Maíra Martins da Silva

ANÁLISE DE DIRIGIBILIDADE DE UM
VEÍCULO COMERCIAL LEVE EM AMBIENTE
MULTICORPOS CONSIDERANDO
FLEXIBILIDADE DO QUADRO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Álvaro Costa Neto

São Carlos
2004

Ao meu marido, aos meus pais e à minha irmã

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Álvaro Costa Neto, por ter me oferecido a oportunidade de realizar este trabalho e por ter proporcionado as condições necessárias à sua execução.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida durante a realização do trabalho.

À DaimlerChrysler do Brasil e à Pirelli do Brasil pela disponibilização dos dados necessários para a realização desse projeto.

Aos colegas da pós-graduação, pela amizade, companheirismo, incentivo e colaboração, em especial ao Leopoldo P. Rodrigues de Oliveira, Marcelo Prado e Rodivaldo H. Cunha.

Aos professores e funcionários da EESC, especialmente aos da pós-graduação e do Laboratório de Dinâmica.

A Deus, por tudo.

SUMÁRIO

RESUMO	IV
ABSTRACT	V
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVO	2
1.2 DIVISÃO DOS CAPÍTULOS	3
2 REVISÃO DA LITERATURA	4
2.1 INTRODUÇÃO	4
2.2 DINÂMICA LATERAL DE UM VEÍCULO	4
2.2.1 Modelos Simplificados da dinâmica lateral de um veículo	4
2.2.2 Modelos não lineares da dinâmica lateral de um veículo	6
2.2.3 Modelos de pneus para a dinâmica lateral	8
2.3 MODELAGEM ATRAVÉS DE SISTEMAS MULTICORPOS	10
2.3.1 Corpos flexíveis em códigos de sistemas multicorpos	13
3 REVISÃO TEÓRICA	16
3.1 INTRODUÇÃO	16
3.2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS NA DINÂMICA VEICULAR	16
3.3 DIRIGIBILIDADE	17
3.3.1 Modelagem da dinâmica Lateral de um Veículo utilizando um Modelo de dois graus de liberdade	19
3.3.2 Tendência de Esterçamento	26

3.3.3	Modelagem de Pneumáticos para a Dinâmica Lateral	27
3.4	MODELAGEM DE VEÍCULOS ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE SISTEMAS MULTICORPOS	29
3.5	TEORIA DE SISTEMAS MULTICORPOS	31
3.5.1	Introdução aos sistemas multicorpos	31
3.5.2	Coordenadas generalizadas	32
3.5.3	Juntas no ADAMS	35
3.5.4	Vínculos de movimento no ADAMS	36
3.5.5	Análises realizadas pelo software ADAMS	37
3.5.6	Análise cinemática	41
3.5.7	Análise dinâmica	42
3.6	TEORIA SOBRE CORPOS FLEXÍVEIS EM AMBIENTE MULTICORPOS	47
3.6.1	Flexibilidade Modal no ADAMS	50
4	DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE VEÍCULO	52
4.1	CARACTERÍSTICAS GERAIS DO VEÍCULO	52
4.2	MODELO SIMPLIFICADO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE DO VEÍCULO	53
4.3	MODELO COMPLETO MULTICORPOS COM QUADRO FLEXÍVEL DO VEÍCULO	57
4.3.1	Suspensão Dianteira	57
4.3.2	Suspensão Traseira	62
4.3.3	Conjunto dos Pneus Dianteiros	66
4.3.4	Conjunto dos Pneus Traseiros	67
4.3.5	Trem de Força	67
4.3.6	Cabina e Suspensão da Cabina	69
4.3.7	Sistema de Esterçamento	70

4.3.8	Quadro	71
4.3.9	Modelo Completo do Veículo	71
5	SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	73
5.1	DADOS EXPERIMENTAIS	73
5.2	ANÁLISES COM O MODELO SIMPLIFICADO	75
5.3	VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO MULTICORPOS	78
5.4	ANÁLISE DE DIRIGIBILIDADE	85
5.5	ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	90
6	CONCLUSÃO E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	95
7	BIBLIOGRAFIA	97
	ANEXO A	1

RESUMO

SILVA, M.M., (2004). *Análise de dirigibilidade de um veículo comercial leve em ambiente multicorpos considerando flexibilidade do quadro*. São Carlos, 2003. 100p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Apresenta um modelo multicorpos completo de um veículo comercial leve considerando a flexibilidade do quadro para estudos de dirigibilidade. O modelo de multicorpos foi desenvolvido utilizando o software MSC.ADAMS e inclui a suspensão primária, a cabine, o sistema de esterçamento, o trem de força, o modelo do pneu e um quadro flexível. O comportamento direcional, a dirigibilidade e a interação veículo/pavimento são os fatores que definem o desempenho do veículo em relação à dinâmica lateral. Os parâmetros mais importantes considerando o comportamento lateral do veículo são: a velocidade longitudinal, a rigidez em curva do pneu, a elasticidade da suspensão e do sistema de esterçamento, a transferência lateral de carga, centro de rolamento e propriedades inerciais. Conseqüentemente, considerando a transferência lateral de carga, o uso do quadro flexível se mostra importante. O modelo completo foi validado com resultados experimentais. Típicas manobras para estudo de dirigibilidade foram simuladas, entre elas: curva de raio e velocidade constantes e manobras de dupla mudança de pista. Os resultados obtidos foram a aceleração lateral, a velocidade de guinada, o ângulo de deriva da trajetória, o ângulo de rolamento e o gradiente de esterçamento. Com a análise dos resultados, o veículo mostrou comportamentos diferentes em função da aceleração lateral. Em baixas acelerações laterais, o veículo apresenta um comportamento levemente sub-esterçante. Contudo, em acelerações laterais altas, o veículo se torna sobre-esterçante. Finalmente, uma análise no domínio da frequência foi realizada e ambos modelos mostraram as mesmas características.

Palavras Chave: dirigibilidade, dinâmica lateral veicular, sistemas multicorpos, método dos elementos finitos, prototipagem virtual

ABSTRACT

SILVA, M.M., (2004). *Análise de dirigibilidade de um veículo comercial leve em ambiente multicorpos considerando flexibilidade do quadro*. São Carlos, 2003. 100p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This dissertation presents a complete multibody model of a light commercial truck considering the frame flexibility for handling characteristics studies. The flexible multibody model was developed using MSC.ADAMS, and it includes a complete primary suspension, the cabin, the steering system, the powertrain, a tire model (Delft) and the flexible frame. The directional response behavior, the driveability and the vehicle/road interaction are the factors that define vehicle handling performance. The most important parameters concerning lateral behavior are: longitudinal velocity, tire cornering stiffness, suspension system elasticity, steering systems elasticity, lateral load transfer, roll center and inertial properties. Consequently, regarding lateral load transfer, the use of a flexible frame is very important. The complete model was validated with experimental results and for the purpose of vehicle analyses, typical standard handling maneuvers were undertaken including constant radius turn, constant velocity turn and double lane change. The results obtained were lateral acceleration, yaw rate, side slip angle, roll angle and the understeer gradient. Analyzing the results, the vehicle showed a changing behavior concerning steer. At low velocities and lateral accelerations, the vehicle is slightly understeer. However, at higher velocities and lateral accelerations, it becomes oversteer. Finally, a frequency domain analysis was undertaken using the simplified and the complete model and both models shown the same characteristics.

Keywords: *lateral vehicle dynamics, multibody systems, finite element method, and virtual prototyping*

1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de um veículo é determinado pelas forças impostas ao veículo pelos pneumáticos, pela gravidade e pelos efeitos aerodinâmicos. O veículo e seus componentes são estudados a fim de determinar quais forças serão produzidas em cada manobra em particular e como o veículo responderá a essa situação.

A dirigibilidade, ou comportamento lateral de um veículo automotivo, é uma característica de desempenho freqüentemente denominada *handling*. Este termo é usado para representar a estabilidade direcional e a facilidade de controle de um veículo, para uma entrada de esterçamento ou distúrbios externos, sejam estes da pista ou aerodinâmicos. De modo geral, *handling* é uma medida global do comportamento da combinação veículo-motorista. Portanto, a avaliação da dirigibilidade é necessária principalmente para se conhecer a influência de parâmetros de projeto, da suspensão e do pneumático no comportamento do veículo.

A busca incessante da indústria automobilística por veículos cada vez mais leves se traduz em componentes cada vez mais otimizados e flexíveis. A grande flexibilidade do quadro de veículos comerciais causa efeitos prejudiciais ao comportamento dinâmico do veículo, e este fato tem sido foco de interesse e estudo por pesquisadores e engenheiros de desenvolvimento (IBRAHIM *et. al.*, 1996).

Durante as últimas décadas, vários modelos não lineares de veículos foram desenvolvidos utilizando modelos com muitos graus de liberdade a fim de avaliar seu comportamento dinâmico. No entanto, obter as equações de movimento e integrá-las numericamente sem o auxílio computacional é um trabalho extremamente difícil, tedioso, demorado e propenso ao erro. Um grande avanço ocorreu com os métodos de sistemas de multicorpos (*multibody system* – MBS) e os softwares desenvolvidos para esse fim, os quais permitiram uma formulação automática das equações de movimento para diferentes tipos de sistemas mecânicos. Tais programas têm como entradas massas e propriedades de inércia dos corpos rígidos e o tipo de conexão entre eles, ou seja,

juntas e elementos de forças representados por molas, amortecedores e atuadores entre os corpos. Na área automobilística, esses aspectos são abordados ao se definir as massas suspensa e não-suspensa, os elementos das suspensões conectados por juntas ideais, tais como: revolução, cilíndrica, planar, etc., molas, coxins, amortecedores, pneus e atuadores representados por forças. Neste contexto, os sistemas multicorpos têm se mostrado uma poderosa ferramenta para inferir sobre a performance dinâmica de um veículo.

A teoria de sistemas multicorpos é aplicada em inúmeros problemas de engenharia, desde de problemas aeroespaciais a problemas relacionados à engenharia civil, de projetos de veículos a análises de microcomponentes, da robótica a biomecânica. Os campos de aplicações estão continuamente crescendo, em particular, na área de sistemas mecatrônicos. Em função disso, a pesquisa nesta área é contínua e os desafios se encontram na inclusão de corpos flexíveis em ambientes multicorpos, formulação de modelos a partir de software de desenho, identificação de parâmetros, otimização dos projetos desenvolvidos em ambiente multicorpos, análise de durabilidade, modelagem de contato e impacto, interação com fluidos, extensões para controle de sistemas, sistemas não-holônomicos, códigos para integração de equações algébrico-diferenciais, simulações em tempo real, entre outros (SCHIEHLEN, 1997).

Apesar do grande potencial das ferramentas computacionais, é importante notar que durante uma simulação nem todos os parâmetros são controlados e nem todos os aspectos do comportamento real do sistema abordados, pois, por mais complexo que seja o modelo, ele não passa de uma aproximação da realidade. Conseqüentemente, o uso de protótipos virtuais não substitui a parte experimental no desenvolvimento de um veículo. O uso da simulação complementa a parte experimental, permitindo uma melhor escolha e elaboração dos procedimentos de teste, reduzindo o custo e o tempo durante o desenvolvimento de um projeto.

1.1 OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar a dirigibilidade de um veículo comercial leve com o auxílio de uma ferramenta computacional de simulação de sistemas de multicorpos denominada MSC.ADAMS (Automatic Dynamics Analysis of Mechanical Systems), considerando-se a flexibilidade do quadro.

Primeiramente, um modelo simplificado foi implementado em MATLAB com dois graus de liberdade, também conhecido como modelo bicicleta, a fim de realizar as análises preliminares com o veículo em estudo.

Posteriormente, um modelo completo foi implementado em um ambiente multicorpos, onde os componentes são modelados como corpos rígidos. No entanto, o veículo avaliado sofre grande influência da flexibilidade do quadro e considerar essa flexibilidade no modelo era de extrema relevância. Sendo assim, um quadro flexível será introduzido no modelo construído pelas suas bases modais, obtidas através da análise modal desta estrutura com o auxílio do método dos elementos finitos. Esse modelo foi validado experimentalmente com dados cedidos pela Pirelli do Brasil.

Através desses modelos e a simulação de manobras em regime permanente e transitório foi possível analisar e averiguar o comportamento lateral do veículo em estudo.

1.2 DIVISÃO DOS CAPÍTULOS

O Capítulo 2 é a revisão da literatura à respeito do desenvolvimento dos modelos de veículos para o estudo da dinâmica lateral e da modelagem utilizando a técnica de sistemas multicorpos.

O Capítulo 3 aborda a revisão teórica utilizada neste trabalho. Neste capítulo são descritas as formulações matemáticas para o desenvolvimento do modelo de veículo simplificado, as formulações para os sistemas multicorpos e a formulação para a inclusão de corpos flexíveis em ambientes multicorpos.

O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento do modelo matemático de veículo simplificado para o veículo estudado e detalhes da modelagem em sistemas multicorpos e elementos finitos para a construção do modelo completo no programa ADAMS.

O Capítulo 5 apresenta os resultados e as análises realizadas com ambos modelos. Esses resultados são comparados com alguns resultados experimentais para efeito de validação do modelo.

O Capítulo 6 apresenta discussões e a conclusão sobre o trabalho realizado.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão de literatura sobre os aspectos mais relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. A revisão da literatura está subdividida em dois temas centrais: o estudo da dinâmica lateral de um veículo e a modelagem através dos sistemas multicorpos.

Primeiramente será abordado o estudo da dinâmica lateral de veículos. Um breve resumo histórico, desde os primeiros trabalhos de dinâmica veicular, será apresentado na seção destinada aos modelos simplificados de dinâmica lateral. Modelos não lineares da dinâmica lateral de veículos serão tratados em seqüência, onde serão apresentados alguns fatores que contribuem para a não linearidade do sistema e alguns estudos de caso. Em seguida, um breve relato sobre a modelagem não linear de pneumáticos será abordada devido à sua importância no estudo da dinâmica lateral de veículos.

Finalmente, também é apresentada uma revisão da literatura sobre sistemas multicorpos e a inclusão de corpos flexíveis em ambientes multicorpos, apresentando alguns dos trabalhos que mais contribuíram para o desenvolvimento desta área.

2.2 DINÂMICA LATERAL DE UM VEÍCULO

2.2.1 MODELOS SIMPLIFICADOS DA DINÂMICA LATERAL DE UM VEÍCULO

Os primeiros estudos de dirigibilidade foram realizados por OLLEY (1934) que elaborou gráficos do veículo realizando curvas com raio constante considerando a velocidade longitudinal do veículo, descrevendo os ângulos de deriva dos pneumáticos dianteiros e traseiros e a atitude do veículo. Olley também foi o primeiro autor a identificar a importância do ângulo de deriva do pneumático na dinâmica lateral e a relação entre o ângulo de deriva e a força lateral do pneumático.

Os primeiros resultados satisfatórios fornecidos por um modelo matemático linear foram obtidos por SEGEL (1956) que formulou um modelo de três graus de liberdade, sendo eles, velocidade em guinada, velocidade lateral e ângulo de rolamento, que é utilizado até hoje. Outro importante parâmetro desenvolvido por Segel foi o fator de estabilidade. SEGEL (1956) também elaborou um modelo linear de três graus de liberdade, sendo eles, ângulo de guinada, a velocidade lateral e o rolamento da massa suspensa. Neste modelo, os ângulos de deriva das rodas interna e externa à curva são assumidos iguais. Os pneus dianteiros e traseiros são representados como um pneu com rigidez equivalente (SEGEL, 1956, GILLESPIE, 1992).

Baseado no trabalho de SEGEL (1956), WHITCOMB & MILIKEN (1956) desenvolveram um modelo de um e dois graus de liberdade para valores pequenos de aceleração lateral. Este modelo ficou conhecido como modelo *single-track* ou modelo bicicleta por possuir apenas duas rodas equivalentes. A força lateral no pneumático é função da aceleração lateral e o ângulo de deriva do pneumático é função do ângulo de deriva da trajetória e da velocidade de guinada. O modelo não considera a transferência lateral de carga e os subsistemas de suspensão e esterçamento. Esse modelo ainda é largamente utilizado para uma análise geral do comportamento lateral do veículo (WINKLER, 1998).

Um modelo linear de veículo mais bem elaborado foi desenvolvido por PACEJKA (1973a, 1973b, 1973c). Neste modelo, o ângulo de deriva do pneumático é definido como sendo função não apenas da aceleração lateral, mas também da velocidade do veículo ou do raio de curvatura da trajetória, pois a componente da força lateral nos pneumáticos dianteiros diminui significativamente para grandes ângulos de esterço. Este modelo foi chamado por Pacejka de modelo complexo de veículo.

A análise clássica de regime permanente em curva de um veículo é baseada no modelo simples de veículo que considera a aceleração lateral, a única variável que afeta os ângulos de escorregamentos dos pneus. WINKLER, (1998), apresenta um modelo de um veículo complexo, como caminhões com múltiplos eixos não esterçáveis, utilizando uma técnica baseada nesta, onde os ângulos de escorregamentos dependem não só da aceleração lateral, mas também de outra variável de movimento. Ele apresenta uma metodologia de representação de veículos complexos por um veículo simples equivalente.

Uma revisão bastante completa dos modelos lineares de um, dois e três graus de liberdade pode ser encontrada em ELLIS (1994). Neste trabalho existe um estudo abrangente dos modelos lineares de veículos, analisando o comportamento da dinâmica lateral em condições de regime permanente e transiente.

2.2.2 MODELOS NÃO LINEARES DA DINÂMICA LATERAL DE UM VEÍCULO

Modelos lineares de veículos não são confiáveis se os valores de aceleração lateral superarem 0.3 g durante uma manobra. Adicionando as não-linearidades cinemáticas da suspensão, sistema de esterçamento, as propriedades dos pneumáticos e as inércias inerentes ao rolamento, guinada e arfagem do veículo, a faixa confiável do modelo se amplia consideravelmente.

A elasticidade do sistema de direção aumenta a tendência de sub-esterçamento do veículo, pois para um dado ângulo de esterço na direção do veículo, o ângulo de esterço efetivo nas rodas dianteiras será menor. Além disso, devido à geometria e à elasticidade do sistema de direção, pode ocorrer esterçamento devido ao rolamento da massa suspensa do veículo. O sistema de suspensão possui elasticidade que pode contribuir para a tendência de sub-esterçamento do veículo, aumentando a cambagem da roda e o esterçamento das rodas dianteiras (PRADO, 2003).

Modelos que consideram a rolagem do veículo como modelos com três graus de liberdade incluem molas e amortecedores modelados como elementos não-lineares. Essas não linearidades influenciam na distribuição de carregamento entre as rodas internas e externas à curva. Sendo a rigidez do pneu função também da carga normal, é indispensável à modelagem não-linear de elementos como molas e amortecedores na simulação de manobras mais severas (PRADO, 2003).

Análises utilizando modelos veiculares completos são cada vez mais comuns na indústria automobilística e podem ser encontrados na literatura. HEGAZY *et. al.* (2000) apresenta um modelo de 94 graus de liberdade para o estudo de dirigibilidade e análises padronizadas como a dupla mudança de pista.

PRADO *et. al.* (2001) descreve a dinâmica lateral de um ônibus utilizando a modelagem de multicorpos e a validação experimental. Várias metodologias de estudo de dinâmica lateral são apresentadas como o ângulo de esterço, aceleração lateral e a taxa de guinada. Além disso, foram realizadas análises no domínio da frequência e

manobras utilizando um controlador como motorista, variando seus parâmetros. Usando as mesmas técnicas, CUNHA *et. al.* (2001) mostra um estudo de dinâmica lateral para um ônibus urbano de 3 eixos. Parâmetros como centro de rolagem e amortecedores foram ajustados a fim de melhorar a resposta do ônibus considerando o comportamento da sua dinâmica lateral.

A busca incessante da indústria automobilística por veículos cada vez mais leves se traduz em componentes cada vez mais otimizados e flexíveis. A grande flexibilidade do quadro de veículos comerciais causa efeitos prejudiciais ao comportamento dinâmico do veículo, como o aumento da rolagem do veículo devido à transferência lateral de cargas, e este fato tem sido foco de interesse e estudo por pesquisadores e engenheiros de desenvolvimento (IBRAHIM *et. al.*, 1996). Neste trabalho, o comportamento dinâmico de um veículo comercial com suspensão passiva é teoricamente investigado usando um modelo de meio veículo, considerando a suspensão da cabina e a flexibilidade do quadro via teoria das vigas contínuas. Segundo IBRAHIM *et. al.* (1996), existem duas maneiras de se modelar a flexibilidade do quadro de um veículo comercial: (i) a primeira utiliza a teoria de viga contínua para estudar o comportamento dinâmico do quadro, obtendo suas características dinâmicas como frequências naturais, modos de vibrar e as matrizes de massas, rigidezes e amortecimentos modais e as incorporando em um modelo de veículo; (ii) a segunda maneira modela o veículo completo via Métodos dos Elementos Finitos incluindo molas e amortecedores. A primeira técnica promove o entendimento do comportamento dinâmico e pode ser aplicada em outros estudos como controle ativo, mas dificilmente pode ser aplicada em modelos de três dimensões. A segunda é muito complexa e válida para modelos completos, mas apresenta problemas de interação de modos de vibrar de corpos mais ou menos flexíveis, sendo difícil separar as vibrações de alta frequência da estrutura. Além disso, existe uma grande dificuldade de aplicação das técnicas de controle em modelos de Elementos Finitos.

O problema de modelagem de estruturas flexíveis foi, em parte, resolvido com o advento dos códigos que introduziram os corpos flexíveis em softwares de ambiente multicorpos. Assim, somente a flexibilidade dos corpos que influenciam na dinâmica do sistema é modelada pelo método dos elementos finitos e incorporados em um ambiente multicorpos, onde os corpos são considerados rígidos. Nas seções seguintes apresenta-se uma revisão bibliográfica da teoria envolvida neste tipo de modelagem.

A fim de conectar as avaliações subjetivas e objetivas, vários trabalhos propõem métricas fundamentadas em avaliações subjetivas. Um dos trabalhos em questão (CHEN & CROLLA, 1998) apresenta um extensivo estudo correlacionando os resultados de ambas as avaliações. Assim foi possível quantificar genericamente os índices de dirigibilidade que o veículo obteve com algum parâmetro associado com a resposta do veículo.

Para estudos de dirigibilidade em ambientes virtuais é necessária a inclusão de modelos de motoristas, que para realizarem uma manobra virtual apresentaram entradas apropriadas para o ângulo de esterço, aceleração, frenagem e a relação de marchas. Um modelo de motorista para o estudo de dirigibilidade é apresentado por SCHÜLLER *et. al.* (1999) baseado nas respostas humanas e controles do veículo.

Técnicas de controle vêm sendo estudadas a fim de melhorar a dirigibilidade dos veículos. Controle ótimo foi utilizado para minimizar o tempo de manobra em uma dupla mudança de pista, assim os efeitos do momento de inércia relativo a guinada foram otimizados e o método se mostrou excelente para prever a performance do veículo em manobras transientes (CASANOVA *et. al.*, 2000). O controle direto do momento de guinada do escorregamento lateral, considerando as não-linearidades do pneumático, mostrou um melhora significativa na segurança do veículo relacionado à dinâmica lateral (ABE *et. al.*, 1999). O controle H_{∞} , usado para melhorar a dirigibilidade do veículo, mostrou bons resultados e robustez mesmo diante a variação de parâmetros e de estabilidade do sistema (MAMMAR & KOENIG, 2002).

O desenvolvimento de controladores para veículos necessita de modelos dinâmicos de veículos apropriados em um ambiente de simulação versátil. Este ambiente deve atender vários tipos de veículos sem a necessidade de retrabalho, assim os ambientes de simulação tendem a ser modulares. Um simples componente do sistema pode ser trocado dependendo do objetivo da simulação (BERTRAM *et. al.*, 2003).

2.2.3 MODELOS DE PNEUS PARA A DINÂMICA LATERAL

As forças predominantes que agem no veículo são originadas do contato pneumático / pavimento. Essas forças são funções não-lineares de diversas variáveis, como por exemplo, do escorregamento longitudinal, do escorregamento lateral, do

carregamento normal e do ângulo de cambagem. O uso de um modelo de pneumático adequado é fundamental na modelagem de um veículo (PRADO, 2003).

O pneu é formado por diversas camadas de borracha, um material não-linear, não uniforme e anisotrópico tornando sua modelagem matemática complexa (ELLIS, 1994). Na literatura existem vários modelos de pneumáticos desenvolvidos para estudos em dinâmica veicular.

Os primeiros modelos assumiam que a rigidez em curva do pneu permanecia constante com o aumento da carga vertical e do ângulo de escorregamento lateral. Os primeiros levantamentos das características dinâmicas do pneu foram realizados por Evans (*apud* MILLIKEN & MILLIKEN, 1995). Durante a década de 50, Evans elaborou o primeiro gráfico demonstrando a relação entre a força lateral do pneu e o seu ângulo de deriva, baseado em estudos detalhados e levantamentos experimentais.

Devido à dificuldade matemática da modelagem do pneu, as abordagens empíricas mostraram-se mais eficientes. DUGOFF *et. al.* (1970) apresentou um modelo empírico, cujas relações analíticas para as forças longitudinais e laterais são descritas como funções dos ângulos de deriva do pneu, da rigidez em curva, dos escorregamentos longitudinais, da carga normal e dos coeficientes de adesão entre o pneu e o pavimento.

Baseados em dados experimentais, BAKKER *et. al.* (1987 e 1989) e PACEJKA & BAKKER (1991) desenvolveram uma fórmula com coeficientes que descrevem alguns dos parâmetros típicos de um pneumático. Esta fórmula é conhecida como ‘Fórmula Mágica’ e é capaz de descrever as características da força lateral, força de frenagem e torque auto-alinhante com grande acuidade. A determinação dos parâmetros utilizados neste modelo é feita através dos dados obtidos pelas medições realizadas pelo equipamento de teste de pneumáticos da Delft University of Technology.

HOFFMANN (1991), apresentou uma interface geral de pneumáticos em simulações para o programa ADAMS. Esse trabalho tratou da incorporação de modelos pneumáticos em simulações de veículos. A interface criada consiste de uma biblioteca de diferentes modelos de pneumáticos e permite também o uso de modelos definidos pelo usuário.

Estudos feitos por ALLEN *et.al.* (1995) comprovaram a necessidade de um modelo não-linear, incluindo os efeitos de saturação com o aumento da carga vertical e

do ângulo de deriva do pneu. Allen afirmou que com o aumento da carga vertical, a saturação da rigidez em curva do pneu pode provocar um decréscimo da força lateral, resultando em instabilidade em manobras mais severas.

A importância da dinâmica lateral do pneumático na dinâmica lateral do veículo foi também apontada por SULTAN & HEYDINGER (1995). Neste trabalho, o efeito de relaxação do pneumático foi incluído utilizando dois modelos, um de primeira e outro de segunda ordem. Comparando os resultados os modelos lineares do veículo com e sem os modelos de comprimento de relaxação do pneumático, foram observadas diferenças significativas no tempo da resposta em guindada do veículo em relação à entrada ângulo de esterço no volante. Como ambas as modelagens apresentaram respostas parecidas, foi concluído que a modelagem do comprimento de relaxação como um sistema de primeira ordem apresenta bons resultados.

Trabalhos mais recentes apontam o uso de conceitos novos para o desenvolvimento de um modelo extremamente confiável para o estudo de dinâmica veicular. NOOMWOGS *et. al.* (2003) apresenta o desenvolvimento de um simulador de pneus baseado na tecnologia *hardware-in-the-loop* para a análise de dirigibilidade e estabilidade. O modelo é resultado da união entre a simulação computacional do veículo e dados experimentais que alimentam o modelo com dados provenientes dos pneus.

2.3 MODELAGEM ATRAVÉS DE SISTEMAS MULTICORPOS

A complexidade e custos envolvidos durante o desenvolvimento de novos veículos fazem com que análises baseadas em modelagens dinâmicas e simulações se tornem necessárias em estágios iniciais do desenvolvimento. Mesmo que as simulações sejam uma poderosa ferramenta, testes experimentais são imprescindíveis. No entanto, eles podem ser realizados ao nível de componentes utilizando conceitos de subestruturação e no final do desenvolvimento com o veículo completo (KÖRTUM & SCHIEHLEN, 1985).

Neste contexto, os sistemas multicorpos são ferramentas eficientes para simular problemas de dinâmica não-lineares de mecanismos, máquinas e veículos, sendo a modelagem feita com corpos rígidos. Alguns códigos permitem também a inclusão de corpos flexíveis a fim de promover o estudo de estruturas que tenham grandes deformações devido a sua flexibilidade.

A dinâmica de multicorpos é baseada na mecânica clássica e, na engenharia, se aplica a cálculos de mecanismos, giroscópios, satélites, veículos, robôs, biomecanismos, entre outros. Sistemas de dinâmica multicorpos são caracterizados por algoritmos e formalismos prontos para serem implementados computacionalmente.

Os primeiros formalismos da dinâmica de multicorpos surgiram devido à complexidade dos projetos espaciais e o surgimento de computadores mais poderosos na década de 60 (SCHIEHLEN, 1997). Um dos primeiros formalismos foi desenvolvido para a modelagem de satélites com um grande número de corpos flexíveis conectados por juntas esféricas por Hooker & Margoulis em 1965 (*apud* SCHIEHLEN, 1997). Outros pioneiros foram Roberson & Wittenburg que desenvolveram um formalismo para derivação numérica das equações de movimento em três dimensões de uma espaçonave com cadeia topológica aberta (*apud* COSTA NETO, 1991).

A dinâmica de sistemas multicorpos foi primeiramente utilizada para veículos terrestres por Paul & Chace e este trabalho deu origem ao software DAMN em 1969. Posteriormente, surgiu uma evolução deste programa chamada DRAM. Ambos os programas analisavam movimentos no plano e os seus sistemas eram descritos utilizando-se as equações de Lagrange com os multiplicadores de Lagrange para a definição dos vínculos do sistema (*apud* COSTA NETO, 1991).

O software ADAMS, largamente utilizado neste trabalho, se originou dos trabalhos de ORLANDEA (1973) e ORLANDEA & CHACE (1977). O ADAMS é um programa para a simulação de sistemas em três dimensões que utiliza a técnica de matrizes esparsas para resolver as equações algébricas lineares e o método de Gear para a integração das equações diferenciais. As equações dinâmicas do sistema são descritas como equações de Lagrange com os multiplicadores de Lagrange para a definição dos vínculos do sistema (PRADO, 2003).

Com o desenvolvimento dos computadores e dos programas a manipulação das equações passou a ser simbólica (LEVINSON, 1976 e SCHIEHLEN & KREUZER, 1977). Isso possibilitou a geração das equações ao mesmo tempo (simultaneamente,) diminuindo o tempo computacional. Além disso, do ponto de vista numérico, os algoritmos recursivos utilizados no formalismo numérico são bastante eficientes para sistemas com um grande numero de vínculos.

A indústria de veículos é uma das indústrias onde aplicações de conceitos mecatrônicos estão presentes no desenvolvimento de novos sistemas. A principal dificuldade no desenvolvimento de um produto mecatrônico, no caso um veículo, é o desenvolvimento de uma dinâmica funcional (VALÁŠEK, 1999). Atualmente, existem vários programas de simulação capazes de analisar a dinâmica de um veículo, o que se tornou uma etapa fundamental no desenvolvimento e aprimoramento de conceitos avançados em veículos. VALÁŠEK (1999) faz uma abordagem sobre todos as ferramentas disponíveis no mercado, como por exemplo ferramentas de CAD, ferramentas de otimização, ferramentas de equacionamento matemático e modelagem de blocos, ferramentas de elementos finitos e multicorpos, entre outras e suas aplicações e VEILT *et. al.* (1999) mostra como essas aplicações podem ser integradas durante a fase de desenvolvimento e análise.

Hoje em dia, os desafios se encontram na inclusão de corpos flexíveis em ambientes multicorpos, na formulação de modelos a partir de software de desenho (CAD), na identificação de parâmetros, na otimização dos projetos desenvolvidos em ambiente multicorpos, na análise de durabilidade, na simulação de contato e impacto, na interação com fluidos, nas extensões para controle de sistemas, sistemas não-holônomicos, nos códigos para integração de equações algébrico-diferenciais, nas simulações em tempo real, entre outros (SCHIEHLEN, 1997).

VAN STAHEYEN *et.al.* (2003) exploraram o problema de colisão entre corpos usando códigos de sistemas multicorpos. Usualmente, as equações que governam o movimento de dois corpos colidindo sem adesão podem ser encontradas utilizando as equações de Newton para movimentos. Mas este estudo apresenta uma comparação entre a solução clássica do problema e a solução encontrada via sistemas multicorpos. Um vetor de contato é utilizado para o cálculo das forças normais e tangenciais e seus efeitos nos corpos envolvidos na colisão.

Os sistemas multicorpos podem ser utilizados na indústria automotiva não apenas para investigar a performance do veículo como a dirigibilidade ou conforto, mas também na construção de simuladores em tempo real. Assim é possível prever o comportamento do veículo sem a construção do protótipo real, postergando a fase mais onerosa do desenvolvimento de veículo. Um simulador necessita de cálculos em tempo real da dinâmica do veículo em resposta às entradas do motorista. Como os sistemas

multicorpos convencionais utilizam muitos cálculos, seria quase impossível implementar um simulador em tempo real com muitos graus de liberdade. Por isso, SHIIBA & SUDA (2002) sugerem um método aproximado. Essa aproximação é capaz de conduzir um simulador em tempo real de 91 graus de liberdade com acuidade suficiente. Em outra abordagem, BAE *et. al.* (2000) propõem a implementação de um algoritmo eficiente com método explícito de integração numérica que pode ser usado em simuladores em tempo real de modelos dinâmico de veículos. O método de Newton chord é empregado para resolver as equações de movimento e vínculo. O algoritmo proposto mostrou excelentes resultados para o modelo de um protótipo de veículo em tempo real.

Segundo HUSTON & KAMMAN (2000), as três questões mais importantes ao se utilizar simulação numérica de sistemas multicorpos são: (i) o quão bem o sistema multicorpos está representando o sistema real, (ii) o quanto eficiente é a simulação e (iii) quanta acuidade tem a simulação. A complexidade dos modelos de sistemas multicorpos leva o usuário a não ter certeza sobre a acuidade dos resultados sem uma verificação experimental dos mesmos. HUSTON & KAMMAN (2000) propõem um procedimento de teste que pode ser implementado em qualquer código de sistemas multicorpos. Esse procedimento é baseado no teorema do teste da energia que afirma que a derivativa da energia cinética do sistema pode ser expressa com uma combinação linear dos produtos das forças e velocidades generalizadas do sistema.

Estas técnicas também têm sido aplicadas em ambientes espaciais. O que diferencia um sistema multicorpos baseado na terra e um no espaço é o ambiente externo, ou seja, as forças externas que o corpo está exposto durante o movimento. Existem duas abordagens clássicas para o problema no qual, as forças gravitacionais variam no espaço, existe um gradiente de forças e forças de controle podem ser aplicadas: (i) no método de Euler, o movimento de cada corpo é descrito por seus parâmetros cinemáticos: posição do CG segundo o referencial inercial e rotação dos corpos segundo o referencial inercial. (ii) no método de Lagrange, os parâmetros de movimento são escolhidos para serem compatíveis com as condições então as expressões das energias cinéticas, elásticas e potenciais são descritas e o Lagrangiano é aplicado para a solução do problema (SANTINI & GASBARRI, 2003).

2.3.1 CORPOS FLEXÍVEIS EM CÓDIGOS DE SISTEMAS MULTICORPOS

A inclusão de flexibilidade a esses códigos faz com que seja possível não somente analisar pequenas deformações plásticas, mas sim considerar grandes deslocamentos devido à flexibilidade da estrutura.

Existem inúmeros códigos de sistemas multicorpos capazes de incluir corpos flexíveis. Uma extensa descrição de métodos computacionais, em particular, abordagens nodais considerando resultados obtidos pelos métodos dos Elementos Finitos é descrita por WALLRAPP (1998). Ele descreve uma estrutura independente da formulação do código do sistema multicorpos baseada na programação orientada ao objeto. Essas estruturas foram aplicadas a estudos de casos utilizando os softwares de elementos finitos ANSYS e multicorpos SYMPACK.

Algumas das teorias relacionadas aos sistemas multicorpos flexíveis foram descritas e revisadas em (SHABANA, 1997). O artigo descreve a formulação da referência flutuante, os métodos incrementais para o método dos elementos finitos, a formulação para grandes rotações, a teoria linear para a elastodinâmica, entre outras. Além de citar e descrever as teorias relacionadas ao tema, o artigo aponta novas direções, onde novas pesquisas estão sendo realizadas, como: a relação entre as diferentes formulações, a dinâmica de contato e impacto, interação do controle e da estrutura controlada, o uso da identificação modal e métodos experimentais nas simulações, técnicas de computação gráfica, problemas numéricos e grandes deslocamentos.

A determinação das relações entre as diferentes formulações, chamada de formulação da coordenada nodal absoluta, é um dos mais importantes tópicos nesta área de pesquisa. Uma vez que cada formulação tem suas simplificações e hipóteses, e essas relações poderiam gerar critérios claros de uso para cada formulação (SHABANA, 1997). BERZERI & SHABANA (2000) apresentaram modelos de forças simples e precisos que podem ser utilizados com a formulação da coordenada nodal absoluta para a análise de vigas bidimensionais. VON DOMBROWSKI (2003) apresenta uma formulação da coordenada nodal absoluta para um modelo 3D da viga de Euler-Bernoulli, onde a definição das variáveis nodais corresponde a elasticidade e forças de inércia generalizadas das equações de movimento e a matriz de rigidez é uma função não linear das variáveis nodais.

Muitas aplicações requerem a modelagem das forças de contato, que podem ser classificadas de acordo com a fricção entre impacto e escorregamento. Segundo KLISCH (1998), as forças de contato podem ser modeladas por forças aplicadas e de vínculo. Sendo assim, é possível definir-se um conjunto de equações capaz de sintetizar o movimento livre e com vínculos devido a uma força de contato. Essa estrutura foi implementada no SIMPACK, um pacote alemão de multicorpos, e; comparada com a modelagem por contato elástico, obteve bons resultados.

Problemas numéricos devido ao acoplamento matemático das equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais algébricas também são alvo de pesquisa. SIMEON (2001) investiga o comportamento numérico do tempo de integração de alguns métodos de integração usados em sistemas multicorpos flexíveis. Ainda, são feitas algumas recomendações quanto à modelagem para evitar que o intervalo de integração influencie no resultado da simulação. Em particular, foi mostrado que o método Runge-Kutta implícito é capaz de amortecer a resposta se forem adotados passos de integração elevados.

O uso combinado dos sistemas multicorpos e do método de elementos finitos têm sido fundamental no estudo da dinâmica de sistemas onde a flexibilidade estrutural influencia substancialmente o nível de vibração.

Durante o projeto e desenvolvimento de um veículo ferroviário, por exemplo, a complexidade do comportamento dinâmico implica no desenvolvimento de modelos não-lineares completos de multicorpos e elementos finitos. CARLBOM (2001) apresenta um estudo para a seleção dos modos de vibrar do corpo do veículo ferroviário considerando aspectos dinâmicos e de conforto.

3 REVISÃO TEÓRICA

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão da teoria aplicada no desenvolvimento deste trabalho. A revisão da teoria está subdividida em seções que abrangem aspectos fundamentais na dinâmica veicular; dirigibilidade, incluindo a modelagem da dinâmica lateral de um veículo utilizando um modelo de dois graus de liberdade e a modelagem de pneumáticos para a dinâmica lateral; a modelagem de veículos através de sistemas multicorpos; a teoria de sistemas multicorpos e a teoria sobre corpos flexíveis em ambiente multicorpos.

3.2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS NA DINÂMICA VEICULAR

Estudar o comportamento e os movimentos do veículo sobre o pavimento é o objetivo do estudo da dinâmica de veículos. Os movimentos do veículo são definidos com referência a um sistema de coordenadas ortogonais fixa ao CG do veículo e pela convenção SAE (Sociedade de Engenharia Automotiva) as coordenadas são:

- x – para frente e no plano longitudinal de simetria
- y – lateral para o lado direito do veículo
- z – para baixo em relação ao veículo
- p – velocidade de rolagem em torno do eixo x
- q – velocidade de arfagem em torno do eixo y
- r – velocidade de guinada em torno do eixo z

A dinâmica lateral aborda os aspectos de dirigibilidade, controle e estabilidade laterais dos veículos. O estudo envolve os movimentos translacionais na direção lateral e os movimentos rotacionais de rolagem e de guinada.

3.3 DIRIGIBILIDADE

As características da reposta direcional do veículo, a habilidade do motorista, e a influência da pista e do ambiente, são os três fatores primários que definem a performance de dirigibilidade de veículos automotivos. O termo dirigibilidade e/ou *handling* é freqüentemente comparado com os termos *cornering*, *turning* ou resposta direcional; tais termos se referem às propriedades objetivas do veículo mudando de direção e sustentando aceleração lateral. Os fatores que compõe a dirigibilidade de um veículo podem ser considerados como uma malha fechada, onde o veículo interage com o pavimento e com o ambiente, e o motorista fecha a malha, seguindo e compensando a trajetória desejada.

A dirigibilidade dos veículos pode ser avaliada de duas maneiras distintas: avaliações subjetivas e avaliações objetivas em testes de malha aberta, usando um veículo instrumentado. Ambas avaliações podem ser simuladas computacionalmente.

Durante a fase de desenvolvimento do veículo, todas as maneiras têm papéis importantes na avaliação do veículo em diferentes fases do projeto. Avaliações subjetivas de protótipos veiculares requerem motoristas habilidosos e experientes, capazes de dar sugestões resultando na melhoria da dirigibilidade do veículo e são as maneiras mais confiáveis de avaliar um veículo. O principal problema na avaliação subjetiva é o simples fato de sempre necessitar de um protótipo físico e durante o desenvolvimento de um veículo, isso demanda tempo e muito custo. Alguns trabalhos propõem métricas conectando as avaliações subjetivas às objetivas, resultando em projetos melhores em estágios iniciais do desenvolvimento (CHEN & CROLLA, 1998).

A determinação das características de performance do veículo durante uma operação em malha fechada é apenas possível se uma grande quantidade de dados for adquirida a fim de normalizar a influência randômica do motorista e da pista. Esse procedimento é custoso e demorado. A solução para este problema é a adoção de procedimento de testes de resposta direcional em malha aberta, onde as influências do motorista e da pista são minimizadas através do uso de entradas cuidadosamente determinadas sob condições limitadas de ambiente (KUNKEL & LEFFERT, 1988).

O mais antigo procedimento em dinâmica lateral de veículos é o de curva em regime permanente. Ele consiste em acelerar o veículo até uma velocidade desejada em trajetória circular com raio constante entre 30 e 50 m. Quando a condição de regime

permanente é atingida, os dados como a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento lateral do veículo e o ângulo de rolagem são medidos (PASQUINI, 1998).

Além da resposta em regime permanente, outros procedimentos também são adotados para a determinação da resposta transiente. O método mais frequentemente utilizado é a entrada degrau de esterçamento (ISO, 1986). O procedimento consiste em aplicar uma entrada degrau no volante do veículo, fazendo com que o veículo faça uma trajetória circular. A velocidade usual é estabelecida entre 80 e 120 km/h e a aceleração lateral entre 4 e 6 m/s² para veículo de passageiros. Esses valores diminuem para veículos comerciais. Os dados obtidos são o ângulo de esterçamento da direção, a velocidade de guinada, a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento lateral e o ângulo de rolagem (PASQUINI, 1998).

Manobras de mudança de pista também são muito utilizadas para analisar a performance de esterçamento de um veículo. Uma translação lateral de uma largura de pista é denominada simples mudança de pista e a translação lateral de uma largura de pista seguida de retorno para a pista original é denominada dupla mudança de pista (PASQUINI, 1998).

A avaliação da dirigibilidade é necessária principalmente para se conhecer a influência de parâmetros de projeto no comportamento lateral do veículo e, segundo PASQUINI (1998), dentre os mais significativos estão:

- a elasticidade do sistema de suspensão;
- a elasticidade do sistema de esterçamento;
- a velocidade longitudinal do veículo;
- a distribuição da transferência lateral de carga;
- a rigidez lateral do pneumático;
- a posição do centro de massa do veículo;
- a distância do centro de rolamento e o centro de massa;
- as propriedades aerodinâmicas do veículo; etc.

Para um veículo que não possui o eixo traseiro esterçável, ele deve realizar a curva conforme a Fig. 3.1, ou seja, o centro de curvatura deve se situar na projeção do

eixo traseiro. As linhas perpendiculares ao plano de cada roda dianteira devem cruzar a projeção do eixo traseiro no centro de curvatura. Essa geometria é conhecida com *esterçamento de Ackerman* ou *geometria de Ackerman* e é considerada ideal, pois as rodas dianteiras experimentam a mesma tendência no esterço durante a curva.

Figura 3.1 Geometria de um veículo em curva

Em altas velocidades, para neutralizar a aceleração lateral, os pneumáticos devem desenvolver forças laterais e sofrerá um escorregamento lateral ao mesmo tempo em que rola. O ângulo entre seu eixo longitudinal e seu vetor velocidade é o ângulo de escorregamento ou ângulo de deriva, α . Para ângulos de escorregamentos pequenos (menores que 5°), a força lateral é linearmente proporcional ao ângulo de escorregamento e dependente do carregamento.

3.3.1 MODELAGEM DA DINÂMICA LATERAL DE UM VEÍCULO UTILIZANDO UM MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O modelo de dois graus de liberdade é o modelo mais simples para uma abordagem inicial do problema de dirigibilidade. O modelo do veículo apresenta um movimento planar, sendo que os graus de liberdade verticais e rotacionais são eliminados e os graus de A Fig. 3.2 apresenta o modelo de dois graus de liberdade, também conhecido como modelo bicicleta ou *single-track*. Em altas velocidades, o raio da curva é muito maior que a distância entre eixos do veículo, então pequenos ângulos de esterçamento podem ser assumidos e a diferença entre o esterçamento das rodas

internas e externas pode ser ignorada. Assim tanto as rodas dianteiras como as traseiras podem ser representadas por um único conjunto equivalente de roda.

Figura 3.2 Modelo *Single Track* realizando uma curva

O modelo físico pode ser representado pela Fig. 3.3 (COSTA NETO, 2002). O movimento é planar e o pode ser identificado pelas coordenadas generalizadas X_0 , Y_0 e γ . As equações de movimento são escritas para o referencial inercial, ou seja, o referencial O. Existe a necessidade de escrevê-las no referencial local B e, portanto, conhecer a matriz de cossenos diretores entre os dois referenciais. Também existem mais dois referenciais auxiliares nas rodas equivalentes B_1 e B_2 . A distância entre o centro de massa e o eixo dianteiro é denominada por L_1 e a distância entre o centro de massa e o eixo traseiro L_2 . Na Fig. 3.3 também estão descritas as forças laterais, longitudinais e os momentos que atuam nas rodas equivalentes. A entrada do modelo é o ângulo de esterço δ e o ângulo γ é o ângulo entre o referencial inercial O e o do corpo B.

A matriz de cossenos diretores da transformação do referencial local B para o referencial O é dada por:

$$\mathbf{C}^{O,B} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Figura 3.3 Modelo de dois graus de liberdade

A posição do CG do veículo em relação ao referencial inercial O pode ser descrita pela Eq. 3.2.

$$\mathbf{r}_B^O = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Utilizando a matriz $\mathbf{C}^{O,B}$, a posição do eixo dianteiro em relação ao referencial inercial O pode ser expressa pela Eq. 3.3;

$$\mathbf{r}_{B1}^O = \mathbf{r}_B^O + \mathbf{C}^{O,B} \mathbf{r}_{B1}^B \quad (3.3)$$

sendo $\mathbf{r}_{B1}^B$ o vetor posição do eixo dianteiro em relação ao referencial B, dado pela Eq. 3.4.

$$\mathbf{r}_{B1}^B = [L_1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.4)$$

Da mesma maneira, a posição do eixo traseiro em relação ao referencial inercial O pode ser expressa pela Eq. 3.5;

$$\mathbf{r}_{B2}^O = \mathbf{r}_B^O + \mathbf{C}^{O,B} \mathbf{r}_{B2}^B \quad (3.5)$$

sendo $\mathbf{r}_{B2}^B$ o vetor posição do eixo traseiro em relação ao referencial B, dado pela Eq. 3.6.

$$\mathbf{r}_{B2}^B = [-L_2 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.6)$$

As velocidades translacionais e angulares do CG do veículo no referencial inercial O podem expressas pelas Eqs. 3.7 e 3.8, respectivamente.

$$\mathbf{V}_B^O = \begin{bmatrix} \dot{X}_O \\ \dot{Y}_O \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_B^O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Utilizando a matriz $\mathbf{C}^{O,B}$ é possível expressá-las no referencial local B.

$$\mathbf{V}_B^B = [\mathbf{C}^{O,B}]^T \cdot \mathbf{V}_B^O = \begin{bmatrix} \dot{X}_O \cos \gamma + \dot{Y}_O \sin \gamma \\ -\dot{X}_O \sin \gamma + \dot{Y}_O \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_B^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Derivando as velocidades, encontram-se as acelerações que podem ser expressas no referencial local pelas Eqs. 3.11 e 3.12.

$$\mathbf{a}_B^B = \dot{\mathbf{V}}_B^B + \boldsymbol{\omega}^{B,O} \times \mathbf{V}_B^B = \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_x - \omega_z V_y \\ \dot{V}_y + \omega_z V_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{a}_B^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desta forma, as equações de movimento resultam nas Eqs. 3.13, 3.14 e 3.15, expressas no referencial B.

$$F_{xB} = M (\dot{V}_x - \omega_z V_y) \quad (3.13)$$

$$F_{yB} = M (\dot{V}_y + \omega_z V_x) \quad (3.14)$$

$$M_{zB} = I_B \dot{\omega}_z \quad (3.15)$$

As Eqs. 3.16, 3.17 e 3.18 são as somatórias das forças e momentos no referencial B. A Fig. 3.3 apresenta os esforços realizados pelo veículo na manobra. F_x denomina as forças longitudinais, F_y as forças laterais e M_z o momento no eixo vertical. Os índices 1 e 2 determinam respectivamente os eixos dianteiro e traseiro.

$$F_{xB} = F_{x1} \cos \delta_1 - F_{y1} \sin \delta_1 + F_{x2} \quad (3.16)$$

$$F_{yB} = F_{x1} \sin \delta_1 + F_{y1} \cos \delta_1 + F_{y2} \quad (3.17)$$

$$M_{zB} = (F_{x1} \sin \delta_1 + F_{y1} \cos \delta_1) L_1 + F_{y2} L_2 + M_{z1} + M_{z2} \quad (3.18)$$

Para linearizar o modelo, as seguintes hipóteses simplificadoras são adotadas:

1. Velocidade constante;
2. O ângulo de escorregamento lateral é pequeno, ou seja,

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{V_y}{V_x} \right) \ll 1 \text{ e}$$

3. A velocidade angular muito pequena, ou seja, $\dot{\gamma} = \omega_z \approx 0$.

Logo as equações podem ser simplificadas pelas Eqs. 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24.

$$V_x = V \cos \beta \approx V \quad (3.19)$$

$$V_y = V \sin \beta \approx V\beta \quad (3.20)$$

$$\dot{V}_x \approx 0 \quad (3.21)$$

$$\dot{V}_y \approx V\dot{\beta} \quad (3.22)$$

$$\omega_z V_y = \omega_z V \sin \beta \approx 0 \quad (3.23)$$

$$\omega_z V_x = \omega_z V \cos \beta \approx \omega_z V \quad (3.24)$$

Adotando essas simplificações, as equações de movimento podem ser expressas peãs Eqs. 3.25, 3.26 e 3.27.

$$F_{xB} = 0 \quad (3.25)$$

$$F_{yB} = M(V\dot{\beta} + \omega_z V) \quad (3.26)$$

$$M_{zB} = I_B \dot{\omega}_z \quad (3.27)$$

Por outro lado, o veículo não sofre aceleração e nem frenagem durante o estudo, ou seja, $F_{x1} \ll F_{y1}$ e $F_{x2} \ll F_{y2}$, o ângulo de esterço é pequeno, $\delta \ll 1$ e os momentos M_{z1} e M_{z2} são bem menores que os momentos causados pelas forças aplicadas e serão desconsiderados. Assim as equações de movimento podem ser descritas pelas Eqs. 3.28 e 3.29.

$$F_{y1} + F_{y2} = M(V \cdot \dot{\beta} + \omega_z \cdot V) \quad (3.28)$$

$$F_{y1}L_1 - F_{y2}L_2 = I\dot{\omega}_z \quad (3.29)$$

A força lateral do pneu será considerada linear, ou seja, $F_{y1} = -C_1 \cdot \alpha_1$ e $F_{y2} = -C_2 \cdot \alpha_2$. Sendo C a rigidez lateral do pneumático e α o ângulo de escorregamento lateral do pneu definido no referencial do pneu como apresentado na Fig. 3.4 e expresso pela Eq. 3.30.

Figura 3.4 Ângulo de escorregamento lateral do pneu

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left(\frac{v_{yi}}{v_{xi}} \right) \quad (3.30)$$

A matriz de cossenos diretores do referencial local do veículo B para o referencial de cada pneu i é definida como:

$$\mathbf{C}^{B,i} = \begin{bmatrix} \cos \delta_i & -\sin \delta_i & 0 \\ -\sin \delta_i & \cos \delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As velocidades descritas no referencial de cada pneu i são descritas como:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{C}^{B,i} \mathbf{V}^B \quad (3.32)$$

Assim o ângulo de deriva do conjunto de pneus do primeiro eixo pode ser descrito pela Eq. 3.33.

$$\tan \alpha_1 = \frac{-\sin \delta V_x + \cos \delta (V_y + L_1 \omega_z)}{\cos \delta V_x + \sin \delta (V_y + L_1 \omega_z)} = \beta - \delta + \frac{L_1 \omega_z}{V} \quad (3.33)$$

Analogamente, o ângulo de deriva do conjunto de pneus do segundo eixo pode ser descrito pela Eq. 3.34.

$$\tan \alpha_2 = \beta - \frac{L_2 \omega_z}{V} \quad (3.34)$$

Portanto, a força lateral nos pneus dianteiros e traseiros são respectivamente dados pelas Eqs. 3.35 e 3.36.

$$F_{y1} = -C_1 \left(\beta - \delta + \frac{L_1 \omega_z}{V} \right) \quad (3.35)$$

$$F_{y2} = -C_2 \left(\beta - \frac{L_2 \omega_z}{V} \right) \quad (3.36)$$

Finalmente, as equações de movimento podem ser descritas pelo sistema de equações dado pelas Eqs. 3.37 e 3.38.

$$-C_1 \left(\beta - \delta + \frac{L_1 \omega_z}{V} \right) - C_2 \left(\beta - \frac{L_2 \omega_z}{V} \right) = M(V \cdot \dot{\beta} + \omega_z \cdot V) \quad (3.37)$$

$$C_2 L_2 \left(\beta - \frac{L_2 \omega_z}{V} \right) L_1 - C_1 L_1 \left(\beta - \delta + \frac{L_1 \omega_z}{V} \right) = I \dot{\omega}_z \quad (3.38)$$

Reescrevendo as equações, a modelagem do sistema resulta no modelo dinâmico dado pela Eq. 3.39.

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1 + C_2}{MV} & -1 - \frac{C_1 L_1 - C_2 L_2}{MV^2} \\ -\frac{C_1 L_1 - C_2 L_2}{I} & -\frac{C_1 L_1^2 + C_2 L_2^2}{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{MV} \\ \frac{C_1 L_1}{I} \end{bmatrix} [\delta] \quad (3.39)$$

3.3.2 TENDÊNCIA DE ESTERÇAMENTO

Assumindo pequenos ângulos, da Fig. 3.2 pode-se assumir que a Eq. 3.40 é uma relação válida para os ângulos de esterço e deriva.

$$\delta - \frac{l}{R} = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (3.40)$$

Baseados em princípios da estática pode-se descrever também a Eq. 3.41. Sendo F_{z1} e F_{z2} as forças verticais nos pneus.

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{V^2}{gR} \left(\frac{F_{z1}}{C_1} - \frac{F_{z2}}{C_2} \right) \quad (3.41)$$

A SAE define o gradiente de esterçamento K como a diferença entre o gradiente do ângulo de esterço δ e a quantidade $\frac{l}{R}$, ambos em relação à aceleração lateral a_y (Eq. 3.42) para uma dada condição de teste (WINKLER, 1998).

$$K = \frac{d\delta}{da_y} - \frac{d(l/R)}{da_y} = \frac{d(\delta - l/R)}{da_y} \quad (3.42)$$

Para ângulos pequenos, a aceleração lateral pode ser descrita pela Eq. 3.43.

$$a_y = \frac{V^2}{gR} \quad (3.43)$$

Das Eqs. 3.40, 3.41, 3.42 e 3.43, pode-se afirmar que para condições de regime permanente e um simples modelo linear de um veículo de dois eixos a Eq. 3.44 é válida e conhecida como *Equação de Handling*.

$$\delta - l/R = a_y K \quad (3.44)$$

Avaliando a estabilidade de um veículo realizando uma curva em regime permanente pode-se afirmar que:

- O veículo é neutro para $\frac{\partial \delta}{\partial (l/R)} > 0$.
- O veículo se torna instável para U menores que zero e a velocidade neste momento é chamada de *velocidade crítica* e é dada por $V_{cr} = \sqrt{-gl/U}$.
- Quando o termo $\frac{\partial \delta}{\partial (l/R)}$ é unitário, o veículo tem comportamento neutro, quando este termo é maior que 1, o veículo tem comportamento sub-esterçante e quando este termo é menor que 1, o veículo tem comportamento sobre-esterçante.

3.3.3 MODELAGEM DE PNEUMÁTICOS PARA A DINÂMICA LATERAL

No estudo da dinâmica lateral de um veículo, o pneumático tem um papel fundamental. As características dos pneumáticos podem ser linearizadas para o estudo de estabilidade e resposta lateral para ângulos de esterço pequenos. Por outro lado, as características não-lineares dos pneumáticos podem causar mudanças consideráveis na dirigibilidade de um veículo para diferentes valores de aceleração lateral. Assim, não é

mais razoável a análise de dirigibilidade e estabilidade de um veículo utilizando modelos lineares de pneumáticos.

Segundo PACEJKA (1991), o comportamento do pneumático é o resultado da combinação de vários aspectos que podem ser resumidos na Tabela 3.1. Nesta tabela os fatores estão separados entre fatores de regime permanente e de comportamento vibratório, e entre fatores simétricos e assimétricos. Entre esses fatores alguns são mais influentes que os outros. Considerando regime permanente, o carregamento, a aceleração do veículo e a manobra realizada são os fatores mais influentes. E considerando o comportamento vibracional, o amortecimento é o mais influente.

Alguns desses fatores podem ser identificados como as entradas do sistema e estão dispostos na Fig. 3.5 na seção movimento e posição. As saídas do sistema estão designadas como forças (PACEJKA, 1991).

Tabela 3.1 Aspectos que influenciam a resposta do pneumático.

	Regime Permanente		Comportamento Vibratório
Simétrico	<ul style="list-style-type: none"> • Carregamento • Frenagem e Aceleração • Resistência ao rolamento 	<ul style="list-style-type: none"> • Deflexão Radial • Escorregamento tangencial 	<ul style="list-style-type: none"> • Amortecimento • Acoplamento e amplificação dinâmica
Assimétrico	<ul style="list-style-type: none"> • Manobra em curva • Deslocamento da força normal 	<ul style="list-style-type: none"> • Escorregamento lateral 	<ul style="list-style-type: none"> • Deslocamentos de fase e instabilidade

Figura 3.5 Vetores entrada e saída de um modelo genérico de um pneumático

Vários modelos de pneumáticos foram desenvolvidos cada um com o seu propósito e nível de complexidade. A Fig. 3.6 ilustra a variedade de modelos existentes e como eles são desenvolvidos por diferentes técnicas de modelagem. Dependendo do tipo de modelo físico escolhido, uma formulação simples pode suprir o modelo das informações necessárias, mas existem campos que exigem modelos mais complexos. Modelos baseados somente em dados experimentais requerem técnicas de regressão e um grande número de experimentos em pista, por outro lado, modelos avançados teóricos requerem experimentos especiais e introspecção sobre o comportamento do pneumático (PACEJKA, 1991).

Figura 3.6 Necessidades durante o desenvolvimento de um modelo de um pneumático dependendo da sua característica (PACEJKA, 1991).

Entre os modelos desenvolvidos, pode-se destacar os tipicamente teóricos como o Modelo Fiala e o Modelo Gim, nos quais a relação entre a força lateral e o ângulo de escorregamento é expresso através de um polinômio com os parâmetros determinados por testes. Entre os modelos empíricos, o mais famoso é a *formula mágica* de Pacejka, que contém muitos coeficientes determinados experimentalmente e é um modelo bastante utilizado para simulações dinâmicas de veículos (QU & LIU, 2000).

3.4 MODELAGEM DE VEÍCULOS ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE SISTEMAS MULTICORPOS

Toda simulação de um sistema veicular começa com a modelagem, ou seja, a definição de modelos físicos e matemáticos que reproduzam analogamente (ou pelo menos se aproximem) do comportamento do veículo real. A modelagem também deve considerar o objetivo do estudo. Saber gerar modelos significativos, escolher os parâmetros mais adequados e analisar a coerência das respostas é um papel que só o engenheiro pode realizar. A principal vantagem dos pacotes de simulação é a habilidade de gerar, sintetizar e resolver o sistema de equações obtidos via modelagem. Portanto, é de grande importância conhecer os tipos de modelos e os elementos que podem ser utilizados na sua descrição (KÖRTUM & SCHIEHLEN, 1985). Para um veículo, os principais itens a serem considerados são:

1) A princípio, um veículo consiste de um número finito de corpos que podem ser considerados rígidos. A escolha desses corpos depende do tipo de veículo (automóvel, veículos comerciais, trens, etc.) e do estudo dinâmico a ser considerado pelo modelo (estudo de dirigibilidade, estabilidade, conforto, etc.). Esses corpos são conectados através de juntas, restrições de movimento relativo e forças de interação entre os corpos (rígidos ou flexíveis).

2) A suspensão do veículo é de grande importância, pois determina o comportamento dinâmico e vibracional do veículo. Elementos típicos para essa modelagem são molas e amortecedores, os quais podem ser colocados em série ou em paralelo. As descrições das forças podem não ser simples envolvendo características não lineares, equações diferenciais, interações entre o pneumático e o solo, etc.

3) Em alguns problemas, existe a grande influência de deformações elásticas como a elasticidade de quadro e eixos que podem causar problemas de concentração de tensões, fadiga, ruído, vibracional, etc. A modelagem desses corpos flexíveis em um ambiente multicorpos enriquece o modelo e possibilita o estudo mais amplo de suas influências.

Em um sistema multicorpos, cada corpo possui um sistema local de coordenadas, chamado de sistema de referência do corpo em relação ao qual estão definidas as propriedades de inércia. Também são definidos marcadores em relação ao sistema de referência do corpo responsáveis pela definição da localização e orientação dos elementos de interação, como: buchas, molas, forças, etc. Utilizando essa representação, o programa gera as equações de movimento para a análise dinâmica do sistema. Existem dois formalismos para a geração das equações: o numérico e o simbólico. O formalismo numérico gera as equações a cada passo de integração, enquanto o formalismo simbólico gera as equações do sistema apenas uma vez.

O programa de análises de sistemas multicorpos ADAMS é baseado no formalismo numérico e utiliza o método de Newton-Euler Lagrange para a construção dos sistemas de equações.

3.5 TEORIA DE SISTEMAS MULTICORPOS

3.5.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS MULTICORPOS

Historicamente, pode-se considerar que o elemento mais simples de um sistema multicorpos, uma partícula livre, foi abordado pelas equações de Newton em 1686. Corpos rígidos, principais elementos desta teoria, foram introduzidos por Euler em 1775. Para a modelagem dos vínculos, Euler usava o Princípio do Corpo Livre com forças de reação, equações que são conhecidas como equações Newton-Euler (SCHIEHLEN, 1997).

Em 1743, d'Alembert formulou um sistema de corpos rígidos vinculados distinguindo as forças aplicadas e as de reação. Lagrange apresentou uma formulação matemática consistente combinando o Princípio de d'Alembert e o Princípio do Trabalho Virtual, o que resultou em um número mínimo de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Em 1788, Lagrange aplicou o Princípio Variacional a energia cinética e potencial total do sistema considerando vínculos cinemáticos. O

resultado correspondente às coordenadas generalizadas é conhecido como as equações de Lagrange do primeiro e do segundo tipo. As equações do primeiro tipo representam o conjunto de equações diferenciais algébricas e as do segundo tipo, o conjunto mínimo de equações diferenciais ordinárias (SCHIEHLEN, 1997).

Jourdain apresentou em 1913 uma extensão do Princípio de d'Alembert válido para sistemas holonômicos. Para sistemas não holonômicos, as velocidades generalizadas, identificadas como velocidades parciais, foram introduzidas por Kane e Levinson, resultando em uma descrição compacta de sistemas multicorpos (SCHIEHLEN, 1997).

O diagrama apresentado por COSTA NETO (1991) ilustrado na Fig. 3.7 mostra de maneira simplificada as relações entre as várias formas de descrever e obter as equações que modelam o comportamento do sistema.

Figura 3.7 Diagrama simplificado relacionando as formas de descrever um sistema dinâmico (COSTA NETO, 1991)

O software ADAMS utilizado na modelagem deste trabalho é baseado no formalismo numérico e utiliza o método de Newton-Euler Lagrange para a construção dos sistemas de equações.

Na seção seguinte a teoria de multicorpos o software ADAMS utiliza é apresentada. Primeiramente as definições de coordenadas generalizadas, vínculos como juntas e vínculos de movimento são apresentados, posteriormente, os formalismos e as análises realizadas pelo software são descritos. As análises abordadas são as de condições iniciais, cinemáticas e dinâmicas.

No apêndice A, a teoria de multicorpos genérica representada pelo método de Newton-Euler é apresentada.

3.5.2 COORDENADAS GENERALIZADAS

A posição relativa de um corpo em relação ao referencial inercial é dada pelo vetor posição $\mathbf{p}$ definido pelas 3 coordenadas cartesianas do centro de massa (Eq. 3.45) e pela matriz de $\boldsymbol{\varepsilon}$ definida pelos ângulos de Euler que correspondem à sequência 3-1-3, ou seja, rotação em torno do eixo z seguida de uma rotação em torno do eixo x e seguida de uma rotação em torno do eixo z (Eq. 3.46).

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

O conjunto de coordenadas associadas a um corpo rígido i é dado pelo vetor $\mathbf{q}_i$ descrito pela Eq. 3.47.

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Existem 4 referenciais auxiliares utilizados na cálculo cinemático no software ADAMS: $\mathbf{N} = \{ \bar{\mathbf{n}}_1 \quad \bar{\mathbf{n}}_2 \quad \bar{\mathbf{n}}_3 \}$; o referencial inercial; $\mathbf{B}' = \{ \bar{\mathbf{b}}_1' \quad \bar{\mathbf{b}}_2' \quad \bar{\mathbf{b}}_3' \}$, o primeiro

referencial auxiliar do corpo; $\mathbf{B}'' = \{\bar{b}_1'' \ \bar{b}_2'' \ \bar{b}_3''\}$, o segundo referencial auxiliar do corpo e $\mathbf{B} = \{\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \bar{b}_3\}$, o referencial fixo no corpo. As transformações entre esses referenciais estão descritas pela Fig 3.8 e pelas Eqs. 3.48 a 3.50.

$$\{\bar{b}_1' \ \bar{b}_2' \ \bar{b}_3'\} = \{\bar{n}_1 \ \bar{n}_2 \ \bar{n}_3\} \begin{bmatrix} c_\Psi & -s_\Psi & 0 \\ s_\Psi & c_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\{\bar{b}_1'' \ \bar{b}_2'' \ \bar{b}_3''\} = \{\bar{b}_1' \ \bar{b}_2' \ \bar{b}_3'\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\{\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \bar{b}_3\} = \{\bar{b}_1'' \ \bar{b}_2'' \ \bar{b}_3''\} \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A matriz de cossenos diretores $\{\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \bar{b}_3\} = \{\bar{n}_1 \ \bar{n}_2 \ \bar{n}_3\} \mathbf{A}$ que relaciona os referenciais fixo no corpo $\mathbf{B}$ e o inercial $\mathbf{N}$ pode ser descrito pela Eq. 3.51.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_\Psi c_\phi - s_\Psi c_\theta s_\phi & -s_\Psi c_\theta c_\phi - c_\Psi s_\phi & s_\Psi s_\theta \\ s_\Psi c_\phi + c_\Psi c_\theta s_\phi & -s_\Psi s_\phi + c_\Psi c_\theta c_\phi & -c_\Psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Figura 3.8 Rotações dos ângulos de Euler

Baseando-se na escolha das coordenadas, a velocidade longitudinal $\mathbf{u}$ pode ser expressa no referencial fixo ao corpo pelas Eqs. (3.52).

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{p}} \quad (3.52)$$

As velocidades angulares podem ser expressas através dos ângulos de Euler, como expresso pela Eq. 3.53.

$$\boldsymbol{\omega} = {}^N\boldsymbol{\omega}^{B'} + {}^{B'}\boldsymbol{\omega}^{B''} + {}^{B''}\boldsymbol{\omega}^B = \dot{\psi}\bar{\mathbf{b}}_3' + \dot{\theta}\bar{\mathbf{b}}_1'' + \dot{\phi}\bar{\mathbf{b}}_3 = \omega_{\psi}\bar{\mathbf{b}}_3' + \omega_{\theta}\bar{\mathbf{b}}_1'' + \omega_{\phi}\bar{\mathbf{b}}_3 \quad (3.53)$$

A relação $\{\bar{\mathbf{b}}_3', \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{b}}_1''\} = \{\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3\} \mathbf{B}$ entre os eixos de rotação e o sistema de referencia fixo ao corpo pode ser descrito pela Eq. 3.54.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} s_{\phi}s_{\theta} & 0 & c_{\phi} \\ c_{\phi}s_{\theta} & 0 & -s_{\phi} \\ c_{\theta} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Assim pode-se escrever as velocidades angulares, no referencial fixo ao corpo, definidas pela Eq. 3.55.

$$\bar{\omega} = \mathbf{B}\dot{\epsilon} = \mathbf{B}\zeta = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \omega_\psi \\ \omega_\phi \\ \omega_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

A relação entre a derivada temporal da matriz $\mathbf{A}$ de orientação do corpo rígido e a velocidade angular $\bar{\omega}$ é dada pela Eq. 3.56.

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A} \quad (3.56)$$

Sendo $\tilde{\bar{\omega}}$, a matriz determinada pelo operador anti-simétrico, dada pela Eq. 3.57.

$$\tilde{\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Finalmente, para um modelo de um sistema mecânico de nb corpos, o vetor das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ pode ser escrito pela Eq. 3.58.

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{nb}^T] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n] \quad (3.58)$$

sendo $n=6nb$.

3.5.3 JUNTAS NO ADAMS

As juntas no ADAMS aplicam vínculos em algumas das coordenadas generalizadas do sistema e podem ser descritas pela Eq. (3.59).

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (3.59)$$

Por exemplo, uma junta de revolução aplica 5 vínculos entre os corpos conectados por ela permitindo somente um grau de liberdade entre eles.

O conjunto de vínculos pode ser escrito pela Eq. 3.60.

$$\Phi(\mathbf{q}) = [\Phi_1^T(\mathbf{q}) \quad \Phi_2^T(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \Phi_{nj}^T(\mathbf{q})] = [\Phi_1(\mathbf{q}) \quad \Phi_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \Phi_m(\mathbf{q})] \quad (3.60)$$

sendo n_j o número de juntas no modelo e m a soma do vínculos introduzidos pelas juntas.

A derivada temporal das equações das posições cinemáticas dos vínculos resulta nas equações das velocidades cinemáticas dos vínculos encontradas pela Eq. 3.61.

$$\frac{d\Phi(\mathbf{q})}{dt} = \frac{d\Phi(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

A segunda derivada temporal resulta nas equações das acelerações cinemáticas de vínculo encontradas pela Eq. 3.62.

$$\frac{d(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{d(\Phi_{\mathbf{q}})}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}} \frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt} = (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

As Eqs. 3.59, 3.61 e 3.62 estabelecem condições que devem ser seguidas pelas coordenadas generalizadas e pelas suas primeira e segunda derivadas temporais durante todo o tempo. A quantidade $-(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$ é utilizada no cálculo de análise das condições iniciais de força e aceleração.

3.5.4 VÍNCULOS DE MOVIMENTO NO ADAMS

Os movimentos impostos no ADAMS podem ser analisados com vínculos dependentes do tempo e podem ser descritos pela Eq. 3.63.

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

Da mesma forma feita para as juntas, as velocidades e as acelerações cinemáticas de vínculo podem ser encontradas pelas derivadas temporais, resultando nas Eqs. 3.64 e 3.65.

$$\frac{d\Phi(\mathbf{q}, t)}{dt} = \frac{d\Phi}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

$$\frac{d(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)}{dt} = \frac{d\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{d\Phi_t}{d\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{d\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{d\Phi_t}{dt} = (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = \mathbf{0} \quad (3.65)$$

Para um conjunto de coordenadas generalizadas ser consistente, elas devem satisfazer as posições, as velocidades e as acelerações cinemáticas impostas pelas condições de vínculos de movimento.

3.5.5 ANÁLISES REALIZADAS PELO SOFTWARE ADAMS

3.5.5.1 Análise de condição inicial

A análise das condições iniciais determina a consistência da configuração mecânica do modelo no início da simulação. Para que a montagem do modelo seja consistente, as coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ devem satisfazer todas as equações de vínculo Φ , ou seja,

$$\Phi(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

Assim como a derivada temporal das coordenadas generalizadas, as velocidades generalizadas, também devem ser consistentes. Portanto, elas devem satisfazer as equações de velocidade cinemáticas de vínculo, Eq. 3.67.

$$\Phi_q(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

3.5.5.2 Análise das condições iniciais de posição

Durante a análise de condições iniciais, os valores de algumas coordenadas generalizadas devem ser ajustados a fim de satisfazer as condições descritas. Para isso, o ADAMS resolve o problema das condições iniciais por aproximação ótima, tentando minimizar a seguinte função de custo:

$$f(q_1, q_2 \dots q_n) = \frac{1}{2} w_1 (q_1 - q_1^0)^2 + \dots + \frac{1}{2} w_n (q_n - q_n^0)^2 \quad (3.68)$$

Essa função de custo está sujeita as condições de vínculos $\Phi(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$. Na Eq. 3.68, os valores w_i são pesos e q_i^0 são os valores iniciais das coordenadas generalizadas do sistema. Alguns valores iniciais das coordenadas generalizadas são definidos pelo usuário, portanto tem valores exatos. Esse fato justifica a aplicação dos pesos, pois as coordenadas generalizadas definidas pelo usuário receberam pesos de valores relativamente grandes, como 10^{10} e os demais pesos menores como 1.

A Eq. 3.69 descreve a função de custo na notação matricial.

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^0)^T \mathbf{W} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^0) \quad (3.69)$$

sendo $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ a matriz de peso diagonal.

Neste contexto a equação $\Phi(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$ é linearizada ao redor de $\mathbf{q}^0$, resultando na Eq. 3.70.

$$\Phi(\mathbf{q}, t_0) = \Phi(\mathbf{q}^0, t_0) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^0, t_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0) \quad (3.70)$$

Definindo $\mathbf{d} \equiv (\mathbf{q} - \mathbf{q}^0)$, a solução do problema se resume a solução de problema de otimização definido pelas Eqs. 3.71 e 3.72.

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \quad (3.71)$$

$$\Phi(\mathbf{q}^0, t_0) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^0, t_0) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

Para a solução desse problema é definido o Lagrangiano do sistema dado pela Eq. 3.73.

$$F(\mathbf{d}, \lambda) = f(\mathbf{d}) + \lambda \frac{1}{2} (\Phi(\mathbf{q}^0, t_0) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^0, t_0) \mathbf{d}) \quad (3.73)$$

As condições ótimas do problema são estabelecidas quando as derivas parciais em relação à $\mathbf{d}$ e λ .

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}} \right)^T = \mathbf{0} \quad (3.74)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)^T = \mathbf{0} \quad (3.75)$$

Resultando em um sistema linear dado pela Eq. 3.76.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^0, t_0) \\ \Phi(\mathbf{q}^0, t_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi(\mathbf{q}^0, t_0) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Baseando-se na Eq. 3.76, o ADAMS calcula o valor de $\mathbf{d}$, e para um dado $\mathbf{q}^0$ calcula a solução do problema por

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \mathbf{d} \quad (3.77)$$

A configuração calculada pelo novo conjunto de coordenadas generalizadas obtidas pela Eq. 3.77 corresponde ao problema linearizado das Eqs. 3.71 e 3.72. Enquanto a solução que satisfaz as condições da Eq. 3.72 não satisfizer o sistema de vínculos não linear original, dado por $\Phi(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$, um novo conjunto de coordenadas iniciais $\mathbf{q}^0$ é adotado e outra iteração é realizada.

Normalmente, somente algumas iterações são necessárias para encontrar uma solução que satisfaça as equações de vínculos não-lineares. Uma aproximação falha somente quando a linearização feita representa muito mal o sistema não-linear. Mas mesmo em uma situação com grandes não-linearidades, um conjunto de coordenadas iniciais $\mathbf{q}^0$ suficientemente perto da solução garante a convergência do problema. Este fato expõe a real necessidade de um bom conjunto inicial.

3.5.5.3 Análise das condições iniciais da velocidade

A análise da velocidade inicial é a aplicação direta do algoritmo utilizado para a análise das posições iniciais. Além disso, ela é mais simples, pois as equações de vínculo já estão nas formas lineares assim, a solução é encontrada com apenas uma iteração.

A função de custo utilizada é dada pela Eq. 3.78.

$$f(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^0)^T \mathbf{W} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^0) \quad (3.78)$$

A função de custo está sujeita aos vínculos lineares cinemáticos de velocidade (Eq. 3.64) dados pela Eq. 3.79.

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t_0) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

Para o tempo t_0 temos como calcular a quantidade $\boldsymbol{\tau}$ utilizada no cálculo de condições iniciais de forças e aceleração $\boldsymbol{\tau} = -(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}}$.

3.5.5.4 Análise das condições iniciais de forças e acelerações

Na ausência de forças de fricção, a análise das condições iniciais de aceleração requer uma solução linear do sistema modelado pelas equações de movimento e equações de vínculo cinemáticos de aceleração dados pela Eq. 3.62. O sistema tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^0) \\ \Phi(\mathbf{q}^0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\Phi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

A primeira equação do sistema é uma aplicação direta da formulação de Lagrange aplicada ao sistema. Detalhes sobre a formulação e sua aplicação podem ser encontrados na seção análise dinâmica no ADAMS, a seguir. A segunda equação do sistema é resolvida pelos resultados provindos da análise das condições iniciais de velocidade.

Normalmente, o usuário não especifica uma aceleração inicial. As forças de reação e acelerações iniciais são calculadas através da posição inicial, velocidade inicial e forças aplicadas ao sistema no tempo inicial.

Além do cálculo das acelerações $\ddot{\mathbf{q}}$, a solução desse sistema linear também nos disponibiliza a solução para os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. As forças e torques de reação desenvolvidos por causa das juntas são calculadas através das Eqs. 3.81 e 3.82.

$$\mathbf{F}^C = -\left(\frac{\partial \dot{\Phi}^{(j)}}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \boldsymbol{\lambda}_i^{(j)} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{T}^C = -\left(\frac{\partial \dot{\Phi}^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} \right) \boldsymbol{\lambda}_i^{(j)} \quad (3.82)$$

O índice C indica que essas quantidades são escritas no referencial inercial do sistema, onde $\mathbf{v}_i$ são as velocidades, $\boldsymbol{\omega}_i$ são as velocidade angulares dos corpos e $\Phi^{(j)}$ representa o conjunto de equações introduzidas por causa das juntas.

3.5.6 ANÁLISE CINEMÁTICA

Para o cálculo de uma análise cinemática ser realizado o mesmo número de equações de vínculo independentes e coordenadas generalizadas do problema devem ser

especificados. Além disso, para que a configuração do mecanismo em estudo mude com o tempo, alguns desses vínculos devem ser dependentes do tempo.

3.5.6.1 Análise cinemática de posições

Dada a posição de um sistema no tempo t_0 , o problema se resume em calcular as posições no tempo $t_1 > t_0$. Por causa da natureza não linear das equações de vínculos, Eq. 3.63, o método iterativo de Newton-Raphson é utilizado para calcular $\mathbf{q}_1$ no tempo t_1 . O método é obtido através da expansão de Taylor empregado na linearização das equações de vínculos não lineares, Eq. 3.84.

$$\Phi(\mathbf{q}_1, t_1) = \Phi(\mathbf{q}_0, t_1) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, t_1)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \quad (3.84)$$

Desde que o número de vínculos seja igual ao número de coordenadas generalizadas, a matriz $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, t_1)$ é quadrada. Além disso, como as equações de vínculos são independentes a matriz também é inversível. Baseado no integrador explícito uma configuração inicial $\mathbf{q}_1^{(0)}$ é determinada e o algoritmo iterativo prossegue a cada iteração j calculando o $\Delta^{(j)}$.

$$\Phi(\mathbf{q}_0, t_1)\Delta^{(j)} = -\Phi(\mathbf{q}_1^{(j)}, t_1) \quad (3.85)$$

O valor de da configuração é atualizado, $\mathbf{q}_1^{(j+1)} = \mathbf{q}_1^{(j)} + \Delta^{(j)}$, e a iteração só acaba quando o resíduo $\Phi(\mathbf{q}_1^{(j)}, t_1)$ se torna muito pequeno.

A análise cinemática pode falhar se as condições iniciais estiverem muito distantes de uma solução consistente, ou seja, a linearização se torna um recurso pobre para estimar o sistema não linear.

3.5.6.2 Análise cinemática de velocidades

A análise cinemática de velocidades é a continuação da análise de posições uma vez que as equações de vínculo cinemáticos de velocidade são lineares. Com o valor a posição $\mathbf{q}_1$ disponível depois do cálculo cinemático de posições, a matriz não singular $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_1, t_1)$ é calculada e o sistema linear determinado pela Eq. 3.64, $\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0}$ é resolvido.

3.5.6.3 Análise cinemática de acelerações

Da mesma maneira, a análise cinemática é direta, no tempo t_1 é encontrada a solução para o sistema linear dado pela Eq. 3.65, $(\Phi_q \dot{q})_q + 2\Phi_{qt} \dot{q} + \Phi_q \ddot{q} + \Phi_{tt} = 0$.

Uma vez que resolvido o sistema e encontrados os valores de aceleração, os multiplicadores de Lagrange associados com o conjunto de vínculos agindo sobre o sistema é encontrado através da solução do seguinte sistema linear.

$$\Phi_q^T \lambda = F - M\ddot{q} \quad (3.86)$$

A equação é idêntica a primeira coluna do sistema dado pela Eq. 3.80 e de fato representa precisamente as equações de movimento.

3.5.7 ANÁLISE DINÂMICA

Definindo $\mathbf{M}$ como a matriz de massas generalizadas do sistema, $\bar{\mathbf{J}}$ a matriz de inércias generalizadas expressas no referencial principal local do corpo e K a energia cinemática total do corpo definida como:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.87)$$

O vetor $\mathbf{f}$ representa as forças aplicadas no sistema e $\bar{\mathbf{n}}$ os torques aplicados no sistema escritos no referencial do corpo. A projeção deles sobre as coordenadas generalizadas criam as forças generalizadas $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbb{R}^6$. Usualmente elas são encontradas pela Eq. 3.88.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (\Pi^P)^T \mathbf{f} \\ (\Pi^R)^T \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Sendo que as projeções determinadas pelos seguintes operadores

$$\Pi^P = \frac{\partial \mathbf{v}^P}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.89)$$

$$\Pi^R = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \quad (3.90)$$

sendo $\mathbf{v}^P$ a velocidade do ponto P de aplicação das forças externas $\mathbf{f}$ e $\bar{\mathbf{n}}$.

3.5.7.1 Formulação das equações de movimento no ADAMS

O ADAMS baseia o seu cálculo dinâmico na formulação de Lagrange que é descrita pela Eq. 3.91.

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \right] - \left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (3.91)$$

Considerando a escolha de coordenadas generalizadas e as definições de $\mathbf{q}$, Eq. 3.47, a Eq. 3.91 pode ser reescrita para um corpo rígido como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right)^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Pi^P)^T \mathbf{f} \\ (\Pi^R)^T \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

As equações de movimento são obtidas por um simples agrupamento das equações de movimento definidas para cada corpo.

Analisando as partes da Eq. 3.92

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.93)$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = 0 \quad (3.94)$$

e definindo a quantidade de movimento angular como

$$\boldsymbol{\Gamma} \equiv \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{J}} \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta} \quad (3.95)$$

A Eq. 3.92 pode ser reformulada pela Eq. 3.96 e 3.97.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \Phi_{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\lambda} = (\Pi^P)^T \mathbf{f} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{\Gamma} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{\varepsilon}} + \mathbf{\Phi}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{\Pi}^R)^T \bar{\mathbf{n}} \quad (3.97)$$

As equações diferenciais de primeira ordem Eqs. 3.96 e 3.97 são chamadas de equações diferenciais cinemáticas, uma vez que elas determinam como as forças externas influenciam na quantidade de movimento translacional e angular no tempo.

A combinação das equações cinemáticas e diferenciais cinemáticas gera um conjunto de equações que contém a informação necessária para a solução numérica para a análise dinâmica do sistema mecânico. Essas equações são descritas pelas Eqs. 3.98 a 3.102.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Phi}_p^T \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{\Pi}^p)^T \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{\Gamma} - \mathbf{B}^T \mathbf{J} \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \quad (3.99)$$

$$\mathbf{\Gamma} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{\varepsilon}} + \mathbf{\Phi}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{\Pi}^R)^T \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

$$\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.101)$$

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}} - \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \quad (3.102)$$

3.5.7.2 Solução numérica para a análise dinâmica

A Eqs. 3.98 a 3.102 indicam relevantes alterações no tempo. Além disso, a solução do sistema também deve satisfazer as equações de vínculo cinemático, Eqs. 3.63, 3.64 e 3.65. Por causa desses fatos, do ponto de vista numérico a análise dinâmica é o tipo mais difícil de se resolver. O conjunto de equações diferenciais e equações de vínculo é chamado de equações diferenciais-algébricas.

As equações diferenciais-algébricas têm um índice associado a elas que mostra o quão difícil a solução do problema é de ser alcançada. No caso dinâmico, as equações têm índice 3, o que é considerado alto.

O ADAMS Fortran tem dois métodos confiáveis para resolver o sistema. O mais comum deles é uma indexação direta no qual as equações mantêm o índice 3. As equações de vínculo cinemático de posição estão associadas às equações diferenciais.

Neste procedimento as equações de vínculo de velocidades e a acelerações estão periodicamente testadas. No ADAMS este algoritmo chama-se GSTIFF.

O segundo método reduz o problema para um problema analítico numericamente diferente, de índice 2. Ao invés de considerar a posição, as equações de vínculo cinemático das velocidade é que são resolvidas juntamente com as equações diferenciais. Este algoritmo chama-se SI2 e geralmente apresenta respostas mais robustas e precisas.

O que segue o algoritmo de solução do problema é a integração das equações via uma formulação implícita de integração de ordem 1. Esta fórmula é a simplificação da fórmula de Euler para um passo. A formulação encontra o valor da derivada de uma quantidade $\dot{\mathbf{y}}_1$ no tempo t_1 por

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{h} \mathbf{y}_1 - \frac{1}{h} \mathbf{y}_0 \quad 3.103$$

Baseando-se na Eq. 3.103, o problema do valor inicial $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ é resolvido encontrando $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$ no tempo $t_1 > t_0$ que é a solução da Eq. 3.104 conhecida como a formulação discreta implícita de Euler.

$$\frac{1}{h} \mathbf{y}_1 - \frac{1}{h} \mathbf{y}_0 - \mathbf{g}(t_1, \mathbf{y}_1) = \mathbf{0} \quad 3.104$$

Quase sempre a função $\mathbf{g}$ é não-linear e precisa de uma solução iterativa para a solução do problema. O algoritmo iterativo utilizado pelo ADAMS é o algoritmo de integração de Newton–Raphson.

Baseada na formulação discreta implícita de Euler, todas as derivadas no tempo que aparecem nas Eqs. 3.98 a 3.102 são substituídas e produzem um conjunto de equações algébricas não-lineares. As equações de vínculo cinemático são introduzidas neste sistema pela definição das funções de força $\mathbf{F}$ e $\mathbf{T}$. Baseados nestes conceitos, o sistema pode ser descrito pelas Eqs. 3.105 a 3.112.

$$\frac{1}{h} \mathbf{M} \mathbf{u} - \frac{1}{h} \mathbf{M} \mathbf{u}_0 + \Phi_p^T \lambda - (\Pi^P)^T \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

$$\Gamma - \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{J}} \mathbf{B} \zeta = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

$$\frac{1}{h}\mathbf{\Gamma} - \frac{1}{h}\mathbf{\Gamma}_0 - \left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T + \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{\Pi}^R)^T \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (3.107)$$

$$\frac{1}{h}\mathbf{p} - \frac{1}{h}\mathbf{p}_0 - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.108)$$

$$\frac{1}{h}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{h}\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \quad (3.109)$$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, t_1) = \mathbf{0} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{n}}, t_1) = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

$$\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{T}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{n}}, t_1) = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

As variáveis do sistema não linear são definidas pelo vetor $\mathbf{y}$.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{\Gamma} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{f} \\ \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

E o sistema não linear pode ser reescrito como

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (3.114)$$

O algoritmo de Newton-Raphson resolve o problema. Portanto a primeira previsão de $\mathbf{y}^{(0)}$ da solução é encontrada através de um algoritmo de previsão baseado em um integrador explícito. Uma vez a primeira previsão feita, o algoritmo se torna iterativo dado pelas Eqs. (3.315) e (3.316).

$$\mathbf{\Psi}_y(\mathbf{y}_0)\Delta^{(j)} = -\mathbf{\Psi}(\mathbf{y}^{(j)}) \quad (3.115)$$

$$\mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{y}^{(j)} + \Delta^{(j)} \quad (3.116)$$

As interações são realizadas até que o resíduo $\Psi(\mathbf{y}^{(j)})$ e/ou a correção $\Delta^{(j)}$ sejam pequenos.

3.6 TEORIA SOBRE CORPOS FLEXÍVEIS EM AMBIENTE MULTICORPOS

Problemas de dinâmica não-linear de mecanismos, máquinas e veículos, sendo a modelagem feita com corpos rígidos, são eficientemente analisados pela modelagem de sistemas multicorpos. Entretanto, para a inclusão da dinâmica não-linear de corpos extremamente leves e flexíveis, sendo estruturas flexíveis no espaço aplicadas em veículos e/ou em robótica, faz-se necessário que os sistemas multicorpos se tornem híbridos, incluindo a flexibilidade desses corpos. Hoje em dia, existem inúmeros códigos de sistemas multicorpos capazes de incluir corpos flexíveis. A seguir, a teoria utilizada para a implementação de corpos flexíveis utilizada pelo software ADAMS é descrita (MECHANICAL DYNAMICS, 2002).

A hipótese mais importante adotada para a implementação de corpos flexíveis no software ADAMS é considerar pequena a deformação linear relativa de um corpo ao referencial local, enquanto o referencial local pode sofrer movimentos grandes e não lineares.

A teoria de elementos finitos discretiza um componente de infinitos graus de liberdade (GDL) em um modelo com um número grande de GDL. As deformações lineares dos nós, $\mathbf{u}$, podem ser aproximadas por uma combinação linear de alguns modos de vibrar, $\boldsymbol{\phi}$.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\phi}_i \mathbf{q}_i \quad (3.117)$$

sendo M o número de modos de vibrar e $\mathbf{q}$ as coordenadas modais.

Tal fato, conhecido como superposição modal, permite a descrição de inúmeros GDL nodais com um pequeno número de GDL modais que influenciam mais o comportamento do sistema na faixa de frequência de interesse.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} \quad (3.118)$$

sendo $\boldsymbol{\Phi}$ a matriz modal composta das modos $\boldsymbol{\phi}_i$ de interesse. Após o truncamento a matriz modal $\boldsymbol{\Phi}$ se torna retangular. Esta matriz representa a transformação entre um

pequeno conjunto de coordenadas modais $\mathbf{q}$ e um conjunto maior de coordenadas físicas $\mathbf{u}$.

No princípio, o software usava os autovetores do sistema livre-livre como a base modal. Mas a fim de capturar os efeitos das restrições no corpo flexível e obter acuidade, um grande número de modos era freqüentemente necessário. A solução adotada foi aplicar a técnica de síntese modal de componentes, utilizando o método de Craig-Bampton (CRAIG & BAMPTON, 1968).

O método permite ao usuário selecionar um conjunto de graus de liberdade que não estarão sujeitos a superposição modal. Estes GDL são referenciados como GDL de contorno ou interface e são exatamente preservados na base modal de Craig-Bampton. Assim não existe perda nestes GDL com o truncamento da matriz.

O método divide o modelo em duas categorias: os GDL de contorno, $\mathbf{u}_b$, e os GDL interiores, $\mathbf{u}_i$. Dessa maneira dois conjuntos de modos de vibrar são definidos: os modos vinculares e os modos normais com condição de contorno aplicada.

Os modos vinculares são obtidos usando uma unidade no deslocamento em cada GDL de contorno $\mathbf{u}_b$, ou seja, as coordenadas modais desse modo são iguais às deformações físicas, $\mathbf{q}_c = \mathbf{u}_b$.

Os modos normais com condição de contorno aplicada são obtidos pela solução do auto-problema do sistema aplicando-se as condições de contorno, $\mathbf{q}_n$. Elas serão tantas quantas forem as condições de contorno do sistema. Estes modos definem a expansão modal dos GDL interiores do sistema. A qualidade da expansão modal é proporcional ao número de modos retidos pelo usuário.

A relação entre os GDL físicos e os modos de Craig-Bampton e suas coordenadas modais é descrita pela Eq. 3.119.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{ic} & \mathbf{\Phi}_{in} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_n \end{Bmatrix} \quad (3.119)$$

onde $\mathbf{u}_b$ são GDL de contorno, $\mathbf{u}_i$ são os GDL interiores, $\mathbf{\Phi}_{ic}$ e $\mathbf{q}_c$ são respectivamente os deslocamentos físicos dos GDL interiores e as coordenadas modais para os modos

vinculares, Φ_{in} e q_n são respectivamente os deslocamentos físicos dos GDL interiores e as coordenadas modais para os modos normais com condição de contorno aplicada.

Através de uma transformação modal, as matrizes de massa e rigidez modais podem ser encontradas pelas Eqs. 3.120 e 3.121 respectivamente.

$$\hat{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_{ic} & \Phi_{in} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_{ic} & \Phi_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{cc} & \hat{\mathbf{M}}_{nc} \\ \hat{\mathbf{M}}_{cn} & \hat{\mathbf{M}}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_{ic} & \Phi_{in} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_{ic} & \Phi_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

Os índices i e b denotam respectivamente GDL interiores e de contorno, c e n respectivamente modos vinculares e modos normais. As matrizes $\hat{\mathbf{K}}$ e $\hat{\mathbf{M}}$ são chamadas de matrizes generalizadas de massa e rigidez, respectivamente.

A partir dessas equações pode-se averiguar que $\hat{\mathbf{M}}_{nn}$ e $\hat{\mathbf{K}}_{nn}$ são diagonais pois dependem do auto-problema. $\hat{\mathbf{K}}$ é uma matriz diagonal em blocos, pois não há acoplamento de rigidezes entre as duas categorias de modos e $\hat{\mathbf{M}}$ não é uma matriz diagonal em blocos, pois existe acoplamento de massa entre as duas categorias de modos.

$\hat{\mathbf{K}}$ e $\hat{\mathbf{M}}$ não são matrizes diagonais evidenciando que os modos de Craig-Bampton não são ortogonais. Os autovetores do auto-problema da Eq. 3.122 resultam em uma matriz de transformação $\mathbf{N}$ (Eq. 3.123) a qual transforma a base modal de Craig-Bampton em uma base equivalente mas ortogonal, q^* .

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \lambda\hat{\mathbf{M}}\mathbf{q} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{N}q^* = \mathbf{q} \quad (3.123)$$

Utilizando a matriz de transformação $\mathbf{N}$ na definição da matriz de modos de vibrar encontramos ϕ_i^* , a matriz de modos de Craig-Bampton ortogonais, Eq. 3.124.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M \phi_i q_i = \sum_{i=1}^M \phi_i \mathbf{N} q^* = \sum_{i=1}^M \phi_i^* q^* \quad (3.124)$$

3.6.1 FLEXIBILIDADE MODAL NO ADAMS

As grandezas cinemáticas se referem à posição, orientação, velocidade e aceleração de um ponto. Estas grandezas são utilizadas em três áreas:

- as grandezas de posição e orientação devem ser conhecidas a fim de satisfazer as condições de vínculos impostas;
- a projeção dos pontos onde as forças são aplicadas nas coordenadas generalizadas do corpo flexível;
- e as grandezas medidas requisitadas pelo usuário.

A Fig. 3.9 apresenta um nó P genérico em um corpo flexível qualquer relativo ao referencial local B e ao referencial inercial G.

Figura 3.9 O vetor posição do ponto deformado P' no corpo flexível relativo a referencia local B e inercial G.

A localização instantânea de um ponto conectado a um nó P' no corpo flexível B é dado pela Eq. 3.125.

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{x} + \mathbf{s}_p + \mathbf{u}_p \quad (3.125)$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor posição da origem da referência até a origem do corpo B, $\mathbf{s}_p$ o vetor posição do ponto P a partir da origem do corpo B, $\mathbf{u}_p$ o vetor da deformação translacional do ponto P, da posição não deformada até a deformada que pode ser encontrado através da Eq. 3.126.

$$\mathbf{u}_p = \Phi_p \mathbf{q} \quad (3.126)$$

sendo Φ_p uma parte da matriz modal correspondente ao GDL translacional do ponto P. A dimensão de Φ_p é $3 \times M$, sendo M o número de modos. As coordenadas modais q_i são adicionadas às coordenadas generalizadas do corpo flexível, Eq 3.127.

$$\xi = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \theta \\ \phi \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (3.127)$$

De maneira similar ao corpo rígido, as velocidades, orientações, velocidades angulares são encontradas e as equações de movimento são calculadas através das equações de Lagrange. A forma final da equação diferencial de movimento de um corpo flexível em termos de suas coordenadas generalizadas está descrita pela Eq. 3.128.

$$\mathbf{M}\ddot{\xi} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi} \dot{\xi} \right]^T \dot{\xi} + \mathbf{K}\xi + \mathbf{f}_g + \mathbf{D}\dot{\xi} + \Phi_\xi^T \lambda = \mathbf{Q} \quad (3.128)$$

sendo $\xi, \dot{\xi}$ e $\ddot{\xi}$ as coordenadas generalizadas do corpo flexível e suas derivadas, $\mathbf{M}$ a matriz de massa, $\dot{\mathbf{M}}$ a derivada temporal da matriz de massa, $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez, $\mathbf{f}_g$ a força gravitacional generalizada, $\mathbf{D}$ a matriz de amortecimento, Φ equações de vínculo, λ multiplicadores de Lagrange para os vínculos e $\mathbf{Q}$ as forças generalizadas aplicadas.

4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE VEÍCULO

Neste capítulo a descrição de um modelo simplificado de dois graus de liberdade e a descrição detalhada de um modelo multicorpos incluindo a flexibilidade do quadro do veículo são apresentadas.

4.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO VEÍCULO

O veículo sob estudo é um veículo comercial leve desenvolvido por uma multinacional. As características gerais do veículo estão descritas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Características gerais do veículo estudado

Características do veículo	
Massa total carregado	9000 kg
Massa total vazio	3120 kg
Massa na dianteira (carregado)	3200 kg
Massa na traseira (carregado)	5800 kg
Distância entre eixo	3700 mm
Bitola dianteira	1790 mm
Bitola traseira	1704 mm
Pneus dianteiros	2 pneus 215/75 R17.5
Pneus traseiros	4 pneus 215/75 R17.5

4.2 MODELO SIMPLIFICADO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE DO VEÍCULO

O modelo descrito pela Eq. 3.39 foi implementado no software MATLAB considerando a força lateral linear ao ângulo de escorregamento do pneu. As rigidezes laterais ao escorregamento C_1 e C_2 foram determinadas pela modelagem de pneu conhecida como *Delft-Tyre* baseada na Fórmula Mágica do Pacjeka (MF-TYRE User Manual, 1996).

A Formula Mágica é um modelo empírico de pneu que contém um conjunto de fórmulas matemáticas e representando um modelo físico. Ela calcula as forças longitudinais F_x e laterais F_y e o momento M_z que age em um pneu em condições de puro escorregamento lateral, ou situações combinadas de escorregamento lateral e longitudinal considerando o ângulo de cambagem γ do pneu e a força normal F_z como parâmetros de entrada.

As manobras abordadas pelo modelo simplificado de veículo implementado no software MATLAB são manobras em regime permanente e condições de puro escorregamento. Para essas condições a força lateral F_y é calculada pela Formula Mágica como uma função do ângulo de escorregamento α , ângulo de cambagem γ e a força normal F_z , Eq. 4.1. E a função F_{y0} é dada pela Eq. 4.2.

$$F_y = F_{y0}(\alpha, \gamma, F_z) \quad (4.1)$$

$$F_{y0} = D_y \cdot \sin[C_y \cdot \arctan\{B_y \alpha_y - E_y(B_y \alpha_y - \arctan(B_y \alpha_y))\}] + S_{vy} \quad (4.2)$$

Sendo $\alpha_y = \alpha + S_{Hy}$ e os coeficientes são determinados pelas Eqs. 4.3 a 4.11. Fatores de escalas λ podem ser utilizados para alterar os valores de entrada.

$$\gamma_y = \gamma \cdot \lambda_y \quad (4.3)$$

$$C_y = p_{Cy1} \cdot \lambda_{Cy} \quad (4.4)$$

$$D_y = \mu_y \cdot F_z \quad (4.5)$$

$$\mu_y = (p_{Dy1} + p_{Dy2} \cdot df_z) \cdot (1 - p_{Dy3} \cdot \gamma_y^2) \cdot \lambda_{\mu y} \quad (4.6)$$

$$E_y = (p_{Ey1} + p_{Ey2} \cdot df_z) \cdot \{1 - (p_{Ey3} - p_{Ey4} \cdot \gamma_y) \text{sign}(\alpha_y)\} \cdot \lambda_{Ey} \quad (4.7)$$

$$K_y = p_{Ky1} \cdot F_{zo} \cdot \text{sen}\left[2 \cdot \tan\left\{F_z / (p_{Ky2} \cdot F_{zo} \cdot \lambda_{Fzo})\right\}\right] \cdot (1 - p_{Ky3} |\gamma_y|) \cdot \lambda_{Fzo} \cdot \lambda_{Ky} \quad (4.8)$$

$$B_y = K_y / (C_y \cdot D_y) \quad (4.9)$$

$$S_{Hy} = (p_{Hy1} + p_{Hy2} \cdot df_z + p_{Hy3} \cdot \gamma_y) \cdot \lambda_{Hy} \quad (4.10)$$

$$S_{Vy} = F_z \{p_{Vy1} + p_{Vy2} \cdot df_z + (p_{Vy3} + p_{Vy4} \cdot df_z) \gamma_y\} \cdot \lambda_{Vy} \cdot \lambda_{\mu y} \quad (4.11)$$

Os parâmetros são encontrados por ensaios experimentais e na Tabela 4.2 estão discriminados os fatores que influenciam esses parâmetros.

Tabela 4.2 Parâmetros utilizados para o cálculo da força lateral para escorregamento lateral puro pela Fórmula Mágica

Parâmetros	Fatores de influência
p_{Cy1}	Forma
$p_{Dy1}, p_{Dy2}, p_{Dy3}$	Picos
$p_{Ey1}, p_{Ey2}, p_{Ey3}, p_{Ey4}$	Curvatura
$p_{Ky1}, p_{Ky2}, p_{Ky3}$	Rigidez Lateral
$p_{Hy1}, p_{Hy2}, p_{Hy3}$	Espaço Horizontal
$p_{Vy1}, p_{Vy2}, p_{Vy3}, p_{Vy4}$	Espaço Vertical

O incremento da força vertical é dado pela Eq. 4.12.

$$df_z = \frac{F_z - F_{zo} \cdot \lambda_{Fzo}}{F_{zo} \cdot \lambda_{Fzo}} \quad (4.12)$$

Sendo F_{zo} a carga nominal do pneu.

Os pneus do caminhão estudado foram ensaiados pela Pirelli do Brasil e os dados foram cedidos para a realização desse projeto de mestrado. O pneu utilizado foi o MC 22 215/75 R17.5.

A partir dos parâmetros cedidos foi possível encontrar a relação entre a variação da força lateral em relação à variação da força normal e do ângulo de escorregamento, Fig. 4.1.

Figura 4.1 Variação da força lateral em relação à variação da força normal e do ângulo de escorregamento

Os pneus dianteiros suportam uma carga de 3200 kg, resultando em 1600 kg para cada pneu. Desprezando variações na força normal, a Fig. 4.2 mostra a variação da força lateral em relação ao ângulo de escorregamento para uma força normal correspondente a uma carga de 1600 kg. Para ângulos pequenos de escorregamento, a relação pode ser considerada linear e a rigidez lateral encontrada foi de 1720 N/°.

De maneira análoga, os pneus traseiros suportam uma carga de 5800 kg, resultando em 1450 kg para cada pneu. Desprezando variações na força normal, a Fig.

4.3 mostra a variação da força lateral em relação ao ângulo de escorregamento para uma força normal correspondente a uma carga de 1450 kg. A rigidez lateral encontrada foi de 1590 N/°.

Figura 4.2 Força lateral em relação ao ângulo de escorregamento para a força normal nos pneus dianteiros constantes referentes a 1600 kg de carga

Figura 4.3 Força lateral em relação ao ângulo de escorregamento para a força normal nos pneus traseiros constantes referentes a 1450 kg de carga

Com este modelo simplificado é possível encontrar os valores de aceleração lateral, velocidade angular, ângulo de deriva entre outros parâmetros para uma dada velocidade longitudinal constante e um ângulo de esterço.

O resultados encontrados estão apresentados na seção 5 denominada Resultados e Análises.

4.3 MODELO COMPLETO MULTICORPOS COM QUADRO FLEXÍVEL DO VEÍCULO

O modelo completo do veículo foi desenvolvido no software ADAMS.Car. O modelo foi dividido em seis subsistemas: suspensão dianteira, suspensão traseira, conjunto de pneus dianteiros, conjunto de pneus traseiros, trem de força, cabina e suspensão da cabina, sistema de esterçamento e quadro.

4.3.1 SUSPENSÃO DIANTEIRA

A suspensão dianteira é composta do eixo dianteiro, molas parabólicas, amortecedores telescópios de dupla ação e barra estabilizadora.

O feixe de molas dianteiro é um feixe parabólico composto por duas lâminas de estágio único. A curva força versus deformação do feixe de molas dianteiro é descrita pela Fig. 4.4.

Figura 4.4 Curva Força X Deformação do feixe de mola dianteira

O feixe de molas parabólicas foi modelado em três etapas, representadas pela Fig. 4.5. Primeiramente o software ADAMS.Pre. foi utilizado para a criação do feixe não deformado, ou seja, sem pré-tensão. Para isso, os seguintes dados de entrada foram necessários: geometria do feixe não deformado, número de lâminas, localização do eixo, localização e dimensão do jumelo, localização e descrição dos olhais, rigidezes e amortecimentos das buchas e a descrição do material.

Figura 4.5 Metodologia de geração de um feixe de molas no software ADAMS

Figura 4.6 Feixe de mola dianteiro não deformada no ADAMS.View

O ADAMS.Pre modela o feixe de molas com elementos de viga. É possível definir no programa em quantos elementos de viga o feixe será subdividido. Esse procedimento gera um arquivo que pode ser lido no ADAMS.View, resultando no modelo da Fig. 4.6.

No modelo representado pela Fig. 4.6, a força nominal que o feixe de mola suporta é aplicada, resultando em um feixe de molas deformado na posição de trabalho

e com as devidas pré-tensões aplicadas aos elementos de viga. Esse procedimento resulta no feixe representado pela Fig. 4.7.

Figura 4.7 Feixe de mola dianteiro com pré-tensão no ADAMS.View

A curva força versus deformação do feixe de molas dianteiro modelado é descrita pela Fig. 4.8 e apresenta uma boa correlação com o real (Fig 4.4).

Figura 4.8 Curva Força X Deformação da mola dianteira com a aplicação de carga no ADAMS.View

O amortecedor dianteiro foi modelado no ADAMS.Car e a curva do amortecedor dianteiro é apresentada pela Fig. 4.9.

Figura 4.9 Curva do amortecedor dianteiro do veículo

A barra estabilizadora dianteira se conecta ao eixo com buchas e às barras de ligação com juntas esféricas. A barra estabilizadora aumenta a rigidez à rolagem de um veículo. O ADAMS.Car disponibiliza a criação de barras estabilizadoras via elementos de viga, sendo necessário o conhecimento da geometria, do material empregado na construção, as rigidezes e amortecimentos das buchas empregadas. A Fig. 4.10 apresenta a barra estabilizadora dianteira.

O eixo dianteiro foi modelado como um corpo rígido, sendo que as massas e as inércias foram dados de entrada para esse sistema. Junto com o eixo dianteiro também já são modeladas parte do sistema de esterçamento e as mangas das rodas dianteiras. A Fig. 4.11 apresenta o eixo, as quatro barras de ligação do sistema de esterçamento, as mangas e os amortecedores dianteiros.

Figura 4.10 Barra estabilizadora dianteira

Figura 4.11 Eixo dianteiro, amortecedores dianteiro, mangas e quatro barras do sistema de esterçamento

4.3.2 SUSPENSÃO TRASEIRA

A suspensão traseira é composta do eixo traseiro, molas parabólicas, amortecedores telescópios de dupla ação e barra estabilizadora.

O feixe de molas traseiro é um feixe parabólico composto por três lâminas de estágio duplo, ou seja, a rigidez do feixe depende da carga aplicada. A curva força versus deformação do feixe de molas traseiro é descrita pela Fig. 4.12.

Figura 4.12 Curva do feixe de molas traseiro

O mesmo procedimento empregado na modelagem do feixe de molas dianteiro foi empregado na modelagem do feixe de molas traseiro. O ADAMS.Pre apresenta a opção de construção de vários estágios, sendo as entradas as geometrias das lâminas não-deformadas. Um estágio com duas lâminas pode ser modelado como uma única lâmina no ADAMS.Pre, mas é necessário alterar a elasticidade do material, aumentando a rigidez da lâmina até que ela seja equivalente às duas. Esse procedimento foi utilizado no feixe de molas dianteiro e no primeiro estágio do feixe de molas traseiro. O segundo estágio é modelado por uma segunda lâmina conectada à primeira lâmina por uma bucha. Para determinar o ponto onde as lâminas encostam e começam a trabalhar juntas, uma força de contato é introduzida entre os feixes e ela é nula quando as lâminas estão separadas e representa o contato quando os feixes se encostam. O procedimento descrito

gera um arquivo que pode ser lido pelo ADAMS.View e resultou no modelo apresentado pela Fig. 4.13.

Figura 4.13 Feixe de mola traseiro não deformada no ADAMS.View

Da mesma maneira, a força nominal que o feixe de mola suporta é aplicada ao feixe não deformado apresentado pela Fig. 4.13. Isso resulta em um feixe de molas deformado na posição de trabalho, apresentado pela Fig. 4.14, e com as devidas pré-tensões aplicadas aos elementos de viga.

Figura 4.14 Feixe de mola traseiro deformada no ADAMS.View

A curva força versus deformação do feixe de molas traseiro modelado é descrita pela Fig. 4.15 e apresenta uma boa correlação com o real.

Figura 4.15 Curva Força x Deformação da mola traseira com a aplicação da carga nominal no ADAMS.View

O amortecedor traseiro foi modelado no ADAMS.Car e a curva força versus velocidade é apresentada pela Fig. 4.16.

Figura 4.16 Curva do amortecedor traseiro do veículo

A barra estabilizadora traseira se conecta ao eixo via juntas esféricas e às barras de ligação com buchas. A Fig. 4.17 apresenta a barra estabilizadora traseira.

Figura 4.17 Barra estabilizadora traseira

O eixo traseiro também foi modelado como um corpo rígido, sendo que, da mesma maneira, as massas e as inércias foram dados de entrada para esse sistema. A Fig. 4.18 apresenta o eixo e os amortecedores traseiros. O torque que movimentará o veículo também é modelado neste sistema e é referenciado pelo sistema do trem de força.

Figura 4.18 Eixo e amortecedores traseiros

4.3.3 CONJUNTO DOS PNEUS DIANTEIROS

O modelo pneu conhecido como *Delft-Tyre* baseado na Fórmula Mágica do Pacjeka (MF-TYRE User Manual, 1996) foi utilizado na modelagem do pneumático do modelo de veículo completo. As características foram levantadas por um ensaio experimental realizado pela Pirelli do Brasil e os dados foram cedidos para a realização desse trabalho. O pneu utilizado foi o MC 22 215/75 R17.5 e os características gerais do Pneumático estão descritas na tabela 4.3.

Tabela 4.3 Características gerais do modelo Delft Tire MC 22 215/75 R17.5

Características	Valores
Largura	215 mm
Diâmetro	767 mm
Pressão Interna	700 kPa
Rigidez Vertical	700 N/mm
Amortecimento	0.5 Ns/mm

O conjunto dos pneus dianteiros está apresentado pela Fig. 4.19.

Figura 4.19 Conjunto dos pneus dianteiros

O software ADAMS disponibiliza dois tipos de pista para o cálculo da força entre o pneu e o pavimento, um modelo 2D para manobras de dirigibilidade e um modelo 3D para simular a passagem sobre terrenos irregulares, buracos ou ressaltos na pista. No presente trabalho, o modelo utilizado foi o modelo de pista 2D que assume um ponto de contato entre o pneu e o pavimento. A força de contato é sempre considerada normal ao pavimento, ou seja, não existe contato longitudinal ou lateral entre o pneu e o pavimento.

4.3.4 CONJUNTO DOS PNEUS TRASEIROS

O mesmo modelo *Delft-Tyre* foi utilizado no conjunto dos pneus traseiros apresentados pela Fig. 4.20.

Figura 4.20 Conjunto dos pneus traseiros

4.3.5 TREM DE FORÇA

O trem de força é responsável pela potência e torque que movimenta o conjunto completo no software ADAMS.Car. Então além das massas e inércias dos corpos rígidos que representam o motor e a transmissão, existe também a necessidade de detalhar as características do trem de força. Entre as características necessárias, as principais são a curva de torque do motor (Fig. 4.21) e a relação de transmissão das marchas. A transmissão do veículo estudada tem cinco marchas sendo que as relações de transmissões são 5.76, 2.83, 1.53, 1.00 e 0.77 da primeira para a quinta marcha, respectivamente.

O conjunto motor-transmissão é modelado como um corpo rígido suportado por coxins modelados no ADAMS.Car como buchas. Os valores de rigidezes e amortecimento dessas buchas são dados de entrada para o modelo e a acuidade dos seus valores influencia os modos de vibrar do conjunto que é uma grande fonte de vibração para o veículo. A Fig. 4.22 apresenta o conjunto do trem de força estudado.

Figura 4.21 Curva de torque do motor

Figura 4.22 Trem de força

4.3.6 CABINA E SUSPENSÃO DA CABINA

A cabina foi modelada com um corpo rígido apoiado no quadro por sua suspensão. A suspensão da cabina é composta de buchas na traseira e barras de torção, amortecedores e buchas na dianteira.

Figura 4.23 Modelo da cabina e sua suspensão

O motorista e o passageiro pesam 75 kg cada um, com somente 1 grau de liberdade na vertical e coxinizados com uma bucha com rigidez de 30 N/mm e amortecimento de 0.75 N/mm/s, resultando em um sistema com frequência de ressonância de 3 Hz e aproximadamente 25% de amortecimento. A Fig. 4.24 apresenta o modelo do motorista e do passageiro.

Figura 4.24 Modelo do motorista e do passageiro

4.3.7 SISTEMA DE ESTERÇAMENTO

O sistema de esterçamento do veículo estudado é composto da direção, coluna de direção, braço Pitman, barras de ligação e caixa de redução. A caixa de redução foi modelada com o elemento de acoplamento do ADAMS que permite o acoplamento entre o movimento de uma junta a outra considerando a relação de redução.

Figura 4.25 Modelo do sistema de direção

4.3.8 QUADRO

O quadro do veículo foi modelado em elementos finitos no software MSC.PATRAN e uma análise modal foi calculada pelo software MSC.NASTRAN. Esse procedimento gera um arquivo com extensão .out. O software ADAMS.Flex é o responsável pela conversão do arquivo com extensão .out para um arquivo com extensão .mnf que pode ser lido pelo software ADAMS.Car.

Os primeiros cinco modos de vibrar do quadro estão descritos na Tabela 4.4 e a Fig. 4.26 mostra o modelo do quadro em elementos finitos importado para o ambiente do ADAMS.Car.

Tabela 4.4 Modos de vibrar do quadro

Modo de Vibrar	Descrição do Modo de Vibrar	Frequência (Hz)
1º	1º Torção	2.9
2º	1º Torção + 1º Flexão Lateral	3.2
3º	2º Torção	7.0
4º	1º Flexão Vertical	8.6
5º	Flexão Vertical da Dianteira	19.1

Figura 4.26 Modelo do quadro em ambiente multicorpos

4.3.9 MODELO COMPLETO DO VEÍCULO

A metodologia que o ADAMS.Car utiliza é baseada na construção de subsistemas e uma interface para análise. Assim, os eixos, os pneus, os feixes de mola, os amortecedores, o sistema de esterçamento, a cabina e sua suspensão, os ocupantes, o trem de força e o quadro flexível foram conectados através de comunicadores no ambiente de análise. Neste ambiente, análises de malha aberta e fechada podem ser calculadas. A Fig 4.27 mostra o modelo do veículo completo com o quadro flexível.

Figura 4.27 Modelo completo do veículo

5 SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão descritos os dados adquiridos para a validação dos modelos, os resultados obtidos com o modelo simplificado do veículo desenvolvido no software MATLAB e as manobras realizadas para a validação experimental do modelo multicorpos. Em seguida serão realizadas as simulações e análises da dinâmica lateral utilizando o modelo multicorpos.

5.1 DADOS EXPERIMENTAIS

Um protótipo real do veículo foi ensaiado e medidas de dirigibilidade foram adquiridas pela Pirelli na Pista de Prova da Pirelli em Sumaré/SP. Esses dados foram cedidos pela Pirelli do Brasil para a realização deste trabalho.

Foram realizadas três manobras em diversas velocidades para o levantamento das características de dirigibilidade do veículo. As manobras realizadas podem ser divididas em manobras de regime permanente e manobras em regime transiente. Para análise em regime permanente, foi realizada a manobra raio constante para diversos valores de velocidade longitudinal. Para regimes transientes foram realizadas a entrada degrau no volante, simples mudança de pista e a dupla mudança de pista. As manobras de dirigibilidade realizadas podem ser vistas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Manobras de dirigibilidade realizadas

Manobra	Velocidade (km/h)
Raio constante	20, 30 e 40
Entrada degrau no volante	30 e 40
Simples mudança de pista	20, 40 e 60

Dupla mudança de pista	20, 40 e 60
------------------------	-------------

A manobra entrada degrau no volante consiste na aplicação de um esterço no volante e mantê-lo até o fim da manobra. Esta manobra é composta de duas etapas: transiente, quando o veículo entra na curva, e regime permanente quando a resposta do veículo não sofre mais alterações devido a entrada no volante. As manobras entrada degrau no volante e curva com raio constante podem ser representadas pela Fig. 5.1.

Figura 5.1 Manobra com raio constante e entrada degrau no volante

As manobras de simples e dupla mudança de pista simulam respectivamente uma mudança de pista e uma ultrapassagem de um outro veículo. Essas manobras são normalizadas pela norma ISO 3888 (ROAD VEHICLES, 1975). A distância entre os cones é fixa ao longo da pista, mas a largura é proporcional à largura do veículo. As manobras simples mudança de pista e dupla mudança de pista estão representadas, respectivamente, pelas Figs. 5.2 e 5.3.

Figura 5.2 Manobra de simples mudança de pista

Figura 5.3 Manobra de dupla mudança de pista

Para a aquisição dos dados de aceleração lateral, velocidade angular e longitudinal, o veículo foi instrumentado com acelerômetros, sensores de velocidade angular e sensores ópticos.

5.2 ANÁLISES COM O MODELO SIMPLIFICADO

Foram simulados as manobras de raio constante para as velocidades 20, 30 e 40 km/h no modelo simplificado desenvolvido no software MATLAB. As entradas do modelo são as velocidades longitudinais e os ângulos de esterço e as saídas são a aceleração lateral, a velocidade de guinada e o ângulo de deriva da trajetória. Os dados experimentais e os dados simulados estão descritos na Tab. 5.2.

Tabela 5.2 Valores de aceleração lateral, velocidade de guinda e ângulo de deriva para manobras simuladas e experimentais de raio e velocidade constantes

Velocidade Longitudinal (km/h)	Ângulo de Esterço (°)	Aceleração Lateral (g)		Velocidade de Guinada (°/s)		Ângulo de Deriva (°)	
		Expe-rimental	Simulado	Expe-rimental	Simulado	Expe-rimental	Simulado
20	78.1	-0.08	-0.06	6.3	6.5	-0.55	-0.96
30	87.3	-0.16	-0.16	11.7	10.9	-0.11	-0.27
40	87.9	-0.27	-0.28	12.5	14.5	0.20	0.84

O modelo simplificado consegue obter uma boa correlação para a aceleração lateral e a velocidade de guinada. O modelo também não consegue reproduzir os valores do ângulo de deriva com acuidade, pois estes valores são muito pequeno e o nível de ruído ou qualquer outra distorção nos dados experimentais podem causar esses desvios. Mas o modelo consegue capturar a mudança de sinal do ângulo de deriva com o aumento da velocidade.

Estes dados demonstram que o modelo linear de dois graus de liberdade consegue obter valores próximos da realidade para a aceleração lateral e a velocidade de guinada até 0.3 g. Acima desse valor, o modelo se torna pobre por não abranger a transferência de carga, a rolagem, a não linearidade dos pneus, etc. No entanto, avaliações prévias da dirigibilidade do veículo podem ser realizadas com esse modelo.

Nas Figs.5.4, 5.5 e 5.6 estão mostradas a aceleração lateral, a velocidade de guinada e o ângulo de deriva da trajetória, respectivamente.

Figura 5.4 Aceleração lateral para simulações de manobras de raio e velocidades constantes no modelo simplificado

Figura 5.5 Velocidade de guinada para simulações de manobras de raio e velocidades constantes no modelo simplificado

Figura 5.6 Ângulo de deriva da trajetória para simulações de manobras de raio e velocidades constantes no modelo simplificado

5.3 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO MULTICORPOS

A validação experimental foi realizada através de duas análises: uma em regime transiente e outra em regime permanente. Os parâmetros analisados foram a velocidade de guinada, a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento lateral do veículo, e o ângulo de rolagem. Esses parâmetros foram escolhidos por serem os mais relevantes para a avaliação da dinâmica lateral de um veículo.

As simulações realizadas para efetuar a validação foram realizadas com a imposição do ângulo de esterço e a velocidade longitudinal de uma manobra experimental no modelo de veículo completo (Fig 5.4).

Figura 5.7 Esquema para validação experimental

Uma importante medida do desempenho do veículo é o seu comportamento logo após um comando de esterçamento. Uma das manobras mais utilizadas para este tipo de análise é a dupla mudança de pista especificada pela ISO 3888 (Road vehicles, 1975). Esta manobra é um teste de condições severas para um veículo. A maioria dos veículos modernos pode realizar manobras para estudo de regime transiente atingindo acelerações laterais máximas de 0.8 g (Hegazy *et. al.*, 2000).

Para a validação em regime transiente, manobras de dupla mudança de pista foram realizadas a 20 e 60 km/h.

As Fig. 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 mostram respectivamente, a velocidade de guinada, a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento e o ângulo de rolagem durante a manobra a 20 Km/h para o modelo multicorpos do veículo com o quadro flexível e rígido e os dados experimentais.

A velocidade de guinada e a aceleração lateral obtiveram valores muito próximos para ambos os modelos e obtiveram uma boa correlação com o dados experimentais. Os valores do ângulo de deriva da trajetória e do ângulo de rolagem

foram melhores caracterizados pelo modelo com quadro flexível e também obtiveram uma boa correlação com os dados experimentais.

Figura 5.8 Velocidade de Guinada: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 20 km/h

Figura 5.9 Aceleração Lateral: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 20 km/h

Figura 5.10 Ângulo de Deriva da Trajetória: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 20 km/h

Figura 5.11 Ângulo de Rolamento: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 20 km/h

As Figs. 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 mostram respectivamente, a velocidade de guinada, a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento e o ângulo de rolamento durante a manobra a 60 Km/h para o modelo multicorpos do veículo com o quadro flexível e rígido e os dados experimentais. A aceleração máxima foi de 0.45 g e o máximo ângulo de rolamento foi de 2.5°, os quais são limites aceitáveis para um veículo comercial leve (HEGAZY *et. al.*, 2000).

Da mesma maneira que a manobra de dupla mudança de pista a 20 km/h, os valores de velocidade de guinada e de aceleração lateral obtiveram uma boa correlação com o dados experimentais para ambos modelos. Por outro lado, os valores do ângulo de deriva da trajetória e do ângulo de rolagem foram bem caracterizados por ambos os modelos e também obtiveram uma boa correlação com os dados experimentais.

Dessa forma, pode-se considerar que ambos os modelos caracterizam bem o comportamento do veículo em relação à velocidade de guinada e à aceleração lateral para manobras de transiente em baixas e médias velocidades. Por outro lado, o modelo com o quadro flexível representa melhor o ângulo de deriva da trajetória e o ângulo de rolamento em baixas e médias velocidades.

Figura 5.12 Velocidade de Guinada: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 60 km/h

Figura 5.13 Aceleração Lateral: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 60 km/h

Figura 5.14 Ângulo de Deriva da Trajetória do Veículo: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 60 km/h

Figura 5.15 Ângulo de Rolamento: Resultados experimentais e simulados durante uma manobra de dupla mudança de pista a 60 km/h

Em vista dos bons resultados obtidos, pode-se considerar que o modelo com quadro flexível obteve uma ótima correlação com os dados experimentais em regime transiente.

O regime permanente foi investigado realizando-se manobras de raio e velocidade constantes. As manobras foram realizadas a 20 e 40 km/h e o raio da curva realizada foi de 47.5m.

A Tab. 5.3 mostra os resultados; a velocidade de guinada, a aceleração lateral, o ângulo de escorregamento e o ângulo de rolagem; durante as manobras de raio constante de 47.5 m e as velocidades de 20 e 40 Km/h para o modelo multicorpos do veículo com o quadro flexível e rígido e os dados experimentais.

A velocidade de guinada e a aceleração lateral obtiveram valores muito próximos para ambos os modelos e obtiveram uma boa correlação com o dados experimentais. Os valores para o ângulo de deriva da trajetória obtidos pelas simulações tiveram valores bem diferentes dos obtidos experimentalmente a 20 km/h. Da mesma forma, os valores de ângulo de rolagem não foram bem caracterizados por ambos os modelos às velocidade de 20 e 40 km/h. Estes dados em especial estavam com um fator sinal/ruído muito baixo e o uso do filtro alterou um pouco a forma dos dados. Portanto nenhuma conclusão pode ser feita com esses dados.

Portanto, assim como em regime transiente, ambos os modelos caracterizaram bem o comportamento do veículo em relação à velocidade de guinada e à aceleração lateral para manobras de regime permanente em baixas e médias velocidades. O ângulo de deriva da trajetória foi mais bem caracterizado em velocidades médias pelo modelo com quadro flexível.

Tabela 5.3 Resultados simulados e experimentais para manobras de raio 47.5 m constante e velocidades de 20 e 40 km/h.

	20 km/h			40 km/h		
Quantidade	Quadro Rígido	Quadro Flexível	Experi-mental	Quadro Rígido	Quadro Flexível	Experi-mental
Velocidade de Guinada	-6.3	-6.2	-7.3	-13	-12.5	-13
Aceleração Lateral	0.07	0.07	0.065	0.27	0.25	0.26
Ângulo de Deriva	-0.5	-1.1	-0.15*	1.2	0.5	0.4

Ângulo de Rolamento	0.4	0.7	0.2*	1.25	2.4	0.2*
---------------------	-----	-----	------	------	-----	------

* dados experimentais com sinal/ruído baixo

Dessa maneira, pode-se considerar que o modelo alcançou níveis satisfatórios, uma vez que as velocidades de guinada, as acelerações laterais e o ângulo de deriva da trajetória a 40 km/h foram bem capturadas pelo modelo.

Os resultados das análises de regime transiente e permanente mostram que a adição de um quadro flexível mantém os mesmos resultados em termos da velocidade de guinada e da aceleração lateral. Contudo, os resultados para ângulo de escorregamento e ângulo de rolamento são mais próximos aos valores experimentais. Isso demonstra a contribuição da flexibilidade do quadro no desempenho do veículo na avaliação da dinâmica lateral.

Essa contribuição pode ser mais bem observada na comparação dos resultados simulados e experimentais de uma varredura senoidal no ângulo de esterço do volante. Uma manobra desse tipo foi realizada a 40 km/h e o ângulo de esterço no volante utilizado é mostrado pela Fig. 5.16. Ambos os modelos obtiveram uma boa correlação com os valores experimentais para os valores de velocidade de guinada, aceleração lateral e ângulo de deriva da trajetória. No entanto, o modelo com quadro flexível mostra-se mais capaz de exibir o comportamento do veículo em relação ao ângulo de rolamento (Fig. 5.17).

Figura 5.16 Ângulo de esterço para uma manobra de varredura no esterço a 40 km/h

Figura 5.17 Ângulo de rolamento para uma manobra de varredura no esterço a 40 km/h

5.4 ANÁLISE DE DIRIGIBILIDADE

Um veículo cuja sua aceleração lateral aumenta durante uma manobra de raio constante pode ser classificado em três categorias de acordo com o seu comportamento direcional. Nesta situação, um veículo no qual nenhuma alteração é necessária no ângulo de esterço durante o aumento da velocidade é classificado como um veículo de comportamento neutro. Por outro lado, um veículo no qual o ângulo de esterço precisa ter seu valor aumentado enquanto a velocidade aumenta apresenta um comportamento sub-esterçante. Finalmente, um veículo no qual durante o aumento da velocidade precisa que o ângulo de esterçamento seja diminuído apresenta um comportamento sobre-esterçante (Gillespie, 1992).

A fim de averiguar a qual comportamento o veículo estudado se encaixa, manobras de raio e velocidades constantes experimentais foram realizadas. Foram realizadas três manobras a velocidades de 20, 30 e 40 km.h e o raio da curva foi mantido em 47.5. O ângulo de volante e as acelerações laterais necessários para manter o veículo nesta trajetória estão apresentados na Fig 5.18 e 5.19, respectivamente. As médias desses valores estão apresentadas na Tab. 5.4.

De acordo com os resultados experimentais, o veículo estudado apresenta comportamento sub-esterçante até 30 km/h, uma vez que o aumento da velocidade induz um aumento no ângulo do volante e um comportamento neutro de 30 a 40 km/h,

uma vez que o ângulo do volante é mantido mesmo com o aumento da velocidade. Avaliando esta tendência, espera-se que se a velocidade for maior que a avaliada o veículo poderia apresentar um comportamento sobre-esterçante, mas essa uma conclusão neste aspecto feita através desses dados experimentais não é possível.

Figura 5.18 Ângulo de esterço no volante para manobras experimentais de raio e velocidades constantes a velocidades de 20, 30 e 40 km/h

Figura 5.19 Aceleração lateral para manobras experimentais de raio e velocidades constantes a velocidades de 20, 30 e 40 km/h

Tabela 5.4 Médias dos valores experimentais do ângulo no volante e da aceleração lateral durante as manobras de raio e velocidades constantes a 20, 30 e 40 km/h

Velocidade (km/h)	Ângulo no Volante (graus)	Aceleração Lateral (g)
20	78.5	-0.079
30	87.3	-0.200
40	87.6	-0.249

A fim de investigar esta expectativa, manobras com o ângulo no volante constante foram realizadas usando o modelo multicorpos validado. Um ângulo no volante de 100° foi imposto ao veículo e manobras foram realizadas a velocidades de 20, 40, 50, 60 e 70 km/h. As velocidades de guinada resultante dessas simulações estão apresentadas na Fig. 5.20. Até 50 km/h, a velocidade de guinada segue um valor constante após o regime transitório. Mas um pequeno aumento pode ser notado a 60 km/h. E a 70 km/h a velocidade de guinada sofre um grande aumento, não apresentando mais as características de regime permanente.

Este fato acontece porque o veículo apresenta um comportamento classificado de sobre-esterçante nestas condições. Ou seja, o ângulo de esterço é maior que o necessário para realizar uma curva de raio constante, fazendo com que o veículo realize a curva com raios de curvaturas cada vez menores. Em consequência, a velocidade de guinada é cada vez maior.

Baseado nestas manobras, o ganho de guinada, que é a velocidade de guinada dividida pelo ângulo de esterço, foi obtido. A Fig. 5.21 mostra o valor do ganho de guinada com o aumento da velocidade. Na Fig. 5.21 também é mostrada linha neutra que representa o comportamento neutro (linha preta). Os resultados abaixo da linha neutra apresentam o comportamento sub-esterçante e os resultados acima dessa linha apresentam o comportamento sobre-esterçante.

Figura 5.20 Velocidade de guinada para manobras com ângulo no volante constante para as velocidades 20, 30, 40, 50, 60 e 70 km/h

Figura 5.21 Ganho de guinada para manobras com ângulo no volante constante para as velocidades 20, 30, 40, 50, 60 e 70 km/h

Outra maneira usual de apresentar a qualificação do comportamento lateral de um veículo foi criada pelo Pacejka e é conhecida como diagrama de dirigibilidade (*handling diagram*). Este diagrama é um gráfico bidimensional com a aceleração na ordenada e radianos na abscissa. As equações de dirigibilidade e as linhas de velocidade (V-linhas) e raios constantes (R-linhas) são mostradas neste plano (Winkler, 1998). A Eq. 5.1 apresenta a equação da dirigibilidade onde δ é o ângulo de esterço, l é o entre-eixos, a_y é a aceleração lateral e K é o gradiente sub-esterçanteis (*understeer gradient*) definido pela SAE.

$$\delta - \frac{1}{R} = a_y K \quad (5.1)$$

As características do veículo em relação ao comportamento direcional estão bem aparentes neste diagrama. Um vez que a curva de dirigibilidade é um gráfico da aceleração lateral a_y versus $\delta - \frac{1}{R}$, a inclinação desta curva fornece a indicação direta da classificação quanto ao comportamento lateral do veículo. A inclinação positiva indica comportamento sub-esterçante, a inclinação vertical indica o comportamento neutro e a inclinação negativa indica o comportamento sobre-esterçante.

Alguma instabilidade pode ocorrer no sistema quando K apresenta um valor negativo, ou seja, o veículo apresenta comportamento sobre-esterçante, e o veículo está acima da velocidade longitudinal crítica, $V_{cr} = \sqrt{-\frac{gl}{K}}$. O inverso da inclinação das V-linhas é $\frac{gl}{V^2}$, sendo g a aceleração gravitacional e V a velocidade longitudinal. Portanto, a velocidade crítica corresponde ao ponto de operação onde a curva de dirigibilidade é paralela a V-linhas, ou seja, apresenta a mesma inclinação da V-linha (Winkler, 1998).

As V-linhas (linhas tracejadas) e a curva de dirigibilidade (linhas contínuas) para manobras de velocidade constante a 20 e 60 km/h estão apresentadas na Fig. 5.22. Durante a manobra a 20 km/h, o veículo apresenta comportamento sub-esterçante até 0.28 g de aceleração lateral, após este ponto o veículo apresenta comportamento sobre-esterçante, mas somente perto de 0.50 g de aceleração lateral, o veículo pode sofrer alguma instabilidade. Durante a manobra a 60 km/h, o veículo apresenta comportamento neutro até 0.23 g de aceleração lateral, acima deste valor, o veículo apresenta comportamento sobre-esterçante, mas somente acima de 0.54 g de aceleração lateral o veículo poderá sofrer alguma instabilidade.

Figura 5.22 Diagrama de dirigibilidade para manobras de velocidade constante e raio variando a 20 e 60 km/h

5.5 ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Primeiramente, o modelo simplificado foi utilizado para encontrar as funções de transferências do ângulo de deriva, da velocidade de guinada e da aceleração lateral em relação ao ângulo de esterço. O equacionamento do modelo simplificado resultou na Eq. 3.39 (Eqs. 5.2 e 5.3).

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1 + C_2}{MV} & -1 - \frac{C_1 L_1 - C_2 L_2}{MV^2} \\ -\frac{C_1 L_1 - C_2 L_2}{I} & -\frac{C_1 L_1^2 + C_2 L_2^2}{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{MV} \\ \frac{C_1 L_1}{I} \end{bmatrix} [\delta] \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_z \end{bmatrix} + \mathbf{B} [\delta] \quad (5.2)$$

As funções de transferências do ângulo de deriva, da velocidade de guinada e da aceleração lateral em relação ao ângulo de esterço são descritas pelas Eq. 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente.

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\mathbf{B}(1,1)s + \mathbf{A}(1,2)\mathbf{B}(2,1) - \mathbf{B}(1,1)\mathbf{A}(2,2)}{s^2 - (\mathbf{A}(1,1) + \mathbf{A}(2,2))s + \mathbf{A}(1,1)\mathbf{A}(2,2) - \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)} \quad (5.3)$$

$$\frac{\omega_z}{\delta} = \frac{\mathbf{B}(2,1)s + \mathbf{A}(2,1)\mathbf{B}(1,1) - \mathbf{A}(1,1)\mathbf{B}(2,1)}{s^2 - (\mathbf{A}(1,1) + \mathbf{A}(2,2))s + \mathbf{A}(1,1)\mathbf{A}(2,2) - \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)} \quad (5.4)$$

$$\frac{a_y}{\delta} = \frac{V[\mathbf{B}(1,1)s^2 + \mathbf{A}(1,2)\mathbf{B}(2,1) - \mathbf{A}(2,2)\mathbf{B}(1,1)s] + [\mathbf{B}(2,1)s + \mathbf{A}(2,1)\mathbf{B}(1,1) - \mathbf{A}(1,1)\mathbf{B}(2,1)]}{s^2 - (\mathbf{A}(1,1) + \mathbf{A}(2,2))s + \mathbf{A}(1,1)\mathbf{A}(2,2) - \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)} \quad (5.5)$$

Utilizando o software MATLAB, a função de resposta em frequência foi traçada para estas funções transferências para manobras a 40 km/h. As Figs. 5.24, 5.25 e 5.26 mostram, respectivamente a função de resposta em frequência da velocidade de guinada, da aceleração lateral e do ângulo de deriva em função do ângulo de esterço.

A fim de obter os mesmos resultados para o modelo multicorpos completo do veículo, uma varredura no esterço foi realizada. A velocidade foi mantida constante a 40 km/h e a entrada do ângulo de esterço no volante variando no tempo. O ângulo de esterço no volante e seu espectro em frequência estão mostrados na Fig. 5.23. A faixa de frequência que a manobra abrange varre as frequências importantes para a avaliação do comportamento dinâmico lateral do veículo.

Figura 5.23 Entrada na simulação: ângulo de esterço no volante e seu espectro em frequência.

A Fig. 5.24, 5.25, 5.26 e 5.27 mostram as funções de resposta em frequência, respectivamente, da velocidade de guinada, da aceleração lateral, do ângulo de deriva da trajetória e do ângulo de rolagem em relação ao ângulo de esterço, durante a manobra de

varredura no esterço a 40 Km/h para o modelo multicorpos do veículo com o quadro flexível.

Figura 5.24 Função de reposta em frequência da velocidade de guinada

Figura 5.25 Função de reposta em frequência da aceleração lateral

Figura 5.26 Função de resposta em frequência do ângulo de deriva da trajetória

Figura 5.27 Função de resposta em frequência do ângulo de rolamento

Comparando os resultados do modelo simplificado e do modelo completo multicorpos com o quadro flexível, os mesmos aspectos podem ser averiguados. Durante a manobra, a velocidade de guinada diminui com o aumento da frequência, pois

a inércia do veículo predomina na resposta. No caso da aceleração lateral, existe uma queda no valor de resposta em torno de 1.0 Hz. Isso ocorre, pois a aceleração lateral é composta pela aceleração centrípeta causada pela velocidade de guinada e pela aceleração linear ao longo do eixo y. Em relação ao ângulo de deriva da trajetória, a resposta é amplificada até 1 Hz e após isso existe uma queda, também devida a predominância da inércia na resposta. O modelo simplificado não contempla a rolagem do veículo, portanto, somente a resposta em frequência obtida pela simulação com o modelo completo pode ser mostrada. Para a resposta do ângulo de rolamento ao ângulo de esterço pode-se observar duas regiões de amplificação da resposta. Isso acontece por causa dos modos de vibrar do veículo que aparecem nesta faixa de frequência. A primeira abaixo de 1 Hz com uma rolagem do veículo com o quadro rígido e outra acima de 1 Hz com o quadro apresentando distorções.

6 CONCLUSÃO E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou o desenvolvimento, validação e avaliação de um modelo multicorpos flexível de um veículo comercial. O quadro do veículo em estudo é flexível quando comparado aos outros componentes do veículo. A grande flexibilidade do quadro de alguns veículos comerciais causa efeitos prejudiciais ao comportamento dinâmico do veículo, como rolamento excessivo, e este fato têm sido foco de interesse e estudo por pesquisadores e engenheiros de desenvolvimento. A fim de averiguar a contribuição do quadro na dinâmica lateral do veículo, este foi incluído como um corpo flexível no modelo multicorpos.

As metodologias empregadas, como a geração de feixe de molas, geração de subsistemas e a inclusão de corpos flexíveis em um ambiente multicorpos, foram discutidas. Mesmo que o ADAMS.Car no momento não tenha uma solução direta para a geração de feixes de mola, a metodologia discutida no trabalho se mostrou ser um método eficiente e simples.

A validação experimental do veículo foi realizada usando análises em regime permanente e transiente. Apesar de ambas as análises terem alcançado níveis bons de correlação com os resultados experimentais, os resultados em regime transiente foram melhores capturados pelo modelo que os resultados em regime permanente. Provavelmente, um dos motivos desse fato ter ocorrido foi o tipo de pneu utilizado. O ensaio realizado pela Pirelli do Brasil para este pneu foi um ensaio baseado em regime transiente, resultando assim em dados mais dedicados a esse regime.

Com a inclusão do corpo flexível no modelo completo multicorpos, este obteve melhores resultados em relação ao ângulo de deriva da trajetória e ao ângulo de rolamento do que o modelo com o quadro rígido.

O uso do modelo simplificado se mostrou uma excelente ferramenta para análises preliminares da dirigibilidade do veículo uma vez que o modelo capturou bem o comportamento do veículo para o ângulo de rolamento e a velocidade de guinada para acelerações laterais até 0.3 g. Além disso, a partir desse modelo algumas análises no domínio da frequência podem ser realizadas, pois as funções de transferências do sistema podem ser expressas a partir da modelagem.

Finalmente, um estudo de dirigibilidade foi realizado para se estudar o comportamento do veículo em relação ao esterço. Em baixas velocidades e acelerações laterais, o veículo apresentou um comportamento levemente sub-esterçante. No entanto, em velocidades e acelerações mais altas, o veículo se torna sobre-esterçante. Neste aspecto, o diagrama de dirigibilidade, ou diagrama de *handling*, é uma ferramenta muito interessante, sendo que a partir de sua análise é possível averiguar o comportamento de dirigibilidade e a estabilidade do sistema uma vez que estas características são claramente mostradas no diagrama.

A partir desse trabalho, pelo menos duas novas propostas de trabalho futuro podem ser apontadas. A primeira em relação aos resultados no domínio da frequência, pois a bibliografia nesta área é pouca. No entanto, acredita-se que uma metodologia mais sólida e clara sobre a análise de dirigibilidade no domínio da frequência pode ser realizada. A segunda proposta surge de um trabalho mais aprofundado em relação ao ângulo de deriva da trajetória. Este parâmetro muda de sinal com o aumento da velocidade. Informações sobre essa alteração e o ponto de mudança ainda são poucas e trabalhos detalhados neste aspecto seriam úteis para o estudo de dirigibilidade em veículos.

As metodologias propostas neste trabalho permitem que os engenheiros infiram sobre a dinâmica lateral do veículo em diferentes estágios do desenvolvimento. Os resultados da aplicação desses procedimentos são a diminuição no tempo de teste e no número de protótipos reais. Fato extremamente desejado pela indústria automotiva, pois representa uma grande redução de custo durante o desenvolvimento de um projeto.

7 BIBLIOGRAFIA

- ABE, M.; KANO, Y.; SHIBAHATA, Y.; FURUKAWA, Y.; (1999) Improvement of vehicle handling safety with vehicle side-slip control by direct yaw moment, *Vehicle Systems Dynamics*, 33 (1999), pp. 665-679, Swets & Zeitlinger.
- ALLEN, R.W., MAGDALENO, R.E. *et. al.* (1995) Tire modeling requirements for vehicle dynamics simulation. In: International Congress and Exposition, Detroit, Michigan, February 27- March 2, 1995, SAE paper 950312.
- BAE, D.S.; LEE, J.K., CHO, H.J.; YAE, H. (2000) An explicit integration method for realtime simulation of multibody vehicle models. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 187 (2000), pp 337-350, Elsevier.
- BAKKER, E.; NYBORG, L.; PACEJKA, H.B., (1987), Tyre Modeling for Use in Vehicle Dynamics Studies. Society of Automotive Engineering, vol. Paper No. 870421.
- BAKKER, E.; PACEJKA, H.B.; LIDNER, L., (1989), A New Tyre Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies. Society of Automotive Engineering, vol. Paper No. 890087.
- BERTRAN, T.; BEKES, F.; GREUL, R.; HANKE, O.; HASS, C.; HILGERT, J.; HILLER, M.; OTTGEN, O.; OPGEN_RHEIN, P.; TORLO, M.; WARD, D. (2003) Modelling and simulation for mechatronic design in automotive systems, *Control Engineering Practice* 11 (2003) 179-190, Pergamon.
- BERZERI, M.; SHABANA, A. A. (2000) Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal co-ordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration* (200) 235 (4), pp. 539-565.
- CASANOVA, D.; SHARP, R.S.; SYMONDS, P., (2000) Minimum Tire Maneuvering: The significance of yaw inertia, *Vehicle Systems Dynamics*, 34 (2000), pp. 77-115, Swets & Zeitlinger.
- CARLBOM, P.F. (2001). Combining MBS with FEM for Rail Vehicle Dynamics Analysis, *Multibody System Dynamics* 6, pp. 291-300, 2001, Kluwer Academic Publishers.
- CHEN, D.C.; CROLLA, D.A.; (1998) Subjective and objective measures of vehicle handling: drivers & experiments, *Vehicle Systems Dynamics*, 28 (1998), pp. 576-597, Swets & Zeitlinger.
- COSTA, A. N. (1991). *Application of Multibody System (MBS) Techniques to Automotive Vehicle Chassis Simulation for Motion Control Studies*. Ph. D.Thesis, University of Warwick, Coventry, England.

-
- COSTA, A. N. (2002). Apostila: Dinâmica Veicular, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos - SP.
- CRAIG, R.R., BAMPTON, M.C.C. (1968). Coupling of substructures for dynamics analyses. *AIAA Journal*, 6 (7): 1313-1319, 1968.
- CUNHA, R.H.; COSTA, A.N.; PRADO, M.; PERSEGUIM, O.T.; ARGENTINO, M.A.; SPINELLI, D.M.; (2001). Handling Analysis of a Three-Axle Intercity Bus, São Paulo, SAE Technical Paper Series.
- DUGOFF, H.; FANCHER, P.S.; SEGEL, L. (1970). An analysis of tire properties and their influence on vehicle dynamics performance. *SAE Transactions*, 700377.
- ELLIS, J.R. (1994). **Vehicle Handling Dynamics**. London: Mechanical Engineering Publications Limited, ISBN 0 85298 885 0.
- GILLESPIE, T. (1992). **Fundamentals of vehicle dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, ISBN 1-56091-199-9.
- HEGAZY, S.; RAHNEJAT, H.; HUSSAIN, K.; (2000) Multi-body dynamics in full-vehicle handling analysis under transient manoeuvre, *Vehicle Systems Dynamics*, 34 (2000), pp. 1-24, Swets & Zeitlinger.
- HOFFMANN, G. J.; FISCHER, E.; RICHTER, B., (1991), The Incorporation of Tire Models into Vehicle Simulations. 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis.
- HUSTON, R.L.; KAMMAN, J.W. (2000) Testing the accuracy of numerical simulations of multibody systems. *Mechanics Research Communications*, Vol. 28, No. 1, pp 1-, 2001, Pergamon.
- IBRAHIM, I.M.; CROLLA, D.A., BARTON, D.C., (1996), Effect of frame flexibility on the ride vibration of trucks, *Computer & Structures* Vol. 58, No. 4, pp 709-713, 1996, Elsevier Science Ltd, Great Britain.
- KLISCH, T. (1998). Contact Mechanics in Multibody Systems, *Multibody System Dynamics* 2, pp. 335-354, 1998, Kluwer Academic Publishers.
- KÖRTUM, W.; SCHIEHLEN, W.; (1985) General Purpose Vehicle System Dynamics Software Based on Multibody Formalism, *Vehicle Systems Dynamics*, 14 (1985), pp. 229-263, Swets & Zeitlinger (0042-3114/85/1403-0229).
- KUNKEL, D.T.; LEFFERT, R.L. (1988). Effects of tyre pressure variations on vehicle handling, *International Journal of Vehicle Design*, vol. V.9.
- LEVINSON, D.A., (1977). Equations of motion for multi-rigid-body systems via symbolic manipulation, *Journal of Spacecraft and Rockets* 14, pp. 479-487.
- MAMMAR, S., KOENIG, D.; (2002) Vehicle handling improvement by active steering, *Vehicle Systems Dynamics*, 38 (2002), pp. 211-242, Swets & Zeitlinger.
- MECHANICAL DYNAMICS, (2002) ADAMS/FLEX Documentation, Theoretical Background.
- MF-TYRE USER MANUAL (1996) A design and analysis tool for modeling and simulation of tyre behaviour, Deft-Tyre, Version 5.0.
- MILLIKEN, W.F.; MILLIKEN, D.L. (1995). **Race Car Vehicle Dynamics**. Society of Automotive Engineers, ISBN 1 56091 526 9.

- NOOMWOGS, N.; YOSHIDA, H.; NAGAI, M.; KOBAYASHI, K.; YOKOI, T. (2003). Study on handling and stability using tire hardware-in-the-loop simulator, Japan, JSAE Review 24 (2003), pp 457-464, Elsevier.
- OLLEY, M. (1934). Independent wheel suspension – its whys and wherefores. SAE Journal, March, pp. 73-81.
- ORLANDEA, N. (1973) *Node-analogous, sparsity-oriented methods for simulation of mechanical systems*. Tese (doutorado). Universidade de Michigan.
- ORLANDEA, N; CHACE, M.A. (1977) Simulation of a vehicle suspension with the ADAMS computer program. In: INTERNATIONAL AUTOMOTIVE ENGINEERING CONGRESS AND EXPOSITION. Detroit. SAE paper 770053.
- PACEJKA, H.B. (1973a). Simplified analysis of steady-state turning behaviour of motor vehicles. Part 1. Handling diagrams o simple systems. Vehicle System Dynamics, v. 2, pp. 161-172.
- PACEJKA, H.B. (1973b). Simplified analysis of steady-state turning behaviour of motor vehicles. Part 2. Handling diagrams o simple systems. Vehicle System Dynamics, v. 2, pp. 173-183.
- PACEJKA, H.B. (1973c). Simplified analysis of steady-state turning behaviour of motor vehicles. Part 3. Handling diagrams o simple systems. Vehicle System Dynamics, v. 2, pp. 184-204.
- PACEJKA, H.B.; BAKKER, E. (1991). The magic formula tyre model. In 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis, Delft, The Netherlands, October 21-22.
- PASQUINI, J., (1998), *Modelagem e análise da dinâmica lateral de veículos automotivos*, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos (Dissertação), São Carlos, SP.
- PRADO, M., (2003), *Desenvolvimento de um modelo não linear de três graus de liberdade para a análise da dinâmica lateral de um ônibus com suspensão a ar*. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos (Tese), São Carlos, SP.
- PRADO, M.; CUNHA, R.H.; COSTA, A.N.; COSTA, A.; MANCOSU, F.; SAVI, C.; D'ELBOUX, J.E. (2001). Bus Handling Analysis and Experimental Validation Using the Multibody System Technique, São Paulo, SAE Technical Paper Series (2001-01-3966).
- QU, Q.; LIU, Y. (2000) On lateral dynamics of vehicles based on nonlinear characteristics of tires, Vehicle System Dynamics 34 (2000), pp. 131-141, Swets & Zeitlinger.
- ROAD VEHICLES (1975) Test procedure for a severe lane change manoeuvre, Technical Report ISO 3888.
- SANTINI, P.; GASBARRI, P. (2003) Dynamics of multibody systems in the space; Lagrangian vs Eulerian approach, Acta Astronautica 54 (2003) 1-24.
- SCHIEHEN, W. (1997). Multibody Systems Dynamics: Roots and Perspectives. Multibody Systems Dynamics, Kluwer Academic Publishers.

- SCHIEHEN, W., KREUZER, E. (1977). Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme, *Ingenieur-Archiv* 46, pp 185-194.
- SCHÜLLER, J; SCHAEFER, F., NEUKUM, A.; KRUEGER, H.P.; (1999) A driver model as development tool for vehicle handling design, *Vehicle Systems Dynamics*, 33 (1999), pp. 110-121, Swets & Zeitlinger.
- SEGEL, L. (1956). Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. The Institution of Mechanical Engineers, August 30.
- SHABANA, A.A. (1997). Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and recent Developments, *Multibody System Dynamics* 1, pp. 189-222, 1997, Kluwer Academic Publishers.
- SHIIBA, T; SUDA, Y (2002) Development of driving simulator with full vehicle model of multibody dynamics. *Journal SAE Japan* 23 (2002) pp 223-230.
- SIMEON, B. (2001). Numerical Analysis of Flexible Multibody Systems, *Multibody System Dynamics* 6, pp. 305-325, 2001, Kluwer Academic Publishers.
- SULTAN, M.O.; HEYDINGER, G.J. (1995). A study of vehicle class segregation using linear handling models. In: International Congress & Exposition, Detroit, Michigan, February 27 – March 2, SAE paper 950307.
- VALÁŠEK, M.; BREEDVELD, P.; ŠIKA, Z.; VAMPOLA, T.; (1999) Software Tools for Mechatronic Vehicles: Design Through Modelling and Simulation, *Vehicle Systems Dynamics*, 33 (1999), pp. 214-230, Swets & Zeitlinger.
- VAN STAHEYEN, K; TIJSKENS, E.; RAMON, H. (2003) A multibody dynamic approach for colliding particles. *Journal of Sound and Vibration* 266 (2003), pp 481-491. Academic Press.
- VEILT, A.; GORDON, T.; VAN DE SAND, A.; HOWELL, M.; VALÁŠEK, M.; VACULIN, O.; STEINBAUER, P.; (1999) Methodologies for Coupling Simulation Models and Codes in Mechatronic System Analysis and Design, *Vehicle Systems Dynamics*, 33 (1999), pp. 231-243, Swets & Zeitlinger.
- VON DOMBROWSKI, S. (2002). Analysis of Large Flexible Body Deformation in Multibody Systems using Absolute Coordinates, *Multibody System Dynamics* 8, pp. 409-432, 2002, Kluwer Academic Publishers.
- WALLRAPP, O.; (1998) Flexible Bodies in Multibody Systems Codes, *Vehicle Systems Dynamics*, 30 (1998), pp. 237-256, Swets & Zeitlinger (0042-3114/98/3003).
- WHITCOMB, D.W., MILLIKEN, W.F. (1956). Design implications of a general theory of automobile stability and control. The Institution of Mechanical Engineers, August, 30.
- WINKLER, C.B. (1998). Simplified analysis of the steady-state turning of complex vehicles. *Vehicle System Dynamics*, v. 29, pp. 141-180.

ANEXO A - SISTEMAS MULTICORPOS BASEADOS EM EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER

1. CINEMÁTICA DOS SISTEMAS MULTICORPOS

Um sistema multicorpos é descrito matematicamente por equações de movimento para análise dinâmica. A seguir, uma teoria geral para sistemas holonômicos e não holonômicos é apresentada usando o mínimo de coordenadas generalizadas para uma única representação do movimento, como apresentado por SCHIEHLEN (1997).

A posição de um corpo i relativa ao referencial inercial é dada pelo vetor posição $\mathbf{r}_i$ do centro de massa C_i (Eq. A.1) e do tensor de rotação $\mathbf{S}_i$ (Eq. A.2).

$$\mathbf{r}_i = [r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3}]^T \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \quad (\text{A.2})$$

O tensor rotação $\mathbf{S}_i$ depende dos ângulos α_i , β_i e γ_i que correspondem a matriz de cossenos diretores relativos ao referencial inercial e ao corpo. Para um sistema de p corpos, um vetor $\mathbf{x}$ pode ser descrito pelas 3 p coordenadas de translação e 3 p coordenadas de rotação, totalizando um vetor de 6 p elementos, dado pela Eq. A.3.

$$\mathbf{x} = [r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad \cdots \quad \alpha_p \quad \beta_p \quad \gamma_p]^T \quad (\text{A.3})$$

Das Eqs. A.1, A.2., e A.3 pode-se concluir que:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Dado um sistema com q vínculos de configuração, resultantes das equações de vínculo holonômico e reonômicas (equações explicitamente dependentes do tempo), tais vínculos podem ser descritos explicita ou implicitamente em relação ao tempo, segundo as Eqs. A.6 e A.7 respectivamente.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \quad (\text{A.6})$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

O vetor posição $\mathbf{y}$ é descrito sintetizando as f coordenadas generalizadas do sistema.

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_f]^T \quad (\text{A.8})$$

Ainda na Eq. A.6, Φ é um vetor função de q elementos. O número de coordenadas generalizadas corresponde ao número de graus de liberdade do sistema, $f = 6p - q$, a respeito das posições do sistema. Então, as Eqs. A.5 e A.6 podem ser descritas pelas Eqs. A.9 e A.10.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t) \quad (\text{A.10})$$

As velocidades são encontradas por diferenciação ao referencial inercial, Eqs. A.11 e A.12.

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t) \quad (\text{A.11})$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t) \quad (\text{A.12})$$

As matrizes jacobianas $\mathbf{J}_{Ti}$ e $\mathbf{J}_{Ri}$ são caracterizadas pelos deslocamentos translacionais e rotacionais virtuais. O vetor rotação $\dot{\mathbf{s}}_i$ é encontrado analiticamente através do tensor rotação. As acelerações são obtidas pela segunda diferenciação ao referencial inercial, Eqs. A.13 e A.14.

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial t} \quad (\text{A.14})$$

Observa-se que os vínculos escloronômicos, ou seja, vínculos independentes do tempo, nas Eqs. A.11, A.12, A.13 e A.14 desaparecem.

Neste mesmo sistema, o número de vínculos de movimento é r , resultantes das equações de vínculo não holonômico e reonômico, tais vínculos podem ser descritos explicita ou implicitamente, respectivamente, pelas Eqs. A.15 e A.16.

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.15})$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = 0 \quad (\text{A.16})$$

O vetor velocidades $\mathbf{z}$ é descrito sintetizando as g velocidades generalizadas do sistema, A.17.

$$\mathbf{z}(t) = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \cdots \quad z_g]^T \quad (\text{A.17})$$

Ainda na Eq. A.16, $\boldsymbol{\Psi}$ é uma vetor função de r elementos. O número de velocidades generalizadas corresponde ao número de graus de liberdade do sistema $g = f - r$, a respeito das velocidades do sistema. A velocidade translacional e rotacional de cada corpo pode ser expressa, respectivamente, pelas Eqs. A.18 e A.19.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.18})$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.19})$$

As acelerações são encontradas por diferenciação ao referencial inercial, Eqs. A.20 e A.21.

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{z}^T} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \mathbf{L}_{Ti}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.20})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{z}^T} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial t} = \mathbf{L}_{Ri}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.21})$$

As matrizes jacobianas $\mathbf{L}_{Ti}$ e $\mathbf{L}_{Ri}$ são caracterizadas pelas velocidades translacionais e rotacionais virtuais. As derivadas parciais no tempo nas Eqs. A.20 e A.21 desaparecem.

2. EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER

Usando o diagrama de corpo livre para cada corpo do sistema multicorpos, as equações de Newton-Euler para cada corpo no referencial inercial podem ser descritas pelas Eqs. A.22 e A.23.

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r, i = 1:p, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^e + \mathbf{l}_i^r, i = 1:p, \quad (\text{A.23})$$

A inércia de cada corpo é representada pela massa m_i e por um tensor de inércia $\mathbf{I}_i, 3 \times 3$, relativo ao centro de massa C_i de cada corpo. As forças $\mathbf{f}_i^e$ e torques $\mathbf{l}_i^e$ externos são compostos por vetores contendo 3 elementos devido à ação de molas, amortecedores, atuadores, peso, etc. As forças $\mathbf{f}_i^r$ e torques $\mathbf{l}_i^r$ internos provindos dos vínculos também são compostos por vetores contendo 3 elementos. Todos os torques são descritos com referência ao centro de massa C_i .

As forças e torques de vínculo podem ser reduzidos pela distribuição das matrizes para forças de vínculos generalizadas $\boldsymbol{\lambda}$, resultando em um vetor de $(q+r)$ elementos igualando-se ao número total de vínculos (Eq. A.24).

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \cdots \quad \lambda_{q+r}]^T \quad (\text{A.24})$$

As matrizes $3 \times (q+r)$ de distribuição translacionais e rotacionais são dadas pelas matrizes $\mathbf{F}_i$ e $\mathbf{L}_i$, segundo as Eqs. A.25 e A.26.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.26})$$

Assim as forças e torques internos para cada corpo podem ser descritos como:

$$\mathbf{f}_i^r = \mathbf{F}_i \boldsymbol{\lambda}, i = 1:p, \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{I}_i^r = \mathbf{L}_i \boldsymbol{\lambda}, i = 1:p, \quad (\text{A.28})$$

As forças de vínculo ou as matrizes de distribuição podem ser encontradas através de análise geométrica ou analiticamente. As forças e torques aplicados ideais dependem somente das variáveis cinemáticas do sistema e são independentes das forças de vínculos. As forças podem ser caracterizadas por comportamentos proporcionais, diferenciais e integrais. As forças proporcionais podem ser caracterizadas pelas posições do sistema e pelo tempo (Eq. A.29). Como exemplos temos molas conservativas, força peso, etc.

$$\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.29})$$

As forças proporcionais-diferenciais dependem da posição e da velocidade (Eq. A.30). Um exemplo típico é uma mola-amortecedor com configuração paralela.

$$\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (\text{A.30})$$

As forças proporcionais-integrais dependem da posição e da integral da posição (Eq. A.31). Exemplos dessas forças são mola-amortecedor com configuração em série e atuadores proporcionais-integrais. A integral das posições é descrita pelo vetor $\mathbf{w}$ de p elementos dada pela Eq. A.32.

$$\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad (\text{A.31})$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad (\text{A.32})$$

No caso de vínculos não-lineares como forças de contato e escorregamento, as forças aplicadas são acopladas com as forças de vínculo.

As equações de Newton-Euler de um sistema completo podem ser descritas por notação matricial. As propriedades de inércia são descritas por uma matriz $\overline{\mathbf{M}}$ diagonal de $6p \times 6p$. Sendo $\mathbf{E}$ a matriz identidade 3×3 .

$$\overline{\mathbf{M}} = \text{diag}\{m_1 \mathbf{E} \quad m_2 \mathbf{E} \quad \cdots \quad \mathbf{I}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{I}_p\} \quad (\text{A.33})$$

Os vetores de $6p$ elementos $\bar{\mathbf{q}}^c$, $\bar{\mathbf{q}}^e$ e $\bar{\mathbf{q}}^r$ representando, respectivamente, as forças de Coriolis, as forças aplicadas ideais e as forças de vínculo podem ser encontrados pela formulação da Eq. A.34.

$$\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{f}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{f}_p^T]^T \quad (\text{A.34})$$

Definem-se a matriz $\bar{\mathbf{J}}$, $6p \times g$, compostas das matrizes jacobianas $\mathbf{J}_{Ti}$ e $\mathbf{J}_{Ri}$; a matriz $\bar{\mathbf{L}}$, $6p \times g$, compostas das matrizes jacobianas $\mathbf{L}_{Ti}$ e $\mathbf{L}_{Ri}$; e a matriz de distribuição $\bar{\mathbf{Q}}$, $6p \times (q+r)$. As matrizes $\bar{\mathbf{L}}$ e $\bar{\mathbf{Q}}$ são construídas de maneira análoga à matriz $\bar{\mathbf{J}}$ (Eq. A.35).

$$\bar{\mathbf{J}} = [J_{T1}^T \quad J_{T2}^T \quad \cdots \quad J_{R1}^T \quad \cdots \quad J_{Rp}^T]^T \quad (\text{A.35})$$

A partir dessas definições, as equações de Newton-Euler podem ser representadas no referencial inercial para sistemas holonômicos pela Eq. A.36.

$$\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{J}} \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{q}}^c(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \bar{\mathbf{Q}} \lambda \quad (\text{A.36})$$

E as equações de Newton-Euler para sistemas não holonômicos podem ser descritas pela Eq. A.37.

$$\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{q}}^c(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \bar{\mathbf{Q}} \lambda \quad (\text{A.37})$$

3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de Newton-Euler são combinações de equações algébricas e diferenciais e, através de princípios dinâmicos, podem ser separadas em equações puramente algébricas e diferenciais. Os movimentos podem ser calculados através de integração das equações puramente diferenciais e as forças de vínculo, algebricamente. Para forças aplicadas ideais, ambos os cálculos podem ser feitos sucessivamente, mas as forças de contato necessitam de cálculos simultâneos.

Os sistemas holonômicos com forças proporcionais ou proporcionais-diferenciais resultam em um sistema multicorpos ordinário. As equações de movimento podem ser encontradas aplicando-se o Princípio de d'Alembert.

As equações de movimento para sistemas holonômicos são encontradas pré-multiplicando-se a Eq. A.36 com $\bar{\mathbf{J}}^T$ (Eq. A.38).

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (\text{A.38})$$

Esse procedimento reduz o número de equações de $6p$ para f , a matriz de inércia $\mathbf{M}(\mathbf{y}, t)$, $f \times f$, é completamente simétrica, $\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{J}} > \mathbf{0}$, e as forças e torque de vínculos são eliminados. O vetor $\mathbf{k}$, $f \times I$, descreve a força de Coriolis e o vetor $\mathbf{q}$, $f \times I$, inclui as forças aplicadas generalizadas.

Os sistemas não holonômicos com forças proporcionais-integrais resultam em um sistema multicorpos genérico. As equações de movimento são obtidas pelas equações de Newton-Euler, onde as forças proporcionais-integrais e o Princípio de Jourdain devem ser usados. No entanto as equações de movimento não são suficientes e devem ser completadas com vínculos não holonômicos explícitos, resultando nas Eqs. A.39, A.40 e A.41.

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}, t) \quad (\text{A.39})$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.40})$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{A.41})$$

Esse procedimento reduz o número de equações dinâmicas de $6p$ para g e a matriz de inércia $\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}} \bar{\mathbf{J}} > \mathbf{0}$, $g \times g$, aparece. Os vetores $\mathbf{k}$ e $\mathbf{q}$, $g \times I$, descrevem, respectivamente, a força de Coriolis e as forças aplicadas generalizadas. As Eqs. A.39, A.40 e A.41 são conhecidas como Equações de Kane.

Também existe a possibilidade de se utilizar uma representação mais genérica para os sistemas dinâmicos em variáveis de estado, dada pela Eq. A.42.

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (\text{A.42})$$

sendo $\underline{\mathbf{x}}$ um vetor de estados de n coordenadas e velocidades generalizadas.

A Eq. A.42 também é verdadeira para sistemas sem vínculos, resultando em $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ e a matriz $\bar{\mathbf{J}}$ quadrada, $6p \times 6p$. Adicionando vínculos implícitos (Eqs. A.6 e A.7), são obtidas Equações de Lagrange do primeiro tipo, como

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \Phi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{A.43})$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}$ um vetor de multiplicadores de Lagrange de q elementos. Comparando a Eq. A.42 com a Eq. A.38, os multiplicadores de Lagrange podem ser interpretados como forças de vínculo generalizadas e a matriz de distribuição $\bar{\mathbf{Q}}$ pode ser obtida pela formulação implícita dos vínculos. No entanto, as $6p$ equações escalares (Eq. A.43) não podem ser resolvidas devido às $6p + q$ variáveis do vetor $\mathbf{x}$, sendo então necessário utilizar a equação implícita de vínculos

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.44})$$

Isso resulta em $6p + q$ equações algébricas diferenciais de índice 3. Uma das maneiras mais populares de se resolver as Eqs. A.38 e A.39 é reduzir o índice para duas diferenciações em relação ao tempo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{x}}^T \\ \Phi_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{k} \\ -\Phi_t - \dot{\Phi}_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

No entanto, devido às derivadas, a Eq. A.45 é numericamente instável.

As Eqs. A.38, A.39 e A.40 também podem ser usadas para sistema holonômicos. Assim, as f coordenadas generalizadas e as f velocidades generalizadas são independentes, resultando em uma boa simplificação das equações dinâmicas.

Mesmo sendo omitidas pelos princípios dinâmicos, as forças de vínculos são interessantes no carregamento de juntas, suportes, etc. e são necessárias no cálculo de forças de contato e atrito. Dos $6p$ elementos do vetor das forças de vínculos $\bar{\mathbf{q}}^r$, existem somente $(q + r)$ coordenadas linearmente independentes. No entanto, somente o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ das forças de vínculos generalizadas de $(q + r)$ elementos, é necessário. O resultados são dados somente para sistemas holonômicos, $r = 0$, mas eles podem ser usadas para sistemas não holonômicos sem problemas.

De acordo com o Princípio de d'Alembert, a premultiplicação da Eq. A.36 por $\overline{\mathbf{Q}}^T \overline{\mathbf{M}}^{-1}$ resulta em equações de reação

$$\mathbf{N}(\mathbf{y}, t) \boldsymbol{\lambda} + \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (\text{A.46})$$

sendo $\mathbf{N}(\mathbf{y}, t)$ uma matriz de reação simétrica, $q \times q$ e $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ vetores de q elementos. Esse procedimento resulta em equações puramente algébricas assim como as dos problemas estáticos.