UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO – MÉTODO ITD

Fabricio Tadeu Paziani

Orientador: Prof. Dr. Mario F. Mucheroni

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

SÃO CARLOS

MAIO DE 2002

Para Florivaldo e Carmen,

para Andreia Garcia

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Mario F. Mucheroni pela orientação, pelos ensinamentos transmitidos, pela amizade e compreensão que viabilizaram a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Benedito Di Giacomo pelo apoio proporcionado ao desenvolvimento das atividades relacionadas ao programa de mestrado no Laboratório de Metrologia.

Ao Dr. Roberto Hideaki Tsunaki pelas valorosas discussões que contribuíram de forma definitiva na conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo Varoto pela disponibilização dos equipamentos e das dependências do Laboratório de Dinâmica e pelas oportunas sugestões conferidas.

Aos companheiros do Laboratório de Metrologia José Cláudio, Renata, Alessandro, Rosenda, Alexandre, Márcia, Vagner, Andréa, Laurita, Tércio, Eraldo, Rita, Marcela, Brunno, Rosana, Denise, Fabrício e Aguinaldo pela amizade desenvolvida ao longo dos últimos anos.

Aos funcionários das dependências do LAMAFE Luiz Carlos Neves, José Carlos Risardi, Regina Célia Regiani, José Carlos Botelho, Antônio de Oliveira e Adão Santo Bolzan pela presteza com a qual sempre fui atendido em minhas solicitações.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida.

SUMÁRIO

Lista de figuras **iv**

Lista de tabelas **vi**

Lista de acrônimos **vii**

Lista de símbolos **ix**

Resumo **xi**

Abstract **xii**

1 – Introdução **1**

1.1. Objetivo 4

1.2. Descrição dos capítulos 4

2 – Análise modal experimental **6**

2.1. Introdução 6

2.2. Métodos de identificação modal 9

2.2.1. Métodos de identificação no domínio da freqüência 12

2.2.2. Métodos de identificação no domínio do tempo 15

3 - Método de Ibrahim no Domínio do Tempo e índices de confiança **28**

3.1 . Método de Ibrahim do Domínio do Tempo 29

3.3 . Fator de confiança modal (MCF) 37

3.3 . Colinearidade de Fase Modal Ponderada (MPCW) 43

4 - Identificação de parâmetros modais através do método ITD **46**

4.1 . Introdução 46

4.2 . A proposta do trabalho 47

4.3 . A metodologia 48

5 - Procedimentos experimentais 51

5.1. Introdução 51

5.2. A excitação do tipo impulsiva 54

5.3. Descrição estrutura de teste 56

5.4. O equipamento 59

5.5. O ensaio de impacto 61

5.6. Implementação computacional 65

6 - Resultados 74

6.1. Dados de resposta 74

6.2. Identificação dos parâmetros modais 81

6.3. Resultado final 83

7 - Conclusões e sugestões para trabalhos futuros 99

Referências bibliográficas 104

Apêndice A 108

Apêndice B 112

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fases da análise modal teórica (a) e experimental (b) 07

Figura 2.2 – Classificação dos métodos de identificação 12

Figura 5.1 - Impulso real (a) e densidade espectral (b) 54

Figura 5.2 - Comparação da utilização do martelo com ponteiras diferentes: (a) impulsos e (b) densidades espectrais 55

Figura 5.3 – Vista geral da montagem do experimento 57

Figura 5.4 – Pontos de medida e ponto de excitação 58

Figura 5.5 – Ponto de excitação e acelerômetro sobre um ponto de medida 59

Figura 5.6 – Diagrama de blocos da geração de FRFs no analisador de sinais 64

Figura 5.7 – Partes real (a) e imaginária (b); FRF reconstruída (c) 66

Figura 5.8 – (a) FRF representada com a porção conjugada complexa e (b) Função de Resposta ao Impulso 67

Figura 5.9 – Fluxograma do algoritmo GENIRF 68

Figura 5.10 – Fluxograma do algoritmo IMMAQ 69

Figura 5.11 – Fluxograma do algoritmo PLOMO 72

Figura 6.1 – Funções de resposta em freqüência – pontos 01 (a) e 35 (b) 75

Figura 6.2 – Funções de resposta em freqüência – pontos 51 (a) e 70 (b) 76

Figura 6.3 – Diagramas de fase - pontos 01 (a) e 35 (b) 77

Figura 6.4 – Diagramas de fase - pontos 51 (a) e 70 (b) 78

Figura 6.5 – Respostas ao impulso - pontos 01 (a) e 35 (b) 79

Figura 6.6 – Respostas ao impulso - pontos 51 (a) e 70 (b) 80

Figura 6.7 – Modo mal identificado, f=682 Hz para L=218 e k=10 82

Figura 6.8 – 1º modo - 21,7 Hz 85

Figura 6.9 – 2º modo – 45,8 Hz 85

Figura 6.10 – 3º modo – 121,4 Hz 86

Figura 6.11 – 4º modo – 158,5 Hz 86

Figura 6.12 – 5º modo – 172,9 Hz 87

Figura 6.13 – 6º modo – 305,9 Hz 87

Figura 6.14 – 7º modo – 354,5 Hz 88

Figura 6.15 – 8º modo – 368,1 Hz 88

Figura 6.16 – 9º modo – 406,5 Hz 89

Figura 6.17 – 10º modo – 532,4 Hz 89

Figura 6.18 – 11º modo – 548,7 Hz 90

Figura 6.19 – 12º modo – 685,5 Hz 90

Figura 6.20 – 13º modo – 725,8 Hz 91

Figura 6.21 – 14º modo – 738,2 Hz 91

Figura 6.22 – 15º modo – 794,7 Hz 92

Figura 6.23 – 16º modo – 871,5 Hz 92

Figura 6.24 – 17º modo – 894,8 Hz 93

Figura 6.25 – 18º modo – 1123,0 Hz 93

Figura 6.26 – 19º modo – 1155 Hz 94

Figura 6.27 – 20º modo – 1153,1 Hz 94

Figura 6.28 – 21º modo – 1169,0 Hz 95

Figura 6.29 – 22º modo – 1208,6 Hz 95

Figura 6.30 – 23º modo – 1320,1 Hz 96

Figura 6.31 – 24º modo – 1350,1 Hz 96

Figura 6.32 – 25º modo – 1494,1 Hz 97

Figura 6.33 – 26º modo – 1500,7 Hz 97

Figura 6.34 – 27º modo – 1577,9 Hz 98

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Equipamentos utilizados 61

Tabela 6.1 – Valores utilizados nas combinações sistematizadas: L (a) e k (b) 81

Tabela 6.2 – Resultado final da identificação 84

LISTA DE ACRÔNIMOS

ARMA	"Auto Regressive Moving-Average", Modelo Auto-regressivo de Média Móvel
CE	"Complex Exponential", Método da Exponencial Complexa
DLS	"Double Least Squares", Mínimos Quadrados Duplos
DSPI	"Direct System Parameter Identification", Identificação Direta de Parâmetros de Sistemas
EMA	"Experimental Modal Analysis", Análise Modal Experimental
ERA	"Eigensystem Realization Algorithm", Algoritmo de Realização de Sistemas
FFT	"Fast Fourier Transform", Transformada Rápida de Fourier
GPIB	"General Purpose Interface Bus"
GRFP	"Global Rational Fraction Polynomial", Fração Racional Polinomial Global
IFFT	"Inverse Fast Fourier Transform", Transformada Inversa de Fourier
IRF	"Impulse Response Function", Função de Resposta ao Impulso
ITD	"Ibrahim Time Domain", Método de Ibrahim no Domínio do Tempo
LS	"Least Squares", Mínimos Quadrados

LSCE "Least Squares Complex Exponential", Exponencial Complexa por Mínimos Quadrados

MCF "Modal Confidence Factor", Fator de Confiança Modal

MDOF "Multiple Degree-Of-Freedom", Múltiplos Graus de Liberdade

MIMO "Multiple Input-Multiple Output", Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

MISO "Multiple Input-Single Output", Múltiplas Entradas e Única Saída

MPCW "Modal Phase Collinearity-Weighted", Colinearidade de Fase Modal Ponderada

MSCCF "Mode-Shape Coherence and Confidence Factor", Fator de Confiança e Coerência da Forma Modal

PRCE "Polyreference Complex Exponential", Exponencial Complexa de Poli-referência

RFP "Rational Fraction Polynomial", Fração Racional Polinomial

SDOF "Single Degree-Of-Freedom", Único Grau de Liberdade

SFD "Simultaneous Frequancy Domain", Método Simultâneo no Domínio da Freqüência

SIMO "Single Input –Multiple Output", Única Entrada e Múltiplas Saídas

SISO "Single Input-Single Output", Única Entrada e Única Saída

LISTA DE SÍMBOLOS

$[\ ]^{-1}$	Matriz inversa
$[\ ]^{T}$	Matriz transposta
f_n	Freqüência natural do modo *n*, em Hz
f_{nD}	Freqüência natural amortecida do modo *n*, em Hz
i	Número imaginário, $i = \sqrt{-1}$
i	Índice (número de linhas de uma matriz, número de pontos de medida em uma estrutura)
k	Atraso entre as metades superior e inferior das matrizes de resposta
np	Número de elementos que compõem a resposta medida em cada ponto sobre a estrutura
q	Número de pontos de medição de respostas na estrutura
r	Índice (raízes da equação característica de um sistema)
s_r	r-ésimo autovalor complexo ou raiz da equação característica de um sistema
t_j	Instante de tempo genérico *t* após *j* intervalos de tempo Δt
$x_i(t_j)$	Resposta livre em um ponto *i*, no instante de tempo t_j
$\overline{x}_i(t_j)$	Resposta livre em um ponto *i*, no instante de tempo $t_j + \Delta t$
L	Número de elementos dos *q* vetores de resposta do sistema
N	Número de graus de liberdade do modelo
S_{xxi}	Variância da parte real do modo identificado
S_{xyi}	Covariância das partes real e imaginária do modo identificado
S_{yyi}	Variância da parte imaginária do modo identificado
$\lambda_{1,2\ i}$	Autovalores do modo *i* da matriz de variância-covariância

λ_r	Raiz característica *r* do sistema
ω_r	Freqüência natural do modo *r* em rad/s
$\overline{\omega}_r$	Freqüência natural amortecida do modo *r* em rad/s
ζ	Fator de amortecimento do modo *r*
Δt	Intervalo incremental de tempo
ψ_i^I	Parte imaginária do modo *i*
ψ_i^R	Parte real do modo *i*
$\{\psi\}_r$	Autovetor associado à raiz *r* da equação característica de um sistema
$\{\overline{\psi}\}_{Exp}$	Deflexão modal esperada após $k.\Delta t$ instantes de tempo
[x]	Matriz que contém todos os dados experimentais
$[A_S]$	Matriz do sistema
[C]	Matriz de amortecimento
[K]	Matriz de rigidez
[M]	Matriz de massa
[X]	Matriz das respostas medidas sobre o sistema
$[X]_{t_j}$	Metade superior da matriz de resposta
$[X]_{k \cdot t_j}$	Metade inferior da matriz de resposta
$[\overline{X}]$	Matriz das respostas medidas sobre o sistema após um intervalo de tempo Δt com relação a [X]
$[\Lambda]$	Matriz de funções exponenciais dos autovalores do sistema
$[\Psi]$	Matriz dos autovetores do sistema

RESUMO

O método de Ibrahim no Domínio do Tempo (ITD) é considerado um dos métodos clássicos de identificação de parâmetros modais de estruturas. As maiores vantagens da sua aplicação residem na identificação de modos muito próximos com boa precisão, em uma faixa relativamente larga de freqüências, além do número reduzido de equipamentos requeridos para a realização de ensaios experimentais. Neste trabalho foi realizada uma aplicação do método ITD no processo de identificação das freqüências naturais, dos fatores de amortecimento e dos modos de vibrar de uma placa quadrada de alumínio, engastada em um dos lados e livre nos demais. Este modelo experimental apresenta alta densidade modal e a análise foi realizada em uma faixa de freqüências de 0 a 1600 Hz através de um ensaio de impacto. Para produzir um conjunto consistente de resultados é necessário utilizar um modelo sobredeterminado para o sistema em estudo. O resultado desta análise, porém, apresenta modos computacionais que devem ser eliminados. Para tanto, foram utilizados dois índices de confiança para qualificar os resultados, sendo estes o Fator de Confiança Modal (MCF) e a Colinearidade de Fase Modal Ponderada (MPCW). Os modos que apresentaram melhores índices de confiança são considerados o resultado final do processo de identificação.

Palavras-chave: Método de Ibrahim no Domínio do Tempo, análise modal, vibrações mecânicas.

ABSTRACT

The Ibrahim Time Domain (ITD) method is considered one of the classical modal parameter identification techniques. The greatest advantages of the ITD application consist of the precise identification of closely spaced modes within a wide range of frequencies and the small amount of equipment required to accomplish experimental testing. In this work, the ITD method was applied in the process of identification of natural frequencies, damping factors and mode shapes of a cantilever aluminium plate. High modal density was detected on the experimental model and the analysis was performed on a frequency range from 0 to 1600 Hz by means of impulse testing. However, an oversized model of the test structure must be used, so that a consistent set of results can be achieved. The results, nevertheless, present computational modes that must be removed from the model. Two confidence factors were used to qualify the results, namely the Modal Confidence Factor (MCF) and the Modal Phase Collinearity - Weighted (MPCW). The modes that presented higher confidence factor values were considered as the final result of the identification process.

Keywords: Ibrahim Time Domain method, modal analysis, mechanical vibration.

Capítulo 1

Introdução

As vibrações mecânicas constituem um fenômeno que atua sobre todos os corpos. Máquinas, veículos ou quaisquer estruturas tanto podem ser fontes de vibração quanto estarem submetidas a excitações externas. A busca pelo entendimento dos mecanismos de interação das estruturas com as solicitações dinâmicas atuantes tem como objetivo providenciar informação a respeito do desempenho, assim como da condição de funcionamento ou de utilização das estruturas.

A competitividade por maiores mercados, não só estabelecida, mas também estimulada pela globalização das relações comerciais entre os países provoca a necessidade de um aumento da qualidade dos produtos, por parte dos fabricantes, de forma a satisfazer as exigências dos centros consumidores.

A industrialização de produtos de qualidade envolve uma série de determinações e normalizações que especificam condições de operação ou utilização destes produtos. Nesta direção, a análise dinâmica das estruturas apresenta-se como um poderoso critério de qualificação de projetos, tão importante quanto a análise estática clássica.

Para a determinação das características dinâmicas de uma dada estrutura, duas vertentes podem ser adotadas. A primeira, denominada *Análise Modal Teórica*, utiliza métodos analíticos e numéricos para estimar as características dinâmicas da estrutura, sendo obtidos os parâmetros espaciais, ou seja, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Posteriormente, são obtidos os parâmetros modais, ou seja as freqüências naturais, fatores de amortecimento e as formas de vibrar.

Uma desvantagem desta abordagem é a dificuldade em promover a descrição adequada do comportamento dinâmico do sistema com um número suficiente de graus de liberdade.

O segundo procedimento, que utiliza dados provenientes de medições sobre a estrutura, é denominado *Análise Modal Experimental*. A partir dos dados experimentais são obtidos os parâmetros modais e posteriormente são extraídos os parâmetros espaciais. Normalmente, este processo corresponde a um ajuste de curvas aos dados experimentais, e procede-se a determinação dos parâmetros modais.

A investigação do comportamento dinâmico de estruturas, quando realizada somente através da análise modal teórica, é restrita. A formulação do modelo matemático implica no estabelecimento de hipóteses simplificadoras, que limita o processo de análise e produz resultados imprecisos. Desta forma, a análise

experimental faz-se necessária tanto para realizar uma comparação com os resultados fornecidos pela análise teórica quanto para a correção dos modelos teóricos.

Nas últimas décadas, houve um forte desenvolvimento de técnicas experimentais. Um dos métodos de maior credibilidade é o *Método de Ibrahim do Domínio do Tempo*, que foi empregado na elaboração deste trabalho. Tal método utiliza dados de resposta no tempo para realizar o cálculo dos parâmetros modais. Os resultados fornecidos pelo método podem ser qualificados por índices de confiança modal, que selecionam as melhores estimativas.

A análise modal experimental tornou-se uma ferramenta indispensável no projeto e desenvolvimento de estruturas, assim como na avaliação do seu comportamento dinâmico. A vasta gama de facilidades proporcionada pelos avanços no campo da análise modal experimental transformaram a identificação das propriedades dinâmicas de sistemas mecânicos em um passo fundamental para a verificação e melhoramento das técnicas de modelamento analítico.

O planejamento e a execução de ensaios modais é plenamente justificável quando há necessidade de submeter um determinado produto ou estrutura a normas de produção ou quando é necessário verificar a precisão de seu modelo matemático.

Outras razões que agem como estímulo à realização de testes modais são a elaboração de programas de predição de defeitos em elementos mecânicos ou estruturais, o controle de qualidade e o desenvolvimento de ferramentas computacionais para utilização em análise de elementos finitos.

1.1. Objetivo

Com o objetivo de apresentar uma colaboração no campo das aplicações de técnicas experimentais para análise modal, este trabalho empreende um estudo do método de Ibrahim no domínio do tempo conforme será utilizado nos programas computacionais, assim como enumerar suas vantagens e suas possíveis limitações. Além da apresentação do método, sua aplicação sobre dados experimentais medidos sobre uma placa engastada será evidenciada. Os aspectos relacionados à montagem experimental, aquisição e tratamento dos dados serão discutidos. Os resultados obtidos da aplicação do método de Ibrahim serão então qualificados através de índices de confiança. O primeiro índice de confiança a ser utilizado é o *Fator de Confiança Modal*. O segundo índice utilizado é a *Colinearidade de Fase Modal Ponderada*. A utilização de um segundo índice de confiança visa a complementação do esforço realizado para qualificar os resultados fornecidos através do método de Ibrahim.

1.2. Descrição dos capítulos

O capítulo 2 deste trabalho trata dos aspectos gerais da Análise Modal Experimental, apresenta de maneira breve algumas técnicas de análise modal no domínio da freqüência e descreve de forma mais aprofundada os métodos de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo.

No capítulo 3 podem ser encontrados o desenvolvimento teórico formal e toda a representação matemática do Método de Ibrahim no

Domínio do Tempo, assim como a definição dos índices de confiança MCF e MPCW. A notação empregada tende à mais moderna e representativa o possível.

O capítulo 4 registra a proposta da utilização do método ITD associado à qualificação através de índices de confiança;

Os procedimentos experimentais, assim como a implementação computacional são descritos no capítulo 5.

Os resultados obtidos do processo de identificação são apresentados no capítulo 6.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões alcançadas neste trabalho, discussões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Análise modal experimental

2.1. Introdução

A realização de ensaios para a investigação de fenômenos relacionados à vibração em estruturas tornou-se extremamente comum nas últimas décadas como poderosa ferramenta para modelamento de sistemas. Refere-se a esse campo de atuação como *Análise Modal Experimental* (abreviado por EMA, da expressão inglesa "Experimental Modal Analysis") Um entendimento profundo da EMA requer o domínio de várias áreas, incluindo instrumentação, processamento de sinais, avaliação de parâmetros e análise de vibração.

O processo de determinação de um modelo matemático de um sistema a partir de medidas de grandezas de entrada e saída é chamado de *Teoria de Identificação de Sistemas*. Tal teoria é relacionada à resolução do chamado *problema inverso*. O problema inverso refere-se à determinação das matrizes [M], [C] e [K] a partir dos dados medidos (deslocamento, velocidade ou aceleração) [INMAN, 1989].

A maior parte dos métodos de análise modal não permite a completa determinação das matrizes dos parâmetros físicos [M], [C] e [K]. Pode-se, entretanto, determinar as freqüências naturais, os fatores de amortecimento modal e as formas dos modos de vibrar.

A análise dinâmica de estruturas é realizada em diferentes estágios dependendo da metodologia empregada. A figura 2.1(a) mostra as três fases da análise teórica de vibração enquanto a figura 2.1(b) mostra as três fases da EMA.

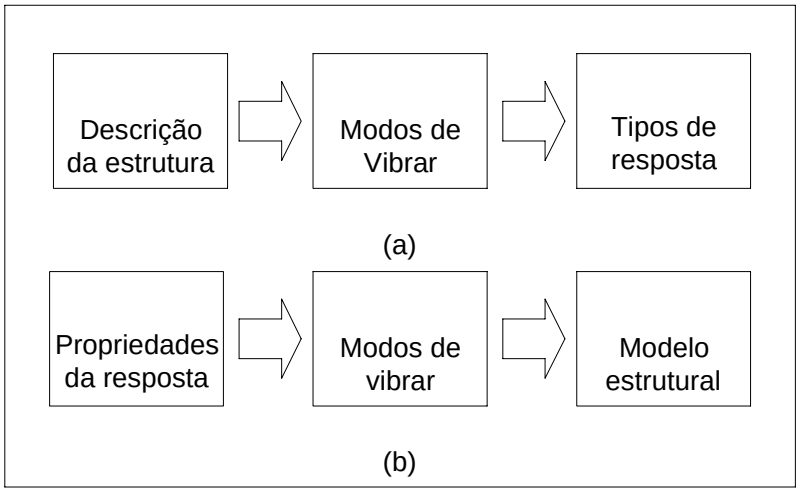


Figura 2.1 – Fases da análise modal teórica (a) e experimental (b)

A análise teórica tem início com a descrição física da estrutura, através das propriedades de massa, rigidez e amortecimento. A isto se refere como *modelo espacial*. Em seguida, é realizada a análise modal teórica do modelo espacial, que leva à descrição do comportamento da estrutura como um conjunto de modos de vibrar, o *modelo modal*.

Este modelo é definido como um conjunto de *freqüências naturais*, com correspondentes *modos de vibrar* e *fatores de amortecimento modal*. É importante salientar que esta solução descreve sempre as várias maneiras nas quais uma estrutura é capaz de vibrar naturalmente, sem forças externas de excitação. Estes modos são chamados de *modos normais* ou *naturais* de uma estrutura.

O terceiro estágio e alvo de maior interesse é a análise de como exatamente a estrutura irá vibrar sob determinadas condições de excitação e, especialmente, com quais amplitudes. Naturalmente, a resposta do sistema não irá depender somente das propriedades inerentes à estrutura, mas também da origem e intensidade das forças de excitação. É conveniente apresentar uma análise das respostas da estrutura a uma forma de excitação padronizada e descrevê-la como o *modelo de resposta*. Desta forma, o modelo de resposta consistirá de um conjunto de *funções de resposta em freqüência*, (FRF) definidas em uma faixa aplicável de freqüência.

Nos dias de hoje, a EMA reúne e integra uma vasta gama de áreas de aplicação, dentre as quais estão a análise modal não-linear, os métodos de ensaios experimentais, as técnicas de subestruturação, entre outras. Entretanto, uma das áreas mais desenvolvidas é a identificação das propriedades dinâmicas de uma estrutura a partir de sinais medidos. As últimas três décadas testemunharam o desenvolvimento de uma grande quantidade de

métodos e técnicas de identificação, assim como o surgimento de programas computacionais comerciais capazes de fornecer bons resultados em micro-computadores portáteis. Grande parte dos méritos por tal nível de desenvolvimento deve ser reservada à implementação computacional da *transformada rápida de Fourier* (FFT) e à evolução do aparato instrumental, como analisadores espectrais, computadores e equipamentos de modo geral, que permitem a aquisição e tratamento de grande quantidade de dados.

A seguir é apresentada uma classificação dos métodos de identificação de parâmetros modais, juntamente com a descrição das características de cada método [MAIA, 1997].

2.2. Métodos de identificação modal

O objetivo dos métodos de determinação de parâmetros modais é estimar as características dinâmicas de um sistema através da medição de dados de entrada e/ou saída. O forte desenvolvimento de métodos de identificação de parâmetros modais ocorrido a partir do início da década de 1970 foi resultado das facilidades proporcionadas pela implementação de um algoritmo que realizasse eficientemente o cálculo computacional de séries de Fourier [COOLEY e TUKEY, 1965].

Os métodos criados desde então diferem entre si em respeito ao tipo de dados de entrada, ao tipo de processamento matemático dos dados e ao tipo de saída (ou resposta) produzida.

O primeiro aspecto a ser considerado na classificação de métodos de identificação é o domínio no qual são numericamente tratados os dados. Entre os métodos mais comuns, há os métodos

aplicados no domínio do tempo e no domínio da freqüência. Há também os métodos de sintonia senoidal que, embora considerados uma categoria à parte , não deixam de ser métodos no domínio da freqüência.

Métodos anteriores eram desenvolvidos no domínio da freqüência, mas problemas associados com resolução em freqüência, *leakage* e alta densidade espectral levaram os pesquisadores a considerar os métodos no domínio do tempo como uma alternativa promissora.

Métodos no domínio do tempo geralmente requerem o cálculo da *função de resposta ao impulso* (IRF). A IRF pode ser obtida através da *transformada inversa de Fourier* (IFFT) da função resposta em freqüência, obtida a partir do ensaio da estrutura de teste. Desta forma, o *leakage* ainda constitui um problema, visto que os dados são originários do domínio da freqüência. Para contornar o problema, pode ser tomada diretamente a série temporal, tanto da reposta livre quanto da resposta ao impulso.

Os métodos de identificação modal, independentemente do domínio sob o qual são definidos, são classificados como métodos diretos e métodos indiretos. Os métodos diretos, menos comuns, são aqueles que identificam o modelo espacial, ou seja, as matrizes [M], [C] e [K]. Os métodos indiretos são aqueles que identificam o modelo modal dado pelos parâmetros globais, que são as freqüências naturais e os fatores de amortecimento modal e pelos parâmetros denominados locais a partir dos quais são determinados os modos de vibrar.

Uma divisão posterior leva em consideração o número de modos que podem ser analisados. Dentro deste aspecto, há métodos de análise de um grau de liberdade (em inglês, SDOF) e de múltiplos

graus de liberdade (MDOF). No domínio do tempo, há somente métodos de MDOF, enquanto que métodos indiretos no domínio da freqüência podem tanto ser SDOF quanto MDOF. Os métodos diretos na freqüência podem ser MDOF, apenas.

Quando é realizado o ensaio de uma estrutura com a finalidade de adquirir dados para análise, é muito comum que estes dados sejam apresentados na forma de FRFs. A FRF relaciona a resposta do sistema (dados de saída) pela entrada fornecida (força excitadora). Se os dados de resposta forem compostos de medidas de aceleração, a FRF é chamada de *acelerância*. No caso de medidas de velocidade e deslocamento, a FRF é chamada, respectivamente, de *mobilidade* e *receptância*. Qualquer seja a resposta, a FRF é uma grandeza complexa e portanto apresenta magnitude e ângulo de fase.

Alguns métodos de análise modal aplicam-se a apenas uma FRF de cada vez. Estes métodos são conhecidos como métodos de *única entrada e única saída*, ou SISO (do inglês *single-input-single-output*). Outros métodos permitem que várias FRFs sejam analisadas simultaneamente, sendo as respostas tomadas em vários pontos da estrutura, porém com a excitação realizada em um único ponto. São os chamados métodos *globais*, ou métodos de *única entrada e múltipla saída*, ou SIMO. Esta categoria de métodos de identificação leva em consideração o fato que as freqüências naturais e os fatores de amortecimento, ao menos teoricamente, não variam de FRF para FRF, pois são propriedades globais da estrutura. Desta forma, seria possível obter um conjunto consistente destas propriedades através do processamento de várias FRFs ao mesmo tempo. Este procedimento realiza automaticamente a média das pequenas variações nas propriedades modais, o que necessariamente ocorre quando é realizada a análise de uma FRF de cada vez e, em princípio,

é preferível à realização da média dos resultados de várias análises individuais.

Finalmente, há métodos capazes de processar todas as FRFs ao mesmo tempo, de vários pontos de excitação e captação. Tais métodos são normalmente conhecidos como métodos de *poli-referência*, ou métodos de *múltipla entrada e múltipla saída* (MIMO). Situações de *múltipla entrada e única saída* (MISO) são possíveis, porém incomuns.

A figura abaixo apresenta de maneira esquemática a classificação dos métodos de identificação [MAIA, 1997].

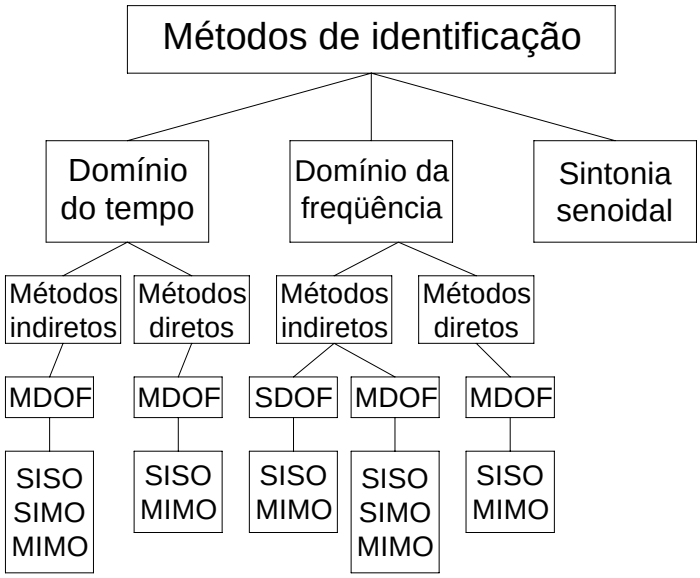


Figura 2.2 – Classificação dos métodos de identificação

2.2.1. Métodos de identificação no domínio da freqüência

Este tópico tem como objetivo fornecer uma visão rápida de como foi realizado o desenvolvimento de alguns métodos de identificação de parâmetros modais no domínio da freqüência. Tal exposição faz-se necessária para contrapor pontos de vista em relação aos métodos no domínio do tempo (especialmente o Método de Ibrahim), mostrados posteriormente neste capítulo.

O mais simples método de identificação no domínio da freqüência é o método conhecido como *Peak Amplitude*. As freqüências naturais são tomadas da observação direta dos picos dos gráficos da magnitude da FRF. Os fatores de amortecimento são calculados a partir da agudeza dos picos e os modos são tomados das razões das amplitudes em vários pontos da estrutura.

Dois outros métodos no domínio da freqüência são o *Quadrature Response* e o *Maximum Quadrature Component*. O primeiro método localiza as freqüências naturais nos pontos onde a componente em fase da resposta (parte real) é zero. A isto corresponde uma diferença de fase igual a 90º entre a excitação e a resposta. O segundo método considera que as freqüências naturais ocorrem nos pontos onde a parte imaginária da resposta apresenta um máximo ou um mínimo. Este componente é defasado 90º da excitação.

O método de *Kennedy-Pancu* utiliza o plano complexo para representar as partes real e imaginária da resposta. Em torno de cada freqüência natural, a curva aproxima-se de um círculo e a freqüência natural está localizada no ponto onde a taxa de variação do comprimento do arco com relação à freqüência atinge um valor máximo. A aplicação deste método requer que sejam assumidas as hipóteses de baixos níveis de amortecimento e que os modos sejam reais, em vez de complexos. O aprimoramento posterior deste método estabeleceu técnicas mais eficientes para a determinação dos

parâmetros modais de sistemas com amortecimento não-proporcional. Este aprimoramento tornou o método conhecido como *Circle Fitting*.

O método da *Fração Racional Polinomial* (RFP) é um método SISO, sendo dos mais populares e utilizados métodos MDOF no domínio da freqüência, inclusive em pacotes comerciais de programas para análise modal. Neste método, a formulação da FRF é expressa na forma de frações racionais, em vez da forma em frações parciais. A função erro, para ser minimizada, é estabelecida de tal maneira que o sistema de equações resultante é linear, não requerendo, assim, estimativas iniciais dos parâmetros modais. Dado que o sistema de equações lineares resultante envolve matrizes mal-condicionadas, a forma em frações racionais da FRF é expressa em termos de polinômios ortogonais.

O método da *Fração Racional Polinomial Global* (GRFP) é uma extensão do método RFP. Este método permite analisar um conjunto de FRFs utilizando uma única referência de entrada sendo, portanto, um método SIMO [RICHARDSON e FORMENTI, 1985].

Quando são realizadas várias medidas de FRFs sobre uma determinada estrutura, é teoricamente esperado que sejam obtidos resultados idênticos para as freqüências naturais e fatores de amortecimento, pois são propriedades características da estrutura. Entretanto, diferentes propriedades globais são encontradas. O uso de um conjunto de FRFs para calcular as propriedades globais implica em uma especificação de um número maior de equações em relação ao número de incógnitas, sendo necessário abordar o problema por meio de *mínimos quadrados* (LS). Uma vez conhecidas as propriedades globais, as propriedades locais podem ser calculadas, permitindo a determinação das características do sistema analisado.

Um método que identifica diretamente os parâmetros modais é o *Simultaneous Frequancy Domain* (SFD). O SFD é um método SIMO que objetiva compor as matrizes do sistema com base nas respostas adquiridas em diversos pontos sobre a estrutura. A partir destas matrizes, os autovalores e autovetores podem ser calculados. Dado o fato que a faixa de freqüências da análise apresenta N modos, apenas N graus de liberdade dentre os p medidos são efetivos na caracterização da resposta do sistema. Estes N graus de liberdade são chamados de graus de liberdade *independentes*, enquanto os restantes (p-N) formam o conjunto de graus de liberdade *dependentes*. Ambos os conjuntos são relacionados por uma transformação linear, possibilitando o cálculo dos modos complexos, assim como dos reais.

A capacidade que o método apresenta de avaliar as matrizes do sistema e, conseqüentemente, os modos reais é uma grande vantagem. Os principais problemas estão relacionados com a escolha adequada do conjunto independente de coordenadas de medição, visto que escolhas diferentes levam a resultados diferentes [MAIA, 1997].

2.2.2. Métodos de identificação no domínio do tempo

Os métodos de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo, ao longo das últimas décadas alcançaram um alto nível de desenvolvimento a partir da necessidade de contornar algumas limitações observadas com a aplicação de métodos no domínio da freqüência. É convencionalmente aceito que tais métodos podem apresentar inacuracidades ao lidar com altos fatores de amortecimento e com modos muito próximos.

Desde a introdução dos métodos no domínio do tempo na área da análise modal de estruturas por Ibrahim [IBRAHIM e MIKULCIK, 1973], a popularidade dos métodos no domínio do tempo cresceu substancialmente. A análise no tempo focalizou, nos anos subseqüentes, o aumento da acuracidade, melhor resolução em freqüência, ensaios mais rápidos e estabilidade numérica dos algoritmos [LIANG e INMAN, 1987].

O método da *Exponencial Complexa* (CE) constitui uma abordagem local, proporcionando a determinação das freqüências naturais e dos fatores de amortecimento a partir da aquisição de dados em um ponto de medida apenas. A idéia fundamental na qual este método foi baseado remonta ao ano de 1795 e foi desenvolvida por Prony. O método de ajuste de uma série de exponenciais complexas a uma série temporal envolve a determinação das raízes de um polinômio.

Posteriormente foi proposto o método LSCE, na verdade uma extensão SIMO do método CE para aplicação global [BROWN et al]. Esta nova abordagem emprega solução por mínimos quadrados e permite o processamento simultâneo de várias IRFs obtidas através da excitação da estrutura em um ponto e da aquisição dos dados em vários pontos sobre a estrutura. Com este procedimento, um conjunto de parâmetros modais é obtido, suplantando variações nos resultados relativos à aplicação do método CE em diferentes IRFs.

Um estudo comparativo dos resultados fornecidos através dos métodos CE e ITD foi realizado por Paziani et al., [PAZIANI et al., 2001]. O referido artigo pode ser encontrado no apêndice B desta dissertação.

O *Método de Ibrahim no Domínio do Tempo* (ITD) é considerado um dos métodos clássicos de identificação de parâmetros modais.

A primeira versão do método que apenas posteriormente seria conhecido como o Método de Ibrahim no Domínio do Tempo foi proposta como uma alternativa aos métodos no domínio da freqüência, então mais empregados. Os autores, Ibrahim e Mikulcik, consideram um modelo linear de parâmetros concentrados como representação do sistema utilizado na apresentação da teoria [IBRAHIM e MIKULCIK, 1973]. Todo o desenvolvimento subseqüente foi realizado na forma de variáveis de estado.

Este método inicial requeria o conhecimento de valores de aceleração, velocidade e deslocamento, que assim satisfaziam as condições do equacionamento (em variáveis de estado) de maneira apropriada. Além disto, o número de pontos de medida deveria, teoricamente, ser igual ao número de modos presentes na estrutura. Os dados captados na estrutura eram empregados na forma de resposta livre.

Desta maneira, foi possível determinar a matriz do sistema e a resolução de um autoproblema envolvendo esta matriz levou à determinação de autovalores e autovetores. Os autovalores da matriz do sistema fornecem informações sobre as freqüências naturais e os fatores de amortecimento, enquanto que os autovetores fornecem os modos complexos de vibrar.

Em um segundo trabalho os autores descrevem tópicos adicionais da teoria relacionada ao método de identificação e incluem aplicações práticas. Neste trabalho, tanto quanto no trabalho anterior, dados de resposta transiente são empregados na resolução de equações diferenciais de um modelo de parâmetros concentrados do sistema [IBRAHIM e MIKULCIK, 1976]. A análise matemática posterior proporciona a determinação dos parâmetros modais.

Um dos aspectos fundamentais relacionados ao método ITD é a necessidade da aquisição simultânea dos dados de resposta. As respostas em todos os pontos de medida devem ser conhecidas nos mesmos instantes de tempo. Da grandeza medida podem ser obtidas as outras através de derivação e/ou integração numérica. Estas transformações nos dados de resposta seriam eliminadas com a segunda versão do método de Ibrahim.

Em um trabalho subseqüente, Ibrahim e Mikulcik propõem a utilização direta da resposta livre da estrutura no processo de identificação [IBRAHIM e MIKULCIK, 1977]. Desta forma, o modelo matemático da estrutura não é desenvolvido, ou seja, equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema não são empregadas na resolução do problema. Esta metodologia constitui a segunda versão do método ITD.

A grande vantagem deste método com relação ao anterior é a utilização de uma só grandeza durante todo o processo, de modo a evitar a integração e/ou diferenciação numérica dos dados de resposta. Os dados de aceleração, velocidade ou deslocamento podem ser empregados, contrariamente à primeira versão, que estritamente requeria a utilização das três grandezas.

Essencialmente, porém, o processo de identificação reside na resolução de um autoproblema, como na versão inicial do método. Do autoproblema são determinados os autovalores e autovetores, que são relacionados aos parâmetros vibratórios da estrutura. Os vetores modais são os *n* primeiro elementos dos autovetores calculados.

Ibrahim e Mikulcik enfatizam a consideração de um número de estações de medida na estrutura igual ao número de graus de liberdade do sistema hipotético (de parâmetros concentrados) com todos os modos excitados [IBRAHIM e MIKULCIK, 1977]. Esta

suposição implicaria o conhecimento prévio do número de graus de liberdade de uma estrutura antes da realização de testes, assim o número correto de pontos de medida poderia ser empregado. Em casos práticos, entretanto, esta informação não é disponível. Os autores consideram o uso de qualquer número de estações de medida e sugere a realização de testes compostos de várias medições, tomando duas estações por vez, de modo que uma sirva de referência para a posterior normalização dos dados de todas as demais respostas.

Duas maneiras de minimizar o efeito do ruído presente nos dados experimentais são indicadas. A primeira, a *minimização do erro por mínimos quadrados* é conseguida através da utilização de mais dados que o necessário e parâmetros com menor erro são encontrados. Em segundo lugar, é citado o uso de um *modelo matemático sobredeterminado,* no qual o número de graus de liberdade do modelo é maior que o número de modos a serem identificados. Este procedimento fornece um caminho de escape para o ruído e permite que os parâmetros modais sejam identificados com maior precisão.

Ainda em [IBRAHIM e MIKULCIK, 1977], resultados de aplicações experimentais foram apresentados. Resultados de ensaios sobre uma estrutura de uso aeroespacial mostraram que o método ITD é pouco sensível à presença de ruído durante o processo de medição.

O método ITD, entretanto, requeria que dentre todos os modos identificados, fossem selecionados os modos realmente representativos do comportamento do sistema, e, portanto, confiáveis. Visando o contorno destas limitações, Ibrahim propôs um índice de confiança que fornecesse meios de identificar os modos melhores identificados.

O *Fator de Confiança Modal* (MCF) é uma importante ferramenta para qualificar os resultados produzidos pelo método ITD. Em ensaios sobre estruturas razoavelmente complexas, um certo nível de incerteza surge em razão de não-linearidades presentes na estrutura, alto acoplamento entre modos pouco espaçados ou ainda alto nível de ruído contido nos dados. Somado a estes fatores, o método ITD identifica modos não-estruturais, pois utiliza um modelo sobredeterminado da estrutura. Logo, era necessário investigar quantos ou quais dentre todos os modos identificados eram modos realmente estruturais.

O MCF é um índice norteado pela comparação da deflexão apresentada por um determinado modo em dois instantes diferentes de tempo. Em outras palavras, o MCF considera a evolução temporal de um modo em dois instantes distintos de tempo. Se tal evolução é consistente, o modo em questão apresenta um determinado valor de MCF que indica que o modo tem natureza estrutural. Caso contrário, o modo é meramente computacional.

A justificativa para a aplicação do MFC é, portanto, diferenciar modos presentes na estrutura de modos gerados por ruído presente nos dados de resposta.

Para o cálculo do índice são empregadas *estações transformadas*, artifício que permite aumentar o número aparente de pontos de medição sem a utilização de dados de resposta adicionais [IBRAHIM, 1978].

Outros índices de confiança foram desenvolvidos para quantificar numericamente a qualidade ou precisão dos parâmetros modais identificados. A *Colinearidade de Fase Modal Ponderada*, (MPCW) quantifica a consistência espacial dos resultados do processo de identificação [PAPPA et al, 1993]. Os autores apresentaram

resultados positivos da aplicação deste índice no processo de identificação de parâmetros modais de equipamentos de uso aeroespacial.

O método ITD, desde sua popularização no campo da EMA, passou e ainda passa por melhorias e constante aprimoramento.

O próprio Ibrahim propôs uma técnica que permite extrair as respostas livres de uma estrutura a partir das respostas aleatórias devido a uma ou mais entradas conhecidas ou não [IBRAHIM, 1977].

Para tanto, um algoritmo foi desenvolvido e testado em estruturas de aplicação aeroespacial. Os sinais de resposta aleatória foram medidos e processados através da técnica do *decremento aleatório* de modo a fornecerem as respostas livres. Estas respostas foram empregadas nos cálculos dos parâmetros modais das estruturas ensaiadas, através do método ITD.

A idéia fundamental na qual a técnica do decremento aleatório é baseada consiste no fato da resposta aleatória de uma estrutura devido a uma excitação aleatória ser composta de uma porção determinística e de uma porção aleatória de média zero.

A técnica desenvolvida por Ibrahim consistiu em tomar a média de um número suficiente de amostras da mesma resposta aleatória, de modo que a parte aleatória fosse progressivamente cancelada, salientando a parte determinística. Esta abordagem mostrou-se de grande valia nos casos em que não há muito conhecimento a respeito dos dados de excitação aleatória sobre as estruturas de teste.

Outra contribuição para o aperfeiçoamento do método ITD, também apresentada por Ibrahim, consiste em realizar o cálculo dos modos reais (ou *normais*) a partir dos modos complexos e trata dos

aspectos relacionados ao tipo de amortecimento presente em uma estrutura [IBRAHIM, 1983].

Em ensaios modais, assim como na fase de análise de dados, é freqüentemente assumido que os níveis de amortecimento nas estruturas sob teste sejam muito baixos ou que a matriz de amortecimento seja proporcional à matriz de massa ou à matriz de rigidez. Estas suposições têm origem no fato dos modos identificados serem os modos complexos de uma estrutura, e reflete uma tentativa de aproximação entre estes e os modos reais. Esta hipótese é aceitável para estruturas simples, mas pode induzir a grandes erros na identificação de parâmetros modais em estruturas complexas.

Segundo Ibrahim, a medição de ângulo de fase no domínio da freqüência pode estar sujeita a erros, principalmente nos casos em que há alta densidade modal. Isto pode ocorrer, segundo o autor, devido às rápidas mudanças de fase ao redor das freqüências ressonantes e a limitações à resolução em freqüência.

Ibrahim e Pappa apresentaram resultados de ensaios mais complexos, com grande número de pontos de medida. Ensaios anteriores, com o objetivo de validarem a técnica de identificação no domínio do tempo, eram normalmente menos ambiciosos e realizados com números reduzidos de pontos de medida [IBRAHIM e PAPPA, 1982].

Uma vasta experimentação foi realizada em torno de uma estrutura chamada LDEF. Esta estrutura tem por função servir de suporte para experimentos conduzidos na órbita terrestre com o objetivo de avaliar o efeito da longa exposição de diversos ítens ao ambiente espacial. Nos ensaios foram utilizados 142 pontos de medida de aceleração e dois pontos de excitação (o objeto não foi excitado em dois pontos simultaneamente). Os autores obtiveram as

respostas ao impulso das funções de resposta em freqüência por meio da transformada inversa de Fourier e estes dados foram empregados no processo de identificação.

Segundo Ibrahim e Pappa, a sobredeterminação proporcionou maior precisão nos resultados do processo de identificação quando há presença de ruído e permitiu a identificação de modos com baixos níveis de resposta [IBRAHIM e PAPPA, 1982].

De modo geral, o processo de identificação de parâmetros modais fornece subsídios para uma série de aplicações, como a predição de respostas, projeto de sistemas de controle, modelamento dinâmico, detecção de falhas incipientes, entre outros. Em algumas aplicações, a simples identificação das freqüências ressonantes já pode ser suficiente. Outros casos, porém, exigem uma estimativa precisa de todos os parâmetros modais do sistema, sobre uma vasta gama de freqüências.

Quando a análise modal é utilizada na detecção de falhas incipientes e no monitoramento de integridade estrutural, é necessário que a técnica de identificação apresente alta capacidade de repetidamente identificar com acuracidade os parâmetros modais do sistema de modo a discernir quaisquer modificações.

Para reduzir o efeito do ruído presente nos dados medidos sobre os resultados da identificação, muitos algoritmos possuem implementada uma rotina do tipo mínimos quadrados para a resolução de um sistema sobredeterminado.

Ibrahim observa, entretanto, que a abordagem através de mínimos quadrados no processo de computação da matriz de autovalores e autovetores é suscetível a erros sistemáticos, ou erros de *bias*, nos fatores de amortecimento modais. Estes erros de bias são inerentes à abordagem por mínimos quadrados e este fato serviu

de motivação para a busca de estimativas mais confiáveis [IBRAHIM, 1986].

A abordagem sugerida é baseada na dupla computação da solução por mínimos quadrados de forma que os erros de bias sejam opostos um ao outro, proporcionando sua redução através de médias sucessivas entre as duas soluções. Como a técnica dos mínimos quadrados é aplicada duas vezes, a abordagem é conhecida como *mínimos quadrados duplos* (DLS).

Uma comparação entre as aplicações do método ITD com soluções por mínimos quadrados simples e mínimos quadrados duplos pode ser encontrada em (SHAO el al, 1985). Os autores aplicaram o método ITD no processo de identificação de parâmetros modais de um chassi de automóvel. Os resultados mais precisos foram produzidos através da resolução por mínimos quadrados duplos.

Um estudo comparativo entre as abordagens LS e DLS pode ser encontrado em [HOLLKAMP e BATILL, 1989]. Os autores constataram a superioridade da aplicação de mínimos quadrados duplos sobre mínimos quadrados simples.

Outras contribuições ao método ITD foram propostas ao longo dos anos. Pode ser citado o *Mode-shape Coherence and Confidence Factor* (MSCCF) [GAO e RANDALL, 2000]. Os autores desenvolveram este índice de confiança para aplicação com o método ITD, capaz de diferenciar modos estruturais de modos computacionais. Entretanto, o novo índice difere do MCF por compor as matrizes de resposta de maneira muito mais criteriosa.

Os dados de resposta são distribuídos nas matrizes de modo conveniente. Um determinado valor da resposta é distanciado dos valores adjacentes de um número preestabelecido de intervalos de

tempo, enquanto que na teoria relacionada ao MCF é especificado apenas um intervalo de tempo. Este intervalo encontra-se entre os dados das respostas dos pontos de medida sobre a estrutura e as respostas das estações transformadas.

Outro método de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo do tipo MIMO é o *Algoritmo de Realização de Sistemas* (ERA). Este método visa a obtenção de modelos em variáveis de estado a partir de dados experimentais. Este procedimento, chamado de *realização de sistemas*, requer a construção de um modelo da mínima ordem que caracterize dinamicamente o sistema, a partir dos dados experimentais.

O algoritmo é constituído de dois estágios. No primeiro, é formulado um modelo de ordem mínima representativo do sistema. Na segunda fase, são obtidos os parâmetros modais do sistema através da resolução de um autoproblema envolvendo a matriz do sistema realizado. O trabalho de Tsunaki apresenta uma revisão dos fundamentos teóricos relacionados ao método ERA, discorridos em uma linguagem matemática moderna e eficiente.

O método da *Exponencial Complexa de Poli-referência* (PRCE) constitui uma extensão do método LSCE para uma versão MIMO, isto é, requer informações tanto de vários pontos de resposta quanto de vários pontos de excitação sobre a estrutura [VOLD et al, 1982].

As grandes vantagens deste método em relação aos métodos que o precederam historicamente (CE e LSCE) são o caráter geral e automático do método. De fato, quando são utilizados dados de apenas uma entrada, o método PRCE reduz-se ao método LSCE.

O PRCE é uma técnica que identifica os parâmetros modais em duas etapas. Em uma etapa inicial, as freqüências naturais amortecidas e os fatores de amortecimento são determinados

utilizando dados de IRF (o PRCE pode empregar também dados de resposta livre, mas sua formulação foi desenvolvida a partir da IRF). Em um segundo estágio, os resíduos (ou coeficientes modais) são calculados e, por conseqüência, os ângulos de fase e constantes modais [DEBLAUWE et al., 1987].

Segundo Maia, as maiores desvantagens do método PRCE são sua sensibilidade a não-linearidades e a diferenciação entre modos estruturais e modos computacionais [MAIA, 1997].

No Departamento de Engenharia Mecânica da EESC foram desenvolvidos vários trabalhos no campo da análise modal de estruturas.

Varoto propôs um método de identificação no domínio da freqüência para identificação simultânea de vários modos em uma faixa contendo várias freqüências naturais [VAROTO, 1991].

Porchia realizou uma comparação do desempenho de uma série de métodos de identificação de parâmetros modais no domínio da freqüência [PORCHIA, 1996].

Em outro trabalho realizado no mesmo departamento, Tsunaki implementou um processo automatizado de identificação de parâmetros modais utilizando o método ERA de modo a requerer mínima interação entre usuário e o programa computacional, além de permitir a utilização de equipamentos de baixo custo [TSUNAKI, 1999].

Muitos métodos são desenvolvidos segundo os mais diversos interesses, sendo que alguns requerem condições muito restritivas de aplicação. Como exemplo, pode ser citado o método do amortecimento zero [LIANG e INMAN, 1987]. O método sugere a aproximação de modos reais através dos modos complexos para,

entre várias razões, proporcionar maior sentido físico na interpretação do fenômeno vibratório.

Breves discussões a respeito de vários métodos de identificação e comparações entre suas formulações podem ser encontradas em [FÜLLEKRUG, 1987], [ZHANG e YAO, 1987], [ZHANG et al., 1987] e [FAHEY e PRATT, 1998].

Uma abordagem unificada dos métodos de identificação no domínio do tempo resultou no desenvolvimento do *Método Direto de Identificação de Parâmetros de Sistemas* (DSPI) [LEURIDAN et al., 1986]. Este método permite a análise simultânea de dados do tipo MIMO para estimar os parâmetros modais de estruturas, utilizando um modelo multi-variável na forma de uma equação não-homogênea de diferenças finitas.

Em [PI e MICKLEBOROUGH, 1989], é apresentado um método geral de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo. A técnica propõe a utilização de múltipla excitação e múltipla resposta no processo de identificação de uma estrutura representada por um modelo *ARMA* (*auto regressive moving-average*). O caráter geral do método permite que este seja reduzido aos métodos conhecidos LSCE, PRCE, ITD ou ao próprio modelo matemático do sistema.

Uma compilação que apresenta ótimo nível de detalhamento das formulações de uma infinidade de métodos, apresentados com notação matemática muito prática e coerente pode ser encontrada em [MAIA, 1997].

Capítulo 3

Método de Ibrahim no Domínio do Tempo e índices de confiança

Este capítulo tem como objetivo apresentar as bases teóricas da versão do método ITD empregada neste trabalho. Posteriormente, são apresentados os índices de confiança utilizados na qualificação dos resultados produzidos pelo método ITD.

Os tópicos são descritos de forma direta e objetiva. A notação utilizada na redação dos tópicos pretende estar em concordância com as obras atuais da mesma área de conhecimento.

3.1 . Método de Ibrahim no Domínio do Tempo

A determinação experimental das freqüências naturais e modos de vibrar de estruturas é, na maior parte das vezes, realizada através da obtenção de curvas de resposta em freqüência ou de um método no domínio da freqüência. Porém, a análise no domínio da freqüência torna-se limitada quando a estrutura sob inspeção apresenta freqüências naturais muito próximas e altos fatores de amortecimento, visto que os métodos que utilizam a resposta em freqüência não podem fornecer estes parâmetros com precisão. Estas limitações são originárias do fato de um modo interferir sobre o outro adjacente, o que é capaz de restringir a observação de modos (e, conseqüentemente, freqüências naturais) distintos de maneira individual.

A utilização direta da resposta no tempo, sem transformação para o domínio da freqüência, não requer suposições sobre interferência entre modos devido a altas taxas de amortecimento ou freqüências naturais muito próximas.

Uma versão inicial do Método ITD (Ibrahim Time Domain) foi desenvolvida para utilizar dados de resposta livre da estrutura de teste para a identificação dos parâmetros modais. [IBRAHIM e MIKULCIK, 1973]. Esta versão primordial visa a descrição do sistema na forma de variáveis de estado e requer o conhecimento das respostas de aceleração, velocidade e deslocamento, medidas na estrutura. Entretanto, se acelerômetros são empregados para a aquisição dos dados, os valores finais das velocidades e deslocamentos não são obtidos, pois dependem dos seus valores iniciais, que não são conhecidos. A integração numérica da resposta

de aceleração requer o conhecimento das velocidades e deslocamentos iniciais.

A versão aqui descrita do método ITD foi apresentada por IBRAHIM e MIKULCIK (1977) e busca identificar os parâmetros modais sem realizar transformações nos dados de resposta, que pode tanto ser adquirida na forma de deslocamento, velocidade ou aceleração.

O objetivo básico do método ITD é obter um conjunto único de parâmetros modais (freqüências naturais, fatores de amortecimento e formas dos modos) a partir de um conjunto de dados medidos de resposta livre em uma única análise. Isto significa processar todas as respostas de uma só vez. Outra característica do método é permitir o uso de quaisquer dados de vibração livre, não havendo necessidade do conhecimento de forças de excitação.

Para um sistema com N graus de liberdade, a resposta livre da estrutura em um ponto i e em um instante de tempo t_j é expressa como o somatório das respostas de cada modo, isoladamente:

$$x_i(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} \psi_{ir} e^{s_r t_j} \tag{3.1}$$

onde i representa a coordenada dos pontos da resposta e j representa o incremento de tempo no qual a resposta é medida; s_r é o r-ésimo autovalor complexo, ou raiz da equação característica do sistema. $\{\psi\}_r$ é o autovetor correspondente, sendo ψ_{ir} seu i-ésimo elemento. É assumido que o número total de graus de liberdade considerados no modelo seja igual a N. Este número não necessariamente deve ser igual ao número de graus de liberdade do sistema. É selecionado o

número de graus de liberdade necessários para representar os dados experimentais, o que pode ser feito com um número muito menor de pontos, pois a resposta está contida num intervalo de freqüências [EWINS, 1984].

Considerando o número de pontos de captação de respostas na estrutura igual a q e L instantes de tempo, a equação (3.1) pode ser reescrita:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \cdots & x_1(t_L) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \cdots & x_2(t_L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(t_1) & x_q(t_2) & \cdots & x_q(t_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1\,1} & \psi_{1\,2} & \cdots & \psi_{1\,2N} \\ \psi_{2\,1} & \psi_{2\,2} & \cdots & \psi_{2\,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{q\,1} & \psi_{q\,2} & \cdots & \psi_{q\,2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \cdots & e^{s_1 t_L} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \cdots & e^{s_2 t_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \cdots & e^{s_{2N} t_L} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ou, de maneira condensada,

$$[X]_{(q \times L)} = [\Psi]_{(q \times 2N)} [\Lambda]_{(2N \times L)} \tag{3.3}$$

onde:

$[X]$ é a matriz conhecida das respostas do sistema, obtida através da medição experimental;

$[\Psi]$ é a matriz dos autovetores, e é desconhecida;

$[\Lambda]$ é a matriz cujos elementos são funções exponenciais dos autovalores (desconhecidos) do sistema.

Considerando um segundo conjunto de pontos, contendo, assim como [*X*], um número de elementos igual a *L*, porém agora deslocados de um intervalo Δt;

$$x_i\left(t_j + \Delta t\right) = \sum_{r=1}^{2N} \psi_{ir} e^{s_r\left(t_j + \Delta t\right)} \tag{3.4}$$

A equação (3.4) pode ser rearranjada:

$$x_i\left(t_j + \Delta t\right) = \sum_{r=1}^{2N} \left(\psi_{ir}\ e^{s_r \Delta t}\right) e^{s_r t_j} \tag{3.5}$$

Os elementos da resposta deslocados de Δt são definidos como:

$$\overline{x}_i\left(t_j\right) = x_i\left(t_j + \Delta t\right) \quad ; \quad \overline{\psi}_{ir} = \psi_{ir}\ e^{s_r \Delta t} \tag{3.6}$$

O novo conjunto de pontos é então definido como $\left[\overline{X}\right]$:

$$\overline{x}_i\left(t_j\right) = \sum_{r=1}^{2N} \overline{\psi}_{ir}\ e^{s_r t_j} \tag{3.7}$$

Uma nova equação matricial é construída:

$$[\overline{X}]_{(q\times L)} = [\overline{\Psi}]_{(q\times 2N)}[\Lambda]_{(2N\times L)} \tag{3.8}$$

Se o número de estações de medidas *q* for admitido igual a *2N*, as matrizes $[\Psi]$ e $[\overline{\Psi}]$ são quadradas. Estas matrizes são intrinsecamente relacionadas, de modo que pode ser definida a *matriz do sistema*, $[A_S]$ a partir da equação:

$$[A_S]_{(q\times q)}[\Psi]_{(q\times 2N)} = [\overline{\Psi}]_{(q\times 2N)} \tag{3.9}$$

Pré-multiplicando (3.3) por $[A_S]$,

$$[A_S]_{(q\times q)}[X]_{(q\times L)} = [A_S]_{(q\times q)}[\Psi]_{(q\times 2N)}[\Lambda]_{(2N\times L)} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.9) em (3.10),

$$[A_S]_{(q\times q)}[X]_{(q\times L)} = [\overline{\Psi}]_{(q\times 2N)}[\Lambda]_{(2N\times L)} \tag{3.11}$$

e substituindo (3.8) em (3.11),

$$[A_S]_{(q\times q)}[X]_{(q\times L)} = [\overline{X}]_{(q\times L)} \tag{3.12}$$

Desta maneira, é possível calcular a matriz [A_S], visto que as matrizes da resposta do sistema, $[X]$ e $[\overline{X}]$ são conhecidas.

Freqüentemente, porém, o valor de q é tomado de forma a ser maior que $2N$, e as matrizes $[X]$ e $[\overline{X}]$ serão retangulares.

Neste caso, é aplicada a técnica da pseudo-inversa, que fornece uma solução na forma de mínimos quadrados para a matriz. Logo, [A_S] pode ser obtida tanto pós-multiplicando (3.12) por $[X]^T$ ou por $[\overline{X}]^T$.

A primeira situação, pós-multiplicando (3.12) por $[X]^T$ fornece:

$$[A_S] = \left([\overline{X}][X]^T\right)\left([X][X]^T\right)^{-1} \tag{3.13}$$

e a segunda situação, pós-multiplicando (3.12) por $[\overline{X}]^T$ fornece,

$$[A_S] = \left([\overline{X}][\overline{X}]^T\right)\left([X][\overline{X}]^T\right)^{-1} \tag{3.14}$$

Como existem duas expressões para fornecer a matriz $[A_S]$, a combinação das duas é preferível (mínimos quadrados duplos, ou DLS). A expressão final é:

$$[A_S] = \frac{1}{2}\left[\left([\overline{X}][X]^T\right)\left([X][X]^T\right)^{-1} + \left([\overline{X}][\overline{X}]^T\right)\left([X][\overline{X}]^T\right)^{-1} \right] \qquad (3.15)$$

A partir de (3.6), cada autovetor $\{\overline{\psi}_r\}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\{\overline{\psi}_r\} = \{\psi_r\} e^{s_r \Delta t} \qquad (3.16)$$

e a partir de (3.9), tem-se:

$$[A_S]\{\psi_r\} = \{\psi_r\} e^{s_r \Delta t} \qquad (3.17)$$

A equação (3.17) é um problema de autovalores e autovetores. Se $[A_S]$ é uma matriz de ordem q, haverá q autovalores e autovetores. Se $q>2N$, haverá modos computacionais. A partir dos autovalores, pode-se calcular as freqüências naturais e os fatores de amortecimento:

$$e^{s_r \Delta t} = \lambda_r = a_r + i\, b_r = e^{-\omega_r \zeta_r \Delta t} e^{i \overline{\omega}_r \Delta t} = C_r e^{i \theta_r} \qquad (3.18)$$

onde:

$$C_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2} \quad ; \quad \theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{b_r}{a_r}\right) \tag{3.19}$$

de onde podem ser determinados as freqüências naturais e os fatores de amortecimento;

$$\begin{aligned} \omega_r \, \zeta_r &= \frac{-\ln\left(a_r^2 + b_r^2\right)}{2\Delta t} \\ \overline{\omega}_r &= \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} = \frac{1}{\Delta t}\tan^{-1}\left(\frac{b_r}{a_r}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para cada autovalor existe um autovetor correspondente, que pode ser visto como o vetor da forma do modo [EWINS, 1984].

O método ITD requer uma análise por parte do usuário sobre quais dados de medida devam ser utilizados nos cálculos. Freqüentemente haverá mais pontos de resposta que modos a serem identificados.

Entre as vantagens do método estão a pouca necessidade de interação, cálculo eficiente de modos pouco espaçados e a possibilidade de verificar a qualidade dos resultados, através de algum índice de confiança [MAIA, 1997].

3.2 . Fator de Confiança Modal (MCF)

Na análise dos modos de vibrar e parâmetros modais de estruturas complexas, há sempre um certo nível de incerteza quanto aos valores obtidos e à representação do modo. O forte acoplamento de modos cujas freqüências são muito próximas e o alto nível de ruído são fatores que podem prejudicar a identificação, conduzindo a resultados insatisfatórios.

O Fator de Confiança Modal (MCF) foi proposto por IBRAHIM (1978) para distinguir os modos estruturais dos modos computacionais dentre todos os modos identificados [IBRAHIM, 1978]. Este índice é representado por um número calculado para cada modo identificado na estrutura em teste. O MCF varia de zero, para modos completamente corrompidos, a 100% para modos puramente estruturais.

A teoria relacionada ao MCF baseia-se na correlação existente entre a deflexão modal de um determinado ponto da estrutura em um determinado instante de tempo e a deflexão modal do mesmo ponto em um instante diferente de tempo.

O método ITD foi desenvolvido para possibilitar o emprego do mínimo instrumental possível nas medições experimentais. Para tal fim, são empregadas *estações assumidas*, para as quais os dados de resposta são gerados a partir dos próprios dados de resposta originais [IBRAHIM, 1978].

Em um ensaio modal usual de uma estrutura, se $x_i(j)$ é a resposta livre medida em um ponto *i*, em um instante $j \cdot \Delta t$, novas respostas podem ser geradas para aumentar o número aparente de pontos de medida. Estas novas respostas são deslocadas de $k \cdot \Delta t$

com relação à original: $\bar{x}_i(j) = x_i(j + \Delta t)$, $\bar{\bar{x}}_i(j) = x(j + 2\Delta t)$,... e assim sucessivamente [IBRAHIM, 1978].

Segue a representação matricial detalhada de como os dados de resposta são tratados para compor a matriz de resposta $[X]$, utilizada nos algoritmos, com um deslocamento de $k \cdot \Delta t$ intervalos de tempo.

A matriz $[x]$ é formada por todos os elementos da resposta da estrutura. Esta matriz possui dimensão $[q \times np]$, onde q é o número de pontos de medida localizados na estrutura, e np é o número de elementos de resposta captados em cada ponto de medição. Entretanto, nem todos os elementos da matriz $[x]$ são utilizados no processo de identificação.

Para compor a matriz $[X]$ empregada nos cálculos, é necessário tomar todas as q linhas de $[x]$ e pelo menos suas $2N$ primeiras colunas (N é o número estimado de modos do sistema). Este é o aspecto da metade superior da matriz $[X]$. A metade inferior de $[X]$ é composta igualmente pelas q linhas de $[x]$, porém a porção de colunas tomadas são deslocadas (ou atrasadas) de um intervalo correspondente a $k \cdot \Delta t$ com relação à metade superior.

Na equação (3.21) abaixo, a matriz de resposta original $[x]$ está representada. Cada uma das linhas representa a resposta no tempo conforme foram medidas sobre os pontos da estrutura.

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(k+1) & x_1(k+2) & \cdots & x_1(2N) & \cdots & x_1(k+2N) & \cdots \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(k+1) & x_2(k+2) & \cdots & x_2(2N) & \cdots & x_2(k+2N) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(1) & x_q(2) & \cdots & x_q(k+1) & x_q(k+2) & \cdots & x_q(2N) & \cdots & x_q(k+2N) & \cdots \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Estabelece-se a metade superior da matriz de resposta, $[X]_{t_j}$:

$$[X]_{t_j} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(2N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(1) & x_q(2) & \cdots & x_q(2N) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

A metade inferior de $[X]$ consiste dos dados de $[x]$ atrasados de $k \cdot \Delta t$ intervalos de tempo com relação a $[X]_{t_j}$:

$$[X]_{k \cdot t_j} = \begin{bmatrix} x_1(k+1) & x_1(k+2) & \cdots & x_1(k+2N) \\ x_2(k+1) & x_2(k+2) & \cdots & x_2(k+2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(k+1) & x_q(k+2) & \cdots & x_q(k+2N) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

A matriz de resposta torna-se, então:

$$[X] = \begin{bmatrix} [X]_{t_j} \\ [X]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(2N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(1) & x_q(2) & \cdots & x_q(2N) \\ x_1(k+1) & x_1(k+2) & \cdots & x_1(k+2N) \\ x_2(k+1) & x_2(k+2) & \cdots & x_2(k+2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(k+1) & x_q(k+2) & \cdots & x_q(k+2N) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Construída a matriz $[X]$ conforme está descrito acima, procede-se a aplicação do método ITD. A matriz $[\overline{X}]$, é obtida tomando os elementos utilizados na formação da matriz $[X]$ deslocados de um intervalo de tempo Δt ;

$$\overline{x}_i(t_j) = x_i(t_j + \Delta t) \tag{3.25}$$

e a matriz $[\overline{X}]$ é arranjada da seguinte maneira:

$$[\overline{X}] = \begin{bmatrix} [\overline{X}]_{t_j} \\ [\overline{X}]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(2) & x_1(3) & \cdots & x_1(2N+1) \\ x_2(2) & x_2(3) & \cdots & x_2(2N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(2) & x_q(3) & \cdots & x_q(2N+1) \\ x_1(k+2) & x_1(k+3) & \cdots & x_1(k+2N+1) \\ x_2(k+2) & x_2(k+3) & \cdots & x_2(k+2N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_q(k+2) & x_q(k+3) & \cdots & x_q(k+2N+1) \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

A matriz do sistema, $[A_S]$, é obtida da relação $[A_S][X]=[\overline{X}]$, e a resolução do autoproblema $[A_S]\{\psi_k\}=e^{s_k \Delta t}\{\psi_k\}$ fornece os autovetores, $\{\psi_k\}$, e os autovalores, $e^{s_k \Delta t}$, de $[A_S]$.

O MCF deve ser calculado tanto para cada ponto de medida quanto para cada modo. Para calcular o MCF para um modo específico, deve-se obter uma relação entre a deflexão deste modo em dois instantes distintos de tempo. A deflexão de um modo presente em uma estrutura é equivalente ao modo real identificado. Porém, o

método ITD não fornece os modos reais, e sim, os modos complexos. Os modos reais são calculados a partir dos modos complexos, e estes são obtidos dos autovetores, $\{\psi\}$. Seja $[\psi]$ a matriz que contém, por colunas, os autovetores identificados, ou seja,

$$[\psi] = \begin{bmatrix} [\psi]_{t_j} \\ [\psi]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

onde $[\psi]_{t_j}$ é a matriz que contém os autovetores do sistema calculados a partir de um determinado instante de tempo, t_j, e $[\psi]_{k \cdot t_j}$ é a matriz que contem os autovetores calculados com um atraso de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo. A relação entre os dois conjuntos de autovetores fica estabelecida:

$$[\psi]_{k \cdot t_j} = \{e^{s\Delta t}\}[\psi]_{t_j} \tag{3.28}$$

Seja a deflexão de um determinado modo representada por $\{\psi\}$ para um determinado ponto de medida, e $\{\overline{\psi}\}$ a deflexão do mesmo modo tomada no mesmo ponto de medida, atrasada de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo. É possível calcular a deflexão modal *esperada*, $\{\overline{\psi}\}_{Exp}$, depois de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo:

$$\{\overline{\psi}\}_{Exp} = \{\psi\} e^{sk\Delta t} \tag{3.29}$$

Se o modo identificado corresponde a um modo estrutural e linear, $\{\overline{\psi}\}$ deverá ser igual a $\{\overline{\psi}\}_{Exp}$ [IBRAHIM, 1978].

De maneira geral,

$$\{\overline{\psi}\}_{Exp} = \{\overline{\psi}\} \times MCF \tag{3.30}$$

e a definição do MCF torna-se:

$$\begin{aligned} MCF &= \frac{\left|\{\overline{\psi}\}_{Exp}\right|}{\left|\{\overline{\psi}\}\right|} \times 100 \qquad se \quad \left|\{\overline{\psi}\}\right| > \left|\{\overline{\psi}\}_{Exp}\right| \\ ou & \\ MCF &= \frac{\left|\{\overline{\psi}\}\right|}{\left|\{\overline{\psi}\}_{Exp}\right|} \times 100 \qquad se \quad \left|\{\overline{\psi}\}_{Exp}\right| > \left|\{\overline{\psi}\}\right| \end{aligned} \tag{3.31}$$

Desta forma, o MCF deverá ser 100% para modos puramente estruturais e zero para ruído. Como em todos os ensaios experimentais é inerente a presença de ruído, um MCF de 100% torna-se impossível de ser atingido. Isto não significa, porém, que altos valores de MCF não indiquem modos bem identificados, validando o processo de identificação pelo método ITD.

3.3 . Colinearidade de Fase Modal Ponderada (MPCW)

A Colinearidade de Fase Modal Ponderada é um índice que quantifica a relação funcional entre as partes real e imaginária de um modo identificado, ou seja, quantifica a consistência espacial do resultado da identificação.

Para modos normais clássicos (modos reais), todos os pontos em uma estrutura movimentam-se exatamente em fase ou fora de fase. Em outras palavras, a forma do modo corresponde a um vetor real, ou vetor *monofase*.

O comportamento monofase implica no fato de a matriz de variância-covariância das partes real e imaginária dos vetores das formas modais apresentarem apenas um autovalor diferente de zero. Entretanto, se os ângulos de fase da forma dos modos identificados não são correlacionados, os dois autovalores desta matriz serão aproximadamente iguais. O MPCW quantifica o grau de comportamento monofase através da comparação do tamanho relativo dos autovalores da matriz de variância-covariância [PAPPA et al., 1993].

Sejam ψ_i^R e ψ_i^I as partes real e imaginária, respectivamente, do modo identificado *i* e sejam os valores de variância e covariância das partes real e imaginária de cada modo identificado:

$$\begin{aligned} S_{xx_i} &= \psi_i^{R^T} \psi_i^R \\ S_{yy_i} &= \psi_i^{I^T} \psi_i^I \\ S_{xy_i} &= \psi_i^{R^T} \psi_i^I \end{aligned} \tag{3.32}$$

e seja a matriz de variância-covariância para o modo *i*:

$$\begin{bmatrix} S_{xx_i} & S_{xy_i} \\ S_{xy_i} & S_{yy_i} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Os autovalores desta matriz, calculados para cada modo, são:

$$\lambda_{1,2_i} = \frac{S_{xx_i} + S_{yy_i}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{S_{xx_i}^2 - 2S_{xx_i}S_{yy_i} + S_{yy_i}^2 + 4S_{xy_i}^2} \tag{3.34}$$

O MPCW, para um determinado modo *i*, é dado por:

$$MPCW_i = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 \times 100\% \tag{3.35}$$

Os valores deste índice variam de 0% para modos com ângulos de fase completamente não-correlacionados até 100% para modos com comportamento monofase.

Ou, de outra forma, este indicador avalia o desvio do comportamento 0 - 180º dos componentes de um modo identificado [JUANG e PAPPA, 1985].

A definição do MPCW acima proporciona uma ponderação natural baseada na magnitude dos componentes individuais das formas modais.

Esta ponderação é desejável para superar imprecisões nas medidas dos ângulos de fase de modos obtidos experimentalmente, provocadas pelo próprio processo de medição.

Capítulo 4

Identificação de parâmetros modais através do método ITD

Este capítulo discorre sobre as principais etapas deste trabalho e trata dos aspectos envolvidos em sua elaboração.

4.1 . Introdução

A determinação dos parâmetros modais de sistemas dinâmicos há mais de duas décadas têm atraído o interesse de fabricantes dos mais diversos tipos de equipamentos, estruturas, veículos e máquinas, e de maneira cada vez mais atuante. A análise modal vem

revelando-se como item básico e de fundamental importância na validação de projetos e no aumento do valor agregado de produtos.

Neste contexto, é natural que haja um aumento do interesse, por parte dos pesquisadores, de desenvolverem métodos de identificação cada vez mais poderosos e melhores índices de confiança.

4.2 . A proposta do trabalho

O processo de identificação de parâmetros modais de estruturas cujo comportamento dinâmico é considerado complexo geralmente exige a análise de uma quantidade de dados muito grande. O método de Ibrahim no Domínio do Tempo (ITD) foi escolhido para este trabalho devido à sua concepção, que sobredetermina o sistema investigado. O excesso de dados medidos e empregados na construção do modelo é necessário para proporcionar uma rota de escape para o ruído contido nas medidas de resposta. O uso de um modelo sobredeterminado elimina a necessidade de identificar o número exato de modos identificados, mas abre espaço para outro problema, que é a distinção dos modos estruturais dos modos produzidos por ruído (ou computacionais) [GAO, 1999].

Para minimizar a dificuldade de distinguir modos estruturais dos computacionais, foram empregados dois índices de confiança. O MCF, proposto por Ibrahim [IBRAHIM, 1978], foi empregado neste trabalho, já que corresponde a uma extensão natural do próprio método ITD e também devido à simplicidade de sua aplicação e aos bons resultados que é capaz de fornecer.

O outro índice utilizado, o MPCW, é advindo da formulação do ERA [JUANG e PAPPA, 1985], mas foi aplicado aos resultados produzidos pelo método ITD com sucesso. Da mesma forma, o MCF pode ser aplicado a outros métodos de identificação modal se forem realizadas adequações condizentes com o método utilizado.

Este trabalho propõe a aplicação do método ITD em dados de resposta ao impulso medidas em uma placa engastada. Posteriormente, os resultados fornecidos pelo método devem ser qualificados através do MCF e do MPCW. O MCF é aplicado de uma forma original, realizando a comparação individual das componentes dos modos de vibrar.

4.3 . A metodologia

O método originalmente proposto por Ibrahim e Mikulcik exigia o conhecimento dos valores de resposta livre de aceleração, velocidade e deslocamento [IBRAHIM & MIKULCIK, 1973]. Posteriormente, o método foi adequado para utilizar dados de resposta livre de uma única grandeza [IBRAHIM & MIKULCIK, 1977]. Esta segunda versão do método foi utilizada nos cálculos sobre medidas de aceleração.

Neste trabalho, o método ITD foi aplicado a dados de resposta ao impulso. Os dados de resposta foram gerados a partir de funções de resposta em freqüência, medidas na estrutura. A estrutura de teste constituiu de uma placa de alumínio engastada, fixa em uma base inercial através de um de seus lados. Na placa foram estabelecidos cem pontos de medida. Também foi estabelecido um único ponto de excitação. O tipo de excitação foi o impulso,

proporcionado por um martelo de impacto instrumentado.

Os dados posteriormente foram tratados por algoritmos implementados em ambiente Matlab®. O primeiro passo da análise computacional é a formatação dos dados em uma maneira adequada para serem submetidos ao método ITD. Uma porção, apenas, dos dados de resposta é utilizada na formação das matrizes utilizadas nos programas computacionais. São tomadas todas as linhas da matriz original dos dados de resposta referentes aos pontos de medida sobre a estrutura. O número de colunas L, referente ao número de pontos do conjunto das respostas, entretanto, pode ser variado. Toma-se, no mínimo, duas vezes o número de modos existentes na faixa de freqüência analisada.

Desta forma, são montadas as matrizes de resposta utilizadas para o cálculo da matriz do sistema. A configuração das matrizes de resposta obedece a uma regra de formação. A metade inferior das matrizes de resposta é formada por dados da própria resposta, porém atrasados de um certo intervalo de tempo. Este intervalo de tempo constitui um parâmetro, k, que poderá ser modificado ao longo do processo de identificação. Em seguida, a partir de um autoproblema, são determinados os autovetores e autovalores que permitem o cálculo das freqüências naturais, fatores de amortecimento e os modos de vibrar da placa. O processo culmina com a qualificação dos resultados obtidos após o emprego do MCF e do MPCW. Os índices deverão qualificar como confiáveis os modos identificados cujos valores de MCF e de MPCW sejam maiores que um limite pré-estabelecido para cada um dos índices.

A identificação de todos os modos de vibrar (complexos) da placa não ocorre em apenas uma única análise computacional, pois, apesar de o sistema ser sobredeterminado, o método é sensível à contaminação por ruído, o que não permite a correta identificação de

parte dos modos presentes na faixa de freqüência analisada.

Entretanto, a variação dos parâmetros acima relacionados (intervalo de tempo, k, e número de colunas, L) permite que, em algumas análises, todos os modos da faixa sejam identificados.

Os modos reais, finalmente, são extraídos a partir dos modos complexos que satisfizeram os critérios impostos pelos índices de confiança e apresentados na forma de gráficos.

Capítulo 5

Procedimentos experimentais

Neste capítulo é apresentada a configuração do experimento realizado. São também discutidos os aspectos mais importantes relacionados ao ensaio de impacto e sua aplicabilidade ao experimento proposto. Posteriormente é descrita a implementação computacional do método ITD, assim como a implementação da qualificação dos resultados através dos índices de confiança.

5.1. Introdução

O forte desenvolvimento tecnológico que vem sendo observado há duas décadas no campo computacional e a crescente acessibilidade a novos equipamentos promoveram mudanças consideráveis na maneira de realizar procedimentos de identificação de parâmetros modais.

Alguns dos fatores que tornaram estes testes modais mais

factíveis são o barateamento de microcomputadores e analisadores de sinais de vários canais. Atualmente, características como capacidade de armazenamento de dados em disco rígido e velocidade de processamento não constituem limitação para a análise volumosa de dados.

Dentro deste cenário, cabe ao experimentador a difícil tarefa de tomar uma decisão sobre qual a direção a seguir para realizar o ensaio modal mais simples que forneça, ao mesmo tempo, os melhores resultados possíveis.

O primeiro aspecto a ser ponderado é o domínio no qual o trabalho será produzido. Basicamente, a decisão leva em conta o método de tratamento dos dados a ser empregado, uma vez que teoricamente, os resultados da análise no tempo ou na freqüência levariam a resultados idênticos, pois as propriedades procuradas (freqüências naturais, fatores de amortecimento e a forma dos modos) não dependem da maneira à qual os dados foram manipulados.

Há autores, entretanto, que consideram que os métodos no domínio do tempo produzem bons resultados tanto em estruturas levemente amortecidas quanto em estruturas com altos coeficientes de amortecimento e proporcionam melhor resolução em freqüência na identificação de modos pouco espaçados [FAHEY e PRATT, 1998], [LIANG e INMAN, 1987] e [PI e MICKLEBOROUGH, 1989].

O tipo de excitação empregado em um ensaio de vibrações pode determinar quanto tempo será gasto na realização do ensaio. Ensaios de varredura senoidal, por exemplo, são relativamente lentos, dependendo da faixa de freqüência que deve ser estudada. Porém são muito utilizados em processos de calibração de acelerômetros.

É de senso comum entre experimentadores que a excitação do tipo impulsiva (ensaio de impacto) proporciona maior velocidade de execução e produz resultados consistentes. O ensaio de impacto pode

tanto ser realizado com o objetivo de providenciar uma idéia inicial e geral do comportamento dinâmico de uma determinada estrutura quanto fornecer dados muito precisos sobre suas propriedades modais.

Outro aspecto a ser considerado é referente ao tipo de análise que melhor se enquadra à estrutura sob teste. Dependendo do número de modos a serem procurados, podem ser realizadas análises do tipo SDOF ou do tipo MDOF. A análise no domínio do tempo enquadra-se no tipo MDOF, apenas.

Uma escolha ainda mais específica refere-se à quantidade de dados utilizados no processo de identificação. De maneira simplista, esta escolha depende das características físicas da estrutura (formato, dimensões etc.) e da precisão exigida na identificação. Os dados podem ser do tipo SISO, SIMO ou MIMO.

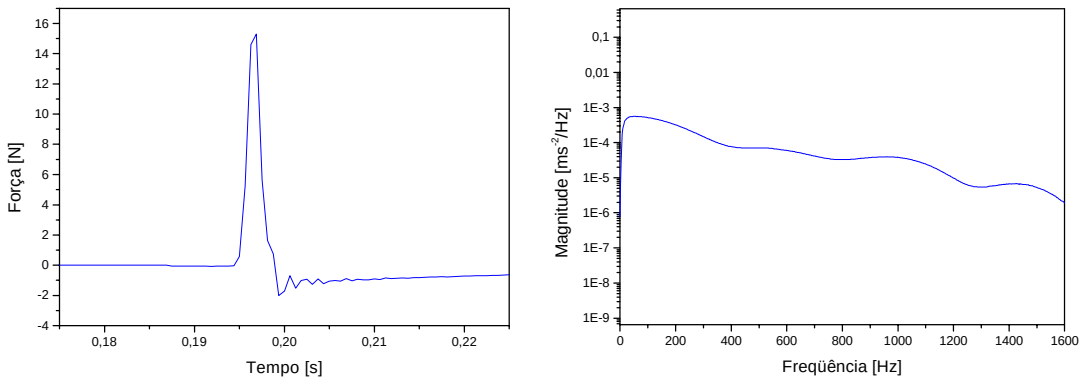
A principal vantagem do processamento de dados de múltipla saída é baseada no fato de que as freqüências naturais e os fatores de amortecimento da estrutura são propriedades globais do sistema, não devendo variar de FRF para FRF.

Logo, o processamento de várias FRFs simultaneamente seria capaz de fornecer um conjunto consistente destas propriedades. A realização da média de várias FRFs de uma única vez pode reduzir pequenas variações encontradas na obtenção de dados experimentais, e é preferível à análise de diversas FRFs isoladamente e posterior realização da média simples dos resultados finais. O processamento de dados do tipo MIMO fornece resultados excelentes em estruturas muito complexas.

5.2. A excitação do tipo impulsiva

O ensaio de impacto consiste, basicamente, em excitar uma estrutura através de uma força impulsiva de curta duração proveniente do choque de um martelo ou de uma massa instrumentada contra a estrutura. É a forma mais simples de realização de um ensaio modal, em respeito aos requerimentos de instrumental necessários.

A figura 5.1 mostra um impulso real de aproximadamente 4,5 ms de duração obtido da excitação da placa de alumínio e a densidade espectral da força. A densidade espectral mostra como foi distribuída a energia do impacto na faixa de freqüências excitadas. Desta forma, é desejável que este diagrama seja razoavelmente plano em toda a faixa de freqüências, o que representa que a energia transmitida durante o impacto excitou todas as freqüências presentes na banda de interesse de forma semelhante.



(a) (b)

Figura 5.1 - Impulso real (a) e densidade espectral (b)

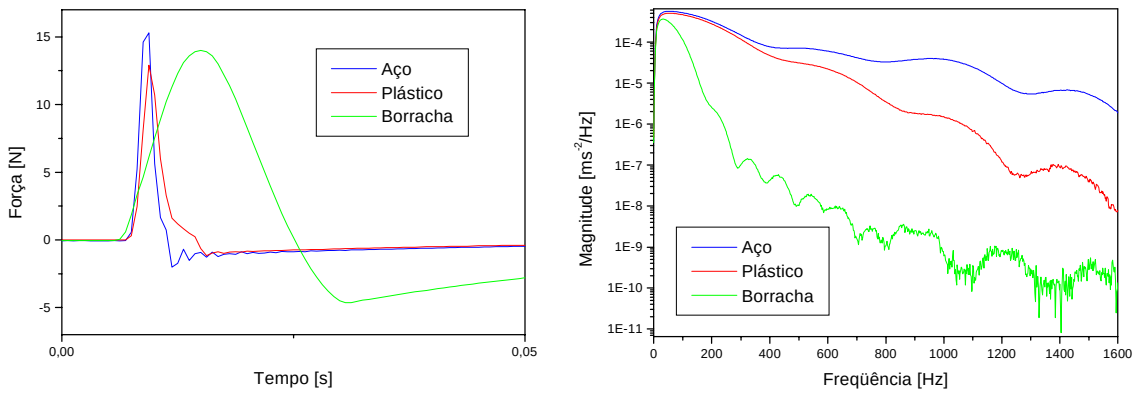
O ensaio de impacto, entretanto proporciona menor controle sobre as condições experimentais se comparado a outros tipos de ensaios, como o uso de excitação do tipo senoidal, por exemplo. O

conteúdo em freqüência obtido através de uma entrada impulsiva pode ser ajustado com relação ao limite superior de freqüência, determinado pela massa e rigidez do martelo instrumentado [EWINS in BRAUN, 1986].

Uma maneira de adequar as características do impulso à gama de freqüências que devem ser excitadas em uma estrutura consiste na utilização do martelo de impacto com uma ponteira apropriada.

A rigidez do material da ponteira determina a abrangência da excitação, ou seja, determina a dimensão da faixa útil de freqüências adequadamente excitadas. Quanto maior a rigidez da ponteira, menor o tempo de duração da excitação e maior a faixa de freqüências excitadas. Quanto menor a rigidez da ponteira, maior o tempo de duração do impulso, reduzindo a faixa útil de excitação.

A figura 5.2 fornece uma comparação entre os impulsos tomados com a utilização de ponteiras de diferentes materiais sobre uma mesma estrutura sob condições semelhantes de excitação. Também podem ser visualizadas as respectivas densidades espectrais.



(a) (b)

Figura 5.2 - Comparação da utilização do martelo com ponteiras diferentes: (a) impulsos e (b) densidades espectrais

O ensaio de impacto apresenta uma série de vantagens e

também algumas limitações, comparado a outras técnicas. Como ponto positivo deve ser salientada a rapidez com a qual o ensaio pode ser realizado.

Outro fator a ser considerado é a necessidade de um número reduzido de equipamentos, tornando a montagem do experimento muito simples. Finalmente, a união destes fatores proporciona a redução do custo do experimento, tornando-o acessível às empresas de menor porte.

Entretanto, algumas limitações devem ser cuidadosamente examinadas. A faixa de freqüências excitadas pode apenas ser controlada no seu limite superior, o que pode prejudicar a análise do tipo *zoom* em alguns equipamentos.

Outro entrave ocorre quando é desejado excitar uma estrutura muito grande. Forças muito altas podem ser exigidas para proporcionar uma adequada excitação do sistema, danificando localmente a estrutura.

5.3. Descrição da estrutura de teste

A estrutura utilizada como base para a aplicação do método ITD é uma placa quadrada de alumínio. As dimensões da área livre da placa são: comprimento e largura iguais a 360mm e espessura igual a 3mm.

A configuração da montagem da placa simula um engaste. Esta condição foi conseguida fixando-se um dos lados da placa de alumínio entre duas espessas chapas de aço através de doze parafusos e posteriormente este conjunto foi fixado rigidamente a uma base inercial, conforme pode ser visualizado na figura 5.3.

Deve ser observado, entretanto, que apesar do engaste real

apresentar um certo nível de flexibilidade, sua influência foi considerada insuficiente para adulterar os resultados de forma relevante, e foi desprezada.

Figura 5.3 – Vista geral da montagem do experimento

Para a realização dos ensaios, foram marcadas sobre a placa as localizações dos 100 pontos de medição de resposta e do único ponto de excitação.

A figura 5.4 fornece uma visualização geral das dimensões da placa e da disposição dos pontos de entrada e de captação.

Na região do engaste não é possível fixar o acelerômetro exatamente sobre o ponto determinado. Nos dez pontos da região engastada, o sensor foi fixado aproximadamente três milímetros

aquém do determinado. Como essa região apresenta amplitudes muito baixas quando da movimentação da placa, o efeito do pequeno deslocamento no posicionamento do acelerômetro não foi considerado na etapa de geração dos gráficos dos modos de vibrar,

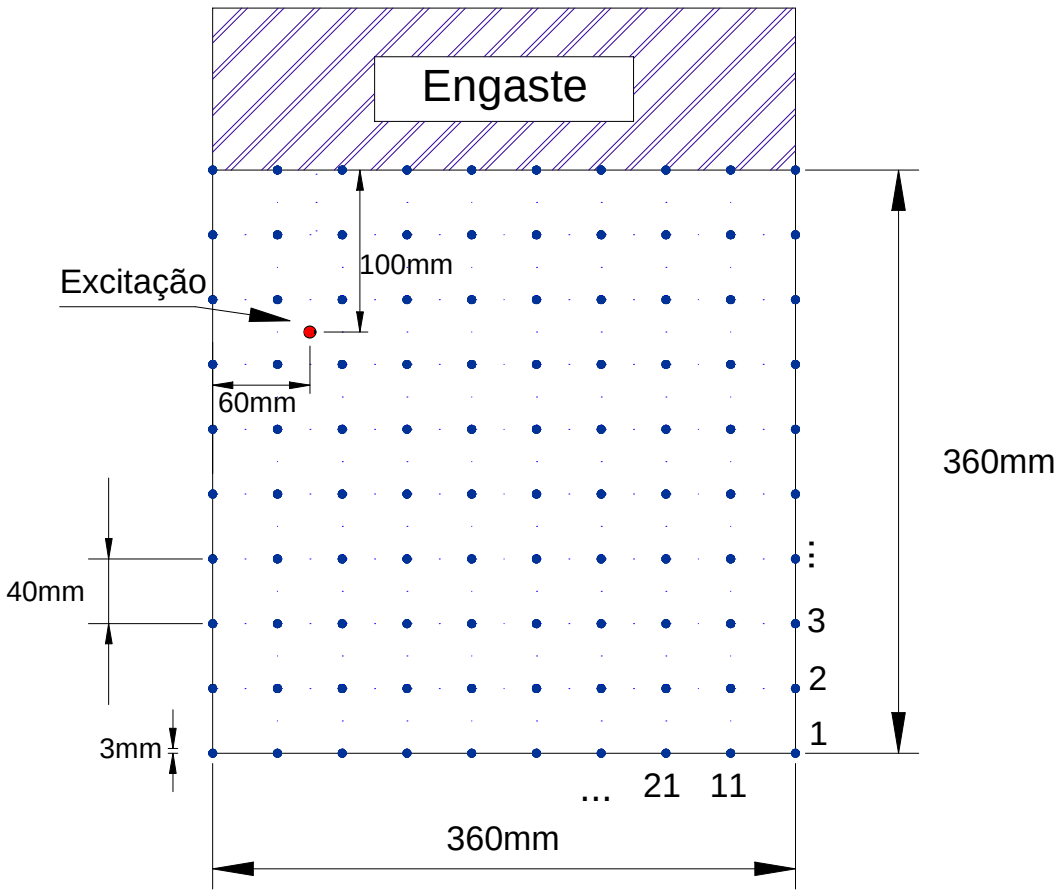


Figura 5.4 – Pontos de medida e ponto de excitação

Não foram seguidos critérios rígidos para a escolha do número de pontos de medição. Foi assumido que 100 pontos distribuídos uniformemente sobre a estrutura pudessem ser suficientes para proporcionar bons resultados e boa resolução espacial.

A localização do ponto de entrada foi escolhida arbitrariamente, e sobre este ponto foi fixada uma esfera de aço para direcionar a excitação na direção perpendicular ao plano da placa. Todos os

impactos foram desferidos sobre a esfera.

A figura 5.5 mostra o ponto de excitação e o acelerômetro fixado sobre um dos 100 pontos de medida da placa.

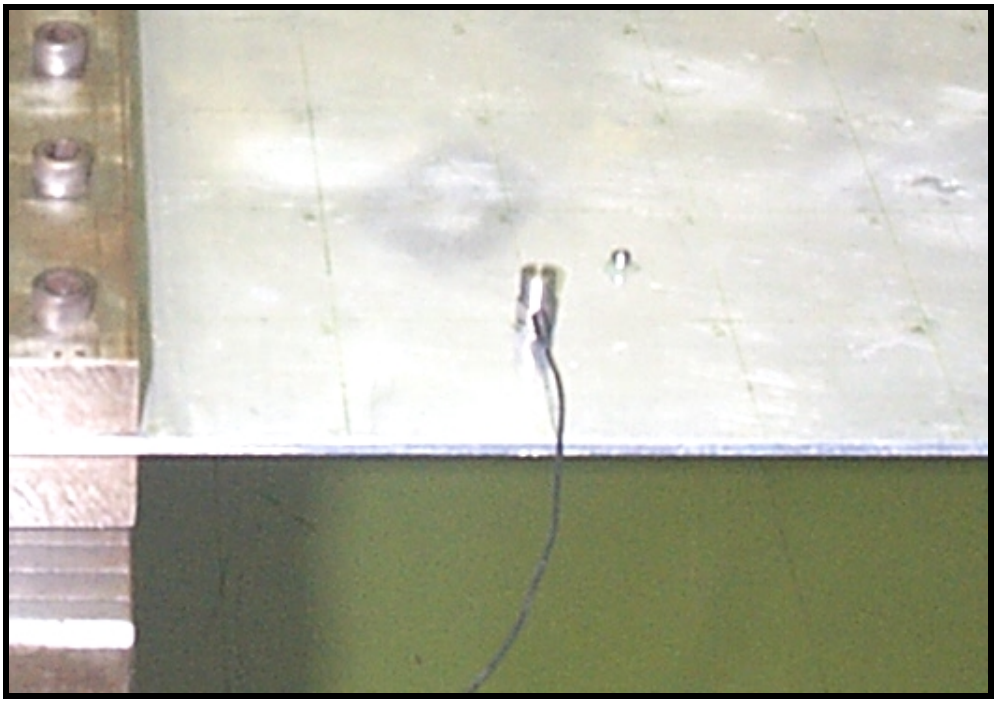


Figura 5.5 – Ponto de excitação (esfera) e acelerômetro sobre um ponto de medida

5.4. O equipamento

O objetivo dos ensaios modais realizados sobre a placa consistiu na obtenção de curvas de FRF que, por sua vez, foram submetidas a um processamento computacional, possibilitando a identificação dos parâmetros modais da estrutura.

A excitação da estrutura, promovida manualmente, foi proporcionada através do impacto de um martelo instrumentado e a resposta do sistema foi captada através de um mini acelerômetro piezoelétrico.

Foi empregado nos testes um martelo de impacto modelo B&K 8202, equipado com sensor de força B&K 8200.

A faixa de freqüências analisada foi limitada entre 0 e 1600 Hz. De forma a excitar a estrutura adequadamente dentro desta faixa, o martelo de impacto foi utilizado com a ponteira de aço, a mais adequada ao experimento proposto.

A escolha da faixa de freqüências determina a resolução em freqüência observada no analisador espectral. Como o analisador apresenta uma resolução em número de linhas igual a 800, a resolução em freqüência na faixa estudada é de 2Hz.

O analisador de sinais utilizado é o modelo B&K 2032. Este equipamento possui dois canais de aquisição de dados. O canal *A* foi reservado à medição da força aplicada à estrutura e o canal *B* destinado à captação do sinal de resposta.

A resposta do sistema foi medida na forma de aceleração através de um mini acelerômetro piezoelétrico modelo B&K 4375. O acelerômetro foi fixado em cada um dos 100 pontos sobre a placa e foi tomada a média de cinco FRF's de cada ponto. Este recurso, conhecido como *averaging*, favorece a minimização do ruído presente na resposta.

O acelerômetro foi fixado à estrutura através de uma fina camada de cera de abelhas e a massa do acelerômetro foi considerada suficientemente pequena de modo a não influenciar nos resultados obtidos. A fixação através de cera de abelhas é amplamente utilizada, e é apenas necessário evitar que o ensaio seja realizado em um ambiente com temperaturas acima de 40°C para que a cera não amoleça. Os experimentos foram realizados em um laboratório onde a temperatura era de aproximadamente 22°C.

Os sinais provenientes de ambos os sensores são amplificados antes de alcançarem o analisador de sinais. Dois amplificadores de

carga modelo B&K 2626 são regulados para condicionar os sinais adequadamente.

A tabela 5.1 sumariza as especificações dos equipamentos utilizados.

Tabela 5.1 – Equipamentos utilizados

Martelo de impacto (B&K 8202)	Sensibilidade à carga: 1,0 pC/N (Atenuação do sinal através de circuito no interior do cabo do martelo) Massa com transdutor de força e ponteira de aço: 311 g
Transdutor de força (B&K 8200)	Sensibilidade à carga: 4,05 pC/N
Transdutor de aceleração (B&K 4375 *Miniatura*)	Sensibilidade à carga: 0,319 pC/ms^{-2} Massa: 2,4 g
Analisador de sinais (B&K 2032)	Dois canais
Amplificadores de carga (B&K 2626)	Permite o condicionamento dos sinais

5.5. O ensaio de impacto

Para que os esforços dispensados sobre um ensaio modal resultem em um conjunto de dados confiáveis, capazes de representar o sistema sob investigação com a precisão desejada, é de vital importância que as configurações requeridas para o funcionamento adequado dos instrumentos e equipamentos sejam corretamente estabelecidas.

O analisador de sinais B&K 2032 possui basicamente dois conjuntos de configurações a serem determinadas pelo usuário. O primeiro conjunto refere-se às configurações da *medição a ser realizada*. O segundo conjunto refere-se à *exibição das grandezas* medidas ou calculadas pelo analisador.

As configurações da *medição* definem os parâmetros necessários para a correta tomada de uma medida. Alguns destes parâmetros são: resolução (tempo ou freqüência), banda analisada, função ponderadora (janela) e sensibilidade de entrada.

As configurações de *exibição* definem escalas, unidades e outras características da função exibida.

A configuração do analisador de sinais requer tanto entradas quantitativas, dependentes em sua maior parte dos sinais obtidos propriamente ditos e das cartas de calibração dos sensores utilizados, quanto qualitativas, por exemplo, a medida a ser tomada ou a forma de excitação, dependentes do tipo de ensaio a ser realizado.

Muito cuidado deve ser tomado para que não sejam cometidos erros no fornecimento dos valores adequados, pois o ensaio poderá não ser representativo do sistema estudado.

Nos experimentos realizados sobre a placa de alumínio, o sinal proveniente do transdutor de força instalado no martelo de impacto e convenientemente amplificado foi adquirido através do canal *A* do analisador de sinais.

Da mesma forma, a resposta captada pelo acelerômetro foi adquirida através do canal *B* do analisador. Em ambos os canais, janelas do tipo exponencial foram utilizadas. A janela exponencial reduz o sinal a zero ou a valores próximos de zero à medida que o sinal aproxima-se do fim [McCONNELL, 1995]. Este recurso é necessário para tornar apropriada a relação sinal/ruído no fim da janela. Caso não fosse empregada janela alguma, o sinal conteria na

sua porção final uma grande proporção de ruído, fato este que prejudicaria ou até mesmo inviabilizaria o processo de identificação.

Outro motivo para a utilização da janela exponencial reside em evitar o truncamento durante o processo de aquisição do sinal antes que este decaia suficientemente a valores bem próximos de zero. Caso a resposta medida apresentasse truncamento, todo o processamento posterior deste sinal estaria comprometido devido ao *leakage*, e a identificação revelar-se-ia imprecisa.

O fenômeno de *leakage* é a conseqüência direta da aquisição de uma porção do sinal temporal que não apresenta um número inteiro de ciclos dentro da janela, provocando o "vazamento" da energia contida nas freqüências ressonantes para outras regiões do espectro em freqüências. O janelamento do sinal, portanto, minimiza os efeitos do processamento de sinais que não são periódicos dentro da janela.

Além da utilização da janela adequada, ambos os sinais devem chegar ao analisador de sinais amplificados. O fator de amplificação deve ser ajustado no amplificador B&K 2626 de modo a promover a maior amplificação possível sem que o sinal sobrecarregue o circuito. O mesmo valor ajustado no amplificador deve ser estabelecido também no analisador de sinais.

Após todos os procedimentos de adequação e condicionamento dos sinais acima discutidos, pode ser realizado o processo de aquisição dos dados.

O objetivo dos ensaios é a obtenção de funções de resposta em freqüência para fornecer subsídios para a identificação dos parâmetros modais da estrutura.

Para realizar a medição, analisar o conteúdo em freqüência dos sinais e calcular a FRF (ou outra grandeza), a seqüência empregada pelo analisador de sinais pode ser resumida através da figura 5.6. Ambos os canais de entrada possuem filtros *anti-aliasing* e

conversores A/D sincronizados que são utilizados no processo de aquisição dos dados. As séries temporais adquiridas são multiplicadas pela função ponderadora adequada, neste caso, a janela exponencial e é executado o cálculo da FFT de cada sinal para gerar o espectro em freqüência instantâneo em cada um dos canais.

A partir destes espectros em freqüência são calculados os respectivos auto-espectros e o espectro cruzado entre os dois canais tomando-se a média de várias medidas (o processo é chamado de *averaging*). Neste caso, foi tomada a média de cinco sinais.

Finalmente, com estas três grandezas é possível realizar o cálculo da FRF e de outras funções, como, por exemplo, a coerência, que relaciona a linearidade da saída com a entrada em uma escala entre 0 e 1 [McCONNELL, 1995].

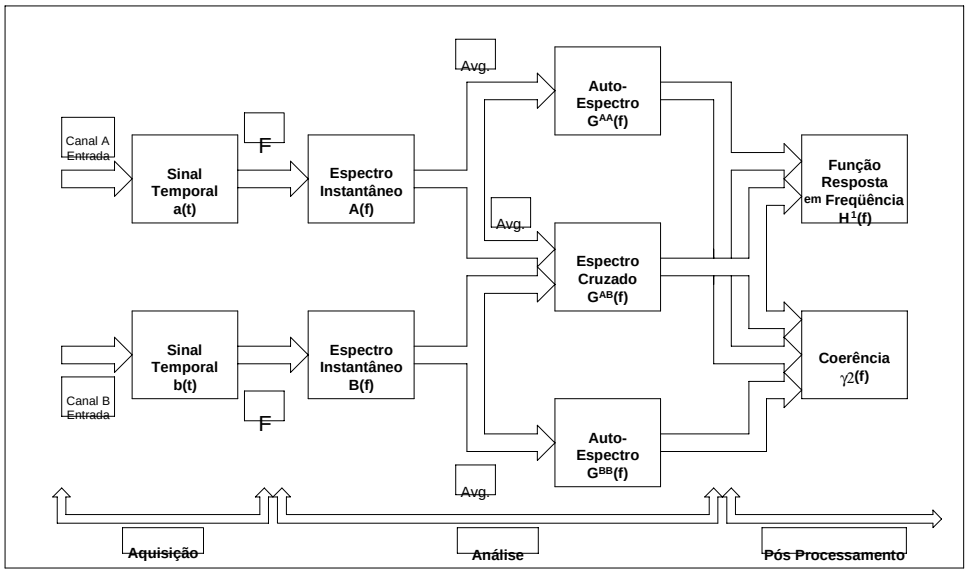


Figura 5.6 – Diagrama de blocos da geração de FRFs no analisador de sinais

É necessário salientar que o diagrama apresentado na figura 5.6 não contém todos os processos realizados e grandezas calculadas pelo analisador de sinais, mas apenas a parcela utilizada para a obtenção das funções de resposta em freqüência.

Após a geração da FRF do primeiro ponto de medida sobre a placa, procede-se a transferência dos dados para um microcomputador do tipo IBM/PC através de uma interface GPIB tipo PC II/IIA com programa de instalação B&K/IBM WT9332, WT9321 e WT9378.

Como a FRF é uma grandeza complexa, devem ser armazenados no microcomputador os dados de magnitude e fase da FRF ou das partes real e imaginária para tornar possível a sua reconstituição. Neste trabalho optou-se por armazenar os valores das partes real e imaginária da FRF.

Em seguida, o acelerômetro é deslocado para o próximo ponto de medição sobre a placa e todo o processo é repetido. Após a medição sobre os 100 pontos da placa, o conjunto de dados está completo e procede-se a implementação computacional.

5.6. Implementação computacional

Esta seção descreve a implementação computacional realizada na análise dos dados colhidos.

Todos os algoritmos criados no decorrer deste trabalho foram programados em ambiente Matlab®, versão 5.2, processados em um microcomputador tipo IBM/PC com processador Celeron® 366MHz com 64Mb RAM, sob o sistema operacional Windows® 98.

Da adequada interposição de todas as rotinas programadas resultaram basicamente três algoritmos considerados definitivos para o efeito da identificação dos parâmetros modais da placa de alumínio. O primeiro algoritmo manipula os dados de resposta com o objetivo de gerar as funções de resposta ao impulso necessárias para a aplicação do Método de Ibrahim, o segundo realiza todos os cálculos

relacionados ao método ITD e à qualificação dos resultados obtidos através dos índices de confiança MCF e MPCW e o terceiro algoritmo é reservado à produção dos gráficos tridimensionais das formas modais.

O algoritmo de manipulação dos dados, denominado *GEN_IRF*, opera da seguinte forma:

Inicialmente o programa carrega as partes real e imaginária de todas as 100 funções de resposta em freqüência medidas sobre a placa. Em seguida, as 100 FRFs são recompostas somando-se a parte real de cada resposta à sua respectiva parte imaginária multiplicada pelo número imaginário *i*. A figura 5.7 (a) e (b) ilustra as partes real e imaginária da FRF como foram adquiridas, e a figura 5.7 (c) mostra a FRF reconstruída a partir de suas partes real e imaginária.

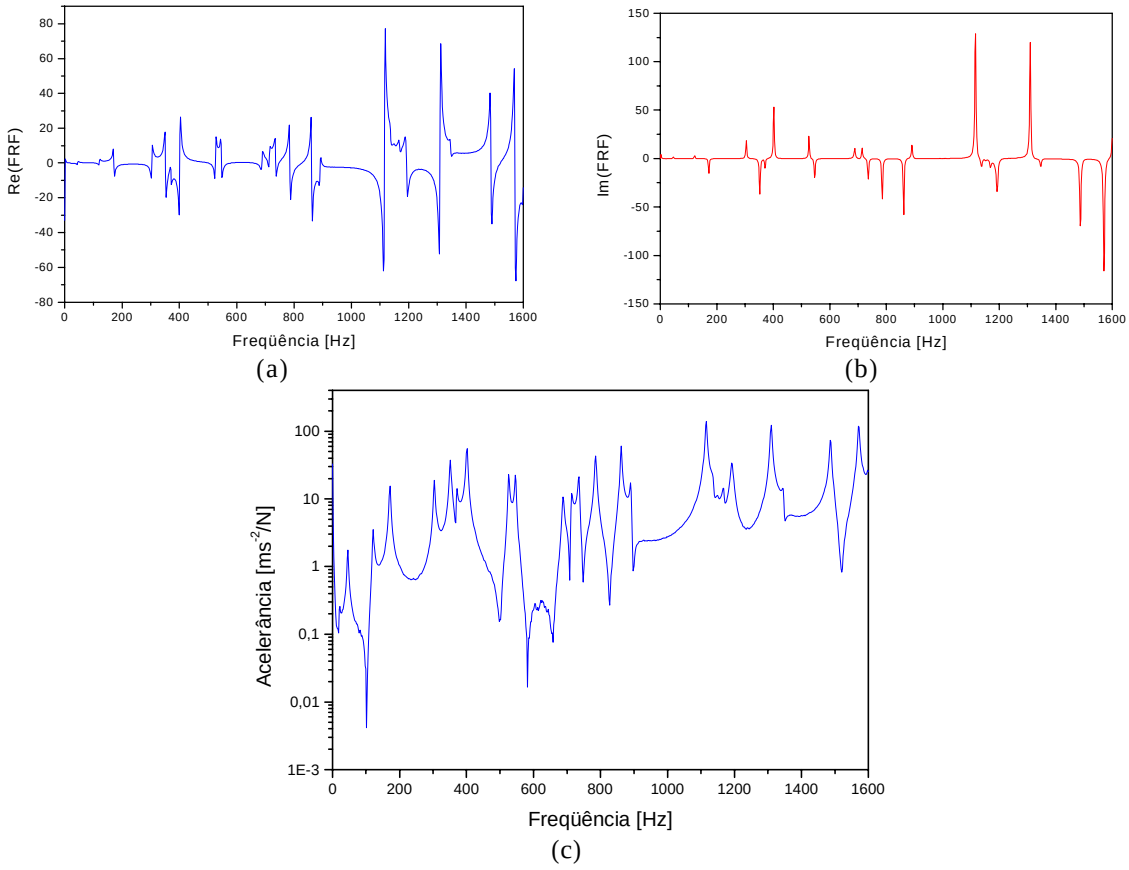
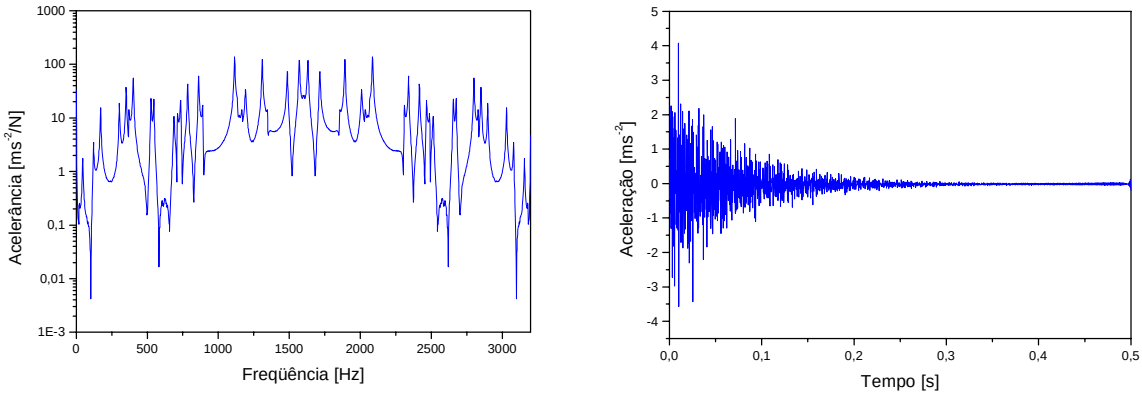


Figura 5.7 – Partes real (a) e imaginária (b); FRF reconstruída (c)

O passo seguinte consiste na geração das funções de resposta ao impulso a partir das FRFs. Este processo exige que seja tomado o conjugado complexo da FRF, como pode ser observado na figura 5.8 (a).



(a) (b)

Figura 5.8 – (a) FRF representada com a porção conjugada complexa e (b) Função de Resposta ao Impulso

Aplicando a transformada de Fourier inversa sobre a FRF, é obtida a função de resposta ao impulso, mostrada na figura 5.8 (b).

Deve ser salientado que as figuras 5.7 (a), (b), (c) e figuras 5.8 (a) e (b) foram obtidas a partir de dados experimentais, medidos sobre o ponto 01 da placa (*v. figura 5.4*).

Entretanto, o algoritmo realiza o processo descrito para os dados referentes aos 100 pontos simultaneamente e fornece uma matriz contendo todas as 100 IRFs, cujas linhas representam as respostas ao impulso correspondentes.

Em seguida, os dados das respostas ao impulso são salvos na forma de um arquivo MAT que poderá ser utilizado por outros métodos de identificação que utilizam o mesmo tipo de dados.

O arquivo contendo as respostas ao impulso foi então utilizado no algoritmo de identificação, denominado *IMMAQ*.

A figura 5.9 ilustra um fluxograma referente ao algoritmo *GEN_IRF*.

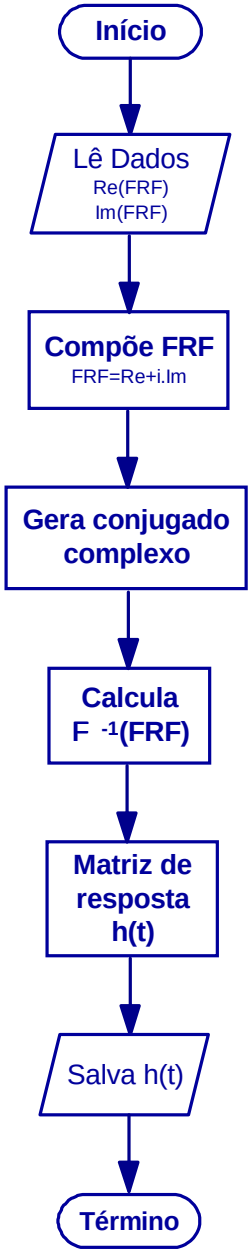


Figura 5.9 – Fluxograma do algoritmo *GEN_IRF*

O algoritmo designado para realizar os cálculos relacionados ao método ITD e aos procedimentos de qualificação através dos índices de confiança, *IMMAQ*, utiliza os dados de IRF gerados pelo algoritmo

GEN_IRF para efetuar a identificação. A figura 5.10 representa um fluxograma do algoritmo de identificação modal *IMMAQ*. O algoritmo completo está reproduzido no apêndice A desta dissertação.

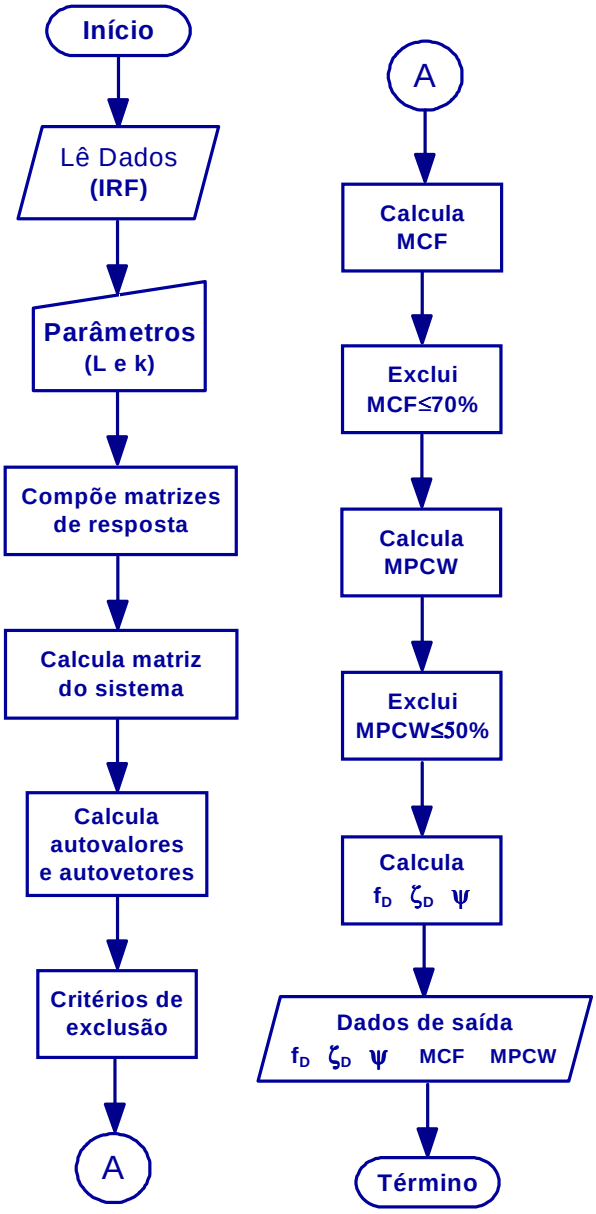


Figura 5.10 – Fluxograma do algoritmo *IMMAQ*

Após o carregamento destes dados, o algoritmo requer a entrada de dois valores para prosseguir com os cálculos.

O primeiro valor a ser fornecido ao programa é o número de pontos de resposta a serem processados, L, ou seja, o número de colunas da matriz das IRFs. O valor de L define o grau de sobredeterminação que se deseja incutir no sistema. O segundo valor a ser determinado pelo usuário é o atraso, k, imposto entre as metades superior e inferior das matrizes de resposta, X e $\overline{X}$.

Inseridos estes valores, o programa não requer mais a intervenção do usuário até o final de sua execução. Caso seja realizado um novo processo de identificação, outros valores de L e k devem ser fornecidos e resultados diferentes serão alcançados.

São necessárias várias execuções do algoritmo com combinações diferentes de L e k até que todos os modos possam ser identificados com a precisão desejada. O algoritmo de identificação de parâmetros modais realiza os seguintes passos:

- Cálculo da matriz do sistema, $[A_S]$, através da equação 3.15;
- Extração dos autovalores e autovetores de $[A_S]$;
- Exclusão de autovalores conjugados complexos e/ou reais;
- Cálculo dos fatores de amortecimento e exclusão dos valores inadequados;
- Cálculo do MCF;
- Cálculo do MPCW;
- Cálculo das freqüências naturais e recálculo dos fatores de amortecimento;
- Elaboração da matriz dos modos reais.

Vários dos passos descritos acima utilizam algum critério de exclusão baseado no tipo de análise que está sendo realizada.

A exclusão dos autovalores conjugados complexos visa eliminar a produção de resultados duplicados (freqüências naturais de mesmo valor absoluto). A retirada destes autovalores reduz o tempo de execução do algoritmo. Autovalores reais são igualmente retirados do conjunto, pois produzem modos computacionais.

O cálculo inicial dos fatores de amortecimento também requer uma série de eliminações. Devem ser eliminados os autovalores cuja parte real é positiva, pois conduzem à obtenção de fatores de amortecimento negativos. O algoritmo elimina também fatores de amortecimento maiores que 5%, pois se considera que não sejam encontrados valores desta magnitude na estrutura ensaiada.

O principal processo de eliminação executado pelo algoritmo consiste na qualificação dos autovetores da matriz do sistema $[A_S]$, após a eliminação dos fatores de amortecimento não convenientes, através dos índices de confiança MCF e MPCW.

A qualificação através do MCF é uma conseqüência direta do desenvolvimento do método ITD como ferramenta de análise modal e de identificação de sistemas. O MCF compara os autovetores da matriz do sistema em dois instantes de tempo e fornece um valor em porcentagem como resultado. O algoritmo *IMMAQ* elimina os autovetores cujo MFC é menor que 70%.

A qualificação através do MPCW verifica quanto o modo complexo se aproxima de um modo real clássico. O seu processamento, posterior ao cálculo do MCF, tem o objetivo de apontar quais dos modos selecionados por este índice e com qual intensidade apresentam o comportamento aproximado de um modo real.

O MPCW é também representado na forma de uma porcentagem, e são considerados confiáveis os modos cujo MPCW é maior que 50%.

Após a qualificação dos modos através dos índices, são calculadas as freqüências naturais associadas a estes modos e os respectivos fatores de amortecimento são recalculados.

Finalmente, é criada uma matriz dos modos reais obtidos dos modos complexos, a ser utilizada no algoritmo de representação gráfica.

Tal algoritmo, denominado *PLO_MO*, utiliza a matriz dos modos reais para gerar gráficos tridimensionais dos modos de vibrar da placa.

A figura 5.11 ilustra o fluxograma do algoritmo *PLO_MO*.

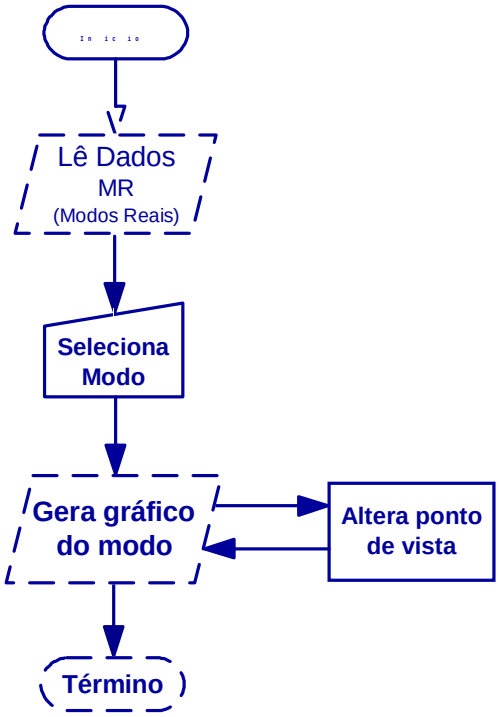


Figura 5.11 – Fluxograma do algoritmo *PLO_MO*

O programa permite a seleção do modo a ser exibido, assim como a variação do ponto de vista da superfície exibida com relação ao observador.

Após a identificação e da geração dos gráficos dos modos, são selecionados e são reservados os melhores resultados, ou seja, os modos cujos valores de MCF e MPCW forem os maiores possíveis.

Capítulo 6

Resultados

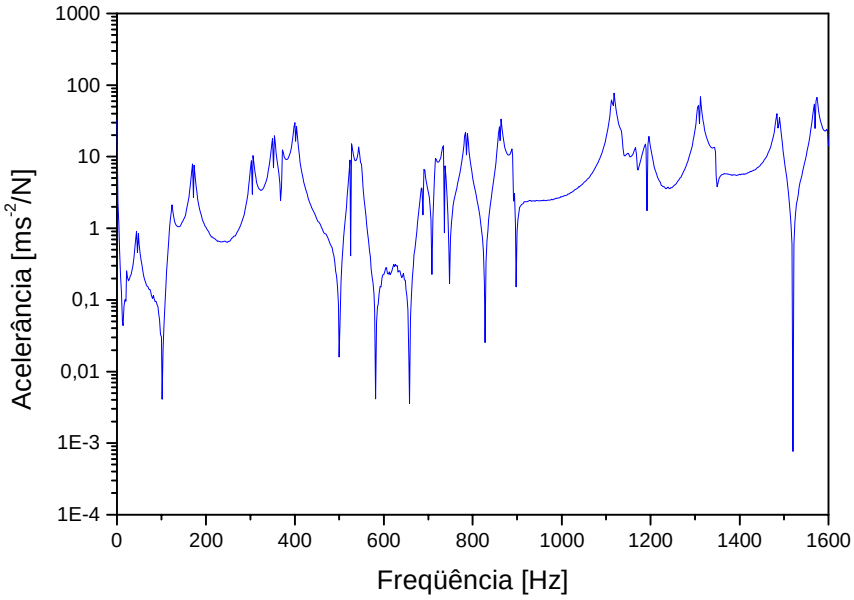
Este capítulo apresenta os resultados dos procedimentos de identificação através de método ITD e de qualificação utilizando os índices de confiança MCF e MPCW.

6.1. Dados de resposta

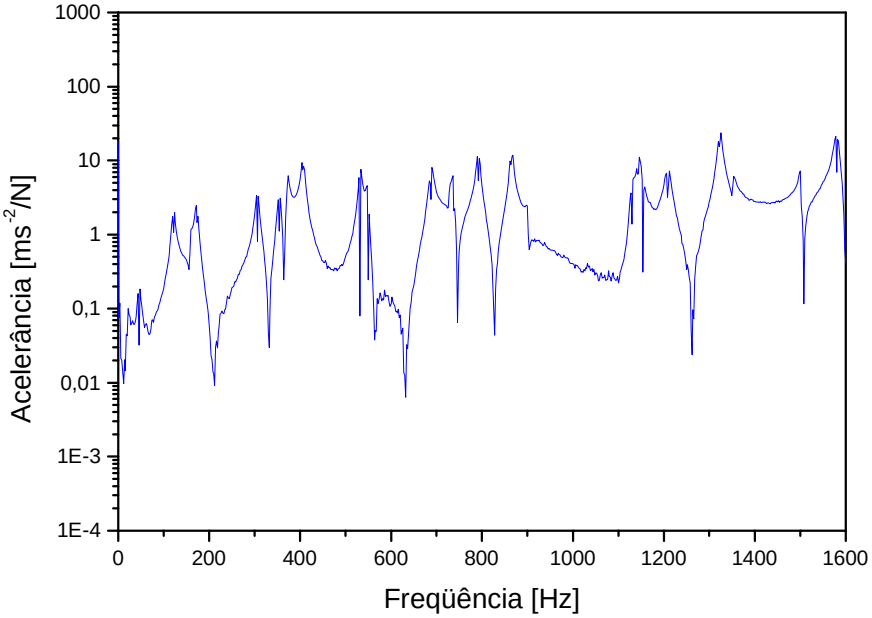
Esta seção apresenta os dados de funções de resposta em freqüência (FRF) medidos sobre a placa de alumínio durante os ensaios experimentais. Estes dados serviram de base para a geração das funções de respostas ao impulso (IRF), estas utilizadas como base do processo de identificação e também são apresentados nesta seção.

As funções de resposta ao impulso foram obtidas através da tomada da transformada inversa de Fourier (IFFT) das funções de resposta em freqüência.

As figuras 6.1 (a) e (b) mostram FRFs medidas nos pontos 01 e 35 da placa.



(a) FRF medida no ponto 01



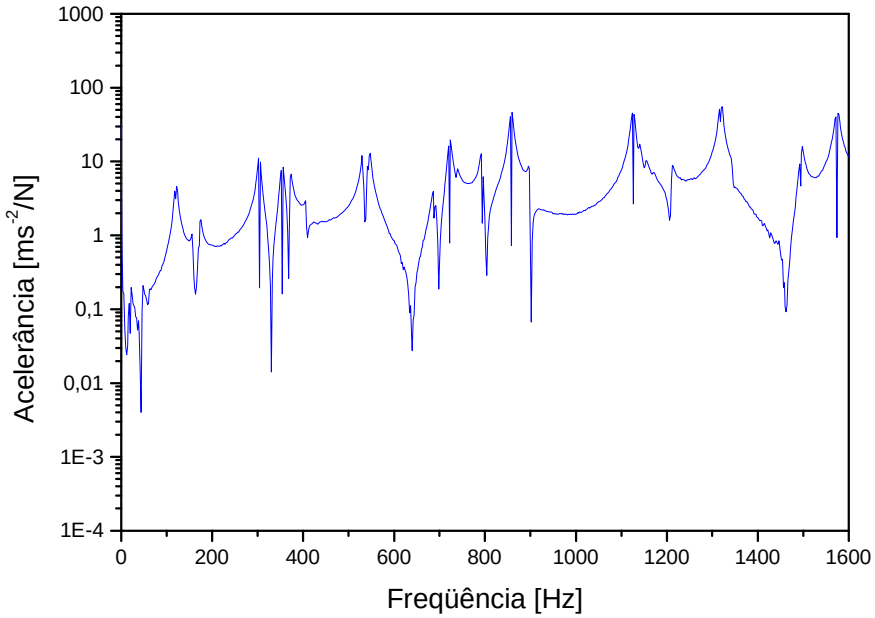
(b) FRF medida no ponto 35

Figura 6.1 – Funções de resposta em freqüência – pontos 01 (a) e 35 (b)

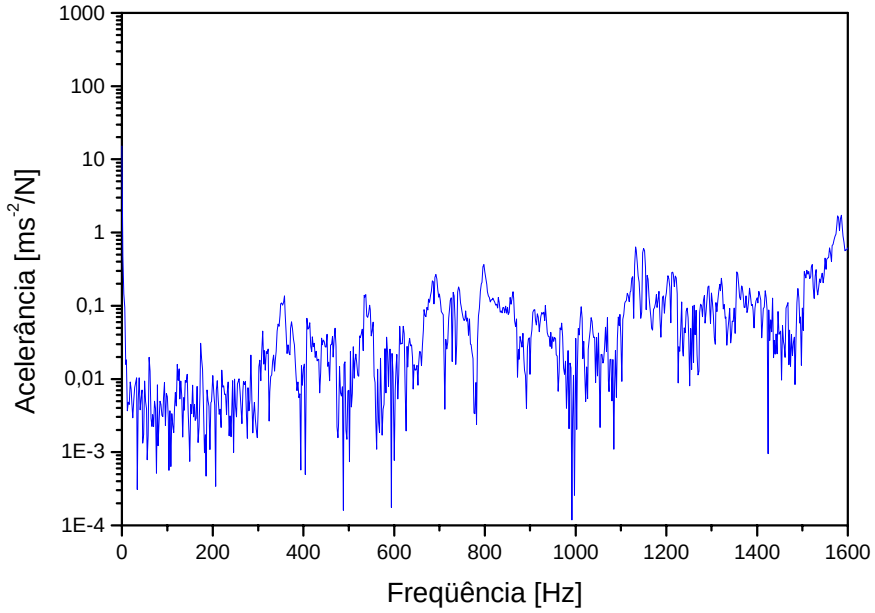
O ponto 01 está localizado em um dos cantos livres da placa, onde é pouco provável que haja uma linha nodal. Já o ponto 35 está situado na região interna da placa, mais suscetível a se encontrar

sobre uma linha nodal, fato este que mascara a identificação.

As figuras 6.2 (a) e (b) mostram as FRFs medidas nos pontos 51 e 70.



(a) FRF medida no ponto 51



(b) FRF medida no ponto 70

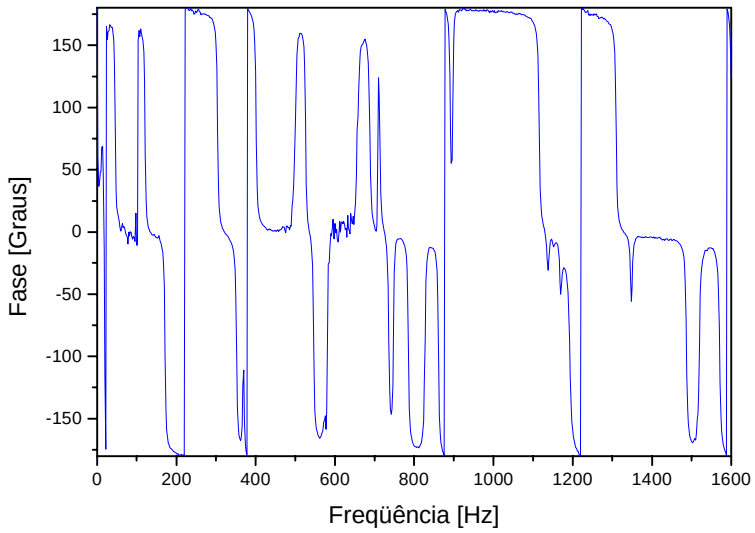
Figura 6.2 – Funções de resposta em freqüência – pontos 51 (a) e 70 (b)

O ponto 51 está situado no centro da borda anterior da placa, logo, é esperado que o comportamento da FRF neste ponto apresente

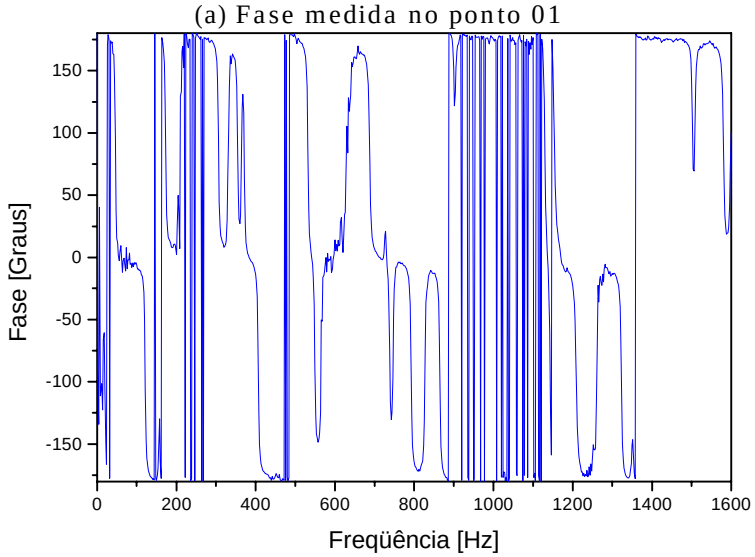
semelhanças com a FRF medida no ponto 01, diferentemente da FRF medida no ponto 70, na região do engaste.

As medidas tomadas nos pontos situados na borda anterior da placa (lado oposto ao engaste) normalmente apresentam maior concentração modal, dado o maior número de picos nas FRFs. Na FRF medida sobre o ponto 70, os níveis de ruído são evidentemente altos, visto que os deslocamentos observados em todos os pontos da região engastada são pequenos e a relação sinal/ruído, desfavorável.

A análise dos diagramas de fase também se faz necessária.



(a) Fase medida no ponto 01

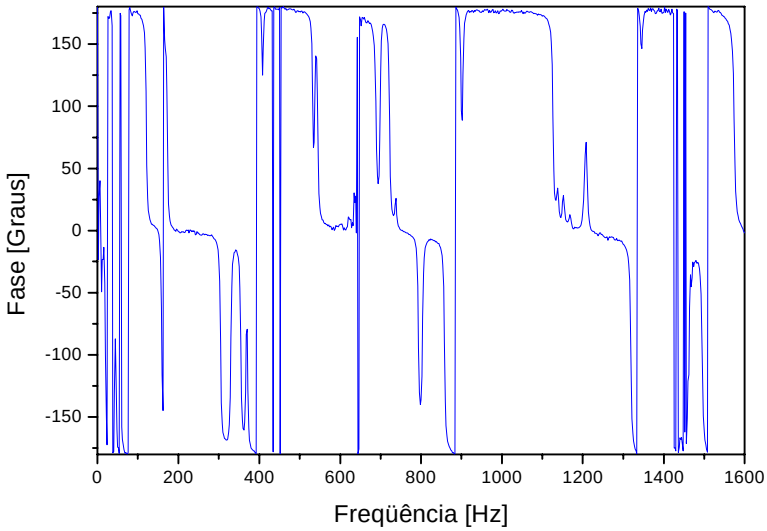


(b) Fase medida no ponto 35

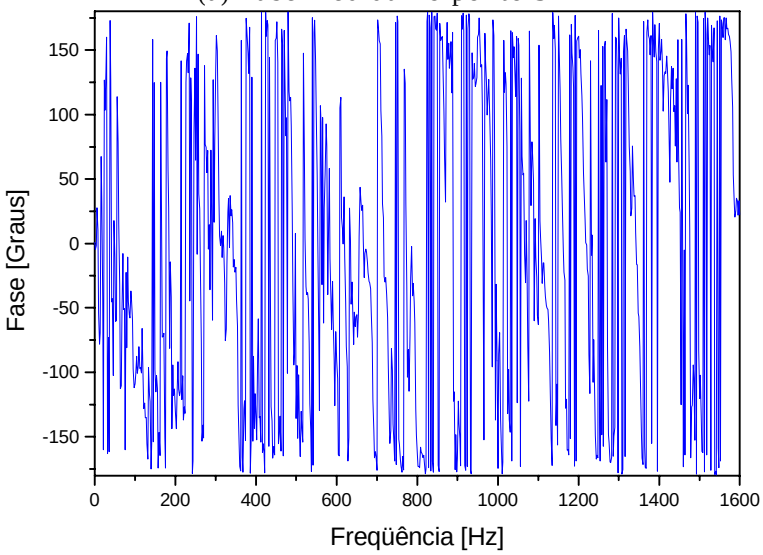
Figura 6.3 – Diagramas de fase - pontos 01 (a) e 35 (b)

Nos diagramas de fase também é possível observar a influência da posição da medida na qualidade dos dados. As figuras 6.3 (a) e (b) mostram os diagramas de fase das medidas de FRF correspondentes aos pontos 01 e 35 da placa, respectivamente, e as figuras 6.4 (a) e (b) ilustram as medidas de fase dos pontos 51 e 70.

Da mesma forma que nas figuras das FRFs, os diagramas de fase das medidas dos pontos 01 e 51 tendem a apresentar os pontos de mudança de sinal com uma clareza muito superior à apresentada nos diagramas dos pontos 35 e, especialmente no ponto 70.



(a) Fase medida no ponto 51

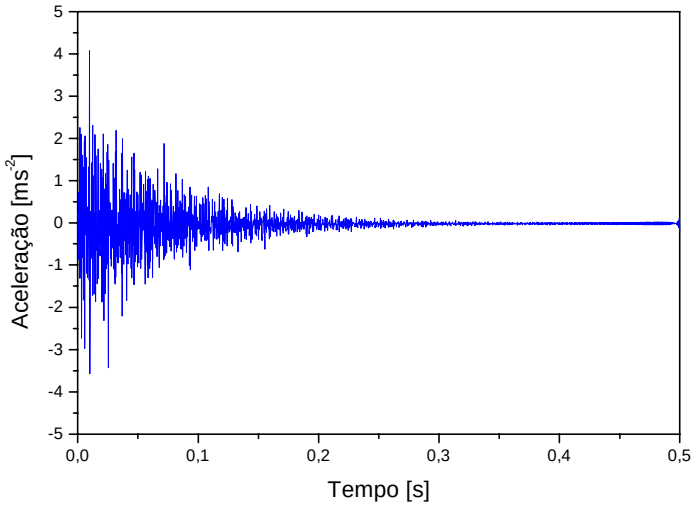


(b) Fase medida no ponto 70

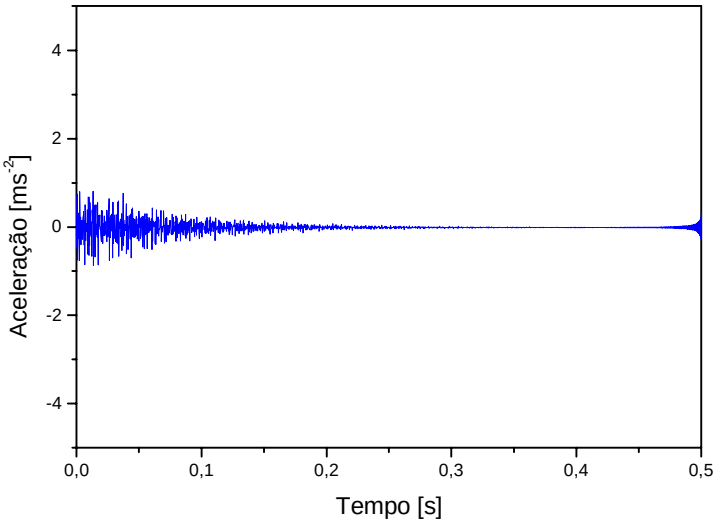
Figura 6.4 – Diagramas de fase - pontos 51 (a) e 70 (b)

Dadas as funções de resposta em freqüência, foram obtidas as funções de resposta ao impulso, através da aplicação da transformada inversa de Fourier (IFFT).

As figuras 6.5 (a) e (b) ilustram as respostas ao impulso obtidas através da IFFT das respostas em freqüência medidas nos pontos 01 e 35, respectivamente.



(a) IRF medida no ponto 01

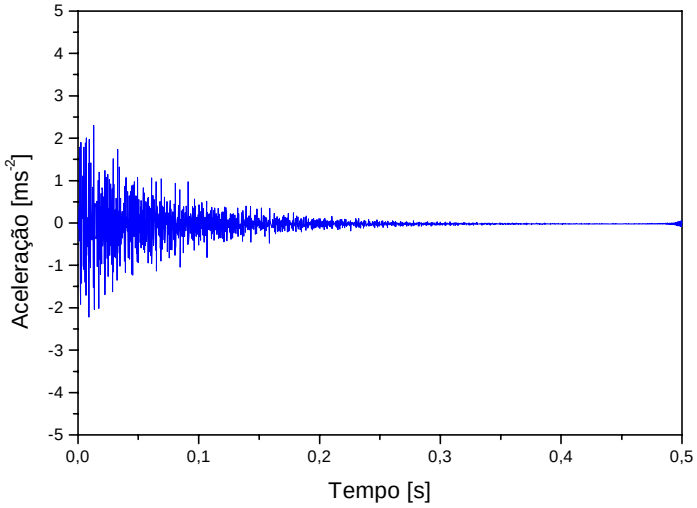


(b) IRF medida no ponto 35

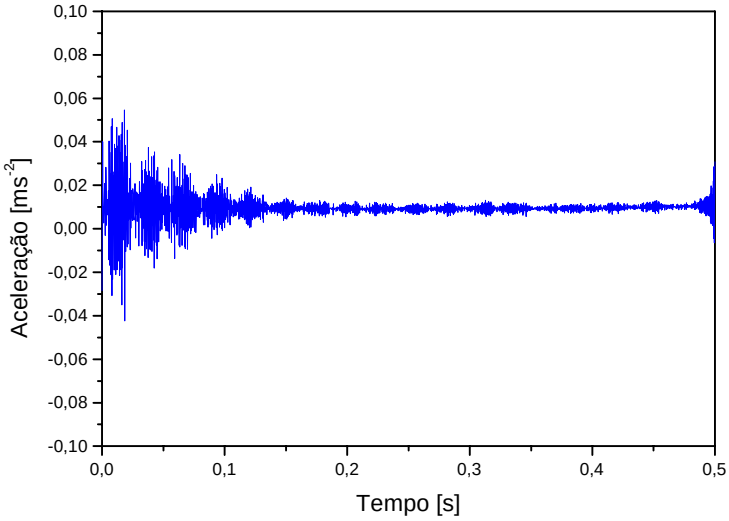
Figura 6.5 – Respostas ao impulso - pontos 01 (a) e 35 (b)

Uma comparação entre as respostas mostra que, no ponto 01, a IRF apresenta maiores amplitudes que a IRF no ponto 35, fato que

pode ser considerado um indicativo de que a IFFT forneceu bons resultados. Este é o resultado esperado, pois o ponto 01, mais distante do engaste que o ponto 35, movimenta-se com maior intensidade. Da mesma forma, o comportamento da IRF medida no ponto 51, apresentada na figura 6.6 (a), é comparável à IRF do ponto 01, devido à localização do ponto de medida. A figura 6.6 (b) exibe a IRF no ponto 70. Este ponto apresentou baixa amplitude comparado aos demais, o que representa um indício da boa consistência dos dados temporais.



(a) IRF medida no ponto 51



(b) IRF medida no ponto 70

Figura 6.6 – Respostas ao impulso - pontos 51 (a) e 70 (b)

Deve ser salientado que o ligeiro aumento na amplitude da IRF na sua porção final é uma conseqüência do processamento computacional da IFFT, que realiza a transformada inversa *discreta* de Fourier. Estas porções dos dados, no entanto, não foram utilizadas nos cálculos de identificação.

6.2. Identificação dos parâmetros modais

A identificação de todos os modos de vibrar da estrutura não ocorreu em uma única ocasião. São necessárias algumas análises para proporcionar a completa identificação do sistema.

Em cada análise, diferentes valores de L (número de colunas da matriz das IRFs) e de k (atraso entre as metades superior e inferior das matrizes de resposta) foram inseridos no algoritmo, que forneceu resultados diferentes para as diversas combinações de valores fornecidos.

As combinações de valores de L e k foram estabelecidas de duas maneiras, uma sistematizada e outra não-sistematizada. A tabela 6.1 contém todos os valores de L e de k utilizados nas combinações sistematizadas.

Tabela 6.1 – Valores utilizados nas combinações sistematizadas: L (a) e k (b)

(a) Número de colunas da matriz de IRFs

L	202	204	208	210	212	214	216	218	220	225	230	240

(b) Atraso entre os dados de resposta

k	02	04	06	08	10	15	20	25	30	40

Utilizando todas as combinações entre os valores da tabela 6.1, o algoritmo foi executado 120 vezes, e os melhores resultados (maiores valores dos índices de confiança MCF e MPCW) identificados

foram selecionados.

Além da investigação sistemática, o algoritmo *IMMAQ* foi executado outras 127 vezes para proporcionar a identificação de modos anteriormente não identificados. Neste caso, os valores de L variaram entre o mínimo de 202 e máximo de 231, e os valores de k variaram entre 5 e 60. Novamente, os resultados que apresentaram melhor qualificação através dos índices foram selecionados.

Das duas séries de análises, foram tomados os melhores modos, assim como as respectivas freqüências naturais e fatores de amortecimento. Deve ser citado que os modos que apresentaram MCF menor que 70% e MPCW menor que 50% simultaneamente não foram reproduzidos graficamente.

A variação dos parâmetros L e k produzem grandes diferenças na qualidade dos modos identificados. Como exemplo de modos mal identificados, a figura 6.7 mostra a representação gráfica do 12º modo, para parâmetros L=218 e k=10. A freqüência natural identificada é f=682 Hz e o fator de amortecimento é ζ=0.2%. Os valores de MCF e MPCW são, respectivamente, 75% e 73%.

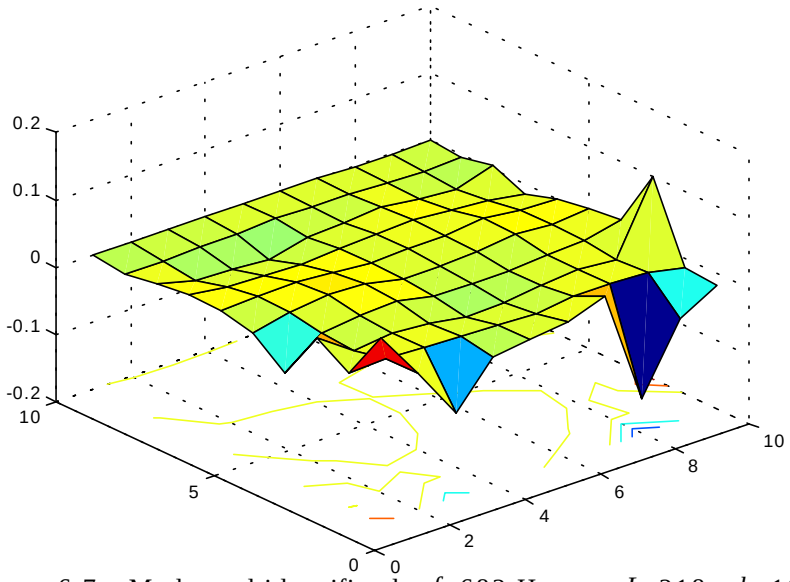


Figura 6.7 – Modo mal identificado, f=682 Hz para L=218 e k=10

Apesar dos valores do MCF e do MPCW superarem os limites determinados de 70% e 50%, respectivamente, o algoritmo *IMMAQ* pôde identificar o mesmo modo de maneira mais confiável através da utilização de outros parâmetros L e k.

Em outras palavras, as várias execuções do algoritmo *IMMAQ* puderam, em algum momento, identificar o modo com maior confiança, produzindo maiores valores de MCF e MPCW.

6.3. Resultado final

O resultado final do processo de identificação é composto dos parâmetros globais do sistema sob inspeção, ou seja, as freqüências naturais e os fatores de amortecimento modal, e também dos modos de vibrar da estrutura.

De modo a localizar a identificação de um determinado modo dentro de todo o processo de identificação dos parâmetros modais da estrutura, a tabela 6.2 fornece, além dos valores das freqüências naturais e dos fatores de amortecimento, os parâmetros L e k. Desta forma é possível conhecer qual estimativa foi capaz de fornecer a melhor identificação.

Também são fornecidos os valores do MCF e do MPCW de cada modo. A grandeza dos índices está relacionada com qualidade da representação gráfica do modo real. De modo geral, há uma boa associação entre valores altos dos índices de confiança e formas modais mais harmoniosas e de maior plasticidade. Os modos com índices menos expressivos ou que se encontram muito próximos aos seus limites tendem a fornecer representações gráficas visualmente mais precárias.

Finalmente são fornecidos os valores das freqüências naturais

obtidas da análise por elementos finitos realizada por Tsunaki sobre a mesma estrutura para fins de comparação [TSUNAKI, 1999].

Tabela 6.2 – Resultado final da identificação

Ibrahim Time Domain							EF
Modo	f_{nD} **[Hz]**	ζ_n **%**	**MCF %**	**MPCW %**	L	k	f_n **[Hz]**
1.	21,7	1,55	75	71	200	25	20,0
2.	45,8	3,62	88	98	202	23	48,4
3.	121,4	1,37	99	99	200	03	122,1
4.	158,5	1,87	92	80	202	06	156,6
5.	172,9	0,83	99	96	204	10	177,0
6.	305,9	1,13	92	94	212	10	310,1
7.	354,5	0,38	96	84	214	10	353,6
8.	368,1	0,33	84	75	214	10	368,4
9.	406,5	0,45	96	95	202	20	408,9
10.	532,4	0,45	86	67	216	40	533,7
11.	548,7	0,55	82	69	210	10	556,9
12.	685,5	0,46	97	96	202	05	686,2
13.	725,8	0,02	73	52	230	40	717,8
14.	738,2	0,28	84	73	204	25	741,9
15.	794,7	0,06	99	96	214	10	801,1
16.	871,5	0,35	97	96	240	02	862,6
17.	894,8	0,06	93	75	225	02	908,1
18.	1123,0	0,25	87	65	202	06	1133,7
19.	1155,8	0,20	84	72	218	10	1150,7
20.	1153,1	0,35	73	51	210	25	1152,9
21.	1169,0	0,06	73	63	218	10	1165,8
22.	1208,6	0,23	88	87	204	23	1204,7
23.	1320,1	0,15	98	97	202	06	1313,3
24.	1350,1	0,18	77	84	216	10	1360,9
25.	1494,1	0,60	83	69	202	03	1488,3
26.	1500,7	0,11	80	85	204	14	1515,7
27.	1577,9	0,16	96	84	210	11	1583,2

A seguir, são apresentadas as representações gráficas dos

modos de vibrar identificados e qualificados da estrutura de teste.

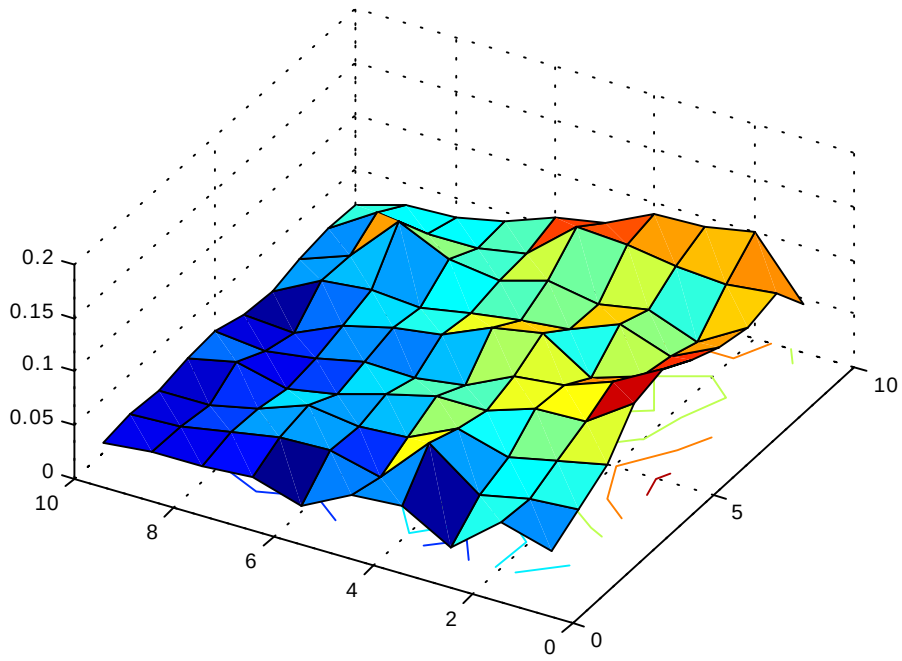


Figura 6.8 – 1º modo - 21,7 Hz

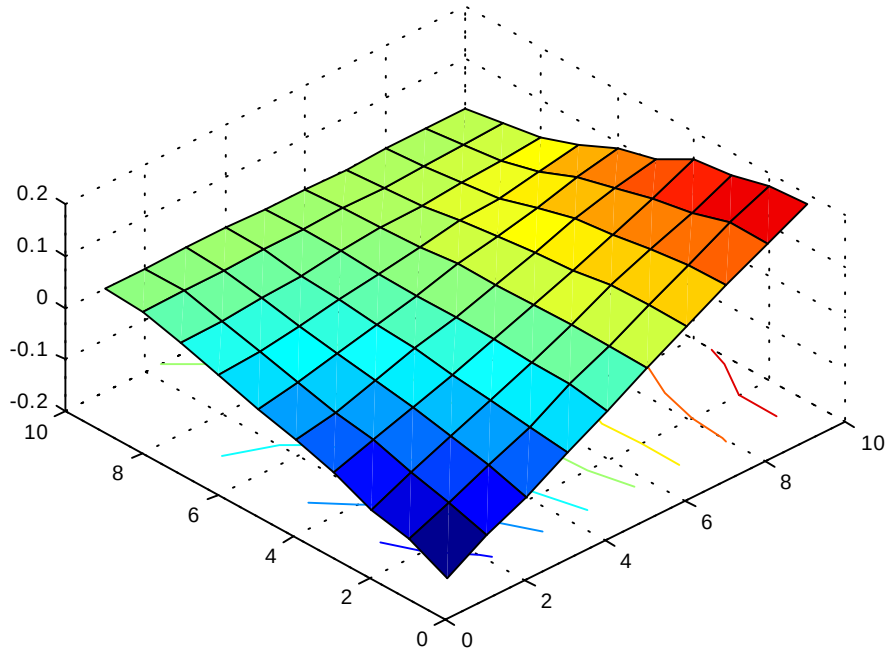


Figura 6.9 – 2º modo – 45,8 Hz

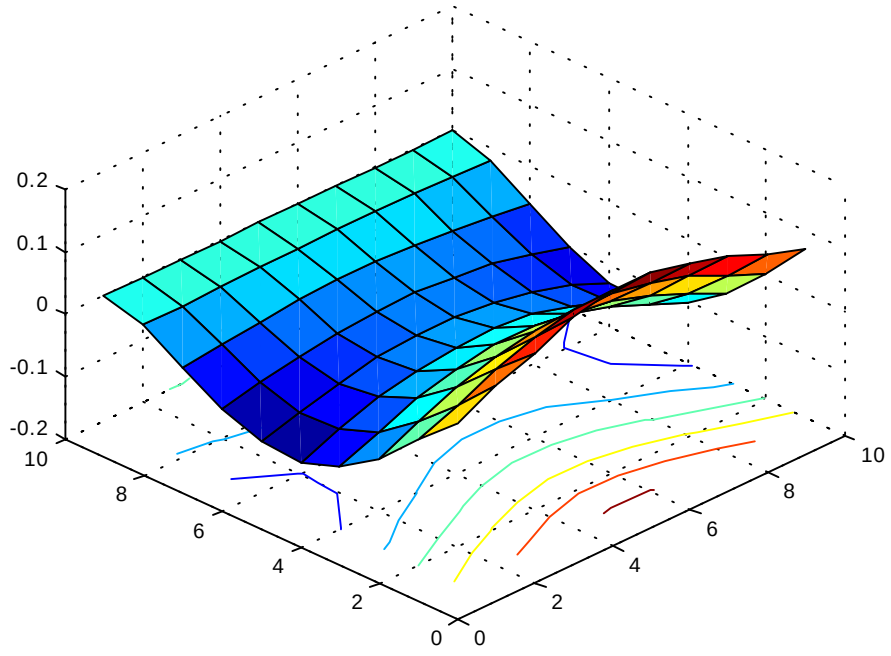


Figura 6.10 – 3º modo – 121,4 Hz

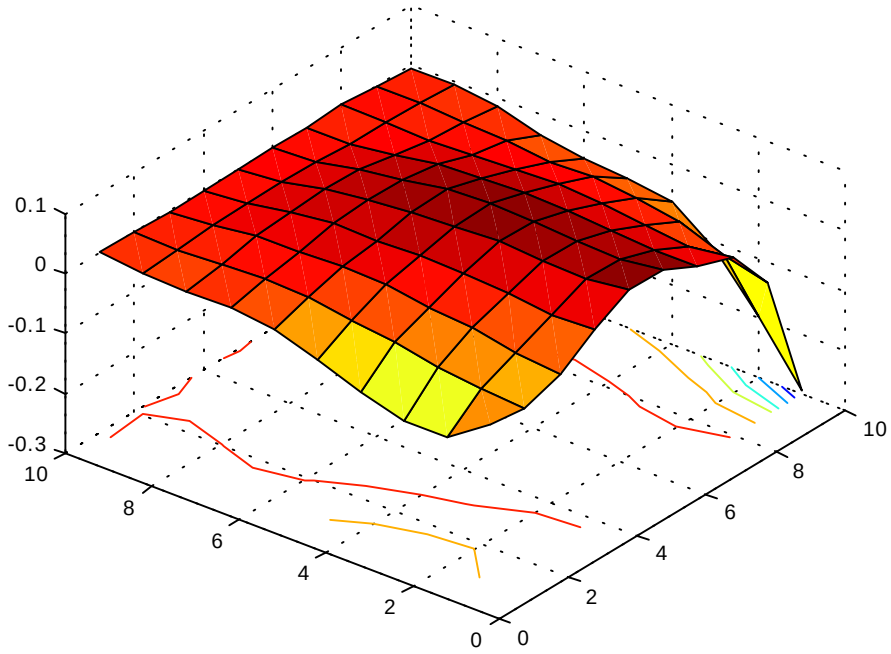


Figura 6.11 – 4º modo – 158,5 Hz

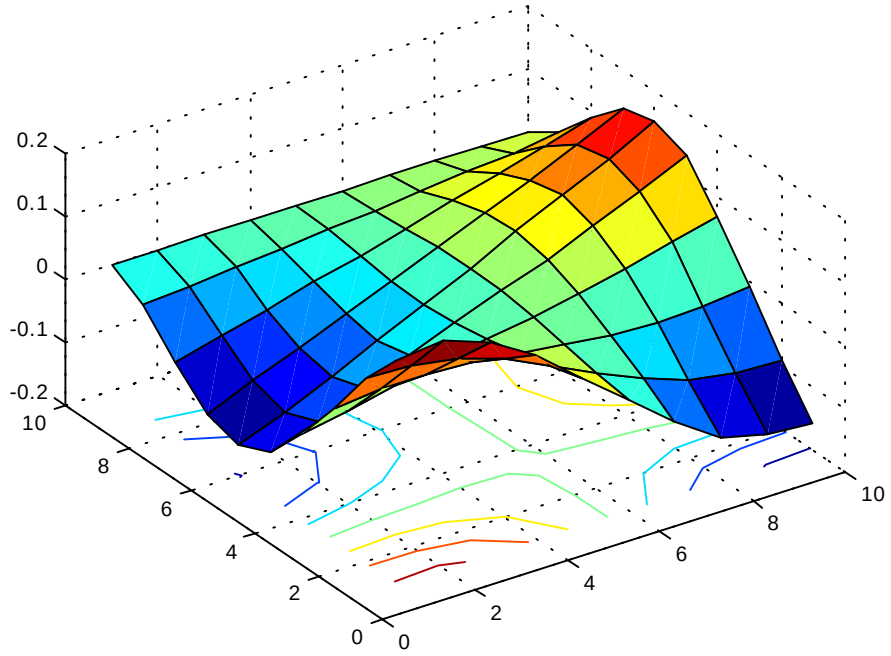


Figura 6.12 – 5º modo – 172,9 Hz

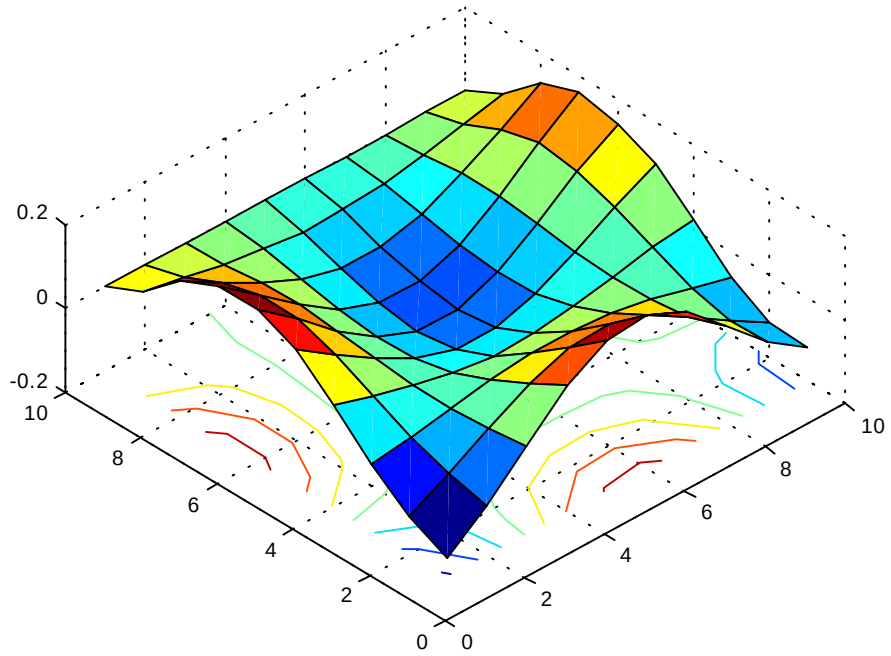


Figura 6.13 – 6º modo – 305,9 Hz

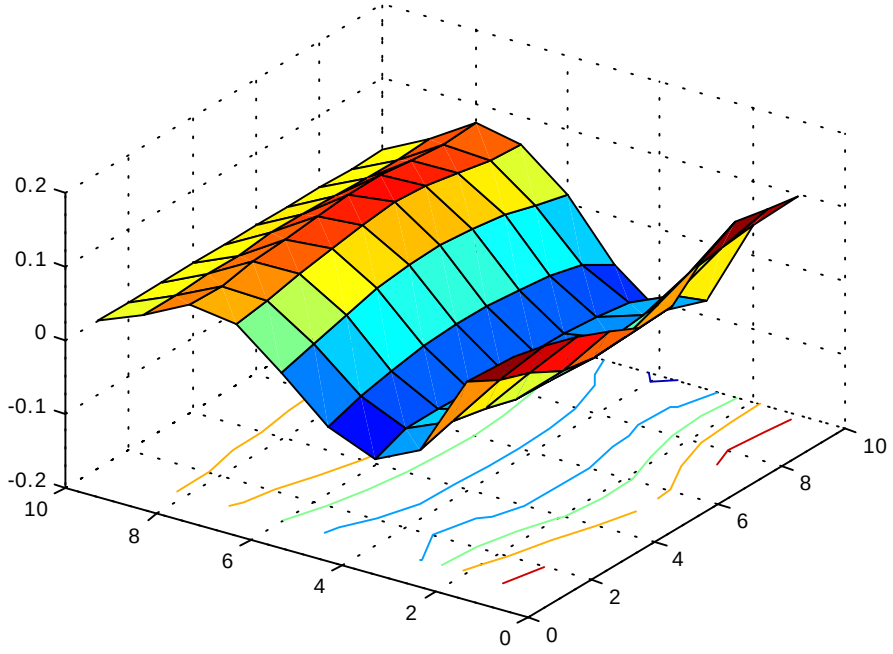


Figura 6.14 – 7º modo – 354,5 Hz

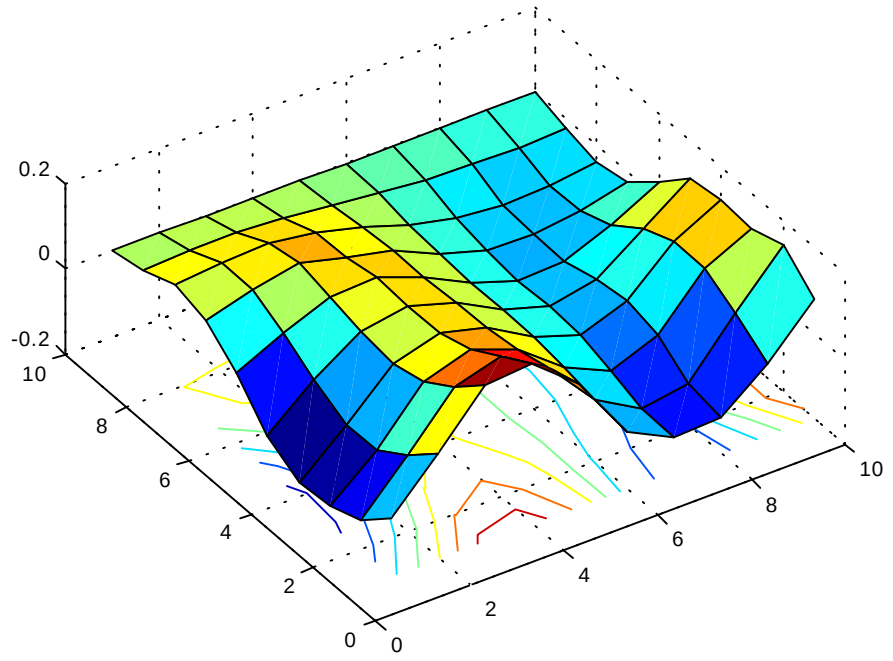


Figura 6.15 – 8º modo – 368,1 Hz

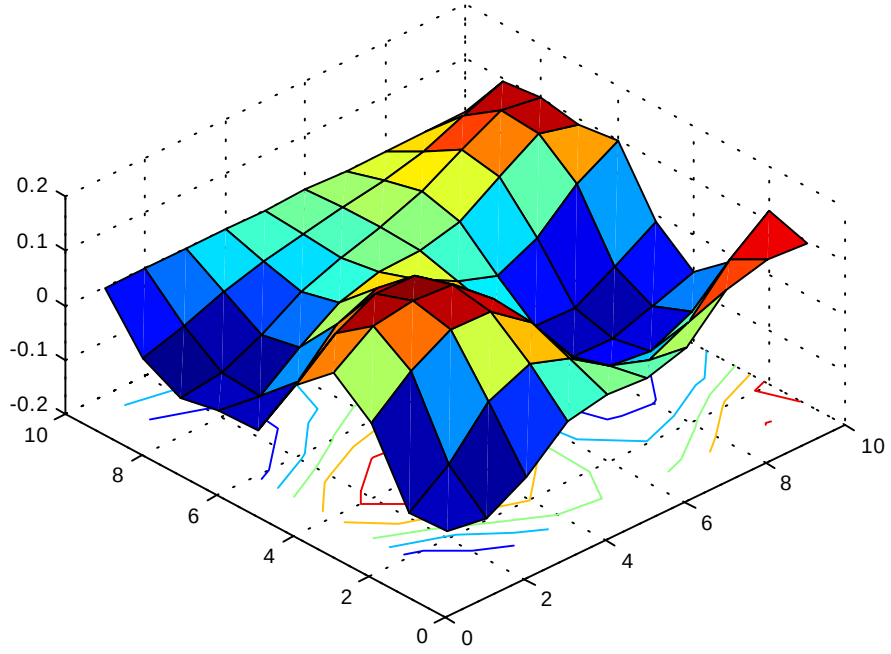


Figura 6.16 – 9º modo – 406,5 Hz

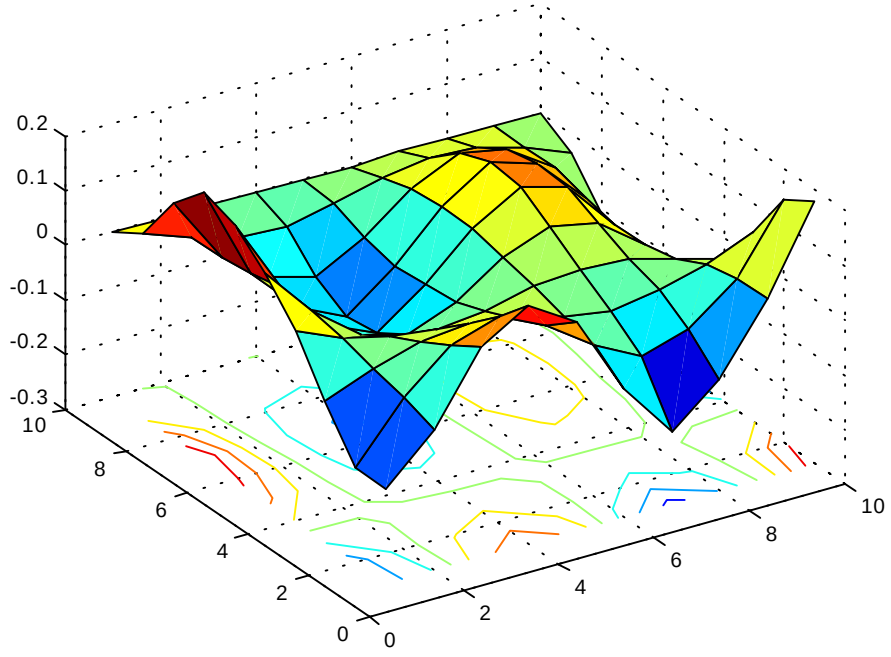


Figura 6.17 – 10º modo – 532,4 Hz

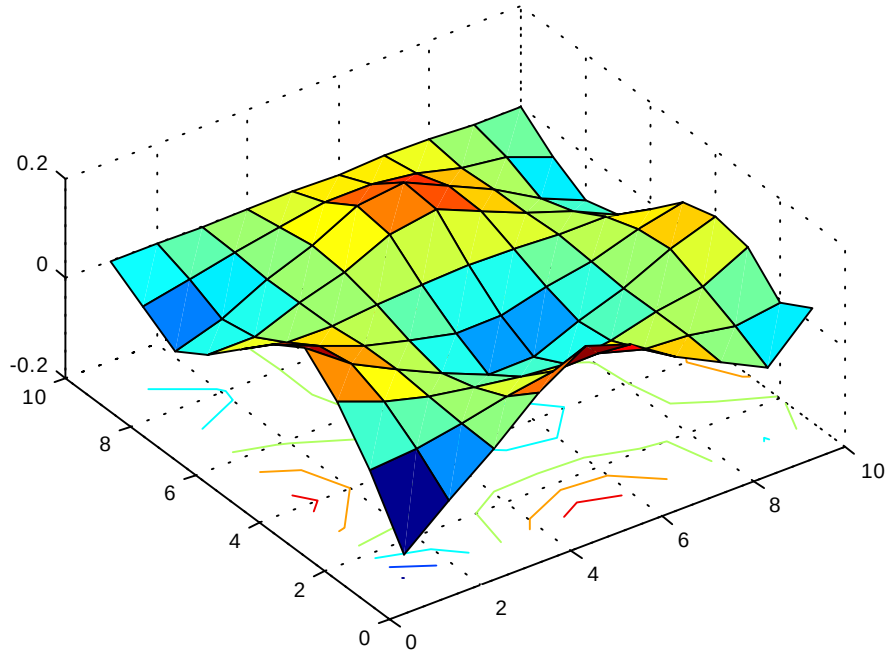


Figura 6.18 – 11º modo – 548,7 Hz

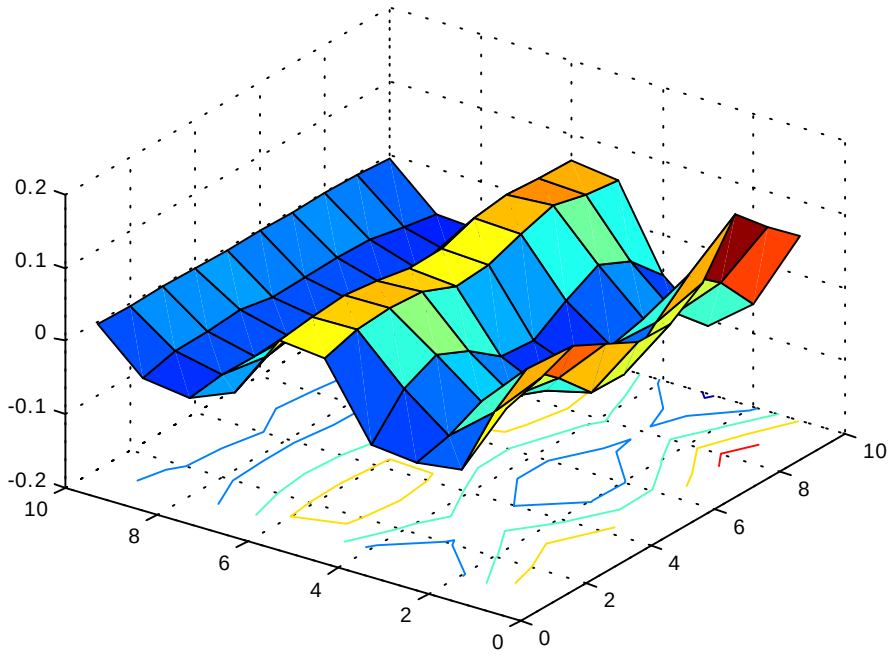


Figura 6.19 – 12º modo – 685,5 Hz

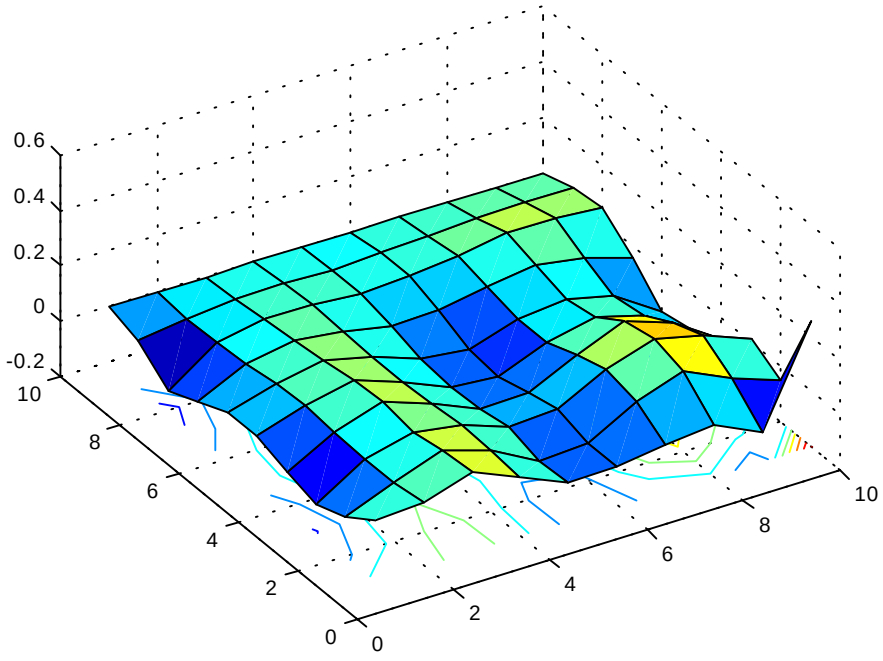


Figura 6.20 – 13º modo – 725,8 Hz

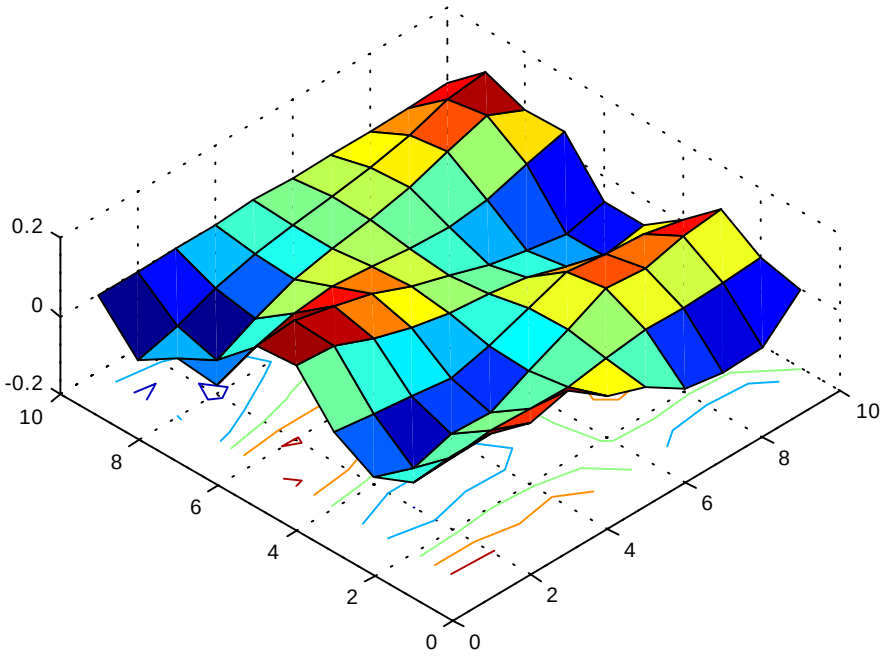


Figura 6.21 – 14º modo – 738,2 Hz

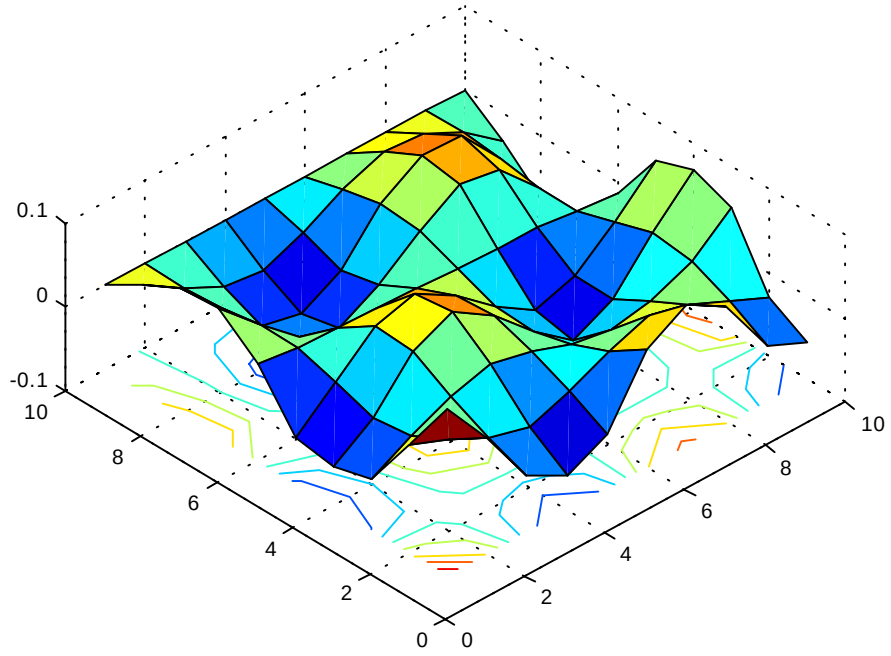


Figura 6.22 – 15º modo – 794,7 Hz

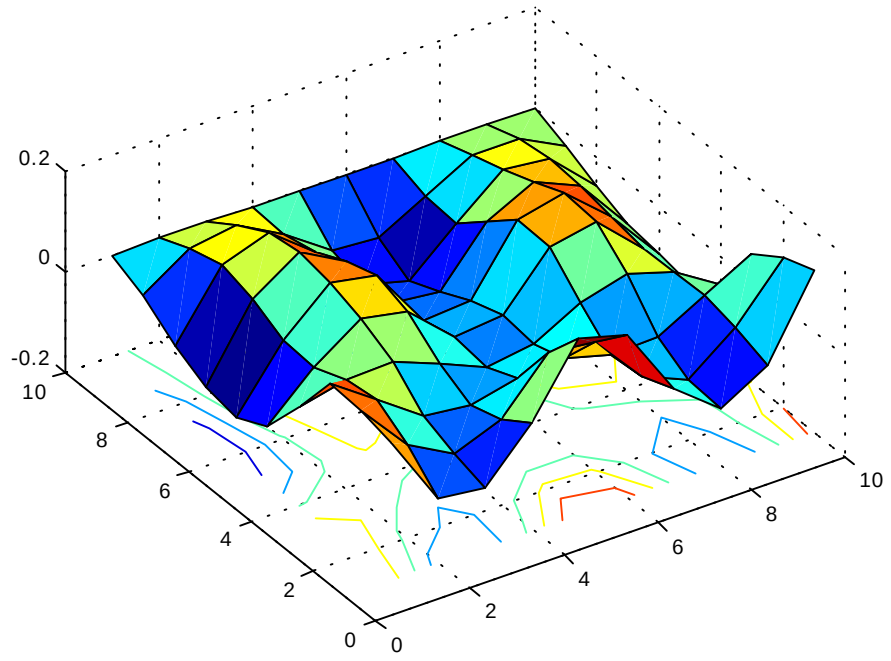


Figura 6.23 – 16º modo – 871,5 Hz

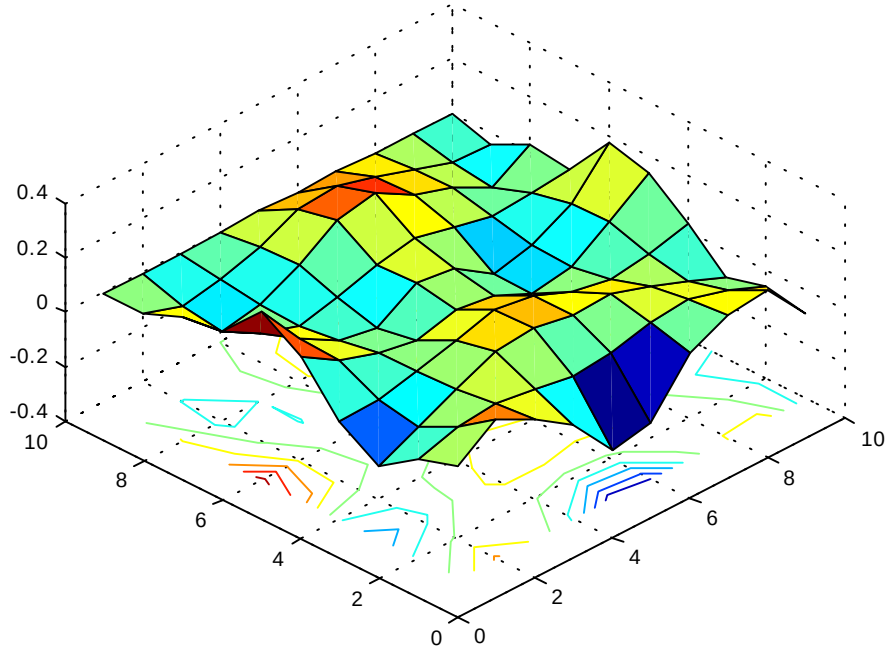


Figura 6.24 – 17º modo – 894,8 Hz

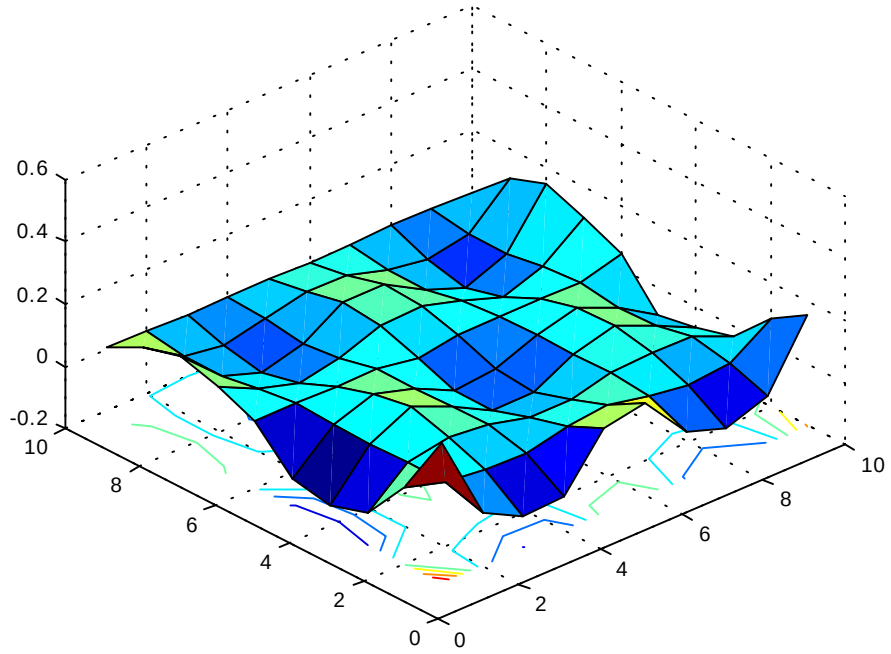


Figura 6.25 – 18º modo – 1123,0 Hz

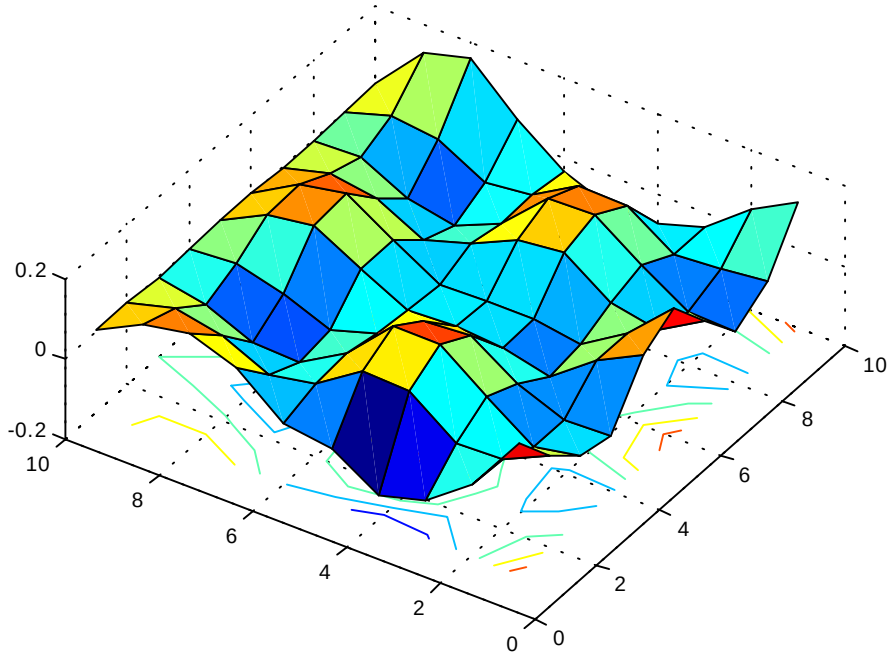


Figura 6.26 – 19º modo – 1155 Hz

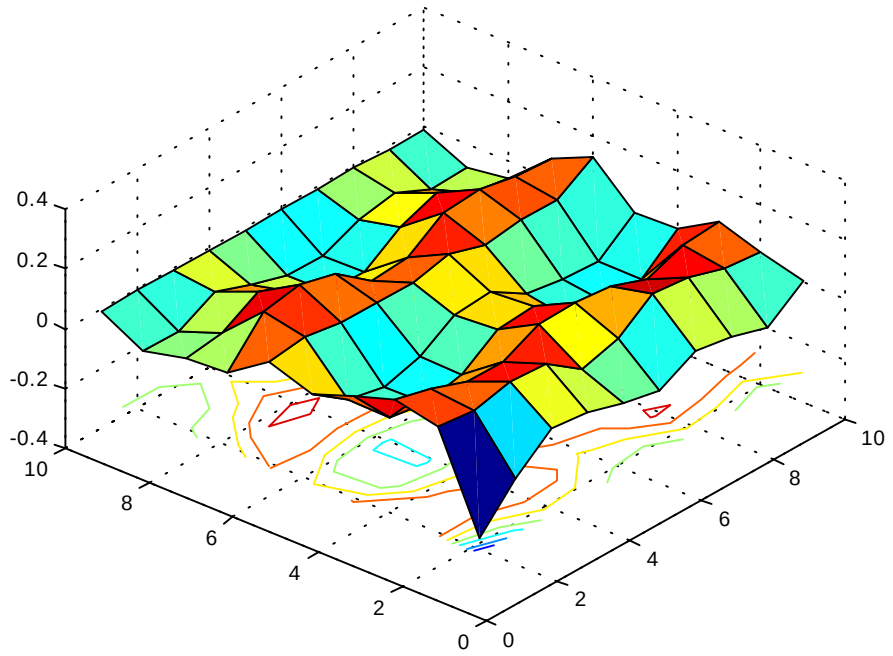


Figura 6.27 – 20º modo – 1153,1 Hz

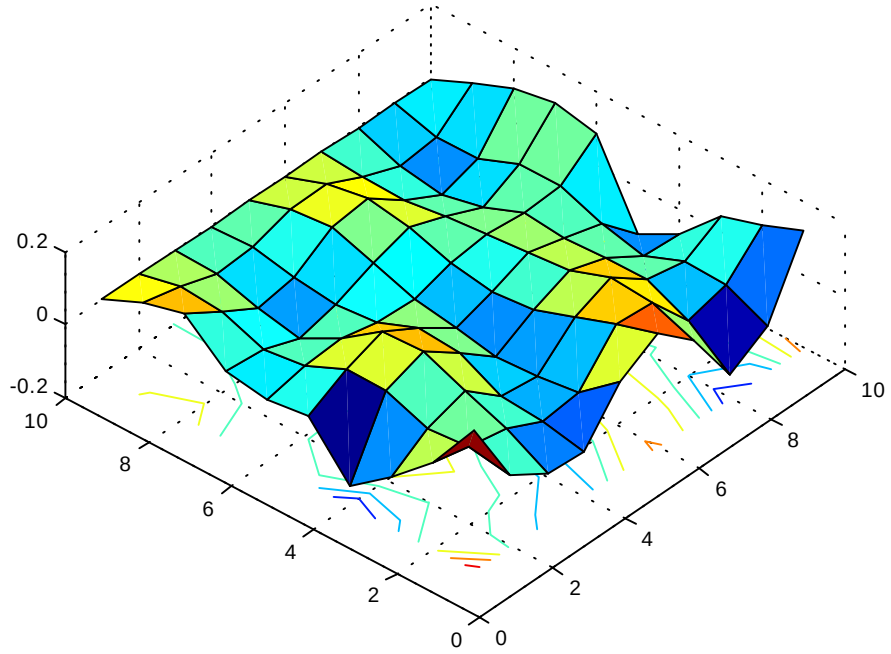


Figura 6.28 – 21º modo – 1169,0 Hz

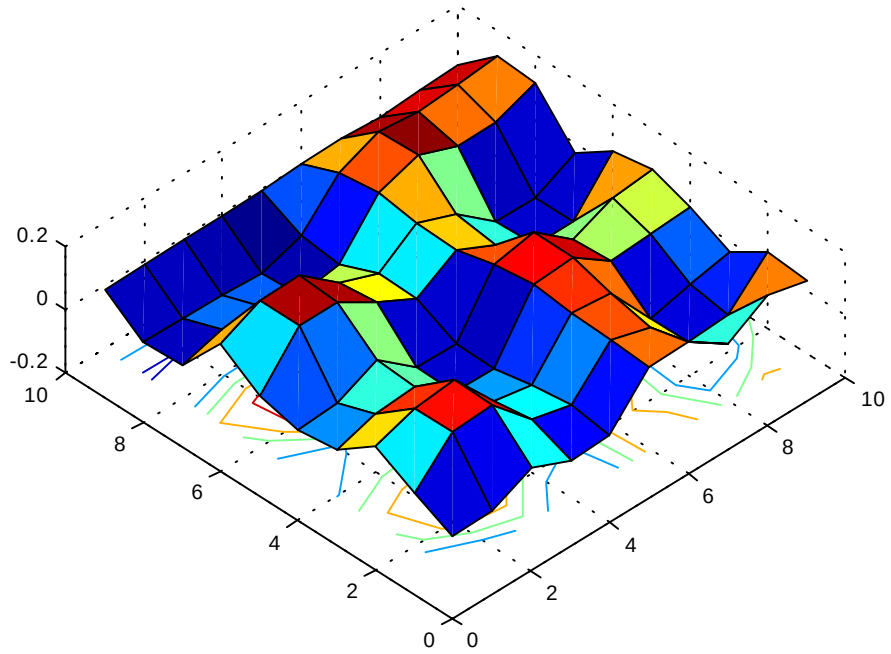


Figura 6.29 – 22º modo – 1208,6 Hz

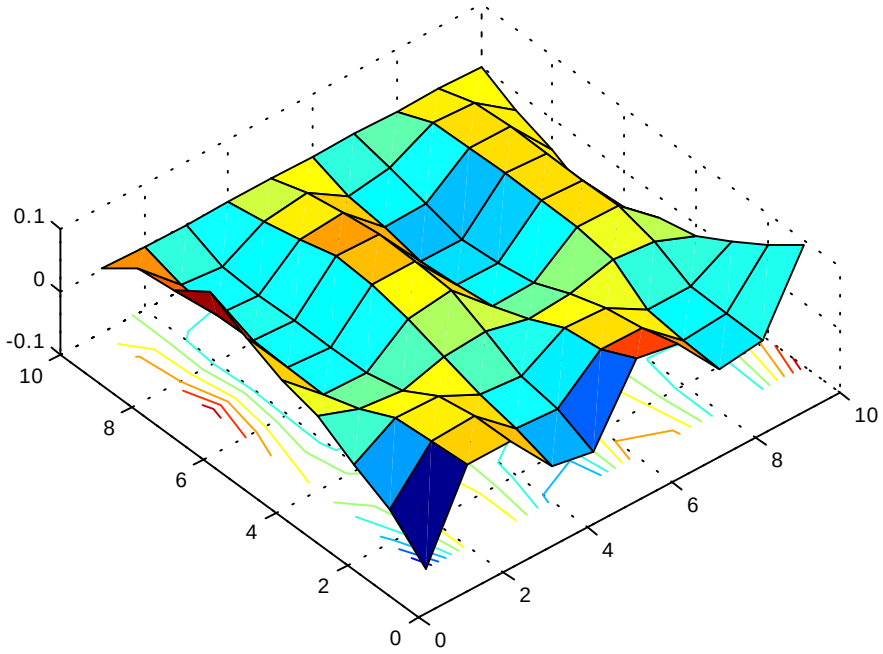


Figura 6.30 – 23º modo – 1320,1 Hz

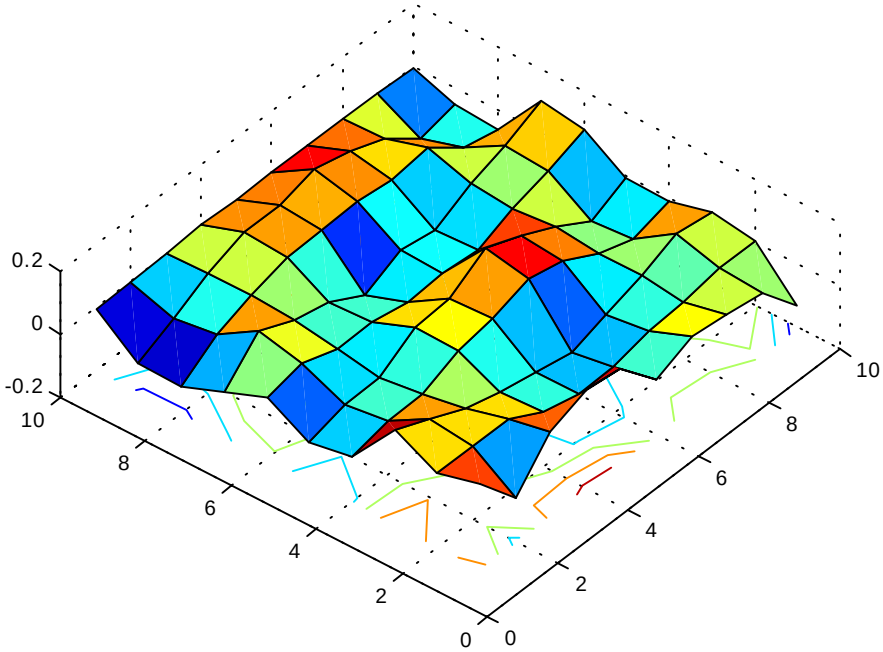


Figura 6.31 – 24º modo – 1350,1 Hz

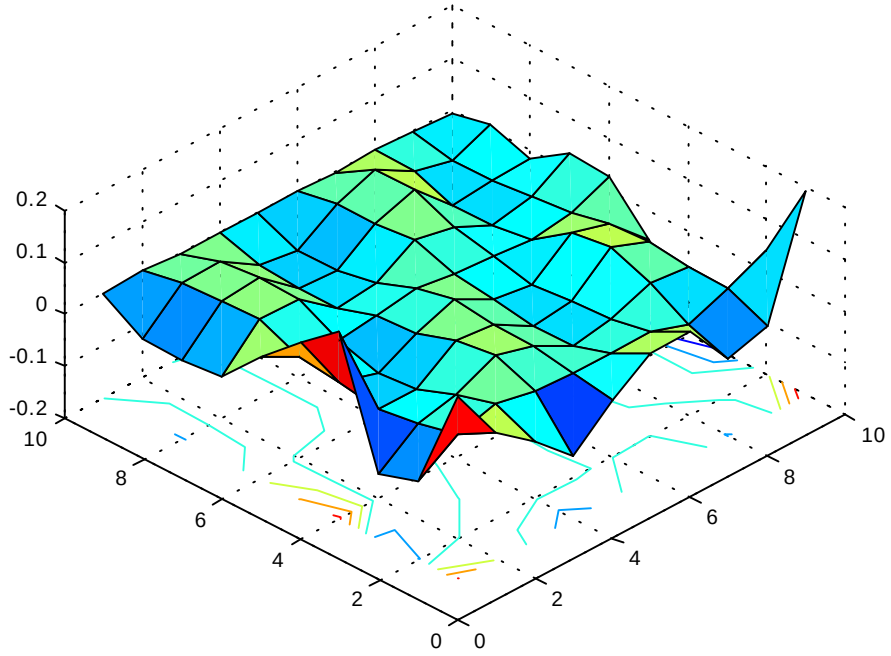


Figura 6.32 – 25º modo – 1494,1 Hz

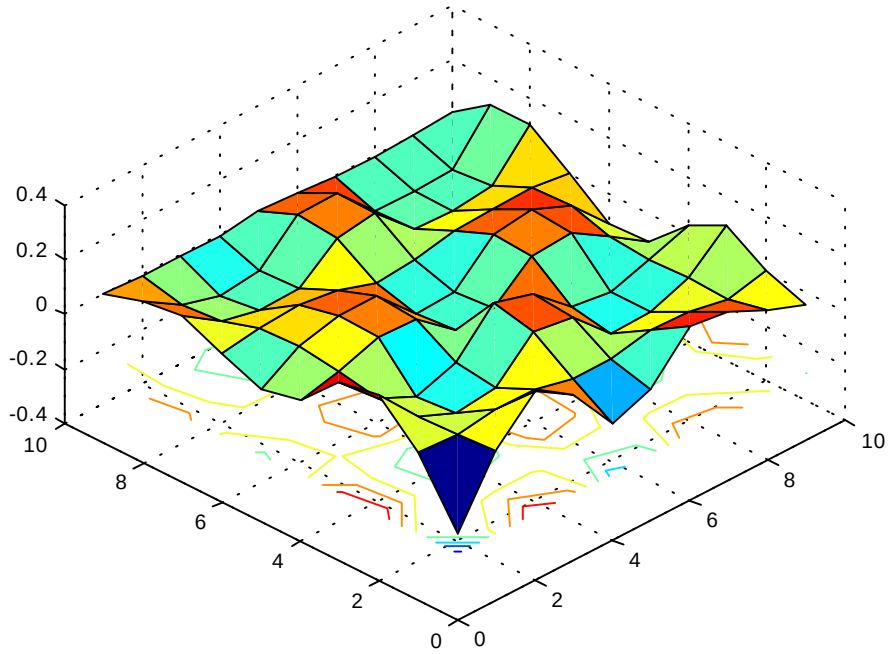


Figura 6.33 – 26º modo – 1500,7 Hz

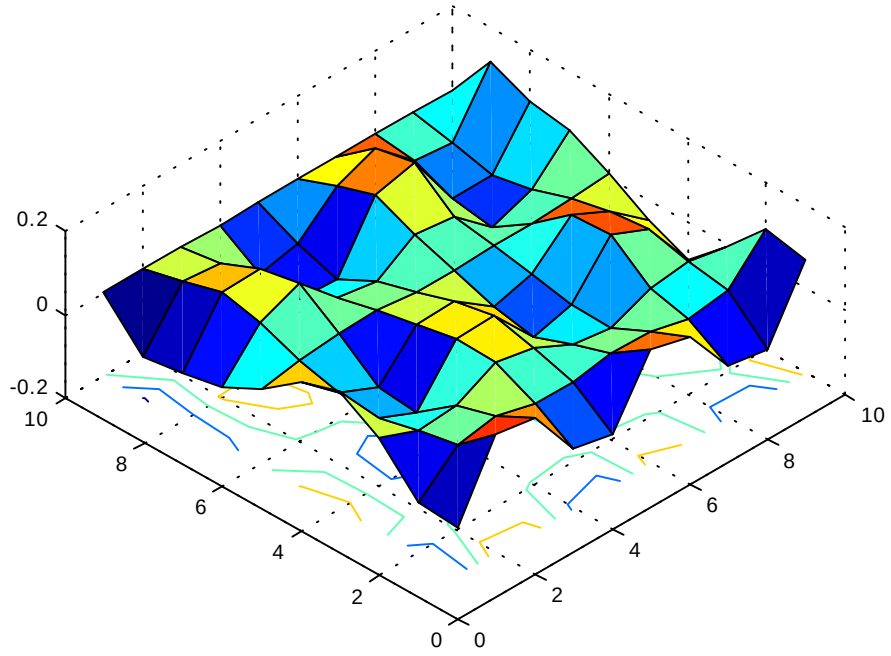


Figura 6.34 – 27º modo – 1577,9 Hz

Os resultados apresentados nesta seção são considerados definitivos para a análise proposta. Entretanto, os empregos de outros métodos de identificação ou outros índices de confiança podem gerar resultados diferentes. Vale a pena lembrar que até mesmo a habilidade do experimentador pode proporcionar diferenças significativas entre ensaios, principalmente em ensaios de impacto, como realizado neste trabalho.

Capítulo 7

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

O Método de Ibrahim no Domínio do Tempo foi utilizado na análise de dados obtidos de um modelo experimental e resultados consistentes foram alcançados.

Em sua grande parte, os méritos do êxito dos procedimentos de identificação de parâmetros modais implementados neste trabalho devem-se à reconhecida eficiência do método ITD desde sua proposta inicial.

Torna-se necessário salientar que a utilização do método ITD requer um aparato instrumental mínimo se levado em consideração a profusão e acessibilidade de tecnologias relacionadas à área de instrumentação e computacional nos dias de hoje.

O tratamento dos dados experimentais efetuado através do método ITD conduziu a resultados preliminares que posteriormente foram submetidos a um processo de qualificação através de dois índices de confiança, sendo o primeiro o MCF e o último o MPCW. Esta operação definiu o resultado final do processo de identificação de parâmetros modais.

A análise deste conjunto final de resultados, assim como dos meios lançados para alcançar este fim permitiu concluir que:

- A utilização do método ITD como base de um procedimento de identificação de parâmetros modais de estruturas requer um aparato instrumental e computacional modesto, comparado aos equipamentos disponíveis no mercado atual;

- O método ITD mostrou-se facilmente implementável e permite a utilização direta dos dados de resposta ao impulso medidos sobre a estrutura;

- Os valores das freqüências naturais e dos fatores de amortecimento obtidos revelaram-se coerentes e compatíveis com resultados obtidos previamente por Tsunaki sobre a mesma estrutura, na mesma faixa de freqüências [TSUNAKI, 1999];

- O número de modos qualificados através dos índices de confiança (MCF e MPCW) corresponde ao número de modos resultante da análise por elementos finitos

- Os três algoritmos utilizados nos processos de manipulação de dados, de identificação modal propriamente dita e de geração de gráficos apresentaram alta estabilidade numérica;

- A utilização de respostas ao impulso como forma de simular a simultaneidade da aquisição dos dados de entrada mostrou-se adequada, mesmo tendo sido o método ITD inicialmente desenvolvido considerando-se a utilização de resposta livre;

- A qualificação dos modos provenientes do processo de identificação mostrou-se coerente;

- A adaptação do uso do MPCW associado ao método ITD promoveu bons resultados, mesmo sendo este índice proposto e desenvolvido para qualificar a consistência espacial dos modos identificados através do Algoritmo de Realização de Sistemas (ERA);

Baseado nas conclusões extraídas , as seguintes sugestões podem ser propostas para futuros trabalhos sobre este tema:

- Automatização do processo computacional, de modo a variar de forma predeterminada os parâmetros L e k do algoritmo de identificação;

- Utilizar dados de resposta livre, mantendo um ponto da estrutura como referência para as demais medidas ou produzindo uma série de impactos equivalentes sobre a estrutura por meio de um dispositivo (mecânico ou pneumático);

- Investigar a aplicabilidade do processo de identificação a outras estruturas, tanto mais simples quanto mais

complexas que a placa de alumínio testada e verificar a consistência dos resultados obtidos;

- Comparar a forma de obtenção da matriz do sistema $[A_S]$ utilizada neste trabalho (mínimos quadrados duplos) com a obtenção através de mínimos quadrados simples, tanto realizando pré-multiplicação da equação (3.12) por $[X]^T$ quanto por $[\overline{X}]^T$ e também por mínimos quadrados total;

- Programar o método ITD de modo a permitir a realização de análise de qualquer faixa de freqüências especificada pelo usuário (*zoom*).

- Testar a utilização de outras formas de excitação.

Referências bibliográficas

BROWN, D.L.; ALLEMANG, R.J.; ZIMMERMAN, R.; MERGEAY, M. (1979). Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE Technical Paper Series*, n.790221.

COOLEY, J.W.; TUKEY, J.W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, v.19, n.90, p.297-301.

DEBLAUWE, F.; BROWN, D.L.; ALLEMANG, R.J. (1987). The Polyreference Time Domain technique. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.832-845.

EWINS, D.J. (1984). *Modal testing: theory and practice*. Research Studies Press, Letchworth.

EWINS, D.J. IN: BRAUN, S. (1986). *Mechanical signal analysis: theory and applications*. Academic Press, London. Cap. 8, pp 217-261.

FAHEY, S.O'F.; PRATT, J. (1998]. Time domain modal estimation techniques. *Experimental Techniques*, v.22, n.6, p.45-49.

FÜLLEKRUG, U. (1987). Survey of parameter estimation methods in experimental modal analysis. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.460-467.

GAO, Y.; RANDALL, R.B. (2000). The ITD mode-shape coherence and confidence factor and its application to separating eigenvalue positions in the Z-plane. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.14, n.2, p.167-180.

HOLLKAMP, J.J.; BATILL, S.M. (1989). Noise bias in various formulations of Ibrahim's Time Domain technique. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v.27, n.8, p.1142-1145.

IBRAHIM, S.R. (1977). Random decrement technique for modal identification of structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v.14, n.11, p.696-700.

IBRAHIM, S.R. (1978). Modal confidence factor in vibration testing. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v.15, n.5, p.313-316.

IBRAHIM, S.R. (1983). Computation of normal modes from identified complex modes. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v.21, n.3, p.446-451.

IBRAHIM, S.R. (1986). Double least squares approach for use in structural modal identification. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v.24, n.3, p.499-503.

IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. (1973). A time domain modal vibration test technique. *Shock and Vibration Bulletin*, v.43, n.4, p.21-37.

IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. (1976). The experimental determination of vibration parameters from time responses. *Shock and Vibration Bulletin*, v.46, p.187-196.

IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. (1977). A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. *Shock and Vibration Bulletin*, v.47, p.184-198.

IBRAHIM, S.R.; PAPPA, R.S. (1982). Large modal survey testing using the Ibrahim Time Domain identification technique. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v.19, n.5, p.459-465.

INMAN, D.J. (1989). *Vibration with control, measurement and stability*. New Jersey, Prentice Hall.

JUANG, J.N.; PAPPA, R.S. (1985). An eigensystem realization Algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v.8, n.5, p.620-627.

LEURIDAN, J.M.; BROWN, D.L.; ALLEMANG, R.J. (1986). Time domain parameter identification methods for linear modal analysis: a unifying approach. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v.108, p.1-8.

LIANG, Z.; INMAN, D.J. (1987). An alternative time domain method for modal analysis. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.127-132.

MAIA, N.M.M.; SILVA, J.M.M. (1997). *Theoretical and experimental modal analysis*. New York, John Wiley & Sons.

McCONNELL, K.G. (1995). *Vibration testing: theory and practice*. New York, John Wiley & Sons.

PAPPA, R.S.; ELLIOT, K.B.; SCHENK, A. (1993). Consistent-mode indicator for the Eigensystem Realization Algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v.16, n.5, p.852-858.

PAZIANI, F.T.; TSUNAKI, R.H.; MUCHERONI, M.F. (2001). Identificação de parâmetros modais através de métodos no domínio do tempo (CD-ROM). *22o Congresso Ibero Latino-americano em Métodos Computacionais na Engenharia*. Campinas,

PI, Y.L; MICKLEBOROUGH, N.C. (1989). Modal identification of a structure in the time domain. *Computers and Structures*, v.32, n.5, p.1105-1115.

PORCHIA, L.F.S. (1997). *Identificação de sistemas dinâmicos no domínio da freqüência: análise comparativa de alguns métodos* Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RICHARDSON, M.H.; FORMENTI, D.L. (1995). Global curve fitting of frequency response measurements using the Rational Fraction

Polynomial method. *Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference*, Orlando, p.390-397.

SHAO, Z.A.; JIANG, T.Y.; ZHANG, W.F. (1985). The application of ITD modal test method to the analysis of dynamic characteristics of road vehicles structures. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.677-683.

TSUNAKI, R.H. (1999). *Identificação automatizada de modelos dinâmicos no espaço de estado*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VAROTO, P.S. (1991). *Análise modal no domínio da freqüência: um método de identificação multi-modos*. Dissertação [Mestrado] – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VOLD, H.; KUNDRAT, J.; ROCKLIN, G.T.; RUSSEL, R. (1982). A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers. *SAE Technical Papers Series*, n.820194.

ZHANG, L.; YAO, Y. (1987). Advances in modal identification – From SISI, SIMO to MIMO methods. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.1003-1007.

ZHANG, L.; YAO, Y.; LU, M. (1987). An improved time domain polyreference method for modal identification. *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, London, p.563-543.

Apêndice A

```
%%%                    *** IMMA-q ***                          %%%
%%%                       immaq.m                              %%%
%%%      (IBRAHIM METHOD MODAL ANALYSIS-Qualified)             %%%
%%%  Programa para tratar os dados de resposta de uma placa  %%%
%%%  engastada utilizando o Método de Ibrahim.               %%%
%%%  Realiza qualificação por índices (MCF e MPCW).          %%%

% Limpa
clear
clc

% Início

% Carrega a matriz "btempd" das respostas no tempo da placa

load btempd;
btempd = btempd.';       %Dados - B&K 4375 c/ shift = 0.00ms


% Delta t
deltat = 0.0003125;

% Número de estações de medidas "q" (NÚMERO DE LINHAS DE X)
q = 100;

% Número "L" de pontos de resposta (NÚMERO DE COLUNAS DE X)
%L = 208;
L=input('L = ? => ');

% Deslocamento "k" das respostas (k * delta t)
%k = 08;
k=input('k = ? => ');

% Matriz de resposta "X"
X  = [btempd(:,1:L) ; btempd(:,k+1:L+k)];

% Matriz de resposta deslocada "Xb" (X barra)
Xb = [btempd(:,2:L+1) ; btempd(:,k+2:L+1+k)];

% Matriz do sistema "As"
   % Forma completa
   As = 0.5*(((Xb*X')*inv(X*X'))+((Xb*Xb')*inv(X*Xb')));

   % Pós multiplicando por X'
   %As = ((Xb*X')*inv(X*X'));

   % Pós multiplicando por Xb'
   %As = ((Xb*Xb')*inv(X*Xb'));

% Autovalores e autovetores (Avec = psi ; Aval = s)
[Avec,Aval] = eig(As);

Aval = Aval(find(Aval)); %Excluir os zeros da matriz diagonal Aval
Aval = (1/deltat)*log(Aval);

% Excluir elementos conjugados complexos e/ou reais
ie = find(imag(Aval) <= 0);
Aval(ie) = [];
Avec(:,ie) = [];
```

```
%OBS:Aval = a+ib, onde: a=zeta n * omega n; b=omega nd

% Excluir fatores de amortecimento positivos
ie = find(real(Aval) >= 0);
Aval(ie) = [];
Avec(:,ie) = [];

% Calcular fatores de amortecimento
zeta = -100*real(Aval)./(imag(Aval));

% Excluir fatores de amortecimento maiores que 5%
ie = find(zeta >= 5);
Aval(ie) = [];
Avec(:,ie) = [];

% Preparação dos autovetores p/ MCF
Q = Avec(1:q,:);
Qb = Avec(1+q:2*q,:);

la = length(Aval);

for i = 1:la
   Qbexp(:,i) = Q(:,i)*exp(Aval(i)*k*deltat);
end

Mqb = abs(Qb); %Módulo dos elementos complexos do autovetor
Mqbexp = abs(Qbexp); %Idem

% MCF propriamente dita
for j = 1:la
   for i = 1:q
      if Mqb(i,j) >= Mqbexp(i,j)
         MCF(i,j) = 100*(Mqbexp(i,j)/Mqb(i,j));
      else
         MCF(i,j) = 100*(Mqb(i,j)/Mqbexp(i,j));
      end
   end
end

% MCF global
[m,n] = size(MCF);

for j = 1:n
   MCFG(j) = ((length(find(MCF(:,j) >= 70)))/m)*100;  %MCF em
porcentagem
end

ie = find(MCFG  <= 70);
MCFG(ie) = [];
Aval(ie) = [];
Avec(:,ie) = [];

% Freqüências naturais e recálculo dos fatores de amortecimento
f = (imag(Aval)/(2*pi));
zeta = -100*real(Aval)./(imag(Aval));
```

```
% MPCW
[m,n] = size(Avec);
Avec = (Avec(1:100,1:n));

for i=1:n
   Sxx(:,i) = (real(Avec(:,i))).'*(real(Avec(:,i)));
   Syy(:,i) = (imag(Avec(:,i))).'*(imag(Avec(:,i)));
   Sxy(:,i) = (real(Avec(:,i))).'*(imag(Avec(:,i)));
end

eta=(Syy-Sxx)./(2*Sxy);

labda1=((Sxx+Syy)./2) + (Sxy.*sqrt((eta.^2)+1));
labda2=((Sxx+Syy)./2) - (Sxy.*sqrt((eta.^2)+1));

MPCW=(((labda1-labda2)./(labda1+labda2)).^2).*100;
MPCW=floor(MPCW);

% MPCW global
ie = find(MPCW  <= 50);
MPCW(ie) = [];
MCFG(ie) = [];
Aval(ie) = [];
Avec(:,ie) = [];

%disp('  ');
%disp('MCFG DOS MODOS IDENTIFICADOS = '),MCFG

%disp('  ');
%disp('MPCW DOS MODOS IDENTIFICADOS = '),MPCW

% Freqüências naturais e recálculo dos fatores de amortecimento
[m,n] = size(Avec);
f = (imag(Aval)/(2*pi));
zeta = -100*real(Aval)./(imag(Aval));

% Plota modos reais
ModReal = abs(Avec).*cos(angle(Avec));

for I = 1:n
   for J = 1:10
      MR(:,J,I) = ModReal(10*(J-1)+1:10*J,I);
   end
end

%surfc(MR(:,:,1))

% Saída
lf = length(f);
disp(' ');
disp('NÚMERO DE MODOS IDENTIFICADOS = '),lf, L, k

%Short Data (f, zeta, MCFG, MPCW)
sd=[(1:1:lf)',f,zeta,MCFG.',MPCW.']
```

Apêndice B

22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
2nd Brazilian Congress on Computational Mechanics
NOVEMBER 7-9, 2001
Campinas, SP - Brazil

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS ATRAVÉS DE MÉTODOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Fabricio T. Paziani
Roberto H. Tsunaki
Mario F. Mucheroni
Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia Mecânica

Resumo. *Inúmeros problemas de engenharia são relacionados ao comportamento dinâmico de estruturas. A identificação dos parâmetros modais que representam este comportamento é fundamental para a elaboração de modelos de sistemas mecânicos. Neste trabalho foram utilizados dois métodos de identificação no domínio do tempo: o Método da Exponencial Complexa (CE) e o Método de Ibrahim (ITD). O método CE é um método indireto, capaz de identificar o modelo modal dado pelos parâmetros globais (freqüências naturais e fatores de amortecimento) e pelos parâmetros locais, que permitem determinar os modos de vibrar. Este método utiliza dados do tipo SISO (uma entrada e uma saída), mas pode ser adaptado para tipo SIMO (uma entrada e múltipla saída). O método ITD é também um método indireto, do tipo SIMO, permitindo obter os parâmetros modais partindo da resposta ao impulso numa única etapa. Os dados experimentais foram extraídos de ensaios de impacto em uma placa de alumínio engastada. Os sinais foram coletados no domínio da freqüência e posteriormente foram tomadas as respostas ao impulso, permitindo a aplicação dos métodos. Os ensaios foram realizados com um martelo instrumentado. Os métodos utilizados foram implementados computacionalmente e aplicados aos dados experimentais.*

Palavras-chave: *Análise modal experimental, Exponencial complexa, Método de Ibrahim.*

1. INTRODUÇÃO

Testes de vibração para modelamento de sistemas tornaram-se, nas últimas décadas, poderosas ferramentas. Alguns autores referem-se a esse campo de atuação como Análise Modal Experimental. Um entendimento profundo da análise modal experimental requer o domínio de várias áreas, como instrumentação, processamento de sinais, avaliação de parâmetros e análise de vibração [INMAN, 1989].

Os métodos de identificação podem ser separados de forma didática em métodos no domínio do tempo e no domínio da freqüência. Os métodos de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo são baseados na determinação de parâmetros modais a partir de respostas no tempo. Destacam-se os métodos desenvolvidos a partir da resposta do sistema ao impulso, que pode ser obtida diretamente através da excitação do sistema com um martelo de impacto ou indiretamente, realizando a transformada inversa de Fourier dos dados de resposta em freqüência do sistema. Os métodos de identificação no domínio da freqüência são desenvolvidos a partir da bem conhecida resposta em freqüência.

Este artigo tem por objetivo comparar dois métodos de identificação modal no domínio do tempo, sendo estes o Método da Exponencial Complexa e o Método de Ibrahim. Ambos os métodos foram aplicados a dados medidos em uma placa de alumínio. Esta comparação procurou avaliar o desempenho dos métodos no processo de identificação dos parâmetros modais da estrutura, analisada em uma banda larga de freqüência.

A seguir são desenvolvidos os dois métodos.

2. MÉTODO DA EXPONENCIAL COMPLEXA

O método da Exponencial Complexa é um método indireto do tipo SISO e foi desenvolvido para tratar os dados de apenas uma função de resposta ao impulso (IRF) por vez.

A principal vantagem do método é o fato deste não depender de estimativas iniciais dos parâmetros modais. O único parâmetro a ser especificado a priori é o número de modos que deve ser considerado na análise. Como normalmente o número de modos estimados é maior que o número de modos existentes na faixa de freqüência analisada, modos ditos "computacionais" podem ser identificados como modos estruturais, havendo a necessidade de distinguir uns dos outros.

O método da Exponencial Complexa utiliza os dados da resposta do sistema no domínio do tempo, na forma da IRF. A sua aplicabilidade está limitada a modelos que incorporam amortecimento viscoso, pois a modelagem do amortecimento histerético oferece dificuldades para análise no domínio do tempo.

A resposta ao impulso pode ser obtida através da transformada inversa de Fourier da receptância:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_r A_{jk} e^{s_r t} \tag{1}$$

onde: $s_r = -w_r z_r + i w_{d_r}$ são os autovalores para o modo r, ${}_r A_{jk}$ é o resíduo do modo r e N é o número estimado de modos.

Considerando as notações: ${}_rA_{jk} = A_r$ e $e^{s_r t} = V_r$, e reescrevendo a equação (1) para o instante i, $t_i = iDt$:

$$h_i = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^i \tag{2}$$

Se o número de elementos do sinal do tempo, p, for maior que $2N$, a Eq. (2) pode ser utilizada para montar um problema polinomial, cuja solução fornece as freqüências naturais contidas nos parâmetros V_1, V_2 etc. A solução deste problema é conhecida como método de Prony [EWINS, 1984]. Sempre existirá um polinômio em Vr de ordem q com coeficientes reais b, chamados coeficientes autorregressivos [MAIA, 1997], tal que:

$$\sum_{i=0}^{p} b_i h_i = \sum_{r=1}^{2N} \left(A_r \sum_{i=0}^{p} b_i V_r^i \right) \tag{4}$$

Os valores de b são os coeficientes da equação:

$$b_0 + b_1 V + b_2 V^2 + \ldots + b_p V^p = 0 \tag{5}$$

para a qual as raízes são V_1, V_2, ... V_q.

Devem ser procurados os valores dos coeficientes b de modo a determinar as raízes de (5), ou seja, os valores de Vr e assim, as freqüências naturais do sistema. Estabelecendo a igualdade $q \equiv 2N$,

$$\sum_{i=0}^{2N} b_i V_r^i = 0 \tag{6}$$

Todos os termos de (4) são iguais a zero tal que;

$$\sum_{i=0}^{2N} b_i h_i = 0 \tag{7a}$$

ou, considerando que b_{2N}=1;

$$\sum_{i=0}^{2N-1} b_i h_i = -h_{2N} \tag{7b}$$

A equação (7b) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{Bmatrix} = -h_{2N} \tag{8}$$

O procedimento realizado desde a equação (3) até a equação (8) deve agora ser repetido utilizando-se um novo conjunto de pontos da IRF. Além disso, o novo conjunto pode ser escolhido de modo a sobrepor o conjunto anterior a menos de um elemento. A realização de sucessivas aplicações deste procedimento leva a um conjunto completo de *2N* equações, que podem ser representadas na forma compacta:

$$[h]_{2N\times 2N}\{b\}_{2N\times 1} = -\{\tilde{h}\}_{2N\times 1} \tag{9}$$

de onde é possível obter os coeficientes *b* [EWINS, 1984] através de:

$$\{b\} = -[h]^{-1}\{\tilde{h}\} \tag{10}$$

Conhecendo os valores de *b*, é possível calcular os valores das raízes *Vr* através de algum método de resolução de polinômios. Portanto, de posse destes coeficientes a equação (5) é empregada para determinar os valores de V_1, V_2, ..., V_{2N} . A partir destes valores são obtidas as freqüências naturais do sistema, através da relação

$$V_r = e^{s_r Dt} = e^{-z_r w_r Dt + i w_{d_r} Dt} \tag{11}$$

A equação (11) permite que sejam extraídos os valores das freqüências naturais e dos fatores de amortecimento modais, da seguinte forma:

$$w_{d_r} = \frac{Im(ln(V_r))}{Dt} \tag{12a}$$

$$w_{d_r} z_r = \frac{\mathrm{Re}(\ln(V_r))}{\Delta t} \tag{12b}$$

Completa-se a solução determinando as constantes modais correspondentes A_1, A_2, ..., A_{2N} através da equação (3). Isto pode ser escrito como:

$$[V]\{A\} = \{h\} \tag{13}$$

O método pode ser modificado aplicando–se a resolução pelo método dos Mínimos Quadrados para utilização de dados do tipo SIMO, onde ocorre o processamento simultâneo de várias IRFs, tomadas medindo-se a excitação em um ponto da estrutura e coletando dados de resposta em vários pontos sobre a mesma. Esta versão do método CE é conhecida como "Least Squares Complex Exponential" (LSCE).

Da equação (9), pode ser observado que os coeficientes *b* que fornecem a resolução da equação (5) são grandezas globais, ou seja, valem para todas as IRFs.

Assim, (9) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} [h]_1 \\ [h]_2 \\ \vdots \\ [h]_q \end{bmatrix}\{b\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{h}\}_1 \\ \{\tilde{h}\}_2 \\ \vdots \\ \{\tilde{h}\}_q \end{Bmatrix} \tag{14}$$

ou

$$[h_G]_{(2Nq\times 2N)}\{b\}=\{\tilde{h}_G\}_{(2Nq\times 1)} \tag{15}$$

onde q representa o número de pontos de medida sobre a estrutura.

A solução pelo método LSCE (utilizando a técnica da pseudo-inversa) é:

$$\{b\}=\left([h_G]^T[h_G]\right)^{-1}[h_G]^T\{\tilde{h}_G\} \tag{16}$$

Desta forma, de posse dos valores de b, procede-se a resolução de (5) obtendo-se os valores de V_r. Em uma segunda etapa, podem ser obtidos os resíduos de (13), permitindo, assim, a realização dos cálculos remanescentes.

3. MÉTODO DE IBRAHIM NO DOMÍNIO DO TEMPO

A determinação experimental das freqüências naturais e dos modos de vibrar de estruturas é, na maior parte das vezes, realizada através da obtenção de curvas de resposta em freqüência e da aplicação de um método no domínio da freqüência. Porém, a análise no domínio da freqüência torna-se limitada quando a estrutura sob inspeção apresenta freqüências naturais muito próximas e altos fatores de amortecimento, visto que os métodos que utilizam a resposta em freqüência não podem fornecer estes parâmetros com precisão. Estas limitações são originárias do fato de um modo interferir sobre o outro adjacente, o que é capaz de restringir a observação de modos distintos (e, conseqüentemente, freqüências naturais) de maneira individual. A utilização direta da resposta no tempo, sem transformação para o domínio da freqüência, não requer suposições sobre a interferência entre os modos.

A versão do método ITD utilizada neste trabalho busca identificar os parâmetros modais através das respostas do sistema, que tanto podem tanto ser adquiridas na forma de deslocamento, velocidade ou aceleração [IBRAHIM & MIKULCIK, 1977].

O objetivo básico do método ITD é obter um conjunto único de parâmetros modais (freqüências naturais, fatores de amortecimento e formas dos modos) a partir de um conjunto de dados medidos de resposta livre em uma única análise. Isto significa processar todas as respostas de uma só vez. Outra característica do método é permitir o uso de quaisquer dados de vibração livre, não havendo necessidade do conhecimento das forças de excitação.

Para um sistema com N graus de liberdade, a resposta livre da estrutura em um ponto i e em um instante de tempo t_j é expressa como o somatório das respostas de cada modo, isoladamente:

$$x_i(t_j)=\sum_{r=1}^{2N} y_{ir}e^{s_r t_j} \tag{17}$$

onde i representa a coordenada dos pontos da resposta e j representa o incremento de tempo no qual a resposta é medida; s_r é o r-ésimo autovalor complexo, ou raiz da equação característica do sistema e $\{y\}_r$ é o autovetor correspondente, sendo y_{ir} seu i-ésimo elemento.

Na aplicação do método, é normal assumir, na Eq. (17), um número de graus de liberdade muito maior que o número real de graus de liberdade do sistema. Esta escolha deve-se à necessidade de proporcionar um caminho de escape para o ruído presente nos dados experimentais.

Considerando q o número de pontos de medida de respostas na estrutura e L instantes de tempo, a equação (17) pode ser reescrita:

$$[X]_{(q\times L)} = [Y]_{(q\times 2N)}[L]_{(2N\times L)} \tag{18}$$

onde:
$[X]$ é a matriz das respostas do sistema, obtida através da medição experimental;
$[Y]$ é a matriz dos autovetores;
$[L]$ é a matriz cujos elementos são da forma: $l_{r_i} = e^{s_r t_i}$.

Considera-se um segundo conjunto de pontos contendo, assim como $[X]$, um número de elementos igual a L, porém agora deslocados de um intervalo Dt. Este segundo conjunto de pontos é então definido como:

$$\overline{x}_i(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} \overline{y}_{ir}\, e^{s_r t_j} \tag{19}$$

com $\overline{x}_i(t_j) = x_i(t_j + Dt)$ e $\overline{y}_{ir} = y_{ir}\, e^{s_r Dt}$. Uma nova equação matricial é construída:

$$[\overline{X}]_{(q\times L)} = [\overline{Y}]_{(q\times 2N)}[L]_{(2N\times L)} \tag{20}$$

Se o número de posições de medidas q for admitido igual a $2N$, as matrizes $[Y]$ e $[\overline{Y}]$ são quadradas. Estas matrizes são relacionadas de modo que pode ser definida a *matriz do sistema* A_S a partir da equação:

$$[A_S]_{(q\times q)}[Y]_{(q\times 2N)} = [\overline{Y}]_{(q\times 2N)} \tag{21}$$

A partir de (18), (20) e (21), obtém-se:

$$[A_S]_{(q\times q)}[X]_{(q\times L)} = [\overline{X}]_{(q\times 2N)} \tag{22}$$

Desta maneira, é possível calcular a matriz $[A_S]$, visto que as matrizes da resposta do sistema $[X]$ e $[\overline{X}]$ são conhecidas. Freqüentemente, porém, o valor de q é tomado de forma a ser maior que $2N$, e as matrizes $[X]$ e $[\overline{X}]$ serão retangulares. Neste caso, é aplicada a técnica da pseudo-inversa, que fornece uma solução na forma de mínimos quadrados para a matriz. $[A_S]$ pode ser obtida tanto pós-multiplicando (22) por $[X]^T$ ou por $[\overline{X}]^T$. São obtidos, respectivamente,:

$$[A_S] = \left([\overline{X}][X]^T\right)\left([X][X]^T\right)^{-1} \quad \text{e} \quad [A_S] = \left([\overline{X}][\overline{X}]^T\right)\left([X][\overline{X}]^T\right)^{-1} \tag{23}$$

Como existem duas expressões para fornecer a matriz $[A_S]$, a combinação das duas é preferível (mínimos quadrados duplos, ou DLS). A expressão fica:

$$[A_S] = \frac{1}{2}\left[\left([\overline{X}][X]^T\right)\left([X][X]^T\right)^{-1} + \left([\overline{X}][\overline{X}]^T\right)\left([X][\overline{X}]^T\right)^{-1}\right] \tag{24}$$

Como $\{\overline{y}_r\} = \{y_r\} e^{s_r Dt}$, a partir de (21) tem-se:

$$[A_S]\{y_r\} = \{y_r\} e^{s_r Dt} \tag{25}$$

A equação (25) é um problema de autovalores e autovetores. Se $[A_S]$ é uma matriz de ordem q, haverá q autovalores e autovetores. Se $q>2N$, haverá modos computacionais. A partir dos autovalores, pode-se calcular as freqüências naturais e os fatores de amortecimento:

$$e^{s_r Dt} = l_r = a_r + i\, b_r = e^{-w_r z_r Dt} e^{i w_{d_r} Dt} = C_r e^{i q_r} \tag{26}$$

onde $C_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$ e $q_r = tan^{-1}\left(\frac{-b_r}{a_r}\right)$, de onde podem ser determinadas as freqüências naturais e os fatores de amortecimento;

$$w_r z_r = \frac{-ln\left(a_r^2 + b_r^2\right)}{2\,Dt} \tag{27a}$$

$$w_{d_r} = w_r \sqrt{1 - z_r^2} = \frac{1}{Dt} tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{27b}$$

Para cada autovalor existe um autovetor correspondente, que pode ser visto como o vetor da forma do modo [EWINS, 1984]. O método ITD requer uma análise por parte do usuário sobre quais dados de medida devam ser utilizados nos cálculos. Freqüentemente haverá mais pontos de resposta que modos a serem identificados. Entre as vantagens do método estão a pouca necessidade de interação, cálculo eficiente de modos pouco espaçados e a possibilidade de verificar a qualidade dos resultados, através de algum índice de confiança [MAIA, 1997].

3.1 Fator de confiança modal (MCF)

Na análise dos modos de vibrar e parâmetros modais de estruturas complexas, há sempre um certo nível de incerteza quanto aos valores obtidos e à representação do modo. O alto acoplamento de modos cujas freqüências são muito próximas e o alto nível de ruído são fatores que podem prejudicar a identificação, conduzindo a resultados insatisfatórios.

O Fator de Confiança Modal (MCF, do inglês "Modal Confidence Factor") foi proposto por Ibrahim [IBRAHIM, 1978] para distinguir os modos estruturais dos modos computacionais dentre todos os modos identificados. O MCF é representado por um número calculado para cada modo identificado. O MCF varia de zero, para modos completamente corrompidos, a 100% para modos puramente estruturais.

A teoria relacionada ao MCF baseia-se na correlação existente entre a deflexão modal de um determinado ponto da estrutura em um determinado instante de tempo e a deflexão modal do mesmo ponto em um instante diferente de tempo.

O método ITD foi desenvolvido para possibilitar o emprego do mínimo instrumental possível nas medições experimentais. Para tal fim, são empregadas estações assumidas, para as quais os dados de resposta são gerados a partir dos próprios dados de resposta originais [Ibrahim, 1978].

Em um ensaio modal usual de uma estrutura, se $x_i(j)$ é a resposta livre medida em um ponto i, em um instante $j \cdot \Delta t$, novas respostas podem ser geradas para aumentar o número

aparente de pontos de medida. Estas novas respostas são deslocadas de $k \cdot \Delta t$ com relação à original: $\bar{x}_i(j) = x_i(j + \Delta t)$, $\bar{\bar{x}}_i(j) = x(j + 2\Delta t)$,... e assim sucessivamente [IBRAHIM, 1978].

Segue a representação matricial compacta de como os dados de resposta são manipulados para compor a matriz de resposta $[X]$, utilizada nos algoritmos, com um deslocamento de $k \cdot \Delta t$ intervalo de tempo.

Os dados da resposta da estrutura definem uma matriz de dimensão $[q \times p]$, onde q é o número de pontos de medida localizados na estrutura, e p é o número de elementos de resposta captados em cada ponto de medição. Entretanto, nem todos os elementos desta matriz são utilizados no processo de identificação. Para compor a matriz $[X]$ empregada nos cálculos, é necessário tomar todas as q linhas dos dados medidos e pelo menos suas $2N$ primeiras colunas (N é o número estimado de modos do sistema). Este é o aspecto da metade superior da matriz $[X]$. A metade inferior de $[X]$ é composta igualmente pelas q linhas da matriz dos dados de resposta, porém a porção de colunas tomadas são deslocadas (ou atrasadas) de um intervalo correspondente a $k \cdot \Delta t$ com relação à metade superior.

De maneira compacta,

$$[X] = \begin{bmatrix} [X]_{t_j} \\ [X]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Construída a matriz $[X]$ conforme descrito acima, procede-se a aplicação do método ITD. A matriz $[\bar{X}]$, é obtida tomando os elementos utilizados na formação da matriz $[X]$ deslocados de um intervalo de tempo Δt ;

$$\bar{x}_i(t_j) = x_i(t_j + \Delta t) \tag{29}$$

ou,

$$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} [\bar{X}]_{t_j} \\ [\bar{X}]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} \tag{30}$$

A matriz do sistema, $[A_S]$, é obtida da relação $[A_S][X] = [\bar{X}]$, e a resolução do autoproblema $[A_S]\{y_r\} = e^{s_r \Delta t}\{y_r\}$ fornece os autovetores, $\{y_r\}$, e os autovalores, $e^{s_r \Delta t}$, de $[A_S]$.

O MCF deve ser calculado tanto para cada ponto de medida quanto para cada modo. Para calcular o MCF para um modo específico, deve-se obter uma relação entre a deflexão deste modo em dois instantes distintos de tempo. Porém, o método ITD não fornece os modos reais, e sim, os modos complexos. Os modos reais são calculados a partir dos modos complexos, e estes são obtidos dos autovetores, $\{y\}$. Seja $[y]$ a matriz que contém, por colunas, os autovetores identificados, ou seja,

$$[y] = \begin{bmatrix} [y]_{t_j} \\ [y]_{k \cdot t_j} \end{bmatrix} \tag{31}$$

onde $[y]_{t_j}$ é a matriz que contém os autovetores do sistema calculados a partir de um determinado instante de tempo, t_j, e $[y]_{k \cdot t_j}$ é a matriz que contem os autovetores calculados com um atraso de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo. A relação entre os dois conjuntos de autovetores fica estabelecida:

$$[y]_{k \cdot t_j} = \{e^{s k \Delta t}\} [y]_{t_j} \tag{32}$$

Seja a deflexão de um determinado modo representada por y_{ir} para um determinado ponto de medida, e $\overline{y}_{ir}$ a deflexão do mesmo modo tomada no mesmo ponto de medida, atrasada de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo. É possível calcular a deflexão modal esperada depois de $k \cdot \Delta t$ instantes de tempo:

$$\{\overline{y}\}_{Exp} = \{y\} e^{s k \Delta t} \tag{33}$$

Se o modo identificado corresponde a um modo estrutural e linear, $\{\overline{y}\}$ deverá ser igual a $\{\overline{y}\}_{Exp}$ [IBRAHIM, 1978].

De maneira geral,

$$\{\overline{y}\}_{Exp} = \{\overline{y}\} \times MCF \tag{34}$$

e a definição do MCF torna-se:

$$MCF = \left| \frac{\{\overline{y}\}_{Exp}}{\{\overline{y}\}} \right| \times 100 \qquad se \quad \{\overline{y}\} > \{\overline{y}\}_{Exp} \tag{35a}$$

ou

$$MCF = \left| \frac{\{\overline{y}\}}{\{\overline{y}\}_{Exp}} \right| \times 100 \qquad se \quad \{\overline{y}\}_{Exp} > \{\overline{y}\} \tag{35b}$$

onde se entende o quociente de dois vetores como o quociente entre os componentes.

Desta forma, o MCF deverá ser 100% para modos puramente estruturais e zero para ruído. Como em todos os ensaios experimentais é inerente a presença de ruído, um MCF de 100% torna-se impossível de ser atingido. Isto não significa, porém, que altos valores de MCF não indiquem modos bem identificados, validando o processo de identificação pelo método ITD.

4. DESCRIÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

O modelo experimental utilizado neste trabalho é uma placa quadrada de alumínio. Esta placa está engastada em um dos seus lados através de placas espessas de aço e todo o conjunto foi fixado a uma base inercial.

Para realizar os ensaios, a placa foi marcada com a localização dos pontos de entrada (excitação) e saída (resposta em aceleração).

A Fig. 1 mostra a localização do ponto de entrada e as dimensões da placa. A localização do ponto de entrada foi escolhida arbitrariamente.

A localização dos pontos de saída foi determinada de forma a ficarem igualmente espaçados. A quantidade de pontos deve ser suficiente para obter uma boa resolução das formas modais.

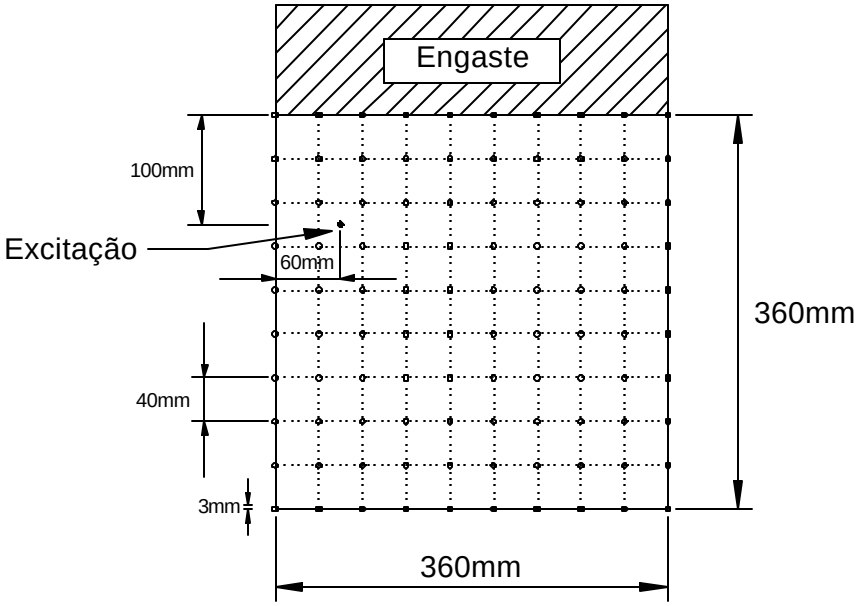


Figura 1 – Pontos de medida e ponto de excitação

Os ensaios foram realizados com o objetivo de obter funções de resposta em freqüência (FRF). O tipo de entrada utilizado foi o impulso, através de um martelo de impacto instrumentado como fonte excitadora. Foi escolhido um único ponto de excitação. Como saída, foram medidas as acelerações em cada um dos cem pontos de resposta. No ponto de entrada foi colada uma pequena esfera de aço para direcionar a excitação. Foi utilizado um mini-acelerômetro piezoelétrico para a medição nos pontos de saída. Sua fixação à placa de alumínio foi feita através de cera.

Desta forma, foram obtidas as FRFs através das medidas da força de entrada e da aceleração em cada ponto de saída. Variando-se os pontos de saída, pode-se obter 100 FRFs. Os sinais das medidas de força e de aceleração foram condicionados através de amplificadores de carga apropriados e foram filtrados e processados por um analisador de sinais.

A faixa de freqüência de interesse foi determinada como sendo de 0 a 1600 Hz. Para que nessa faixa de freqüência a placa fosse adequadamente excitada, foi empregado o martelo de impacto com uma ponteira de aço. O analisador de sinais utilizado possui uma resolução de 800 linhas, o que corresponde a uma resolução de 2 Hz nessa faixa de freqüência.

Na obtenção das FRFs foi utilizado o recurso de "averaging", com a média de 5 FRFs neste caso, para minimizar os efeitos de ruído. Além disso, foi utilizada uma janela exponencial nos sinais de força e de aceleração. Posteriormente, foi realizada a IFFT dos dados medidos, com o objetivo de gerar as IRFs necessárias à aplicação dos métodos utilizados.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta os resultados do processo de identificação dos parâmetros modais obtidos através da aplicação dos métodos LSCE e ITD. Os resultados provenientes do método ITD foram submetidos a um processo de qualificação através do MCF e foram apresentados os modos identificados cujo MCF foi superior a 70%.

5.1 Freqüências naturais

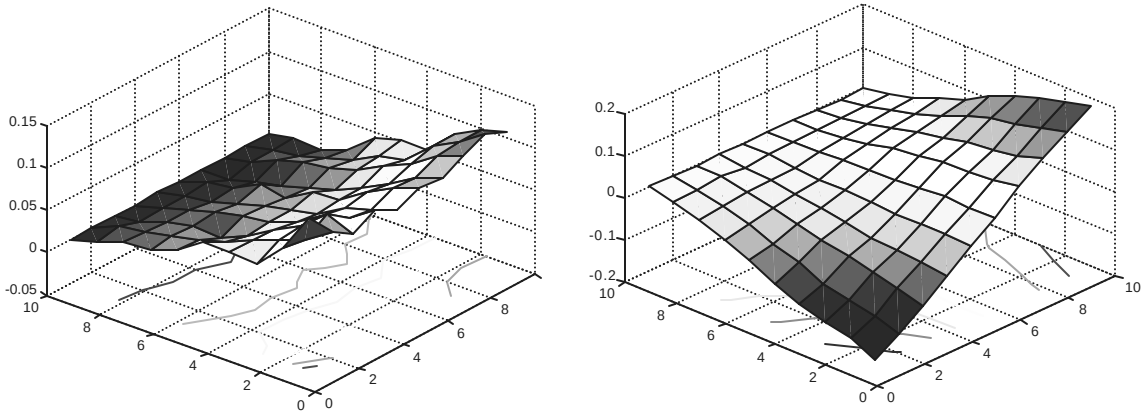
A Tabela 1 apresenta as freqüências naturais obtidas através de ambos os métodos.

Tabela 1. Freqüências naturais

Modo	LSCE	ITD	MCF
	f_{nd} [Hz]	f_{nd} [Hz]	%
1.	---	19,5	73
2.	45,2	45,9	91
3.	121,3	120,9	97
4.	---	158,0	72
5.	171,5	172,5	99
6.	303,4	307,3	93
7.	350,6	353,4	91
8.	372,0	372,0	77
9.	400,5	405,6	86
10.	525,2	532,4	84
11.	545,9	547,3	74
12.	686,8	683,0	91
13.	---	724,5	86
14.	733,6	726,5	80
15.	783,6	793,4	98
16.	860,2	862,2	76
17.	888,8	898,4	79
18.	1113,2	1117,7	74
19.	1135,9	1159,2	74
20.	---	1206,5	84
21.	1308,0	1318,4	72
22.	1344,1	1348,8	78
23.	1484,1	1486,7	79
24.	---	1498,5	71
25.	1569,0	1572,6	80

5.2 Modos de vibrar

A seguir são mostradas as representações gráficas de algumas das formas modais reais, obtidas a partir dos modos complexos identificados. Para tornar possível esta representação, cada elemento da forma real é o resultado da multiplicação da magnitude do elemento complexo correspondente pelo cosseno do seu ângulo de fase.

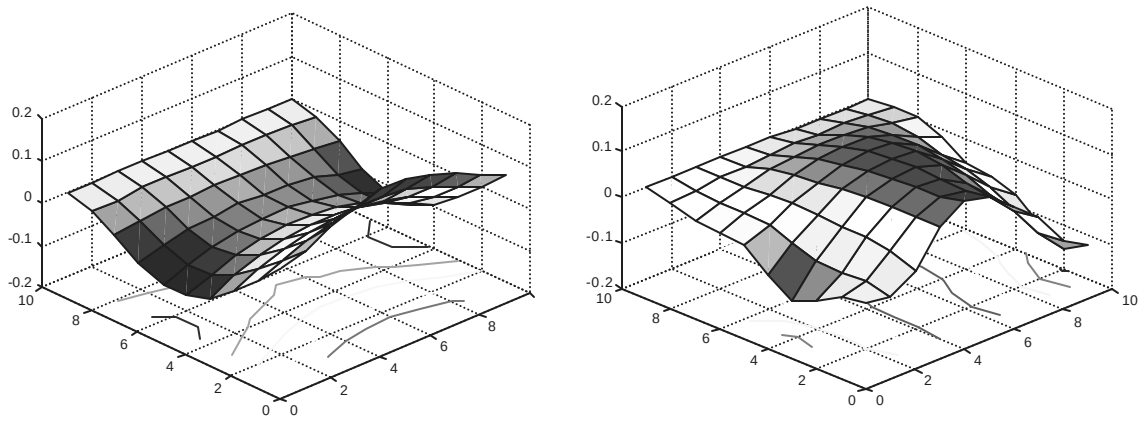


1º modo: f=19,5Hz; MCF=73%; k=18 (a)

2º modo: f=45,9Hz; MCF=91%; k=20 (b)

Figura 2 – Primeiro (a) e segundo (b) modos

A Fig. 2 mostra os dois primeiros modos de vibrar da placa. A melhor estimativa do primeiro modo, vista na Fig. 2(a), apresentou baixo MCF (73%). A dificuldade na identificação do modo deveu-se ao fato deste situar-se no início da larga faixa de freqüências analisada. Já o segundo modo apresentou maior MCF (91%), indicando melhor identificação.



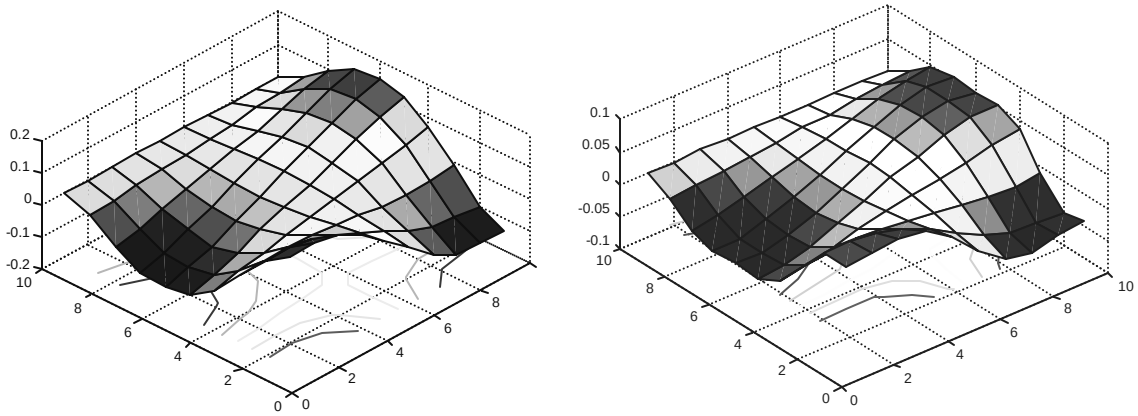
3º modo: 120,9Hz; MCF=97%; k=10 (a)

4º modo: f= 158,0 Hz; MCF=72%; k=20 (b)

Figura 3 – Terceiro (a) e quarto (b) modos

A Fig. 3 (a) mostra o terceiro modo identificado com alto MCF (97%), enquanto que o modo consecutivo, na Fig. 3 (b), foi apenas razoavelmente bem identificado (MCF=72%). A freqüência natural deste modo sequer foi identificada pelo método LSCE.

As Fig. 4 e 5 ilustram a influência da variação do parâmetro *k* no processo de identificação. Na Fig. 4 pode ser observado que o quinto modo foi bem identificado. Duas análises, com dois valores distintos de *k* forneceram altos valores de MCF.

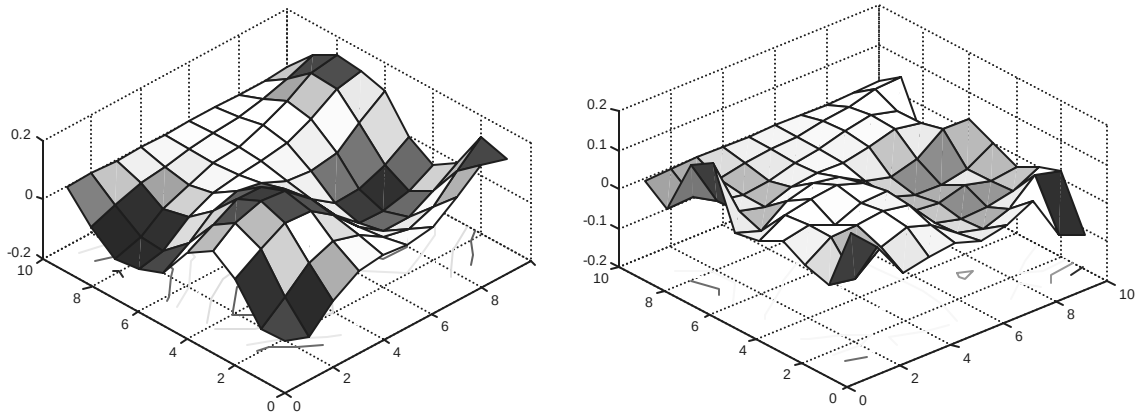


5º modo: f=172,5; MCF=99%; k=22 (a)

5º modo: f=171,9Hz; MCF=97%; k=10 (b)

Figura 4 – Quinto modo com MCF semelhantes

Entretanto, o nono modo, visto nas Fig. 5 (a) e (b) foi diferentemente identificado nas duas ocasiões mostradas. Na Fig. 5 (b), o valor de *k* produziu um resultado indesejado. Em ambas situações, os modos de MCF alto são preferíveis.



9º modo: f=405,6Hz; MCF=86%; k=25 (a)

9º modo: f=406,5Hz; MCF=71%; k=30 (b)

Figura 5 - Nono modo diferentemente identificados

6. CONCLUSÕES

Através da aplicação dos métodos LSCE e ITD é possível concluir que o método ITD é mais adequado quando a estrutura sob análise apresenta alta densidade modal, com freqüências naturais muito próximas. A possibilidade de qualificar os resultados através do Fator de Confiança Modal é uma característica extremamente vantajosa com relação ao método LSCE. O método LSCE mostrou-se satisfatório na identificação das freqüências

naturais, mas requer a associação de métodos no domínio da freqüência que possibilitem a extração das formas modais a partir dos resíduos. Neste aspecto, o método ITD apresenta maior eficiência por permitir a extração dos modos diretamente dos autovetores, sendo preferível para o caso estudado.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EWINS, D. J., 1984, Modal testing: Theory and practice, Research Studies Press, Letchworth.

IBRAHIM, S. R., MICKULCIK, E. C., 1977, A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. Shock and Vibration Bulletin, v. 47, p. 184-198.

IBRAHIM, S. R., 1978, Modal confidence factor in vibration testing, Journal of Spacecraft and Rockets, v. 15, n. 5, p. 313-316.

INMAN, D. J., 1989, Vibration with control, measurement and stability, Prentice Hall, New Jersey.

MAIA, N. M. M., Silva, J. M. M., 1997, Theoretical and experimental modal analysis, John Wiley & Sons.