UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Carlos De Marqui Júnior

DEDALUS - Acervo - EESC

ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DE UM
CONTROLADOR PARA SUPRESSÃO DE *FLUTTER*

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço 29/09/04
Ass.

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Titular Eduardo Morgado Belo

São Carlos
2004

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CARLOS DE MARQUI JÚNIOR**

Tese defendida e julgada em 13-08-2004 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Titular **EDUARDO MORGADO BELO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **FLAVIO DONIZETI MARQUES**
(Escola de Engenharia de São Carlos /USP)

APROVADO

Prof. Dr. **FERNANDO GARCIA SANTORO**
(Laboratório Nacional de Astrofísica – Minas Gerais/LNA-MG)

Aprovado

Prof. Dr. **HUGO BORELLI RESENDE**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Aprovado

Prof. Dr. **LUIZ CARLOS SANDOVAL GÓES**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Aprovado

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Agradecimentos

Ao Prof. Titular Eduardo Morgado Belo, pela orientação, confiança e amizade, fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques pela amizade e pelas valiosas discussões no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Roberto Hideaki Tsunaki por seu apoio fundamental para o desenvolvimento experimental.

À Ana Lucia, que com seu amor e carinho esteve sempre ao meu lado durante todos os momentos.

À minha família, em especial aos meus pais e irmãs, por todo carinho e apoio.

Aos professores do Núcleo de Pesquisas em Aeronáutica, em particular ao Prof. Dr. Fernando Martini Catalano, pelo auxílio e sugestões durante os ensaios no túnel de vento.

Ao Prof. Dr. Benedito Di Giacomo pelas sugestões e por disponibilizar seus técnicos para os ajustes e fabricação do sistema experimental.

Ao José Cláudio P. Azevedo, por sua inestimável ajuda na montagem, desenvolvimento e instrumentação dos experimentos.

Ao Luis C. Neves pela realização de todo processo de acabamento e montagem da asa.

Aos professores e colegas do Núcleo de Manufatura Avançada pelo auxílio na fabricação da asa.

Aos os amigos do Laboratório de Aeroelasticidade, Dinâmica de Vôo e Controle por todos os bons momentos de sincera amizade e colaboração ao longo destes anos.

Aos amigos do Laboratório de Dinâmica pela amizade e pelos bons momentos de descontração.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro concedido na forma da bolsa de Doutorado através do processo 00/00390-3.

Aos meus pais, Saruet e Carlos

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
1. Introdução	1
2. Fundamentos da Aeroelasticidade	5
2.1. Aeroelasticidade Estática	9
2.1.1. Divergência em uma seção típica	9
2.2. Aeroelasticidade Dinâmica	14
2.2.1. O Fenômeno Flutter	14
2.2.2. Análise por diagrama de blocos	18
3. Aeroservoelasticidade	27
3.1. Introdução	27
3.2. Projeto de um controlador Regulador Linear Quadrático	31
4. Modelo Aeroelástico	37
4.1. Energia Cinética	39
4.2. Energia Potencial	40
4.3. Equações de Lagrange	41
4.3.1 Determinação das forças generalizadas	43
4.4. Equações de movimento	47
5. Projeto e Desenvolvimento do Aparato Experimental	51
5.1. Projeto e Desenvolvimento do Dispositivo Flexível	52
5.1.1. Modelo em Elementos Finitos	56
5.1.2. Análise Modal Experimental e Identificação	61
6. Análise das Condições de Flutter e sua Supressão	68
6.1. Sistemas de Medição e Atuação	69
6.2. Validação do Modelo Matemático	76
6.3. Experimentos em Malha Aberta	81
6.3.1. Verificação e Caracterização do Flutter	81
6.4. Projeto e Implementação do Controlador	101
6.4.1. Simulações e Experimentos em Malha Fechada	102

7. Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	127
7.1 Conclusões	127
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	131
8. Referências	133
Apêndice	138

Resumo

De Marqui Jr, C. (2004). *Estudo Teórico e Experimental de um Controlador para Supressão de Flutter*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

Flutter é uma instabilidade aeroelástica dinâmica que envolve a interação de forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Esta instabilidade pode ocorrer em superfícies de aeronaves, como asas, que apresentarão um comportamento oscilatório auto-sustentado e possíveis problemas estruturais se o mesmo não for suprimido. Um dos tipos clássicos de *flutter* envolve o acoplamento dos modos de vibrar de flexão e torção. Este tipo de *flutter* binário é conhecido como *flutter* flexo-torcional. Um dispositivo flexível é desenvolvido para testes de *flutter* flexo-torcional com asas rígidas em túnel de vento. O procedimento de projeto deste dispositivo flexível é baseado em simulações realizadas com um modelo em Elementos Finitos cujos resultados são testados em simulações realizadas com um Modelo Aeroelástico formulado para simular o comportamento aeroelástico do sistema experimental. Então, para se verificar os resultados analíticos, uma Análise Modal Experimental é realizada e as frequências e a forma dos modos são identificadas utilizando-se o *Eigensystem Realization Algorithm*. Depois disso, alguns testes em túnel de vento são realizados para a verificação da obtenção do *flutter*, para a caracterização do *flutter* e para a identificação do *flutter*. O desenvolvimento deste sistema experimental permite o estudo e a aplicação de leis de controle para a supressão ativa do *flutter*, que é o objetivo principal deste trabalho. Um controlador ativo para supressão de *flutter* através de realimentação de estados é projetado a partir do modelo Aeroelástico previamente desenvolvido. Este controlador é inicialmente testado em simulação e, então, são realizados experimentos em túnel de vento. O objetivo é suprimir o *flutter* e manter a estabilidade do sistema em malha fechada. O modelo para testes no túnel de vento é uma asa rígida retangular com perfil NACA 0012 com uma superfície de controle no bordo de fuga utilizada como atuador.

Palavras-chave: Aeroelasticidade, *flutter*; controle; modelo experimental

Abstract

De Marqui Jr, C. (2004). *Theoretical and Experimental Study on a Flutter Suppression Controller*. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

Flutter is a dynamic aeroelastic instability that involves the interaction of aerodynamic, elastic and inertial forces. This instability may occur in aircraft surfaces, like wings, which will present a self-sustained oscillatory behaviour and possible structural problems if not suppressed. One of the classical types of flutter involves the coupling of bending and torsion vibration modes. This binary type of flutter is known as flexural-torsional flutter. A flexible mount system is developed for flexural-torsional flutter tests with rigid wings in wind tunnels. The design procedure of this mount system is based in simulations performed with a Finite Element model which results are tested in simulations performed with an Aeroelastic model formulated to simulate the aeroelastic behaviour of the experimental system. Then, to verify the analytical results, an Experimental Modal Analysis is performed and mode shapes and frequencies are identified using the Eigensystem Realization Algorithm. After this, some wind tunnel tests are performed to verify flutter achievement, for flutter characterization and for flutter identification. The development of this experimental system allows the study and application of active control laws for active flutter suppression, which is the main goal of this work. A state feedback controller for active flutter suppression is designed using the aeroelastic model previously developed. This controller is initially tested in simulations and, then, wind-tunnel experiments are performed. The goal is to suppress flutter and to maintain the stability of the closed loop system. The wind tunnel model is a rigid rectangular wing with a NACA 0012 airfoil section with a trailing edge control surface used as actuator.

Keywords: Aeroelasticity, flutter, control, experimental model

Lista de Figuras

Figura 2.1	Diagrama de blocos representando um problema aeroelástico típico.	6
Figura 2.2	Diagrama de forças proposto por Collar (1946).	7
Figura 2.3	Geometria de uma seção típica de um aerofólio.	10
Figura 2.4	Diagrama de blocos da função transferência da equação (2.14).	13
Figura 2.5	Definição de algumas grandezas.	19
Figura 2.6	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.	25
Figura 2.7	Diagrama de blocos equivalente do sistema em malha fechada.	25
Figura 2.8	Diagrama de blocos equivalente do sistema em malha fechada.	25
Figura 3.1	Configuração do controlador regulador com realimentação de estados.	33
Figura 4.1	Conjunto dispositivo flexível e aerofólio. (Waszak, 1998).	38
Figura 4.2	Modelo estrutural representando o sistema físico.	38
Figura 4.3	Diagrama de corpo livre.	43
Figura 4.4	Representação da distribuição de pressão no aerofólio.	45
Figura 5.5	Dispositivo proposto por Heeg (1993).	52
Figura 5.6	Dispositivo proposto por Block e Strganac (1998).	53
Figura 5.7	Dispositivo proposto por Chowdhury e Sarkar (2003).	53
Figura 5.4	Esquema do dispositivo com a asa montada no dispositivo flexível.	54
Figura 5.5	Esquema da montagem do sistema no túnel de vento.	55

Figura 5.6	Primeiro modo de flexão determinado por Elementos Finitos a 1,3 Hz.	58
Figura 5.7	Primeiro modo de torção determinado por Elementos Finitos a 2,1 Hz.	59
Figura 5.8	Segundo modo de flexão determinado por Elementos Finitos a 13,6 Hz.	59
Figura 5.9	Primeiro modo da barra central determinado por Elementos Finitos a 27,8 Hz.	59
Figura 5.10	Um dos modos relativos aos eixos, determinado por Elementos Finitos a 45,1 Hz.	60
Figura 5.11	Foto do dispositivo flexível construído a partir das dimensões determinadas com o modelo em Elementos Finitos.	61
Figura 5.12	Engaste da barra central à placa superior.	62
Figura 5.13	Foto do modelo da asa no túnel de vento e desmontada.	62
Figura 5.14	Discretização da barra central para realização da Análise Modal.	63
Figura 5.15	Algumas FRFs medidas durante a Análise Modal.	64
Figura 5.16	Destaque na região de frequências mais baixas das FRFs.	65
Figura 5.17	Primeiro modo de flexão determinado pelo ERA a 1,2 Hz.	66
Figura 5.18	Primeiro modo de torção determinado pelo ERA a 2,41 Hz.	66
Figura 5.19	Segundo modo de flexão determinado pelo ERA a 11,7 Hz.	66
Figura 6.1	Fotos da montagem do experimento no túnel de vento: a) asa dentro da câmara de ensaio do túnel; b) dispositivo flexível sob a parede inferior da câmara de ensaio do túnel de vento.	68
Figura 6.2	Posicionamento dos extensômetros para medida dos deslocamentos.	70
Figura 6.3	Posicionamento dos acelerômetros (um para <i>plunge</i> e dois para <i>pitch</i>).	71
Figura 6.4	Esquema do sistema de aquisição de dados.	72
Figura 6.5	Foto da asa aberta com os instrumentos instalados.	73
Figura 6.6	Esquema de controle para o sistema de acionamento do motor.	74
Figura 6.7	Leitura do <i>encoder</i> para entrada senoidal de 0,5 Hz.	75
Figura 6.8	Leitura do <i>encoder</i> para entrada senoidal de 1 Hz.	75
Figura 6.9	Leitura do <i>encoder</i> para entrada senoidal de 3 Hz.	75

Figura 6.10	Entradas aplicadas durante o experimento e simulação.	78
Figura 6.11	Comparação teórico-experimental para o deslocamento em <i>plunge</i> .	79
Figura 6.12	Comparação teórico-experimental para o deslocamento em <i>pitch</i> .	79
Figura 6.13	Comparação teórico-experimental para a velocidade em <i>plunge</i> .	79
Figura 6.14	Evolução dos autovalores da matriz A com a variação da velocidade do fluxo de ar.	82
Figura 6.15	Respostas no tempo do sistema para a velocidade de 5 m/s.	83
Figura 6.16	Figura 6.16 – Respostas no tempo do sistema para a velocidade de 15 m/s.	83
Figura 6.17	Figura 6.17 – Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 20 m/s.	84
Figura 6.18	Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 23 m/s.	84
Figura 6.19	Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 25 m/s.	85
Figura 6.20	Evolução das funções resposta em frequência com o aumento da velocidade obtidas a partir do modelo do sistema.	86
Figura 6.21	Sinal de velocidade em <i>plunge</i> medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de <i>flutter</i> .	88
Figura 6.22	Sinal de velocidade em <i>pitch</i> medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de <i>flutter</i> .	88
Figura 6.23	Sinal de deslocamento em <i>plunge</i> medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de <i>flutter</i> .	88
Figura 6.24	Sinal de deslocamento em <i>pitch</i> medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de <i>flutter</i> .	89
Figura 6.25	Representação no domínio da frequência dos sinais medidos com o sistema na velocidade de <i>flutter</i> .	89
Figura 6.26	Esquema do sistema de medição nos ensaios de identificação.	90
Figura 6.27	Exemplo de entrada tipo ruído aplicada ao sistema e medida com o <i>encoder</i> do motor.	91
Figura 6.28	Resposta ao ruído medida no sistema.	92
Figura 6.29	Resposta ao ruído medida no sistema.	92
Figura 6.30	Sinal medido com o extensômetro de flexão apresentado no domínio da frequência.	92

Figura 6.31	Sinal medido com o extensômetro de torção apresentado no domínio da frequência.	93
Figura 6.32	Função resposta em frequência e fase do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida sem a ação do fluxo, velocidade 0 m/s.	93
Figura 6.33	Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 10 m/s.	94
Figura 6.34	Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 15 m/s.	95
Figura 6.35	Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 20 m/s.	95
Figura 6.36	Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida na velocidade de 23 m/s.	96
Figura 6.37	Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida na velocidade de 25 m/s.	97
Figura 6.38	Evolução dos modos de flexão e torção.	98
Figura 6.39	Gráfico V-g identificado para o sistema experimental	99
Figura 6.40	Apresentação das respostas medidas na faixa de frequências completa.	100
Figura 6.41	Esquema do regulador projetado.	103
Figura 6.42	Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 25 m/s.	105
Figura 6.43	Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 25 m/s.	105
Figura 6.44	Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável h na velocidade de 25 m/s.	105
Figura 6.45	Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável θ na velocidade de 25 m/s.	106
Figura 6.46	Ação ineficiente do atuador durante simulação na velocidade de 25 m/s.	106
Figura 6.47	Ação de controle errada, aumentando a amplitude das oscilações.	107
Figura 6.48	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 25 m/s.	108

Figura 6.49	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 25 m/s.	108
Figura 6.50	Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 25 m/s.	108
Figura 6.51	Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 25 m/s.	109
Figura 6.52	Ação do atuador durante simulação na velocidade de 25 m/s.	109
Figura 6.53	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 27,5 m/s.	110
Figura 6.54	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 27,5 m/s.	110
Figura 6.55	Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 27,5 m/s.	110
Figura 6.56	Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 27,5 m/s.	111
Figura 6.57	Ação do atuador durante simulação na velocidade de 27,5 m/s.	111
Figura 6.58	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 29 m/s.	112
Figura 6.59	Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 29 m/s.	112
Figura 6.60	Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 29 m/s.	112
Figura 6.61	Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 29 m/s.	113
Figura 6.62	Ação do atuador durante simulação na velocidade de 29 m/s.	113
Figura 6.63	Ação de controle para controlador com nível de atuação reduzido.	114
Figura 6.64	Esquema do experimento de controle realizado no túnel de vento.	115
Figura 6.65	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 23 m/s.	116
Figura 6.66	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 23 m/s.	117

Figura 6.67	Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 23 m/s.	117
Figura 6.68	Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 23 m/s.	117
Figura 6.69	Sinal do controlador e do atuador durante experimento. Velocidade de 23 m/s.	118
Figura 6.70	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 23,5 m/s.	118
Figura 6.71	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 23,5 m/s.	119
Figura 6.72	Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 23,5 m/s.	119
Figura 6.73	Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 23,5 m/s.	119
Figura 6.74	Sinal do controlador e do atuador durante experimento. Velocidade de 23,5 m/s.	120
Figura 6.75	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 24,5 m/s.	120
Figura 6.76	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 24,5 m/s.	121
Figura 6.77	Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 24,5 m/s.	121
Figura 6.78	Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 24,5 m/s.	121
Figura 6.79	Sinal do atuador durante experimento. Velocidade de 24,5 m/s.	122
Figura 6.80	Ação de controle durante experimento para a variável θ desde a velocidade de <i>flutter</i> até a divergência.	122
Figura 6.81	Variável mostrando a abertura e fechamento da malha de controle durante todo o experimento.	123
Figura 6.82	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 22,7 m/s.	124
Figura 6.83	Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 22,7 m/s.	124

Figura 6.84	Ação de controle durante experimento para a variável h na velocidade de 22,7 m/s.	124
Figura 6.85	Ação de controle durante experimento para a variável θ na velocidade de 22,7 m/s.	125
Figura 6.86	Sinal do controlador e do atuador durante experimento na velocidade de 22,7 m/s.	125

Lista de Tabelas

Tabela 2.8	Classificação dos problemas aeroelásticos.	7
Tabela 5.1	Dimensões definidas a partir do modelo em Elementos Finitos.	57
Tabela 5.2	Frequências naturais do conjunto balanço e asa determinadas por Elementos Finitos.	58
Tabela 5.3	Rigidez de flexão e torção determinadas a partir do modelo de Elementos Finitos.	58
Tabela 5.4	Frequências naturais do conjunto balanço e asa determinadas utilizando o ERA.	65
Tabela 6.1	Valores de ganhos obtidos para o controlador PID.	73
Tabela 6.2	Dados utilizados nas simulações.	77
Tabela 6.3	Derivadas de estabilidade e controle.	77
Tabela 6.4	Autovalores obtidos a partir da simulação com velocidade de 25 m/s.	104

Lista de Símbolos

A	matriz de estado	
b	envergadura da asa	m
B	matriz de controle	
B₀, B₁, B₂	matrizes de controle	
C	matriz de amortecimento, matriz de saída	
c	corda da asa	m
$\bar{c}$	corda aerodinâmica média	
C_{L(.)}, C_{M(.)}	derivadas aerodinâmicas de sustentação e momento	
C_L, C_M	coeficientes aerodinâmicos de sustentação e momento	
D_s, D_a	matriz de amortecimento estrutural e aerodinâmico, respectivamente	
E	matriz de turbulência do túnel de vento	
e_δ	distancia da dobradiça até o centro de gravidade da superfície de controle	m
e₁	distancia da origem do sistema de coordenadas fixo no corpo até o centro de gravidade do sistema (excluindo a superfície de controle)	m
e₂	distancia da origem do sistema de coordenadas fixo no corpo até o centro de gravidade da superfície de controle	m
e_h	distancia da origem do sistema de coordenadas fixo no corpo até a dobradiça da superfície de controle	m
g	aceleração da gravidade	m/s ²

h	deslocamento horizontal do dispositivo flexível	m
H_δ	momento da superfície de controle em torno de seu ponto de fixação	Nm
I	momento de inércia do sistema	kg m ²
I_1	momento de inércia da asa em relação à origem do sistema de coordenadas fixo no corpo (excluindo a superfície de controle)	kg m ²
I_2	momento de inércia da superfície de controle em relação a origem do sistema de coordenadas fixo no corpo	kg m ²
K_θ	rigidez relativa ao movimento de torção	Nm/rad
K_δ	rigidez relativa à superfície de controle	N/rad
K_h	rigidez relativa ao movimento de flexão	N/m
$\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_a$	matriz de rigidez estrutural e aerodinâmica, respectivamente	
L	força de sustentação	N
$l(x)$	distancia na direção da corda da origem do sistema de coordenada fixo no corpo ao ponto onde o ângulo de ataque é referenciado	m
m	massa	kg
m_1	massa da asa (excluindo a superfície de controle)	kg
m_2	massa da superfície de controle	kg
$\mathbf{M}_g$	matriz de acoplamento de massa	
M_p	momento de arfagem	Nm
$\mathbf{M}_s, \mathbf{M}_a$	matriz da massa estrutural e aerodinâmica, respectivamente	
$p(x,t)$	distribuição idealizada de pressão em uma seção do aerofólio	Pa
$p(x,y,t)$	distribuição de pressão sobre a superfície da asa	Pa
Q	forças generalizadas	N
$Q_{(.)}^e$	força externa associada à coordenada generalizada (.)	N
$Q_{(.)}^{nc}$	força não-conservativa associada à coordenada generalizada (.)	N
$\mathbf{Q}_T$	matriz de força aerodinâmica generalizada associada ao ângulo θ_i	
$\bar{q}$	pressão dinâmica	Pa
S	momento estático	kg m
S	área da asa	m ²
S_{ij}	acoplamento inercial entre as coordenadas generalizadas i e j	
T_1	energia cinética da asa	J
T_2	energia cinética da superfície de controle	J

U	energia potencial	J
U_0	velocidade do fluxo livre	m/s
U_e	energia potencial elástica	J
U_g	energia potencial gravitacional	J
v	deslocamento vertical do aerofólio	m
$\mathbf{w}$	vetor de distúrbios	
w_0	frequência natural de torção	rad/s
w_g	velocidade de perturbação devido ao fluxo	m/s
w_h	frequência natural de flexão	rad/s
x	ponto genérico ao longo da corda do aerofólio	m
x_f	posição na direção da corda da dobradiça da superfície de controle	m
x_p	posição na direção da corda da origem do sistema de coordenadas fixo no corpo	m
y	distância na direção da envergadura	m
z	deslocamento normal à corda da asa	m
δ	ângulo da superfície de controle	rad
δ_c	ângulo real da superfície de controle	rad
θ	ângulo de arfagem do dispositivo flexível	rad
δW_e	trabalho virtual realizado por forças externas	J
δW_{in}	trabalho virtual realizado por forças inerciais durante um movimento virtual arbitrário de um sistema dinâmico	J
δU	variação de energia resultante do deslocamento virtual	J
ρ	densidade	Kg/m ³
ξ	fator de amortecimento	
α	ângulo de ataque	rad
Ψ	vetor de coordenadas generalizadas	
$\delta(x,y,t)$	deslocamento virtual normal à superfície da asa	m
θ_T	ângulo de ataque inicial do sistema sem a ação do fluxo	rad

Subscritos e sobrescritos

$(\cdot)_0$	valor de equilíbrio ou de trimagem
$\tilde{(\cdot)}$	perturbação de $(\cdot)$
$(\cdot)_\alpha$	relativo ao ângulo de ataque
$(\cdot)_\delta$	relativo à superfície de controle
$(\cdot)^e$	externo
$(\cdot)^{nc}$	não-conservativa

Operadores

$\dot{(\cdot)}$	derivada em relação ao tempo
$\ddot{(\cdot)}$	segunda derivada em relação ao tempo
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	derivada parcial em relação a $(\cdot)$

1. Introdução

Fenômenos aeroelásticos vêm sendo identificados nas aeronaves desde os primeiros vôos, conforme relatado em Garrick e Reed (1981), Collar (1959), Ashley (1970), Friedmann (1999) e Garrick (1976). Os efeitos aeroelásticos resultam da interação entre forças elásticas, inerciais e aerodinâmicas, onde, forças aerodinâmicas são induzidas por deformações estáticas ou oscilatórias da estrutura ou por forças externas resultantes de distúrbios.

A Aeroelasticidade é uma área relacionada com o estudo do movimento de um corpo flexível através de um fluido. Os fenômenos aeroelásticos podem ser classificados como fenômenos de estabilidade ou de resposta, e estes divididos em fenômenos estáticos e dinâmicos. Problemas aeroelásticos de estabilidade surgem quando deformações estruturais, que ocorrem em um corpo flexível em movimento em um fluido, induzem forças aerodinâmicas adicionais, que produzem novas deformações que induzirão novas forças aerodinâmicas que, por sua vez, provocarão maiores deformações e assim sucessivamente (Försching, 1979). Um corpo perfeitamente rígido exposto a um fluxo de ar não apresentaria problemas aeroelásticos. Assim, sendo a estrutura de uma aeronave um sistema flexível, ela poderá estar sujeita a alguns problemas aeroelásticos em algumas condições de vôo.

A partir da Segunda Guerra Mundial os problemas aeroelásticos passaram a influenciar mais significativamente o desenvolvimento das aeronaves devido ao aumento da velocidade de vôo. Atualmente, a busca por melhor desempenho tem influenciado o projeto de aeronaves, introduzindo modificações que podem torná-las mais leves e conseqüentemente mais flexíveis. Assim, alguns problemas aeroelásticos

passaram a ser significantes dentro do envelope de voo de uma aeronave (Dugundji, 2003).

Entre os possíveis problemas aeroelásticos em uma aeronave destaca-se o *flutter*, um fenômeno aeroelástico dinâmico onde dois ou mais modos de vibrar estruturais estão acoplados e excitados por cargas aerodinâmicas. De um modo mais formal, o *flutter* ocorre quando um componente de uma aeronave, ou a aeronave inteira, apresenta característica oscilatória e auto-excitada a partir de uma determinada velocidade de voo, Bisplinghoff et al. (1955), Bisplinghoff e Ashley (1962), Fung (1955). Em velocidades menores que esta velocidade crítica qualquer oscilação será amortecida. Entretanto, em velocidades maiores que a crítica qualquer distúrbio dinâmico inicial resultará na característica oscilatória auto-excitada e acarretará, se não suprimido, em falhas estruturais.

Para se evitar as consequências do *flutter* e de outros problemas aeroelásticos várias soluções têm sido estudadas. Técnicas passivas como modificações estruturais e balanceamento de massa foram propostas (Garrick e Reed, 1981). Estas alternativas podem acarretar em processos onerosos de modificação de projetos ou em mudanças de características que prejudiquem o desempenho de uma aeronave. Assim, a partir da década de 1970 o desenvolvimento de controladores ativos passou a ser considerado como uma alternativa adequada para a supressão do *flutter* possibilitando a minimização de possíveis prejuízos ao desempenho de uma aeronave (Cole, Noll e Perry, 2003).

Considerando a natureza destrutiva do *flutter*, testes em túnel de vento são considerados uma alternativa segura para a realização de ensaios aeroelásticos e para o desenvolvimento e implementação de controladores ativos de *flutter*, que posteriormente poderiam ser testados em ensaios em voo. Os testes em túnel de vento podem ser realizados utilizando-se modelos de asas flexíveis (Mukhopadhyay, 1995) ou utilizando-se modelos de asas rígidas associadas a dispositivos flexíveis (Waszak, 1998; Ko, Kurdila e Strganac, 1997; Chowdhury e Sarkar, 2003). A primeira alternativa é uma representação mais próxima de um problema real de *flutter*. Mas, considerando-se a integridade dos equipamentos e do túnel de vento, a segunda alternativa é uma maneira mais segura para a realização de experimentos aeroservoelásticos.

Assim tem-se como objetivo deste trabalho o projeto e a implementação de um controlador ativo para a supressão de *flutter* utilizando um modelo de asa rígida associada a um dispositivo flexível e a atuação através de uma superfície de controle. Fica clara uma opção mais conservadora, considerando que este é o primeiro

desenvolvimento experimental em aeroservoelasticidade no país, em favor da segurança no desenvolvimento do experimento, mas, cuja realização irá gerar conhecimento para futuros experimentos.

Em linhas gerais, considerando as definições acima estabelecidas, este trabalho pode ser dividido em duas partes. A primeira inclui o projeto e construção de um modelo experimental que possibilite a obtenção do *flutter* nas condições do túnel de vento existente no Laboratório de Aerodinâmica do Núcleo de Pesquisas em Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos. A segunda é composta pelo projeto e implementação de um controlador para a supressão do *flutter*.

Um modelo aeroelástico representativo é parte fundamental para o projeto de quase todos os tipos de controladores (Dowell 1995). Desde o projeto dos controladores clássicos no domínio da frequência, controladores modernos no domínio do tempo e de alguns controladores não-convencionais, um modelo aeroelástico representativo é necessário para a obtenção de parâmetros e para a realização de simulações anteriores à implementação prática do controlador. O modelo aeroelástico utilizado foi obtido a partir das equações de Lagrange e do Princípio do Trabalho Virtual. Foram obtidas as equações dinâmicas que representam o comportamento aeroelástico do sistema em dois graus de liberdade. Além do projeto do controlador, as simulações desenvolvidas a partir do modelo foram fundamentais para o projeto do aparato experimental, que envolve a asa e o dispositivo flexível.

São encontrados na literatura diferentes modelos de dispositivos flexíveis para testes aeroelásticos em túnel de vento como em Dansberry et al. (1993), Ko et al. (1998) e Chowdhury e Sarkar (2003). Um dispositivo semelhante ao proposto por Dansberry et al. (1993) foi desenvolvido para a obtenção de *flutter* binário. O objetivo do projeto do dispositivo é obter um sistema de dois graus de liberdade que permita a obtenção em túnel de vento do *flutter* clássico, proveniente do acoplamento de modos de flexão e torção. Ainda, as características de rigidez relativas a estes graus de liberdade devem ser tais que, associadas às forças e momentos aerodinâmicos gerados e à massa total do sistema permitam a ocorrência do *flutter* em uma velocidade possível de ser obtida no túnel de vento em uso.

A configuração final do dispositivo flexível foi definida após simulações com um modelo simplificado em elementos finitos do sistema experimental e com o modelo aeroelástico. Algumas características do sistema, como rigidez e frequências naturais, foram definidas nas simulações com o modelo de elementos finitos e foram utilizadas

nos testes com o modelo aeroelástico e, assim, a velocidade crítica de *flutter* foi verificada.

O modelo físico foi construído a partir dos resultados das simulações e suas características dinâmicas verificadas antes de qualquer teste em túnel de vento. Realizou-se uma análise modal experimental e os dados obtidos foram utilizados para a identificação do sistema utilizando-se o ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*) modificado por Tsunaki (1999). Estes resultados puderam confirmar os resultados das simulações.

Definido o dispositivo flexível iniciaram-se os testes em túnel de vento. Acelerômetros e extensômetros foram utilizados como sensores e a superfície de controle no bordo de fuga da asa acionada por um motor elétrico utilizada como atuador. Os sistemas de aquisição, processamento e atuação foram desenvolvidos utilizando-se uma placa dSPACE DS1103.

Os primeiros testes realizados tiveram como objetivo a verificação do modelo matemático, a verificação da velocidade de *flutter* e a caracterização do fenômeno. Para a caracterização, funções resposta em frequência (FRFs) foram obtidas a partir de testes experimentais realizados desde baixas velocidades até velocidades o mais próximo possível da de *flutter*. Assim, foi possível demonstrar o efeito do aumento da velocidade do fluxo na evolução dos modos envolvidos no *flutter*, até o acoplamento destes na iminência do *flutter*. Os dados destes testes também foram obtidos no domínio do tempo e utilizados para a identificação das frequências e amortecimentos dos modos envolvidos no *flutter* utilizando o método EERA (*Extended Eigensystem Realization Algorithm*). Como resultado do processo de identificação obteve-se um gráfico *V-g* do sistema, mostrando-se de forma quantitativa o comportamento dos parâmetros identificados com o aumento da velocidade até a ocorrência do *flutter*.

Na sequência, iniciaram-se os experimentos para a supressão ativa do *flutter*. Um controlador tipo regulador linear quadrático (LQR) com realimentação de estados na forma $u = Kx$ foi projetado através da minimização de uma função de custo quadrática. Este controlador foi testado numericamente e verificado experimentalmente. Os resultados teóricos e experimentais demonstraram o bom desempenho do controlador na estabilização do sistema instável. A atuação do controlador implicou em um aumento na velocidade crítica de *flutter*, mostrando que os objetivos propostos foram atingidos.

2. Fundamentos da Aeroelasticidade

Aeroelasticidade é uma área do conhecimento que se refere ao estudo do efeito das forças aerodinâmicas nos corpos elásticos. Os efeitos aeroelásticos resultam da interação entre forças elásticas, inerciais e aerodinâmicas, ou seja, forças aerodinâmicas são induzidas por deformações estáticas ou oscilatórias da estrutura ou por forças externas resultantes de distúrbios.

Conforme descrito em Fung (1955), a teoria clássica de elasticidade trabalha com tensões e deformações de corpos elásticos sob efeitos de forças externas ou deslocamentos conhecidos. O carregamento externo agindo no corpo é, em geral, independente da deformação do corpo, pois se assume que as deformações são pequenas e que não afetam significativamente a ação de forças externas. Nestes casos, desprezam-se as deformações e realizam-se os cálculos baseando-se na forma inicial. Em grande parte dos problemas aeroelásticos a situação ocorre de forma distinta da anterior. As forças aerodinâmicas atuando em um corpo flexível em movimento dependem do comportamento deste corpo flexível em relação ao fluxo de ar. A magnitude das forças aerodinâmicas não é conhecida até que a deformação elástica seja determinada.

Um problema aeroelástico interessante é o de estabilidade de uma estrutura flexível sob ação do fluxo de ar. Dada uma configuração de um corpo elástico, as solicitações aerodinâmicas crescem rapidamente com a velocidade do fluxo. Sendo a rigidez independente desta velocidade, haverá uma velocidade crítica na qual a estrutura se tornará instável. Esta instabilidade pode causar deformações excessivas ou oscilações auto-excitadas que podem resultar na destruição da estrutura.

O diagrama de blocos da figura 2.1 representa o problema aeroelástico típico em termos de estabilidade para uma aeronave. A aeronave possui suas características estruturais, independentes da velocidade, e as características aerodinâmicas variáveis com a velocidade. O ângulo de ataque inicial α_0 é modificado para um ângulo de ataque

elástico α_e devido à interação aerodinâmico-estrutural. Este processo de interação é retroagido nas variadas condições de voo da aeronave, até que se atinja uma condição de equilíbrio (condição estável) ou ocorra uma falha estrutural (condição instável).

Figura 2.1 - Diagrama de blocos representando um problema aeroelástico típico.

Entre os possíveis problemas aeroelásticos em corpos flexíveis expostos à ação de um fluxo de ar destaca-se o *flutter*, um fenômeno aeroelástico dinâmico onde dois ou mais modos de vibrar estruturais estão acoplados e excitados por cargas aerodinâmicas. De um modo mais formal, o *flutter* ocorre quando um componente de uma aeronave, ou a aeronave inteira apresenta característica oscilatória e auto-excitada a partir de uma determinada velocidade de voo (Bisplinghoff et al., 1955, Bisplinghoff e Ashley, 1962 e Fung, 1955). O caso particular de uma oscilação em frequência zero, onde a inércia não possui um papel importante, é chamado de instabilidade aeroelástica estática, divergência. Bisplinghoff et al. (1955) definem divergência como sendo uma instabilidade estática de uma superfície de sustentação de uma aeronave em voo.

Além dos problemas aeroelásticos de estabilidade existem os problemas aeroelásticos de resposta, no qual a resposta de um sistema aeroelástico a uma carga externa aplicada deve ser encontrada (Fung, 1955). A carga externa pode ser causada por uma deformação de um corpo elástico ou distúrbios como rajadas, impactos no pouso ou turbulências atmosféricas. A resposta a ser encontrada pode ser o deslocamento, movimento ou as tensões induzidas no corpo elástico. Assim como nos casos de estabilidade, os problemas de resposta podem ser divididos em estáticos, onde as forças inerciais são desprezadas, e problemas dinâmicos, onde as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas são consideradas.

Na figura 2.2 observa-se o diagrama proposto por Collar (1946), onde os problemas surgidos da interação entre as forças ficam claros. A Dinâmica (forças

inerciais), Mecânica dos Fluidos (forças aerodinâmicas) e a Mecânica dos Sólidos (forças elásticas) são os vértices do triângulo, enquanto os lados que ligam os vértices são os problemas surgidos da interação entre estas disciplinas. Assim, a interação entre todas as disciplinas define a aeroelasticidade dinâmica representada no interior do diagrama de Collar.

Nos casos aeroelásticos modernos, tensões induzidas por altas temperaturas podem ter uma influência significativa, definindo o termo Aerotermoelasticidade. Em outras aplicações, o desenvolvimento de controladores ativos para a modificação do comportamento aeroelástico de um sistema define o termo Aeroservoelasticidade.

Figura 2.2 - Diagrama de forças proposto por Collar (1946).

Os problemas aeroelásticos podem então ser classificados conforme a tabela 2.1 a seguir.

Tabela 2.1 - Classificação dos problemas aeroelásticos.

	Estático	Dinâmico
Estabilidade	<ul style="list-style-type: none"> • Divergência 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Flutter</i> • <i>Stall Flutter</i>
Resposta	<ul style="list-style-type: none"> • Distribuição de carregamento • Efetividade de controle • Reverso de controle 	<ul style="list-style-type: none"> • Resposta a rajadas • Resposta a comandos • <i>Buffeting</i>

Há uma relação estreita entre os problemas de estabilidade e resposta. Matematicamente a maioria dos problemas de estabilidade pode ser descrita pela solução de um sistema de equações homogêneas (problema de autovalores). Por outro lado, os problemas de resposta são representados pela solução de um sistema não homogêneo no qual as condições iniciais e as forças externas são tais que tornam as equações do sistema não homogêneas. Matematicamente, os problemas de estabilidade e resposta estão descritos na equação 2.1,

$$(S + A + I)[X] = \begin{cases} 0 & \text{estabilidade} \\ f(t) & \text{resposta} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde S é o operador estrutural, A o operador aerodinâmico e I o operador inercial.

No caso do problema de estabilidade aeroelástica, como *flutter*, mesmo que a excitação da estrutura seja removida ($f(t)$ na equação 2.1), a resposta não se atenuará, já que a vibração é auto-excitada. A afirmação anterior é verdadeira para casos lineares. Em casos não-lineares a resposta poderá ser atenuada quando removida a excitação. No caso do problema de resposta, se a excitação for removida a vibração decai com o tempo, sendo amortecida pelas cargas aerodinâmicas e pelo amortecimento estrutural.

Um problema de resposta geralmente pode ser associado com um problema de estabilidade. Como exemplo tem-se a resposta na asa de um avião à turbulência atmosférica. O problema de resposta da estrutura e o problema de *flutter* podem estar associados. Quando a resposta da estrutura a um distúrbio finito é finita a estrutura é estável, e o *flutter* não ocorrerá. Quando o distúrbio ocorre na velocidade crítica de *flutter*, a resposta torna-se oscilatória e auto-sustentada.

Segundo Fung (1955), o fato anterior é verdadeiro em praticamente todos os problemas semelhantes de estabilidade e de resposta. O sistema homogêneo tem uma solução não trivial enquanto o correspondente sistema não homogêneo não tem solução, ou o sistema não homogêneo tem uma solução enquanto o correspondente sistema homogêneo não tem solução além da trivial. É apropriado então discutir os problemas de resposta e estabilidade juntos, como duas componentes de um mesmo problema.

2.1. Aeroelasticidade Estática

A partir do diagrama de Collar da figura 2.2, verifica-se que a aeroelasticidade estática envolve os problemas provenientes da interação das forças aerodinâmica e forças elásticas. No caso deste estudo, pelo fato dos problemas aeroelásticos estáticos, tanto de estabilidade quanto de resposta, não serem o principal objetivo do trabalho, será exemplificado somente o problema de divergência e comentados alguns fenômenos aeroelásticos de resposta.

Os problemas aeroelásticos foram observados desde os primeiros vôos realizados no início do século 20. A ocorrência destes fenômenos e sua influência no desenvolvimento das aeronaves podem ser encontradas em diversos artigos de revisão sobre Aeroelasticidade como em Garrick e Reed (1981), Collar (1959), Ashley (1970), Mukhopadhyay (2003) e em Noor e Venneri (1993).

Por volta de 1903, o professor Samuel P. Langley falhou pela segunda vez na sua tentativa de atravessar o rio Potomac em sua aeronave. Bisplinghoff et al. (1955), Collar (1959) e Mukhopadhyay (2003) citam o projeto do professor Langley como sendo o possível primeiro caso de aeronave afetada por problemas aeroelásticos. Na época de sua tentativa de vôo, alguns autores sugeriram que a falha ocorreu devido à falta de rigidez estrutural nas pontas das asas, resultando no fenômeno de divergência.

Collar (1959) cita que alguns anos após a morte de Langley, sua aeronave foi reestruturada e voou com sucesso. Concluiu-se que na versão original a asa do avião não tinha rigidez torcional suficiente e que problemas aeroelásticos foram realmente responsáveis pelas falhas anteriores.

Outros casos de problemas aeroelásticos estáticos foram observados ao longo do desenvolvimento da aviação. Collar (1959) e Garrick e Reed (1981) descrevem os problemas aeroelásticos estáticos ocorridos durante a Primeira Guerra Mundial com o Albatros D-III e o Fokker D-VIII além de uma versão modificada para operações em grandes altitudes do Messerschmitt Me109T.

2.1.1 Divergência em uma seção típica

Suponha-se uma asa em um fluxo estabelecido e submetida a um pequeno distúrbio de sua posição de equilíbrio. Surge um momento aerodinâmico, que é

balanceado por um momento elástico, restabelecendo-se o equilíbrio. O momento elástico é independente da velocidade do fluxo de ar, enquanto o momento aerodinâmico é proporcional ao quadrado da velocidade do fluxo de ar. Conclui-se que deva existir uma velocidade crítica a partir da qual o equilíbrio não poderá ser restabelecido, ocorrendo a falha estrutural. Esta velocidade é definida como a velocidade crítica de divergência.

Para a determinação teórica da velocidade crítica de divergência considera-se a seção típica da figura 2.3, que é o modo mais simples e pode ser facilmente ampliado para o caso de asas completas.

Figura 2.3 - Geometria de uma seção típica de um aerofólio.

Define-se o ângulo de ataque total α_T como a soma de um ângulo de ataque inicial α (com a mola rotacional não deformada) e um ângulo de ataque adicional θ devido à deformação angular da mola.

$$\alpha_T = \alpha + \theta \quad (2.2)$$

A força de sustentação e o momento de arfagem por unidade de comprimento, agindo no centro aerodinâmico são expressos nas equações 2.3 e 2.4.

$$L' = qC_L c = qc \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha + \theta) \quad (2.3)$$

$$M'_0 = qC_{m0} c^2 \quad (2.4)$$

onde

$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \equiv C_{L\alpha}$ é a derivada com relação a α da sustentação da seção típica;

$q = \rho U^2 / 2$ é a pressão dinâmica, com ρ sendo a densidade do ar e U a velocidade do fluxo;

C_{m0} é o coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico.

O momento aerodinâmico, por unidade de comprimento, em torno do centro elástico será:

$$M'_a = M'_0 + L'ec = qc^2 C_{m0} + qec^2 C_{L\alpha} (\alpha + \theta) \quad (2.5)$$

ou ainda:

$$M'_a = qec^2 C_{L\alpha} \theta + qec^2 C_{L\alpha} \left(\alpha + \frac{C_{m0}}{ea} \right) \quad (2.6)$$

Definindo-se uma nova referência para o ângulo de ataque obtém-se o momento em torno do centro elástico conforme a equação 2.7. Com esta nova referência assume-se que o ângulo de ataque seja medido a partir de uma linha de momento zero.

$$M'_a = qec^2 C_{L\alpha} (\alpha + \theta) \quad (2.7)$$

O momento elástico por unidade de comprimento pode ser definido na forma da equação 2.8.

$$M'_\theta = K_\theta \theta \quad (2.8)$$

Assim, a condição de equilíbrio é verificada se $M'_a = M'_\theta$. Resolvendo-se esta igualdade para o ângulo de torção θ obtém-se a equação 2.9.

$$\theta = \frac{qec^2 a}{K_\theta - qec^2 C_{L\alpha}} \alpha \quad (2.9)$$

A deformação elástica torna-se infinita quando o denominador se iguala a zero. Assim a pressão dinâmica de divergência será:

$$q_{div} = \frac{K_\theta}{ec^2 C_{L\alpha}} \quad (2.10)$$

e a partir da definição da pressão dinâmica de divergência determina-se a velocidade de divergência, como na equação 2.11.

$$U_{div} = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho ec^2 C_{L\alpha}}} \quad (2.11)$$

A equação 2.9 pode ser reescrita na forma da equação 2.12, onde se identificam os operadores aerodinâmico e estrutural no lado esquerda da equação. O termo do lado direito pode ser chamado de função de carregamento, que, quando é considerada nula se obtém a equação algébrica homogênea 2.13.

$$(K_\theta - qec^2 C_{L\alpha})\theta = qec^2 C_{L\alpha} \alpha \quad (2.12)$$

$$(K_\theta - qec^2 C_{L\alpha})\theta = 0 \quad (2.13)$$

A equação 2.13 representa um problema de autovalor, normalmente associado com critérios de estabilidade. Duas soluções são possíveis: a solução trivial $\theta = 0$ e a solução $(K_\theta - qec^2 C_{L\alpha}) = 0$ de onde se obtém os autovalores.

A partir da equação 2.12 define-se a função de transferência da equação 2.14, entre a entrada α e a saída θ , como apresentado por Dowell (1995).

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{qec^2 C_{L\alpha} / K_\theta}{1 - (qec^2 C_{L\alpha} / K_\theta)} = \frac{q/q_{div}}{1 - q/q_{div}} = \frac{G}{1 - G} \quad (2.14)$$

O termo $(1-G)^{-1}$ pode ser expandido em uma série do tipo $(1-G)^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} G^n$,

que é convergente quando $|G| < 1$ e divergente quando $|G| > 1$, significando que a torção elástica se tornará infinitamente grande para velocidades maiores que a de divergência.

A equação (2.14) tem um significado particular na teoria de controle. Ela representa a função de transferência de um sistema de retroação, onde a torção elástica introduz uma retroação unitária positiva, como na figura 2.4.

Figura 2.4 - Diagrama de blocos da função transferência da equação (2.14).

Quando a função transferência de malha aberta G excede a unidade, o sistema se torna instável, ou seja:

$$G = \frac{qec^2 C_{L\alpha}}{K_\theta} > 1 \Leftrightarrow q > q_{div} \quad (2.15)$$

O ramo de realimentação pode ser quebrado em duas partes. A função transferência de malha direta é identificada como o operador aerodinâmico, e a função de retroação é igual ao inverso do operador estrutural. Nota-se que a pressão aerodinâmica é o ganho do sistema em malha fechada.

descrever um parágrafo

2.2. Aeroelasticidade dinâmica

Como já apresentado, a aeroelasticidade dinâmica envolve problemas de estabilidade e resposta (tabela 2.1). Como o objetivo principal deste trabalho é desenvolvimento de técnicas de controle de *flutter*, particularmente será descrito este fenômeno ao longo do próximo item.

2.2.1 O fenômeno *flutter*

Para se descrever fisicamente o fenômeno *flutter*, pode-se considerar uma asa engastada montada em um túnel de vento, com um pequeno ângulo de ataque. Quando o túnel está desligado e o modelo é excitado, ocorrem oscilações que são gradualmente amortecidas. Quando o túnel é ligado e a velocidade do fluxo é aumentada gradualmente, a taxa de amortecimento do aerofólio excitado inicialmente aumenta. Com o aumento progressivo da velocidade, atinge-se um ponto onde o amortecimento decai rapidamente. Esta é a velocidade crítica de *flutter*. Neste ponto a oscilação se mantém em uma amplitude fixa. Em velocidades maiores que a crítica, qualquer pequena perturbação pode induzir ao início de violentas oscilações instáveis, caracterizando o *flutter*. Conforme relatado por vários autores (Bisplinghoff et al, 1955; Fung, 1955, Dowell, 1995) a oscilação apresentada durante o *flutter* é auto-sustentada, ou seja, nenhum agente externo é necessário para que ela se mantenha.

O movimento oscilatório durante o *flutter* de uma asa reta engastada possui componentes de flexão e de torção (Hancock et al, 1985). Um aerofólio com rigidez suficiente para que se tenha somente o grau de liberdade de flexão não apresentará *flutter*. Em um aerofólio rígido somente com o grau de liberdade de torção, o *flutter* poderá ocorrer em ângulos próximos ao ângulo de estol (*flutter* de estol). Logo, o acoplamento entre alguns graus de liberdade é fundamental para que o *flutter* ocorra. Fung (1955) demonstra que a oscilação na velocidade crítica é harmônica. Experimentos demonstram que os movimentos de flexão em pontos ao longo da asa estão aproximadamente em fase, assim como os movimentos de torção. Porém, os movimentos de flexão e torção estão consideravelmente fora de fase entre si. Demonstra-se que esta diferença de fase é responsável pela ocorrência de *flutter*.

A importância da diferença de fase entre movimentos em alguns graus de liberdade sugere a importância do número de graus de liberdade necessário para a análise do fenômeno. Considerada como um corpo elástico, uma asa possui muitos graus de liberdade. Mas, sua deformação elástica pode ser descrita por duas quantidades: a deflexão em um determinado ponto e a torção neste ponto. Para superfícies de controle, a rotação em torno de seu ponto de fixação é o grau de liberdade a ser considerado. Assim, é suficiente se considerar três variáveis para a análise de *flutter* em asas: a flexão, a torção e a rotação da superfície de controle.

Com a evolução das aeronaves os problemas relacionados ao *flutter* foram surgindo. Segundo Collar (1959), a primeira investigação quantitativa de um fenômeno aeroelástico é atribuída a Lanchester, durante a Primeira Guerra Mundial. Neste período, o biplano bombardeiro Handley Page 0/400 apresentou oscilações assimétricas de sua fuselagem e empenagem. Os profundores direito e esquerdo eram independentes e comandados através de cabos flexíveis. Segundo Bisplinghoff et al (1955), Lanchester descobriu, juntamente com Bairstow, que a fuselagem e a empenagem tinham dois modos principais de vibrar em baixa frequência. Em um modo os profundores oscilavam defasados em 180° ; no outro a fuselagem oscilava em um modo de torção. Lanchester reconheceu e descreveu dois importantes conceitos: as oscilações não eram resultados de ressonâncias induzidas por fontes de vibração (motor, por exemplo), mas sim auto-excitadas; o aumento da rigidez torcional dos profundores através da instalação de um tubo interligando-os poderia resolver o problema. Durante a investigação de Lanchester provavelmente surgiu a primeira análise teórica sobre *flutter* realizada por Leonard Bairstow.

Nesta época, os problemas aeroelásticos eram resolvidos por tentativa e erro. Somente por volta de 1930, vários autores apresentaram seus trabalhos relacionados a carregamentos em asas, divergência, e *flutter*, como o trabalho de Frazer e Duncan de 1928 e Theodorsen (1934), onde começaram a ser estudadas teorias sobre instabilidades aerodinâmicas e o mecanismo de *flutter*.

Logo após o final da Primeira Guerra Mundial desenvolveram-se pesquisas sistemáticas na Holanda sobre *flutter*. Nas investigações feitas por von Baumhauer e Koning em 1923 concluiu-se que o balanceamento de massa deveria eliminar o problema de *flutter* de aileron.

Garrick e Reed (1981) descrevem ainda os estudos britânicos no pós-guerra. Descrevem que o Comitê Britânico de Pesquisas Aeronáuticas concluiu que

aproximações teóricas sobre *flutter* já estavam bem desenvolvidas e que agora eram necessários desenvolvimentos experimentais. A partir desta época, alguns pesquisadores passaram a utilizar modelos simplificados em túneis de vento para o estudo e identificação do fenômeno. Destaca-se o surgimento na área aeronáutica de conceitos como: o conceito de modos de vibrar, que possibilitou o tratamento do problema através de equações diferenciais ordinárias ao invés de equações diferenciais parciais; iniciou-se o uso de modelos em escala para determinar a velocidade crítica de *flutter*; estabeleceu-se o conceito de similaridade entre o modelo e o protótipo em escala real, necessitando haver similaridade na geometria, massa e distribuições elásticas; parâmetros de escala envolvendo efeitos de compressibilidade (número de Mach), gravidade (número de Froude) e viscosidade (número de Reynolds) eram ignorados. Neste período o uso de modelos em túneis de vento para prever velocidades de *flutter* de aeronaves foi considerado eficaz.

Por volta de 1927 começaram algumas investigações sobre *flutter* nos Estados Unidos. Segundo Garrick e Reed (1981), as análises sobre *flutter* seguiram os métodos já desenvolvidos na Holanda e na Inglaterra.

No início da década de 30 um novo relatório do Comitê Britânico de Pesquisas Aeronáuticas demonstrou que o desenvolvimento experimental relacionado ao *flutter* se aproximou do desenvolvimento teórico, indicando o grande progresso em aeroelasticidade durante a década.

Theodorsen (1934) desenvolveu uma das mais importantes teorias sobre *flutter*. Determinaram-se as forças aerodinâmicas sobre um aerofólio oscilando ou sobre a combinação aerofólio-*aileron* com três graus de liberdade. Conhecidas as forças aerodinâmicas, o mecanismo de aeroelasticidade passou a ser analisado em detalhes. Separou-se a parte não-circulatória do potencial de velocidades da parte circulatória associada com o efeito da esteira. A condição do fluxo no bordo de fuga estabelece uma relação entre as duas partes, cuja solução leva a uma combinação de funções de Bessel designadas por $C(k)$. Esta função estabelece os atrasos entre os movimentos do aerofólio e as forças e momentos que surgem. Analogamente ao número de Strouhal, k é uma frequência reduzida igual a $\omega b/V$, onde ω é a frequência angular, b a metade da corda e V a velocidade do escoamento. Devido ao fato das várias fases e atrasos serem cruciais na determinação de quanta energia pode ser extraída do fluxo de ar, ou seja, se o *flutter* poderá ocorrer, a teoria de Theodorsen representou a mais exata teoria para um aerofólio plano idealizado.

outro do
ponto

I { Durante a Segunda Guerra Mundial ocorreram mudanças rápidas no desenvolvimento de aeronaves. Aviões de guerra de diversas configurações passaram a carregar armamentos externos, tanques nas pontas das asas e outros aparatos que causaram problemas de *flutter*. Collar (1959) relata que durante a Segunda Guerra houve uma tempestade de problemas aeroelásticos. /

II { Garrick e Reed (1981) citam que experimentos aeroelásticos em túneis de vento passaram a ser mais comuns nesta época. Os experimentos, juntamente com a análise matemática, deram aos projetistas um conhecimento que dificilmente seria obtido através de experimentos ou teoria individualmente. / Os experimentos variavam desde medidas dos carregamentos nas asas até testes de *flutter* usando modelos completos de aeronaves.

III { A confiabilidade dos testes realizados em túnel de vento para a validação de teorias, estudo de tendências e para a determinação de margens de segurança já era razoável para as aeronaves de baixas velocidades desenvolvidas nos primeiros trinta anos do século passado. / Cerca de uma década depois, com as aeronaves se aproximando da velocidade do som e com sua construção em materiais metálicos, novas exigências surgiram no projeto e fabricação dos modelos em escala para testes de *flutter*. [Durante os anos da guerra os modelos eram fabricados de cloreto de polivinil, um plástico com densidade e módulo de elasticidade menores que os do alumínio e que permitia que tanto a construção interna quanto externa do modelo fosse geometricamente igual à da estrutura real.]

IV { Testes passaram a ser realizados em vários lugares do mundo. Na Alemanha, um modelo aeroelástico completo de um Junkers JU-288, fabricado de plástico, foi testado em 1944. O modelo foi pendurado com fios flexíveis para possibilitar a simulação de modos de corpo rígido. Estes testes são considerados por Garrick e Reed (1981) como os possíveis primeiros experimentos de *flutter* nos quais a condição de vôo livre (modelo pendurado) foi realizada.

Em 1946 um túnel de vento para pesquisas de *flutter* em velocidades subsônicas começou a ser utilizado nos Estados Unidos, no centro de pesquisas de Langley. Este túnel foi modificado algum tempo depois para ter capacidade transônica, sendo o precursor do túnel de vento transônico de Langley. Do ponto de vista de *flutter*, a faixa de velocidade transônica é a mais crítica. Estas velocidades foram atingidas com o uso de motores a jato e novos problemas aeroelásticos começaram surgir, como o aileron

buzz, uma violenta oscilação do aileron sentida por pilotos durante testes em vôo da aeronave P-80.

Desde então, vários programas para testes de modelos de *flutter* em túnel de vento foram desenvolvidos como o *B-52 Program*, o *YF-17 AFS Program*, *F-16 AFS Program* entre outros, como descrito em Noor e Venneri (1993) e Mukhopadhyay (2003). No Brasil, um modelo aeroelástico completo da aeronave CBA-123 foi construído e testado pela Embraer, porém não há documentação ou publicações disponíveis para maiores detalhes. De modo geral, estes programas visam a verificação do comportamento aeroelástico de uma aeronave, testes de uso de novos materiais e desenvolvimento de controladores ativos para a supressão do *flutter*, como será descrito no próximo capítulo.

2.2.2 Análise por diagrama de blocos

As equações de movimento para um aerofólio bidimensional serão deduzidas no capítulo do modelo matemático escolhido para este trabalho. Por enquanto serão somente apresentadas como:

$$m\ddot{h} + S\ddot{\alpha} + hK_h = Q_h \quad (2.16)$$

$$S\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + \alpha K_a = Q_a \quad (2.17)$$

onde:

Q_h e Q_a são as forças externas que incluem forças aerodinâmicas e outras excitações mecânicas.

Considerando-se um aerofólio em movimento não estacionário em um fluido incompressível e a figura 2.5, a sustentação e o momento aerodinâmico induzidos por h e α em torno do eixo elástico são descritos nas equações 2.18 e 2.19 (Fung, 1955). Esta representação será utilizada somente para esta verificação, não sendo a utilizada no desenvolvimento do modelo aeroelástico deste trabalho.

$$L(\tau) = 2\pi b \rho U^2 \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau - \tau_0) \left[\alpha'(\tau_0) + \frac{1}{b} \frac{\partial h^2}{\partial t}(\tau_0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \frac{\partial \alpha^2}{\partial t}(\tau_0) \right] d\tau_0 +$$

$$+ \rho \pi U^2 \left(\frac{\partial h^2}{\partial t} - a_h b \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} \right) + \rho \pi b U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$M(\tau) = \left(\frac{1}{2} + a_h \right) 2\pi b \rho U^2 \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau - \tau_0) \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\tau_0) + \frac{1}{b} \frac{\partial h^2}{\partial t}(\tau_0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \frac{\partial \alpha^2}{\partial t}(\tau_0) \right] d\tau_0 +$$

$$a_h b \rho \pi U^2 \left(\frac{\partial h^2}{\partial t} - a_h b \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} \right) - \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \rho \pi b^2 U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\rho \pi b^2 U^2}{8} \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} \quad (2.19)$$

Figura 2.5 – Definição de algumas grandezas.

Define-se $P(\tau)$ e $Q(\tau)$ como a força e momento externos aplicados, além da força e momento aerodinâmico e introduzindo a definição de tempo adimensional, as equações de movimento ficam:

$$m \frac{U^2}{b^2} \frac{\partial h^2}{\partial t} + S \frac{U^2}{b^2} \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + m \omega_h^2 h = -L(\tau) + P(\tau) \quad (2.20)$$

$$S \frac{U^2}{b^2} \frac{\partial h^2}{\partial t} + I_a \frac{U^2}{b^2} \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + I_a \omega_a^2 \alpha = M(\tau) + Q(\tau)$$

As equações 2.20 serão analisadas para o caso de oscilação forçada em regime devido à excitação periódica. Este caso é de especial interesse para a determinação de

condições críticas de *flutter*, compondo o método de Theodorsen (Theodorsen, 1934), apresentado em Fung (1955), Bisplinghoff & Ashley (1962) e Dowell (1995).

Considerando-se a oscilação forçada de um aerofólio bidimensional em um fluxo, sob ação de uma força excitadora harmônica, a força e o momento externos, por unidade de comprimento, são:

$$P = P_0 e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}$$

onde P_0 e Q_0 são constantes complexas, ou seja, $P = P_0 e^{i\omega t} = (a + ib)e^{i\omega t}$.

A resposta transiente será desprezada, sendo de interesse somente a resposta em regime. A resposta do aerofólio deverá ser periódica e com o mesmo período da força excitadora. A resposta deverá ser harmônica se a entrada for harmônica, já que o sistema é linear. Assim, têm-se as respostas:

$$h = h_0 e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

onde os termos de índice zero são constantes complexas, com valores absolutos representando a amplitude e argumentos a fase e ω a frequência de excitação.

Com o tempo adimensional $\tau = Ut/b$ tem-se:

$$P(\tau) = P_0 e^{ik\tau} \quad Q(\tau) = Q_0 e^{ik\tau} \quad (2.23)$$

$$h(\tau) = h_0 e^{ik\tau} \quad \alpha(\tau) = \alpha_0 e^{ik\tau}$$

com $k = \frac{\omega b}{U}$ definindo a frequência reduzida.

As expressões de h e α podem ser substituídas nas equações 2.18 e 2.19 para se encontrar as forças aerodinâmicas para a oscilação harmônica. Para se evitar dificuldades matemáticas no limite inferior de integração $(-\infty)$, introduz-se o fator de convergência $e^{\varepsilon\tau_0}$ ($\varepsilon > 0$) nos integradores e faz-se o limite de ε para zero após as

integrais terem sido resolvidas. Assim, considera-se inicialmente o movimento divergente (instável) e depois este movimento é reduzido a zero. O problema físico continua sendo a determinação das forças aerodinâmicas para a oscilação harmônica. Define-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ik \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau - \tau_0) e^{ik\tau_0 + \varepsilon\tau_0} d\tau_0 = C(k) e^{ik\tau} \quad (2.24)$$

substituindo a equação 2.23:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau - \tau_0) & \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\tau_0) + \frac{1}{b} \frac{\partial h^2}{\partial t}(\tau_0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \frac{\partial \alpha^2}{\partial t}(\tau_0) \right] e^{\varepsilon\tau_0} d\tau_0 = \\ & = C(k) \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} kh_0 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) ik\alpha_0 \right] e^{ik\tau} \end{aligned} \quad (2.25)$$

A função $C(k)$ é a função de Theodorsen dada a seguir:

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^2(k)}{H_1^2(k) + iH_0^2(k)} = \frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)} \quad (2.26)$$

onde H e K são funções de Hänkel e funções de Bessel modificadas, respectivamente. Existem algumas expressões aproximadas para a função de Theodorsen, como a desenvolvida por R.T. Jones que pode ser encontrada em Fung (1955):

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k}i} \quad (2.27)$$

Substituindo as equações 2.23 e 2.25 nas equações 2.18 e 2.19 obtêm-se as expressões para sustentação e momento não estacionários:

$$\frac{L(\tau) e^{-ik\tau}}{\rho \pi b U^2} = -k^2 \left(\frac{h_0}{b} - a_h \alpha_0 \right) + ik\alpha_0 + 2C(k) \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} kh_0 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) ik\alpha_0 \right] \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{M(\tau)e^{-ik\tau}}{\rho\pi b^2 U^2} = & \left(\frac{1}{2} + a_h\right) 2C(k) \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} k h_0 + \left(\frac{1}{2} - a_h\right) i k \alpha_0 \right] - \\ & - k^2 a_h \left(\frac{h_0}{b} - a_h \alpha_0 \right) - \left(\frac{1}{2} - a_h\right) i k \alpha_0 + \frac{k^2}{8} \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esta formulação foi desenvolvida em Theodorsen (1934), testada através de comparações teóricas e experimentais em Theodorsen & Garrick (1940) e foi utilizada em vários trabalhos onde se realiza controle de resposta aeroelástica como em Karpel (1982), Theodorsen & Garrick (1940), Olds (1997), Gilliatt & Strganac (1998), Block & Strganac (1998) além de outros.

O fator k pode ser interpretado como uma medida de quanto o fluxo é não estacionário, ou seja, o quanto é significativa a influência da taxa de variação no tempo do ângulo de ataque sobre o coeficiente de sustentação, como representado no esquema a seguir.

Fica claro que quando $k \rightarrow 0$ (baixas frequências reduzidas) se obtém a aproximação quase-estacionária, ou seja $C(k) \rightarrow 1$. Da teoria quase-estacionária se obtém:

$$\frac{L(\tau)e^{-ik\tau}}{\rho\pi b U^2} = +2 \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} k h_0 + \left(\frac{1}{2} - a_h\right) i k \alpha_0 \right] \quad (2.30)$$

Comparando-se esta equação com o último termo da expressão 2.28, verifica-se que a sustentação devido à circulação pode ser obtida multiplicando-se a sustentação da teoria quase-estacionária pela função de Theodorsen. Os termos restantes da equação 2.28 são de origem não circulatória, levando em consideração as massas aparentes.

As equações 2.28 e 2.29 podem ser escritas na forma matricial.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{L(\tau)}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{M(\tau)}{\rho\pi b^2 U^2} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} k^2 a_h + ik + & \\ -k^2 + 2C(k)ik & + 2C(k) \left[1 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) ik \right] \\ & k^2 \left(\frac{1}{8} + a_h^2 \right) - \left(\frac{1}{2} - a_h \right) ik + \\ -k^2 a_h + 2C(k) \left(\frac{1}{2} + a_h \right) ik & + 2C(k) \left[\left(\frac{1}{2} + a_h \right) + \left(\frac{1}{4} - a_h^2 \right) ik \right] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{h_0}{b} \\ \alpha_0 \end{array} \right\} e^{ikt} \quad (2.31)$$

A equação anterior pode ser transformada para o domínio de Laplace substituindo $ik \rightarrow \bar{s}$ e $\bar{s} = sb/U$. A aproximação da função de Theodorsen dada na equação 2.27 se tornará:

$$C(\bar{s}) \cong \frac{0.5\bar{s}^2 + 0.2808\bar{s} + 0.01365}{\bar{s}^2 + 0.3455\bar{s} + 0.01365} \equiv \frac{N(\bar{s})}{\Delta(\bar{s})} \quad (2.32)$$

Assim uma função transferência de dimensão 2 por 2 é obtida entre as variáveis de entrada h/b e α e as variáveis de saída sustentação e momento aerodinâmico em torno do eixo elástico:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{L}(\bar{s}) \\ \bar{M}_a(\bar{s}) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} A_{11}(\bar{s}) & A_{12}(\bar{s}) \\ A_{21}(\bar{s}) & A_{22}(\bar{s}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} h(\bar{s})/b \\ \alpha(\bar{s}) \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\bar{L}(\bar{s})}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{\bar{M}(\bar{s})}{\rho\pi b^2 U^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{\Delta(\bar{s})} \left[\begin{array}{cc} \bar{s}^2 \Delta(\bar{s}) + 2\bar{s}N(\bar{s}) & (-\bar{s}^2 a_h + \bar{s})\Delta(\bar{s}) + \\ & + 2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \bar{s} \right] N(\bar{s}) \\ \bar{s}^2 a_h \Delta(\bar{s}) + 2 \left(\frac{1}{2} + a_h \right) \bar{s} N(\bar{s}) & - \left[\bar{s}^2 \left(\frac{1}{8} + a_h^2 \right) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \bar{s} \right] \Delta(\bar{s}) + \\ & + 2 \left[\left(\frac{1}{2} + a_h \right) + \left(\frac{1}{4} - a_h^2 \right) \bar{s} \right] N(\bar{s}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} h(\bar{s}) \\ \alpha(\bar{s}) \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

Uma forma de se enxergar o problema de *flutter* é tratando-o como um problema de autovalores.

Se realizarmos a transformação para o tempo adimensional τ nas equações de movimento apresentadas anteriormente,

$$\begin{aligned}\mu \frac{h_{\tau\tau}}{b} + \mu \kappa_\alpha \alpha_{\tau\tau} + \mu \bar{w}_h^2 \frac{h}{b} &= \frac{L(\tau)}{\rho \pi b U^2} \\ \mu \kappa_\alpha \frac{h_{\tau\tau}}{b} + \mu \bar{w}_\alpha^2 \alpha_{\tau\tau} + \mu \bar{w}_\alpha^2 \bar{w}_\alpha^2 \alpha &= \frac{M_a(\tau)}{\rho \pi b^2 U^2}\end{aligned}$$

com os termos como definidos anteriormente e $\bar{w}_{h,\alpha} = w_{h,\alpha} b / U$. Realizando a transformada de Laplace e escrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{s}^2 + \bar{w}_h^2 & \bar{s}^2 \kappa_\alpha \\ \bar{s}^2 \kappa_\alpha & \bar{s}^2 (\bar{s}^2 + \bar{w}_\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{-L(\tau)}{\rho \pi b U^2} \\ \frac{M_a(\tau)}{\rho \pi b^2 U^2} \end{bmatrix}$$

com $\bar{s} = \frac{sb}{U}$, a função transferência estrutural será dada por:

$$X(\bar{s}) = \frac{1}{\mu} E^{-1}(\bar{s}) F(\bar{s}) \quad (2.35)$$

A equação 2.33 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -\bar{L}(\bar{s}) \\ \bar{M}_a(\bar{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{11}(\bar{s}) & -A_{12}(\bar{s}) \\ A_{21}(\bar{s}) & A_{22}(\bar{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(\bar{s})/b \\ \alpha(\bar{s}) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

o que é equivalente a $F(\bar{s}) = A(\bar{s})X(\bar{s})$. Assim, fica claro da equação 2.34, que

$$A(\bar{s}) = \frac{1}{\Delta(\bar{s})} \begin{bmatrix} \bar{s}^2 \Delta(\bar{s}) + 2\bar{s}N(\bar{s}) & (-\bar{s}^2 a_h + \bar{s})\Delta(\bar{s}) + 2\left[1 + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\bar{s}\right]N(\bar{s}) \\ \bar{s}^2 a_h \Delta(\bar{s}) + 2\left(\frac{1}{2} + a_h\right)\bar{s}N(\bar{s}) & -\left[\bar{s}^2\left(\frac{1}{8} + a_h^2\right) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\bar{s}\right]\Delta(\bar{s}) + 2\left[\left(\frac{1}{2} + a_h\right) + \left(\frac{1}{4} - a_h^2\right)\bar{s}\right]N(\bar{s}) \end{bmatrix}$$

Um sistema de malha fechada é obtido considerando-se uma retroação aeroelástica como a apresentada na figura 2.6. Este sistema é equivalente aos sistemas apresentados nos diagramas de blocos das figuras 2.7 e 2.8.

Figura 2.6 - Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Figura 2.7 - Diagrama de blocos equivalente do sistema em malha fechada.

Figura 2.8 - Diagrama de blocos equivalente do sistema em malha fechada.

Os pólos associados a este sistema de retroação de múltiplas entradas e múltiplas saídas são dados pelas raízes ou autovalores associados com a matriz da expressão 2.37.

$$E(\bar{s}) - \frac{1}{\mu} A(\bar{s}) \quad (2.37)$$

Então a solução do problema de *flutter* será:

$$\begin{bmatrix} \bar{s}^2 + \bar{w}_h^2 & \bar{s}^2 x_\alpha \\ \bar{s}^2 x_\alpha & r_\alpha^2 (\bar{s}^2 + \bar{w}_h^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} \frac{-L(\tau)}{\rho \pi b U^2} \\ \frac{M_a(\tau)}{\rho \pi b^2 U^2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} A(\bar{s}) \begin{Bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

A partir da análise da equação 2.38 conclui-se que a solução não trivial (problema de autovalor) é obtida quando o determinante da equação 2.37 é zero, ou seja:

$$\left| E(\bar{s}) - \frac{1}{\mu} A(\bar{s}) \right| = 0 \quad (2.39)$$

As quatro raízes obtidas do polinômio característico, proveniente do determinante de *flutter*, são em geral quantidades complexas.

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + ik = \frac{\sigma b}{U} + i \frac{wb}{U}$$

onde σ é a taxa de amortecimento estrutural e w a frequência modal aeroelástica.

O *flutter* ocorre quando algum par complexo conjugado de raízes se torna instável, isto é, a parte real da raiz migra para a parte real positiva do plano complexo.

3 – Aeroservoelasticidade

3.1 - Introdução

O desenvolvimento dos sistemas de controle está relacionado à necessidade de alteração do comportamento dinâmico de alguns sistemas. Entre as aplicações destaca-se o controle ativo de sistemas aeroelásticos. Este tipo de sistema de controle tem como objetivo modificar o comportamento aeroelástico de um sistema através da aplicação de forças de controle. A aeroservoelasticidade é uma área interdisciplinar que envolve a interação entre aeroelasticidade e sistemas de controle (Dowell, 1995), seja na supressão de fenômenos aeroelásticos ou na influência da dinâmica dos atuadores sobre os fenômenos aeroelásticos.

As dificuldades encontradas no controle de sistemas aeroelásticos podem ser maiores do que as encontradas no controle de estruturas convencionais já que a dinâmica do sistema aeroelástico varia de acordo com as condições de voo (altitude, temperatura, pressão, velocidade, etc). O sistema de controle pode também se tornar uma fonte adicional de instabilidades se não for corretamente projetado. O projeto de um controlador para um sistema aeroelástico depende do objetivo proposto, onde se pode citar a redução da vibração ou de oscilações, aumento na manobrabilidade do sistema e estabilização de um sistema instável.

Um objetivo que pode ser destacado no controle de fenômenos aeroelásticos é a supressão de *flutter*. Fisicamente, tem-se como objetivo o aumento do envelope de voo da aeronave, o que é feito estabilizando-se o sistema aeroelástico que entrou em *flutter*. Isto pode ser feito movendo-se os pólos da função transferência de malha aberta desde o

semiplano direito para o semiplano esquerdo através da ação de um controlador ativo. Do ponto de vista de controle, a supressão de *flutter* é equivalente à estabilização de uma planta instável. O projeto do controlador deve garantir um nível de robustez previamente determinado, ou seja, ter a capacidade de estabilizar o sistema dentro de uma faixa pré-determinada de velocidades e distúrbios.

Geralmente as superfícies de sustentação das aeronaves possuem flapes no bordo de ataque e ou no bordo de fuga. Estas superfícies podem ser utilizadas como os atuadores de sistemas de controle como explorado em Block e Strganac (1998); Waszak (2001); Viperman et al. (1998); Horikawa e Dowell (1979); Karpel (1982); Meirovitch e Silverberg (1984); Dong e Mook (1991). A variação da posição da superfície de controle de acordo com o sinal do controle deverá gerar forças necessárias para a atenuação do fenômeno a ser controlado. Para o controle de fenômenos mais simples, como nas referências previamente citadas, o uso destas superfícies tem se mostrado eficaz. Deve-se atentar o possível atraso entre o comando para a deflexão destas superfícies e o surgimento das solicitações aerodinâmicas necessárias para o controle. Assim, o sistema de controle precisa ser preciso e robusto, de outro modo o controlador poderá amplificar o fenômeno a ser controlado ou gerar instabilidades adicionais.

Uma alternativa é o uso de atuadores que realizam o controle estrutural direto, como os piezelétricos (Heeg, 1993; Karpel e Moulin, 2004; Sahoo e Cesnik, 2002; Sanders et al., 2003). Estes atuadores possuem tempo de resposta significativamente menor, além de poderem ser distribuídos na estrutura de forma a não produzir forças e momentos indesejados.

Os possíveis benefícios obtidos com a aplicação de controladores ativos para a solução de problemas aeroelásticos começaram a ser percebidos no final da década de 1960 e início da década de 1970, conforme Cole et al. (2003). Resultados de testes com controladores ativos demonstraram que a vida de alguns componentes de aeronaves podia ser aumentada com o controle de vibração devido à conseqüente redução de efeitos de fadiga. O sucesso destas primeiras aplicações resultou em conhecimento e convicção que objetivos mais ambiciosos, como o controle ativo de *flutter*, poderiam ser atingidos com sucesso.

Deste então, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas provando os resultados favoráveis da modificação da resposta aeroelástica através de controladores ativos. Desse modo, melhorias no desempenho e na estabilidade de aeronaves foram atingidas enquanto o peso estrutural pôde ser reduzido. Alguns exemplos podem ser citados como

o *Active Flutter Suppression Program* (Sandford et al., 1975) onde diversas leis de controle foram aplicadas para a supressão do *flutter*. Destaca-se também o *B-52 Program* onde se investigou a supressão ativa do *flutter* e a melhoria na qualidade do voo através de controle ativo em um modelo em escala. Outro programa foi o *Active Flexible Wing Program* descrito em Noor e Venneri (1993) no qual se desenvolveu uma tecnologia multidisciplinar que integrava controle ativo com uma asa flexível com o objetivo de se obter desempenho aerodinâmico otimizado e controle. Podem ser citados ainda o *Benchmark Active Control Technology* (Scott e Pado, 2000) onde diversas leis de controle foram testadas para supressão de *flutter* e o *Active Aeroelastic Wing* (Sanders et al., 2003) cujo objetivo é o desenvolvimento de asas leves e flexíveis e controle através da variação da forma da asa. Vários outros desenvolvimentos podem ser encontrados em detalhes em Noor e Venneri (1993); Mukhopadhyay (2003); Cole et al. (2003); Abel (1997) entre outros.

comentar no final

Atualmente, a Aerosservoelasticidade vem se apresentando como uma alternativa para viabilizar projetos futuros que poderão exigir aeronaves que atendam a missões variadas, exigirão redução de peso e desempenho otimizado (Noor e Venneri, 1993). Dentro da Aerosservoelasticidade, o desenvolvimento de sistemas de controle é uma das áreas que, entre outras, vem evoluindo para que tal alternativa se viabilize com sucesso.

O desenvolvimento dos sistemas de controle vem ocorrendo ao longo da história de acordo com as necessidades de cada época. A Revolução Industrial, as Guerras Mundiais e o surgimento dos computadores foram alguns fatos que marcaram ao longo da história a necessidade e a possibilidade de desenvolvimento dos sistemas de controle (Lewis, 1992). Várias contribuições podem ser citadas no desenvolvimento dos sistemas de controle como o trabalho de Maxwell no estudo da relação entre o sinal das raízes da equação característica e a estabilidade do sistema; os critérios de estabilidade de Lyapunov, os estudos no domínio da frequência de Laplace, Fourier, Nyquist, Bode e Evans entre outros e os estudos no domínio do tempo que surgiram com os problemas não-lineares.

A escolha da técnica de controle a ser utilizada deve ser de acordo com as exigências do projeto em questão. Basicamente, dividem-se as teorias de controle em clássica e moderna, que são as de maior interesse neste trabalho. Destacam-se ainda as técnicas não-convencionais que envolvem os controladores *Fuzzy* e Neurais.

O controle clássico pode ser baseado em técnicas gráficas nas quais se trabalha com algumas possibilidades de projeto, resultando em controladores que não são únicos,

mas que em geral têm os limites de desempenho claramente estudados e conhecidos durante o desenvolvimento do projeto. Os controladores clássicos podem ser de difícil aplicação em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, onde se teria a necessidade de vários sistemas de realimentação com uma entrada e uma saída trabalhando simultaneamente (Lewis, 1992). Waszak e Srinathkumar (1995), Horikawa e Dowell (1979), Heeg (1993) e também Mukhopadhyay (2000) apresentam projetos de controladores clássicos para supressão de *flutter* baseado em técnicas gráficas como Lugar das Raízes e diagramas de Nyquist.

Os controladores modernos representam uma técnica no domínio do tempo onde uma representação em espaço de estados da planta a ser controlada é necessária. A grande vantagem destes controladores está no fato de poderem ser aplicados em sistemas MIMO ou SISO. Como no caso de controladores clássicos, algumas propriedades do sistema em malha aberta devem ser investigadas para se estudar algumas questões do desempenho do sistema em malha fechada, como a controlabilidade e a observabilidade do sistema. Mukhopadhyay (2003), destaca algumas contribuições para as técnicas modernas como o trabalho de Kalman em que se formalizou a noção de controladores modernos ótimos obtidos com a minimização de funções quadráticas. Este desenvolvimento é interesse deste trabalho e será detalhado no próximo item. Diversos autores como Mukhopadhyay (2000), Block e Strganac (1998), Olds (1997), Xing (2003), Singh e Yim (2003) apresentam aplicações de controladores modernos ótimos na supressão de *flutter*.

Mukhopadhyay (2003) destaca ainda a técnica que combina as vantagens de controladores modernos e clássicos, conhecida como síntese μ e H. Esta técnica alia o bom desempenho obtido com os controladores modernos com o claro entendimento do problema de controle que se tem durante o projeto de um controlador clássico. A aplicação deste tipo de controlador em projetos desenvolvidos para supressão de *flutter* vem sendo amplamente explorada como pode ser observado em Patil e Clark (2002), Newsom (2002), Waszak (1998), Viperman et al (1998), Karpel et al (2003) e em Armstrong (1993) entre outros.

Outras perspectivas também estão sendo utilizadas para o desenvolvimento de controladores para supressão de *flutter*.

Controladores Difusos têm a vantagem de dependerem de variáveis lingüísticas, ou seja, a experiência do projetista e o conhecimento do comportamento físico do sistema a ser controlado são suficientes para o projeto do controlador.

Controladores Neurais também são aplicados no controle de *flutter*, principalmente para o desenvolvimento de controladores adaptativos onde o treinamento da Rede Neural é feito *on-line*.

O desenvolvimento de controladores adaptativos abre uma perspectiva de desenvolvimento de controladores que possuam uma faixa de aplicabilidade mais estendida que controladores convencionais. A associação de algoritmos de identificação de sistemas e leis de controle pode ser uma alternativa para a obtenção de controladores adaptativos. A identificação do sistema se daria em tempo real e uma lei de controle, associada a este algoritmo, seria modificada, adaptando-se às diversas condições em que o fenômeno a ser controlado possa ocorrer. Andrighettoni e Mantegazza (1998) apresentam o projeto de controladores que seguem as características acima descritas.

3.2 – Projeto de um Controlador Regulador Linear Quadrático

Uma das formas de controle moderno é obtida baseada na minimização de índices de desempenho quadráticos. Este enfoque será descrito e utilizado para o desenvolvimento do controlador para supressão de *flutter* deste trabalho. O controle ótimo quadrático possui a vantagem de que o sistema projetado será estável, exceto nos casos em que o sistema não for controlável (Ogata, 2000). Em geral, os controladores modernos exigem a representação do sistema dinâmico a ser controlado na forma de espaço de estados.

A representação por estados é um método no domínio do tempo onde a planta do sistema é representada em termos de equações de estado e de saída. A representação de sistemas dinâmicos no espaço de estados pode ser descrita a partir da equação de movimento de um sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com nGDL, como na equação (3.1):

$$\mathbf{M}\ddot{\omega}(t) + \mathbf{C}\dot{\omega}(t) + \mathbf{K}\omega(t) = \mathbf{f}(\omega, t) \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, com dimensões n por n ; os vetores $\ddot{\omega}(t)$, $\dot{\omega}(t)$, $\omega(t)$ são os vetores aceleração, velocidade

e deslocamento, com dimensões n por 1 ; e $\mathbf{f}(\omega, t)$ é o vetor força de dimensões n por 1 . O vetor força pode ser expresso por:

$$\mathbf{f}(\omega, t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz de influência de entradas ou matriz de controle, de dimensão n por r , $\mathbf{F}$ é a matriz dos coeficientes de entrada de dimensão n por r , e $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entradas, de dimensão r por 1 , onde r é o número de entradas. Substituindo-se a expressão (3.2) na equação (3.1), multiplicando por $\mathbf{M}^{-1}$ este sistema de equações pode ser reescrito como um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de estado.}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de controle ou de influência das } r \text{ variáveis de controle.}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{Bmatrix} \text{ é o vetor de estados.}$$

O sistema representado pela equação (3.3) corresponde às equações de estado do sistema dinâmico em questão. Ele possui todas as informações dinâmicas contidas na equação (3.1). Além das equações de estado, um sistema de equações que expresse as m saídas pode ser determinado como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz de influência das saídas ou matriz de saída e $\mathbf{D}$ a matriz de transmissão direta.

Independentemente da forma de controle projetada, uma das mais importantes características de um sistema de controle é a sua estabilidade. A estabilidade de um sistema linear em malha aberta pode ser determinada pelos autovalores da matriz de estados $\mathbf{A}$. O sistema é meramente estável se todos os autovalores são imaginários; assintoticamente estável se os autovalores são reais negativos ou complexos com parte real negativa; instável se pelo menos um autovalor é real positivo ou complexo com parte real positiva.

No caso de malha fechada com realimentação de estados, a estabilidade é dada pelos autovalores da matriz de estados de malha fechada $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Analisando a equação de estados de malha fechada conclui-se que os pólos de malha fechada dependem dos ganhos de controle presentes na matriz de realimentação $\mathbf{K}$.

O projeto do controlador ótimo quadrático para um sistema representado pela equação (3.3) baseia-se na premissa de se encontrar a matriz $\mathbf{K}$ do vetor de controle ótimo na forma da equação (3.5) que minimize o índice de desempenho dado na equação (3.6).

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.5)$$

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.6)$$

Na equação (3.6) as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são chamadas de matrizes de peso, são reais simétricas definidas positivas e admite-se que $\mathbf{u}(t)$ seja sem restrições. O segundo termo do lado direito da equação (3.6) computa o gasto de energia nos esforços de controle. As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ determinam a importância relativa entre o erro e o dispêndio de energia. Na realidade, o compromisso do projeto LQR é a determinação da matriz de realimentação que minimize a equação (3.6) atingindo um compromisso entre o gasto de energia, a magnitude e a velocidade da resposta que estabilizará o sistema a ser controlado, o que irá variar com valores atribuídos às matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$. O diagrama da figura (3.1) mostra a configuração do controlador ótimo com índice de desempenho dado em função do vetor de estados. Obviamente este controlador só é aplicável quando se tem acesso a todos os estados do sistema.

Figura 3.1 – Configuração do controlador regulador com realimentação de estados.

Substituindo-se a equação (3.5) na equação da lei de controle (3.3) obtém-se a equação (3.7) do novo sistema estável.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (3.7)$$

Admitindo-se que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ seja estável e substituindo a equação (3.5) na equação (3.6) resulta na equação (3.8) a seguir.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \quad (3.8)$$

Admitindo-se que

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz hermitiana ou simétrica definida positiva, assim, obtém-se

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \left[(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \right] \mathbf{x}$$

comparando-se os membros desta equação e sendo ela verdadeira para qualquer $\mathbf{x}$ obtém-se a equação (3.9).

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (3.9)$$

Através do segundo método de Liapunov, demonstrado no Anexo 1, se $A - BK$ é uma matriz estável, conforme admitido anteriormente, então existe uma matriz P definida positiva que atende a equação (3.9). Destaca-se aqui um ponto importante no projeto deste tipo de controlador, as condições de estabilidade são verificadas inicialmente e, então, projeta-se o sistema dentro das limitações de estabilidade. O procedimento é determinar os elementos de P a partir da equação anterior e verificar se ela é definida positiva.

O índice de desempenho pode ser calculado como

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

como $A - BK$ foi admitida como estável, tem-se $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$ e logo

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (3.10)$$

de onde se conclui que o índice de desempenho depende somente do estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e da matriz P .

Como R foi anteriormente definida como real simétrica positiva definida ou hermitiana, pode-se escrever que

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

onde T é uma matriz não-singular. Assim, a equação (3.9) será modificada para

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{T}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.11)$$

A minimização do índice de desempenho J em relação a K requer a minimização da equação (3.12) em relação a K .

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{T}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x} \quad (3.12)$$

Como a equação (3.12) é não negativa, o mínimo ocorre quando ela vale zero, que ocorrerá na condição da equação (3.13).

$$\mathbf{TK} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.13)$$

Logo

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.14)$$

A equação (3.14) fornece a matriz de realimentação $\mathbf{K}$. Logo, a lei de controle ótima, quando o índice de desempenho é dado pela equação (3.6), é linear e é dada pela equação (3.15).

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (3.15)$$

Conforme verificado anteriormente, a matriz $\mathbf{P}$ deve satisfazer a equação (3.9) ou a equação reduzida (3.16). Mais de uma matriz $\mathbf{P}$ pode satisfazer a equação (3.9). Se o sistema é estável existe sempre uma matriz $\mathbf{P}$ definida positiva que satisfaz a equação (3.9). Logo, se ao se resolver esta equação uma matriz $\mathbf{P}$ definida positiva for encontrada, o sistema é estável. Outras matrizes $\mathbf{P}$ podem satisfazer a equação (3.9) e podem não ser definidas positivas e, portanto, deverão ser descartadas.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.16)$$

Esta equação é chamada de equação matricial reduzida de Riccati. Assim, no projeto deve-se resolver esta equação reduzida de Riccati para a matriz $\mathbf{P}$, se existir $\mathbf{P}$ definida positiva substitui-se $\mathbf{P}$ na equação (3.14) e obtém-se $\mathbf{K}$.

4. Modelo Aeroelástico

Modelos aeroelásticos são a base para o projeto e desenvolvimento analítico de controladores ativos para a supressão de instabilidades aeroelásticas como o *flutter*. Vários destes controladores têm como objetivo a aplicação de um sinal de controle em superfícies de comando, relacionando os movimentos destas superfícies com medições realizadas em uma asa, por exemplo. As forças e momentos aerodinâmicos gerados pelos controles modificam a distribuição do carregamento de modo a suprimir o *flutter*, como em Block & Strganac (1998); Waszak (2001); Viperman et al. (1998); Horikawa & Dowell (1979).

O desempenho da maioria dos sistemas de controle é fortemente dependente da qualidade do modelo matemático utilizado para simular o comportamento do sistema físico a ser controlado, Waszak & Fung (1998). Um modelo representativo fornece informações relativas ao comportamento dinâmico do sistema, o que muitas vezes é necessário para o bom projeto da lei de controle. Ainda, o modelo deverá ser utilizado para se realizar análises e simulações prévias à implementação de um controlador. Em casos de desenvolvimento e testes de controladores aeroelásticos estes fatos tornam-se mais importantes, já que falhas podem implicar em danos ao modelo físico, ao túnel de vento e a toda a instrumentação envolvida.

O modelo matemático que será utilizado neste trabalho deverá simular o comportamento aeroelástico de um sistema com dois graus de liberdade, conforme em Waszak (1998). O modelo físico é apresentado na figura 4.1 e pode ser representado pelo modelo estrutural da figura 4.2. Este modelo possui dois graus de liberdade, arfagem e deslocamento horizontal. Verifica-se que ele é composto por uma asa rígida e

um dispositivo flexível restringindo seus graus de liberdade. Uma discussão mais detalhada sobre o modelo físico será apresentada em capítulos posteriores.

Figura 4.1 - Conjunto dispositivo flexível e aerofólio. (Waszak, 1998).

Para o desenvolvimento numérico, o sistema físico acima será representado pelo modelo estrutural da figura 4.2. As distâncias e grandezas definidas na figura 4.2 serão utilizadas ao longo do equacionamento matemático. O ponto de fixação do modelo é o eixo elástico, situado a $1/4$ da corda.

Figura 4.2 - Modelo estrutural representando o sistema físico.

Utilizam-se as equações de Lagrange como ferramenta para a obtenção das equações de movimento do sistema e o princípio do trabalho virtual para a determinação das forças generalizadas atuantes no sistema. Este enfoque é bastante difundido e encontrado em Bisplinghoff et al. (1955), Dowell (1995), Bisplinghoff & Ashley (1962). A partir do conjunto completo de equações de movimento determina-se as equações de equilíbrio e perturbação e o modelo numérico em espaço de estados para o projeto do sistema de controle.

A aplicação do equacionamento de Lagrange é facilitada pela escolha conveniente das coordenadas generalizadas e dos sistemas de coordenadas. Lanczos

(1970) define as coordenadas generalizadas como um conjunto de parâmetros que podem caracterizar um sistema mecânico. Define-se as coordenadas generalizadas h como deslocamento vertical, θ o ângulo de arfagem e δ_c o ângulo da superfície de controle. Define-se ainda um sistema de coordenadas fixo na asa e que se move com ela. Um outro sistema de coordenadas é fixo no espaço inercial com orientação relativa ao dispositivo flexível. O sistema inercial de coordenadas é coincidente com a base de fixação do dispositivo experimental não deformado. Um outro sistema está fixado na superfície de controle.

4.1 Energia Cinética

Define-se a expressão para o deslocamento vertical v do aerofólio, em um ponto x qualquer, em função das coordenadas generalizadas e da análise das grandezas da figura 4.2, adotando-se a hipótese de pequenas perturbações. Assim:

$$v = h + \theta x + (x - e_h)\delta_c \quad (4.1)$$

A energia cinética pode ser expressa como a soma $T = T_1 + T_2$, onde os índices correspondem aos corpos 1 e 2 (asa e superfície de controle) indicados na figura 4.2 e o ponto (.) indica a derivada em relação ao tempo.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \int_c \dot{v}^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_0^{e_h} \dot{v}^2 \rho_1 dx + \frac{1}{2} \int_{e_h}^{e_2} \dot{v}^2 \rho_2 dx \quad (4.2)$$

onde ρ é a densidade.

Para a energia cinética no corpo 1 tem-se:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{e_h} (\dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}x + \dot{\theta}^2 x^2) \rho dx \quad (4.3)$$

Logo:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \int \rho dx + \frac{1}{2} 2 \dot{h} \dot{\theta} \int x \rho dx + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int x^2 \rho dx \quad (4.4)$$

onde:

$m = \int \rho dx$ é a massa do corpo

$S = \int x \rho dx = m_1 e_1$ é o momento estático

$I = \int \rho x^2 dx$ é o momento de inércia em relação ao centro de gravidade do corpo.

Sendo $I_1 = I + m e_1^2$ o momento de inércia em torno do eixo elástico. Então:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{h} + \dot{\theta} e_1)^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_1 \quad (4.5)$$

Do mesmo modo para o corpo 2 tem-se a energia cinética:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{h} + \dot{\theta} e_2 + \dot{\delta} e_s)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\delta})^2 \quad (4.6)$$

onde $I_2 = I + m e_2^2$ é o momento de inércia em torno do eixo elástico.

Assim tem-se a expressão para a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{h} + \dot{\theta} e_1)^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_1 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{h} + \dot{\theta} e_2 + \dot{\delta} e_s)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\delta})^2 \quad (4.7)$$

4.2 Energia Potencial

A energia potencial pode ser dividida em energia potencial gravitacional e energia potencial de deformação, apresentadas, respectivamente, nas equações 4.8 e 4.9.

$$U_g = -m_1 g (h + e_1 \sin \theta) \cos \theta_r - m_2 g (h + e_2 \sin \theta + e_s \sin \delta) \cos \theta_r \quad (4.8)$$

e

$$U_e = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}K_\theta \theta^2 + \frac{1}{2}K_\delta (\delta - \delta_c)^2 \quad (4.9)$$

onde θ_T é o ângulo da base giratória e K_h e K_θ são constantes das molas equivalentes representando as propriedades de rigidez de flexão e torção da balança.

A energia potencial total é a soma dos termos apresentados nas equações 4.8 e 4.9.

4.3 Equações de Lagrange

As equações de Lagrange são um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem obtidas a partir do princípio de Hamilton. Para o caso em questão, pode-se expressar as equações de Lagrange na forma das equações 4.10, utilizando as coordenadas generalizadas definidas anteriormente na figura 4.2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial U}{\partial h} &= Q_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} &= Q_\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} &= Q_\delta \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo-se as expressões de energia potencial e cinética (equações 4.7, 4.8 e 4.9) nas equações de Lagrange para as coordenadas generalizadas h , θ e δ respectivamente obtém-se:

$$\ddot{h}(m_1 + m_2) + \ddot{\theta}(m_1 e_1 + m_2 e_2) + \ddot{\delta} m_2 e_\delta + K_h h = m_1 g \cos \theta_T + m_2 g \cos \theta_T + Q_h \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{h}(m_1 e_1 + m_2 e_2) + \ddot{\theta}(I_1 + m_1 e_1^2 + I_2 + m_2 e_2^2) + \ddot{\delta}(m_2 e_2 e_\delta + I_2) + K_\theta \theta &= \\ = g \cos \theta \cos \theta_T (m_1 e_1 + m_2 e_2) + Q_\theta \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\ddot{h}(m_2 e_\delta) + \ddot{\theta}(m_2 e_2 e_\delta + I_2) + \ddot{\delta}(m_2 e_\delta^2 + I_2) + K_\delta(\delta - \delta_c) = m_2 g e_\delta \cos \delta \cos \theta_T + Q_\delta \quad (4.13)$$

resultando a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_1 e_1 + m_2 e_2 & m_2 e_\delta \\ m_1 e_1 + m_2 e_2 & I_1 + m_1 e_1^2 + I_2 + m_2 e_2^2 & m_2 e_2 e_\delta + I_2 \\ m_2 e_\delta & m_2 e_2 e_\delta + I_2 & m_2 e_\delta^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & K_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_c + \begin{bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \\ Q_\delta \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } m &= m_1 + m_2 & I_\theta &= I_1 + m_1 e_1^2 + I_2 + m_2 e_2^2 & S_{h\delta} &= m_2 e_\delta = S_{\delta h} \\ S_{h\theta} &= m_1 e_1 + m_2 e_2 = S_{\theta h} & S_{\theta\delta} &= m_2 e_2 e_\delta + I_2 = S_{\delta\theta} & I_\delta &= m_2 e_\delta^2 + I_2 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} m & S_{h\theta} & S_{h\delta} \\ S_{h\theta} & I_\theta & S_{\theta\delta} \\ S_{h\delta} & S_{\theta\delta} & I_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & K_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_c + \begin{bmatrix} m_1 + m_2 \\ m_1 e_1 + m_2 e_2 \\ m_2 e_\delta \cos \delta \end{bmatrix} g \cos \theta_T + \begin{bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \\ Q_\delta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Onde Q_h , Q_θ e Q_δ são as forças generalizadas associadas com cada coordenada generalizada, incluindo forças externas e não conservativas. Os termos $S_{h\theta}$, $S_{h\delta}$ e $S_{\theta\delta}$ são os acoplamentos inerciais entre as coordenadas generalizadas. O significado destes termos fica claro no desenvolvimento das equações de Lagrange para cada coordenada generalizada. Por exemplo, para a coordenada h obtém-se a equação 4.11 e verifica-se a influência da coordenada θ em h através de $S_{h\theta} = m_1 e_1 + m_2 e_2$. Do mesmo modo, a influência de δ em h através de $S_{h\delta} = m_2 e_\delta$. Na notação adotada verifica-se que os índices de S representam as coordenadas generalizadas que estão acopladas. No desenvolvimento das equações de Lagrange para as outras coordenadas verifica-se também os acoplamentos entre as mesmas. Pela forma da matriz de massa da equação 4.15 (não diagonal) já se verifica o acoplamento dinâmico do sistema.

Assumindo que a rigidez da superfície de controle é muito grande, os termos associados à força generalizada Q_δ na equação 4.15 podem ser desprezados e ainda pode ser assumido que $\delta = \delta_c$. Obtém-se assim a equação a seguir:

$$\begin{bmatrix} m & S_{h\theta} \\ S_{h\theta} & I_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{h\delta} \\ S_{\theta\delta} \end{bmatrix} \ddot{\delta} + \begin{bmatrix} m \\ S_{h\theta} \end{bmatrix} g \cos \theta_T + \begin{bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

para se completar as equações de movimento é necessário se determinar as expressões para as forças generalizadas.

4.3.1 Determinação das forças generalizadas

Forças Não-conservativas

No sistema proposto assume-se o modelo de amortecimento estrutural como $c = 2m\xi\omega$ (Inman, 1994).

Para a determinação da matriz de amortecimento aplica-se a Lei de Newton a partir do diagrama de corpo livre da figura 4.3.

Figura 4.3 - Diagrama de corpo livre.

Fazendo-se a somatória de forças na vertical nos corpos 1 e 2, somatória de momentos em torno do ponto de fixação da asa (eixo elástico) e somatória de momentos em torno do ponto de fixação do corpo 2 obtém-se resumidamente:

$$\begin{bmatrix} m & S_{h\theta} & S_{h\delta} \\ S_{h\theta} & I_\theta & S_{\theta\delta} \\ S_{h\delta} & S_{\theta\delta} & I_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_h & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & C_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & K_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \\ \delta \end{bmatrix} = \dots \quad (4.17)$$

assim verificam-se as mesmas matrizes de massa, rigidez encontradas por Lagrange e obtém-se a matriz de amortecimento.

As forças não-conservativas serão:

$$\mathbf{Q}^{nc} = \mathbf{C}[\dot{h} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\delta}]^T$$

Com o modelo de amortecimento previamente definido:

$$\begin{bmatrix} Q_h^{nc} \\ Q_\theta^{nc} \\ Q_\delta^{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & S_{h\theta} & S_{h\delta} \\ S_{h\theta} & I_\theta & S_{\theta\delta} \\ S_{h\delta} & S_{\theta\delta} & I_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_h w_h & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_\theta w_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_\delta w_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Forças Externas

No sistema em estudo as forças aerodinâmicas são as forças externas atuando sobre o corpo. Para a determinação utiliza-se o princípio do trabalho virtual. Este princípio é a base fundamental dos métodos de energia aplicados a sistemas dinâmicos e é descrito em detalhes em Lanczos (1970).

$$\delta W_e + \delta W_{in} = \delta U \quad (4.19)$$

onde δW_e é o trabalho virtual realizado por forças externas;

δW_{in} é o trabalho virtual realizado por forças inerciais durante um movimento virtual arbitrário de um sistema dinâmico;

δU é variação de energia resultante do deslocamento virtual.

No caso em questão, o princípio pode ser utilizado para a determinação das forças externas generalizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Q_h^e &= \frac{\partial \delta W}{\partial \delta h} \\ Q_\theta^e &= \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta} \\ Q_\delta^e &= \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \delta} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde os termos do denominador são os deslocamentos virtuais de cada coordenada generalizada.

Determina-se a expressão para o trabalho virtual em termos das coordenadas generalizadas na equação 4.21.

$$\delta W = Q_\theta^e \delta \theta + Q_h^e \delta h + Q_\delta^e \delta \delta \quad (4.21)$$

No caso em questão, o trabalho virtual pode ser dado pela equação 4.22.

$$\delta W = \int_0^b \int_{-c/2}^{c/2} p(x, y, t) \delta z(x, y, t) dx dy \quad (4.22)$$

Onde b é a envergadura da semi-asa, y o eixo na direção da envergadura, $p(x, y, t)$ é a distribuição de pressão sobre a superfície da asa e $\delta z(x, y, t)$ é o deslocamento virtual normal à superfície da asa. Na figura 4.4 está representada esquematicamente a distribuição idealizada de pressão $p(x, t)$ em uma seção do aerofólio.

Figura 4.4 - Representação da distribuição de pressão no aerofólio.

O deslocamento virtual definido na equação 4.22 pode ser escrito em termos das coordenadas generalizadas conforme a equação 4.23.

$$\delta z(x, y, t) = \delta h(t) + (x - x_p)\delta\theta(t) + (x - x_f)\delta\delta \quad (4.23)$$

Substituindo a equação 4.23 na 4.22:

$$\delta W = \delta h \iint p(x, y, t) dx dy + \delta\theta \iint p(x, y, t)(x - x_p) dx dy + \delta\delta \iint p(x, y, t)(x - x_f) dx dy \quad (4.24)$$

assim tem-se a expressão para o trabalho virtual e a definição das forças aerodinâmicas envolvidas:

$$\delta W = \delta h(-L) + \delta\theta M_p + \delta\delta H_\delta \quad (4.25)$$

onde L é a força de sustentação, M_p é o momento de arfagem em torno de x_p e H_δ é momento da superfície de controle em torno de seu ponto de fixação x_f .

As forças aerodinâmicas podem ser aproximadas através de derivadas de estabilidade e controle. Esta é uma forma simples para a representação das forças e momentos aerodinâmicos. Porém, no caso em questão, esta forma simplificada de representação é aceitável devido às baixas frequências envolvidas. Assim:

$$L = \bar{q} S C_L = \bar{q} S \left[C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} (C_{L\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{L\dot{\theta}} \dot{\theta} + C_{L\dot{\delta}} \dot{\delta}) \right] \quad (4.26)$$

$$M_p = \bar{q} S \bar{c} C_M = \bar{q} S \bar{c} \left[C_{M0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} (C_{M\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{M\dot{\theta}} \dot{\theta} + C_{M\dot{\delta}} \dot{\delta}) \right] \quad (4.27)$$

Para a representação das forças aerodinâmicas generalizadas de uma forma coerente com a equação de movimento encontrada, equação 4.16, é necessário que se estabeleça uma relação entre o ângulo de ataque da asa α e as coordenadas generalizadas (considerando o conjunto asa e balança), como na equação 4.28.

$$\alpha(x,t) = \theta_r + \theta(t) + \frac{\dot{h}(t)}{U_0} + \frac{l(x)\dot{\theta}(t)}{U_0} - \frac{w_g(x,t)}{U_0} \quad (4.28)$$

onde θ_r é o ângulo inicial da balança, $l(x)$ é a distância entre o ponto de fixação (eixo elástico) e o ponto no qual se mede o ângulo de ataque, w_g são as perturbações do fluxo e U_0 é a velocidade do fluxo livre.

Substituindo-se a expressão do ângulo de ataque, equação 4.28, nas equações das forças aerodinâmicas generalizadas 4.26 e 4.27 encontra-se na forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_h^* \\ Q_\theta^* \end{bmatrix} &= \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_{L_0} \\ \bar{c}C_{M_0} \end{bmatrix} + \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_{L_\alpha} \\ \bar{c}C_{M_\alpha} \end{bmatrix} \theta_r + \frac{\bar{q}S\bar{c}}{sU_0^2} \begin{bmatrix} -C_{L_{\dot{\alpha}}} & -l(x)C_{L_{\dot{\alpha}}} \\ \bar{c}C_{M_{\dot{\alpha}}} & \bar{c}l(x)C_{M_{\dot{\alpha}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\bar{q}S}{U_0} \begin{bmatrix} -C_{L_\alpha} & -l(x)C_{L_\alpha} - \frac{\bar{c}}{2}(C_{L_{\dot{\alpha}}} + C_{L_{\dot{\theta}}}) \\ \bar{c}C_{M_\alpha} & \bar{c}l(x)C_{M_\alpha} + \frac{\bar{c}^2}{2}(C_{M_{\dot{\alpha}}} + C_{M_{\dot{\theta}}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \bar{q}S \begin{bmatrix} 0 & -C_{L_\alpha} \\ 0 & \bar{c}C_{M_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0} \begin{bmatrix} -C_{L_{\delta}} \\ \bar{c}C_{M_{\delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \end{bmatrix} + \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_{L_{\delta}} \\ \bar{c}C_{M_{\delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix} - \frac{\bar{q}S}{U_0} \begin{bmatrix} -\frac{\bar{c}}{2U_0}C_{L_{\dot{\alpha}}} & -C_{L_\alpha} \\ -\frac{\bar{c}^2}{2U_0}C_{M_{\dot{\alpha}}} & \bar{c}C_{M_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_g \\ w_g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.4 Equações de movimento

A equação completa de movimento do sistema é obtida substituindo-se as equações das forças generalizadas (4.18 e 4.29) na equação de movimento (4.16). De uma forma geral apresenta-se :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2} \mathbf{M}_a \right) \ddot{\Psi} + \left(\mathbf{D}_s - \frac{\bar{q}S}{2U_0} \mathbf{D}_a \right) \dot{\Psi} + (\mathbf{K}_s - \bar{q}S\mathbf{K}_a) \Psi = \\ = \bar{q}S\mathbf{Q}_0^* + \bar{q}S\mathbf{Q}_r\theta_r + \mathbf{M}_s g \cos \theta_r + \mathbf{B}_2 \ddot{\delta} + \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0} \mathbf{B}_1 \dot{\delta} + \bar{q}S\mathbf{B}_0 \delta + \frac{\bar{q}S}{U_0} \mathbf{E} w \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde se define:

$$\Psi = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{vetor de coordenadas generalizadas;}$$

$$\delta = [\delta] \quad \text{vetor de entrada da superfície de controle;}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dot{w}_\xi \\ w_\xi \end{bmatrix} \quad \text{vetor de distúrbios;}$$

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} m & S_{h\theta} \\ S_{h\theta} & I_\theta \end{bmatrix} \quad \text{matriz estrutural de massa;}$$

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} -C_{L\dot{\alpha}} & -l(x)C_{L\dot{\alpha}} \\ \bar{c}C_{M\dot{\alpha}} & \bar{c}l(x)C_{M\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \quad \text{matriz aerodinâmica de massa;}$$

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} m \\ S_{h\theta} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de acoplamento de massa;}$$

$$\mathbf{D}_s = -\mathbf{M}_s \begin{bmatrix} 2\xi_h w_h & 0 \\ 0 & 2\xi_\theta w_\theta \end{bmatrix} \quad \text{matriz de amortecimento estrutural;}$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} -C_{L\alpha} & -l(x)C_{L\alpha} - \frac{\bar{c}}{2}(C_{L\dot{\alpha}} + C_{L\dot{q}}) \\ \bar{c}C_{M\alpha} & \bar{c}l(x)C_{M\alpha} + \frac{\bar{c}^2}{2}(C_{M\dot{\alpha}} + C_{M\dot{q}}) \end{bmatrix} \quad \text{matriz de amortecimento aerodinâmico;}$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad \text{matriz de rigidez estrutural;}$$

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} 0 & -C_{L\alpha} \\ 0 & \bar{c}C_{M\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de rigidez aerodinâmica;}$$

$$\mathbf{Q}_0^e = \begin{bmatrix} -C_{L_0} \\ \bar{c}C_{M_0} \end{bmatrix}$$

matrizes de forças generalizadas aerodinâmicas estáticas;

$$\mathbf{Q}_T = \begin{bmatrix} -C_{L\alpha} \\ \bar{c}C_{M\alpha} \end{bmatrix}$$

matrizes de controle:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} -C_{L\delta} \\ \bar{c}C_{M\delta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -C_{L\delta} \\ \bar{c}C_{M\delta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} S_{h\delta} \\ S_{\theta\delta} \end{bmatrix}$$

Neste ponto observa-se o efeito das forças aerodinâmicas sobre o sistema. Estas forças modificam as propriedades de massa, rigidez e amortecimento do sistema original. Este acoplamento aerodinâmico é essencial para o estudo das instabilidades aeroelásticas.

Considerando todas as derivadas da equação 4.30 como zero e resolvendo-se em função das coordenadas generalizadas obtém-se o equilíbrio estático do sistema:

$$\Psi_0 = (\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_a)^{-1} [\mathbf{Q}_0^* + \mathbf{Q}_T \theta_T + \mathbf{M}_g g \cos \theta_T + \mathbf{B}_0 \delta_0] \quad (4.31)$$

o subscrito (0) nas coordenadas generalizadas indicam equilíbrio estático e nas entradas de controle representam um valor fixo.

As coordenadas generalizadas podem ser escritas como a soma da parte estática Ψ_0 mais uma perturbação $\tilde{\Psi}$:

$$\Psi = \Psi_0 + \tilde{\Psi} \quad (4.32)$$

Da mesma forma as entradas de controle podem ser expressas como a soma da parte estática δ_0 mais uma parte dinâmica $\tilde{\delta}$:

$$\delta = \delta_0 + \tilde{\delta} \quad (4.33)$$

Substituindo as equações 4.32 e 4.33 na equação 4.30, utilizando o fato de que Ψ_0 , θ_T e δ_0 são constantes e eliminando os termos constantes utilizando-se a equação 4.31, resulta a equação de movimento em espaço de estados do sistema a seguir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\Psi}} \\ \dot{\tilde{\Psi}} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_s\right)^{-1}(\mathbf{K}_s - \bar{q}S\mathbf{K}_a) & -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\left(\mathbf{D}_s - \frac{\bar{q}S}{2U_0}\mathbf{D}_a\right) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Psi}} \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\delta} + \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0}\mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\delta} + \\
& + \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\bar{q}S\mathbf{B}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\delta} + \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\frac{\bar{q}S}{U_0E} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

A equação 4.34 pode ainda ser simplificada para a forma da equação 4.35 desprezando-se os termos relativos a $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ e $\mathbf{w}$. Conforme será verificado em capítulos posteriores, os termos que consideram a dinâmica do sistema de atuação podem ser desprezados já que a frequência natural (em torno de 10 Hz) deste sistema é significativamente maior do que a frequência característica do fenômeno a ser controlado (em torno de 2 Hz). O termo relativo a um possível modelo de turbulência também foi desprezado em virtude das características do túnel de vento em que se pretende trabalhar.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\Psi}} \\ \dot{\tilde{\Psi}} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_s\right)^{-1}(\mathbf{K}_s - \bar{q}S\mathbf{K}_a) & -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\left(\mathbf{D}_s - \frac{\bar{q}S}{2U_0}\mathbf{D}_a\right) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Psi}} \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\bar{q}S\mathbf{B}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\delta}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

As equações de movimento do sistema podem ser apresentadas na forma das equações 4.30 ou 4.35. Na forma de espaço de estados, equação 4.35, facilita-se o desenvolvimento de projetos de sistemas de controle. Embora esta equação tenha sido desenvolvida somente para uma superfície de controle, sua extensão para múltiplas superfícies é direta devido ao fato de não haver acoplamento inercial entre as possíveis superfícies de controle. A proximidade destas superfícies implica em acoplamento aerodinâmico entre as mesmas, o que pode ser aproximado no equacionamento das forças aerodinâmicas.

5 – Projeto e Desenvolvimento do Aparato Experimental

O desenvolvimento do aparato experimental é uma parte fundamental do trabalho. Este desenvolvimento é baseado em um modelo conceitual do sistema experimental proposto e inclui o projeto e construção de um dispositivo flexível, o projeto e a construção do modelo da asa, o desenvolvimento do sistema de medição e aquisição e o desenvolvimento do sistema de atuação.

O conceito fundamental do projeto experimental é o desenvolvimento de um dispositivo flexível que, associado a uma asa rígida, possibilite a ocorrência do *flutter* bidimensional dentro da faixa de velocidades do túnel de vento disponível no laboratório. O *flutter* bidimensional pode ser caracterizado pela combinação dos modos de flexão e torção. Logo, o sistema experimental deve ser um sistema com dois graus de liberdade, com o primeiro e segundo modos estruturais sendo, respectivamente, o primeiro modo de flexão e o primeiro modo de torção. Estes modos devem ser bem definidos e distantes dos demais modos do sistema físico, pois serão estes os modos envolvidos no *flutter*.

Para se garantir as condições estruturais descritas, desenvolveu-se um modelo em elementos finitos para o projeto do dispositivo flexível. Os resultados obtidos com o modelo em elementos finitos foram testados em simulações com o modelo aeroelástico e assim, as condições de *flutter* eram verificadas, até que as condições que atendessem as características do túnel de vento fossem obtidas. Construído o modelo físico, uma análise modal experimental para a confirmação das características dinâmicas do sistema foi realizada. Um algoritmo de identificação de sistemas, ERA (*Eingensystem*

Realization Algorithm), foi utilizado para a identificação dos modos e frequências a partir dos dados experimentais.

5.1 Projeto e Desenvolvimento do Dispositivo Flexível

No uso de asas rígidas para o estudo de *flutter*, o dispositivo ou suporte flexível é quem garante as características dinâmicas ao modelo experimental. Estas características, associadas às características aerodinâmicas do sistema, devem se adequar às condições necessárias para a ocorrência do *flutter* no túnel de vento utilizado.

Alguns autores propõem diferentes configurações de dispositivos flexíveis para a obtenção do *flutter* em dois graus de liberdade com asas rígidas. Heeg (1993) propõe um modelo composto pela associação de lâminas para a obtenção de um dispositivo com dois graus de liberdade. Duas lâminas paralelas são responsáveis pelas características estruturais do modo de flexão e uma lâmina normal a estas é responsável pelas características do modo de torção, como se pode observar na figura 5.1. Uma vantagem deste projeto é a facilidade na modificação das características estruturais do dispositivo através da modificação das dimensões das lâminas, adaptando-as a diferentes condições desejadas. Porém, no caso deste estudo, a adaptação deste tipo de dispositivo ao túnel de vento não seria uma tarefa simples.

Figura 5.1 – Dispositivo proposto por Heeg (1993).

Block e Strganac (1998) apresentam um dispositivo onde as características dinâmicas dos dois graus de liberdade são dadas pela associação de molas, como se observa na figura 5.2. Este dispositivo caracteriza-se principalmente pela facilidade de inclusão de características não lineares ao *flutter*. Apesar de alguma complexidade construtiva, a variedade de molas disponíveis no mercado representa uma ampla possibilidade de modificação das características estruturais.

Figura 5.2 – Dispositivo proposto por Block e Strganac (1998).

Um outro dispositivo em que as características estruturais dos modos são dadas pelas características de molas lineares foi apresentado por Yang et al (1995). Um dispositivo semelhante ao anterior foi proposto por Chowdhury e Sarkar (2003), conforme pode se observar na figura 5.3. Verifica-se que este é um dispositivo mais complexo e que permite até três graus de liberdade.

Figura 5.3 – Dispositivo proposto por Chowdhury e Sarkar (2003).

O dispositivo proposto por Dansberry et al. (1993) também possui dois graus de liberdade, o que é garantido por sua forma construtiva dada pela associação de barras e eixos. Este dispositivo foi desenvolvido durante o projeto *BACT* (*Benchmark Active Control Technology*). As características estruturais do sistema podem ser modificadas através da variação das dimensões da barra e eixos e através da variação da posição dos mesmos. Este sistema apresenta uma razoável facilidade construtiva e a fácil adaptação ao túnel de vento do laboratório e assim, um dispositivo similar ao proposto por estes autores será desenvolvido neste capítulo. Um esquema da asa rígida montada no dispositivo flexível é mostrado na figura 5.4.

Figura 5.4 – Esquema do dispositivo com a asa montada no dispositivo flexível.

O dispositivo flexível é constituído por uma placa superior, quatro eixos circulares e uma barra central, como é mostrado na figura 5.5. À placa superior prende-se a asa e esta placa é suportada pelos eixos e pela barra central. Todas as conexões nas extremidades da barra central e dos eixos são do tipo engastadas. Os eixos e a barra central determinam as características elásticas do sistema e a asa acoplada à placa superior oscilará em arfagem e deslocamento horizontal, torção e flexão respectivamente.

O objetivo do projeto do dispositivo é se obter uma estrutura com o primeiro modo estrutural definido como primeiro modo de flexão e com o segundo modo estrutural definido como o primeiro modo de torção de uma estrutura engastada. Além

disso, estes modos devem ser próximos entre si, mas distantes dos modos de frequência mais alta. Ainda, as características de rigidez destes modos devem ser tais que, associadas às forças e momentos aerodinâmicos gerados pela asa e associados à massa total do sistema permitam a ocorrência do *flutter* em uma velocidade possível de ser obtida no túnel de vento a ser utilizado. Como já descrito, o *flutter* bidimensional ocorre no acoplamento dos modos de corpo rígido do sistema, flexão e torção, sob a ação de efeitos aerodinâmicos.

Figura 5.5 – Esquema da montagem do sistema no túnel de vento.

A barra central e os eixos influenciam diretamente as características estruturais do dispositivo. Além da influência estrutural, os eixos também têm como objetivo garantir um deslocamento paralelo da placa superior à superfície do túnel, tanto em flexão como em torção, como pode se observar na figura 5.5. A determinação correta das características geométricas da barra central garante um aumento na rigidez na direção da corda, evitando-se modos laterais entre as frequências envolvidas no *flutter* e garantindo-se o desacoplamento entre os modos de flexão e torção em condições anteriores ao *flutter*.

O eixo elástico do conjunto asa e dispositivo flexível é localizado no eixo central do dispositivo flexível, ou seja, na linha média ao longo do comprimento de sua barra central. Assim, a linha do centro de gravidade da asa deverá estar localizada coincidente com o eixo elástico do dispositivo flexível para se garantir o desacoplamento entre modos de flexão e torção e implicando em facilidades nas medições. A adição de massa

na direção da corda, em regiões anteriores ou posteriores da asa, é uma forma de se corrigir e de se garantir o desacoplamento entre os modos.

Diferentes modelos de asa podem ser testados com o mesmo dispositivo flexível. A possibilidade anteriormente citada de adição da massa ou mesmo a troca de alguns componentes do dispositivo flexível permite a adequação estrutural de um novo conjunto de modelo e dispositivo flexível nas condições do túnel de vento a ser utilizado.

5.1.1 – Modelo em Elementos Finitos

Um modelo em elementos finitos foi desenvolvido para o projeto do dispositivo flexível utilizando-se o programa *Ansys®*. O modelo representa o conjunto asa e dispositivo flexível. Através deste modelo determinaram-se as dimensões dos componentes do dispositivo flexível com o objetivo de se ter um sistema de dois graus de liberdade em conformidade com as características descritas no item 5.1. Estas condições garantem que, caso se obtenha o *flutter*, a velocidade do túnel de vento que excitará os modos de corpo rígido de flexão e torção (envolvidos no *flutter*) não excitará significativamente os modos mais altos, garantindo-se um fenômeno tão bidimensional quanto possível.

Uma outra condição a ser atendida é que as características de rigidez dos modos envolvidos no *flutter* devem ser tais que, associadas às forças e momentos aerodinâmicos gerados pela asa e associados à massa total do sistema permitam a ocorrência do *flutter* em uma velocidade possível de ser obtida com o túnel de vento em uso. Um fato importante nesta fase do projeto é a verificação de condições de divergência do sistema. Caso esta verificação não seja considerada há a possibilidade da velocidade crítica de divergência ser menor que a velocidade crítica de *flutter*, impedindo a ocorrência do segundo fenômeno.

Realizaram-se várias modificações durante a fase de projeto até que as condições citadas foram atendidas. Durante o projeto os resultados obtidos com o modelo em elementos finitos eram utilizados nas simulações realizadas com o Modelo Aeroelástico para se verificar as condições de *flutter*, principalmente velocidade e frequência. As

dimensões do dispositivo flexível foram modificadas até que uma velocidade crítica de *flutter* em torno de 25 m/s fosse obtida.

No modelo em elementos finitos foram utilizados os elementos *Beam 4* e *Shell 63*. O elemento tipo *Beam 4* foi utilizado para a representação dos eixos do dispositivo flexível. Este é um elemento estrutural elástico 3D. O elemento *Shell 63* foi utilizado na modelagem da barra central do dispositivo flexível. Este também é um elemento estrutural elástico 3D e que permite a modelagem da barra como uma viga tipo Euler devido às relações comprimento e espessura da mesma. A condição de engaste foi aplicada na base da barra central e dos eixos. O material do dispositivo flexível é aço 1020, exceto para a placa superior fabricada em alumínio. As dimensões finais definidas são mostradas na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Dimensões definidas a partir do modelo em elementos finitos.

Elemento	Dimensões (mm)
Barra central	Comprimento - 700
	Largura - 101
	Espessura - 2
Eixos	Diâmetro – 5,5
Placa superior	Espessura – 5,8
Asa	Envergadura – 800
	Largura – 450

Outra dimensão importante determinada durante o projeto é a posição dos eixos. Os eixos são equidistantes e estão posicionados a 100 milímetros em relação ao centro da placa superior e da placa inferior. A variação do posicionamento dos eixos em relação ao centro do dispositivo flexível é a única forma de se alterar o modo de torção independentemente em relação ao modo de flexão.

As frequências naturais dos seis primeiros modos determinados são mostradas na tabela 5.2. Os modos de vibrar na direção da corda não foram verificados com maiores detalhes, mas o primeiro modo lateral também é mostrado na tabela 5.2 como o modo número 4. Verifica-se que este modo está distante dos modos envolvidos no *flutter*, não influenciando significativamente o fenômeno. As frequências dos modos seguintes já

são muito altas se comparadas à frequência esperada para o *flutter*, por isso estes modos não serão investigados em detalhes, somente citados.

Tabela 5.2 – Frequências naturais do conjunto balança e asa determinadas por elementos finitos.

Modo	Frequência (Hz)	Descrição
1	1,3	Primeiro modo de flexão
2	2,1	Primeiro modo de torção
3	13,6	Segundo modo de flexão
4	15,5	Primeiro modo lateral
5	27,8	Primeiro modo da barra central
6	45,1	Primeiro modo relativo aos eixos

Determinou-se também a rigidez de flexão e torção do conjunto. Aplicou-se uma força conhecida normal à superfície da asa e verificou-se o deslocamento, determinando-se a rigidez de flexão. Aplicou-se também um momento conhecido na ponta da asa, determinou-se o deslocamento angular e calculou-se a rigidez torcional. Os valores são mostrados na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Rigidez de flexão e torção determinadas a partir do modelo de elementos finitos.

K_h (N/m)	K_0 (Nm)
860	45

Os modos de vibrar do conjunto são mostrados nas figuras 5.6 até 5.10.

Figura 5.6 – Primeiro modo de flexão determinado por elementos finitos a 1,3 Hz.

Figura 5.7 - Primeiro modo de torção determinado por elementos finitos a 2,1 Hz.

Figura 5.8 – Segundo modo de flexão determinado por elementos finitos a 13,6 Hz.

Figura 5.9 – Primeiro modo da barra central determinado por elementos finitos a 27,8 Hz.

Figura 5.10 – Um dos modos relativos aos eixos, determinado por elementos finitos a 45,1 Hz.

Observa-se na tabela 5.2 que os modos de vibrar e as frequências naturais do primeiro e do segundo modo do dispositivo experimental estão bem definidos e separados dos modos mais altos. Como estas são as frequências envolvidas no *flutter*, assume-se que o *flutter* com dois graus de liberdade poderá ocorrer.

Paralelamente ao projeto e construção do dispositivo flexível, utilizou-se um programa de Malha de Vórtices para a determinação dos coeficientes aerodinâmicos utilizados no Modelo Aeroelástico. Com estes dados e com estas características determinadas nas simulações em elementos finitos verificou-se que seria possível obter o *flutter* em velocidades próximas de 25 m/s, como será mostrado no próximo capítulo. Destaca-se que o túnel de vento do Laboratório de Aerodinâmica da EESC – USP atinge uma velocidade máxima em torno de 50 m/s, logo, durante os experimentos de *flutter* estaria se trabalhando em uma faixa segura de velocidade.

Das simulações realizadas durante esta fase de projeto do dispositivo flexível algumas conclusões interessantes podem ser destacadas:

- A variação das dimensões da barra central influencia a rigidez de ambos os modos, porém mais significativamente no modo de torção;
- A variação das dimensões dos eixos influencia significativamente as características dos dois modos;
- A variação da tensão nos eixos altera significativamente o modo de torção;
- A variação da posição dos eixos em relação ao centro do dispositivo altera somente o modo de torção.

As conclusões acima são importantes para o ajuste do projeto do dispositivo flexível às condições do túnel de vento que se deseja utilizar. Fica claro também a dificuldade de se alterar as características dos modos envolvidos no *flutter* de forma independente quando se utiliza um dispositivo flexível como o adotado neste trabalho. Quase sempre, a tentativa de ajuste das características de um modo irá modificar o outro, dificultando o ajuste do sistema.

Algumas aproximações foram assumidas na definição do modelo em Elemento Finitos e portanto, algumas diferenças entre os resultados simulados e os resultados experimentais são esperadas. A asa foi considerada como uma placa plana e os engastes dos eixos e barra central foram considerados ideais, o que não ocorre na prática. Estas relações de contato são reconhecidamente um problema complexo em elementos finitos e certamente são uma fonte de erro no modelo em questão.

Após as simulações iniciou-se a construção do dispositivo flexível e em seguida a verificação experimental de suas características dinâmicas.

5.1.2 – Análise Modal Experimental e Identificação

A partir das dimensões determinadas através das simulações com o modelo em elementos finitos construiu-se o dispositivo flexível. Na figura 5.11 observa-se a foto do dispositivo construído.

Figura 5.11 – Foto do dispositivo flexível construído a partir das dimensões determinadas com o modelo em elementos finitos.

Alguns detalhes da construção do dispositivo podem ser destacados. Para se garantir uma condição de engaste o mais próximo possível da ideal, principalmente na barra central, determinou-se a distribuição de parafusos demonstrada na figura 5.12. Com a mesma finalidade os eixos foram presos com arruelas e porcas de pressão em todas as suas extremidades.

Figura 5.12 – Engaste da barra central à placa superior.

Construído o dispositivo flexível, o modelo da asa foi acoplado utilizando-se parafusos à placa superior. A asa possui um perfil NACA 0012 e foi usinada em alumínio aeronáutico resultando em um modelo de aproximadamente 12 quilos. As dimensões da asa também estão demonstradas na tabela 5.1. A envergadura da asa foi limitada pelo curso máximo da máquina CNC utilizada para sua usinagem. O modelo foi construído em duas partes simétricas em relação à corda. As paredes da asa têm 3 milímetros de espessura e algumas nervuras para garantir a rigidez do modelo, como pode ser observado na figura 5.13.

Figura 5.13 – Foto do modelo da asa no túnel de vento e desmontada.

Com o conjunto asa e dispositivo flexível foi realizada uma análise modal experimental para se confirmar as frequências e os modos determinados através do modelo em elementos finitos. Esta análise experimental é fundamental antes de qualquer ensaio em túnel já que, com ela, pode se verificar as reais características dinâmicas do modelo físico. Após a análise modal, utilizou-se um algoritmo de identificação de sistemas para a determinação das frequências naturais e correspondentes formas dos modos de vibrar a partir dos dados modais experimentais. O algoritmo usado foi o *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) modificado por Tsunaki (1999).

Na análise modal, frequências abaixo de 25 Hz foram investigadas. Os pontos de medição foram determinados na barra central do dispositivo flexível já que este é um dos componentes que garante as características elásticas ao sistema. A partir das medições realizadas na barra central pode se identificar a forma dos modos desta estrutura. Na realidade, com o fato de a asa ser assumida rígida, a forma dos modos da barra central fornece a informação da forma dos modos do sistema experimental completo.

Discretizou-se a barra central em 30 pontos, conforme mostrado na figura 5.14. No ponto 21 também se localizou o ponto de excitação.

Figura 5.14 – Discretização da barra central para realização da análise modal.

O excitador utilizado no ensaio foi um martelo de impacto Kistler modelo 9724A2000 (2,4 mV/N) associado a um amplificador de potência Kistler modelo 5134

A. As saídas foram medidas com um acelerômetro Kistler tipo 8303A10M4 (sensibilidade 99,2 mV/g) associado a um amplificador Kistler 5210. Este acelerômetro foi utilizado por ser um acelerômetro capacitivo capaz de medir sinais em baixas frequências. Um analisador espectral de 2 canais Brüel&Kjaer modelo 2032 foi utilizado para medir os sinais.

Nos primeiros testes modais observou-se que o primeiro modo não era puramente flexional, mas sim flexo-torsional. Este fato ocorreu devido à linha de centro de gravidade da asa não estar absolutamente coincidente com a linha central do dispositivo flexível, como descrito em De Marqui Jr et al. (2004). A solução foi obtida adicionando-se uma massa de 0,3 Kg à placa superior do dispositivo flexível na região do bordo de ataque da asa.

A análise modal foi realizada para se obter as FRFs do sistema. A partir destas respostas em frequência as características modais foram determinadas. As FRFs foram nomeadas $H_{\text{entrada,saída}}$ de acordo com os pontos determinados na figura 5.14. Na figura 5.15 são mostradas 3 das 30 FRFs obtidas.

Figura 5.15 – Algumas FRFs medidas durante a análise modal.

Nas FRFs observam-se picos em torno de 1 Hz e 2 Hz tratando-se, possivelmente, dos modos de flexão e torção. Esta região é destacada na figura 5.16. Ainda na figura 5.15 podem ser observados alguns modos inesperados entre 20 Hz e 25 Hz. Apesar

destas frequências estarem distantes das frequências dos modos envolvidos no *flutter* a origem destes picos foi verificada. Em um ensaio simples, realizado posteriormente à análise modal, instalou-se o acelerômetro no *endplate* instalado na raiz da asa e verificou-se que alguns dos modos após 20 Hz são relativos a esta placa.

Figura 5.16 – Destaque na região de frequências mais baixas das FRFs.

Após a análise modal experimental utilizou-se o ERA modificado por Tsunaki (1999) para a identificação das frequências e determinação dos modos de vibrar a partir dos dados experimentais. As frequências naturais identificadas são mostradas na tabela 5.4. Os modos e frequências laterais e dos eixos não foram investigados no processo de identificação. Eles foram verificados com o posicionamento do acelerômetro em uma posição normal à direção da corda e excitação na mesma direção. Assim verificou-se de forma simples que os modos laterais estariam acima de 12 Hz.

Tabela 5.4 - Frequências naturais do conjunto balança e asa determinadas utilizando o ERA.

Modo	Frequência (Hz)	Descrição
1	1,2	Primeira de flexão
2	2,4	Primeira de torção
3	11,7	Segunda de flexão

Nas figuras 5.17, 5.18 e 5.19 são mostrados os modos identificados a partir do ERA.

Figura 5.17 - Primeiro modo de flexão determinado pelo ERA a 1,2 Hz.

Figura 5.18 - Primeiro modo de torção determinado pelo ERA a 2,41 Hz.

Figura 5.19 - Segundo modo de flexão determinado pelo ERA a 11,7 Hz.

Analisando-se a forma dos modos e as respectivas frequências identificadas verifica-se que dinamicamente a estrutura atende aos requisitos propostos: possui os dois primeiros modos próximos um do outro, bem definidos e distantes dos demais. Estas características associadas às adequadas características de rigidez destes modos, o que foi verificado através do modelo aeroelástico, sugerem a ocorrência do *flutter* bidimensional caracterizado pelo acoplamento entre os modos de flexão e torção.

A forma dos modos de flexão identificados é um pouco diferente da forma esperada para uma viga engastada. A alteração na forma destes modos é explicada pela influência dos eixos do dispositivo flexível no movimento do sistema e pela inércia da asa. Além da função estrutural, os eixos mantêm o deslocamento da placa superior do dispositivo flexível paralelo ao piso do túnel de vento, modificando os modos flexionais. A presença da asa altera as respostas obtidas durante a análise modal devido à sua grande inércia, também influenciando na forma dos modos.

Conforme esperado, os valores obtidos experimentalmente são diferentes dos obtidos através das simulações em elementos finitos. Este modelo foi utilizado como uma ferramenta para o projeto, de modo simplificado e sem levar em conta alguns detalhes construtivos, não se tendo pretensões de previsões com grande precisão em relação aos experimentos.

Com a nova estrutura projetada, construída e testada iniciou-se a montagem no túnel de vento e os testes aeroservoelásticos.

6 – Análise das Condições de *Flutter* e sua Supressão

Após a definição do aparato experimental iniciaram-se os testes em túnel de vento. Em uma fase inicial foi realizada a preparação da câmara de ensaios do túnel para receber o experimento. Construiu-se uma base com perfis de aço na qual o dispositivo flexível foi engastado. Esta base foi construída atentando-se para que fosse suficientemente rígida. Assim, as solicitações provenientes da interação fluido-estrutura na câmara de ensaios não implicariam em deformações que influenciassem as medições durante os experimentos. Alguns outros ajustes, como a furação na parede do túnel, foram realizados para a montagem final do sistema no túnel de vento.

A figura 6.1 mostra o sistema experimental montado no túnel de vento.

(a)

(b)

Figura 6.1 – Fotos da montagem do experimento no túnel de vento: a) asa dentro da câmara de ensaio do túnel; b) dispositivo flexível sob a parede inferior da câmara de ensaio do túnel de vento.

Ao longo deste capítulo são descritos os experimentos para verificação da obtenção do *flutter*, os experimentos para a caracterização do *flutter* e os experimentos para a supressão do *flutter*, além de serem analisados os resultados dos mesmos. É natural que para a realização destes experimentos se faz necessário o desenvolvimento de um sistema para a aquisição dos dados, processamento dos sinais e para atuação no sistema. Obviamente o desenvolvimento destes sistemas exige a definição dos sensores a serem utilizados e também a definição da forma de acionamento e controle do atuador.

Todos os sistemas foram desenvolvidos e testados individualmente em uma fase anterior aos experimentos no túnel de vento. Após a instalação do experimento no túnel, estes sistemas foram novamente testados e ajustados e posteriormente interligados através da programação experimental, sendo processados em uma mesma base de tempo. Os itens a seguir descreverão o desenvolvimento destes sistemas e alguns dos testes realizados.

6.1 – Sistemas de Medição e Atuação

Os sistemas de aquisição, processamento de sinais e atuação foram desenvolvidos utilizando-se um sistema dSPACE com uma placa processadora DS 1103 equipada com um processador *PowerPc* de 400 Mhz e 128 *mbytes* de memória *RAM*. Este sistema possui 4 conversores A/D de resolução de 16 *bits* e cada conversor multiplexado entre 4 canais, num total de 16 canais de entrada; 8 canais de saída D/A de 12 *bits* de resolução e 6 interfaces para *encoders*. A programação deste sistema pode ser feita no ambiente MATLAB/Simulink®. Sua compilação é realizada no MATLAB® utilizando-se seu pacote RTW (*Real Time Workshop*) e o programa passa a ser executado na placa dSPACE. A programação visual do experimento é desenvolvida no programa *ControlDesk*® da Dspace onde se tem acesso a todas as variáveis criadas na programação feita no Simulink®.

No desenvolvimento do modelo aeroelástico ficaram caracterizadas as variáveis $\dot{h}$, $\dot{\theta}$, h e θ como variáveis de entrada do sistema, ou seja, variação da posição horizontal, variação da posição angular, deslocamento horizontal e ângulo. Estas variáveis foram definidas como os sinais a serem medidos durante os experimentos.

Para a medição dos deslocamentos foram utilizados extensômetros. Os extensômetros foram associados a um condicionador amplificador HBM MGCPPlus, no qual foram definidos os filtros utilizados e as configurações de ponte de Wheatstone. Ficou definida a barra central do dispositivo flexível como o elemento sensível do sistema experimental, ou seja, o elemento onde seriam posicionados os sensores.

Como os extensômetros medem micro-deformações, sua localização na barra central foi determinada nas regiões de maior deformação em flexão e torção da mesma. Estas regiões foram determinadas através de verificações com o modelo em Elementos Finitos anteriormente descrito. A figura 6.2 mostra um esquema com a posição dos extensômetros.

Figura 6.2 – Posicionamento dos extensômetros para medida dos deslocamentos.

Para a medida dos deslocamentos horizontais utilizou-se um extensômetro Kiowa modelo KFG-5120C123. O extensômetro de flexão foi configurado no esquema $\frac{1}{4}$ de Ponte de Wheatstone no condicionador MGCPPlus. Ainda no condicionador, aplicou-se ao sinal um filtro passa-baixa com frequência de corte em 5 Hz.

Para a medida dos deslocamentos angulares utilizou-se um extensômetro Kiowa modelo KFC-2D211. O extensômetro de torção foi configurado em $\frac{1}{2}$ Ponte no condicionador. Também neste caso um filtro passa-baixa em 5 Hz foi usado.

Os sinais a serem medidos com os extensômetros de flexão e torção devem ter as unidades metros e radianos, respectivamente, de acordo com as definições assumidas no modelo aeroelástico. Assim, calibrações foram realizadas para que fossem garantidas medidas nestas condições. Os deslocamentos em flexão e torção, para fins de calibração, foram medidos na região da raiz da asa. Como a asa foi assumida como rígida e os quatro eixos do dispositivo flexível devem garantir que a mesma permaneça

perpendicular em relação à superfície do túnel, mesmo com seu deslocamento, o procedimento de calibração e medição não implicará em erros significativos nas medições.

Para a medida da variação das posições utilizaram-se acelerômetros capacitivos Kistler *KBeam*. Os acelerômetros com esta tecnologia são capazes de medir frequências baixas como as envolvidas no experimento deste trabalho. Um condicionador B&K Nexus Deltatron de 4 canais foi utilizado para a filtragem e integração dos sinais, convertendo aceleração em velocidade.

Para a medida da velocidade de translação, ou velocidade em *plunge*, utilizou-se um acelerômetro Kistler *KBeam* modelo 8303A10M4 (sensibilidade 99,2 mV/g) associado ao condicionador de sinais Kistler 5210. Este sinal de aceleração foi levado ao condicionador Nexus onde foi filtrado e integrado uma vez. O acelerômetro foi instalado no topo e na linha central da barra do dispositivo flexível, como se observa na figura 6.3. Nesta posição, considerando que o sistema sofrerá pequenos deslocamentos angulares, é possível a medida do sinal de flexão sem influência significativa dos possíveis sinais relativos ao movimento torsional.

Na medida da velocidade angular, ou velocidade em *pitch*, foram utilizados dois acelerômetros Kistler *KBeam* 8304B10 (sensibilidade 197 mV/g) associados a condicionadores de sinais Kistler 1572. Os sinais foram filtrados e integrados no condicionador Nexus. A partir de uma relação simples entre os sinais dos acelerômetros calculava-se a velocidade angular em radianos por segundo. Na figura 6.3 observa-se o posicionamento dos acelerômetros.

Figura 6.3 – Posicionamento dos acelerômetros (um para flexão e dois para torção).

Outro sinal a ser medido é a posição da superfície de controle da asa. Esta informação será necessária para a atuação no sistema experimental. Porém, a medição

deste sinal é diretamente ligada a escolha da forma de acionamento da superfície de controle. Assim, definiu-se que o acionamento da superfície de controle seria feito com um motor elétrico sem escovas Thompson modelo BLD-2315B10200 utilizado juntamente com um amplificador modelo TD-50 da mesma marca. Este motor possui um *encoder* de 1000 linhas que foi utilizado para a medição da posição da superfície de controle. Logo, a resolução para a medida do ângulo da superfície de controle foi de 0.36 graus. A posição zero, ou posição inicial, da superfície de controle foi definida como a posição em que sua corda se encontrava alinhada com a corda da asa.

Até este ponto descreveu-se os sensores utilizados e os respectivos posicionamentos. Outra parte importante do sistema de aquisição é o ambiente computacional, ou seja, a programação do sistema. Esta programação foi realizada em ambiente *Simulink*[®], facilidade proporcionada pelo sistema dSPACE através de seu programa ControlDesk.

Conforme a descrição anteriormente realizada do sistema dSPACE, fica claro que é possível se realizar a aquisição de 4 canais simultaneamente e, a partir daí, de forma multiplexada (4 conversores A/D multiplexados entre 4 canais cada um). Como são utilizados 5 sensores no experimento (2 extensômetros e 3 acelerômetros), ao menos um sinal teria de ser lido com atraso. Desta forma optou-se por ler os sinais dos dois acelerômetros relativos a medição dos sinais de torção de forma multiplexada. A figura 6.4 mostra um fluxograma da programação experimental do sistema de aquisição de dados.

Figura 6.4 – Esquema do sistema de aquisição de dados.

Além da medição da posição da superfície de controle, foi necessário o desenvolvimento de um sistema para o acionamento desta superfície e para o controle de sua posição. Como já descrito, o sistema de atuação desta superfície foi realizado com um motor elétrico. Como se observa na figura 6.5, a superfície de controle está localizada no bordo de fuga da asa.

Tanto a asa como a superfície de controle são bipartidos. A ligação entre a superfície de controle e o motor foi realizada através de um eixo bipartido. Um eixo foi preso à superfície de controle e outro eixo preso ao motor elétrico e ligados através de um acoplador rígido dentro da asa. A ligação entre o eixo e o motor se fez com um acoplador flexível, cuja ação é semelhante à de uma junta universal. O motor elétrico foi fixado na placa superior do dispositivo flexível, como se pode observar na fotografia da figura 6.1 (b).

Figura 6.5 – Foto da asa aberta com os instrumentos instalados.

Um controlador PID foi ajustado para o controle da posição da superfície de controle através do motor elétrico. Este controlador PID foi sintonizado conforme Clair e Fruehauf (1994), para atuação em frequências até 5 Hz aproximadamente. A sintonia do controlador foi realizada através da análise de respostas do sistema a entradas tipo degrau e seno. Na tabela 6.1 verificam-se os ganhos determinados para este controlador.

Tabela 6.1 – Valores de ganhos obtidos para o controlador PID.

P	I	D
0,05	0,0005	0,00009

A programação do sistema de atuação do motor realizada no sistema dSPACE é mostrada na figura 6.6. Um sinal de referência era gerado, comparado com o sinal da leitura do *encoder* e o sinal de controle gerado no controlador PID a partir do erro entre a posição real, dada pela *encoder*, e a posição desejada, dada pelo sinal de referência. Entende-se por sinal de referência as entradas tipo degrau ou seno geradas para a sintonia do PID, ou ainda um sinal proveniente de um controlador para a supressão do *flutter*.

Figura 6.6 – Esquema de controle para o sistema de acionamento do motor.

Nas figuras 6.7, 6.8 e 6.9 mostram-se as respostas do motor a entradas senoidais de amplitude 7 graus e frequências de 0,5 Hz, 1 Hz e 3 Hz. Verifica-se nestas figuras que o sistema responde corretamente às entradas descritas e assume-se que este controlador poderá ser utilizado com segurança nos experimentos de supressão de *flutter*.

Vale destacar a importância do correto ajuste deste controlador do sistema de acionamento da superfície de controle. No caso da supressão de *flutter* este controlador funcionará como um item do sistema de controle para a supressão do *flutter*. Ou seja, os sinais serão medidos, uma lei de controle processada e um sinal de controle para supressão do *flutter* gerado. Este será o sinal correspondente ao sinal de referência da figura 6.6. Assim, conclui-se que a faixa de atuação do controlador para o posicionamento da superfície de controle tem que ser maior que a faixa de atuação do controlador para supressão de *flutter*, de outro modo, o desempenho do segundo seria afetado pelo baixo desempenho do primeiro mesmo se corretamente projetado.

Figura 6.7 – Leitura do *encoder* para entrada senoidal de 0,5 Hz.

Figura 6.8 - Leitura do *encoder* para entrada senoidal de 1 Hz.

Figura 6.9 - Leitura do *encoder* para entrada senoidal de 3 Hz.

A velocidade do escoamento do túnel de vento foi outra variável verificada. Ela foi medida com um Pitot instalado na câmara de ensaio associado a um manômetro Betz.

Definidos os sistemas de aquisição de dados e o sistema de acionamento do atuador iniciaram-se os testes no túnel de vento.

6.2 – Validação do Modelo Matemático

Definidos as configurações dos sensores para medição e os sistemas de aquisição e de atuação, foram iniciados os testes aeroelásticos em túnel de vento com o sistema físico. Inicialmente foram realizados ensaios visando o ajuste do modelo aeroelástico. A descrição do modelo e seu desenvolvimento foi demonstrado no capítulo 4.

Resumidamente, aplicaram-se as equações de Lagrange para se obter as equações de movimento e o Princípio do Trabalho Virtual (Meirovitch, 1990) para se obter as forças generalizadas do sistema, relacionadas ao amortecimento e à aerodinâmica, conforme em Waszak (1998). O modelo visa a representação de um modelo dinâmico de dois graus de liberdade, representando o *flutter* de dois graus de liberdade.

Na realidade, o sistema físico não é exatamente um sistema de dois graus de liberdade e, portanto, algumas diferenças entre os resultados do modelo aeroelástico e os resultados experimentais são esperados. As diferenças podem ocorrer principalmente devido a alguns efeitos aerodinâmicos e devido à presença de alguns modos estruturais. Alguns modos mais altos associados ao sistema experimental, não envolvidos no *flutter*, podem ser excitados durante os experimentos. Esta excitação não é significativa do ponto de vista do fenômeno, mas difere o fenômeno real de um sistema bidimensional. Além disso, as forças e momentos aerodinâmicos são aproximados utilizando-se derivadas de controle e estabilidade, o que é mais uma aproximação que difere o sistema simulado do sistema real.

A partir da equação em espaço de estados, identificou-se a matriz de estado, de controle e de saída conforme as equações a seguir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_s\right)^{-1}(\mathbf{K}_s - \bar{q}S\mathbf{K}_a) & -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\left(\mathbf{D}_s - \frac{\bar{q}S}{2U_0}\mathbf{D}_a\right) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M}_s - \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2U_0^2}\mathbf{M}_a\right)^{-1}\bar{q}S\mathbf{B}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Os dados apresentados nas tabelas 6.2 e 6.3 foram utilizados juntamente com as equações obtidas para as simulações.

Tabela 6.2 – Dados utilizados nas simulações.

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
m	Massa	16,862 *	kg
c	Corda	0,45	m
ρ	Densidade	1,103	kg / m ³
I_0	Momento de inércia	0,26 *	kg m
K_h	Rigidez de flexão	860 *	kg / m
K_θ	Rigidez de torção	45 *	kg m
w_h	Frequência natural de flexão	7,5	rad / s
w_θ	Frequência natural de torção	14,4	rad / s
ζ_θ	Taxa de amortecimento de torção	0,0010	-
ζ_h	Taxa de amortecimento de flexão	0,0014	-
$s_{h\theta}$	Acoplamento inercial	0,0062	kg m
l	Distancia entre centro de cisalhamento e aerodinâmico	-0,175c	m
S	Área	0,36	m ²

• obtidos a partir de simulação.

Tabela 6.3 – Derivadas de estabilidade e controle.

Símbolo	Valor
C_{L0}	0
C_{M0}	0
$C_{L\alpha}$	2,643
$C_{M\alpha}$	0,1065
$C_{L\dot{\alpha}}$	0,0213
C_{Lq}	-0,0113
$C_{M\dot{\alpha}}$	-0,0044
C_{Mq}	-0,007
$C_{L\delta_{TR}}$	0,5270
$C_{M\delta_{TR}}$	-0,1063

Os dados da tabela 6.3 foram obtidos a partir de um programa de Malha de Vórtices (Melin, 2000).

Os testes realizados para a melhor definição do modelo matemático consistiram na aplicação de entradas conhecidas na superfície de controle e na medição das variáveis anteriormente definidas no projeto do sistema de medição e aquisição. Estes testes foram realizados em faixas de velocidade onde o sistema permanecia estável, abaixo da velocidade crítica de *flutter*. Com o intuito de se obter melhores condições de análises das respostas, foram testadas entradas do tipo pulso, degrau e senoidal no atuador.

Após alguns testes optou-se pela utilização de uma entrada do tipo senoidal para a excitação do sistema. Ou seja, não estaria sendo medida a resposta livre no tempo mas sim a resposta forçada pela entrada senoidal, permitindo uma melhor avaliação do modelo analítico.

Para possibilitar a comparação entre os resultados analíticos e os resultados experimentais reproduziram-se nas simulações condições tão próximas quanto possíveis das condições utilizadas durante os experimentos. O sistema foi simulado nas mesmas velocidades e foram aplicadas as mesmas entradas utilizadas durante os experimentos e obtiveram-se as respostas analíticas. Estas respostas foram comparadas às respostas experimentais e alguns parâmetros do modelo em espaço de estados foram ajustados.

Nas figuras 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13 observam-se exemplos de resultados obtidos durante um teste. Aplicou-se uma entrada senoidal de frequência 0,5 Hz e amplitude de aproximadamente 16 graus na superfície de controle e mediram-se as respostas com os acelerômetros e extensômetros. A velocidade medida no túnel de vento foi de 19,2 m/s. As mesmas condições foram aplicadas na simulação.

Na figura 6.10 as entradas teórica e experimental podem ser verificadas. A leitura da posição do flape foi realizada a partir do *encoder* do motor. A posição zero do motor foi sempre definida como a posição em que o flape se encontrava alinhado com a asa na direção da corda.

Figura 6.10 – Entradas aplicadas durante o experimento e simulação.

Figura 6.11 – Comparação teórico-experimental para o deslocamento em *plunge*.

Figura 6.12 - Comparação teórico-experimental para o deslocamento em *pitch*.

Figura 6.13 - Comparação teórico-experimental para a velocidade em *plunge*.

Diferenças entre os resultados teóricos e experimentais já eram esperadas. Entre outras razões para as diferenças destacam-se;

- O modelo considera um sistema com dois graus de liberdade. Na prática não se tem um sistema puramente bidimensional, existem efeitos aerodinâmicos e excitação de modos não envolvidos no *flutter*.
- Efeitos aerodinâmicos complexos também podem ser associados à superfície de controle.
- A asa considerada é assumida como rígida no modelo e, na realidade, pode não ser absolutamente rígida na prática.
- O modelo de amortecimento escolhido é bastante simplificado.
- A determinação dos coeficientes aerodinâmica também foi realizada de forma simplificada.

De um modo geral os resultados obtidos com estes experimentos foram proveitosos e auxiliaram no refinamento do modelo. A partir destas verificações foram ajustados e melhor compreendidos alguns parâmetros envolvidos na modelagem. O modelo é importante para o projeto do sistema de controle utilizado.

6.3 – Experimentos em Malha Aberta

Ao longo deste item serão apresentados resultados experimentais e analíticos realizados em malha aberta, ou seja, sem a aplicação de um controlador para supressão de *flutter*. Inicialmente serão apresentados os resultados obtidos nas simulações, determinando-se a velocidade de *flutter*, a frequência de *flutter* e verificando-se a evolução dos modos envolvidos no *flutter* com a variação da velocidade. A seguir, estes resultados são verificados com resultados obtidos em testes experimentais no túnel de vento.

A caracterização do sistema no túnel de vento foi realizada desde velocidades baixas até o mais perto possível da velocidade de *flutter*. Em toda a faixa de velocidades foram obtidas Funções Resposta em Frequência do sistema, demonstrando-se a evolução dos modos envolvidos no *flutter* com a variação da velocidade. Na velocidade de *flutter* foi verificado o comportamento oscilatório auto-sustentado do sistema e, a partir destas medidas, a frequência de *flutter*. Ainda, o sistema foi identificado utilizando-se o algoritmo de identificação EERA (*Extended Eigensystem Realization Algorithm*), obtendo-se a variação de alguns parâmetros de *flutter* com a variação da velocidade no túnel de vento.

6.3.1 – Verificação e caracterização do *flutter*

Conforme já descrito, fisicamente define-se *flutter* como uma instabilidade dinâmica de um corpo elástico quando sujeito a um fluxo de ar, ou seja, uma oscilação auto-excitada proveniente de interações entre forças aerodinâmicas, elásticas e de inércia (Bisplinghoff et al, 1955; Bisplinghoff & Ashley, 1962; Fung, 1955). A estabilidade de um sistema dinâmico linear pode ser verificada através da análise dos autovalores da matriz de estados A . Conforme citado em Mukhopadhyay (2003), Maxwell mostrou que as raízes do polinômio característico de um sistema linear estável possui parte real negativa.

Inicialmente, a estabilidade do sistema foi verificada através de simulações. Estas simulações foram realizadas utilizando alguns resultados obtidos com o modelo em Elementos Finitos e Análise Modal Experimental aplicados no modelo aeroelástico

desenvolvido. Foram realizadas em diferentes velocidades e verificou-se a estabilidade do sistema através da análise dos sinais dos autovalores da matriz de estados A . Na figura 6.14 observa-se a evolução dos autovalores da matriz A com o aumento da velocidade do escoamento de ar. Observa-se que o sistema torna-se instável a partir de uma velocidade em torno de 25 m/s.

Figura 6.14 – Evolução dos autovalores da matriz A com a variação da velocidade do fluxo de ar.

Os resultados da figura 6.14 mostram que o sistema projetado a partir do modelo em Elementos Finitos e verificado através da Análise Modal Experimental deve entrar em *flutter* em uma velocidade possível de ser obtida no túnel de vento do laboratório. A velocidade máxima do túnel está em cerca de 50 m/s. O resultado acima obtido foi considerado bom já que a faixa de velocidades do *flutter* estaria na metade da faixa de velocidades do túnel, o que, mesmo com as aproximações feitas durante o projeto e com as imprecisões do modelo, dá uma boa margem para a variação da velocidade experimental de *flutter*.

A seguir, para a caracterização teórica do fenômeno realizaram-se simulações do sistema em diversas velocidades, obtendo-se as respostas no domínio do tempo e as respectivas funções resposta em frequência. Deste modo pode se demonstrar a evolução modal do sistema e a estabilidade, ou não, das respostas no domínio do tempo. Definiram-se as velocidades de 5, 15, 20, 23 e 25 m/s para as simulações. Nas simulações aplicaram-se entradas pulso ao sistema e mediram-se as respostas.

Nas figuras 6.15 até 6.19 verificam-se as respostas no tempo obtidas analiticamente.

Figura 6.15 – Respostas no tempo do sistema para a velocidade de 5 m/s.

Figura 6.16 – Respostas no tempo do sistema para a velocidade de 15 m/s.

Figura 6.17 – Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 20 m/s.

Figura 6.18 – Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 23 m/s.

Figura 6.19 – Resposta no tempo do sistema para a velocidade de 25 m/s.

Até a velocidade de 23 m/s observam-se que as respostas oscilatórias são atenuadas algum tempo após o sinal de entrada ser aplicado. Ou seja, nestas velocidades o sistema é estável.

Na figura 6.19 observam-se as respostas do sistema em uma velocidade de 25 m/s. Estas respostas já apresentam características oscilatórias auto-sustentadas. O sistema é instável com a amplitude de oscilação crescente sem a atuação de uma excitação externa. Estas respostas caracterizam as respostas de um sistema em *flutter*, confirmando a previsão realizada na figura 6.14 com a evolução dos autovalores com o aumento da velocidade.

Para a caracterização do *flutter* no domínio da frequência realizaram-se simulações com a mesma entrada das simulações anteriores e nas mesmas velocidades. Calcularam-se as respostas em frequência do sistema para estas velocidades. Para estes cálculos utilizou-se como sinal medido, ou sinal de saída, o valor do sinal de aceleração calculado para o acelerômetro localizado na região do bordo de ataque do dispositivo flexível, conforme mostrado na figura 6.3 item 6.1. Como sinal de entrada utilizou-se o sinal do ângulo da superfície de controle da asa usada, neste caso, como o excitador do sistema.

Para o cálculo deste sinal de aceleração, associou-se a equação a seguir com a equação de estados anteriormente desenvolvida.

$$\ddot{z}(x,y) = -\frac{|\ddot{h} + d_i \ddot{\theta}|}{g}$$

Nesta equação tem-se as acelerações $\ddot{h}$ e $\ddot{\theta}$ relativas às variáveis de estado h e θ previamente definidas, $\ddot{z}$ a aceleração, d_i a distância na direção da corda do i -ésimo sensor até o eixo elástico do sistema e g a aceleração da gravidade.

Assim, para as velocidades definidas obtiveram-se as seguintes funções resposta em frequência do sistema.

Figura 6.20 – Evolução das funções resposta em frequência com o aumento da velocidade obtidas a partir do modelo do sistema.

Na função resposta em frequência para a velocidade de 10 m/s observa-se claramente os dois picos das frequências naturais de flexão e torção, 1,2 Hz e 2,2 Hz respectivamente. Estes são os modos envolvidos no *flutter*.

Com o aumento da velocidade observa-se a evolução dos modos de vibrar. No gráfico da figura 6.20 observa-se a função resposta em frequência para a velocidade de 25 m/s, característica de um sistema em *flutter*. Verifica-se a presença de um só pico predominante caracterizando o acoplamento dos modos de vibrar. Outra informação

importante gerada por esta análise, além da velocidade, é a frequência de *flutter*. Na figura 6.20 verifica-se que teoricamente a frequência de *flutter* está por volta de 1,8 Hz.

Verificado através dos resultados simulados que o sistema projetado deveria atingir o *flutter* partiu-se para a confirmação experimental do sistema. Foram realizadas as verificações da velocidade de *flutter* e a caracterização modal da estrutura e do fenômeno com a evolução da velocidade do túnel de vento. Além disso, um algoritmo de identificação (EERA) foi utilizado para a identificação de alguns parâmetros de *flutter*.

O primeiro teste realizado foi a verificação experimental da obtenção do *flutter* com a estrutura projetada. Este teste corresponde à verificação da velocidade experimental de *flutter*. Este experimento foi realizado aumentando-se a velocidade do túnel de vento gradativamente com pequenos incrementos de velocidade até o sistema oscilar de forma auto-sustentada. Durante os testes foram medidos os sinais de velocidade e deslocamento em *pitch* e *plunge* com os acelerômetros e extensômetros anteriormente descritos.

A taxa de aquisição utilizada neste e nos outros experimentos em que o sistema de aquisição anteriormente descrito foi utilizado foi de 0.001 segundos e os dados eram atualizados a cada 0.01 segundos.

A posição de ângulo de ataque zero da asa foi verificada antes do início do experimento. A superfície de controle foi mantida na sua posição de ângulo de ataque zero durante todo o experimento para se evitar que o *flutter* fosse induzido por efeitos da mesma. Ou seja, sua corda foi mantida alinhada com a corda da asa através do envio de um sinal de referência zero para o motor elétrico.

Nos gráficos das figuras 6.21 até 6.24 verificam-se os sinais medidos durante os testes para a verificação da velocidade crítica. Observa-se o comportamento oscilatório auto-sustentado após o tempo de 5 segundos. Neste momento foi medida a velocidade de 25 m/s, ficando esta definida como a velocidade crítica experimental de *flutter*. Após a oscilação atingir certa amplitude o túnel de vento era desligado para se evitar danos físicos à câmara de ensaios, ao modelo experimental e aos sensores instalados.

Figura 6.21 - Sinal de velocidade em *plunge* medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de *flutter*.

Figura 6.22 - Sinal de velocidade em *pitch* medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de *flutter*.

Figura 6.23 - Sinal de deslocamento em *plunge* medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de *flutter*.

Figura 6.24 - Sinal de deslocamento em *pitch* medido com o sistema em malha aberta na região da velocidade de *flutter*.

Na figura 6.25 observam-se os sinais das figuras 6.21 até 6.24 transformados do domínio do tempo para o domínio da frequência. Deste gráfico determina-se a frequência experimental de *flutter* como sendo de 1,6 Hz. Esta representação também é útil para demonstrar o acoplamento entre os sinais relativos a flexão e os sinais relativos a torção, caracterizando o *flutter* bidimensional que se pretendia obter neste trabalho. Os sinais apresentados no domínio da frequência foram normalizados para uma melhor apresentação e comparação entre os mesmos.

Figura 6.25 – Representação no domínio da frequência dos sinais medidos com o sistema na velocidade de *flutter*.

Determinadas experimentalmente a velocidade e a frequência de *flutter* comprovou-se a obtenção do *flutter* com o sistema desenvolvido. A etapa seguinte foi

constituída pela caracterização experimental do fenômeno obtido. Para isso, foram obtidas funções resposta em frequência para algumas velocidades pré-determinadas no túnel de vento, desde zero até o mais próximo possível da velocidade de *flutter*. Assim foi possível a verificação da evolução dos modos envolvidos no *flutter* com a variação da velocidade. Além disso, utilizou-se o algoritmo de identificação EERA (*Extended Eigensystem Realization Algorithm*) para a obtenção de alguns parâmetros dos modos envolvidos, frequência e amortecimento, até a ocorrência do *flutter*; determinando-se um gráfico tipo V-g do sistema.

As Funções Resposta em Frequência foram obtidas a partir dos sinais resultantes da relação entre o sinal de saída e de entrada medidos no domínio da frequência utilizando-se um analisador espectral B&K modelo 2032. Como entrada mediu-se o sinal do *encoder* do motor que aciona a superfície de controle e como sinal de saída o sinal de aceleração medido por um dos acelerômetros instalados no dispositivo flexível. Este acelerômetro estava localizado na região do bordo de ataque da asa. O fluxograma da figura 6.26 localiza o esquema deste experimento no sistema de aquisição anteriormente apresentado.

Figura 6.26 – Esquema do sistema de medição nos ensaios de identificação.

O analisador foi configurado para medir em uma faixa de frequências até 25 Hz. Esta faixa mais ampla foi escolhida para se ter um melhor ajuste do tempo de aquisição dos dados para se obter a resposta em frequência. Uma faixa mais reduzida implica em um tempo maior para a medição e as medidas em velocidades na vizinhança da velocidade de *flutter* seriam dificultadas ou mesmo impossibilitadas. Vale ainda lembrar

que, completado o tempo de aquisição, várias médias aritméticas eram realizadas para uma melhor definição das repostas em frequência.

Além do ajuste do analisador espectral, uma variável importante nestes testes foi o tipo de entrada a ser aplicada no sistema, ou seja, o sinal a ser enviado para o motor que aciona a superfície de controle. Para se obter funções resposta em frequência adequadas, este sinal deveria ser capaz de excitar devidamente os modos de flexão e torção envolvidos no *flutter* durante o período de aquisição dos dados pelo analisador. Algumas tentativas, como a aplicação de entradas tipo pulso, degrau e senoidal com a variação da frequência de excitação, foram testadas.

Como é conhecido, o aumento da velocidade do fluxo implica no aumento do amortecimento aerodinâmico do sistema. Conseqüentemente a resposta livre do sistema, quando aplicada uma entrada pulso ou degrau, torna-se mais amortecida e insuficiente para a obtenção das funções resposta em frequência no caso testado. No caso da entrada senoidal com variação da frequência de excitação (algo próximo a uma entrada *chirp*) o tempo de excitação de cada modo envolvido no *flutter* era pequeno, também impossibilitando a obtenção das respostas em frequência.

Necessitava-se de uma entrada que garantisse uma excitação uniforme dos modos de flexão e de torção ao longo de todo o período de teste. Uma solução encontrada foi a aplicação de um sinal tipo ruído com uma faixa de frequência de excitação entre 0,5 e 3,5 Hz, como o sinal mostrado na figura 6.27.

Figura 6.27 – Exemplo de entrada tipo ruído aplicada ao sistema e medida com o *encoder* do motor.

Com esta entrada os modos eram devidamente excitados durante todo o seu período de aplicação na superfície de controle, como pode ser observado nas figuras 6.28 e 6.29. Nas figuras 6.30 e 6.31 mostram-se os sinais medidos com os

extensômetros de flexão e de torção no domínio da frequência. Desta forma pode se observar os modos que estão sendo excitados com a aplicação do sinal de ruído apresentado, flexão e torção respectivamente, que são os modos envolvidos no *flutter*. Os gráficos das figuras 6.30 e 6.31 apresentam sinais normalizados para uma melhor comparação entre os mesmos.

Figura 6.28 – Resposta ao ruído medida no sistema.

Figura 6.29 – Resposta ao ruído medida no sistema.

Figura 6.30 – Sinal medido com o extensômetro de flexão apresentado no domínio da frequência.

Figura 6.31 - Sinal medido com o extensômetro de torção apresentado no domínio da frequência.

O sinal ruído foi gerado no ambiente *Simulink*, enviado ao controlador PID do motor como o sinal de referência e, conforme o esquema de controle do motor apresentado no item 6.1, a posição do motor era modificada para a atuação no sistema através da superfície de controle. O acelerômetro utilizado para a medição da aceleração media um sinal relativo aos dois modos em questão já que ele estava deslocado em relação à linha central do sistema experimental.

Na figura 6.32 observa-se a resposta em frequência e o gráfico da fase do sistema para o túnel de vento desligado. Verifica-se a presença dos dois picos distintos relativos aos modos de flexão e torção em frequências de 1,2 Hz e 2,4 Hz aproximadamente, confirmando os resultados anteriormente obtidos na Análise Modal Experimental.

Figura 6.32 – Função resposta em frequência e fase do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida sem a ação do fluxo, velocidade 0 m/s.

No gráfico de fase observa-se a variação do ângulo de fase na região dos picos relativos aos modos de flexão e de torção. O ângulo medido é relativo à variação da fase entre o sinal de excitação do sistema e o sinal de saída medido, ou seja, entre o sinal de entrada medido com o *encoder* do motor e o sinal medido pelo acelerômetro. Assim como há a variação da forma das funções resposta em frequência com a variação da velocidade do túnel de vento, existe a variação da fase entre os sinais que compõem as funções resposta em frequência. É possível ainda se verificar a variação da fase entre os modos com a variação da velocidade.

Na figura 6.33 observa-se a resposta em frequência e o gráfico da fase do sistema na velocidade de 10 m/s. Já se verifica a variação da posição e da forma dos picos da resposta em frequência devido à ação do fluxo se comparado com as medidas da figura 6.32. Seguramente houve aumento no amortecimento dos modos, o que pode ser verificado através da forma dos picos, mais largos e um pouco menos definidos em seus valores máximos. Verifica-se também uma significativa variação no gráfico da fase para ambos os modos, assim como a variação da fase entre os modos.

Figura 6.33 - Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 10 m/s.

Na figura 6.34 tem-se a resposta em frequência e o gráfico da fase para a velocidade de 15 m/s. Fica claro um amortecimento ainda maior para ambas frequências devido à ação do fluxo.

Figura 6.34 - Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 15 m/s.

Figura 6.35 - Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído obtida na velocidade de 20 m/s.

A figura 6.35 mostra que o modo de torção já foi bem pouco excitado e o modo de flexão começa a mostrar um amortecimento bastante alto e seu pico está evoluindo para a direita, com a presença de um pico menor nesta região, o que também pode ser verificado no gráfico de fase. Esta resposta em frequência começa a apresentar características de uma região de limiar de *flutter*. Já se espera que o pico dominante comece a apresentar características flexo-torsionais.

As figuras 6.36 e 6.37 podem ser analisadas em conjunto. Na figura 6.36 os picos já parecem bastante descaracterizados e entre eles começa a surgir um pico em torno de 1,5 Hz, ou seja, os modos parecem começar a se acoplar. Este comportamento também pode ser verificado no gráfico de fase. Já na figura 6.37 este pico relativo ao acoplamento dos modos aparece bem mais definido assim como a fase, caracterizando a região de limiar de *flutter*. No ensaio, se a superfície de controle fosse mantida na posição zero o sistema entraria em *flutter*, ou seja, a ação da superfície de controle manteve o sistema no limiar do *flutter*. Neste momento as medidas precisaram ser realizadas com amplitudes de excitação mais baixas já que o sistema começava a ficar instável.

Figura 6.36 - Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida na velocidade de 23 m/s.

A velocidade do teste da figura 6.37 foi a velocidade limite para este tipo de teste. A partir desta velocidade o sistema se tornou instável, apresentando resposta oscilatória do *flutter* e impossibilitando o teste. Mesmo no teste da figura 6.37 uma medição tão bem definida quanto as anteriores não foi possível. O nível de excitação utilizado e o tempo de aquisição dos dados foram menores, já que a amplitude de oscilação do sistema aumentava rapidamente. Caso fosse possível uma medição mais bem definida nesta velocidade, esperar-se-ia uma resposta em frequência com um único pico bem definido, caracterizando o acoplamento entre os modos no *flutter*. A maneira como este último teste foi realizado visou a preservação do túnel, sensores e do modelo experimental em uso.

Figura 6.37 - Função resposta em frequência do sistema a partir de uma excitação tipo ruído medida na velocidade de 25 m/s.

Na figura a seguir mostram-se todas as funções resposta em frequência obtidas em um único gráfico para todas as velocidades testadas. Estas curvas permitem a melhor visualização da evolução dos modos. Ficam claros tanto o deslocamento dos picos quanto a ação do fluxo na variação do amortecimento do sistema. Ressalta-se que o *flutter* pode ser verificado através da inversão do sinal do amortecimento do sistema.

Pode ser verificada ainda a tendência de acoplamento entre os modos em velocidades próximas ao *flutter*.

Figura 6.38 – Evolução dos modos de flexão e torção.

Para uma melhor definição da variação dos parâmetros de frequência e de amortecimento dos modos realizou-se a identificação do sistema utilizando-se o EERA (*Extended Eigensystem Realization Algorithm*) obtendo-se um gráfico V-g do sistema. Para a identificação do sistema através do EERA necessitava-se de dados de entrada e de saída do sistema no domínio do tempo em diversas velocidades. Assim, utilizou-se para a identificação, os mesmos experimentos realizados para a obtenção das funções resposta em frequência. Ou seja, simultaneamente aos testes realizados no domínio da frequência foram salvos no domínio do tempo através do ambiente ControlDesk do sistema dSPACE o sinal de excitação do sistema, medido com o *encoder* do motor, e o sinal de resposta do sistema, medido com os extensômetros.

Na figura 6.39 observa-se o gráfico V-g identificado para o sistema. Verifica-se que o *flutter* ocorre próximo à velocidade de 25 m/s, onde o amortecimento do modo de torção tende a zero e as frequências dos modos envolvidos no *flutter* tendem ao acoplamento. Estes resultados confirmam qualitativamente os resultados esperados a partir da análise das respostas em frequência anteriores.

Figura 6.39 – Gráfico V-g identificado para o sistema experimental.

Como se verifica na figura 6.39, para cada velocidade testada há uma nuvem de pontos proveniente do processo de identificação do sistema. As linhas do gráfico da figura 6.39 são as melhores curvas que se ajustam aos pontos identificados. Estes pontos foram escolhidos baseando-se em uma curva base de frequências determinada a partir das funções resposta em frequência, assim como a partir da verificação de dados de frequência e amortecimento do sistema determinados através do método do decaimento livre para cada velocidade testada.

Os resultados obtidos com estes experimentos comprovam o êxito do projeto do dispositivo flexível descrito anteriormente. Observa-se a existência dos modos de flexão e de torção bem definidos e distantes dos modos de frequências mais altas, o que fica bem demonstrado na figura 6.40. Demonstrou-se também que as rigidezes destes modos

são compatíveis com a faixa de velocidades do túnel de vento em uso. Este fato fica comprovado através dos gráficos que demonstram os resultados experimentais no tempo, onde se mostram os sinais medidos do sistema em *flutter*. Pode-se verificar também o acoplamento entre os modos nos gráficos de resposta em frequência experimentais na região de *flutter* e através do gráfico V-g do sistema.

Figura 6.40 – Apresentação das respostas medidas na faixa de frequências completa.

Destacam-se ainda os resultados apresentados pelo modelo em espaço de estados. A previsão da velocidade de *flutter* foi realizada com boa precisão, o que pode ser verificado através da evolução dos autovalores do sistema. A frequência de *flutter* teórica é diferente da experimental. Explica-se este fato através de algumas aproximações assumidas no desenvolvimento do modelo, principalmente quando se assume um sistema puramente bidimensional, e devido à variação do amortecimento dos modos que ocorre na prática e que não foi considerado no modelo.

Com a caracterização do sistema experimental partiu-se para o desenvolvimento do controlador para supressão do *flutter*, simulações e implementação do controle em testes no túnel de vento.

6.4 – Projeto e Implementação do Controlador

A fase do trabalho anterior apresentada foi importante para a comprovação dos conceitos envolvidos no projeto do experimento. Foram atingidas as premissas adotadas para o desenvolvimento do dispositivo flexível já que, este dispositivo associado à asa projetada possibilitou a ocorrência do *flutter* no túnel de vento. Este fato foi comprovado através dos testes no domínio do tempo, demonstrando seu caráter oscilatório e auto-excitado, e no domínio da frequência com medidas ao longo de toda a faixa de velocidades precedentes ao *flutter*. Esta fase foi também importante para o melhor ajuste do modelo matemático a partir de alguns dados experimentais obtidos.

Todo o desenvolvimento em malha aberta, tanto teórico como experimental, é fundamental para a realização dos experimentos em malha fechada. Um modelo confiável, juntamente com a experiência obtida no desenvolvimento do experimento para a obtenção e caracterização do *flutter*, é base para o projeto e implementação de controladores para a supressão do *flutter*.

O objetivo do controlador a ser projetado e implementado neste item é a supressão do *flutter* e manutenção da estabilidade do sistema em malha fechada. Entende-se por supressão do *flutter* a estabilização de um sistema que se tornou instável, ou seja, a supressão da característica oscilatória do *flutter* e a condução e manutenção do sistema na sua condição anterior ao início do *flutter*. O desempenho do controlador pode ser verificado através da supressão do *flutter* em um tempo condizente sem que sejam ultrapassadas as limitações físicas de atuação no sistema experimental. No projeto em questão pode se estabelecer a supressão em um tempo menor que 10 segundos com taxa e amplitudes de atuação possíveis de serem atingidas pelo sistema de atuação experimental, o conjunto motor elétrico e superfície de controle.

Algumas das técnicas utilizadas no projeto de controladores aplicados na aeroelasticidade foram apresentadas no capítulo 3, com destaque para o projeto de um controlador ótimo baseado em índice de desempenho quadrático. Esta técnica foi utilizada para o projeto do controlador tipo regulador linear quadrático (*LQR - Linear Quadratic Regulator*) testado em simulações e implementado em experimentos realizados no túnel de vento.

Ao longo deste item é apresentado o processo para o projeto do controlador e os resultados obtidos nas simulações e nos experimentos.

6.4.1 – Simulações e Experimentos em Malha Fechada

O projeto do controlador depende dos resultados obtidos nas simulações realizadas com o modelo aeroelástico. Este modelo dinâmico é a base para o controlador, já que, a partir dele são determinados os autovalores da matriz de estados, indicativos da estabilidade ou instabilidade do sistema e ponto de referência para o projeto do controlador que gerará a ação para a modificação do comportamento dinâmico do sistema.

O projeto do regulador linear quadrático resulta em uma matriz de realimentação de estados obtida a partir da minimização de um índice de desempenho quadrático previamente definido, conforme exposto no capítulo 3. A solução deste problema de controle depende da solução da equação algébrica de Riccati associada que exige o conhecimento da matriz de estado **A**, da matriz de controle **B** e das matrizes de desempenho **R** e **Q** a serem atribuídas pelo projetista do controlador.

O processo de atribuição das matrizes **R** e **Q** vai determinar se o controlador poderá ou não atingir o desempenho necessário para o problema em questão. A determinação destas matrizes é feita por tentativa e erro. Portanto, um programa computacional é necessário para a realização de simulações até a determinação de matrizes que atendam os requisitos do sistema. Um método prático, que em geral é realizado, consiste em estabelecer estas matrizes como diagonais, diminuindo o número de variáveis a serem testadas e facilitando a solução do problema.

Para o sistema aeroelástico deste projeto, tem-se, a partir das dimensões das matrizes **A** e **B**, que a matriz **Q** será diagonal 4×4 e a matriz **R** terá apenas um elemento. A variação do valor dos elementos destas matrizes indica a maximização ou minimização da condição da variável a ela associada. Da análise do índice de desempenho quadrático apresentado no capítulo 3 tem-se que a matriz **R** está associada à energia gasta no esforço de controle e a matriz **Q** ao erro associado à variável em questão. Por exemplo, o aumento de **R** implicará em redução da potência de atuação do controlador. Desta forma são modificados os ganhos da matriz de realimentação adaptando o controlador para a aplicação requerida.

Durante o projeto do controlador para supressão de *flutter* as matrizes R e Q eram atribuídas, a matriz de realimentação determinada e o sistema com a malha de controle fechada era simulado na velocidade de *flutter*. Através das respostas obtidas verificava-se o desempenho do controlador. A aplicabilidade do controlador também era testada para velocidades superiores à velocidade de *flutter*, analisando-se a capacidade de se manter o sistema estável em velocidades maiores que a de *flutter*.

Um esquema do controlador utilizado é mostrado na figura 6.41 a seguir. O objetivo é manter os sinais medidos pelos sensores estáveis e próximos das suas condições iniciais, ou seja, próximos de zero. Verifica-se também que a planta do sistema é representada na forma de espaço de estados. Os sensores representados nesta figura são os extensômetros e acelerômetros descritos anteriormente e o atuador é a superfície de controle acionada pelo motor elétrico também anteriormente descrito.

Figura 6.41 - Esquema do regulador projetado.

Com o intuito de se ter uma melhor representação do sistema real, as características dinâmicas dos sensores e do atuador foram consideradas durante as simulações. Representou-se o motor elétrico acionador da superfície de controle por uma função de transferência de segunda ordem, assim como os acelerômetros. Os extensômetros foram representados por um sistema de primeira ordem. Além disso, atrasos foram adicionados aos sinais dos acelerômetros e um sinal de ruído também foi somado aos sinais dos extensômetros e acelerômetros. Desta forma procurou-se ter uma boa verificação do controlador desenvolvido.

A partir da simulação do modelo em espaço de estados para a velocidade de 25 m/s obtiveram-se os autovalores apresentados na tabela 6.4 a seguir. Observam-se autovalores com parte real positiva, demonstrando a instabilidade do sistema.

Conhecidos estes autovalores, as matrizes **R** e **Q** começaram a ser atribuídas para a determinação da matriz de realimentação **K**.

Tabela 6.4 – Autovalores obtidos a partir da simulação com velocidade de 25 m/s.

-1,32 + 7,44i	-1,32 - 7,44i	0,078 + 10,97i	0,078 - 10,97i
---------------	---------------	----------------	----------------

Para facilitar a avaliação dos valores atribuídos às matrizes do índice de desempenho, convencionou-se manter o valor unitário para a matriz **R**, ou seja, seu valor inicial e mínimo no qual a máxima energia de controle disponível seria utilizada. Se durante as simulações fosse verificada a necessidade de diminuição da energia gasta na atuação o valor de **R** seria aumentado.

O primeiro teste a ser realizado para a aplicação da técnica de controle em discussão é a verificação da controlabilidade do sistema, condição necessária para a aplicação do método. Assim para o sistema na velocidade de 25 m/s tem-se que o posto da matriz de controlabilidade é igual a quatro, satisfazendo as condições necessárias.

Ao longo do processo de determinação se percebe claramente a influência da modificação das variáveis da matriz **Q**. Os valores dos elementos de **Q** foram gradativamente modificados até a obtenção do desempenho desejado, o que foi verificado nas simulações. Ao longo deste processo diversos valores foram verificados e exemplos de desempenhos obtidos. Abaixo se verifica um exemplo para as matrizes **R** e **Q** atribuídas no início dos testes.

$$\mathbf{R} = [1] \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [0,2128 \quad 2,2695 \quad -11,2431 \quad -6,1079]$$

Com esta matriz de realimentação foram obtidas as respostas das figuras 6.42 a 6.46 para a simulação realizada na velocidade de 25 m/s. Como pode ser observado nestas figuras o controlador não possui um desempenho razoável na supressão do *flutter*. Na simulação a malha de controle foi fechada no tempo $t = 10\text{s}$ e o controlador passa a atuar, reduzindo o nível das oscilações do sistema instável, porém, em um tempo muito longo. Fica claro que os valores dos elementos da matriz **Q** devem ser aumentados, minimizando os erros relativos às variáveis associadas.

Figura 6.42 - Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.43 - Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.44 - Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável h na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.45 - Ação de controle ineficiente durante simulação para a variável θ na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.46 - Ação ineficiente do atuador durante simulação na velocidade de 25 m/s.

Assim, o processo foi continuado e testes realizados. Durante a determinação ficou claro que a variação dos elementos $Q(1,1)$ e $Q(2,2)$ não implicavam em modificações significativas nos valores dos elementos da matriz de realimentação K . Como a solução do regulador quadrático linear implica em um sistema estável, desde que o sistema seja controlável e observável, este fato sugere que o aumento dos dois primeiros elementos da matriz de realimentação K tornaria o sistema instável, o que foi verificado nas simulações e posteriormente na implementação do controlador nos testes em túnel de vento. Como exemplo, verifica-se na figura 6.47 a ação de controle para a variável h modificando-se a matriz de controle anterior para:

$$K = [0,2128 \quad 3,2695 \quad -11,2431 \quad -6,1079]$$

ou seja, aumentando de 1 o valor do segundo elemento.

Figura 6.47 – Ação de controle errada, aumentando a amplitude das oscilações.

Com o fato anterior limitou-se a variação dos valores da matriz $\mathbf{Q}$ aos elementos $Q(3,3)$ e $Q(4,4)$, já que estes são os elementos que mais influenciam na variação dos ganhos da matriz de realimentação. Assim, a partir das simulações e também da experiência obtida em alguns testes práticos, determinou-se a condição abaixo para o projeto do controlador regulador linear quadrático.

$$\mathbf{R} = [1]$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [1,1 \quad 1,2 \quad -3,8 \quad -14,0]$$

Esta matriz foi implementada no sistema simulado em MatLab ® conforme o esquema apresentado na figura 6.41. As simulações foram realizadas a partir da velocidade de 25 m/s, onde o sistema encontra-se instável, e sendo aumentada gradualmente para a verificação do funcionamento do controlador.

Figura 6.48 – Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.49 - Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.50 - Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 25 m/s.

Figura 6.51 - Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 25 m/s.

Na figura a seguir destaca-se a ação do atuador ao longo da simulação. Pode-se observar a entrada aplicada em 5 segundos e a malha de controle fechada a partir de 10 segundos.

Figura 6.52 – Ação do atuador durante simulação na velocidade de 25 m/s.

A velocidade da simulação foi aumentada de 10% para verificar a capacidade do controlador de manter a estabilidade do sistema para velocidades maiores que a velocidade de *flutter*. As respostas obtidas são apresentadas nas figuras 6.53, 6.54, 6.55 e 6.56 a seguir. Observa-se que a ação do controlador ainda é suficiente para a estabilização do sistema.

Figura 6.53 - Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 27,5 m/s.

Figura 6.54 - Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 27,5 m/s.

Figura 6.55 - Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 27,5 m/s.

Figura 6.56 - Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 27,5 m/s.

Na figura a seguir destaca-se a ação do atuador para a velocidade de 27,5 m/s.

Figura 6.57 - Ação do atuador durante simulação na velocidade de 27,5 m/s.

A mesma simulação também foi realizada para a velocidade de 29 m/s, como é mostrado nas figuras 6.58, 6.59, 6.60, 6.61. A ação do controlador ainda é capaz de diminuir a amplitude das oscilações do sistema em *flutter*. Porém, já se verifica o aumento do tempo de resposta do controlador, o que demonstra a queda no seu desempenho tornando-o ineficiente. Este fato já era esperado devido ao crescimento da energia envolvida no sistema com o aumento da velocidade. Além disso, os ângulos apresentados para o atuador ficam acima do limite verificado para o sistema físico.

Figura 6.58 - Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 29 m/s.

Figura 6.59 - Ação de controle durante simulação para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 29 m/s.

Figura 6.60 - Ação de controle durante simulação para a variável h na velocidade de 29 m/s.

Figura 6.61 - Ação de controle durante simulação para a variável θ na velocidade de 29 m/s.

Figura 6.62 - Ação do atuador durante simulação na velocidade de 29 m/s.

Uma possibilidade seria a tentativa de redução da energia gasta na atuação, desta forma se reduziria o nível de atuação, tentando levá-lo novamente para as possibilidades do sistema. Porém, o controlador torna-se ineficaz como se pode observar na figura 6.63, onde a matriz de realimentação foi obtida para o mesmo caso anterior, somente modificando-se a matriz $\mathbf{R}$ do valor unitário para dois.

Figura 6.63 – Ação de controle para controlador com nível de atuação reduzido.

Os resultados obtidos nas simulações anteriores comprovam o desempenho teórico da técnica utilizada para o projeto do controlador. Esta etapa anterior é um passo necessário antes de se implementar experimentalmente o sistema de controle. Obviamente serão verificados desempenhos diferentes para o sistema experimental devido às diferenças já citadas entre o modelo analítico e experimental.

Na implementação do controlador para o sistema no túnel de vento serão utilizados todos os desenvolvimentos do sistema de aquisição, processamento do sinal de controle e atuação anteriormente apresentados.

A figura 6.64 apresenta um esquema do experimento de controle realizado. Os sinais foram medidos com os extensômetros e acelerômetros descritos no item de instrumentação. Neste momento destaca-se o fechamento da malha de controle. Como pode se observar na figura 6.64 os sinais medidos são acondicionados na placa dSPACE onde são processados e o sinal de controle realimentado até o atuador que altera o comportamento dinâmico da estrutura em teste.

A taxa de aquisição e atuação utilizada nestes experimentos foi de 0,001 segundos e os dados foram atualizados a cada 0,01 segundos. Esta taxa é elevada, porém, o sistema de atuação apresentou um desempenho sensivelmente superior nestas condições. O bom funcionamento do sistema de atuação é determinante para que este não influencie o desempenho do controlador para supressão de *flutter*. Este problema foi verificado durante os primeiros experimentos com malha de controle fechada. O sistema não estava sendo estabilizado quando entrava em *flutter*. Verificou-se que o problema não estava no desempenho do controlador para supressão de *flutter*, mas sim, existiam

problemas de ajustes no controlador PID responsável pelo controle do motor de acionamento do atuador.

Figura 6.64 – Esquema do experimento de controle realizado no túnel de vento.

Durante os experimentos o sistema foi levado até à condição de *flutter*. Nesta condição a malha de controle foi fechada, ocorrendo a atuação. Com o sistema estabilizado devido à ação do controlador, a velocidade era aumentada e o controlador novamente acionado. Este procedimento foi realizado até ser atingida a velocidade de limite de desempenho do controlador ou a velocidade em que a estrutura divergia. Destaca-se que o sistema computacional foi programado para que nos períodos em que o sistema se encontrava na condição de malha aberta a superfície de controle era

mantida na posição de ângulo zero. Essa condição é importante para que a superfície de controle não ficasse livre, induzindo o sistema ao *flutter* em velocidades mais baixas.

Implementou-se o controlador apresentado nas simulações com $K = [1,1 \quad 1,2 \quad -3,8 \quad -14,0]$. O *flutter* ocorreu na velocidade de 23 m/s. Neste momento foi detectada uma característica inesperada do dispositivo flexível. Os eixos do dispositivo eram presos em suas extremidades, na placa superior e inferior, através de rosca nas placas e porcas. Com os testes realizados em malha aberta a tensão nestes eixos diminuiu, alterando as condições de rigidez do sistema. Esta variação implicou nesta diminuição da velocidade de *flutter* nos experimentos em malha fechada.

As figuras 6.65, 6.66, 6.67 e 6.68 a seguir apresentam os resultados de supressão de *flutter* no túnel de vento na velocidade de 23 m/s. Observa-se nestas figuras que o controlador foi capaz de suprimir o *flutter*, ou estabilizar o sistema instável. No gráfico da figura 6.69 verifica-se que a malha de controle foi fechada no tempo $t = 6$ segundos e que em torno do tempo $t = 10$ segundos o sistema estava controlado.

Figura 6.65- Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 23 m/s.

Figura 6.66 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 23 m/s.

Figura 6.67 - Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 23 m/s.

Figura 6.68 - Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 23 m/s.

Figura 6.69 – Sinal do controlador e do atuador durante experimento. Velocidade de 23 m/s.

Na figura anterior fica demonstrado o bom funcionamento do sistema de atuação desenvolvido. O ângulo máximo da superfície de controle foi limitado na programação experimental no sistema dSPACE em ± 12 graus para se evitar danos ao sistema. Por isso o *encoder* não acompanha o sinal do controlador para ângulos maiores que 12 graus. A atuação ou não do motor foi definida através do envio do sinal de controle ou de um sinal zero para a saída D/A que enviava o sinal do controlador para o motor.

Com o objetivo de verificar o controlador, a velocidade do túnel de vento foi sendo gradualmente aumentada. Os gráficos das figuras 6.70 até 6.74 mostram a atuação do controlador para a velocidade de 23,5 m/s.

Figura 6.70 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 23,5 m/s.

Figura 6.71 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 23,5 m/s.

Figura 6.72 - Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 23,5 m/s.

Figura 6.73 - Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 23,5 m/s.

Figura 6.74 - Sinal do controlador e do atuador durante experimento. Velocidade de 23,5 m/s.

Os gráficos anteriores demonstram que o controlador ainda tem boa capacidade de supressão do *flutter* para a velocidade do experimento. O tempo de resposta do controlador para o fechamento da malha em 42 segundo se mantém praticamente inalterado se comparado com a velocidade testada anteriormente.

O desempenho do controlador permitiu a continuação do experimento. Assim, a velocidade foi aumentada para 24,5 m/s e as figuras 6.75 até 6.79 mostram a atuação do sistema de controle.

Observa-se no gráfico da figura 6.78 relativo à variável θ que o sistema começa a apresentar tendência a divergência nesta velocidade. A ação do controlador ainda foi capaz de manter os sinais em torno do nível zero. Caso o atuador não possuísse potência suficiente para compensar esta tendência o sistema já apresentaria divergência.

Figura 6.75 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$. Velocidade de 24,5 m/s.

Figura 6.76 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$. Velocidade de 24,5 m/s.

Figura 6.77 - Ação de controle durante experimento para a variável h . Velocidade de 24,5 m/s.

Figura 6.78 - Ação de controle durante experimento para a variável θ . Velocidade de 24,5 m/s.

Figura 6.79 - Sinal do atuador durante experimento. Velocidade de 24,5 m/s.

A velocidade do experimento continuou a ser aumentada até que na velocidade de 25,5 m/s o sistema divergiu. Este fato pode ser observado na figura 6.80 a seguir, onde pode ser observado o sinal de experimento completo para o estado θ . Após o tempo de 100 segundos o sistema, mesmo com a ação do controlador, se manteve encostado no piso do túnel de vento.

Figura 6.80 - Ação de controle durante experimento para a variável θ desde a velocidade de *flutter* até a divergência.

Na programação experimental definiu-se uma variável que assumia valor zero quando o sistema estava em malha aberta e valor um quando a malha de controle era fechada. A figura a seguir confirma os momentos de malha aberta ou fechada demonstrada nos gráficos anteriores.

Figura 6.81 – Variável mostrando a abertura e fechamento da malha de controle durante todo o experimento.

Destaca-se também na figura 6.81 que no final do experimento o sistema foi mantido em malha fechada. Por isso no gráfico da figura 6.80 o sistema manteve-se oscilando mesmo divergindo. A divergência ocorre na velocidade em que o momento suportado pela estrutura é menor que o momento aerodinâmico gerado.

Os resultados obtidos nos experimentos em malha fechada com este regulador quadrático linear demonstram um bom desempenho na supressão do *flutter*. Analiticamente verificou-se um aumento na velocidade de *flutter* de cerca de 16% devido à ação do controlador. Experimentalmente a velocidade de divergência ocorreu antes que o controlador apresentasse uma queda significativa em seu desempenho. Até onde se pôde verificar o controlador garantiu um acréscimo de cerca de 11% na velocidade de *flutter*.

A título de ilustração, implementou-se também a primeira matriz de realimentação apresentada durante as simulações, $K = [0,2128 \ 2,2695 \ -11,2431 \ -6,1079]$. Como descrito, espera-se, como já obtido nas simulações, que este regulador apresente um desempenho menor na capacidade de suprimir as oscilações do *flutter*. Nas figuras a seguir podem ser verificados os resultados do segundo controlador projetado.

Conforme esperado, este segundo controlador apresentou um baixo desempenho na supressão do *flutter* já para a velocidade de 23 m/s. Observa-se um tempo de estabelecimento muito grande na resposta obtida. Este resultado ilustra e confirma o projeto realizado, assim como o desempenho do primeiro controlador implementado.

Figura 6.82 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{h}$ na velocidade de 22,7 m/s.

Figura 6.83 - Ação de controle durante experimento para a variável $\dot{\theta}$ na velocidade de 22,7 m/s.

Figura 6.84 - Ação de controle durante experimento para a variável h na velocidade de 22,7 m/s.

Figura 6.85 - Ação de controle durante experimento para a variável θ na velocidade de 22,7 m/s.

Figura 6.86 - Sinal do controlador e do atuador durante experimento na velocidade de 22,7 m/s.

Tentativas de melhoria de desempenho para o primeiro controlador foram realizadas e pouco sucesso foi obtido. Alterações nas matrizes $\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$ foram realizadas modificando as matrizes de realimentação obtidas. Em geral, estes novos controladores apresentaram desempenho similar ou abaixo do desempenho obtido com o controlador implementado. Em alguns casos, mesmo que teoricamente a matriz de realimentação obtida a partir do índice de desempenho quadrático implique sempre em um sistema estável, a aplicação prática mostrou um sistema instável. Este fato deveu-se possivelmente a presença de ruídos e atrasos que ocorrem na prática.

Além dos possíveis ruídos detectados pelo sistema de aquisição, corriqueiros em implementações práticas, observa-se em todos os resultados apresentados, malha aberta ou fechada, que os sensores detectam pequenas oscilações. Estas oscilações são provenientes da interação fluido-estrutura em condições de estabilidade do sistema, seja

em velocidades menores que a de *flutter* ou com o sistema estabilizado devido ao efeito do controlador. Um controlador que não tenha sido devidamente projetado já tendia a desestabilizar o sistema somente na tentativa de suprimir tais oscilações.

Como regra observou-se que os controladores que resultaram em um sistema instável na prática, tinham ganhos nas duas primeiras posições da matriz de realimentação maiores que os mesmos ganhos na matriz do controlador implementado. Tal tendência já havia sido verificada durante os testes para as atribuições das matrizes **R** e **Q** assim como nas simulações.

7 – Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

7.1 - Conclusões

O trabalho desenvolvido pode ser caracterizado em duas etapas: uma teórica e outra experimental. A primeira etapa envolve o estabelecimento conceitual do projeto, o desenvolvimento do modelo aeroelástico bidimensional utilizado durante as simulações e o estudo teórico sobre a técnica utilizada para o projeto do controlador para supressão de *flutter*. Baseado nos conceitos e ferramentas obtidos na parte teórica desenvolveu-se a etapa experimental, que envolve o projeto e desenvolvimento de todo o aparato experimental e a aplicação do controlador para a supressão do *flutter*, que foi o objetivo principal do trabalho.

O projeto e desenvolvimento do dispositivo flexível envolveram as simulações realizadas para a determinação das dimensões do aparato experimental, sua construção, os testes modais e identificação, a instrumentação do sistema, a programação experimental e as aplicações nos ensaios no túnel de vento para a caracterização aeroelástica do sistema. Considera-se o projeto e desenvolvimento do dispositivo flexível como parte fundamental do trabalho. A evolução dos trabalhos nesta área permitiu um aprendizado significativo na compreensão prática da teoria estudada assim como a correção de algumas idéias adotadas no início do estudo.

Além dos conceitos estabelecidos no projeto do dispositivo flexível, o modelo em Elementos Finitos foi utilizado como ferramenta para o projeto deste dispositivo. Os resultados deste modelo eram testados no modelo aeroelástico e modificações eram realizadas até a determinação de uma configuração condizente com as condições do

túnel de vento disponível. Alguns modelos do dispositivo flexível com diferentes configurações foram construídos e testados, possibilitando ajustes no modelo em elementos finitos e modelo aeroelástico. Em alguns momentos a prática foi melhor guia que o modelo já que se tinha consciência das simplificações e dificuldades envolvidas no desenvolvimento do modelo em elementos finitos. Por exemplo, o problema em questão envolvia alguns desafios como a modelagem dos engastes dos eixos e da barra central do dispositivo. Assim, o modelo foi ajustado de forma a produzir resultados que pudessem ser utilizados como guia para o desenvolvimento final do projeto.

Com as simplificações anteriormente citadas, testes modais foram realizados para a caracterização e conhecimento da estrutura construída. A análise modal associada ao uso de um algoritmo de identificação de sistemas possibilitou a confirmação dos dados obtidos nas simulações realizadas durante o projeto e o conhecimento das reais características da estrutura. Confirmou-se o requisito básico para se ter o *flutter* bidimensional, os dois modos envolvidos no *flutter* adequadamente caracterizados e distantes dos modos mais altos. Desta forma, os testes em túnel de vento puderam ser realizados com maior segurança e facilidade.

As características aeroelásticas do sistema experimental foram amplamente determinadas nos testes realizados no túnel de vento. Nestes testes verificou-se a obtenção do *flutter* e a caracterização e identificação do fenômeno obtido. Os resultados obtidos nos testes de caracterização da estrutura demonstraram de forma clara através de funções resposta em frequência o mecanismo de evolução dos modos envolvidos no *flutter* com a variação da velocidade do túnel de vento, até o acoplamento dos modos demonstrado na velocidade de *flutter*. A variação das características dos modos pôde ser demonstrada de forma quantitativa através de resultados obtidos com a identificação do sistema para todas as velocidades testadas utilizando-se o algoritmo *EERA*. A evolução das frequências e dos fatores de amortecimento é mostrada através de um gráfico V-g. Estes resultados confirmam as expectativas obtidas nas simulações e mostram que o projeto do dispositivo flexível foi realizado de forma adequada.

Os resultados obtidos na caracterização do sistema mostram a ocorrência do *flutter* em uma frequência baixa, 1,6 Hz. O modelo de asa, por motivos diversos, foi usinado em alumínio, com massa maior do que se fosse fabricado em madeira. O aumento da massa implicou em redução das frequências envolvidas. As baixas frequências resultaram em algumas dificuldades para a medição das variáveis envolvidas.

Desta forma, o sistema de aquisição teve de ser cuidadosamente desenvolvido e cada parte testada individualmente. Neste sentido não houve problemas no uso dos extensômetros. Já as medidas dependentes dos acelerômetros exigiram o uso de sensores capacitivos. Apesar de possibilitarem medidas em frequências tão baixas quanto as envolvidas no fenômeno em questão, alguma variação na fase do sinal foi verificada na faixa de frequência em questão, mas não afetando o desempenho do controlador para supressão de *flutter*. O correto ajuste do sistema de medição e aquisição foi fundamental para a qualidade dos resultados de todos os testes realizados em túnel de vento.

Durante o desenvolvimento do experimento e dos testes anteriormente descritos podem ser destacadas algumas características verificadas no uso deste tipo de dispositivo flexível. A determinação das dimensões do dispositivo que permitiram a obtenção do *flutter* no túnel de vento não foi tarefa simples. Pôde-se verificar que, com o modelo de asa disponível e faixa de velocidades do túnel de vento, a faixa de variação das características dinâmicas do sistema que podem resultar em *flutter* é bastante restrita. Pequenas variações nas dimensões dos elementos do dispositivo flexível e pequenas variações nas posições destes elementos resultavam em variações nas rigidezes e, por consequência, uma estrutura que não entrava em *flutter* na faixa de velocidades do túnel.

Neste mesmo sentido observou-se ainda a proximidade da velocidade de divergência e velocidade de *flutter*. Em algumas configurações a divergência ocorria antes do *flutter*, ou seja, impossibilitava a obtenção do *flutter*. A solução deste problema se tornava bastante restrita, já que o aumento da rigidez acabava por implicar em velocidades de *flutter* muito elevadas. Talvez, o uso de dispositivos flexíveis nos quais as características dinâmicas sejam dadas por molas permitam maior liberdade e facilidade para alteração de tais características e adequação ao túnel de vento em questão.

Outro cuidado importante no uso de dispositivos flexíveis associados a modelos de asas rígidas é a verificação da estabilidade das características do sistema. Por exemplo, no testes de supressão de *flutter* verificou-se a redução da velocidade de *flutter* devido à variação da tensão nos eixos do dispositivo. Verificações periódicas são recomendadas garantindo que as características da estrutura em teste não varie significativamente.

O modelo aeroelástico desenvolvido foi baseado na premissa de um sistema bidimensional. Apesar desta premissa também ser a base conceitual para o desenvolvimento do sistema experimental, na prática não se tem um sistema de exatamente tal tipo. Apesar dos deslocamentos da asa não serem grandes, nem sempre o movimento de sua base é exatamente paralelo ao chão do túnel, o que gera variações aerodinâmicas não consideradas no modelo. O comprimento finito da asa também pode implicar em efeitos aerodinâmicos não considerados. Ainda a presença de modos estruturais mais altos afetam o comportamento do sistema. Assim explicam-se algumas imprecisões do modelo.

O regulador linear com função de custo quadrática proposto apresentou bom desempenho na supressão do *flutter* tanto nas simulações quanto na implementação prática. O projeto de tal controlador é dependente do modelo aeroelástico. Mesmo com as simplificações adotadas para o desenvolvimento deste modelo, ele foi capaz de gerar elementos suficientes para a determinação das matrizes de realimentação que foram implementadas.

A escolha dos elementos das matrizes da função de custo quadrática foi facilitada pela restrição dos elementos que influenciavam significativamente os valores da matriz de realimentação obtida. Esta técnica de projeto de controladores não dá uma visão clara das condições de estabilidade do sistema (margem de ganho, margem de fase) como o projeto de um controlador clássico expõe. Porém, em casos de sistema com dimensões reduzidas é uma forma prática e eficiente para a determinação do controlador. O uso de controladores com norma μ ou H associam as características de controladores clássicos e controladores ótimos, sendo talvez a forma de projeto mais adequada para se quer ter uma visão clara do problema do problema de controle e robustez do sistema projetado.

O bom funcionamento do controlador resultou também do correto ajuste e funcionamento do sistema de atuação desenvolvido. O motor elétrico utilizado foi capaz de responder dentro das características necessárias e o controlador PID ajustado apresentou um bom desempenho. Este controlador é um subsistema fundamental do sistema de controle para supressão de *flutter*. Seu desempenho poderia impedir o controle do *flutter* mesmo que a matriz de realimentação para supressão de *flutter* estivesse correta.

De modo geral a metodologia desenvolvida para o projeto do sistema experimental mostrou-se eficaz, o que é comprovado pelos resultados experimentais. Todos os objetivos do trabalho foram atingidos, desde a obtenção do *flutter* até o

objetivo principal que é supressão do *flutter*, o que foi demonstrado através dos resultados obtidos nos experimentos. Os experimentos aeroservoelásticos desenvolvidos são básicos e pioneiros no país. Espera-se que possam contribuir para o contínuo desenvolvimento da aeroseroelasticidade experimental no Brasil..

7.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros

O sistema experimental desenvolvido permite o desenvolvimento de diversas aplicações em algumas áreas relacionadas com a Aeroelasticidade. Sendo este um trabalho básico e sendo o fenômeno obtido relativamente simples e conhecido, novos estudos e aplicações acabem sendo facilitados. Diferentes tipos de controladores podem ser testados, algoritmos de identificação e estudos sobre *flutter* propriamente ditos podem ser realizados com a estrutura desenvolvida.

Em geral, os estudos de *flutter* estão relacionados com o ponto de vista estrutural do fenômeno. Sabe-se que o surgimento do *flutter* é diretamente relacionado com as variações que ocorrem na esteira da asa nas proximidades da velocidade de *flutter*. A realização de um trabalho experimental visando o mapeamento da esteira da asa em velocidades próximas da de *flutter* e inclusive na velocidade de *flutter* poderiam dar uma contribuição básica e significativa para a demonstração do mecanismo de *flutter* sob o ponto de vista aerodinâmico. Estas medidas poderiam ser realizadas através das diversas técnicas de anemometria conhecidas. Uma consequência futura deste trabalho seria o desenvolvimento de modelos de asa que permitissem a atuação no sistema através de sopro ou sucção, substituindo atuadores como a superfície de controle utilizada neste trabalho.

A técnica de controle utilizada apresentou um bom desempenho para o problema em questão. Porém, em uma aplicação mais complexa seu desempenho deverá ser sensivelmente reduzido tornando sua aplicação não indicada. Assim, o desenvolvimento de controladores mais robustos como os controladores H seria plenamente justificável. Outro desenvolvimento com boa aplicação seria o projeto de controladores adaptativos. A característica adaptativa garantiria o uso destes controladores em diversas condições. Nesta linha, algumas sugestões podem ser deixadas.

A primeira delas envolve o uso de controladores não-convencionais. Dentre estes, o uso de Redes Neurais pode ser citado como uma importante alternativa para o

desenvolvimento de um controlador adaptativo. Aplicações onde se realizam o treinamento e aprendizado da rede simultaneamente ao acontecimento do processo a ser aprendido já existem e podem ser aplicados para o controle adaptativo de *flutter*. O algoritmo desenvolvido para controle seria treinado com os dados que estão sendo medidos durante o experimento e a rede seria adaptada para as diversas condições que vão ocorrendo na prática.

Outro modo interessante é a associação de um algoritmo para identificação de sistemas e uma lei de controle. O algoritmo seria utilizado para a identificação em tempo real do sistema a ser controlado e modificaria uma lei de controle projetada para a supressão de *flutter*. Desta forma o sistema de controle, que incluiria o sistema de identificação e a lei de controle, se adaptaria às diversas condições do sistema a ser controlado.

Novos experimentos podem ser projetados a partir da experiência obtida com este trabalho. Uma aplicação interessante e que vem sendo amplamente estudada são os fenômenos não-lineares. Estes podem ser obtidos experimentalmente através do uso de uma asa rígida associada com um dispositivo flexível onde as características dinâmicas sejam dadas por molas e a não-linearidade dada pelo uso de molas não-lineares guiando estas molas.

Uma consequência natural destes estudos com asas rígidas seriam os experimentos com asas flexíveis. Diversas outras aplicações e estudos podem ser desenvolvidos. Em geral todos estes desenvolvimentos visam o projeto futuro de aeronaves mais eficientes do ponto de vista Aeroelástico.

8. Referências

- Abel, I. (1997). *Research and applications in aeroelasticity and structural dynamics at the NASA Langley Research Center*. NASA Technical Memorandum 112852.
- Andreghettone, M.; Mantegazza, P. (1998). Multi-Input/Multi-Output Adaptive Active Flutter Suppression for a Wing Model. *Journal of Aircraft*, Vol.35, No.3, may-jun, p.462-469.
- Armstrong, E.S. (1993). Robust Controller Design for Flexible Structures Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptors. *NASA TP-3325*.
- Ashley, H. (1970), Aeroelasticity. *Applied Mechanics Reviews*, p.119-129.
- Bisplinghoff, R.L. & Ashley, H. (1962), *Principles of Aeroelasticity*. Dover Publications Inc, Estados Unidos, 527p.
- Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R. L. (1955), *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Estados Unidos, 860p.
- Block, J.J.; Strganac, T.W. (1998). Applied active control for a nonlinear aeroelastic structure. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.21, No.6, nov-dec.
- Chowdhury, A. G.; Sarkar, P.P. (2003). A new technique for identification of eighteen flutter derivatives using a three-degree-of-freedom section model. *Engineering Structures*, Vol.25, p.1673-1772.
- Clair, D.W. and Fruehauf, P.S. (1994). PID Tuning: It is the method, not the rules. *Intech Engineer's Notebook*, pp.26-30.
- Cole, R.S.; Nool, T.E.; Perry, B. (2003). Transonic Dynamics Tunnel Aeroelastic Testing in Support of Aircraft Development. *Journal of Aircraft*, Vol.40, No.5, p.820-831.

Collar, A.R. (1946), The Expanding Domain of Aeroelasticity. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol.50, p.613-636.

Collar, A.R. (1959), Aeroelasticity – Retrospect and Prospect. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol.63, No.577, p.1-15.

Dansberry, B.E.; Durham, M. H.; Bennett, R. M.; Turnock, D. L.; Silva, E. A.; Rivera Jr, J. A., Physical Properties of the Benchmark Models Program Supercritical Wing. *NASA TM-4457*.

De Marqui Jr., C; Tsunaki, R.H.; Belo, E.D.; Rebolho, D.C.; Marques, F.D. (2004). Design and Tests of an Experimental Flutter Mount System. In: Proceedings of the IMAC XXII . Dearborn, MI, Estados Unidos.

Dong, B.; Mook, D.T. (1991). Flutter suppression by feedback control. AIAA-91-2847-CP.

Dowell, E.H. (1995), *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers, Holanda, 699p.

Dugundji, J. (2003). Personal Perspective of Aeroelasticity During the Years 1953-1993. *Journal of Aircraft*, Vol.40, No.5, p.809-812.

Försching, H. (1979). Aeroelastic Problems in Aircraft Desing. von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture series 08: A Survey of Aeroelastic Problems.

Friedmann, P.P. (1999), Renaissance of Aeroelasticity and its Future. *Journal of Aircraft*, Vol.36, No.1, p.105-121.

Fung, Y.C. (1955). *The theory of aeroelasticity*. John Wiley & Sons Inc, Estados Unidos, 490p.

Garrick, I.E. (1976). Aeroelasticity – frontiers and beyond. *13th Von Karman Lecture, J. of Aircraft*, v.13, n.9, p. 641-657.

Garrick, I.E.; Reed, W.H. (1981), Historical Development of Aircraft Flutter. *Journal of Aircraft*, Vol.18, No.11, p.897-912.

Gilliat, H.C.; Strganac, T.W.; Kurdila, A.J. (1998). On the Presence of Internal Resonances in Aeroelastic Systems. *AIAA – 98 – 1955*.

Hancock, G.J.; Wright J.R.; Simpson A. (1985). On the teaching of the principles of wing flexure-torsion flutter. *Aeronautical Journal*, p.285-305, out.

Heeg, J. (1993). Analytical and experimental investigation of flutter supression by piezoeletric actuation. *NASA Technical Paper 3241*, february.

- Horikawa, H.; Dowell, E.H. (1979). An elementary explanation of the flutter mechanism with active feedback controls. *Journal of Aircraft*, Vol.16, No.4, apr, p.225-232.
- Inman, D.J. (1994). *Engineering Vibration*. Prentice – Hall Inc, Estados Unidos, 560p.
- Karpel, M. (1982). Design for active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling. *Journal of Aircraft*, Vol.19, No.3, p.221-227.
- Karpel, M., Moulin, B. and Idan, M. (2003). Robust Aeroservoelastic Design with Structural Variations and Modeling Uncertainties. *Journal of Aircraft*, Vol.40, No.5, p.946-954.
- Karpel, M., Moulin, B. (2004). Models for aeroservoelastic analysis with smart structures. *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No.2, p.314-321.
- Ko, J.; Kurdila, A. J.; Strganac, T.J. (1997). Adaptive Feedback Linearization for the Control of a Typical Wing Section with Structural Nonlinearity. In: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Dallas, Texas
- Lanczos, C. (1970). *The variational principles of mechanics*. Estados Unidos, Dover Publications Inc, 418p.
- Lewis, F.L. (1992). *Applied Optimal Control and Estimation*. Prentice-Hall, Estados Unidos, 624p.
- Melin, T. (2000). *A Vortex Lattice MATLAB Implementation for Linear Aerodynamic Wing Applications*. Dissertação (Mestrado) - Royal Institute of Technology (KTH),.
- Meirovitch, L. (1990). *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, Estados Unidos, 425p.
- Meirovitch, L.; Silverberg, L.M. (1984). Active vibration suppression of a cantilever wing. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.97, No.3, p.489-498.
- Mukhopadhyay, V. (1995). Flutter suppression control law design and testing for the active flexible wing. *Journal of Aircraft*, Vol. 32, No 1, pp 45-51.
- Mukhopadhyay, V. (2000). Transonic flutter suppression control law design using classical and optimal techniques with wind tunnel results. *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures Structural Dynamics and Materials Conference*, Saint Louis, Mo.
- Mukhopadhyay, V. (2003). Historical Perspective on Analysis and Control of Aeroelastic Responses. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 5, pp 673-684.

Newson, J.R. (2002). Designing Active Control Laws in a Computational Aeroelasticity Environment. Dissertação - Virginia Polytechnic Institute and State University.

ok Noor, A.K.; Venneri, S.L. (1993). *Flight-Vehicle Materials, Structures, and Dynamics – Assessment and Future Directions*. The American Society of Mechanical Engineering, 511p.

Ogata, K. (2000), *Engenharia de Controle Moderno*. LTC Editora SA, Brasil, 813p.

Olds, S.D. (1997). *Modeling and LQR control of a two-dimensional airfoil*. Virginia. Dissertação – Virginia State University.

Patil, M.J.; Clark, R.L. (2002). Aeroelastic Control Using Multiple Control Surfaces. *AIAA 2002-1632*.

ok Sanders, B.; Eastep, F. E.; Foster, E. (2003). Aerodynamic and Aeroelastic Characteristics of Wings with Conformal Control Surface for Morphing Aircraft. *Journal of Aircraft*, Vol. 40, No. 1, pp 94-99.

Sandford, M.C.; Abel, I.; Gray, D.L. (1975). Development and demonstration of a flutter-suppression system using active contro. *NASA TR-R-450*.

Sahoo, D.; Cesnik, C.E.S. (2002). Roll maneuver control of UCAV wing using anisotropic piezoelectric actuators. *AIAA 2002-1720*.

Scanlan, R.H.; Rosenbaum, R. (1951). *Aircraft Vibration and Flutter*, Dover Publications Inc, 428p.

Scott, R.C.; Pado, L.E. (2000). Active Control of Wind-Tunnel Model Aeroelastic Response Using Neural Networks. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 23, No. 6, pp 1100-1108.

Singh, S.N., J.S.; Yim, W. (2003). State feedback control of an aeroelastic system with structural nonlinearity. *Aerospace Science and Technology*, No.7, p.23-31.

Theodorsen, T. (1934). General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. *NACA Report No. 496*, p.413-433.

Theodorsen, T.; Garrick, I.E. (1942). Flutter Calculations in Three Degrees of Freedom. *NACA Report No. 741*, p.223-240.

Tsunaki, R. H. (1999). *Identificação Automatizada de Modelos Dinâmicos no Espaço de Estados*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Vipperman, J.S.; Clark, R.L.; Conner, C.; Dowell, E.H. (1998). Experimental active control of a typical section using a trailing-edge flap. *Journal of Aircraft*, Vol.35, No.2, mar-apr, p.224-229.

- Waszak, M.R. (1998). Modeling the benchmark active control technology wind-tunnel model for active control design applications. *NASA TP-1998-206270*, jun.
- Waszak, M.R. (2001). Robust multivariable flutter suppression for benchmark active control technology wind-tunnel model. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.24, No.1, p.147-153.
- Waszak, M.R.; Fung, J. (1998). Parameter estimation of actuators for BACT wind tunnel model with analysis of wear and aerodynamic loading effects. *NASA TM-1998-208452*, jul.
- Waszak, M.R.; Srinathkumar, S. (1995). Flutter suppression for the active flexible wing: a classical design. *Journal of Aircraft*, Vol.32, No.1, p.61-67.
- Waszak, M.R.; Srinathkumar, S. (1995). Flutter suppression for the active flexible wing: a classical design. *Journal of Aircraft*, Vol.32, No.1, p.61-67.
- Xing, L. (2003). *A Comparison of Pole Assignment & LQR Design Methods for Multivariable Control for STATCOM*. Tese (Doutorado) – College of Engineering, The Florida State University.
- Yang, Z.C.; Zhao, L.C. and Jiang, J.S. (1995). A Semi-Active Flutter Control Scheme for A Two-Dimensional Wing. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.184, No.1, p.1-7.

Apêndice

Sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total (função definida positiva) for continuamente decrescente (sua derivada em relação ao tempo seja definida negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado.

A partir de uma generalização do fato anterior é baseado o segundo método de Liapunov. Assim, se um sistema possui um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada transferida no interior do domínio de atração decai com o tempo até atingir o valor mínimo no estado de equilíbrio. Para definir a idéia de energia Liapunov introduziu a função de Liapunov, uma função de energia fictícia.

As funções de Liapunov dependem de $x_1, x_2, \dots, x_n$ e t e são representadas por $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ou por $V(x, t)$, ou $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou por $V(x)$ se não incluírem o tempo explicitamente. No segundo método de Liapunov o comportamento do sinal de $V(x, t)$ e de sua derivada em relação ao tempo fornece informação a respeito da estabilidade, estabilidade assintótica ou da instabilidade de um estado de equilíbrio sem requerer diretamente a obtenção da solução.

Pode-se realizar, por exemplo, uma análise da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. Considerando o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor de estado e $\mathbf{A}$ é uma matriz constante e admitida como não-singular.

Pode se definir uma possível função de Liapunov como sendo

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz hermitiana definida positiva. Como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{A}$ são reais, então $\mathbf{P}$ pode ser escolhida como real simétrica definida positiva. A derivada em relação ao tempo de $V(\mathbf{x})$ é

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

Como $V(\mathbf{x})$ foi determinada como definida positiva, para se ter a estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa. Conseqüentemente é necessário que se tenha

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \quad \text{definida positiva}$$

Assim, para a estabilidade assintótica do sistema inicialmente definido é suficiente que $\mathbf{Q}$ seja definida positiva.

Em vez de primeiro especificar $\mathbf{P}$ definida positiva e examinar depois se $\mathbf{Q}$ é definida positiva, convém primeiro definir $\mathbf{Q}$ definida positiva e então examinar se $\mathbf{P}$ dada por

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{Q}$$

é definida positiva. Note-se que $\mathbf{P}$ ser definida positiva é uma condição necessária e suficiente.