Elizangela Camilo

***Aeroelasticidade Computacional Transônica em
Aerofólios com Modelo Estrutural Não Linear***

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

Área de concentração: Aeronaves
Orientador: Prof. Associado Flávio Donizeti
Marques

São Carlos

2007

“À minha família, em especial ao meu filho Vítor, com Amor.”

“Agradeço todas as dificuldades que enfrentei; não fosse por elas, eu não teria saído do lugar...

As facilidades nos impedem de caminhar. Mesmo as críticas nos auxiliam muito”

Francisco Cândido Xavier

Agradecimentos

Ao Prof. Assoc. Flávio Donizeti Marques pela orientação, confiança, paciência e sobretudo pela dedicação com que se envolveu neste projeto tornando possível a realização das atividades deste trabalho.

Ao Prof. Dr. João L. F. Azevedo e ao grupo do CTA/IAE, São José dos Campos, por cooperarem diretamente nas atividades do trabalho fornecendo o código CFD não estacionário e as informações necessárias para sua utilização e desenvolvimento. Além da receptividade bastante amigável e as contribuições imprescindíveis para a realização do trabalho.

"I would like to thank Prof Kenneth J. Badcock for opportunity to go to work within his group as an Honorary Research Assistant staff at the University of Liverpool and to provide Hopf bifurcation code. Also, I gratefully acknowledge the assistance of Prof Kenneth J. Badcock and Dr. Mark Woodgate for advice during my staying at Liverpool, especially for their extreme patience. I thank Dr. Barakos, Maria White and colleagues of the CFD Lab for help and friendship."

Aos meus pais, Antônio e Dulcenea, minhas irmãs Cláudia e Jacqueline e meu filho Vítor. Gostaria de expressar meus melhores sentimentos de gratidão e carinho. Por me oferecerem a base familiar mantida com muito amor, fé e dedicação, e sendo sempre meu melhor lugar de refúgio e refazimento.

A todos os amigos, professores e funcionários do Departamento de Engenharia dos Materiais Aeronáutica e Automobilística pela ajuda, paciência e companheirismo, em especial: Andréia, Caixeta, Carlinhos, Daniela, Gasparini, Gi, Guilherme, Edson, Igor, Luciane, Maurício, Márcio, Naga... amigos do Lab queridos e inesquecíveis.

Ao Cláudio amigo eterno, muito obrigada por tudo.

Ao Rafael Cuenca amigo sempre disposto a ajudar, e ao Prof. Carlos De Marqui pelas importantes contribuições.

Ao Ricardo Germanos, e aos Profs. Marcello Medeiros e Leandro de Souza por permitir a utilização dos respectivos *clusters*.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Agradeço a todos que contribuíram de forma direta e indireta à realização deste trabalho, e a Deus com o reconhecimento de que nunca realizamos nada sozinhos:

”Deus quer, o homem sonha... e a obra nasce.”

Conteúdo

Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Símbolos	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais e Posicionamento do Trabalho	1
1.2 Aeroelasticidade Não Linear	5
1.3 Não Linearidades Estruturais	13
1.4 Não Linearidades Aerodinâmicas	16
1.5 Aeroelasticidade Computacional Transônica	19
1.6 Objetivo do Trabalho	23
1.7 Organização da Tese	25
2 MODELO MATEMÁTICO	29
2.1 Considerações Iniciais	29
2.2 Modelo Aerodinâmico	30
2.2.1 Soluções Numéricas das Equações de Euler	31

2.3	Modelo Aeroelástico	40
2.3.1	Não Linearidades Estruturais em Torção	42
2.3.2	Método de Marcha no Tempo	45
3	SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES	49
3.1	Considerações Iniciais	49
3.2	Definições de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	50
3.3	Estabilidade Estrutural em Sistemas Dinâmicos	52
3.3.1	Linearização Próximo à Solução de Equilíbrio	52
3.3.2	Classificação dos Pontos de Equilíbrio	54
3.4	Sistemas com Dependência de Parâmetro	55
3.4.1	Bifurcação de Hopf	58
3.4.2	Método de Potência Inversa	65
3.4.3	Cálculo da Matriz Jacobiana do Sistema Aeroelástico	67
3.4.4	Não Linearidade Estrutural em Torção na Matriz Jacobiana	71
4	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DE CFD NÃO ESTRUTURADO	75
4.1	Considerações Iniciais	75
4.2	Soluções de Estado Estacionário	76
4.3	Soluções de Estado Não Estacionário	87
5	RESPOSTA AEROELÁSTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO	113
5.1	Considerações Iniciais	113

5.2	Dependência do Ângulo de Incidência Inicial na Resposta Aeroelástica com Modelo Estrutural Linear	114
5.3	Dependência do Passo no Tempo na Resposta Aeroelástica de Marcha no Tempo	135
5.4	Cálculo da Fronteira de Flutter com Modelo Estrutural Linear	137
5.5	Cálculo da Fronteira de Flutter com Modelo Estrutural Não Linear	154
5.6	Comportamento do Sistema Aeroelástico Após Ocorrência de Bifurcação com Modelo Estrutural Não Linear	179
5.7	Dependência do Ângulo de Incidência Inicial na Resposta Aeroelástica com Modelo Estrutural Não Linear	195
6	CONCLUSÕES	197
6.1	Comentários Finais	197
6.2	Propostas para Trabalhos Futuros	204
	Bibliografia	207

Resumo

Camilo, E. (2007). *Aeroelasticidade Computacional Transônica em Aerofólios com Modelo Estrutural Não Linear*. São Carlos, 2007, 215p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Aeroelasticidade não linear é uma área multidisciplinar e importante em Engenharia Aero-náutica e Aeroespacial. Aeroelasticidade é o estudo do mecanismo de interação entre os esforços aerodinâmicos e dinâmico-estruturais. Os avanços nas técnicas de CFD se concentram nas aplicações de problemas aerodinâmicos cada vez mais complexos, como os fenômenos associados com a formação e movimento das ondas de choque em escoamentos transônicos e escoamentos separados. Com os desenvolvimentos dos códigos de CFD, o tratamento de problemas aeroelásticos por meio de abordagens computacionais é denominado aeroelasticidade computacional. O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise dos efeitos não lineares em aeroelasticidade no domínio do tempo em regime transônico. A metodologia proposta pretende investigar os efeitos não lineares em aerofólios onde são consideradas as não linearidades estruturais e aerodinâmicas. Neste trabalho as não linearidades aerodinâmicas estão associadas à formação e ao passeio das ondas de choque. Nesta situação, verifica-se que a fronteira de ocorrência de *flutter* é degradada rapidamente na faixa de vôo transônico, onde este fenômeno é denominado de depressão transônica. Dois códigos de CFD foram considerados, ambos baseados na formulação de Euler. Para a solução do sistema aeroelástico no domínio do tempo é aplicado o método Runge-Kutta combinado com o código de CFD. Neste caso, o código de CFD não estacionário é construído em um contexto de malhas não estruturadas. Esta consiste da primeira análise aeroelástica através da metodologia de marcha no tempo utilizando este código de CFD. As respostas aeroelásticas se concentram particularmente para o aerofólio NACA0012 através da história no tempo e retrato de fase para investigar os efeitos típicos não lineares como oscilações em ciclos limite, assim como, são construídas as fronteiras de *flutter*. Para o cálculo direto da fronteira de *flutter* é utilizado o código da análise de bifurcação de Hopf, onde o modelo de CFD é baseado no contexto de malhas estruturadas. Em trabalhos anteriores com este código foram obtidas as fronteiras do *flutter* em perfis e asas simétricos com modelos estruturais lineares. Este trabalho apresenta a primeira análise deste código considerando o modelo estrutural não linear. As não linearidades estruturais concentradas mostraram ter um efeito significativo na resposta aeroelástica podendo ser observadas as oscilações em ciclos limite abaixo da fronteira de *flutter*. As metodologias de marcha no tempo e análise de bifurcação de Hopf foram comparadas e os resultados apresentaram boa concordância. Isto comprovou a confiabilidade das duas metodologias na análise dos efeitos não lineares em aeroelasticidade. As análises de marcha no tempo com o modelo estrutural não linear também foram realizadas após a ocorrência do *flutter* e sua influência nas oscilações em ciclos limite foram observadas.

Palavras chave: Aeroelasticidade não linear, métodos de CFD, escoamento transônico, fronteiras de *flutter*, LCO.

Abstract

Camilo, E. (2007). *Transonic Computational Aeroelasticity on Airfoils with Nonlinear Structural Model*. São Carlos, 2007, 215p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Nonlinear aeroelasticity is a multidisciplinary field, that is important in aeronautics and aerospace engineering. Aeroelasticity can be defined as the science which studies the mutual interaction between aerodynamic and dynamic forces. Computational fluid dynamics (CFD) has matured to the point where it is being applied to complex problems in external aerodynamics, particularly for phenomena associated with shock motions or separation. These two observations have motivated the development of CFD-based aeroelastic simulation, a field now being called computational aeroelasticity. The nonlinearities in the aeroelastic analysis are divided into aerodynamic and structural ones. The aim of this work is concerned with an application of time domain analysis for aeroelastic problems in a transonic flow. The methodology here proposed is to present an investigation on the effects of nonlinearities on airfoil flutter where both aerodynamic and structural concentrated nonlinearities are considered. In this work the aerodynamic nonlinearity arises from the presence of shock waves in transonic flows. In this situation, the unsteady forces generated by motion of the shock wave have been shown to destabilize single degree-of-freedom airfoil pitching motion and affect the bending-torsional flutter by lowering the flutter speed at the so-called transonic dip phenomenon. Two CFD tools are employed in the present work and they are based on the Euler formulation. To solve the aeroelastic problem the Runge-Kutta method is applied combined with the CFD code. In this case, the unsteady CFD tool solves flows in the an unstructured computational domain discretisation. This CFD tool had never been used for time domain aeroelastic analysis before. The responses concerned particularly the NACA0012 airfoil by investigating flutter boundary and typical LCO nonlinear effects from phase plane. For direct flutter boundary calculation, Hopf bifurcation analysis is employed, where the CFD code is based on structured grids for computation domain discretisation. Previous work has demonstrated the scheme for both symmetric airfoil and wing with linear structural model. The current work presents the first investigations of the structural nonlinearities effects with the method. The concentrated nonlinearities show to have significant effects on the aeroelastic responses and to provide limit cycle oscillation (LCO) below the flutter speed. Time marching analysis is performed and compared with direct calculation of Hopf bifurcation points. The results agree well and these computational tools have shown to be powerful to analyse nonlinear effects in aeroelasticity. Post bifurcation behavior is analysed to show influence of nonlinear structural terms on LCO with the time marching solver.

Keywords: Nonlinear aeroelasticity, CFD methods, transonic flow, flutter boundary, LCO.

Lista de Símbolos

a_e	velocidade do som;
$\mathbf{A}$	matriz jacobiana do sistema aeroelástico;
$\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$	matriz jacobiana dos vetores do fluxo em coordenadas curvilíneas gerais;
b	semicorda do aerofólio;
CFL	número de Courant-Friedrichs-Lewy;
C_L	coeficiente de sustentação;
C_m	coeficiente de momento;
C_N	coeficiente de força normal;
C_p	coeficiente de pressão;
$C(\mathbf{Q}_i)$	operador dos fluxos convectivos;
d	fluxo dissipativo;
D	operador dissipativo;
$D_{\bar{\mathbf{A}}}$	matriz dos autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$;
e	energia interna por unidade de massa;
$\mathbf{E}, \mathbf{F}$	vetores de fluxo;
$f(\alpha)$	função não linear de α ;
K_2	coeficiente de dissipação artificial de segunda ordem;
K_4	coeficiente de dissipação artificial de quarta ordem;
K_α	constante de rigidez de mola;
$\bar{K}_\alpha$	rigidez de mola não linear;
M	número de Mach;
p	pressão;

$\mathbf{p}$	autovalores;
$p(\phi(x(t), t))$	distribuição de pressão;
$\mathbf{P}(t)$	vetor da resposta da força aerodinâmica generalizada;
$\mathbf{Q}$	vetor das variáveis conservadas;
r_α	raio de giração;
$\mathbf{R}_f$	resíduo do escoamento;
$\mathbf{R}_i$	resíduo do escoamento avaliado no volume i ;
$\mathbf{R}_s$	resíduo estrutural;
$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_f, \mathbf{R}_s]^T$;
S	superfície;
$\mathbf{S}(\bar{t})$	$\mathbf{s}(\bar{t}) = [\frac{w}{b}(\bar{t}), \alpha(\bar{t})]^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas;
t	tempo;
$\bar{t}$	$\bar{t} = \omega_\alpha t$ tempo adimensional;
u, v	componentes cartesianas de velocidade do fluxo;
$\bar{U}$	velocidade reduzida;
U, V	componentes de velocidade contravariante;
V_i	volume de controle;
w	deslocamento vertical;
$\mathbf{w}_f$	vetor das variáveis conservadas do escoamento;
$\mathbf{w}_s$	variáveis em espaço de estado do sistema aeroelástico;
$\mathbf{w}$	$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_f]^T$;
x, y	coordenadas cartesianas;
x_{ea}	posição do eixo elástico;
x_t, y_t	componentes cartesianas de velocidade dos elementos da malha;
x_α	distância entre o centro de gravidade e o eixo elástico do aerofólio;
α	ângulo de ataque;
γ	razão dos calores específicos;
δu	deslocamento virtual generalizado;

δW	trabalho virtual;
Δt	passo no tempo;
$\Delta \xi, \Delta \eta$	diferenças espaciais dos pontos da malha nas direções ξ e η ;
μ_s	razão de massa;
v	autovalor;
ω_α	frequência natural em α do sistema aeroelástico;
ω_w	frequência natural em w do sistema aeroelástico;
ω_R	$\omega_R = \frac{\omega_w}{\omega_\alpha}$ é a relação das frequências naturais;
Ω	domínio do escoamento;
$\partial \Omega$	fronteira do escoamento;
$\partial \Omega_S$	limites da superfície aerodinâmica;
λ	parâmetro do sistema dinâmico;
ξ, η	coordenadas curvilíneas gerais;
ρ	densidade;
$\phi(x, t)$	vetor das variáveis de estado no escoamento espaço-temporal;
$\mathcal{B}$	operador de fronteiras;
$\mathcal{N}$	operador diferencial parcial não-linear fronteiras;
$\mathcal{U}$	função deslocamento de fronteiras.

Subscritos e superescritos:

i, j	quantidade discreta referente a um ponto da malha;
∞	escoamento não perturbado;
ξ, η	componentes nas direções ξ, η ;
T	transposto;
m, n	níveis de tempo e iteração.

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais e Posicionamento do Trabalho

Os progressos atuais da indústria aeronáutica e aeroespacial estão sendo possíveis devido ao desenvolvimento de metodologias mais eficazes de análise e projeto. A procura por soluções adequadas para problemas aeroelásticos têm aumentado em importância nas últimas décadas, já que o maior desempenho das aeronaves modernas vem sendo acompanhado de estruturas cada vez mais leves e flexíveis. A Aeroelasticidade é o campo da Engenharia Aeronáutica que lida com os problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura em veículos aéreos (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Diversos fenômenos aeroelásticos acontecem em uma aeronave durante o voo. Eles compreendem desde a resposta dinâmica da estrutura da aeronave devido a uma rajada até o fenômeno do *flutter*. *Flutter* é uma instabilidade de caráter dinâmico, onde a interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais leva a movimentos oscilatórios divergentes e destrutivos (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; ASHLEY, 1988; FÖRSCHING, 1979). O *flutter* é o fenômeno aeroelástico que, historicamente, apresenta o maior interesse no projeto aeronáutico. Outros fenômenos aeroelásticos de importância são divergência, *buffeting*, *galloping*, etc. (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; GARRICK; REED, 1981; FÖRSCHING, 1979). Como referências básicas no campo da Aeroelasticidade tem-se os trabalhos de: Fung (1955), Bisplinghoff e Ashley (1962), Ashley (1988), Garrick e Reed (1981), Dowell (1995), Försching (1979), Noll (1990), Bisplinghoff,

Ashley e Halfman (1996), Dowell e Tang (2002b) e Friedmann (2007). Tais problemas de estabilidade têm sido previstos por modelos matemáticos onde o comportamento aeroelástico é suposto predominantemente linear. Essa prática, no entanto, encontra problemas para prever instabilidades em muitas condições de operação. Basicamente, tais dificuldades estão ligadas à incapacidade de contabilizar o efeito de não linearidades. De forma genérica, as não linearidades provocam fenômenos como oscilação em ciclo limite, bifurcações, caos, etc, afetando a análise de instabilidades aeroelásticas.

Com os avanços em métodos de modelagem matemática dos fenômenos e a eficiência e viabilidade das ferramentas computacionais, é cada vez mais possível estudar problemas não lineares em aeroelasticidade. Isto tem ajudado a compreender muitos fenômenos aeroelásticos que se apresentam em condições de voo severas à altas velocidades, nas estruturas com grande flexibilidade e, finalmente, nos casos de estruturas aeronáuticas envelhecidas, mas ainda em operação. Tipicamente, o estudo da aeroelasticidade não linear tem sido realizado considerando modelos com o comportamento aerodinâmico e/ou estrutural não lineares. Modelos aerodinâmicos para escoamentos em regime transônico são necessariamente não lineares. Do ponto de vista estrutural, as não linearidades podem ser originárias do comportamento do material ou quando estas estruturas apresentam grandes deslocamentos.

Para prever os efeitos de compressibilidade do escoamento sobre a estrutura, inerentes do regime transônico, podem ser utilizados testes em túneis de vento. No entanto, túneis de vento neste regime são caros, motivando a procura por técnicas mais viáveis. Com os avanços em métodos que modelam os fenômenos, a eficiência e viabilidade das ferramentas computacionais tem tornado cada vez mais possível estudar computacionalmente os problemas associados a não linearidades. As equações de Euler têm sido muito utilizadas para a representação de escoamentos transônicos, uma vez que são adequadas para capturar os efeitos da formação de ondas de choque. Uma das ferramentas mais utilizadas na solução das equações de Euler são as técnicas da dinâmica dos fluidos computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*) (LEE-RAUSCH; BATINA, 1995; DUBUC et al., 1997; JAMESON; YOON, 1986; PULLIAM, 1986; JAMESON; SCHMIDT; TURKEL, 1981; SIMOES; AZEVEDO, 1999; CAMILO, 2003). A

dinâmica dos fluidos computacional trata de métodos para a solução numérica de equações diferenciais parciais e possibilita uma análise geral do comportamento do escoamento sobre corpos com geometrias complexas (HIRSCH, 1988a, 1988b). O tratamento numérico dos fenômenos aerodinâmicos apresenta grandes vantagens como flexibilidade e custos menores.

Aeroelasticidade computacional é um campo relativamente novo em Engenharia Aeronáutica, que envolve técnicas de modelagem dinâmico-estrutural e aerodinâmica acopladas para analisar a evolução temporal da resposta aeroelástica, bem como os problemas de estabilidade aeroelástica. No contexto do estudo de fenômenos aeroelásticos não lineares, observa-se a necessidade de utilizar técnicas típicas da teoria de sistemas dinâmicos. Muitos dos desenvolvimentos encontrados na literatura técnica tem se concentrado em problemas bidimensionais.

Dentro do grupo de pesquisa do Laboratório de Aeroelasticidade da EESC/USP, um dos objetivos é analisar ferramentas computacionais não lineares em aeroelasticidade para estabelecer uma completa investigação da estabilidade de sistemas considerando as não linearidades estruturais e aerodinâmicas no modelamento. Análise dos efeitos não lineares foram obtidas ao considerar as não linearidades do tipo cúbica e *free-play* no modelamento estrutural com aerodinâmica linear (DEMARQUI; CAIXETA; CICOGNA, 2007; MARQUES; DEMARQUI; CAIXETA, 2006). Considerando a não linearidade aerodinâmica obtida em ensaio em túnel de vento com estol induzido nos trabalhos Simoni, Vasconcellos e Marques (2007), Marques et al. (2004) e Marques, Simoni e Oliveira (2006), aplicou-se técnicas de análise de séries temporais, como as técnicas de reconstrução de espaço de estado e o cálculo do expoente de Lyapunov para identificar o comportamento caótico dos dados experimentais.

No presente trabalho são consideradas as duas fontes de não linearidades, o escoamento aerodinâmico e a estrutura. A não linearidade aerodinâmica, como é visto, corresponde ao regime de escoamento transônico. Trabalhos anteriores (CAMILO, 2003) foram realizados estudos das características e complexidade de se tratar computacionalmente soluções de escoamentos em regime transônico. No entanto, o código de CFD não estacionário adequado para trabalhar com problemas de aeroelasticidade transônica foi obtido do Prof. Dr. João Luiz

F. Azevedo do CTA/IAE. Este código computacional foi desenvolvido no contexto de malhas não estruturadas e tem sofrido frequentes aprimoramentos para se adequar às aplicações em aerodinâmica e aeroelásticas necessárias ao CTA/IAE (AZEVEDO, 1992; OLIVEIRA, 1993; SIMOES; AZEVEDO, 1999; BIGARELLA; AZEVEDO, 2005; MARQUES; SIMOES; AZEVEDO, 2005; MARQUES; AZEVEDO, 2006, 2007). A aplicação para problemas aeroelásticos através da integração no tempo utilizando este código de CFD não estacionário é obtida no presente trabalho. Os resultados preliminares com o modelo estrutural linear e não linear podem ser observados em Camilo, Marques e Azevedo (2005, 2006, 2007) e Marques et al. (2007).

Outro código utilizado no presente trabalho, que realiza o cálculo direto da fronteira de *flutter*, foi obtido do Prof. Kenneth Badcock da *University of Liverpool*, Inglaterra. Os desenvolvimentos do grupo de trabalho do Prof. Kenneth Badcock são no sentido de utilizar técnicas da teoria de sistemas dinâmicos para caracterizar a natureza das instabilidades não lineares e usar esta informação adicional com os métodos de CFD (BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004, 2005; WOODGATE; BADCOCK, 2006; BADCOCK; WOODGATE, 2007). Para a determinação da fronteira de *flutter* foi utilizada a análise de bifurcação de Hopf. A análise de bifurcação de Hopf é uma ferramenta da teoria de sistemas dinâmicos que calcula diretamente o ponto onde fica caracterizada a transição de uma solução de equilíbrio estável para uma solução oscilatória (*flutter*). A técnica de bifurcação de Hopf reduz consideravelmente o custo computacional quando comparada aos métodos de integração no tempo, e mostrou ser viável a análise de sistemas aeroelásticos não lineares. O código de CFD utilizado na análise de bifurcação de Hopf representa o escoamento transônico e foi desenvolvido em um contexto de malhas estruturadas.

Através das duas metodologias de marcha no tempo com o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas e a de bifurcação de Hopf com o código de CFD no contexto de malhas estruturadas, é possível estabelecer comparações de soluções para as mesmas condições de escoamento no cálculo da fronteira de *flutter*. Não linearidades no modelo estrutural bidimensional são consideradas nas duas metodologias no presente trabalho. Com a metodologia de marcha no tempo é possível observar os fenômenos não lineares através da história no tempo

e retrato de fase das soluções. Na metodologia de bifurcação de Hopf é possível estabelecer qual a influência dos termos não lineares na fronteira de ocorrência de *flutter* para os casos estudados.

1.2 Aeroelasticidade Não Linear

Aeroelasticidade é o estudo do mecanismo de interação entre os esforços aerodinâmicos e dinâmico-estruturais (DOWELL, 1995; DOWELL; HALL, 2001; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Para analisar a história no tempo aeroelástica, modelos estruturais e aerodinâmicos são resolvidos simultaneamente para obter as respectivas respostas dadas pelos deslocamentos e forças aerodinâmicas. Matematicamente, um sistema aeroelástico pode ser descrito como segue. As equações de movimento de uma estrutura linear discretizada em N graus de liberdade podem ser representadas, na forma matricial, por (MEIROVITCH, 1986):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{s}(t) = \mathbf{P}(\mathbf{s}(t), \dot{\mathbf{s}}(t), t), \quad (1.1)$$

onde o amortecimento estrutural foi desprezado e as matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ são quadradas de ordem N e são denominadas matrizes de massa e rigidez da estrutura, respectivamente, os vetores $\ddot{\mathbf{s}}(t)$, $\dot{\mathbf{s}}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ têm dimensão $N \times 1$ e representam as acelerações, velocidades e deslocamentos sofridos pela estrutura devido à aplicação das forças externas $\mathbf{P}(\mathbf{s}(t), \dot{\mathbf{s}}(t), t)$.

No caso particular de uma asa de avião, que é a estrutura a ser analisada, $\mathbf{P}(\mathbf{s}(t), \dot{\mathbf{s}}(t), t)$ é o vetor que representa as forças aerodinâmicas. Uma característica importante do vetor de forças aerodinâmicas é que este não depende somente do tempo, mas também da história no tempo dos estados que descrevem a resposta aeroelástica.

Uma dificuldade em estudos de aeroelasticidade é a produção de modelos matemáticos capazes de resolver simultaneamente, tanto o problema de dinâmica estrutural, descritos pelas equações de movimento, quanto o de aerodinâmica não estacionária. Do ponto de vista da dinâmica estrutural, uma variedade de métodos numéricos e analíticos têm sido desenvolvida

com sucesso (PREIDIKMAN, 1998).

Uma ilustração de uma abordagem aproximada para um modelo aeroelástico está na Figura 1.1. Os estados para cada instante, que são gerados para cada uma das equações correspondentes, seriam trocados entre si e a solução global simultânea produziria ambas as respostas aerodinâmicas e história no tempo do movimento estrutural, com dependência de uma solução inicial conhecida.

Figura 1.1: Representação de um modelo aeroelástico.

Nos modelos aeroelásticos é preciso contabilizar os efeitos aero-estruturais que, em uma forma mais rigorosa, leva à necessidade de se resolver simultaneamente o conjunto de equações aero-estruturais. Um modelo combinado desta forma é notoriamente bastante complexo. A hipótese mais utilizada até o presente momento é a de que os efeitos aerodinâmicos e estruturais sejam determinados separadamente. O resultado do princípio de desacoplamento é que um modelo aeroelástico pode ser representado por dois outros modelos combinados por uma lei de transferência de informação entre eles. Esses modelos são: o modelo estrutural, que traduz as equações do movimento do sistema dinâmico associado, e o modelo aerodinâmico, usado para resolver o carregamento aplicado na estrutura.

A solução das equações não lineares da mecânica dos fluidos, em termos práticos, é obtida somente por meio de técnicas numéricas. Com o desenvolvimento dos computadores e métodos numéricos modernos, surge na área da ciência aeronáutica, a aeroelasticidade computacional, que trata desses desenvolvimentos dos métodos computacionais em aerodinâmica e dinâmica estrutural, para que juntamente seja possível obter a solução simultânea de problemas aeroe-

lásticos. Dentre esses métodos, os de mais frequente aplicação em mecânica dos fluidos são o método de diferenças finitas e o de volumes finitos, e para dinâmica estrutural é o método dos elementos finitos.

Um elemento intrínseco desse processo é que os modelos da resposta aerodinâmica não estacionária determinam o comportamento espaço-temporal dos estados internos aerodinâmicos. Por exemplo, as equações de dinâmica dos fluidos não estacionária, representando escoamentos não viscosos, são descritas pelas seguintes representações simbólicas (MARQUES, 1997), obedecendo as condições de contorno e um conjunto apropriado de condições iniciais, então:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{s}(t), t)}{\partial t} = \mathcal{N}(\phi(\mathbf{s}(t), t)) \quad \text{em } \Omega, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

satisfazendo

$$\mathcal{B}(\phi(\mathbf{s}(t), t), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad (1.3)$$

onde $\phi(\mathbf{s}(t), t)$ representa a variável de estado do escoamento, $\mathbf{s}(t)$ é o vetor de coordenadas espaciais, $\mathcal{N}$ é um operador diferencial parcial não linear, Ω determina o domínio do escoamento no problema, $\partial\Omega$ é a fronteira do escoamento, $\partial\Omega_s$ representa os limites da superfície aerodinâmica, $\mathcal{B}$ representa um operador de fronteira, e $\mathbf{u}(t)$ é o movimento generalizado instantâneo da fronteira (conforme Figura 1.2).

Figura 1.2: Representação de um modelo aerodinâmico sobre um domínio limitado por uma fronteira $\partial\Omega$ (MARQUES, 1997).

Supondo o movimento da fronteira da forma $\mathcal{U}(\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t))$, tal que o trabalho virtual, $\delta^* \mathbf{W}$,

é definido por:

$$\delta^* \mathbf{W} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}(t) \quad (1.4)$$

então, o vetor da resposta da força aerodinâmica generalizada, $\mathbf{P}(t)$ é dado pela expressão:

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\partial\Omega_s} \left(\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \right)^T \mathbf{n}(-p(\phi(\mathbf{s}(t), t))) \, d\partial\Omega_s \quad (1.5)$$

onde, $p(\phi(\mathbf{s}(t), t))$ descreve a distribuição de pressão como função não linear das variáveis espaço-temporal instantâneas relativas ao vetor normal, $\mathbf{n}$, à superfície.

Uma hipótese para modelos da aerodinâmica não estacionária é que a influência dos atrasos no tempo da variação de pressão introduzidos pela propagação e convecção das variáveis espaço-temporal pode ser tratada puramente com a história no tempo do deslocamento estrutural (MARQUES, 1997). Isso possibilita a aplicação dos princípios da teoria de sistemas dinâmicos, como é o caso da representação funcional. No entanto, o maior desafio para esses modelos tem sido o desenvolvimento de soluções confiáveis e práticas.

Recentemente, os estudos de fenômenos aeroelásticos não lineares são cada vez mais explorados em Engenharia Aeronáutica (FRIEDMANN, 1999; TERRA, 2003; DOWELL; TANG, 2002b). Na resposta aeroelástica de um modelo estrutural podem aparecer fenômenos prejudiciais à integridade de uma aeronave, como os fenômenos de *flutter* e divergência. *Flutter* e divergência são decorrentes de instabilidades aeroelásticas, e portanto, sua previsão é da maior importância.

Testes em vôo costumam ser realizados para verificação final da fronteira onde ocorre *flutter*. No entanto, dificuldades são encontradas nestes programas de testes como, por exemplo, distinguir entre o ponto neutro caracterizado pelo início do *flutter* e os fenômenos de oscilações em ciclos limite, pois ambos são caracterizados por oscilações com amplitudes finitas. Este problema pode resultar em atrasos nos programas de ensaios em vôo e isto tem motivado muitos trabalhos a se preocuparem em caracterizar e classificar os diferentes tipos de não linearidades e seus efeitos, tornando possível um melhor entendimento da origem e do comportamento dos fenômenos não lineares como oscilações em ciclos limite Dowell (2003). Em vários projetos

aeronáuticos, oscilações em ciclos limite tornaram-se persistentes, como nas experiências apresentadas durante ensaios em vôo do F-16 e F-18, apresentadas por Bunton e Denegri (2000) e Denegri (2000). As experiências mostram a ocorrência de oscilações em ciclos limite com amplitudes reduzidas garantindo a integridade da estrutura. Porém, onde as oscilações em ciclos limite apresentavam altas amplitudes, a segurança da estrutura torna-se uma questão importante, sendo que esta estrutura pode sofrer danos por fadiga.

As consequências associadas aos efeitos não lineares são classificadas por Dowell e Tang (2002a) em dois caminhos possíveis. Em modelos lineares instáveis os efeitos não lineares são classificados como atenuantes nas oscilações que crescem exponencialmente. Assim, onde há um crescimento ilimitado da amplitude das oscilações previstas pela instabilidade linear, a não linearidade atua na amplitude da oscilação tornando-a finita. Esse fenômeno de oscilação com amplitudes finitas é conhecido por oscilação em ciclos limite.

A segunda consequência dos efeitos não lineares, de acordo com a classificação de Dowell e Tang (2002a), é considerada completamente prejudicial, ou ainda, catastrófica para a estrutura. Os efeitos não lineares são sensíveis a pequenas perturbações de parâmetros do sistema, como o comportamento estrutural e o regime de vôo, e dependendo da variação destes parâmetros podem ocorrer grandes alterações estruturais.

Experiências nos estudos das respostas aeroelásticas têm tornado cada vez mais necessário classificar adequadamente os fenômenos não lineares envolvidos. Tipicamente, a resposta aeroelástica não linear têm sido classificada em quatro caminhos possíveis: *flutter*, divergência, oscilação em ciclo limite e movimentos caóticos. O fenômeno de *flutter* é um movimento oscilatório auto-sustentado ao atingir uma velocidade crítica. Neste ponto a oscilação se mantém em uma amplitude fixa (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; FUNG, 1955; DOWELL, 1995). Em velocidades maiores que a crítica, qualquer pequena perturbação pode induzir ao início de violentas oscilações com amplitudes crescentes. A divergência é um movimento instável com amplitudes crescentes não oscilatória.

Quando a solução converge para uma oscilação com amplitude finita é chamada de oscilação

em ciclo limite (LCO, do inglês, *Limit Cycle Oscillation*). As oscilações em ciclos limite representam uma das mais importantes características no comportamento aeroelástico não linear e consistem de oscilações periódicas com um número de frequências e amplitudes limitado (ALONSO; JAMESON, 1994; ROBERTS et al., 2002). O movimento caótico é caracterizado pelas oscilações não periódicas consistindo de frequências e amplitudes múltiplas. Uma vez que oscilações em ciclos limite e o movimentos caóticos podem ocorrer antes das oscilações divergentes caracterizadas pelo *flutter*, é importante conhecer as características não lineares na resposta aeroelástica em projetos aeronáuticos (DOWELL; TANG, 2002a; BAE; YANG; LEE, 2002; THOMAS; DOWELL; HALL, 2002; KOUSEN; BENDIKSEN, 1994).

As não linearidades em sistemas aeroelásticos são divididas em termos de sua origem na aerodinâmica e estrutura. As não linearidades associadas à estrutura estão relacionadas ao tipo de material, geometria, ou ainda, à partes de junções, superfície de controle, folgas, etc. As não linearidades aerodinâmicas podem estar associadas ao aparecimento e movimento de ondas de choques sobre a asa e corpo de uma aeronave caracterizada pelo regime de voo transônico, e também pelos efeitos viscosos como separação do escoamento e outras. Os diferentes tipos de não linearidades estruturais e aerodinâmicas são analisadas e classificadas por Lee, Price e Wong (1999).

As não linearidades aerodinâmicas podem estar associadas ao aparecimento e movimento de ondas de choques sobre a asa e corpo de uma aeronave caracterizada pelo regime de voo transônico, e também pelos efeitos viscosos como separação do escoamento e outras. No regime de escoamento transônico, efeitos não lineares dificultam significativamente a previsão das fronteiras de *flutter*. Associado às não linearidades introduzidas pela formação e passeio das ondas de choque no caso aeroelástico, verifica-se que a fronteira de ocorrência de *flutter* é degradada rapidamente na faixa de voo transônico. Este fenômeno é denominado de *depressão transônica* e está ilustrado na Figura 1.3.

Figura 1.3: Representação do fenômeno de depressão transônica.

Woodgate, Badcock e Richards (2000), Badcock, Woodgate e Richards (2004) e Badcock, Woodgate e Richards (2005) descrevem um método para prever fronteiras de *flutter* em regime transônico para perfis e asas simétricas. Nestes trabalhos, o modelo estrutural foi considerado linear e se pode observar o fenômeno de depressão transônica. Estabelecer uma relação entre as não linearidades consideradas no modelamento aeroelástico e os fenômenos envolvidos é finalidade de muitos trabalhos. Em alguns trabalhos foram observados, ao considerar certos tipos de não linearidades estruturais e/ou aerodinâmicas, as oscilações em ciclos limite após a velocidade crítica de *flutter* e com amplitudes relativamente baixas (LEE; PRICE; WONG, 1999; LIU et al., 2001; BENDIKSEN, 2002; KHOLODAR et al., 2002; CAMILO; MARQUES; AZEVEDO, 2007).

Outros trabalhos observaram que ao introduzir não linearidades estruturais no modelamento, as respostas se caracterizaram por oscilações em amplitudes variadas e com uma certa irregularidade no comportamento, mas mantendo-se dentro de uma faixa de amplitude, ou seja, não apresentaram características divergentes (LEE; PRICE; WONG, 1999). Para classificar este comportamento, aparentemente aleatório, Lee, Price e Wong (1999) recorreram às técnicas apropriadas para obter análises adequadas dos fenômenos não lineares. Neste caso, foi obtido o diagrama de bifurcação e análise do retrato de fase, e o movimento oscilatório foi associado

ao fenômeno de caos. Doedel et al. (1986) também descreve um método para a construção do diagrama de bifurcação para aplicações diretas à sistemas aeroelásticos.

Sabe-se através da teoria de sistemas dinâmicos que uma propriedade fundamental de um sistema caótico é a sensibilidade às condições iniciais, isto é, condições iniciais muito próximas geram trajetórias inicialmente próximas, que após um certo tempo, passam a representar comportamentos completamente não correlacionados entre si (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Recursos como este tem levado muitos trabalhos a explorar estas técnicas para o tratamento adequado na classificação de tais fenômenos não lineares em aeroelasticidade.

Exemplos de comportamentos caóticos em um modelo bidimensional de perfil de asa foram observados em Price, Lee e Alighanbari (1994a) e Price e Keleris (1996). Nestes trabalhos foram mostradas que a ocorrência das oscilações em ciclos limite dependeram fortemente das condições iniciais impostas ao aerofólio, onde diferentes amplitudes e frequências foram observadas nas respostas, caracterizando um movimento caótico. Observa-se, nos trabalhos para análise de respostas aeroelásticas não lineares, é a utilização da denominação de oscilação em ciclo limite para as frequentes oscilações obtidas após a ocorrência do *flutter*. No entanto, muitas respostas oscilatórias podem ser caracterizadas pelo caos e, sendo assim, são necessários tratamentos adequados para classificar o comportamento do sistema e fazer a análise de estabilidade.

Nas últimas décadas, pode ser observado um número considerável de trabalhos para estudos do comportamento aeroelástico não linear recorrendo às ferramentas da teoria de sistemas dinâmicos (BERAN; MORTON, 1997; DOEDEL et al., 1986; LUI; WONG; LEE, 2000; SEDAGHAT; COOPER; LEUNG, 2001; BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004; CUMMINGS, 2004; BADCOCK; WOODGATE, 2007; SIMONI; VASCONCELLOS; MARQUES, 2007; CHUNG; CHAN; LEE, 2007). Estas ferramentas são classificadas de acordo com a aplicabilidade para cada fenômeno aeroelástico envolvido e mostram ser bastante promissoras quando aliadas às técnicas numéricas. Em sistemas dinâmicos, as soluções podem ser avaliadas qualitativamente, ou seja, são analisadas a existência e estabilidade das soluções a partir de uma

condição inicial. Os fenômenos não lineares em aeroelasticidade podem ser observados a partir de construções de diagramas de bifurcações, onde são analisados os pontos de equilíbrios periódicos e movimentos caóticos do sistema. Além disso, pode ser obtido o expoente de Lyapunov para afirmar a ocorrência do caos. Os retratos de fase do sistema podem identificar fenômenos como pontos atratores, atratores periódicos e atratores caóticos (THOMPSON; STEWART, 1986; SEYDEL, 1994; NAYFEH; BALAKUMAR, 1995; PARANJAPE; SINHA; ANANTHAKRISHNAN, 2007).

1.3 Não Linearidades Estruturais

Estruturas aeronáuticas são bastante complexas e conseqüentemente fica impossível conhecer a natureza de todas as não linearidades do comportamento dinâmico-estrutural. Lee, Price e Wong (1999) classificam as não linearidades estruturais em distribuídas e concentradas. Não linearidades distribuídas estão sobre toda estrutura como as não linearidades caracterizadas pelo comportamento dos materiais e tipo de geometria, e têm grandes efeitos em oscilações de amplitudes altas. As não linearidades concentradas atuam localmente e costumam ser encontradas em mecanismos de controle ou em partes de conexões e contatos da estrutura. Esse tipo de não linearidade possui efeito significativo em oscilações de baixas amplitudes. Uma não linearidade estrutural concentrada é o resultado da aplicação de um esforço aerodinâmico sobre a estrutura criando uma resposta que não é proporcional à força aplicada.

Por exemplo, considera-se o sistema da Equação (1.1) onde os estados são dados pelos deslocamentos verticais e torsional (α) estruturais. No sistema aeroelástico com a estrutura linear, o momento de torção em arfagem é $M(\alpha) = \mathbf{K}_\alpha \alpha$. Uma não linearidade na resposta estrutural em torção é obtida com uma constante de rigidez de mola não linear $\bar{\mathbf{K}}_\alpha$, e pode ser da seguinte forma:

$$M(\alpha) = \bar{\mathbf{K}}_\alpha \alpha \quad \text{ou} \quad M(\alpha) = \mathbf{K}_\alpha f(\alpha), \quad (1.6)$$

onde $f(\alpha)$ é uma função não linear que determina o tipo de não linearidade no modelo estrutural.

Assim, a curva que descreve a resposta do momento em torção, $M(\alpha)$, é que determina a não linearidade estrutural introduzida ao sistema aeroelástico na Equação (1.1). A função não linear $f(\alpha)$ caracteriza o tipo de não linearidade, e costumam ser classificadas pelos autores em alguns tipos básicos. Dowell e Tang (2002b) classificam por três tipos de curvas, o *free-play*, histerese e cúbica. Não linearidades concentradas também podem ser obtidas por uma combinação destes três tipos de curvas. A Figura 1.4 mostra a curva da resposta do momento de torção pelo deslocamento da superfície de controle, representando uma não linearidade do tipo *free-play* decorrente, por exemplo, de superfícies de controle com folga em sua articulação.

Figura 1.4: Não linearidade estrutural do tipo *free-play*.

As influências das não linearidades estruturais foram analisadas na fronteira de ocorrência do *flutter* em muitos trabalhos. Por exemplo, *free-play*, histerese, e não linearidade cúbica foram analisadas por Woolston, Runyan e Andrews (1957). Estes autores estudaram o movimento de um sistema aeroelástico dado por uma seção típica com dois graus de liberdade, utilizando a função de Wagner para representar o escoamento linear. Este estudo mostrou que a velocidade crítica de *flutter* foi reduzida na presença dos três tipos de não linearidades. Price, Lee e Alighanbari (1994b) também encontraram oscilações em ciclos limite com a não linearidade do tipo *free-play* no modo de torção no equacionamento estrutural bidimensional em regime subsônico abaixo da velocidade crítica do *flutter* linear.

Lee e Kim (1995) analisaram a história no tempo da resposta aeroelástica de um modelo estrutural com N graus de liberdade considerando não linearidade do tipo *free-play* na superfície de controle em arfagem. Os autores definiram regiões de estabilidade do comportamento aeroelástico, onde o sistema obteve respostas convergentes, oscilações em ciclos limite, caos e respostas divergentes. Em pesquisas realizadas por Price, Lee e Alighanbari (1994a) e Lee, Price e Wong (1999) foram encontradas respostas aeroelásticas caóticas para vários tipos de não linearidades estruturais em escoamentos incompressíveis. Lee e Kim (1995), Conner et al. (1997), Tang e Dowell (2002), Alighanbari e Hashemi (2002) e Alighanbari (2002) analisam os efeitos de não linearidades dos tipos cúbica e *free-play* pela construção de diagramas de bifurcações. Nestes casos, foram obtidas boas relações entre o modelo matemático e o experimento nas respostas em oscilações em ciclos limite.

As não linearidades estruturais também demonstram ter grandes influências nos fenômenos que envolvem escoamentos em regime transônico, como mostram os trabalhos de de Thomas, Dowell e Hall (2001) e Kousen e Bendiksen (1994). Em Kousen e Bendiksen (1994) foi observado que a não linearidades do tipo *free-play*, no modo de torção, alterou a velocidade crítica de *flutter* para valores menores que aqueles obtidos com o modelo estrutural linear em escoamento transônico. Neste trabalho também foi notado que as oscilações com amplitudes finitas obtidas considerando o *free-play* mostraram amplitudes variadas e altas frequências, diferentemente das oscilações em ciclos limite sem o *free-play* no modelo estrutural. Em Morton (1996), o autor analisa a não linearidade do tipo bilinear em torção para um sistema aeroelástico com dois graus de liberdade no cálculo da fronteira de *flutter*. Este autor foi o pioneiro na análise de bifurcação de Hopf para o cálculo da fronteira de *flutter* em regime transônico, e também observou que a velocidade crítica de *flutter* decaiu ao considerar a não linearidade estrutural.

Um dos pontos importantes considerados por Roberts, Gaitonde e Jones (2005) foi o fato de que a não linearidades do tipo *free-play* é uma função descontínua, e os métodos de integração no tempo são frequentemente utilizados para a solução do sistema aeroelástico como os métodos de Runge-Kutta. Liu, Wong e Lee (2002a) fizeram um estudo detalhado da utilização de métodos Runge-Kutta com não linearidades descontínuas e mostrou que ocorreram diferenças

bastante significativas entre algumas soluções exatas e às obtidas numericamente. Então, alguns trabalhos estão desenvolvendo metodologias adequadas para tratar este tipo de problema. Dentre estes, (LIU; WONG; LEE, 2002b) desenvolvem um método de transformação de ponto, onde ocorre a descontinuidade, para problemas que envolvem não linearidades estruturais do tipo *free-play* e os métodos de Runge-Kutta para solução. Além dos problemas encontrados com os métodos de marcha no tempo, a teoria de sistemas dinâmicos utiliza como hipótese fundamental para a solução a continuidade das equações. Roberts, Gaitonde e Jones (2005) encontraram um caminho bastante simples ao descrever as funções descontínuas por funções contínuas através de uma função tangente hiperbólica e conseguiram definir várias formas de não linearidades através desta função.

1.4 Não Linearidades Aerodinâmicas

No contexto de problemas aeroelásticos, a maior dificuldade no desenvolvimento de modelos matemáticos ainda reside na determinação do comportamento aerodinâmico. Escoamentos aerodinâmicos apresentam comportamentos complexos, em geral, relacionados à velocidade e características do fluido na região de interesse (densidade, viscosidade, temperatura). Tipicamente, os escoamentos aerodinâmicos são categorizados com relação à velocidade, como: subsônico, transônico, supersônico e hipersônico (ANDERSON, 1995). Para cada uma das categorias mencionadas, os efeitos da compressibilidade do meio fluídico, parametrizadas pelo número de Mach (M), revelam comportamentos distintos. Os efeitos da viscosidade, contudo, desempenham um papel importante em cada uma das categorias. Enquanto que ondas de choque (devido ao meio ser compressível) são mais relevantes para escoamentos transônicos e supersônicos, regiões de separação e turbulência são de importância maior em escoamentos subsônicos. As diversas categorias de escoamentos, devido às suas especificidades, são comumente tratadas por modelos aerodinâmicos diferentes, aumentando as dificuldades na análise. Essas dificuldades são entendidas quando se examinam as equações básicas que envolvem a modelagem aerodinâmica (ANDERSON, 1995).

Segundo alguns autores, as não linearidades aerodinâmicas são classificadas em basicamente duas fontes, as associadas aos efeitos de compressibilidade e aos efeitos viscosos (TERRA, 2003; DOWELL; TANG, 2002b; LEE; PRICE; WONG, 1999). Um regime de escoamento cujos efeitos de compressibilidade introduzem as maiores dificuldades em projetos aeronáuticos é o transônico. A fonte dominante de não linearidade corresponde à formação e ao movimento de ondas de choque (NIXON, 1989). Considerando o escoamento não viscoso e a não ocorrência de separação, as forças geradas pelo movimento das ondas de choque desestabilizam o movimento em arfagem da estrutura provocando o fenômeno de depressão transônica, como mostra a Figura 1.3.

Quando se considera os efeitos viscosos no modelamento aeroelástico, as não linearidades podem estar associadas com o fenômeno de separação do escoamento, que pode ser induzido pelas ondas de choques em regime transônico ou pelo alto ângulo de incidência da estrutura (NEWSON, 2002; KIM; STRGANAC, 2002). Em regime transônico o surgimento de ondas de choque tem influência no comportamento da camada limite. O choque causa um espessamento da camada limite que, por sua vez, tende a deslocar o choque no sentido contrário do fluxo. O *flutter* é caracterizado pela oscilação da estrutura com consequente variação da intensidade e posição das ondas de choque. A interação entre choque e camada limite altera as características aerodinâmicas podendo alterar significativamente a velocidade e/ou frequência de *flutter*. Estas alterações podem inclusive mudar a natureza do fenômeno aeroelástico passando de *flutter* para oscilações de ciclo limite. Uma das causas de alterações significativas no comportamento aeroelástico é a ocorrência de separação precipitada no local em que a onda de choque incide sobre a camada limite.

Na literatura são encontradas diversas de ferramentas numéricas utilizadas para o cálculo de modelos aerodinâmicos. Os métodos tipicamente desenvolvidos para solucionar escoamentos em regime subsônico e supersônico são baseados em formulações lineares. Dentre elas destacam-se os métodos de painéis, que representaram um conjunto de ferramentas computacionais em aerodinâmica e que atualmente tem seu desenvolvimento praticamente todo estabelecido. Entretanto, na faixa de velocidades transônicas, estas mesmas técnicas não apresentam

resultados satisfatórios. De acordo com (TIJDEMAN, 1977), estas dificuldades surgem em decorrência do comportamento não linear dos escoamentos transônicos. Conforme ressaltado por (TIJDEMAN, 1977), a não linearidade dos escoamentos transônicos é caracterizada pela modificação significativa das propriedades do escoamento mesmo quando o aerofólio é submetido a pequenos deslocamentos. Balhaus e Goorjian (1978) desenvolveram o código LTRANS2 para escoamento em regime transônico, utilizando as formulações aerodinâmicas baseadas nas equações de pequenas perturbações (TSD, do inglês, *Transonic Small Disturbance*) e do potencial completo. Estas formulações são capazes de capturar pequenos movimentos das ondas de choque e são bastante utilizados para tratar problemas aeroelásticos não lineares (BERAN et al., 2004).

Os métodos da Dinâmica dos Fluidos Computacional (ANDERSON, 1995; HIRSCH, 1988a, 1988b) já atingiram um grau aceitável de maturidade e este desenvolvimento está atrelado ao avanço dos computadores modernos. Com estes avanços, os métodos baseados na solução das equações de Euler a Navier-Stokes são cada vez mais confiáveis (JAMESON; SCHMIDT; TURKEL, 1981; OSHER; CHAKRAVARTHY, 1983; PULLIAM, 1986; VENKATAKRISHNAN; JAMESON, 1988; AZEVEDO, 1992; DUBUC et al., 1997; VENKATAKRISHNAN, 1995; FIDDES; GAITONDE; JONES, 1996). As técnicas de CFD oferecem métodos de discretizações espaciais e no tempo, assim como tratamentos adequados para as condições de contorno aplicáveis para solução de modelos aerodinâmicos em geral. Juntamente com os modelos estruturais, os códigos de CFD não estacionários constituem os mais recentes desenvolvimentos em aeroelasticidade computacional não linear. O escoamento é modelado via métodos de CFD com técnicas de malha dinâmica via modelagem geométrica (LEE-RAUSCH; BATINA, 1995, 1996; GOURA, 2001; DOI, 2002; DOWELL, 2003; MARQUES; AZEVEDO, 2007; CAMILO; MARQUES; AZEVEDO, 2007).

1.5 Aeroelasticidade Computacional Transônica

O tratamento de problemas aeroelásticos por meio de abordagens computacionais está sendo recentemente denominado de Aeroelasticidade Computacional. Um modelo típico da aeroelasticidade computacional é formado pelo acoplamento dos modelos dinâmico-estrutural e de aerodinâmica não estacionária.

No contexto de problemas da Aeroelasticidade Computacional, são encontrados trabalhos que envolvem os sistemas aeroelásticos formados por modelos estruturais e aerodinâmicos lineares. Em Bendiksen e Friedmann (1980) foi obtida a resposta aeroelástica com o acoplamento da solução linear para escoamento incompressível não estacionário com um modelo estrutural de seção típica com deslocamentos verticais e torcionais. Os resultados mostraram o acoplamento entre os dois graus de liberdade na fronteira de ocorrência do *flutter*.

Com os avanços nas técnicas numéricas e eficiência dos computadores modernos, os problemas aeroelásticos assumem, com grande frequência, modelos estruturais lineares e modelos aerodinâmicos não lineares, e os fenômenos envolvidos nas respostas são associados ao tipo de escoamento em questão. Bennett e Edwards (1998) tratam do desenvolvimento em aeroelasticidade computacional com ênfase nos modelos para o regime transônico. Dos primeiros cálculos aerodinâmicos às mais recentes aplicações das equações de Euler e Navier-Stokes, o campo da aeroelasticidade computacional transônica vem progredindo rapidamente. O estado da arte em métodos de CFD, que tratam das soluções das equações de Euler para análise aeroelástica transônica, indica que as ondas de choque na superfície da estrutura induzem os fenômenos não lineares que levam às oscilações em ciclos limite (KOUSEN; BENDIKSEN, 1994). Identificar ciclos limite em regime transônico é o objetivo de muitos trabalhos como Alonso e Jameson (1994), Sedaghat, Cooper e Wright (2000), Kholodar et al. (2002), Thomas, Dowell e Hall (2002) e Kholodar et al. (2003). Estes trabalhos tratam do acoplamento entre o código aerodinâmico não estacionário, com a solução das equações de Euler, com modelos estruturais que utilizam uma seção típica com dois graus de liberdade.

Associados aos efeitos não lineares da aerodinâmica transônica, muitos trabalhos também

se preocupam em identificar fenômenos não lineares acrescentando não linearidades estruturais (THOMAS; DOWELL; HALL, 2001). Em Borland e Rizzetta (1982) são identificadas oscilações em ciclos limite com modelo estrutural não linear em regime transônico, através da integração no tempo do sistema aeroelástico pelo método de Runge-Kutta. Nesse processo, são combinados os métodos de CFD não estacionários e técnicas de movimento de malhas com as equações estruturais na forma de variáveis de estado. Yoo, Park e Han (2005) utiliza a análise de integração no tempo para estudo do comportamento aeroelástico de uma asa com modelo estrutural não linear dado pelo *free-play* no modo de torção e em regime transônico utilizando a formulação aerodinâmica baseadas nas equações de pequenas perturbações.

Em uma simulação aeroelástica típica, com métodos de integração no tempo, a solução do problema aerodinâmico não estacionário deve, para cada passo no tempo, promover uma nova distribuição dos elementos de discretização do escoamento. Neste processo é necessário uma rotina que permita o movimento dinâmico da malha para acomodar a informação da deformação estrutural associada. Soma-se a isso a necessidade da organização e armazenamento de uma enorme quantidade de dados. Por esta razão, métodos de marcha no tempo requerem um alto custo computacional para problemas que envolvem métodos de CFD em modelos da Aeroelasticidade Computacional (CHEN et al., 2004; ALONSO; JAMESON, 1994; LIU et al., 2001; BAE; YANG; LEE, 2002). Dowell e Tang (2002b) e Doi (2002) afirmam que, com os avanços dos computadores modernos e das técnicas em aerodinâmica para minimizar os custos dos cálculos dos códigos de CFD não estacionários, as metodologias de marcha no tempo tem ganhado destaque nas pesquisas em aeroelasticidade por oferecer um estudo completo do comportamento do sistema.

Muitos esforços também se concentram em obter outras formas de estudar o comportamento aeroelástico, como o cálculo da fronteira de *flutter* tentando evitar as soluções em marcha no tempo. Uma das alternativas apresentada por Dowell e Hall (2001) é a técnica que calcula o comportamento aeroelástico não estacionário com número de modos relativamente reduzido, levando a modelos de ordem reduzida (LUCIA; BERAN; KING, 2003; THOMAS; DOWELL; HALL, 2001).

Munteanu et al. (2005) utilizam um modelo de ordem reduzida baseado na teoria das séries de Volterra para um modelo aeroelástico com não linearidade no modelo estrutural em escoamentos subsônico e transônico. Esta metodologia foi aplicada ao perfil aerodinâmico NACA0012 com não linearidades do tipo *free-play* nos dois graus de liberdade dados pelos deslocamentos vertical e de arfagem. Em Lieu e Fahat (2007), análises aeroelásticas utilizando um modelo de ordem reduzida foram realizadas, através de um método de decomposição ortogonal apropriado, para uma configuração completa da aeronave F-16 em regime de escoamento transônico.

Na literatura, são denominados também de modelos de ordem reduzidas algumas análises que tratam a aproximação dos coeficientes de influência aerodinâmicos no domínio da frequência. Neste contexto, um grande avanço foi atingido no sentido da diminuição do custo computacional, com a utilização do chamado método indicial ou impulsivo. Nesses métodos, os elementos da matriz dos coeficientes de influência aerodinâmicos são calculados, no domínio da frequência, a partir da resposta do escoamento a um deslocamento indicial ou impulsivo. Sendo assim, o número de cálculos aerodinâmicos, para uma determinada condição de voo, fica limitado ao número de modos estruturais de interesse para obtenção da fronteira de *flutter* em escoamento transônico como foi discutido em Oliveira (1993), Marques e Azevedo (2007) e Lai e Tsai (2007).

Um outro caminho proposto por Morton e Beran (1999) é utilizar técnicas da teoria de sistemas dinâmicos para caracterizar a natureza das instabilidades e usar esta informação adicional com os métodos de CFD. O fenômeno de *flutter* é tratado pela teoria linear como um problema de instabilidade aeroelástica, já na análise não linear, este fenômeno é classificado por uma bifurcação de Hopf. Em outras palavras, o início do *flutter* é caracterizado pela transição de uma solução de ponto de equilíbrio estável para uma solução oscilatória com amplitudes finitas, sobre a influência de algum parâmetro do sistema.

Esta caracterização da metodologia de bifurcação de Hopf que é identificada pela análise da matriz jacobiana do sistema linear associado ao sistema aeroelástico não linear que possui um

par conjugado de autovalores imaginário puro foi também utilizada em Badcock, Woodgate e Richards (2004) com uma melhor aproximação dos termos da matriz jacobiana. A metodologia de bifurcação de Hopf começou a ser aplicada a escoamentos em regime transônico, descritos pelas equações de Euler, em Morton (1996) para um modelo estrutural com dois graus de liberdade dado por uma seção típica e, recentemente, tem sido aperfeiçada para tratar problemas em três dimensões por Badcock, Woodgate e Richards (2005). Com esta metodologia foi possível obter a fronteira completa do *flutter* para um modelo linear de asa simétrica com custos computacionais bastante reduzidos.

Considerando as não linearidades estruturais em escoamentos transônicos observa-se a crescente preocupação da análise dos fenômenos não lineares envolvidos em aeroelasticidade não somente visando o cálculo da fronteira de ocorrência de *flutter*. A teoria de sistemas dinâmicos não lineares oferece uma classe de métodos numéricos para a classificação e análise de estabilidade de sistemas dinâmicos (SEYDEL, 1994; DOWELL; VIRGIN, 1992; CASTILHO, 2004). Métodos conhecidos como continuação numérica de soluções são utilizados para a construção do diagrama de bifurcação de um sistema dinâmico. Beran e Morton (1997) utilizam os princípios dos métodos de continuação numérica em regime transônico. O diagrama de bifurcação fornece o comportamento do sistema de acordo com a variação de um determinado parâmetro. Allgower e Georg (1990), Doedel et al. (1986), Dhooge et al. (2003) e Cummings (2004) descrevem esta classe de métodos em aplicações na dinâmica de voo de aeronaves e para problemas aeroelásticos em geral.

Outra técnica de sistemas dinâmicos recentemente utilizada para analisar o comportamento aeroelástico é a técnica de *centre manifold*. Esta técnica é aplicada para reduzir o sistema aeroelástico original com n graus de liberdade para um sistema com dois graus de liberdade próximo ao ponto de bifurcação. O modelo de ordem reduzida, através do teorema de *centre manifold*, pode ser utilizado para explorar o comportamento das soluções convergentes e oscilações em ciclos limite de sistemas aeroelásticos. Assim sendo, Lui, Wong e Lee (2000) utilizam essa técnica em um sistema aeroelástico com não linearidade estrutural do tipo cúbica para investigar as oscilações em ciclos limites próximas à ocorrência de bifurcação de Hopf.

Woodgate e Badcock (2006) e Badcock e Woodgate (2007) aplicam a técnica de *centre manifold* para analisar as oscilações em ciclos limite em regime de escoamento transônico em um modelo estrutural linear dado por uma seção típica. A característica mais interessante da utilização desta técnica é o cálculo do comportamento do sistema aeroelástico com um número relativamente reduzido de dimensão original do sistema sem perda de precisão na solução.

O desenvolvimento da Aeroelasticidade Computacional está atrelada também à disponibilização de resultados experimentais para verificação dos programas. Existe um interesse muito grande em estudos aeroelásticos em vôo transônico, já que nesse regime tende a ocorrer um mínimo na pressão dinâmica de *flutter* (depressão transônica de *flutter*). São poucos os resultados experimentais publicados contendo todos os dados necessários para a simulação computacional de *flutter* transônico.

Existe uma concentração de esforços em experimentos de *flutter* transônico, com publicação de dados, no centro Langley da NASA (YATES; LAND; FOUGHNER, 1963; SANDFORD; RUHLIN; ABEL, 1974; SANDFORD; SEYDEL; ECKSTROM, 1989). Uma exceção notável é o National Aerospace Laboratory (NLR) na Holanda que tem um número bastante grande de publicações sobre ensaios transônicos em túnel de vento. As publicações do NLR, no entanto, não incluem dados para simulação computacional de *flutter* transônico. O número reduzido de túneis de vento transônicos existentes no mundo, o custo associado com os ensaios e, muitas vezes, a prioridade da utilização industrial limitam bastante a publicação de dados em aeroelasticidade transônica.

1.6 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é explorar as respostas não lineares de um sistema aeroelástico com não linearidades estruturais concentradas em escoamento transônico. Concentrando-se no caso bidimensional (seção típica), o estudo visa mostrar a influência dos parâmetros aeroestruturais nos fenômenos aeroelásticos não lineares. Também, pretende-se observar os fenômenos de depressão transônica através do cálculo da fronteira de ocorrência de *flutter* com

modelo estrutural linear e não linear.

Duas metodologias diferentes são utilizadas no presente trabalho para análise aeroelástica. Primeiramente, considera-se a metodologia de marcha no tempo do sistema reescrito na forma de variáveis de estado. A integração no tempo do sistema aeroelástico é obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para representar o escoamento transônico nesta análise, utiliza-se o código de CFD não estacionário para malhas não estruturadas, com formulação baseada nas equações de Euler em 2D, do Prof. Dr. João Luiz F. Azevedo do CTA/IAE. Neste código de CFD, as equações de Euler são representadas na forma conservativa e resolvidas utilizando um método de volumes finitos e uma formulação explícita. A integração no tempo do sistema de equações semi-discretizadas é feita através de um método do tipo Runge-Kutta híbrido de cinco passos.

Através da metodologia de marcha no tempo é possível observar as histórias no tempo em arfagem e deslocamentos verticais. Esta metodologia corresponde à primeira contribuição deste trabalho, uma vez que este código de CFD nunca havia sido utilizado antes para a integração no tempo do sistema aeroelástico. Através da inclusão de não linearidades estruturais concentradas em arfagem é possível observar a influência dos termos não lineares estruturais em regime transônico. As funções não lineares para descrever a não linearidade no momento em torção do modelo estrutural são dadas pelas funções contínuas polinomiais e uma combinação de funções do tipo tangente hiperbólica, que têm a mesma forma das não linearidades do tipo *free-play* e cúbicas com apenas uma variação de parâmetros.

A outra metodologia considerada no presente trabalho é a análise de bifurcação de Hopf do sistema aeroelástico para o cálculo da fronteira de *flutter* desenvolvido pelo Prof. Kenneth J. Badcock da *University of Liverpool*, Inglaterra. Nesta metodologia, o código de CFD no estado estacionário para representar o escoamento transônico através das equações de Euler bi-dimensionais utiliza malhas estruturadas. Esta ferramenta computacional utiliza a metodologia implícita em tempo dual para a integração no tempo das equações governantes e a discretização dos termos espaciais é realizada através de uma aproximação por diferenças finitas.

No presente trabalho, é analisada a influência dos termos não lineares ao considerar as não linearidades estruturais concentradas no momento em torção no código da análise de bifurcação de Hopf. Com isso, este trabalho contribui significativamente ao fazer as primeiras análises considerando não linearidades estruturais neste código para o problema aeroelástico bidimensional em questão. Estas contribuições também são importantes no atual estado da arte para construção da fronteira de *flutter* em modelos de seções típicas com não lineares estruturais concentradas, representadas por funções contínuas, em regime transônico.

O código de CFD do grupo do Prof. Kenneth Badcock utiliza discretizações espaciais e no tempo diferentes das utilizadas no grupo do Prof. Dr. João Luiz F. Azevedo. Através das duas metodologias de marcha no tempo e análise de bifurcação de Hopf é possível estabelecer comparações entre as soluções na mesmas condições de parâmetros estruturais e do escoamento. Assim, a eficiência e confiabilidade das metodologias propostas para analisar os fenômenos não lineares em aeroelasticidade são verificadas. Além do cálculo da fronteira de *flutter*, com a metodologia de marcha no tempo pôde-se observar os fenômenos não lineares após a velocidade crítica de *flutter* para o modelo aeroelástico com não linearidades estruturais em regime transônico.

1.7 Organização da Tese

O texto está dividido em cinco Capítulos. Neste primeiro Capítulo é apresentada a introdução ao assunto abordado, o objetivo deste trabalho e uma revisão de literatura relacionada ao estado da arte em aeroelasticidade computacional transônica.

O Capítulo 2 trata da formulação aeroelástica formada pelo modelo aerodinâmico em escoamentos transônicos e o modelo dinâmico-estrutural, e são apresentadas as não linearidades concentradas em arfagem no modelo estrutural. Também, são discutidas as metodologias aerodinâmicas usadas nos dois códigos de CFD considerados neste trabalho. E por fim, a metodologia de marcha no tempo do sistema aeroelástico, com a descrição das sequências nos cálculos na interação entre as soluções do modelo estrutural e o código de CFD.

O Capítulo 3 contém uma discussão de conceitos de estabilidade em sistemas dinâmicos não lineares e alguns termos utilizados para caracterizar os tipos de soluções. Posteriormente, o Capítulo apresenta a classificação de pontos de equilíbrio pelo processo de linearização. A partir daí é tratada a bifurcação do tipo Hopf, caracterizando o movimento periódico do sistema aeroelástico. Foi analisado o oscilador de **Van der Pol** para efeito de exemplificar a metodologia de bifurcação de Hopf. Também é apresentada no Capítulo 3 a metodologia de potência inversa utilizada para o cálculo da fronteira de *flutter* pela análise de bifurcação de Hopf. O cálculo da matriz jacobiana do sistema aeroelástico, necessário para análise de bifurcação considerando o modelo estrutural linear e não linear, é o último assunto do Capítulo 3.

O Capítulo 4 mostra os processos de verificação e de validação do código de CFD que utiliza malhas não estruturadas. Nestes processos são obtidas as soluções de estados estacionário e não estacionário, e estas são comparadas com dados experimentais e com as soluções do outro código de CFD que utiliza malhas estruturadas, obtidos na literatura técnica.

Os resultados da resposta aeroelástica no domínio no tempo estão no Capítulo 5. Primeiramente, são obtidas as histórias no tempo em arfagem e deslocamentos verticais e são analisados os efeitos das diferentes condições iniciais, assim como, do tamanho do passo no tempo na resposta aeroelástica com modelo estrutural linear. Depois, a metodologia de potência inversa foi utilizada para encontrar o ponto de ocorrência de *flutter* através da análise de bifurcação de Hopf. Os resultados são comparados com as respostas obtidas com a metodologia de marcha no tempo. Não linearidades estruturais concentradas no modo de arfagem são consideradas nas metodologias de marcha no tempo e de potência inversa para o cálculo da fronteira de *flutter* nas mesmas condições de escoamento e as respostas são também comparadas. Através da metodologia de marcha no tempo, o comportamento do sistema aeroelástico após a fronteira de *flutter* com modelo estrutural não linear é também analisado. Da mesma forma ao realizado no caso das análises com o modelo estrutural linear, são apresentadas as histórias no tempo em arfagem para a mesma condição de escoamento com diferentes incidências iniciais considerando os modelos estruturais não lineares.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

MODELO MATEMÁTICO

2.1 Considerações Iniciais

O acoplamento aeroelástico formado pelo modelo aerodinâmico não estacionário em regime transônico, o modelo dinâmico-estrutural, e os respectivos métodos de marcha no tempo e discretizações espaciais para a solução numérica são apresentados neste Capítulo.

O modelo aerodinâmico que descreve o escoamento em regime transônico, desconsiderando os efeitos viscosos, é dado pelas equações de Euler. As equações de Euler são apresentadas na forma conservativa bidimensional e dois códigos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) foram utilizados no presente trabalho para solução das equações. O primeiro código de CFD corresponde à solução das equações utilizando-se um método de volumes finitos aplicado em um contexto de malhas não estruturadas (AZEVEDO, 1992). A marcha no tempo de sistema de equações semi-discretizadas é feita através de um método explícito do tipo Runge-Kutta híbrido de cinco passos desenvolvido em Oliveira (1993).

O segundo código de CFD apresentado neste Capítulo utiliza-se de um método implícito em tempo dual de diferenças finitas aplicado em um contexto de malhas estruturadas (DUBUC et al., 1997; CANTARINI et al., 1997). Este código de CFD é utilizado apenas em sua versão estacionária na metodologia para o cálculo direto da fronteira de *flutter* através da análise de bifurcação de Hopf, que será apresentada no Capítulo 3.

O sistema aeroelástico é formado pela equação de movimento de um modelo clássico de uma seção típica, sem amortecimento estrutural, descrevendo o movimento oscilatório dado pelos deslocamentos vertical e torcional. O equacionamento primeiramente é apresentado com modelo estrutural linear e modificações são efetuadas na resposta do momento de torção para representar as não linearidades introduzidas no sistema aeroelástico.

A integração no tempo das equações é obtida pelo método de quarta ordem de Runge-Kutta com o código de CFD em um contexto de malhas não estruturadas (AZEVEDO, 1992). Esta análise fornece a história no tempo do sistema aeroelástico para serem observados as respostas convergentes, os movimentos oscilatórios com amplitudes finitas como os fenômenos de *flutter*, oscilações em ciclos limite, as respostas divergentes, e outros fenômenos não lineares. Através da análise de marcha no tempo das soluções aeroelásticas, pode ser obtido um estudo completo do comportamento do sistema, no entanto, requerem um alto custo computacional relativo ao cálculo não estacionário do código de CFD.

2.2 Modelo Aerodinâmico

Para modelar escoamentos em regime transônico as equações básicas são dadas pelas leis de conservação de massa, da quantidade de movimento e da energia. O sistema de equações que obedece as leis de conservação e não considera os termos de viscosidade é conhecido como as equações de Euler.

As equações de Euler na forma integral, para um sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais, são escritas como (OLIVEIRA, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{Q} dx dy + \int_S (\mathbf{E} dy - \mathbf{F} dx) = 0, \quad (2.1)$$

onde V é a área do volume de controle definida pelo contorno S . O vetor de variáveis conserva-

das e os vetores de fluxo convectivo são definidos como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \\ \rho v U \\ (e + p)U + x_t p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V u \\ \rho V v + p \\ (e + p)V + y_t p \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

As componentes de velocidade contravariante são definidas por:

$$U = u - x_t, \quad V = v - y_t, \quad (2.3)$$

onde u e v são as componentes cartesianas de velocidade do fluido, enquanto x_t e y_t são as componentes cartesianas de velocidade dos elementos da malha.

O sistema de equações fica completo com a expressão para o cálculo da pressão p para um gás perfeito:

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right], \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade, e é a energia total por unidade de volume e γ a razão dos calores específicos.

2.2.1 Soluções Numéricas das Equações de Euler

Código de CFD que utiliza malhas não estruturadas

A metodologia da solução das equações de Euler no contexto de malhas não estruturadas para solução das equações aeroelásticas através do método de integração no tempo está descrita nesta Seção. As equações de Euler são discretizadas espacialmente a partir de uma formulação centrada nos volumes que é obtida a partir da definição de um valor médio para as propriedades em cada volume i na forma:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{1}{V_i} \int \int_{V_i} \mathbf{Q} dx dy. \quad (2.5)$$

Conforme pode ser observado na Figura 2.1, o volume de controle V_i utilizado para a integração,

é composto pelo próprio volume resultante da discretização do domínio, diferentemente da formulação centrada nos nós na qual o volume de controle é formado por todas as células que contêm um determinado ponto da malha.

As equações de Euler são discretizadas espacialmente, sendo transformadas de um conjunto de equações diferenciais parciais para um conjunto de equações diferenciais ordinárias, escritas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(V_i \mathbf{Q}_i) + \mathbf{R}_i(\mathbf{Q}) = 0, \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{R}_i$ é o resíduo do escoamento para o volume i na qual contém todos os termos da discretização espacial.

Figura 2.1: Representação esquemática do volume i (OLIVEIRA, 1993).

A avaliação da integral na superfície é feita utilizando-se a formulação centrada dos termos convectivos proposto por (JAMESON; SCHMIDT; TURKEL, 1981). Nesta discretização, os vetores de fluxo convectivo são obtidos a partir do vetor das variáveis conservadas calculado com a média aritmética das propriedades conservadas dos volumes adjacentes, ou seja, calcula-se o operador convectivo da seguinte forma:

$$\int_{S_i} (\mathbf{E} dy - \mathbf{F} dx) \approx C(\mathbf{Q}_i) = \sum_{k=1}^3 [(\mathbf{E}(\mathbf{Q}_{ik})(y_{k2} - y_{k1}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ik})(x_{k2} - x_{k1}))], \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbf{Q}_{ik} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_k), \quad (2.8)$$

sendo (x_{k1}, x_{k2}) e (y_{k1}, y_{k2}) os vértices que definem a interface entre os volumes i e k .

Deve-se observar que os vértices de cada volume, assim como seus vizinhos, são ordenados sempre no sentido anti-horário, conforme mostrado na Figura 2.1. Observando-se que as equações de Euler são um sistema de equações hiperbólicas não dissipativas e que a discretização espacial aqui utilizada equivale, essencialmente, a um esquema de diferenças centradas, há uma necessidade de se adicionar explicitamente termos de dissipação artificial, a fim de controlar as instabilidades numéricas não lineares. Denotando-se, então, o operador dissipativo como $D(\mathbf{Q}_i)$, pode-se reescrever as equações de Euler discretizadas espacialmente na forma:

$$\frac{d}{dt}(V_i \mathbf{Q}_i) + C(\mathbf{Q}_i) - D(\mathbf{Q}_i) = 0. \quad (2.9)$$

O operador de dissipação artificial $D(\mathbf{Q}_i)$ segue as idéias de Pulliam (1986) para o controle das instabilidades não lineares. Assim, define-se:

$$D_i = d^2(\mathbf{Q}_i) - d^4(\mathbf{Q}_i), \quad (2.10)$$

onde $d^2(\mathbf{Q}_i)$ representa o operador de segunda diferença e $d^4(\mathbf{Q}_i)$ o operador de quarta diferença.

A aplicação desta metodologia em um contexto de malhas não estruturadas é feita utilizando-se operadores construídos a partir da definição do laplaciano do vetor de variáveis conservadas para o i -ésimo volume:

$$\nabla^2 \mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_i), \quad (2.11)$$

onde a somatória em k é feita tomando-se os volumes que possuem uma face comum com o volume i .

Assim, os termos dos operadores de segunda e quarta diferença são dados por:

$$d^2(\mathbf{Q}_i) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik}^{(2)} \alpha_{ik} (\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_i), \quad (2.12)$$

$$d^4(\mathbf{Q}_i) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik}^{(4)} \alpha_{ik} (\nabla^2 \mathbf{Q}_k - \nabla^2 \mathbf{Q}_i), \quad (2.13)$$

onde

$$\alpha_{ik} = \frac{A_i + A_k}{2}, \quad A_i = \sum_{e=1}^3 |u_e \Delta y_e - v_e \Delta x_e| + a_e \sqrt{\Delta x_e^2 + \Delta y_e^2}, \quad (2.14)$$

sendo e a interface entre os volumes i e k , Δx_e e Δy_e representam os incrementos em x e y , respectivamente, u_e , v_e os componentes cartesianos de velocidade, a_e a velocidade do som ao longo da interface e , e

$$\varepsilon_{ik}^{(2)} = K^{(2)} \max(v_i, v_k), \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ik}^{(4)} = \max[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{ik}^{(2)})], \quad (2.16)$$

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^3 |p_k - p_i|}{\sum_{k=1}^3 (p_k + p_i)}. \quad (2.17)$$

onde $K^{(2)}$ e $K^{(4)}$ são parâmetros definidos pelo usuário. Desta forma, é possível obter a solução das equações de Euler com o operador dissipativo independente do passo no tempo (MAVRIPPLIS, 1990; BIGARELLA; BASSO; AZEVEDO, 2004).

Para análise das soluções de marcha no tempo das equações de Euler foi utilizado o código computacional apresentado em Oliveira (1993). O código utiliza o esquema híbrido de cinco estágios de Runge-Kutta, com segunda ordem de precisão, de tal forma que a integração temporal do sistema de equações, dado pela Eq. (2.9), é escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{(0)} &= \mathbf{Q}_i^n \\ \mathbf{Q}_i^{(1)} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(0)} - \beta_1 \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} [C(\mathbf{Q}_i^{(0)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(0)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(2)} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(0)} - \beta_2 \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} [C(\mathbf{Q}_i^{(1)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(3)} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(0)} - \beta_3 \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} [C(\mathbf{Q}_i^{(2)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(4)} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(0)} - \beta_4 \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} [C(\mathbf{Q}_i^{(3)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(5)} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(0)} - \beta_5 \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} [C(\mathbf{Q}_i^{(4)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \\ \mathbf{Q}_i^{n+1} &= \frac{V_i^n}{V_i^{n+1}} \mathbf{Q}_i^{(5)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde os valores n e $n+1$ estão associados às propriedades no começo e no final do n -ésimo

passo no tempo e os valores dos coeficientes α_i são:

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = \frac{1}{6}, \quad \beta_3 = \frac{3}{8}, \quad \beta_4 = \frac{1}{2}, \quad \beta_5 = 1. \quad (2.19)$$

Para maior eficiência computacional, o operador dissipativo é avaliado somente durante os dois primeiros estágios.

As condições de contorno na fronteira externa são as do tipo não-reflexiva para garantir que não haja reflexão das informações que se propagam para fora do campo. Sobre o perfil foi utilizado a condição de contorno de parede sólida garantindo a tangência do escoamento em contato com a parede.

Em métodos computacionais para modelos aeroelásticos faz-se necessário uma técnica de movimentação de malha computacional de acordo com o deslocamento do aerofólio. Esta técnica foi tratada por Oliveira (1993) através de um algoritmo de malha dinâmica, no qual cada face do triângulo é modelada por uma mola cuja rigidez é inversamente proporcional ao seu comprimento e a nova posição dos pontos interiores é calculada através de um método iterativo do tipo preditor-corretor. Desta forma, mantendo-se a fronteira externa fixa e movendo-se o aerofólio conforme as expressões:

$$x_i^{n+1} = \begin{cases} x_i^0 & ; \text{translação} \\ (x_i^0 - x_{ea}) \cos \alpha(t) & ; \text{arfagem} \end{cases}$$

$$y_i^{n+1} = \begin{cases} y_i^0 + w(t) & ; \text{translação} \\ y_i^0 - (x_i^0 - x_{ea}) \sin \alpha(t) & ; \text{arfagem} \end{cases}$$

onde o sobrescrito 0 indica a posição inicial da i -ésimo ponto da malha e o subscrito ea indica a localização do eixo elástico.

Código de CFD que utiliza malhas estruturadas

O segundo código utilizado no presente trabalho para solução das equações de Euler corresponde a metodologia apresentada por Dubuc et al. (1997) e Badcock, Richards e Woodgate (2000), em um contexto de malhas estruturadas. Este código de CFD estacionário foi utilizado

no cálculo direto do ponto onde ocorre o *flutter* do sistema aeroelástico através do método de potência inversa (BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004).

Esta ferramenta computacional representa o escoamento transônico através de uma metodologia implícita em tempo dual introduzida por Jameson (1991) que utiliza discretização implícita no tempo real com a solução no novo nível de tempo obtida através de uma iteração até o estado estacionário no pseudo tempo. A discretização dos termos convectivos é obtida em um contexto de malhas estruturadas através da aproximação por diferenças finitas *upwind* de Osher junto com uma extrapolação do tipo MUSCL para providenciar segunda ordem de precisão nas variáveis espaciais (OSHER; CHAKRAVARTHY, 1983). Ainda foi utilizado o limitador de fluxo de Van Albada para evitar oscilações nas proximidades das ondas de choques.

A metodologia *upwind* de Osher é baseada na solução dos problemas de Riemann. Considerando os respectivos vetores de fluxo convectivos e o vetor das variáveis conservadas representados em termos das coordenadas curvilíneas gerais, $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\bar{\mathbf{Q}}$, onde as novas matrizes jacobianas que equivalem à forma transformada são denominadas $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$, respectivamente:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}}. \quad (2.20)$$

A discretização *upwind* respeita a direção de propagação de informação. Este não é necessariamente um conceito oposto ao de esquemas centrados, apenas se discretiza as equações de forma conveniente. As equações de Euler são classificadas por hiperbólicas. Dessa forma, as informações das variáveis das equações se propagam em um campo de fluxo, através da análise dos sinais dos autovalores das matrizes jacobianas dados por $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$.

A aproximação é feita separando-se as matrizes jacobianas em duas matrizes, uma com todos elementos positivos e outra com todos os elementos negativos, dessa forma:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} = \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}} (\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^+ + \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^-) \mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^+ + \bar{\mathbf{A}}^-, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}$ e $\mathbf{X}_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1}$ são, respectivamente, a matriz dos autovetores de $\bar{\mathbf{A}}$ e sua inversa e $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}$ é a

matriz diagonal dos autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$, ou seja:

$$\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\pm} = \frac{\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}} \pm |\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}|}{2}, \quad (2.22)$$

onde $|\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}|$ representa uma matriz formada pelo valor absoluto dos elementos de $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}$.

As duas matrizes $\bar{\mathbf{A}}^+$ e $\bar{\mathbf{A}}^-$ têm por construção todos os autovalores positivos e todos autovalores negativos, respectivamente. Da mesma forma, são construídas as matrizes $\bar{\mathbf{B}}^+$ e $\bar{\mathbf{B}}^-$.

Assim, considerando as equações de Euler na forma discreta:

$$\frac{d}{dt}(V_{i,j}\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}) + \mathbf{R}_{i,j}(\bar{\mathbf{Q}}) = 0, \quad (2.23)$$

onde i, j representa o volume a ser avaliado no domínio discretizado no contexto de malhas estruturadas.

A discretização dos termos convectivos corresponde:

$$\mathbf{R}_{i,j}(\bar{\mathbf{Q}}) = -\frac{[\bar{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} - \bar{\mathbf{E}}_{i-1/2,j}]}{\Delta\xi} - \frac{[\bar{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i,j-1/2}]}{\Delta\eta}, \quad (2.24)$$

sendo i, j posição dos nós na malha estruturada, $\Delta\xi = 1$ e $\Delta\eta = 1$ os espaços entre os nós nas direções das coordenadas curvilíneas gerais, ξ e η , da malha no domínio computacional transformado.

Então, a aproximação *Osher upwind* (OSHER; CHAKRAVARTHY, 1983) é dada por:

$$\bar{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} - \bar{\mathbf{E}}_{i-1/2,j} = \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i-1,j}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}} (\bar{\mathbf{A}}^+) d\mathbf{Q} + \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i+1,j}} (\bar{\mathbf{A}}^-) d\mathbf{Q}, \quad (2.25)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i,j-1/2} = \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j-1}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}} (\bar{\mathbf{B}}^+) d\mathbf{Q} + \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j+1}} (\bar{\mathbf{B}}^-) d\mathbf{Q}, \quad (2.26)$$

que pode ser reduzida a forma:

$$\bar{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} - \bar{\mathbf{E}}_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{E}}_{i,j} + \bar{\mathbf{E}}_{i+1,j}) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i+1,j}} |\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{A}}}| d\mathbf{Q}, \quad (2.27)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i,j-1/2} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}_{i,j} + \bar{\mathbf{F}}_{i,j+1}) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j}}^{\bar{\mathbf{Q}}_{i,j+1}} |\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{B}}}| d\mathbf{Q}. \quad (2.28)$$

A solução da integral sobre $\bar{\mathbf{Q}}_i$ a $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}$ é dividida entre as soluções simples da onda, de

acordo com a ordem decrescente de propagação, definida pelo sinal dos autovalores. Assim, são resolvidos os invariantes de Riemman em cada interface de interesse como descrito em Osher e Chakravarthy (1983).

Sendo $\mathbf{q}$ o vetor das variáveis primitivas e

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_L), \quad \mathbf{Q}_R = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_R), \quad (2.29)$$

os estados esquerdos e direitos na i, j -ésima interface, o esquema MUSCL (*Monotone Upstream Centered Scheme for Conservation Laws* (VAN-LEER, 1983)) emprega a aproximação por extrapolação de variáveis primitivas, onde os estados esquerdos e direitos em uma interface dada são linearmente reconstruídos por extrapolação das variáveis primitivas sobre cada lado da interface juntamente com os limitadores de fluxo para evitar a criação de um novo extremo. Este conjunto de equações é, então, discretizado no tempo utilizando a discretização implícita em tempo real

$$\frac{d}{dt}(V_{i,j}^{n+1} \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1}) + \mathbf{R}_{i,j}(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}) = 0, \quad (2.30)$$

onde $n + 1$ denota o nível de tempo real $(n + 1)\Delta t$.

A derivada no tempo é aproximada pela formulação regressiva de segunda diferença, obtendo-se:

$$\frac{3V_{i,j}^{n+1} \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} - 4V_{i,j}^n \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^n + V_{i,j}^{n-1} \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{R}_{i,j}(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}) = 0. \quad (2.31)$$

Neste estágio, é conveniente redefinir um novo resíduo não estacionário $\mathbf{R}^*$:

$$\mathbf{R}_{i,j}^*(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}) = \frac{3V_{i,j}^{n+1} \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} - 4V_{i,j}^n \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^n + V_{i,j}^{n-1} \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{R}_{i,j}(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}) = 0. \quad (2.32)$$

A Eq. (2.32) pode ser tratada como a solução de um problema de estado estacionário, e resolvida pela integração no tempo através da introdução de uma derivada com respeito a um pseudo tempo t^* :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1}}{\partial t^*} + \frac{1}{V_{i,j}^{n+1}} \mathbf{R}_{i,j}^*(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1}) = 0 \quad (2.33)$$

Utilizando uma discretização implícita em pseudo tempo t^* na Eq. (2.33), têm-se:

$$\frac{\Delta \bar{Q}_{i,j}}{\Delta t^*} = \frac{\bar{Q}_{i,j}^{m+1} - \bar{Q}_{i,j}^m}{\Delta t^*} = -\frac{1}{V_{i,j}} \mathbf{R}^*(\bar{\mathbf{Q}}^{m+1}), \quad (2.34)$$

sendo que $m+1$ denota o nível de tempo $(m+1)\Delta t^*$ em pseudo tempo.

Para expressar a Eq. (2.34) em termos das soluções conhecidas no nível de tempo (m) , o termo $\mathbf{R}_i^*(\bar{\mathbf{Q}}^{m+1})$ é linearizado com respeito as variáveis em pseudo tempo t^* . Assim, é obtido um sistema não fatorado, onde um passo implícito é dado por:

$$\left[\left(\frac{V}{\Delta t^*} + \frac{3V}{2\Delta t} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} \right] \Delta \bar{\mathbf{Q}} = -\mathbf{R}^*(\bar{\mathbf{Q}}^m). \quad (2.35)$$

A Eq. (2.35) é reescrita em termos do vetor das variáveis primitivas $\mathbf{q}$, e o resíduo em termos das coordenadas curvilíneas gerais, $\mathbf{R}_\xi$ e $\mathbf{R}_\eta$, obtendo-se:

$$\left[\left(\frac{V}{\Delta t^*} + \frac{3V}{2\Delta t} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{q}} \right] \Delta \mathbf{q} = -\mathbf{R}^*(\bar{\mathbf{Q}}^m), \quad (2.36)$$

onde os termos $\frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{q}}$ e $\frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{q}}$ são as matrizes jacobianas dos vetores de fluxo com as discretizações nas direções ξ e η , respectivamente.

A Eq. (2.36) é um sistema linear não fatorado dado pela discretização implícita em pseudo-tempo. Este sistema linear é similar ao sistema obtido a partir da discretização implícita das equação de Euler sem pseudo-tempo. As diferenças entre o sistema linear dado pela Eq. (2.36) e o sistema obtido a partir da discretização implícita sem pseudo tempo, primeiro está na definição do resíduo do escoamento no lado direito da Eq. (2.36), onde não somente contém os termos da discretização espacial do escoamento, mas também os termos referentes a discretização das derivadas no tempo real (Eq. (2.32)). A segunda diferença é a presença dos termos extras $3V/2\Delta t$ na diagonal da matriz jacobiana no lado esquerdo da Eq. (2.36). Com isso, o sistema da Eq. (2.36) corresponde ao método implícito em tempo dual com segunda ordem de precisão e pode ser utilizado para solução estacionária e não estacionária das equações de Euler. Este sistema foi pré-condicionado e resolvido pelo método dos gradientes conjugados (DUBUC et al., 1997).

Como no código computacional no contexto de malhas não estruturadas, as condições de contorno na fronteira externa são as do tipo não-reflexiva e sobre o perfil foi utilizado a condição de contorno de parede sólida. O movimento da malha computacional de acordo com as posições do aerofólio foi definida movendo-se todo domínio computacional de acordo com:

$$\begin{bmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^0 - x_{ea} \\ y_{i,j}^0 - y_{ea} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{ea} \\ y_{ea} + w \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde o sobrescrito 0 indica a posição inicial da i, j -ésimo nó da malha e o subscrito ea indica a localização do eixo elástico. As velocidades do aerofólio podem ser calculadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i,j} \\ \dot{y}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(y_{i,j} - w) \\ -\dot{\alpha}x_{i,j} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

2.3 Modelo Aeroelástico

A formulação aeroelástica utilizada no presente trabalho é baseada do modelo clássico de uma seção típica, conforme está representado na Figura 2.2, na qual são escolhidos como coordenadas generalizadas o deslocamento vertical w e o ângulo de arfagem α . Aplicando-se as equações de Lagrange a esse sistema, obtêm-se as equações de movimento escritas na seguinte forma (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996):

$$m\ddot{w} - S_\alpha \ddot{\alpha} + K_w w = L, \quad -S_\alpha \ddot{w} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = M_{ea}, \quad (2.39)$$

onde,

$$S_\alpha = mbx_\alpha, \quad I_\alpha = mb^2 r_\alpha^2. \quad (2.40)$$

Nas Eqs (2.39) e (2.40) m é a massa do aerofólio, K_w e K_α são as constantes de rigidez flexional e torcional, respectivamente, e b é a semicorda do aerofólio. O sistema da Eq. (2.39) é adimensionalizado pelo fator $1/mb^2$, obtendo a expressão:

$$\frac{\ddot{w}}{b} - x_\alpha \ddot{\alpha} + \omega_w^2 \frac{w}{b} = \frac{Lb}{mb^2}, \quad -x_\alpha \frac{\ddot{w}}{b} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha = \frac{M}{mb^2}, \quad (2.41)$$

onde

$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{mb}, \quad \omega_w^2 = \frac{K_w}{m}, \quad \omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha}, \quad r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{mb^2}. \quad (2.42)$$

Sabendo que:

$$m = \mu_s \pi \rho_\infty b^2, \quad L = \frac{1}{2} C_L \rho_\infty U_\infty^2 (2b), \quad M = \frac{1}{2} C_m \rho_\infty U_\infty^2 (2b)^2, \quad (2.43)$$

sendo, C_L e C_m os coeficientes de sustentação e de momento de arfagem, respectivamente, μ_s a razão de massa e U_∞ e ρ_∞ são a velocidade e a densidade do escoamento não perturbado, respectivamente. Substituindo as Eqs. (2.43) nas Eqs. (2.41), tem-se:

$$\frac{\ddot{w}}{b} - x_\alpha \ddot{\alpha} + \omega_w^2 \frac{w}{b} = \frac{U_\infty^2 C_L}{\mu_s \pi b^2}, \quad -x_\alpha \frac{\ddot{w}}{b} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha = \frac{2U_\infty^2 C_m}{\mu_s \pi b^2}. \quad (2.44)$$

Chamando $\beta = U_\infty^2 / \mu_s \pi b^2$ e definindo um tempo adimensional por $\bar{t} = \omega_\alpha t$, o sistema dado pela Eq. (2.44) pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -x_\alpha \\ -x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}(\bar{t}) + \begin{bmatrix} \omega_w^2 / \omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \mathbf{s}(\bar{t}) = \frac{\beta}{\omega_\alpha^2} \begin{Bmatrix} C_L \\ 2C_m \end{Bmatrix}, \quad (2.45)$$

onde,

$$\mathbf{s}(\bar{t}) = \left[\frac{w}{b}(\bar{t}), \alpha(\bar{t}) \right]^T,$$

é o vetor de coordenadas generalizadas.

Figura 2.2: Seção típica.

A Eq. (2.45) é a equação de movimento de um sistema aeroelástico, na sua forma clássica, sem amortecimento estrutural. Este sistema de equações é reescrito no domínio do tempo:

$$\frac{d\mathbf{w}_s}{dt} = \mathbf{R}_s, \quad (2.46)$$

sendo

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}x_\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_\alpha & 0 & \frac{1}{2}r_\alpha^2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ (2/\mu_s\pi)C_L \\ 0 \\ (4/\mu_s\pi)C_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (2\omega_R/\bar{U})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2r_\alpha^2/(\bar{U})^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_s \right\} \quad (2.47)$$

onde $\mathbf{w}_s = [w, \dot{w}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$ e foram definidas as variáveis $\omega_R = \frac{\omega_w}{\omega_\alpha}$, como a razão das frequências naturais do sistema acoplado e $\bar{U} = \frac{U_\infty}{b\omega_\alpha}$ é o parâmetro definido como velocidade reduzida.

2.3.1 Não Linearidades Estruturais em Torção

A forma do sistema aeroelástico apresentado na Eq. (2.47) é dada pelo modelo estrutural linear. Este equacionamento foi modificado para um modelo estrutural não linear, onde as não linearidades foram definidas para alterar as respostas aeroelásticas.

No sistema aeroelástico da Eq. (2.47), o momento restaurador em torção estrutural é $M(\alpha) = K_\alpha \alpha$, que corresponde a um modelo estrutural linear. As não linearidades foram definidas através da curva que descreve a resposta do momento em torção $M(\alpha)$, e esta curva que determina a não linearidade estrutural introduzida ao sistema aeroelástico. Assim, o momento de torção é representado pela função não linear:

$$\bar{M}(\alpha) = \bar{K}_\alpha \alpha = K_\alpha f(\alpha), \quad (2.48)$$

onde, K_α é considerada a rigidez de mola global do sistema é $f(\alpha)$ uma função não linear que determina a não linearidade introduzida no sistema.

Basicamente dois tipos de funções não lineares são utilizadas para modificar o modelo estrutural para um modelo não linear. A primeira não linearidade considerada é definida por uma função polinomial, da forma:

$$f(\alpha) = f_{\alpha_0} + f_{\alpha_1}\alpha + f_{\alpha_2}\alpha^2 + f_{\alpha_3}\alpha^3 + \dots + f_{\alpha_n}\alpha^n = f_{\alpha_0} + f_{\alpha_1}\alpha + \sum_{i=2}^n f_{\alpha_i}\alpha^i, \quad (2.49)$$

onde os f_{α_i} são os coeficientes do polinômio.

A equação estrutural é modificada pela nova curva de momento polinomial, modificando a Eq. (2.47) que se torna:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}x_\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_\alpha & 0 & \frac{1}{2}r_\alpha^2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ (2/\mu_s\pi)C_L \\ 0 \\ (4/\mu_s\pi)C_m - (2r_\alpha^2/(\bar{U})^2)(f_{\alpha_0} + \sum_{i=2}^n f_{\alpha_i}\alpha^i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (2\omega_R/\bar{U})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (2r_\alpha^2/(\bar{U})^2)f_{\alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_s \right\}. \quad (2.50)$$

Também pretende-se avaliar a resposta aeroelástica com não linearidades estruturais do tipo *free-play*. O *free-play* costuma ser definido pela função descontínua do tipo:

$$\begin{cases} f(\alpha) = \alpha - \alpha_+, & \text{se } \alpha > \alpha_+ \\ f(\alpha) = 0, & \text{se } \alpha_- < \alpha < \alpha_+ \\ f(\alpha) = \alpha - \alpha_-, & \text{se } \alpha < \alpha_- \end{cases} \quad (2.51)$$

onde, α_- e α_+ são os extremos do intervalo que a resposta em torção é nula, como na Figura 2.3.

Como o *free-play* é definido pela função descontínua dada pela Eq. (2.51), o sistema aeroelástico fica composto por uma descontinuidade. Descontinuidades podem acarretar em problemas nos métodos de soluções do sistema aeroelástico empregados no presente trabalho. Em ambas metodologias de marcha no tempo, obtida pela integração direta no tempo do sistema aeroelástico, e a metodologia do cálculo direto do ponto de bifurcação de Hopf para encontrar as condições críticas de *flutter*, são necessários tratamentos específicos para a descontinuidade na solução das equações, como foi realizado em Henon (1982), Conner et al. (1997), Roberts, Gaitonde e Jones (2005).

Figura 2.3: Função não linear tangente hiperbólica.

No presente trabalho, é utilizada uma função para representar o *free-play* através de uma função contínua, como apresentada por Roberts, Gaitonde e Jones (2005). Esta função contínua é definida pela combinação de funções tangente hiperbólica na seguinte forma:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}[1 - \tanh(\epsilon(\alpha - \alpha_-))](\alpha - \alpha_-) + \frac{1}{2}[1 + \tanh(\epsilon(\alpha - \alpha_+))](\alpha - \alpha_+), \quad (2.52)$$

onde ε é um parâmetro definido pelo usuário de acordo com o tipo de curva como mostra a Figura 2.3, α_- e α_+ são os extremos do intervalo de *free-play* desejado.

Pode-se observar através da Figura 2.3 que conforme aumenta-se o valor de ε , obtém-se uma curva com menor gradiente no ponto zero. Desta forma, o *free-play* é obtido quando ε assume valores suficientemente altos.

2.3.2 Método de Marcha no Tempo

A solução dos sistemas com modelos estruturais lineares e não lineares, dados pelas Eqs. (2.47) e (2.50), podem ser obtidas pela integração numérica das equações através do método de Runge-Kutta tradicional. No equacionamento aeroelástico os valores dos coeficientes de sustentação e de momento de arfagem, C_L e C_m , são obtidos pela solução numérica das equações de Euler, que neste caso, foi utilizado o código não estacionário em um contexto de malhas não estruturadas apresentado na Seção 2.2.1.

O sistema aeroelástico (Eq. (2.46)) foi resolvido pelo método Runge-Kutta de quarta ordem onde o esquema é dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \mathbf{R}_s(\mathbf{w}_s^n, \bar{U}) \\
 \mathbf{w}_s^{(2)} &= \mathbf{w}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_1 \\
 \mathbf{F}_2 &= \mathbf{R}_s(\mathbf{w}_s^{(2)}, \bar{U}) \\
 \mathbf{w}_s^{(3)} &= \mathbf{w}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_2 \\
 \mathbf{F}_3 &= \mathbf{R}_s(\mathbf{w}_s^{(3)}, \bar{U}) \\
 \mathbf{w}_s^{(4)} &= \mathbf{w}_s^n + \Delta t \mathbf{F}_3 \\
 \mathbf{F}_4 &= \mathbf{R}_s(\mathbf{w}_s^{(4)}, \bar{U}) \\
 \mathbf{w}_s^{n+1} &= \mathbf{w}_s^n + \frac{\Delta t}{6} [\mathbf{F}_1 + 2(\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) + \mathbf{F}_4]
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

sendo o sobrescrito n o tempo discreto.

Figura 2.4: Esquema da metodologia de marcha no tempo para solução do sistema aeroelástico.

O processo iterativo entre o sistema estrutural e aerodinâmico, ilustrado na Figura 2.4, é formado pela seguinte sequência de cálculos:

1. São fornecidos os conjuntos de condições iniciais dados pela incidência α_0 , deslocamento vertical w_0 , e pela solução do estado estacionário do código de CFD para os valores de C_L e C_m ;
2. As variáveis no tempo discreto $n + 1$ das equações são inicialmente um conjunto dos

valores no tempo n ;

3. As novas posições e velocidades do aerofólio para as forças aerodinâmicas são obtidas resolvendo-se a equação estrutural pelo método de Runge-Kutta (Eq. (2.53));
4. Calcula-se o deslocamento da malha aerodinâmica de acordo com as novas posições estruturais;
5. São fornecidas as novas posições dos nós da malha computacional ao código de CFD;
6. São calculados as forças aerodinâmicas no tempo n e obtidos os valores dos coeficientes C_L e C_m ;
7. Assim são fornecidos as variáveis estruturais, os coeficientes aerodinâmicos e os pontos da malha para o tempo $n + 1$ e o processo se repete.

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

3.1 Considerações Iniciais

Neste Capítulo, o sistema aeroelástico é apresentado como um sistema dinâmico não linear nas variáveis $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_f, \mathbf{w}_s]^T$, onde $\mathbf{w}_f = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$ representa as variáveis do escoamento e $\mathbf{w}_s = [w, \dot{w}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$ as variáveis estruturais, com o parâmetro dado pela velocidade reduzida $\bar{U}$. É mostrado o processo de cálculo da matriz jacobiana do sistema aeroelástico com modelo estrutural linear e não linear para a análise de bifurcação de Hopf que corresponde ao cálculo da fronteira de *flutter*.

O sistema aeroelástico é um sistema dinâmico autônomo, pois o tempo não aparece explicitamente nas equações. Para estudar as soluções deste sistema, considera-se a notação de sistemas dinâmicos não lineares autônomos na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$, onde $\mathbf{x}$ é o vetor das variáveis de estado e λ um parâmetro. Uma das grandes preocupações em sistemas dinâmicos não lineares é analisar o comportamento das soluções com a variação do parâmetro λ , ou seja, analisar a estabilidade da solução conforme λ varia.

Uma ferramenta para a análise de soluções de sistemas não lineares é dada pelos métodos da teoria linear. Este processo necessita a **linearização** do sistema e examina-se o comporta-

mento do sistema na vizinhança de uma solução conhecida, com base nas informações obtidas pelo sistema linearizado. Existem duas aproximações básicas para sistemas não lineares: o qualitativo e o quantitativo. A aproximação qualitativa está ligada à característica geral do sistema na vizinhança de uma solução conhecida e a aproximação quantitativa está ligada à análise das soluções obtidas através dos métodos de perturbação.

Antes de partir para análise de bifurcação de Hopf do sistema aeroelástico é necessário ter o conhecimento de definições básicas de estabilidade de soluções. Este Capítulo menciona alguns conceitos básicos, como definições de estabilidade e alguns termos que caracterizam os tipos de soluções. Depois apresenta a classificação de pontos de equilíbrio pelo processo de linearização. A partir daí, é tratada a bifurcação do tipo Hopf, caracterizando o movimento periódico do sistema aeroelástico. Um exemplo típico de sistema não linear que apresenta bifurcação de Hopf é o oscilador de **Van der Pol**. Este sistema é analisado aqui para efeito de exemplificar o método.

Para o cálculo direto do ponto onde ocorre o *flutter*, caracterizado pelo início das oscilações periódicas com amplitudes finitas, o código utilizado foi baseado no Método de Potência Inversa com o código de CFD em um contexto de malhas estruturadas (BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004). A metodologia de potência inversa é utilizada para encontrar o valor do parâmetro estrutural onde um par de autovalores atravessa o eixo imaginário caracterizando a bifurcação de Hopf. Para esta análise foram obtidas as matrizes jacobianas do sistema aeroelástico com o modelo estrutural linear e não linear através de um tratamento adequado na forma discreta das equações aerodinâmicas.

3.2 Definições de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Considerar o seguinte sistema dinâmico dado por equações diferenciais autônomas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{f}$ é de classe C^1 .

Um ponto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio da Eq. (3.1) se $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Para denotar a dependência de uma solução $\mathbf{x}(t)$ da Eq. (3.1) de uma condição inicial $\mathbf{x}_0$ em $t_0 = 0$, costuma-se usar a notação $\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$ para esta solução, em outras palavras, $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Definição 1 Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_s$ é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov, se dado $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno), existir um $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_s\| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$ sempre que $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s\| \leq \delta$.

Definição 2 Um ponto de equilíbrio é instável se não for estável.

Definição 3 Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se for estável e

$\varphi(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_s$, quando $t \rightarrow \infty$, sempre que $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s\| \leq \delta$.

O conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov é uma característica local do campo vetorial nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Embora esta informação seja importante, muitas vezes deseja-se estudar o comportamento global do sistema (ALBERTO, 2000). Neste caso tem-se:

Definição 4 A bacia de atração ou área de atração $A(\mathbf{x}_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{x}_s$ é o conjunto de todas as condições iniciais, cujas órbitas tendem para $\mathbf{x}_s$, quando $t \rightarrow +\infty$. Em linguagem de conjunto tem-se:

$$A(\mathbf{x}_s) := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_s \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}.$$

Definição 5 Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_s$ é globalmente assintoticamente estável se for estável e $A(\mathbf{x}_s) = \mathbb{R}^n$.

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável se todas as órbitas tendem para ele quando $t \rightarrow +\infty$.

As trajetórias de um sistema dinâmico contínuo preenche o *espaço de fase* para formar um *retrato de fase*. Soluções periódicas no tempo não perturbadas são representadas por trajetória no espaço de fase e podem caracterizar movimentos de equilíbrio. **Estabilidade orbital** de um sistema é também conhecida como estabilidade no sentido de Poincaré, e é associada com trajetórias fechadas geralmente conhecidas como **ciclos limites**.

Ciclos limites são movimentos de equilíbrio, nos quais o sistema possui movimentos periódicos. Tal definição, é oposta ao conceito de pontos de equilíbrio já que estes estão em repouso.

Definição 6 Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à Eq. (3.1) se, para todo $\mathbf{x}_0 \in B$, $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto de equilíbrio é um conjunto invariante e órbitas periódicas também são exemplos de conjuntos invariantes (ALBERTO, 2000).

3.3 Estabilidade Estrutural em Sistemas Dinâmicos

Neste caso, deseja-se estudar a forma do retrato de fase sob uma perturbação do campo vetorial completo, que é feito através de uma perturbação da equação diferencial do sistema.

Um sistema é denominado *estruturalmente estável* se, para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o define, o fluxo resultante é topologicamente equivalente aquele das equações sem perturbação. Assim, um sistema é estruturalmente estável se campos vetoriais suficientemente próximos têm retratos de fase equivalentes. A perda de estabilidade estrutural é denominada uma **bifurcação**.

3.3.1 Linearização Próximo à Solução de Equilíbrio

Considera-se pequenas perturbações $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ sobre a solução $\mathbf{x}(t)$, onde

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}), \quad (3.2)$$

e, considerando a Eq. (3.1) tem-se:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Para pequenas perturbações $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, o lado direito da Eq. (3.3) pode ser desenvolvido em série de Taylor:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

ou

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \approx \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz de derivadas parciais de primeira ordem chamada **Matriz Jacobiana**.

Admitindo-se a solução linear $\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{x}}_0$, tem-se o problema de autovalor:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{v}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, sendo $\tilde{\mathbf{x}}_0$ autovetores associados aos autovalores $\mathbf{v}$ da matriz jacobiana. Para encontrar os autovalores deve-se resolver:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{v}\mathbf{I}) = 0. \quad (3.7)$$

Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ fornecem informações sobre a estabilidade local dos pontos de equilíbrio $\tilde{\mathbf{x}}_0$ e podem ser reais ou complexos. Seja $\mathbf{v} = \text{Re}(\mathbf{v}) + i\text{Im}(\mathbf{v})$, onde Re e Im são as partes real e imaginária do autovalor, respectivamente. Dessa forma, a solução será:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{\text{Re}(\mathbf{v})t} e^{i\text{Im}(\mathbf{v})t} \tilde{\mathbf{x}}_0. \quad (3.8)$$

Como $e^{i\text{Im}(\mathbf{v})t}$ é limitada, a estabilidade de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ vai depender essencialmente de $\text{Re}(\mathbf{v})$, então (GONCALVES, 2001):

- *Parte real não nula.* Neste caso, os pontos de equilíbrios correspondentes são chamados *hiperbólicos* ou *não degenerados*. Se $\text{Re}(\mathbf{v}_i) > 0$, para todo i , $e^{\text{Re}(\mathbf{v})t}$ cresce continuamente com o tempo e $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$, portanto o ponto de equilíbrio é instável.

Se $\text{Re}(v_i) < 0$, para um ou mais valores, $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, implica em estabilidade assintótica. Se alguns dos autovalores (mas não todos) têm parte real positiva, enquanto que os demais tem parte reais negativas, o ponto é denominado de *sela*.

- *Parte real nula.* Neste caso, o equilíbrio é dito *não hiperbólico, elíptico* ou *degenerado*. Se o sistema de equação é linear, então as soluções $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, para $t \rightarrow \infty$, não se afastam nem tendem a $\tilde{\mathbf{x}}_0$, permanecendo em sua vizinhança. O ponto é estável e é chamado um centro.

3.3.2 Classificação dos Pontos de Equilíbrio

Primeiramente será apresentado a classificação dos pontos de equilíbrio para o sistema linear associado. O número de casos diferentes gerados pelas inúmeras combinações possíveis de autovalores cresce dramaticamente com a dimensão do sistema. Assim, será considerado apenas o caso bidimensional (GONCALVES, 2001):

Sejam v_1 e v_2 dois autovalores, então tem-se:

1. v_1, v_2 são reais, *distintos*, $v_1 \times v_2 > 0$.

Neste caso, o ponto de equilíbrio é denominado um *nó* ou *ponto nodal*.

$$\text{Estabilidade: } \begin{cases} v_1, v_2 > 0, \text{ o ponto de equilíbrio é instável;} \\ v_1, v_2 < 0, \text{ o ponto de equilíbrio é estável;} \end{cases}$$

2. v_1, v_2 são reais, $v_1 = v_2 \neq 0$.

Neste caso o ponto de equilíbrio é denominado *nó impróprio*.

3. v_1, v_2 são reais, $v_1 \times v_2 < 0$.

Quando v_1 e v_2 têm sinais distintos o ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela hiperbólico*. Tal ponto é sempre instável.

4. $v_1, v_2 > 0$ são complexos conjugados,

Seja $v_{1,2} = \text{Re}(v_{1,2}) \pm i\text{Im}(v_{1,2})$.

Se $\text{Re}(v_{1,2}) \neq 0$ as trajetórias descrevem uma espiral convergindo para um ponto de equilíbrio chamado *foco*. Se $\text{Re}(v_{1,2}) = 0$, o ponto de equilíbrio é chamado *centro*.

$$\text{Estabilidade: } \begin{cases} \text{Re}(v_{1,2}) > 0, & \text{foco instável;} \\ \text{Re}(v_{1,2}) < 0, & \text{foco estável.} \end{cases}$$

Teorema 1 (Grobman-Hartman) *Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, então existe uma vizinhança de $\bar{\mathbf{x}}$ na qual $\mathbf{f}$ é topologicamente equivalente ao vetor de campo linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$.*

O Teorema 1 (KOCÁK; HALE, 1991) afirma que se os autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ têm parte real não nula (não é ponto de equilíbrio do tipo centro), então as trajetórias do sistema não linear nas vizinhanças do ponto de equilíbrio têm a mesma forma das trajetórias do sistema linear associado na vizinhança da origem.

Embora a linearização ajuda na determinação se o ponto de equilíbrio hiperbólico é estável, ela não oferece nenhuma informação sobre o tamanho do domínio em torno do ponto de equilíbrio onde ocorre estabilidade. Este domínio é denominado região de estabilidade do ponto de equilíbrio.

3.4 Sistemas com Dependência de Parâmetro

Para sistemas da forma da Eq. (3.1), a tarefa fundamental da análise qualitativa reduz-se a cálculos numéricos, onde existem métodos bem estabelecidos. Se o sistema inclui a dependência de um parâmetro (SEYDEL, 1994), ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda), \quad (3.9)$$

os pontos de equilíbrio deste sistema com dependência de parâmetro são encontrados resolvendo a seguinte equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

A presença do parâmetro λ complica a tarefa de se encontrar os equilíbrios deste sistema.

Um estudo qualitativo completo da dinâmica do sistema dado pela Eq. (3.9) inclui equilíbrios como uma função do parâmetro λ . Assim, deseja-se encontrar uma função $\mathbf{x}(\lambda)$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$ para alguma mudança apropriada dos valores do parâmetro λ .

É bastante útil descrever graficamente os pontos de equilíbrio do sistema (Eq. (3.9)) em função do parâmetro no chamado **diagrama de bifurcação**, como ilustrado nas Figuras 3.1(a) e (b). Por convenção, as curvas sólidas em um diagrama de bifurcação indicam equilíbrios estáveis e as pontilhadas indicam equilíbrios instáveis (ver Figuras 3.1(a) e (b)) (KOCÁK; HALE, 1991).

Figura 3.1: Diagrama de Bifurcação (a) Bifurcação de Forquilha Subcrítica. (b) Bifurcação de Forquilha Supercrítica.

A construção do diagrama de bifurcação é uma técnica para descrever e compreender a dinâmica de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares. O diagrama mostra não somente o tipo e número de pontos de equilíbrios em termos de problemas com parâmetros, mas também valores críticos ou bifurcações, onde ocorre mudança de estabilidade ou aparece novos equilíbrios. Esta é a essência do estudo qualitativo de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares.

Há vários exemplos de bifurcações apresentadas na literatura, onde são classificadas basicamente pelos seguintes tipos: bifurcação Sela-Nó ou de Dobra (*Fold*); bifurcação Transcrítica, bifurcação de Forquilha (*Pitchfork* ou *Cusp*) e bifurcação de Histerese (KOCÁK; HALE, 1991). As Figuras 3.1(a) e (b) mostram a bifurcação de Forquilha subcrítica na Figura 3.1(a), e a bifurcação de Forquilha supercrítica Figura 3.1(b), onde $\bar{x}$ são os pontos de equilíbrio do sis-

tema para uma perturbação do parâmetro d .

Há um outro tipo classificado por bifurcação de Hopf (SEYDEL, 1994). A diferença entre as outras bifurcações e a de Hopf é que nos outros casos todos os ramos obtidos representam pontos de equilíbrio. Na bifurcação de Hopf, os ramos antes representando pontos de equilíbrio passam a sê-los por ciclos limites, onde as oscilações são regulares. Então, a bifurcação de Hopf é um tipo de bifurcação que relaciona equilíbrio à movimento periódico.

Em geral, não é possível resolver o problema algébrico dado pela Eq. (3.10) analiticamente e, conseqüentemente, há um desenvolvimento apropriado de técnicas numéricas para a construção do diagrama de bifurcação. Uma dessas técnicas numéricas é conhecida como técnica de **continuação numérica** (CUMMINGS, 2004).

A idéia geral dos métodos de continuação numérica é resolver a equação não linear da forma da Eq. (3.10), não no contexto de encontrar uma simples solução, mas procura construir uma ou mais trajetórias ou curvas da solução. Para obter os pontos de equilíbrio do sistema, ou seja, resolver Eq. (3.10), é apropriado primeiramente analisar a existência de solução para $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$. Neste caso, deseja-se saber se dado uma solução $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ para $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$, se existe uma curva que passa através de $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ da forma:

$$\Gamma := \{(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) : \lambda \in I, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}\},$$

onde I é um intervalo de números reais.

A seguir será apresentado o Teorema da Função Implícita (TFI) onde sua aplicação trata diretamente destas questões (SEYDEL, 1994).

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita) Suponha $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é não singular;
3. $\mathbf{f}, \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ são contínuas no conjunto $\{(\mathbf{x}, \lambda) : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon_1, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_2 \in I, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}\}$ para algum $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Então, existe uma função contínua $\varphi : (\lambda_0 - \varepsilon_2, \lambda_0 + \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- i. $\mathbf{x}_0 = \varphi(\lambda_0)$;
- ii. $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$ para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_2, \lambda_0 + \varepsilon_2)$;
- iii. Para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_2, \lambda_0 + \varepsilon_2)$, $\varphi(\lambda)$ é uma única solução de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}$ no conjunto $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon_1\}$.

Em outras palavras, quando a função $\mathbf{f}$ satisfaz as condições 1-3 na hipótese do TFI, a Eq. (3.10) pode ser resolvida localmente para $\mathbf{x}$ como uma função do parâmetro λ . No entanto, a função que representa a solução é única em uma certa vizinhança.

3.4.1 Bifurcação de Hopf

Um dos pontos especiais bastante considerado na literatura é o ponto de Hopf, por ter uma grande importância em aplicações reais e também pela dificuldade em detectá-lo e calculá-lo. Nos trabalhos de Badcock, Woodgate e Richards (2004, 2005) são desenvolvidas técnicas de detecção de pontos de Hopf e uma análise direta desse tipo de bifurcação em aplicações aeroelásticas.

Costuma-se definir bifurcação do tipo Hopf como a bifurcação de uma trajetória de pontos de equilíbrio para uma trajetória de oscilações periódicas (SEYDEL, 1994). Este tipo de bifurcação também é chamado de bifurcação de "Poincaré-Andronov-Hopf". A denominação Hopf origina-se do autor que provou o teorema:

Teorema 3 Assume-se $\mathbf{f}$ de classe C^2

- 1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$;
- 2. $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, tem um par imaginário puro de autovalores $\nu(\lambda_0) = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, não existe outro autovalor com parte real nula; e
- 3. Condição de transversalidade: $\frac{d}{d\lambda}(\text{Re}\nu(\lambda_0)) \neq 0$.

Então, existe um ciclo limite iniciando em (x_0, λ_0) . O período inicial da amplitude de oscilação é dado por $T_0 = 2\pi/\omega$.

Para classificar a bifurcação de Hopf deve-se ser satisfeito as três hipóteses do Teorema 3. Assim, considera-se o seguinte exemplo que consiste de uma equação diferencial de segunda ordem não linear com dependência de um parâmetro, o oscilador de **Van der Pol**:

$$\ddot{y} - (2\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (3.11)$$

O primeiro passo consiste em transformar esta equação em um sistema de primeira ordem. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2 \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$.

Este sistema é integrado no tempo e as histórias no tempo e o retrato de fase são obtidas. As Figuras 3.2(a) e (b) mostram a solução do sistema de **Van der Pol** para valor do parâmetro estrutural $\lambda = -1/6$. Neste caso, a solução converge para um ponto de equilíbrio. O ponto de bifurcação de Hopf está apresentado nas Figuras 3.3(a) e (b) para $\lambda = 0$. Para confirmar se este ponto representa o ponto de bifurcação de Hopf é necessário testar as condições do Teorema 3.

Apenas para ilustrar a solução do sistema, após o ponto de bifurcação, as Figuras 3.4(a) e (b) mostram as histórias no tempo e o retrato de fase para $\lambda = 1/6$, onde o sistema partindo do zero entra em oscilação com amplitudes finitas, ou seja, em ciclo limite. Nota-se que a amplitude de oscilação aumentou em comparação com as Figuras 3.3(a) e (b) para $\lambda = 0$. Ao tomar $\lambda = 1/2$, percebe-se nas Figuras 3.5(a) e (b), uma amplitude de oscilação ainda maior que o caso com $\lambda = 1/6$. Também pode-se observar que a frequência de oscilação obtida com $\lambda = 1/2$ é maior que aquela obtida com $\lambda = 1/6$. Isto pode ser notado ao comparar a característica distorcida do retrato de fase dado na Figura 3.5(b).

Figura 3.2: Integração no tempo do oscilador de **Van der Pol** para $\lambda = -1/6$.

Figura 3.3: Integração no tempo do oscilador de **Van der Pol** para $\lambda = 0$.

Primeiramente, pretende-se calcular quais são os pontos de equilíbrio deste sistema com o objetivo de testar todas as condições do Teorema 3. Para calcular os pontos de equilíbrio deste sistema, deve ser satisfeito $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = (0, 0)$. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2 = 0 \end{cases} . \quad (3.13)$$

Então, o único ponto de equilíbrio deste sistema é em $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Figura 3.4: Integração no tempo do oscilador de **Van der Pol** para $\lambda = 1/6$.

Figura 3.5: Integração no tempo do oscilador de **Van der Pol** para $\lambda = 1/2$.

Linearizando o campo vetorial, obtém-se:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\lambda x_1 x_2 & 2\lambda - x_1^2 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde, no ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, tem-se:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Observa-se que $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ é não singular para qualquer λ , $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ são contínuas. Então, pelo Teorema 2 (TFI) os pontos de equilíbrio deste sistema podem ser obtidos como uma função de λ .

Calculando os autovalores no ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, obtém-se:

$$\det(\mathbf{A} - \nu \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ -1 & 2\lambda - \nu \end{pmatrix} = 0., \quad (3.16)$$

portanto:

$$\nu = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad (3.17)$$

ou

$$\nu = \lambda \pm i\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad (3.18)$$

para $\lambda = 0$, $\nu = \pm i$, que corresponde ao par imaginário puro de autovalores.

Figura 3.6: Autovalor atravessando eixo imaginário com velocidade diferente de zero.

Testando a condição de transversalidade em $\lambda_0 = 0$, tem-se:

$$\frac{d}{d\lambda}(\text{Re} \nu(\lambda_0)) = 1 \neq 0. \quad (3.19)$$

Como foi satisfeita a condição de transversalidade, significa que o autovalor atravessa o eixo imaginário com velocidade não nula como ilustrado na Figura 3.6.

Portanto, foram satisfeitas todas as condições do Teorema 3. Então, existe um ciclo limite iniciando em $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ que corresponde ao ponto de bifurcação do oscilador de **Van der Pol**.

Figura 3.7: Diagrama de Bifurcação para o oscilador de **Van der Pol**.

É possível fazer um esboço do diagrama de bifurcação para este sistema. Neste caso, é conveniente fazer uma transformação de variáveis para coordenadas polares. Ao realizar a transformação para variáveis polares, os pontos de equilíbrios do sistema correspondem as amplitudes das oscilações que estão em função do parâmetro λ . Denotando por a a amplitude dos ciclos limite, a Figura 3.7 mostra o diagrama de bifurcação do oscilador de **Van der Pol**. Neste diagrama, é possível observar a característica geral da solução, conforme variou-se o parâmetro λ . Para $\lambda < 0$ o sistema foi caracterizado por focos estáveis, como foi observado nas Figuras 3.2(a) e (b) para $\lambda = -1/6$. O ponto degenerado $(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = (0, 0)$ corresponde ao ponto de bifurcação de Hopf. Este ponto caracteriza o início de respostas em ciclos limite e foi visto nas Figuras 3.3(a) e (b). Após o ponto de bifurcação de Hopf, as respostas apresentam oscilações inicialmente divergentes, que tendem ao ciclo limite com amplitude constante e, ao aumentar λ , observa-se um aumento na amplitude, conforme Figuras 3.4(a) e (b) para $\lambda = 1/6$ e Figuras 3.5(a) e (b) para $\lambda = 1/2$.

Em aplicações aeroelásticas a obtenção do ponto de bifurcação de Hopf está diretamente relacionado a encontrar as condições críticas *flutter*. O fenômeno de *flutter* se caracteriza pelo início da resposta oscilatória com amplitudes constantes, ou seja, para sistemas não lineares o *flutter* se caracteriza pelo ponto de bifurcação de Hopf ou início dos ciclos limite. Como foi visto no exemplo da equação de **Van der Pol**, para detectar os pontos de Hopf, obteve-se a história no tempo do sistema com variação do parâmetro λ , até encontrar o ponto inicial onde o sistema responde com ciclo limite.

Para aplicações em aeroelasticidade transônica, onde são envolvidos nos cálculos a solução não estacionária do código de CFD, um alto custo computacional é requerido. Então, técnicas para calcular diretamente o ponto de Hopf sem ter a necessidade da integração no tempo das equações de movimento são usadas.

Figura 3.8: Espectro dos autovalores de $\mathbf{f}_x$ do sistema de **Van der Pol**, com $\lambda = 0$, $\lambda = 1/6$ e $\lambda = -1/6$.

Dentre essas técnicas, pode ser monitorado o espectro dos autovalores de $\mathbf{f}_x$ em cada valor do parâmetro do sistema λ . Como foi visto na equação de **Van der Pol**, o par de autovalores da matrix jacobiana $\mathbf{f}_x$ para $\lambda = -1/6$ é $-0,1667 \pm 0,9860i$, em $\lambda = 0$ é $\pm i$ e em $\lambda = 1/6$ é $0,1667 \pm 0,9860i$. Assim, considerando o par imaginário de autovalores, pode-se monitorar o valor de λ até encontrar o valor onde a parte real se anula. Antes deste valor, a parte real é

negativa e, após este valor, a parte real é positiva, como mostra a Figura 3.8. Desta forma, fica garantido que o par de autovalores atravessou o eixo imaginário com velocidade não nula.

3.4.2 Método de Potência Inversa

Uma técnica bastante conhecida na literatura, que pode ser utilizada para encontrar o ponto de bifurcação de Hopf, através de um monitoramento do espectro dos autovalores da matriz jacobiana, é o Método de Potência Inversa (IPM - *Inverse Power Method*). O IPM (SEYDEL, 1994) foi aplicado ao sistema aeroelástico em Badcock, Woodgate e Richards (2004) para se obter os valores iniciais para a metodologia de bifurcação de Hopf.

A metodologia de bifurcação de Hopf, segundo Badcock, Woodgate e Richards (2004), oferece o cálculo direto do ponto de Hopf. No entanto, no presente trabalho optou-se por utilizar o IPM para encontrar a fronteira completa do *flutter* (BADCOCK; WOODGATE, 2007). Neste processo de construção da fronteira de *flutter* com o IPM, deve-se fazer um monitoramento do parâmetro do sistema até encontrar a solução desejada. Ou seja, procura-se o valor do parâmetro do sistema aeroelástico, onde um par imaginário de autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{w}$ tem parte real nula, caracterizando o ponto de Hopf.

Seja $\tilde{\mathbf{A}}$ uma matriz $m \times m$ diagonalizável e $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_m$ os autovalores desta matriz. Então, existe um autovalor dominante em valor absoluto v_1 , ou seja, $|\tilde{v}_1| > |\tilde{v}_2| \geq \dots \geq |\tilde{v}_m|$. O método de potência inversa é definido a partir do método de potência, que é utilizado para encontrar o autovalor dominante $|\tilde{v}_1|$ e o autovetor associado da matriz $\tilde{\mathbf{A}}$. O método de potência parte de um vetor $\mathbf{p}^0$ dado e calcula os próximos valores $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^m$, através das seguintes expressões (SEYDEL, 1994):

$$\mathbf{p}^{k+1} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_p^k, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{x}_p^k = \mathbf{p}^k / \|\mathbf{p}^k\|_\infty. \quad (3.21)$$

Dado o problema de autovalor $\mathbf{A}\mathbf{P} = v\mathbf{P}$, com $\mathbf{P}$ o autovetor associado ao autovalor v da matriz jacobiana $\mathbf{A}$, então, o IPM parte do processo iterativo, dado pelas Eqs. (3.20) e (3.21), para definir uma forma de calcular um autovalor específico mais próximo ao valor $\bar{v}$ dado.

Desta forma, na Eq. (3.20) define-se a matriz:

$$\tilde{\mathbf{A}} := (\mathbf{A} - \nu \mathbf{I})^{-1}, \quad (3.22)$$

que possui os autovalores:

$$\frac{1}{\nu_1 - \bar{\nu}}, \dots, \frac{1}{\nu_m - \bar{\nu}}. \quad (3.23)$$

Normalmente, existe somente um valor ν_j mais próximo a $\bar{\nu}$. Então, o autovalor de $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{\nu_j - \bar{\nu}}, \quad (3.24)$$

é o maior em magnitude que todos os outros, e o método de potência converge para $\tilde{\nu}_1$. Em outras palavras, ao aplicar o método de potência na matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ (definida pela Eq. (3.22)), tem-se o IPM.

Considerando o sistema de acoplamento aeroelástico formado pelas equações aerodinâmicas e dinâmico estrutural:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{w}, \lambda), \quad (3.25)$$

onde

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_f, \mathbf{w}_s]^T, \quad (3.26)$$

é o vetor que contem as variáveis do escoamento $\mathbf{w}_f = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$ e o vetor que contém as variáveis do modelo estrutural $\mathbf{w}_s = [w, \dot{w}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$,

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_f, \mathbf{R}_s]^T \quad (3.27)$$

é o vetor que contém o resíduo do escoamento $\mathbf{R}_f$ (Eq. (2.24)) e o vetor que contém o resíduo estrutural $\mathbf{R}_s$ (Eq. (2.47)), com modelo estrutural linear e pela Eq. (2.50), com modelo estrutural não linear, que também depende do parâmetro do sistema $\lambda = \bar{U}$.

Assim, dada a matriz jacobiana $\mathbf{A} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{w}$ do sistema aeroelástico e $\bar{\nu} = i\sigma_s$ é um autovalor dado que corresponde ao valor mais próximo do autovalor imaginário puro que pretende-se

encontrar. O processo iterativo de IPM é dado por:

$$(\mathbf{A} - i\sigma_s \mathbf{I})\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{x}_p^k, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{x}_p^k = \mathbf{p}^k / \|\mathbf{p}^k\|_\infty, \quad (3.29)$$

onde este processo de iteração converge para o autovetor $\mathbf{P}$ correspondente ao autovalor no espectro de $\mathbf{A}$ mais próximo ao valor $i\sigma_s$.

Ao comparar a Eq. (3.28) com a Eq (3.20), nota-se que foi evitado o cálculo da matriz inversa $(\mathbf{A} - i\sigma_s \mathbf{I})^{-1}$ e, conseqüentemente, foi obtido um sistema linear esparso. Para a solução do sistema da Eq. (3.28), a matriz $(\mathbf{A} - i\sigma_s \mathbf{I})$ foi primeiramente fatorada pela fatoração incompleta de bloco LU (BILU - *Block Incomplete Lower-Upper*) e resolvida pelo método dos gradientes conjugados (CGS) de forma apropriada (BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004; BADCOCK; WOODGATE; BERAN, 2007).

Um ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico $\mathbf{w}_0(\lambda)$ deve satisfazer $\mathbf{R}(\mathbf{w}_0, \lambda) = \mathbf{0}$. Vale notar aqui, que soluções de equilíbrios são obtidas quando assume-se $\mathbf{w}_f^{n+1} = \mathbf{w}_f^n$, onde n denota o nível de tempo. Desta forma, o primeiro passo do IPM é o cálculo estacionário do código de CFD, com as posições w e α do aerofólio no ponto de equilíbrio.

Após obter os valores das variáveis do escoamento da solução estacionária do código de CFD a iteração do IPM é realizada. Desta forma, se constrói a fronteira de ocorrência do *flutter* com o IPM considerando o ponto de Hopf com respeito ao parâmetro $\bar{U}$ em cada regime de escoamento, dado pelo número de Mach. Em outras palavras, dado o ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico, que satisfaz $\mathbf{R}(\mathbf{w}_0, \lambda) = \mathbf{0}$, e a matrix jacobiana $\mathbf{A}$ no ponto de equilíbrio, encontra-se o valor de $\bar{U}$, tal que o par de autovalores atravesse o eixo imaginário, para cada Mach.

3.4.3 Cálculo da Matriz Jacobiana do Sistema Aeroelástico

O processo que representa uma maior dificuldade para o cálculo do ponto de bifurcação de Hopf é obter a matriz jacobiana $\mathbf{A} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{w}$ do sistema aeroelástico. Através da matriz

jacobiana é possível fazer a análise do espectro dos autovalores nos pontos de equilíbrio do sistema. A dificuldade está diretamente relacionada com a forma discreta do equacionamento aerodinâmico através da metodologia do código de CFD. O detalhamento para o cálculo a matriz jacobiana $\mathbf{A}$ está em Badcock, Woodgate e Richards (2004), onde por conveniência essa matriz foi particionada da forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \mathbf{w}_f} & \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \mathbf{w}_s} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial \mathbf{w}_f} & \frac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial \mathbf{w}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & \mathbf{A}_{fs} \\ \mathbf{A}_{sf} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

A matriz $\mathbf{A}_{ff}$, da Eq (3.30) descreve a influência das incógnitas do escoamento no próprio resíduo do escoamento. Neste caso, a metodologia do código de CFD utilizada foi aquela dada no contexto de malhas estruturadas (descrita na Seção 2.2.1). O resíduo do escoamento foi calculado pela metodologia *upwind* de Osher, assim a matriz $\mathbf{A}_{ff}$ foi calculada analiticamente em dois estágios, ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \mathbf{w}_f} = \frac{\partial \mathbf{R}_{f_i}}{\partial \mathbf{VF}} \frac{\partial \mathbf{VF}}{\partial \mathbf{w}_f}, \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{VF}$ é o símbolo para expressar os vetores de fluxo $\mathbf{VF} = (\mathbf{E}_L, \mathbf{E}_R, \mathbf{F}_L, \mathbf{F}_R)$, onde L e R indicam os estados dos vetores de fluxo a esquerda e direita, respectivamente, e o índice i indica a célula que está sendo avaliado o resíduo do escoamento, como mostra a Figura 3.9.

Figura 3.9: Esquema da célula computacional i para avaliação do resíduo do escoamento $\mathbf{R}_f$.

Através da regra da cadeia, conforme a Eq. (3.31), primeiramente calcula-se a dependência da aproximação do vetor de fluxo numérico pela expressão da metodologia *upwind* de Osher dos estados esquerdo e direito na interface da célula i . Depois, a dependência dos vetores de fluxo nos estados esquerdo e direito nas variáveis do escoamento das células locais é calculado pela expressão de extrapolação MUSCL.

O próximo bloco da matriz $\mathbf{A}$ (Eq. (3.30)) a ser calculado, consiste da dependência do resíduo do escoamento pelas variáveis estruturais, ou seja, a matriz $\mathbf{A}_{fs}$, que é calculada por diferenças finitas. Sabendo que as variáveis estruturais e do escoamento são variáveis independentes, primeiramente o cálculo dos valores do escoamento são mantidos fixos, ou seja, fixa o cálculo do código de CFD. A dependência das variáveis estruturais no resíduo do escoamento é dada pelo movimento da malha computacional.

Assim, para o aerofólio com movimentos em arfagem e deslocamentos verticais, a malha computacional é rotacionada e transladada de acordo com o valor corrente das variáveis estruturais, onde são obtidos as novas posições e velocidades, dadas pelas expressões nas Eqs. (2.37) e (2.38), respectivamente. Forma-se, então, as expressões de diferenças finitas:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \mathbf{w}_s} = \left[\frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial w}, \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \dot{w}}, \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \dot{\alpha}} \right]^T, \quad (3.32)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial w} \approx \frac{\mathbf{R}_f(w + \Delta w) - \mathbf{R}_f(w - \Delta w)}{2\Delta w}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \dot{w}} \approx \frac{\mathbf{R}_f(\dot{w} + \Delta \dot{w}) - \mathbf{R}_f(\dot{w} - \Delta \dot{w})}{2\Delta \dot{w}}, \quad (3.33)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \alpha} \approx \frac{\mathbf{R}_f(\alpha + \Delta \alpha) - \mathbf{R}_f(\alpha - \Delta \alpha)}{2\Delta \alpha}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \dot{\alpha}} \approx \frac{\mathbf{R}_f(\dot{\alpha} + \Delta \dot{\alpha}) - \mathbf{R}_f(\dot{\alpha} - \Delta \dot{\alpha})}{2\Delta \dot{\alpha}}. \quad (3.34)$$

Para o caso do deslocamento vertical w , ao incrementar $w \pm \Delta w$, as novas posições das malhas não modificam em nada o cálculo do resíduo do escoamento, assim $\partial \mathbf{R}_f / \partial w = 0$. Para o incremento das outras variáveis em relação as novas posições em arfagem e novas velocidades da malha modificam o valor do resíduo do escoamento.

A outra matriz a ser avaliada na matriz jacobiana $\mathbf{A}$ (Eq. (3.30)) se trata da influência do resíduo estrutural nas incógnitas do escoamento, ou seja, a matriz $\mathbf{A}_{sf}$. A influência das variáveis do escoamento no resíduo estrutural contribui através da expressão para o cálculo dos coeficientes de sustentação e momento que dependem da distribuição de pressão sobre o perfil. Então, para o resíduo estrutural $\mathbf{R}_s$, a derivada em função das variáveis do escoamento necessita obter os termos:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \mathbf{w}_f} \text{ e } \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{w}_f}, \quad (3.35)$$

e como C_L e C_m são os coeficientes aerodinâmicos calculados pela integral da pressão na superfície pela unidade de área. Primeiramente, utiliza-se a regra da cadeia para avaliar as derivadas dadas pela Eq. (3.35):

$$\frac{\partial C_L}{\partial \mathbf{w}_f} = \frac{\partial C_L}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{w}_f} \text{ e } \frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{w}_f} = \frac{\partial C_m}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{w}_f}. \quad (3.36)$$

O primeiro termo $\frac{\partial C_L}{\partial p}$ é calculado por diferenças finitas, ou seja:

$$\frac{\partial C_L}{\partial p} \approx \frac{C_L(p + 2\Delta p) - C_L(p)}{2\Delta p}. \quad (3.37)$$

Desta forma, o valor da pressão é incrementado em duas células adjacentes à superfície do aerofólio e é reavaliado o resíduo estrutural para os novos valores dos coeficiente aerodinâmicos. O termo $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{w}_f}$ é obtido analiticamente pela expressão da equação de estado para gás perfeito (Eq. (2.4)). O mesmo cálculo é realizado para $\frac{\partial C_m}{\partial \mathbf{w}_f}$.

Finalmente, a matriz jacobiana exata da influência das variáveis estruturais no próprio resíduo estrutural representada pelo bloco de matriz $\mathbf{A}_{ss}$ é obtido analiticamente através da

Eq.(2.47), resultando:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial \mathbf{w}_s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4(\omega_R)^2 r_\alpha^2}{(\bar{U})^2 \det} & 0 & \frac{2r_\alpha^2}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{x_\alpha}{\det} \left(\frac{-2r_\alpha^2}{(\bar{U})^2} + \frac{4}{\mu \pi} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{8x_\alpha(\omega_R)^2}{(\bar{U})^2 \det} & 0 & \frac{-4x_\alpha}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{-4r_\alpha^2}{\det(\bar{U})^2} + \frac{8}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

onde, $\det = r_\alpha^2 - x_\alpha^2$.

Ao calcular a matriz $\mathbf{A}_{ss}$ aparecem os termos:

$$\frac{\partial C_L}{\partial w}, \quad \frac{\partial C_L}{\partial \dot{w}}, \quad \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial C_L}{\partial \dot{\alpha}}, \quad (3.39)$$

e

$$\frac{\partial C_m}{\partial w}, \quad \frac{\partial C_m}{\partial \dot{w}}, \quad \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}, \quad (3.40)$$

onde a contribuição das posições e velocidades do aerofólio na expressão para o cálculo dos esforços aerodinâmicos é na expressão para o cálculo da área, pois o cálculo aerodinâmico é mantido fixo.

Assim, as únicas expressões que correspondem a valores diferentes de zero são $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$, as outras expressões são relativas à dependência do cálculo dos esforços aerodinâmicos das variáveis w , $\dot{w}$ e $\dot{\alpha}$ são iguais à zero. Os valores diferentes de zero são calculados por diferenças finitas, da forma:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \approx \frac{C_L(\alpha + \Delta\alpha) - C_L(\alpha - \Delta\alpha)}{2\Delta\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \approx \frac{C_m(\alpha + \Delta\alpha) - C_m(\alpha - \Delta\alpha)}{2\Delta\alpha}. \quad (3.41)$$

3.4.4 Não Linearidade Estrutural em Torção na Matriz Jacobiana

Não linearidades em torção foram acrescentadas à matriz jacobiana para estudo da influência das não linearidades estruturais no cálculo da fronteira de *flutter*. As não linearidades consideradas foram compostas pelas funções polinomiais e tangente hiperbólica descritas na Seção 2.3 e dadas pelas Eq.(2.52) e (2.49), respectivamente.

Para obter a análise da fronteira de *flutter* com o modelo estrutural não linear, deve-se con-

siderar o resíduo estrutural dado pela Eq. (2.50), para não linearidades polinomiais. Novamente considera-se a matriz jacobiana particionada na Eq. (3.30) e é avaliada em cada bloco das matrizes $\mathbf{A}_{ff}$, $\mathbf{A}_{fs}$, $\mathbf{A}_{sf}$ e $\mathbf{A}_{ss}$ considerando-se a modificação para o modelo estrutural não linear. A matriz $\mathbf{A}_{ff}$ que corresponde a influência das variáveis do escoamento no próprio resíduo do escoamento, não modifica em nada para o modelo estrutural não linear. A matriz $\mathbf{A}_{fs}$ também continua da mesma forma como obtida na Seção anterior, pois as variáveis estruturais continuam as mesmas.

A matriz $\mathbf{A}_{sf}$, que corresponde a influência das variáveis do escoamento no resíduo estrutural também é calculado da mesma forma como apresentado na Seção anterior, lembrando que o resíduo estrutural é formado com o modelo estrutural não linear. O único bloco da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ que sofre alteração é $\mathbf{A}_{ss}$, pois o novo resíduo estrutural é avaliado em função das variáveis estruturais, obtendo a expressão:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial \mathbf{w}_s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4(\omega_R)^2 r_\alpha^2}{(\bar{U})^2 \det} & 0 & \frac{2r_\alpha^2}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{x_\alpha}{\det} \left(\frac{-2r_\alpha^2}{(\bar{U})^2} + \frac{4}{\mu \pi} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{8x_\alpha(\omega_R)^2}{(\bar{U})^2 \det} & 0 & \frac{-4x_\alpha}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{-4r_\alpha^2}{\det(\bar{U})^2} \left(\frac{f(\alpha)}{\partial \alpha} \right) + \frac{8}{\det \mu \pi} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Ao comparar a matriz dada pela Eq. (3.42) à matriz $\mathbf{A}_{ss}$, obtida com o modelo linear na Eq. (3.38), percebe-se que a única diferença está no termo extra $\frac{f(\alpha)}{\partial \alpha}$. Este termo extra corresponde a derivada da função não linear $f(\alpha)$, que é a inclinação a curva não linear em cada α na posição de equilíbrio. Assim, para as curvas não lineares tratadas no presente trabalho e dadas pelas funções polinomial e tangente hiperbólica (Eqs. (2.49) e (2.52)), respectivamente, são obtidas as derivadas:

$$\frac{f(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n i f_{\alpha_i} \alpha^{i-1} \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)}{\partial \alpha} &= (1/2) - (1/2)(\tanh(\varepsilon(\alpha - \alpha_-)) - \varepsilon(1/2)(\alpha - \alpha_-)(\operatorname{sech}^2(\varepsilon(\alpha - \alpha_-)) + \dots \\ &+ (1/2) + (1/2)(\tanh(\varepsilon(\alpha + \alpha_+)) + \varepsilon(1/2)(\alpha - \alpha_+)(\operatorname{sech}^2(\varepsilon(\alpha - \alpha_+))), \end{aligned} \quad (3.44)$$

cujas variáveis são descritas nas Eq.(2.52) e (2.49), repectivamente.

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DE CFD NÃO ESTRUTURADO

4.1 Considerações Iniciais

O objetivo deste Capítulo é realizar os processos de verificação e de validação do código de CFD que utiliza malha não estruturada. Nestes processos, as soluções de estados estacionário e não estacionário são comparadas com dados tanto experimentais como computacionais. Os resultados não estacionários são obtidos com bases em testes de casos experimentais AGARD. Três testes de casos são considerados e correspondem ao movimento harmônico forçado em arfagem com diferentes amplitudes e frequências.

Na validação os resultados são comparados com os obtidos pelo código de CFD que utiliza malhas estruturadas apresentado na Seção 2.2.1 (DUBUC et al., 1997). Este código de CFD é utilizado apenas em sua versão estacionária na metodologia de bifurcação de Hopf. Assim, as soluções de estado estacionário são comparadas entre os dois códigos de CFD. No entanto, as soluções não estacionárias do código de CFD que utiliza malhas estruturadas são retiradas de Dubuc et al. (1997). No caso da verificação, os resultados são comparados com dados experimentais AGARD também retirados de Dubuc et al. (1997).

Os processos de verificação e validação garantem a eficiência e confiabilidade dos códigos

de CFD para as aplicações aeroelásticas tratadas no presente trabalho.

4.2 Soluções de Estado Estacionário

Utilizando os códigos computacionais descritos na Seção 2.2.1 será apresentada a solução do estado estacionário das equações de Euler para o aerofólio NACA0012 em um contexto de malhas estruturadas e não estruturadas. Os resultados para análise estacionária apresentados nesta Seção tem como objetivo analisar as potencialidades e limitações dos códigos computacionais que representam o escoamento sobre aerofólios. O perfil simétrico NACA0012 e as condições de escoamento, neste caso, são escolhidas tendo-se em vista os resultados disponíveis na literatura técnica. Assim, são realizados estudos sobre a influência do tamanho do domínio computacional utilizado nos cálculos, do refinamento de malha e comparações entre os resultados obtidos com os dois códigos de CFD. As malhas correspondentes aos domínios computacionais discretizados são obtidas utilizando o gerador comercial ICEM CFD, que se trata de uma ferramenta poderosa capaz de criar malhas sofisticadas para geometrias complexas e variadas.

Tabela 4.1: Malha não estruturadas para estudo do tamanho do domínio computacional utilizado nos cálculos.

Tamanho do raio	Número de volumes	Números de pontos na superfície do aerofólio
10 cordas	12444 volumes	278 pontos
15 cordas	13496 volumes	278 pontos
20 cordas	14400 volumes	278 pontos
25 cordas	14642 volumes	278 pontos
30 cordas	14750 volumes	278 pontos
60 cordas	15679 volumes	278 pontos

Inicialmente, a influência do tamanho do domínio computacional utilizado nos cálculos é analisada com o código de CFD em um contexto de malhas não estruturadas (AZEVEDO, 1992) com a solução de estado estacionário. As Figuras 4.1 e 4.2 mostram a malha não estruturada e a imagem aproximada nos volumes dispostos próximos ao aerofólio, respectivamente. As análises são realizadas com a variação do raio do domínio computacional entre 10, 15, 20, 25, 30 e 60 cordas do aerofólio. Inicialmente considera-se o domínio com dez cordas e os demais casos

são obtidos fixando-se os volumes internos e apenas é acrescentado volumes após a fronteira externa. A Tabela 4.1 mostra as características de cada malha com diferentes tamanhos de raios do domínio computacional discretizado.

Tabela 4.2: Coeficientes de sustentação com variação do raio no domínio computacional.

Raio	Valor de C_L
10 cordas	0,2979
15 cordas	0,3114
20 cordas	0,3139
25 cordas	0,3205
30 cordas	0,3279
60 cordas	0,3282

Figura 4.1: Vista da malha computacional não estruturada para o aerofólio NACA0012.

As soluções das equações nestes domínios discretizados são realizadas com o número de Mach igual 0,8 e incidência de 1,25 graus e comparadas nestas mesmas condições com o re-

Figura 4.2: Vista parcial da malha computacional não estruturada para o aerofólio NACA0012.

sultado experimental obtido na literatura técnica. Os resultados apresentados na Figura 4.3 mostram a distribuição de pressão para as variações de raio de 10 a 60 cordas. Pode-se observar que, nos casos com 10 e 15 cordas de raio, o choque ocorre levemente antes dos demais casos. Os valores para os coeficientes de sustentação (C_L) de acordo com o tamanho do domínio computacional utilizado nos cálculos estão mostrados na Tabela 4.2. Nota-se uma mudança nos valores dos coeficientes de sustentação, sendo que os valores crescem conforme aumenta-se o raio. A variação do coeficiente de sustentação relativo ao cálculo com 10 até 60 cordas de raio é de 10,19%. Mas se pode observar que a maior variação ocorreu entre os valores de 10 e 15 cordas, e para os demais casos ocorreu uma menor variação entre os valores de C_L .

Tabela 4.3: Malhas não estruturadas utilizadas para o estudo de refinamento.

Nome da malha	Número de volumes	Número de pontos na superfície do aerofólio
grossa	13744 volumes	192 pontos
média	17844 volumes	384 pontos
fin	35304 volumes	642 pontos

Fixando-se o domínio computacional em 20 cordas de raio, é realizado o estudo da in-

fluência do refinamento de malha na solução do escoamento. Este estudo também indica uma malha apropriada para as simulações de tal forma que a solução não sofra grandes mudanças pela alteração de quantidade de nós utilizada para discretizar o domínio computacional. Ao mesmo tempo, procura-se em encontrar uma malha adequada minimizando os problemas de alto custo computacional nos cálculos aerodinâmicos para escoamentos transônicos. A Tabela 4.3 mostra as características das malhas não estruturadas utilizadas para estudo de refinamento. O efeito da solução no cálculo aerodinâmico é analisado variando-se a quantidade de pontos sobre o perfil. Três malhas são consideradas, com 13744 (grossa), 17844 (média) e 35304 (fina) volumes em todo campo do domínio discretizado e 192, 384 e 642 pontos sobre o perfil aerodinâmico, respectivamente. A Figura 4.4 apresenta os gráficos de coeficiente de pressão para o número de Mach 0,8 e incidência 1,25 graus. O resultado obtido com a malha grossa é um pouco diferenciado comparado com os outros, onde pode-se notar que houve um adiantamento da ocorrência do choque. Para as malhas média e fina os resultados são bastante semelhantes.

Figura 4.3: Variação do tamanho do domínio computacional com o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas para $M = 0,8$ e $\alpha = 1,25^\circ$.

Figura 4.4: Influência no refinamento da malha sobre a distribuição de pressão com o código de malhas não estruturadas para $M = 0,8$ e $\alpha = 1,25^\circ$.

Tabela 4.4: Coeficientes de sustentação na análise de refinamento de malha não estruturada.

Malha não estruturada	Valor de C_L
grossa	0,2959
média	0,3139
fina	0,3198

Os valores do coeficiente de sustentação também são obtidos para o estudo de refinamento malha e apresentados na Tabela 4.4. Como pode-se perceber com os gráficos da distribuição de pressão (ver Figura 4.4) a maior variação ocorre entre o valor de C_L com a malha grossa e a malha média, a variação entre os valores obtidos com a malha média e fina são bastante próximos. Esta análise mostra que a solução praticamente se manteve a mesma a partir da quantidade de pontos da malha média nos cálculos e, neste caso, a solução independe da malha utilizada. Assim, para os cálculos do código de CFD não estruturado considera-se satisfatório a utilização da malha média, pois a utilização da malha fina implicaria em altos custos computacionais.

O mesmo estudo de refinamento de malha é realizado com o código de CFD no contexto de malhas estruturadas (DUBUC et al., 1997). As Figuras 4.5 e 4.6 mostram, respectivamente, a malha estruturada com um domínio computacional do tipo "C-H" e a imagem aproximada nos volumes dispostos próximos ao aerofólio, respectivamente. O formato "C-H" para a metodologia de malhas estruturadas utilizada no presente trabalho é obtido para dividir o domínio discretizado em diferentes blocos para aplicar uma técnica de movimento de malha nos cálculos não estacionários (DUBUC et al., 1997). Três malhas são consideradas e dispostas de acordo com o número de pontos na direção de x e y , sendo 129×33 (grossa), 257×65 (média) e 513×129 (fina) como mostra na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Malhas estruturadas utilizadas para o estudo de refinamento.

Nome da malha	Número de pontos	Número de pontos na superfície do aerofólio
grossa	129×33 pontos	96 pontos
média	257×65 pontos	192 pontos
fina	513×129 pontos	384 pontos

A Figura 4.7 mostra o gráfico da distribuição de pressão com os três tipos de malhas de acordo com o refinamento. Os resultados mostram uma boa concordância, e neste caso, as três malhas não apresentaram diferenças significativas na solução. Este estudo de refinamento demonstra que a solução praticamente independe dos três tipos de malhas utilizadas. Para checar esta observação, é calculado também o coeficiente de sustentação, onde os resultados são mostrados na Tabela 4.6. Pode-se notar que os valores estão bem próximos entre eles confirmando que, neste caso, a solução utilizando o código com malhas estruturadas pode ser obtida sem a necessidade de grandes refinamentos na malha. Com isso, considerou-se satisfatório utilizar a malha grossa para os cálculos aeroelásticos com este código, visando a redução dos custos computacionais.

Comparação entre as duas metodologias no gráfico de distribuição de pressão está mostrada na Figura 4.8. Nestes cálculos, para a distribuição de pressão utilizando o código de malhas não estruturadas é utilizada a malha grossa, onde $C_L = 0,2959$. Para o código com malhas estruturadas é utilizado a malha grossa, sendo $C_L = 0,3273$. Verificando a Figura 4.8 e os valores de coeficiente de sustentação, as duas metodologias apresentaram valores próximos, no

Figura 4.5: Vista da malha computacional estruturada do tipo "C-H" em torno do aerofólio NACA0012.

entanto, o código de CFD que utiliza malhas estruturadas obteve uma maior aproximação aos dados experimentais.

Vale ressaltar ainda nesta análise dos cálculos estacionários outros paralelos entre as duas metodologias do código de CFD. Uma das observações está na quantidade de pontos utilizadas para discretizar o domínio computacional. Para o código de malhas estruturadas foram utilizados 4257 pontos para discretização com a malha grossa, 16705 com a média e 66177 com a fina. Já no código com malhas não estruturadas a malha grossa contém 6996 pontos, a média 9100 pontos e a fina 17973. No caso das malhas não estruturadas há uma concentração maior de pontos nas regiões onde ocorre o choque necessária para garantir a precisão da solução (ver Figuras 4.1 e 4.2).

Tabela 4.6: Coeficientes de sustentação na análise de refinamento de malha estruturada.

Malha estruturada	Valor de C_L
grossa	0,3273
média	0,3281
fina	0,3288

Figura 4.6: Vista parcial da malha computacional estruturada do tipo "C-H" em torno do aerofólio NACA0012.

As malhas estruturadas possuem um mecanismo de refinamento adicionando-se uma quantidade de pontos em cada linha nas direções x e y para todo campo discretizado (ver Figuras 4.5 e 4.6). Com isso, o mecanismo de refinamento exige a inclusão de um número maior de pontos quando se acrescenta poucos pontos em cada direção. Desta forma, o refinamento nas proximidades da geometria e regiões de choques exige um acréscimo de pontos em outras partes do domínio computacional que não sofrem grandes modificações nos cálculos. Este acréscimo relativamente grande acarreta em um grande aumento no custo computacional dos cálculos. Por exemplo, ao calcular a solução estacionária para número de Mach 0,75 com incidência de zero graus utilizando-se a malha grossa é gasto um minuto, utilizando-se a malha média são gastos 10 minutos e com a malha fina 30 minutos na mesma máquina com processador Intel Xeon de 2,8 GHz e 1 GB de memória RAM.

No caso do presente trabalho, onde as análises aeroelásticas serão sobre um aerofólio, a geometria é considerada relativamente simples. A malha estruturada apresentou uma boa

Figura 4.7: Influência no refinamento da malha sobre a distribuição de pressão com o código de malhas estruturadas para $M = 0,8$ e $\alpha = 1,25^\circ$.

aproximação com um número relativamente baixo de pontos (malha grossa) no domínio computacional comparado com o número de pontos utilizado para discretizar a malha não estruturada, garantindo um menor custo computacional nos cálculos.

Um outro importante paralelo pode ser obtido entre as metodologias utilizadas nos dois códigos de CFD e apresentadas na Seção anterior. A discretização no tempo utilizada na metodologia de malhas não estruturada consiste de um método explícito. No entanto, na metodologia de malhas estruturadas, a discretização no tempo é obtida por um método implícito em tempo dual. Sabe-se que a diferença básica entre estas metodologias se trata do valor do passo no tempo Δt (ou valor de CFL) utilizado para marcha das soluções. Para a metodologia explícita a maior desvantagem está na restrição do valor de Δt (ou valor de CFL) imposta pelo critério de estabilidade de solução, resultando num alto custo computacional comparado com os métodos implícitos que não possuem restrições tão pequenas para manter estabilidade.

Utilizando o cálculo estacionário dos códigos de CFD sobre o aerofólio NACA0012 com

Figura 4.8: Comparação da distribuição de pressão entre os códigos de malhas estruturadas e não estruturadas para $M = 0,8$ e $\alpha = 1,25^\circ$.

número de Mach 0,8 e incidência de zero graus, uma comparação é realizada entre os cálculos com os dois códigos de CFD, e são utilizadas as respectivas malhas grossas nos cálculos. Estas malhas possuem números diferentes de pontos, 4257 pontos na malha estruturada e 6996 pontos na malha não estruturada, no entanto, são as malhas com quantidades de pontos mais próximas para comparar os custos relativos às diferentes abordagens, explícita e implícita. Assim, apesar desta comparação ser afetada pela utilização de quantidades diferentes de números de pontos no domínio computacional, considera-se possível realizar uma estimativa na comparação dos custos nos cálculos dos diferentes métodos dos códigos de CFD.

Nos cálculos de estado estacionário dos códigos de CFD são utilizados passos no tempo variável, com número de CFL igual 1,2, para o método explícito, e CFL igual 50, no método implícito. Enquanto o método explícito consumiu 5 minutos e 48 segundos em uma máquina com processador Intel Xeon de 2,8 GHz e 1 GB de memória RAM, o método implícito consumiu apenas 32 segundos. Os contornos do número de Mach estão nas Figuras 4.9 e 4.10 para

Figura 4.9: Contornos do número de Mach sobre o aerofólio NACA0012 com o código de malhas estruturadas em $M = 0.8$ e $\alpha = 0^\circ$.

o código de malha estruturada e não estruturada, respectivamente. Pode-se perceber a grande consistência dessas metodologias em prever a característica de regiões de escoamentos mistos em regime transônico com números de Mach maior que um antes da ocorrência do choque e de números de Mach menor que um depois da onda de choque.

Importante ressaltar que para a metodologia aeroelástica de marcha no tempo é utilizado o método explícito em um contexto de malhas não estruturada. Na análise aeroelástica com metodologias de integração no tempo, o valor do intervalo no tempo está restrito não somente pela estabilidade numérica dos métodos do código de CFD mas também pela consistência da resposta oscilatória do sistema aeroelástico. Assim sendo, é necessário quantificar os valores de passos no tempo que poderão ser assumidos, e estimar se a utilização da metodologia implícita traria vantagens relativas aos custos nos cálculos da metodologia de marcha no tempo do sistema

Figura 4.10: Contornos do número de Mach sobre o aerofólio NACA0012 com o código de malhas não estruturadas em $M = 0.8$ e $\alpha = 0^\circ$.

aeroelástico.

Nas metodologias para o cálculo direto do ponto onde ocorre o *flutter* com a análise de bifurcação de Hopf utilizada no presente trabalho que será descrita no próximo Capítulo, é analisada a estabilidade da solução no estado de equilíbrio das equações aeroelásticas. Assim, serão necessários apenas cálculos de estado estacionário das equações aerodinâmicas, e isto, demonstra uma grande vantagem dos métodos implícitos na solução aerodinâmica para a análise de bifurcação de Hopf.

4.3 Soluções de Estado Não Estacionário

Para analisar a versão não estacionária do código de CFD em um contexto de malhas não estruturadas (AZEVEDO, 1992) são realizados alguns testes de casos e os resultados comparados

com os obtidos na literatura técnica. Os testes realizados são os três testes de casos AGARD, obtidos experimentalmente e retirados de Dubuc et al. (1997). Nestes três testes de casos, o aerofólio é submetido a um movimento harmônico forçado em arfagem e, dentro de um ciclo do movimento, são plotadas distribuições instantâneas de pressão em oito diferentes incidências. Três diferentes amplitudes e frequências do movimento harmônico são consideradas através de uma função senoidal que descreve o movimento. Estas análises são realizadas em Dubuc et al. (1997) com o código computacional no contexto de malhas estruturadas apresentado na Seção 2.2.1. Então, os resultados obtidos com o código computacional no contexto de malhas não estruturadas são comparados com os testes experimentais AGARD e os obtidos pelo código de CFD em malhas estruturadas retirados de Dubuc et al. (1997).

Na Tabela 4.7 estão descritos os dados dos três testes de casos AGARD considerados, devido a Dubuc et al. (1997), caso 1 (TC1), caso 2 (TC2) e caso 5 (TC5). Para estes testes o movimento hamônico do aerofólio é definido pela equação do ângulo de incidência como uma função do tempo:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

onde α_m é a amplitude do movimento oscilatório, α_0 é a incidência inicial e ω é a frequência angular do movimento. A frequência reduzida, k , é definida como

$$k = \frac{\omega c}{2U_\infty} \quad (4.2)$$

sendo c a corda do aerofólio e U_∞ é a velocidade do escoamento livre.

Para todos os casos o aerofólio oscila com referência ao ponto de um quarto da corda. Na Tabela 4.7, x_m é a posição para o cálculo do momento de arfagem. As distribuições instantâneas de pressão são obtidas com a malha média na discretização do domínio computacional para todos os casos. Também, os valores do tempo e os passos no tempo, Δt , são valores adimensionalizados no presente trabalho.

A solução em ângulo de ataque inicial (α_0) é calculada utilizando-se a versão estacionária do código de CFD. Os resultados são mostrados em termos de distribuição instantâneas de

Tabela 4.7: Testes AGARD realizados para análise não estacionária.

Caso	Aerofólio	$Mach$	α_0	α_m	k	x_m
TC1	NACA0012	0,6	$2,89^\circ$	$2,41^\circ$	0,0808	-0,237
TC2	NACA0012	0,6	$3,16^\circ$	$4,59^\circ$	0,0811	-0,237
TC5	NACA0012	0,755	$0,016^\circ$	$2,51^\circ$	0,0814	-0,25

Figura 4.11: Um ciclo completo do movimento em arfagem para o TC1.

pressão, coeficientes de forças normal, C_N , e de momento de arfagem, C_m . Para o caso TC5, o coeficiente de momento é calculado sobre um quarto da corda, mas para os casos TC1 e TC2 o coeficiente de momento é calculado sobre 0,273 da corda. Esta mudança na posição para o cálculo do momento de arfagem foi sugerido por Dubuc et al. (1997) percebendo uma melhor concordância com os resultados experimentais e supondo um possível erro na posição para os cálculos do momento de arfagem relatados nos experimentos.

A Figura 4.11 mostra um ciclo completo do movimento em arfagem com as oito posições de incidências instantâneas enumeradas no gráfico para o TC1. Para todos os casos TC1, TC2 e TC5, as análises são realizadas nos respectivos terceiros ciclos do movimento hamônico. As Figuras 4.12 a 4.15 mostram as oito diferentes distribuições instantâneas de pressão durante o

(1) $\alpha = 2,97^\circ$ (2) $\alpha = 4,56^\circ$

Figura 4.12: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC1
 $M=0,6$, $\alpha = 2,89^\circ + 2,41^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0808$

(3) $\alpha = 5,09^\circ$ (4) $\alpha = 4,17^\circ$

Figura 4.13: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC1
 $M=0,6$, $\alpha = 2,89^\circ + 2,41^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0808$

Figura 4.14: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC1
 $M=0,6$, $\alpha = 2,89^\circ + 2,41^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0808$

(7) $\alpha = 0,48^{\circ}$ (8) $\alpha = 1,29^{\circ}$

Figura 4.15: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC1
Mach=0,6, $\alpha = 2,89^{\circ} + 2,41^{\circ} \sin(\omega t)$, $k = 0,0808$

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.16: Estudo de refinamento de malha: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC1

ciclo para o teste AGARD TC1. Os resultados mostraram uma boa concordância comparados com os dados experimentais e os obtidos por Dubuc et al. (1997). O caso TC1 representa o escoamento em regime subsônico, onde os efeitos de compressibilidades podem ser observados devido as amplitudes relativamente altas do movimento harmônico de arfagem. A metodologia apresentou concordância em prever a formação de onda de choque no extradorso quando o arofólio está em incidência com amplitude próxima à máxima (ver Figuras 4.13(3) e (4)). Os resultados de distribuições instantâneas com o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas também são comparados com os obtidos por Dubuc et al. (1997) com código no contexto de malhas estruturadas, onde é verificado uma boa concordância apenas com algumas discrepâncias nas proximidades do choque.

Os resultados de coeficientes de força normal, C_N , e de momento, C_m , estão nas Figuras 4.16(a) e (b), respectivamente. Obteve-se relativamente boa concordância com os valores experimentais. A diferença entre os resultados obtidos com o código de CFD e os experimentais pode estar associada aos termos viscosos que são totalmente desprezados nas simulações podendo não ser completamente insignificantes. Ao observar os resultados obtidos por Dubuc et al. (1997) para os coeficientes de força normal, nota-se uma diferença significativa comparado com os resultados experimentais. Este comportamento foi notado no trabalho de Dubuc et al. (1997), e parece incoerente com os resultados de distribuições instantâneas de pressão comparados entre a metodologia no contexto de malha estruturada e o experimento. O fato das distribuições instantâneas de pressão estarem em boa concordância com os experimentais mas incoerentes nos resultados de C_N foi justificado em Dubuc et al. (1997) supondo-se alguns erros nos dados dos casos experimentais AGARD. No entanto, quando se compara os dados de C_N obtidos pelo código computacional no contexto de malhas não estruturadas e experimentais pode-se observar que estão em maior concordância.

As Figuras 4.16(a) e (b) mostram também o estudo da influência do refinamento de malha nas soluções obtidas pelo código de CFD com malhas não estruturadas para C_N e C_m , respectivamente. As malhas utilizadas são as mesmas utilizadas nas análises de estado estacionário e descritas na Tabela 4.3. Observa-se uma aproximação das soluções obtidas nas simulações

com os dados experimentais quando utiliza-se uma malhas mais fina. Os resultados de C_N também estão coerentes com os obtidos pelas distribuições instantâneas de pressão. Portanto, para o caso AGARD TC1, os resultados obtidos pelo código de CFD no contexto de malhas não estruturadas e experimentais mostraram estar em grande concordância.

Comparações entre os resultados simulados e experimentais para as distribuições instantâneas de pressão também são realizadas com o caso TC2. A Figura 4.17 mostra um ciclo completo do movimento em arfagem com as oito posições de incidências instantâneas enumeradas no gráfico. As Figuras 4.18 a 4.21 apresentam as oito diferentes distribuições instantâneas de pressão durante o ciclo para o teste AGARD TC2. Discrepâncias nas proximidades dos choques são observadas entre os outros dois resultados e os obtidos pelo código CFD no contexto de malhas não estruturadas. Na Figuras 4.18(2), 4.19(3) e (4) estão os casos de altas incidências mostrando que os resultados simulados preveram a ocorrência dos choques anteriormente daquelas previstas pelos resultados em (DUBUC et al., 1997) e experimentais.

Figura 4.17: Um ciclo completo do movimento em arfagem para o TC2.

(1) $\alpha = 5,32^\circ$

(2) $\alpha = 7,36^\circ$

Figura 4.18: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC2

Mach=0,6, $\alpha = 3,16^\circ + 4,59^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0811$

(3) $\alpha = 6,80^\circ$ (4) $\alpha = 3,88^\circ$

Figura 4.19: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC2

Mach=0,6, $\alpha = 3,16^\circ + 4,59^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0811$

(5) $\alpha = 0,86^\circ$

(6) $\alpha = -1,30^\circ$

Figura 4.20: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC2

Mach=0,6, $\alpha = 3,16^\circ + 4,59^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0811$

(7) $\alpha = -0,57^\circ$ (8) $\alpha = 2,38^\circ$

Figura 4.21: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC2

Mach=0,6, $\alpha = 3,16^\circ + 4,59^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0811$

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.22: Estudo de refinamento de malha: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC2

O TC2 corresponde a um ciclo com amplitude de oscilação e incidência máxima maiores que o TC1. Os resultados simulados mostraram a capacidade do código em prever as ondas de choques para relativamente altas incidências, mas diferenças mais significativas nas proximidades do choque são encontradas quando comparadas com os outros casos.

Os resultados para os coeficientes de forças normal e de momento estão respectivamente nas Figuras 4.22(a) e (b), onde também estão os resultados obtidos com o estudo de refinamento de malha. Novamente os resultados para o coeficiente de força normal estão em muito boa concordância comparados com os experimentais, e com a malha mais refinada (fina) os resultados estão ainda mais próximos aos experimentais. No entanto, a solução não mostrou muita sensibilidade com a alteração da quantidade de pontos na malha utilizada para o domínio computacional. Para o coeficiente de momento os resultados tiveram uma maior sensibilidade ao refinamento de malha. Estes resultados sugerem que não ocorre um ganho muito significativo nas soluções utilizando a malha fina, podendo-se obter uma boa precisão nas soluções com uma malha relativamente menos refinada.

Figura 4.23: Um ciclo completo do movimento em arfagem para o TC5.

(1) $\alpha = 1,09^\circ$ (2) $\alpha = 2,34^\circ$

Figura 4.24: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC5

Mach=0,755, $\alpha = 0,016^\circ + 2,51^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0814$

(3) $\alpha = 2.01^\circ$ (4) $\alpha = 0.52^\circ$

Figura 4.25: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC5

Mach=0,755, $\alpha = 0,016^\circ + 2,51^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0814$

(5) $\alpha = -1,25^\circ$ (6) $\alpha = -2.41^\circ$

Figura 4.26: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC5

$\text{Mach}=0,755, \alpha = 0,016^\circ + 2,51^\circ \sin(\omega t), k = 0,0814$

(7) $\alpha = -2,00^\circ$ (8) $\alpha = -0,54^\circ$

Figura 4.27: Distribuição instantânea de pressão para NACA0012 - AGARD TC5

Mach=0,755, $\alpha = 0,016^\circ + 2,51^\circ \sin(\omega t)$, $k = 0,0814$

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.28: Estudo de refinamento de malha: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC5

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.29: Efeito do tamanho do passo no tempo: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC1

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.30: Efeito do tamanho do passo no tempo: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC2

(a) Coeficiente de força normal - NACA0012

(b) Coeficiente de momento - NACA0012

Figura 4.31: Efeito do tamanho do passo no tempo: (a) Coeficiente de força normal; (b) Coeficiente de momento - AGARD TC5

Assim, para o TC2 o código de CFD em um contexto de malhas não estruturadas apresentou estar em concordância com os resultados experimentais, mas ao comparar com aqueles obtidos em Dubuc et al. (1997) nota-se novamente discrepâncias nos valores do coeficiente de força normal. Esta diferença também ocorre quando se compara os resultados obtidos em Dubuc et al. (1997) com os experimentais. Esta mesma ocorrência já observada no TC1 pode significar algum problema no cálculo do coeficiente de força normal utilizada por Dubuc et al. (1997).

O último caso AGARD a ser analisado é o TC5, que corresponde ao de regime de escoamento com número de Mach igual a 0,755. Neste regime o escoamento se caracteriza pela presença de ondas de choques mesmo em baixas incidências, que se desenvolvem no extradorso e intradorso do aerofólio. A Figura 4.23 mostra um ciclo completo do movimento em arfagem com as oito incidências analisadas. Comparações com os valores experimentais e com aqueles computacionais obtidos em Dubuc et al. (1997) para as distribuições instantâneas de pressão com as oito diferentes incidências durante o ciclo estão nas Figuras 4.24 a 4.27. Discrepâncias são observadas nestes testes de caso entre os dados simulados e os experimentais. As discrepâncias ocorrem principalmente nas proximidades das ondas de choque e na localização da mesma.

Os coeficientes de força normal e de momento estão nas Figuras 4.28(a) e (b), respectivamente. Para o coeficiente de força normal C_N os resultados apresentaram discrepâncias, o que já era esperado devido as distribuições instantâneas de pressão não preverem exatamente no mesmo ponto, que os dados experimentais, a ocorrência das ondas de choques. Os resultados obtidos para C_m estão relativamente bons, sabendo-se claramente que as soluções simuladas não preveram exatamente a posição de ocorrência das ondas de choque. Outra observação também importante é que para número de Mach de 0,755 os termos viscosos são mais significativos que nos casos anteriores (TC1 e TC2), o que pode explicar a maior discrepância ocorrida entre os resultados obtidos pelo código de CFD no contexto de malhas não estruturadas e experimentais.

Os testes descritos nesta Seção correspondem a um processo de validação do código de CFD não estacionário no contexto de malhas não estruturadas. Neste processo também é investigado

o efeito do tamanho do passo no tempo para analisar a eficiência e precisão do código computacional nas respostas em marcha no tempo. Vale ressaltar aqui que a metodologia utilizada para discretização no tempo das equações de Euler é obtida através de um método explícito. Métodos explícitos possuem um critério de estabilidade de soluções que limita o passo no tempo utilizado para a integração em valores relativamente pequenos comparados aos utilizados pelos métodos implícitos. Assim, procura-se investigar a influência do tamanho do passo no tempo utilizado nos cálculos assumindo o movimento harmônico em arfagem e analisando a consistência dos valores de C_N e C_m na resposta oscilatória.

Os resultados até o presente momento para os teste de casos AGARD na análise não estacionária são obtidos com $\Delta t = 0,001$ (adimensional), e para este valor de passo no tempo o valor máximo de CFL é 0,68. Fixando-se a malha média para os cálculos e analisando somente o terceiro ciclo do movimento harmônico para cada teste de caso AGARD dado na Tabela 4.7, o tamanho de passo no tempo é variado em $\Delta t = 0,0008$, $\Delta t = 0,003$, e $\Delta t = 0,005$, e os respectivos valores máximos de CFL são 0,54, 1,99 e 2,65. Os resultados para os valores de C_N e C_m estão nas Figuras 4.29(a) e (b) para o caso TC1, Figuras 4.30(a) e (b) para o caso TC2, e Figuras 4.31(a) e (b) para o caso TC5. Observa-se que, para os três casos AGARD, os resultados utilizando $\Delta t = 0,005$ são satisfatórios. Uma leve alteração em C_N e C_m pode ser observada ao utilizar $\Delta t = 0,0008$, mas não muito significativo. Assim, para as amplitudes e frequências dos casos TC1, TC2 e TC5 as respostas podem ser obtidas com o tamanho de passo $\Delta t = 0,005$ com uma boa eficiência da metodologia não estacionária.

Para quantificar os valores de passos no tempo que poderão ser assumidos na análise não estacionária em questão, deve-se notar que para a estabilidade da metodologia de Runge-kutta, utilizada na integração no tempo, o critério de estabilidade é de $CFL < 2\sqrt{2}$ ou $CFL < 2,82$ aproximadamente. Nota-se que os valores máximos de CFL obtidos nos casos estudados aqui, $\Delta t = 0,0008$, $\Delta t = 0,001$, $\Delta t = 0,003$ e $\Delta t = 0,005$, estão todos abaixo do valor $CFL < 2\sqrt{2}$. No entanto, o sistema não mostrou estabilidade para valores acima de $\Delta t = 0,005$, por exemplo, para o valor de $\Delta t = 0,006$ onde o valor de CFL correspondente é de 3,88.

RESPOSTA AEROELÁSTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

5.1 Considerações Iniciais

A resposta aeroelástica no domínio do tempo em regime transônico é apresentada neste Capítulo. As análises são obtidas com a história no tempo e o retrato de fase do sistema aeroelástico com a metodologia de marcha no tempo ilustrada na Figura 2.4, Capítulo 2. Para a técnica de integração no tempo das equações aeroelásticas, utilizando o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas, descrito na Seção 2.2.1, é realizada uma validação da metodologia sugerida. Com isso, são realizados estudos do efeito do refinamento da malha computacional utilizada nos cálculos, do tamanho do passo no tempo e uma verificação do tratamento das condições iniciais dos cálculos estacionários do código de CFD. As condições iniciais fornecidas à análise de marcha no tempo devem ser em termos das posições iniciais e os valores de C_L e C_m . Diferentes incidências iniciais, assim como, as diferentes abordagens para o cálculo estacionário em função do passo no tempo local ou global são analisados.

A resposta aeroelástica com a metodologia de potência inversa para análise de bifurcação de Hopf é realizada e comparada com a metodologia de marcha no tempo. A análise de bifurcação de Hopf para obter a fronteira de *flutter* com o código CFD no contexto de malhas não estruturadas é inicialmente avaliada com o modelo estrutural linear. A fronteira de *flutter* é construída

para uma faixa do número de Mach com a variação do parâmetro do sistema aeroelástico dado pela velocidade reduzida $\bar{U}$. Estudo de refinamento de malha é realizado para o cálculo da fronteira de *flutter* nas mesmas condições de escoamento e parâmetros estruturais que o obtido com o método de marcha no tempo.

As não linearidades nos modelos estruturais são consideradas e seguiram as mesmas análises em marcha no tempo e bifurcação de Hopf. As respostas são obtidas para avaliar quais termos não lineares no modelo estrutural influenciam na fronteira de ocorrência de *flutter* em regime transônico. A análise de bifurcação de Hopf do sistema aeroelástico desenvolvido em Badcock, Woodgate e Richards (2004) sofreu algumas alterações para incluir as não linearidades estruturais avaliadas no presente trabalho. Esta alteração corresponde basicamente ao termo extra obtido na matriz $\mathbf{A}_{ss}$ da matriz jacobiana $\mathbf{A}$, apresentada na Seção 3.4.4. Esta alteração corresponde a primeira análise considerando o modelo estrutural não linear na metodologia desenvolvido por Badcock, Woodgate e Richards (2004). As não linearidades consideradas são dadas pelas funções polinomiais e tangente hiperbólica apresentadas na Seção 2.3.1, nas Eqs (2.49) e (2.52), respectivamente. Assim, uma comparação com as respostas em marcha no tempo é mostrada para avaliar a confiabilidade das soluções nas duas metodologias.

As respostas em marcha no tempo são avaliadas com valores de velocidade reduzida após os pontos de bifurcações de Hopf e observados os fenômenos não lineares envolvidos. Assim, são verificadas as influências das diferentes incidências iniciais nas respostas com modelo estrutural não linear nas respostas após a ocorrência do *flutter*.

5.2 Dependência do Ângulo de Incidência Inicial na Resposta Aeroelástica com Modelo Estrutural Linear

Os resultados consistem da simulação do sistema aeroelástico dado pelas Eqs. (2.46) e (2.47) (Seção 2.3). Para investigar o sistema fluido-estrutura, dado pela integração no tempo do sistema aeroelástico, alguns testes são realizados no que concerne a sua sensibilidade a alguns parâmetros. Os testes consistem do estudo do passo no tempo utilizado nos cálculos e à apli-

cabilidade da metodologia para diferentes incidências iniciais. Para estes testes as simulações aeroelásticas são obtidas com a malha não estruturada média em torno de um perfil NACA0012 (conforme Tabela 4.3), com os valores dos parâmetros no modelo estrutural linear dados na Tabela 5.1. Estes valores dos parâmetros estruturais são os mesmos dados em Alonso e Jameson (1994), Kousen e Bendiksen (1994), nestes trabalhos também são realizadas a integração no tempo do sistema aeroelástico em escoamento transônico para o perfil NACA64A010.

Tabela 5.1: Parâmetros do modelo estrutural (ALONSO; JAMESON, 1994)

Parâmetro	Valor
r_α^2	3,48
x_α	1,8
ω_R	1
μ_s	60
x_{ea}	-0,25

Figura 5.1: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 10$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

A integração no tempo das equações aeroelásticas prescrevem o movimento oscilatório através do deslocamento vertical e torsional do aerofólio. Para fornecer os dados iniciais na integração numérica do sistema aeroelástico, são calculados primeiramente as equações aerodinâmicas através da porção estacionária do código de CFD não estacionário, em um contexto de malhas não estruturadas apresentado na Seção 2.2.1. Para o cálculo estacionário, pode ser utilizada a técnica de passo no tempo variável para rápida convergência da solução estacionária. Para que seja obtida uma solução representativa sob o ponto de vista físico, deve-se necessaria-

Figura 5.2: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 20$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.3: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 30$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.4: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 35$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

mente realizar os cálculos aeroelásticos utilizando-se um valor de Δt constante em todo campo, vale observar que os valores no tempo e passos no tempo Δt são adimensionais. Ao fazer a opção de Δt variável para o cálculo estacionário pode ser introduzido transientes iniciais, devido à mudança do passo no tempo. Estes transientes podem afetar a resposta aeroelástica que depende diretamente das condições iniciais introduzidas ao sistema devido às não linearidades aerodinâmicas.

Figura 5.5: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.6: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 20$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

As respostas aeroelásticas são obtidas em termos da história no tempo do ângulo de incidência e pelo deslocamento vertical do aerofólio, assim como, em alguns casos serão mostrados os respectivos retratos de fase para análise da amplitude de oscilações em ciclos limites. Por se tratar de um sistema de dois graus de liberdade em movimentos acoplados, as histórias no

tempo do deslocamento vertical serão apresentadas, mas as análises das respostas do sistema aeroelástico serão discutidas em termos dos movimentos em arfagem.

Para mostrar a influência das condições iniciais na resposta aeroelástica é considerado o aerofólio em incidência inicial $0,5^\circ$ sem deslocamento vertical e calculado as soluções estacionárias com passo no tempo variável para cada regime de escoamento. Em todos os casos, os valores no tempo são adimensionalizados. Inicialmente fixando-se número de Mach em 0,75 a solução do sistema aeroelástico com estrutura linear é obtida com $\Delta t = 0,001$ e variou-se o parâmetro do sistema dado pela velocidade reduzida $\bar{U}$. Assim, as Figuras 5.1 a 5.5 mostram as respostas no tempo do ângulo de incidência e do deslocamento vertical para $\bar{U} = 10, 20, 30, 35$ e 40, respectivamente.

Figura 5.7: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 23$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Pode-se observar em todas as respostas, que o sistema apresentou um transiente no início do movimento. Para as velocidades reduzidas antes de 10 a 30 as respostas convergiram para diferentes pontos de equilíbrios (ver Figuras 5.1 a 5.3). Para $\bar{U} = 35$ o sistema apresentou uma oscilação quase em ciclo limite, sendo este considerado aproximadamente o ponto de ocorrência de *flutter* em $M=0,75$. Acima deste valor o sistema apresentou resposta divergente como mostra a Figura 5.5 para $\bar{U} = 40$.

Aumentou-se o número de Mach para 0,85 e variou-se a velocidade reduzida de 20 até 80 como mostram as Figuras 5.6 a 5.16. Para $M = 0,85$, abaixo de $\bar{U} = 35$, o sistema apre-

Figura 5.8: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 30$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.9: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

senta um movimento oscilatório com baixa amplitude. Os resultados estão mostrados nas Figuras 5.6 a 5.8, onde pode-se notar que primeiro o sistema estabiliza em um ponto de equilíbrio diferente de zero, conforme mostra a tendência do movimento oscilatório nas Figuras 5.6(a) e (b) para $\bar{U} = 20$ e oscilação em ciclo limite para $\bar{U} = 23$ (ver Figuras 5.7(a) e (b)).

Para velocidades reduzidas acima de 23 até aproximadamente 40, obteve-se um comportamento aparentemente divergente como mostram as Figuras 5.8 e 5.9 para $\bar{U} = 30$ e $\bar{U} = 40$. Aqui é observado uma transição na frequência da oscilação, onde o sistema partindo de uma oscilação de baixa frequência parte a oscilar em frequência mais alta. Nas Figuras 5.8(a) e (b) as respostas estão em relativamente baixas amplitudes quando comparadas com aquelas obtidas com velocidades reduzidas acima de $\bar{U} = 30$. Isto sugere que seriam necessárias mais iterações

Figura 5.10: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 50$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.11: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 50$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

nos casos de $\bar{U} = 30$ e $\bar{U} = 40$ para analisar se as respostas não apresentam oscilação em ciclos limite. No entanto, optou-se em analisar até a presente iteração pelo alto custo computacional exigido.

Nas Figuras 5.10 e 5.11, para $\bar{U} = 50$, o sistema responde com um modo oscilatório em alta frequência e amplitudes ligeiramente crescentes. Quando $\bar{U} = 65$ (ver Figuras 5.12 e 5.13) o sistema inicialmente apresenta amplitudes crescentes, mas alcança um modo oscilatório com amplitudes constantes, caracterizando uma oscilação em ciclo limite. Ao aumentar a velocidade reduzida para $\bar{U} = 70$, o sistema responde em oscilações com basicamente duas amplitudes finitas, conforme as Figuras 5.14 e 5.15. As Figuras 5.16(a) e (b) apresentam um comportamento

Figura 5.12: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 65$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.13: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 65$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

fortemente divergente para $\bar{U} = 80$.

As Figuras 5.17 e 5.21 apresentam os resultados das simulações para $M = 0,9$, $\bar{U} = 35$ e $\bar{U} = 45$, onde o sistema aproxima-se de um ponto equilíbrio estável em $\bar{U} = 35$ e oscilações divergindo para $\bar{U} = 45$. Entre esses dois casos, o sistema apresentou um estado oscilatório com amplitudes constantes, considerado o ponto de *flutter* em $\bar{U} = 40$ (ver Figuras 5.18(a) e (b)). Neste caso, continuou-se variando a velocidade reduzida e não houve necessidade de muito tempo de simulação, já que as oscilações do sistema são facilmente identificadas com amplitudes convergentes antes de $\bar{U} = 40$ e divergentes depois do referido valor de $\bar{U} = 45$.

Figura 5.14: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 70$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.15: Resposta aeroelástica para $M=0,85$, $\bar{U} = 70$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Estes casos estudados com os parâmetros estruturais apresentados na Tabela 5.1, demonstraram características típicas de respostas não lineares. Para o valor de número de Mach 0,75 e aproximadamente em $\bar{U} = 35$ é caracterizado o ponto de ocorrência de *flutter*, onde antes desse ponto, o sistema somente apresentou respostas convergentes e após o ponto de *flutter* respostas divergentes. No entanto, conforme variou-se os valores de velocidade reduzida o sistema convergiu para diferentes pontos de equilíbrios, caracterizando um comportamento não linear.

Para Mach 0,85 diferentes modos e amplitudes de oscilações em ciclo limite são observados, onde é possível verificar duas amplitudes de oscilação para um valor de velocidade reduzida, por exemplo $\bar{U} = 70$ (ver Figuras 5.14(a) e (b)). É importante observar que a ocorrência

Figura 5.16: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 80$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.17: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 35$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

dos fenômenos em Mach 0,85 correspondem aos efeitos não lineares diretamente relacionados às fontes de não linearidades aerodinâmicas devido ao regime do escoamento, onde Mach 0,85 costuma ser um regime típico onde ocorre o fenômeno de depressão transônica.

Os resultados até então mostrados, apresentaram a capacidade do método de integração numérica do modelo acoplado entre o método CFD e o estrutural para prever fenômenos não lineares como oscilações em ciclos limite em regime transônico. No entanto, este é um caso particular onde as condições iniciais são obtidas no estado estacionário utilizando-se passo no tempo variável. Dessa forma, apesar do sistema ter sido fixado em $0,5^\circ$ para condição inicial, ficou difícil ter um controle da amplitude inicial, que realmente alimentou a resposta no tempo do sistema aeroelástico devido ao forte transiente. Para se obter um maior controle nas condições

Figura 5.18: Resposta aeroelástica para $M=0,9$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.19: Resposta aeroelástica para $M=0,9$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

iniciais, optou-se por obtê-las através do cálculo estacionário com passos no tempo constante. O passo no tempo utilizado para o cálculo estacionário é o mesmo utilizado para o cálculo aeroelástico, assim sendo, pode-se diminuir o efeito do transiente na resposta aeroelástica no tempo.

Utilizando-se os mesmos parâmetros estruturais dados na Tabela 5.1 e as mesmas condições do escoamento, as análises seguiram com o cálculo das respostas em marcha no tempo considerando o sistema em condição inicial de $0,5^\circ$ de incidência inicial sem deslocamento vertical. O passo no tempo utilizado para os cálculos estacionários e aeroelásticos é de 0,001. As respostas também são obtidas em termos da marcha no tempo dos ângulos de incidências e deslocamentos

Figura 5.20: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 45$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

Figura 5.21: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 45$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt variável.

verticais. Para Mach 0,75 e velocidade reduzida 10 (ver Figuras 5.22(a) e (b)) observa-se um transiente no início da resposta, mas não tão intenso quanto o observado no caso com Δt variável para o cálculo da solução inicial nas Figuras 5.1(a) e (b). Neste caso, já é possível observar uma grande diferença entre as soluções, apesar de ambas apresentarem respostas convergentes, mas para a solução apresentada nas Figuras 5.1(a) e (b) o sistema partiu das oscilações iniciais e rapidamente convergiu para um ponto de equilíbrio diferente de zero. Já nas Figuras 5.22(a) e (b) observa-se o sistema em movimento oscilatório com amplitudes decrescentes em torno de zero.

Conforme aumentou-se a velocidade reduzida para 20, 30, 35 e 40 (ver Figuras 5.23 a 5.26) os movimentos oscilatórios tenderam a aumentar as amplitudes obtendo amplitudes finitas em $\bar{U} = 35$, assim como, observou-se nas Figuras 5.4(a) e (b) o sistema também em oscilação com

Figura 5.22: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 10$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.23: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 20$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

amplitudes finitas quando considerou-se Δt variável para o cálculo estacionário. Para $\bar{U} = 40$ (ver Figuras 5.26(a) e (b)) o sistema está aparentemente divergindo, mas pode-se observar em todas as variações da velocidade reduzida o sistema tendeu a oscilar deslocando-se para cima como pode ser visto claramente ao analisar a resposta de marcha no tempo do deslocamento vertical.

Agora, considerando-se o caso de número de Mach 0,85, procurou-se analisar os fenômenos de oscilação em ciclos limites obtidos nas respostas utilizando cálculos estacionários com Δt variável. Sendo Δt constante no cálculo estacionário para as condições iniciais em $0,5^\circ$ de incidência, as respostas da história no tempo para velocidade reduzida 18, apresentadas nas Figuras 5.27(a) e (b), mostraram o sistema em oscilação em ciclo limite. Para velocidade re-

Figura 5.24: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 30$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.25: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 35$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

duzida de 20 as respostas aeroelásticas estão apresentadas nas Figuras 5.28(a) e (b). Nota-se que as respostas estão com oscilações em amplitudes crescentes caracterizando um movimento divergente. Estes comportamentos não são os mesmos obtidos para as mesmas condições de escoamento quando para o cálculo estacionário utilizou-se Δt variável como mostram as Figuras 5.6(a) e (b) para $\bar{U} = 20$. Continuou-se aumentando a velocidade reduzida e somente observou-se comportamentos divergentes conforme as Figuras 5.29 a 5.31, diferentemente dos fenômenos de oscilação em ciclos limite observados nas Figuras 5.10 a 5.14. Assim, o que havia sido encontrado como ponto de *flutter* em $\bar{U} = 23$ utilizando-se Δt variável, agora com os cálculos estacionários utilizando-se Δt constante o ponto de ocorrência de *flutter* é em $\bar{U} = 18$. Esta análise demonstrou a influência das condições iniciais nas respostas aeroelásticas não li-

Figura 5.26: História no tempo para $M=0,75$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.27: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

neares.

Analisando para Mach 0,9 e $\bar{U} = 40$, onde encontrou-se o ponto de ocorrência de *flutter* para o cálculo estacionário com Δt variável, obteve-se uma resposta convergente quando considerou-se Δt constante (ver Figuras 5.32(a) e (b)). Ao aumentar a velocidade reduzida para 45 (Figuras 5.33(a) e (b)) o sistema ainda apresenta respostas convergentes. Com velocidade reduzida de 50 (Figuras 5.34(a) e (b)), observa-se que as amplitudes estão levemente crescentes mostrando que o ponto de *flutter* para este caso é abaixo do valor de $\bar{U} = 50$, mas acima de $\bar{U} = 45$. Ao comparar com as Figuras 5.18 e 5.21, nota-se respostas diferentes, assim como, amplitudes e frequências das oscilações envolvidas, onde este fato pode estar associado com a forma com que o movimento é excitado inicialmente.

Figura 5.28: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 20$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.29: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Outras análises são realizadas com o objetivo de explorar um pouco mais a influência das condições iniciais na resposta não linear. Para número de Mach 0,85 e $\bar{U} = 18$, dado nas Figuras 5.27, com incidência inicial $0,5^\circ$, e utilizando-se passo no tempo constante para o cálculo estacionário, calculou-se as respostas aeroelásticas para as mesmas condições de escoamento com diferentes incidências iniciais sem deslocamento vertical. Os outros ângulos de incidências iniciais utilizados são $0,1^\circ$, $-0,1^\circ$, $-0,5^\circ$, $1,0^\circ$ e $-1,0^\circ$ e estão, respectivamente, nas Figuras 5.35 a 5.39. Observa-se o mesmo comportamento em todas as histórias no tempo, a diferença nestas respostas corresponde somente às amplitudes envolvidas no movimento oscilatório. Conforme houve aumento na incidência inicial houve aumento na amplitude de oscilação em ciclo limite.

Figura 5.30: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 50$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.31: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 60$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Interessante notar que, para as amplitudes iniciais apenas de sinais opostos houve uma simetria nas respostas em marcha no tempo, como pode ser observado ao comparar as histórias no tempo com incidências iniciais em $0,1^\circ$ e $-0,1^\circ$ nas Figuras 5.35 e 5.36, em $0,5^\circ$ e $-0,5^\circ$ nas Figuras 5.27 e 5.37, e em $1,0^\circ$ e $-1,0^\circ$ nas Figuras 5.38 e 5.39. O fato do comportamento das soluções se manter o mesmo, de acordo com a variação da incidência inicial, indica pouca sensibilidade das soluções à estas variações. Assim, quando a solução do estado estacionário é tratada de forma mais adequada para o problema físico ao utilizar Δt constante, às não linearidades originadas do regime de escoamento transônico parecem não gerar diferentes comportamentos nas soluções às variações de incidências iniciais.

Para analisar a influência utilizando-se diferentes condições iniciais em uma resposta ae-

Figura 5.32: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 40$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.33: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 45$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

roelástica divergente, variou-se a incidência inicial para Mach 0,85 e $\bar{U} = 20$, considerando ainda Δt constante na solução estacionária. Nas Figuras 5.40 e 5.41 são apresentadas apenas as histórias no tempo do ângulo de incidência, podendo-se observar as respostas divergentes em todas as variações de incidências iniciais, como em $0,1^\circ$, $-0,1^\circ$ (ver Figuras 5.40(a) e (b)), e $0,5^\circ$, $-0,5^\circ$ (ver Figuras 5.41(a) e (b)). Ao observar o movimento em marcha no tempo nas respostas aeroelásticas, pode-se verificar também um comportamento simétrico e os mesmos comportamentos divergentes. A mudança significativa ocorreu nas amplitudes das oscilações, onde conforme aumentou-se o ângulo de incidência inicial, aumentou-se a amplitude da resposta na história no tempo, como é observado no caso anterior com $\bar{U} = 18$.

Os resultados obtidos nesta análise correspondem às respostas aeroelásticas para modelo

Figura 5.34: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 50$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.35: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $0,1$ com Δt constante.

estrutural linear e as não linearidades envolvidas estão diretamente relacionadas ao regime de escoamento transônico. Nestas respostas, a grande diferença pode ser observada ao utilizar como solução de estado estacionário tratamentos diferentes para a integração da solução, ou seja, Δt variável ou constante. Ao utilizar Δt variável a solução partiu para a análise em marcha no tempo introduzindo inicialmente um transiente numérico. A forma como o sistema é alimentado inicialmente pode ter grande influência na resposta aeroelástica por se tratar de problemas não lineares. Ao fazer esta transição de Δt variável para constante na resposta em marcha no tempo pode ter gerado os movimentos oscilatórios com diferentes frequências como mostram as Figuras 5.8 e 5.9. Ou ainda, a amplitude inicial que realmente alimentou o movimento oscilatório pode ter sido diferente daquele especificado pela condição inicial de $0,5^\circ$ gerado pelo

Figura 5.36: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $-0,1^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.37: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $-0,5^\circ$ com Δt constante.

forte transiente numérico. No entanto, nos casos estudados para o cálculo estacionário Δt constante, ao variar as incidências iniciais, nenhuma resposta gerou comportamentos como àqueles obtidos nas Figuras 5.8 e 5.9 para Mach 0.85, mostrando que esta influência não é muito significativa no comportamento da resposta aeroelástica.

Do ponto de vista físico, o ideal é utilizar as condições iniciais calculadas com Δt constante com o mesmo valor utilizado para os cálculos não estacionários. Ao fazer isto, é necessário um maior custo computacional nos cálculos estacionários. Contudo, optou-se por utilizar esta análise para as demais Seções deste trabalho, pois ainda serão tratados os problemas aeroelásticos com modelos estruturais não lineares, onde as variações às condições iniciais po-

Figura 5.38: História no tempo para $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $1,0^\circ$ com Δt constante.

Figura 5.39: História no tempo $M=0,85$, $\bar{U} = 18$ e incidência inicial $-1,0^\circ$ com Δt constante.

derão ser mais relevantes.

Figura 5.40: História no tempo do ângulo de incidência para $M=0,85$, $\bar{U} = 20$ com Δt constante.

Figura 5.41: História no tempo do ângulo de incidência para $M=0,85$, $\bar{U} = 20$ com Δt constante.

5.3 Dependência do Passo no Tempo na Resposta Aeroelástica de Marcha no Tempo

O refinamento do passo no tempo utilizado para as simulações é estudado para analisar a precisão da resposta do sistema aeroelástico. Todos os casos de resposta em marcha no tempo apresentados na Seção 4.3 são calculados com o valor adimensional de $\Delta t = 0,001$. Para o estudo de refinamento do passo no tempo é escolhido um caso onde a solução corresponde a uma resposta em oscilação próxima a um ciclo limite e são analisados os traços das histórias no tempo em arfagem. O caso considerado corresponde às condições do escoamento em Mach 0,9 e $\bar{U} = 50$ em $\alpha_0 = 0,1^\circ$ e $w_0 = 0$, com o cálculo estacionário em $\Delta t = 0,001$ constante apresentado na Figura 5.34(a). É importante notar que o tamanho do passo no tempo está limitado também pela metodologia explícita utilizada pela discretização no tempo das equações aerodinâmicas no contexto de malhas não estruturadas. A análise de refinamento de passo no tempo do modelo aerodinâmico é apresentado na Seção 4.3, e é possível obter uma boa precisão da solução descrita pelos movimentos harmônicos com o valor de $\Delta t = 0,005$. Acima deste valor, com a malha utilizada na análise da Seção 4.3, não é possível manter a estabilidade das soluções aerodinâmicas havendo divergência no processo de integração da metodologia.

Os valores de passos no tempo analisados são 0,003, 0,002, 0,0008 e 0,0005, onde os res-

Figura 5.42: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 50$.

Figura 5.43: História no tempo para $M=0,9$, $\bar{U} = 50$.

pectivos valores máximos de CFL são 1,99, 1,33, 0,52 e 0,32. As Figuras 5.42 e 5.43 mostram as respectivas soluções na história no tempo em arfagem com os diferentes passos no tempo utilizados nos cálculos. É possível observar que as respostas aeroelásticas são exatamente as mesmas. O custo computacional gasto nos cálculos aeroelásticos entre a iteração no tempo discreto n e $n + 1$ é de 0,18 segundo (malha média), em uma máquina com processador Intel Xeon de 2,8 GHz e 1 GB de memória RAM. Assim, utilizando $\Delta t = 0,001$ para obter a resposta apresentada na Figura 5.34, são necessárias 40 horas para o cálculo completo até o tempo adimensional de 800. Ao considerar os cálculos com $\Delta t = 0,003$, os custos são reduzidos para aproximadamente 13 horas e com $\Delta t = 0,002$, para 20 horas. Para os valores de $\Delta t = 0,0008$, houve um gasto de 50 horas e com $\Delta t = 0,0005$, de 80 horas.

Pode-se observar um ganho de custo computacional considerável ao utilizar passos no tempo maiores para os cálculos sem apresentar diferenças nas respostas aeroelásticas. Dessa forma, sabendo que as respostas aeroelásticas com altas frequências podem ser encontradas quando se varia as condições do escoamento, os cálculos seguiram utilizando-se $\Delta t = 0,001$. Este valor de $\Delta t = 0,001$ é considerado satisfatório para manter a estabilidade da integração aerodinâmica e para descrever o movimento oscilatório do modelo aeroelástico. No entanto, ainda é um valor relativamente baixo o que torna os cálculos com altos custos computacionais.

5.4 Cálculo da Fronteira de Flutter com Modelo Estrutural Linear

Para o cálculo direto da fronteira de ocorrência do *flutter* é utilizado o Método de Potência Inversa (IPM) descrito na Seção 3.4.2. O ponto de ocorrência do *flutter* está relacionado a um autovalor crítico associado a matriz jacobiana $\mathbf{A} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{w}$. O IPM é utilizado para encontrar o par de autovalores com parte real nula. Desta forma, pretende-se encontrar o valor do parâmetro do sistema de tal forma que um autovalor atravessasse o eixo imaginário, caracterizando o início de soluções de equilíbrios com oscilações em ciclos limite, que corresponde ao ponto de bifurcação de Hopf ou de ocorrência de *flutter* no sistema aeroelástico.

Em Badcock, Woodgate e Richards (2004) a fronteira de *flutter* é obtida através do método de bifurcação de Hopf. Naquele artigo são apresentados os detalhes da metodologia proposta, assim como, da obtenção da matriz jacobiana do sistema aeroelástico $\mathbf{A} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{w}$. Da mesma forma, ao obter a matriz jacobiana outras técnicas são discutidas em Badcock, Woodgate e Richards (2004) para verificação da análise de bifurcação de Hopf, como o cálculo do espectro de potência da matriz jacobiana.

A proposta inicial da utilização do IPM é obter uma boa estimativa dos autovalores e correspondentes autovetores iniciais necessários nos cálculos do método iterativo de Newton para a obtenção do ponto de *flutter* através da metodologia de bifurcação de Hopf, sendo assim, utilizada somente uma única vez. Como visto, também é possível calcular a fronteira de *flut-*

ter completa através do Método de Potência Inversa. A diferença básica está na forma como os resultados são obtidos, pela especificidade das duas metodologias e do custo computacional relativos aos cálculos.

Basicamente, por se tratar do cálculo da raiz de uma função pelo método iterativo de Newton, a metodologia de bifurcação de Hopf possui a praticidade de fornecer a solução após algumas iterações a partir da solução inicial dada, e o custo computacional desses cálculos corresponde praticamente ao custo obtido pela solução do estado estacionário do método de CFD para obter o estado de equilíbrio das equações aerodinâmicas. Já na metodologia de potência inversa deve-se monitorar a solução através da busca por tentativas do autovalor crítico. Este processo pode ser demorado dependendo dos casos analisados e do monitoramento realizado. É fundamental observar que o custo computacional para cada tentativa realizada também corresponde ao cálculo estacionário do código de CFD. Sendo assim, caso haja um monitoramento inadequado na procura pela solução, os cálculos podem se tornar caros quando comparados à metodologia de bifurcação de Hopf.

No presente trabalho optou-se utilizar o IPM e investigar sua aplicabilidade no cálculo completo da fronteira de *flutter*, pois a metodologia de bifurcação de Hopf ainda apresenta algumas limitações. Para a metodologia de bifurcação de Hopf a matriz jacobiana $\mathbf{A}$ é modificada, onde no cálculo analítico do termo $\mathbf{A}_{ff}$ a discretização espacial do modelo aerodinâmico é modificada por um método equivalente a primeira ordem de precisão, e é denominada $\bar{\mathbf{A}}_{ff}$. Esta modificação é realizada após alguns testes com o método de Newton para a solução onde mostraram que a utilização da $\mathbf{A}_{ff}$, com discretização espacial equivalente a segunda ordem de precisão, tornou o sistema linear associado mal condicionado. Já no Método de Potência Inversa é possível utilizar a matriz $\mathbf{A}_{ff}$, e desta forma, para cada número de Mach é obtido o valor da velocidade reduzida que caracteriza o *flutter* e estes valores são usados para construir a fronteira do *flutter*.

Os resultados são obtidos considerando como parâmetros estruturais dois casos dados em Badcock, Woodgate e Richards (2004), e mostrados na Tabela 5.2. Primeiramente são calcu-

lados as fronteiras de *flutter* para o caso de uma estrutura leve, considerando a estrutura linear, onde duas fronteiras de *flutter* são obtidas. A Figura 5.44 mostra as fronteiras de ocorrência de *flutter*, onde um resultado corresponde a fronteira de *flutter* com a matriz $\bar{\mathbf{A}}_{ff}$ e o outro resultado corresponde utilizando-se a matriz $\mathbf{A}_{ff}$. Ao comparar as duas fronteiras pode-se observar uma diferença bastante significativa. Assim, as próximas fronteiras são todas calculadas utilizando-se a matriz $\mathbf{A}_{ff}$ com o IPM para uma melhor ordem de precisão da solução encontrada.

Tabela 5.2: Parâmetros do modelo estrutural (BADCOCK; WOODGATE; RICHARDS, 2004)

Parâmetros	Valor
x_α	0,2
r_α^2	0,2905
ω_R	0,343
μ_s	10 (leve)
μ_s	100 (pesada)
x_{ea}	-0,1

Da mesma forma, outras verificações são realizadas na utilização do IPM para a construção da fronteira do *flutter*. Ao rever os cálculos dos termos da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ é observado que nos cálculos realizados em Badcock, Woodgate e Richards (2004), para o bloco da matriz $\mathbf{A}_{ss}$ (Eq. (3.38)) não são considerados os termos $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$. Aqui, estes termos são considerados e calculados por diferenças finitas como descritos na Seção 3.4.3. Na Figura 5.45 os resultados são apresentados para o caso de estrutura leve ($\mu_s = 10$) e mostram pequenas diferenças ao comparar as soluções com e sem os termos $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$ no equacionamento.

Para a Figura 5.46, com os parâmetros do modelo estrutural dado pelo caso de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$), observou-se que as discrepâncias são insignificantes, no entanto, as soluções seguiram com a adição destes termos correspondendo ao completo equacionamento na matriz $\mathbf{A}_{ss}$ para modelo estrutural linear.

Após as análises com o IPM partiu-se para a comparação com a metodologia de marcha no tempo de uma forma apropriada. Como a metodologia de marcha no tempo requer um alto custo computacional, somente o caso de parâmetros do modelo estrutural de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$) é considerado nestes cálculos. Todos os cálculos de marcha no tempo são

Figura 5.44: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 10$, considerando primeira e segunda ordens na aproximação para o resíduo do escoamento na matriz jacobiana.

Figura 5.45: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 10$, considerando os termos $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$ na matriz $\mathbf{A}_{ss}$.

Figura 5.46: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$, considerando os termos $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$ na matriz $\mathbf{A}_{ss}$.

obtidos com $\Delta t = 0,001$ e constante na solução do estado estacionário do código de CFD para solução inicial em incidência de $0,5^\circ$. O ponto de ocorrência de *flutter* com a metodologia de marcha no tempo é obtido quando ao fixar-se o número de Mach e variar a frequência reduzida for encontrada a resposta oscilatória com amplitudes constantes.

As Figuras 5.47 e 5.48 mostram as respostas em marcha no tempo para Mach 0,6 e a velocidade reduzida variando de $\bar{U} = 3,0, 3,5$ e $4,0$. A única preocupação nesta análise é obter o ponto de ocorrência de *flutter*, ou seja, para Mach 0,6 o valor de $\bar{U} = 3,5$ é considerado o ponto onde o sistema começou a oscilar com amplitudes finitas tendendo a amplitudes constantes, podendo ser observado no retrato de fase da Figura 5.47(b). Neste caso, é em $\bar{U} = 3,5$ o ponto de *flutter* para Mach 0,6. Antes deste ponto são encontradas respostas convergentes, como em $\bar{U} = 3,0$ na Figura 5.48(a), e depois deste ponto respostas divergentes como na Figura 5.48(b) para $\bar{U} = 4,0$.

Da mesma forma, aumentou-se o número de Mach, por exemplo, para Mach 0,7 e variou-se a

Figura 5.47: Resposta aeroelástica para $M=0,6$ e $\bar{U} = 3,5$.

Figura 5.48: História no tempo em arfagem para $M=0,6$.

velocidade até encontrar o ponto de *flutter*, neste caso, em $\bar{U} = 3,37$ (ver Figuras 5.49(a) e (b)). Respostas convergentes e divergentes podem ser observadas na Figura 5.50(a) para $\bar{U} = 3,3$ e na Figura 5.50(b) para $\bar{U} = 3,5$, respectivamente. É interessante observar que, na resposta divergente da Figura 5.50(b) poderiam ser realizadas mais iterações, pois o sistema pode estar entrando em oscilação de ciclo limite com diferente amplitude e frequência que em $\bar{U} = 3,37$, pois as amplitudes estão relativamente pequenas e de forma bastante aleatórias quando comparadas ao caso de Mach 0,6 na resposta divergente (ver Figura 4.48(b)). No entanto, considerou-se o ponto de *flutter* para Mach 0,7 em $\bar{U} = 3,37$, onde é detectada a primeira ocorrência da resposta oscilatória com amplitudes finitas.

Para Mach 0,75, o ponto de ocorrência de *flutter* está em aproximadamente $\bar{U} = 3,0$. As

Figura 5.49: Resposta aeroelástica para $M=0,7$ e $\bar{U} = 3,37$.

Figura 5.50: História no tempo em arfagem para $M=0,7$.

Figuras 5.51(a) e (b) mostram a história no tempo e o retrato de fase, respectivamente, em $\bar{U} = 2,9$. Este ponto indicou que o sistema está quase em ciclo limite, onde as histórias no tempo para $\bar{U} = 2,8$ e $\bar{U} = 3,1$ nas Figuras 5.52(a) e (b), respectivamente, mostram o sistema em resposta convergente e divergente. Neste caso, não é realizada uma iteração para comprovar onde exatamente o sistema responde com oscilação em amplitude finita. Com os resultados obtidos pode-se perceber claramente que o ponto de *flutter* ocorreu em aproximadamente $\bar{U} = 3,0$. Obviamente, nestas análises pode-se obter erros na coleta do ponto exato de ocorrência de *flutter*, onde muitas vezes são obtidos apenas com valores aproximados.

Para Mach 0,82 e $\bar{U} = 3,68$ obteve-se a oscilação em ciclo limite, como mostram as Figuras 5.53(a) e (b), sendo este o ponto de *flutter*. Consequentemente, as histórias no tempo para

Mach 0,82, $\bar{U} = 3,65$ e $\bar{U} = 3,7$ mostram o sistema em oscilações com amplitudes levementes decrescentes e crescentes (ver Figuras 5.54(a) e (b)), respectivamente. Este procedimento é repetido para vários regimes de escoamento variando-se entre Mach 0,5 até Mach 0,94, e assim, é obtido o gráfico de fronteira de ocorrência de *flutter* para os parâmetros considerando uma estrutura pesada ($\mu = 100$).

Figura 5.51: Resposta aeroelástica para $M=0,75$ e $\bar{U} = 2,9$.

Figura 5.52: História no tempo em arfagem para $M=0,75$.

A Figura 5.55 mostra as fronteiras de *flutter* para $\mu_s = 100$ com as duas metodologias, IPM e marcha no tempo. Ao comparar os gráficos nota-se que a metodologia de marcha no tempo preveu o *flutter* um pouco antes do IPM. É fundamental observar que, mesmo que se tenha tentado prever o ponto de ocorrência de *flutter* de uma forma mais precisa através da metodologia de marcha no tempo, os resultados podem estar afetados por aproximações na

Figura 5.53: Resposta aeroelástica para $M=0,82$ e $\bar{U} = 3,68$.

Figura 5.54: História no tempo em arfagem para $M=0,82$.

escolha da velocidade reduzida, como no caso de Mach 0,75 nas Figuras 5.51 e 5.52. As discrepâncias observadas nos gráficos das fronteiras do *flutter* também estão associadas com as diferentes metodologias utilizadas para discretização do modelo aerodinâmico. Como é mostrado na Seção 4.3, houve discrepâncias também na previsão de ocorrência das ondas de choque e, consequentemente, dos coeficientes aerodinâmicos entre os dois códigos de CFD.

Além disso, faz-se necessário um estudo de refinamento de malha nas metodologias de potência inversa para o cálculo direto do ponto de *flutter* e de marcha no tempo. Para este estudo é escolhido o número de Mach 0,7. Neste regime de escoamento, é observado o que ocorre com o ponto de *flutter* ao utilizar diferentes malhas. Primeiramente, a metodologia de marcha no tempo é considerada. As malhas utilizadas correspondem as não estruturadas

Figura 5.55: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$ com o IPM e a metodologia de marcha no tempo.

utilizadas na Seção 4.2 e dadas na Tabela 4.3 denominadas grossa, média e fina.

Nas Figuras 5.56 e 5.57, são obtidas as histórias no tempo para as condições do escoamento em Mach 0,7 e $\bar{U} = 3,3, 3,5$ e 3,6 com a malha grossa. Ao analisar as Figuras 5.56(a) e (b), nota-se que o sistema está oscilando com amplitudes levemente decrescentes, indicando que o ponto de *flutter* está em aproximadamente $\bar{U} = 3,55$, já que, para $\bar{U} = 3,6$ na Figura 5.57(b) pode-se observar a resposta com oscilações em amplitudes levemente crescentes. A Figura 5.57(a) mostra a resposta convergente para $\bar{U} = 3,3$ com a mesma malha grossa.

Ao realizar os cálculos com a malha média o ponto de *flutter* é obtido em $\bar{U} = 3,37$, como mostra as Figuras 5.58(a) e (b). As Figuras 5.59(a) e (b) mostram as respostas convergentes e divergentes em $\bar{U} = 3,2$ e $\bar{U} = 3,5$, respectivamente. Comparada com a resposta utilizando a malha grossa o ponto de *flutter* decaiu 3,7143% aproximadamente. A solução para Mach 0,7 com a malha fina mostrou que o ponto de *flutter* é obtido em $\bar{U} = 3,3$, onde pode ser observado nas Figuras 5.60(a) e (b). Nas Figuras 5.61(a) e (b) claramente pode ser observada a resposta convergente em $\bar{U} = 3,2$ e divergente em $\bar{U} = 3,4$, respectivamente. Em comparação a malha

Figura 5.56: Resposta aeroelástica com a malha grossa para $M=0,7$ e $\bar{U} = 3,5$.

Figura 5.57: História no tempo em arfagem com malha grossa para $M=0,7$.

média o ponto de *flutter* decaiu 2,08%, e esta diferença é menor que a encontrada entre a malha grossa e média.

As respostas com a malha fina mostraram a oscilação em ciclo limite com amplitudes mais definidas comparadas às soluções obtidas com as outras malhas. Os valores de $\bar{U}$ diminuíram ao obter os pontos de *flutter* utilizando-se malhas mais refinadas, mas pode-se observar que houve uma menor variação da solução entre as obtidas com as malhas média e fina. Claramente, obteve-se uma melhora na precisão da solução ao utilizar uma malha mais fina. Em contrapartida, o custo computacional dos cálculos utilizando-se as três malhas apontaram as desvantagens ao utilizar uma malha mais fina. Para a malha grossa são gastos 32 horas para se obter uma resposta de 800 passos no tempo adimensional. Estes cálculos são obtidos em uma

Figura 5.58: Resposta aeroelástica com a malha média para $M=0,7$ e $\bar{U} = 3,37$.

Figura 5.59: História no tempo em arfagem com malha média para $M=0,7$.

máquina com processador Intel Xeon de 2,8 GHz e 1 GB de memória RAM e o custo corresponde ao tempo real gasto para realizar todas as iterações. Já para a malha média, o custo é de 40 horas de processamento. E para a malha fina o custo é de 47 horas. Quando se trata de obter a fronteira completa de ocorrência do *flutter* os custos computacionais se tornam extremamente altos, e utilizar uma malha mais grossa onde a solução obtida possa ser considerada relativamente boa se torna bastante vantajoso. Portanto, as próximas soluções com a metodologia de marcha no tempo são calculadas utilizando-se a malha média.

A mesma análise é obtida com o método de potência inversa, e consequentemente, comparada com a metodologia de marcha no tempo. Aqui as malhas estruturadas também denominadas grossa, média e fina apresentadas na Seção 4.2 e dadas na Tabela 4.5 são consideradas.

Figura 5.60: Resposta aeroelástica com a malha fina para $M=0,7$ e $\bar{U} = 3,3$.

Figura 5.61: História no tempo em arfagem com malha fina para $M=0,7$.

Então, para Mach 0,75 o ponto de *flutter* com a malha grossa é obtido em $\bar{U} = 3,6925$, com a malha média é em $\bar{U} = 3,5742$ e com a malha fina em $\bar{U} = 3,5521$.

Em termos de custos computacionais do IPM, os cálculos com as malhas de maior refinamento mostraram grandes desvantagens. Como para a metodologia de potência inversa a maior porcentagem do custo computacional corresponde ao cálculo estacionário para cada iteração, ao utilizar as malhas mais refinadas estes custos aumentam consideravelmente. Como apresentado na Seção 4.2, os custos relativos aos cálculos estacionários para Mach 0,7 em ângulo de incidência zero grau utilizando-se os três tipos de refinamento de malhas aumentaram consideravelmente. A metodologia de potência inversa também corresponde a um processo iterativo que depende do chute inicial para rápida convergência da solução e consequentemente menos

Figura 5.62: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$ com o IPM e a metodologia de marcha no tempo considerando as diferentes malhas computacionais para os cálculos.

iterações dos cálculos.

A Figura 5.62 mostra a comparação entre as duas metodologias para o cálculo do ponto de *flutter* em Mach 0,7 considerando as diferentes malhas utilizadas nos cálculos. Para as duas metodologias os pontos de ocorrência do *flutter* reduzem quando se utiliza uma malha mais refinada. Para a metodologia de marcha no tempo, que utiliza malhas não estruturadas, pode-se observar uma maior variação entre os valores com as diferentes malhas. Mas para as duas malhas mais refinadas, média e fina, esta variação é menor do que entre as valores obtidos com as malhas grossa e média. Por motivos de custos computacionais e por considerar os resultados com a malha média satisfatórios, os resultados com a metodologia de marcha no tempo seguiram utilizando-se somente a malha média.

Com a metodologia de potência inversa, que utiliza malhas estruturadas, é possível observar uma pequena variação entre os valores com as malhas média e fina. E ainda, estes valores também sofreram pouca variação ao utilizar a malha grossa. Dessa forma, também por motivos de altos custos computacionais e por considerar os resultados com a malha grossa uma boa

(a) Completo espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$.

(b) Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U}$.

Figura 5.63: Espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ em $M=0,75$ para a variação dos valores de $\bar{U} = 0,5$ até $\bar{U} = 4,3$ no sentido das setas.

(a) Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U} = 0,5$ até $\bar{U} = 4,3$.

(b) Autovalor que atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 4,1$.

Figura 5.64: Caminho do autovalor que atravessa o eixo imaginário para a variação dos valores de $\bar{U}$ em $M=0,75$.

aproximação para solução, as soluções continuaram sendo obtidas com a malha grossa nas Seções seguintes.

Um outro paralelo nesta análise pode ser feito em termos de custos computacionais utilizando-se as duas metodologias para o cálculo completo da fronteira de *flutter* da Figura 5.55. Os custos computacionais são calculados utilizando uma máquina com processador Intel Xeon de 2,8 GHz e 1 GB de memória RAM. Sabendo-se que as duas metodologias correspondem a ferramentas que não calculam o ponto de ocorrência de *flutter* diretamente. Ou seja, são necessárias várias tentativas para cada Mach na procura do respectivo ponto de *flutter*, onde o número de tentativas variam de acordo com o monitoramento das soluções efetuado pelo usuário. Assim, supondo que são gastos somente três cálculos da metodologia de marcha no tempo com 800000 iterações para se encontrar o ponto de *flutter* para cada número de Mach, e variando o número de Mach, conforme especificado na Figura 5.55, são gastos aproximadamente 60 dias para se obter esta fronteira completa do *flutter*.

Com a metodologia de potência inversa, ao fazer também uma estimativa de que somente três iterações seriam necessárias para a obtenção do ponto de *flutter* em cada número de Mach, para a fronteira completa de ocorrência do *flutter*, mostrada na Figura 5.55, são gastos aproximadamente 12 horas de processamento. Esta estimativa já demonstra a grande desvantagem, relacionada aos custos computacionais, da metodologia de marcha no tempo comparada ao IPM, para o cálculo da fronteira de *flutter*.

Para verificação da metodologia de potência inversa é calculado o espectro completo dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$. Para este gráfico é necessário utilizar uma malha ainda muito grossa com 96×24 . A Figura 5.63(a) mostra o espectro completo dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ em Mach 0,75 para o valor de $\bar{U} = 4,1$, calculado para $\mu_s = 100$. Nota-se que a matriz jacobiana possui vários autovalores correspondentes às matrizes jacobianas $\mathbf{A}_{ff}$, $\mathbf{A}_{fs}$, $\mathbf{A}_{sf}$ e $\mathbf{A}_{ss}$, que compõem a matriz jacobiana do sistema completo $\mathbf{A}$. Mas somente dois autovalores são de interesse para análise de estabilidade do sistema aeroelástico, os correspondentes às frequências naturais do sistema aeroelástico ω_w e ω_α . Desta forma, é possível verificar que no

ponto de ocorrência do *flutter*, o autovalor crítico atravessa o eixo imaginário, correspondendo ao ponto de bifurcação de Hopf. No caso do problema aeroelástico estudado com dois graus de liberdade, considerou-se o ponto de bifurcação de Hopf o primeiro par de autovalores que atravessa o eixo imaginário, podendo estar relacionado, tanto ao movimento vertical do sistema, como ao movimento em arfagem.

Assim, é possível obter num mesmo gráfico o caminho dos autovetores nas proximidades do ponto zero, através da variação da velocidade reduzida entre os valores 0,5 e 4,3. A Figura 5.63(b) mostra os caminhos dos autovalores nas proximidades do eixo imaginário para valores de $\bar{U} = 0,5$ até $\bar{U} = 4,3$, seguindo a direção das setas indicadas no gráfico. Através Figura 5.63(b) é possível verificar que um par de autovalores atravessaram o eixo imaginário conforme aumentou-se a velocidade reduzida. Uma aproximação da visualização do caminho do respectivo par de autovalores pode ser observado na Figura 5.64(a), nas proximidades do ponto zero. Considerando que a malha utilizada para estes cálculos é uma malha bem mais grossa que aquelas descritas na Tabela 4.5 da Seção 4.2. O ponto exato onde o par de autovalores correspondem a valores imaginários puros, ou seja, aqueles observados no eixo imaginário, é obtido para valor de $\bar{U} = 4,1$. Logo após este valor em $\bar{U} = 4,15$ pode-se observar que o par de autovalores atravessou o eixo e, conseqüentemente, pouco abaixo deste valor em $\bar{U} = 4,05$ pode ser observado o par de autovalores antes do eixo imaginário. Esta análise está indicada na Figura 5.64(b) e o valor de velocidade reduzida 4,1 está um pouco acima daquele obtido com a malha grossa de 3,6925. No entanto, esta análise providenciou a confirmação da metodologia de potência inversa no cálculo do ponto de bifurcação de Hopf ou *flutter* aeroelástico.

5.5 Cálculo da Fronteira de Flutter com Modelo Estrutural Não Linear

Não linearidades polinomiais (ver Eq. 2.49) no modelo estrutural são consideradas para o estudo da influência na fronteira de *flutter*. Para estes cálculos são utilizados os valores de parâmetros estruturais com $\mu_s = 100$ e dados na Tabela 5.2. O primeiro tipo de não linearidade

polinomial está ilustrado na Figura 5.65, e denominada NL1, corresponde a expressão:

$$f(\alpha) = 0,18\alpha + 18000\alpha^3. \quad (5.1)$$

A fronteira de *flutter* obtida com o IPM considerando a não linearidade NL1 no modelo aeroelástico, está na Figura 5.66. Pode-se observar que a fronteira de *flutter* decresceu drasticamente ao comparar a resposta com o modelo linear ($f(\alpha) = \alpha$). Este comportamento sugeriu o estudo de quais termos no equacionamento não linear realmente influenciam na fronteira de *flutter*. Para isso, inicialmente considera-se somente o termo linear do polinômio da Eq (5.1) ($f(\alpha) = 0,18\alpha$) no equacionamento aeroelástico dado pela Eq. (2.50) e é utilizado o IPM para obter novamente a fronteira do *flutter*. Os resultados são exatamente iguais àqueles obtidos com o polinômio completo e mostrados na Figura 5.66.

Figura 5.65: Não linearidade polinomial torsional NL1: $f(\alpha) = 0,18\alpha + 18000\alpha^3$.

A mesma análise considerando o polinômio completo NL1 e somente a expressão $f(\alpha) = 0,18\alpha$ no equacionamento aeroelástico é realizada, utilizando-se o método de marcha no tempo. Para esta análise é utilizado o número de Mach 0,75, sendo que neste regime o ponto de ocorrência de *flutter* é em $\bar{U} = 1,1507$ em modelo não linear considerando NL1. Dessa forma,

Figura 5.66: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$, considerando a não linearidade NL1 no modelo estrutural.

utilizando-se o modelo estrutural não linear NL1 completo as Figuras 5.67(a) e (b) mostram a histórias no tempo em $\bar{U} = 1,2$ e $\bar{U} = 1,4$, respectivamente. Estas análises são obtidas com incidência inicial de $0,5^\circ$. Na Figura 5.67(a) em $\bar{U} = 1,2$ pode-se notar a resposta convergente do sistema aeroelástico, aumentou-se a velocidade reduzida para 1,4 e pode-se observar na Figura 5.67(b) que o sistema está oscilando em amplitudes finitas caracterizando o ponto de *flutter* em aproximadamente 1,4. Continuou-se aumentando a velocidade reduzida para 1,5 e 2,0 e estão nas Figuras 5.68(a) e (b), respectivamente. Estas respostas na história no tempo mostraram o sistema ainda oscilando com amplitudes finitas, caracterizando a influência dos termos estruturais não lineares após o ponto de *flutter*.

Agora considerando o modelo estrutural linear, onde o modelo estrutural é obtido com a parte linear do polinômio NL1 ($f(\alpha) = 0,18\alpha$), antes de $\bar{U} = 1,2$ o sistema obteve respostas convergentes e para $\bar{U} = 1,2$ o sistema oscilou com amplitudes finitas, caracterizando o ponto de *flutter* em aproximadamente $\bar{U} = 1,2$, como mostra a Figura 5.69(a). Logo após este valor de velocidade reduzida o sistema já responde com amplitudes divergentes como mostra na Fi-

gura 5.69(b) em $\bar{U} = 1,4$. Assim, o ponto de *flutter* obtido com o polinômio completo NL1 é de aproximadamente $\bar{U} = 1,4$ e com modelo estrutural utilizando $f(\alpha) = 0,18\alpha$ de $\bar{U} = 1,2$. Este fato, realmente confirma que os termos não lineares, neste caso, não demonstraram ter grande influência na fronteira de *flutter*, mas pode-se observar a grande influência dos termos não lineares logo após a ocorrência do *flutter* como mostram as Figuras 5.68(a) e (b).

Figura 5.67: História no tempo em argagem com não linearidade NL1 para $M=0,75$.

Figura 5.68: História no tempo em arfagem com não linearidade NL1 para $M=0,75$.

É fundamental observar que, o método de potência inversa é utilizado para encontrar o autovalor que atravessa o eixo imaginário do estado de equilíbrio do sistema aeroelástico. Ou seja, para $\mu_s = 100$ observou-se que os pontos de equilíbrio do sistema aeroelástico são no ângulo de zero grau. Assim, ao modificar o equacionamento da matrix jacobiana $\mathbf{A}$ do modelo estrutural para o modelo não linear, nota-se que a única alteração ao se comparar com o modelo

Figura 5.69: História no tempo com parte linear de NL1 ($f(\alpha) = 0,18\alpha$) para $M=0,75$.

linear é o termo extra dado por $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}$ na matrix jacobiana $\mathbf{A}_{ss}$ da Eq. (3.42). Com isso, ao utilizar a não linearidade estrutural NL1, onde o ponto de inflexão se encontra no ângulo zero, e ao especificar o ponto de equilíbrio em ângulo zero na metodologia, obtêm-se:

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0,18. \quad (5.2)$$

Isto indica claramente que, neste caso estudado, o único fator que influencia na ocorrência de *flutter* pela análise de bifurcação de Hopf é a inclinação da reta tangente à curva polinomial no ponto zero.

Para se obter um estudo mais detalhado sobre a observação acima, são consideradas outros tipos de não linearidades polinomiais. As não linearidades estão ilustradas na Figura 5.70, que correspondem aos polinômios de graus 7, 11 e 13 denominados P7, P11 e P13, respectivamente. A primeira não linearidade estrutural de polinômio de grau 7 (P7) na Figura 5.70 é dada por:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & 3,6728 \times 10^{-1} \alpha + 3,4407 \times 10^6 \alpha^3 + 1,2850 \times 10^{-5} \alpha^4 - \dots \\ & -8,1911 \times 10^{12} \alpha^5 - 17,695 \alpha^6 + 6,4405 \times 10^{18} \alpha^7. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A segunda não linearidades estrutural de polinômio de grau 11 (P11) na Figura 5.70 é dada por:

$$f(\alpha) = 1,3076 \times 10^{-1} \alpha + 1,0067 \times 10^7 \alpha^3 + 3,3485 \times 10^{-4} \alpha^4 - \dots \quad (5.4)$$

(a) Vista completa.

(b) Vista parcial.

Figura 5.70: Não linearidades estruturais: polinômio de grau 7, polinômio de grau 11 e polinômio de grau 13.

$$\begin{aligned}
& -6,0815 \times 10^{13} \alpha^5 - 1,6774 \times 10^3 \alpha^6 + 1,7859 \times 10^{20} \alpha^7 + \dots \\
& + 3,3998 \times 10^9 \alpha^8 - 2,4809 \times 10^{26} \alpha^9 - 2,4809 \times 10^{15} \alpha^{10} + 1,3070 \times 10^{32} \alpha^{11}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a terceira não linearidade polinomial de grau 13 (P13) na Figura 5.70 é dada por:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) = & 3,5799 \times 10^{-2} \alpha + 1,4512 \times 10^7 \alpha^3 - 1,7529 \times 10^{-2} \alpha^4 - \dots \quad (5.5) \\
& - 1,1979 \times 10^{14} \alpha^5 + 1,3849 \times 10^5 \alpha^6 + 5,1166 \times 10^{20} \alpha^7 - \dots \\
& - 4,8616 \times 10^{11} \alpha^8 - 1,1577 \times 10^{27} \alpha^9 + 7,7577 \times 10^{17} \alpha^{10} + 1,3179 \times 10^{33} \alpha^{11} - \dots \\
& + 1,3179 \times 10^{33} \alpha^{11} - 5,9384 \times 10^{38} \alpha^{13}.
\end{aligned}$$

Estes polinômios oferecem uma forma de estudar a influência da variação do gradiente da curva polinomial no ponto zero na obtenção do ponto de *flutter* com as metodologias e potência inversa e de marcha no tempo. Assim como, é possível obter uma comparação da influência dos termos não lineares nas respostas da história no tempo logo após a ocorrência do *flutter*. A definição das curvas são estabelecidas, sabendo-se que para o modelo estrutural de parâmetros definidos pelo caso de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$) envolvem baixas incidências em todos os casos como mostram as Figuras 5.47 a 5.54.

Na Figura 5.71 está a fronteira de *flutter* para o modelo estrutural com as não linearidades P7 e P11 comparada com o modelo linear ($f(\alpha) = \alpha$). Ao calcular a fronteira de *flutter* considerando somente a parte linear dos polinômios P7 e P11, ou seja, $f(\alpha) = 3,6728 \times 10^{-1} \alpha$ e $f(\alpha) = 1,3076 \times 10^{-1} \alpha$, respectivamente, obteve-se exatamente os mesmos valores dados na Figura 5.71. Através destes resultados são verificados que conforme o gradiente da curva não linear no ponto zero diminui a fronteira de *flutter* também diminuiu.

Para comparar os resultados obtidos com a metodologia de marcha no tempo, é realizada a história no tempo da resposta aeroelástica para o sistema aeroelástico com a não linearidade P11 nas condições do escoamento em Mach 0,75. As Figuras 5.72(a) e (b) mostram a história no tempo e o retrato de fase em $\bar{U} = 1,0$, onde o sistema está em resposta convergente. Nas Figuras 5.73(a) e (b) mostram as histórias no tempo e retratos de fase para $\bar{U} = 1,2$. Neste caso,

Figura 5.71: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$, considerando as não linearidades P7 e P11 no modelo estrutural.

é observado que o sistema após um transiente responde com oscilações em amplitudes variadas até obter uma oscilação em amplitudes levemente decrescente. As Figuras 5.74(a) e (b) são vistas parciais para melhor observação da história no tempo e retrato de fase em Mach 0,75 e $\bar{U} = 1,2$ após os transientes iniciais. Assim, o ponto de *flutter* com a metodologia de marcha no tempo é obtido um pouco após $\bar{U} = 1,2$ e com o IPM é obtido em $\bar{U} = 1,1585$.

Ao aumentar a velocidade reduzida para 1,5 pode-se verificar através da Figura 5.75(a) e (b) que a resposta aeroelástica em arfagem continuou oscilatória, mas agora com amplitudes finitas constantes. Após o transiente inicial como mostram as Figuras 5.76(a) e (b) pode-se perceber ao observar o retrato de fase na Figura 5.76(b) a característica distorcida diferenciada daquela obtida para $\bar{U} = 1,2$. Para $\bar{U} = 2,0$ o sistema ainda permaneceu em LCO podendo ser observado nas Figuras 5.77(a) e (b) e a vista parcial para melhor visualização após os transientes iniciais estão nas Figuras 5.78(a) e (b). Estas respostas mostraram a forte influência dos termos não lineares na resposta aeroelástica em marcha no tempo após a fronteira de *flutter*.

O espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ com a não linearidade dada pelo po-

Figura 5.72: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,0$.

Figura 5.73: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,2$.

linômio P11 é obtido para verificar o autovalor crítico que atravessa o eixo imaginário no ponto de *flutter*. Para este gráfico novamente é considerada a malha muito grossa dada por 96×24 pontos e com número de Mach 0,75. A Figura 5.79 mostra a vista próxima ao eixo imaginário do espectro de potência para observar o autovalor atravessando o eixo imaginário em $\bar{U} = 1,146$. Antes desse valor observa-se o autovalor com parte real negativa em $\bar{U} = 1,0$ e parte real positiva em $\bar{U} = 1,2$. Com a metodologia de potência inversa o ponto de ocorrência de *flutter* é obtido em $\bar{U} = 1,1585$ com a malha grossa. Apesar de ser utilizada uma malha muito grossa para plotar o espectro dos autovalores, os valores encontrados do ponto de *flutter* são bastante próximos. Através do espectro de potência pode ser observado a caracterização do ponto de bifurcação de Hopf com o modelo estrutural não linear definido pelo polinômio P11.

Figura 5.74: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,2$.

Figura 5.75: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,5$.

O cálculo da fronteira de *flutter* com o modelo estrutural não linear definido pelo polinômio P13 está na Figura 5.80 e é comparado com a estrutura linear ($f(\alpha) = \alpha$). Para os valores de Mach 0,5 até 0,8 a fronteira de *flutter* com o modelo não linear P13 apresentou um comportamento considerado estranho. Para velocidade reduzida de 0,82 até 0,96 a resposta aeroelástica parece estar em concordância com o que havia sido observado com as outras não linearidades P7 e P11. A não linearidade definida pelo polinômio P13 o gradiente da curva no ponto zero corresponde a $\frac{\partial f(0)}{\partial \alpha} = 3,5799 \times 10^{-2}$ este valor é menor àqueles das curvas P7 e P11. Então, como se esperava os valores da fronteira de *flutter* são menores que os obtidos com as outras não linearidades P7 e P11. Para entender o que realmente está ocorrendo neste caso, os resultados com a metodologia de marcha no tempo e espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ são

Figura 5.76: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,5$.

Figura 5.77: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 2,0$.
analisados.

Primeiramente, é obtido o espectro dos autovalores para verificar o que ocorre com o autovalor crítico que atravessa o eixo imaginário no ponto de *flutter*. Para esta análise também é escolhido as condições de escoamento em Mach 0,75, onde o valor da velocidade reduzida no ponto de *flutter* é obtido pelo IPM em 3,41. A Figura 5.81 mostra a vista parcial do espectro dos autovalores da matriz jacobiana para $\bar{U} = 3,41$. Através deste gráfico percebe-se que um par de autovalores complexo atravessou o eixo imaginário, ou seja, com parte real positiva. Ao mesmo tempo, é encontrado um autovetor real positivo. O autovetor real indica que no ponto de equilíbrio zero o sistema para o valor de $\bar{U} = 3,41$ é instável. Por esta análise, decidiu-se diminuir o valor da velocidade reduzida para encontrar o ponto onde estes autovalores atravessam

Figura 5.78: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P11 para $M=0,75$, $\bar{U} = 2,0$.

o eixo imaginário. A Figura 5.82(a) mostra o caminho destes autovalores quando variou-se de $\bar{U} = 1,2$ até $\bar{U} = 2,0$, os autovalores seguem a direção das setas conforme aumentou-se o valor da velocidade reduzida. Próximo ao valor de $\bar{U} = 2,0$ o par conjugado de autovalores atravessa o eixo imaginário. No entanto, o autovalor real atravessa o eixo imaginário antes desse valor, em $\bar{U} = 1,2765$, como mostra a Figura 5.82(b).

Para o mesmo valor de Mach 0,75, com o sistema não linear dado pela não linearidade P11, não é encontrado um autovalor real, como mostra na Figura 5.79. Em Mach 0,75 e o modelo estrutural não linear definido pelo polinômio P13, corresponde exatamente a região da fronteira de *flutter* onde as respostas apresentam comportamentos estranhos (ver Figura 5.80). O espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$, também é obtido para o modelo estrutural com a não linearidade definida pelo polinômio P13 em Mach 0,85. Neste regime de escoamento, o ponto de *flutter* calculado com o IPM está dentro da faixa dos resultados considerados coerentes e esperados, pois o valor da velocidade reduzida é menor que os obtidos com as curvas não lineares definidas pelos polinômios P7 e P11. A Figura 5.83(a) mostra o caminho do par de autovalores complexos, para Mach 0,85 quando a velocidade reduzida varia de 0,5 até 0,7, no sentido das setas. Ainda, observa-se que não existe autovalores no eixo real como para Mach 0,75. Dessa forma, é possível verificar que o autovalor complexo atravessa o eixo imaginário no ponto $\bar{U} = 0,6354$, com a malha muito grossa, como mostra a Figura 5.83(b). Este valor está bem próximo ao obtido pelo IPM com a malha grossa de $\bar{U} = 0,668$ e mostrou que para

Figura 5.79: Autovalor que atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 1,46$, com parte real negativa em $\bar{U} = 1,0$ e parte real positiva em $\bar{U} = 1,2$ com modelo aeroelástico não linear definido pelo polinômio P11 em $M=0,75$.

Mach 0,85 o par complexo de autovalores atravessou o eixo imaginário caracterizando o ponto de bifurcação de Hopf ou *flutter* aeroelástico.

Assim, para comparar as soluções e verificar o que está ocorrendo com o cálculo da fronteira de *flutter* obtida com a metodologia de IPM em Mach 0,75, considerando o modelo estrutural não linear definido pelo polinômio P13, as histórias no tempo utilizando a metodologia de marcha no tempo são obtidas. São calculadas as respostas aeroelásticas do sistema para o valor da velocidade reduzida $\bar{U} = 1,1$, e a história no tempo e o retrato de fase com modelo estrutural não linear, dado pelo polinômio P13, podem ser observados nas Figuras 5.84(a) e (b). As respostas mostraram o sistema inicialmente oscilando e convergindo para um ponto diferente de zero. Ao aumentar a velocidade reduzida para $\bar{U} = 1,2$ o sistema agora após os transientes iniciais entra em LCO como pode ser observado nas Figuras 5.85(a) e (b) e uma vista parcial após os transientes iniciais nas Figuras 5.86(a) e (b). Desta forma, a velocidade reduzida de *flutter* para Mach 0,75, com a metodologia de marcha no tempo em modelo não linear, definido

Figura 5.80: Comparação da fronteira de *flutter* para $\mu_s = 100$, considerando a não linearidade P13 no modelo estrutural.

pelo polinômio P13, é em aproximadamente 1,15.

Ao aumentar a velocidade reduzida para 1,5 observa-se que o sistema manteve um movimento oscilatório com amplitudes finitas, como mostram as Figuras 5.87(a) e (b). A vista parcial após os transientes iniciais são mostradas nas Figuras 5.88(a) e (b). Ao observar o retrato de fase das respostas aeroelásticas em $\bar{U} = 1,2$ e $\bar{U} = 1,5$ nas Figuras 5.86(b) e 5.88(b), respectivamente, as respostas oscilatórias possuem características diferentes. Estas diferenças estão relacionadas à frequência das oscilações e ao tipo de movimentos oscilatórios envolvidos. Nas respostas aeroelásticas das Figuras 5.86(b) e 5.88(b), os movimentos oscilatórios estão numa mesma faixa de uma amplitude, e para $\bar{U} = 1,5$ pode estar ocorrendo o fenômeno de caos. Mas, neste caso, para confirmar se o movimento oscilatório corresponde uma resposta caótica é necessário aplicar o cálculo do expoente de Lyapunov (SIMONI; VASCONCELLOS; MARQUES, 2007) e somente assim poderá ser confirmado o fenômeno.

No caso de modelo estrutural com não linearidade P13, não foi possível obter a fronteira de *flutter* corretamente utilizando o IPM, quando se compara com os valores obtidos pelo método

Figura 5.81: Vista parcial do espectro dos autovalores para $\bar{U} = 3,415$ com modelo aeroelástico não linear definido pelo polinômio P13 em $M=0,75$.

de marcha no tempo. Com a metodologia de potência inversa apenas observa-se o espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$, e parte deste espectro é observado para acompanhar o autovalor crítico, caracterizado pelo ponto de Hopf. O autovalor observado deve estar associado ao ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico, ou seja, é obtido o espectro dos autovalores associado a matriz jacobiana $\mathbf{A}$, considerando que o ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico seja o zero. O ponto de equilíbrio na posição zero é adotado, pelo fato de que, desde os primeiros trabalhos para o cálculo direto do ponto de *flutter* através da metodologia de bifurcação de Hopf em Morton (1996) e após em Badcock, Woodgate e Richards (2004), está mencionado que a utilização do perfil aerodinâmico (NACA0012) nestes cálculos, que se trata de um perfil simétrico, o sistema aeroelástico sempre se estabiliza em oscilações em torno do ponto zero. Assim, utilizando-se perfis simétricos, o ponto zero vem sendo considerado como ponto de equilíbrio nos cálculos da fronteira de *flutter* do sistema aeroelástico, através da análise de bifurcação de Hopf. No entanto, como é visto com o cálculo de marcha no tempo, na Seção 5.2, com os valores de parâmetros estruturais dados na Tabela 5.1, as histórias no tempo para Mach

(a) Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U}$.

(b) Autovalor que atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 1,2765$.

Figura 5.82: Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U} = 1,2$ até $\bar{U} = 2,0$ com modelo aeroelástico não linear definido pelo polinômio P13 em $M=0,75$.

(a) Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U}$.

(b) Autovalor que atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 0,6354$.

Figura 5.83: Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U} = 0,5$ até $\bar{U} = 0,7$ com modelo aeroelástico não linear definido pelo polinômio P13 em $M=0,85$.

Figura 5.84: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P13 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,1$.

Figura 5.85: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P13 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,2$.

0,75 mesmo com estrutura linear (ver Figuras 5.25 e 5.26) estão tendendo para pontos de equilíbrios diferentes de zero.

Retornando ao caso de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$), observa-se que os pontos de equilíbrio do sistema aeroelástico com modelo estrutural linear, através da metodologia de marcha no tempo, são todos zero, como pode ser visto nas Figuras 5.47 a 5.54. Por este fato, foi possível obter a fronteira completa do *flutter* através do IPM considerando como ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico o zero. Ao introduzir a não linearidade estrutural descrita pelo polinômio P13 na metodologia de marcha no tempo, pode ser observada na Figura 5.84 a resposta tendendo para um ponto de equilíbrio diferente de zero, em $\bar{U} = 1,1$.

Figura 5.86: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P13 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,2$.

Figura 5.87: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P13 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,5$.

Como foi visto anteriormente, a fronteira de *flutter* com o IPM, considerando as não linearidades com o ponto de inflexão no ponto de equilíbrio zero, é a mesma obtida com os cálculos considerando somente a parte linear do polinômio, no caso de P13 $f(\alpha) = 3,5799 \times 10^{-2}\alpha$. Desta forma, é calculado com a metodologia de marcha no tempo considerando o modelo linear com a parte linear do polinômio P13, ou seja, $f(\alpha) = 3,5799 \times 10^{-2}\alpha$. Os resultados em termos da história no tempo em arfagem estão nas Figuras 5.89(a), (b) e (c) para $\bar{U} = 1, 1, 1, 2$ e $1, 5$, respectivamente. Através destes resultados, pode-se observar que o sistema no ponto de equilíbrio zero apresentou divergência, o mesmo pode ser observado no espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ nas Figuras 5.82(a) e (b) pelo autovalor real positivo indicando instabilidade. Com o auto-espectro, utilizando uma malha muito grossa, o autovalor real atra-

Figura 5.88: Resposta aeroelástica com estrutura não linear do tipo P13 para $M=0,75$, $\bar{U} = 1,5$.

Figura 5.89: Histórias no tempo para $M=0,75$ considerando somente parte linear do polinômio P13 ($f(\alpha) = 3,5799 \times 10^{-2} \alpha$).

vessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 1,2765$, com a metodologia de marcha no tempo observa-se, em $\bar{U} = 1,1$, que o sistema está convergindo para outro ponto de equilíbrio aproximadamente $\alpha = 1,75^\circ$ (ver Figura 5.89(a)). Isto indica que antes do valor de $\bar{U} = 1,1$ o sistema já apresentou divergência no ponto de equilíbrio zero. Para $\bar{U} = 1,2$, na Figura 5.89(b), observa-se que o sistema converge ainda para outro ponto de equilíbrio, em aproximadamente $\alpha = 2,2^\circ$. E finalmente, para $\bar{U} = 1,5$ o sistema está oscilando em torno de outro ponto de equilíbrio, em aproximadamente $\alpha = 3,8^\circ$ (ver Figura 5.89(c)). Para este último caso, o sistema está em resposta oscilatória com amplitudes divergentes, onde o ponto de *flutter* pode ser estimado em aproximadamente $\bar{U} = 1,4$, com ponto de equilíbrio diferente de zero.

Este importante fato é observado em outros casos, ao tentar obter a fronteira de *flutter* com diferentes não linearidades estruturais. Toda vez que se tentou utilizar uma não linearidade

estrutural relacionada com baixos gradientes da curva no ponto de inflexão zero, obteve-se o mesmo caso de diferentes pontos de equilíbrios na solução até o valor de gradiente zero, como na curva cúbica $f(\alpha) = \alpha^3$. Como houve uma variação do ponto de equilíbrio conforme variou-se o parâmetro do sistema dado pela velocidade reduzida, ficou difícil utilizar a metodologia de potência inversa para o cálculo do ponto de *flutter*. As duas metodologias de potência inversa e marcha no tempo possuem resultados próximos, mas não exatamente iguais inerentes dos diferentes códigos de CFD utilizados. Assim, ficou difícil definir pela técnica de marcha no tempo aqui utilizada, qual é exatamente o ponto de equilíbrio a ser introduzido, para obter o ponto de *flutter* através do IPM, pois o ponto de equilíbrio encontrado na metodologia de marcha no tempo, pode ser um valor aproximado ao valor que seria obtido utilizando o código de malhas estruturadas no IPM.

Figura 5.90: Não linearidade polinomial torsional de grau 7.

Ao analisar os resultados obtidos, utilizando o valor dos parâmetros estruturais dado pelo caso de estrutura pesada ($\mu_s = 100$), percebe-se que as amplitudes envolvidas são bastante pequenas. Para se obter uma análise em casos que envolvem amplitudes de oscilações relativamente maiores, é considerado o modelo estrutural com parâmetros da Tabela 5.1. Para Mach

(a) Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U}$.

(b) Autovalor que atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 3,45$.

Figura 5.91: Caminho dos autovalores com variação de $\bar{U} = 2$ até $\bar{U} = 90$ com modelo aerelástico não linear definido pelo polinômio de grau 7 em $M=0,85$.

Figura 5.92: História no tempo com não linearidade definida pelo polinômio de grau 7 para $M=0,85$ e $\bar{U} = 2,0$.

Figura 5.93: Resposta aeroelástica com não linearidade definida pelo polinômio de grau 7 para $M=0,85$ e $\bar{U} = 3,0$.

0,85, incidência inicial $1,0^\circ$ e o modelo estrutural linear, através da metodologia de marcha no tempo é obtido o ponto de *flutter* em $\bar{U} = 18$ como mostra a Figura 5.38(a). Pode-se observar que a incidência máxima de oscilação é obtido em $2,0$ graus. Para as mesmas condições de escoamento, em Mach 0,85, é analisado o ponto de *flutter* com estrutura não linear com um polinômio de grau 7. Este polinômio é definido na faixa de amplitude de $4,0^\circ$ ou $0,07$ radianos como está na Figura 5.90. O polinômio de grau 7 (P7) agora é dado por:

$$f(\alpha) = 3,5219 \times 10^{-1} \alpha + 4,5856 \times 10^2 \alpha^3 - 1,4245 \times 10^5 \alpha^5 + 1,4629 \times 10^7 \alpha^7. \quad (5.6)$$

Figura 5.94: Resposta aeroelástica com não linearidade definida pelo polinômio de grau 7 para $M=0,85$ e $\bar{U} = 5,0$.

Figura 5.95: História no tempo considerando somente parte linear do polinômio de grau 7 ($f(\alpha) = 3,5219 \times 10^{-1} \alpha$) para $M=0,85$.

Primeiramente, calculou-se o ponto de *flutter* considerando o polinômio completo e também somente a parte linear ($f(\alpha) = 3,5219 \times 10^{-1} \alpha$) com o IPM e é obtido em $\bar{U} = 2,51$. O ponto de equilíbrio nesta análise é considerado em zero, e ainda, o espectro dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ é dado nas Figuras 5.91(a) e (b). Deve-se lembrar que, para esta análise os valores calculados são os da malha muito grossa. A Figura 5.91(a) apresenta o caminho do par de autovalores que atravessa o eixo imaginário na direção das setas com variação de $\bar{U} = 2$ até $\bar{U} = 90$. Após atravessar o eixo imaginário, em aproximadamente $\bar{U} = 10$ o par de autovalores volta a se aproximar do eixo imaginário conforme aumenta a velocidade reduzida. Ao aumentar consideravelmente o valor da velocidade reduzida, o par de autovalores tende a estar bem

próximo ao eixo imaginário, mas não é encontrado um ponto onde o tenha atravessado novamente. A Figura 5.91(b) mostra o momento quando o par de autovalores complexos atravessa o eixo imaginário em $\bar{U} = 3,45$, sabendo-se que é obtido ao utilizar a malha muito grossa.

Para obter o ponto de ocorrência de *flutter* com o polinômio de grau 7 completo da Eq. (5.6) e considerando somente a parte linear de $(f(\alpha) = 3,5219 \times 10^{-1} \alpha)$ com a metodologia de marcha no tempo é obtido com incidência inicial 1,0 grau. A Figura 5.92(a) mostra a história no tempo com os termos não lineares do polinômio no modelo estrutural. Na Figura 5.92(b) está a resposta somente considerando a parte linear. Estas respostas são bastante parecidas e mostram que o sistema mostrou convergência com $\bar{U} = 2$ nos dois casos. Aumentou-se a velocidade reduzida para $\bar{U} = 3$ e as Figuras 5.93(a) e (b) mostram a resposta aeroelástico com o polinômio de grau 7 completo no modelo estrutural. O sistema apresenta um modo oscilatório com amplitudes finitas, definindo o ponto de *flutter* em aproximadamente neste valor de $\bar{U} = 3$. Continuou-se aumentando a velocidade reduzida para 5 com a não linearidade estrutural definida pelo polinômio de grau 7 e observou-se o sistema em oscilação com amplitudes maiores e mais variadas que aquela obtida em $\bar{U} = 3$ (ver Figuras 5.94). Ao analisar as mesmas condições com o modelo estrutural linear dado pela parte linear do sistema polinômio de grau 7 são obtidas as histórias no tempo das Figuras 5.95(a) e (b) com incidência inicial de 1,0 grau. Para $\bar{U} = 3$, o sistema inicialmente com oscilações em amplitudes crescentes se estabiliza em uma oscilação em amplitudes finitas. Neste ponto, para $\bar{U} = 3$, aproximadamente, a ocorrência do *flutter* é considerada, e quando aumentou-se o valor da velocidade reduzida para 5 o sistema responde com uma forte divergência.

Nestes resultados, novamente o ponto de ocorrência de *flutter* com a estrutura não linear obtido com o IPM é bem próximo aquele obtido com a metodologia de marcha no tempo. E ainda mais, o ponto de ocorrência de *flutter* considerando o sistema linear dado pela parte linear do polinômio é bem próximo aquele obtido com o polinômio completo na metodologia de marcha no tempo. Esta análise confirmou as mesmas ocorrências para os casos de parâmetros estruturais de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$) na adição dos termos não lineares na fronteira do *flutter*. Ou seja, se a não linearidade estrutural define uma curva com ponto de inflexão

em $\alpha = 0^\circ$, como as não linearidades definidas no presente trabalho e o ponto de equilíbrio do sistema aeroelástico é o próprio ponto $\alpha = 0^\circ$, os termos não lineares não influenciam na fronteira de ocorrência do *flutter*. No entanto, perceber-se que logo após a ocorrência do *flutter* os termos não lineares modificaram bastante o comportamento do sistema aeroelástico.

5.6 Comportamento do Sistema Aeroelástico Após Ocorrência de Bifurcação com Modelo Estrutural Não Linear

Para analisar a influência dos termos não lineares após a ocorrência de bifurcação de Hopf ou *flutter* aeroelástico através da metodologia de marcha no tempo, são considerados primeiramente os parâmetros estruturais dado pelo caso de estrutura pesada ($\mu_s = 100$). Para Mach 0,75 já pode ser observado a influência dos termos não lineares ao comparar as respostas para $\bar{U} = 1,2$ considerando as não linearidades P11 e P13 nas Figuras 5.73 e 5.85. A resposta considerando o polinômio P11 apresentou oscilação com amplitudes levemente decrescentes, e considerando o polinômio P13 o sistema está em LCO.

Nesta Seção pretende-se fazer esta análise dos termos não lineares dos polinômios através da variação do grau de não linearidade. Assim, os resultados são obtidos, simultaneamente para as mesmas condições de Mach 0,86, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$, variando-se apenas as não linearidades no modelo estrutural. As não linearidades estruturais são as mesmas analisadas na Seção 5.5 dada pelos polinômios de graus 7 (P7), 11 (P11) e 13 (P13), Eqs. (5.3), (5.4) e (5.5), respectivamente. Nesta análise incluiu-se mais uma não linearidade estrutural escrita como um polinômio de grau 5 (P5), onde pode ser comparada às demais não linearidades na Figura 5.96, dada pela expressão:

$$f(\alpha) = 5,0595 \times 10^{-1} \alpha + 1,4966 \times 10^6 \alpha^3 - 1,5215 \times 10^{12} \alpha^5. \quad (5.7)$$

As respostas são analisadas em termos da história no tempo do sistema aeroelástico. As Figuras 5.97(a) e (b) mostram as respostas com estrutura não linear dado pelos polinômios de graus 5 (P5) e 7 (P7), respectivamente. Nos dois resultados pode-se observar respostas con-

vergentes, mas a resposta com a não linearidade polinomial P7 oscilou por mais tempo que a resposta com o polinômio P5 antes de convergir para um ponto. Ao analisar as histórias no tempo com o modelo não linear descrito pelos polinômios de graus 11 (P11) e 13 (P13) observa-se o sistema em respostas oscilatórias dentro de uma faixa de amplitude, mas com um comportamento um pouco aleatório. Nos dois casos, inicialmente o sistema apresentou transientes já observados anteriormente para Mach 0,75. Após os transientes iniciais ao analisar as amplitudes de oscilação nota-se que para o caso com não linearidade P11 a resposta aeroelástica em arfagem apresenta uma amplitude um pouco maior que no caso com não linearidade P13. Isso indica que os termos com maior grau de não linearidade influenciaram na amplitude de oscilação do sistema.

Figura 5.96: Não linearidades estruturais: polinômio de grau 5, 7, 11 e 13.

Para continuar analisando o que ocorre com a resposta do sistema aeroelástico em Mach 0,86 é obtida a história no tempo em arfagem para $\bar{U} = 4,5$ e $\bar{U} = 5,5$, considerando as não linearidades estruturais P11 e P13. As Figuras 5.99(a) e (b) mostram as respostas para $\bar{U} = 4,5$ considerando P11 e P13 no modelo não linear em torção, respectivamente. As respostas mostraram um modo oscilatório com amplitudes finitas. Esta oscilação é diferente daquela observada

Figura 5.97: História no tempo em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$.

Figura 5.98: História no tempo em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$.

em $\bar{U} = 2,0$, mas como havia ocorrido, a amplitude do caso com não linearidade P13 é levemente menor que com P11. Aumentou-se a velocidade reduzida até $\bar{U} = 5,5$ e estão mostradas nas Figuras 5.100(a) e (b) considerando P11 e P13 em torção no modelo estrutural, respectivamente. Observa-se o mesmo comportamento ocorrido com $\bar{U} = 4,5$. Quando considerou-se o modelo estrutural linear ($f(\alpha) = \alpha$) o ponto de ocorrência do *flutter* para Mach 0,86 é obtido em $\bar{U} = 4$. É importante observar que, apesar da não linearidade torsional no modelo estrutural ter adiantado a fronteira de ocorrência de *flutter*, onde a resposta aeroelástica é divergente para o sistema com estrutura linear ($f(\alpha) = \alpha$) em $\bar{U} = 4,5$ e $\bar{U} = 5,5$, o sistema se mantém em oscilação em ciclos limite com baixas amplitudes e altas frequências.

As análises após a fronteira de *flutter* com os parâmetros estruturais dados pela Tabela 5.2

Figura 5.99: História no tempo em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 4,5$ e incidência inicial $0,5^\circ$.

Figura 5.100: História no tempo em arfagem para $Mach=0,86$, $\bar{U} = 5,5$ e incidência inicial $0,5^\circ$.

são obtidas. Dois tipos de não linearidades em torção no modelo estrutural são analisados neste caso. As não linearidades são dadas pelos polinômios de grau 11 e 13 na Figura 5.101. As condições do escoamento são em Mach 0,85 e primeiramente em $\bar{U} = 5$ e incidência inicial de $1,0$ grau, as respostas podem ser observadas nas Figuras 5.102 e 5.103. Nota-se que os transientes iniciais observados para os casos de parâmetros de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$) não são tão intensos nestes casos. Com a não linearidade torsional descrita pelo polinômio de grau 11 a respostas oscilou em uma amplitude um pouco menor que aquela observada com o polinômio de grau 13, mas as respostas aparentemente oscilam com a mesma frequência.

Quando no sistema aeroelástico é considerado o modelo estrutural linear ($f(\alpha) = \alpha$) o

Figura 5.101: Não linearidades estruturais: polinômio de grau 7, polinômio de grau 11 e polinômio de grau 13.

ponto de *flutter* para Mach 0,85 é obtido em $\bar{U} = 18$, com as condições iniciais obtidas com o cálculo estacionário do código de CFD. Ao aumentar a velocidade reduzida para $\bar{U} = 25$, considerando o modelo estrutural não linear com os polinômios de grau 11 e 13, as respostas com os dois tipos de não linearidades apresentam LCO. As Figuras 5.104 e 5.105 mostram as oscilações em ciclos limite para Mach 0,85 e $\bar{U} = 25$ com as não linearidades de polinômios de 11 e 13 graus, onde apresentam altas frequências de oscilações e com amplitudes um pouco variadas. Assim, onde é observado resposta divergente com a estrutura linear ($f(\alpha) = \alpha$), como mostra a Figura 5.41 para $\bar{U} = 20$, as respostas aeroelásticas considerando os modelos estruturais não lineares, dado pelos polinômios de graus 11 e 13, apresentaram oscilações com amplitudes finitas. Este mesmo comportamento já havia sido observado com os casos utilizando parâmetros do modelo estrutural pesado ($\mu_s = 100$), onde as não linearidades estruturais preservaram um movimento oscilatório com amplitudes finitas em respostas que seriam divergentes com a estrutura linear.

O outro tipo de não linearidade em torção para análise da resposta aeroelástica é a função

Figura 5.102: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 5$ e incidência inicial $1,0^\circ$ com não linearidade P11.

Figura 5.103: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 5$ e incidência inicial $1,0^\circ$ com não linearidade P13.

tangente hiperbólica dada pela Eq. (2.52). Da mesma forma como é feito um paralelo com as respostas obtidas através das funções polinomiais de diferentes graus de não linearidades, a função hiperbólica pode ser utilizada para obter a mesma análise apenas com uma mudança de parâmetros. Na Figura 5.106 está a função hiperbólica para os valores de ε de 0, 3000, 4000, 64000, 500000, e $\alpha_- = -0,0001 \text{ rad}$ e $\alpha_+ = 0,0001 \text{ rad}$. Para o valor de $\varepsilon = 0$ é obtida a curva identidade, os três valores intermediários de ε correspondem aos diferentes graus de não linearidades das curvas, onde os valores maiores representam as não linearidades de graus maiores. A Figura 5.106(b) mostra a vista aproximada da função, para $\varepsilon = 500000$ pode ser observada a curva correspondente ao *free-play*. A escolha dos parâmetros variaram de acordo

Figura 5.104: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 25$ e incidência inicial $1,0^\circ$ com não linearidade P11.

Figura 5.105: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 25$ e incidência inicial $1,0^\circ$ com não linearidade P13.

com a resposta aeroelástica analisada. Primeiramente, é definida a faixa de incidência em que a resposta em torção é zero, dadas pelos valores de α_- e α_+ na Eq. (2.52). Esta faixa de incidência, neste trabalho, é definida considerando as amplitudes das oscilações envolvidas em cada caso. Para o caso de parâmetros com $\mu_s = 100$, é verificado que as amplitudes envolvidas são bastante pequenas, assim definiu-se os valores de α_- e α_+ bastante pequenos.

As respostas aeroelásticas, utilizando-se a função tangente hiperbólica, são obtidas nas condições de escoamento em Mach 0,82, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$. As Figuras 5.107(a) e (b) mostram as histórias no tempo com o modelo estrutural não linear dado pela função tangente hiperbólica com os valores de $\varepsilon = 3000$ e $\varepsilon = 4000$, respectivamente. Observa-se que a resposta

(a) Vista completa.

(b) Vista parcial.

Figura 5.106: Não linearidade estrutural em torção tanh com variação de ε .

Figura 5.107: História no tempo em arfagem para $M=0,82$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$.

Figura 5.108: Resposta em arfagem para $M=0,82$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$, com não linearidade estrutural tanh com $\varepsilon = 6400$.

para o valor de $\varepsilon = 3000$ mostrou pouca influência dos termos não lineares ao comparar com a resposta para o valor de $\varepsilon = 4000$. A resposta aeroelástica dada pela história no tempo em arfagem e pelo retrato de fase, com $\varepsilon = 6400$ estão nas Figuras 5.108(a) e (b), respectivamente. Neste caso, observa-se uma forte influência da não linearidade estrutural nas respostas ao comparar com os casos anteriores. A resposta aeroelástica com os valores de $\varepsilon = 500000$ na função tangente hiperbólica, representando o *free-play*, pode ser observada nas Figuras 5.109(a) e (b). O sistema apresentou oscilações em uma faixa de amplitude com regiões de atrações da solução como pode ser notado no retrato de fase na Figura 5.109(b).

As funções polinomiais são obtidas a partir da função tangente hiperbólica, objetivando

Figura 5.109: Resposta em arfagem para $M=0,82$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$, com não linearidade estrutural $\tanh$ com $\varepsilon = 500000$ (*free-play*).

avaliar quais termos não lineares do polinômio realmente influenciam no cálculo da fronteira de *flutter*. Pode-se perceber a semelhança entre as curvas descritas pelas funções polinomiais na Figura 5.101 e a função hiperbólica da Figura 5.106. Apesar da semelhança, as respostas aeroelásticas com as curvas polinomiais apresentaram oscilações iniciais tratadas como transientes. Estes transientes não estão tão caracterizados nas respostas aeroelásticas com o modelo estrutural definido pela função tangente hiperbólica. Assim, é realizada uma comparação entre as respostas com o modelo estrutural não linear dado pelas não linearidades obtidas com os polinômios e às obtidas com a função tangente hiperbólica. Para as respostas obtidas com os parâmetros estruturais dado pelo caso $\mu_s = 100$, estes transientes iniciais são mais caracterizados do que nas respostas obtidas com os parâmetros de modelos estruturais dados na Tabela 5.1. Ao observar as características destas curvas, percebe-se que a não linearidade se caracteriza nas vizinhanças do ponto zero, após esta faixa a curva segue paralela à curva identidade.

A Figura 5.110 mostra as duas funções, tangente hiperbólica e polinomial de grau 11 sobrepostas tentando representar a mesma curva, e nota-se que nestas curvas o ângulo está em unidade de radianos. A fronteira de *flutter* obtida com a função tangente hiperbólica com valor de $\varepsilon = 5100$, $\alpha_- = -0,0001 \text{ rad}$ e $\alpha_+ = 0,0001 \text{ rad}$ é exatamente a fronteira de *flutter* na Figura 5.71 obtida com o modelo não linear representado pelo polinômio de grau 11 da Figura 5.110. Este resultado comprova que na análise de bifurcação de Hopf para não li-

(a) Vista completa.

(b) Vista parcial.

Figura 5.110: Não linearidades estruturais em torção tanh e polinômio de grau 11 (P11).

Figura 5.111: Resposta em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$, com não linearidade estrutural tanh com $\varepsilon = 5100$.

Figura 5.112: Resposta em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com não linearidade estrutural tanh com $\varepsilon = 5100$.

nearidades com ponto de inflexão no ponto de equilíbrio zero o que influencia na fronteira de *flutter* é o valor da inclinação $\frac{\partial f(0)}{\partial \alpha}$, onde para a curva tangente hiperbólica em questão $\frac{\partial f(0)}{\partial \alpha} = 1,3076 \times 10^{-1}$ que é exatamente o valor obtido com P11.

A Figura 5.110(b) mostra o mesmo gráfico ao aproximar a vista onde as curvas das funções deveriam estar paralelas a curva linear $f(\alpha) = \alpha$, que corresponde a vista demarcada na Figura 5.110(a) por um quadrado. As respostas aeroelásticas em marcha no tempo para estas duas curvas não lineares, definindo a não linearidade em torção no modelo estrutural, são obtidas com os parâmetros dados por $\mu_s = 100$. Para Mach $0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$, as Figuras 5.111(a) e (b) mostram a história no tempo e o retrato de fase para a não linearidade

Figura 5.113: Resposta em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com não linearidade estrutural P11.

Figura 5.114: Resposta em arfagem para $M=0,86$, $\bar{U} = 2$ e incidência inicial $0,5^\circ$ com não linearidade estrutural P11.

definida pela função tangente hiperbólica. Após um transiente inicial a resposta oscila em amplitudes finitas, onde as Figuras 5.112(a) e (b) mostram a história no tempo e o retrato de fase após o transiente inicial.

As Figuras 5.113(a) e (b) mostram as respostas em arfagem considerando a não linearidade estrutural definida pela função polinomial de grau 11, para as mesmas condições de escoamento que o caso para a não linearidade tangente hiperbólica. Neste caso, nota-se que o transiente inicial se tornou mais intenso. Ao comparar as duas não linearidades percebe-se na Figura 5.110(b) que a curva correspondente ao polinômio não acompanhou a curva da função

(a) Vista completa.

(b) Vista parcial.

Figura 5.115: Não linearidades estruturais em torção tanh e polinômio de grau 11 (P11).

Figura 5.116: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 5$ e incidência inicial $1,0^\circ$, com não linearidade estrutural tanh.

Figura 5.117: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 5$ e incidência inicial $1,0^\circ$, com não linearidade estrutural P11.

tangente hiperbólica que está paralela à curva $f(\alpha) = \alpha$, devido à aproximações. Assim, ao perceber a faixa de incidência que ocorre o transiente inicial é a mesma que correspondente a Figura 5.110(b), sabendo-se que no gráfico a unidade de incidência está em radianos. Desta forma, a curva da não linearidade descrita pelo polinômio pode estar gerando aquela região de atração da solução devido a esta diferença percebida na Figura 5.110(b). Isto pode ser notado em todas as respostas com as não linearidades em torção, definidas pelos polinômios com parâmetros do modelo estrutural dado pelo caso $\mu_s = 100$. Apesar das soluções, após os transientes iniciais, serem bastante parecidas a solução utilizando a não linearidade definida pelo polinômio ficou com amplitude de oscilação um pouco menor que aquela apresentada utilizando

a não linearidade estrutural representada pela função polinomial.

Para fazer a mesma análise com os valores dos parâmetros estruturais dados pela Tabela 5.1 são realizados os cálculos para condições de escoamento em Mach 0,85 , $\bar{U} = 5$ e incidência inicial $1,0^\circ$. A Figura 5.115 mostra as funções não lineares tangente hiperbólica e polinomial de grau 11 definidas dentro de uma faixa de amplitude maior que aquela apresentada na Figura 5.110. Nas Figuras 5.116(a) e (b) estão as respostas com o modelo não linear utilizando a função tangente hiperbólica, e nas Figuras 5.117(a) e (b) as mesmas condições utilizando a função não linear polinomial. Ao comparar estas respostas aeroelástica percebe-se que não houve grandes diferenças, onde os transientes iniciais são praticamente os mesmos. Neste caso, o problema introduzido ao se tentar aproximar a curva tangente hiperbólica por polinômios não alterou significativamente na resposta aeroelástica. Nos dois casos com diferentes parâmetros estruturais as respostas tiveram características diferenciadas pelos tipos de oscilações e amplitudes envolvidas. No caso de uma estrutura pesada ($\mu_s = 100$) as não linearidades estruturais geraram fenômenos que não são obtidos nos casos com parâmetros estruturais dados na Tabela 5.1, como as regiões iniciais de atrações das soluções observadas acima. Este fato pode estar relacionado às amplitudes de oscilações muito pequenas envolvidas no caso $\mu_s = 100$, e por isso, as soluções podem estar sofrendo uma maior influência das não linearidades estruturais.

Através das não linearidades descritas nesta Seção para estudo da influência dos termos não lineares nas respostas aeroelásticas após a fronteira de *flutter* é possível perceber os fenômenos de LCO e outros comportamentos não lineares. Algumas técnicas não lineares específicas de classificação e análise de estabilidade de soluções seriam necessárias para estabelecer os fenômenos envolvidos associados às fontes de não linearidades. No entanto, as fontes de não linearidades estruturais geram fenômenos que não são percebidos considerando somente as não linearidades decorrentes do regime de escoamento transônico.

5.7 Dependência do Ângulo de Incidência Inicial na Resposta Aeroelástica com Modelo Estrutural Não Linear

O objetivo desta Seção é mostrar a dependência da solução do sistema linear às condições iniciais, considerando as fontes de não linearidades aerodinâmicas e estruturais. Para esta análise será utilizado os valores de parâmetros estruturais dados na Tabela 5.1. Considerando as condições de escoamento em Mach 0,85, $\bar{U} = 25$ e a não linearidade estrutural em torção é a NL1 dada pela Eq. (5.1) e mostrada na Figura 5.65.

Figura 5.118: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 25$ e incidência inicial $0,1^\circ$, com não linearidade estrutural NL1.

Figura 5.119: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 25$ e incidência inicial $0,5^\circ$, com não linearidade estrutural NL1.

A escolha dos parâmetros estruturais analisados, assim como, das condições de escoamento

Figura 5.120: Resposta em arfagem para $M=0,85$, $\bar{U} = 25$ e incidência inicial $1,0^\circ$, com não linearidade estrutural NL1.

é realizada para ter uma análise em um ponto típico onde ocorre a depressão transônica, e para respostas oscilando em amplitudes relativamente mais altas. Três diferentes incidências iniciais são estabelecidas $0,1^\circ$, $0,5^\circ$ e $1,0^\circ$ e a solução do estado estacionário obtida com Δt constante. Estas incidências indicam diferentes caminhos na curva da Figura 5.65, e as soluções são comparadas nas mesmas condições de escoamento.

As Figuras 5.118(a) e (b) mostram a história no tempo e o retrato de fase onde a incidência inicial é de $0,1^\circ$. O sistema respondeu em oscilações em amplitudes finitas com alta frequência. Nas Figuras 5.119(a) e (b) estão as respostas aeroelásticas para incidência inicial de $0,5^\circ$, pode-se notar o sistema em resposta oscilatória com amplitudes variadas e mais baixas ao comparar com o caso de incidência $0,1^\circ$. As respostas aeroelásticas com incidência inicial de $1,0^\circ$ pode ser observada nas Figuras 5.120(a) e (b), onde houve uma grande semelhança com a resposta obtida com incidência inicial $0,5^\circ$.

CONCLUSÕES

6.1 Comentários Finais

Neste trabalho foram discutidos os aspectos gerais do atual estado da arte em aeroelasticidade computacional não linear focando nos escoamentos em regime transônico. O texto elaborado visou apresentar o problema proposto dado pelo sistema aeroelástico, representando o movimento oscilatório prescrito por um aerofólio sem amortecimento estrutural em regime transônico. Também foram descritas as ferramentas utilizadas para resolver o problema aerodinâmico descrito pelas equações de Euler em 2D. Primeiro foi considerado o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas desenvolvido pelo Prof. Dr. João L.F. Azevedo do CTA/IAE, e depois, o código de CFD no contexto de malhas estruturadas desenvolvido pelo Prof. Kenneth J. Badcock da *University of Liverpool*, Inglaterra.

Através dos dois códigos de CFD utilizados neste trabalho foi possível estabelecer uma comparação das diferentes metodologias empregadas para as mesmas condições do escoamento em regime transônico. As duas metodologias apresentaram resultados precisos na previsão dos efeitos não lineares decorrentes do regime transônico comparados aos experimentos. Estes códigos de CFD são ferramentas frequentemente utilizadas para aplicações gerais relacionadas a escoamentos em regime transônico pelos respectivos grupos dos Profs, João L.F. Azevedo e Kenneth J. Badcock. Para a aplicação aeroelástica em questão, a metodologia implícita empregada no código de CFD de malhas estruturadas realmente apresenta grandes vantagens re-

lativas a custos computacionais do que a utilização de abordagens explícitas, para a análise de bifurcação de Hopf, onde são necessários somente os cálculos estacionários. A metodologia explícita no código de malhas não estruturadas, por sua vez, deve-se ainda ser realizado um estudo do Δt limite baseado na física do problema da resposta aeroelástica em marcha no tempo em questão. Em outras palavras, através da análise das respostas aeroelástica de frequências altas, verificar qual valor limite de Δt pode ser utilizado. Assim, pode ser verificado se o valor de $\Delta t = 0,001$, utilizado em todos os casos, poderia assumir valores maiores e obter custos computacionais menores no processo de marcha no tempo.

A partir daí, as análises seguiram para se obter a resposta aeroelástica. As equações aeroelásticas foram escritas em forma de variáveis de estado e integrada no tempo, utilizando o código de CFD não estacionário no contexto de malhas não estruturadas. A integração no tempo do sistema forneceu a história no tempo do movimento oscilatório prescrito pelo deslocamento vertical e torcional de um aerofólio NACA0012, assim como, a análise do retrado de fase para observar as características do movimento oscilatório. Também, foram obtidas fronteiras de *flutter*, utilizando o código de CFD no contexto de malhas estruturadas, com a análise de bifurcação de Hopf.

Os resultados apresentados, através da metodologia de marcha no tempo do sistema aeroelástico, são relativos as simulações da resposta aeroelástica em regime transônico com modelos estruturais lineares e não lineares. O modelo aerodinâmico dado pelo código de CFD não estacionário foi combinado com o método Runge-Kutta para resolver o problema aeroelástico dado por um modelo de seção típica. Esta análise, utilizando o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas, foi a primeira contribuição do presente trabalho. Assim, foram realizadas análises de verificação e validação necessárias para a confiabilidade da metodologia proposta.

Primeiramente, as análises de marcha no tempo do sistema aeroelástico foram realizadas considerando o modelo estrutural linear, onde os fenômenos não lineares analisados foram relativos ao regime de escoamento transônico. No código de CFD, utilizado para obter os esforços

aerodinâmicos para o equacionamento aeroelástico, alguns parâmetros foram testados para obter as soluções de estado estacionário e não estacionário. As soluções de estado estacionário foram utilizadas como condições iniciais na integração no tempo do sistema aeroelástico. Para a solução de estado estacionário utilizando-se técnica de passo no tempo variável, ou seja, opção de CFL constante para rápida convergência. As soluções aeroelástica obtidas com condições iniciais através do cálculo do código CFD estacionário com opção de passo no tempo variável, gerou respostas em oscilações em ciclos limite para Mach 0,85, que corresponde um regime típico de depressão transônica. Em contrapartida, ao utilizar opção de passo no tempo constante no cálculo estacionário do código de CFD, não foram obtidas as respostas em oscilações em ciclos limite para Mach 0,85 como antes, para a mesma incidência inicial. Neste caso, não foi possível estabelecer se as oscilações em ciclos limite observadas com o cálculo do código de CFD utilizando passo no tempo variável correspondem aos fenômenos físicos ou se são decorrentes de algum problema numérico.

As análises utilizando na solução inicial passo no tempo constante, seguiram com modificações de incidências iniciais e em todos os casos as respostas foram as mesmas apenas com alteração na amplitude de oscilação, onde ao aumentar a incidência inicial, maior foi a amplitude da resposta oscilatória. Ao variar as incidências iniciais, não foram encontradas nenhuma resposta com os LCO em Mach 0,85 obtidas nas respostas aeroelásticas com condições iniciais utilizando passo no tempo variável para o cálculo do código de CFD estacionário. Seria necessário nas respostas aeroelásticas, obtidas com os cálculos do código de CFD com Δt constante, realizar testes com incidências iniciais ainda maiores, pois os transientes obtidos utilizando opção de Δt variável podem ter acarretado em incidências iniciais maiores que aquelas testadas. Como os custos computacionais relativos aos cálculos da metodologia de marcha no tempo são altos, as análises realizadas foram satisfatórias para verificar que o tratamento das condições iniciais para problemas não lineares são importantes para estabelecer o fenômeno envolvido nas respostas aeroelásticas. Mas nas análises do ponto de vista físico, devem ser realizadas soluções iniciais com opção de passo no tempo constante em todo domínio discretizado e igual ao utilizado nos cálculos não estacionários. Isto acarreta em maiores custos compu-

tacionais nos cálculos estacionários, mas evita-se maiores problemas numéricos nos cálculos aeroelásticos.

Considerando-se o modelo estrutural ainda linear, a resposta aeroelástica foi obtida em termos do cálculo da fronteira de ocorrência do *flutter* com a metodologia de marcha no tempo e de análise de bifurcação de Hopf. Ao comparar as fronteiras obtidas com as duas metodologias obteve-se valores bem próximos, considerando as discrepâncias inerentes das diferentes metodologias dos códigos de CFD utilizados. A análise de refinamento de malha, nos dois casos, mostrou que a solução modificou conforme variou-se a quantidade de pontos no domínio computacional. Este estudo permitiu analisar a influência do ponto de ocorrência do *flutter* com malhas mais refinadas, sendo que o ponto de *flutter* assumiu valores menores conforme utilizou-se malhas mais refinadas nos dois códigos. Também foi possível verificar que o custo computacional com os cálculos realizados com malhas mais refinadas é bastante desvantajoso nas duas metodologias de marcha no tempo e análise de bifurcação de Hopf. Por isso, as análises com malhas relativamente mais grossas foram consideradas satisfatórias e utilizadas nos casos restantes.

Não linearidades no modelo estrutural foram consideradas e as análises de marcha no tempo e bifurcação de Hopf também foram obtidas para o cálculo da fronteira de ocorrência de *flutter*. Com as não linearidades dadas pelas funções polinomiais e tangente hiperbólica foi possível avaliar que os termos não lineares, nos casos empregados, não tiveram grandes influências na metodologia de marcha no tempo e nenhuma influência na metodologia de bifurcação de Hopf. Na metodologia de bifurcação de Hopf, este efeito pode ser claramente explicado pela análise do equacionamento da matriz jacobiana $\mathbf{A}$. Considerando o modelo estrutural não linear, a matriz jacobiana foi modificada apenas com um termo extra na matriz $\mathbf{A}_{ss}$ que corresponde a $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}$, onde $f(\alpha)$ é a função não linear que descreve a não linearidade do modelo estrutural. Este termo é justamente a inclinação da função não linear para um α qualquer. Como os casos estudados correspondem a funções não lineares com ponto de inflexão em $\alpha = 0$, que corresponde ao ponto de equilíbrio em questão. Então, a única modificação entre a matriz jacobiana considerando o modelo estrutural linear e não linear é o valor $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$. Este valor é a inclinação da

curva descrita pela função não linear no ponto zero. Por isso, já se esperava que os cálculos considerando os polinômios completos e somente a parte linear no ponto de equilíbrio em zero graus de incidência seriam exatamente os mesmos, o que foi verificado.

Esta foi uma conclusão particular, com os tipos de não linearidades estruturais considerados no presente trabalho, onde os pontos de inflexão estão localizados nas incidências de condições de equilíbrio em zero graus. Esta foi outra contribuição do presente trabalho, pois na análise de bifurcação de Hopf com o código obtido por Badcock, Woodgate e Richards (2004) não se havia investigado o efeito na fronteira de *flutter* considerando modelo estrutural não linear. A matriz jacobiana **A** foi alterada para tratar dos termos não lineares inerentes do modelo estrutural e as respostas podem ser avaliadas com a verificação do espectro de potência, e ainda comparadas com a metodologia de marcha no tempo obtida no presente trabalho. Ao comparar as mesmas respostas na ocorrência do *flutter* obtida com a análise de bifurcação de Hopf e a metodologia de marcha no tempo, observa-se que as respostas foram bem próximas. O que ocorreu com a análise de bifurcação de Hopf foi notado, também com a metodologia de marcha no tempo, que o ponto de ocorrência de *flutter*, considerando os polinômios completos, foram bem próximos aos obtidos considerando apenas o termo linear do polinômio. Conclui-se, que as metodologias com a análise de bifurcação de Hopf e a de marcha no tempo utilizadas no presente trabalho estão em concordância em prever a fronteira de *flutter*, como havia sido notado com o modelo estrutural linear.

Para o caso onde a não linearidade estrutural foi descrita pela função dada pelo polinômio P13 em Mach 0,75, o ponto de ocorrência de *flutter* com a análise de bifurcação de Hopf não pode ser obtido devido a algumas limitações da análise. Tanto nos trabalhos pioneiros para análise de bifurcação de Hopf em Morton (1996) como em Badcock, Woodgate e Richards (2004, 2005) foram analisados pontos de ocorrência de *flutter*, admitindo-se que para problemas aeroelásticos transônicos envolvendo perfis e asas simétricas os pontos de equilíbrios sempre serão em incidência zero. Pode-se perceber com os resultados obtidos no presente trabalho que, mesmo com modelo estrutural linear, foram obtidas respostas em equilíbrios diferentes de zero incidência. No caso P13, ficou claro que os equilíbrios do sistema aeroelásticos não dependem

exclusivamente do formato do perfil. Como foi visto no Capítulo 3, a análise de bifurcação estuda a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema com a variação de parâmetro, no caso $\bar{U}$. Assim, faz-se necessário o cálculo dos pontos de equilíbrios do sistema antes da análise de bifurcação, como foi exemplificado na análise do oscilador de *Van der Pol*.

Através da metodologia de marcha no tempo foi possível fazer a análise com o modelo estrutural não linear após a ocorrência de *flutter*. Neste caso, observou-se a grande influência dos termos não lineares estruturais logo após a fronteira de *flutter*. A análise foi realizada de forma a avaliar nas mesmas condições de escoamento as respostas com as funções não lineares dadas por diferentes graus de polinômio, onde observou-se fenômenos não lineares dados por oscilações em ciclos limite e, conforme aumentou o grau do polinômio, observou-se que os fenômenos envolveram oscilações com amplitudes mais variadas e de altas frequências.

Outra importante ocorrência foi observada ao avaliar os ciclos limite após a ocorrência do ponto de *flutter* com modelo estrutural não linear. Ao aumentar a velocidade reduzida para o mesmo número de Mach, o sistema se manteve em movimentos oscilatórios dentro de uma faixa de amplitude em valores de $\bar{U}$ considerados altos, e nas respostas divergentes obtidas considerando o modelo estrutural linear ($f(\alpha) = \alpha$), foram observadas respostas oscilatórias com amplitudes finitas considerando o modelo estrutural não linear.

Para os casos de parâmetros estruturais de uma estrutura pesada dado na Tabela 5.2, as amplitudes de oscilações envolvidas foram bastante baixas. Então, as não linearidades consideradas no modelo estrutural no presente trabalho apesar de adiantar o ponto de ocorrência de *flutter* retardou bastante o ponto de ocorrência de divergências, o que mostrou melhorar a resposta aeroelástica por manter o sistema oscilando em baixas amplitudes. Nestas respostas aeroelásticas com modelo estrutural não linear, e considerando as não linearidades polinomiais, pode-se observar no início das respostas regiões de atração de soluções. Ao comparar com o modelo estrutural utilizando a função tangente hiperbólica descrevendo a mesma curva dada pelo polinômio, nota-se que estas oscilações iniciais não foram tão intensas. Como foi visto, as não linearidades polinomiais foram obtidas a partir da função tangente hiperbólica e esta

aproximação gerou diferenças nas curvas não lineares, observando-se diferentes fenômenos no início das respostas. Esta mesma análise foi obtida para o caso de parâmetros estruturais apresentados na Tabela 5.1, onde as respostas oscilatórias apresentam amplitudes maiores, e não foi observado a mesma região de atração inicial nas respostas aeroelásticas. Assim, observa-se que a não linearidade estrutural tem maior influência em problemas que envolvem amplitudes bastante pequenas.

A influência das diferentes incidências iniciais com o modelo estrutural não linear foi verificada, observou-se que em problemas que envolvem as não linearidades estruturais, as diferentes incidências iniciais geraram diferentes respostas oscilatórias, diferentemente do que foi observado no caso com estrutura linear, onde somente modificou-se a amplitude de oscilação.

Estes resultados apresentaram a capacidade do método de integração no tempo do modelo acoplado entre o método de CFD no contexto de malhas não estruturadas e o estrutural para prever fenômenos não lineares relativos às não linearidades no modelo estrutural e ao escoamento transônico. A confiabilidade das respostas obtidas foi verificada ao comparar com os resultados de fronteira de *flutter* obtidos na análise de bifurcação de Hopf. Os testes utilizando diferentes passos no tempo nos cálculos, assim como, os testes de refinamento de malhas, confirmaram a aplicabilidade da metodologia e a influência das soluções à estas variações.

A metodologia de bifurcação de Hopf demonstra de forma eficiente a obtenção da fronteira de ocorrência de *flutter* em problemas em regime transônico com grandes vantagens de custos nos cálculos computacionais comparados a metodologia de marcha no tempo. Esta análise, ainda demonstrou ser aplicável e igualmente vantajosa em problemas tridimensionais.

Embora não tenha sido possível a realização de uma análise de completa de estabilidade aeroelástica, acredita-se que os resultados e as discussões apresentadas neste trabalho sejam um passo importante em direção ao desenvolvimento de técnicas eficientes de sistemas dinâmicos para aplicações em problemas aeroelásticos que envolvem os códigos de CFD visando a detecção e análise dos fenômenos não lineares envolvidos com o regime de escoamento transônico. O desenvolvimento deste trabalho poderá tornar possível explorar os fenômenos não lineares re-

duzindo a quantidade de ensaios em voo necessários para o procedimento de certificação de uma aeronave.

6.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Seguem algumas sugestões para a continuidade do trabalho no tema da tese:

1. Para a metodologia de marcha no tempo seriam necessários testes relacionados às condições iniciais, considerando-se a estrutura linear, uma faixa de incidências iniciais nas proximidades de Mach 0,85 e calculadas com o código de CFD estacionário com Δt constante. Este procedimento ofereceria um estudo completo dos fenômenos não lineares envolvidos na região de depressão transônica.
2. Ao considerar o modelo estrutural não linear e metodologia de marcha no tempo, para as respostas aeroelásticas obtidas após a fronteira de ocorrência do *flutter*, podem ser efetuados cálculos de expoentes de Lyapunov, para confirmar a ocorrência de caos em alguns casos, e técnicas de mapas de Poincaré, para obter a análise de estabilidade.
3. Avaliar regiões de estabilidade com a história no tempo da resposta aeroelástica. Por exemplo, considerando a função polinomial P13 no modelo estrutural não linear, avaliar com a variação de velocidade reduzida em uma mesma incidência inicial, as respostas após a ocorrência de *flutter* para vários números de Mach e descrever graficamente em quais condições o sistema se manteve em respostas com oscilações em amplitudes finitas.
4. As análises dos fenômenos aeroelásticos considerando os efeitos viscosos podem ser realizadas com a metodologia de marcha no tempo, através das equações de Navier-Stokes. Nesta análise, poderia ser estudado também a influência dos efeitos de separação de escoamento nos fenômenos não lineares aeroelásticos. O fator limitante seria o custo computacional nos cálculos. Técnicas de aceleração do processo iterativo do código de CFD seria necessário, assim como, utilização de processos paralelos em máquinas modernas.

Isto poderia tornar viável em aplicações tridimensionais com tratamentos da metodologia de marcha no tempo adequadamente para este tipo de análise.

5. Como o código de CFD no contexto de malhas não estruturadas utilizado no presente trabalho mostrou ser eficiente na previsão dos efeitos não lineares em aeroelasticidade transônica, a metodologia de bifurcação de Hopf poderia ser implementada utilizando este código de CFD para o cálculo direto das condições críticas do *flutter*. A formulação implícita ajudaria nos custos dos cálculos CFD estacionário e as vantagens poderiam ocorrer devido a solução no contexto de malhas não estruturadas, por apresentar uma maior facilidade em tratar geometrias complexas.
6. Na metodologia de bifurcação de Hopf, no contexto de malhas estruturadas, deve ser implementado o cálculo dos pontos de equilíbrio do sistema aeroelástico. Neste cálculo, deve-se satisfazer duas hipóteses: $\mathbf{R}_f = 0$ e $\mathbf{R}_s = 0$. No primeiro caso $\mathbf{R}_f = 0$ corresponde o cálculo estacionário do código de CFD nas posições de equilíbrio. Os pontos de equilíbrios que correspondem os valores das coordenadas generalizadas w e α em função do parâmetro do sistema dado pela velocidade reduzida $\bar{U}$ devem ser calculados através da Eq. (2.47) para modelo estrutural linear ou pela Eq. (2.50) para modelo estrutural não linear. Para o cálculo de $\mathbf{R}_s = 0$ poderia ser utilizado o método de Newton para encontrar as raízes da função dependente da velocidade reduzida. Isto exigiria um maior custo computacional relativo a mais um cálculo estacionário e a solução de um sistema esparsa pelo método de Newton.
7. O código de análise de bifurcação de Hopf para o cálculo da ocorrência de *flutter* está adaptado para problemas tridimensionais. O código contém recursos para o cálculo em processamentos paralelos e já foi aplicado ao cálculo da fronteira de *flutter* em uma asa simétrica com modelo linear. Esta metodologia pode ser modificada para aplicações considerando o modelo estrutural não linear.
8. Sabe-se, que a matriz jacobiana do sistema fornece a análise dos autovalores do sistema aeroelástico e as condições críticas do sistema podem ser avaliadas. O modelo de or-

dem reduzida, com a teoria de *centre manifold* reduziria um sistema completo de várias variáveis para um problema de duas dimensões. Neste caso, serão avaliadas somente as respostas no tempo convergentes e as oscilações em ciclos limite logo após a bifurcação de Hopf. Na expressão de *centre manifold* são avaliados somente os autovalores críticos da matriz jacobiana e calculados da metodologia de bifurcação de Hopf.

9. A partir do presente trabalho pode-se também avaliar as não linearidades estruturais na metodologia de *centre manifold*, onde as informações dos autovalores críticos podem ser obtidos da matriz jacobiana não linear através da análise de bifurcação de Hopf.

Bibliografia

ALBERTO, L. F. C. *O Princípio de Invariância de LaSalle estendido aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória Multi-"Swing"*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2000.

ALIGHANBARI, H. Stability and bifurcations of an airfoil-aileron combination in two-dimensional incompressible inviscid flow. *43rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference Exhibit*, Denver, CO, April 22-25 2002.

ALIGHANBARI, H.; HASHEMI, S. Bifurcations analysis of an airfoil containing a cubic structural nonlinearity and subjected to two-dimensional incompressible flow. *43rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference Exhibit*, Denver, CO, April 22-25 2002.

ALLGOWER, E. L.; GEORG, K. *Numerical Continuation Methods*. Reino Unido: Springer-Verlag, 1990. 412p p.

ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Estados Unidos: Springer-Verlag New York, 1996.

ALONSO, J. J.; JAMESON, A. Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions. *32nd AIAA Aerospace Sciences*, 10-13 January 1994.

ANDERSON, J. D. J. *Computational fluid dynamics - the basics with applications*. Estados Unidos: McGraw-Hill International Editions, 1995.

ASHLEY, H. Flutter suppression within reach. *Aerospace America*, v. 38, n. 8, p. 14–16, 1988.

AZEVEDO, J. On the development of unstructured grid finite volume solver for high speed flows. In: *Report NT-075-ASE-N/92 - Instituto de Aeronáutica e Espaço*. São José dos Campos, SP, Brasil: [s.n.], 1992.

BADCOCK, K. J.; RICHARDS, B. E.; WOODGATE, M. A. Elements of computational fluid dynamics on block structured grids using implicit solvers. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 36, n. 5, p. 351–392, 2000.

BADCOCK, K. J.; WOODGATE, M. A. Fast prediction of transonic aeroelastic stability and limit cycles. *AIAA Journal*, v. 45, n. 6, p. 1370–1381, 2007.

BADCOCK, K. J.; WOODGATE, M. A.; BERAN, P. Fast prediction wing rock limit cycles oscillations based on computation fluid dynamics. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8-11 Jan*. Reno, NV: [s.n.], 2007.

BADCOCK, K. J.; WOODGATE, M. A.; RICHARDS, B. E. Hopf bifurcation calculations for simmetric airfoil in transonic flow. *AIAA Journal*, v. 42, n. 5, May 2004.

- BADCOCK, K. J.; WOODGATE, M. A.; RICHARDS, B. E. Direct aeroelastic bifurcations analysis of a symmetric wing based on the Euler equations. *Journal of Aircraft*, v. 42, n. 3, 2005.
- BAE, J. S.; YANG, S. M.; LEE, I. Linear and nonlinear aeroelastic analysis of fighter-type wing with control surface. *Journal of Aircraft*, v. 39, n. 4, p. 697–708, Jul-Aug 2002.
- BALHAUS, W. F.; GOORJIAN, P. M. Computation of unsteady transonic flows by the indicial method. *AIAA Journal*, v. 16, n. 2, p. 117–124, 1978.
- BENDIKSEN, O. Transonic flutter. *42rd Structures, Structural Dynamica, and Materials Conference Exhibit*, Denver, CO, April 22-25 2002.
- BENDIKSEN, O.; FRIEDMANN, P. Coupled bending torsion flutter in cascade. *AIAA Journal*, v. 18, n. 2, p. 194–201, Feb 1980.
- BENNETT, R. M.; EDWARDS, J. W. An overview of recent developments in computational aeroelasticity. *AIAA Journal*, p. 1–14, Jun 1998.
- BERAN, P.; STRGANAC, T. W.; KIM, K.; NICHKAWDE, C. Studies of store-induced limit-cycle oscillations using a model with full system nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, Netherlands, v. 37, p. 323–339, 2004.
- BERAN, P. S.; MORTON, S. A. Continuation method for calculation of transonic airfoil flutter boundaries. *Journal of Guindance, Control, and Dynamics*, v. 20, n. 6, 1997.
- BIGARELLA, E.; AZEVEDO, J. A study of convective flux computation schemes for a aerodynamic flows. In: *AIAA Paper No. 2005-0633, 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV: [s.n.], 2005.
- BIGARELLA, E.; BASSO, E.; AZEVEDO, J. Centered and upwind multigrid turbulent flow simulations with application to launch vehicles. In: *AIAA Paper No. 2004-5384, 22nd AIAA Applied Aerodynamics Conference and Exhibit, Providence*. RI: [s.n.], 2004.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. *Principles of Aeroelasticity*. Estados Unidos: Dover - New York, 1962.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. Estados Unidos: Dover - New York, 1996.
- BORLAND, C. J.; RIZZETTA, D. P. Nonlinear transonic flutter analysis. *AIAA Journal*, v. 20, n. 11, 1982.
- BUNTON, R. W.; DENEGRI, C. M. Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft. *Journal of Aircraft*, v. 37, n. 5, p. 916–918, 2000.
- CAMILO, E. *Solução numérica das equações de Euler para representação do escoamento transônico em aerofólios*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2003.
- CAMILO, E.; MARQUES, F.; AZEVEDO, J. Time-marching aeroelastic analysis of typical sections with structural nonlinearities in transonic regime. In: *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 2007*. Ilhabela, S.P., Brasil: [s.n.], 2007.

- CAMILO, E.; MARQUES, F.; AZEVEDO, J. L. F. Nonlinear phenomena in computational transonic aeroelasticity. In: *18th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2005*. Ouro Preto - MG, Brazil: [s.n.], 2005.
- CAMILO, E.; MARQUES, F.; AZEVEDO, J. L. F. Aeroelastic analysis of typical sections with structural and aerodynamic nonlinearities. In: *25th International Council of the Aeronautical Sciences - ICAS 2006*. Hamburgo - Alemanha: [s.n.], 2006.
- CANTARINI, F.; DUBUC, L.; GRIBBEN, B.; WOODGATE, M.; BADCOCK, K.; RICHARDS, B. Approximate jacobians for the solution of the Euler and Navier-Stokes equations. In: *University of Glasgow, Aerospace Engineering report 9704*. Glasgow, Escócia: [s.n.], 1997.
- CASTILHO, Z. *A new algorithm for continuation and bifurcation analysis of large scale free surface flows*. Tese (Doutorado) — Rice University, Houston, Texas, August 2004.
- CHEN, X.; ZHA, G.; HU, Z.; YANG, M. Flutter prediction based on fully coupled fluid-structural interactions. *9th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference*, 16-19 Mar 2004.
- CHUNG, K.; CHAN, C.; LEE, B. Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with free-play structural nonlinearities by a perturbation-incremental method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 299, p. 520–539, 2007.
- CONNER, M.; TANG, D.; DOWEL, E.; VIRGIN, L. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: a numerical and experimental. *Journal of Fluids and Structures*, p. 89–109, 1997.
- CUMMINGS, P. A. Continuation methods for qualitative analysis of aircraft dynamics. *NASA/CR-2004-213035 National Institute of Aerospace*, Hampton, Virginia, July 2004.
- DEMARQUI, C.; CAIXETA, P.; CICOGNA, T. Aeroelastic analysis of non-linear airfoil. In: *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 2007*. Ilhabela, S.P., Brasil: [s.n.], 2007.
- DENEGRI, C. M. Limit cycle oscillation flight test results of a fighter with external stores. *Journal of Aircraft*, v. 37, n. 5, p. 761–769, 2000.
- DHOOGHE, A.; GOVAERTS, W.; KUZNETSOV, Y. A.; RIET, A. Matcont: A continuation toolbox in matlab. In *Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing, Melbourne, FL*, p. 161–166, 2003. Software disponível em: <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/cm>.
- DOEDEL, E. J.; CHAMPNEYS, A. R.; FAIRGRIEVE, T.; KUZNETSOV, B.; WANG, X. J. Auto97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, user's guide. *Concordia University, Montreal, P.Q., Canada*, 1986. Software disponível em: <http://indy.cs.concordia.ca/AUTO>.
- DOI, H. *Fluid/structure coupled aeroelastic computations for transonic flows in turbomachinery*. Tese (Doutorado) — Stanford University, Stanford, UK, Aug 2002.
- DOWELL, E. A.; HALL, K. C. Modeling of fluid-structure interaction. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 33, p. 445–490, 2001.

DOWELL, E. H. *A modern course in aeroelasticity*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1995. 699p p.

DOWELL, E. H. Nonlinear aeroelasticity. *Journal of Aircraft*, v. 40, n. 5, p. 857–874, Sep-Oct 2003.

DOWELL, E. H.; TANG, D. Limit-cycle hysteresis response for a high-aspect-ratio wing model. *Journal of Aircraft*, v. 39, n. 5, p. 885–888, Sep-Oct 2002.

DOWELL, E. H.; TANG, D. Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics. *AIAA Journal*, v. 40, n. 9, p. 1697–1707, Sep 2002.

DOWELL, E. H.; VIRGIN, L. Nonlinear aeroelasticity and chaos. In: *Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 531–546.

DUBUC, L.; CANTARINI, F.; WOODGATE, M. A.; GRIBBEN, B.; BADCOCK, K.; RICHARDS, B. Euler unsteady equation using deforming grids. *Glasgow University Technical Report 9704*, 1997.

FIDDES, S. P.; GAITONDE, A. L.; JONES, D. P. A Navier-Stokes method for unsteady compressible and incompressible flows past deforming surfaces. *The Royal Aeronautical Society - Unsteady Aerodynamics - Two Day Conference*, London, UK, p. 6.1–6.14, 17-18 Jul 1996.

FRIEDMANN, P. P. Renaissance of aeroelasticity and its future. *Journal of Aircraft*, v. 36, n. 1, p. 102–121, Jan-Feb 1999.

FRIEDMANN, P. P. The renaissance of aeroelasticity and its future. In: *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, CEAS 97*. Roma, Itália: [s.n.], 2007. v. 1, p. 19–49.

FUNG, Y. *The theory of aeroelasticity*. Estados Unidos: John Wiley & Sons Inc, 1955.

FöRSCHING, H. A survey of aeroelastic problems. In: *Aeroelastic Problems in Aircraft Design*. Lecture Series (Von Karman Institute for Fluid Dynamics: [s.n.], 1979.

GARRICK, I.; REED, W. Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, v. 18, n. 11, p. 897–912, 1981.

GONCALVES, P. B. Instabilidade de sistemas dinâmicos. In: *Aplicações em Dinâmica e Controle APLICON*. São Carlos-SP-Brazil: [s.n.], 2001.

GOURA, G. *Time Marching Analysis of flutter using computational fluid dynamics*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, Glasgow, Scotland, Sept 2001.

HENON, M. On the numerical computation of Poincaré maps. In: *Physica 5D - North Holland Publishing Company*. Holanda: [s.n.], 1982. p. 412–414.

HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of numerical discretization*. Brussels, Bélgica: John Wiley & Sons Ltd., 1988a.

HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: computational methods for inviscid and viscous flows*. Brussels, Bélgica: John Wiley & Sons Ltd., 1988b.

- JAMESON, A. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. In: TECHNICAL REPORT. [S.l.], 1991.
- JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical simulation of the Euler equation by finite volume using Runge-Kutta time stepping schemes. *AIAA Paper*, p. 81–1259, 1981.
- JAMESON, A.; YOON, S. Multigrid solution of the Euler equation using implicit schemes. *AIAA Journal*, p. 1737–1743, Nov 1986.
- KHOLODAR, D. B. K.; THOMAS, J. P.; DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Parametric study of transonic airfoil flutter and limit-cycle oscillation behavior. *43rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, Denver, CO, 2002.
- KHOLODAR, D. B. K.; THOMAS, J. P.; DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Limit cycle oscillations of a typical airfoil in transonic flow. *In Review, Journal of Aircraft*, 2003.
- KIM, K.; STRGANAC, T. W. Aeroelastic studies of a cantilever wing with structural and aerodynamic nonlinearities. *43rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference Exhibit*, Denver, CO, April 22-25 2002.
- KOCAK, H.; HALE, J. *Dynamics and bifurcations*. Estados Unidos: Springer-Verlag, 1991.
- KOUSEN, K. A.; BENDIKSEN, O. O. Limit cycle phenomena in computational transonic aeroelasticity. *Journal of aircraft*, v. 32, n. 2, p. 1257–1263, 1994.
- LAI, K.; TSAI, H. Flutter simulation and prediction with CFD-based reduced-order model. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8-11 Jan*. Reno, NV: [s.n.], 2007.
- LEE, B. H. K.; PRICE, S. J.; WONG, Y. S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, p. 205–334, 1999.
- LEE, I.; KIM, S.-H. Aeroelastic analysis of a flexible control surface with structural nonlinearity. *Journal of Aircraft*, v. 32, n. 4, Jul-Aug 1995.
- LEE-RAUSCH, E. M.; BATINA, J. D. Wing flutter boundary prediction using unsteady Euler aerodynamic method. *Journal of aircraft*, v. 32, n. 2, p. 416–422, Mar-Apr 1995.
- LEE-RAUSCH, E. M.; BATINA, J. D. Wing flutter computations using an aerodynamic model based on the Navier-Stokes equations. *Journal of aircraft*, v. 33, n. 6, p. 1139–1147, 1996.
- LIEU, T.; FAHAT, C. Aerodynamic parameter adaptation of CFD-based reduced-order models. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8-11 Jan*. Reno, NV: [s.n.], 2007.
- LIU, E.; CAI, J.; ZHU, Y.; TSAI, H. M.; WONG, A. S. F. Calculation of wing flutter by a coupled fluid-structure method. *Journal of Aircraft*, v. 38, n. 2, p. 334–342, Mar-Apr 2001.
- LIU, L.; WONG, Y.; LEE, B. Error analysis of Runge-Kutta's discretizations of certain types of dynamic systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, p. to be published, 2002.
- LIU, L.; WONG, Y.; LEE, B. Non-linear aeroelastic analysis using the point transformation method, part I: freeplay model. *Journal of Sound and Vibration*, v. 253, n. 2, p. 447–469, 2002.

LUCIA, D. J.; BERAN, P. S.; KING, P. I. Reduced-order modeling of an elastic panel in transonic flow. *Journal of Aircraft*, v. 40, n. 2, p. 338–347, Mar-Apr 2003.

LUI, L.; WONG, Y.; LEE, B. Application of the centre manifold theory in non-linear aeroelasticity. *Journal of Sound and Vibration*, v. 234(4), p. 641–659, 2000.

MARQUES, A.; AZEVEDO, J. Application of CFD-based unsteady forces for efficient aeroelastic stability analyses. In: *AIAA Paper No. 2006-250, 44rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV.: [s.n.], 2006.

MARQUES, A.; AZEVEDO, J. Efficient flutter analyses using CFD-based unsteady aerodynamic forces. In: *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 2007*. Ilhabela, S.P., Brasil: [s.n.], 2007.

MARQUES, A.; SIMOES, C. F. C.; AZEVEDO, J. L. F. An aeroelastic analysis methodology for two-dimensional lifting surface. In: *Proceedings of the XI DINAME*. Ouro Preto-MG-Brazil: [s.n.], 2005.

MARQUES, F. *Multi-layer functional approximation of nonlinear unsteady aerodynamic response*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, 1997.

MARQUES, F.; CAMILO, E.; DEMARQUI, C.; AZEVEDO, J.; BADCOCK, K. Strucutral nonlinearities parameter analysis for typical section transonic aeroelasticity. In: *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2007*. Stockholm, Sweden: [s.n.], 2007.

MARQUES, F.; DEMARQUI, C. J.; CAIXETA, P. Active control of non-linear aeroelastic response using conformal control surfaces. In: *AIAA 2006-1837, 47d AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2006*. Rhode Island, Estados Unidos: [s.n.], 2006.

MARQUES, F.; OLIVEIRA, V.; BELO, E.; ROSOLEN, J.; SIMONI, A. Non-linear phenomena analysis of stall-induced aeroelastic oscillations. In: *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2004*. Palm springs, Estados Unidos: [s.n.], 2004.

MARQUES, F. D.; SIMONI, A.; OLIVEIRA, V. Non-linear phenomena analysis and chaos prediction of stall-induced aeroelastic oscillations via Lyapunov exponents. In: *25th International Council of the Aeronautical Sciences - ICAS 2006*. Hamburgo - Alemanha: [s.n.], 2006.

MAVRIPLIS, D. Accurate multigrid solution of the Euler equations on unstructured and adaptive meshes. *AIAA Journal*, v. 28, n. 2, Feb 1990.

MEIROVITCH, L. *Elements of vibration analysis*. Estados Unidos: McGraw-Hill International Editions, 1986.

MORTON, S. *Nonlinear analysis of airfoil flutter at transonic speeds*. Tese (Doutorado) — School of Engineering of the Air Force Institute of Technology, May 1996.

MORTON, S. A.; BERAN, P. S. Hopf-bifurcation analysis of airfoil flutter at transonic speed. *Journal Aircraft*, v. 36, n. 2, Mar-Apr 1999.

- MUNTEANU, S.; RAJADAS, J.; NAM, C.; CHATTOPADHYAY, A. Reduced-order-model approach for aeroelastic analysis involving aerodynamic and structural nonlinearities. *AIAA Journal*, v. 43, n. 3, p. 560–571, Mar 2005.
- NAYFEH, A. H.; BALAKUMAR, B. *Applied nonlinear dynamics systems. Analitical, computational and experimental methods*. Estados Unidos: John Wiley and Sons, 1995.
- NEWSON, J. R. *Disigning active control laws in a computational aeroelasticity environment*. Dissertação (Mestrado) — Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002.
- NIXON, A. *Unsteady transonic aerodynamics*. Estados Unidos: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989. (Progress in Astronautics and Aeronautics, v. 120).
- NOLL, T. E. Aeroservoelasticity. In: *Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. Long Beach, CA: [s.n.], 1990. p. 1560–1570.
- OLIVEIRA, L. C. *Uma metodologia de análise aeroelástica com variáveis de estado utilizando técnicas de aerodinâmica computacional*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Agosto 1993.
- OSHER, S.; CHAKRAVARTHY, S. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general coordinates. *Journal Computational Physics*, v. 50, p. 447–481, 1983.
- PARANJAPPE, A.; SINHA, N.; ANANTHKRISHNAN, N. Use of bifurcation and continuation methods for aircraft trim and stability analysis - a state-of-the-art. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8-11 Jan*. Reno, NV: [s.n.], 2007.
- PREIDIKMAN, S. *Numerical simulations of interactions among aerodynamics structural dynamics and control systems*. Tese (Doutorado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 10Oct 1998.
- PRICE, S.; KELERIS, J. Non-linear dynamics of an airfoil forced to oscillate in dynamic stall. *Journal of sound and vibration*, v. 194, n. 2, p. 1395–1401, 1996.
- PRICE, S.; LEE, B. H. K.; ALIGHANBARI, H. Post instability behavior of a two dimensional airfoil with a structural nonlinearity. *Journal of Aircraft*, v. 31, p. 1395–1401, 1994.
- PRICE, S. J.; LEE, B. H. K.; ALIGHANBARI, H. Postinstability behavior of a two-dimensional airfoil with a structural nonlinearity. *Journal of Aircraft*, v. 31, n. 6, p. 1395–1401, Nov-Dec 1994.
- PULLIAM, T. H. Artificial dissipation models for the Euler equations. *AIAA Journal*, v. 24, n. 12, p. 1931–1940, Dec 1986.
- ROBERTS, I.; GAITONDE, A.; JONES, D. Limit-cycle identification in transonic aeroelastic system. In: *35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. Toronto, Canada: [s.n.], 2005.
- ROBERTS, I.; JONES, D.; LIEVEN, N.; BERNARDO, M.; CHAMPNEYS, A. Analysis of piecewise linear aeroelastic system. In: *Bristol University*. Bristol, England: [s.n.], 2002.

SANDFORD, M.; RUHLIN, C.; ABEL, I. Transonic flutter study of a 50.5o cropped-delta wing with rearward-mounted nacelles. *NASA TN D-7544*, 1974.

SANDFORD, M.; SEYDEL, D.; ECKSTROM, C. Geometrical and structural properties of an aeroelastic research wing (arw-2). *NASA TM-4110*, 1989.

SEDAGHAT, A.; COOPER, J.; LEUNG, A. Estimation of the Hopf bifurcation point for aeroelastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 248(1), p. 31–42, 2001.

SEDAGHAT, G. A.; COOPER, J. E.; WRIGHT, J. R. Modelling of non-linear aerodynamics during limit cycle oscillations. *Leuven, Belgium*, Sep 2000.

SEYDEL, R. *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Estados Unidos: Elsevier, New York, 1994.

SIMÕES, C. F. C.; AZEVEDO, J. L. F. The influence of numerical parameters on unsteady airfoil inviscid flow simulations using unstructured dynamic meshes. In: *Brazilian Progress in Aerospace Engineering*. Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil: [s.n.], 1999.

SIMONI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. An investigation on Lyapunov exponents calculation methods applied to experimental aeroelastic data. In: *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 2007*. Ilhabela, S.P., Brasil: [s.n.], 2007.

TANG, D.; DOWELL, E. H. Limit cycle oscillation of two-dimensional panels in low subsonic flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 37, n. 7, p. 1181–1198, Oct 2002.

TERRA, M. O. Bifurcation and chaos in computational mechanics: recent contributions to aerospace engineering. *Anais do DINCON*, v. 2, p. 203–208, 2003.

THOMAS, J. P.; DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Transonic limit cycle oscillation analysis using reduced order aerodynamic models. *42rd Structures, Structural Dynamica, and Materials Conference and Exhibit*, Seattle WA, Apr 2001.

THOMAS, J. P.; DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Nonlinear inviscid aerodynamic effects on transonic divergence, flutter, and limit-cycle oscillations. *AIAA Journal*, v. 40, n. 4, p. 638–646, Apr 2002.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear dynamics and chaos*. Estados Unidos: John Wiley & Sons, 1986.

TIJDEMAN, H. Investigation of the transonic flow around oscillating airfoil. In: *NLR-TR-77090U National Aerospace Laboratory*. The Netherlands: [s.n.], 1977.

VAN-LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal Computational Physics*, v. 14, p. 361–370, 1983.

VENKATAKRISHNAN, V. *Implicit schemes and parallel computing in unstructured grid CFD*. Apr 1995. Institute for Computer Applications in Science and Engineering.

VENKATAKRISHNAN, V.; JAMESON, A. Computation of unsteady transonic flows by the solution of Euler equation. *AIAA Journal*, p. 974–981, Aug 1988.

WOODGATE, M.; BADCOCK, K.; RICHARDS, B. Towards the direct prediction of non-linear transonic flutter characteristics. *Department of Aerospace Engineering, Glasgow University Technical Report 0013*, 2000.

WOODGATE, M. A.; BADCOCK, K. Aeroelastic damping model derived from discrete Euler equations. *AIAA Journal*, v. 44, n. 11, p. 2601–2611, 2006.

WOOLSTON, D.; RUNYAN, H.; ANDREWS, R. An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 24, p. 57–63, 1957.

YATES, E. J.; LAND, N.; FOUGHNER, J. Measured and calculated subsonic and transonic flutter characteristics of a 45° sweptback wing planform in air and in freon-12 in the langley transonic dynamic tunnel. *NASA TN-1616*, 1963.

YOO, J.-K.; PARK, Y.-K.; HAN, J.-K. Aeroelastic analysis of a wing with freeplay in the subsonic/transonic regions. *JSME International Journal*, v. 48, n. 2, 2005.