Elizangela Camilo

***Solução Numérica das Equações de Euler
para Representação do Escoamento
Transônico em Aerofólios.***

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

São Carlos

2003

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques pela orientação, paciência, amizade, incentivo e sobretudo pela dedicação com que se envolveu neste projeto tornando possível a realização deste trabalho.

Aos meus pais Antônio e Dulcenea que sempre me deram exemplos em conquistar seus sonhos com muita determinação, trabalho e honestidade. Às minhas irmãs Cláudia e Jacqueline e à minha tia Bia pelo incentivo e carinho.

Ao Prof. Dr. João Luiz Filgueiras de Azevedo pelas importantes contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Profs. Drs. Eduardo Belo, Marcello Medeiros e Paulo Greco pela ajuda e apoio.

A todos meus amigos do laboratório: Alexandre, Ana Paula, Carlos, Cláudio, Celso, Daniela, Édson, Gasparini, Guilherme, Luciane, Luis Fernando, Márcio, Naga, Roberto, Valdinei e Werner por todos os momentos que passamos juntos.

Aos meus amigos: Andréia, Érika, Fabiana, Gi, Juliana, Karina Butarelo, Karina Schiabel, Kelen, Lisandra, Luciana, Paulo, Rodrigo, Teodora, Vanessa e aos demais colegas da pós pelo carinho e ajuda em todos os momentos.

À Ana Paula e Bete que me ajudaram sempre que precisei.

Ao William Wolf pela geração de malhas e ao Rafael Cuenca pela ajuda.

À Dona Dirce e família, e à Flávia e família por receber eu e o Vítor com muito amor. Ao Valtemir e família pelo apoio e confiança.

Ao pessoal do Judô, Grupo Cativoiro Capoeira e Futsal Feminino do CAASO pelos momentos de descontração.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

CONTEÚDO

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Símbolos	vii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Aeroelasticidade Computacional	4
1.3 Modelagem Aeroelástica	4
1.4 Aerodinâmica Transônica	8
1.5 Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC)	9
1.6 Métodos DFC para Aerodinâmica Transônica	11
1.7 Objetivos do Trabalho	13
1.8 Organização da Dissertação	14
2 Equações para Escoamento Compressível não Viscoso Bidimensional	16
2.1 Introdução	16
2.2 As Equações de Euler	17
2.3 Propriedades Matemáticas das Equações de Euler	20

2.3.1	Classificação matemática das equações de Euler	21
2.3.2	Superfícies características e equações hiperbólicas	23
2.3.3	Condições iniciais e de contorno	25
3	Solução Numérica das Equações de Euler	28
3.1	Introdução	28
3.2	Aproximação por Diferenças Finitas	30
3.3	As Equações de Euler em Coordenadas Transformadas	32
3.4	Autovalores das Matrizes Jacobianas no Plano Computacional	35
3.5	Discretização Temporal	37
3.6	Método Explícito com Segunda Ordem de Precisão	38
3.6.1	Descrição Geral do Método	38
3.6.2	Termos de dissipação artificial baseados no método <i>upwind</i>	41
3.6.3	Método explícito de MacCormack com dissipação artificial	45
3.6.4	Valores de passos no tempo e condição CFL	47
4	Cálculo do Escoamento Transônico ao Redor de um Aerofólio	49
4.1	Introdução	49
4.2	Domínio Discretizado e Condições Iniciais	49
4.3	Condições de Contorno	50
4.4	Escoamento Transônico Estacionário ao Redor do Aerofólio NACA0012	54
5	Conclusões	66
5.1	Conclusões do Trabalho	66

5.2	Propostas para Trabalhos Futuros	67
-----	--	----

Bibliografia	69
---------------------	-----------

RESUMO

CAMILO, E. (2003). *Solução Numérica das Equações de Euler para Representação do Escoamento Transônico em Aerofólios*. São Carlos, 2003. 72p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O estudo de métodos de modelagem de escoamentos aerodinâmicos em regime transônico é de grande importância para a engenharia aeronáutica. O maior desafio no tratamento desses escoamentos está na sua característica não linear devido aos efeitos de compressibilidade e formação de ondas de choque. Tais efeitos não lineares influenciam no desempenho de superfícies aerodinâmicas em geral, bem como são responsáveis pelo aparecimento de fenômenos danosos para a resposta aeroelástica de aeronaves. O equacionamento para esses tipos de escoamentos pode ser obtido via as equações básicas da mecânica dos fluidos. No entanto, apenas soluções numéricas de tais equações são possíveis de ser obtidas de forma prática no presente momento. Para o caso específico do tratamento de problemas transônicos, as equações de Euler formam um conjunto de equações diferenciais a derivadas parciais capazes de capturar os efeitos não lineares de escoamentos compressíveis, porém os efeitos da viscosidade não são levados em consideração. O objetivo desse trabalho é implementar uma rotina computacional capaz de resolver numericamente escoamentos em regime transônico em torno de aerofólios. Para isso as equações de Euler não lineares são utilizadas e o campo de fluido ao redor de um perfil aerodinâmico é discretizado pelo método das diferenças finitas. Uma malha estruturada do tipo C discretizando o fluido ao redor de um aerofólio NACA0012 é considerada. A metodologia para solução numérica é baseada no método explícito de MacCormack de segunda ordem de precisão no tempo e espaço. Baseados na aproximação *upwind*, termos de dissipação artificial com coeficientes não lineares também são adicionados ao método. A solução do escoamento transônico estacionário ao redor do aerofólio NACA0012 é obtida e as principais propriedades do escoamento são apresentadas. Observa-se a formação de ondas de choque através de contornos de número de Mach ao redor do aerofólio. Gráficos das distribuições de pressão no intra e extradorso do aerofólio são mostrados, onde se identificam aos efeitos da brusca variação de pressão devido as ondas de choque. Os resultados são validados com valores de distribuição de pressão para o mesmo aerofólio encontradas na literatura técnica. Os resultados obtidos combinam bem com os fornecidos em códigos computacionais para solução do mesmo problema aerodinâmico.

Palavras chave: Equações de Euler, métodos DFC, métodos numéricos, aerodinâmica computacional, ondas de choque, escoamentos transônicos.

ABSTRACT

CAMILO, E. (2003). *Numerical Solution of the Euler Equations for Representation of Transonic Flows over Airfoils*. São Carlos, 2003. 72p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The study of aerodynamic modeling methods for the transonic flow regime is of great importance in aeronautical engineering. Major challenge on the treatment of those flows is on their nonlinear features due to compressibility effects and shock waves (appearance). Such nonlinear effects present a strong influence on aerodynamic performance, as well as they are responsible for harmful aeroelastic response phenomena in aircraft. Equations for transonic flows can be obtained from the basic fluid mechanic equations. However, only numerical methods are able to attain practical solutions for those set of differential equations at the present moment. For the specific case of treating transonic flow problems, the nonlinear Euler equations provide a set of partial differential equations with features to capture nonlinear effects of typical compressible flows, despite of not accounting for viscous flows effects. The aim of this work is to implement a computational routine for the numerical solution of transonic flows around airfoils. The Euler equations are used and the flow field around a aerodynamic profile is discretized by finite difference method. A C-type structured mesh is used to discretize the flow around a NACA0012 airfoil. The methodology for numerical solution is based on the explicit MacCormack method which has second order accuracy in time and space. Based on the upwind approximation, artificial dissipation with nonlinear coefficients is incorporated to the method. The steady transonic flow around the NACA0012 airfoil numerical solution is assessed and the main flow properties are presented. Shock wave structure can also be observed by means of the Mach number contours around the airfoil. Pressure distributions on upper and lower surfaces for different flow conditions are also shown, thereby allowing the observation of the effects of the abrupt pressure change due to shock waves. The results are validated using data presented in the technical literature. The present code solutions agree well with the solution obtained in other computational codes used for the same problem.

Keywords: Euler equations, CFD methods, numerical methods, computational aerodynamics, shock waves, transonic flows.

LISTA DE SÍMBOLOS

a velocidade do som;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matriz jacobiana dos vetores de fluxo;

$\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ matriz jacobiana dos vetores do fluxo em coordenadas curvilíneas gerais;

C_p coeficiente de pressão;

CFL número de Courant-Friedrichs-Lewy;

d fluxo dissipativo;

D operador dissipativo;

$D_{\bar{\mathbf{A}}}$ matriz dos autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$;

e_t energia total por unidade de massa;

e energia interna por unidade de massa;

$\vec{f}_e$ vetor de forças externas;

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ vetores de fluxo;

H entalpia por unidade de massa;

J jacobiano da transformação de coordenadas;

k direção de propagação de onda;

K_2 coeficiente de dissipação artificial de segunda ordem;

K_4 coeficiente de dissipação artificial de quarta ordem;

M número de Mach;

$\vec{n}$ vetor normal;

p pressão;

$p(\phi(\mathbf{x}(t), t))$ distribuição de pressão;

$\mathbf{Q}$ vetor das variáveis conservadas;

S superfície;

$\vec{S}$ vetor superfície;

t tempo;

u, v componentes cartesianas de velocidade do fluxo;

U, V componentes de velocidade contravariante;

x, y coordenadas cartesianas;

α ângulo de ataque;

γ razão dos calores específicos;

δu deslocamento virtual generalizado;

δW trabalho virtual;

Δt passo no tempo;

$\Delta x, \Delta y$ diferenças espaciais dos pontos da malha nas direções x e y ;

Ω domínio do escoamento;

$\partial\Omega$ fronteira do escoamento;

$\partial\Omega_S$ limites da superfície aerodinâmica;

λ autovalores das matrizes jacobianas dos fluxo;

ξ, η coordenadas curvilíneas gerais;

ρ densidade;

τ razão Δ_t/Δ_ξ ou Δ_t/Δ_η ;

$\phi(\mathbf{x}, t)$ vetor das variáveis de estado no escoamento espaço-temporal;

$\mathcal{B}$ operador de fronteiras;

$\mathcal{N}$ operador diferencial parcial não-linear fronteiras;

$\mathcal{U}$ função deslocamento de fronteiras.

Subscritos e superescritos:

f fronteira;

j, k quantidade discreta referente a um ponto da malha;

x, y componentes nas direções x, y ;

∞ escoamento não perturbado;

ξ, η componentes nas direções ξ, η ;

T transposto;

n, m níveis de tempo e iteração.

ACRÔNIMOS

AC Aeroelasticidade Computacional;

DFC Dinâmica dos Fluidos Computacional;

EDP Equações Diferenciais Parciais;

NACA National Advisory Committee of Aeronautics.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Os problemas associados aos efeitos de compressibilidade em aeronaves de grande desempenho contribuem para aumentar significativamente as dificuldades nos projetos aeronáuticos. Um regime de escoamento cujos efeitos de compressibilidade introduzem as maiores dificuldades é o transônico. O maior desafio para a solução desse regime de escoamento está no seu comportamento não linear. A fonte dominante de não linearidade corresponde a formação de ondas de choque e em muitos casos os efeitos viscosos podem ser desprezados, facilitando o equacionamento.

As equações de Navier-Stokes são geralmente aceitas como as equações básicas para a maior parte dos escoamentos aerodinâmicos (NIXON, 1989; ANDERSON, 1995). Devido as grandes dificuldades em resolver as equações de Navier-Stokes é desejável fazer uso de hipóteses simplificadoras. Por exemplo, para escoamentos bem comportados sem separação, os efeitos não viscosos tendem a ter mais importância que os efeitos viscosos. Esta aproximação leva às equações de Euler que representam escoamentos rotacionais não viscosos para uma ampla faixa de velocidades. As equações de Euler têm sido muito utilizadas para a representação de escoamentos transônicos, uma vez que são adequadas para capturar os efeitos de escoamento mistos (subsônico e supersônico) e a consequente formação de ondas de choque.

A dificuldade em encontrar soluções analíticas, mesmo para conjuntos simplificados de equações, decorre do fato que as equações que descrevem o escoamento em regime

transônico são equações diferenciais parciais não lineares. A teoria matemática dessa classe de equações ainda não está suficientemente desenvolvida para permitir a obtenção de soluções analíticas em regiões arbitrárias e condições de contorno gerais. A alternativa mais apropriada é aplicar algum método numérico. A partir de metodologias de discretização uma série de ferramentas numéricas têm sido utilizadas para o cálculo de escoamentos aerodinâmicos. Dentre elas destacam-se os métodos de painéis, que representaram o primeiro conjunto de ferramentas computacionais em aerodinâmica e que atualmente tem seu desenvolvimento praticamente todo estabelecido. O maior esforço atual em métodos computacionais em aerodinâmica está no desenvolvimento de ferramentas utilizando os métodos da Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) (ANDERSON, 1995; HIRSCH, 1988a, 1988b; FLETCHER, 1992a, 1992b).

O interesse pela DFC em aeronáutica se dá pelas preocupações de adquirir soluções confiáveis e práticas de modelos aerodinâmicos, uma vez que tais métodos manipulam numericamente as equações básicas da mecânica dos fluidos. Grandes avanços já estão sendo alcançados e aplicações do DFC na indústria aeronáutica começam a ser cada dia mais usuais. Observa-se, então, uma constante busca por métodos cada vez mais eficientes visando a solução de problemas com geometrias complexas e em três dimensões.

A solução das equações de Euler pelos métodos DFC têm sido proposta por um número significativo de pesquisadores. O maior interesse está no tratamento do problema da formação de ondas de choque e consequente não linearidade associada. Outro crescente interesse no uso dos métodos DFC está no tratamento de problemas aeroelásticos. A aeroelasticidade é o ramo da ciência aeronáutica que lida com os fenômenos físicos que envolvem a interação mútua entre forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas (DOWELL, 1995; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Alguns fenômenos de instabilidade aeroelástica, tais como o *flutter* e a divergência, são prejudiciais e comprometem a integridade das aeronaves. Portanto, sua previsão é de maior importância.

Em regime de escoamento transônico, efeitos não lineares dificultam significativamente

a previsão das fronteiras de *flutter*. Associado às não linearidades introduzidas pela formação e excursão das ondas de choque no caso aeroelástico, verifica-se que a fronteira de ocorrência de *flutter* é degradada rapidamente na faixa de voo transônico. Este fenômeno é denominado de *depressão transônica* e está ilustrada na Figura 1.

Figura 1: Ilustração do fenômeno de depressão transônica.

O tratamento de problemas aeroelásticos por meio de abordagens computacionais está sendo recentemente denominada de *aeroelasticidade computacional* (BENNETT; EDWARDS, 1998). A tendência atual no uso de DFC possibilita modelos aerodinâmicos não estacionários, enquanto que métodos como o de elementos finitos têm sido os mais apropriados para representar os problemas dinâmico-estruturais. Assim sendo um modelo típico da aeroelasticidade computacional é composto do acoplamento dos modelos dinâmico-estrutural e aerodinâmico não estacionário.

Um dos objetivos do grupo de pesquisa do Laboratório da Aeroelasticidade, Dinâmica de Voo e Controle (LADinC/EESC/USP) são modelos para análise aeroelástica linear e não linear. Até o presente trabalho o grupo só contava com estudos aerodinâmicos através de experimentos realizados em túnel de vento subsônico (BELO; DEMARQUI JR; ROCHA, 2001; DEMARQUI, 2003) e com simulação por métodos dos painéis (BENINI, 2002; BENINI; BELO; MARQUES, 2002) não sendo adequados para escoamentos em regime transônicos.

Neste trabalho são executados os primeiros passos na direção do desenvolvimento de modelos computacionais que abranjam um grande número de problemas em aeroelasti-

cidade. No contexto dos problemas de representação dos escoamentos aerodinâmicos em regime transônico, o trabalho concentra-se na implementação de um método DFC para a solução das equações de Euler para o caso estacionário. Este modelo servirá para formar a base de um futuro método não estacionário mais adequado para trabalhar problemas de aeroelasticidade transônica, bem como servirá como ferramenta de análise das não linearidades típicas dos escoamentos compressíveis.

1.2 Aeroelasticidade Computacional

A Aeroelasticidade Computacional (AC) é a área da ciência aeronáutica que recentemente tem utilizado os desenvolvimentos em métodos computacionais em aerodinâmica (DFC, por exemplo) e dinâmica estrutural (métodos dos elementos finitos, por exemplo) para que juntamente seja possível obter a solução simultânea de problemas aeroelásticos (BENNETT; EDWARDS, 1998).

Com aeronaves operando em situações de altas velocidades, a análise do comportamento aerodinâmico na presença de efeitos não lineares torna-se cada vez mais complexa. Esses efeitos não lineares, particularmente no regime de escoamento transônico, são difíceis de modelar e prever devido a complexidade de alguns aspectos físicos como os mecanismos da formação de ondas de choque (MARQUES, 1997).

1.3 Modelagem Aeroelástica

As equações de movimento de uma estrutura linear discretizada em N graus de liberdade podem ser representadas, na forma matricial, pela Eq. (1.1) onde o amortecimento estrutural foi desprezado (MEIROVITCH, 1986).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(t), t) \quad (1.1)$$

As matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ são quadradas de ordem N e são denominadas matrizes de massa e rigidez da estrutura, respectivamente. Os vetores $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ têm dimensão $N \times 1$ e representam as acelerações, velocidades e deslocamentos sofridos pela estrutura devido à aplicação das forças externas $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(t), t)$.

No caso particular de uma asa de avião, que é a estrutura a ser analisada, $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(t), t)$ é o vetor que representa as forças aerodinâmicas sobre a asa. Uma característica importante do vetor de forças aerodinâmicas é que ele não depende somente do tempo, mas também da história no tempo dos estados que descrevem a resposta aeroelástica.

Uma dificuldade em estudos de aeroelasticidade é a produção de modelos matemáticos capazes de resolver simultaneamente, tanto o problema de dinâmica estrutural, descritos pelas equações de movimento, quanto o de aerodinâmica não estacionária. Do ponto de vista da dinâmica estrutural, uma variedade de métodos numéricos e analíticos têm sido desenvolvida com sucesso (PREIDIKMAN, 1998).

Uma ilustração de uma abordagem aproximada para um modelo aeroelástico está na Figura 2. Os estados para cada instante que são gerados para cada uma das equações correspondentes seriam trocados entre si e a solução global simultânea produziria ambas as respostas aerodinâmicas e história no tempo do movimento estrutural, com dependência de uma solução inicial conhecida.

Figura 2: Representação de um modelo aeroelástico.

Os métodos alternativos de modelagem aerodinâmica não estacionária e não linear

para aplicações aeroelásticas foram conseguidos com base em algumas hipóteses essenciais. A principal hipótese se refere ao fato de que o modelo aerodinâmico não estacionário é determinado independentemente das leis físicas que regem o movimento dinâmico-estrutural. Desta forma, as equações de mecânica dos fluidos e as equações de movimento podem ser resolvidas separadamente e acopladas por meio de algum método de interpolação.

A solução das equações não lineares de mecânica dos fluidos, em termos práticos, é obtida somente por meio de técnicas numéricas. Com o desenvolvimento dos modernos computadores e métodos numéricos surge na área da ciência aeronáutica a aeroelasticidade computacional, que trata desses desenvolvimentos dos métodos computacionais em aerodinâmica e dinâmica estrutural, para que juntamente seja possível obter a solução simultânea de problemas aeroelásticos. Dentre esses métodos os de mais frequente aplicação em mecânica dos fluidos são o método de diferenças finitas e o de volumes finitos, e para dinâmica estrutural é o método dos elementos finitos.

Um elemento intrínseco desse processo de desacoplamento é que os modelos alternativos da resposta aerodinâmica não estacionária determinam o comportamento espaço-temporal dos estados internos aerodinâmicos. Por exemplo, as equações de dinâmica dos fluidos não estacionária são descritas pelas seguintes representações simbólicas (MARQUES, 1997), obedecendo as condições de contorno e um conjunto apropriado de condições iniciais, então:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = \mathcal{N}(\phi(\mathbf{x}(t), t)) \quad \text{em } \Omega, \quad t > 0$$

satisfazendo

$$\mathcal{B}(\phi(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{u}(t)) = 0$$

onde $\phi(\mathbf{x}(t), t)$ representa a variável de estado do escoamento, $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de coordenadas espaciais, $\mathcal{N}$ é um operador diferencial parcial não linear, Ω determina o domínio

do escoamento no problema, $\partial\Omega$ é a fronteira do escoamento, $\partial\Omega_S$ representa os limites da superfície aerodinâmica, $\mathcal{B}$ representa um operador de fronteira, e $\mathbf{u}(t)$ é o movimento generalizado instantâneo da fronteira (conforme Figura 3).

Figura 3: Representação de um modelo aerodinâmico sobre um domínio limitado por uma fronteira $\partial\Omega$ (MARQUES, 1997).

Supondo o movimento da fronteira da forma $\mathcal{U}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, tal que o trabalho virtual, $\delta^*\mathbf{W}$, é definido por:

$$\delta^*\mathbf{W} = \delta\mathbf{u}^T\mathbf{P}(t)$$

então, o vetor da resposta da força aerodinâmica generalizada, $\mathbf{P}(t)$ é dado pela expressão:

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\partial\Omega_S} \left(\frac{\partial\mathcal{U}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial\mathbf{u}(t)} \right)^T \mathbf{n}(-p(\phi(\mathbf{x}(t), t))) \, d\partial\Omega_S$$

onde, $p(\phi(\mathbf{x}(t), t))$ descreve a distribuição de pressão como função não linear das variáveis espaço-temporal instantâneas relativas ao vetor normal, $\mathbf{n}$, à superfície.

Uma hipótese para modelos da aerodinâmica não estacionária é que a influência dos atrasos no tempo da variação de pressão introduzidos pela propagação e convecção das variáveis espaço-temporal pode ser tratada puramente com a história no tempo do movimento do corpo aerodinâmico (MARQUES, 1997). Isso possibilita a aplicação dos princípios da teoria de sistemas dinâmicos, como é o caso da representação funcional. No entanto, o maior desafio para esses modelos tem sido o desenvolvimento de soluções confiáveis e práticas.

1.4 Aerodinâmica Transônica

Uma classificação para os escoamentos aerodinâmicos é feita através do valor do número de Mach (M), portanto tomando-se como base os efeitos de compressibilidade. Assim sendo, os escoamentos com $M < 1$ são denominados de *subsônicos*, para $M = 1$ os escoamentos são *sônicos* e para $M > 1$ os escoamentos são definidos como *supersônicos*. Para um valor de M em torno de $0,8 < M < 1,2$ o escoamento está na transição entre o subsônico e o supersônico. Nesta faixa os escoamentos aerodinâmicos são classificados como *transônicos*. As definições e descrições mencionadas acima têm sido apresentadas com mais detalhes na literatura aeronáutica, como nos trabalhos de J. D. Anderson Jr. (ANDERSON, 1990, 1991, 1995).

O regime de escoamento transônico se caracteriza pela presença de regiões mistas sobre a superfície do corpo aerodinâmico, podendo ocorrer áreas com $M < 1$ e $M > 1$. Então há o surgimento de ondas de choque, separação da camada limite provocada pelas ondas de choque e a formação de vórtices, trazendo problemas como as não linearidades (ANDERSON, 1991). Por isso, nos casos específicos de regimes transônicos, as dificuldades para análise aerodinâmica têm sido ainda maiores.

Contudo, o estudo dos fenômenos aeroelásticos em escoamentos transônicos tem se tornado cada vez mais importante em engenharia aeronáutica (FRIEDMANN, 1999), pois uma grande variedade de aeronaves voa nesse regime, estando sujeitas aos efeitos não lineares típicos devido a compressibilidade. A formação e movimento das ondas de choque sobre as asas e corpo da aeronave representam as mais importantes influências no carregamento aerodinâmico, sobretudo no caso não linear (LIEPMANN; PUCKETT, 1947; LEVY, 1978; IOLLO; SALAS, 1999; MOULDEN, 1984).

Com o desenvolvimento dos computadores modernos, ocorreu uma maior motivação para a produção de soluções numéricas das equações básicas da mecânica dos fluidos. Tais métodos têm propiciado uma rápida evolução na modelagem e análise dos fenômenos associados com a aerodinâmica de escoamentos transônicos.

1.5 Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC)

Os fenômenos relacionados com o movimento de fluidos podem ser bastante complexos. Em muitos problemas de engenharia recorre-se a métodos experimentais como ensaio em túneis de vento para se compreender melhor esses fenômenos. Nem sempre os tratamentos experimentais são satisfatórios e uma das razões para isso é o custo e o tempo da montagem experimental que podem ser proibitivos.

Uma alternativa para resolver os problemas dos ensaios experimentais é a aplicação de técnicas numéricas para o tratamento das equações da mecânica dos fluidos. Aliada a essa tendência, o avanço dos computadores modernos ajudou a solução de problemas complexos proporcionando muitas inovações especialmente na indústria aeroespacial (HOFFMANN, 1989; FLETCHER, 1992b; HIRSCH, 1988a). O uso de métodos numéricos de forma alguma implica que a mecânica dos fluidos experimental e as análises teóricas estejam sendo postas de lado. É muito comum ter as três técnicas se complementando durante um projeto aeronáutico.

A DFC estuda métodos numéricos para a simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento (FORTUNA, 2000). Por estar baseada na solução numérica das equações básicas da mecânica dos fluidos, uma grande parte das pesquisas em aerodinâmica computacional utiliza métodos DFC. O objetivo básico da DFC é reduzir o número de experimentos e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática. Utilizando as técnicas da DFC, pode-se avaliar numericamente os diversos parâmetros relevantes ao problema. Esses podem ser facilmente alterados até que o resultado da simulação atenda às exigências do projeto. Tudo isso de forma bem mais conveniente e a custos e tempos menores do que apenas utilizando técnicas experimentais e análises teóricas, combinadas com projeto inicial, ensaios e reprojeção (FORTUNA, 2000).

Anderson (1995) descreve a evolução da DFC nos últimos anos com o desenvolvimento dos computadores e das necessidades industriais. Em 1950, não existiam métodos DFC da forma como obtêm-se hoje. Em 1970, existia DFC, mas o tipo de computadores e

algoritmos que existiam limitavam todas as soluções essencialmente práticas para fluxos em duas dimensões. Os problemas reais da dinâmica dos fluidos tratam principalmente dos ocorridos em três dimensões e o armazenamento e a velocidade dos computadores digitais naquela década não eram suficiente para permitir operar de alguma forma prática nesses problemas em três dimensões.

Mas Jameson (1997) ressalta que os primeiros métodos computacionais começam a ter impacto significativo na análise aerodinâmica e projetos, no período de 1965-75, onde foi introduzido o método dos painéis que permitiam resolver modelos de fluxo linear para geometrias complexas arbitrárias, tanto em fluxo subsônico quanto supersônico. Também, aparece o primeiro método satisfatório para tratamento de equações não lineares para fluxo transônico.

Atualmente os métodos DFC para soluções de escoamentos não estacionários e em três dimensões são mais frequentes, mas não rotineiros. Alguns programas de computador para o cálculo de escoamentos em três dimensões têm se tornado usuais na indústria, resultando no seu uso como uma ferramenta no processo do projeto (FLETCHER, 1992a).

No esquema da Figura 4 pode-se observar as etapas realizadas para a obtenção de solução numérica de um problema de dinâmica dos fluidos. Para tratar o modelo computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada as equações e o domínio em que elas são válidas. A distribuição adequada dos pontos no domínio é fundamental para se obter uma solução numérica representativa do escoamento. Em seguida, os termos que aparecem nas equações são escritos em função dos valores das incógnitas em pontos discretos adjacentes.

O resultado é um conjunto de equações algébricas, que podem ou não estar acopladas. Nessa etapa introduzem-se as condições de contorno do problema, normalmente modificando-se apropriadamente as equações para pontos perto das fronteiras. As condições de contorno, juntamente às condições iniciais, as propriedades físicas do fluido e os parâmetros do escoamento especificam o problema a ser tratado.

Finalmente, as equações algébricas são resolvidas, fornecendo a solução do problema. Esta deve, nesse momento, ser analisada para verificar se está correta, somente depois é que se pode extrair do escoamento, com alguma confiabilidade, as informações de interesse do usuário (FORTUNA, 2000; MALISKA, 1995).

Figura 4: Etapas para a obtenção da solução numérica de um problema de fluidos.

1.6 Métodos DFC para Aerodinâmica Transônica

Uma das características do escoamento transônico é que as EDPs que o descrevem são necessariamente não lineares. Idealmente, métodos numéricos para a solução de EDPs não lineares devem garantir que os aspectos relevantes do comportamento do escoamento não sejam degradados (HOLST, 2000). Desta forma, os métodos numéricos para solução de problemas transônicos em geral necessitam manter as características não lineares das EDPs que modelam tal escoamento (CUMINATO; MENEGUETTE, 1999). Com o surgimento de equipamentos computacionais de grande desempenho e com o desenvolvimento dos esquemas numéricos mais eficientes, tornou-se possível a utilização prática de técnicas modernas em DFC para o tratamento de problemas da aerodinâmica transônica.

A grande maioria dos trabalhos propostos para solução de escoamentos em regime transônico durante a década de 70 e 80 utilizaram as formulações aerodinâmicas baseadas nas equações de pequenas perturbações ou do potencial completo. Trabalhos como Boppe (1977), McCroskey (1977) utilizam a formulação de pequenas perturbações e desenvolvem o método para problemas tridimensionais. Este fato deve-se, principalmente, ao

enorme custo computacional exigido pelos modelos aerodinâmicos mais complexos como as equações de Euler ou de Navier-Stokes.

Concentrando-se na análise estacionária, ainda nas década de 70 e 80 surgem os trabalhos pioneiros da solução das equações de Euler como Beam e Warming (1976), Warming, Kutler e Lomax (1973), Steger e Warming (1981). Nestes trabalhos desenvolvem-se métodos com abordagens implícitas e explícitas. Steger e Warming (1981) compara a eficácia da solução pelos métodos com abordagens explícitas que se diferenciam pela ordem de precisão da aproximação.

Anderson (1995) apresenta as principais vantagens e desvantagens na escolha das aproximações com abordagens explícitas e implícitas. Para a aproximação *explícita* a maior vantagem está na implementação do programa que é relativamente simples. A maior desvantagem é a restrição do valor de Δt imposta pelo critério de estabilidade, onde Δt costuma ser nestes casos bastante pequeno para manter estabilidade. Tal fato resulta em longo tempo de execução para fazer cálculos sobre um dado intervalo de t .

Para a aproximação *implícita* a maior vantagem é sobre o valor de Δt que não precisa ser muito pequeno para manter estabilidade, podendo reduzir bastante o tempo de execução para fazer o cálculo sobre um dado intervalo de t . Como desvantagens cita o fato da implementação do programa ser mais complicada e ainda, como são feitas muitas manipulações matriciais em cada passo do tempo, o tempo de computador por passo no tempo é muito maior que na aproximação explícita.

MacCormack (1982) desenvolve um método que mistura aproximações explícitas e implícitas para solução das equações de Navier-Stokes. O método garante ser incondicionalmente estável com segunda ordem de precisão e não requer inversões tridiagonais de matrizes. O autor foi um dos pioneiros no desenvolvimento de métodos explícitos que contém passos preditor e corretor para as equações de mecânica dos fluidos.

Lerat (1985) utiliza um método explícito e um implícito para o cálculo do fluxo sobre o aerofólio NACA0012 com Mach 0,8 e ângulo de ataque de 1,25 graus, descrito pelas

equações de Euler não estacionárias e bidimensionais. Uma comparação foi feita entre essas duas soluções sobre uma malha do tipo C com 188×24 pontos utilizando passo no tempo do método implícito de 5,7 maior que o utilizado no método explícito. O mesmo grau de convergência é obtido depois de 1300 iterações do método implícito ou 8000 iterações do método explícito. Cada iteração implícita consumiu 60% mais de tempo do que cada iteração explícita, mesmo assim o método implícito reduziu o tempo de cálculo da solução por um fator de 3,85 para este grau de convergência.

No trabalho de Osher (1983) desenvolve-se o método implícito *upwind* pela eficiência em capturar ondas de choque na solução das equações de Euler em geometrias gerais e multidimensionais. Pulliam (1988) trata de vários métodos implícitos analisando a convergência da solução.

Somente a partir do final dos anos 80 é que começam a surgir com maior frequência esforços no sentido de se utilizar formulações dadas pelas equações de Euler e Navier-Stokes no desenvolvimento de códigos não estacionários voltados para uso prático, tais como Guruswamy (1990), Obayashi, Guruswamy e Goorjian (1991), Chyu, Davis e Chang (1981), Dubuc (1997), Venkatakrishnan e Jameson (1988), Drikakis e Tsangaris (1992), Hwang e Wu (1993), Batina (1993), Prananta e Hounjet (1996), Neal (1991), Simões e Azevedo (1999), Jameson (1997), Dadone e Moretti (1988). Esses trabalhos também apresentam-se como uma fonte adequada de informação sobre os métodos na análise estacionária. Na maioria desses trabalhos pode-se observar uma tendência do uso de métodos explícitos.

1.7 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é implementar um método numérico para solução das equações de Euler não lineares bidimensionais para escoamentos em regime transônico ao redor de um perfil aerodinâmico.

A solução numérica das equações de Euler é baseada no método explícito de Mac-

Cormack de segunda ordem de precisão no tempo e espaço. Termos de dissipação artificial com coeficientes não lineares também são acrescentados ao método, tomando-se como base a aproximação *upwind*. Considera-se o campo de fluido ao redor de um perfil aerodinâmico discretizado por diferenças finitas. Uma malha estruturada do tipo C é usada na discretização do fluido ao redor de um aerofólio NACA0012.

A metodologia é aplicada para calcular as propriedades do escoamento estacionário ao redor do perfil aerodinâmico NACA0012. Contornos de número de Mach e de pressão são calculados visando a identificação das regiões de formação e aparecimento das ondas de choque. As distribuições de pressão ao redor do perfil aerodinâmico e os coeficientes de sustentação e arrasto também são apresentadas para diversas condições de vôo e ângulos de incidência do aerofólio. Com tais informações é possível observar a influência das ondas de choque na formação do carregamento aerodinâmico e consequente efeito não linear que se introduz. Os resultados são validados comparando-se com outros resultados encontrados na literatura técnica para problemas idênticos aos resolvidos neste trabalho.

1.8 Organização da Dissertação

Esse texto está dividido em cinco capítulos, onde neste Capítulo tem-se a revisão de literatura no estudo dos métodos DFC para a análise de escoamentos aerodinâmicos transônicos e a relação com problemas aeroelásticos.

O Capítulo 2 trata da formulação do escoamento transônico não estacionário bidimensional modelado pelas equações de Euler não lineares. É feita uma análise matemática dessas equações visando determinar os métodos numéricos mais apropriados para essa classe de equações diferenciais.

No Capítulo 3 está todo o desenvolvimento do método explícito de MacCormack de precisão de segunda ordem no tempo e espaço, onde encontram-se as equações de Euler na forma transformada para aplicação do método por aproximação em diferenças finitas em coordenadas gerais. Também são apresentados os procedimentos para incluir termos

de dissipação artificial baseados na aproximação *upwind*.

Os resultados da solução numérica do escoamento transônico estacionário ao redor do perfil aerodinâmico NACA0012 estão no Capítulo 4. São especificadas as condições iniciais e de contorno para uma malha estruturada do tipo C em torno do aerofólio. Esses resultados são em termos da solução estacionária do escoamento e são produzidos contornos de número de Mach e de pressão, distribuições de pressão no intra e extradorso do perfil e coeficientes aerodinâmicos para diversas condições de escoamento e ângulos de incidência. O método é validado através de comparações de resultados obtidos na literatura.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 EQUAÇÕES PARA ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL NÃO VISCOSO BIDIMENSIONAL

2.1 Introdução

Para modelar escoamentos em regime transônico as equações básicas são dadas pelas leis de conservação de massa, da quantidade de movimento e da energia. A forma conservativa desse conjunto de equações diferenciais à derivadas parciais (EDPs) é essencial para calcular corretamente a propagação das informações do escoamento e a intensidade das discontinuidades, tais como ondas de choque. Supondo que o escoamento é sempre colado à superfície aerodinâmica, então, a não linearidade dominante é devido as ondas de choque. Desta forma termos viscosos podem ser desprezados do equacionamento. O sistema de equações que obedece as leis de conservação e não considera os termos de viscosidade é conhecido como as equações de Euler. Tais equações formam um sistema de primeira ordem de equações diferenciais à derivadas parciais acopladas e não lineares.

Este capítulo apresenta as equações de Euler partindo da forma integral das leis de conservação de massa, da quantidade de movimento e da energia. São analisadas as propriedades matemáticas desse sistema de equações diferenciais. Conclui-se que as equações de Euler são classificadas como um sistema hiperbólico no espaço e tempo, onde as informações das variáveis dos fluxos são propagadas no domínio pelas superfícies características. Essa caracterização auxilia na determinação do método numérico a ser imple-

mentado para resolver as equações de Euler, dando subsídios para correta determinação das condições iniciais e de contorno do problema.

2.2 As Equações de Euler

As equações que descrevem qualquer tipo de escoamento, obtidas pelas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, juntamente com as equações de estado, resultam nas equações de Navier-Stokes. Essas equações podem ser resolvidas após a especificação das condições iniciais e de contorno apropriadas. A resolução analítica desse sistema de equações é, em geral, inviável. Mesmo sua solução numérica não é uma tarefa trivial. Assim, é freqüente a utilização de aproximações para simplificar as equações de Navier-Stokes (NIXON, 1989).

Essas simplificações decorrem da análise do comportamento das principais características do escoamento estudado. Fletcher (1992a) classifica os escoamentos em relação à viscosidade e densidade do fluido, dessa forma, tem-se os escoamentos incompressíveis ou compressíveis. Para os escoamentos compressíveis adota-se o critério de velocidade do escoamento maior que $\frac{1}{10}$ da velocidade do som do fluido ou quando existem gradientes de pressão e temperatura que causem variações apreciáveis na densidade do fluido.

Ao desconsiderar o efeito da viscosidade obtém-se as equações de Euler. A forma conservativa das equações é utilizada para calcular as intensidades das descontinuidades. Para o regime transônico os escoamentos são compressíveis e um fenômeno importante associado é a ocorrência das descontinuidades causadas pelas não linearidades das equações.

Nessa formulação são aplicados os princípios fundamentais da física nos modelos do fluido, como pode ser observado em Anderson (1991). Considerando-se um escoamento tridimensional atravessando um volume arbitrário Ω fixo no espaço, limitado por uma superfície S as leis de conservação são representadas por:

1. Para a equação da continuidade aplica-se o princípio de conservação de massa: a

variação por unidade de tempo da quantidade de massa dentro do volume Ω , deve ser igual a massa que atravessa o volume pela superfície S , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido com velocidade $\vec{V}$.

2. Para as equações de quantidade de movimento aplica-se o princípio de conservação da quantidade de movimento (segunda lei de Newton): a taxa de variação temporal da quantidade de movimento do fluido é igual à resultante das forças que atuam sobre o fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega + \oint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \oint_S p d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega \quad (2.2)$$

onde $-pd\vec{S}$ é a força de superfície devido a pressão atuando em um elemento de área $d\vec{S}$ e $\vec{f}_e$ são as forças de corpo. A massa de escoamento que atravessa o elemento de área $d\vec{S}$ é $(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$, onde a quantidade de movimento do escoamento que atravessa por segundo $d\vec{S}$ é $(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V}$.

3. Para a equação de energia aplica-se o princípio de conservação de energia (primeira lei da termodinâmica): a taxa de variação temporal da energia é igual à soma do fluxo resultante de calor para o fluido com o trabalho realizado sobre o fluido.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e_t d\Omega + \oint_S \rho H \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e \cdot \vec{V} d\Omega \quad (2.3)$$

onde e_t é a energia total dada pela soma da energia interna e energia cinética por unidade de massa e H é a entalpia total, dadas respectivamente por:

$$e_t = e + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \quad (2.4)$$

$$H = e_t + \frac{p}{\rho} \quad (2.5)$$

onde p é a pressão.

Aplicando-se o teorema da divergência nas equações acima, obtém-se as equações na forma de derivadas parciais. Portanto, a forma conservativa das equações de Euler bidimensionais em coordenadas cartesianas, sem considerar as forças de corpo, são escritas:

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Quantidade de movimento em x e y, respectivamente:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.8)$$

Energia:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_t u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e_t v)}{\partial y} = -\frac{\partial(pu)}{\partial x} - \frac{\partial(pv)}{\partial y} \quad (2.9)$$

onde u e v são as duas componentes de velocidades em um sistema cartesiano.

Reescrevendo as Eqs. (2.6) a (2.9) na forma vetorial:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{Q}$ é o vetor das variáveis obedecendo a forma conservativa das equações e chamado de vetor das variáveis conservadas, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são chamados de fluxos convectivos, dados por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde

$$e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (2.12)$$

No caso dos escoamentos aerodinâmicos pode-se adotar a hipótese de gás perfeito, ou seja, aquele no qual as forças intermoleculares são desprezíveis. Portanto, a pressão p é dada por:

$$p = \rho e(\gamma - 1) \quad (2.13)$$

e da Eq. (2.12) obtém-se a seguinte equação de estado:

$$p = \rho(\gamma - 1)[e_t - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)] \quad (2.14)$$

onde γ é a razão dos calores específicos.

Em escoamentos compressíveis não viscosos podem ocorrer descontinuidades como as ondas de choque. As equações descritas acima incluem as relações entre as variáveis do escoamento em ambos os lados de uma superfície descontínua movendo-se com uma certa velocidade. Assim, as soluções das equações de Euler podem ser obtidas numericamente sem perder as propriedades conservativas, ou seja, pode-se capturar numericamente as ondas de choque. Contudo, para obter cálculos precisos exige-se um estudo mais detalhado sobre as propriedades matemática desse sistema de equações.

2.3 Propriedades Matemáticas das Equações de Euler

Como foi visto anteriormente, os problemas dos escoamentos de fluidos compressíveis e não viscosos em aerodinâmica são representados matematicamente por equações diferenciais parciais não lineares. Entretanto, estas equações são, em geral, bastante complexas e envolvem diversos fenômenos que estão interagindo entre si. Sob o ponto de vista de se analisar o comportamento dos métodos numéricos, pode ser bastante vantajoso que se possa isolar os efeitos destes fenômenos diversos. Por esta razão, costuma-se analisar a classificação matemática destas equações para que se tenha mecanismos de tratar as não linearidades contidas e descrever a formação e movimento das ondas de choques, que é exatamente o fenômeno físico modelado pelas equações de Euler.

2.3.1 Classificação matemática das equações de Euler

Para a aplicação de uma solução numérica nos problemas que envolvem equações diferenciais à derivadas parciais (EDPs) é importante reconhecer as propriedades gerais dessas equações, que estão associadas a dois tipos básicos de fenômenos físicos: *(i)* aqueles que evoluem no tempo (transientes) e *(ii)* aqueles que estão em estado de equilíbrio (estacionários). Existem métodos numéricos apropriados para simular cada um desses fenômenos transientes e estacionários (FORTUNA, 2000). A escolha do método apropriado está relacionada a classificação das EDPs, em três categorias básicas:

1. Elípticas.
2. Parabólicas.
3. Hiperbólicas.

De acordo com Fortuna (2000) essa classificação não é meramente acadêmica, uma vez que cada classe de EDPs está associada a uma categoria diferente de fenômenos físicos. Além disso, métodos numéricos que funcionam para uma categoria de EDPs podem não funcionar para as demais.

Para classificar as equações de Euler é necessário escrevê-las na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são as matrizes jacobianas dos vetores de fluxo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (2.16)$$

Escrevendo o vetor $\mathbf{Q}$ e os fluxos $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ como uma função das variáveis conservadas ρ , $m = \rho u$, $n = \rho v$ e $\varepsilon = \rho e$, obtém-se:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ n \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \frac{mn}{\rho} \\ \frac{m}{\rho}(\varepsilon + p) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} n \\ \frac{mn}{\rho} \\ \frac{n^2}{\rho} + p \\ \frac{n}{\rho}(\varepsilon + p) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e as matrizes jacobianas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ nas variáveis conservadas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma ue_t + (\gamma-1)u|\vec{v}|^2 & \gamma e_t - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\gamma ve_t + (\gamma-1)v|\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma e_t - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

com $|\vec{v}|^2 = u^2 + v^2$.

De acordo com Hirsch (1988b) os autovalores das matrizes jacobianas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ têm papel importante no entendimento das propriedades matemáticas das equações, pois são eles que indicam os sentidos e velocidades em que as informações se propagam em um campo de escoamento. Para o cálculo dos autovalores das matrizes jacobianas, faz-se:

$$\det|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (2.20)$$

e

$$\det|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}| = 0 \quad (2.21)$$

denotados por λ_j :

$$\lambda_{A1} = u, \quad \lambda_{A2} = u, \quad \lambda_{A3} = u + a, \quad \lambda_{A4} = u - a \quad (2.22)$$

$$\lambda_{B1} = v, \quad \lambda_{B2} = v, \quad \lambda_{B3} = v + a, \quad \lambda_{B4} = v - a \quad (2.23)$$

onde a é definido como a velocidade do som, λ_{Aj} os autovalores de $\mathbf{A}$ e λ_{Bj} os autovalores de $\mathbf{B}$.

Se os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são todos reais e distintos e os autovetores associados a cada autovalor são linearmente independentes, o conjunto de equações é classificado como *hiperbólico* em t e x . Para autovalores complexos de $\mathbf{A}$ o sistema de equações é *elíptico* em t e x . Similarmente, o conjunto de equações é hiperbólico em t e y se todos os autovalores da matriz $\mathbf{B}$ são reais e distintos e os autovetores associados são linearmente independentes. Para autovalores complexos da matriz $\mathbf{B}$, o conjunto de equações é classificado como elíptico em t e y .

Usando os critérios acima é possível classificar as equações de Euler como hiperbólicas no espaço e tempo. Essa classificação matemática está descrita em detalhes por Hirsch (1988a) e está diretamente ligada às propriedades físicas do problema. Uma vez que as equações de Euler são hiperbólicas, as informações das propriedades do escoamento são transportadas em um certo domínio de acordo com as quatro direções de propagação. Essa direção está associada com o sinal dos autovalores das matrizes jacobianas. Assim sendo, os métodos numéricos para equações hiperbólicas podem ser desenvolvidos pelo estudo dos sinais desses autovalores.

2.3.2 Superfícies características e equações hiperbólicas

O estudo da propagação de informações do escoamento em um determinado domínio está relacionado com o conceito de **superfícies ou curvas características** (HIRSCH, 1988b). Este conceito auxilia a obtenção de condições de contorno e iniciais adequadas ao problema físico. Cada autovalor $\lambda_j(\bar{k})$ em uma direção arbitrária $\bar{k}$ está associado a

uma superfície característica $S(\bar{x}, t) = \text{constante}$, com S normal ao vetor $\bar{k}$ no instante t e na posição $\bar{x}$ e definida pela relação:

$$\partial S = -\lambda_j(\bar{k}), \quad \bar{\nabla} S = \bar{k} \quad (2.24)$$

sendo $\bar{\nabla} S$ o gradiente de S . Variando o vetor $\bar{k}$, cada autovalor $\lambda_j(\bar{k})$ pode estar associado à infinitas superfícies características.

Uma grande diferença entre equações hiperbólicas, parabólicas e elípticas é a velocidade finita de propagação das informações através das superfícies características. Para que a solução de equações hiperbólicas seja representativa da solução do problema físico, estes aspectos devem ser corretamente tratados pelos métodos numéricos. Estes devem levar em conta direções e velocidades de propagação de informações ao longo do domínio computacional.

Hirsch (1988a) explica como a propriedade de propagação de problemas hiperbólicos têm influência importante em como as informações são transmitidas através da região do escoamento pelos domínios de dependência e de influência. Considerando a Figura 5, onde Γ é uma linha limitante diferente de uma curva característica, a solução U ao longo do segmento AB de Γ se propagará no domínio do escoamento através das curvas características que partem de AB .

Por exemplo, a solução em um ponto P do domínio é determinada pela região limitada PAB . Esta região PAB é chamada de **domínio de dependência** do ponto P . No entanto, as características que partem de algum ponto C fora de AB nunca atingirão o ponto P . Por outro lado, a região acima de P , e localizada entre as curvas características, define a região onde a solução é influenciada pelo valor da função em P . Esta região é denominada de **domínio de influência** de P .

A identificação das condições de contorno e iniciais apropriadas ao problema é facilitada pela análise de propagação das curvas características das equações, pois é através delas que são propagadas informações para o interior do domínio. Portanto, no momento

de determinar as condições de contorno e iniciais corretas para o problema esta análise deve ser aliada aos fenômenos físicos envolvidos.

Figura 5: Domínio de influência e domínio de dependência.

2.3.3 Condições iniciais e de contorno

Para que se possa resolver numericamente um problema modelado por uma EDP é importante que ele seja **bem posto**, isto é, que a solução:

1. exista;
2. seja única;
3. dependa continuamente das condições de contorno e iniciais.

Condições iniciais ou de contorno especificadas incorretamente, por “falta” ou “excesso”, freqüentemente fazem com que a solução não seja única ou mesmo fisicamente plausível. Pequenas variações nestas condições devem produzir mudanças compatíveis na solução numérica. O contrário sugere que alguma condição está incorretamente especificada.

Nos problemas que envolvem EDPs os tipos de condições de contorno podem ser classificados como segue:

1. Condições de contorno do tipo Dirichlet: o valor da função é especificado na fronteira;
2. Condições de contorno do tipo Neumann: o gradiente normal ou tangencial é especificado na fronteira;
3. Condições de contorno periódica: o valor da função se repete;
4. Condições de contorno não reflexiva: não pode haver restrição ao valor da função.

Os dois primeiros tipos de condições de contorno são clássicos. O terceiro tipo de condição de contorno acontece quando o domínio “se fecha sobre si mesmo” ou se repete periodicamente. Portanto, caso se precise do “ponto” que vem depois do último, na realidade este é o primeiro ponto da malha. De maneira análoga, o ponto que vem antes do primeiro é, na realidade, o último ponto computacional. Exemplos práticos desse tipo de condição de contorno em DFC ocorrem sempre que se têm malhas computacionais que se fecham sobre si mesmas, como uma malha do tipo “O” sobre um aerofólio bidimensional.

As condições de contorno não reflexivas ocorrem em fronteiras onde não deve existir nenhuma restrição ao valor da função ou, em outras palavras, sinais que chegam à fronteira devem ser capazes de atravessar esta fronteira sem que nada seja refletido de volta para o domínio de cálculo. O caso mais típico de ocorrência da necessidade de se implementar condições de contorno deste tipo ocorre em “fronteiras distantes”, ou seja, as fronteiras usualmente indicadas como *far field* na literatura em inglês. Nestas fronteiras costuma-se admitir que se tenha “escoamento não perturbado”, ou seja, condição de contorno do tipo Dirichlet. Isto vai fazer com que perturbações chegando até a fronteira sejam refletidas de volta para o domínio do cálculo podendo levar a instabilidades numéricas do processo de solução. Entretanto, na maioria dos casos não se chega a situação tão extrema, mas certamente as perturbações refletidas de volta para o domínio do cálculo vão causar erros mensuráveis nos resultados relevantes da simulação, como a distribuição de pressão sobre o corpo. Portanto, a forma correta de tratar tais tipos de contornos consiste exatamente na

condição de contorno não reflexiva. Estas especificações devem levar em conta informações associadas às características das equações de Euler e seu sentido de propagação.

Para fazer uma análise da ligação entre a especificação das condições de contorno e a direção de propagação do escoamento, Hoffmann (1989) utilizou como exemplo as equações de Euler unidimensionais, onde os autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ dessas equações são dados por u , $u + a$ e $u - a$. Assim, considera-se um problema de escoamento atravessando um dado domínio físico, descrito pelas equações de Euler unidimensionais, o escoamento na entrada e saída desse domínio está em velocidade supersônica. Para escoamentos supersônicos, todos os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são positivos. Desta forma, três curvas características entram no domínio e, então, as três condições de contorno podem ser especificadas fisicamente, pois os pontos da fronteira dependerão dos pontos que estão fora do domínio. Na saída do domínio as três curvas características o deixam, não precisando especificar condições de contorno, já que os pontos da fronteira não irão influenciar nos pontos dentro do domínio.

Os casos onde os pontos das fronteiras são avaliados pelos pontos vizinhos dentro do domínio são tratados como condição de contorno numérica, por exemplo, através de fórmulas de extrapolação. Essa especificação também deve ser consistente com a direção de propagação das informações determinadas pelos sinais dos autovalores de $\mathbf{A}$. Assim sendo, se o escoamento é subsônico, na saída do domínio dois dos autovalores são positivos e um é negativo. Esse autovalor negativo indica que uma curva característica leva informação de fora do domínio para a fronteira, ou seja, que o ponto da fronteira de saída depende do ponto vizinho fora do domínio, podendo ser especificado por condição de contorno física. As outras duas podem ser especificadas como condições de contorno numéricas.

3 *SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE EULER*

3.1 Introdução

Tendo sido descritas as equações de Euler bidimensionais para escoamentos não viscosos, esse Capítulo apresenta um método numérico para sua solução.

A obtenção das aproximações discretas das derivadas presentes nas equações de Euler são feitas através do método de aproximação por diferenças finitas. Para a aplicação dessa aproximação é necessário que os pontos da malha que representam um campo de fluido estejam dispostos ordenadamente. Para isso, utiliza-se uma transformação de coordenadas do domínio físico para o computacional, onde os pontos são ordenados e igualmente espaçados em cada direção.

O método se desenvolve através da abordagem explícita. As derivadas das variáveis espaciais são aproximadas por diferenças finitas de primeira ordem seguindo os dois passos do método preditor-corretor de MacCormack. O primeiro passo é uma diferença progressiva que é instável para autovalores positivos da matriz jacobiana. O segundo passo é uma diferença atrasada que é instável para autovalores negativos da matriz jacobiana. Quando combinado o método torna-se estável e de segunda ordem de precisão. Acrescenta-se termos de dissipação artificial baseados na aproximação *upwind*. Esta aproximação leva em conta a direção de propagação das informações do escoamento em um domínio.

Esse Capítulo está organizado em quatro seções. Primeiramente, as aproximações por

diferenças finitas em um plano discretizado são apresentadas. Na sequência é mostrado o procedimento de transformação do domínio físico para o computacional. Assim, as equações de Euler são obtidas em coordenadas gerais e são apresentados os autovalores das matrizes jacobianas neste novo sistema de coordenadas. Depois apresenta-se a discretização temporal, mostrando como a solução caminha no tempo (iterações). Finalmente, a quarta seção abrange todo o desenvolvimento do método explícito utilizado nas seguintes etapas:

1. As variáveis do fluxo são avaliadas em um nível de tempo (iteração) $n + 1$ através de uma sequência de cálculos dada por dois passos: o preditor e o corretor. O passo preditor aproxima a derivada das variáveis do fluxo pela diferença progressiva de primeira ordem de precisão. O passo corretor aproxima a derivada das variáveis do fluxo pela diferença atrasada de primeira ordem de precisão. A solução é obtida em um nível de tempo $n + 1$ através da média entre os passos preditor e corretor obtendo um método explícito com segunda ordem de precisão;
2. A combinação dos dois passos, preditor e corretor, tem-se um método explícito de segunda ordem de precisão na variável espacial equivalente a diferença centrada. São introduzidas ao método termos de dissipação artificial baseados no método *upwind* para controlar instabilidades não lineares;
3. Os termos de dissipação artificial são adicionados em ambos os passos do método de MacCormack. Estes termos contém coeficientes não lineares que minimizam os efeitos das oscilações nas regiões pré- e pós-choque;
4. O valor do passo no tempo é avaliado pelo número de CFL obtido para convergência da solução em métodos explícitos. Para acelerar a convergência da solução estacionária é utilizado o passo no tempo local;

3.2 Aproximação por Diferenças Finitas

Para que seja possível tratar numericamente um conjunto de EDPs torna-se necessário expressá-las na forma de operações aritméticas adequadas. Essencialmente, deve-se representar as derivadas de uma EDP através de expressões algébricas, o que corresponde à **discretizar** a EDP. Para um campo de escoamento a discretização em geral é em termos de uma malha de pontos dispostos ordenadamente. Portanto, antes de se resolver numericamente uma EDP é preciso encontrar as respectivas expressões escritas em função dos pontos da malha que discretizam o meio fluido. O resultado final desse processo é uma equação algébrica, denominada **equação de diferenças finitas** (EDF).

Sob o ponto de vista de se entender os processos que ocorrem durante a solução numérica de um problema, é muito interessante se imaginar que existe um estágio intermediário entre as equações diferenciais originais, onde o problema é formulado, e as EDF's, após sua completa discretização. Este estágio intermediário é obtido ao se discretizar unicamente as derivadas espaciais contidas na equação ou sistema de equações diferenciais parciais originais, mantendo o tempo contínuo.

Dessa forma, pode-se dividir em quatro níveis distintos de aproximação:

1. equação ou sistema de equações diferenciais parciais, onde o problema físico foi originalmente formulado;
2. sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo, resultante da discretização da equação ou sistema de equações acima;
3. sistema de equações de diferenças finitas, resultante da discretização temporal do sistema do item (2);
4. solução numérica do problema.

Uma EDF é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema. Resolvendo-se as EDFs, encontra-se a solução aproximada para

o ponto em questão. Ela não é exata devido a erros como os (FORTUNA, 2000):

1. inerentes ao processo de discretização das equações;
2. de arredondamento nos cálculos computacionais;
3. na aproximação numérica das condições de contorno.

As aproximações de diferenças finitas podem ser obtidas de várias formas. As mais comuns são as que usam a expansão em série de Taylor e interpolação polinomial. As três expressões mais utilizadas para aproximar a primeira derivada de $f(x, y)$ são:

Diferenças progressivas:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{f_{j+1,k} - f_{j,k}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{j,k} = \frac{f_{j,k+1} - f_{j,k}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (3.1)$$

Diferenças atrasadas:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{f_{j,k} - f_{j-1,k}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{j,k} = \frac{f_{j,k} - f_{j,k-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (3.2)$$

Diferenças centradas:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{j,k} = \frac{f_{j+1,k} - f_{j-1,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{j,k} = \frac{f_{j,k+1} - f_{j,k-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.3)$$

Expressões para aproximar as derivadas de ordem superior a 1 de uma função podem ser construídas da mesma maneira como foram obtidas as fórmulas para as primeiras derivadas, por exemplo, por meio de manipulações adequadas da série de Taylor. Tais aproximações são bastante comuns em soluções numéricas de EDPs e podem ser verificadas nas referências básicas do assunto, tais como: Fletcher (1992a), Hirsch (1988a), Fortuna (2000) e Cuminato e Meneguette (1999).

3.3 As Equações de Euler em Coordenadas Transformadas

As transformações de coordenadas são usadas para permitir o mapeamento da geometria irregular, escrita em um sistema de referência (x, y, t) em uma geometria regular em um outro sistema de referência (ξ, η, τ) . Nesse caso, as equações que modelam o escoamento são alteradas para a aplicabilidade dos métodos de diferenças finitas em coordenadas curvilíneas.

Considera-se a introdução das novas variáveis independentes ξ , η e τ para as seguintes relações entre o espaço físico e o computacional (NIXON, 1989), ou seja:

$$\xi = \xi(x, y, t) \quad (3.4)$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \quad (3.5)$$

$$\tau = t \quad (3.6)$$

Dada uma malha em coordenadas curvilíneas, relações entre derivadas com respeito à (x, y, t) e derivadas com respeito à (ξ, η, τ) são encontradas usando a regra da cadeia, ou seja:

$$\partial_\tau = \partial_x x_\tau + \partial_y y_\tau + \partial_t t_\tau \quad (3.7)$$

$$\partial_\xi = \partial_x x_\xi + \partial_y y_\xi + \partial_t t_\xi \quad (3.8)$$

$$\partial_\eta = \partial_x x_\eta + \partial_y y_\eta + \partial_t t_\eta \quad (3.9)$$

logo, tem-se:

$$\partial_\tau = \partial_t + x_\tau \partial_x + y_\tau \partial_y \quad (3.10)$$

$$\partial_\xi = x_\xi \partial_x + y_\xi \partial_y \quad (3.11)$$

$$\partial_\eta = x_\eta \partial_x + y_\eta \partial_y \quad (3.12)$$

onde, na forma matricial, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \partial_\tau \\ \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_\tau & y_\tau \\ 0 & x_\xi & y_\xi \\ 0 & x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Da mesma forma as derivadas com relação as variáveis t , x e y podem ser expandidas em termos de τ , ξ e η , respectivamente, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_t & \eta_t \\ 0 & \xi_x & \eta_x \\ 0 & \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\tau \\ \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Resolvendo a Eq. (3.13) para a derivada cartesiana em termos das derivadas curvilíneas, por inversão de matriz chega-se em:

$$\begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) & (-x_\tau y_\eta + y_\tau x_\eta) & (x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi) \\ 0 & y_\eta & -y_\xi \\ 0 & -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\tau \\ \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde J é o jacobiano definido por:

$$J = (\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y) = (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)^{-1} \quad (3.16)$$

Comparando os elementos da Eq. (3.14) e os da Eq. (3.15) têm-se as seguintes

relações:

$$\xi_x = Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \xi_t = -x_\tau \xi_x - y_\tau \xi_y \quad (3.17)$$

$$\eta_x = -Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi, \quad \eta_t = -x_\tau \eta_x - y_\tau \eta_y \quad (3.18)$$

As derivadas x_ξ , y_ξ , x_η e y_η podem ser obtidas numericamente usando diferenças finitas de acordo com a ordem do método. Como se pretende desenvolver um método com segunda ordem de precisão as derivadas são aproximadas com diferenças finitas centradas:

$$(x_\xi)_{j,k} = \frac{x_{j+1,k} - x_{j-1,k}}{\xi_{j+1,k} - \xi_{j-1,k}}, \quad (x_\eta)_{j,k} = \frac{x_{j,k+1} - x_{j,k-1}}{\eta_{j,k+1} - \eta_{j,k-1}}$$

$$(y_\xi)_{j,k} = \frac{y_{j+1,k} - y_{j-1,k}}{\xi_{j+1,k} - \xi_{j-1,k}}, \quad (y_\eta)_{j,k} = \frac{y_{j,k+1} - y_{j,k-1}}{\eta_{j,k+1} - \eta_{j,k-1}}$$

Com a transformação para coordenadas generalizadas são obtidas as equações de Euler no plano computacional:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

onde

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{J} \mathbf{Q} \quad (3.20)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} [\xi_t \mathbf{Q} + \xi_x \mathbf{F} + \xi_y \mathbf{G}] \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{J} [\eta_t \mathbf{Q} + \eta_x \mathbf{F} + \eta_y \mathbf{G}] \quad (3.22)$$

Em particular, podem ser definidas as componentes de velocidade contravariantes:

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (3.23)$$

Dessa forma, obtêm-se:

$$\bar{\mathbf{Q}} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ U(\rho e_t + p) - \xi_t p \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ V(\rho e_t + p) - \eta_t p \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Em geral, são introduzidos erros na solução destas equações pela discretização dos termos de métrica. Esses erros são pequenos para malhas com pequenas variações. Contudo, onde as malhas são bastante distorcidas ou com espaçamentos relativamente grandes, estes erros podem ter um efeito significativo na precisão dos cálculos. Hirsch (1988b) recomenda uma maneira bastante simples, mas eficiente, de cancelar este efeito em todos os métodos de diferenças finitas que operam em malhas não cartesianas. O procedimento consiste em subtrair na Eq.(3.19) a equação para fluxo livre, ou seja:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}_\infty)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\bar{\mathbf{G}} - \bar{\mathbf{G}}_\infty)}{\partial \eta} = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

3.4 Autovalores das Matrizes Jacobianas no Plano Computacional

As novas matrizes jacobianas que equivalem à forma transformada das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (ver Eqs. (2.16)) são denominadas $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$, respectivamente:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} \quad (3.26)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} \quad (3.27)$$

Os autovalores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$, são:

$$\lambda_{\xi_1} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v \quad (3.28)$$

$$\lambda_{\xi_2} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v \quad (3.29)$$

$$\lambda_{\xi_3} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.30)$$

$$\lambda_{\xi_4} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.31)$$

Similarmente, os autovalores de $\bar{\mathbf{B}}$, são:

$$\lambda_{\eta_1} = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (3.32)$$

$$\lambda_{\eta_2} = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (3.33)$$

$$\lambda_{\eta_3} = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.34)$$

$$\lambda_{\eta_4} = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.35)$$

Nas Eqs. (3.32) a (3.35) o valor da velocidade do som, a , é dada por:

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \quad (3.36)$$

Como as equações de Euler no plano físico são classificadas como hiperbólicas no espaço e tempo, a forma transformada dada pela Eq. (3.19), de acordo com Anderson (1995), são classificadas também como hiperbólicas. Portanto, as propriedades das direções de propagação de informação do fluxo são dadas pelos sinais dos autovalores acima.

Pode-se observar que esses autovalores dependem também dos termos da métrica das malhas, não somente das componentes de velocidade cartesianas u , v e da velocidade do som a . Assim, quando o escoamento estiver em regime supersônico, não implica que os autovalores das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ serão todos positivos, como ocorre com os autovalores das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Para problemas estacionários os termos da métrica dependentes do tempo são iguais a zero, já que não há variação temporal do domínio físico.

3.5 Discretização Temporal

A partir dos valores iniciais das grandezas no instante inicial t_0 , problemas transientes exigem o cálculo da solução da EDP em intervalos sucessivos de tempo Δt até o instante final t_f (FORTUNA, 2000), isto é:

$$t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \dots, t_f - \Delta t, t_f \quad (3.37)$$

A Figura 6 ilustra o procedimento de problemas transientes, onde a solução caminha do tempo n para $n + 1$ com passos de comprimento Δt .

Figura 6: Solução numérica caminhando na dimensão temporal em passos de comprimento Δt .

Na escolha de uma técnica específica para a solução de uma EDP em problemas transientes a aproximação pode ser tratada basicamente de duas formas: *abordagem explícita* ou *abordagem implícita*. No presente trabalho resolveu-se utilizar o método explícito de segunda ordem de precisão pela facilidade de implementação.

3.6 Método Explícito com Segunda Ordem de Precisão

3.6.1 Descrição Geral do Método

O método explícito com segunda ordem de precisão de MacCormack é da família dos métodos explícitos de Lax-Wendroff (HIRSCH, 1988b). Uma propriedade essencial dos métodos de Lax-Wendroff é a combinação da discretização no tempo e as discretizações centradas nas variáveis espaciais. Eles podem ser interpretados como métodos que utilizam diferenças centradas nas variáveis espaciais, diferença de primeira ordem no tempo e a adição de termos dissipativos para garantir segunda ordem de precisão.

Seguindo esta metodologia, a solução das equações de Euler bidimensionais dadas na forma transformada da Eq. (3.19) pelo método explícito de Lax-Wendroff pode ser obtida aproximando a derivada no tempo por diferença de primeira ordem:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} \right)^n \quad (3.38)$$

Com o desenvolvimento em série de Taylor do termo $\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}$ na Eq. (3.38) fornece um erro de truncamento da forma:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = -\frac{(\Delta t)}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^2} \right) + O(\Delta \xi^2, \Delta \eta^2, \Delta t^2) \quad (3.39)$$

Assim, se o termo $\frac{(\Delta t)}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^2} \right)$ passar para o lado esquerdo da Eq. (3.39), obtém-se um erro de truncamento de segunda ordem no espaço e tempo. Dessa forma, o método de Lax-Wendroff de segunda ordem nas variáveis espaciais e do tempo é desenvolvido pela expansão em série de Taylor de $\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}$:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} \right)^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (3.40)$$

Os termos das derivadas no tempo são substituídos nesta expansão pelos termos das derivadas espaciais onde serão discretizadas, para os termos de segunda derivada deve

ser considerado a forma conservativa e a não linearidade das equações neste processo de discretização (HIRSCH, 1988b).

No método de MacCormack estes cálculos que envolvem os termos de segunda derivada são evitados através de uma formulação que combina dois passos para a obtenção da solução em um nível de tempo $n + 1$ (ANDERSON, 1995). Para isso, as variáveis do fluxo são avaliadas no tempo $n + 1$ através da expansão em série de Taylor:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} \right)_{AV}^n \quad (3.41)$$

onde o termo $\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} \right)_{AV}^n$ é um valor médio representativo de $\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t}$ entre os tempos n e $n + 1$ e assim, preserva a segunda ordem de precisão do método.

Pela Eq. (3.19) obtém-se a seguinte formulação compacta do método explícito de MacCormack para a solução em um nível de tempo $n + 1$:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}^n - \Delta t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} \right)_{AV}^n \quad (3.42)$$

Para formular os dois passos do método discretizando as variáveis espaciais, introduz-se pontos da malha (j, k) variáveis, com j caminhando na direção ξ e k caminhando na direção η , definidos como:

$$u_{j,k} = u(j\Delta\xi, k\Delta\eta) \quad (3.43)$$

Basicamente, o método de MacCormack combina a sequência de cálculos em dois passos: o preditor e o corretor. O passo preditor aproxima as variáveis do fluxo por diferenças finitas progressivas. O passo corretor aproxima as variáveis do fluxo por diferenças finitas regressivas. Em problemas bidimensionais o método pode ser definido da seguinte forma:

Passo preditor:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^m = \bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^n - \tau_\xi (\bar{\mathbf{F}}_{j+1,k}^n - \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^n) - \tau_\eta (\bar{\mathbf{G}}_{j,k+1}^n - \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^n) \quad (3.44)$$

Passo corretor:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^{m+1} = \bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^n - \tau_\xi(\bar{\mathbf{F}}_{j,k}^m - \bar{\mathbf{F}}_{j-1,k}^m) - \tau_\eta(\bar{\mathbf{G}}_{j,k}^m - \bar{\mathbf{G}}_{j,k-1}^m) \quad (3.45)$$

onde $\tau_\xi = \frac{\Delta t}{\Delta \xi}$ e $\tau_\eta = \frac{\Delta t}{\Delta \eta}$.

A solução das variáveis do fluxo em um nível de tempo (iteração) $n + 1$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Q}}^m + \bar{\mathbf{Q}}^{m+1}) \quad (3.46)$$

Todos os métodos de segunda ordem de precisão da família Lax-Wendroff que utilizam diferenças centradas para discretização no tempo geram oscilações próximo as discontinuidades (HIRSCH, 1988b). No entanto, os métodos que utilizam diferenças de primeira ordem têm erro de truncamento proporcional a segunda derivada (Eq. (3.39)), este termo atuará como uma viscosidade numérica adicionada ao método para remover as oscilações de alta frequência próximas das discontinuidades.

Uma outra alternativa para esse comportamento oscilatório nas proximidades das ondas de choques em métodos de segunda ordem de Lax-Wendroff é a adição de termos de dissipação artificial como sugerido por Jameson, Schmidt e Turkel (1981). Este trabalho fornece a idéia básica destes termos adicionais que são bastante utilizados nas soluções numéricas das equações de Euler.

As equações de Euler são capazes de capturar um importante efeito não linear que é a formação de ondas de choque em escoamentos transônicos. A não linearidade associada com ondas de choque está na forma de uma discontinuidade no funcional das variáveis do escoamento. Do ponto de vista da análise de Fourier das soluções das equações de Euler, são necessários um número infinito de modos para se resolver uma discontinuidade. A diferença entre o problema físico e a sua representação discreta leva a necessidade por termos de dissipação dos modos não resolvidos. Sem estes termos de dissipação os modos não resolvidos aparecem como erro nos modos resolvidos, degradando a precisão e

estabilidade dos cálculos (PULLIAM, 1986).

Segundo Hirsch (1988b) termos adicionais de dissipação artificial são para simular os efeitos de viscosidade física. Eles removem as oscilações de altas frequências ao redor das discontinuidades em métodos de segunda ordem de precisão que utiliza pontos de diferenças centradas. Entretanto, a natureza particular e a forma destas dissipações irão determinar a precisão e realidade da solução.

A seguir termos de dissipação artificial baseados na discretização *upwind* que leva em consideração a direção de propagação do fluxo são desenvolvidos e subsequente adição ao método explícito de MacCormack segundo Hirsch (1988b).

3.6.2 Termos de dissipação artificial baseados no método *upwind*

Um grande número de métodos encontrados na literatura para a solução das equações de Euler têm sido desenvolvidos baseados na discretização *upwind*. As formas dos termos de dissipações artificiais serão inspiradas na discretização *upwind* sugeridas por Pulliam (1986). Essa discretização leva em conta o sentido em que as informações se propagam em um campo de fluxo, através da análise dos sinais dos autovalores das matrizes jacobianas dados pelas Eqs. (3.28) a (3.31) e (3.32) a (3.35).

A aproximação é feita separando-se as matrizes dos autovalores dos fluxos jacobianos em duas matrizes, uma com todos elementos positivos e outra com todos os elementos negativos, dessa forma:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} = \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}} (\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^{+} + \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-}) \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^{+} + \bar{\mathbf{A}}^{-} \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}$ e $\mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1}$ são, respectivamente, a matriz dos autovetores de $\bar{\mathbf{A}}$ e sua inversa e $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}$ é a matriz dos autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$, ou seja:

$$\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\pm} = \frac{\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}} \pm |\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}|}{2} \quad (3.48)$$

onde $|\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}|$ representa o valor absoluto dos elementos de $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}$. As duas matrizes $\bar{\mathbf{A}}^+$ e $\bar{\mathbf{A}}^-$ têm por construção todos os autovalores positivos e todos autovalores negativos, respectivamente. Da mesma forma são construídas as matrizes $\bar{\mathbf{B}}^+$ e $\bar{\mathbf{B}}^-$. Assim, novos vetores dos fluxos podem ser construídos da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{Q}} = (\bar{\mathbf{A}}^+ + \bar{\mathbf{A}}^-) \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{F}}^+ + \bar{\mathbf{F}}^- \quad (3.49)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}} = (\bar{\mathbf{B}}^+ + \bar{\mathbf{B}}^-) \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{G}}^+ + \bar{\mathbf{G}}^- \quad (3.50)$$

Então, as derivadas das variáveis dos fluxos convectivos na Eq. (3.19):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^-}{\partial \xi} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^-}{\partial \eta} \quad (3.52)$$

As derivadas espaciais desses novos vetores de fluxo $\bar{\mathbf{F}}^+$, $\bar{\mathbf{F}}^-$, $\bar{\mathbf{G}}^+$ e $\bar{\mathbf{G}}^-$, serão discretizadas considerando-se seus sentidos em relação à propagação do fluxo. Pulliam (1986) sugere que para os termos positivos sejam utilizadas diferenças finitas atrasadas e para os termos negativos sejam utilizadas diferenças finitas progressivas. Duas expressões para cada diferença, atrasada ou progressiva, poderão ser usadas de acordo com a ordem de precisão da aproximação *upwind*.

Para aproximação de primeira ordem de precisão são utilizados os seguintes operadores de diferenças finitas:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^+}{\partial \xi} \cong \nabla_{\xi}^r \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^+ = \frac{\bar{\mathbf{F}}_{j,k}^+ - \bar{\mathbf{F}}_{j-1,k}^+}{\Delta \xi} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^+}{\partial \eta} \cong \nabla_{\eta}^r \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^+ = \frac{\bar{\mathbf{G}}_{j,k}^+ - \bar{\mathbf{G}}_{j,k-1}^+}{\Delta \eta} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^-}{\partial \xi} \cong \Delta_{\xi}^p \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^- = \frac{\bar{\mathbf{F}}_{j+1,k}^- - \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^-}{\Delta \xi} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^-}{\partial \eta} \cong \Delta_\eta^p \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^- = \frac{\bar{\mathbf{G}}_{j,k+1}^- - \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^-}{\Delta \eta} \quad (3.56)$$

onde ∇_ξ^r e ∇_η^r representam os operadores de primeira ordem atrasados, na direção ξ e η , respectivamente, e Δ_ξ^p e Δ_η^p representam os operadores de primeira ordem progressivos, na direção ξ e η , respectivamente.

Para segunda ordem de precisão são utilizados os operadores:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^+}{\partial \xi} \cong \delta_\xi^r \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^+ = \frac{3/2 \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^+ - 2 \bar{\mathbf{F}}_{j-1,k}^+ + 1/2 \bar{\mathbf{F}}_{j-2,k}^+}{\Delta \xi} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^+}{\partial \eta} \cong \delta_\eta^r \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^+ = \frac{3/2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^+ - 2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k-1}^+ + 1/2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k-2}^+}{\Delta \eta} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^-}{\partial \xi} \cong \delta_\xi^p \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^- = \frac{-3/2 \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^- + 2 \bar{\mathbf{F}}_{j+1,k}^- - 1/2 \bar{\mathbf{F}}_{j+2,k}^-}{\Delta \xi} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^-}{\partial \eta} \cong \delta_\eta^p \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^- = \frac{-3/2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^- + 2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k+1}^- - 1/2 \bar{\mathbf{G}}_{j,k+2}^-}{\Delta \eta} \quad (3.60)$$

onde δ_ξ^r e δ_η^r representam os operadores de segunda ordem atrasados na direção ξ e η , respectivamente, e δ_ξ^p e δ_η^p representam os operadores de segunda ordem progressivos na direção ξ e η , respectivamente.

Da Eq. (3.49) decorre:

$$\bar{\mathbf{F}}^\pm = \bar{\mathbf{A}}^\pm \bar{\mathbf{Q}} \quad (3.61)$$

As matrizes $\bar{\mathbf{A}}^+$ e $\bar{\mathbf{A}}^-$ pela Eq. (3.47) podem ser escritas como:

$$\bar{\mathbf{A}}^\pm = \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}} \left(\frac{\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}} \pm |\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}|}{2} \right) \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{A}} \pm |\bar{\mathbf{A}}|}{2} \quad (3.62)$$

Aplicando a Eq. (3.62) na Eq. (3.61) obtém-se:

$$\bar{\mathbf{F}}^\pm = \bar{\mathbf{A}}^\pm \bar{\mathbf{Q}} = \frac{\bar{\mathbf{A}}}{2} \bar{\mathbf{Q}} \pm \frac{|\bar{\mathbf{A}}|}{2} \bar{\mathbf{Q}} = \frac{\bar{\mathbf{F}}}{2} \pm \frac{|\bar{\mathbf{A}}|}{2} \bar{\mathbf{Q}} \quad (3.63)$$

Expressões similares as Eqs. (3.62) e (3.63) são obtidas para as matrizes $\bar{\mathbf{B}}^\pm$ e os vetores $\bar{\mathbf{G}}^\pm$.

Nesse momento, considera-se a discretização com segunda ordem de precisão para examinar a seguinte expressão:

$$\delta_\xi^r \bar{\mathbf{F}}^+ + \delta_\xi^p \bar{\mathbf{F}}^- \quad (3.64)$$

utiliza-se a eq.(3.63) na eq.(3.64), onde segue:

$$\frac{1}{2} [(\delta_\xi^r + \delta_\xi^p) \bar{\mathbf{F}} + (\delta_\xi^r - \delta_\xi^p) |\bar{\mathbf{A}}| \bar{\mathbf{Q}}] \quad (3.65)$$

Pela manipulação dos operadores diferença dados pelas Eqs. (3.57) a (3.60), então:

$$\frac{\delta_\xi^r + \delta_\xi^p}{2} = \frac{-\varepsilon^{+2} + 4\varepsilon^{+1} - 4\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}}{4\Delta\xi} = \bar{\delta}_\xi \quad (3.66)$$

e

$$\frac{\delta_\xi^r - \delta_\xi^p}{2} = \frac{\varepsilon^{+2} - 4\varepsilon^{+1} + 6I - 4\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}}{4\Delta\xi} = \frac{1}{4\Delta\xi} (\Delta_\xi \nabla_\xi)^2 \quad (3.67)$$

onde $\varepsilon^{\pm i}$ é o operador deslocamento na direção ξ , dado por $\varepsilon^{\pm i} q_{j,k} = q_{j\pm i,k}$, para qualquer variável ou função $q_{j,k}$ e os novos operadores de diferenças são:

$$\nabla_\xi q_{j,k} = q_{j,k} - q_{j-1,k} \quad \Delta_\xi q_{j,k} = q_{j+1,k} - q_{j,k} \quad (3.68)$$

Pelas Eqs. (3.66) e (3.67) a Eq. (3.65) pode ser escrita como:

$$\left(\bar{\delta}_\xi \bar{\mathbf{F}} + \frac{1}{4\Delta_\xi} (\Delta_\xi \nabla_\xi)^2 |\bar{\mathbf{A}}| \bar{\mathbf{Q}} \right) \quad (3.69)$$

A Eq.(3.69) é uma diferença central de segunda ordem para o vetor de fluxo $\bar{\mathbf{F}}$, mais um termo de dissipação de quarta diferença, Eq. (3.67), para os vetores das variáveis do fluxo $\bar{\mathbf{Q}}$.

O termo de dissipação artificial é uma consequência natural da diferença *upwind* (PULLIAM, 1986). Pode-se notar que o termo de diferença centrada, Eq. (3.66), não é

uma diferença padrão de três pontos mas também é de segunda ordem de precisão. Se expressões de primeira ordem são aplicadas para diferença *upwind*, dadas pelas Eqs. (3.53) a (3.56), então uma análise similar produz uma diferença central padrão de três pontos de segunda ordem para o vetor de fluxo $\bar{\mathbf{F}}$, mais um termo dissipativo de segunda diferença, ou seja, a eq.(3.69) é substituída por:

$$\left(\delta_\xi \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{2\Delta_\xi} (\Delta_\xi \nabla_\xi) |\bar{\mathbf{A}}| \bar{\mathbf{Q}} \right) \quad (3.70)$$

Analisando a Eq. (3.69) e a Eq. (3.70) tem-se um guia para o desenvolvimento de modelos de dissipação artificial com diferenças centradas. Adicionando termos de dissipação de quarta diferença nos operadores de diferenças centradas do vetor de fluxo $\bar{\mathbf{F}}$, Eq. (3.69), o método resultante equivale ao método *upwind* de segunda ordem de precisão. O uso de dissipação de segunda diferença, Eq.(3.70), pode produzir um método *upwind* equivalente de primeira ordem de precisão (PULLIAM, 1986).

3.6.3 Método explícito de MacCormack com dissipação artificial

No método de MacCormack os termos de dissipação artificial são adicionados em ambos passos preditor e corretor (HIRSCH, 1988b), sendo:

Passo preditor:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^m = \bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^n - \tau_\xi (\bar{\mathbf{F}}_{j+1,k}^n - \bar{\mathbf{F}}_{j,k}^n) - \tau_\eta (\bar{\mathbf{G}}_{j,k+1}^n - \bar{\mathbf{G}}_{j,k}^n) + \mathbf{D}_{j,k}^n \quad (3.71)$$

Passo corretor:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^{m+1} = \bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^n - \tau_\xi (\bar{\mathbf{F}}_{j,k}^m - \bar{\mathbf{F}}_{j-1,k}^m) - \tau_\eta (\bar{\mathbf{G}}_{j,k}^m - \bar{\mathbf{G}}_{j,k-1}^m) + \mathbf{D}_{j,k}^m \quad (3.72)$$

A solução das variáveis do fluxo em um nível de tempo (iteração) $n + 1$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^m + \bar{\mathbf{Q}}_{j,k}^{m+1}) \quad (3.73)$$

Jameson, Schmidt e Turkel (1981) e Kim e Duck (2001) sugerem a construção do

operador dissipativo da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_{j,k} = d_{j+\frac{1}{2},k} - d_{j-\frac{1}{2},k} + d_{j,k+\frac{1}{2}} - d_{j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

com os fluxos dissipativos definido por:

$$d_{j+\frac{1}{2},k} = \alpha_{j+\frac{1}{2},k} (d_{j+\frac{1}{2},k}^{(2)} - d_{j+\frac{1}{2},k}^{(4)}) \quad (3.75)$$

$$d_{j-\frac{1}{2},k} = \alpha_{j-\frac{1}{2},k} (d_{j-\frac{1}{2},k}^{(2)} - d_{j-\frac{1}{2},k}^{(4)}) \quad (3.76)$$

sendo $\alpha_{j+\frac{1}{2},k}$ e $\alpha_{j-\frac{1}{2},k}$ os termos de escalonamento definidos pelas expressões:

$$\alpha_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} (\sigma_{j+1,k} J_{j+1,k}^{-1} + \sigma_{j,k} J_{j,k}^{-1}) \quad (3.77)$$

$$\alpha_{j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} (\sigma_{j,k} J_{j,k}^{-1} + \sigma_{j-1,k} J_{j-1,k}^{-1}) \quad (3.78)$$

com

$$\sigma_{j,k} = |U| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} + |V| + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.79)$$

A utilização de operadores de segunda e quarta diferenças segue também as idéias de Pulliam (1986) para o controle das instabilidades não lineares. Assim, define-se:

$$d_{j+\frac{1}{2},k}^{(2)} = \epsilon_{j+\frac{1}{2},k}^{(2)} (\mathbf{Q}_{j+1,k} - \mathbf{Q}_{j,k}) \quad (3.80)$$

$$d_{j-\frac{1}{2},k}^{(2)} = \epsilon_{j-\frac{1}{2},k}^{(2)} (\mathbf{Q}_{j,k} - \mathbf{Q}_{j-1,k}) \quad (3.81)$$

$$d_{j+\frac{1}{2},k}^{(4)} = \epsilon_{j+\frac{1}{2},k}^{(4)} (\mathbf{Q}_{j+2,k} - 3\mathbf{Q}_{j+1,k} + 3\mathbf{Q}_{j,k} - \mathbf{Q}_{j-1,k}) \quad (3.82)$$

$$d_{j-\frac{1}{2},k}^{(4)} = \epsilon_{j-\frac{1}{2},k}^{(4)} (\mathbf{Q}_{j+1,k} - 3\mathbf{Q}_{j,k} + 3\mathbf{Q}_{j-1,k} - \mathbf{Q}_{j-2,k}) \quad (3.83)$$

com

$$\epsilon_{j+\frac{1}{2},k}^{(2)} = K_2 \Delta t_{j,k} \max(\Gamma_{j+2,k}, \Gamma_{j+1,k}, \Gamma_{j,k}, \Gamma_{j-1,k}) \quad (3.84)$$

$$\epsilon_{j-\frac{1}{2},k}^{(2)} = K_2 \Delta t_{j,k} \max(\Gamma_{j+1,k}, \Gamma_{j,k}, \Gamma_{j-1,k}, \Gamma_{j-2,k}) \quad (3.85)$$

$$\epsilon_{j+\frac{1}{2},k}^{(4)} = \max\left[0, \left(K_4 \Delta t - \epsilon_{j+\frac{1}{2},k}^{(2)}\right)\right] \quad (3.86)$$

$$\epsilon_{j-\frac{1}{2},k}^{(4)} = \max\left[0, \left(K_4 \Delta t - \epsilon_{j-\frac{1}{2},k}^{(2)}\right)\right] \quad (3.87)$$

e

$$\Gamma_{j,k} = \frac{|p_{j+1,k} - 2p_{j,k} + p_{j-1,k}|}{|p_{j+1,k} + 2p_{j,k} + p_{j-1,k}|} \quad (3.88)$$

sendo K_2 e K_4 parâmetros definidos pelo usuário.

Os termos de dissipação artificial garantem segunda ordem de precisão espacial em regiões suaves do escoamento, e primeira ordem de precisão em regiões com altos gradientes de pressão, como nas proximidades de ondas de choques. A transição entre os operadores de segunda e quarta ordem é efetuada através da avaliação do gradiente de pressão, medido pelo termo $\Gamma_{j,k}$. Assim, em regiões suaves do escoamento, os modos desacoplados decorrentes da formulação centrada são amortecidos pelo termo de quarta diferença. Em regiões próximas a descontinuidades são evitadas oscilações pré- e pós-choques pelo efeito do termo de segunda diferença. O controle sobre este processo pode ser efetuado através do ajuste dos coeficientes K_2 e K_4 . Nos trabalhos de Oliveira (1993), Kim e Duck (2001), Pulliam (1986) e Mavriplis (1990) são fornecidos alguns valores usuais para esses parâmetros como de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$ para K_2 e $\frac{1}{256}$ a $\frac{1}{100}$ para K_4 .

3.6.4 Valores de passos no tempo e condição CFL

Nos métodos explícitos para a equação de Euler estuda-se convergência através da análise de **von Neumann**. Para a análise de estabilidade da solução o número de Courant-Friedrichs-Lewy ou, como tratado usualmente na literatura, **condição CFL** é obtido pelo fator de amplificação que deve ser menor ou igual a 1 (HIRSCH, 1988b).

Para solução das equações de Euler bidimensionais utilizando métodos explícitos de MacCormack, Hirsch (1988b) apresenta a seguinte expressão para estabilidade:

$$\Delta t \leq \left[\frac{|\lambda_{A_{max}}|}{\Delta x_{min}} + \frac{|\lambda_{B_{max}}|}{\Delta y_{min}} \right]^{-1} \quad (3.89)$$

onde $|\lambda_{A_{max}}|$ e $|\lambda_{B_{max}}|$ são os valores absolutos dos autovalores das matrizes jacobianas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente.

Assim, em coordenadas curvilíneas gerais:

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{|U| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} + |V| + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \quad (3.90)$$

sendo U e V as componentes de velocidade contravariantes.

Para se obter a solução do problema estacionário, Hirsch (1988b) sugere o uso de uma técnica simples de aceleração de convergência usando passo no tempo variável, de forma que se mantenha um número de CFL constante em todo o campo.

$$\Delta t_{j,k} = \frac{\text{CFL}}{|U_{j,k}| + a_{j,k}\sqrt{(\xi_x)_{j,k}^2 + (\xi_y)_{j,k}^2} + |V_{j,k}| + a_{j,k}\sqrt{(\eta_x)_{j,k}^2 + (\eta_y)_{j,k}^2}} \quad (3.91)$$

onde a evolução no tempo da solução perde o significado físico.

4 *CÁLCULO DO ESCOAMENTO TRANSÔNICO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO*

4.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentados os resultados do cálculo do escoamento estacionário em regime transônico ao redor de um aerofólio NACA0012. No Capítulo 3 um método explícito para a solução das equações de Euler é apresentado. Este método é implementado para os cálculo do escoamento transônico.

Dentre os principais resultados obtidos são apresentados os contornos de número de Mach e de pressão, distribuições de pressão em torno do aerofólio e os coeficientes aerodinâmicos. Para ter uma idéia do desempenho e eficiência do método, o decaimento da norma do resíduo é mostrado graficamente. Os resultados conseguidos com essa implementação computacional são comparados com outros resultados encontrados na literatura técnica.

4.2 Domínio Discretizado e Condições Iniciais

Uma malha estruturada do tipo C em torno do aerofólio é usada para discretizar o campo de fluido. A malha é obtida de forma a obedecer as premissas da discretização para aplicação de diferenças finitas. A Figura 7 apresenta uma ilustração da malha em

detalhe próximo ao aerofólio. A malha contém 129×33 pontos, onde 97 pontos estão sobre o aerofólio. O domínio físico utilizado compreende aproximadamente 15 cordas do perfil aerodinâmico. A distância média na primeira camada dos pontos da superfície do aerofólio varia entre 0.0027 no bordo de ataque e 0.010 no bordo de fuga.

Figura 7: Detalhe da malha do tipo C próximo ao aerofólio NACA0012 usada na discretização do campo de fluido.

Para todos os cálculos, as condições iniciais utilizadas são tomadas como as propriedades do escoamento livre, definidas como: pressão, $p_\infty = 1,01 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$; massa específica ou densidade do ar, $\rho_\infty = 1,223 \frac{kg}{m^3}$; velocidade do som, $a_\infty = 340,2 \frac{m}{s}$, velocidade do escoamento, $V_\infty = Ma_\infty$, razão dos calores específicos, $\gamma = 1,4$; onde, M é o número de Mach e o subscrito ∞ define condição de escoamento livre.

4.3 Condições de Contorno

As condições de contorno para malha estruturada do tipo C para a solução do escoamento em regime transônico estão especificadas de forma a simplificar a implementação.

As fronteiras externas de entrada Γ_5 e de saída Γ_4 e Γ_6 deveriam ser especificadas pelas condições de contorno não reflexivas dadas em Hirsch (1988b). Tais condições do contorno são necessárias para se prevenir a contaminação dos resultados por efeitos de reflexão das informações que se propagam para fora do campo. Estas especificações são em geral mais trabalhosas de se implementar e sendo que a malha utilizada tem a característica de ter as fronteiras externas suficientemente longe do aerofólio, de tal forma que o escoamento perturbado não altera o fluxo livre. Assim, optou-se em especificar as condições de contorno de entrada e saída apenas através das propriedades do escoamento livre nas variáveis do fluxo. Esta especificação facilita a implementação do programa e pode ser utilizada para uma análise inicial do código computacional, sem maior comprometimento dos resultados.

Na fronteira Γ_2 deve ser especificada condição de contorno sobre uma parede sólida, ou seja o próprio aerofólio. Considerando-se as componentes contravariantes das velocidades U e V dadas pelas Eqs. (3.23), onde $V_{j,k}$ é a componente normal à cada ponto da malha (j,k) e $U_{j,k}$ é a componente tangencial à cada ponto da malha (j,k) . A única condição imposta fisicamente é a componente V na parede igual a zero, as outras variáveis do escoamento são especificadas numericamente utilizando técnicas de extrapolação de ordem zero (HIRSCH, 1988b).

Seguindo o procedimento descrito acima, considera-se as componentes contravariantes de velocidade na parede dadas por:

$$V_f = \eta_x u_f + \eta_y v_f \quad (4.1)$$

$$U_f = \eta_y u_f - \eta_x v_f \quad (4.2)$$

onde η_x e η_y são as componentes do vetor normal à parede e o subscrito f indica que a variável está na fronteira sólida.

Desse modo, são obtidas as seguintes expressões para as componentes cartesianas de

velocidades na parede sólida:

$$u_f = \frac{\eta_y U_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} + \frac{\eta_x V_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (4.3)$$

$$v_f = \frac{\eta_x U_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} - \frac{\eta_y V_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (4.4)$$

Fazendo a componente contravariante U_f igual a zero na parede e os valores das variáveis na componente contravariante V_f são extrapolados dos pontos adjacentes, segue:

$$V_f = 0 \quad (4.5)$$

$$U_f = (\eta_y u)_2 - (\eta_x v)_2 \quad (4.6)$$

onde o subscrito 2 representa o ponto adjacente à parede do aerofólio.

Assim, as Eqs. (4.3) e (4.4) se tornam:

$$u_f = \frac{\eta_y U_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (4.7)$$

$$v_f = \frac{\eta_x U_f}{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (4.8)$$

Os valores da densidade e da pressão também são aproximados por extrapolações:

$$\rho_f = \rho_2 \quad (4.9)$$

$$p_f = p_2 \quad (4.10)$$

Nas fronteiras Γ_1 e Γ_3 utilizou-se condições de contorno numérica, ou seja, extrapolação dos valores das propriedades conservadas $\bar{\mathbf{Q}}$ adjacentes às respectivas fronteiras. Como essas fronteiras coincidem fisicamente, os valores atribuídos para estes pontos foram tomados como as médias dos valores obtidos em cada uma das condições de contorno extrapoladas em Γ_1 e Γ_3 .

4.4 Escoamento Transônico Estacionário ao Redor do Aerofólio NACA0012

Os resultados obtidos implementando o método explícito de MacCormack com adição de termos de dissipação artificial de coeficientes não lineares para escoamento transônico, descrito neste trabalho, são comparados com os apresentados por Oliveira (1993). A comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os dados em Oliveira (1993) são apenas para analisar o comportamento da solução na metodologia aplicada. O conhecimento de um código computacional, com relação a uma série de parâmetros numéricos, é essencial para sua utilização de forma correta e eficiente. No entanto, o pleno conhecimento de suas características exigiria a realização de um estudo completo de confiabilidade e validação, cujo processo é extremamente complexo (OLIVEIRA, 1993).

Os principais resultados apresentados são os valores dos coeficientes de arrasto e sustentação, coeficiente de pressão (C_p) e dos contornos do número de Mach e de pressão em torno do aerofólio NACA0012 para várias condições de escoamento estacionário e valores de incidência do aerofólio. Foram calculados quatro casos de acordo com ângulo de ataque e número de Mach diferentes. Os casos foram escolhidos de acordo com pesquisa na literatura técnica visando futuras comparações de resultados. A Tabela 1 apresenta os parâmetros do escoamento e valores de incidência para cada caso. Devido as limitações intrínsecas das equações de Euler resolvidas pela rotina computacional deste trabalho, conserva-se os ângulo de incidência (α) do aerofólio em valores de no máximo 2 graus. Com isso, é possível garantir que o escoamento ao redor do aerofólio é sempre colado à sua superfície, portanto sem o surgimento de regiões de separação.

Para a obtenção dos resultados numéricos inicialmente todos os casos foram resolvidos usando valores do número de CFL igual a 0,9 e os parâmetros para dissipação artificial como sendo: $k_2 = \frac{1}{4}$ e $k_4 = \frac{1}{100}$.

Tabela 1: Parâmetros usados nos casos para cálculo do escoamento ao redor do aerofólio NACA0012.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
M_∞	0,63	0,8	0,8	0,85
α (graus)	2	0	1,25	1

Para caracterizar o escoamento transônico ao redor do aerofólio os contornos de número de Mach (M) e de pressão (Figuras 13 a 16) são apresentados. As Figuras 9 a 12 ilustram os contornos de Mach revelando de forma óbvia a condição mista de escoamentos subsônicos e supersônicos ao redor do perfil aerodinâmico. No caso 1 o aerofólio é exposto a uma condição de relativamente baixo número de Mach, porém com um ângulo de incidência expressivo, onde a formação de ondas de choque ainda não estão estabelecidas, o que é coerente com os aspectos físicos esperados para tais condições de escoamento.

Nos demais casos estudados, ou seja, nos casos 2 a 4, a influência do número de Mach é clara no sentido da formação de ondas de choque. No caso 4, observa-se a formação de uma onda de choque bastante intensa, o que também é de se esperar na respectiva condição de escoamento em Mach igual a 0,85.

As Figuras 17 a 20 apresentam a distribuição de pressão em torno do aerofólio NACA0012 nas condições apresentadas nos casos estudados (ver Tabela 1). Os resultados também são comparados com aqueles obtidos por Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993)¹, que representam uma outra metodologia para solução das equações de Euler por meio de técnicas de volumes finitos.

¹Kroll, N. e Jain, R.K., Solutions of the two-dimensional Euler equations - experience with finite volume code. *DFVLR-FB 87-41*, 1987, Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Figura 9: Contornos do número de Mach ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 1**.

Figura 10: Contornos do número de Mach ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 2**.

Figura 11: Contornos do número de Mach ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 3**.

Figura 12: Contornos do número de Mach ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 4**.

Figura 13: Contornos de pressão ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 1**.

Figura 14: Contornos de pressão ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 2**.

Figura 15: Contornos de pressão ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 3**.

Figura 16: Contornos de pressão ao redor do aerofólio NACA0012 para as condições do **caso 4**.

Figura 17: Distribuição de pressão para o aerofólio NACA0012, **caso 1**. Linhas sólidas - resultados do presente trabalho; $\circ$ - extraídos de Oliveira (1993); $\diamond$ - extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Figura 18: Distribuição de pressão para o aerofólio NACA0012, **caso 2**. Linhas sólidas - resultados do presente trabalho; $\circ$ - extraídos de Oliveira (1993); $\diamond$ - extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Figura 19: Distribuição de pressão para o aerofólio NACA0012, **caso 3**. Linhas sólidas - resultados do presente trabalho; $\circ$ - extraídos de Oliveira (1993); $\diamond$ - extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Figura 20: Distribuição de pressão para o aerofólio NACA0012, **caso 4**. Linhas sólidas - resultados do presente trabalho; $\circ$ - extraídos de Oliveira (1993); $\diamond$ - extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Observa-se que existe uma boa concordância entre os resultados para cada um dos casos estudados. Esta boa concordância entre os valores não é o suficiente para validar completamente o presente método, mas apresenta o bom comportamento da solução obtido pelo código computacional deste trabalho. A solução numérica desenvolvida é capaz de prever as abruptas mudanças nas distribuições de pressão ao redor do aerofólio devido à formação das ondas de choque. O presente método também foi capaz de tratar as oscilações numéricas pré e pós ondas de choque (PULLIAM, 1986), indicando escolha satisfatória de valores dos parâmetros dos termos de dissipação artificial.

Um outro método encontrado na literatura para a validação dos resultados consiste na análise dos coeficientes aerodinâmicos. Os valores obtidos dos coeficientes de sustentação (C_L) e arrasto (C_D) no presente trabalho estão apresentados na Tabela 2, os extraídos de Oliveira (1993) estão apresentados na Tabela 3 e os extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993) estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 2: Coeficientes aerodinâmicos para o aerofólio NACA0012, conseguidos no presente trabalho.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
C_L	0,3262	0,0000	0,3348	0,3845
C_D	0,0065	0,0104	0,0263	0,0628

Tabela 3: Coeficientes aerodinâmicos para o aerofólio NACA0012, extraídos de Oliveira (1993).

Oliveira, 1993	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
C_L	0,3275	0,0020	0,3509	0,3567
C_D	0,0033	0,0103	0,0243	0,0585

Tabela 4: Coeficientes aerodinâmicos para o aerofólio NACA0012, extraídos de Kroll e Jain *apud* Oliveira (1993).

Kroll, 1987	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
C_L	0,3339	0,00003	0,3573	0,3521
C_D	0,0001	0,00848	0,0229	0,0554

Alguns trabalhos estabelecem uma faixa de valores dentro da qual esses coeficientes aerodinâmicos são aceitáveis. Os limites deste campo são definidos a partir de soluções obtidas por vários autores na resolução de um problema modelo (OLIVEIRA, 1993). Seguindo esta metodologia, foram adotados os limites sugeridos por Stolcis e Johnston *apud* Oliveira (1993)² apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Valores aceitáveis para os coeficientes aerodinâmicos, segundo Stolcis e Johnston *apud* Oliveira (1993).

M_∞	α_0	C_L	C_D
0,80	0	-	$0,0085 < C_D < 0,010$
0,80	1,25	$0,346 < C_L < 0,373$	$0,0221 < C_D < 0,0244$

Pode-se observar que o caso 2 se adequa as faixas da Tabela 5, mas apesar de próximos não ocorreu o mesmo com os valores do caso 3. Sendo assim, foi realizada uma análise da sensibilidade da solução numérica a alterações nos valores dos parâmetros dos termos de dissipação artificial para o caso 3. Os coeficientes aerodinâmicos para duas escolhas de valores do parâmetro K_2 estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Influência do coeficiente K_2 sobre a solução (Caso 3):

K_2	C_L	C_D
0,25	0,3348	0,0263
0,50	0,3535	0,0279

²Stolcis, L. e Johnston, L.J., Solutions of the Euler equations on unstructured grids for two-dimensional compressible flow. *Aeronautical Journal Jun.-Jul. 181-195*, 1990, Stolcis e Johnston *apud* Oliveira (1993).

Nota-se uma mudança significativa nos valores dos coeficientes aerodinâmicos, onde o coeficiente de sustentação se enquadra na faixa da Tabela 5. Esta análise indica que as soluções calculadas no presente trabalho são satisfatórias, levando em conta que não houve um estudo da influência do refinamento da malha computacional essencial para validação do código computacional.

A Figura 21 ilustra o histórico de convergência da solução com relação as iterações no processo de cálculo. Neste trabalho a norma é obtida usando os valores de densidade ao longo do campo discretizado, conforme a expressão:

$$\sum \frac{|\rho_{j,k}^{n+1} - \rho_{j,k}^n|}{\rho_{j,k}^n}$$

Uma vez que, para todos os casos, o decaimento da norma do resíduo mostrou-se muito parecido entre si, optou-se por mostrar apenas o resultado para um caso, a saber: para o caso 2 (ver Tabela 1). Neste gráfico pode-se observar boas características de convergência da solução, o que indica uma implementação adequada do método. Oliveira (1993) afirma que os resultados em termos de distribuição de pressão e dos coeficientes aerodinâmicos, tem utilidade prática para cálculos de engenharia assim que se obtém um valor máximo próximo de 10^{-4} para a norma do resíduo. O presente método satisfaz essa afirmação, tendo conquistado a convergência da solução próxima de dez mil iterações para todos os casos estudados.

Figura 21: Histórico de convergência (solução para o Caso 2).

5 CONCLUSÕES

5.1 Conclusões do Trabalho

Este trabalho apresentou a implementação do método explícito de MacCormack com adição de termos de dissipação artificial de coeficientes não lineares, aplicável na solução das equações de Euler estacionárias bidimensionais, visando executar os primeiros passos na direção do desenvolvimento de modelos para a aeroelasticidade computacional.

Neste método os termos de dissipação artificial garantem segunda ordem de precisão espacial em regiões suaves do escoamento e primeira ordem de precisão em regiões com altos gradientes de pressão, como nas proximidades de ondas de choques. Os coeficientes não lineares presentes nestes termos adicionais minimizam os efeitos oscilatórios nas regiões pré e pós ondas de choque. Para facilitar a implementação das condições de contorno utilizou-se as condições de escoamento livre nas fronteiras externas de entrada e saída.

O aerofólio NACA0012 foi usado e o campo de escoamento ao seu redor discretizado por uma malha de diferenças finitas estruturada do tipo C. Quatro casos foram considerados, onde variou-se o número de Mach e o ângulo de incidência dentro de uma faixa que garante que o escoamento não apresente efeitos de separação. A análise dos resultados baseou-se nos contornos de número de Mach e de pressão pelo campo de fluido discretizado, respectivas distribuições de pressão estacionárias e coeficientes aerodinâmicos. Os resultados obtidos apresentaram convergência na solução numérica em aproximadamente dez mil iterações para todos os casos rodados.

Observou-se nos resultados a formação de ondas de choque em concordância com os

efeitos físicos esperados em escoamentos compressíveis. Em todos os casos houve uma boa concordância com as metodologias aplicadas em outras referências da literatura aplicadas aos mesmos casos em estudo. Pequenas discrepâncias são notadas em pontos isolados, especialmente nas regiões pré e pós ondas de choque, que no entanto não chegam a comprometer a qualidade do método e sua implementação em prever os fenômenos de compressibilidade. As comparações realizadas em termos das distribuições de pressão e coeficientes aerodinâmicos não garantem validação completa do método, mas indicam um bom comportamento da solução na captura dos efeitos de compressibilidade como as ondas de choques que caracterizam o escoamento em regime transônico.

5.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Seguem algumas sugestões para a continuidade do trabalho no tema da dissertação e subsequente aplicação em aeroelasticidade:

1. Para maior confiabilidade do código computacional apresentado neste trabalho pode-se partir para análise dos coeficientes aerodinâmicos para outros valores dos parâmetros K_2 e K_4 .
2. Pode-se analisar a influência da quantidade de pontos no domínio sobre a precisão da solução utilizando outros tipos de malhas. Esta verificação deve ser aliada a utilização de especificações de condições de contorno não-reflexivas nas fronteiras de entrada e saída.
3. Depois de um processo de validação mais completo da análise estacionária, pode-se partir para análise não estacionária. Para esta análise, um dos métodos explícitos bastante utilizado na literatura é o dos múltiplos estágios de Runge-Kutta. Outra metodologia em evidência é a abordagem implícita por exigir em alguns casos menos custo computacional nos cálculos.
4. Os resultados da solução das equações de Euler não estacionárias em escoamen-

to transônico poderão ser baseados no movimento oscilatório prescrito para um aerofólio. O desenvolvimento desse método pode visar futura implementação de algoritmos para solução simultânea das equações aerodinâmicas e de dinâmica estrutural no contexto da aeroelasticidade computacional.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, J. D. J. *Modern compressible flow with historical perspectives*. [S.l.]: McGraw-Hill International Editions, 1990.

ANDERSON, J. D. J. *Fundamentals of aerodynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill International Editions, 1991.

ANDERSON, J. D. J. *Computational fluid dynamics - the basics with applications*. [S.l.]: McGraw-Hill International Editions, 1995.

BATINA, L. Implicit upwind solution algorithms for three-dimensional unstructured meshes. *AIAA Journal*, v. 31, p. 801–805, May 1993.

BEAM, R. M.; WARMING, R. F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. *Journal Of Computational Physics*, v. 22, p. 87–110, 1976.

BELO, E.; DEMARQUI JR, C.; ROCHA, J. A fuzzy controller for active flutter suppression. *IX Diname*, Florianópolis, SC, v. 1, p. 09–14, 2001.

BENINI, G. *Modelo numérico para simulação da resposta aeroelástica de asa fixas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2002.

BENINI, G.; BELO, E.; MARQUES, F. Numerical model for aeroelastic analysis in time domain. In: *Proc. of the Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering*. Italy: [s.n.], 2002. CD-Rom.

BENNETT, R. M.; EDWARDS, J. W. An overview of recent developments in computational aeroelasticity. *AIAA Journal*, p. 1–14, Jun 1998.

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover - New York, 1996.

BOPPE, C. W. Calculation of transonic wing flows by grid embedding. In: *AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting*. Los Angeles, Calif.: [s.n.], 1977.

CHYU, W.; DAVIS, S. S.; CHANG, K. S. Calculation of unsteady transonic flow over an airfoil. *AIAA Journal*, v. 19, p. 684–690, Jun 1981.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. J. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. [S.l.]: EDUSP, 1999.

- DADONE, A.; MORETTI, G. Fast euler solver for transonic airfoils part i: theory. *AIAA Journal*, v. 26, p. 409–416, April 1988.
- DEMARQUI, J. et al. Wind-off characteristics of an experimental flutter mount system. In: *X Diname*. Ubatuba, SP: [s.n.], 2003.
- DOWELL, E. H. *A modern course in aeroelasticity*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- DRIKAKIS, D.; TSANGARIS, S. Local solution acceleration method for the Euler and Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, v. 30, n. 2, p. 340–348, Feb 1992.
- DUBUC, L. et al. Solution of the Euler unsteady equations using deforming grids. Aero. Report 9704. March 1997.
- FLETCHER, C. A. J. *Computational techniques for fluid dynamics: fundamental and general techniques*. 2 ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- FLETCHER, C. A. J. *Computational techniques for fluid dynamics: specific techniques for different flow categories*. 2 ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. [S.l.]: EDUSP, 2000.
- FRIEDMANN, P. P. Renaissance of aeroelasticity and its future. *Journal of Aircraft*, v. 36, n. 1, p. 105–121, Jan-Feb 1999.
- GURUSWAMY, G. Unsteady aerodynamics and aeroelastic calculations for wings the euler equations. *AIAA Journal*, v. 28, p. 461–469, Mar 1990.
- HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of numerical discretization*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1988a.
- HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: computational methods for inviscid and viscous flows*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 1988b.
- HOFFMANN, K. A. *Computational fluid dynamics for engineers*. [S.l.]: Engineering Education System - Austin - Texas - USA, 1989.
- HOLST, T. L. Transonic flow computations using nonlinear potential methods. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 36, p. 1–61, 2000.
- HWANG, C. J.; WU, S. J. Adaptive finite volume upwind approach on mixed quadrilateral triangular meshes. *AIAA Journal*, p. 61–67, Jan 1993.
- IOLLO, A.; SALAS, M. D. Optimum transonic airfoils based on the Euler equations. *International Journal of Computers & Fluids*, v. 28, n. 4-5, p. 653–674, Dec 1999.
- JAMESON, A. Essential elements of computational algorithms for aerodynamic analysis and design. NASA Langley Research Center, Hampton, VA. Dec 1997.
- JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical simulation of the Euler equation by finite volume using Runge-Kutta time stepping schemes. *AIAA Paper*, p. 81–1259, 1981.

- KIM, J. W.; DUCK, J. L. Adaptive nonlinear artificial dissipation model for computation aeroacoustics. *AIAA Journal*, v. 39, p. 810–818, May 2001.
- LERAT, A. Implicit methods of second order accuracy for the Euler equations. *AIAA Journal*, p. 33–40, Jan 1985.
- LEVY, L. Experimental and computation steady and unsteady transonic flows about a thick airfoil. *AIAA Journal*, v. 16, p. 564–572, June 1978.
- LIEPMANN, H. W.; PUCKETT, A. E. *Introduction to aerodynamics of a compressible fluid*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1947.
- MACCORMACK, R. W. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. *AIAA Journal*, v. 20, p. 1275–1281, Sep 1982.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. [S.l.]: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1995.
- MARQUES, F. D. *Multi-layer functional approximation of non-linear unsteady aerodynamic response*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, Mar 1997.
- MAVRIPLIS, D. J. Accurate multigrid solution of the euler equations on unstructured and adaptative meshes. *AIAA Journal*, v. 28, p. 213–221, Feb 1990.
- MCCROSKEY, W. J. Some current research in unsteady fluid dynamics. *Journal of Fluids Engineering*, p. 8–38, Mar 1977.
- MEIROVITCH, L. *Elements of vibration analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill International Editions, 1986.
- MOULDEN, T. *Fundamentals of transonic flow*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- NEAL, T. F. Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes. *AIAA Journal*, v. 30, n. 1, p. 70–77, Feb 1991.
- NIXON, A. *Unsteady transonic aerodynamics*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989. (Progress in Astronautics and Aeronautics, v. 120).
- OBAYASHI, S.; GURUSWAMY, G.; GOORJIAN, P. Streamwise upwind algorithm for computing unsteady transonic flows about oscillating wings. *AIAA Journal*, v. 29, p. 1668–1667, Oct 1991.
- OLIVEIRA, L. C. *Uma metodologia de análise aeroelástica com variáveis de estado utilizando técnicas de aerodinâmica computacional*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Ago 1993.
- OSHER, S. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 50, p. 447–481, 1983.
- PRANANTA, B. B.; HOUNJET, M. H. L. Aeroelastic simulation with advanced CFD methods in 2-D and 3-D transonic flow. In: *The Royal Aeronautical Society - Unsteady Aerodynamics - Two Day Conference*. London, UK: [s.n.], 1996. p. 7.1–7.16.

PREIDIKMAN, S. *Numerical simulations of interactions among aerodynamics structural dynamics and control systems*. Tese (Doutorado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1 Oct 1998.

PULLIAM, T. H. Artificial dissipation models for the Euler equations. *AIAA Journal*, v. 24, n. 12, p. 1931–1940, Dec 1986.

PULLIAM, T. H. Implicit methods in CFD. In: *Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Oxford University: [s.n.], 1988.

SIMÕES, C. F. C.; AZEVEDO, J. L. F. The influence of numerical parameters on unsteady airfoil inviscid flow simulations using unstructured dynamic meshes. In: *Brazilian Progress in Aerospace Engineering*. Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil: [s.n.], 1999.

STEGER, J. L.; WARMING, R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, v. 40, p. 263–293, 1981.

VENKATAKRISHNAN, V.; JAMESON, A. Computation of unsteady transonic flows by the solution of Euler equation. *AIAA Journal*, p. 974–981, Aug 1988.

WARMING, R. F.; KUTLER, P.; LOMAX, H. Second-and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. *AIAA Journal*, p. 189–196, Feb 1973.