of IMAC 15*, Orlando, FL, USA, p.1815-1821.
- [2] ABDELGHANI, M.; GOURSAT, M.; BIOLCHINI, T. (1999). On-line modal monitoring of aircraft structures under unknown excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.13, n.6, p.839-853.
- [3] ABDEL-GHAFFAR, A.M.; HOUSNER, G.W. (1978). Ambient vibration test of suspension bridge. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v.104, p.983-999.
- [4] AKAIKE, H. (1974). Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.AC-19, n.6, p.667-674, december.
- [5] AOKI, M. (1990). *State-space modeling of time series*. New York: Springer-Verlag.
- [6] ASMUSSEN, J.C.; BRINCKER, R. (1996). Estimation of correlation functions by random decrement. *Proceedings of the ISM A21 - Noise and Vibration Engineering*, v.2, p.1215-1224.
- [7] ASMUSSEN, J.C.; BRINCKER, R.; IBRAHIM, S.R. (1999). Statistical theory of the vector random decrement technique. *Journal of Sound and Vibration*, v.226, n.2, p.329-344.
- [8] BASSEVILLE, M. et al. (1993). Damage monitoring in vibration mechanics: issues in diagnostics and predictive maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.7, n.3, p.401-423.
- [9] _____ (2001). Output-only subspace-based structural identification: from theory to industrial testing practice. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v.123, p.668-676.
- [10] BENDAT, J.S.; PIERSON, A.G. (1980). *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. New York: John Wiley.

-
- [11] _____ (1986). *Random Data - Analysis and Measurement Procedures*. New York: John Wiley.
- [12] BENVENISTE, A.; FUCHS, J.J. (1985). Single sample modal identification of a nonstationary stochastic process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30, p.66-74.
- [13] BROWN, D.L. et al. (1979). Parameter estimation techniques for modal analysis. *S.A.E.*, paper 790221, v.88, p.828-846.
- [14] CARNE, T.G. et al. (1988). Modal testing an immense flexible structure using natural and artificial excitation. *Modal Analysis: The Society of Experimental Mechanics*, p.117-122, October.
- [15] CHUI, C.K., CHEN, G. (1989). *Linear systems and optimal control*. Hemsbach: Springer-Verlag, 155 p.
- [16] CLARKSON, B.L.; MERCER, C.A. (1965). Use of cross-correlation in studying the response of lightly damped structures to random forces. *AIAA Journal*, v.3, n.12, p.2287-2291.
- [17] CLOUCH, R.W.; PENZIEN, J. (1993). *Dynamics of structures*. 2.ed. Tokyo: McGraw-Hill, 634 p.
- [18] COLE, H.A. (1968). On-the-line analysis of random vibrations. *AIAA Paper*, n.68, p.288.
- [19] CONTE, J.P.; PISTER, K.S.; MAHIN, S.A. (1992). Nonstationary ARMA modeling of seismic motions. *Soil dynamics and earthquake engineering*, v.11, p.411-426.
- [20] COOPER, J.E. (1989). Comparison of same time domain system identification techniques using approximate data correlations. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v.4, p.51-57.
- [21] CRAWFORD, R.; WARD, H.S. (1964). Determination of the natural periods of buildings. *Bulletin of the Seismological Society of America*, n.54, p.1743-1756.
- [22] DAUBECHIES, I. (1992). Ten lectures on wavelets. *Proceeding of Regional Conference Series on Applied Mathematics*.

-
- [23] DESFORGES, M.J.; COOPER, J.E.; WRIGHT, J.R. (1995). Spectral and modal parameter estimation from output-only measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.9, n.2, p.169-186.
 - [24] EWINS, D.J. (1984). *Modal testing: theory and practice*. Chichester: John Wiley & Sons, 269 p.
 - [25] FASSOIS, S.D., EMAN, K.F., WU, S.M. (1990). A linear time domain method for structural dynamics identification. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.112, p.98-106.
 - [26] FREUNDINGER, L.G. et al. (1998). Correlation filtering of modal dynamics using the laplace wavelet. *Proceedings of IMAC 16*, p.868-877.
 - [27] GOLUB, G.H.; LOAN, C.F. (1989). *Matrix computations*. 2.ed, Baltimore: Johns Hopkins University Press, 642 p.
 - [28] GOUPILLAUD, P.; GROSSMAN, A.; MORLET, J. (1985). Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, n.23, pp.85-102.
 - [29] GUILLAUME, P.; HERMANS, L.; VAN DER AUWERAER, H. (1999). Maximum likelihood identification of modal parameters from operational data. *Proceedings of IMAC 17*, Kissimmee, FL, USA, p.1887-1893.
 - [30] HERMANS, L.; AUWERAER, V.D. (1999). Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.13, n.2, p.193-216.
 - [31] HERMANS, L.; AUWERAER, V.D.; MEVEL, L. (1999). Health monitoring and detection of a fatigue problem of a sports car. *Proceedings of IMAC 17*, Kissimmee, FL, USA, p.42-48.
 - [32] HO, B.; KALMAN, R. (1966). Efficient construction of linear state variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, v.14, p.545-548.
 - [33] HOEN, C.; MOAN, T.; REMSETH, S. (1993). System identification of structures exposed to environmental loads. *Proceedings of 2nd European Conference on Structural Dynamics*, Rotterdam, Netherlands, p.835-844.
 - [34] HU, S.; CHEN, Y.B.; WU, S.M. (1989). Multi-output parameter identification by vector time series modeling. *Proceedings of the 12th biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, New York, p.259-265.

-
- [35] IBRAHIM, S.R. (1977). Random decrement technique for modal identification of structures. *Journal of spacecraft and rockets*, v.14, n.11, p.696-700.
 - [36] _____ (1985). Computation of normal modes from identified complex modes. *AIAA Journal*, v.21, n.3, p.446-451.
 - [37] IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. (1973). A time domain modal vibration test technique. *Shock and vibration bulletin*, v.43, n.4, p.21-37.
 - [38] _____ (1976). The experimental determination of vibration parameter from time responses, *The shock and vibration bulletin*, v.46, p.187-195.
 - [39] _____ (1977). A method for the direct identification of vibration parameters from the free response, *The shock and vibration bulletin*, v.47, p.183-198.
 - [40] INMAN, D.J. (1989). *Vibration with control measurements and stability*. New Jersey: Prentice Hall.
 - [41] JAMES, G.H.; CARNE, T.G.; VEERS, P.S. (1991). Damping measurement using operational data. *Proceedings of the 10th ASME wind energy symposium*. Houston.
 - [42] JAMES III, G.H.; CARNE, T.G.; LAUFFER, J.P. (1995). The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures. *Modal Analysis: the international journal of analytical and experimental modal analysis*, v.10, n.4, p.260-277, oct.
 - [43] JUANG, J. (1994). *Applied system identification*. New Jersey: Prentice Hall, 394p.
 - [44] JUANG, J-N.; PAPPA, R.S. (1985). An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance*, v.8, n.5, p.620-627, sept-oct.
 - [45] JUANG, J-N.; COOPER, J.E.; WRIGHT, J.R. (1988). An eigensystem realization algorithm using data correlation *Journal of Control Theory and Adv Tech*, v.4, n.1, p.5-14.
 - [46] JUANG, J-N.; PHAN, M. (1992). Identification of system, observer and controller from closed-loop experimental data *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, South Carolina, paper n.92-4620.
 - [47] _____ (1994). Linear system identification via backward-time observer models. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v.17, n.3, p.505-512.

-
- [48] JUANG, J.-N.; PHAN, M.; HORTA, L.G.; LONGMAN, R.W. (1993). Identification of observer/Kalman filter Markov parameters: theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v.16, n.2, p.320-329.
 - [49] KALMAN, R.E. (1965). Algebraic structure of linear dynamical systems, I. The module of Σ . *Proc. Natl. Acad. Sci.*, v.54, p.1503-1508.
 - [50] _____ (1965). Irreducible realizations and the degree of a rational matrix. *Journal SIAM*, v.13, p.520-544.
 - [51] _____ (1967). Algebraic aspects of the theory of dynamical systems. In: *Differential equations and dynamical systems*. New York: Academic Press. p.133-146.
 - [52] KALMAN, R.E.; FALB, P.L.; ARBIB, M.A. (1969). *Topics in Mathematical system theory*. New York: McGraw-Hill.
 - [53] KIM, H.M.; VANHORN, D.A.; DOIRON, H.H. (1994). Free-Decay time-domain modal identification for large space structures. *Journal of guidance, control and dynamics*, v.17, n.3, p.513-519.
 - [54] KUNG, S.Y. (1978). A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. *Proceedings of the 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, p.705-714, Asilomar, CA, USA.
 - [55] LAUFFER, J.P.; CARNE, T.G.; NORD, A.R. (1985). Mini-modal testing of wind turbine using novel excitation. *Proceedings of the 3rd international modal analysis conference*, Orlando.
 - [56] LIU, B.; LING, S.F. (1999). On the selection of informative wavelets for machinery diagnosis. *Mechanical System and Signal Processing*, v.13, p.145-162.
 - [57] LJUNG, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*, 2.ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall.
 - [58] MAIA, N.M.M. et al (1997). *Experimental Modal Analysis*. Chichester: John Wiley & Sons, 468 p.
 - [59] MALLAT, S.G. (1987). A compact multiresolution representation: the wavelet model. *Proceedings of IEEE Workshop Computation Vision*, Miami.
 - [60] MALLAT, S.G.; ZHANG, Z. (1993). Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v.41, n.12, p.3397-3415.

-
- [61] MCLEMORE, V.R.; HART, G.C.; STUBBS, I.R. (1971). Ambient vibration of two suspension bridge. *Proceeding of American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division*, v.97, p.2567-2582.
 - [62] MEYER, Y. (1993). *Wavelets: alghorithms and applications*. Philadelphia: SIAM.
 - [63] MEVEL, L. et al. (1999). On the application of a subspace-based fault detection method. *Proceedings of IMAC 17*, Kissimmee, FL, USA, p.35-41.
 - [64] MITCHELL, L.D. (1998). Increasing the sensitivity of the modal assurance criteria (MAC) tp small mode shape changes: the IMAC. *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, p.64-69.
 - [65] PAPPA, R.S.; JUANG, J-N. (1988). Same experiences with the eigensystem realization algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, v.120 , n.1, p.30-34, jan.
 - [66] PAPPA, R.S.; ELLIOTT, K.B.; SHENCK, A. (1993). Consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guindance, Control, and Dynamics*, v.16, n.5, p.852-858.
 - [67] PEETERS, B.; ROECK, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.13, n.6, p.855-878.
 - [68] _____ (1999). Stochastic system identification: uncertainty of the estimaded modal parameters. *Proceedings of IMAC 17*, Kissimmee, FL, USA, p.231-237.
 - [69] _____ (2001). Stochastic system identification for operacional modal analysis: a review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.123, n.5, p.659-667.
 - [70] PHAN, M. et al. (1992). Linear system identification via an asymptotically stable observer. *NASA technical paper 3164*.
 - [71] PREVOSTO, M. et al. (1991). State-space formulation: a solution to modal parameter estimation. *Journal of Sound and Vibration*, v.148, p.329-342.
 - [72] PRONY, R. (1795). Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides elastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alcool, a différents températures. *Journal de l'école polytechnique*. Paris, v.1, an.III, p.24-76.

-
- [73] RIOUL, O.; VETTERLI, M. (1991) Wavelets and signal processing. *IEEE signal Processing Magazine*, v.8, n.4, p.14-35.
- [74] TSUNAKI, R. H. (1999). *Identificação automatizada de modelos dinâmicos no espaço de estado*. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 143 p.
- [75] VANDIVER, J.K. et al. (1982). A mathematical basis for the random decrement vibration signature analysis technique. *Journal of Mechanical Design*, v.104, p.307-313.
- [76] VAN OVERSCHEE, P.; DE MOOR, B. (1996). *Subspace identification for linear systems: theory-implementation-applications*. Dordrecht: Kluwer, 254 p.
- [77] VIBERG, M. (1995). Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, v.31, n.12, p.1835-1851, december.
- [78] VETTERLI, M.; KOVACEVIC, J. (1995). *Wavelets and subband coding*. New Jersey: Prentice Hall, 488 p.
- [79] VOLD, H. et al. (1982). A multi-input modal estimation algorithm for minicomputers. *S.A.E. paper 820194*, v.10, p.815-821.

A Programa Computacional para Construir um Modelo em Elementos Finitos

O programa foi desenvolvido em ambiente MatLab®.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%                               %%
%%                               %%
%%                               %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all close all clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%                               %%
%%                               %%
%%                               %%
%%                               %%
%%                               %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% dados %%

b=0.025;          %base da seccao transversal

h=0.005;          %altura da seccao transversal

L=1;              %comprimento da viga

ro=7800;          %densidade do aluminio

E=207000000000;  %modulo de Young

A=b*h;           %area da seccao transversal

I=(b*(h ^ 3))/12;

n=20;             %numero de elementos

l=L/n;           %comprimento de cada elemento

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
% Solucao Analítica
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% Os dez primeiros auto-valores do problema

```

```

lambdaL = [ 1.8751 4.6941 7.8548 10.9955 14.1372 ...
            17.2788 20.4203 23.5619 26.7035 29.8451];

```

```

wc(1) = (((lambdaL(1)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(2) = (((lambdaL(2)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(3) = (((lambdaL(3)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(4) = (((lambdaL(4)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(5) = (((lambdaL(5)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(6) = (((lambdaL(6)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(7) = (((lambdaL(7)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(8) = (((lambdaL(8)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(9) = (((lambdaL(9)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));
wc(10) = (((lambdaL(10)*l)^2)/l^2)*sqrt((E*I)/(A*ro));

```

```

wc;

```

```

for r=1:5

```

```

    K(r) = ( sinh(lambdaL(r)) - sin(lambdaL(r)) )/...
           ( cosh(lambdaL(r)) + cos(lambdaL(r)) );

```

```

end

```

```

K;

```

```

% Modos de Vibrar

```

```

x=linspace(0,0.05,n+1);

```

```

V1 = (1/2)*( -K(1) * sinh((lambdaL(1)/l)*x) + cosh((lambdaL(1)/l)*x) + ...
           K(1) * sin((lambdaL(1)/l)*x) - cos((lambdaL(1)/l)*x) );

```

```

V2 = (1/2)*( -K(2) * sinh((lambdaL(2)/l)*x) + cosh((lambdaL(2)/l)*x) + ...
           K(2) * sin((lambdaL(2)/l)*x) - cos((lambdaL(2)/l)*x) );

```

```

V3 = (1/2)*( -K(3) * sinh((lambdaL(3)/l)*x) + cosh((lambdaL(3)/l)*x) + ...
           K(3) * sin((lambdaL(3)/l)*x) - cos((lambdaL(3)/l)*x) );

```

```

V4 = (1/2)*( -K(4) * sinh((lambdaL(4)/l)*x) + cosh((lambdaL(4)/l)*x) + ...
           K(4) * sin((lambdaL(4)/l)*x) - cos((lambdaL(4)/l)*x) );

```

```

V5 = (1/2)*( -K(5) * sinh((lambdaL(5)/l)*x) + cosh((lambdaL(5)/l)*x) + ...
           K(5) * sin((lambdaL(5)/l)*x) - cos((lambdaL(5)/l)*x) );

```

```
V1=V1./norm(V1); V1=V1.'; V2=V2./norm(V2); V2=V2.';
V3=V3./norm(V3); V3=V3.'; V4=V4./norm(V4); V4=V4.';
V5=V5./norm(V5); V5=V5.';
```

```
V=[V1 V2 V3 V4 V5];
```

```
% figure(1)
% subplot(3,3,1)
% plot(x,V1)
% title('Primeiro Modo de Vibrar')
% xlabel('x')
% ylabel('V1(x)')
%
% subplot(3,3,3)
% plot(x,V2)
% title('Segundo Modo de Vibrar')
% xlabel('x')
% ylabel('V2(x)')
%
% subplot(3,3,5)
% plot(x,V3)
% title('Terceiro Modo de Vibrar')
% xlabel('x')
% ylabel('V3(x)')
%
% subplot(3,3,7)
% plot(x,V4)
% title('Quarto Modo de Vibrar')
% xlabel('x')
% ylabel('V4(x)')
%
% subplot(3,3,9)
% plot(x,V5)
% title('Quinto Modo de Vibrar')
% xlabel('x')
% ylabel('V5(x)')
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%                                                                 %%
%%                               Solucao por Elementos Finitos    %%
%%                                                                 %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% matriz de massa local do primeiro elemento e1 %%
```

```
me1=(ro*A*1)/420*[zeros(1,4); zeros(1,4);...
```

```
%% matriz de massa local me dos elementos e2,e3,e4,e5,... %%
```

```
me= (ro*A*1)/420*[156 22*1 54 -13*1; ...
22*1 -4*(1^2) 13*1 -3*(1^2); ...
54 13*1 156 -22*1; ...
-13*1 -3*(1^2) -22*1 4*(1^2)];
```



```

%% Montagem da matriz de massa global %%

Mg=zeros(2*n+2);

v1=1:n-1;

v2=2+v1; v3=2+v2; v4=2+v3; v5=2+v4;
v6=2+v5; v7=2+v6;
v8=2+v7; v9=2+v8; v10=2+v9;
v11=2+v10; v12=2+v11; v13=2+v12;
v14=2+v13; v15=2+v14; v16=2+v15;
v17=2+v16; v18=2+v17; v19=2+v18;
v20=2+v19;

v = [v1; v2; v3; v4; v5; v6; v7; v8; v9; ...
      v10; v11; v12; v13; v14; v15; v16; ...
      v17; v18; v19; v20];

for k=1:n
    for i=1:4
        for j=1:4
            ii=v(k,i);
            jj=v(k,j);
            if k==1
                Mg(ii,jj)=Mg(ii,jj)+me1(i,j);
            else
                Mg(ii,jj)=Mg(ii,jj)+me(i,j);
            end
        end
    end
end

Mg=Mg(3:2*n+2,3:2*n+2);

%% matriz de rigidez local do primeiro elemento e1 %%

ke1=(E*I)/(l^3)*[zeros(1,4); zeros(1,4); 0 0 12 -6*1; ...
                 0 0 -6*1 4*(l^2)];

%% matriz de rigidez local me dos elementos e2,e3,e4,e5 %%

ke= (E*I)/(l^3)*[12 6*1 -12 6*1; ...
                 6*1 4*(l^2) -6*1 2*(l^2); ...
                 -12 -6*1 12 -6*1; ...
                 6*1 2*(l^2) -6*1 4*(l^2)];

```

```

%% Montagem da matriz de rigidez global %%

Kg=zeros(2*n+2);

for k=1:n
    for i=1:4
        for j=1:4
            ii=v(k,i);
            jj=v(k,j);
            if k==1
                Kg(ii,jj)=Kg(ii,jj)+kc1(i,j);
            else
                Kg(ii,jj)=Kg(ii,jj)+ke(i,j);
            end
        end
    end
end

Kg=Kg(3:2*n+2,3:2*n+2);

%% Reducao da Ordem do Modelo %%

for i=1:n
    Mg1(i,:)=Mg(2*i-1,:);
    Mg1(i+n,:)=Mg(2*i,:);
    Kg1(i,:)=Kg(2*i-1,:);
    Kg1(i+n,:)=Kg(2*i,:);
end

for i=1:n
    Mg(:,i)=Mg1(:,2*i-1);
    Mg(:,i+n)=Mg1(:,2*i);
    Kg(:,i)=Kg1(:,2*i-1);
    Kg(:,i+n)=Kg1(:,2*i);
end

M11=Mg(1:n,1:n); M12=Mg(1:n,n+1:2*n); M21=Mg(n+1:2*n,1:n);
M22=Mg(n+1:2*n,n+1:2*n);

K11=Kg(1:n,1:n); K12=Kg(1:n,n+1:2*n); K21=Kg(n+1:2*n,1:n);
K22=Kg(n+1:2*n,n+1:2*n);

Q=[eye(n);-inv(K22)*K21];

MASSA=Q.'*Mg*Q; RIG=Q.'*Kg*Q;

A = inv(MASSA)*RIG; [AVT,AVA]=eig(A);

```

MASSA=AVT.'*MASSA*AVT; RIG=AVT.'*RIG*AVT;

Resolucao do Problema de Autovalor-Autovetor	
--	--

```
AVT=flipplr(AVT);
```

```
for r=1:n
    w(r)=sqrt(abs(LVA(r,r))); %com reducao
end
```

```
we=sort(w);
we=we.';
%% modos de flexao %%
```

```
for i=1:n
    fi(:,i)=AVT(:,i)./norm(AVT(:,i));
end
```

```
fi=zeros(1,20); fi;
```

%% interpolação %%

```
%a1=linspace(0,n,n)';  
a1=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20]';  
xi=linspace(0,n,100);
```

```
fi1=interp1(a1,fi(:,1),xi,'spline');
fi2=interp1(a1,fi(:,2),xi,'spline');
fi3=interp1(a1,fi(:,3),xi,'spline');
fi4=interp1(a1,fi(:,4),xi,'spline');
fi5=interp1(a1,fi(:,5),xi,'spline');
```

% % comparacao das frequencias naturais dos dois modelos %%

```

wc=wc/(2*pi); %conversao para Hz
we=we/(2*pi); %conversao para Hz

```

```
plot(wc,wc,':',wc,we(1:10),'* red')
title('Gráfico das Frequências - contínuo x elementos finitos')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('wc x wc','wc x we')
```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%      CALCULO DOS PARAMETROS MODAIS
%%
%%      CONVERSAO PARA ESPACO DE ESTADO
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% DADOS %%%

dzetai=0.03; dzetaf=0.05; wi=26.1465347687; wf=1493.8192862786;

a0=2*((dzetaf*wf*(wi^2)-dzetai*wi*(wf^2))/(wi^2-wf^2));
a1=2*((dzetai*wi-dzetaf*wf)/(wi^2-wf^2));

AMORT=a0*MASSA + a1*RIG;

n=length(MASSA)    % graus de liberdade
N=2*n;             % ordem do
modelo
r=20;    % quantidade de entradas do sistema
m=20;    % quantidade de saidas do sistema

entradas=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];    %localizacao das entradas
saidas=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];    %localizacao das saidas

%%% MONTAGEM DAS MATRIZES EM ESPACO DE ESTADO %%%

INFLENTR=zeros(n,r); %matriz de localização dos pontos de entrada

a=1; %contador
for t=1:r
    for s=a:n
        if entradas(s)==1
            INFLENTR(s,t)=1;
            a=1+s;
            break
        end
    end
end

INFLSAIDA=zeros(m,n); %matriz de localizacao dos pontos de saida (aceleracao)

a=1; %contador
for t=1:m
    for s=a:n

```

```

        if saidas(s)==1
            INFLSAIDA(t,s)=1;
            a=1+s;
            break
        end
    end
end

A=[zeros(n) eye(n); -inv(MASSA)*RIG -inv(MASSA)*AMORT];
B=[zeros(n,r); inv(MASSA)*INFLENTRE]; C=[-INFLSAIDA*inv(MASSA)*RIG
-INFLSAIDA*inv(MASSA)*AMORT]; D=[INFLSAIDA*inv(MASSA)*INFLENTRE];

[ave,ava]=cig(A);

for t=1:N/2
    lambda(t)=ava((2*t)-1,(2*t)-1);
end

lambda=fliplr(lambda); ave=fliplr(ave);

for s=1:n
    wd(s)=abs(imag(lambda(s))); %frequencia natural amortecida
    amort(s)=-real(lambda(s))/(abs(lambda(s)));
    w(s)=wd(s)/sqrt(1-(amort(s))^2);
end

ave(n+1:end,:)=[];
ave(:,2:2:end)=[];
ABS=abs(ave); MAX=max(ABS); for j=1:n
    b=1;
    for i=1:n
        if ABS(i,j)<MAX(j)
            b=b+1;
        else break
        end
    end
    modo(:,j)=ave(:,j)/(ave(b,j)); %normalizacao
end

for i=1:n
    if modo(1,i)<0
        modo(:,i)=-modo(:,i);
    end
    modo(:,i)=modo(:,i)/norm(modo(:,i),1);
    modo=real(modo);
end

```