## UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DEDALUS - Acervo - EESC** 31100013452

# ANÁLISE MODAL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO MULTI-MODOS

Eng. PAULO SERGIO VAROTO

Orientador: Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni



Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Unive<u>r</u> sidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do títu lo de Mestre em Engenharia - área : Engenharia Mecânica.

SAD CARLOS

Para meus pais, Luzia e Paulo e para Vania.

i

Este trabalho foi realizado no Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Sistemas do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. Agradeço à CAPES, Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa de estudos concedida durante uma fase da realização do trabalho.

Agradeço ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Mario F. Mucheroni pela sugestão do tema, orientação e atenção que sempre recebi durante sua realização.

Agradeço aos professores responsáveis pelo Laboratório de Máquinas Ferramentas, LAMAFE, pelo uso das instalações do referido laboratório durante a fase experimental do trabalho. Aos técnicos do LAMAFE deixo o meu muito obrigado pela colaboração recebida. A realização dos ensaios contou com a ajuda inestimável do Eng. José Cláudio Pinto Azevedo, do Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Sistemas do Departamento de Engenharia Mecânica.

Aos funcionários do Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Sistemas, Cristina, Suzete, Sudano e José Francisco ("Xina") agradeço a atenção com a qual sempre fui atendido.

Agradeço à todos os professores e funcionários do SEM que colaboraram para a realização deste trabalho.

ii

#### RESUMO

Este trabalho apresenta um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. O algorítmo de identificação realiza a ajustagem de curvas aos dados de resposta em frequência de uma determinada estrutura em uma faixa contendo várias frequências naturais. Esta ajustagem é baseada no método dos mínimos quadrados e o modelo matemático da função resposta em frequência (FRF) adotado é dado pelo quociente de dois polinômios dependentes da frequência. Nesta fase de ajustagem de curvas são obtidos os coeficientes da FRF do sistema.

Em uma segunda etapa, são calculados os parâmetros modais do sistema, respectivamente, as frequências naturais, os fatores de amortecimento modais e as constantes modais. Numa última etapa, é feita a regeneração dos dados medidos através dos parâmetros modais identificados afim de se comparar os resultados.

O algorítmo de identificação é aplicado aos dados provenientes de um ensaio experimental.

#### ABSTRACT

A modal parameter identification method in frequency domain is presented. The identification algorithm initially performs the multi-degree of freedom curve fitting to the frequency response data of a given structure in a range containing several natural frequencies. The curve fitting process is a least squares based method and the mathematical model of the frequency response function (FRF) adopted is given by the quocient of two frequency dependent polinomials. The results of this curve fitting process are the coefficients of such a FRF model.

In a second step the modal parameters of the FRF analysed, which are the natural frequencies, the modal damping ratios and the modal constants are calculated. Finally, the measured FRF are regenerated using the modal parameters identified, in order to compare the results.

The identification algorithm is applied to the experimetal data of a modal test.

# ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
	1.1 Considerações gerais sobre os métodos	
	de medida e análise	2
	1.2 Objetivos do trabalho	9
2.	RESPOSTA LIVRE DE SISTEMAS DISCRETOS	11
	2.1 Sistemas não amortecidos	13
	2.2 Ortogonalidade dos modos de vibrar	17
	2.3 Sistemas amortecidos	21
3.	RESPOSTA FORÇADA DE SISTEMAS DISCRETOS	39
	3.1 Resposta harmônica de sistemas não amortecidos	40
	3.2 Resposta harmônica de sistemas amortecidos	48
	3.3 Reposta impulsiva de sistemas lineares	58
4.	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	60
	4.1 Identificação modo a modo	62
×	4.2 Identificação multi-modos	68
	4.2.1 Extensão do modelo modo a modo	72
	🖗 4.2.2 Identificação com a FRF na forma	
	de frações parciais	74
	🛶 4.2.3 Identificação com a FRF na forma polinomial	78
	¥4.2.4 Identificação de parâmetros modais em	
	estruturas levemente amortecidas	87
	4.2.5 Identificação global de parâmetros modais	90
	4.2.6 O método da exponencial complexa	91
	4.2.7 O método de Ibrahim	97
	4.2.8 O método da polireferência	102

.

v

-5.	MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO	104
	5.1 Descrição do método de identificação proposto	105
	5.2 Implementação numérica	109
6.	INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL	120
	6.1 Descrição do protótipo ensaiado e da sua fixação	121
	6.2 Excitação da estrutura	122
	6.3 Aquisição e processamento dos dados	125
7.	RESULTADOS E CONCLUSÕES	131
	7.1 Resultados obtidos	132
	7.2 Conclusões	177
	7.3 Sugestões para trabalhos futuros	179
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		180
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA		187

vi

.

### CAPÍTULO 1

#### INTRODUÇÃO

Os estudos teóricos e experimentais relacionados com o fenômeno da vibração estrutural tem contribuido de forma decisiva para a solução de problemas de engenharia. Neste contexto, a Análise Modal Experimental de estruturas tornou-se uma poderosa ferramenta de análise para a determinação das características dinâmicas de estruturas. Os trabalhos de pesquisa na área denominada Análise Modal Experimental estão relacionados com um conjunto de técnicas que possibilitam a obtenção de modelos matemáticos precisos para uma determinada estrutura, a partir de ensaios experimentais (EWINS, 1984). Estes modelos matemáticos são capazes de fornecer subsídios importantes para a área de projetos, em situações em que a integridade estrutural quanto à vibração possa estar comprometida.

Segundo STROUD (1987), a evolução da análise modal

experimental pode ser dividida em três fases: a década de 60 (e anteriormente a ela), quando predominava o uso de técnicas analógicas e não havia o uso direto co computador na análise; a década de 70, quando ocorreu a chamada revolução digital e dela emergiram novas técnicas de medida, aquisição e processamento de dados experimentais; a partir de 1980 até os dias atuais com o uso de computadores de capacidade cada vez maior e com a introdução de novas técnicas experimentais e de análise.

aplicações para a análise Existem várias modal e outros, 1979). A mais experimental (SNOEYS comum é а verificação experimental de um modelo teórico para uma dada estrutura. Este modelo teórico é geralmente proposto através de técnicas de discretização. Através dos ensaios experimentais são obtidas características da resposta do sistema. as Estas características são geralmente dadas através de funcões de resposta em frequência (FRF). A partir destes dados experimetais procura-se obter os parâmetros modais do sistema, que são dados pelas frequências naturais, os fatores de amortecimento modais e os modos de vibrar da estrutura sob estudo. A partir destes parâmetros é possível obter-se um modelo matemático para o sistema e este modelo pode então ser comparado com o modelo teórico formulado inicialmente. Desta comparação pode-se fazer os ajustes necessários no modelo teórico (RAMSEY, 1983).

1.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE MEDIDA E ANÁLISE

Um dos objetivos principais da análise modal

experimental é a obtenção de dados experimentais de vibração que correspondam às propriedades de resposta da estrutura sob estudo. Para que isto seja possível, a investigação experimental deve ser realizada levando-se em conta vários aspectos importantes para a determinação precisa da resposta de um sistema. Inicialmente, deve-se considerar a forma de fixação da estrutura, que pode ser livre ou engastada. Ambas apresentam vantagens e desvantagens, e a escolha da fixação depende fortemente do tipo de estrutura sob teste e também do modelo teórico escolhido para a análise.

A excitação da estrutura e a transdução dos sinais de excitação e resposta também são fatores importantes para o sucesso de um ensaio experimental. Quanto à excitação, existem várias formas de se excitar o sistema (BROWN e outros, 1977). Os dispositivos mais comuns para este fim são respectivamente os excitadores eletrodinâmicos (shakers) e os martelos de impacto. Os primeiros são capazes de fornecer, entre outras formas de sinais, a excitação harmônica e a aleatória, através do uso de um gerador de sinais apropriado. Por sua vez, os martelos de impacto fornecem a excitação do tipo transiente à estrutura, e esta é geralmente feita manualmente. Estas duas formas de excitação possuem vantagens e desvantagens. No caso do uso de um shaker deve-se tomar algumas precauções, pois neste caso, o excitador é fixado à estrutura. Nestas condições deve-se procurar minimizar sua influência na resposta do sistema e também garantir que a estrutura seja excitada na direção que se deseja medir a resposta (OLSEN, 1984). O teste de impulso usando-se um martelo de impacto pode ser uma forma conveniente e bastante acessível de excitação. Sua maior desvantagem reside no fato dela introduzir ruído nas

medidas. Quando se deseja excitar a estrutura em vários pontos, o uso de um martelo de impacto facilita bastante o ensaio. Isto não se aplica aos *shakers* pois para cada ponto de excitação deve-se mudar sua posição, o que pode consumir um tempo considerável.

bastante Dois tipos de excitação usados são respectivamente a excitação harmônica e a aleatória. A excitação harmônica pode ser feita sintonizando-se as frequências naturais uma a uma manualmente ou através de um processo de varredura em uma determinada faixa de frequência. Atualmente com o uso de modernas técnicas de aquisição digital de dados, a varredura harmônica tem sido bastante útil nos ensaios experimentais. Uma de suas grandes vantagens é a possibilidade de se detectar não linearidades presentes possíveis na estrutura. Como desvantagem, pode-se citar o tempo na aquisição de dados que pode ser demasiadamente longo (RADES, 1986).

A excitação aleatória é provavelmente a forma mais usada atualmente. Existem várias formas de excitação aleatória. A excitação aleatória pura usa um sinal contínuo e não repetitivo, que satisfaz as definições de um processo aleatório estacionário. A excitação pseudoaleatória é uma sequência aleatória que se repete periodicamente. Uma desvantagem da excitação aleatória é que ela faz com que efeitos não lineares presentes na estrutura apresentem um comportamento linear por causa dos efeitos de linearização causados pela transformada de Fourier (STROUD, 1987). Esta forma de excitação é bastante susceptível ao fenômeno de *leakage* e requer que  $\epsilon$  resposta medida seja submetida à um processo de *averaging* principalmete em frequências baixas.

A transdução dos sinais de excitação e resposta é

geralmente feita com o uso de acelerômetros piezoelétricos. Os acelerômetros são elementos muito importantes em um ensaio experimental, pois a obtenção de medidas precisas dependem fortemente da escolha adequada destes elementos. As principais dificuldades associadas com o uso dos acelerômetros está em se garantir que eles interfiram o mínimo possível nas medidas e que sua performance seja satisfatória na faixa de frequência escolhida no ensaic (DALLY e outros, 1984).

O processamento dos dados obtidos experimentalmente é feito atualmente com o uso de modernos analisadores de espectro. Estes equipamentos são capazes de fornecer as características de resposta da estrutura no domínio do tempo e da frequência. O processamento é feito usando-se técnicas de transformada de Fourier. As FRF obtidas nas diversas aquisições são submetidas ao processo de averaging, pois este procedimento é capaz de reduzir o nível de ruído presente nos dados. Entretanto, o processamento digital pode estar sujeito à erros se o sistema possuir não linearidades acentuadas. Desta forma, a função coerência deve ser calculada para cada aquisição e seu valor deve ser o mais próximo coisas garante a possível de 1, pois isto entre outras linearidade entre excitação e resposta (BENDAT e PIERSOL, 1980).

A identificação dos parâmetros modais é um estágio posterior ao processamento digital dos dados experimentais. Este estágio pode ser realizado tanto no domínio do tempo como no da frequência. Os parâmetros modais são geralmente obtidos através da ajustagem de curvas aos dados medidos e esta ajustagem é feita baseada no método dos mínimos quadrados. Deve-se ainda observar que a identificação modal pode ser do tipo modo a modo, onde cada

modo de vibrar é identificado separadamente, ou multi-modos, onde vários modos são identificados simultaneamente em uma faixa de frequência (IBRAHIM, 1985).

Os métodos de identificação no domínio da frequência usam como dados de entrada a FRF do sistema. Um dos primeiros métodos nesta área foi proposto por KENNEDY e PANCU (1947). Este método realiza a identificação modo a modo e é conhecido como método de ajustagem do círculo. Sua aplicação é restrita à sistemas que possuam frequências naturais distantes umas das outras. Após sua introdução, surgiram vários métodos com o objetivo de aperfeiçoá-lo. Entre eles pode-se citar o trabalho feito por GAUKROGER (1973) que propôs uma implementação numérica para o método de ajustagem do círculo. Recentemente, VAKAKIS e CAUGHEY (1991) propuseram um método nesta linha e discutiram sua aplicação à sistemas com acoplamento modal significativo.

A identificação multi-modos no domínio da frequência pode ser feita usando-se duas formas equivalentes da FRF do sistema: a forma polinomial e a forma em frações parciais. Na forma polinomial procura-se ajustar os dados experimentais à uma função de transferência dada pelo quociente de dois polinômios. Um dos primeiros métodos nesta linha foi proposto por LEVY (1959). Este método apresenta problemas numéricos quando a faixa de frequência escolhida é muito larga. Em 1963, SANATHANAN e KOERNER propuseram um método de identificação de funções de transferência baseado no método de Levy, mas com melhorias no sentido de diminuir os problemas numéricos. Entretanto para faixas de frequência muito larga, ainda podem ocorrer problemas numéricos. Neste caso, a identificação pode ser realizada de duas

formas. A primeira delas faz uso de polinômios ortogonais na identificação da função de transferência (RICHARDSON e FORMENTI, 1982). A segunda divide a faixa de frequência em várias partes, cada uma delas contendo uma ou mais frequências naturais, e a identificação é feita em cada uma destas subfaixas (EBERSBACH e IRRETIER, 1989). A forma polinomial não fornece os parâmetros modais diretamente. Eles são calculados a partir dos coeficientes da função de transferência identificados.

Quando a FRF é usada na forma de frações parciais, os parâmetros modais são obtidos diretamente da ajustagem de curvas (BROWN e outros, 1979). Entretanto, esta ajustagem resulta não linear em relação à alguns dos parâmetros modais procurados. Estes parâmetros podem ser calculados através de outros métodos e mantidos constantes durante a identificação ou então a FRF do sistema pode ser escrita em séries de Taylor, usando-se apenas os termos lineares.

A identificação de parâmetros modais no domínio do tempo usa a resposta ao impulso do sistema na extração dos parâmetros modais. Esta resposta ao impulso é geralmente obtida tomando-se a transformada inversa de Fourier dos dados da FRF do sistema. A grande maioria dos métodos nesta área é baseada no método de aproximações exponenciais de Prony (FRÖBERG, 1965). O método da exponencial complexa (BROWN e outros, 1979) é um dos métodos mais usados. Ele involve a solução de dois sistemas lineares na determinação dos parâmetros modais, respectivamente um sistema do tipo Toeplitz e um sistema de Van Der Monde.

O método de Ibrahim (IBRAHIM e MIKULCIK, 1973) foi inicialmente proposto com base na resposta livre do sistema

escrita usando-se a formulação de estado. Esta formulação requer uma inversão matricial que pode apresentar problemas numéricos. Ela também pode apresentar problemas experimentais, pois é necessário a medida de um vetor de estado. Existe uma outra formulação para o método de Ibrahim (SMITH, 1984), que se baseia no método dos mínimos quadrados. Esta formulação possui a desvantagem de requerer alguns parâmetros modais como estimativas iniciais do método. Estes parâmetros modais geralmente são obtidos com outros métodos de identificação (IBRAHIM, 1987).

O método de Ibrahim pode ser encarado como um método global de identificação, pois fornece os parâmetros modais de todos os modos de vibrar simultaneamente. Um método pioneiro de identificação global foi proposto por GOYDER (1980). Este método realiza a identificação global de parâmetros no domínio da frequência.

Nos métodos denominados métodos de polireferência, a estrutura é excitada em várias posições simultaneamente e as respostas individuais à cada excitação são processadas também de forma simultânea. O método proposto por VOLD (1982) e mais tarde desenvolvido por DEBLAUWE (1987) é uma extensão do método da exponencial complexa para múltiplas referências. Os métodos deste tipo também podem ser formulados no domínio da frequência (ZHANG e outros, 1986).

Todos os métodos de identificação, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência apresentam uma dificuldade: a determinação da ordem do modelo matemático para a estrutura em estudo. Esta dificuldade é consequência da limitação de modelos discretos usados na análise de sistemas contínuos. Embora as

estruturas possuam infinitos graus de liberdade, as aplicações em modelagem de sistemas físicos e os ensaios experimentais requerem apenas alguns modos de vibrar contidos em uma determinada faixa. Quando existem modos de vibrar fortemente acoplados, a determinação da ordem do modelo pode se tornar mais difícil. Por esta razão, foram desenvolvidos fatores de confiança modal (IBRAHIM, 1978) que podem ser usados afim de se estimar a ordem do modelo.

Um importante outro aspecto nos métodos de identificação é a influência dos modos fora da faixa de frequência analisada (MERGEAY, 1982). Esta influência pode ser levada em conta através da introdução de parcelas residuais conforme discutido neste trabalho.

#### 1.2 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Neste trabalho é proposto um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Este método realiza a identificação multi-modos em uma faixa contendo várias frequências naturais. Os dados são ajustados à uma função de transferência e esta ajustagem é baseada no método de Levy com os melhoramentos propostos por Sanathanan e Koerner. A partir desta função de transferência identificada são calculados os parâmetros modais do sistema. Através de um ensaio experimental numa placa, são obtidos dados usados para verificar a eficiência do método.

A seguir se faz uma apresentação dos capítulos deste trabalho. No capítulo 2 é apresentada a teoria fundamental da

análise modal, onde se discute em particular a resposta livre de sistemas lineares discretos não amortecidos e amortecidos. Para o caso dos sistemas amortecidos são feitas considerações sobre os modelos matemáticos usados na descrição do mecanismo do amortecimento e também sobre sua distribuição espacial na estrutura.

No capítulo 3 são obtidas as expressões para a resposta harmônica de sistemas lineares. A partir destas expressões é possível obter-se as características de resposta em frequência dos sistemas lineares. São feitas também considerações sobre a resposta impulsiva de sistemas lineares.

O capítulo 4 apresenta os principais métodos de identificação de parâmetros modais. É dada ênfase aos métodos de identificação no domínio da frequência. Em particular, é mostrado o desenvolvimento teórico do método de ajustagem de curvas usado neste trabalho. São feitas algumas considerações sobre os principais métodos de identificação no domínio do tempo.

O capítulo 5 descreve o método de identificação de parâmetros modais proposto. São descritas as várias etapas do processo de identificação e são feitas considerações sobre sua implementação numérica.

O capítulo 6 descreve o ensaio experimental realizado neste trabalho. Este ensaio tem o objetivo de fornecer dados experimentais para o algorítmo de identificação modal afim de verificar sua eficiência.

No capítulo 7 os resultados são analisados e comparados e são tiradas algumas conclusões sobre o método usado.

## CAPÍTULO 2

#### RESPOSTA LIVRE DE SISTEMAS DISCRETOS

Este capítulo apresenta a teoria de vibrações mecânicas aplicada à sistemas lineares com vários graus de liberdade. São discutidos os aspectos fundamentais da análise modal relacionados com a determinação da resposta livre dos sistemas. O capítulo é subdividido em duas partes, sendo que a primeira trata dos sistemas não amortecidos enquanto que a segunda dos sistemas amortecidos.

Toda estrutura quando excitada de alguma forma, exibe como resposta um movimento composto de duas partes: a vibração livre e a forçada. A vibração livre ocorre quando o sistema é posto a vibrar sem que nele atuem forças externas. Nestas condições, o movimento da estrutura é descrito por um sistema homogêneo de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução deste sistema homogêneo é obtida facilmente a partir de duas matrizes. A primeira delas é uma matriz diagonal cujos elementos estão relacionados com as frequências naturais e com os fatores de amortecimento modais (quando na análise estão incluídos efeitos de amortecimento). A segunda é a matriz modal do sistema. Suas colunas correspondem aos modos de vibrar da estrutura. Estas duas matrizes constituem o modelo modal do sistema.

A determinação do modelo modal exige o conhecimento prévio das características espaciais da estrutura. Estas características são dadas através das matrizes dos coeficientes de influência de massa, rigidez e amortecimento do sistema e constituem seu modelo espacial. As matrizes de massa e rigidez são obtidas usando-se técnicas de discretização, sendo o Método dos Elementos Finitos a mais usada. A partir destas matrizes são determinadas as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura.

Todos os sistemas físicos apresentam características de amortecimento. São usados vários modelos matemáticos para a descrição do mecanismo de amortecimento, destacando-se os modelos viscoso e o histerético (estrutural). O conhecimento do modelo não é suficiente para o estudo da resposta amortecida dos sistemas. A distribuição do amortecimento na estrutura é de fundamental importância para a determinação do seu modelo modal. Quanto à distribuição, o amortecimento pode ser do tipo proporcional e não proporcional. Neste capítulo é estudada a resposta de sistemas amortecidos levando-se em conta estas duas distribuições de amortecimento.

A resposta forçada de sistemas não amortecidos e

amortecidos será discutida no capítulo seguinte com ênfase à resposta harmônica, de onde pode-se obter as características de resposta em frequência dos sistemas lineares.

2.1 - SISTEMAS NÃO AMORTECIDOS

Um sistema com N graus de liberdade não amortecido possui as seguintes equações de movimento, escritas na forma matricial

$$[M]{\ddot{x}} + [K]{x} = {F}$$
(2.1)

onde

[M] = matriz de massa  $N \times N$ 

[K] = matriz de rigidez  $N \times N$ 

 ${x} = {x(t)} = vetor dos deslocamentos nas$  $coordenadas geométricas, <math>N \ge 1$ 

 ${\ddot{x}} = {\ddot{x}(t)} =$  vetor das acelerações nas coordenadas geométricas, N x 1

 ${F} = {F(t)} = vetor das forças externas, N x 1.$ 

Nas aplicações a que se destinam este trabalho, as matrizes de

massa e rigidez serão admitidas simétricas. Para a obtenção do modelo modal, a equação (2.1) é escrita como

$$[M]{\ddot{x}} + [K]{x} = {0}$$
(2.2)

A solução geral da equação (2.2) para condições iniciais não nulas é dada por uma combinação linear de soluções do tipo

$$\{x\} = \{\phi\} e^{\lambda t} \tag{2.3}$$

onde

 $\{\phi\}$  = vetor de elementos reais ou complexos, N x 1

 $\lambda$  = número complexo.

Substituindo-se esta relação na equação (2.2) tem-se

 $\left[\lambda^{2}[M] + [K]\right] \{\phi\} = \{0\}$  (2.4)

a qual possuirá solução não nula se

$$det \left[\lambda^{2}[M] + [K]\right] = 0 \qquad (2.5)$$

A equação (2.5) constitui um autoproblema quadrático. Neste caso, existem N pares de autovalores  $\lambda_r$  imaginários puros (NEWLAND, 1989). As frequências naturais do sistema são obtidas diretamente a partir destes autovalores. Cada autovalor relaciona-se com uma das frequências naturais do sistema segundo a relação

onde

 $\omega_{\rm c}$  = frequência natural do modo r

$$i = \sqrt{-1}$$

A substituição de cada um destes autovalores na equação (2.5)  $\int_{r}^{1}$ fornece um autovetor { $\phi_{r}$ } de elementos reais que corresponde ao r - ésimo modo de vibrar do sistema. Desta forma, para cada frequência natural  $\omega_{r}$  deve-se resolver um sistema homogêneo de ordem N do tipo

$$\left[-\omega_{r}^{2}[M] + [K]\right] \{\phi_{r}\} = \{0\}$$
(2.6)

ou ainda

$$[D_{r}] \{\phi_{r}\} = \{0\}$$
(2.7)

Como a matriz  $[D_r]$  depende das frequências naturais  $\omega_r$ , ela será diferente para cada modo de vibrar. Para cada valor de  $\omega_r$ , a equação (2.7) é satisfeita por infinitos vetores  $\{\phi_r\}$ , paralelos entre si. Por outro lado, a forma de vibrar para uma determinada frequência natural  $\omega_r$  é determinada resolvendo-se a equação (2.7) em função de um dos N elementos do autovetor  $\{\phi_r\}$ .

Com os N modos de vibrar calculados a partir da resolução do autoproblema mostrado na equação (2.4) pode-se obter o modelo modal do sistema não amortecido, que é dado pela matriz diagonal de ordem N das frequências naturais quadráticas

e pela matriz modal real  $[\Phi]$  cujas colunas são compostas pelos N modos de vibrar do sistema e é dada por

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \{\phi_3\} \dots \{\phi_N\}]$$
(2.9)

ou

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \dots & \phi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \phi_{N3} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$
(2.10)

Deve-se observar que a matriz  $[\omega_r^2]$  para um sistema é única, enquanto que a matriz modal  $[\Phi]$  não. Os autovetores  $\{\phi_r\}$ estão sujeitos a um fator de escala. Sendo linearmente independentes, os *N* modos de vibrar constituem uma base de vetores no espaço  $\mathbb{R}^n$  (MEIROVITCH, 1980).

#### 2.2 ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAR

Os modos de vibrar possuem certas propriedades importantes e muito úteis na análise dinâmica de sistemas. Tais propriedades podem ser deduzidas levando-se em conta que os modos de vibrar involvem deflexões produzidas por forças de inércia atuando como se fossem forças aplicadas ao sistema (CLOUGH e PENZIEN, 1975) segundo a equação (2.6) escrita para uma modo r qualquer

$$[K] \{\phi_{r}\} = \omega_{r}^{2} [M] \{\phi_{r}\}$$
(2.11)

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (2.11) pelo vetor transposto do modo s, tem-se

$$\{\phi_{s}\}^{T}[K]\{\phi_{r}\} = \omega_{r}^{2}\{\phi_{s}\}^{T}[M]\{\phi_{r}\}$$
(2.12)

Escrevendo agora a equação (2.11) para o modo s e em seguida pré-multiplicando ambos os lados pelo vetor transposto do modo r, tem-se

$$\{\phi_{r}\}^{T}[K]\{\phi_{s}\} = \omega_{s}^{2}\{\phi_{r}\}^{T}[M]\{\phi_{s}\}$$
(2.13)

Subtraindo da equação (2.12) a equação (2.13) transposta, obtém-se

$$(\omega_{r}^{2} - \omega_{s}^{2}) \{\phi_{r}\}^{T} [M] \{\phi_{s}\} = 0$$
 (2.14)

Para  $\omega_{p} \neq \omega_{q}$  tem-se

: [ !

$$\{\phi_{r}\}^{T}[M]\{\phi_{o}\} = 0 \qquad (2.15)$$

e da equação (2.13), pode-se observar que para  $\omega_r \neq \omega_s$ 

$$\{\phi\}^{\mathrm{T}}[K]\{\phi\} = 0 \tag{2.16}$$

As equações (2.15) e (2.16) constituem as relações de ortogonalidade dos modos de vibrar, respectivamente com relação as matrizes de massa e de rigidez do sistema. Se na equação (2.14)  $\omega_r = \omega_s$ , então as equações (2.15) e (2.16) são iguais a

$$\{\phi_{-}\}^{T}[M]\{\phi_{-}\} = m_{-}$$
(2.17)

$$\{\phi_{r}\}^{T}[K]\{\phi_{r}\} = k_{r}$$
(2.18)

onde os  $m_r$  e  $k_r$  são respectivamente os coeficientes de massa e rigidez generalizadas, ou massa modal e rigidez modal do modo r. Para os N modos de vibrar, pode-se escrever na forma matricial

$$[\Phi]^{T}[M][\Phi] = [m]$$
(2.19)

$$[\Phi]^{T}[K][\Phi] = [k]$$
(2.20)

onde

$$[k]$$
 = matriz de rigidez modal,  $N \times N$ 

sendo ambas matrizes diagonais devido as propriedades de ortogonalidade. Como foi dito anteriormente a matriz modal é composta de colunas sujeitas a fatores de escala. Assim, os valores de  $m_r$  e  $k_r$  não são únicos para um determinado modo de vibrar, permanecendo constante apenas a frequência natural do modo r que é dada por

$$\omega_{r} = \sqrt{\frac{k_{r}}{m_{r}}}$$
(2.21)

A normalização dos modos de vibrar pode ser feita através dos coeficientes de massa generalizada da estrutura. Para cada modo de vibrar, a normalização é feita segundo a relação

onde  $\{\phi_r\}$  é o modo de vibrar *r* normalizado em relação à sua massa modal. Com este procedimento, pode-se obter todos os modos de vibrar normalizados, e então as equações (2.19) e (2.20) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ [\Phi]^{\mathrm{T}}[K][\Phi] = [\omega_{\mathrm{r}}^{2}]$$
 (2.24)

onde [I] é a matriz identidade N x N, e  $[\Phi]$  é a matriz modal constituída dos N modos de vibrar do sistema normalizados segundo

a relação (2.22).

Na solução da equação (2.1) ou mesmo da (2.2) um obstáculo encontrado é o acoplamento elástico e inercial entre as equações, pois geralmente as matrizes [M] e [K] não são diagonais. A transformação de coordenadas que juntamente com as relações (2.19) e (2.20) ou mesmo (2.23) e (2.24) desacopla o sistema de equações (2.1) é dada por (CLOUGH e PENZIEN, 1975)

$$\{x\} = [\Phi]\{y\}$$
(2.25)

onde

 $\{y\} = \{y(t)\} =$  vetor dos deslocamentos nas coordenadas normais ou modais do sistema,  $N \ge 1$ .

Nesta equação, a matriz modal  $[\Phi]$  representa a matriz de uma transformação linear das coordenadas normais  $\{y\}$  para as coordenadas geométricas  $\{x\}$  do sistema. Com esta transformação de coordenadas, cada equação de movimento pode ser resolvida nas coordenadas normais, independente das demais como se fosse um sistema de um grau de liberdade. Obtida a solução de cada uma das N equações desacopladas, a solução total pode ser obtida através do método da superposição modal, equação (2.25), ou de forma expandida

$$\{x\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \{\phi_3\}y_3 + \dots + \{\phi_N\}y_N$$
(2.26)

ou ainda

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_{r}\} y_{r}$$
(2.27)

O desacoplamento modal será usado adiante na obtenção da resposta dos sistemas amortecidos e no capítulo três na obtenção da resposta em frequência de sistemas lineares.

#### 2.3 - SISTEMAS AMORTECIDOS

Os modelos matemáticos mais usados para descrever o mecanismo de amortecimento em uma dada estrutura são respectivamente, o modelo viscoso e o histerético, também identificado como amortecimento estrutural. No modelo viscoso as forças de amortecimento são proporcionais à velocidade relativa dos pontos da estrutura, enquanto que no modelo histerético, estas forças são proporcionais ao deslocamento.

O estudo da resposta de sistemas amortecidos depende não somente do conhecimento do modelo matemático adotado para o amortecimento como também da distribuição do mesmo na estrutura. Existem dois tipos de distribuição de amortecimento usados na modelagem de sistemas físicos. O primeiro deles considera a matriz dos coeficientes de amortecimento formada a partir de uma combinação entre as matrizes de massa e rigidez do sistema. Este tipo de distribuição recebe o nome de amortecimento proporcional e as matrizes de amortecimento são formadas a partir da seguinte relação (CLOUGH e PENZIEN, 1975)

$$[C] = [M] \sum_{b} a_{b} [[M]^{-1}[K]]^{b}$$
(2.28)

onde

[C] = matriz de amortecimento  $N \times N$ 

$$b = inteiro.$$

Como no caso das matrizes de massa e rigidez, a matriz de amortecimento será suposta simétrica.

Existe um caso particular da distribuição de amortecimento proporcional denominado amortecimento de Rayleigh, onde a matriz [C] é obtida tomando-se apenas os termos correspondentes a b = 0 e b = 1 na equação (2.28)

$$[C] = a_{0}[M] + a_{1}[K]$$
(2.29)

Aplicando as condições de ortogonalidade à equação (2.29), tem-se

$$[\Phi]^{T}[C][\Phi] = [\Phi]^{T}a_{0}[M][\Phi] + [\Phi]^{T}a_{1}[K][\Phi]$$
(2.30)

de onde obtém-se

$$[c_{1}] = [\Phi]^{T}[C][\Phi] = a_{0}[m_{1}] + a_{1}[k_{1}]$$
(2.31)

onde

sendo  $[c_r]$  diagonal. Desta forma, as matrizes de amortecimento definidas a partir da equação (2.28), e em particular o amortecimento de Rayleigh obedecem às relações de ortogonalidade definidas anteriormente para os sistemas não amortecidos. Pode-se concluir que o amortecimento proporcional é constituído por matrizes de amortecimento definidas segundo a equação (2.28) e que podem ser diagonalizadas pela mesma transformação linear usada para se obter as matrizes diagonais de massa e rigidez modal do sistema. Neste caso, o sistema com amortecimento proporcional possui os mesmos modos de vibrar do sistema não amortecido.

Para verificar a diagonalização da matriz de amortecimento de uma dada estrutura com base nos modos de vibrar do sistema não amortecido, CAUGHEY e KELLY (1965) apresentaram uma condição necessária e suficiente. Sejam [A] e [B] duas matrizes quadradas de ordem  $N \ge N$  dadas por

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}$$
(2.32)

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}$$
(2.33)

A condição mencionada acima para a diagonalização de [C] é que o produto das matrizes [A] e [B] seja comutativo segundo a relação

$$[A][B] = [B][A]$$
(2.34)

substituindo-se as relações (2.32) e (2.33) em (2.34) tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ [\mathbf{\Phi}]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}$$
 (2.35)

Pré-multiplicando por  $\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}$  e pós-multiplicando por  $\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^T$  ambos os lados da equação (2.23) tem-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$
 (2.36)

da igualdade acima, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$
 (2.37)

Pós-multiplicando esta última relação por  $[M]^{-1}$  tem-se

$$\begin{bmatrix} A & A \\ [\Phi] & [\Phi]^T \end{bmatrix}^T = [M]^{-1}$$
 (2.38)

Usando a relação (2.38), a equação (2.35) pode ser escrita da seguinte forma

Desde que  $[\Phi]$  seja não singular, a relação (2.39) reduz-se à

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$$
(2.40)

ou ainda

$$\left[ [M]^{-1} [K] \right] \left[ [M]^{-1} [C] \right] = \left[ [M]^{-1} [C] \right] \left[ [M]^{-1} [K] \right]$$
(2.41)

Portanto, em relação às características espaciais da estrutura, uma condição necessária e suficiente para que a matriz de amortecimento seja diagonalizada pela matriz modal do sistema é que o produto  $[M]^{-1}[K]$  seja comutativo com  $[M]^{-1}[C]$ .

Quando a matriz de amortecimento não é definida segundo a equação (2.28), a distribuição de amortecimento na estrutura é do tipo não proporcional. Esta distribuição de amortecimento impossibilita o desacoplamento modal com base nos modos reais (modos do sistema não amortecido). Neste caso deve-se procurar outra transformação de coordenadas que desacople o sistema de equações, ou então resolvê-las usando-se métodos de integração no tempo (CRAIG, 1981).

Um sistema de *N* graus de liberdade com amortecimento viscoso apresenta as seguintes equações de movimento escritas na forma matricial

$$[M]\{\dot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$
(2.42)

onde, [M], [C] e [K] correspondem ao modelo espacial da estrutura. Na obtenção do modelo modal a equação (2.42) é reescrita como

$$[M]{\dot{x}} + [C]{\dot{x}} + [K]{x} = \{0\}$$
(2.43)

Para uma primeira análise das características da resposta livre de sistemas amortecidos, será considerado o caso em que a matriz de amortecimento do sistema é do tipo proporcional, definida pela equação (2.28). Desta forma, o sistema de equações (2.43) pode ser desacoplado usando-se a

transformação de coordenadas definida pela equação (2.25). Substituindo-se esta relação na equação (2.43) e pré-multiplicando-se ambos os lados da equação resultante por  $\left[\Phi\right]^{\mathrm{T}}$ , obtém-se

$$[\Phi]^{T}[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [\Phi]^{T}[C][\Phi]\{\dot{y}\} + [\Phi]^{T}[K][\Phi]\{y\} = \{0\}$$
(2.44)

Desta operação matricial, resultam N equações desacopladas, nas coordenadas normais y dadas por

$$[m_{j}]\{\dot{y}\} + [c_{j}]\{\dot{y}\} + [k_{j}]\{y\} = \{0\}$$
(2.45)

Portanto, pode-se resolver cada uma destas N equações nas coordenadas normais. Para o modo de vibrar r a equação diferencial de segunda ordem é dada por

$$m_{r} \dot{y}_{r} + c_{r} \dot{y}_{r} + k_{r} y_{r} = 0$$
 (2.46)

Com base nesta equação pode-se definir

$$\xi_{\rm r} = \frac{c_{\rm r}}{2\sqrt{m_{\rm r}k_{\rm r}}}$$
(2.47)

que é denominado de fator de amortecimento modal do modo r. Este parâmetro, e a frequência natural do modo r, dada segundo a equação (2.21) são chamados de parâmetros modais do modo r. Existe ainda um terceiro parâmetro modal relacionado com o modo de vibrar r que será definido oportunamente.

A equação (2.46) pode ser escrita em função de  $\xi_{\rm r}$  e  $\omega_{\rm r}$ 

resultando na seguinte equação

$$\ddot{y}_{r} + 2\xi_{r}\omega_{r}\dot{y}_{r} + \omega_{r}^{2}y_{r} = 0$$
 (2.48)

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (2.48), com condições iniciais não nulas  $y_r(0)$  e  $\dot{y}_r(0)$ , obtém-se

$$Y_{r}(s^{2} + 2\xi_{r}\omega_{r} s + \omega_{r}^{2}) = y_{r}(0)(s + 2\xi_{r}\omega_{r}) + \dot{y}_{r}(0)$$
(2.49)

onde

$$Y = Y(s) = Transformada de Laplace de y(t).$$

e s é a variável de Laplace. A solução de (2.49) na variável s é dada por

$$Y_{r} = \frac{(s + 2\xi_{r}\omega_{r})y_{r}(0)}{s^{2} + 2\xi_{r}\omega_{r}s + \omega_{r}^{2}} + \frac{\dot{y}_{r}(0)}{s^{2} + 2\xi_{r}\omega_{r}s + \omega_{r}^{2}}$$
(2.50)

A sclução no tempo para a resposta livre do modo r nas coordenadas normais é obtida calculando-se a transformada inversa de Laplace de cada um dos termos da equação (2.50). Com isto obtém-se

$$y_{r}(t) = C_{r}e^{-\xi_{r}\omega_{r}t} sen (\omega_{dr}t + \theta_{r})$$
(2.51)

onde

$$\omega_{\rm dr} = \omega_{\rm r} \sqrt{1 - \xi_{\rm r}^2} \tag{2.52}$$

é denominada frequência natural amortecida do modo r. Os valores  $C_{r} \in \theta_{r}$  são constantes que dependem das condições iniciais. A resposta no tempo, nas coordenadas geométricas x pode ser obtida pelo método da superposição modal, segundo a equação (2.27).

Para sistemas com amortecimento proporcional os modos de vibrar  $\{\phi_r\}$  são reais e consequentemente as componentes do vetor  $\{x\}$  também são reais. Conclui-se, portanto, que nestes casos o movimento de vibração livre pode ser descrito a partir de N modos de vibrar. Estes modos de vibrar possuem a mesma forma dos modos do sistema não amortecido, com amplitudes exponencialmente decrescentes com o tempo e uniformemente sobre o sistema. Cada modo possui uma distribuição espacial definida por pontos ou linhas nodais estacionárias (KIRSHEMBOIN, 1987).

O caso mais geral ocorre quando a matriz de amortecimento do sistema é do tipo não proporcional. Nestas condições, a matriz modal do sistema não amortecido associado não desacopla as equações diferenciais do sistema amortecido, pois agora as condições de ortogonalidade definidas anteriormente não mais se verificam.

A solução da equação (2.43) para o caso do amortecimento não proporcional é formada a partir de soluções do tipo

$$\{x\} = \{\phi\} e^{\lambda t}$$
 (2.53)

que quando substituída na equação (2.43) resulta no seguinte

autoproblema

е

$$\left[\lambda^{2}[M] + \lambda[C] + [K]\right] \{\phi\} = \{0\}$$
(2.54)

Como no caso dos sistemas não amortecidos a equação (2.54)constitui um autoproblema quadrático. Neste caso, existem *N* pares de autovalores  $\lambda_r$  complexos conjugados (NEWLAND, 1989). Para cada autovalor, existe um autovetor correspondente e estes também ocorrem em pares complexos conjugados. Desta forma a solução é constituída de duas matrizes: a matriz diagonal dos autovalores [ $\Lambda$ ] e a matriz do autovetores [ $\Phi$ ], ambas complexas. Elas podem ser escritas como

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{1} & & & \\ & \lambda_{1}^{*} & & & \\ & & \lambda_{2}^{*} & & \\ & & & \lambda_{2}^{*} & \\ & & & & \lambda_{N}^{*} \end{bmatrix}$$
(2.55)

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \ \{\phi_1^*\} \ \{\phi_2\} \ \{\phi_3^*\} \ \dots \ \{\phi_N\} \ \{\phi_N^*\}]$$
(2.56)

onde  $\lambda_r^* \in \{\phi_r^*\}$  são respectivamente os autovalores e os autovetores complexos conjugados. Os autovalores são escritos em função dos parâmetros modais do sistema (EWINS, 1984)

$$\lambda_{r} = \delta_{r} + i \omega_{dr} \qquad (2.57)$$

onde  $\delta_r = -\xi_{rr}^{\omega} \in \omega_{dr}$  é a frequência natural amortecida do modo
r, definida pela equação (2.52). Deve-se observar que a matriz modal neste caso é uma matriz retangular de ordem  $N \times 2N$ . Como neste caso os modos de vibrar são complexos, existem N pares de autovetores complexos conjugados, sendo que cada autovetor possui N elementos. A autosolução da equação (2.54) possui propriedades de ortogonalidade em relação as matrizes [M], [C] e [K]. Entretanto, estas relações são diferentes daquelas definidas anteriormente. É possível demonstrar-se que, para dois modos de vibrar diferentes, por exemplo o modo r e o modo s pode-se escrever (EWINS, 1984)

$$(\lambda_{r} + \lambda_{s}) \{\phi_{s}\}^{T} [M] \{\phi_{r}\} + \{\phi_{s}\}^{T} [C] \{\phi_{r}\} = 0 \qquad (2.58)$$

$$(\lambda_{r}\lambda_{s})\{\phi_{s}\}^{T}[M]\{\phi_{r}\} - \{\phi_{s}\}^{T}[K]\{\phi_{r}\} = 0$$
(2.59)

Estas duas últimas expressões constituem as relações de ortogonalidade em relação às matrizes de massa, rigidez e amortecimento para o sistema com amortecimento viscoso não proporcional. É interessante observar a forma que as expressões (2.58) e (2.59) assumem quando os modos r e s formam um par complexo conjugado. Para os autovalores tem-se

$$\lambda_{s} = \lambda_{r}^{\star} = \delta_{r} - i\omega_{dr} \qquad (2.60)$$

e para os autovetores

$$\{\phi_{s}\} = \{\phi_{r}^{*}\}$$
(2.61)

Substituindo as expressões (2.60) e (2.61) na equação (2.58) tem-se

$$-2\omega_{r}\xi_{r}\{\phi_{r}^{\star}\}^{T}[M]\{\phi_{r}^{\star}\} + \{\phi_{r}^{\star}\}^{T}[C]\{\phi_{r}^{\star}\} = 0 \qquad (2.62)$$

da qual obtém-se a seguinte relação

$$2\omega_{r}\xi_{r} = \frac{\{\phi_{r}^{*}\}^{T}[C]\{\phi_{r}\}}{\{\phi_{r}^{*}\}^{T}[M]\{\phi_{r}\}} = \frac{c_{r}}{m_{r}}$$
(2.63)

De maneira similar, substituindo-se a equação (2.60) na equação (2.59) obtém-se

$$\omega_{\rm r}^{2} = \frac{\{\phi_{\rm r}^{\star}\}^{\rm T}[K]\{\phi_{\rm r}\}}{\{\phi_{\rm r}^{\star}\}^{\rm T}[M]\{\phi_{\rm r}\}} = \frac{k_{\rm r}}{m_{\rm r}}$$
(2.64)

Nas equações (2.63) e (2.64)  $m_r$ ,  $c_r$  e  $k_r$  podem ser chamadas respectivamente massa, amortecimento e rigidez modais, embora seu significado seja um pouco diferente daquele usado nos modelos anteriores pois neste caso os modos de vibrar são complexos.

Como foi visto acima, quando o modelo de amortecimento do sistema é do tipo viscoso não proporcional o modelo modal da estrutura é obtido através da solução de um autoproblema quadrático.

Tal como no caso proporcional, a resposta livre do sistema com amortecimento viscoso não proporcional pode ser obtida através do desacoplamento modal. Neste caso deve-se usar uma transformação de coordenadas similar àquela definida pela equação (2.25). Agora o desacoplamento será realizado no campo complexo, pois a matriz modal do sistema é formada por autovetores complexos. Os elementos de cada autovetor diferem uns dos outros em amplitude e fase. Assim, para cada elemento de um determinado autovetor tem-se duas incógnitas, respectivamente a amplitude e o ângulo de fase, resultando 2N incógnitas por modo de vibrar, para um sistema com N graus de liberdade. Assim, são necessárias 2N equações para realizar o desacoplamento modal usando-se a transformação de coordenadas definida pela equação (2.25).

Será mostrado agora uma outra forma de solução com amortecimento viscoso não proporcional, levando-se em conta as considerações feitas acima. Esta formulação é bastante usada em estudos de dinâmica e controle e recebe o nome de formulação por variáveis de estado. O objetivo é transformar o sistema de *N* equações de segunda ordem (2.42) em um conjunto de *2N* equações de primeira ordem. Isto é possível definindo-se um vetor de estado contendo as velocidades e os deslocamentos escritos nas coordenadas geométricas. Desta forma, além das *N* equações de movimento dadas pela equação (2.42), serão usadas as *N* equações adicionais

$$[M] \{x\} - [M] \{x\} = \{0\}$$
(2.65)

podendo estas últimas serem formuladas também em relação a matriz de rigidez. Com as equações matriciais (2.42) e (2.65), é possível obter-se um sistema de ordem 2N, dado por

$$[A] \{q\} + [B] \{q\} = \{P\}$$
(2.66)

onde as matrizes [A] e [B] ambas de ordem 2N x 2N são dadas por

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}$$

e os vetores  $\{q\}$  e  $\{P\}$  de ordem  $2N \times 1$  são dados por

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{array} \right\}$$
$$\{P\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{F\} \end{array} \right\}$$

A equação (2.66) recebe o nome de equação de estado,  $\epsilon$  o vetor  $\{q\}$  é o vetor de estado. Para o estudo do movimento livre, a equação (2.66) é escrita como:

$$[A] \{ q \} + [B] \{ q \} = \{ 0 \}$$
(2.67)

Como nos casos anteriomente estudados, a solução da equação (2.67) será composta de funções do tipo

$$\{q\} = \{\psi\} e^{\lambda T} \tag{2.68}$$

onde  $\{\psi\}$  é um vetor de ordem 2N x 1. A substituição da equação (2.68) na equação (2.67) resulta no seguinte autoproblema

$$\left[\lambda[A] + [P]\right]\{\psi\} = \{0\}$$
 (2.69)

que também pode ser escrito da seguinte forma

$$[E]\{\psi\} = \rho\{\psi\}$$
(2.70)

onde

е

$$[E] = - [B]^{-1}[A]$$
(2.71)

observando-se que

$$\{\psi\} = \left\{ \frac{\lambda\{\phi\}}{-\frac{1}{\{\phi\}}} \right\}$$
 (2.72)

A inversa da matriz [B] será dada por

 $[B]^{-1} = \begin{bmatrix} - [M]^{-1} & [0] \\ & & \\ & [0] & [K]^{-1} \end{bmatrix}$ 

 $\rho = \frac{1}{\lambda}$ 

Geralmente a matriz [B] possuirá inversa, exceto em determinadas condições onde as matrizes [K] e [M] forem singulares (MEIROVITCH, 1967). Como nos casos anteriores, a solução do autoproblema (2.70) é dada na forma de duas matrizes, ambas de ordem 2N x 2N. A primeira delas é a matriz diagonal dos autovalores [A] que estão relacionados com as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais segundo a equação (2.57). A segunda é a matriz modal complexa [Y] do sistema. Quando a formulação de estado é usada, as relações de ortogonalidade são definidas em relação às matrizes [A] e [B]. Estas relações podem ser deduzidas da mesma forma como foi feito anteriormente. Para  $\lambda_r \neq \lambda_s$ , pode-se escrever

$$\{\psi_{r}\}^{T}[A]\{\psi_{s}\} = 0 \qquad (2.73)$$

$$\{\psi_{r}\}^{T}[B]\{\psi_{s}\} = 0 \qquad (2.74)$$

Para o caso em que  $\lambda_r = \lambda_s$ , tem-se

$$\{\psi_{\mu}\}^{T}[A]\{\psi_{\mu}\} = a_{\mu} \qquad (2.75)$$

$$\{\psi_{r}\}^{T}[B]\{\psi_{r}\} = b_{r}$$
(2.76)

Usando-se a matriz modal complexa do sistema, pode-se escrever

$$[\Psi]^{T}[A][\Psi] = [a]$$
(2.77)

$$[\Psi]^{T}[B][\Psi] = [b_{-}]$$
(2.78)

onde,  $\begin{bmatrix} a_r \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} b_r \end{bmatrix}$  são matrizes diagonais igualmente formadas por elementos complexos. É possível demonstrar-se que os valores de  $a_r = b_r$  relacionam-se com os autovalores do sistema  $\lambda_r$  da seguinte forma (HURTY e RUBINSTEIN, 1964).

$$\lambda_{r} = -\frac{b_{r}}{a_{r}}$$
(2.79)

Quando a formulação por variáveis de estado é usada, a solução para o movimento livre do sistema também pode ser obtida através do desacoplamento modal. Pré-multiplicando-se a equação (2.67) por  $[\Psi]^{T}$  e fazendo-se a transformação de coordenadas das variáveis de estado para as coordenadas normais, tem-se

$$[\Psi]^{T}[A][\Psi]\{\dot{y}\} + [\Psi]^{T}[B][\Psi]\{y\} = \{0\}$$
(2.80)

Com isto, obtém-se um sistema de 2N equações desacopladas nas coordenadas normais do sistema

$$[a] \{y\} + [b] \{y\} = \{0\}$$
(2.81)

onde para o modo de vibrar r tem-se a seguinte equação

$$a_{y} \dot{y}_{r} + b_{y} = 0$$
 (2.82)

ou usando-se a equação (2.79)

$$\dot{y}_{r} - \lambda_{r} y_{r} = 0 \qquad (2.83)$$

A solução desta equação nas coordenadas normais é obtida aplicando-se a ela a transformada de Laplace para condições iniciais não nulas. Na variável de Laplace a solução de (2.83) é a seguinte

$$Y_{r} = y_{r}(0) \frac{1}{s - \lambda_{r}}$$
 (2.84)

onde  $y_r(0)$  representa a condição inicial nas coordenadas normais. A solução no domínio do tempo é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da equação (2.84)

$$y_{r}(t) = y_{r}(0) e^{\lambda_{r}t}$$
 (2.85)

A solução no tempo na variável de estado q para o modo r é dada por

$$\{q_{r}\} = \{\psi_{r}\}y_{r}$$
(2.86)

ou seja

$$\{q_r\} = \left(e^{\lambda_r t} y_r(0)\right)\{\psi_r\}$$
(2.87)

Usando-se o método da superposição modal, a solução geral fica

$$\{q\} = \sum_{r=1}^{2\mathbb{N}} \left( e^{\lambda_r t} y_r(0) \right) \{\psi_r\}$$
(2.88)

O sistema com amortecimento viscoso não proporcional apresenta modos de vibrar complexos. Isto significa que existem diferenças de fase entre os pontos da estrutura quando a mesma vibra em um de seus modos. As linhas nodais neste caso não permanecem estacionárias, como acontece no caso do sistema com amortecimento proporcional.

O modelo viscoso de amortecimento é conveniente para o estudo da resposta livre de sistemas dinâmicos. Entretanto, para um grande número de problemas práticos, o modelo histerético de amortecimento conduz à resultados mais próximos do sistema real. A principal diferença entre os modelos viscoso e histerético, considerando uma excitação harmônica, é que no modelo viscoso a energia dissipada num ciclo de vibração é dependente da frequência de excitação enquanto que no modelo histerético esta energia é independente da frequência (NASHIF e outros, 1985). Para um sistema com um grau de liberdade, a equação de movimento livre para o modelo histerético de amortecimento é dada por (CLOUGH e PENZIEN, 1975)

$$m\ddot{x} + \eta k |x| \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + kx = 0$$
 (2.89)

onde  $\eta$  é denominado fator de perda. Esta equação diferencial não é linear e a obtenção de sua solução para o problema livre só é possível através de métodos numéricos. Entretanto, quando se considera uma excitaçãodo tipo harmônica, a equação (2.89) é equivalente à seguinte equação

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = fe^{1\omega t}$$
(2.90)

nesta equação o coeficiente  $k(1 + i\eta)$  é denominado rigidez complexa. Deve-se observar que esta última equação só é aplicada para a obtenção da solução de regime permanente para a excitação senoidal.

Pode-se mostrar (EWINS, 1984) seguindo procedimentos semelhantes aos do modelo viscoso, que o modelo histerético de amortecimento apresenta relações de ortogonalidade. Para um sistema de *N* graus de liberdade, a relação de ortogonalidade em relação à matriz de amortecimento histerético [*H*] é dada por

$$[\Phi]^{T}[H][\Phi] = [h_{1}]$$
(2.91)

onde  $[h_r]$  é a matriz diagonal dos coeficientes modais de amortecimento histerético.

# capítulo 3

### RESPOSTA FORÇADA DE SISTEMAS DISCRETOS

Este capítulo discute a resposta forçada de sistemas lineares. Em particular é discutida a resposta de um sistema discreto a uma excitação do tipo harmônica. A partir desta resposta é possível determinar as características de resposta em frequência da estrutura, necessárias para o conhecimento de seu comportamento dinâmico. A resposta a uma excitação harmônica é determinada para sistemas amortecidos e não amortecidos através do desacoplamento modal. Para o caso de sistemas amortecidos são considerados os modelos viscoso e histerético de amortecimeto. Também são consideradas as duas formas de distribuição espacial do amortecimento: o amortecimento proporcional não e 0 proporcional.

No final deste capítulo é mostrada a relação entre a FRF de sistemas lineares e a correspondente resposta impulsiva. 3.1 - RESPOSTA HARMÔNICA DE SISTEMAS NÃO AMORTECIDOS

Um sistema não amortecido com N graus de liberdade submetido a uma excitação do tipo harmônica apresenta as seguintes equações de movimento escritas na forma matricial

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}e^{i\omega t}$$
(3.1)

onde

 $\omega$  = frequência de excitação.

Considera-se então que o sistema é excitado por um vetor de forças cujos elementos estão todos na mesma frequência, mas que podem variar quanto a amplitude e fase. Pré-multiplicando a equação (3.1) pela matriz modal transposta e usando a transformação de coordenadas definida pela equação (2.25), obtém-se a seguinte equação escrita nas coordenadas normais

$$[\Phi]^{T}[M][\Phi]\{\ddot{y}\} \neq [\Phi]^{T}[K][\Phi]\{y\} = [\Phi]^{T}\{f\}e^{i\omega t}$$
(3.2)

Utilizando as propriedades de ortogonalidade, a equação matricial (3.2) reduz-se a

$$[m]{\dot{y}} + [k]{y} = [\Phi]^{T}{f}e^{i\omega t}$$
(3.3)

Com isto obtém-se um sistema de N equações desacopladas nas coordenadas normais. Para um determinado modo de vibrar r pode-se escrever

$$m_{r} \dot{y}_{r} + k_{r} y_{r} = \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} e^{i\omega t}$$
(3.4)

Esta última equação pode ainda ser escrita em função da frequência natural do modo r, bastando para isto dividí-la por  $m_r$ obtendo-se então

$$\ddot{y}_{r} + \omega_{r}^{2} y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} e^{i\omega t}$$
(3.5)

Aplicando a transformada de Laplace à ambos os lados da equação (3.5) para condições iniciais nulas tem-se

$$Y_{r}(s^{2} + \omega_{r}^{2}) = \{\phi_{r}\}^{T}\{f\} \frac{1}{m_{r}(s - i\omega)}$$
(3.6)

Esta equação apresenta a seguinte solução na variável s

$$Y_{r} = \{\phi_{r}\}^{T}\{f\} \frac{1}{m_{r}(s - i\omega)(s^{2} + \omega_{r}^{2})}$$
(3.7)

A equação (3.7) pode ser escrita na forma de frações parciais, obtendo-se assim

$$Y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \left(\frac{k_{1}}{s - i\omega} + \frac{k_{2}}{s + i\omega} + \frac{k_{3}}{s - i\omega}\right)$$
(3.8)

onde  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são parâmetros que dependem da frequência de

excitação  $\omega$ . Estes parâmetros são reais para os sistemas não amortecidos. A solução no tempo é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da equação (3.8). A partir desta solução, obtém-se a resposta de regime permanente para o modo r nas coordenadas normais, que é dada por

$$y_{r} = \{\phi_{r}\}^{T}\{f\} \frac{1}{m_{r}(\omega_{r}^{2} - \omega^{2})} e^{i\omega t}$$
(3.9)

para  $\omega \neq \omega_r$ . Nas coordenadas geométricas, a resposta pode ser obtida através do método da superposição modal

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_{r}\} y_{r}$$
(3.10)

onde  $\{\phi_r\}y_r$  é a parcela relativa ao modo r na resposta total do sistema . A partir da equação (3.9) obtém-se

$$\{x_{r}\} = \{\phi_{r}\}\{\phi_{r}\}^{T}\{f\} \frac{1}{m_{r}(\omega_{r}^{2} - \omega^{2})} e^{i\omega t}$$
(3.11)

A solução nas coordenadas geométricas é obtida, usando-se a equação (3.10)

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_{r}\} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{m_{r}(\omega_{r}^{2} - \omega^{2})} e^{i\omega t}$$
(3.12)

Da solução no tempo pode-se obter a matriz de receptância do sistema (MEIROVITCH, 1967), que é dada por

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_r\} \{\phi_r\}^{T} \frac{1}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)}$$
(3.13)

A matriz de receptância constitui o chamado modelo de resposta do sistema . Um elemento desta matriz é definido por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{f_k}(\omega)$$

onde

 $x_{\rm j}$  = deslocamento da estrutura na coordenada j

 $f_{k}$  = força isolada aplicada na coordenada k.

Portanto, a partir da expressão (3.13) pode-se escrever

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)}$$
(3.14)

onde

 $\phi_{ri}$  = *j*-ésimo elemento do modo de vibrar *r* 

 $\phi_{rk} = k$ -ésimo elemento do modo de vibrar r.

Quando as coordenadas dos pontos de resposta e excitação j e knão são coincidentes, a função  $\alpha_{jk}(\omega)$  recebe o nome de receptância de transferência. Se as coordenadas dos pontos j e kforem coincidentes, tem-se a função receptância de ponto (EWINS,

1984). As figuras (3.1*a*) e (3.1*b*) mostram os gráficos da FRF de ponto e de transferência para um sistema em uma faixa contendo cinco frequências naturais.

Para os sistemas não amortecidos, a função receptância é real. Isto significa que o ângulo de fase entre o deslocamento medido em j e a força aplicada em k é 0 ou  $\pi$ , dependendo da existência de linhas nodais do modo de vibrar considerado entre as posições j e k. A equação (3.14) pode ainda ser escrita da seguinte forma

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{r^{A}_{jk}}{\omega_{-}^{2} - \omega^{2}}$$
(3.15)

onde a A recebe o nome de constante modal e é dada por rik

$${}_{r}A_{jk} = \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{m_{r}}$$
(3.16)

A constante modal no caso dos sistemas não amortecidos é real. Ela é um parâmetro modal relacionado com os modos de vibrar da estrutura. A maioria dos métodos de identificação modal tanto no domínio do tempo quanto da frequência fornecem os valores das constantes modais para posterior identificação dos modos de vibrar da estrutura. Portanto, a identificação dos modos de vibrar não é feita calculando-se diretamente os autovetores {¢}, mas através das constantes modais. Elas representam combinações dos elementos dos autovetores relativos a um dado modo de vibrar. Na prática, para cada FRF medida o número de constantes modais identificadas é igual ao número de frequências naturais





FIGURA 3.1 - Funções resposta em frequência.a) FRF de ponto ; b) FRF de transferência

existentes na faixa de frequência usada no ensaio. Da mesma forma, a determinação precisa dos modos de vibrar exige o levantamento experimental da FRF em um grande número de pontos da estrutura.

As duas formas da FRF mostradas (FRF de ponto e de transferência) apresentam algumas diferenças quando analisadas em escala logarítmica. Segundo a equação (3.16), as constantes modais para uma FRF de ponto serão sempre positivas, pois representam o quadrado de um número. Analisando-se a equação (3.15), nota-se que para valores de  $\omega$  localizados entre duas frequências naturais consecutivas ocorre uma inversão de sinal entre os denominadores das parcelas correspondentes. Desta forma, para uma FRF de ponto, pelo fato das constantes modais serem positivas, as parcelas relativas à estas duas frequências naturais na equação (3.15) são subtrativas para todos os valores de  $\omega$  localizados entre estas frequências naturais. Em particular, existe uma frequência para a qual estas parcelas tendem a se cancelar. Esta frequência recebe o nome de anti-ressônancia e sua ocorrência é geralmente acompanhada de uma mudança de fase. A figura (3.1a) mostra esta característica para a FRF de ponto. Observando-se esta FRF nota-se que a anti-ressonância corresponde à um ponto de mínimo na FRF do sistema. Como a FRF de ponto apresenta constantes modais positivas pode-se concluir que deve existir nestas funções uma anti-ressônancia entre duas frequências naturais consecutivas.

No caso da FRF de transferência, as constantes modais podem alternar de sinal, pois neste caso elas são dadas pelo produto de elementos de autovetores distintos e que não necessariamente possuem o mesmo sinal. Desta forma, duas parcelas consecutivas da equação (3.15) que apresentem constantes modais de sinais opostos são aditivas, para todos os valores de  $\omega$ localizados entre as duas frequências naturais correspondentes. Neste caso também existe um ponto de mínimo entre estas duas frequências naturais que possui características diferentes da anti-ressonância, como pode ser notado pela FRF de transferência mostrada na figura (3.1b). Para a FRF de transferência, este ponto de mínimo geralmente não é acompanhado por uma mudança de fase como acontece no caso da anti-ressonância. Para que uma FRF de transferência apresente anti-ressonâncias, basta que as constantes modais associadas à duas frequências naturais consecutivas possuam o mesmo sinal. Na FRF de transferência da figura (3.1b) pode-se notar uma anti-ressonância entre a terceira e quarta frequências naturais.

A partir das considerações feitas até aqui, pode-se concluir que independentemente do tipo de FRF considerada, existirá um ponto de mínimo entre duas frequências naturais consecutivas. Se este ponto de mínimo for acompanhado de uma mudança de fase e se a FRF neste ponto sofrer uma diminuição brusca em um intervalo de frequência muito pequeno, então esta frequência recebe o nome de anti-ressonância. Se por outro lado, este ponto de mínimo não estiver associado à uma mudança de fase e a FRF do sistema apresentar um comportamento suave ao passar por ele, então esta frequência não recebe 0 nome de anti-ressonância, não havendo uma denominação específica para ela. Estas conclusões podem não se aplicar a sistemas que apresentem modos de vibrar com acoplamento modal significativo.

Deve-se ainda observar que se os pontos de excitação e resposta coincidirem com uma linha nodal de um modo de vibrar

contido na faixa de frequência de análise, esta frequência natural não apareceră na FRF medida. Neste caso, a parcela correspondente à este modo na equação (3.15) será igual a zero, e nesta frequência a única resposta encontrada será devido à contribuição dos demais modos de vibrar.

Na definição da função receptância é usado o deslocamento como a variável de saída do sistema (resposta), e a força como variável de entrada (excitação). Entretanto, é comum o uso de duas outras variáveis como resposta, e são definidas como função mobilidade e inertância. A função mobilidade  $\beta_{jk}(\omega)$ , é definida pelo quociente entre a velocidade de um ponto de coordenada *j* do sistema e a força isolada aplicada ao ponto de coordenada *k*. A função inertância  $\gamma_{jk}(\omega)$ , usa a aceleração como variável de saída. As relações entre estas funções e a função receptância são respectivamente

$$\beta_{ik}(\omega) = i\omega \alpha_{ik}(\omega) \qquad (3.17)$$

$$\gamma_{jk}(\omega) = -\omega^2 \alpha_{jk}(\omega) \qquad (3.18)$$

### 3.2 - RESPOSTA HARMÔNICA DE SISTEMAS AMORTECIDOS

Para o caso dos sistemas amortecidos será considerado inicialmente o modelo viscoso de amortecimento e em seguida o modelo histerético. Para ambos serão determinadas as características de resposta em frequência levando-se em conta as duas distribuições de amortecimento, ou seja, o amortecimento

proporcional e o não proporcional.

Um sistema possuindo N graus de liberdade com amortecimento viscoso proporcional apresenta as seguintes equações de movimento escritas na forma matricial, para uma excitação do tipo harmônica

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}e^{i\omega t}$$
(3.19)

Realizando-se o desacoplamento modal, como foi feito no caso anterior, obtém-se o seguinte sistema de equações desacopladas nas coordenadas normais

$$[m_{r}]\{\ddot{y}\} + [c_{r}]\{\dot{y}\} + [k_{r}]\{y\} = [\Phi]^{T}\{f\}e^{i\omega t}$$
(3.20)

e para o modo r pode-se escrever

$$\ddot{y}_{r} + 2\xi_{r}\omega_{r}\dot{y}_{r} + \omega_{r}^{2}y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T}\{f\}e^{i\omega t}$$
(3.21)

Na variável de Laplace, esta equação apresenta a seguinte solução, considerando-se condições iniciais nulas,

$$Y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{(s - i\omega)(s^{2} + 2\xi_{r}\omega_{r} s + \omega_{r}^{2})}$$
(3.22)

O polinômio do denominador da equação (3.22) pode ser fatorado em termos de suas raizes. Desta forma, a solução  $Y_r$ , como foi feito para os sistemas não amortecidos, pode ser escrita também na forma de frações parciais

$$Y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \left( \frac{k_{1}}{s - i\omega} + \frac{k_{2}}{s - \lambda_{1}} + \frac{k_{3}}{s - \lambda_{2}} \right)$$
(3.23)

onde  $\lambda_1 \in \lambda_2$  são dadas por

$$\lambda_1 = \delta_r + i\omega_{dr} \tag{3.24}$$

$$\lambda_2 = \delta_r - i\omega_{dr} \tag{3.25}$$

As constantes  $\delta_r \in \omega_{dr}$  foram definidas no ítem 2.3 (equação 2.57). Para o caso dos sistemas amortecidos, os parâmetros  $k_1$ ,  $k_2$  $e k_3$  também são dependentes da frequência de excitação. Entretanto, neste caso eles resultam complexos, devido à inclusão do amortecimento (NEWLAND, 1989). A parcela da solução no tempo correspondente à reposta harmônica nas coordenadas normais para o modo r é obtida a partir da transformada inversa de Laplace da equação (3.23). Ela é dada pela seguinte expressão

$$y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} = \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)} e^{i\omega t}$$
(3.26)

Esta solução pode também ser escrita em função da massa, rigidez e amortecimento modais do modo r

$$y_{r} = \{\phi_{r}\}^{T}\{f\} \frac{1}{(k_{r} - \omega^{2}m_{r}) + i(\omega c_{r})} e^{i\omega t}$$
(3.27)

Aplicando o método da superposição modal, obtém-se a partir da equação (3.26), a solução da equação (3.19) nas coordenadas geométricas

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)} e^{i\omega t}$$
(3.28)

de onde pode-se extrair a matriz de receptância do sistema com amortecimento viscoso proporcional

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\} \{\phi_{r}\}^{T} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)}$$
(3.29)

a qual assemelha-se com a matriz de receptância do sistema conservativo, exceto que neste caso, esta se torna complexa no denominador devido à inclusão do amortecimento. Um elemento desta matriz é dado por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \phi_{rj} \phi_{rk} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)}$$
(3.30)

ou em função das constantes modais

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{r^{A_{jk}}}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)}$$
(3.31)

Neste caso, o ângulo de fase entre a resposta e a força excitadora varia com a frequência excitadora e com o fator de amortecimento modal, e para o modo r pode ser escrito como

$$\psi = - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi_{r}\omega_{\mu}\omega}{\omega_{r}^{2}-\omega^{2}}\right) - \frac{/r_{jk}^{A}}{(3.32)}$$

Deve-se observar que as constantes modais na equação (3.31) são reais, uma vez que o sistema com amortecimento proporcional possui os mesmos modos de vibrar do sistema não amortecido. Na equação (3.31) as parcelas correspondentes à cada modo de vibrar apresentam como denominador um polinômio complexo de segundo grau. Esta equação pode ainda ser escrita na forma de monômios, fatorando-se o denominador de cada parcela em função de suas raizes complexas conjugadas  $\lambda_{r} \in \lambda_{r}^{*}$ 

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \left( \frac{\frac{R_{jk}}{r_{jk}} + \frac{R_{jk}}{i\omega - \lambda_{r}} + \frac{R_{jk}}{i\omega - \lambda_{r}^{*}} \right)$$
(3.33)

onde  $R_{r \ jk}$  é denominado resíduo modal. Para o caso de amortecimento viscoso proporcional, ele relaciona-se com a constante modal  $A_{r \ jk}$  de acordo com a seguinte relação

$$R_{jk} = i \frac{r^{A}_{jk}}{2\omega}$$
(3.34)

ou ainda

$$R_{jk} = i \frac{r \phi_{jr} \phi_{k}}{2m \omega_{r} \omega_{r}}$$
(3.35)

Para o sistema com amortecimento viscoso não proporcional, as equações de movímento para a excitação harmônica são escritas com base na formulação através de variáveis estado

 $[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{P\}e^{i\omega t}$ (3.36)

onde as matrizes [A] e [B] e os vetores  $\{q\}$  e  $\{P\}$  foram definidos no capítulo 2. O desacoplamento modal, é realizado agora baseado na matriz modal complexa de ordem 2N x 2N do sistema. Com isto obtém-se a seguinte equação matricial nas coordenadas normais

$$[a_{r}]\{\dot{q}\} + [b_{r}]\{q\} = [\Psi]^{T}\{P\}e^{i\omega t}$$
(3.37)

onde as matrizes  $\begin{bmatrix} a \\ r \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} b \\ r \end{bmatrix}$  são matrizes diagonais definidas anteriormente. Para um modo de vibrar r qualquer pode-se escrever

$$a_{r}\dot{q}_{r} + b_{r}q_{r} = \{\psi_{r}\}^{T}\{P\}e^{i\omega t}$$
(3.38)

Esta equação ainda pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{q}_{r} - \lambda_{r}q_{r} = \frac{1}{a_{r}} \{\psi_{r}\}^{T} \{P\} e^{i\omega t}$$
 (3.39)

onde  $\lambda_r$  é da forma mostrada nas equação (3.24) e (3.25). A equação (3.39) possui a seguinte solução na variável de Laplace

$$Q_{r} = \frac{1}{a_{r}} \{\psi_{r}\}^{T} \{P\} \frac{1}{(s - i\omega)(s - \lambda_{r})}$$
(3.40)

Como no caso do amortecimento viscoso proporcional, a resposta de regime permanente nas variáveis normais q pode ser obtida a partir da transformada inversa de Laplace da equação (3.40) Desta forma, para o modo r obtém-se a seguinte expressão

$$q_{r} = \frac{1}{a_{r}} \{\psi_{r}\}^{T} \{P\} \frac{1}{(i\omega - \lambda_{r})} e^{i\omega t}$$
(3.41)

e a solução da equação (3.36) na variável de estado pode ser

obtida usando-se o método da superposição modal

$$\{q\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi_r\} \{\psi_r\}^T \{P\} \frac{1}{a_r(i\omega - \lambda_r)} e^{i\omega t} \qquad (3.42)$$

Desta equação pode-se obter a matriz de receptância do sistema com amortecimento viscoso não proporcional, que é dada por

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{r=1}^{2N} \frac{1}{a_r} \{\phi_r\} \{\phi_r\}^T \frac{1}{i\omega - \lambda_r}$$
(3.43)

Como os autovalores e autovetores ocorrem em pares complexos conjugados esta última expressão para a matriz receptância pode ser escrita como

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \left( \frac{\{\phi_r\}\{\phi_r\}^{T}}{a_r(i\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\phi_r^{\star}\}\{\phi_r^{\star}\}^{T}}{a_r^{\star}(i\omega - \lambda_r^{\star})} \right)$$
(3.44)

Um elemento desta matriz é dado em função dos resíduos modais através da seguinte expressão

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \left( \frac{\frac{R_{jk}}{r_{jk}} + \frac{R^{*}_{jk}}{i\omega - \lambda_{r}} + \frac{i\omega - \lambda_{r}^{*}}{i\omega - \lambda_{r}^{*}} \right)$$
(3.45)

Como os modos de vibrar neste caso são complexos, os resíduos modais possuem parte real diferente de zero e seu valor é dado por

$$R_{r j k} = \frac{\phi_{r j} \phi_{r k}}{a_{r}}$$
(3.46)

Deve-se observar que a equação (3.45) para o sistema com amortecimento viscoso não proporcional também pode ser escrita em função das constantes modais, equação (3.31). Neste caso as constantes modais são complexas com parte imaginária dependente da frequência de excitação, assumindo a seguinte forma para o modo r

$$A_{r jk} = C_{jk} + i(\omega_{r jk})$$
(3.47)

onde C e D são constantes.

Para o caso do amortecimento histerético (ou estrutural), as equações para a excitação harmônica são dadas na forma matricial por

$$[M]\{\dot{x}\} + i[H]\{x\} + [K]\{x\} = \{f\}e^{i\omega t}$$
(3.48)

onde as matrizes [M], [H] e [K] são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento histerético e rigidez do sistema. Considerando-se inicialmente o amortecimento histerético proporcional, a equação (3.48) é submetida ao desacoplamento modal, como foi feito no caso do amortecimento viscoso. Substituindo-se a relação (2.25) na equação (3.48) e pré-multiplicando esta pela matriz modal transposta, obtém-se

$$[\Phi]^{T}[M][\Phi]\{y\} + i[\Phi]^{T}[H][\Phi]\{y\} + [\Phi]^{T}[K][\Phi]\{y\} = [\Phi]^{T}\{f\}e^{i\omega t}$$

$$(3.49)$$

Desta transformação de coordenadas resultam N equações

desacopladas dadas por

$$[m_{r}]\{\dot{y}\} + i[h_{r}]\{y\} + [k_{r}]\{y\} = [\Phi]^{T}\{f\}e^{i\omega t}$$
(3.50)

onde para o modo r tem-se

$$m_{r} \ddot{y}_{r} + ih_{r} y_{r} + k_{r} y_{r} = \{\phi\}^{T} \{f\} e^{i\omega t}$$
(3.51)

ou ainda

$$\ddot{y}_{r} + \omega_{r}^{2} (1 + i\eta_{r}) y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi\}^{T} \{f\} e^{i\omega t}$$
(3.52)

onde  $\eta_{_{\rm r}}$  é o fator de perda do modo r. Seu valor é dado por

$$\eta_r = \frac{h_r}{k_r} \tag{3.53}$$

A equação (3.52) apresenta a seguinte solução na variável de Laplace

$$Y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{(s - i\omega)[s^{2} + \omega_{r}^{2}(1 + i\eta_{r})]}$$
(3.54)

Fatorando-se o denominador da equação (3.54) em termos de suas raizes, esta pode ser escrita na forma de frações parciais

$$Y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \left(\frac{k_{1}}{s - i\omega} + \frac{k_{2}}{s - \lambda_{r}} + \frac{k_{3}}{s - \lambda_{r}^{*}}\right)$$
(3.55)

onde

$$\lambda_{\rm r}^2 = -\omega_{\rm r}^2 (1 + i\eta_{\rm r})$$
 (3.56)

A solução no tempo da equação (3.55) é obtida tomando-se sua transformada inversa de Laplace. Nas coordenadas normais, a solução de regime permanente é dada pela seguinte expressão

$$y_{r} = \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\omega_{r}^{2}\eta_{r})} e^{i\omega t}$$
(3.57)

A solução nas coordenadas geométricas é obtida usando-se o método da superposição modal. Esta solução é dada pela seguinte expressão

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\} \{\phi_{r}\}^{T} \{f\} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\omega_{r}^{2}\eta_{r})} e^{i\omega t}$$
(3.58)

de onde pode-se obter a matriz de receptância para o sistema com amortecimento histerético proporcional

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \{\phi_{r}\} \{\phi_{r}\}^{T} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\omega_{r}^{2}\eta_{r})}$$
(3.59)

Um elemento desta matriz é dado por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{m_{r}} \phi_{rj} \phi_{rk} \frac{1}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\omega_{r}^{2} \eta_{r})}$$
(3.60)

ou ainda em função das constantes modais

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{r^{A}_{jk}}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\omega_{r}^{2}\eta_{r})}$$
(3.61)

Estas constantes modais são reais devido à distribuição proporcional do amortecimento na estrutura. Deve-se observar que esta última expressão para a FRF do sistema com amortecimento histerético proporcional é semelhante àquela do modelo viscoso. Para o modelo de amortecimento viscoso a parte imaginária do denominador é dependente da frequência de excitação segundo a equação (3.31), enquanto que para o modelo histerético ela é independente de  $\omega$ . De forma análoga ao caso viscoso, a equação (3.60) pode ser escrita segundo a equação (3.45), sendo que neste caso, os resíduos modais são dados por

$$R_{jk} = -i \frac{r^{A_{jk}}}{2\omega \sqrt{1+i\eta}}$$
(3.62)

Para o amortecimento histerético não proporcional, as expressões para a função receptância são análogas àquelas obtidas para o caso proporcional, observando-se que as constantes modais são complexas.

### 3.3 - RESPOSTA IMPULSIVA DE SISTEMAS LINEARES

Como foi mostrado anteriormente, a FRF de um sistema relacionando o deslocamento do ponto de coordenada j e a força aplicada no ponto de coordenada k pode ser escrita segundo a seguinte função complexa na variável de Laplace

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^{N} \left( \frac{\frac{R}{r \ jk}}{s - \lambda_{r}} + \frac{\frac{R^{*}}{r \ jk}}{s - \lambda_{r}^{*}} \right)$$
(3.63)

A representação no domínio do tempo para a FRF do sistema é a resposta ao impulso, e é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da equação (3.63) (NEWLAND, 1989). Com isto, obtém-se a seguinte expressão

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{N} \left( \begin{array}{c} \lambda_{r}t & \lambda_{r}^{*}t \\ R_{jk}e^{r} & + R_{jk}^{*}e^{r} \end{array} \right)$$
(3.64)

onde  $h_{jk}(t)$  é a resposta ao impulso unitário da estrutura. Esta expressão pode ser escrita na forma simplificada

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} R_{jk} e^{\lambda_{r} t}$$
(3.65)

A resposta ao impulso é usada nos métodos de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo.

# CAPÍTULO 4

## MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

A maior parte deste capítulo é dedicada aos métodos de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Os diferentes procedimentos de identificação neste domínio estão divididos em dois grupos. Na primeira parte são feitas considerações gerais sobre a identificação modo a modo. Εm particular, será discutido o método de ajustagem do círculo. Em seguida são apresentados os métodos de identificação multi-modos. Estes métodos são capazes de identificar vários modos de vibrar simultaneamente e são muito úteis quando existe forte um acoplamento modal. Deste grupo merecem destaque dois métodos baseados em formas equivalentes da FRF do sistema. O primeiro método não linear baseado na forma em frações deles é um parciais da FRF do sistema. O segundo método usa a FRF na forma de um quociente de dois polinômios dependentes da frequência. O algorítmo de identificação proposto neste trabalho é baseado neste segundo método.

Todos os métodos de identificação modal possuem o mesmo objetivo: a determinação dos coeficientes da FRF do sistema. Estes coeficientes estão relacionados com os parâmetros modais procurados. A grande maioria dos métodos de identificação no domínio da frequência é baseada em ajustagem de curvas. A partir dos dados experimentais da FRF do sistema procura-se determinar um modelo matemático que se ajuste à estes dados. Esta ajustagem de curvas geralmente é baseada no método dos mínimos quadrados. Inicialmente deve-se assumir um modelo matemático para a FRF do sistema. Em seguida define-se uma função objetivo dada pelo quadrado da diferença entre os dados provenientes dos ensaios e o modelo matemático da estrutura em estudo. Esta função objetivo é então minimizada em relação a cada variável do processo de ajustagem. Como resultado, obtém-se um sistema de equações e a partir da solução deste sistema os parâmetros modais são determinados.

Embora o método de identificação proposto neste trabalho seja no domínio da frequência, a identificação no domínio do tempo tem sido bastante usada na determinação das características dinâmicas de sistemas. Por esta razão, na parte final deste capítulo são feitas algumas considerações de caráter geral sobre os principais métodos de identificação no domínio do tempo.

#### 4.1 - IDENTIFICAÇÃO MODO A MODO

Um dos mais antigos e clássicos métodos de identificação modo a modo é o método de ajustagem do círculo. Este método foi introduzido inicialmente por KENNEDY & PANCU (1947), explorando o fato de que na vizinhança de uma frequência natural  $\omega_r$ , o gráfico da FRF na forma complexa pode se ajustar a um círculo. Em outras palavras, a amplitude da FRF do sistema é efetivamente controlada pela parcela correspondente ao modo r.

Um sistema possuindo N graus de liberdade apresenta a seguinte função receptância, considerando-se o modelo histerético de amortecimento

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=1}^{N} \frac{s^{A}_{jk}}{(\omega^{2}_{s} - \omega^{2}) + i(\eta_{s}\omega^{2})}$$
(4.1)

A equação (4.1) pode ser escrita isolando-se a parcela correspondente ao modo r em questão

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{r^{A}_{jk}}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\eta_{r}\omega_{r}^{2})} + \sum_{\substack{s=1 \ s\neq r}}^{N} \frac{s^{A}_{jk}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2}) + i(\eta_{s}\omega_{s}^{2})}$$
(4.2)

onde  $\omega_r$ ,  $\eta_r$  e  $_{r\,jk}^A$  são os parâmetros modais do modo r. A aproximação de um grau de liberdade considera que numa vizinhança próxima de  $\omega_r$  a segunda parcela da equação (4.2) é independente da frequência de excitação  $\omega$ , e portando pode ser tomada como constante. Nestas condições a equação (4.2) pode ser escrita da seguinte forma

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{r^{A}_{jk}}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(\eta_{r}\omega_{r}^{2})} + r^{B}_{jk} \qquad (4.3)$$

A constante complexa B refere-se à contribuição dos demais modos de vibrar. A primeira parcela da equação (4.3) possui algumas propriedades úteis na identificação do modelo modal do modo r. Para sistemas com amortecimento histerético, a representação da função receptância no plano complexo é um círculo perfeito (EWINS, 1984) do qual pode-se extrair 05 parâmetros modais para o modo de vibrar em estudo. Para o caso de amortecimento viscoso, a função mobilidade corresponde a um círculo perfeito no plano complexo. Para o presente estudo, considera-se o modelo de amortecimento histerético, е a representação da primeira parcela da equação (4.3) está mostrada na figura (4.1a). Neste caso assume-se que a constante modal possui amplitude unitária, uma vez que o seu valor influencia a posição do centro no plano complexo e o diâmetro do círculo modal. Com base na equação (4.3) pode-se escrever que o ângulo  $\gamma$ mostrado na figura (4.1a) para qualquer valor de w, é igual a

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta_{r}\omega_{r}^{2}}{\omega_{r}^{2}-\omega^{2}}\right)$$
(4.4)

e ainda

$$tg \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = tg \frac{\theta}{2} = \frac{\omega_{r}^{2} - \omega^{2}}{\eta_{r}\omega_{r}^{2}}$$
(4.5)

das quais obtém-se

$$\omega^{2} = \omega_{r}^{2} \left( 1 - \eta_{r} tg \frac{\theta}{2} \right)$$

$$(4.6)$$

Derivando-se esta última em relação a  $\theta$  tem-se

$$\frac{d(\omega^2)}{d\theta} = \left(-\frac{\omega_r^2 \eta_r}{2}\right) \sec^2 \frac{\theta}{2}$$
(4.7)

O inverso da relação mostrada na equação (4.7), que é uma indicação da razão de varredura do arco circular, atingirá um valor máximo para o ponto  $\omega = \omega_r$ . Isto pode ser obtido fazendo

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{d(\omega^2)}{d\theta} \right) = 0 \qquad (4.8)$$

Desta análise também é possível obter-se uma estimativa para  $\eta_{\rm r},$  fazendo-se

$$\left(\frac{d\theta}{d(\omega^2)}\right)_{w=w_r} = -\frac{2}{\eta_r \omega_r^2}$$
(4.9)

Outro resultado importante pode ser obtido também a partir da equação (4.3) e dos ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$  mostrados na figura (4.1*b*)

$$\theta_{a} = 2 \ \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega^{2} - \omega^{2}}{n_{r} \omega_{r}^{2}} \right)$$
(4.10)

e

$$\theta_{\rm b} = 2 \ \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_{\rm r}^2 - \omega_{\rm b}^2}{\eta_{\rm r} \omega_{\rm r}^2} \right) \tag{4.11}$$

Destas equações, obtém-se uma expressão para o fator de perda  $\eta_{\rm c}$ 






$$\eta_{r} = \frac{\omega_{a}^{2} - \omega_{b}^{2}}{\omega_{r}^{2} \left( tg \frac{\theta}{2} + tg \frac{\theta}{2} \right)}$$
(4.12)

Para estruturas levemente amortecidas, o fator de perda  $\eta_r$  dado pela equação (4.12) pode ser aproximado para

$$\eta_{\rm r} = \frac{2(\omega_{\rm a} - \omega_{\rm b})}{\omega_{\rm r} \left( tg \frac{\theta_{\rm a}}{2} + tg \frac{\theta_{\rm b}}{2} \right)}$$
(4.13)

Nesta equação fazendo  $\theta_a$  e  $\theta_b$  iguais a  $\pi/2$  e indicando as frequências correspondentes como  $\omega_2$  e  $\omega_1$ , obtém-se

$$\eta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} \tag{4.14}$$

Observa-se que estes pontos são correspondentes aos denominados pontos de meia potência (CLOUGH, 1975), no caso do amortecimento histerético. Com a equação (4.14) obtém-se então o valor de  $\eta_r$ .

Obtidos os valores de  $\omega_r \in \eta_r$ , o último parâmetro a ser determinado é a constante modal  $A_r$ . O diâmetro do círculo está relacionado com esta constante através da seguinte relação

$${}_{r}D_{jk} = \frac{\left| {}_{r}A_{jk} \right|}{\eta_{r}\omega_{r}^{2}}$$
(4.15)

O círculo modal sofre uma translação e uma rotação provocadas pela constante  $_{r\ jk}^{B}$ . No caso desta constante ser real, o que indica a presença de amortecimento proporcional na estrutura, o círculo estará centrado no eixo imaginário do plano complexo. Os resultados obtidos aqui para o modelo histerético de amortecimento podem igualmente ser aplicados para o modelo viscoso, só que neste caso deve-se usar a função mobilidade como modelo matemático para a FRF do sistema.

A implementação numérica deste método requer inicialmente que se faça a ajustagem do círculo aos dados da resposta em frequência do sistema (GAUKROGER e outros, 1973). Esta ajustagem de curvas é geralmente realizada utilizando-se o método dos mínimos quadrados. O próximo passo no processo de identificação do modo r é a determinação de seus parâmetros modais. A frequência natural pode ser determinada numericamente construindo-se linhas radiais no círculo modal ajustado em relação à um conjunto de pontos em torno da frequência natural  $\omega_{\text{.}}$ . Desta forma, a razão de varredura pode ser determinada, e a frequência onde esta razão atinge um valor máximo pode ser determinada, de acordo com a equação (4.7). Em seguida, usando-se as expressões derivadas para  $\eta_{1}$ , respectivamente as equações (4.9), (4.12), (4.13) ou (4.14), obtém-se várias estimativas para este parâmetro, calculando-se a média aritmética entre estes valores. A constante modal pode ser determinada a partir do diâmetro do círculo, o qual é dado pela equação (4.15).

Obtido o modelo modal do modo r em estudo, é comum construir-se a FRF a partir dos parâmetros modais identificados, o que é denominado regeneração da FRF. É desejável que os dados da resposta em frequência regenerada sejam superpostos pelos dados obtidos experimentalmente.

A regeneração dos dados de resposta em frequência depende de  $B_{r jk}$ . Esta constante é obtida tomando-se a distância entre a origem do plano complexo e o ponto do círculo ajustado

que é diametralmente oposto ao ponto correspondente à frequência  $\omega_r$ . O diâmetro que passa por estes dois pontos pode ser chamado diâmetro principal do círculo modal.

A aplicação do método de ajustagem do círculo na forma proposta por Kennedy e Pancu restringe-se aos casos em que os modos de vibrar da estrutura em estudo sejam pouco acoplados. Valores de amortecimento alto, por exemplo acima de 20% do amortecimento crítico, também prejudicam a utilização deste procedimento de identificação. Recentemente foi proposto um método (VAKAKIS e CAUGHEY, 1991) que estuda a aplicação da ajustagem do círculo para sistemas possuindo modos de vibrar com acoplamento modal significativo. O método da ajustagem do círculo pode ser usado para a obtenção de estimativas iniciais necessárias em alguns métodos de identificação multi-modos.

### 4.2 - IDENTIFICAÇÃO MULTI-MODOS

Os métodos de identificação multi-modos procuram realizar a identificação modal de vários modos de vibrar simultaneamente. Isto é particularmente útil para o caso em que a estrutura em estudo apresenta modos de vibrar fortemente acoplados, situação na qual a aplicação dos métodos de identificação modo a modo fornecem resultados pouco precisos.

O objetivo principal da identificação multi-modos é a determinação dos coeficientes de uma expressão analítica para a FRF do sistema. Isto é usualmente feito realizando-se ajustagens de curvas aos dados de resposta em frequência obtidos através dos

ensaios experimentais. Esta ajustagem de curvas pode ser feita através de métodos, aqui subdivididos em dois grupos, dependendo da forma da FRF adotada como modelo matemático para a estrutura: frações parciais e polinomial. No primeiro grupo, a FRF é dada pela seguinte expressão

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \left( \frac{\frac{R_{jk}}{r_{jk}} + \frac{R_{jk}^{*}}{i\omega - \lambda_{r}} + \frac{i\omega - \lambda_{r}^{*}}{i\omega - \lambda_{r}^{*}} \right)$$
(4.16)

sendo que os valores de  $\lambda_{r}$  podem ser escritos da seguinte forma

$$\lambda_r = \delta_r + i\omega_{dr} \tag{4.17}$$

com  $\delta_r = -\xi_r \omega_r$ . Os valores de  $R_r = \omega_{dr}$  foram definidos anteriormente.

No segundo grupo, a FRF é dada pelo quociente de dois polinômios, ou seja

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_{i} (i\omega)^{i}}{\sum_{j=0}^{M} b_{j} (i\omega)^{j}}$$
(4.18)

onde os coeficientes  $a_i$  e os  $b_i$  são reais, uma vez que correspondem aos coeficientes da função de transferência do sistema em estudo. Apesar de serem duas formas analíticas equivalentes, para a FRF, a equação (4.16) e a equação (4.18) apresentam diferenças significativas no processo de ajustagem de curvas.

Antes de dar início a uma análise dos métodos de

identificação multi-modos mais importantes, é necessário introduzir o conceito de parcelas residuais. Todas as estruturas são sistemas contínuos e por esta razão possuem infinitos modos de vibrar. Entretanto, quando se realiza um ensaio experimental em uma determinada estrutura, procura-se obter os parâmetros modais de um número reduzido de modos de vibrar, contidos em uma faixa de frequência considerada no ensaio. Embora os modos de vibrar localizados fora desta faixa não sejam identificados diretamente, sua influência está presente nos dados de resposta em frequência do sistema, e esta influência pode ser levada em consideração no processo de ajustagem de curvas. Isto é possivel introduzindo-se parcelas residuais no processo de ajustagem, para levar-se em conta a influência dos modos de vibrar fora da faixa considerada.

A equação (4.16) foi escrita levando-se em conta todos os N modos de vibrar do sistema. Supondo que a faixa de frequência escolhida contenha apenas modos intermediários, do modo  $m_1$  ao modo  $m_2$ , a equação (4.16) pode ser escrita com três somas, ou seja,

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{m1-1} + \sum_{r=m1}^{m2} \left( \frac{\frac{R}{r \ jk}}{i\omega - \lambda_{r}} + \frac{\frac{R^{*}}{r \ jk}}{i\omega - \lambda_{r}^{*}} \right) + \sum_{r=m2+1}^{N} (4.19)$$

ou também

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{m1-1} + \sum_{r=m1}^{m2} \frac{r^{A}_{jk}}{(i\omega - \lambda_{r})(i\omega - \lambda_{r}^{*})} + \sum_{r=m2+1}^{N} (4.20)$$

Nestas duas últimas expressões a soma intermediária diz

respeito aos modos de vibrar considerados na identificação modal. A primeira e a terceira soma contém respectivamente os modos localizados abaixo e acima da faixa de frequência considerada. A figura (4.2) ilustra o procedimento analítico mostrado na equação (4.19) e na equação (4.20) para um sistema de três graus de liberdade no qual deseja-se identificar o segundo modo de vibrar. Observa-se que o modo de vibrar localizado abaixo da segunda frequência natural apresenta um comportamento similar à uma linha de massa, enquanto que o terceiro modo apresenta um comportamento similar à uma linha de rigidez (EWINS, 1984).



FIGURA 4.2 - Influência das parcelas residuais.

Desta forma, a equação (4.20) pode ser escrita de uma forma aproximada como

$$\alpha_{jk}(\omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2 m_{jk}} + \sum_{r=m1}^{m2} \frac{r^A_{jk}}{(i\omega - \lambda_r)(i\omega - \lambda_r^*)} + \frac{1}{k_{jk}}$$
(4.21)

onde  $m_{jk}$  e  $k_{jk}$  são respectivamente a massa e a rigidez residual dos modos de vibrar localizados fora da faixa de frequência considerada.

### 4.2.1 - EXTENSÃO DO MODELO MODO A MODO

Os métodos de identificação modo a modo baseiam-se na hipótese de que na vizinhança de uma frequência natural e sob determinadas condições, a amplitude de vibração é controlada por um único modo de vibrar. Nestas condições, foi visto no método de ajustagem do círculo que a influência dos demais modos de vibrar é dada por uma constante complexa. No presente caso, esta hipótese é levada em consideração, agora com a inclusão das parcelas residuais.

A função receptância para um sistema com amortecimento viscoso, considerando-se os modos de vibrar contidos em uma determinada faixa de frequência é dada por

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=m1}^{m2} \frac{\varepsilon^{A}_{jk}}{(\omega_{\varepsilon}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{\varepsilon}\omega_{\varepsilon}\omega)} - \frac{1}{\omega^{2}m} + \frac{1}{k}$$
(4.22)

Para a identificação do modo r, a equação (4.22) é reescrita como

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{r^{A_{jk}}}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)} +$$

$$+ \left( \sum_{\substack{s=m1\\s\neq r}}^{m^2} \frac{\varepsilon^A_{jk}}{(\omega_s^2 - \omega^2) + i(2\xi_s\omega_s\omega)} - \frac{1}{\omega^2 m_{jk}} + \frac{1}{k_{jk}} \right)$$
(4.23)

No método de ajustagem do círculo, o segundo termo da equação (4.23) é suposto constante. Sendo  $\overline{\alpha}_{jk}(\omega)$  a função receptância obtida experimentalmente para alguns pontos na vizinhança de  $\omega_r$  e tendo-se estimativas razoáveis para os parâmetros modais dos outros modos de vibrar, pode-se escrever

$$\overline{\alpha}_{jk}(\omega) - \left( \sum_{\substack{s=m1\\s\neq r}}^{m2} \frac{A_{jk}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{s}\omega_{s}\omega)} - \frac{1}{\omega_{jk}^{2}} + \frac{1}{k_{jk}} \right) \cong$$

$$\cong \frac{r^{A} jk}{(\omega_{r}^{2} - \omega^{2}) + i(2\xi_{r}\omega_{r}\omega)}$$
(4.24)

Desta forma, pode-se obter uma estimativa para os parâmetros modais do modo r. Este procedimento pode ser repetido iterativemente para todos os modos de vibrar na faixa de frequência considerada, até que se obtenha resultados com uma boa precisão. Este método pode ser usado no refinamento dos parâmetros modais obtidos através do método de ajustagem do círculo, pois agora a contribuição dos modos de vibrar fora da faixa de frequência considerada é levada em conta através dasparcelas residuais (EWINS, 1984). 4.2.2 - IDENTIFICAÇÃO COM A FRF NA FORMA DE FRAÇÕES PARCIAIS

Este método (BROWN e outros, 1979) considera a FRF do sistema escrita na forma de frações parciais:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=m1}^{m2} \left( \frac{\frac{R_{jk}}{r_{jk}} + \frac{R_{jk}^{*}}{i\omega - \lambda_{r}} - \frac{1}{\omega^{2}m_{jk}} - \frac{1}{k_{jk}} \right) - \frac{1}{\omega^{2}m_{jk}} + \frac{1}{k_{jk}}$$
(4.25)

Os resíduos modais R são números complexos possuindo partes real e imaginária

$$R = U + i V$$

$$r_{jk} r_{jk} r_{jk}$$

$$(4.26)$$

A equação (4.25) pode ser escrita em função das partes real e imaginária das raizes  $\lambda_r$  e usando-se a relação (4.26). Com isto obtém-se

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=m1}^{m2} \left( \frac{U_{r} + i_{r}V_{jk}}{-\delta_{r} + i(\omega - \omega_{dr})} + \frac{U_{jk} - i_{r}V_{jk}}{-\delta_{r} + i(\omega + \omega_{dr})} \right) + K_{jk} - \frac{M_{jk}}{\omega^{2}}$$

$$(4.27)$$

Supondo que entre  $m_1 = m_2$  existam p frequências naturais, a equação (4.27) possui 4p + 2 incógnitas, sendo  $U_{jk}$ ,  $V_{jk}$ ,  $\delta_r = \omega_{dr}$ , as incógnitas para cada um dos p modos de vibrar e mais duas incógnitas,  $M_{jk} = K_{jk}$  relacionadas com as parcelas residuais inercial e elástica. A equação (4.27) é não linear em relação às incógnitas  $\delta_r = \omega_{dr}$ . Desta forma, a determinação dos parâmetros modais deve ser feita usando-se um método iterativo de ajustagem de curvas.

A grande maioria dos métodos de ajustagem de curvas baseia-se no método dos mínimos quadrados, que tem como objetivo minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os dados obtidos através de ensaios experimentais e o modelo matemático adotado para a estrutura.

Seja  $\overline{\alpha}_{jk}(\omega)$  a função receptância medida através de um ensaio experimental. Devido à isto, seus valores variam somente com a frequência  $\omega$ , em condições ideais. Já o modelo matemático dado pela equação (4.27) pode ser visto como uma função de  $\omega$  e dos 4p + 2 parâmetros do processo de ajustagem. Estas incógnitas podem ser escritas como componentes de um vetor {u} contendo 4p + 2 elementos

$$\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ \dots \ u_{4p+2}\}^{\mathsf{T}}$$
(4.28)

ou seja

$$\{u\} = \{ \bigcup_{r \ j \ k} V_{j \ k} \delta_{r} \omega_{d \ r} M_{j \ k} K_{j \ k} \}^{T}$$
(4.29)

com *r* variando de *1* até *p*. Desta forma, o modelo matemático dado pela equação (4.27) é função de  $\omega$  e de cada componente  $u_i$  do vetor {*u*}, sendo representado simplesmente por  $\alpha_{jk}(\omega)$ . A diferença entre os dados experimentais e o modelo matemático convenciona-se chamar de erro de ajustagem (NATKE, 1987), e é dado por

$$\varepsilon(\omega_{k}) = \overline{\alpha}_{jk}(\omega_{k}) - \alpha_{jk}(\omega_{k})$$
(4.30)

para um valor qualquer de  $\omega_k$ . A partir desta função erro é possível definir uma função objetivo ao longo de toda a faixa de frequência. Esta função objetivo é dada por

$$E = \sum_{k} \varepsilon(\omega_{k}) \varepsilon^{*}(\omega_{k}) = \sum_{k} |\varepsilon(\omega_{k})|^{2}$$
(4.31)

e a minimização desta função objetivo é feita igualando-se a zero as derivadas parciais de *E* em relação a cada parâmetro u

$$\frac{\partial E}{\partial u_{i}} = \sum_{k} \left( \epsilon^{*}(\omega_{k}) \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial u_{i}}(\omega_{k}) + \epsilon(\omega_{k}) \frac{\partial \alpha^{*}}{\partial u_{i}}(\omega_{k}) \right) = 0 \quad (4.32)$$

Este sistema é composto de equações não lineares em relação aos parâmetros  $\delta_{r} = \omega_{dr}$ . Sua solução pode ser obtida de duas formas. primeira delas calcula 2p + 2incógnitas, que são A respectivamente as partes real e imaginária dos resíduos complexos,  $U_{ik} \in V_{ik}$ , para cada um dos p modos de vibrar, e as incógnitas  $M_{ik}$  e  $K_{ik}$  relativas às parcelas residuais. Neste caso, os parâmetros  $\delta_{r} e \omega_{dr}$  devem ser determinados a priori, usando-se outros métodos de identificação (por exemplo, o método de ajustagem do círculo), e são mantidos constantes durante a resolução do sistema de equações (4.32). A segunda forma de solução do sistema (4.32) obtém os 4p + 2 parâmetros, a partir da linearização do modelo matemático dado pela equação (4.27) em relação a cada um dos elementos do vetor  $\{u\}$ . Esta linearização pode ser feita expandindo-se a equação (4.27) em série de Taylor e tomando-se apenas as parcelas lineares. O resultado obtido é o seguinte

77

$$\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}^{0}(\omega) + \sum_{i=1}^{4p+2} \beta_{i}(\omega_{k})\Delta u_{i} \qquad (4.33)$$

onde

$$\beta_{i}(\omega_{k}) = \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial u_{i}}(\omega_{k}) \bigg|_{\{u^{0}\}}$$
(4.34)

е

$$\Delta u_{i} = u_{i} - u_{i}^{0}$$
 (4.35)

sendo  $\{u^0\}$  o vetor composto por uma primeira estimativa das incógnitas do vetor  $\{u\}$  e  $\alpha_{jk}^{\circ}(\omega)$  o valor da FRF para este conjunto de parâmetros. Como consequência da linearização, a função erro pode agora ser escrita em função do modelo linearizado dado pela equação (4.33)

$$\varepsilon(\omega_{k}) = \overline{\alpha}_{jk}(\omega) - \alpha_{jk}^{0}(\omega) + \sum_{i=1}^{4p+2} \beta_{i}(\omega_{k})\Delta u_{i} \qquad (4.36)$$

e a função objetivo a ser minimizada agora é dada por

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \left| \overline{\alpha}_{j\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}}) - \alpha_{j\mathbf{k}}^{0}(\omega_{\mathbf{k}}) + \sum_{i=1}^{4\mathbf{p}+2} \beta_{i}(\omega_{\mathbf{k}}) \Delta u_{i} \right|^{2}$$
(4.37)

Para a minimização de *E* deve-se igualar a zero suas derivadas parciais em relação à cada uma das variáveis  $\Delta u_i$ . O sistema resultante é agora linear em relação à estas incógnitas. A solução deste sistema fornece os valores dos incrementos  $\Delta u_i$ , que serão somados aos elementos do vetor {u} para a iteração seguinte

$$\{u\}_{L} = \{u\}_{L-1} + \{\Delta u\}_{L} \tag{4.38}$$

Este método é numericamente estável e converge

rapidamente se o vetor de aproximações iniciais  $\{u^0\}$  for suficientemente próximo dos valores exatos (EBERSBACH e IRRETIER, 1989). O tempo de computação é relativamente longo, devido a necessidade de se calcular as derivadas da FRF em relação a todas as incógnitas para cada iteração.

## 4.2.3 - IDENTIFICAÇÃO COM A FRF NA FORMA POLINOMIAL

Neste método de identificação modal, o objetivo é a determinação dos coeficientes da função de transferência do sistema, dada pelo quociente de dois polinômios dependentes da frequência

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_{i}(i\omega)^{i}}{\sum_{j=0}^{M} b_{j}(i\omega)^{j}}$$
(4.39)

onde os  $a_i$  e os  $b_j$  são coeficientes reais, respectivamente do numerador e do denominador da função de transferência. O polinômio do denominador da equação (4.39) é denominado polinômio característico do sistema e suas raizes são os  $\lambda_r$ , os quais relacionam-se com as frequências naturais e com os fatores de amortecimento modais da estrutura. As raizes deste polinômio também são chamadas de pólos do sistema.

Os coeficientes do polinômio do numerador estão relacionados com os resíduos modais do sistema que por sua vez relacionam-se com os elementos dos seus modos de vibrar. Este procedimento de identificação não fornece os parâmetros modais explicitamente, tal como o método anterior. Deve-se inicialmente realizar uma ajustagem de curvas identificando-se os coeficientes  $a_i e b_j$ , e a partir deles os parâmetros modais podem ser determinados usando-se um algorítmo para a determinação das raizes do polinômio característico, no caso das frequências naturais e fatores de amortecimento modais. Os resíduos modais podem ser calculados através da expansão da equação (4.39) em frações parciais (MIRAMAND e outros, 1976).

Existem várias técnicas de ajustagem de curvas para a identificação dos coeficientes da função de transferência do sistema. A grande maioria delas baseia-se num método proposto por LEVY (1959). Neste método procura-se determinar os coeficientes da equação (4.39) a partir dos dados de resposta em frequência do sistema, usando-se uma técnica de ajustagem de curvas baseada no método dos mínimos quadrados. A aplicação do método de Levy requer que a função de transferência do sistema seja inicialmente escrita da seguinte forma

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\alpha(\omega) + i\omega \beta(i\omega)}{\sigma(\omega) + i\omega \tau(i\omega)} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$
(4.40)

sendo os valores de  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  e  $\tau(\omega)$  dados respectivamente por

$$\alpha(\omega) = a_{0} - a_{2}\omega^{2} + a_{4}\omega^{4} - \dots$$
  

$$\beta(\omega) = a_{1} - a_{3}\omega^{2} + a_{5}\omega^{4} - \dots$$
  

$$\sigma(\omega) = b_{0} - b_{2}\omega^{2} + b_{4}\omega^{4} - \dots$$
  

$$\tau(\omega) = b_{1} - b_{3}\omega^{2} + b_{5}\omega^{4} - \dots$$
  
(4.41)

No processo de ajustagem de curvas, é suposta uma função de transferência com coeficientes normalizados em relação ao termo independente do denominador, fazendo-se  $b_0 = 1$ . Desta forma, a equação (4.40) possui N + M + 1 incógnitas, respectivamente N + 1 coeficientes  $a_i$  e M coeficientes  $b_j$ . Como no método anterior, supõe-se que os dados obtidos nos ensaios experimentais sejam representados por  $\overline{\alpha}_{jk}(\omega)$ , possuindo partes real e imaginária dadas através de

$$\overline{\alpha}_{ik}(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) \qquad (4.42)$$

Neste caso, a função erro assume a seguinte forma

$$\varepsilon(\omega) = \overline{\alpha}_{jk}(\omega) - \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$
(4.43)

sendo não linear em relação aos coeficientes do polinômio complexo  $D(\epsilon)$ . A minimização do quadrado das diferenças neste caso resulta em um sistema de equações não lineares, sendo necessário o uso de um método iterativo para sua solução. Novamente, a solução do sistema de equações dependerá das aproximações iniciais. Isto pode ser evitado multiplicando-se ambos os lados da equação (4.43) por  $D(\omega)$ , obtendo-se então a seguinte expressão

$$D(\omega)\varepsilon(\omega) = D(\omega)\overline{\alpha}_{jk}(\omega) - N(\omega) \qquad (4.44)$$

Esta equação é complexa, e possui partes real e imaginária dadas por

$$D(\omega)\varepsilon(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) \qquad (4.45)$$

Para um valor qualquer  $\omega_k$  pode-se escrever

$$\left| D(\omega_{\mathbf{k}}) \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}) \right|^{2} = A^{2}(\omega_{\mathbf{k}}) + B^{2}(\omega_{\mathbf{k}})$$

$$(4.46)$$

sendo os valores de  $A(\omega_k)$  e  $B(\omega_k)$  dados através de

$$A(\omega_{k}) = R(\omega_{k})\sigma(\omega_{k}) - \omega_{k}\tau(\omega_{k})I(\omega_{k}) - \alpha(\omega_{k})$$
(4.47)

$$B(\omega_{k}) = \omega_{k} \tau(\omega_{k}) R(\omega_{k}) + \sigma(\omega_{k}) I(\omega_{k}) - \omega_{k} \beta(\omega_{k})$$
(4.48)

Desta forma, a função a ser minimizada no processo de ajustagem pode ser escrita para toda a faixa de frequência como

$$E = \sum_{k} [A^{2}(\omega_{k}) + B^{2}(\omega_{k})]$$
 (4.49)

A minimização desta função objetivo dá-se igualando-se a zero as derivadas parciais da equação (4.49) em relação a cada um dos coeficientes da função transferência

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{\mathbf{k}} (-A(\omega_{\mathbf{k}})) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \sum_{\mathbf{k}} (-\omega_{\mathbf{k}} B(\omega_{\mathbf{k}})) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}}^2 A(\omega_{\mathbf{k}})) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_3} = \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}}^3 B(\omega_{\mathbf{k}})) = 0 \qquad (4.50)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = \sum_{\mathbf{k}} (-\omega_{\mathbf{k}} I(\omega_{\mathbf{k}}) A(\omega_{\mathbf{k}}) + \omega_{\mathbf{k}} R(\omega_{\mathbf{k}}) B(\omega_{\mathbf{k}})) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_2} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ -\omega_{\mathbf{k}}^2 R(\omega_{\mathbf{k}}) A(\omega_{\mathbf{k}}) - \omega_{\mathbf{k}}^2 I(\omega_{\mathbf{k}}) B(\omega_{\mathbf{k}}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_3} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ -\omega_{\mathbf{k}}^3 I(\omega_{\mathbf{k}}) A(\omega_{\mathbf{k}}) - \omega_{\mathbf{k}}^3 R(\omega_{\mathbf{k}}) B(\omega_{\mathbf{k}}) \right] = 0$$

$$\vdots$$

Rearranjando estas expressões, obtém-se um sistema de equações lineares na forma

$$[A] \{x\} = \{b\}$$
(4.51)

onde a matriz dos coeficientes [A] é dada por

e os vetores x e b são dados por

$$x = \begin{cases} a_{0} \\ a_{1} \\ a_{2} \\ \vdots \\ b_{1} \\ b_{2} \\ b_{3} \\ \vdots \end{cases} \qquad b = \begin{cases} S_{0} \\ T_{1} \\ S_{2} \\ \vdots \\ 0 \\ U_{2} \\ 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad (4.53)$$

Os elementos da matriz [A] são funções da frequência  $\omega_k$  e das

partes real e imaginária da FRF do sistema. Estes elementos são dados através das seguintes expressões

$$\lambda_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} \qquad S_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} R(\omega_{k}) \qquad (4.54)$$

$$T_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} I(\omega_{k}) \qquad U_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} (R^{2}(\omega_{k}) + I^{2}(\omega_{k}))$$

A solução do sistema de equações lineares (4.51) fornece os coeficientes da função de transferência procurada. A matriz A é não simétrica e pode ser montada a partir de submatrizes, ou seja

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(4.55)

O número de termos em cada submatriz, levando-se em conta os zeros, deve ser tal que cada linha e coluna de [A] contenha exatamente N + M + 1 elementos, resultando portanto em uma matriz quadrada. O vetor de termos independentes também pode ser composto por partes, sendo que os N + 1 primeiros elementos são constituídos de valores de  $S \in T$ , enquanto que os M restantes são constituídos de zeros e de elementos U.

A principal vantagem do método de Levy reside no fato de ser um método exato, e desta forma não necessita de aproximações iniciais. Como a matriz dos coeficientes [A] é constituída de muitos zeros, o sistema de equações (4.51) pode resultar mal condicionado, dependendo da largura da faixa de frequência utilizada no ensaio experimental. Todos os elementos da matriz [A], diferentes de zero são multiplicados por potências de  $\omega$ . Isto faz com que a ordem de grandeza de alguns de seus elementos seja elevada, aumentando-se as dificuldades numéricas na resolução do sistema (4.51). Deve-se observar que o número de modos de vibrar identificados em uma dada faixa de frequência pode não ser a causa do mal condicionamento da matriz dos coeficientes [A]. Caso se tenha vários modos de vibrar em uma faixa estreita de frequência, fortemente acoplados ou não, a ajustagem de curvas tende a apresentar bons resultados. É claro que se os dados da FRF analisada forem muito contaminados por ruído, este método apresentará resultados pouco precisos, mas esta limitação estende-se à todos os métodos de identificação (MERGEAY, 1982).

Além da largura da faixa de frequência, existe outro fator limitante para este método. A função erro definida no processo de ajustagem é ponderada pelo denominador  $D(\omega)$  da função de transferência. Quando este denominador sofre grandes variações, isto também pode trazer problemas numéricos na fase de ajustagem. A fim de diminuir o efeito da ponderação de *E* pelo denominador da função de transferência, define-se uma nova função erro  $\varepsilon'(\omega)$  dada por (SANATHANAN e KOERNER, 1963)

$$\varepsilon'(\omega_{k}) = \frac{\left[D(\omega_{k})\varepsilon(\omega_{k})\right]_{L}}{\left[D(\omega_{k})\right]_{L-1}}$$
(4.56)

ou ainda

$$\epsilon'(\omega_{k}) = \frac{\left[D(\omega_{k})\overline{\alpha}_{jk}(\omega_{k})\right]_{L}}{\left[D(\omega_{k})\right]_{L-1}} - \frac{\left[N(\omega_{k})\right]_{L}}{\left[D(\omega_{k})\right]_{L-1}}$$
(4.57)

O processo de identificação da função de transferência torna-se agora iterativo e L é o número da iteração. Após sucessivas iterações, o efeito da ponderação do denominador na função erro é reduzido, melhorando-se a qualidade da ajustagem. Neste caso, a função objetivo a ser minimizada é dada por

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \left[ A^{2}(\omega_{\mathbf{k}}) + B^{2}(\omega_{\mathbf{k}}) \right] \left[ W(\omega_{\mathbf{k}}) \right]_{\mathbf{L}}$$
(4.58)

onde  $[W(\omega_k)]_{l}$  é uma função ponderadora, calculada para cada iteração a partir dos coeficientes do denominador da função de transferência identificados na iteração anterior. Para a iteração L + 1 tem-se

$$[W(\omega_{k})]_{L+1} = \frac{1}{|D(\omega_{k})|_{L}^{2}}$$
(4.59)

Neste caso, a matriz [A] dos coeficientes para a iteração L + 1será formada a partir dos seguintes elementos

$$\lambda_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} [W(\omega_{k})]_{L} \qquad S_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} R(\omega_{k}) [W(\omega_{k})]_{L} \qquad (4.60)$$

$$T_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} I(\omega_{k}) [W(\omega_{k})]_{L} \qquad U_{h} = \sum_{k} \omega_{k}^{h} [R^{2}(\omega_{k}) + I^{2}(\omega_{k})] [W(\omega_{k})]_{L}$$

Inicialmente não se conhece os coeficientes do denominador para o cálculo de  $W(\omega_k)$  para a primeira iteração. Neste caso é assumido  $W(\omega_k) = 1$ , ou seja, para a primeira iteração o método de Levy é usado. Os coeficientes  $b_j$  identificados são usados posteriormente na iteração seguinte. Se

dados obtidos experimentalmente não forem fortemente os contaminados por ruído, após algumas iterações os coeficientes do denominador da função transferência convergem para valores próximos dos valores exatos, e a função ponderadora  $\texttt{W}(\boldsymbol{\omega}_{_L})$  tende a permanecer constante. Desta forma, o efeito da ponderação na função erro pelo denominador  $D(\omega)$  é reduzido a cada iteração, melhorando assim a estabilidade numérica do método. Entretanto, a matriz dos coeficientes do sistema linear ainda pode resultar mal condicionada, caso a faixa de frequência escolhida para а seja larga. Neste ajustagem de muito caso, curvas 0 condicionamento da matriz pode ser melhorado de duas formas. Em primeiro lugar, pode-se dividir a faixa de frequência em várias partes, cada uma delas contendo um número reduzido de frequências naturais, e a ajustagem de curvas é feita em cada uma destas sub-divisões (EBERSBACH e IRRETIER, 1989). A segunda solução realiza a ajustagem de curvas utilizando-se uma base de polinômios ortogonais (RICHARDSON e FORMENTI, 1982).

A identificação de parâmetros modais usando-se a forma polinomial da FRF do sistema não considera as parcelas residuais como incógnitas do processso de ajustagem, tal como o faz o método descrito no ítem anterior. A inclusão destas parcelas resulta em um sistema de equações não lineares, cuja solução é geralmente de difícil obtenção. Neste caso a influência dos modos de vibrar localizados fora da faixa de frequência considerada na ajustagem de curvas deve ser levada em consideração de outra forma. Isto é possível aumentando-se a ordem do modelo matemático dado pela equação (4.39). Este aumento da ordem do modelo também contribui para reduzir o efeito do ruído presente nos parâmetros modais identificados (BRAUN e RAM, 1987), mas por outro lado, introduzer pólos computacionais na função de transferência identificada que não pertencem ao sistema dinâmico em estudo. Existem vários métodos propostos para a determinação dos chamados fatores de confiança modal, que são usados para se distinguir entre os pólos verdadeiros do sistema e os pólos computacionais (IBRAHIM, 1978).

# 4.2.4 - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS EM ESTRUTURAS LEVEMENTE AMORTECIDAS

Este método proposto por EWINS (1982) é usado na identificação de parâmetros modais em estruturas levemente amortecidas. O levantamento dos dados experimentais de resposta em frequência em tais estruturas geralmente é uma tarefa difícil, principalmente nas regiões onde ocorrem as ressonâncias. Este método é capaz de fornecer os modos de vibrar através da identificação das constantes modais do modelo, a partir de dados de resposta em frequência experimentais, com medidas tomadas longe das frequências naturais do sistema.

A aplicação deste método requer inicialmente o levantamento dos dados de resposta em frequência do sistema em toda a faixa de frequência de interesse e o conhecimento prévio das frequências naturais do mesmo. Em seguida, seleciona-se os valores de frequência para os quais o método será aplicado. O número de pontos escolhidos deve coincidir com o número de frequências naturais identificadas na faixa de interesse. Estes

pontos devem estar localizados longe das frequências naturais. A figura 4.3 mostra e escolha de tais pontos para a FRF de um sistema de quatro graus de liberdade.



FIGURA 4.3 - Escolha dos pontos para a identificação

O modelo matemático adotado neste método de identificação é a função receptância de um sistema não amortecido

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{r^{A}_{jk}}{\omega_{r}^{2} - \omega^{2}}$$
(4.61)

a qual para uma valor específico  $\Omega_{_{\rm L}}$  da frequência, pode ser escrita da seguinte forma

$$\alpha_{jk}(\Omega_{L}) = \{ (\omega_{1}^{2} - \Omega_{L}^{2})^{-1} (\omega_{2}^{2} - \Omega_{L}^{2})^{-1} \dots \} \begin{cases} 1^{A}_{jk} \\ 2^{A}_{jk} \\ \vdots \end{cases}$$
(4.62)

Para um conjunto de N valores medidos, pode-se escrever

ou usando a notação matricial

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\} = [R(\omega)]\{A_{jk}\}$$
(4.64)

a qual apresenta solução para o vetor de ordem N das contantes modais dada por

$$\{A_{jk}\} = [R(\omega)]^{-1}\{\alpha_{jk}(\omega)\}$$
(4.65)

Para se obter estimativas do amortecimento com este método, foi proposta uma forma de calcular os fatores de amortecimento modais através das frequências naturais identificadas experimentalmente e das constantes modais calculadas através da equação (4.65) (EWINS e GLEESON, 1982). Quando se faz a análise de modelos incompletos, a influência dos modos fora da faixa considerada pode ser levada em consideração aumentando-se a ordem do modelo identificado, tomando-se um número maior de pontos em relação ao número de frequências naturais identificadas.

## 4.2.5 - IDENTIFICAÇÃO GLOBAL DE PARÂMETROS MODAIS

métodos de identificação de parâmetros modais Os discutidos até o presente momento realizam a ajustagem de curvas para uma FRF de cada vez. Como resultado, obtém-se as frequências naturais, os fatores de amortecimento modais e as constantes modais para a FRF considerada. Entretanto tais métodos não fornecem os modos de vibrar de uma forma rápida, mas somente combinações dos elementos da matriz modal do sistema, dadas pelas constantes modais. Portanto, é exigida uma etapa posterior para a determinação do modelo modal completo da estrutura. Esta etapa pode ser evitada, usando-se no processo de identificação modal algorítmos que realizam ajustagens globais, ou seja, processam simultaneamente dados relativos à várias FRFs obtidas nos ensaios. Tais algorítmos levam em conta o fato de que toda estrutura possui certas características globais que teóricamente permanecem constantes, mesmo quando se varia o ponto de medida ao longo da estrutura. Embora praticamente as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais sofram pequenas variações para as várias FRFs medidas, tais restrições são impostas no processo de ajustagem de curvas destes métodos globais , que são capazes de fornecer um modelo modal único para o sistema em estudo (LEURIDAN e outros, 1985).

Um dos primeiros métodos de ajustagem global no domínio da frequência foi proposto por GOYDER (1980). Existem ainda

outros métodos nesta área, por exemplo o método de Ibrahim (IBRAHIM e MIKULCIK, 1973) e o método da polireferência (VOLD e outros, 1982), que processa dados tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

Recentemente foi proposto um método global (SHIH e outros, 1988) baseado no modelo auto regressivo de média móvel (ARMA). Este método baseia-se na forma polinomial da FRF e usa os polinômios ortogonais de Forsythe (RICHARDSON e FORMENTI, 1982) para reduzir os problemas numéricos.

A grande maioria dos métodos globais de identificação são extensões de versões mais simples, que processam uma FRF por vez. A principal vantagem destes métodos reside no fato deles poderem fornecer a matriz modal do sistema diretamente. Tais métodos apresentam como principal desvantagem a forte exigência computacional para a análise dos dados experimentais.

#### 4.2.6 - O MÉTODO DA EXPONENCIAL COMPLEXA

Este método de identificação de parâmetros modais usa os dados da resposta ao impulso do sistema e realiza una aproximação baseada em funções exponenciais, usando o método de Prony (BROWN e outros, 1979). Como geralmente a aquisição de dados experimentais é feita de forma digital, em intervalos de frequência  $\Delta f$  igualmente espaçados, a função resposta ao impulso do sistema pode ser escrita em função de intervalos de tempo  $\Delta t$ igualmente espaçados. Desta forma, os dados experimentais podem ser escritos como sendo elementos de um vetor  $\{h\}$  dado através de

$$\{h\} = \{h(0) \ h(\Delta t) \ h(2\Delta t) \ \dots \ h(L\Delta t)\}^{T}$$
(4.66)

ou simplesmente:

$$\{h\} = \{h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_L\}^T$$
 (4.67)

Tem-se então um vetor composto de L dados amostrados da resposta ao impulso do sistema. Como foi mostrado no ítem (3.3) do capítulo anterior, a resposta ao impulso de um sistema discreto pode ser escrita da seguinte forma

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} R_{jk} e^{\lambda_{r} t}$$
(4.68)

Para o *i*-ésimo dado amostrado, pode-se escrever a equação (4.68) da seguinte forma

$$h_{i} = \sum_{r=1}^{2N} R_{r} Y_{r}^{i}$$
(4.69)

com

$$R_{\rm r} = R_{\rm j\,k} \tag{4.70}$$

е

$$Y_{r} = e^{\lambda_{r} \Delta t}$$
(4.71)

Desta forma, a equação (4.69) extendida para L = 2N dados amostrados pode ser escrita usando-se as simplificações dadas pelas equações (4.70) e (4.71). A equação resultante é dada na notação matricial através de

$$[Y] \{R\} = \{h\}$$
(4.72)

93

onde matriz [Y] é dada por

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{2N} \\ Y_1^2 & Y_2^2 & \dots & Y_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_1^{2N-1} & Y_2^{2N-1} & \dots & Y_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix}$$
(4.73)

e os vetores {R} e {h} são dados por

$$\{R\} = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ \dots \ R_{2N}\}^{\mathrm{T}}$$
 (4.74)

е

$$\{h\} = \{h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{2N-1}\}^{\mathrm{T}}$$
 (4.75)

O sistema de equações (4.72) involve a forma matricial de Van der Monde. A resolução deste sistema usando-se métodos numéricos convenientes fornece os valores dos resíduos modais, que por sua vez estão relacionados com os modos de vibrar da estrutura.

A determinação das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais é feita usando-se o método de Prony. Para isto, um novo conjunto de incógnitas  $a_i$  com *i* variando de *0* até 2N é introduzido. Estas incógnitas são coeficientes de uma equação polinomial do tipo:

$$\prod_{r=1}^{N} (x - Y_{r})(x - Y_{r}^{*}) = \sum_{i=0}^{2N} a_{i}Y^{i} = 0$$
(4.76)

As 2N raizes  $Y_{r}$  da equação (4.76) são exponenciais complexas definidas segundo a equação (4.71) e os coeficientes  $a_{r}$  são

denominados coeficientes de autoregressão (BROWN e outros, 1979). Multiplicando-s $\epsilon$  cada uma das equações do sistema (4.72) pelo coeficiente *a*, correspondente, obtém-se para a *i*-ésima equação:

$$a_{i}h_{j} = a_{i}\sum_{r=1}^{2N} R_{r}Y_{r}$$
 (4.77)

Somando-se estas equações para os 2N dados amostrados, tem-se

$$\sum_{i=0}^{2N} a_{i} h_{i} = \sum_{r=1}^{2N} \left[ R_{r} \sum_{i=0}^{2N} a_{i} Y_{r}^{i} \right]$$
(4.78)

Desta forma, para que se possa determinar as raizes  $Y_{r}$  da equação (4.78) e posteriormente as frequências naturais e fatores de amortecimento modais, deve-se inicialmente determinar os valores dos coeficientes  $a_{i}$ . Como neste caso o número de dados amostrados da resposta impulsiva do sistema é igual a 2N, segundo a equação (4.76) deve-se ter

$$\sum_{i=0}^{2N} a_{i} \quad Y_{r}^{i} = 0 \tag{4.79}$$

para r variando de 1 até 2N. Desta forma, a equação (4.78) pode ser escrita como:

$$\sum_{i=0}^{2N} a_i h_i = 0$$
 (4.80)

Como o sistema de equações (4.80) é homogêneo, possuindo portanto infinitas soluções, sendo cada uma delas uma combinação linear das demais, pode-se escolher arbitrariamente  $a_{2N} = 1$ . Desta forma, a equação (4.80) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} a_i h_i = -h_{2N}$$
(4.81)

Portanto de acordo com a equação (4.81), existem 2N equações lineares que podem ser escritas para as variáveis  $a_i$ . Estas incógnitas podem ser determinadas tomando-se amostras diferentes da resposta ao impulso da estrutura. Cada conjunto de dados deve ser sobreposto pelo seu sucessor em uma dada faixa, de acordo com a seguinte equação:

$$\sum_{i=0}^{2N} a_i h_i = -h_{2N+1}$$
(4.82)

A aplicação deste procedimento à vários conjuntos de dados amostrados experimentalmente resulta em um sistema de 2N equações dado na forma matricial através de

$$[h]\{a\} = -\{\overline{h}\}$$
(4.83)

sendo a matriz [h] dada por

$$[h] = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix}$$
(4.84)

e os vetores  $\{a\}$  e  $\{\overline{h}\}$  dados através de

$$\{a\} = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2N-1}\}^T$$
(4.85)

$$\{\overline{h}\} = \{a_{2N} \ a_{2N+1} \ a_{2N+2} \ \dots \ a_{4N-1}\}^{\mathrm{T}}$$
 (4.86)

O sistema de equações (4.83) involve a forma matricial de Toeplitz. A solução deste sistema fornece os valores dos coeficientes  $a_i$ . Com estes coeficientes pode-se então determinar as raizes  $Y_r$  e através delas as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais usando-se a equação (4.71).

e

O método da exponencial complexa apresenta a vantagem de que a solução não linear para as frequências naturais e para os fatores de amortecimento modais é computacionalmente mais fácil de ser obtida usando-se o método de Prony.

Os dados de entrada do algorítmo são a resposta impulsiva da estrutura sob estudo e a ordem do modelo matemático escolhido na análise dos dados. É conveniente fornecer alguns graus de liberdade extras ao algorítmo de identificação afim de compensar os efeitos de ruídos presentes nos dados (BROWN e outros, 1979). Isto é feito aumentando-se a ordem do modelo matemático usado. Entretanto, quando este procedimento é usado a identificação de parâmetros inclui alguns modos computacionais. Estes modos computacionais não pertencem ao sistema físico em estudo e aparecem devido aos graus de liberdade extras dados ao algorítmo de identificação. Por esta razão existem os chamados fatores de confiança modal (IBRAHIM, 1978) que permitem a separação dos modos computacionais dos modos físicos da estrutura.

O método da exponencial complexa ainda pode ser

definido baseado em uma formulação por mínimos quadrados (BROWN e outros, 1979). O procedimento é similar àquele descrito nos métodos de identificação no domínio da frequência. Como usualmente é feito, uma função objetivo é definida entre o modelo adotado para o sistema na forma da resposta ao impulso e os dados obtidos experimentalmente. A minimização desta função objetivo transforma o problema em um sistema de equações lineares cuja solução fornece os parâmetros modais procurados. A maior vantagem desta versão do método da exponencial complexa é que a minimização por mínimos quadrados tende a diminuir a influência do ruído no processo de identificação, pois agora os dados podem ser ponderados e esta ponderação favorece a estimação dos parâmetros modais. Neste caso são encontrados os mesmos problemas de determinação da ordem modal já discutidos nos parágrafos anteriores.

### 4.2.7 - O MÉTODO DE IBRAHIM

O método de Ibrahim (IBRAHIM e MIKULCIK, 1973) não se baseia em ajustagem de curvas. Este método de identificação pode ser visto como um método global de identificação uma vez que é capaz de fornecer os modos de vibrar de uma só vez, analisando simultaneamente todos os dados medidos.

A resposta impulsiva de uma estrutura em um dado instante  $t_i$  é dada por

$$h_{i}(t_{j}) = \sum_{r=1}^{2M} \phi_{ri} e^{\lambda_{r} t_{j}}$$
(4.87)

onde *i* representa a coordenada onde é medida a resposta e j é o instante considerado. Neste modelo foram assumidos *m* modos de vibrar dos *N* graus de liberdade da estrutura, sendo *m* < *N*. Se a resposta for medida em *p* pontos da estrutura e em *q* instantes diferentes é possível montar-se a seguinte equação escrita na forma matricial

$$[h] = [\Phi][S] \tag{4.88}$$

sendo as matrizes desta equação dadas por:

$$[h] = \begin{bmatrix} h_{1}(t_{1}) & h_{1}(t_{2}) & \dots & h_{1}(t_{q}) \\ h_{2}(t_{1}) & h_{2}(t_{2}) & \dots & h_{2}(t_{q}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p}(t_{1}) & h_{p}(t_{2}) & \dots & h_{p}(t_{q}) \end{bmatrix}$$
(4.89)  
$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{2m1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1p} & \phi_{2p} & \cdots & \phi_{2mp} \end{bmatrix}$$
(4.90)

$$[S] = \begin{bmatrix} \lambda_{1}t_{1} & \lambda_{1}t_{2} & & \lambda_{1}t_{q} \\ e^{1}t_{1} & e^{1}t_{2} & & e^{1}t_{q} \\ e^{1}t_{1} & e^{1}t_{2} & & \lambda_{2}t_{q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & e^{2}t_{q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{2}t_{1} & \lambda_{2}t_{2} & & \lambda_{2}t_{q} \\ e^{2t}t_{1} & e^{2t}t_{2} & & \lambda_{2}t_{q} \end{bmatrix}$$
(4.91)

onde [h] a matriz dos dados amostrados da resposta impulsiva do sistema, obtidos experimentalmente,  $[\Phi]$  é a matriz modal a ser identificada e [S] é uma matriz cujos elementos são funções das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais a serem determinados. Uma segunda equação similar à equação (4.88) é formada a partir de outro conjunto de dados amostrados defasado de  $\Delta t$  segundos em relação à primeira medida. Desta forma tem-se

$$h_{i}(t_{j} + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2M} \phi_{ri} e^{\lambda_{r}(t_{j} + \Delta t)}$$
(4.92)

ou ainda

$$\overline{h}_{i}(t_{j}) = \sum_{r=1}^{2M} \overline{\phi}_{ri} e^{\lambda_{r} t_{j}}$$
(4.93)

com

$$\overline{\phi}_{ri} = \phi_{ri} e^{\lambda_r \Delta t}$$
(4.94)

Com este procedimento obtém-se um novo sistema de equações similar ao sistema (4.88)

$$\left[\overline{h}\right] = \left[\overline{\Phi}\right]\left[S\right] \tag{4.95}$$

Como a ordem modal geralmente é desconhecida pode-se supor que p = 2m, e desta forma as matrizes  $[\Phi]$  e  $[\overline{\Phi}]$  são quadradas. Estas duas matrizes estão relacionadas segundo uma transformação linear do tipo

$$[A][\Phi] = [\overline{\Phi}] \tag{4.96}$$

em conta a transformação mostrada na equação (4.96) pode-se escrever:

$$[A][h] = [h] \tag{4.97}$$

Com esta equação é possível obter-se a matriz [A] a partir dos dados medidos, que por sua vez são os elementos das matrizes [h]e  $[\overline{h}]$ . Se o número q de dados amostrados for tomado igual ao número de pontos medidos p, então a matriz [A] pode ser obtida diretamente da equação (4.97). Entretanto é comum em situações práticas usar-se um número maior de dados amostrados, e nestas condições q > 2m. Neste caso a determinação da matriz [A] é feita através do método da pseudo-inversa (EWINS, 1984). Este método busca a solução baseando-se no método dos mínimos quadrados e usando todos os dados disponíveis. Assim, uma expressão para [A]

$$[A] = [\bar{h}][h] [[h][h]^{\mathrm{T}}]^{-1}$$
(4.98)

Retornando agora à equação (4.92) pode-se observar que cs autovetores  $\{\overline{\phi}\}$  estão relacionados com  $\{\phi\}$  através da equação (4.94). Desta forma, a equação (4.96) pode ser reescrita da seguinte forma

$$[A]\{\phi_{r}\} = \{\phi_{r}\}e^{\lambda_{r}\Delta t}$$

$$(4.99)$$



ou ainda como foi definido anteriormente

$$[A]\{\phi_{r}\} = Y_{r}\{\phi_{r}\}$$
(4.100)

Os autovalores Y do autoproblema mostrado na equação (4.100) estão relacionados com as frequências naturais e com os fatores de amortecimento modais do sistema da seguinte forma

$$e^{\lambda} \stackrel{\Delta t}{} = a_{r} + ib_{r} \qquad (4.101)$$

ou ainda

$$\lambda_{r} \Delta t - \omega_{r} \xi_{r} \Delta t \quad i \omega_{dr} \Delta t$$

$$e^{r} = e^{r} e^{-r} \qquad (4.102)$$

Desta forma, os valores de  $\omega_r$  e  $\xi_r$  para o modo r podem ser determinados através de

$$\omega_{r}\xi_{r} = -\frac{\ln (a_{r}^{2} + b_{r}^{2})}{\Delta t}$$
(4.103)

$$\omega_{\rm dr} = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_{\rm r}}{a_{\rm r}\Delta t}\right) \tag{4.104}$$

Correspondente a cada autovalor  $\lambda_r$  existe um autovetor  $\phi_r$  para o modo em questão. No método de Ibrahim a determinação da ordem do modelo também pode trazer dificuldades em sua utilização. A diferenciação entre modos reais e computacionais pode ser feita através de um fator de confiança modal (IBRAHIM, 1978).
4.2.8 - O MÉTODO DA POLIREFERÊNCIA

O método da polireferência (VOLD e outros, 1982) é uma extensão do método da exponencial complexa mostrado no ítem 4.2.6. Este método é capaz de analisar simultaneamente dados da resposta impulsiva de uma determinada estrutura quando a mesma é excitada em várias posições simultaneamente. Quando somente um ponto da estrutura é excitado, este método de identificação reduz-se ao método da exponencial complexa.

Segundo a teoria fundamental da análise modal, a excitação da estrutura num único ponto é capaz de fornecer dados suficientes para a determinação de suas propriedades modais. Na prática, isto nem sempre é possível pois a excitação pode estar atuando próxima à uma linha nodal de um modo de vibrar importante na análise. O método da polireferência explora o fato de que os parâmetros modais são propriedades globais da estrutura, ou seja, são independentes do ponto de excitação e por esta razão o método processa simultaneamente os dados experimentais relativos à todas os pontos de excitação.

A identificação é feita de forma semelhante ao método da exponencial complexa. São tomadas inicialmente várias medidas da função resposta ao impulso da estrutura relativas à todos os pontos excitados. Em seguida estes dados são usados para a formação de uma sistema de equações similar ao sistema (4.72), só que agora como existem várias entradas atuando no sistema, para cada uma delas é escrito um conjunto de equações similar ao sistema (4.72). Este conjunto de equações é então multiplicado por matrizes de coeficientes e não mais por escalares como foi feito no método da exponencial complexa (DEBLAWE e outros, 1987). Em seguida, é possivel identificar as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais usando-se o método de Prony ou mínimos quadrados. Uma vez determinados estes parâmetros modais, os modos de vibrar da estrutura são obtidos através de ajustagens de curvas realizadas tanto no domínio do tempo quanto da frequência (STROUD, 1987).

# capítulo 5

# MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO

Neste capítulo é proposto um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Este método é capaz de realizar a identificação multi-modos numa faixa contendo várias frequências naturais.

O algorítmo de identificação usa os dados provenientes de ensaios experimentais e através de uma técnica de ajustagem de curvas ajusta estes dados à um modelo matemático escolhido. A partir desse modelo, são calculados os parâmetros modais do sistema para cada FRF medida.

As etapas do algorítmo de identificação são apresentadas na forma de diagramas de blocos e são feitas considerações sobre a implementação numérica do método. Os resultados da aplicação deste método são mostrados no capítulo 7 para dados experimentais e de simulações. 5.1 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO

O método de identificação proposto pode ser dividido em três etapas: a ajustagem de curvas, a determinação dos parâmetros modais e a regeneração dos dados da FRF. Na etapa de ajustagem de curvas é adotada a forma polinomial da FRF como modelo matemático para o sistema. Este modelo é então ajustado aos dados provenientes de ensaios experimentais, em uma faixa contendo várias frequências naturais. Esta ajustagem é baseada no método de Levy e inclui o melhoramento iterativo proposto por Sanathanan e Koerner, descritos no item 4.2.4.

Como resultado da ajustagem de curvas, obtém-se os coeficientes da função de transferência do sistema na faixa analisada. Ela é dada por

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_{i} s^{i}}{\sum_{j=0}^{M} b_{j} s^{j}}$$
(5.1)

onde os  $a_i$  e os  $b_j$  são os coeficientes identificados na ajustagem de curvas. Os valores de  $N \in M$  são respectivamente a ordem do polinômio do numerador e do denominador da função de transferência identificada. Eles estão relacionados com o número de graus de liberdade considerado na ajustagem. Como foi dito anteriormente, o polinômio do denominador é o polinômio característico da equação diferencial do sistema. Suas raizes ocorrem em pares complexos conjugados e estão relacionadas com as frequências naturais e com os fatores de amortecimento modais dos modos de vibrar contidos na faixa de frequência analisada. Os coeficientes do polinômio do numerador estão relacionados com os resíduos modais.

A partir do conhecimento dos coeficientes do modelo matemático usado para a descrição do sistema, inicia-se a segunda etapa do processo de identificação, ou seja, a determinação dos parâmetros modais para a FRF identificada. Inicialmente são calculadas as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais, usando-se para tanto, os coeficientes  $b_j$  do denominador da equação (5.1). O modelo de amortecimento adotado neste trabalho é o modelo viscoso, e a determinação destes parâmetros é feita através da fatoração em binômios do polinômio característico da FRF considerada. Cada binômio é dado da seguinte forma na variável de Laplace

$$s^2 - S s + P$$
 (5.2)

onde S é a soma de duas raizes e P o produto delas. Esta equação pode ser escrita em função dos parâmetros modais

$$s^{2} + 2\xi_{r}\omega_{r} s + \omega_{r}^{2}$$
 (5.3)

A fatoração do polinômino característico do sistema é feita usando-se o método de Newton-Bairstow (FRÖBERG, 1965). Este método é usado na determinação das raizes de polinômios quando estes apresentam raizes complexas. Como estas raizes ocorrem em pares complexos conjugados para polinômios de coeficientes reais, o método de Newton-Bairstow fornece um par de raizes em cada convergência, com a vantagem de não ser preciso o uso de algebra complexa na determinação destas raizes. Por ser um método iterativo, são necessárias aproximações iniciais para  $S \ P$ . Se o grau do polinômio analisado não for muito alto , não são necessárias aproximações iniciais muito próximas dos valores exatos.

Após a determinação das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais para todas as FRFs do sistema, são calculados os resíduos modais. Estes parâmetros são determinados a partir da expansão da FRF em frações parciais (MIRAMAND e outros, 1976). Na forma expandida, a FRF assume a seguinte forma

$$\alpha_{jk}(s) = \sum_{r=1}^{m} \left( \frac{\frac{R_{jk}}{r jk} + \frac{R_{jk}}{s - \lambda_{r}} \right)$$
(5.4)

onde *m* é o número de modos de vibrar considerados na faixa de análise. Os valores de  $\lambda_r$  podem ser determinados a partir das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais já identificados. A função de transferência mostrada na equação (5.1) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}{\prod_{j=1}^{m} (s - \lambda_j)(s - \lambda_j^*)}$$
(5.5)

Isolando-se a parcela relativa ao pólo  $\lambda_q$  nas equações (5.4) e (5.5) obtém-se como resultado as seguintes expressões

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{q^{k}jk}{s-\lambda_{q}} + \frac{q^{k}jk}{s-\lambda_{q}} + \sum_{\substack{r=1\\r\neq q}}^{m} \left(\frac{r^{k}jk}{s-\lambda_{r}} + \frac{r^{k}jk}{s-\lambda_{r}}\right)$$
(5.6)

$$\alpha_{jk}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}{(s - \lambda_q)(s - \lambda_q^*) \prod_{\substack{j=1\\ j \neq q}}^{m} (s - \lambda_j)(s - \lambda_j^*)}$$
(5.7)

Multiplicando-se ambos os lados das equações (5.6) e (5.7) pela parcela (s -  $\lambda_q$ ) tem-se

е

е

$$\alpha_{jk}(s)(s - \lambda_{q}) = {}_{q}R_{jk} + \frac{{}_{q}R_{jk}^{*}}{s - \lambda_{q}^{*}}(s - \lambda_{q}) +$$

$$+ \sum_{\substack{r=1\\r \neq q}}^{m} \left(\frac{{}_{r}R_{jk}}{s - \lambda_{r}} + \frac{{}_{r}R_{jk}^{*}}{s - \lambda_{r}^{*}}\right)(s - \lambda_{q}) \qquad (5.8)$$

$$\alpha_{jk}(s)(s - \lambda_{q}) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_{i}s^{i}}{(s - \lambda_{q}^{*})\prod_{\substack{j=1\\ j \neq q}}^{m} (s - \lambda_{j})(s - \lambda_{j}^{*})}$$
(5.9)

fazendo  $s = \lambda_q$  nas equações (5.8) e (5.9), e igualando-se as expressões resultantes obtém-se o seguinte valor para o resíduo modal do modo q

$${}_{q}R_{jk} = \frac{\sum_{\substack{i=0\\j \neq q}}^{N} a_{i}\lambda_{q}^{i}}{(\lambda_{q} - \lambda_{q}^{*})\prod_{\substack{j=1\\j \neq q}}^{m} (s_{q} - \lambda_{j})(s_{q} - \lambda_{j}^{*})}$$
(5.10)

Com este procedimento é possível determinar-se os resíduos modais para todos os modos de vibrar, para cada FRF analisada. O fato dos resíduos ocorrerem em pares complexos conjugados favorece o uso da equação (5.10) em sua determinação, pois para uma faixa contendo *m* modos, a equação (5.10) é usada *m/2* vezes.

### 5.2 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO PROPOSTO

O método de identificação proposto no ítem anterior está implementado num computador IBM 4381 (32 bits) na linguagem FORTRAN. O programa IDF1 está estruturado num programa principal, aqui denominado *MAIN*, e três subrotinas, respectivamente as subrotinas *FIT*, *MODAL E REGE*. A figura 5.1 mostra a estrutura do programa IDF1.

O programa principal *MAIN* é responsável pela leitura dos dados das FRFs. Estes dados podem ser introduzidos de duas formas. Se a FRF for dada na forma complexa, real e imaginária em função da frequência  $\omega$ , estes dados são fornecidos à rotina *FIT* e tem início a fase de ajustagem de curvas. Se os dados de entrada forem respectivamente o módulo e o ângulo de fase da FRF, eles são inicialmente convertidos para a forma complexa mencionada, para que em seguida se inicie a ajustagem de curvas. O fluxograma do programa principal *MAIN* está mostrado na figura 5.2.



FIGURA 5.1 - Estrutura do programa IDF1.

A subrotina *FIT* cujo fluxograma está mostrado na figura 5.3 é responsável pela ajustagem de curvas. Os dados de entrada desta rotina são respectivamente a FRF do sistema na forma complexa e a ordem do modelo matemático escolhido. Esta ordem é dada por  $N \in M$ , que são respectivamente o grau do polinômio do numerador e do denominador. Outro dado importante que deve ser fornecido à esta rotina é o número de pontos contidos na faixa de ajustagem. Este valor é dado no algorítmo por *p*.

Esta fase de ajustagem de curvas é iterativa, segundo o método de Sanathanan e Koerner. Na primeira iteração é usado o

método de Levy, obtendo-se assim uma primeira estimativa para os coeficientes da função de transferência. A partir da segunda iteração, os coeficientes do polinômio do denominador calculados na iteração anterior são usados para a determinação da função ponderadora  $W(\omega_{l})$ . Em cada iteração são determinados os coeficientes  $\lambda$ , T, U e S, definidos no ítem 4.2.3. A partir destes coeficientes é montado um sistema de equações lineares cuja solução fornece os coeficientes procurados. A solução do sistema de equações é feita usando-se o método de Gauss com pivotamento. Após um certo número de iterações a função ponderadora tende a permanecer constante, e o processamento é interrompido. Os coeficientes da função de transferência identificados são fornecidos à subrotina MODAL para a determinação dos parâmetros modais.

A subrotina *MODAL* é responsável pela determinação dos parâmetros modais para cada FRF analisada. Os dados de entrada para esta rotina são os coeficientes da função de transferência identificados pela rotina *FIT*. Esta rotina contém a implementação do método de Newton-Bairstow. Inicialmente são dadas aproximações iniciais para S e P. O algorítmo em seguida calcula os coeficientes  $B_{\mu}$  e  $C_{\mu}$  (FRÖBERG, 1965)

$$B_{k} = b_{k} - Sb_{k-1} - Pb_{k-2} \qquad k = 0, M \qquad (5.11)$$

$$C_{k} = B_{k} - SC_{k-1} - PC_{k-2}$$
  $k = 1, M - 1$  (5.12)

Estes coeficientes são usados na determinação das correções das aproximações iniciais de S e P. Estas correções são dadas através

e

da solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta S \\ \Delta P \end{cases} = - \begin{cases} B_1 \\ B_0 \end{cases}$$
(5.13)

e então pode-se corrigir os valores de S e P através de

$$S = S + \Delta S \tag{5.14}$$

$$P = P + \Delta P \tag{5.15}$$

Este procedimento é repetido até que se atinga a precisão desejada. Após a fatoração os valores de  $S \in P$  são usados para a determinação da frequência natural e do fator de amortecimento modal do modo em questão, segundo a equação (5.3). O polinômio característico é então fatorado e inicia-se a busca de um novo par de raizes.

Tendo-se determinado as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais de todos os modos para a FRF estudada, a subrotina *MODAL* calcula os resíduos modais, através da equação (5.10). Estes parâmetros modais são gravados em um arquivo para posterior análise. A figura 5.4 mostra o fluxograma da subrotina *MODAL*.

A subrotina *REGE* realiza a regeneração dos dados da FRF com base nos parâmetros modais identificados. Esta regeneração é feita segundo a equação (5.4). Os resultados desta regeneração são armazenados em um arquivo juntamente com os dados medidos, para posterior comparação. O fluxograma da subrotina *REGE* está mostrado na figura 5.5.



FIGURA 5.2 - Fluxograma do programa principal MAIN.



FIGURA 5.3 - Fluxograma da subrotina FIT.



FIGURA 5.3 (cont.) - Fluxograma da subrotina FIT.



FIGURA 5.4 - Fluxograma da subrotina MODAL.



FIGURA 5.4 (cont.) - Fluxograma da subrotina MODAL.



FIGURA 5.4 (cont.) - Fluxograma da subrotina MODAL.



FIGURA 5.5 - Fluxograma da subrotina REGE.

# CAPÍTULO 6

## INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL

Com o objetivo de se obter dados experimentais que pudessem verificar a eficiência do método de identificação de parâmetros modais proposto, foi realizado um ensaio experimental em uma placa de alumínio. A faixa de frequência analisada foi dividida em três partes, cada uma delas contendo um determinado número de frequências naturais. Para cada uma destas partes, a placa foi excitada em um ponto mantido fixo e a resposta foi medida em vários pontos.

Os dados relativos à excitação e à resposta foram processados usando técnicas de análise espectral afim de se obter a FRF para cada ponto de resposta. Os dados medidos foram submetidos ao processo de *averaging* para minimizar o efeito dos ruídos e a função coerência foi avaliada para cada curva medida afim de se avaliar a linearidade entre excitação e resposta. 6.1 - DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO ENSAIADO E DA SUA FIXAÇÃO

O protótipo ensaiado foi o de uma placa de alumínio retangular. A simulação das condições de engaste foi feita usando-se chapas espessas de aço e entre elas a extensão da placa de alumínio. Este conjunto foi rigidamente fixado à uma base inercial, conforme mostrado nas figuras 6.1 e 6.2. Este tipo de fixação influencia os dados medidos, principalmente nas frequências mais baixas (MACBAIN e outros, 1985). Esta influência acontece pois em situações práticas a fixação da estrutura em sempre apresenta alguma flexibilidade, não estudo sendo perfeitamente rígida. Por esta razão, as dimensões mostradas na figura 6.2 foram escolhidas para permitir que a simulação do engaste fosse o mais próximo possível da configuração ideal.



FIGURA 6.1 - Protótipo ensaiado.



FIGURA 6.2 - Dimensões do protótipo ensaiado.

### 6.2 - EXCITAÇÃO DA ESTRUTURA

A placa foi excitada utilizando-se um excitador eletromagnético. A vibração apresentada geralmente ocorre em várias direções. Entretanto, o movimento que se deseja estudar é aquele coincidente com a direção da força excitadora, usualmente chamada de direção principal de vibração. Se o excitador for rigidamente fixado à placa em todas as direções, o movimento vibratório devido às direções secundárias pode introduzir outras formas de excitação no sistema. Este problema pode ser minimizado se a força excitadora for transmitida para a estrutura através de uma haste esbelta, que pode ser construída de aço ou polímero (BRUEL & KJAER, 1987). Este dispositivo possui uma alta rigidez em sua direção axial e apresenta uma grande flexibilidade nas outras direções. Assim, o uso desta haste contribui para manter constante a direção da força de excitação e reduz o problema da presença de excitações secundárias, que podem alterar as características dinâmicas medidas. Neste trabalho, foi usada uma haste de aço de comprimento igual a 25 mm e diâmetro aproximado de 1,5 mm. A figura 6.3 mostra a configuração usada para a transmissão da força excitadora.



FIGURA 6.3 - Sistema para a transmissão da força excitadora.

Outro aspecto importante relacionado com o sistema de excitação é a fixação do excitador. Deve-se isolar o corpo do excitador afim de evitar que forças reativas provenientes da vibração do suporte do mesmo retornem para a placa. Neste caso, optou-se por manter o excitador suspenso através de molas flexíveis, oque contribui para minimizar a influência de excitações parasitas na vibração da placa. Por estar suspenso, o excitador foi montado em uma base de aço cuja função é aumentar a inércia do corpo do excitador proporcionando assim níveis adequados de excitação, principalmente nas frequências mais baixas. A figura 6.4 mostra o sistema de excitação usado.



FIGURA 6.4 - Sistema de excitação.

Embora tenham sido utilizadas outras formas de excitação, os resultados experimentais apresentados neste trabalho foram obtidos usando-se a excitação aleatória. O sinal de excitação foi obtido através do gerador de sinais do analisador de espectro usado no experimento. Este sinal foi amplificado, e posteriormente transmitido para o excitador. A figura 6.5 mostra o sinal de excitação para um intervalo de *1 s*.



FIGURA 6.5 - Sinal da excitação para o intervalo de 0 a 1s.

### 6.3 - AQUISIÇÃO E PROCESSAMENTO DE DADOS

A figura 6.6 mostra um esquema do sistema de aquisição e processamento de dados. A figura 6.7 mostra o sistema usado no ensaio. Os sinais correspondentes à força e à aceleração foram captados através de transdutores piezoelétricos. Foram usados respectivamente uma cabeça de impedância e um acelerômetro. A cabeça de impedância foi usada para captar o sinal da força aplicada em todas as medidas realizadas, e também para a obtenção das FRF de ponto. O acelerômetro foi usado na obtenção do sinal da aceleração das FRFs de transferência. A massa desses elementos



FIGURA 6,6 - Esquema do sistema de aquisição e processamento.



FIGURA 6.7 - Sistema de aquisição e processamento usado.

, <sup>1</sup>

exerce influência nos dados medidos. Por este razão, procurou-se selecionar tais elementos com o objetivo de minimizar esta influência. A figura 6.8 mostra como foi feita a fixação do acelerômetro na placa. A figura 6.9 mostra detalhes da fixação da cabeça de impedância à placa e à haste flexível.



FIGURA 6.8 - Detalhe da fixação do acelerômetro à placa.



FIGURA 6.9 - Detalhes da fixação da cabeça de impedância.

Os sinais correspondentes à força excitadora e à aceleração foram enviados aos amplificadores condicionadores e posteriormente ao analisador de espectro mostrado na figura 6.7.

As várias FRFs foram determinadas usando-se o estimador  $H_2(\omega)$ , que é dado por (BENDAT & PIERSOL, 1980)

$$H_{2}(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)}$$
(6.1)

onde

 $S_{xx}(\omega)$  = auto-espectro da resposta

 $S_{uc}(\omega)$  = espectro cruzado entre excitação e resposta.

Este estimador foi escolhido pois a FRF assim calculada apresenta um comportamento melhor na presença de ruído, principalmente em regiões próximas às ressonâncias (CAWLEY, 1984). As diversas FRFs determinadas foram submetidas ao processo de averaging afim de reduzir tanto o nível de ruído presente nos dados como também as possíveis não linearidades do sistema. Para cada FRF foi calculada a função coerência, cujo valor varia de 0 a 1. Uma coerência próxima de 1 mostra principalmente uma boa linearidade entre a excitação e a resposta. Nas regiões próximas às ressonâncias e anti-ressonâncias espera-se um valor baixo para a função coerência devido à características próprias destas frequências, discutidas anteriomente.

A aquisição de dados foi realizada usando-se a técnica de zoom afim de se obter uma boa definição da FRF nas faixas estudadas. Inicialmente foi feita uma aquisição de dados na faixa de 0 a 800 Hz. Depois disto, definiu-se uma faixa de frequência entre 0 e 200 Hz e a aquisição de dados foi realizada novamente usando-se agora o zoom. Este procedimento foi repetido para as faixas de 260 a 460 Hz e 390 a 590 Hz. Estas faixas de frequências foram definidas após a análise dos resultados experimentais obtidos num trabalho anterior (SELEGHIM JR, 1990).

Existen dois fenômenos relacionados com o processamento digital de dados que podem causar distorções nas FRF obtidas. Estes fenômenos são respectivamente o *aliasing* e o *leakeage*. O analisador de espectro usado nos ensaios possui filtros cuja função é minimizar o efeito de tais fenômenos. No caso específico do *leakage*, optou-se pela aquisição usando-se a janela de Hann no processo de *windowing*.

O analisador de espectro foi calibrado usando-se para tanto a sensibilidade dos transdutores piezoelétricos utilizados no ensaio, de acordo com a carta de calibração fornecida pelo fabricante (BRÜEL&KJAER, 1987). A seguir são mostradas algumas das especificações dos equipamentos usados no ensaio experimental.

i - Analisador de espectro BRÜEL & KJAER de dois canais tipo 2032.

*ii* - Controlador de excitação BRÜEL & KJAER tipo 1047 (*5 Hz a 10 KHz*).

*iii* - Excitador eletrodinâmico BRÜEL & KJAER tipo 4809 (*45 N*, *10 Hz* a *20 KHz*).

iv - Amplificador condicionador BRÜEL & KJAER tipo 2626.

v - Amplificador de potência BRÜEL & KJAER tipo 2712 (40 Hz a 10 KHz).

vi - Registrador gráfico BRÜEL & KJAER tipo 2308.

- vii Cabeça de impedância BRÜEL & KJAER tipo 8001 sensibilidade do acelerômetro: 3.12 pc/ms<sup>-2</sup> sensibilidade do transdutor de força: 323 pc/N massa do elemento: 31 g.
- *viii* Acelerômetro BRÜEL & KJAER tipo 4371 sensibilidade: *1,006* pc/ms<sup>-2</sup>

massa do elemento: 11 g

frequência natural: 48 KHz.

ix - Osciloscópio PANTEC tipo 5320 (25 MHz).

# CAPÍTULO 7

# RESULTADOS E CONCLUSÕES

Este capítulo apresenta os resultados da identificação de parâmetros modais obtidos com o método proposto. Inicialmente são mostrados resultados de identificação obtidos em simulações realizadas com um sistema discreto amortecido possuindo três graus de liberdade. O objetivo destas simulações é avaliar o desempenho do algorítmo de identificação em sistemas com acoplamento modal significativo. Em seguida, são mostrados os resultados alcançados para o ensaio experimental descrito no capítulo anterior.

São feitas comparações entre os resultados obtidos com o programa IDF1 e outros procedimentos. A partir destas comparações são tiradas conclusões sobre o método usado e sugeridos alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir deste método de identificação.

#### 7.1 RESULTADOS OBTIDOS

I - SIMULAÇÕES

O programa IDF1 foi inicialmente usado na identificação dos parâmetros modais do sistema mostrado na figura 7.1. As características espaciais, massa, rigidez e coeficiente de amortecimento, foram escolhidas de tal forma que as frequências naturais do sistema resultassem pouco acopladas em um primeiro caso e bastante acopladas num segundo. Isto foi feito variando-se as constantes elásticas, segundo a tabela T7.1, enquanto que as massas e os coeficientes de amortecimento não foram alterados. Seus valores são respectivamente iguais a

$$M_1 = 1,00 \text{ Kg}$$
  $M_2 = 0,50 \text{ Kg}$   $M_2 = 0,25 \text{ Kg}$ 

 $B_1 = 0,50$   $B_2 = 0,05$   $B_3 = 0,005$   $B_4 = 0,0005$ 



FIGURA 7.1 - Sistema discreto usado na simulação.

## TABELA T7.1

### Valores das constantes elásticas usados

nas simulações.

CASO	$K_1(N/m)$	K <sub>2</sub> (N/m)	K <sub>3</sub> (N/m)	$K_{4}(N/m)$
1	100	700	600	400
2	400	600	800	300

Na tabela T7.2 estão os resultados da identificação de parâmetros para os dois casos acima estudados. Os resultados das ajustagens de curvas para ambos os casos são mostrados nas figuras 7.2 e 7.3 (a e b).

### TABELA T7.2

Resultados da identificação para o sistema de três graus de liberdade

CASO	ω <sub>r</sub>		$\xi_{r(10^{-2})}$	
	exato	ident.	exato	ident.
	16,08	16,06	1,5520	1,5560
I	35,38	35,37	0,2165	0,2162
	80,48	80,56	0,2080	0,2078
II	24,36	24,23	1,8550	1,7940
	29,67	29,81	0,8880	0,8240
	87,86	87,89	0,1725	0,1727





a) Módulo



FIGURA 7.2 - Resultados da ajustaĝem para  $\alpha_{1\,1}^{}(\omega)$  (CASO 1)



100 80 aproximado 00 ЧZ exato 40 20 ф Д 0 -120 L 0 - 100 -20 -40 -60 -80

FIGURA 7.3 - Resultados da ajustagem para  $lpha_{1\,1}(\omega)$  (CASO 2)

a) Módulo



FIGURA 7.3 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{1\,1}^{}(\omega)$  (CASO 2)


#### II - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O ensaio experimental foi realizado em três faixas de frequências, cada uma delas contendo várias frequências naturais. Na primeira faixa de frequência, de C a 200 Hz, foram obtidos os parâmetros modais dos cinco primeiros modos de vibrar da placa. A figura 7.4 mostra os pontos onde foram medidas as FRF. Para todas as faixas de frequência estudadas, o ponto de excitação E foi mantido constante, variando-se apenas a posição do acelerômetro na determinação das FRF de transferência.



FIGURA 7.4 - Pontos de excitação e medida (0 a 200 Hz).

Para cada FRF foram identificadas as frequências naturais, os fatores de amortecimento modais e as constantes modais. Este último parâmetro modal foi identificado adotando-se uma distribuição de amortecimento não proporcional. Por esta

razão, os resultados obtidos para as constantes modais são dados na forma complexa

$$A_{r jk} = C_{jk} + i \left( \omega_{r jk} \right)$$
(7.1)

As tabelas T7.3 à T7.7 mostram os resultados da identificação para cada FRF medida. As ajustagens de curvas estão mostradas nas figuras 7.5 à 7.9.

TABELA T7.3

MODO	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D (10 <sup>-4</sup> )
1	20,476	4,571	0,939	2,270
2	47,199	1,677	1,363	3,656
3	121,381	1,218	4,350	8,509
4	159,250	1,540	0,530	6,286
5	173,253	0,873	3,857	4,348

Parâmetros modais para  $\alpha_{11}(\omega)$ 

	TABELA	T7.	4
--	--------	-----	---

MODO	$\omega_{r}$ (Hz)	$\xi_{r}(10^{-3})$	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r</sub> D <sub>jk</sub> (10 <sup>-3</sup> )
1	20,210	6,726	6,701	2,910
2	46,518	5,180	-8,905	-3,427
3	121,315	3,056	7,725	0,183
4	158,963	1,420	-3,171	1,652
5	173,414	0,481	-2,350	-1,319

Parâmetros modais para  $\alpha_{21}(\omega)$ 

#### TABELA T7.5

Parâmetros modais para  $\alpha_{_{\textbf{31}}}(\omega)$ 

MODO	$\omega_{r}$ (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r</sub> (10 <sup>-4</sup> )
1	20,331	4,955	5,142	2,660
2	46,955	1,820	-4,064	-1,045
3	121,160	1,320	4,656	-1,382
4	158,386	1,452	2,956	1,130
5	173,580	0,896	-2,782	-1,093

MODO	ω <sub>Γ</sub> (Hz)	$\xi_{r}(10^{-3})$	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r jk</sub> (10 <sup>-3</sup> )
1	20,475	4,961	2,419	1,533
2	47,060	1,145	-2,562	6,102
3	120,467	1,075	8,326	-1,175
4	158,321	1,381	1,710	2,070
5	172,789	0,967	-8,340	-0,954

Parâmetros modais para  $\alpha_{41}(\omega)$ 

TABELA T7.7

Parâmetros modais para  $\alpha_{51}(\omega)$ 

модо	ω <sub>Γ</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D (10 <sup>-4</sup> )
1	20,419	7,235	9,286	-3,465
2	47,118	2,051	-1,309	1,848
3	121,025	1,384	7,034	2,033
4	159,013	1,687	1,256	-2,371
5	173,125	0,976	-5,834	-0,178

Observando-se a coluna referente às constantes modais em cada tabela, nota-se que a parte imaginária deste parâmetro (constante  $D_{jk}$ ) possui ordem de grandeza pequena em relação à parte real (constante  $C_{jk}$ ). Por esta razão, a matriz modal é real e os elementos de cada um dos cinco modos de vibrar considerados na análise podem ser calculados a partir do coeficiente  $C_{jk}$  usando-se a seguinte expressão (EWINS, 1984)

$$C_{r jk} = \phi_{r j} \phi_{r k} \tag{7.2}$$

Iniciando com a FRF de ponto  $\alpha_{11}(\omega)$ , obtém-se os coeficientes da diagonal principal da matriz modal. Em seguida, usando-se estes elementos, calcula-se os outros elementos da matriz modal. Para a primeira faixa de frequência a matriz modal é a seguinte

$$\left[ \Phi \right] = \begin{bmatrix} 0,969 & 1,167 & 2,085 & 0,728 & 1,964 \\ 6,914 & -7,628 & 3,704 & -4,356 & -1,197 \\ 5,305 & -3,481 & 2,232 & 4,061 & -1,416 \\ 2,496 & -2,195 & 3,992 & 2,349 & -4,246 \\ 0,958 & 1,122 & 3,373 & 1,725 & 2,970 \end{bmatrix}$$



FIGURA 7.5 - Resultados da ajustaĝem para  $\alpha_{1\,1}^{}(\omega)$ 





FIGURA 7.5 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{11}(\omega)$ 





a) Módulo

FIGURA 7.6 - Resultados da ajustaĝem para  $\alpha_{2,1}^{}(\omega)$ 



b) Ângulo de fase



a) Módulo

FIGURA 7.7 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{3\,1}(\omega)$ 



FIGURA 7.7 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{3\,1}(\omega)$ 





149

a) Módulo



b) Angulo de fase



a) Módulo

FIGURA 7.9 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{5,1}(\omega)$ 





A segunda faixa de frequência analisada, de 260 Hz à 460 Hz, contém respectivamente a sexta, sétima, oitava e nona frequência natural. A figura 7.10 mostra o ponto de excitação e também os pontos onde foram medidas as FRF. As tabelas de T7.8 à T7.12 mostram os parâmetros modais identificados para cada FRF. As figuras 7.11 à 7.15 mostram os resultados das ajustagens de curvas.





MODO	ω <sub>Γ</sub> (Hz)	ξ <sub>Γ</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r</sub> (10 <sup>-4</sup> )
6	305,306	0,841	1,900	1,184
7	353,052	2,702	2,133	-6,270
8	371,614	0,277	0,740	3,360
9	405,708	1,127	2,338	1,724

Parâmetros modais para  $\alpha_{11}(\omega)$ 

### TABELA T7.9

# Parâmetros modais para $\alpha_{21}(\omega)$

модо	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	C r jk	D <sub>r jk</sub> (10 <sup>-5</sup> )
6	304,621	0,973	-0,317	-2,381
7	349,966	2,509	0,767	5,165
8	371,422	0,501	-0,234	1,572
9	405,386	1,180	0,144	0,717

MODO	$\omega_{r}$ (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	$D_{r jk}(10^{-4})$
6	301,584	0,906	-0,671	1,350
7	350,757	2,050	0,704	-3,059
8	370,187	0,650	0,468	1,146
9	405,188	1,301	0,141	0,563

Parâmetros modais para  $\alpha_{31}(\omega)$ 

### TABELA T7.11

# Parâmetros modais para $\alpha_{_{41}}(\omega)$

MODO	ω <sub>r</sub> (Hz)	$\xi_{r}(10^{-3})$	C r jk	r D <sub>jk</sub> (10 <sup>-4</sup> )
6	303,078	0,938	0,644	0,182
7	351,437	3,958	0,590	-0,912
8	370,070	0,578	-0,609	1,363
9	402,548	1,120	-0,624	-0,633

модо	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>Γ</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r jk</sub> (10 <sup>-4</sup> )
6	304,681	0,989	-0,177	0,236
7	351,576	2,357	-0,382	-1,728
8	370,647	0,609	0,323	0,902
9	403,066	1,350	0,656	1,150

Parâmetros modais para  $\alpha_{51}(\omega)$ 

Para esta faixa de frequência a matriz modal obtida foi a seguinte

$$\begin{bmatrix} 1,378 & 1,460 & 0,860 & 1,529 \\ -0,230 & 0,525 & -0,278 & 0,094 \\ -0,487 & 0,482 & 0,544 & 0,092 \\ 0,467 & 0,404 & -0,708 & -0,408 \\ -0,128 & 0,376 & 0,375 & 0,429 \end{bmatrix}$$

440 460 420 aproximado 400 380 360 ZH experimental 340 320 300 280 - 120 L 260 dВ 0 -20 -40 0.0 -80 - 100

a) Módulo

FIGURA 7.11 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{11}(\omega)$ 

b) Angulo de fase

FIGURA 7.11 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{1,1}^{}(\omega)$ 





a) Módulo

FIGURA 7.12 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{2\,1}^{}(\omega)$ 



FIGURA 7.12 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{2,1}(\omega)$ 





FIGURA 7,13 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{3\,1}(\omega)$ 

a) Módulo



b) Ângulo de fase



163

a) Módulo

b) Àngulo de fase

FIGURA 7.14 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{4,1}^{}(\omega)$ 





a) Módulo



b) Ångulo de fase

A última faixa de frequência analisada, de 390 Hz à 590 Hz, contém três frequências naturais. Neste caso, a 9 frequência natural foi novamente considerada. A figura 7.16 mostra os pontos onde foram tomadas as medidas. As tabelas T7.13 à T7.15 mostram os parâmetros modais identificados, enquanto que as figuras 7.17 à 7.19 mostram os resultados das ajustagens de curvas obtidas.



FIGURA 7.16 - Pontos de excitação e medida (390 a 590 Hz).

MODO	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	r <sup>C</sup> jk	D <sub>r jk</sub> (10 <sup>-4</sup> )
9	407,835	0,922	2,538	0,569
10	533,411	0,794	1,228	-4,073
11	549,786	1,630	4,020	2,341

Parâmetros modais para  $\alpha_{11}(\omega)$ 

TABELA T7.14

## Parâmetros modais para $\alpha_{21}(\omega)$

MODO	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	C r jk	$D_{r jk} (10^{-4})$
9	403,611	1,057	9,371	0,114
10	531,629	0,824	2,540	-2,705
11	544,803	1,341	-10,069	3,852

TABELA T7.15

Parâmetros modais para  $\alpha_{31}(\omega)$ 

модо	ω <sub>r</sub> (Hz)	ξ <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )	С г jk	D <sub>r</sub> (10 <sup>-4</sup> )
9	407,102	1,090	0,396	0,068
10	524,928	1,486	-0,678	-0,559
11	547,253	0,915	0,282	0,491

Para esta faixa de frequência, a matriz modal obtida com o programa IDF1 foi a seguinte

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1,593 & 1,108 & 2,005 \\ 5,881 & -2,292 & -5,021 \\ 0,248 & -0,612 & 0,140 \end{bmatrix}$$



FIGURA 7.17 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{11}(\omega)$ 





FIGURA 7.17 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{1\,1}^{}(\omega)$ 





FIGURA 7.18 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{21}(\omega)$ 





FIGURA 7.18 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{2,1}(\omega)$ 




a) Módulo

FIGURA 7.19 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{3\,1}(\omega)$ 



b) Ångulo de fase

FIGURA 7.19 - Resultados da ajustagem para  $\alpha_{31}(\omega)$ 

175

Em todas as FRF medidas as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais apresentaram pequenas variações. Afim de se obter um modelo modal único para a estrutura estudada, foi tomada a média aritmética destes parâmetros modais. A tabela T7.16 apresenta os valores médios para estes parâmetros modais e o correspondente desvio padrão para cada frequência natural e fator de amortecimento. A tabela T7.17 faz uma comparação entre as frequências naturais obtidas com o programa IDF1 e com outros métodos.

#### TABELA T7.16

модо	ω <sub>r</sub> (Hz)	S <sub>r</sub> (Hz)	$\xi_{r}(10^{-3})$	S <sub>r</sub> (10 <sup>-3</sup> )
1	20,382	0,111	5,730	1,200
2	46,970	0,269	2,375	1,603
3	121,070	0,363	1,611	0,816
4	158,786	0,411	1,496	0,114
5	173,327	0,307	0,840	0,204
6	303,854	1,511	0,929	0,058
7	351,357	1,143	2,715	0,734
8	370,788	0,703	0,523	0,148
9	404,365	1,474	0,121	0,104
10	529,989	4,472	1,034	0,391
11	547,281	2,492	1,295	0,360

# Valores médios para $\omega_{r} = \xi_{r}$

## TABELA T7.17

## Comparação das frequências naturais identificadas

com outros métodos

ω	ELEMENTOS	TEORICO	EXPER.	EXPER.	
т Г	FINITOS	SELEGHIM	SELEGHIM	ESTE TRAB.	IDF1
(Hz)	[*]	[**]	[**]		
1	19,65	19,60	19,60	20,40	20,38
2	48, 29	48,10	48,00	47,00	46,97
3	120,72	120,40	123,50	121,05	121,07
4	154,33	153,90	155,10	158,85	158,78
5	176,19	175,10	172,60	173,30	173,32
6	309,70	306,60	303,20	303,56	303,85
7	347,76	346,60	350,80	351,25	351,35
8	364,59	363,00	369,80	370,88	370,78
9	404,95	401,60	406,10	404,75	404,26
10	531,89	525,90	530,10	530,08	529,98
11				547, 25	547,28

[\*] Sistema CAEDS - IBM usando uma malha regular de 100 elementos retangulares.

[\*\*] Seleghim Jr, P.

7.2 - CONCLUSÕES

A partir dos resultados mostrados, pode-se concluir que o método de identificação de parâmetros modais proposto apresentou bons resultados. Nas simulações de sistemas, foram realizados testes com o programa em muitos casos. Em todos eles procurou-se aplicar o programa IDF1 à sistemas que apresentassem acoplamento modal significativo. Para todos estes sistemas obteve-se resultados bastante satisfatórios, o que é uma boa indicação da eficiência do algorítmo quando aplicado a sistemas que possuam modos acoplados.

Para os dados obtidos a partir do ensaio experimental pode-se inicialmente verificar a influência da fixação da placa nas frequências mais baixas. Esta influência está presente nos dados medidos conforme mostram as curvas das figuras 7.5 a 7.9. Foram realizadas algumas medidas com o excitador fixado à uma base e os resultados da identificação (não mostrados aqui) foram piores do que aqueles nos quais o excitador foi mantido suspenso. Isto mostra que o sistema de excitação usado apresentou um bom desempenho, principalmente nas baixas frequências onde deve-se garantir níveis adequados de excitação.

Segundo os resultados mostrados para a identificação na placa usada, o programa IDF1 também se mostrou eficiente. A faixa de frequência contendo as onze primeiras frequências naturais foi dividida em três partes, conforme já descrito. Esta escolha foi feita para reduzir o mal condicionamento numérico presente na resolução do sistema de equações lineares da rotina *FIT* descrita no capítulo 5.

A partir das tabelas de resultados parciais mostradas para todas as FRF medidas e identificadas, pode-se observar que as frequências naturais correspondentes a um mesmo modo de vibrar resultaram bastante próximas umas das outras. Isto também pode ser observado para os fatores de amortecimento modais. A partir destas comparações, é possível concluir que os resultados apresentados na tabela T7.16 apresentam consistência.

A partir da comparação entre as frequências naturais obtidas com o método proposto e outros métodos (tabela T7.17) incluindo o procedimento experimental pode-se verificar a proximidade destes valores.

#### 7.3 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Durante o desenvolvimento do algorítmo surgiram algumas idéias e sugestões que são deixadas aqui para estudos posteriores:

*i* - Implementação da rotina de ajustagem de curvas usando-se uma base de polinômios ortogonais. Isto favorece a utilização do método de ajustagem de curvas em faixas de frequências mais largas, contendo um número maior de frequências naturais.

ii - O método proposto neste trabalho processa uma FRF por vez. Sugere-se transformá-lo num método global de identificação que possa processar simultaneamente dados relativos à várias FRF. Os atuais recursos computacionais permitem a implementação deste melhoramento com certa facilidade.

*iii* - Desenvolvimento de uma interface entre o analisador espectral e o programa de identificação para que se possa transferir dados de forma mais rápida para a etapa de identificação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

 BENDAT, J. S. & PIERSOL, A. G.
 <u>Engineering applications of correlation and spectral</u> <u>analysis</u>.

John Wiley & sons, 1980.

2. BRAUN, S. & RAM, Y.

Time and frequency identification methods in over determined systems.

Mechanical Systems and Signal Processing, <u>1</u> (3): 245-257, 1987.

- 3. BROWN, D. L.; ALLEMANG, R. J.; ZIMMERMAN, R.; MERGEAY, M. Parameter estimation techniques for modal analysis. <u>S.A.E paper</u>, (790221): 828-846, 1979.
- 4. BROWN, D.; CARBON, G.; RAMSEY, K. Survey of excitation techniques applicable to the testing of automotive structures.

S.A.E. paper 770029, 1977).

 CAEDS - COMPUTER AIDED ENGINEERING DESIGN SYSTEM - USER'S GUIDE.

IBM - Software, 1989.

 $\gg$ 6. CAUGHEY, T. K. & O'KELLY, M. E. J.

Classical normal modes in damped linear dynamic systems.

Journal of Applied Mechanics, 25 (3): 343-364, 1965.

7. CAWLEY, P.

The reduction of Bias error in transfer functions estimates using FFT based analyzers.

Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in

Design, 106 (1): 29-35, 1984.

8. CLOUGH, R. & PENZIEN, J.
 <u>Dynamics of structures</u>.
 Mcgraw-hill ltd., 1975.

9. CRAIG, R. R. <u>Structural dynamics: an introduction to computer methods</u>. John Wiley & sons, 1981.

10. DALLY, J. W.; RILEY, W. F.; McCONNELL, K. G.

Intrumentation for Engineering Measurements.

John Wiley & sons Inc., 1984.

11. DEBLAUWE, F.; BROWN, D. L.; ALLEMANG, R. J.

The polyreference time domain technique.

Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, vol. I: 832-845, 1987.

12. DUAL CHANNEL SIGNAL ANALYZER - USER'S MANUAL. BRÜEL & KJAER, 1987.

13. EBERSBACH, P. & IRRETIER, H.

Some applications of modal parameter estimation techniques.

Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol. XI (1): 67-86, 1989.

14. EWINS, D. J.

Modal testing: theory and practice.

London, John Wiley & sons Inc., 1984.

15. EWINS, D. J. & GLEESON, P. T.

A method for modal identification of lightly damped structures.

Journal of Sound and Vibration, 24 (1): 57-79, 1982.

16. FRÖBERG, C. E.

Introduction to numerical analysis.

Addison-Wesley Publishing C., Inc., 1965.

17. GAUKROGER, D. R.; SKINGLE, C. W.; HERON, K. H. Numerical Analysis of vector response loci. Journal of Sound and Vibration, 29 (3): 341-353, 1973.

18. GOYDER, H. G. D.

Methods and applications of structural modeling from measured structural frequency response data. Journal of Sound and Vibration, 61 (2): 209-230, 1980.

19. HURTY, W. C. & RUBINSTEIN, M. F.

Dynamics of structures

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

20. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.

A time domain modal vibration test technique.

The Shock and Vibration Bulletin, 43: 21-37, 1973.

21. IBRAHIM, S. R.

Modal identification techniques: Assessment and comparisons. <u>Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Modal Analysis</u> Conference, vol. I: 831-839, 1985.

22. IBRAHIM, S. R. An upper Hessenberg sparse matriz algorithm for modal identification on minicomputers.

<u>Journal of Sound and Vibration</u>, <u>113</u> (1): 47-57, 1987. 23. IBRAHIM, S. R.

Modal confidence factor in vibration testing.

The Shock and Vibration Bulletin, vol. I: 65-75, 1978.

24. IBRAHIM, S. R.

Double least squares approach for use in structural modal identification.

AIAA Journal, 24 (3): 499-503, 1986.

25. KENNEDY, C. C. & PANCU, C. D. P.

Use of vectors in vibration measurements and analysis.

Journal of Aeronautical Sciences, 14 (11): 603-625, 1947.

26. KIRSHENBOIM, J.

Real vs complex normal mode shapes.

Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, vol. II: 1594-1599, 1987.

27. LEURIDAN, J.; LIPKENS, J.; VAN DER AUWERAER H.; LEMBREGTS, F. Global modal parameter estimation methods: an assessment of time versus frequency domain implementation. <u>Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis</u>,

vol. II: 1-9, 1985.

28. LEVY, E. C. 🤍

Complex curve fiting.

IRE Trans. Autom. Control, AC-4: 37-43, 1959.

29. MEIROVITCH, L.

Analytical Methods in Vibrations.

Collier-Macmillan limited, london, 1967.

30. MEIROVITCH, L.

Computation Methods in Structural Dynamics.

Sijthoff & Noordhoff, 1980.

31. MACBAIN, J. C.; KIELB, R. E.; LEISSA, A. W.

Vibration of twisted cantilevered plates - Experimental investigation.

oK

Trans. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 107: 187-196, 1985.

32. MERGEAY, M.

Multi degree of freedon parameter estimation methods for modal analysis.

Annals of the CIRP, 31 (1): 269-273, 1982.

33. MIRAMAND, N.; BILLAUD, J. F.; LELEUX, F.; KERNEVEZ, J. P. Identification os structural modal parameters by dynamic tests at a single point.

The Shock and Vibration Bulletin, 46 (5): 197-212, 1976.

34. NATKE, H. G.

Identification of structures: measurement, excitation, time series and modal analysis.

Laboratörio de Dinámica de Sistemas Mecánicos e Estruturas,

I. T. Un. Federal do Espirito Santo, 1987.

35. NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P.

Vibration Damping.

John Wiley & sons, 1985.

36. NEWLAND, D. E.

Mechanical Vibration Analysis and Computation.

Longman Scientific & Technical, 1989.

37. OLSEN, N.

Excitation functions for structural frequency response measurements.

Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference, vol. I: 894-902, 1984.

38. RADES, M.

Modal analysis using frequency response data.

The Shock and Vibration Digest, 1986.

39. RAMSEY, K. A.

Experimental modal analysis, structural modifications and FEM analysis on a Desk-top computer.

Sound and Vibration, 17 (2): 19-27, 1983.

40. RICHARDSON, M. H. & FORMENTI, D. L.

Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials.

Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Modal Analysis Conference, vol. I: 167-181, 1982.

41. SANATHANAN, C. K. & KOERNER, J.  $\mathbb{O}^{\times}$ 

Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials.

IEEE Trans. Autom. Control, AC-8: 56-58, 1963.

42. SELEGHIM JR., P.

Análise dinâmica de uma placa *cantilever* pelo método da superposição.

Dissertação de Mestrado, EESC - USP, São Carlos, 1990.

43. SHIH, C. Y.; TSUEI, Y. G.; ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L.

A frequency domain global parameter estimation method for multiple reference frequency response measurements.

Mechanical Systems and Signal Processing, 2 (4): 349-365, 1988.

44. SMITH, K. E.

An evaluation of a least squares time domain parameter identification method for free response measurement. 2nd International Modal Analysis Conference, 1984. 45. SNOEYS, R.; ROESEMS, D.; VANDEURZEN, U.; VANHONACKER, P. Survey of modal analysis applications.

Annals of the C.I.R.P, 28 (2): 497-510, 1979.

46. STROUD, R. C.

Excitation, measurement and analysis methods for modal testing.

Sound and Vibration, 21 (8): 12-27, 1987.

47. VAKAKIS, A. F. & CAUGHEY, T. K.

A technique for modal identification of interfering modes.

Journal of Sound and Vibration, 146 (3): 361-380, 1991.

48. VOLD, H.; KUNDRAT, J.; ROCKLIN, G. T.; RUSSELL, R. A multi-input modal estimaiton algorithm for minicomputers. <u>S.A.E. Transactions</u>, vol. 91, s.1: 815-821, 1982.
49. ZHANG, L.; KANDA, H.; LEMBREGTS, F.

Some applications of frequency domain polyreference modal parameter identification method.

Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, vol. II: 1237-1245, 1986.

#### BIBILOGRAFIA CONSULTADA

 BLARICUM, M. L. & MITRA, R. Problems and solutions associated with Prony's method for processing transient data. <u>IEEE Transactions on Antennas and Propagation</u>, <u>26</u> (1):1978
 CARRASCOSA, L. I.; BUSTURIA, J. M.; GIMENEZ, J. G.

Global experimental modal analysis. A comparison of different methods. <u>Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Modal Analysis</u> Conference, vol. I: 311-321, 1985.

3. CHUNG, K. R. & LEE, C. W.

An efficient method for conpensating truncated higher modes in structural dynamics modification.

Proc. Instn. Mech. Engrs, vol. 200 (C1): 41-48, 1986.

4. CRAIG JR, R. R.& SU, Y.-W.T.

On multiple shaker resonance testing.

AIAA Journal, 12 (7): 924-931, 1974.

- 5. CRANDALL, S. H. The hysteretic damping model in vibration theory. Proc. Instn Mech. Engrs., vol. 205: 23-28, 1991.
- 6. ELLIOTT, K. B. & MITCHELL, L. D.

The improved frequency response function and its effect on modal circle.

Journal of Applied Mechanics, 51 (3): 657-663, 1984.

7. EWINS, D. J.

On how receptances enable dynamic behaviour prediction in structures.

Proc. Instn Mech. Engrs., vol. 205: 29-30, 1991.

8. EWINS, D. J.

Estimation of peak resonant amplitudes.

Journal of Sound and Vibration, 43 (4): 595-605, 1975.

9. EYKHOFF, P. <u>System identification. Parameter and state estimation</u>. John Wiley & Sons, Bristol 1974.

10. FILLOD, R.; PIRANDA, J.; BONNECASE, D.

Taking non linearities into account in modal analysis by curve fitting of transfer functions.

Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Modal Analysis Conference, vol. I: 88-95, 1985.

11. FÜLLEKRUG, U.

Survey of parameter estimation methods in experimental modal analisys.

Journal of the Soc. of Env. Engineering, 31-34, 1988

12. GAUKROGER, D. R.; SKINGLE, C. W.; HERON, K. H.

The processing of response data to obtain modal frequencies and damping ratios.

Journal of Sound and Vibration, 35 (4): 559-571, 1974.

13. HALLAUER, W. L. & STAFFORD, J. F.

On the distribuiton of shaker forces in multiple-shaker modal testing.

The Shock and Vibration Bulletin, <u>48</u> (1): 49-63, 1978.

14. HE, J. & EWINS, D. J.

Compatibility of measured and predicted vibration modes in model improvement studies.

AIAA Journal, 29 (5): 798-803, 1991.

15. HOLLKAMP, J. J. & BATILL, S. M.

Automated parameter identification and order reduction for discrete time series models.

AIAA Journal, 29 (1): 96-103, 1991.

16. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.

The experimental determination of vibration parameters from time responses.

The Shock and Vibration Bulletin, 46: 187-196, 1976.

17. IBRAHIM, S. R. & MIKULCIK, E. C.

A method for the direct identification of vibration parameters from the free responses.

The Shock and Vibration Bulletin, 47: 183-198, 1977.

18. JUANG, J.-N. & SUZUKI, H.

An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification.

Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 110 (1): 24-29, 1988.

19. KANO, H.

An identification method of multiinput, multioutput linear dynamical systems for the experimental modal analysis of mechanical structures.

Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, <u>111</u> (2): 146-152, 1989.

20. KIM, K.-J. & SIM, C.-G.

A new curve fitting algorithm for modal parameter estimation. <u>Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Modal Analysis</u> <u>Conference</u>, vol. I: 133-139, 1987.

#### 21. LAMONTIA, M. A.

On the determination and use of residual flexibilities, inertia restraints and rigidy-body modes. Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Modal Analysis

Conference, vol. I: 153-159, 1982.

22. LEURIDAN, J. M.; ALLEMANG, R.J.; BROWN, D. L.

Time domain parameter identification methods for linear modal analisys: a unifying approach.

Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design, 108: 1-8, 1986.

23. LIN, P. L. & WU, Y. C.

Identification of multi-input multi-output linear systems from frequency response data.

Journal of Dynamic System, Measurement and Control, <u>104</u> (1): 58-64, 1982.

24. MACE, B. R.

The effects of transducer inertia on beam vibration measurements.

Journal of Sound and Vibration, 145 (3): 365-379, 1991.

25. MINAS, C. & INMAN, D. J.

Identification of a nonproporcional damping matrix from incomplete modal information.

Journal of Vibration and Acoustics, 113 (2): 219-224.

26. NEWLAND, D. E.

On the modal analysis of non-conservative linear systems. Journal of Sound and Vibration, 112 (1): 69-96, 1987.

27. OOKUMA, M. & NAGAMATSU, A.

Experimental identification of a mechanical structure with

characteristics matrices.

JSME International Journal, 30 (264): 970-975, 1987.

28. PAPPA, R. S. & IBRAHIM, S. R.

A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm.

The Shock and Vibration Bulletin, 51 (3): 43-57, 1981.

29. PRONY, R.

Essai Expérimental et Analytique.

J. l'Ecole Polytechnique, vol. 1 N. 2, 1795.

30. RADES, M.

Parameter identification of a structure with combined coulomb and hysteretic damping.

Revue Romaine des Sciences Techniques, Serie de Mêcanique appliquêe, 27 (2): 299-308, 1982.

31. SHIN, Y. C.; EMAN, K. F.; WU, S. M.

Experimental complex modal analysis of machine tool structures.

Journal of Engineering for Industry, <u>111</u> (2): 116-124, 1989. 32. SMITH, W. R.

Least squares time domain method for simultaneous identification of vibration parameters from multiple free response records.

Proceedings of 22nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta: 194-201, April 1981.

33. STROUD, R. C.; SMITH, S.; HAMMA, G. A. MODALAB: A new system for structural dynamic testing. The Shock and Vibration Bulletin, 46 (5): 153-174, 1976. 34. 'T MANNETJE, J. J.

Transfer-function identification using a complex curve-fitting technique.

Journal of Mechanical Engineering Science, <u>15</u> (5): 339-345, 1973.

35. VAN DER AUWERAER, H.; SAS, P.;VANHERCK, P.; SNOEYS, R. Experimental modal analysis with stepped-sine excitation. <u>Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Modal Analysis</u> <u>Conference</u>, vol. I: 572-580, 1986.

36. VAROTO, P. S. & MUCHERONI, M. F.

Identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Trabalho submetido ao XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, XI COBEM, 1991.

37. YOSHIMURA, T. & NAGAMATSU, A.

Modal parameter estimation with multi-reference curve fitting.

JSME International Journal, 30 (261): 476-481, 1987.

38. WANG, Z. & FANG, T.

A time domain method for identifying modal parameters.

Journal of Applied Mechanics, 53 (1): 28-32, 1986.

39. WANG, S.; SATO, H.; O-HORI, M.

New approaches to the modal analysis for machine tool structure.

Journal of Engineering for Industry, <u>106</u> (1): 40-47, 1984. 40. WHITFIELD, A. H.

Transfer function synthesis using frequency response data. International Journal of Control, 43 (5): 1413-1426, 1986.

## 41. ZAVERI, K.

C

h

No. Con

1

Modal analysis of large structures. Multiple exciter systems.

Brüel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1985.