**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**UM MÉTODO PARA IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS
MODAIS EM TEMPO REAL**

Daniela Cristina Rebolho

Orientador: Prof. Titular Eduardo Morgado Belo

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

São Carlos
- 2006 -

“À minha família, com Amor e Gratidão.”

Agradecimentos

Agradeço à Deus por tudo que fez, faz e fará em minha vida.

Ao meu orientador Prof. Titular Eduardo Morgado Belo pela orientação, confiança e pela paciência nos momentos difíceis.

Ao Prof. Associado Flávio Donizeti Marques e Prof. Dr. Roberto Hideaki Tsunaki pelas importantes contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Dirceu e Maria, e ao meu irmão, Danilo, pelo apoio, estímulo e carinho dedicados. E também a toda minha família pelo incentivo.

Ao Gonzalo em especial pelo apoio, compreensão e carinho durante todos os momentos.

Ao Carlos De Marqui Jr pelos conselhos e contribuições valiosas ao trabalho.

À todos os amigos, professores e funcionários do departamento pela paciência e ajuda em todos os momentos, em especial: Luciane, Edson, Elizangela, Nagamine, Cláudio, Márcio, Andreia, Caixeta, Guilherme, Gasparini, Giseli, Beluzo, Valdinei. E a todos os meus amigos: Graziela, Ellen, Ruth, Dawit, Gélío, José Carlos, Vera, Cíntia.

Aos colegas e amigos da pós-graduação pelo companheirismo e pela contribuição em muitas etapas deste trabalho, principalmente as amigas Andréa e Alessandra.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

E a todos que acreditam, torcem e contribuem para o meu crescimento.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Análise Modal	3
1.3 Identificação de Sistemas Dinâmicos	5
1.4 Métodos de Subespaço	7
1.5 Identificação em Tempo Real	9
1.6 Objetivos do Trabalho	11
1.7 Organização do Texto	12
2 Métodos de Identificação de Subespaço - O Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido	14

2.1	Representação de Sistemas em Espaço de Estado	15
2.1.1	Representação de Sistemas em Espaço de Estado em Tempo Contínuo .	15
2.1.2	Representação de Sistemas em Espaço de Estado em Tempo Discreto .	19
2.1.3	Parâmetros de Markov	21
2.1.4	Matrizes de Bloco de Hankel	24
2.1.5	Equações de Estado nas Coordenadas Modais	25
2.1.6	Observabilidade	26
2.2	Método dos Subespaços	28
2.2.1	Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido - EERA	29
2.2.2	Relacionando o algoritmo EERA com o ERA	35
3	Verificação do Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido	41
3.1	Implementação do Algoritmo EERA	41
3.2	Verificação do Algoritmo na Identificação do <i>Flutter</i> para um Modelo de Asa no Túnel de Vento	44
3.2.1	Descrição do Modelo Experimental	45
3.2.2	Montagem Experimental	47
3.2.3	Aquisição dos Dados Experimentais	49
3.2.4	Implementação Computacional	52
3.2.5	Resultados da identificação dos parâmetros do <i>flutter</i>	53
3.3	Aplicação do Algoritmo na Identificação Dinâmica de uma Placa de Alumínio através de Dados Experimentais	59
3.3.1	Descrição do Modelo Experimental	59

3.3.2	Montagem Experimental	61
3.3.3	Aquisição dos Dados Experimentais	63
3.3.4	Implementação Computacional	65
3.3.5	Resultados da Identificação dos Parâmetros Modais	66
4	Identificação em Tempo Real	69
4.1	O Aparato Experimental	69
4.1.1	Aplicação do Aparato Experimental na Identificação “off-line” da Placa de Alumínio	70
4.2	Identificação em Tempo Real dos Parâmetros Modais da Placa de Alumínio . .	75
4.2.1	Montagem Experimental	75
4.2.2	Aquisição dos Dados Experimentais	77
4.2.3	Implementação Computacional	78
4.2.4	Resultados da Identificação dos Parâmetros Modais	79
5	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	102
	Bibliografia	106
A	Implementação no MATLAB/SIMULINK®	111
A.1	Balanceamento	113
A.2	Hessenberg	113
A.3	Algoritmo QR	114
B	Código Fonte do Algoritmo EERA	116

Resumo

Rebolho, D.C. (2006). *Um Método para Identificação de Parâmetros Modais em Tempo Real*. São Carlos, 2006. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Na Indústria Aeronáutica, é de extrema importância a qualidade e o desempenho de seus produtos, que estão diretamente relacionados ao projeto e ao desenvolvimento de estruturas adequadas, pois além de seu caráter funcional deve-se também garantir a sua integridade nas mais diversas condições de operação. O comportamento dinâmico destas estruturas é um dos seus principais aspectos, principalmente devido à demanda contínua para estruturas mais leves e conseqüentemente mais flexíveis. Tradicionalmente, as estruturas aeroespaciais devem ser submetidas a alguma forma de verificação antes do voo, de forma a assegurar que a aeronave esteja livre de qualquer fenômeno de instabilidade aeroelástica, que pode ocorrer provocando problemas de fadiga ou falhas estruturais. Um dos fenômenos de instabilidade mais importantes é denominado *flutter*. As técnicas de ensaio em voo para identificação de *flutter* são de extrema importância para o conhecimento dos limites de voo seguro. Um dos elementos essenciais para a realização de ensaios de *flutter* em voo é o processo de identificação dos parâmetros modais estruturais da aeronave sob teste. A identificação precisa e rápida dos parâmetros modais permite determinar com antecedência e segurança as condições de voo em que o fenômeno de *flutter* irá ocorrer. Atualmente as pesquisas nesta área apontam na direção do desenvolvimento de tecnologia que permita a identificação em tempo real dos parâmetros modais associados ao *flutter*. Neste trabalho foi realizado o estudo de um método de identificação de parâmetros modais para ser aplicado em tempo real. O método de identificação utilizado para este estudo é o EERA - Extended Eigensystem Realization Algorithm, um método de identificação no domínio do tempo considerado eficiente e poderoso, pois é capaz de identificar o comportamento dinâmico complexo em estruturas. O algoritmo foi validado através de um ensaio experimental num modelo de asa no túnel de vento, onde foram determinados os parâmetros modais envolvidos no *flutter*. Também foi realizado um ensaio experimental numa placa de alumínio, onde foram identificados os seus parâmetros modais, frequências naturais e fatores de amortecimento. Após sua validação, o método EERA foi adaptado e programado no equipamento de aquisição e processamento de sinais dSPACE®, que é destinado a realizar identificação em tempo real. Por último foi realizado um ensaio experimental em tempo real na placa de alumínio utilizada anteriormente, onde os parâmetros modais identificados *on-line* foram comparados com os identificados *off-line*, comprovando assim a eficiência do método na identificação em tempo real.

Palavras chave: Identificação em Tempo Real, EERA, Análise Modal, *Flutter*.

Abstract

Rebolho, D.C. (2006). *A Method for Modal Parameters Identification in Real Time*. São Carlos, 2006. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In the Aeronautical Industry, the quality and the performance of its products, that are directly related to the project and the development of adequate structures, are of extreme importance, since, beyond their functional characteristics, their integrity, in the most diverse operation conditions, must also be guaranteed. The dynamic behavior of these structures is one of its main aspects, mainly due to continuous demand for lighter and consequently more flexible structures. Traditionally, the aerospace structures must be submitted to some form of verification before the flight, to assure that the aircraft is free of any aeroelastic instability phenomenon, which when occurring will provoke structural fatigue problems or failure. One of the more important instability phenomena is called flutter. The techniques of flight test for identification of flutter are of extreme importance for the knowledge of the limits of safe flight. One of the essential elements for the accomplishment of flutter tests in flight is the process of identification of the structural modal parameters of the aircraft under test. The accurate and fast identification of the modal parameters allows determining, with antecedence and security, the flight conditions where the phenomenon of flutter will occur. Currently the research in this area points in the direction of developing the technology that allows the identification in real time of the modal parameters associated to flutter. In this work the study of a method of identification of modal parameters was carried through to be applied in real time. The method of identification used for this study is the EERA - Extended Eigensystem Realization Algorithm, a method of identification in the time domain considered efficient and powerful, since it is capable to identifying complex dynamic behavior in structures. The algorithm was validated with an experimental test in a model of wing in the wind tunnel, where the involved modal parameters in flutter had been determined. Also an experimental test was carried out with an aluminum plate, where its modal parameters, natural frequencies and damping factors, had been identified. After its validation, the method EERA was adapted and programmed in the dSPACE® signals acquisition and processing equipment, which is used for carrying out identification in real time. Finally an experimental test, in real time, with the previously used aluminum plate was carried out, when the modal parameters identified on-line were compared with those identified off-line, thus proving the efficiency of the method for identification in real time.

Keywords: Real Time Identification, EERA, Modal Analysis, Flutter.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de gráfico de evoluções aeroelásticas (modos 1,2,3 e 4 de uma asa de avião) - gráfico V-g-f.	10
3.1	Fluxograma da implementação do EERA.	43
3.2	Representação do sistema para ensaio de <i>flutter</i> no túnel de vento.	46
3.3	Foto da montagem do experimento no túnel de vento.	47
3.4	Esquema mostrando o posicionamento dos extensômetros e dos acelerômetros.	48
3.5	Evolução dos modos de flexão e torção.	51
3.6	Função de resposta em frequência do sistema medida na velocidade de 25m/s.	51
3.7	Detalhe da Figura 3.6.	51
3.8	Esquema do sistema de medição nos ensaios de identificação.	52
3.9	Resposta no tempo do sistema para o modo de flexão e velocidade de 0 m/s.	54
3.10	Evolução das frequências naturais dos modos envolvidos no <i>flutter</i> identificados pelo método EERA usando dados obtidos em ensaios no túnel de vento.	58
3.11	Evolução dos fatores de amortecimento dos modos envolvidos no <i>flutter</i> identificados pelo método EERA usando dados obtidos em ensaios no túnel de vento.	58
3.12	Placa de alumínio utilizada no experimento.	60
3.13	Localização dos pontos de entrada, saída e dimensões da placa	60
3.14	Montagem experimental.	61

3.15	Espectro de Potência Médio (EPM) com e sem massa adicionada à placa.	63
3.16	Esquema do ensaio experimental - equipamentos utilizados.	64
4.1	Montagem Experimental.	76
4.2	Exemplo do sinal de força medido pelo transdutor de força.	76
4.3	Esquema do ensaio experimental - equipamentos utilizados.	78
4.4	Espectro de Potência Médio (EPM) obtido com e sem massa adicionada à placa de alumínio.	80
4.5	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados pelo EERA em tempo real: (a) Sem adição da massa extra; (b) Com adição da massa extra. . .	81
4.6	Detalhes da identificação dos parâmetros modais em tempo real com a massa extra adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento. . . .	81
4.7	Posição dos acelerômetros e da massa extra na placa de alumínio.	82
4.8	Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	82
4.9	Detalhes dos parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	83
4.10	Detalhes da variação do sinal após a retirada da massa.	84
4.11	Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	84
4.12	Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	85
4.13	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	86

4.14	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	86
4.15	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	87
4.16	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	87
4.17	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	88
4.18	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	89
4.19	A massa foi posicionada em uma das extremidades da placa de alumínio. . . .	89
4.20	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	90
4.21	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	90
4.22	Massa posicionada na mesma extremidade onde está localizado o excitador. . .	91
4.23	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	91
4.24	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	92
4.25	Localização das duas massas acrescentadas na placa de alumínio para a realização dos ensaios.	92
4.26	Espectro de Potência Médio (EPM) com as duas massas adicionadas à placa. .	93
4.27	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	93

4.28	Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	94
4.29	Posição alterada dos acelerômetros e da massa.	95
4.30	Espectro de Potência Médio (EPM) obtido da placa de alumínio com a mudança na posição dos acelerômetros e da massa.	95
4.31	Frequências naturais identificadas em tempo real no tempo de: (a) 0,8s; (b) 3,0s.	96
4.32	Fatores de amortecimento identificados em tempo real no tempo de: (a) 0,8s; (b) 3,0s.	96
4.33	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s com a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	97
4.34	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s sem a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	98
4.35	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s com a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	98
4.36	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s sem a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	99
4.37	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s com massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	100

4.38	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s sem massa adicionada:	
	(a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	100
4.39	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s com massa adicionada:	
	(a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	101
4.40	Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s sem massa adicionada:	
	(a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.	101
A.1	Diagrama de blocos do Simulink®.	112
A.2	Sub-sistema <i>Function-Call Subsystem 1</i> apresentado na Figura A.1.	112
B.1	Bloco S-Function Builder	116

Lista de Tabelas

3.1	Frequências naturais e fatores de amortecimento do sistema identificadas pelo ERA.	46
3.2	Resultados identificados pelo método EERA para o modo de flexão.	56
3.3	Resultados identificados pelo método EERA para o modo de torção.	57
3.4	Relação dos equipamentos utilizados no experimento da placa de alumínio. . .	62
3.5	Critérios utilizados na eliminação de parâmetros modais.	65
3.6	Valores das frequências naturais obtidas pelo EPM, para o caso da massa adicionada e pelo método ERA, para o caso sem a massa adicionada.	67
3.7	Resultado dos parâmetros modais identificados pelo método EERA.	68
4.1	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB®, MATLAB/SIMULINK® e ControlDesk® para o período de aquisição de 0,001 a 0,301 segundos.	71
4.2	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB®, MATLAB/SIMULINK® e ControlDesk® para o período de aquisição de 6,201 a 6,501 segundos.	72
4.3	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB®, MATLAB/SIMULINK® e ControlDesk® para o período de aquisição de 11,913 a 12,213 segundos.	72

4.4	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB [®] , MATLAB/SIMULINK [®] e ControlDesk [®] para o período de aquisição de 18,867 a 19,167 segundos.	72
4.5	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB [®] , MATLAB/SIMULINK [®] e ControlDesk [®] para o período de aquisição de 23,253 a 23,553 segundos.	73
4.6	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB [®] , MATLAB/SIMULINK [®] e ControlDesk [®] para o período de aquisição de 29,715 a 30,015 segundos.	73
4.7	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB [®] , MATLAB/SIMULINK [®] e ControlDesk [®] para o período de aquisição de 34,738 a 35,038 segundos.	74
4.8	Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB [®] , MATLAB/SIMULINK [®] e ControlDesk [®] para o período de aquisição de 39,696 a 39,996 segundos.	74
4.9	Resultados da identificação variando o valor do primeiro elemento do vetor de entrada.	75
4.10	Relação dos equipamentos utilizados no experimento da placa de alumínio. . .	76
4.11	Valores das frequências naturais (Hz) identificadas “off-line” e “on-line”. . . .	83
4.12	Valores das frequências naturais (Hz) identificadas através das FRFs e pelo EERA em tempo real considerando as duas massas extras adicionadas à estrutura.	93
4.13	Valores das frequências naturais identificadas através das FRFs obtidas da placa de alumínio com a mudança na posição dos acelerômetros e da massa.	95
4.14	Variação dos parâmetros envolvidos no processo de identificação.	97
4.15	Variação dos parâmetros envolvidos no processo de identificação.	99

Lista de Símbolos

m	Número de saídas;
n	Graus de liberdade do sistema de segunda ordem;
r	Número de entradas;
t	Variável temporal;
Δt	Intervalo de tempo constante;
ξ_n	Fator de amortecimento do modo n ;
ω_{nd}	Frequência natural amortecida do modo n ;
M	Instantes de tempo medidos numa coluna das matrizes de Hankel;
N	Instantes de tempo medidos numa linha das matrizes de Hankel;
$\mathbb{R}$	Números reais;
∞	Infinito;
$\ \cdot\ _p$	Norma p ;
$\{f(w(t), t)\}$	Vetor de força ou excitação ($n \times 1$);
$\{u(t)\}$	Vetor de entrada no tempo contínuo ($r \times 1$);
$\{u(k)\}$	Vetor de entrada no tempo discreto ($2n \times 1$);
$\{w(t)\}$	Vetor deslocamento generalizada ($n \times 1$);
$\{\dot{w}(t)\}$	Vetor velocidade generalizada ($n \times 1$);
$\{\ddot{w}(t)\}$	Vetor aceleração generalizada ($n \times 1$);
$\{x(t)\}$	Vetor de estado no tempo contínuo ($2n \times 1$);
$\{x(k+1)\}$	Vetor de estado no tempo discreto ($2n \times 1$);
$\{x(k)\}_M$	Vetor de estado no tempo discreto nas coordenadas modais ($2n \times 1$);
$\{y(t)\}$	Vetor de saída no tempo contínuo ($m \times 1$);

$\{y(k)\}$	Vetor de entrada no tempo discreto ($m \times 1$);
$[A_c]$	Matriz de estado do modelo em tempo contínuo ($2n \times 2n$);
$[A_d]$	Matriz de estado do modelo em tempo discreto ($2n \times 2n$);
$[B_c]$	Matriz de influência de entrada do modelo em tempo contínuo ($2n \times r$);
$[B_d]$	Matriz de influência de entrada do modelo em tempo discreto ($2n \times r$);
$[B_d]_M$	Matriz de influência de entrada nas coordenadas modais ($2n \times r$);
$[C]$	Matriz de amortecimento ($n \times n$);
$[C_c]$	Matriz de influência de saída em tempo contínuo ($m \times 2n$);
$[C_d]$	Matriz de influência de saída em tempo discreto ($m \times 2n$);
$[C_d]_M$	Matriz de influência de saída nas coordenadas modais ($m \times 2n$);
$[D_c]$	Matriz de transmissão direta em tempo contínuo ($m \times r$);
$[D_d]$	Matriz de transmissão direta em tempo discreto ($m \times r$);
$[F]$	Matriz de influência de entrada ($n \times r$);
$[G]$	Matriz que contém os parâmetros de Markov ($mM \times rM$);
$[G]_s$	Matriz que contém os parâmetros de Markov modificada ($mM \times rM$);
$[G_d]$	Matriz de influência de saída para deslocamento ($m \times n$);
$[G_v]$	Matriz de influência de saída para velocidade ($m \times n$);
$[G_a]$	Matriz de influência de saída para aceleração ($m \times n$);
$[I]$	Matriz identidade;
$[K]$	Matriz de rigidez ($n \times n$);
$[M]$	Matriz massa ($n \times n$);
$[R]$	Matriz dos vetores singulares à esquerda de $[Y][U]^\perp$ ($mM \times mM$);
$[R_{2n}]$	Matriz com as $2n$ primeiras colunas de $[R]$ ($mM \times 2n$);
$[S]$	Matriz dos vetores singulares à direita de $[Y][U]^\perp$ ($N \times N$);
$[S_{2n}]$	Matriz com as $2n$ primeiras colunas de $[S]$ ($N \times 2n$);
$[U]$	Matriz de Hankel de entrada ($rM \times N$);
$[X]$	Matriz do vetor de estado ($2n \times N$);
$^k[X]$	Matriz do vetor de estado no instante $k\Delta t$;

$[Y]$	Matriz de Hankel de saída ($mM \times N$);
$[Y_k]$	Parâmetros de Markov no instante $K\Delta t$ ($m \times r$);
$[Y]_s$	Matriz de Hankel de saída deslocada ($mM \times N$);
$^k[Y]$	Matriz de Hankel de saída no instante $k\Delta t$;
$[0]$	Matriz de elementos zero;
$[\Gamma]$	Matriz de observabilidade ($mM \times 2n$);
$[\Gamma]_s$	Matriz de observabilidade modificada ($mM \times 2n$);
$[\Lambda]$	Matriz diagonal dos autovalores de $[A_d]$ ($2n \times 2n$);
$[\Sigma]$	Matriz dos valores singulares de $[Y][U]^\perp$ ($mM \times N$);
$[\Sigma_{2n}]$	Matriz diagonal com os $2n$ primeiros valores singulares de $[\Sigma]$ ($2n \times 2n$);
$[\Psi]$	Matriz modal ($2n \times 2n$);
$e^{[A_c]t}$	Matriz de transição ($2n \times 2n$).

Convenções:

$[\]$	Matriz;
$[\]^{-1}$	Matriz inversa;
$[\]^T$	Matriz transposta;
$[\]^\perp$	Matriz ortogonal;
$[\]^\dagger$	Pseudo-inversa de $[\]$;
$\{ \}$	Vetor ou matriz coluna.

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

O estudo das características dinâmicas de estruturas aeronáuticas tornou-se importante na indústria aeroespacial, principalmente devido à demanda contínua por estruturas mais leves e conseqüentemente mais flexíveis. Um dos principais aspectos a ser considerado no projeto destas estruturas é o seu comportamento dinâmico. Desta forma, existe uma grande necessidade por ferramentas que tornem possível o conhecimento de seu comportamento dinâmico, bem como possibilitem prever este comportamento. Durante as últimas décadas a Análise Modal constituiu-se na principal ferramenta utilizada na análise do comportamento dinâmico de estruturas flexíveis e esta pode ser subdividida em: Análise Modal Teórica e Análise Modal Experimental. A Análise Modal Teórica ou Problema Direto tem por objetivo determinar as respostas de uma estrutura baseada nos seus dados de entrada e de suas características dinâmicas, o que pode ser feito, por exemplo, através de técnicas de modelagem pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). A Análise Modal Experimental ou Problema Inverso, tem por objetivo determinar as propriedades dinâmicas de uma dada estrutura através dos dados experimentais de entrada e de saída. Uma das técnicas mais utilizadas neste campo é a identificação dos parâmetros modais, que são compostos, por exemplo, pelas frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar da estrutura em análise.

A análise modal teórica mostra-se inviável em um grande número de situações uma vez

que durante a formulação do modelo matemático podem ocorrer simplificações que podem levar a resultados imprecisos. Desta forma a análise modal experimental é utilizada para verificar os resultados fornecidos pela análise teórica e para uma possível correção dos modelos teóricos tornando-se assim indispensável no projeto e desenvolvimento de estruturas e também na avaliação do seu comportamento dinâmico.

A extração de informação a partir de observações experimentais é fundamental para se ter um entendimento mais exato da realidade, permitindo formular modelos e desenvolver teorias que descrevam os sistemas observados. Uma forma de fazer isso é usando as técnicas de Identificação de Sistemas, considerada a arte do modelamento matemático.

A identificação paramétrica de sistemas mecânicos é uma das principais aplicações das técnicas de identificação de sistemas, especificamente para a identificação de parâmetros modais. Em estruturas aeronáuticas o processo de identificação modal pode apresentar dificuldades em diversos casos. Uma dessas dificuldades está relacionada a identificação em tempo real. Os métodos de identificação em tempo real são considerados um caso particular dos métodos de identificação tradicionais. A identificação em tempo real é utilizada quando torna-se necessário observar de imediato a mudança que venha ocorrer nos parâmetros modais. Um exemplo típico de aplicação destes métodos é o estudo das condições para a ocorrência do *flutter*, permitindo desta forma estabelecer as condições de segurança de voo. Os ensaios em voo realizados para o estudo do *flutter* são perigosos devido aos movimentos oscilatórios divergentes e destrutivos associados ao fenômeno. Uma outra aplicação da identificação em tempo real é no controle ativo de ruído e vibração.

Neste trabalho são executados os primeiros passos na direção do desenvolvimento de métodos de identificação em tempo real, onde o trabalho concentra-se no desenvolvimento, programação e aplicação de um método para identificação de parâmetros modais de sistemas dinâmicos em tempo real.

1.2 Análise Modal

A Análise Modal é considerada parte integrante do processo de desenvolvimento de novos produtos bem como na avaliação de seu comportamento dinâmico. Segundo Maia e Silva (1997), a análise modal foi aplicada pela primeira vez com sucesso em 1940, em um estudo que proporcionou o entendimento do comportamento dinâmico de uma estrutura de uma aeronave. Atualmente, é aplicada em vários campos, como por exemplo, na identificação e avaliação dos fenômenos de vibração; validação e ajuste de modelos dinâmicos computacionais; modificação estrutural e detecção de falhas. Além disso, a análise modal também está relacionada com acústica estrutural e análise vibroacústica de sistemas mecânicos (HEYLENN; LAMMERN; SAS, 2000).

No Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade de São Paulo, em São Carlos, a análise modal linear e não-linear, teórica e experimental, têm sido objeto de pesquisa em diversos trabalhos. A tese de doutorado de Mucheroni (1989) desenvolve um método analítico de obtenção dos modos de vibrar de placas parcialmente engastadas; a dissertação de Seleglim Jr. (1990) apresenta um estudo experimental em análise de tensões associados aos modos de vibrar; o trabalho de dissertação de Varoto (1991) trata da identificação modal de estruturas utilizando um método no domínio da frequência; a tese de Balthazar (1993) aborda aspectos qualitativos e quantitativos de modos não lineares através do comportamento global de soluções de regime permanente, de mapas de Poincaré e de métodos de perturbação; a dissertação de Tsunaki (1994) também trabalha no campo não linear apresentando um método de obtenção de modos normais lineares e não lineares no plano de fase; a tese de Shimano (1994) desenvolve técnicas de análise modal teórica e experimental em tibia Humana; a dissertação de Porchia (1996) estende o alcance dos métodos utilizados por Varoto (1991); a tese de Taneguti (1997) aborda a identificação modal de estruturas no domínio do tempo utilizando o método de Ibrahim; a tese de Tsunaki (1999) desenvolve um procedimento para a identificação de modelos dinâmicos no espaço de estado através de técnicas e ferramentas que automatizam o processo de identificação, utilizando o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA e realizando um ensaio experimental

em uma placa de alumínio; a dissertação de Tita (1999) utiliza a análise modal para avaliar experimentalmente o comportamento dinâmico de vigas feitas de material compósitos e validar modelos teóricos através da comparação com valores obtidos experimentalmente; a dissertação de Libardi (2000) estuda as técnicas de cancelamento de massa e suas aplicações em análise modal experimental; a dissertação de Santos (2001) realiza uma comparação entre técnicas no domínio da frequência e do tempo na identificação de esforços dinâmicos e apresenta resultados de simulações numéricas e experimentais; a dissertação de Paziani (2002) trata da aplicação do método de Ibrahim no domínio do tempo para identificar os parâmetros modais de uma estrutura ensaiada experimentalmente; a dissertação de Sczibor (2002) aplica o Algoritmo de Realização de Sistemas para identificar os parâmetros modais de uma semi-asa da aeronave Neiva Regente; a dissertação de Oliveira (2003) apresenta um estudo analítico e experimental do fenômeno de interação entre excitadores eletrodinâmicos e a estrutura em ensaios de vibração e discutem-se causas e efeitos desta interação na qualidade dos resultados obtidos, são realizadas simulações numéricas e ensaios experimentais; a dissertação de Lofrano (2003) realiza uma investigação sobre técnicas experimentais para a determinação de Funções de Resposta em Frequência (FRFs) angulares com aplicações em estruturas do tipo viga; na tese de Mamede (2003) é apresentada uma compilação das diferentes técnicas para a extração dos parâmetros modais vibroacústicos; na tese de De Marqui Jr. (2004) a análise modal experimental é utilizada como ferramenta para verificar os resultados analíticos de um modelo de asa acoplada a um dispositivo flexível, que foi utilizada com o objetivo de controlar o *flutter* num ensaio realizado em túnel de vento.

Nas últimas décadas, a análise modal foi profundamente envolvida no projeto estrutural dentro da área aeroespacial, tornando-se uma ferramenta importante na determinação das características dinâmicas de estruturas. No entanto, a determinação de características dinâmicas de estruturas aeronáuticas não é uma tarefa fácil e direta. Modernas estruturas aeronáuticas são constituídas de muitos componentes agregados, fixados de uma maneira complexa (ALLEN; HAISLER, 1985). A determinação de características dinâmicas de estruturas flexíveis pode ser realizada através de dois procedimentos (EWINS, 1984). O primeiro é denominado de Análise Modal Teórica, que procura obter as características dinâmicas da estrutura através de

métodos analíticos e numéricos. O segundo procedimento é denominado de Análise Modal Experimental, que obtém as características dinâmicas da estrutura através de dados experimentais. Dentre as diversas áreas da análise modal experimental destaca-se a Identificação de Sistemas Dinâmicos. O objetivo principal desta área é determinar um modelo matemático representativo das características físicas e dinâmicas de um sistema real.

1.3 Identificação de Sistemas Dinâmicos

A Identificação de Sistemas é o processo de determinar os parâmetros de um sistema a partir de suas variáveis de entrada e saída, podendo-se assim descrever o comportamento dinâmico de sistemas em função do tempo. Algumas referências básicas sobre identificação de sistemas podem ser citadas: Eykhoff (1974), Ljung (1987), Maine e Iliff (1985) e Landau (1990).

Durante o processo da identificação de sistemas pode-se destacar quatro etapas principais. A primeira corresponde à *coleta de dados*, onde é necessário obter-se os dados, tornando-se necessário em determinadas situações efetuar experimentos para extrair informação dinâmica do sistema. Nesta etapa é importante a escolha dos sinais de excitação e a escolha do tempo de amostragem. A *escolha da representação matemática*, conhecida como modelagem, representa a segunda etapa. A terceira etapa corresponde à *estimação de parâmetros* onde é necessário escolher o algoritmo de identificação a ser utilizado. E por fim, a *validação do modelo*, que consiste em verificar se o modelo incorpora ou não as características do sistema (AGUIRRE, 2000).

Na representação matemática, os métodos de identificação de sistemas podem ser classificados como lineares ou não lineares, variantes ou invariantes no tempo, discretos ou contínuos no tempo, entre outras classificações. Muitos problemas do mundo real podem ser aproximados por modelos lineares invariantes no tempo. Os métodos também podem ser divididos em métodos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Os métodos no domínio da frequência foram os primeiros utilizados no problema de identificação e são desenvolvidos a partir da resposta em frequência. Alguns problemas relacionados a este método, como o

fenômeno de “leakage” e modos acoplados com frequências muito próximas, o tornaram limitado, surgindo assim os métodos no domínio do tempo. Estes métodos são baseados na determinação de parâmetros modais a partir de resposta no tempo e o seu uso tornou-se mais difundido devido ao aumento da capacidade de processamento de dados proporcionado pelos modernos computadores digitais. Uma de suas desvantagens é a sobre-determinação de sistemas que devido à dificuldade em se determinar o número correto de modos de vibrar. Em Ewins (1984), Maia e Silva (1997) pode-se encontrar uma revisão dos métodos baseados no domínio do tempo e da frequência.

Os algoritmos de identificação também podem ser classificados em relação à forma como os sinais observados são manipulados, podendo ser não-recursivos (*batch*) ou recursivos. No primeiro caso, os sinais de excitação de resposta do sistema são armazenados em longas seqüências de dados, exigindo uma grande capacidade de memória e de processamento, tornando lento o processo de identificação. Porém estes métodos são mais precisos, pois os sinais podem ser processados várias vezes. Nos métodos recursivos, os dados são armazenados em curtos períodos de tempo e processados após cada instante de amostragem, podendo, os parâmetros estimados serem corrigidos no processamento de identificação que se segue após a próxima amostragem. Neste processo os dados são processados em “tempo real” (COOPER, 1997).

Outra classificação é em relação ao conhecimento ou não das forças excitadoras. Os métodos determinísticos são aqueles que necessitam dos dados de excitação e resposta para determinar o modelo modal e também são métodos que não dão nenhum tratamento especial ao ruído, mesmo considerando o fato de que os dados estejam contaminados. Estes são métodos numericamente mais simples e possuem técnicas de identificação global em sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas relativamente bem consolidadas.

Os métodos estocásticos consideram somente os dados de resposta do sistema para determinar o modelo modal e estes métodos consideram o ruído presente nos dados. Estes métodos são aplicados em situações onde não é possível monitorar as variáveis de entrada e são eficazes no processo de identificação de sinais na presença de ruídos.

Na identificação de sistemas foram desenvolvidos muitos algoritmos, sendo a técnica mais tradicional o método de Predição de Erro - PEM (Prediction Error Method) (LJUNG, 1987). Entretanto este método descreve o modelo do sistema dinâmico através de equações diferenciais lineares, dificultando sua aplicação para sistemas com múltiplas entradas e saídas. Desta forma, os métodos baseados em modelos de espaço de estado são mais aplicáveis para sistemas dinâmicos multivariáveis. As técnicas de representação em espaço de estados foram desenvolvidas no início dos anos 1960. A sua principal característica é a capacidade para analisar sistematicamente sistemas variantes e invariantes no tempo tanto lineares como não lineares.

Para identificar os parâmetros modais de sistemas mecânicos foram desenvolvidos diversos algoritmos de identificação de sistemas lineares no espaço de estado. Entre este grupo destaca-se os algoritmos no domínio do tempo chamados Métodos de Identificação de Subespaço (OVERSCHEE; DE MOOR, 1996), que surgiram em meados da década de 1980 e constituem informação importante para este trabalho.

1.4 Métodos de Subespaço

O desenvolvimento dos Métodos de Identificação de Subespaço foi motivado pelas dificuldades em identificar sistemas com alta densidade modal e em estimar os parâmetros modais a partir de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas - MIMO (multiple-input multiple-output). Estes métodos tiveram sua origem basicamente da união entre as três áreas: a teoria de sistemas, a geometria e a álgebra linear numérica. O desenvolvimento dos métodos de subespaços pode ser encontrado em diversos trabalhos dentre os quais destacamos: Overschee e Moor (1993); De Moor, Overschee e Favoreel (1999); Verhaegen e Dewilde (1992); Viberg (1995); McKelvey (1995); entre outros.

Os pioneiros a introduzir o nome subespaço foram Verhaegen e Dewilde (1992) que desenvolveram o MOESP (Multiple-Output Error State Space). Em seguida, surgiu o N4SID (Numerical Algorithm For State Space System Identification) (OVERSCHEE; DE MOOR, 1994), que assim como o MOESP, surgiu da adaptação dos tradicionais métodos PEM

(Predictor Error Method) (LJUNG, 1987); o IVM (Instrumental Variable Method) que surgiu para a identificação de sistemas MIMO em espaço de estados usando a teoria de mínima realização (VIBERG, 1995); entre outros.

Durante os últimos anos os métodos de subespaço atraíram muita atenção no campo da identificação de sistemas por apresentarem bons resultados quando aplicados a dados reais. Seu sucesso também é devido ao fato dos passos computacionais nestes algoritmos de subespaços serem de armazenamento simples, diminuindo os custos computacionais. Segundo Favoreel (1999) estes métodos são essencialmente não-iterativos (conseqüentemente, não apresentam problemas de convergência), rápidos e numericamente robustos (são baseados em técnicas numericamente estáveis de álgebra linear). As principais ferramentas computacionais utilizadas nestes métodos são a decomposição QR e a decomposição em valores singulares - SVD (Singular Decomposition Value). Na decomposição em valores singulares, os dados são filtrados, sendo então eficazes para modos acoplados. Entretanto no trabalho de Tasker, Bosse e Fisher (1998) é desenvolvido um novo método de identificação dos parâmetros modais utilizando uma forma modificada da decomposição em valores singulares, conhecida como método URV (STEWART, 1992). Através do método URV é realizada a atualização do subespaço utilizando somente os dados mais recentes. Nesta decomposição $[U]$ e $[V]$ são matrizes ortogonais e $[R]$ é uma matriz triangular superior. Os seguintes trabalhos descrevem e aplicam o método URV: Adams, Griffin e Stewart (1991) e em Stewart e Dooren (2000). Em Stewart e Dooren (1995) são apresentados os detalhes do seu uso para identificação de sistemas *on-line*.

Pode-se destacar como exemplos de algoritmos de subespaço o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA (Eigensystem Realization Algorithm) e o Algoritmo da Polireferência no domínio do tempo. Um outro exemplo de algoritmo de subespaço, que será objeto de estudo deste trabalho, é o Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido - EERA (Extended Eigensystem Realization Algorithm) que identifica vários modos simultaneamente. O método EERA calcula os parâmetros modais manipulando os dados no tempo de entrada e saída, tornando-se necessária a coleta dos dados de excitação. É considerado uma extensão do ERA pois para o caso em que a entrada for impulsiva estes são iguais.

Neste algoritmo as matrizes de blocos de Hankel são obtidas diretamente a partir dos dados de entrada e saída no tempo, tornando o método mais rápido e possibilitando assim uma identificação em tempo real. Os métodos de identificação em tempo real podem ser considerados como um caso particular dos métodos de identificação tradicionais.

1.5 Identificação em Tempo Real

A identificação em tempo real vem sendo tradicionalmente utilizada na área de processamento de sinais e engenharia de controle. Na indústria aeronáutica, a análise em tempo real é utilizada em casos especiais onde existe a necessidade do conhecimento imediato da variação dos parâmetros modais, possibilitando que correções nos procedimentos dos ensaios sejam realizadas com as aeronaves ainda em vôo. As vantagens são menor custo, economia de tempo, menor disponibilização de recursos e maior segurança nos ensaios. Os dados de entrada e saída do sistema podem ser processados dentro da própria aeronave em teste, ou serem telemetrados para uma base em terra, possibilitando a decisão de continuação ou não do ensaio conforme os resultados obtidos.

Um exemplo de aplicação de identificação em tempo real é o estudo das condições para a existência do *flutter*. O *flutter* é um fenômeno de instabilidade aeroelástica onde a interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais levam a movimentos oscilatórios divergentes e em alguns casos destrutivos (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Os problemas aeroelásticos em aeronaves foram percebidos desde os primeiros vôos de que há relatos e um dos mais completos relatos históricos sobre o tema pode ser encontrado em Garrick e Reed (1981).

As análises de *flutter* baseiam-se na obtenção dos autovalores para determinação dos parâmetros modais (frequências naturais e fatores de amortecimento) de um determinado sistema aeroelástico que dependem ou são função de um valor de determinado parâmetro variante (velocidade, pressão dinâmica ou número de Mach). Com os valores das frequências e dos fatores de amortecimento, pode-se traçar os diagramas V-g-f (velocidade (V), frequência (f) e

amortecimento (g)). Estes gráficos, também conhecidos como evoluções aeroelásticas, mostram o comportamento da frequência e do amortecimento dos modos aeroelásticos em função do parâmetro variante (principalmente a velocidade, no caso de *flutter*). A velocidade de *flutter* é definida como a velocidade na qual o valor do fator de amortecimento de um certo modo aeroelástico torna-se zero. Este fato pode ser observado na Figura 1.1.

Figura 1.1: Exemplo de gráfico de evoluções aeroelásticas (modos 1,2,3 e 4 de uma asa de avião) - gráfico V-g-f.

A pesquisa desenvolvida por Lee e Wong (1997), mostra que a determinação do limite de *flutter*, para uma aeronave, requer precisão nas medidas dos valores de frequência e amortecimento dos modos de vibração em função da velocidade de vôo.

Existem vários métodos para determinar a velocidade com que ocorre o *flutter*. Cooper e Crowther (1999) apresentaram uma aplicação de redes neurais feedforward para previsão da velocidade de *flutter* a partir de dados de testes obtidos de um modelo aeroelástico simulado. Para treinar a rede foram usados valores de frequências e amortecimentos de dois modos de uma estrutura aeroelástica. Os resultados mostraram-se bastante satisfatórios. Em De Marqui Jr. et al. (2004b) redes neurais foram aplicadas para prever a velocidade de *flutter* através da evolução do amortecimento dos modos envolvidos no fenômeno num ensaio experimental realizado num túnel de vento.

Segundo Kehoe (1995) o teste em vôo de *flutter* é perigoso por algumas razões: primeiro, tem que se voar perto de velocidades de *flutter* reais para que instabilidades iminentes possam ser detectadas; segundo, as tendências de amortecimento subcrítico não podem ser extrapoladas precisamente para prever estabilidade a altas velocidades de vôo; terceiro, a estabilidade aeroelástica pode mudar abruptamente de uma condição estável para uma instável, apenas com um pequeno aumento de velocidade.

Desta forma é importante o monitoramento em tempo real da estabilidade aeroelástica de forma a manter sob muito bom controle a parte mais perigosa do teste de *flutter* em vôo, que é a aceleração da aeronave de um ponto de teste do envelope de vôo para o próximo. Alguns métodos têm sido propostos para a identificação de *flutter* em tempo real, com vários graus de sucesso, tais como: Uhl (2002) e Johnson et al. (2002). Em Uhl, Bogacz e Klepka (2004) são apresentados os resultados da identificação dos fatores de amortecimento da aeronave Skytruck em vôo .

Assim, com métodos de identificação em tempo real, a análise dos dados de cada fase dos ensaios pode ser realizada com maior segurança durante os ensaios em vôo, onde a identificação precisa e rápida dos parâmetros modais permite determinar com antecedência e segurança as condições de vôo em que o fenômeno de *flutter* irá ocorrer. Revisões sobre análise, prevenção e ensaio de *flutter* podem ser encontradas nos trabalhos de Garrick e Reed (1981), Förshing (1979), Ashley (1988), Wright (1991), Kehoe (1995), Pickrel e White (2003).

1.6 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver, programar e aplicar um método para identificação de parâmetros modais em tempo real de sistemas dinâmicos. Além disso, estudar as características de equipamentos necessários à identificação em tempo real. Para isso, um ensaio modal experimental em tempo real em uma placa de alumínio é realizado. O método de identificação utilizado para a obtenção dos parâmetros globais do sistema, frequências naturais e fatores de amortecimento é o EERA - Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido e o

equipamento necessário à identificação em tempo real é o sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE®.

O algoritmo é previamente verificado através da identificação *off-line* dos parâmetros modais de duas estruturas reais. A primeira estrutura é uma asa rígida acoplada a um dispositivo flexível onde realizou-se um ensaio no túnel de vento existente no Laboratório de Aerodinâmica do Núcleo de Pesquisas em Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos para determinar os parâmetros modais envolvidos no *flutter*. A segunda estrutura real é uma placa de alumínio, cuja identificação *off-line* dos seus parâmetros modais torna-se indispensável na realização deste trabalho.

Em seguida, aplica-se o algoritmo na identificação em tempo real dos parâmetros modais da placa de alumínio analisada anteriormente. Os aspectos relacionados à montagem experimental, aquisição e tratamento dos dados também são discutidos.

As técnicas experimentais utilizadas para identificação em tempo real, a aplicação do EERA, seu estudo e análise são consideradas as principais contribuições deste trabalho.

1.7 Organização do Texto

Este primeiro Capítulo apresenta uma introdução ao assunto abordado neste trabalho de pesquisa e a revisão da literatura relacionada com o tema seguida pelos objetivos do trabalho.

No Capítulo 2 é realizada uma revisão da representação de modelos em espaço de estado, em tempo contínuo e em tempo discreto. A partir desta teoria fundamental, é desenvolvido o algoritmo de identificação EERA e também apresentada a sua comparação com o algoritmo ERA.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados da aplicação do algoritmo de identificação para dados experimentais obtidos por ensaios realizados em um modelo de uma asa no túnel de vento e em uma placa de alumínio.

Os resultados obtidos com a programação do algoritmo no equipamento para identificação em tempo real são apresentados no Capítulo 4, bem como o ensaio experimental realizado para identificação em tempo real e os resultados obtidos.

O último Capítulo trata das conclusões gerais sobre os resultados do trabalho e das propostas para trabalhos futuros.

No Apêndice A é apresentada a implementação do algoritmo no ambiente MATLAB/SIMULINK® e as principais funções necessárias para realizá-la. E finalmente, no Apêndice B é apresentado o código fonte do algoritmo EERA utilizando linguagem C⁺⁺.

Métodos de Identificação de Subespaço

- O Algoritmo de Realização de Sistemas

Estendido

Em meados da década de 1980 ocorreu o “nascimento” de um novo tipo de algoritmos de identificação de sistemas lineares no espaço de estado, os chamados métodos de subespaço, que são baseados na teoria de realização de sistemas. Realização é uma forma de identificar um sistema dinâmico preservando propriedades básicas deste sistema. No desenvolvimento do método utilizado neste trabalho, é necessários o conhecimento de conceitos envolvidos na representação matemática de sistemas dinâmicos.

Para tanto, este Capítulo é dividido como se segue. Inicialmente, são desenvolvidos e discutidos conceitos relativos à representação de modelos dinâmicos no espaço de estado em tempo contínuo e em tempo discreto. É dado um significado aos parâmetros de Markov e à representação das matrizes de bloco de Hankel, e são desenvolvidos os conceitos relativos às equações de estado nas coordenadas modais. Também são apresentados os conceitos fundamentais de observabilidade de sistemas. Posteriormente, é apresentada a formulação básica do Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido - EERA, utilizado para o processo de identificação neste trabalho, bem como sua relação com o algoritmo ERA.

2.1 Representação de Sistemas em Espaço de Estado

O conhecimento do modelo matemático de um sistema dinâmico é importante para a descrição do seu comportamento. No processo de identificação, a representação do modelo dinâmico em espaço de estado simplifica sua manipulação numérica e a capacidade de analisar sistemas variantes e invariantes no tempo tanto lineares quanto não-lineares.

Apesar de estruturas físicas reais possuírem um número infinito de graus de liberdade, na descrição do seu comportamento dinâmico utiliza-se apenas um número finito. Os graus de liberdade representam o número de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente o movimento do sistema. Neste trabalho apenas são tratados modelos dinâmicos discretos no espaço de estado de dimensão finita n , linear e invariante no tempo.

Nestas condições, as equações de movimento de um sistema dinâmico com n graus de liberdade, linear e invariante no tempo podem ser representadas através de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C]\{\dot{w}(t)\} + [K]\{w(t)\} = \{f(w(t), t)\}, \quad (2.1)$$

onde t representa o tempo contínuo, $[M], [C], [K] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente, $\{f(w, t)\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de força ou excitação, e $w(t), \dot{w}(t), \ddot{w}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são os vetores deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente. O vetor força pode ser reescrito como $f(w, t) = [F]\{u(t)\}$, onde $[F] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a matriz de influência de entrada que caracteriza a localização e os tipos de entrada e $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ é o vetor de entrada, sendo r o número de entradas (excitações externas).

2.1.1 Representação de Sistemas em Espaço de Estado em Tempo Contínuo

A equação de movimento representa bem o comportamento da estrutura através de uma equação diferencial de segunda ordem. Entretanto, torna-se mais conveniente expressar o comportamento do sistema através de equações diferenciais de primeira ordem.

Reescrevendo convenientemente a equação de movimento (2.1) obtém-se:

$$\{\ddot{w}(t)\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{w}(t)\} + [M]^{-1}[K]\{w(t)\} = [M]^{-1}[F]\{u(t)\}. \quad (2.2)$$

Seja o vetor de estado $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix}$, de dimensão $2n$, e

$$\{\ddot{w}(t)\} = -[M]^{-1}[C]\{\dot{w}(t)\} - [M]^{-1}[K]\{w(t)\} + [M]^{-1}[F]\{u(t)\}. \quad (2.3)$$

Assim, pode-se escrever

$$\{\dot{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{Bmatrix} = [A_c] \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} + [B_c] \{u(t)\}, \quad (2.4)$$

sendo

$$[A_c] = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ -[M]_{n \times n}^{-1}[K]_{n \times n} & -[M]_{n \times n}^{-1}[C]_{n \times n} \end{bmatrix}, \text{ a matriz de estado de dimensão } 2n \times 2n;$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [0]_{n \times r} \\ [M]_{n \times n}^{-1}[F]_{r \times n} \end{bmatrix}, \text{ a matriz de influência de entrada de dimensão } 2n \times r.$$

Desta forma, são obtidas $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, denominadas Equações de Estado, que conservam a mesma informação dinâmica das n equações diferenciais de segunda ordem de configuração e podem ser representadas como

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c]\{x(t)\} + [B_c]\{u(t)\}. \quad (2.5)$$

O sub-índice c indica que as matrizes $[A_c]$ e $[B_c]$ pertencem à representação do sistema no tempo contínuo.

Consideremos o vetor de saída do sistema:

$$\{y(t)\} = [G_d]\{w(t)\} + [G_v]\{\dot{w}(t)\} + [G_a]\{\ddot{w}(t)\}, \quad (2.6)$$

onde, $\{y(t)\} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e $[G_d], [G_v]$ e $[G_a] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são as matrizes de influência de saída para deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente, e m é o número de saídas (respostas do sistema). Essas matrizes de influência de saída contêm informações da localização dos pontos de medida em relação às variáveis nas coordenadas generalizadas, e podem conter também fatores de conversão entre as unidades físicas das medidas de saída e as unidades das variáveis de estado (JUANG, 1994).

Utilizando a equação (2.3), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \{y(t)\} = & [G_d]\{w(t)\} + [G_v]\{\dot{w}(t)\} - [G_a][M]^{-1}[C]\{\dot{w}(t)\} - \\ & [G_a][M]^{-1}[K]\{w(t)\} + [G_a][M]^{-1}[F]\{u(t)\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ou seja,

$$\{y(t)\} = ([G_d] - [G_a][M]^{-1}[K])\{w(t)\} + ([G_v] - [G_a][M]^{-1}[C])\{\dot{w}(t)\} + [G_a][M]^{-1}[F]\{u(t)\}. \quad (2.8)$$

Reescrevendo a equação (2.8),

$$\{y(t)\} = [C_c]\{x(t)\} + [D_c]\{u(t)\}, \quad (2.9)$$

onde, $[C_c] = \begin{bmatrix} ([G_d] - [G_a][M]^{-1}[K]) & ([G_v] - [G_a][M]^{-1}[C]) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ é a matriz de influência de saída e $[D_c] = [G_a][M]^{-1}[F] \in \mathbb{R}^{m \times r}$ é a matriz de transmissão direta.

Desta forma, é obtido o seguinte modelo no espaço de estado em tempo contínuo:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}(t)\} = & [A_c]\{x(t)\} + [B_c]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} = & [C_c]\{x(t)\} + [D_c]\{u(t)\} \end{aligned}, \quad (2.10)$$

que caracteriza totalmente a dinâmica do sistema e sua relação com as diversas medidas de saída que podem ser realizadas.

Uma solução completa da equação (2.5) pode ser obtida em duas etapas. Primeiramente, considera-se a solução da equação homogênea,

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c]\{x(t)\}. \quad (2.11)$$

Seja $\{x(t_0)\}$ a condição inicial no tempo $t = t_0$. Uma solução para a equação (2.11) é dada por:

$$\{x(t)\} = e^{[A_c](t-t_0)}\{x(t_0)\}. \quad (2.12)$$

A matriz $e^{[A_c](t-t_0)}$ é denominada matriz de transição de dimensão $2n$ que pode ser aproximada por uma série que converge uniformemente (FURUTA; SANO; ATHERTON, 1998), dada por:

$$e^{[A_c](t-t_0)} = [I_{2n}] + [A_c](t-t_0) + \frac{1}{2!}[A_c]^2(t-t_0)^2 + \dots \quad (2.13)$$

Na segunda etapa é necessário encontrar a solução particular da equação (2.5). Segundo (MEIROVITCH, 1990), esta solução é dada por:

$$\{x(t)\} = e^{[A_c](t-t_0)}\{\Phi(t)\}, \quad (2.14)$$

onde $\{\Phi(t)\}$ é um vetor de dimensão $2n$. Derivando no tempo a equação (2.14) obtém-se:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c]e^{[A_c](t-t_0)}\{\Phi(t)\} + e^{[A_c](t-t_0)}\{\dot{\Phi}(t)\}. \quad (2.15)$$

Substituindo a solução particular dada pela equação (2.14) e a sua derivada dada pela equação (2.15) nas equações (2.5), obtém-se:

$$\{\dot{\Phi}(t)\} = e^{-[A_c](t-t_0)}[B_c]\{u(t)\}. \quad (2.16)$$

Integrando de t_0 a t , obtém-se

$$\{\Phi(t)\} = \int_{t_0}^t e^{[A_c](t_0-\tau)}[B_c]\{u(\tau)\}d\tau, \quad (2.17)$$

onde τ é uma variável auxiliar para integração.

Substituindo a equação (2.17) na equação (2.14), resulta:

$$\{x(t)\} = \int_{t_0}^t e^{[A_c](t-\tau)}[B_c]\{u(\tau)\}d\tau. \quad (2.18)$$

Assim a solução completa da equação de estado, válida para $t > t_0$ é dada por:

$$\{x(t)\} = e^{[A_c](t-t_0)}\{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t e^{[A_c](t-\tau)}[B_c]\{u(\tau)\}d\tau. \quad (2.19)$$

2.1.2 Representação de Sistemas em Espaço de Estado em Tempo Discreto

Torna-se necessária também uma representação do modelo em estudo num modelo de espaço de estado em tempo discreto, porque na maioria dos procedimentos experimentais, os sinais são coletados na forma digital por amostras em instantes de tempo.

Considere as entradas discretizadas em intervalos fixos de tempo:

$$\tau = 0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, k\Delta\tau, (k+1)\Delta\tau, \dots, \text{ onde } \Delta\tau \text{ é uma constante.}$$

A partir da equação (2.19) é possível obter o vetor de estado $\{x(t)\}$ num intervalo de tempo $t = (k+1)\Delta t$ a partir do instante anterior $t_0 = k\Delta t$,

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c]\Delta t}\{x(k\Delta t)\} + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A_c]((k+1)\Delta t-\tau)}[B_c]\{u(\tau)\}d\tau. \quad (2.20)$$

Assume-se que o vetor de entrada é constante entre os intervalos de tempo. Segundo (JUANG, 1987), este vetor deve satisfazer a relação,

$$\{u(\tau)\} = \{u(k\Delta t)\}, \quad (2.21)$$

para $k\Delta t \leq \tau \leq (k+1)\Delta t, k = 0, 1, 2, 3 \dots$.

Substituindo $\{u(\tau)\}$, dado pela equação (2.21), na equação (2.20), obtém-se

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c]\Delta t}\{x(k\Delta t)\} + \{u(k\Delta t)\} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A_c]((k+1)\Delta t-\tau)}[B_c]d\tau. \quad (2.22)$$

Para simplificar a equação (2.22), considera-se uma nova variável de integração $\hat{\tau} = (k+1)\Delta t - \tau$,

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = e^{[A_c]\Delta t}\{x(k\Delta t)\} + \{u(k\Delta t)\} \int_0^{\Delta t} e^{[A_c]\hat{\tau}}[B_c]d\hat{\tau}. \quad (2.23)$$

Assim, é possível definir a matriz de estado $[A_d]$ e a matriz de influência de entrada $[B_d]$ do modelo no tempo discreto por

$$[A_d] := e^{[A_c]\Delta t}, \quad (2.24)$$

e

$$[B_d] := \int_0^{\Delta t} e^{[A_c]\hat{\tau}}[B_c]d\hat{\tau}. \quad (2.25)$$

Dessa forma as equações de estado em tempo discreto são dadas por:

$$\begin{aligned} \{x(k+1)\} &= [A_d]\{x(k)\} + [B_d]\{u(k)\} \\ \{y(k)\} &= [C_d]\{x(k)\} + [D_d]\{u(k)\} \end{aligned}, \quad (2.26)$$

onde $[C_d] = [C_c]$, $[D_d] = [D_c]$ e o sub-índice d das matrizes indica que estas matrizes pertencem à representação do sistema em tempo discreto.

Pode-se observar que a matriz de estado em tempo discreto $[A_d]$ definida pela equação (2.24), pode ser aproximada por uma série convergente, como no caso da matriz de transição dada pela equação (2.13), ou seja,:

$$[A_d] = [I_{2n}] + [A_c]\Delta(t) + \frac{1}{2!}A_c^2\Delta(t)^2 + \dots, \quad (2.27)$$

e também que,

$$[A_c] = \frac{1}{\Delta t} \ln([A_d]), \quad (2.28)$$

onde foi utilizada uma extensão para o caso matricial do conceito da função logaritmo natural escalar.

Duas propriedades importantes relacionam às matrizes $[A_c]$ e $[A_d]$:

- i) os autovetores destas matrizes somente se diferenciam por um fator de escala,
- ii) os autovalores se relacionam pela expressão,

$$autovalor([A_c]) = \frac{1}{\Delta t} autovalor(\ln([A_d])). \quad (2.29)$$

2.1.3 Parâmetros de Markov

Seja o sistema linear representado pela equação (2.26). É possível estabelecer uma relação direta entre a entrada e a resposta do sistema.

Considere o vetor de entrada representado pela seqüência:

$$\{u(0)\}, \{u(1)\}, \dots, \{u(k)\}. \quad (2.30)$$

Para a condição inicial $\{x(t=0)\} = \{x(0)\}$, os vetores de estado e de saída dados pela equação (2.26) podem ser obtidos iterativamente para o vetor de entrada (2.30)

$$\begin{aligned} \{x(0)\} &= \{x(0)\} \\ \{y(0)\} &= [C_d]\{x(0)\} + [D_d]\{u(0)\} \\ \{x(1)\} &= [A_d]\{x(0)\} + [B_d]\{u(0)\} \\ \{y(1)\} &= [C_d][A_d]\{x(0)\} + [C_d][B_d]\{u(0)\} + [D_d]\{u(1)\} \\ \{x(2)\} &= [A_d]^2\{x(0)\} + [A_d][B_d]\{u(0)\} + [B_d]\{u(1)\} \\ \{y(2)\} &= [C_d][A_d]^2\{x(0)\} + [C_d][A_d][B_d]\{u(0)\} + [C_d][B_d]\{u(1)\} + [D_d]\{u(2)\} \\ &\vdots \\ \{x(k)\} &= [A_d]^k\{x(0)\} + \sum_{i=1}^k [A_d]^{i-1}[B_d]\{u(k-i)\} \\ \{y(k)\} &= [C_d][A_d]^k\{x(0)\} + \left(\sum_{i=1}^k [C_d][A_d]^{i-1}[B_d]\{u(k-i)\}\right) + [D_d]\{u(k)\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Os dois últimos termos da seqüência (2.31) descrevem o vetor de estado e de saída em qualquer instante de tempo $k\Delta t$ em função da seqüência (2.30), que representa um vetor de entrada genérico. Em especial a equação de saída fornece a almejada relação direta entrada-saída. Entretanto, é preciso analisar em detalhe o efeito das condições iniciais.

A resposta pode ser obtida considerando-se inicialmente que somente uma das variáveis de entrada será ativada, por exemplo $u_1(0)$. Desta forma o vetor de entrada (2.30) no tempo com entrada na variável $u_1(0)$ pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \dots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Com isso, para condições iniciais nulas $\{x(0)\} = \{0\}$, substituindo (2.32) no vetor de saída da equação (2.31), resulta:

$$\begin{aligned} \{y(0)\} &= [D_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} & \{y(1)\} &= [C_d][B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{y(2)\} &= [C_d][A_d][B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} & \dots & \{y(k)\} = [C_d][A_d]^{k-1}[B_d] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde o vetor de saída em cada instante de tempo tem dimensão $m \times 1$. Realizando o mesmo procedimento para as outras variáveis de entrada, resultará em vetores de saída semelhantes. Sobrepondo os vetores de saída de mesmo instante de tempo em matrizes, tem-se:

$$\begin{aligned} [Y_0] &= [D_d], \\ [Y_1] &= [C_d][B_d], \\ [Y_2] &= [C_d][A_d][B_d], \\ &\vdots \\ [Y_k] &= [C_d][A_d]^{k-1}[B_d], \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $[Y_k]$ são matrizes de dimensão $m \times r$, correspondentes à resposta do sistema no instante de tempo $k\Delta t$. A n -ésima coluna de $[Y_k]$ é a resposta do sistema ao pulso aplicado na n -ésima entrada, matendo-se todas as outras entradas iguais a zero. As matrizes $[Y_k]$ são denominadas

de parâmetros de Markov do sistema.

2.1.4 Matrizes de Bloco de Hankel

As matrizes de bloco de Hankel possuem um importante papel nos algoritmos de identificação de subespaços. Essas matrizes contêm toda informação necessária para realizar a identificação. As matrizes de Hankel podem ser obtidas facilmente a partir dos dados de entrada e saída do sistema. A seguir define-se a matriz de bloco de Hankel de entrada segundo Overschee e De Moor (1996).

Seja o vetor de entrada representado pela seqüência:

$$\{u(0)\}, \{u(1)\}, \{u(2)\}, \dots, \{u(k)\}, \quad (2.35)$$

onde $\{u(k)\} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ é o vetor de entrada u medido no instante de tempo $k\Delta t$, ou seja,

$$\{u(0)\} = \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_r(0) \end{Bmatrix}; \{u(1)\} = \begin{Bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ \vdots \\ u_r(1) \end{Bmatrix}; \dots \{u(k)\} = \begin{Bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{Bmatrix}.$$

Assim, a matriz de Hankel de entrada é construída da seguinte forma:

$$[U] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \dots & \{u(N-1)\} \\ \{u(1)\} & \{u(2)\} & \{u(3)\} & \dots & \{u(N)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{u(M-2)\} & \{u(M-1)\} & \{u(M)\} & \dots & \{u(M+N-3)\} \\ \{u(M-1)\} & \{u(M)\} & \{u(M+1)\} & \dots & \{u(M+N-2)\} \end{bmatrix}_{rM \times N}, \quad (2.36)$$

onde, M e N são os instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna da matriz $[U]$, respectivamente, e r é o número de entradas.

Analogamente a matriz de bloco de Hankel de saída é construída da seguinte forma:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \{y(0)\} & \{y(1)\} & \{y(2)\} & \dots & \{y(N-1)\} \\ \{y(1)\} & \{y(2)\} & \{y(3)\} & \dots & \{y(N)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{y(M-2)\} & \{y(M-1)\} & \{y(M)\} & \dots & \{y(M+N-3)\} \\ \{y(M-1)\} & \{y(M)\} & \{y(M+1)\} & \dots & \{y(M+N-2)\} \end{bmatrix}_{mM \times N}, \quad (2.37)$$

onde $\{y(k)\} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o vetor de saída y medido no instante de tempo $k\Delta t$ e, M e N são os instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna da matriz $[Y]$, respectivamente, e m é o número de saídas.

2.1.5 Equações de Estado nas Coordenadas Modais

Uma representação desacoplada de um modelo no espaço de estado é obtida através da transformação das equações de estado de coordenadas físicas em coordenadas modais. A matriz modal é definida por $[\Psi] = [\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \dots, \{\Psi_{2n}\}]_{2n \times 2n}$, onde $\{\Psi_i\}$ são os autovetores de $[A_d]$, $i = 1, \dots, 2n$. Desta forma, pode-se considerar uma transformação linear entre o vetor das coordenadas modais $\{x(k)\}_{\underline{M}}$ e o vetor de estado $\{x(k)\}$ em tempo discreto, tal que:

$$\{x(k)\} = [\Psi]\{x(k)\}_{\underline{M}}. \quad (2.38)$$

Substituindo a equação (2.38) na equação de estado dada pela equação (2.26), tem-se

$$[\Psi]\{x(k+1)\}_{\underline{M}} = [A_d][\Psi]\{x(k)\}_{\underline{M}} + [B_d]\{u(k)\}, \quad (2.39)$$

e

$$\{y(k)\} = [C_d][\Psi]\{x(k)\}_{\underline{M}} + [D_d]\{u(k)\}. \quad (2.40)$$

Pré-multiplicando por $[\Psi]^{-1}$ a equação (2.39), tem-se

$$\begin{aligned}\{x(k+1)\}_{\underline{M}} &= [\Psi]^{-1}[A_d][\Psi]\{x(k)\}_{\underline{M}} + [\Psi]^{-1}[Bd]\{u(k)\} = [\Lambda]\{x(k)\}_{\underline{M}} + [Bd]_{\underline{M}}\{u(k)\} \\ \{y(k)\} &= [C_d]_{\underline{M}}\{x(k)\}_{\underline{M}} + [D_d]\{u(k)\}\end{aligned}\quad (2.41)$$

onde, $[\Lambda] = [\Psi]^{-1}[A_d][\Psi] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}]$, de dimensão $2n \times 2n$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores da matriz de estado $[A_d]$. A matriz diagonal $[\Lambda]$ define o amortecimento modal e as frequências naturais do sistema em tempo contínuo, através da relação $[\Lambda_c] = \frac{1}{\Delta t} \ln(\Lambda)$. A matriz $[Bd]_{\underline{M}} = [\Psi]^{-1}[Bd]_{2n \times r}$ é a matriz de influência de entrada nas coordenadas modais, que define a amplitude modal inicial de cada modo em relação a uma determinada entrada. A matriz $[C_d]_{\underline{M}} = [C_d][\Psi]$ representa a matriz de influência de saída de dimensão $m \times 2n$. As colunas da matriz $[C_d]_{\underline{M}}$ contêm informações da forma dos modos conforme a localização espacial dos sensores.

Tem-se assim a representação das equações de estado nas coordenadas modais,

$$\begin{cases} \{x(k+1)\}_{\underline{M}} = [\Lambda]\{x(k)\}_{\underline{M}} + [Bd]_{\underline{M}}\{u(k)\} \\ \{y(k)\} = [C_d]_{\underline{M}}\{x(k)\}_{\underline{M}} + [D_d]\{u(k)\} \end{cases} \quad (2.42)$$

2.1.6 Observabilidade

Para a construção de um modelo, surge uma questão fundamental que é saber se todos os estados do sistema de interesse podem ou não ser excitados (controlados) e/ou observados. Esta questão surge no estudo prático e teórico no campo de controle e identificação de sistemas (JUANG, 1994). Para responder esta questão em relação às variáveis de estado observadas, torna-se necessário o conhecimento da teoria sobre observabilidade, que é um importante conceito na teoria de sistemas no espaço de estados.

A observabilidade está relacionada com a influência do vetor de estado no vetor de saída. Mais precisamente, um estado $\{x(k)\}$ de um sistema linear é dito observável se for possível determiná-lo completamente a partir dos vetores de entrada $\{u(k)\}$ e dos vetores de saída

$\{y(k)\}$, considerando um intervalo finito de tempo discreto, $0 < k \leq p$. Se todos os estados são observáveis, o sistema é denominado completamente observável ou simplesmente, observável.

Seja $\{u(k)\} = \{0\}$ para $0 \leq k \leq p$, a equação de saída $\{y(k)\} = [C_d][A_d]^k\{x(0)\} + \left(\sum_{i=1}^k [C_d][A_d]^{i-1}[B_d]\{u(k-i)\}\right) + [D_d]\{u(k)\}$, resulta em:

$$\{y(k)\} = [C_d][A_d]^k\{x(0)\}. \quad (2.43)$$

Que pode ser convenientemente escrita na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \{y(0)\} \\ \{y(1)\} \\ \dots \\ \{y(M-1)\} \end{bmatrix} = [\Gamma]\{x(0)\}, \quad (2.44)$$

onde

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [C_d] \\ [C_d][A_d] \\ [C_d][A_d]^2 \\ \dots \\ [C_d][A_d]^{M-1} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

é a matriz de observabilidade, de dimensão $mM \times 2n$. Existe uma única solução da equação (2.44), se e somente se, $[\Gamma]$ tem posto $2n$.

Teorema 1 *O sistema linear de ordem $2n$, em tempo discreto e de dimensão finita, $\{x(k+1)\} = [A_d]\{x(k)\} + [B_d]\{u(k)\}$, com a equação de medida de ordem m , $\{y(k)\} = [C_d]\{x(k)\} + [D_d]\{u(k)\}$, é observável, se e somente se, a matriz de observabilidade $[\Gamma]$, de dimensão $mM \times 2n$ tem posto $2n$.*

Baseado no Teorema 1, uma interpretação física do conceito de observabilidade pode ser

dada através da equação de medida nas coordenadas modais $\{y(k)\} = [C_d]_{\underline{M}} \{x(k)\}_{\underline{M}} + [D_d] \{u(k)\}$.

Supondo-se que exista somente um sensor, a equação de medida resulta:

$$\{y(k)\} = \{c_1 c_2 \dots c_{2n}\}_{\underline{M}} \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{2n}(k) \end{Bmatrix}_{\underline{M}} + [D_d] \{u(k)\}. \quad (2.46)$$

Se o sensor estiver localizado sobre a linha modal do i -ésimo modo, então $c_i = 0$ e não haverá contribuição da coordenada x_{im} na saída $\{y(k)\}$. Desta forma, este modo não será observável. Como consequência, pode-se dizer, então, que com a utilização de um número maior de sensores pode-se aumentar a observabilidade de saída.

2.2 Método dos Subespaços

Os métodos ou algoritmos de identificação de subespaço são métodos no domínio do tempo utilizados na identificação de parâmetros modais de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), usando como base o modelo em espaço de estados. O principal problema tratado em identificação de sistemas pelos métodos de subespaço para o caso determinístico é:

Dado um grande número de medidas de entradas $\{u(k)\}$ e saídas $\{y(k)\}$, geradas por um sistema desconhecido representado pelas equações (2.26), determinar a ordem n do sistema desconhecido e as matrizes do sistema $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$.

Segundo Favoreel et al. (1999) os principais passos nos algoritmos de identificação de subespaço são: construir a matriz de bloco de Hankel a partir dos dados de entrada e saída; realizar uma decomposição em valores singulares com estas matrizes; estimar a matriz de observabilidade; a partir desta estimação, calcular as matrizes do sistema. O método que será estudado neste trabalho é um método determinístico, sendo assim, utiliza os dados de excitação e resposta da estrutura em estudo e não dá nenhum tratamento especial ao ruído, mesmo consi-

derando que esteja presente nos dados. A seguir é apresentada a formulação básica do algoritmo de identificação EERA e sua relação com o algoritmo ERA.

2.2.1 Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido - EERA

O EERA é um algoritmo de realização mínima e possui duas etapas bem definidas: formulação básica de uma realização de ordem mínima e identificação dos parâmetros modais. Realização mínima significa o modelo com a menor dimensão de espaço de estado, dentre os possíveis sistemas que têm a mesma relação de entrada e saída, dentro de um grau específico (JUANG; PAPPA, 1985). Na etapa de formulação básica é usada a decomposição por valores singulares da matriz de blocos de Hankel, que foi gerada diretamente a partir dos dados de entrada e saída obtidos no domínio do tempo, para determinar a ordem das matrizes do modelo no espaço de estado em tempo discreto, ou seja, a realização propriamente dita. Na etapa de identificação, são estimados os parâmetros modais do sistema realizado.

A seguir é apresentada a formulação básica do algoritmo, baseado na teoria apresentada em Tasker, Bosse e Fisher (1998).

Consideremos as equações de estado em tempo discreto com n graus de liberdade dadas pela equação (2.26). Sejam as matrizes de bloco de Hankel de entrada $[U]$ e saída $[Y]$,

$$[U] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \dots & \{u(N-1)\} \\ \{u(1)\} & \{u(2)\} & \{u(3)\} & \dots & \{u(N)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{u(M-2)\} & \{u(M-1)\} & \{u(M)\} & \dots & \{u(M+N-3)\} \\ \{u(M-1)\} & \{u(M)\} & \{u(M+1)\} & \dots & \{u(M+N-2)\} \end{bmatrix}_{rM \times N}, \quad (2.47)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \{y(0)\} & \{y(1)\} & \{y(2)\} & \dots & \{y(N-1)\} \\ \{y(1)\} & \{y(2)\} & \{y(3)\} & \dots & \{y(N)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{y(M-2)\} & \{y(M-1)\} & \{y(M)\} & \dots & \{y(M+N-3)\} \\ \{y(M-1)\} & \{y(M)\} & \{y(M+1)\} & \dots & \{y(M+N-2)\} \end{bmatrix}_{mM \times N}, \quad (2.48)$$

onde r é o número de entradas, m é o número de saídas, M e N são os instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna das matrizes de bloco de Hankel, respectivamente.

Dadas as matrizes de observabilidade $[\Gamma]$ e os vetores de estados $[X]$, isto é,

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [C_d] \\ [C_d][A_d] \\ [C_d][A_d]^2 \\ \vdots \\ [C_d][A_d]^{M-1} \end{bmatrix}_{mM \times 2n} \quad [X] = \begin{bmatrix} \{x(0)\} & \{x(1)\} & \dots & \{x(N-1)\} \end{bmatrix}_{2n \times N}, \quad (2.49)$$

tem-se que,

$$[Y] = [\Gamma][X] + [G][U] \quad (2.50)$$

onde $[G]$ é a matriz de blocos de Toeplitz contendo os parâmetros de Markov ou resposta ao impulso, ou seja,

$$[G] = \begin{bmatrix} [D_d] & [0] & \dots & [0] \\ [C_d][B_d] & [D_d] & \dots & [0] \\ [C_d][A_d][B_d] & [C_d][B_d] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [C_d][A_d]^{M-2}[B_d] & [C_d][A_d]^{M-3}[B_d] & \dots & [D_d] \end{bmatrix}_{mM \times rM}. \quad (2.51)$$

Por definição, segundo Overschee e De Moor (1996), a matriz ortogonal de $[U]$, de dimensão $N \times N$, é dada por:

$$[U]^\perp = [I] - [U]^T([U][U]^T)^{-1}[U]. \quad (2.52)$$

Pós-multiplicando a equação (2.50) pela equação (2.52), obtém-se,

$$\begin{aligned} [Y][U]^\perp &= ([\Gamma][X] + [G][U])([I] - [U]^T([U][U]^T)^{-1}[U]) \\ &= [\Gamma][X] + [G][U] - [\Gamma][X][U]^T([U][U]^T)^{-1}[U] - [G][U][U]^T([U][U]^T)^{-1}[U] \\ &= [\Gamma][X](I - [U]^T([U][U]^T)^{-1}[U]). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Usando a definição de ortogonalidade, tem-se que:

$$[Y][U]^\perp = [\Gamma][X][U]^\perp. \quad (2.54)$$

Aplicando a decomposição em valores singulares à matriz (2.54), dimensão $mM \times N$, tem-se:

$$[Y][U]^\perp = [R][\Sigma][S]^T. \quad (2.55)$$

A matriz $[R]$, dimensão $mM \times mM$, contém os vetores singulares à esquerda de $[Y][U]^\perp$, ou seja, os autovetores de $[Y][U]^\perp([Y][U]^\perp)^T$. A matriz $[S]$, de dimensão $N \times N$, é uma matriz cujas colunas são os vetores singulares à direita de $[Y][U]^\perp$, ou seja, os autovetores de $([Y][U]^\perp)^T[Y][U]^\perp$. A matriz $[\Sigma]$, dimensão $mM \times N$, é formada pelos valores singulares de $[Y][U]^\perp$. As matrizes $[R]$ e $[S]$ são ortogonais.

Utilizando a equação (2.55) pode-se definir a pseudo-inversa de $[Y][U]^\perp$

$$([Y][U]^\perp)^\dagger = [S][\Sigma]^\dagger[R]^T. \quad (2.56)$$

A pseudo-inversa de $[Y][U]^\perp$ deve satisfazer a relação

$$\begin{aligned} ([Y][U]^\perp)([Y][U]^\perp)^\dagger &= [I]_{mM \times mM} \\ ([Y][U]^\perp)^\dagger([Y][U]^\perp) &= [I]_{N \times N} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Considere $[Y]_s$, uma forma modificada da matriz de blocos de Hankel de saída, dada por:

$$[Y]_s = \begin{bmatrix} \{y(1)\} & \{y(2)\} & \{y(3)\} & \dots & \{y(N)\} \\ \{y(2)\} & \{y(3)\} & \{y(4)\} & \dots & \{y(N+1)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{y(M-1)\} & \{y(M)\} & \{y(M+1)\} & \dots & \{y(M+N-2)\} \\ \{y(M)\} & \{y(M+1)\} & \{y(M+2)\} & \dots & \{y(M+N-1)\} \end{bmatrix}_{mM \times N} \quad (2.58)$$

De modo análogo à equação (2.50), obtém-se:

$$[Y]_s = [\Gamma]_s[X] + [G]_s[U] \quad (2.59)$$

onde

$$[\Gamma]_s = \begin{bmatrix} [C_d][A_d] \\ [C_d][A_d]^2 \\ [C_d][A_d]^3 \\ \vdots \\ [C_d][A_d]^M \end{bmatrix}_{mM \times 2n} \quad (2.60)$$

$$[G]_s = \begin{bmatrix} [C_d][B_d] & [D_d] & [0] & \dots & [0] \\ [C_d][A_d][B_d] & [C_d][B_d] & [D_d] & \dots & [0] \\ [C_d][A_d]^2[B_d] & [C_d][A_d][B_d] & [C_d][B_d] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [C_d][A_d]^{M-1}[B_d] & [C_d][A_d]^{M-2}[B_d] & [C_d][A_d]^{M-3}[B_d] & \dots & [D_d] \end{bmatrix}_{mM \times rM} \quad (2.61)$$

são formas modificadas das matrizes (2.49) e (2.51).

Pós-multiplicando a equação (2.59) pela equação (2.52), como realizado anteriormente na equação (2.53), obtém-se:

$$[Y]_s[U]^\perp = [\Gamma]_s[X][U]^\perp = [\Gamma][A_d][X][U]^\perp. \quad (2.62)$$

Inserindo as identidades dadas na equação (2.57) tem-se que

$$[Y]_s[U]^\perp = ([Y][U]^\perp)([Y][U]^\perp)^\dagger [Y]_s[U]^\perp ([Y][U]^\perp)^\dagger ([Y][U]^\perp). \quad (2.63)$$

Substituindo $[Y][U]^\perp$ e $([Y][U]^\perp)^\dagger$ dadas por (2.55) e (2.56) na equação (2.63), obtém-se:

$$[Y]_s[U]^\perp = ([R][\Sigma][S]^T)([S][\Sigma]^\dagger[R]^T)[Y]_s[U]^\perp ([S][\Sigma]^\dagger[R]^T)([R][\Sigma][S]^T). \quad (2.64)$$

Torna-se necessário estabelecer critérios para determinar o número de valores singulares relevantes, visto que este número determinará a ordem do modelo. Se $2n$ é o número de valores singulares não nulos, seja

$$[\Sigma_{2n}] = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n}], \text{ com } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_{2n} > 0. \quad (2.65)$$

Assim, é possível reescrever as matrizes da seguinte forma

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [\Sigma_{2n}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}, \quad [R] = [[R_{2n}] \quad [R_0]] \quad \text{e} \quad [S]^T = [[S_{2n}] \quad [S_0]]^T, \quad (2.66)$$

onde $[R_{2n}]$ é a matriz que contém as $2n$ primeiras colunas de $[R]$ e $[S_{2n}]$ as $2n$ primeiras colunas de $[S]$. As matrizes $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$ satisfazem a relação:

$$[R_{2n}]^T [R_{2n}] = [I] = [S_{2n}]^T [S_{2n}]. \quad (2.67)$$

Desta forma tem-se que:

$$[R][\Sigma][S]^T = [[R_{2n}] \quad [R_0]] \begin{bmatrix} [\Sigma_{2n}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S_{2n}]^T \\ [S_0]^T \end{bmatrix} = [R_{2n}][\Sigma_{2n}][S_{2n}]^T \quad (2.68)$$

e

$$[S][\Sigma]^\dagger [R]^T = ([R][\Sigma][S]^T)^\dagger = ([R_{2n}][\Sigma_{2n}][S_{2n}]^T)^\dagger = [S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1} [R_{2n}]^T, \quad (2.69)$$

pois segundo Watkins (1991)

$$[\Sigma]^\dagger = \begin{bmatrix} [\Sigma_{2n}]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \implies [\Sigma_{2n}]^\dagger = [\Sigma_{2n}]^{-1}. \quad (2.70)$$

A inversa da matriz de valores singulares pode ser decomposta na forma:

$$[\Sigma_{2n}]^{-1} = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [\Sigma_{2n}]^{-1/2}. \quad (2.71)$$

As equações (2.69) e (2.71) substituídas na equação (2.64), resultam em:

$$[Y]_s [U]^\perp = ([R_{2n}][\Sigma][S_{2n}]^T) [S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1/2} [\Xi][\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T ([R_{2n}][\Sigma][S_{2n}]^T), \quad (2.72)$$

onde:

$$[\Xi] = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [Y]_s [U]^\perp [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2}. \quad (2.73)$$

Usando as relações obtidas na equação (2.67), obtém-se:

$$[Y]_s [U]^\perp = [R_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [Y]_s [U]^\perp [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T. \quad (2.74)$$

Comparando a equação (2.74) com a equação (2.62), pode-se obter a realização:

$$\begin{aligned} [\Gamma] &= [R_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{1/2} \\ [A_d] &= [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [Y]_s [U]^\perp [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \\ [X] [U]^\perp &= [\Sigma_{2n}]^{1/2} [S_{2n}]^T. \end{aligned} \quad (2.75)$$

A matriz $[A_d]$ é uma realização mínima do sistema. A ordem da matriz $[A_d]$ é $2n$, definindo assim, a ordem do sistema. Desta forma, essa realização pode ser transformada para um modelo em tempo contínuo, ou para as equações de estado nas coordenadas modais, obtendo-se os parâmetros modais do sistema.

Sendo o objetivo principal deste trabalho obter as frequências naturais e os fatores de amortecimento de um dado sistema, desta forma, não foram obtidas as matrizes $[B_d]$, $[C_d]$ e $[D_d]$. Caso haja interesse em obter estas matrizes, basta observar o trabalho de Tasker, Bosse e Fisher (1998) onde estas matrizes foram calculadas.

2.2.2 Relacionando o algoritmo EERA com o ERA

O ERA é um método no domínio do tempo, de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que identifica de forma eficiente muitos modos simultaneamente. Este método foi desenvolvido por Juang e Pappa (1985) combinando o algoritmo de realização de sistemas de Ho-Kalman com a decomposição em valores singulares, para obter uma realização mínima do sistema. Segundo

Pappa, Schenk e Noll (1991), o ERA é um moderno e poderoso método de identificação modal, capaz de identificar estruturas que apresentem comportamento dinâmico complexo.

Este método fornece a matriz de estado $[A_d]$ através da expressão:

$$[A_d] = [\Sigma_{2n}]^{-1/2} [R_{2n}]^T [H(1)] [S_{2n}] [\Sigma_{2n}]^{-1/2} \quad (2.76)$$

onde $[H(1)]$ é a matriz de Hankel obtida através dos parâmetros de Markov que são respostas a entradas impulsivas.

O método EERA é considerado uma extensão do algoritmo ERA pois para o caso da entrada ser impulsiva a matriz de estado $[A_d]$ calculada através dos dois métodos coincidirá. Para observar este fato, será calculada a matriz de estado através do algoritmo EERA considerando que sejam aplicadas entradas impulsivas para um dado sistema.

Desta forma, considera-se que sejam aplicadas N_i entradas impulsivas e que as medições dos sinais sejam realizadas a partir da primeira amostra, desta forma $[U] = [0]$.

Para cada impulso, torna-se necessário calcular as saídas correspondentes. Para isso, considere as equações de estado em tempo discreto:

$$\begin{aligned} \{x(k+1)\} &= [A_d]\{x(k)\} + [B_d]\{u(k)\} \\ \{y(k)\} &= [C_d]\{x(k)\} + [D_d]\{u(k)\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Considere o primeiro impulso aplicado no tempo $t = 0$ e que a primeira variável da entrada seja ativada, ou seja, $u_1(0) = 1$. Assim, o vetor de entrada (2.30) com entrada na variável $u_1(0)$ pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \dots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.78)$$

Iniciando as medidas a partir da primeira amostra, tem-se que

$$\begin{aligned}
\{x(2)\} &= [A_d]\{x(1)\} + [B_d]\{u(1)\} = [A_d]\{x(1)\} \\
\{y(1)\} &= [C_d]\{x(1)\} + [D_d]\{u(1)\} = [C_d]\{x(1)\} \\
\{x(3)\} &= [A_d]\{x(2)\} + [B_d]\{u(2)\} = [A_d]\{x(2)\} = [A_d]^2\{x(1)\} \\
\{y(2)\} &= [C_d]\{x(2)\} + [D_d]\{u_2\} = [C_d]\{x(2)\} = [C_d][A_d]\{x(1)\} \\
\{x(4)\} &= [A_d]^2\{x(3)\} + [B_d]\{u_3\} = [A_d]\{x(3)\} = [A_d]^3\{x(1)\} \\
\{y(3)\} &= [C_d]\{x(3)\} + [D_d]\{u_3\} = [C_d]\{x(3)\} = [C_d][A_d]^2\{x(1)\} \\
&\vdots \\
\{x(k+1)\} &= [A_d]^k\{x(1)\} \\
\{y(k)\} &= [C_d][A_d]^{k-1}\{x(1)\}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

De onde obtém-se:

$${}^1[Y] = [\Gamma]({}^1[X]), \tag{2.80}$$

onde ${}^1[Y]$ e ${}^1[X]$ representam as matrizes de Hankel de saída e do vetor de estado, respectivamente, no instante de tempo $t = 0$ e $[\Gamma]$ é a matriz de observabilidade.

De forma análoga, aplica-se o segundo impulso no tempo $t = 1$ e considera-se $u_1(1) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\{x(3)\} &= [A_d]\{x(2)\} + [B_d]\{u(2)\} = [A_d]\{x(2)\} \\
\{y(2)\} &= [C_d]\{x(2)\} + [D_d]\{u(2)\} = [C_d]\{x(2)\} \\
\{x(4)\} &= [A_d]\{x(3)\} + [B_d]\{u(3)\} = [A_d]\{x(3)\} = [A_d]^2\{x(2)\} \\
\{y(3)\} &= [C_d]\{x(3)\} + [D_d]\{u_3\} = [C_d]\{x(3)\} = [C_d][A_d]\{x(2)\} \\
&\vdots \\
\{x(k+1)\} &= [A_d]^{k-1}\{x(2)\} \\
\{y(k)\} &= [C_d][A_d]^{k-2}\{x(2)\},
\end{aligned} \tag{2.81}$$

obtendo-se:

$${}^2[Y] = [\Gamma]({}^2[X]). \quad (2.82)$$

Repetindo o processo para a N_i -ésima entrada impulsiva

$${}^{N_i}[Y] = [\Gamma]({}^{N_i}[X]), \quad (2.83)$$

onde ${}^{N_i}[Y]$ e ${}^{N_i}[X]$ representam as matrizes de Hankel de saída e o vetor de estado, respectivamente, no instante de tempo $t = N_i - 1$.

Reunindo as matrizes de respostas obtidas com as N_i entradas impulsivas, tem-se que:

$$[H(0)] = [{}^1[Y] \ {}^2[Y] \ \dots \ {}^{N_i}[Y]] = [\Gamma][{}^1[X] \ {}^2[X] \ \dots \ {}^{N_i}[X]]. \quad (2.84)$$

Aplicando a decomposição em valores singulares na matriz (2.84) obtém-se:

$$[H(0)] = [R][\Sigma][S]^T. \quad (2.85)$$

De forma análoga, é possível obter a matriz de saída deslocada para as N_i entradas impulsivas:

$$\begin{aligned} [H(1)] &= [{}^1[Y]_s \ {}^2[Y]_s \ \dots \ {}^{N_i}[Y]_s] = [\Gamma]_s[{}^1[X] \ {}^2[X] \ \dots \ {}^{N_i}[X]] \\ &= [\Gamma][A][{}^1[X] \ {}^2[X] \ \dots \ {}^{N_i}[X]]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

A pseudo-inversa de $[H(0)]$, pode ser definida utilizando a equação (2.85)

$$[H(0)]^\dagger = [S][\Sigma]^\dagger [R]^T. \quad (2.87)$$

Tem-se que:

$$[H(1)] = [H(0)][H(0)]^\dagger [H(1)][H(0)]^\dagger [H(0)], \quad (2.88)$$

onde

$$[H(0)][H(0)]^\dagger = [H(0)]^\dagger [H(0)] = [I]. \quad (2.89)$$

Substituindo $[H(0)]$ e $[H(0)]^\dagger$ dadas por (2.85) e (2.87) na equação (2.88), obtém-se:

$$[H(1)] = ([R][\Sigma]^\dagger [S]^T)([S][\Sigma]^\dagger [R]^T)[H(1)]([S][\Sigma]^\dagger [R]^T)([R][\Sigma]^\dagger [S]^T). \quad (2.90)$$

Utilizando a decomposição (2.69) e determinando $2n$ como o número de valores singulares relevantes não nulos, tem-se que

$$[H(1)] = ([R_{2n}][\Sigma]^\dagger [S_{2n}]^T)([S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1}[R_{2n}]^T)[H(1)]([S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1}[R_{2n}]^T)([R_{2n}][\Sigma]^\dagger [S_{2n}]^T). \quad (2.91)$$

Decompondo a inversa da matriz de valores singulares na forma

$$[\Sigma_{2n}]^{-1} = [\Sigma_{2n}]^{-1/2}[\Sigma_{2n}]^{-1/2} \quad (2.92)$$

e substituindo na equação (2.91), resulta:

$$[H(1)] = ([R_{2n}][\Sigma_{2n}]^\dagger [S_{2n}]^T)[S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1/2}[\Xi][\Sigma_{2n}]^{-1/2}[R_{2n}]^T([R_{2n}][\Sigma_{2n}]^\dagger [S_{2n}]^T), \quad (2.93)$$

onde

$$[\Xi] = [\Sigma_{2n}]^{-1/2}[R_{2n}]^T[H(1)][S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1/2}. \quad (2.94)$$

Substituindo a equação (2.68) na equação (2.93) e usando as relações obtidas na equação (2.67), obtém-se:

$$[H(1)] = [R_{2n}][\Sigma_{2n}]^{1/2}[\Sigma_{2n}]^{-1/2}[R_{2n}]^T[H(1)][S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1/2}[\Sigma_{2n}]^{1/2}[S_{2n}]^T. \quad (2.95)$$

A partir da comparação da equação (2.95) com a equação (2.86), determina-se

$$\begin{aligned} [\Gamma] &= [R_{2n}][\Sigma_{2n}]^{1/2} \\ [A_d] &= [\Sigma_{2n}]^{-1/2}[R_{2n}]^T[H(1)][S_{2n}][\Sigma_{2n}]^{-1/2} \\ [{}^1[X] \quad {}^2[X] \quad \dots \quad {}^{N_i}[X]] &= [\Sigma_{2n}]^{1/2}[S_{2n}]^T. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Esta expressão da matriz $[A_d]$ é exatamente a mesma obtida na equação (2.76). Concluindo, no caso da entrada ser impulsiva, os dois algoritmos coincidem.

Verificação do Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido

Uma vez estabelecida a formulação teórica do algoritmo de realização de sistemas estendido - EERA, é importante verificar a eficácia deste método na identificação de parâmetros modais de sistemas dinâmicos. Desta forma, este capítulo apresenta os resultados de verificações do algoritmo obtidos para dois ensaios experimentais realizados em estruturas reais. Inicialmente é descrita a implementação computacional dos algoritmos envolvidos no método proposto. Posteriormente o algoritmo é verificado através da identificação dos parâmetros modais envolvidos no *flutter* de uma estrutura ensaiada no túnel de vento deste laboratório. Em seguida, é realizada a identificação dos parâmetros modais de uma placa de alumínio através dos seus dados experimentais. Em ambos os ensaios experimentais, as identificações são realizadas *off-line*.

3.1 Implementação do Algoritmo EERA

Esta Seção apresenta a implementação computacional realizada na análise dos dados colhidos. O algoritmo foi implementado na linguagem MATLAB[®] na versão 6.1 processado em microcomputador P-IV com 256 Mb de memória, sob o sistema operacional WINDOWS[®] 2000.

A implementação do algoritmo EERA utilizado neste trabalho, pode ser dividida nas

seguintes etapas descritas a seguir. Na primeira etapa, a partir dos dados experimentais obtidos no domínio do tempo, montam-se as matrizes de bloco de Hankel de entrada $[U]$ (equação 2.36), saída $[Y]$ (equação 2.37) e saída modificada $[Y]_s$ (equação 2.58). Numa segunda etapa obtém-se a matriz $[Y][U]^\perp$ (equação 2.54) onde aplica-se a decomposição em valores singulares. Em seguida, na terceira etapa, estabelece-se a ordem do sistema $2n$. Na quarta etapa obtém-se as matrizes $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$, $[S_{2n}]$ e a matriz do sistema realizado $[A_d]$ (equação 2.75). Na quinta etapa, transforma-se o sistema para as coordenadas modais, obtendo a matriz $[\Lambda]$ (equação 2.41). Finalmente, na sexta etapa, calcula-se os parâmetros modais do sistema. A Figura 3.1, traz o fluxograma que mostra a seqüência das etapas descritas.

Além disso, é realizada uma etapa de condensação modal através de critérios de exclusão baseado no tipo de análise que está sendo feita. Esta etapa é destinada à eliminação, dentro de critérios específicos, de parâmetros modais mal identificados ou de modos computacionais. Alguns dos critérios utilizados na etapa de eliminação de parâmetros modais devem ser estabelecidos através do conhecimento prévio do comportamento dinâmico da estrutura sob análise.

Figura 3.1: Fluxograma da implementação do EERA.

3.2 Verificação do Algoritmo na Identificação do *Flutter* para um Modelo de Asa no Túnel de Vento

O *flutter* é um fenômeno aeroelástico que ocorre quando um componente de uma aeronave, ou a aeronave inteira, apresenta característica oscilatória e auto-excitada a partir de uma velocidade de voo (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996), (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2002), (FUNG, 1955). As técnicas de ensaio em voo para identificação de *flutter* são potencialmente perigosas devido aos movimentos oscilatórios divergentes e destrutivos associados ao fenômeno. Desta forma os ensaios em túnel de vento são considerados um modo eficiente e seguro para o estudo dos fenômenos aeroelásticos de estruturas aeronáuticas. Um dos elementos essenciais para a realização de ensaios de *flutter* é o processo de identificação dos parâmetros modais que permitem determinar com antecedência e segurança as condições em que o fenômeno de *flutter* deve ocorrer. A evolução do comportamento das frequências naturais e dos fatores de amortecimento em função da velocidade são importantes nas análises de *flutter*.

Para verificar o método de identificação de parâmetros modais proposto, foi realizado um ensaio experimental em túnel de vento com uma asa rígida acoplada a um dispositivo flexível, cujo objetivo é identificar os parâmetros modais que caracterizam o *flutter*, considerando a variação da velocidade no túnel de vento, sendo esta identificação realizada após a obtenção de todos os dados. O modelo físico utilizado neste ensaio experimental foi desenvolvido por De Marqui Jr. (2004), onde informações complementares sobre o projeto, construção, montagem da estrutura no túnel de vento e outros resultados podem ser obtidos. O dispositivo flexível foi desenvolvido de forma que pudesse ocorrer o *flutter* clássico no túnel de vento. O *flutter* clássico é caracterizado pela combinação dos modos estruturais de flexão e torção, sendo estes os dois primeiros modos estruturais do sistema físico e distantes dos demais modos. Outro parâmetro importante na análise de *flutter* é o fator de amortecimento. Geralmente a razão de amortecimento dos modos críticos tem sido empregada como um índice para a margem de estabilidade de *flutter*, como pode ser verificado no trabalho de Torii e Matsuzaki (2001). O *flutter* ocorre quando um dos fatores de amortecimento torna-se zero. Utilizando-se deste modelo

físico, foram realizados ensaios em túnel de vento onde foram obtidas respostas aeroelásticas a partir da excitação do sistema através da superfície de controle da asa em diversas velocidades até a ocorrência do *flutter*. Os dados adquiridos nestes ensaios foram usados para caracterizar e identificar o *flutter*. A caracterização foi verificada através de Funções de Resposta em Frequência e a identificação dos parâmetros modais, neste caso, frequências naturais e fatores de amortecimento, foi realizada utilizando os dados medidos no domínio do tempo durante os experimentos. Para a identificação dos parâmetros do *flutter* utilizou-se o método EERA.

3.2.1 Descrição do Modelo Experimental

O dispositivo flexível utilizado neste ensaio experimental foi desenvolvido para ensaios em túnel de vento, de tal forma que pudesse ocorrer o *flutter* clássico. Uma representação do sistema para ensaio de *flutter*, composto pela asa rígida acoplada ao dispositivo flexível é apresentado na Figura 3.2. Este dispositivo flexível consiste de uma placa superior apoiada a um sistema de quatro eixos circulares e uma barra central. As características elásticas são dadas pelos eixos e pela barra central e a asa rígida fixada na placa superior oscilará num modo de dois graus de liberdade, flexão e torção, quando ocorrer o *flutter*. Os eixos e a barra central são fixados na placa superior e a esta prende-se a asa. O material da asa rígida é alumínio e da estrutura de suporte flexível é aço. As dimensões são dadas por: eixos $0,005m$ de diâmetro; placa superior $0,6 * 0,3m$; barra central $0,7 * 0,1 * 0,002m$ e a asa $0,8 * 0,45m$. O perfil da asa é NACA0012.

As características estáticas do sistema para ensaio de *flutter* são fortemente determinadas pelas dimensões da barra central, dos eixos e também pelas massas da placa superior e da asa. Modificações no comprimento dos eixos e na sua seção transversal alteram as frequências e os modos de vibrar da estrutura de suporte flexível. Entretanto, diferentes modelos de asas devem ser testados com o mesmo sistema de estrutura flexível, adicionando pesos na placa superior, modificando a massa e a inércia do sistema. O peso adicionado na placa superior altera o centro de gravidade do conjunto estrutura do suporte flexível e asa e o leva para o eixo elástico da barra central. O eixo elástico está localizado na linha central vertical da barra e no centro

da placa superior. Os quatro eixos asseguram um deslocamento relativo de flexão e torção paralelo à parede inferior do túnel de vento. Informações complementares podem ser obtidas em De Marqui Jr. (2004).

Figura 3.2: Representação do sistema para ensaio de *flutter* no túnel de vento.

Antes de se realizar qualquer teste no túnel de vento, tornou-se necessário a realização de uma Análise Modal Experimental - EMA para verificar as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura sem vento (*wind off*). Foram estudados os modos com frequências abaixo de 25 Hz e os pontos de medição foram determinados na barra central do dispositivo porque este é o componente que garante as características elásticas ao sistema. O modelo da asa foi considerado rígido. Após esta Análise Modal Experimental, utilizou-se o Algoritmo de Realização de Sistemas - ERA, modificado por Tsunaki (1999), para determinar os modos de vibrar e as frequências naturais a partir dos dados experimentais. A Tabela 3.1 apresenta as principais frequências naturais onde é possível observar que os dois primeiros modos de flexão e torção, são bem definidos e que o terceiro modo está bem distante destes, que é exatamente o esperado. Maiores detalhes sobre o ensaio modal podem ser obtidos em De Marqui Jr. et al. (2004a).

Tabela 3.1: Frequências naturais e fatores de amortecimento do sistema identificadas pelo ERA.

Modo	Frequência(Hz)	Amortecimento	Descrição
1	1.2	0.04	Primeiro modo de flexão
2	2.41	0.02	Primeiro modo de torção
3	11.7	—	Segundo modo de flexão

Após o ensaio modal foi realizada a montagem do modelo físico no túnel de vento, conforme mostra a Figura 3.3. O túnel de vento utilizado possui velocidade máxima de 50m/s e câmara de ensaio de 2 m^2 .

Figura 3.3: Foto da montagem do experimento no túnel de vento.

3.2.2 Montagem Experimental

Os sistemas de aquisição e processamento de sinais foram desenvolvidos utilizando-se um sistema dSPACE® com uma placa processadora DS1103 equipada com um processador *PowerPc* de 400 Mhz e 128 Mbytes de memória *RAM*. Este sistema possui 4 conversores A/D de resolução de 16 *bits* e cada conversor multiplexado entre 4 canais, num total de 16 canais de entrada; 8 canais de saída D/A de 12 *bits* de resolução e 6 interfaces para *encoders*. A programação deste sistema pode ser feita no ambiente MATLAB/SIMULINK®. Sua compilação é realizada no MATLAB/SIMULINK® utilizando-se seu pacote RTW (*Real Time Workshop*) e o programa passa a ser executado na placa dSPACE®. A programação visual do experimento é desenvolvida no programa ControlDesk® da dSPACE®.

Foram definidos como sinais de saída a serem medidos a velocidade de deslocamento horizontal, velocidade angular, deslocamento horizontal e ângulo. As deformações foram medidas utilizando-se extensômetros instalados na barra central do dispositivo flexível e associados a um amplificador HBM MGCPlus. Para a medida dos deslocamentos horizontais (flexão) utilizou-se um extensômetro Kiowa modelo KFG-5120C123 que foi configurado no esquema de 1/4 de ponte de Wheatstone no condicionador MGPlus. Para os deslocamentos angulares (torção)

utilizou-se um extensômetro Kiowa modelo KFC-2D211 configurado em 1/2 ponte no condicionador. Em ambos os casos, ainda no condicionador, aplicou-se ao sinal um filtro passa-baixa com frequência de corte de 5Hz .

Para a medida da variação das posições utilizaram-se acelerômetros capacitivos *Kistler KBeam* que são capazes de medir frequências baixas como as envolvidas no experimento deste trabalho. Um condicionador B&K Nexus Deltatron de 4 canais foi utilizado para a filtragem e integração dos sinais, convertendo aceleração em velocidade.

Para a medida da velocidade de translação, ou velocidade de torção, utilizou-se um acelerômetro *Kistler KBeam* modelo 8303A10M4 associado ao condicionador de sinais *Kistler* 5210. Na medida da velocidade angular, ou velocidade de flexão, utilizou-se dois acelerômetros *Kistler KBeam* 8304B10 associados a condicionadores de sinais *Kistler* 1572. Os acelerômetros foram instalados na placa superior do sistema flexível. A localização dos extensômetros e dos acelerômetros é apresentada na Figura 3.4.

Figura 3.4: Esquema mostrando o posicionamento dos extensômetros e dos acelerômetros.

Outro sinal a ser medido foi a posição da superfície de controle da asa, que está diretamente ligada a escolha de forma de acionamento da superfície de controle. Definiu-se que o acionamento da superfície de controle seria feito com um motor elétrico sem escovas Thompson modelo BLD-2315B10200 utilizado juntamente com um amplificador modelo

TD-50 da mesma marca. Este motor possui um *encoder* de 1000 linhas que foi utilizado para a medição da posição da superfície de controle. Logo cada linha do *encoder* correspondia a 0,36 graus de deslocamento angular da superfície de controle.

Até este ponto descreveu-se os sensores utilizados e os respectivos posicionamentos. Outra parte importante do sistema de aquisição é o ambiente computacional, ou seja, a programação do sistema. Esta programação foi realizada em ambiente SIMULINK[®], devido a facilidade proporcionada pelo sistema dSPACE através de seu programa ControlDesk. A taxa de aquisição utilizada na realização dos ensaios foi de 0,001 segundo.

A velocidade do escoamento do túnel de vento foi outra variável verificada. Ela foi medida com um Pitot instalado na câmara de ensaio associado a um manômetro Betz. Também foram medidas a temperatura e pressão ambiente para o cálculo das velocidades do fluxo no túnel.

Definidos os sistemas de aquisição de dados iniciaram-se os testes no túnel de vento.

3.2.3 Aquisição dos Dados Experimentais

Os ensaios aqui descritos foram realizados com o objetivo de obter os dados no domínio do tempo para serem identificados pelo algoritmo EERA, obtendo-se a variação de alguns parâmetros de *flutter* com a variação da velocidade no túnel de vento. Foram também obtidas as Funções Resposta em Frequência (FRF), demonstrando-se a evolução dos modos envolvidos no *flutter* com a variação da velocidade. As FRFs obtidas serviram de embasamento para a obtenção dos valores das frequências naturais com o aumento da velocidade do túnel de vento. Isto porque uma análise modal experimental no túnel de vento com o fluxo torna-se inviável.

Inicialmente foram realizados testes para determinar a velocidade em que ocorreria o *flutter*. Estes testes consistiam em aumentar a velocidade do túnel de vento gradativamente com pequenos incrementos de velocidade até o sistema oscilar de forma auto-sustentada. Definiram-se as velocidades de 0, 10, 13,5, 16, 18,5, 21, 22,5, 24 e 25 m/s para a realização dos ensaios. Segundo De Marqui Jr. (2004) a velocidade de *flutter* obtida para este modelo físico no túnel de vento foi de 25 m/s, onde verificou-se mudança das características dinâmicas com o aumento da

velocidade no túnel. Destes ensaios também determinou-se a frequência experimental de *flutter* como sendo em torno de $1,6\text{Hz}$.

As FRFs foram obtidas a partir dos sinais resultante da relação entre o sinal de saída e de entrada medidos no domínio da frequência utilizando-se um analisador espectral B&K modelo 2032. Como entrada mediu-se o sinal do *encoder* do motor que aciona a superfície de controle e como sinal de saída o sinal de aceleração medido por um dos acelerômetros instalados no dispositivo flexível. Este acelerômetro estava localizado na região de bordo de ataque da asa.

O analisador foi configurado para medir em uma faixa de frequência até 25Hz . Esta faixa mais ampla foi escolhida para se ter um melhor ajuste do tempo de aquisição dos dados para se obter a resposta em frequência. Após o fim do tempo de aquisição, várias médias aritméticas eram realizadas para uma melhor definição das respostas em frequência.

Um outro dado importante na realização dos testes foi a escolha do sinal a ser enviado para o motor que aciona a superfície de controle. Este sinal deveria ser capaz de excitar uniformemente os modos de flexão e torção ao longo de todo o período do teste. Uma solução encontrada foi a aplicação de um sinal tipo “ruído branco” com uma faixa de frequência de excitação entre 0,5 e 3 Hz, que foi gerado pelo sistema dSPACE®.

A Figura 3.5 apresenta todas as FRFs obtidas nas diversas velocidades definidas anteriormente para a caracterização do *flutter*, onde é possível verificar a evolução dos modos com o aumento da velocidade no túnel de vento. É possível observar que os valores dos picos dos modos de flexão e torção, sem a ação do escoamento no túnel, são similares aos obtidos durante a EMA. Com o aumento da velocidade existe a tendência do acoplamento entre estes modos que estão envolvidos no *flutter* em torno da frequência de $1,6\text{Hz}$, medida na velocidade crítica. Além disso, pode-se observar com o aumento da velocidade no túnel, os picos das respostas em frequência tornam-se descaracterizados, devido ao aumento do amortecimento nos modos.

A Figura 3.6 apresenta a FRF obtida somente para a velocidade de 25m/s . Analisando detalhadamente este gráfico da resposta em frequência através da Figura 3.7, é possível observar que os picos já aparecem bem descaracterizados e entre eles começa a surgir um pico em torno

de $1,6\text{Hz}$, que é relativo ao acoplamento, caracterizando a região limiar de *flutter*.

Figura 3.5: Evolução dos modos de flexão e torção.

Figura 3.6: Função de resposta em frequência do sistema medida na velocidade de 25m/s.

Figura 3.7: Detalhe da Figura 3.6.

Simultaneamente aos testes realizados no domínio da frequência, foram salvos no domínio do tempo através do ambiente ControlDesk[®] do sistema dSPACE[®] o sinal de excitação do sistema, medido pelo *encoder* do motor, e o sinal de resposta do sistema, medido com os acelerômetros e os extensômetros. O fluxograma da Figura 3.8 localiza o esquema deste experimento nos sistemas de aquisição anteriormente apresentados para colher os dados obtidos no domínio da frequência e no domínio do tempo.

Figura 3.8: Esquema do sistema de medição nos ensaios de identificação.

3.2.4 Implementação Computacional

Após a realização do ensaio experimental e da aquisição dos dados experimentais, para determinar as variações das frequências naturais e dos fatores de amortecimento dos modos de flexão e torção envolvidos no *flutter* com o aumento da velocidade no túnel de vento, utilizou-se o método de identificação EERA. O algoritmo designado para realizar os cálculos relacionados com o EERA utiliza os dados obtidos no domínio do tempo conforme mostrado no fluxograma da Figura 3.1.

Alguns dos critérios utilizados na etapa de eliminação de parâmetros modais devem ser estabelecidos através do conhecimento prévio do comportamento dinâmico da estrutura. No caso desta estrutura, um critério estabelecido foi de que devem ser eliminados modos com amortecimento superior a 10%, pois considera-se que não sejam encontrados valores desta

magnitude nesta estrutura ensaiada. Também foi estabelecido uma faixa de frequências para a identificação, considerando a frequência natural amortecida entre 35% e 90% da frequência máxima, que foi considerada como sendo $3Hz$. Verificou-se que dentro desta faixa estariam as frequências naturais obtidas através da identificação pelo algoritmo ERA, observadas na Tabela 3.1. As frequências abaixo ou acima desta faixa foram desprezadas.

3.2.5 Resultados da identificação dos parâmetros do *flutter*

Nesta Seção, são apresentados os resultados do processo de identificação dos parâmetros modais no modelo físico analisado no túnel de vento utilizando o método EERA.

Como entrada para o método EERA, foi utilizado o sinal no tempo medido pelo *encoder* e como saída o sinal dos extensômetros instalados no dispositivo flexível. Foram utilizados os extensômetros por apresentarem melhores resultados na identificação dos parâmetros modais da estrutura sob teste.

Conforme mencionado atrás, o método EERA identifica um número maior de modos do que o daqueles realmente existentes. Por isso e como o ensaio foi realizado no túnel de vento dificultando a obtenção do valor exato das frequências naturais e amortecimentos durante a ação do vento, tornou-se necessário determinar, para cada velocidade, uma faixa de valores para as frequências naturais e para os fatores de amortecimento utilizadas na identificação dos dois principais modos, flexão e torção. Na Figura 3.5 é possível observar que os picos das FRFs não são bem definidos, devido a ação do vento. Para determinar qual seria esta faixa de interesse para cada velocidade, no caso das frequências naturais, analisou-se o pico das funções resposta em frequência obtidas nos ensaios experimentais. Para os amortecimentos, foram analisadas as curvas obtidas pela resposta dos extensômetros através do método do decaimento livre, utilizando a expressão dada por (3.1). Neste caso o ensaio foi realizado excitando a estrutura manualmente. A Figura 3.9 é um exemplo da curva de decaimento livre utilizada para calcular a faixa de amortecimento na velocidade de 0 m/s para o modo de flexão.

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln\left(\frac{u_p}{u_q}\right), \quad (3.1)$$

onde n é o número de ciclos medidos, u_p é o primeiro ciclo a ser medido e u_q é o último ciclo a ser medido.

Figura 3.9: Resposta no tempo do sistema para o modo de flexão e velocidade de 0 m/s.

Para cada velocidade no túnel de vento, foram realizadas identificações utilizando o EERA. Desta forma, a partir dos dados no domínio do tempo para cada velocidade, montam-se as matrizes de bloco de Hankel de entrada $[U]$, saída $[Y]$ e saída deslocada $[Y]_s$ (equações 2.36, 2.37 e 2.58), cuja dimensão é determinada pelos parâmetros M e N (instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna nas matrizes de bloco de Hankel, respectivamente). Além disso, a identificação através do algoritmo EERA, é realizada decidindo-se o número de modos existentes nas matrizes de bloco de Hankel para análise dos valores singulares. O número de modos assumidos é estabelecido escolhendo-se a dimensão de $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$ (equações 2.65 e 2.66), ou seja, pela determinação dos $2n$ primeiros valores singulares da decomposição em valores singulares de $[Y][U]^\perp$ e as correspondentes $2n$ primeiras colunas das matrizes de vetores singulares. Desta forma, para proporcionar uma completa identificação do sistema, foram assumidas várias dimensões das matrizes de bloco de Hankel e também diferentes valores de modos, $2n$, obtendo-se desta forma diferentes resultados. As Tabelas 3.2 e 3.3 apresentam as dimensões determinadas para as matrizes de bloco de Hankel e fornecem as estimativas da

ordem do sistema $2n$ e os valores das frequências naturais e dos seus respectivos fatores de amortecimentos para os modos de flexão e torção, respectivamente, para cada velocidade. A dimensão destas matrizes são dadas pelas equações (2.36), (2.37) e (2.58). Como as matrizes $[Y]$ e $[Y]_s$ possuem a mesma dimensão, apenas a dimensão da matriz $[Y]$ será apresentada na tabela. Observa-se que o número de entradas é $r = 1$, o número de saídas é $m = 2$ e foi determinado que $N = 2M$.

Nas Figuras 3.10 e 3.11 pode-se observar os gráficos dos resultados obtidos nesta identificação. São mostradas a evolução das frequências e dos amortecimentos para os dois modos envolvidos no *flutter*, flexão e torção, com o aumento da velocidade. Pode-se observar nestas duas figuras que o *flutter* ocorre numa velocidade próxima dos $25m/s$ como esperado se comparado com os resultados obtidos anteriormente. Como foi observado, em cada velocidade uma faixa de resultados identificados é apresentada. É importante observar que em torno da velocidade crítica, a tendência é ocorrer o acoplamento das frequências de torção e flexão. Em relação ao amortecimento, pode-se observar que a tendência é o amortecimento relativo ao modo de torção mudar de sinal na velocidade crítica. Somente o modo de torção é que apresenta bons resultados em relação ao amortecimento, pois é o modo que influenciará no *flutter*. Os resultados relativos ao amortecimento para o modo de flexão são somente uma representação qualitativa e através da Figura 3.6, pode-se observar que provavelmente modos superiores influenciem este modo.

Tabela 3.2: Resultados identificados pelo método EERA para o modo de flexão.

Velocidade m/s	M	$\dim([U])$	$\dim([Y])$	Estimativa $2n$	ω_{nd} Hz	ξ_n $\%$
0	116	116x232	332x332	182	1,2019	2,86
	181	181x362	362x362	81	1,2598	3,10
	183	183x366	366x366	32	1,3091	3,50
	211	211x421	421x421	15	1,2739	3,92
10	56	56x112	112x112	56	1,1505	6,08
	121	121x242	242x242	139	1,1642	6,06
	121	121x242	242x242	140	1,1673	6,97
	144	144x288	288x288	246	1,1726	4,78
13,5	108	108x216	216x216	183	1,1639	7,78
	116	116x232	232x232	146	1,1397	6,58
	116	116x232	232x232	148	1,1968	7,85
16	71	71x142	142x142	124	1,1329	7,16
	71	71x142	142x142	125	1,1439	7,32
	71	71x142	142x142	129	1,1543	7,70
	84	84x168	168x168	118	1,1708	7,67
	132	132x264	264x264	169	1,1935	7,81
18,5	60	60x120	120x120	58	1,2579	6,37
	178	178x356	356x356	5	1,1669	6,03
	186	186x372	372x372	92	1,1679	6,79
21	131	131x262	262x262	23	1,1935	7,62
	156	156x312	312x312	70	1,1520	6,29
	156	156x312	312x312	72	1,1614	6,42
	156	156x312	312x312	73	1,1639	6,88
	156	156x312	312x312	74	1,1679	6,50
	156	156x312	312x312	75	1,1667	6,79
22,5	44	44x88	88x88	39	1,2539	6,70
	44	44x88	88x88	40	1,2728	7,81
	44	44x88	88x88	41	1,2447	6,74
	158	158x316	316x316	307	1,2682	8,37
	158	158x316	316x316	308	1,2266	8,44
24	61	61x122	122x122	36	1,3415	7,15
	89	89x178	178x178	73	1,3488	6,47
	91	91x182	182x182	36	1,4158	7,08
	92	92x184	184x184	25	1,3727	8,74
	92	92x184	184x184	38	1,3815	6,42
	92	92x184	184x184	40	1,3889	7,84
	146	146x292	292x292	201	1,3886	9,22
25	97	97x194	194x194	103	1,4988	9,23
	97	97x194	194x194	122	1,4597	7,31
	97	97x194	194x194	143	1,5146	7,39
	100	100x200	200x200	108	1,4480	8,46
	138	138x276	276x276	224	1,4945	9,15

Tabela 3.3: Resultados identificados pelo método EERA para o modo de torção.

Velocidade m/s	M	dim([U])	dim([Y])	Estimativa $2n$	ω_{nd} Hz	ξ_n %
0	75	75x150	150x150	95	2,3824	2,06
	75	75x150	150x150	96	2,3801	2,07
	75	75x150	150x150	97	2,3833	2,50
	75	75x150	150x150	98	2,3654	2,93
	211	211x422	422x422	280	2,4296	2,43
10	156	156x312	312x312	301	2,3215	4,27
	240	240x480	480x480	70	2,3528	3,90
	240	240x480	480x480	71	2,3440	3,71
	240	240x480	480x480	77	2,3339	4,44
	240	240x480	480x480	79	2,3538	4,60
	240	240x480	480x480	81	2,3346	4,34
13,5	84	84x168	168x168	155	2,3540	5,38
	86	86x172	172x172	158	2,2703	5,77
	105	105x210	210x210	197	2,3402	3,66
	120	120x240	240x240	37	2,3308	3,94
16	151	151x302	302x302	183	2,1919	3,98
	160	160x320	320x320	39	2,2102	4,69
	160	160x320	320x320	40	2,2086	4,59
18,5	60	60x190	190x190	114	2,1086	4,38
	127	127x254	254x254	168	2,1051	4,09
	127	127x254	254x254	170	2,0804	4,69
	130	130x262	262x262	253	2,1190	2,99
	131	131x372	372x372	252	2,0666	3,68
	140	140x280	280x280	185	2,1071	3,01
21	115	115x230	230x230	89	2,0704	3,32
	140	140x280	280x280	53	2,0729	3,57
	164	164x328	328x328	10	2,1003	2,60
	164	164x328	328x328	11	2,0967	2,53
	164	164x328	328x328	12	2,0975	2,40
22,5	105	105x210	210x210	56	1,9956	1,95
	107	107x214	214x214	81	1,9824	2,34
	107	107x214	214x214	90	2,0189	2,20
	108	108x216	216x216	78	2,0696	2,31
	146	146x292	292x292	168	2,0475	2,99
24	86	86x172	172x172	68	1,6145	0,93
	86	86x172	172x172	138	1,5787	1,19
	105	105x210	210x210	75	1,6041	0,98
	106	106x212	212x212	63	1,5547	1,61
	154	154x308	308x308	250	1,6097	1,76
	158	158x316	316x316	210	1,6269	1,87
25	100	100x200	200x200	134	1,5698	0,04
	100	100x200	200x200	136	1,5684	0,66
	104	104x208	208x208	118	1,5915	0,84
	109	109x218	218x218	128	1,5990	0,17
	113	113x226	226x226	116	1,5901	0,68
	113	113x226	226x226	117	1,5997	0,60
	122	122x244	244x244	35	1,5821	0,39

Figura 3.10: Evolução das frequências naturais dos modos envolvidos no *flutter* identificados pelo método EERA usando dados obtidos em ensaios no túnel de vento.

Figura 3.11: Evolução dos fatores de amortecimento dos modos envolvidos no *flutter* identificados pelo método EERA usando dados obtidos em ensaios no túnel de vento.

3.3 Aplicação do Algoritmo na Identificação Dinâmica de uma Placa de Alumínio através de Dados Experimentais

O objetivo deste trabalho de doutorado é identificar os parâmetros modais de uma estrutura em tempo real. Entretanto, antes da análise em tempo real, torna-se necessária a validação do método e para isso pode-se usar a realização de uma análise modal experimental *off-line*, em que se tem domínio de todas as condições físicas para determinar os parâmetros modais desta estrutura através da aplicação do algoritmo implementado EERA. Os resultados obtidos nesta identificação serão comparados, posteriormente, com os resultados obtidos em tempo real.

Nesta Seção é apresentada a configuração do experimento realizado, a implementação do algoritmo e os resultados obtidos no processo de identificação da estrutura proposta.

3.3.1 Descrição do Modelo Experimental

O modelo experimental utilizado para validação do algoritmo proposto é uma placa quadrada de alumínio. Esta placa foi utilizada no trabalho de doutorado de Tsunaki (1999), onde são apresentados os parâmetros modais identificados pelo ERA. Com estes resultados foi possível validar as frequências naturais identificadas pelo EERA.

Esta placa está engastada em um dos seus lados através de placas espessas de aço e todo o conjunto foi fixado à uma base inercial. A Figura 3.12 apresenta uma foto da placa, do engaste e da base inercial.

Para a realização dos ensaios, a placa foi marcada com a localização de um ponto de entrada e de quatro pontos de saída. O ponto de entrada foi localizado de forma que toda a estrutura fosse excitada. Para a saída, foram escolhidos somente quatro pontos devido à disponibilidade de acelerômetros no laboratório, uma vez que é necessário colher os dados simultaneamente. A localização destes pontos de saída foi determinada de forma que todos os modos na faixa de frequência de interesse fossem medidos. A Figura 3.13 apresenta a localização do ponto de entrada e dos quatro pontos de saída e também as dimensões da placa. A massa da estrutura

foi alterada adicionando uma massa extra de 212,42 gramas com o objetivo de verificar se o algoritmo EERA, identificaria os parâmetros modais, frequências naturais e fatores de amortecimento, com e sem massa adicional.

Figura 3.12: Placa de alumínio utilizada no experimento.

Figura 3.13: Localização dos pontos de entrada, saída e dimensões da placa

3.3.2 Montagem Experimental

O objetivo dos ensaios modais realizados sobre a placa consistiu na obtenção dos dados no domínio do tempo para serem analisados e identificados pelo algoritmo EERA. Também foram obtidas as funções de resposta em frequência (FRF) para determinação dos pontos de excitação e medição de resposta. A Figura 3.14 mostra o ambiente do ensaio com os principais equipamentos utilizados.

Figura 3.14: Montagem experimental.

A placa foi excitada utilizando um excitador eletrodinâmico e a resposta do sistema foi captada através de quatro acelerômetros piezoelétricos.

Foi utilizado nos testes um excitador eletrodinâmico da B&K modelo 4810. O sinal enviado para este excitador foi gerado pelo analisador de sinais da B&K modelo 2032. Este equipamento possui dois canais de aquisição de dados. O canal A foi reservado à medição da força aplicada à estrutura e o canal B destinado à captação do sinal de resposta. Embora tenham sido utilizadas outras formas de excitação, os resultados experimentais apresentados aqui foram obtidos usando-se a excitação aleatória com banda limitada. A faixa de frequência analisada foi limitada entre 0 e 200Hz. A força enviada para excitar a estrutura foi medida através do transdutor de força da B&K modelo 8200.

A resposta do sistema foi medida na forma de aceleração através de quatro acelerômetros piezoelétricos *Kistler* modelo 8636C10. Os acelerômetros foram fixados nos quatro pontos sobre a placa e para cada ponto foi tomada a média de cinco FRF's a fim de minimizar o nível de ruído presente. Além disso, foi utilizada uma janela Hanning nos sinais de força e excitação. Os acelerômetros foram fixados com a utilização de uma fina camada de cêra vermelha da *Kistler*. Os sinais obtidos através dos acelerômetros foram também enviados ao sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE®, neste caso as medições foram feitas simultaneamente nos quatro pontos.

Os sinais provenientes de ambos os sensores, transdutor de força e acelerômetros, são amplificados através dos amplificadores de carga da B&K modelo 2626 e da Kistler Power Supply Coupler modelo 5134, respectivamente, antes de alcançarem o analisador de sinais ou o sistema dSPACE®. Além disso o sinal enviado para o excitador eletrodinâmico também é amplificado utilizando o amplificador de potência B&K modelo 2706.

A Tabela 3.4 relaciona os equipamentos utilizados nos ensaios experimentais, com seus modelos e algumas especificações técnicas.

Tabela 3.4: Relação dos equipamentos utilizados no experimento da placa de alumínio.

Equipamentos Utilizados	
Analizador de sinais de dois canais da B&K - Modelo 2032	(1)
Amplificador de Potência da B&K - Modelo 2706	(2)
Excitador da B&K - Modelo 4810	(3)
Transdutor de força da B&K - Modelo 8200 (21 gramas) Sensibilidade = 4,05 pC/N	(4)
Acelerômetros Kistler - Modelo 8636C10 Sensibilidades = 513 mV/g (C142674); 506 mV/g (C142675); 512 mV/g (C142676); 504 mV/g (C142677).	(6)
Condicionador e Amplificador de sinais da B&K - Modelo 2626	(7)
Amplificador de Sinal Kistler Power Supply Coupler 5134	(8)
Sistema dSPACE®	(9)
Computador	(10)

3.3.3 Aquisição dos Dados Experimentais

Inicialmente foram realizados os ensaios para determinar a localização dos acelerômetros. Foram realizados diversos testes, com e sem a massa adicionada à estrutura. Estes testes consistiam em excitar a estrutura, colher e analisar os sinais dos acelerômetros em diversos pontos da placa, verificando através das FRFs obtidas com o analisador da B&K, se todos os modos dentro da faixa de frequência de interesse, eram excitados.

Através das FRFs obtidas, uma pré-análise do modelo testado é realizada calculando-se o espectro de potência médio (EPM), através da equação:

$$EPM(\omega_i) = \frac{\sum_{j=1}^N |H_j(\omega_i)|^2}{N}, \quad (3.2)$$

onde $H_j(\omega_i)$ é o valor da j -ésima FRF na frequência ω_i e N é o número total de FRFs.

A Figura 3.15 apresenta o resultado do espectro de potência médio, aplicado ao conjunto total das quatro FRFs obtidas, considerando a massa adicionada à estrutura e sem a adição desta massa. Este gráfico permite visualizar as possíveis frequências naturais da estrutura com e sem a massa extra adicionada.

Figura 3.15: Espectro de Potência Médio (EPM) com e sem massa adicionada à placa.

Após a obtenção das FRFs, foram realizados os ensaios para obter os dados no domínio do

tempo, que é o objetivo deste ensaio experimental. A Figura 3.16 ilustra o esquema do ensaio realizado para a obtenção dos dados no domínio do tempo com os principais equipamentos discriminados na Tabela 3.4. O analisador de sinais (1) gera o sinal de entrada que é amplificado (2) e enviado para o excitador (3) que transmite força à estrutura (5). Esta força é medida através de um transdutor de força (4) e as acelerações através de acelerômetros piezoelétricos (6) fixados sobre a estrutura. Ambos, transdutor e acelerômetros, têm seus sinais amplificados (7) e (8), respectivamente. A aquisição e o processamento destes sinais foi feita pelo sistema dSPACE® (9) e os dados enviados para o computador (10).

Figura 3.16: Esquema do ensaio experimental - equipamentos utilizados.

Conforme a descrição do sistema dSPACE® realizada anteriormente, é possível realizar a aquisição dos 4 sinais de saída simultaneamente, pois o equipamento possui 4 conversores A/D multiplexados entre 4 canais. Como havia a necessidade de medir o sinal do transdutor de força, optou-se por ler este sinal multiplexado com o sinal do primeiro acelerômetro. Devido à velocidade de aquisição ser muito rápida, isso não interferiu no desempenho do sistema. A taxa de aquisição utilizada foi de 0,001 segundo e os dados foram salvos durante 40s. Embora tenham sido realizadas diversas aquisições em diferentes intervalos de tempo, optou-se por

apresentar os resultados experimentais que foram medidos durante 40 segundos. Neste período, durante os primeiros 20 segundos a massa da placa foi alterada acrescentando a massa extra de 212,42gr. Após estes 20 segundos, sem interrupção da captura do sinal, retirou-se a massa e deu-se continuidade ao processo de aquisição.

3.3.4 Implementação Computacional

Esta Seção descreve a implementação computacional realizada na análise dos dados colhidos da placa de alumínio. Todos os algoritmos programados foram realizados através de procedimento similar ao realizado no experimento da asa rígida acoplada ao dispositivo flexível no túnel de vento.

O EERA, assim como o ERA, quando utilizado na identificação de estruturas que possuem comportamento dinâmico complexo, identifica um número maior de modos do que aqueles existentes dentro da faixa de frequência analisada, dificultando a análise dos resultados de identificação. Desta forma, dentro de critérios específicos, são eliminados os parâmetros modais mal identificados ou relativos a modos computacionais (não físicos).

No caso do modelo ensaiado (placa de alumínio) o algoritmo elimina fatores de amortecimento maiores que 5%, pois considera-se que não sejam encontrados valores desta magnitude na estrutura ensaiada. A Tabela 3.5 apresenta os critérios utilizados para a eliminação dos parâmetros modais indesejados para esta estrutura sob análise.

Tabela 3.5: Critérios utilizados na eliminação de parâmetros modais.

Critério	Eliminação
Amortecimento $< 0\%$	Modos computacionais
Amortecimento $> 5\%$	Modos computacionais
$\omega_{nd} = 0$	Modos de corpo rígido
$0.08\omega_{min} \leq \omega_{nd} \leq 0.92\omega_{max}$	Faixa de frequência de aquisição

onde ω_{nd} = frequência natural amortecida; ω_{max} = limite superior da faixa de frequência analisada; ω_{min} = limite inferior da faixa de frequência analisada.

3.3.5 Resultados da Identificação dos Parâmetros Modais

Esta Seção apresenta os resultados do processo de identificação dos parâmetros modais obtidos através da aplicação do algoritmo EERA. Como o ensaio foi realizado em duas etapas, primeiro utilizando uma massa extra adicionada à placa e depois sem a adição desta massa, o intervalo de tempo de aquisição do sinal (40 segundos) foi dividido em dois intervalos, considerando os primeiros e os últimos 16 segundos.

Como entrada para o método EERA, foi utilizado o sinal no tempo medido pelo transdutor de força e como saída o sinal dos acelerômetros. Com os dados das respostas no domínio do tempo montam-se as matrizes de bloco de Hankel de entrada $[U]$, saída $[Y]$ e saída modificada $[Y]_s$ (equações 2.36, 2.37 e 2.58), cuja dimensão é determinada pelos parâmetros M e N (instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna nas matrizes de bloco de Hankel, respectivamente). No caso, a dimensão escolhida para a matriz de bloco de Hankel de entrada é de 91 linhas ($M = 91$ e $r = 1$) por 182 colunas ($N = 182$) e das matrizes de bloco de Hankel de saída e saída modificada são de 364 linhas ($M = 91$ e $m = 4$) por 182 colunas ($N = 182$).

A identificação, através do algoritmo EERA, é realizada decidindo-se o número de modos existentes nas matrizes de bloco de Hankel para análise dos valores singulares. O número de modos assumidos é estabelecido escolhendo-se a dimensão de $[\Sigma_{2n}]$, $[R_{2n}]$ e $[S_{2n}]$ (equações 2.65 e 2.66), ou seja, pela determinação dos $2n$ primeiros valores singulares da decomposição em valores singulares de $[Y][U]^\perp$ e as correspondentes $2n$ primeiras colunas das matrizes de vetores singulares. Desta forma, para proporcionar uma completa identificação do sistema, são assumidos diferentes valores de modos, $2n$, fornecendo diferentes resultados.

A Tabela 3.6 apresenta os valores das frequências naturais para os casos da massa da placa com e sem o acréscimo da massa extra. As frequências naturais da placa sem o acréscimo da massa extra foram obtidas através da identificação pelo algoritmo ERA apresentadas no trabalho de Tsunaki (1999) e para o caso da massa da placa alterada, considerou-se o espectro de potência médio para obter os valores das frequências naturais.

Tabela 3.6: Valores das frequências naturais obtidas pelo EPM, para o caso da massa adicionada e pelo método ERA, para o caso sem a massa adicionada.

Com massa adicionada	Sem massa adicionada
ω_{nd} (Hz)	ω_{nd} (Hz)
17,75	19,5
42,75	45,9
115,75	121,1
143,00	157,5
168,00	172,4

Com estes resultados, foi possível realizar uma comparação com os valores obtidos pelo processo de identificação utilizando o algoritmo EERA. O resultado final do processo de identificação é composto pelas frequências naturais e os fatores de amortecimento modal. A Tabela 3.7 fornece, além dos valores das frequências naturais e dos seus respectivos fatores de amortecimentos, as estimativas da ordem do sistema $2n$.

Pode-se observar que através da mesma ordem do sistema foi possível identificar os parâmetros modais com e sem a adição da massa. Para o caso da massa da estrutura sem alteração, foi possível validar as frequências naturais através da identificação realizada pelo método ERA, ressaltando que no trabalho de Tsunaki (1999) este ensaio experimental foi realizado utilizando um martelo de impacto para excitar a estrutura.

Tabela 3.7: Resultado dos parâmetros modais identificados pelo método EERA.

Identificação					
Com massa adicionada			Sem massa adicionada		
ω_{nd} Hz	ξ_n %	Estimativa $2n$	ω_{nd} Hz	ξ_n %	Estimativa $2n$
16,783	3,998	18	20,707	2,304	18
42,918	0,207	18	45,822	0,756	18
116,044	0,482	18	119,604	0,592	18
142,863	0,458	18	156,137	0,367	18
167,880	0,328	18	170,202	0,300	18
17,247	4,668	19	21,250	2,599	19
42,928	0,297	19	45,932	0,720	19
116,052	0,490	19	119,603	0,590	19
142,863	0,458	19	156,137	0,367	19
167,880	0,327	19	170,202	0,300	19
17,236	4,468	20	21,243	2,611	20
42,928	0,296	20	45,933	0,723	20
116,053	0,490	20	119,600	0,587	20
142,863	0,458	20	156,137	0,368	20
167,880	0,328	20	170,202	0,300	20
17,228	4,477	21	21,258	2,490	21
42,930	0,290	21	45,931	0,717	21
116,050	0,489	21	119,601	0,587	21
142,863	0,458	21	156,136	0,368	21
167,880	0,327	21	170,202	0,300	21

Identificação em Tempo Real

A identificação em tempo real é utilizada em casos especiais onde existe a necessidade do conhecimento imediato da variação dos parâmetros modais, como no caso do *flutter*. A terminologia “tempo real” está relacionada com o tempo que um sistema de identificação leva para gerar as informações requeridas e que deve ser quase o mesmo comparativamente ao tempo em que o fenômeno real acontece. Para que este tempo seja minimizado, torna-se necessário a utilização de equipamentos que tornem mais rápida a aquisição e o processamento dos sinais obtidos do sistema físico em análise. Desta forma neste trabalho foi utilizado o sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE®, com o qual é possível realizar a coleta dos sinais e, o seu processamento, em “tempo real”.

Esta seção apresenta inicialmente a descrição do aparato experimental necessário para realizar a identificação em tempo real e os resultados obtidos com a análise “off-line” dos dados experimentais referentes à placa de alumínio, conforme descrito anteriormente. Posteriormente foi realizado um ensaio experimental para identificar em tempo real os parâmetros modais desta placa de alumínio.

4.1 O Aparato Experimental

Os sistemas de aquisição e processamento de sinais foram desenvolvidos utilizando-se um sistema dSPACE® com uma placa multiprocessadora DS1005 equipada com um processador

PowerPC de 400 Mz e 128 Mbytes de memória *RAM*. Este sistema possui duas placas processadoras, a DS2003 que possui dois conversores A/D de resolução de 16 *bits* com 32 canais multiplexados e a DS2102 com 6 canais de saída D/A de 16 *bits* de resolução.

Antes de se realizar a identificação em tempo real, torna-se necessário executar testes “off-line” para validar o método implementado no equipamento destinado à identificação em tempo real e assim verificar as possíveis restrições e também a eficiência do equipamento. Estes testes foram realizados utilizando o algoritmo EERA para identificar os parâmetros modais da placa de alumínio através dos dados experimentais obtidos no ensaio experimental realizado anteriormente. O algoritmo foi programado no ambiente SIMULINK® (versão 6.0) do MATLAB® (versão 7.0) para em seguida ser compilado para o sistema dSPACE® através do pacote RTW (*Real Time Workshop*) e desta forma poder processar os dados experimentais que são apresentados através do software ControlDesk®. Este software apresenta algumas limitações em relação a alguns blocos do MATLAB/SIMULINK®, tornando a programação mais trabalhosa. Foram necessárias várias tentativas para realizar a programação do algoritmo de identificação EERA no MATLAB/SIMULINK® de tal forma que fosse possível sua compilação para o sistema de processamento de sinais. Esta implementação e os demais detalhes necessários para realizá-la encontram-se no Apêndice A.

4.1.1 Aplicação do Aparato Experimental na Identificação “off-line” da Placa de Alumínio

Tendo em vista a validação do EERA para testes com o equipamento dSPACE®, a identificação dos parâmetros modais da placa de alumínio é apresentada. Após a programação do algoritmo no MATLAB/SIMULINK®, foi realizada a sua compilação utilizando seu pacote RTW. A programação visual do experimento é desenvolvida no programa ControlDesk® da dSPACE®.

Foram realizadas várias identificações, considerando como entrada o sinal medido pelo transdutor de força e como saída, os sinais medidos pelos quatro acelerômetros. Em cada identificação, as dimensões M e N das matrizes de bloco de Hankel de entrada $[U]$, saída $[Y]$

e saída modificada $[Y]_s$ (equações 2.36, 2.37 e 2.58) foram variadas. Os parâmetros M e N correspondem aos instantes de tempo medidos numa linha e numa coluna nas matrizes de bloco de Hankel, respectivamente. Neste caso, a dimensão escolhida para a matriz de bloco de Hankel de entrada é de 91 linhas ($M = 91$ e $r = 1$; r é o número de entradas) por 182 colunas ($N = 182$) e das matrizes de bloco de Hankel de saída e saída modificada são de 364 linhas ($M = 91$ e $m = 4$; m é o número de saídas) por 182 colunas ($N = 182$).

No ensaio experimental realizado com a placa, a taxa de aquisição foi de 0,001s e os dados foram salvos durante 40s, sendo que nos primeiros 20s foi considerada a massa extra adicionada à estrutura, conforme explicado anteriormente. Este intervalo de tempo em que os dados foram salvos, foi particionado em intervalos menores de 0,3 segundos cada, para verificar se os parâmetros modais seriam identificados durante todo o processo de aquisição do sinal.

Para verificar se as frequências naturais e os fatores de amortecimento estavam condizentes em cada novo intervalo menor, os seus valores foram calculados no ambiente MATLAB[®], no ambiente MATLAB/SIMULINK[®] e finalmente no ambiente ControlDesk[®] da dSPACE[®]. As tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam os resultados obtidos para cada uma destas identificações, onde variou-se o tempo de início de aquisição dos dados que foram salvos durante os intervalos menores de 0,3s cada. Primeiramente são apresentados os resultados considerando a massa adicionada à placa de alumínio, como segue abaixo.

Tabela 4.1: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 0,001 a 0,301 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 0,001 a 0,301					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
16,7828	3,9983	16,7624	4,1363	16,7624	4,2980
42,9179	0,2073	43,0030	0,1066	42,8251	0,1637
116,0436	0,4823	116,0008	0,4922	116,1185	0,4969
142,8628	0,4581	144,1265	0,5521	142,5623	0,4479
167,8801	0,3275	166,5890	0,4584	168,1156	0,3321

Tabela 4.2: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 6,201 a 6,501 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 6,201 a 6,501					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
18,0588	2,5467	18,0593	3,3624	18,0595	2,5448
42,7241	0,4241	42,7262	3,3624	42,7246	0,4150
115,9612	0,3439	115,9628	0,3525	115,9636	0,3467
143,0702	0,4720	143,0823	0,3451	143,0703	0,4670
167,8608	0,3111	167,8658	0,4354	167,8710	0,3129

Tabela 4.3: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 11,913 a 12,213 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 11,913 a 12,213					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
17,1614	3,4937	17,1599	3,5106	17,1617	3,4993
42,7188	0,7170	43,7184	0,7112	42,7178	0,7091
116,0314	0,4816	116,0386	0,4835	116,0385	0,4803
143,1452	0,5205	143,1433	0,5242	143,1524	0,5277
167,8277	0,2913	167,8345	0,2888	167,8267	0,2905

Tabela 4.4: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 18,867 a 19,167 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 18,867 a 19,167					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
18,0868	3,4875	18,0864	0,2059	18,0966	3,4592
43,4717	0,3600	43,4701	0,2059	43,4802	0,4046
115,9962	0,2980	116,0098	0,2755	115,9986	0,2987
142,9644	0,4907	142,9661	0,3451	142,9570	0,4974
167,7899	0,4026	167,7898	0,3104	167,8044	0,3962

Da mesma forma, nas próximas tabelas, são apresentados os resultados obtidos sem a adição da massa à placa de alumínio:

Tabela 4.5: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 23,253 a 23,553 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 23,253 a 23,553					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
21,5966	3,7871	21,5976	3,7862	21,5976	3,7878
46,2303	0,7566	46,2322	0,7572	46,2321	0,7567
118,6459	0,6912	118,6506	0,6912	118,6505	0,6913
156,1954	0,3595	156,2009	0,3594	156,2005	0,3603
170,2143	0,3232	170,2224	0,3231	170,2220	0,3225

Tabela 4.6: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 29,715 a 30,015 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 29,715 a 30,015					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
20,7164	2,9713	20,7172	2,9712	20,7172	2,9715
45,3496	0,6453	45,3516	0,6455	45,3513	0,6448
119,4790	0,4653	119,4832	0,4676	119,4840	0,4669
156,2077	0,2649	156,2060	0,2614	156,2093	0,2642
170,1593	0,2426	170,1728	0,2424	170,1682	0,2429

Tabela 4.7: Freqüências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 34,738 a 35,038 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 34,738 a 35,038					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
21,8273	3,1611	21,8282	3,1614	21,8281	3,1604
45,4029	0,6405	45,4046	0,6404	45,4051	0,6408
119,3368	0,3984	119,3406	0,3975	119,3420	0,4009
156,1156	0,2998	156,2424	0,2726	156,2276	0,2706
170,1384	0,2834	170,1248	0,3204	170,1355	0,3131

Tabela 4.8: Freqüências naturais e fatores de amortecimento identificados utilizando o MATLAB[®], MATLAB/SIMULINK[®] e ControlDesk[®] para o período de aquisição de 39,696 a 39,996 segundos.

Período de aquisição (segundos): de 39,696 a 39,996					
MATLAB [®]		SIMULINK [®]		ControlDesk [®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
20,8528	4,1269	20,8569	4,1144	20,8561	4,1121
45,2262	0,7732	45,2260	0,7779	45,2247	0,7835
119,7030	0,4268	119,7062	0,4278	119,7034	0,4272
156,3615	0,2936	156,3654	0,2910	156,3703	0,2877
170,3101	0,2237	170,3197	0,2248	170,3178	0,2273

A fim de verificar se o processo de identificação utilizando a dSPACE[®] era realizado dentro do próprio sistema, realizou-se um teste considerando o período de aquisição da Tabela 4.1. Após o algoritmo ser compilado para o ControlDesk[®], o valor do primeiro elemento do vetor de entrada $\{u(k)\}$ foi alterado de 0,149 para 1,5. Desta forma, foi realizada a identificação através do ControlDesk[®]. Após a realização desta identificação através do ControlDesk[®] também foram realizadas as identificações no MATLAB[®] e no SIMULINK[®] com o mesmo valor alterado do primeiro elemento do vetor $\{u(k)\}$ para efeito de comparação. A tabela 4.9 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 4.9: Resultados da identificação variando o valor do primeiro elemento do vetor de entrada.

ControlDesk[®]		MATLAB[®]		SIMULINK[®]	
ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %	ω_{nd} Hz	ξ_n %
42,9607	0,2491	42,9647	0,2510	42,9638	0,2545
116,0222	0,4617	116,0205	0,4631	116,0227	0,4630
143,8744	0,4564	143,8592	0,4646	143,8535	0,4648
168,8935	0,3307	167,8876	0,3232	168,9083	0,3200

4.2 Identificação em Tempo Real dos Parâmetros Modais da Placa de Alumínio

Sendo que o objetivo deste trabalho de doutorado é identificar os parâmetros modais de uma estrutura em tempo real, utilizou-se para tal a placa de alumínio descrita no Capítulo anterior. Foi determinada esta estrutura para a realização dos ensaios em tempo real devido ao conhecimento prévio da estrutura e dos parâmetros necessários para realizar a sua identificação. Assim, nesta seção são apresentadas a realização do ensaio experimental na placa de alumínio e os resultados obtidos em termos de identificação em tempo real dos parâmetros modais da placa.

4.2.1 Montagem Experimental

Para a realização dos ensaios em tempo real foi utilizada a placa de alumínio descrita na Seção 3.3. A Figura 4.1 mostra o ambiente do ensaio com os principais equipamentos utilizados e a Tabela 4.10 relaciona esses equipamentos com seus modelos e algumas especificações técnicas.

A placa foi excitada utilizando o excitador eletrodinâmico (3). O sinal enviado para o excitador foi gerado pelo analisador de sinais (1) e a excitação utilizada foi a aleatória com banda limitada. A faixa de frequência analisada foi limitada entre 0 e 250Hz e a força enviada para excitar a estrutura foi medida através do transdutor de força (4), como o sinal mostrado na Figura 4.2.

Figura 4.1: Montagem Experimental.

Tabela 4.10: Relação dos equipamentos utilizados no experimento da placa de alumínio.

Equipamentos Utilizados	
Analizador de sinais de quatro canais da SignalCalc ACE	(1)
Amplificador de Potência da B&K - Modelo 2706	(2)
Excitador da B&K - Modelo 4810	(3)
Transdutor de força da B&K - Modelo 8200 (21 gramas) Sensibilidade = 4,05 pC/N	(4)
Acelerômetros Kistler - Modelo 8636C10 Sensibilidades = 513 mV/g (C142674); 506 mV/g (C142675); 512 mV/g (C142676); 504 mV/g (C142677)	(6)
Condicionador e Amplificador de sinais da B&K - Modelo 2626	(7)
Amplificador de Sinal Kistler Power Supply Coupler 5134	(8)
Sistema dSPACE [®]	(9)

Figura 4.2: Exemplo do sinal de força medido pelo transdutor de força.

A resposta do sistema foi medida através de quatro acelerômetros piezoelétricos (6). Os acelerômetros foram fixados em quatro pontos sobre a placa, conforme mostra a Figura 3.13. Os pontos de excitação e medição foram definidos de tal forma que todos os modos de interesse fossem excitados e medidos. Além disso, foi utilizada uma janela Hanning nos sinais de força e excitação. Os acelerômetros foram fixados com a utilização de uma fina camada de cera apropriada. Os sinais de força e aceleração foram enviados simultaneamente ao sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE® (9).

Os sinais provenientes de ambos os sensores, transdutor de força e acelerômetros são amplificados através dos amplificadores de carga (7,8) antes de alcançarem o analisador de sinais ou o sistema dSPACE®. Além disso, o sinal enviado para o excitador eletrodinâmico é previamente amplificado utilizando o amplificador de potência (2).

4.2.2 Aquisição dos Dados Experimentais

Na realização dos ensaios foram obtidas as FRFs para servirem de parâmetro na comparação com os resultados identificados pelo algoritmo. Para obter as FRFs, como entrada foi utilizado o sinal obtido pelo transdutor de força e como saída os sinais de cada acelerômetro em todas as quatro posições pré-determinadas, com e sem o acréscimo da massa extra de 212,42gr. Os sinais obtidos foram enviados ao analisador de sinais da SignalCalc ACE, onde foi tomada uma média de dez FRFs a fim de minimizar o nível de ruído presente no sinal.

Foram realizados diversos ensaios experimentais para verificar a eficácia do algoritmo na identificação em tempo real. A Figura 4.3 ilustra os procedimentos utilizados nestes ensaios com os principais equipamentos discriminados na Tabela 4.10. O analisador de sinais (1) gera o sinal de entrada que é amplificado (2) e enviado para o excitador (3) que aplica força à estrutura (5). Entre o excitador e a estrutura é colocado o transdutor de força (4) que mede a força aplicada. As acelerações são medidas através de acelerômetros piezoelétricos (6) fixados sobre a estrutura. Ambos, transdutor e acelerômetros, têm seus sinais amplificados (7) e (8), respectivamente. A aquisição e o processamento destes sinais, bem como a identificação dos

parâmetros modais, foi feita pelo sistema dSPACE® (9).

Figura 4.3: Esquema do ensaio experimental - equipamentos utilizados.

Conforme a descrição do sistema dSPACE® realizada anteriormente, é possível realizar a aquisição dos 5 canais de saída simultaneamente (força e aceleração). A taxa de aquisição utilizada foi de 0,001 segundo.

Em todos os ensaios realizados, o procedimento foi o mesmo descrito anteriormente. A diferença na obtenção dos dados foi a alteração da localização dos acelerômetros, o acréscimo de massas e a variação da dimensão das matrizes de Hankel e da ordem do sistema.

4.2.3 Implementação Computacional

A implementação computacional do algoritmo EERA foi a mesma realizada na análise dos dados colhidos da placa de alumínio nos ensaios “off-line”.

Utilizando critérios específicos, são eliminados os parâmetros modais mal identificados ou relativos a modos computacionais (não físicos). O algoritmo elimina fatores de amortecimento maiores que 5%, pois considera-se que não sejam encontrados valores desta magnitude na estrutura ensaiada. A Tabela 3.5 apresentada na Seção 3.3.4, estabelece os critérios utilizados

para a eliminação dos parâmetros modais indesejados para esta estrutura sob análise.

Como afirmado anteriormente, para a realização dos ensaios em tempo real, o algoritmo EERA foi implementado no ambiente MATLAB/SIMULINK[®]. A partir desta implementação, o programa foi compilado para o sistema dSPACE[®] através do pacote RTW e a partir de então iniciaram-se os ensaios experimentais.

4.2.4 Resultados da Identificação dos Parâmetros Modais

Esta Seção apresenta os resultados do processo de identificação dos parâmetros modais em tempo real obtidos através da aplicação do algoritmo EERA implementado no sistema dSPACE[®].

À priori a dimensão escolhida para a matriz de bloco de Hankel de entrada é de 91 linhas ($M = 91$ e $r = 1$) por 182 colunas ($N = 182$) e das matrizes de bloco de Hankel de saída e saída modificada são de 364 linhas ($M = 91$ e $m = 4$) por 182 colunas ($N = 182$). Esta dimensão é a mesma determinada no Capítulo anterior. A ordem do sistema estimada foi de $2n = 18$. Observa-se que a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema podem ser modificadas durante a realização dos ensaios.

Todos os resultados apresentados nesta seção foram obtidos enquanto os ensaios experimentais eram realizados, ou seja, a identificação foi realizada em tempo real. Foram realizados diversos testes variando o intervalo de tempo destinado à aquisição e identificação, os resultados obtidos em cada teste foram satisfatórios, ou seja, o algoritmo de identificação foi capaz de realizar a identificação em tempo real. Porém, em alguns intervalos de tempo, a variação na ordem da identificação dos modos foram maiores e optou-se por apresentar os resultados que apresentavam uma menor variação. Desta forma neste trabalho serão apresentados os resultados obtidos considerando os intervalos de tempo de 0,8s e 3,0s.

Os primeiros ensaios foram realizados para verificar se para o experimento em questão os parâmetros modais poderiam ser identificados em tempo real. Inicialmente, na Figura 4.4 é apresentado o resultado do espectro de potência médio (EPM) aplicado ao conjunto total de

FRFs obtidas, com e sem a massa extra adicionada à estrutura.

Figura 4.4: Espectro de Potência Médio (EPM) obtido com e sem massa adicionada à placa de alumínio.

As frequências naturais e os fatores de amortecimento identificados pelo algoritmo EERA utilizando o sistema dSPACE®, são apresentados nas Figuras 4.5 (a) e (b), considerando a estrutura sem a massa adicionada e depois com a adição da massa de 212,42gr.

Os dados aqui apresentados foram salvos durante 60s sendo o tempo de aquisição e identificação de 3,0s, ou seja, a cada 3,0 segundos eram atualizados os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento dos modos identificados pelo método EERA.

Na Figura 4.5 (a), todas as frequências naturais foram identificadas, porém em torno de 30s, houve uma variação na ordem da identificação dos três últimos modos e depois todos os modos voltaram a ser identificados na ordem inicial. Isso deve-se ao fato dos autovalores não serem ordenados durante os cálculos, e assim são identificados os cinco modos de interesse, porém em ordem alternada.

Através das Figuras 4.6 (a) e (b), pode-se observar melhor os parâmetros modais identificados e verificar que, em cada modo identificado nos 60s em que os ensaios foram realizados, para o caso em que a massa da estrutura foi alterada, a variação das frequências naturais foi inferior a 1Hz e dos fatores de amortecimento em torno de 2% .

Figura 4.5: Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados pelo EERA em tempo real: (a) Sem adição da massa extra; (b) Com adição da massa extra.

Figura 4.6: Detalhes da identificação dos parâmetros modais em tempo real com a massa extra adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Após os testes iniciais, iniciaram-se os principais ensaios experimentais. Nos primeiros ensaios 4 acelerômetros foram posicionados sobre a placa como no caso do Capítulo anterior e com a massa extra adicionada à estrutura, como mostra a Figura 4.7. Foram salvos dados durante aproximadamente 40s sendo o intervalo de aquisição e identificação de cada amostragem de 3,0s. Em torno de 20s a massa foi retirada da estrutura, e através das Figuras 4.8 (a) e (b), observa-se a mudança dos valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento em torno de 21s.

Figura 4.7: Posição dos acelerômetros e da massa extra na placa de alumínio.

Figura 4.8: Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Através das Figuras 4.9 (a) e (b), que foram obtidas das Figuras 4.8 (a) e (b), é possível observar melhor a variação dos valores dos modos e assim comparar com os valores obtidos na análise “off-line” realizada no Capítulo anterior.

Figura 4.9: Detalhes dos parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

A Tabela 4.11 apresenta esta comparação da identificação realizada “off-line” e “on-line”, com e sem o acréscimo da massa na estrutura. Para obter os valores das frequências naturais em tempo real, foi realizada uma média entre os valores identificados durante os 40 segundos de realização do experimento.

Tabela 4.11: Valores das frequências naturais (Hz) identificadas “off-line” e “on-line”.

Com massa adicionada		Sem massa adicionada	
“off-line”	“on-line”	“off-line”	“on-line”
17,75	17,4	19,5	19,4
42,75	43,65	45,9	45,55
115,75	114,4	121,1	120,0
143,00	144,0	157,5	157,8
168,00	169,5	172,4	170,2

É possível observar através da Figura 4.10 que o programa foi capaz de identificar os cinco modos dentro da faixa de frequência desejada e também a mudança no valor destes modos em torno dos 21s aproximadamente, assim que a massa foi retirada.

Figura 4.10: Detalhes da variação do sinal após a retirada da massa.

Este mesmo ensaio foi repetido considerando o tempo de aquisição e identificação dos parâmetros modais em $0,8s$. As Figuras 4.11 (a) e (b) mostram os resultados obtidos. Pode-se observar que quando a massa é retirada em $22,5s$, há a variação do sinal, porém nos últimos segundos os três últimos modos trocam de posição, mas continuam sendo identificados e depois voltam a ser identificados em ordem crescente dos modos.

Figura 4.11: Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Foi realizado um outro ensaio onde os modos foram identificados sem a adição da massa e após aproximadamente 20s a massa era adicionada. Neste caso como pode-se observar através das Figuras 4.12 (a) e (b), há uma maior troca na ordem da identificação dos valores das frequências naturais, porém assim que a massa é adicionada, os valores das frequências naturais diminuí, como era o esperado. Este ensaio foi realizado com tempos de amostragem de 0,8s.

Figura 4.12: Parâmetros modais identificados em tempo real: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Foram realizados testes onde variou-se o número de acelerômetros para ver se o programa seria capaz de identificar em tempo real mesmo com um número menor de informações. Estes testes foram realizados com os acelerômetros localizados na posição original e considerando todas as possíveis combinações de localização. Porém, somente serão apresentados os melhores resultados obtidos, pois dependendo da localização dos acelerômetros, aumentava a dificuldade na identificação de alguns modos. Os dois primeiros modos apresentaram uma maior dificuldade na identificação, principalmente quando o número de acelerômetros diminuía.

Inicialmente realizou-se os testes com três pontos de saída e os resultados apresentados nas Figuras 4.13 (a) e (b), e 4.14 (a) e (b), foram obtidos com os acelerômetros nas posições 2,3,4, conforme a Figura 3.13. No caso da identificação realizada considerando o intervalo de tempo de 0,8s, quando a massa é retirada da estrutura os quatro últimos modos alteram o

valor e o primeiro modo só vai identificar a mudança no seu valor após passar 1,6s que a massa foi retirada, ou seja, dois passos depois da retirada da massa. Para o processo de identificação considerando o intervalo de amostragem de 3,0s, o primeiro modo sofre a alteração assim que a massa é retirada como ocorre com os outros modos. Isso deve-se ao fato do tempo de amostragem em que o sinal é obtido ser maior, sendo possível identificar de forma mais rápida a variação do sinal, pois este sinal já contém informações das alterações sofridas na estrutura.

Figura 4.13: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.14: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Em seguida foram realizados ensaios com dois acelerômetros nas posições 1,2, conforme a Figura 3.13. As Figuras 4.15 (a) e (b) apresentam os resultados identificados a cada 0,8s e as Figuras 4.16 (a) e (b) no tempo de 3,0s.

Figura 4.15: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.16: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

No caso da identificação a cada 0,8s, quando a massa é retirada da estrutura as quatro últimas frequências naturais alteram o valor e a primeira frequência, conforme já mencionado antes, só vai alterar o seu valor depois de dois passos, ou seja, nos próximos 1,6s que a massa foi retirada. Para o tempo de 3,0s os três últimos modos também vão variar a posição, porém

todas as frequências mudam seus valores assim que a massa é retirada em torno de 24s.

Serão apresentados agora os resultados obtidos utilizando apenas um acelerômetro na placa. A melhor identificação foi utilizando o acelerômetro na posição 1, conforme a Figura 3.13. As Figuras 4.17 (a) e (b) apresentam os resultados identificados a cada 0,8s e as Figuras 4.18 (a) e (b) no tempo de 3,0s. No tempo de 3,0s, o primeiro modo altera seu valor quando a massa é retirada em torno de 23s, porém fica um passo sem identificar este modo, o que não aconteceu antes. O motivo é que neste passo os sinais obtidos através de apenas um acelerômetro não possuíam informações suficientes para identificar este primeiro modo.

Neste caso, utilizando apenas um acelerômetro na estrutura, não foi possível obter uma boa identificação, há muitas oscilações. Com isso pode-se afirmar que para uma melhor identificação torna-se necessário o uso de pelo menos 3 acelerômetros, pois assim têm-se mais informações sobre a estrutura para a realização da identificação.

Figura 4.17: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Também foram realizados ensaios variando a posição da massa extra. O primeiro destes ensaios, foi realizado com a massa localizada na extremidade da placa na posição oposta à extremidade onde estava localizado o excitador, como mostrado na Figura 4.19.

Figura 4.18: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.19: A massa foi posicionada em uma das extremidades da placa de alumínio.

Primeiramente, os resultados obtidos com o tempo de aquisição de 0,8s são apresentados através das Figuras 4.20 (a) e (b). Neste caso há muita variação do sinal e o segundo modo fica sem ser identificado durante 3 passos antes da retirada da massa. O terceiro e o quarto modos ficam variando a posição em que são identificados, isso provavelmente deva-se ao fato da massa não estar fixa à estrutura provocando ruído na identificação. Quando a massa é retirada da estrutura em torno dos 22,3s, o primeiro modo demora 0,8s para ser identificado, e o sinal melhora, só os três últimos modos trocam a posição algumas vezes.

Figura 4.20: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Considerando o tempo de aquisição de 3,0s, é possível observar através das Figuras 4.21 (a) e (b), que antes da retirada da massa o terceiro e quarto modo variam a posição. Quando a massa é retirada em torno dos 24s a mudança em todos os modos é identificada.

Figura 4.21: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Em seguida, a massa é localizada na mesma extremidade da placa onde está localizado o excitador, como mostra a Figura 4.22.

Figura 4.22: Massa posicionada na mesma extremidade onde está localizado o excitador.

Inicialmente são apresentados os resultados obtidos com o tempo de aquisição de 0,8s. Neste caso há muita variação do sinal, mas quando a massa é retirada ocorre a variação na identificação e depois dos 33s as frequências tendem a se estabilizar, como pode-se observar através da Figura 4.23 (a). A Figura 4.23 (b) apresenta os fatores de amortecimento correspondentes a estas frequências naturais identificadas. As Figuras 4.24 (a) e (b) apresentam os resultados obtidos considerando o tempo de aquisição e identificação de 3,0s. Neste caso também há variação nos modos, mas esta variação é menor do que no caso anterior. Todos os modos alteram de valor quando a massa é retirada.

Figura 4.23: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.24: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Além da massa de 212,42gr, posicionada como na Figura 4.7, foi acrescentada uma outra massa de 250,05gr para que o valor das frequências naturais sofresse uma alteração maior. Esta massa foi adicionada na extremidade próxima ao excitador, como pode-se observar na Figura 4.25 e somente esta massa foi retirada durante a realização do ensaio experimental. Através da Figura 4.26 pode-se observar o EPM da estrutura com as duas massas adicionadas, cujos valores são apresentados na Tabela 4.12, que também apresenta os valores identificados em tempo real que foram obtidos conforme Figura 4.27 (a).

Figura 4.25: Localização das duas massas acrescentadas na placa de alumínio para a realização dos ensaios.

Figura 4.26: Espectro de Potência Médio (EPM) com as duas massas adicionadas à placa.

Tabela 4.12: Valores das frequências naturais (Hz) identificadas através das FRFs e pelo EERA em tempo real considerando as duas massas extras adicionadas à estrutura.

ω_{nd} obtida através das FRFs	ω_{nd} obtida pelo EERA em tempo real
13,75	13,55
31,84	31,90
108,12	107,70
119,06	119,20
155,53	155,50

Figura 4.27: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 0,8s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Observa-se na Figura 4.27 (a) que durante o processo de identificação há uma variação na ordem em que os modos são identificados, o que provavelmente deva-se ao ruído gerado entre

as massas e a estrutura. Após a retirada da massa de maior peso em torno de 24s, a mudança no valor dos modos foi identificada, com exceção do primeiro modo cuja variação no sinal somente será identificada 1.6s depois, ou seja, após dois passos no processo de aquisição e identificação. Na Figura 4.27 (b) estão os fatores de amortecimento dos modos identificados nas condições citadas anteriormente.

As Figuras 4.28 (a) e (b) apresentam os resultados obtidos considerando o tempo de aquisição e identificação de 3,0s. A variação, neste caso, é menor do que no caso anterior, o primeiro modo só é identificado no passo seguinte à retirada da massa e o segundo modo fica um passo sem ser identificado após a retirada da massa.

Figura 4.28: Parâmetros modais identificados em tempo real no tempo de 3,0s: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

A posição dos acelerômetros e da massa foi alterada conforme apresenta a Figura 4.29. Neste caso os valores das frequências naturais tiveram uma variação maior como pode ser constatado na Figura 4.30 e na Tabela 4.13.

Figura 4.29: Posição alterada dos acelerômetros e da massa.

Figura 4.30: Espectro de Potência Médio (EPM) obtido da placa de alumínio com a mudança na posição dos acelerômetros e da massa.

Tabela 4.13: Valores das frequências naturais identificadas através das FRFs obtidas da placa de alumínio com a mudança na posição dos acelerômetros e da massa.

$\omega_{nd}(Hz)$ obtida através das FRFs
15,63
37,50
112,50
132,82
158,44

Esta variação também pode ser observada nas Figuras 4.31 (a) e (b), que foram identificadas a cada 0,8s e a cada 3,0s, respectivamente. Em seguida, são apresentados nas Figuras 4.32 (a) e

(b) os fatores de amortecimento identificados para cada um destes tempos e que correspondem, respectivamente, as frequências naturais obtidas anteriormente.

Figura 4.31: Frequências naturais identificadas em tempo real no tempo de: (a) 0,8s; (b) 3,0s.

Figura 4.32: Fatores de amortecimento identificados em tempo real no tempo de: (a) 0,8s; (b) 3,0s.

Durante a realização dos ensaios mencionados anteriormente a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema foram fixadas. Agora são apresentados os resultados obtidos considerando a variação destes parâmetros. A posição da massa e dos acelerômetros são as mesmas consideradas nos ensaios iniciais, conforme a Figura 4.7. Estes ensaios realizados durante 60s, foram divididos conforme a Tabela 4.14, onde em cada intervalo de tempo alterou-se a dimensão das matrizes de Hankel e da ordem do sistema. Primeiramente é considerado o

tempo de processamento de 0,8s e a massa adicionada à estrutura. As Figuras 4.33 (a) e (b) apresentam estes resultados.

Tabela 4.14: Variação dos parâmetros envolvidos no processo de identificação.

Tempo(s)	Dimensão das matrizes de Hankel - M	Ordem do sistema - $2n$
0 a 10	100	25
10 a 20	95	25
20 a 30	95	22
30 a 40	91	22
40 a 60	91	18

Figura 4.33: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s com a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Neste caso até os 40s há muita variação na identificação e alguns modos indesejados são identificados. O segundo modo após passados os dez primeiros segundos é identificado e o primeiro modo somente depois dos 40s.

Nas mesmas condições anteriores, porém, considerando a estrutura sem a massa adicional, os resultados são apresentados nas Figuras 4.34 (a) e (b). Neste caso pode-se observar uma melhora na identificação se comparado com o caso anterior, entretanto somente após os 40s é que a identificação estabiliza.

Figura 4.34: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s sem a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Considerando a Tabela 4.14 e o intervalo de aquisição e identificação de 3,0s, tem-se os seguintes resultados primeiramente considerando a massa adicionada à estrutura, conforme está apresentado nas Figuras 4.35 (a) e (b), e posteriormente sem a massa adicionada à estrutura, conforme as Figuras 4.36 (a) e (b).

Figura 4.35: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s com a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.36: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s sem a massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Em todos os casos pode-se observar que a tendência na identificação dos modos é estabilizar após os 40s.

Um outro teste foi realizado para tentar diminuir o valor das dimensões das matrizes de Hankel e da ordem do sistema, para verificar como o sistema reagiria no processo da identificação. Os testes foram realizados com e sem a massa adicionada à estrutura e considerando os tempos de 0,8s e de 3,0s. O tempo de aquisição foi de 60s dividido em intervalos menores, conforme a Tabela 4.15, para vários parâmetros de M e $2n$. As Figuras 4.37 (a) e (b) apresentam estes resultados.

Tabela 4.15: Variação dos parâmetros envolvidos no processo de identificação.

Tempo(s)	Dimensão das matrizes de Hankel - M	Ordem do sistema - $2n$
0-10	91	18
10-20	85	18
20-30	85	15
30-40	70	15
40-50	50	15
50-60	50	10

É possível observar que até 50s tem-se uma boa identificação dos cinco modos analisados neste trabalho, e após este tempo há uma pequena piora na identificação, porém os modos

continuam sendo identificados. Isso deve-se ao fato da dimensão das matrizes de Hankel e a ordem o sistema $2n$ serem impróprias para realizar a identificação de forma satisfatória.

Figura 4.37: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s com massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Sem a massa adicionada à estrutura e considerando as mesmas condições anteriores, resultados obtidos são apresentados através das Figuras 4.38 (a) e (b). Novamente neste caso até 50s, a identificação apresentou bons resultados.

Figura 4.38: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 0,8s sem massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Considerando todas as variações obtidas entre a dimensão das matrizes de Hankel e da

ordem do sistema para o caso do tempo de processamento de 3,0s, tem-se os seguintes resultados primeiramente considerando a massa adicionada à estrutura, conforme está apresentado nas Figuras 4.39 (a) e (b), e posteriormente sem a massa adicionada a estrutura, conforme as Figuras 4.40 (a) e (b). E analogamente ao caso em que o tempo de aquisição e identificação foi de 0,8s, até 50s os modos foram todos identificados, tanto para os casos da massa adicionada à estrutura e sem a adição da massa.

Figura 4.39: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s com massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Figura 4.40: Parâmetros modais identificados em tempo real variando a dimensão das matrizes de Hankel e a ordem do sistema no tempo de 3,0s sem massa adicionada: (a) Frequências naturais; (b) Fatores de amortecimento.

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre o Algoritmo de Realização de Sistemas Estendido - EERA para identificação dos parâmetros modais em tempo real de sistemas dinâmicos.

A implementação e verificação do algoritmo proposto foram efetuadas através de dois ensaios experimentais realizados "off-line", sendo um dos ensaios realizados no túnel de vento com o modelo de uma asa para determinar os parâmetros modais envolvidos no *flutter* e o segundo ensaio para identificar os parâmetros modais de uma placa de alumínio.

Esta mesma placa foi utilizada num terceiro ensaio experimental para testar a viabilidade do algoritmo na identificação em tempo real dos seus parâmetros modais utilizando o equipamento dSPACE®.

Desta forma, considera-se como conclusões deste trabalho:

- No ensaio experimental realizado no túnel de vento com a asa acoplada ao dispositivo flexível, a identificação dos parâmetros modais do *flutter* apresentou certas dificuldades, principalmente nos dados experimentais obtidos durante os ensaios. Os dados medidos no tempo apresentaram uma quantidade considerável de ruído dificultando o processo de identificação, devido à influência do fluxo do ar no túnel de vento. Porém,

apesar da dificuldade na identificação, considerando os resultados obtidos dentro da faixa de frequências e amortecimentos analisados, pode-se considerar que os resultados obtidos foram satisfatórios. Esta verificação também pode ser comprovada através dos gráficos obtidos, onde a tendência das curvas das frequências de flexão e torção é o acoplamento com o aumento do fluxo no túnel. No caso da curva do amortecimento do modo de flexão, a tendência é o amortecimento mudar de sinal na velocidade de *flutter*, como seria de esperar;

- Ainda no ensaio experimental realizado no túnel de vento, algumas dificuldades ocorreram na identificação dos amortecimentos referentes ao modo de flexão. Mas, como pode-se verificar nos resultados, este não é um modo muito importante, e conseqüentemente, não é bem definido como modo de influência na ocorrência do *flutter* como o modo de torção;
- No ensaio experimental realizado na placa de alumínio, os resultados obtidos apresentaram boa coerência na comparação com as respostas em frequência medidas e identificadas. As frequências naturais obtidas sem a adição da massa, foram comparadas com as frequências obtidas por Tsunaki (1999), mostrando que os resultados revelaram-se coerentes e satisfatórios. Para o caso da placa com a massa adicionada os resultados também mostraram-se satisfatórios, porém estes foram comparados com as frequências medidas durante os ensaios;
- Na verificação da implementação do algoritmo EERA no sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE[®], os dados obtidos através do ensaio experimental na placa de alumínio foram utilizados no equipamento dSPACE[®] onde os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos no MATLAB[®] e no SIMULINK[®].
- No ensaio experimental realizado em tempo real foram obtidos bons resultados em relação as frequências naturais, onde pode-se observar a eficiência do método em identificar as mudanças ocorridas na estrutura assim que a sua massa era alterada. Entretanto, a

identificação em tempo real dos fatores de amortecimento da placa de alumínio, torna-se mais complicada, pois no caso desta estrutura fica difícil prever qual a variação que irá ocorrer no amortecimento quando a sua massa é alterada e também prever como deve ser esta variação. Como o amortecimento da placa é muito baixo, isso dificulta ainda mais observar qualquer variação.

- Os ensaios experimentais em tempo real, foram realizados com o tempo de aquisição e identificação de 0,8s e 3,0s. Em ambos os casos pode-se observar que o algoritmo foi capaz de verificar a variação das frequências naturais quando estas sofriam alguma alteração. No caso do tempo ser de 0,8s, em alguns casos, a identificação da variação de alguns modos era um pouco mais demorada, devido a falta de informação que os dados obtidos tinham e desta forma a identificação ficava um pouco prejudicada. Entretanto para o caso do tempo de 3,0s, os resultados eram mais precisos, pois como o tempo de aquisição era maior, o algoritmo ao efetuar a identificação continha mais informações.
- Considerando os resultados obtidos com a variação do número de acelerômetros, pode-se observar que a localização e um número mínimo de saídas (no caso acelerações medidas por acelerômetros) é fundamental.

Como seqüência deste trabalho, pode-se sugerir:

- Realizar a identificação em tempo real dos parâmetros envolvidos no *flutter* num ensaio experimental no túnel de vento deste laboratório utilizando a asa rígida acoplada ao dispositivo flexível e comparar com os resultados obtidos no ensaio experimental “off-line” apresentado neste trabalho.
- Tentar associar este algoritmo de identificação de sistemas a uma lei de controle. Isso seria útil para realizar ensaios de *flutter*, onde o algoritmo seria utilizado para realizar a identificação em tempo real e o controlador iria agir de forma rápida e segura para suprir o *flutter*.

- Analisar dados obtidos em ensaios em voo em uma aeronave a fim de determinar os parâmetros envolvidos no *flutter*.
- O método EERA utilizado no processo de identificação em tempo real mostrou-se satisfatório, entretanto seria interessante a aplicação da decomposição URV neste algoritmo para verificar se o tempo de identificação diminuiria. Além disso, estudar outros métodos para serem aplicados na identificação em tempo real.
- Aplicar índices de confiança para eliminar modos computacionais e desta forma qualificar os resultados.

Bibliografia

- ADAMS, G.; GRIFFIN, M. F.; STEWART, G. W. Direction-of-arrival estimation using the rank-revealing urv decomposition. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Washington, DC: [s.n.], 1991.
- AGUIRRE, L. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2000.
- ALLEN, D. H.; HAISLER, W. E. *Introduction to aerospace structural analysis*. [S.l.]: John Wiley, 1985.
- ASHLEY, H. Flutter supression within reach. *Aeroespace America*, v. 28, p. 14–16, 1988.
- BALTHAZAR, J. M. *Sobre teoria de vibrações mecânicas não lineares: aspectos geométricos de movimentos regulares e irregulares*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1993.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. *Principles of Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover - New York, 2002.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover - New York, 1996.
- COOPER, J. E. On-line version of the eigensystem realization algorithm using data correlations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 20, n. 1, p. 137–142, 1997.
- COOPER, J. E.; CROWTHER, W. J. Flutter speed prediction during flight flutter testing using neural networks. *CEAS/AIAA/ICASE/NASA Langley International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, p. 255–2644, 1999.
- DE MARQUI JR., C. *Estudo teórico e experimental de um controlador para supressão de flutter*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2004.
- DE MARQUI JR., C.; BELO, E. M.; TSUNAKI, R. H.; MARQUES, F. D.; REBOLHO, D. C. Design and tests of an experimental flutter mount system. *IMAC XXII*, Dearborn, MI, Estados Unidos, 2004.
- DE MARQUI JR., C.; SOUZA, L. F. R.; REBOLHO, D. C.; BELO, E. M.; MARQUES, F. D. Previsão da velocidade de flutter utilizando redes neurais. *Congresso de Engenharia Mecânica-CONEM*, 2004.

- DE MOOR, B.; OVERSCHEE, P. V.; FAVOREEL, W. *Numerical algorithms for subspace state space system identification - An overview*. [S.l.]: Birkhauser Book Series on Applied and Computational Control, Signals and Circuits, 1999. 274-311 p.
- EWINS, D. J. *Modal testing: theory and practice*. [S.l.]: John-Wiley & Sons Ltd., 1984.
- EYKHOFF, P. *System identification : parameter and state estimation*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1974.
- FAVOREEL, W. *Subspace Methods for Identification and Control of Linear and Bilinear Systems*. 186 p. Tese (Doutorado) — Faculteit Der Toegepaste Wetenschappen Department Elektrotechniek, Katholieke Universiteit Leuven, 1999.
- FAVOREEL, W.; HUFFEL, S. V.; DE MOOR, B.; SIMA, V.; VERHAEGEN, M. Comparative study between three subspace identification algorithms. *Proceedings of the 5th European Control Conference*, v. 18, n. 11, p. 6, 1999.
- FÖRSHING, H. Aeroelastic problems in aircraft desing. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture series 08: A Survey of Aeroelastic Problems*, 1979.
- FUNG, Y. C. *The theory of aeroelasticity*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1955.
- FURUTA, K.; SANO, A.; ATHERTON, D. *State variable methods in automatic control*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- GARRICK, I.; REED, W. H. Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, v. 18, n. 11, p. 897–912, 1981.
- HEYLENN, W.; LAMMERN, S.; SAS, P. *Modal analysis theory and testing*. [S.l.: s.n.], 2000.
- JOHNSON, J. D.; LU, J.; DHAWAN, A. P.; LIND, R. Real-time identification of flutter boundaries using the discrete wavelet transform. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 25, n. 2, p. 334–339, 2002.
- JUANG, J. *Applied system identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.
- JUANG, J.; PAPPA, R. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985.
- JUANG, J. N. Mathematical correlation of mode-al-parameter-identification methods via system-realization theory. *The International Journal of Analytical and Experimental modal analysis*, v. 2, n. 1, p. 1–18, 1987.
- KEHOE, M. W. A historical overview of flight flutter testing. *NASA Technical Memorandum*, n. 4720, p. 19, 1995.
- LANDAU, I. D. *System identification and control design*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1990.
- LEE, B. H. K.; WONG, Y. S. Neural network parameter extraction with application to flutter signal. *Journal of Aircraft*, v. 35, n. 1, p. 165–168, 1997.

- LIBARDI, A. L. *Técnicas de cancelamento de massa em análise modal experimental*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2000.
- LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1987.
- LOFRANO, M. *Técnicas para estimativa de FRFs angulares em análise modal experimental com aplicações a estruturas do tipo viga*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2003.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. *Theoretical and experimental modal analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1997.
- MAINE, R. E.; ILIFF, K. W. *Identification of dynamic systems: theory and formulation*. [S.l.], 1985.
- MAMEDE, W. F. *Estudo e aperfeiçoamento de técnicas experimentais para análise modal vibroacústica em baixas frequências*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2003.
- MCKELVEY, T. *Identification of state-space models from time and frequency data*. 233 p. Tese (Doutorado) — Department of Electrical Engineering - Linköping University, Linköping, Sweden, 1995.
- MEIROVITCH, L. *Dynamics and control of structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1990.
- MUCHERONI, M. F. *Método da superposição para a análise de vibrações livres de placas retangulares*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1989.
- OLIVEIRA, L. P. R. *Interação entre os excitadores de vibração e a estrutura sob estudo em ensaios com múltipla excitação*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2003.
- OVERSCHEE, P. V.; DE MOOR, B. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, v. 30, n. 1, p. 75–93, 1994.
- OVERSCHEE, P. V.; DE MOOR, B. *Subspace identification of linear systems: theory-implementation-applications*. [S.l.]: Klumer Academic Publishers, 1996.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4sid: Numerical algorithms for state space subspace system. *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, p. 361–364, 1993.
- PAPPA, R. S.; SCHENK, A.; NOLL, C. Eigensystem realization system modal identification experiences with mini-mast. *NASA Technical Memorandum - 4307*, 1991.
- PARLETT, B. N.; REINSCH, C. Balancing a matrix for calculation of eigenvalues and eigenvectors. In: *Handbook for Automatic Computation-Algebra Linear*. [S.l.]: Springer, 1971.
- PAZIANI, F. T. *Identificação de parâmetros modais no domínio do tempo: método IDT*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2002.

PICKREL, C. R.; WHITE, P. J. Flight flutter testing of transport aircraft: In-flight modal analysis. In: *Proceedings of IMAC-XXI*. [S.l.]: CD-Rom, 2003.

PORCHIA, L. F. *Identificação de sistemas dinâmicos no domínio da frequência: análise comparativa de alguns métodos*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1996.

PRESS, W.; TEUKOLSKY, S. A.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in C: The art of scientific computing*. [S.l.]: Cambridge University, 1989.

SANTOS, M. A. *Identificação indireta de esforços dinâmicos: métodos no domínio do tempo e da frequência*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2001.

SCZIBOR, V. *Identificação modal de uma estrutura aeronáutica via algoritmo de realização de sistemas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2002.

SELEGHIM JR., P. *Análise dinâmica de uma placa cantilever pelo método da superposição*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1990.

SHIMANO, A. C. *Análise das propriedades geométricas e mecânicas de tíbia humana: proposta de metodologia*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1994.

STEWART, G. W. An updating algorithm for subspace tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 6, p. 1535–1541, 1992.

STEWART, M.; DOOREN, P. V. An updating algorithm for on-line mimo system identification. In: *SVD in Signal Processing III, Algorithms and Applications*. [S.l.]: Elsevier, 1995.

STEWART, M.; DOOREN, P. V. Updating a generalized urv decomposition. *SIAM Journals*, v. 22, n. 2, p. 479–499, 2000.

TANEGUTI, L. Y. *Análise de desempenho do método de identificação ITD*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1997.

TASKER, F.; BOSSE, A.; FISHER, S. Real time modal parameter estimation using subspace methods: Theory. *Mechanical systems and Signal Processing*, v. 12, n. 6, p. 797–808, 1998.

TITA, V. *Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1999.

TORII, H.; MATSUZAKI, Y. Flutter margin evaluation for discrete-time systems. *Journal of Aircraft*, n. 1, p. 42–47, 2001.

TSUNAKI, R. H. *Determinação de modos normais lineares e não lineares no espaço de fase*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1994.

TSUNAKI, R. H. *Identificação Automatizada de Modelos Dinâmicos nos Espaço de Estado*. 143 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1999.

UHL, T. Real-time modal analysis and its application for flutter testing. *Proceedings of ISMA - International Conference on Noise & Vibration Engineering*, p. 1291–1298, 2002.

UHL, T.; BOGACZ, M.; KLEPKA, A. Real time modal damping identification - airplane case study. *2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, 2004.

VAROTO, P. S. *Análise modal no domínio da frequência : um método de identificação multi-modos*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1991.

VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification: Part 1. the output-error state-space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, v. 56, n. 5, p. 1187:1210, 1992.

VIBERG, M. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, v. 31, n. 12, p. 1835–1851, 1995.

WATKINS, D. *Fundamental of Matrix Computations*. [S.l.]: Wiley, 1991.

WRIGHT, J. R. Flight flutter testing. In: *Lecture Series on von Karman Institute for Fluid Dynamics. Introduction to flutter of winged aircraft*. [S.l.: s.n.], 1991.

Implementação no MATLAB/SIMULINK®

Neste Apêndice é apresentada a implementação do algoritmo EERA no ambiente MATLAB/SIMULINK® necessária para realizar a identificação em tempo real utilizando o sistema de aquisição e processamento de sinais dSPACE® (DS1005). O algoritmo foi implementado no Simulink®, versão 6.0, do MATLAB®, versão 7.0.

A Figura A.1 apresenta o principal diagrama contendo os blocos necessários para realizar a identificação em tempo real. Nesta Figura é possível observar o bloco *Function-Call Subsystem 1*, que contém o algoritmo EERA programado na linguagem C++ no bloco *S-Function Builder* que é apresentado na Figura A.2.

Foi utilizado este bloco *S-Function Builder* do SIMULINK®, pois os demais blocos do MATLAB/SIMULINK® que efetuavam este cálculo apresentavam problemas na compilação utilizando o pacote RTW (*Real Time Workshop*).

Na programação com o código C++, para calcular os autovalores da matriz de estado $[A_d]$ foi aplicado o algoritmo QR. Porém, antes de aplicá-lo na matriz, torna-se necessário realizar algumas modificações nesta matriz a fim de torná-la apta para aplicar o algoritmo QR de tal forma que os autovalores sejam preservados. Para isso foi preciso balancear a matriz e deixá-la na forma de Hessenberg superior.

Figura A.1: Diagrama de blocos do Simulink®.

Figura A.2: Sub-sistema *Function-Call Subsystem 1* apresentado na Figura A.1.

A.1 Balanceamento

A sensibilidade dos autovalores para erros de arredondamento durante a execução da maioria dos algoritmos, pode ser reduzida pelo procedimento de “balanceamento”.

Segundo Parlett e Reinsch (1971) uma matriz $[A]_{n \times n}$ é balanceada em $\|\cdot\|_p$ se $\|a_i\|_p = \|a^i\|_p$, onde a_i e a^i denotam respectivamente a i -ésima coluna e a i -ésima linha de $[A]$, $i = 1, \dots, n$. Tem-se que $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n \|\zeta_i\|^p)^{1/p}$, onde $1 \leq p < \infty$ e $x = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T$.

Além disso, neste procedimento é calculada uma matriz de transformação $[T]$ tal que $[B] = [T]^{-1}[A][T]$, onde $[A]$ é a matriz original e $[B]$ é a matriz balanceada. A matriz $[T]$ é diagonal e seus elementos são potências de 2. Na matriz $[B]$ é preservada a diagonal da matriz original $[A]$ e também os seus autovalores.

O procedimento de balancear uma matriz aumenta a velocidade e a precisão com que os seus autovalores são calculados. Toda matriz simétrica já é balanceada, sendo recomendado realizar-se o balanceamento em matrizes não-simétricas.

A.2 Hessenberg

Após o balanceamento, a fim de calcular os autovalores, torna-se necessário deixar a matriz numa forma adequada para aplicar o algoritmo QR. Esta forma adequada é a forma de Hessenberg superior.

Uma matriz $[A] = [a_{ij}]$ é chamada de matriz Hessenberg superior se $a_{ij} = 0$ quando $i > j + 1$, tendo a forma

$$[A] = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A matriz nesta forma de Hessenberg superior preserva os autovalores da matriz original.

A.3 Algoritmo QR

Após estes procedimentos de balancear a matriz e deixá-la na forma de Hessenberg superior, é possível aplicar um método para calcular os seus autovalores. O método aplicado é o algoritmo QR, que é utilizado para determinar os autovalores de uma matriz real não simétrica.

O problema do alto custo computacional das iterações QR é reduzido se a matriz estiver na forma de Hessenberg superior. O algoritmo QR preserva esta forma.

Seja a matriz $[A] \in \mathbb{R}$ cujos autovalores devem ser determinados. O algoritmo QR basicamente pode ser descrito pela seguinte forma:

Consideremos $[A_0] = [A]$ e seja gerada uma sequência de matrizes $[A_j]$ dadas pelas seguintes expressões:

$$[A_{m-1}] = [Q_m][R_m] \quad (\text{A.2})$$

$$[R_m][Q_m] = [A_m]. \quad (\text{A.3})$$

Isto é, a matriz $[A_{m-1}]$ é decomposta em fatores $[Q_m]$ e $[R_m]$, onde $[Q_m]$ é uma matriz ortogonal e $[R_m]$ é uma matriz triangular superior.

Pré-multiplicando a equação (A.2) por $[Q_m]^T$ e pós-multiplicando por $[Q_m]$ e utilizando a equação (A.3), obtem-se:

$$[A_m] = [Q_m]^T [A_{m-1}] [Q_m]. \quad (\text{A.4})$$

Maiores detalhes sobre estes métodos e suas implementações podem ser verificadas em Press, Teukolsky e Flannery (1989).

Código Fonte do Algoritmo EERA

A seguir, encontra-se o código fonte parcial da implementação do algoritmo EERA no bloco *S-Function Builder* do MATLAB/SIMULINK[®], utilizando linguagem C⁺⁺. As implementações de algumas funções extraídas do Press, Teukolsky e Flannery (1989), não foram incluídas. A Figura B.1 apresenta o bloco *S-Function Builder*.

Figura B.1: Bloco S-Function Builder

```

/*
* Inputs and outputs
*/
#define u_width 274 – comprimento dos vetores de entrada do bloco S-Function Builder
#define y_width 10 – comprimento do vetor de saída do bloco S-Function Builder

/*
* Output functions
*/
void principal_experimental_Outputs_wrapper(
    const real_T *u,      // u – célula de carga
    const real_T *u1,     // u1 – acelerômetro 1
    const real_T *u2,     // u2 – acelerômetro 2
    const real_T *u3,     // u3 – acelerômetro 3
    const real_T *u4,     // u4 – acelerômetro 4
    const real_T *u5,     // u5 – M
    const real_T *u6,     // u6 – 2n
    real_T *y)            // saída – parâmetros modais identificados

/*
* Libraries
*/
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include <math.h>
#define NR_END 1
#define TINY 1.0e-20
#define FREE_ARG char*
#define RADIX 2.0
#define SWAP(g,h) {y=(g);(g)=(h);(h)=y;}
#define tam 150
#define vet 50

/*
* External Function Declarations
*/
static float maxarg1,maxarg2;
#define FMAX(a,b) (maxarg1=(a),maxarg2=(b),(maxarg1) > (maxarg2) ?\
(maxarg1) : (maxarg2))
static int iminarg1,iminarg2;
#define IMIN(a,b) (iminarg1=(a),iminarg2=(b),(iminarg1) < (iminarg2) ?\
(iminarg1) : (iminarg2))
#define SIGN(a,b) ((b) >= 0.0 ? fabs(a) : -fabs(a))
static float sqrarg;
#define SQR(a) ((sqrarg=(a)) == 0.0 ? 0.0 : sqrarg*sqrarg)
static int imaxarg1,imaxarg2;

```

```

#define IMAX(a,b) (imaxarg1=(a),imaxarg2=(b),(imaxarg1) > (imaxarg2) ?\
(imaxarg1) : (imaxarg2))
void free_vector(float *v, long nl, long nh)
/* free a float vector allocated with vector() */
{
free((FREE_ARG) (v+nl-NR_END));
}
float *vector(long nl, long nh)
/* allocate a float vector with subscript range v[nl..nh] */
{
float *v;
v=(float *)malloc((size_t) ((nh-nl+1+NR_END)*sizeof(float)));
//if (!v) nrerror("allocation failure in vector()");
return v-nl+NR_END;
}
float pythag(float a, float b)
//Computes (a2 + b2)1/2 without destructive under.ow or over.ow.
{
float absa,absb;
absa=fabs(a);
absb=fabs(b);
if (absa > absb) return absa*sqrt(1.0+SQR(absb/absa));
else return (absb == 0.0 ? 0.0 : absb*sqrt(1.0+SQR(absa/absb)));
}

```

// As próximas cinco funções abaixo, para matrizes, foram extraídas de Press, Teukolsky e Flannery (1989):

% Função inversa:

```
void ludcmp(float a[tam+1][tam+1], int n, int *indx, float *d)
```

% Função SVD:

```
void svdcmp(float a[4*tam+1][2*tam+1], int m, int n, float w[2*tam+1], float
v[2*tam+1][2*tam+1])
```

% Função Balancing:

```
void balanc(float a[vet+1][vet+1], int n)
```

% Função Hessenberg:

```
void elmhes(float a[vet+1][vet+1], int n)
```

% Função QR:

```
void hqr(float a[vet+1][vet+1], int n, float wr[vet+1], float wi[2*tam+1])
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Programa Principal                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
float yu[12*tam+1];
float yy[tam+1][3*tam+1];
float uu[tam+1];
float U[2*tam+1][2*tam+1];
float Y[4*tam+1][2*tam+1];
float Ys[4*tam+1][2*tam+1];
float I[2*tam+1][2*tam+1];
float Ut[2*tam+1][tam+1], UUt[tam+1][tam+1],
Inv[tam+1][4*tam+1], UtInv[4*tam+1][2*tam+1], UtInvU[2*tam+1][2*tam+1];
float w[2*tam+1];
float SRPR[vet+1][4*tam+1];
float Ad[vet+1][vet+1];
float E[vet+1], dr[vet+1];
float wn[vet+1], fatamor[vet+1];
float d, pi, dt;
```

```
int indx[tam];
int m, n, r, fm, M, NN, aux, k, N, dd, dddd;
int t, h, i, j;
```

```
r=1;           // número de entradas
m=4;           // número de saídas
n=274;         // número de pontos no vetor de entrada e saída
```

```
// Resolução Temporal
```

```
dt=0.001;
```

```
// Maior frequência em Hertz
```

```
fm = 200;
```

```
// Elementos da dimensão das matrizes de Hankel
```

```
M=u5[0];
```

```
NN=2*u5[0];
```

```
t=u6[0];
```

```
pi=3.14159265358979;
```

// Vetor com os valores da entrada (u) - uu

```
for(i=0;i<n; i++)
{
    uu[i+1]=u[i];
}
```

// Vetor com os valores de cada saída (u1,u2,u3,u4) - yu

```
for(i=0;i<n; i++)
{
    yu[i]=u1[i];
}
for(i=0;i<n; i++)
{
    yu[i+n]=u2[i];
}
for(i=0;i<n; i++)
{
    yu[i+2*n]=u3[i];
}
for(i=0;i<n; i++)
{
    yu[i+3*n]=u4[i];
}
```

// Matriz com os valores da saída (y) - yy

```
for(i=0; i < m; i++) //5
{
    for(j=0; j < n; j++)
    {
        yy[i+1][j+1]=yu[j+i*n];
    }
}
```

// Matriz Hankel de entrada - U

```
aux=0;
for(i=1; i<(r*M+1); ++i)
{
    for(j=1; j<(NN+1); ++j)
    {
        U[i][j]=uu[j+aux];
    }
    aux=1+aux;
}
```



```
// Matriz Hankel de saída - Y
```

```
for (k = 0 ; k < M ; ++k)
{
    for (i = 1 ; i < (m+1) ; ++i)
    {
        for (j = 1 ; j < (NN+1) ; ++j)
        {
            Y[i+k*m][j]=yy[i][j+k];
        }
    }
}
```

```
// Matriz Hankel de saída – Ys
```

```
for (k = 0 ; k < M ; ++k)
{
    for (i = 1 ; i < (m+1) ; ++i) // m+2
    {
        for (j = 1 ; j < (NN+1) ; ++j)
        {
            Ys[i+k*m][j]=yy[i][j+k+1];
        }
    }
}
```

```
// Definindo U ortogonal
```

```
// Matriz identidade - I
```

```
for(i=1; i<(NN+1); ++i)
{
    for(j=1; j<(NN+1); ++j)
    {
        if(i!=j)
        {
            I[i][j]= 0;
        }
        else
        {
            I[i][j]=1;
        }
    }
}
```

// Transposta de U - U^T

```
for (i=1;i<(NN+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(r*M+1);++j)
    {
        Ut[i][j]=U[j][i];
    }
}
```

// Multiplicação de matrizes - UU^T

```
for (i=1;i<(r*M+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(r*M+1);++j)
    {
        UUt[i][j]=0;
    }
}
for(i=1;i<(r*M+1);++i)
{
    for(j=1;j<(r*M+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(NN+1);++k)
        {
            UUt[i][j]=UUt[i][j]+U[i][k]*Ut[k][j];
        }
    }
}
```

// Inversa - $(UU^T)^{-1}$

```
ludcmp(UUt,r*M,indx,&d); // - Programa para gerar a inversa!
for(j=1;j<=(r*M);j++)
{
    for(i=1;i<=(r*M);i++)
    {
        uu[i]=0.0;
    }
    uu[j]=(1.0);
    lubksb(UUt,(r*M),indx,uu);
    for(i=1;i<=(r*M);i++)
    {
        Inv[i][j]=uu[i]; // inversa da matriz  $U*U^T$ 
    }
}
```

// Multiplicação de matrizes – $U^T(UU^T)^{-1}$

```
for (i=1;i<(NN+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(r*M+1);++j)
    {
        UtInv[i][j]=0;
    }
}
for(i=1;i<(NN+1);++i)
{
    for(j=1;j<(r*M+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(r*M+1);++k)
        {
            UtInv[i][j]=UtInv[i][j]+Ut[i][k]*Inv[k][j];
        }
    }
}
```

// Multiplicação de matrizes – $U^T(UU^T)^{-1}U$

```
for (i=1;i<(NN+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        UtInvU[i][j]=0;
    }
}
for(i=1;i<(NN+1);++i)
{
    for(j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(r*M+1);++k)
        {
            UtInvU[i][j]=UtInvU[i][j]+UtInv[i][k]*U[k][j];
        }
    }
}
```

// Obtendo U ortogonal - $U^\perp = I - U^T(UU^T)^{-1}U$

```
for(i=1;i<(NN+1);++i)
{
    for(j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        U[i][j]=I[i][j]-UtInvU[i][j];
    }
}
```

// Cálculo de $Y U^\perp$

```
for (i=1;i<(m*M+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        UtInv[i][j]=0;
    }
}
for(i=1;i<(m*M+1);++i)
{
    for(j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(NN+1);++k)
        {
            UtInv[i][j]=UtInv[i][j]+Y[i][k]*U[k][j];
        }
    }
}
```

// SVD - Decomposição em Valores Singulares de $Y U^\perp = R \Sigma S^T$

```
svdcmp(UtInv,m*M,NN,w,I); // - Programa para calcular SVD!
for(i=1;i<(NN+1);++i)
{
    for(j=1;j<(t+1);++j)
    {
        Ut[i][j]=I[i][j];
    }
}
for(i=1;i<(t+1);++i)
{
    for(j=1;j<(m*M+1);++j)
    {
        Inv[i][j]=UtInv[j][i];
    }
}
```

// Considerando $t=2n$ como o número de valores singulares relevantes e calculando A_d

```

for (i=1; i<(t+1); ++i)
{
    for (j=1; j<(t+1); ++j)
    {
        if (i==j)
        {
            UUt[i][j]=1/sqrt(w[j]);
        }
        else
        {
            UUt[i][j]=0;
        }
    }
}

```

// Multiplicação de matrizes – $(\Sigma_{2n})^{-1/2}R_{2n}$

```

for (i=1; i<(t+1); ++i)
{
    for (j=1; j<(m*M+1); ++j)
    {
        SRPR[i][j]=0;
    }
}
for(i=1; i<(t+1); ++i)
{
    for(j=1; j<(m*M+1); ++j)
    {
        for(k=1; k<(t+1); ++k)
        {
            SRPR[i][j]=SRPR[i][j]+UUt[i][k]*Inv[k][j];
        }
    }
}

```

// Multiplicação de matrizes - $(\Sigma_{2n})^{-1/2}R_{2n}Y_s$

```

for (i=1; i<(t+1); ++i)
{
    for (j=1; j<(NN+1); ++j)
    {
        UtInv[i][j]=0;
    }
}

```

```

for(i=1;i<(t+1);++i)
{
    for(j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(m*M+1);++k)
        {
            UtInv[i][j]=UtInv[i][j]+SRPR[i][k]*Ys[k][j];
        }
    }
}
for (i=1;i<(t+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        SRPR[i][j]=0;
    }
}

```

// Multiplicação de matrizes - $(\Sigma_{2n})^{-1/2}R_{2n}Y_sU^\perp$

```

for(i=1;i<(t+1);++i)
{
    for(j=1;j<(NN+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(NN+1);++k)
        {
            SRPR[i][j]=SRPR[i][j]+UtInv[i][k]*U[k][j];
        }
    }
}

```

// Multiplicação de matrizes - $(\Sigma_{2n})^{-1/2}R_{2n}Y_sU^\perp S_{2n}$

```

for (i=1;i<(t+1); ++i)
{
    for (j=1;j<(t+1);++j)
    {
        UtInv[i][j]=0;
        Ad[i][j]=0;
    }
}

```

```

for(i=1;i<(t+1);++i)
{
    for(j=1;j<(t+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(NN+1);++k)
        {
            UtInv[i][j]=UtInv[i][j]+SRPR[i][k]*Ut[k][j];
        }
    }
}

```

// Obtendo a matriz de estado – $A_d = (\Sigma_{2n})^{-1/2} 2(R_{2n})^T Y_s U^\perp S_{2n} (\Sigma_{2n})^{-1/2}$

```

for(i=1;i<(t+1);++i)
{
    for(j=1;j<(t+1);++j)
    {
        for(k=1;k<(t+1);++k)
        {
            Ad[i][j]=Ad[i][j]+UtInv[i][k]*UUt[k][j];
        }
    }
}

```

// Obtendo os autovalores de A_d

// Balancing - Balanceando a matriz A_d

balanc(Ad,t); - Programa para calcular Balancing!

// Hessenberg - Obtendo a matriz de Hessenberg da matriz A_d

elmhes(Ad,t); - Programa para calcular matriz de Hessenberg!

// QR - Aplicando o algoritmo QR para calcular os autovalores da matriz A_d

hqr(Ad,t, uu, w); - Programa para calcular QR!

// Para calcular as frequências naturais e fatores de amortecimento

dddd=0;

```

for (dd=1;dd<=t;dd++)
{
    if (w[dd] <= 0)      // elimina os autovalores indesejados
    {
        uu[dd]=0;
        w[dd]=0;
    }
    if (uu[dd])
    {

// Cálculo do ln de um número

        complexo (ln(z)=ln(rr)+teta.i, onde z=a+bi, rr=sqrt(a^2+b^2),
        teta=arccos(x/rr))
        wn[dd]=SQR(uu[dd])+SQR(w[dd]);
        E[dd]=sqrt(wn[dd]);
        fatamor[dd]=acos(uu[dd]/E[dd]);
        dr[dd]=log(E[dd]);
        w[dd]=fatamor[dd];

// Calculando os autovalores em tempo continuo

        uu[dd]=dr[dd]/(dt*2*pi);
        E[dd]=w[dd]/(dt*2*pi);

// Cálculo das frequências naturais

        wn[dd]=sqrt(SQR(uu[dd])+SQR(E[dd]));

// Eliminando as frequências indesejadas (wn = 0-modos de corpo rígido)

        if (wn[dd] < (0.08*fm)) // wn < 8% do limite superior da faixa
        {
            wn[dd]=0;
        }
        if (wn[dd] >= (0.92*fm)) // wn > 92% do limite superior da faixa
        {
            wn[dd]=0;
        }

// Cálculo do fator de amortecimento

        if (wn[dd])
        {
            fatamor[dd]= -100*uu[dd]/(sqrt(SQR(uu[dd])+SQR(E[dd])));

```



```

// Eliminando os amortecimentos indesejados

        if (fatamor[dd] <= 0) // amortecimento <= 0%
        {
            fatamor[dd]= 0;
        }
        if (fatamor[dd] >= 5) // amortecimento >= 5%
        {
            fatamor[dd]= 0;
        }
    }

h=10; // tamanho da matriz y

if (wn[dd])
{
    if(fatamor[dd])
    {
        y[dddd]=wn[dd];
        y[dddd+h]=fatamor[dd];
        dddd=dddd+1;
    }
}
}
}

```