Neilor Cesar dos Santos

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE TRINCAS EM MATERIAIS
ANISOTRÓPICOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS: ABORDAGEM PELA INTEGRAL J_k

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço.....03/03/06.....

Ass.:.....

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

DEDALUS - Acervo - EESC

31100053722

Orientador: Prof. Dr. Jonas de Carvalho

São Carlos
2006

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **NEILOR CESAR DOS SANTOS**

Tese defendida e julgada em 17-02-2006 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado.

Prof. Dr. **ERNESTO MASSAROPPI JUNIOR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Titular **HAZIM ALI AL-QURESHI**
(Universidade Federal de Santa Catarina/ UFSC)

Aprovado

Prof. Dr. **PAULO SOLLERO**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

DEDICATÓRIA

À Vilma e a Natália com muito amor e carinho

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Jonas de Carvalho pela orientação e amizade durante a realização deste trabalho.

Aos Professores Waldek Wladimir Bose Filho e Ernesto Massaroppi Júnior (EESC/USP), pela presteza e companheirismo.

Aos Professores Aleksandro Guedes de Lima e Edgard de Macedo Silva (CEFET-PB) que nesta etapa final foram sinônimos de amizade e força.

Aos Professores da Coordenação de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da EESC/USP pelas discussões e aprendizado.

Aos Professores da Coordenação de Mecânica do CEFET-PB pela oportunidade.

Aos amigos, Mariano Moreno, Sérgio Evangelista (toddy), Cesar Aparicio (compa), Rodrigo Canto, Volnei Tita, Romeu Rony, Amauri Bravo, Rogério Ikegami e Geraldo Silvestre pelas discussões e apoio sempre.

A “turma da pós”, amigos que sempre estiveram presentes, Jaqueline Barbosa (jack), Elizabeth (beth), Gisleine Campos (gi), Luciana Montanari (lu), Fabiana Klein (fã), Kelen Cristina e Paulo Marcos.

Aos meus pais, irmãos, cunhados (as), sobrinhos (as)...

RESUMO

SANTOS, N. C. (2005). *Análise de problemas de trincas em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos finitos: abordagem pela Integral J_k* . Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Apresenta-se um estudo, por meio do método dos elementos finitos, de problemas quase-estáticos de trincas em materiais anisotrópicos. Os fatores de intensidade de tensão em modo misto de carregamento foram determinados utilizando-se as metodologias da integral J_k , da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada. Para a integral J_k , foi desenvolvida uma formulação baseada nas leis da conservação da elasto-estática e das integrais independentes do percurso. Na expressão, para a integral J_2 levou-se em consideração o termo não singular da representação analítica do campo de tensões. Desta forma, foi obtida uma expressão analítica para a descontinuidade na densidade de energia de deformação, presente na integral J_2 . Com os valores da integral J_k , os fatores de intensidade de tensão puderam ser determinados diretamente. Com a mesma sistemática, desenvolvida para a integral J_2 , determinou-se a integral J_1 para problemas que envolvem carregamento nas faces da trinca. Os resultados obtidos estão de acordo com os resultados presentes na literatura considerando ortotropia de material, ainda que para algumas configurações o mesmo é tratado como um caso de anisotropia geral. Assim como a integral J_1 a integral J_2 mostrou-se independente do contorno envolvendo a ponta da trinca.

Palavras-chave: integral J_k , correlação dos deslocamentos, integral de fechamento de trinca modificada, fator de intensidade de tensão, integrais independentes do percurso, materiais anisotrópicos, mecânica da fratura, métodos dos elementos finitos.

ABSTRACT

SANTOS, N. C. (2005). Analysis of crack problems in anisotropic materials based on the finite element method: using the integral J_k approach. Ph.D. Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

A study is proposed based on crack quasi-static problems in anisotropic materials by the finite element method. The mixed-mode stress intensity factors were determined by the J_k integral, displacement correlation and modified crack closure integral methodologies. The J_k integral was derived from a conservation law of linear elasticity theory. In the formulation to obtain the J_2 integral the non-singular term in the stress fields was considered. An analytical expression was obtained to discontinuity of the strain energy density in the crack faces, presented by J_2 integral. A similar approach was applied to determine J_1 integral in crack surface tractions problems. The results confer with the results present in the literature considering orthotropic materials. In some configurations the problem is treated from general anisotropy theory. In the same way that J_1 integral the path-independence property was established to J_2 integral.

Keywords: J_k integral; displacement correlation; modified crack closure integral; stress intensity factor; path independent integrals; anisotropic materials, fracture mechanics; finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Organograma de classificação dos materiais compósitos	19
Figura 1.2. Exemplos de materiais compósitos reforçados: (a) por partículas aleatórias; (b) por fibras descontínuas unidirecionais; (c) por fibras descontínuas aleatórias; (d) por fibras contínuas unidirecionais (adaptado de Matthews e Rawlings, 1994). .	19
Figura 1.3. Mecanismos de falha nos materiais compósitos: (1) arrancamento da fibra da matriz; (2) fibra emponte (fiber bridging); (3) descolamento entre fibra e matriz; (4) fratura da fibra; (5) falha da matriz. (adaptado de ANDERSON, 1995).....	20
Figura 2.1 – (a) Corpo carregado (b) Estado triplo de tensão	33
Figura 2.2 – Lâmina ortotrópica	43
Figura 2.3 – Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1x_2) e do laminado ($x'_1x'_2$)	44
Figura 3.1 – Os modos de carregamento: Modo I (a) e Modo II (b) devido a carregamentos de membrana; Modo 1 (c) e Modo 2 (d) devido a carregamentos de flexão e torção e Modo III (e) devido a carregamento de cisalhamento transversal.	52
Figura 3.2 – Definição dos eixos coordenados na ponta da trinca.....	53
Figura 3.3 – Crescimento de trinca auto-similar.....	56
Figura 3.4 – Contornos circundando a ponta da trinca.	58
Figura 3.5 - Geometria da malha na ponta da trinca (roseta de elementos), mostrando o comprimento do elemento singular (L) e do elemento regular (b).	61
Figura 3.6 – Representação das forças e deslocamentos nodais	66
Figura 4.1 – Corpo com uma trinca (adaptado de Kim e Paulino, 2002)	73
Figura 4.2 – Classificação de problemas com materiais anisotrópicos (adaptado de Su e Sun, 20003)	78
Figura 4.3 – Figura esquemática do contorno de integração mostrando as distâncias $((d - \delta)$ e δ) definidas nas faces da trinca.....	81
Figura 4.4 – Contornos circundando a ponta da trinca, (adaptado de Raju e Shivakumar (1990)	84
Figura 5.1 - Fluxograma simplificado da estrutura do programa de elementos finitos EFICAS (ANGÉLICO et al., 2004).	90
Figura 5.2 – Chapa com uma trinca central.	91
Figura 5.3 – Discretização da malha de elementos finitos para $a/L = 16$ e $N = 16$	93

Figura 5.4 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) em função dos valores de β_2^2 e da relação a/W	96
Figura 5.5 – Chapa com uma trinca central inclinada em relação a direção de carregamento.	97
Figura 5.6 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme	102
Figura 5.7 – Contornos utilizados para o cálculo da integral J_k	103
Figura 5.8 – Valores da Integral J_k para diversos contornos.....	104
Figura 5.9 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de tração uniforme numa das extremidades	105
Figura 5.10 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão	108
Figura 5.11 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades	109
Figura 5.12 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão	112
Figura 6.1 – Trinca carregada em parte da sua face superior, numa distância $b \leq X_1 \leq c$	119
Figura 6.2 – Valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados em função de β_2^2	124
Figura 6.3 – Valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados em função de β_2^2	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Classificação de anisotropia de problemas de trinca baseado nos parâmetros s_1 e s_2 (adaptado de Su e Sun, 2003).	79
Tabela 5.1 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	94
Tabela 5.2 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	94
Tabela 5.3 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	95
Tabela 5.4 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	95
Tabela 5.5 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	98
Tabela 5.6 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)	99
Tabela 5.7 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ e $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$) calculados a partir do valor de J_2	100
Tabela 5.8 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$) calculados a partir do valor de J_2 sem a correção da componente referente às faces da trinca	101
Tabela 5.9 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	104
Tabela 5.10 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)	104
Tabela 5.11 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	106
Tabela 5.12 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)	107
Tabela 5.13 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)	109
Tabela 5.14 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)	110
Tabela 6.1 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a} = 1,0$)	123

Tabela 6.2 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a} = 1,0$).....	123
Tabela 6.3 – Parâmetros para o cálculo do fator de correção.	125
Tabela 6.4 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a} = 0,5$).....	125
Tabela 6.5 – Valores da integral J_1 para os contornos da malha de elementos finitos.	126
Tabela 6.6 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para $\beta_2^2 = 0,1$	127
Tabela 6.7 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para $\beta_2^2 = 4,5$	127

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BEM	- <i>Boundary Element Method</i>
CTOD	- <i>Crack Tip Opening Displacement</i>
EDI	- <i>Equivalent Domain Integral</i>
EFICAS	- Elementos Finitos CASeiro ¹
F2LEM	- <i>Fractal Two-Level Finite Element Method</i>
FEM	- <i>Finite Element Method</i>
FGM	- <i>Functionally Graded Materials</i>
IDE	- Integral de Domínio Equivalente
IFTM	- Integral de Fechamento de Trinca Modificada
LTC	- Laboratório de Tribologia e Compósitos
MCCI	- <i>Modified Crack Closure Integral</i>
MEC	- Método dos Elementos de Contornos
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MFLE	- Mecânica da Fratura Linear Elástica
MGF	- Materiais com Gradientes Funcionais

¹ *Software* de Elementos Finitos desenvolvido no Laboratório de Tribologia e Compósitos da EESC/USP.

LISTA DE SÍMBOLOS

σ^*	- valor da tensão requerida para a instabilidade
γ	- densidade de energia de superfície ou tensão de superfície
K	- fator de intensidade de tensão
K_I	- fator de intensidade de tensão, K , no modo I
K_{II}	- fator de intensidade de tensão, K , no modo II
K_{III}	- fator de intensidade de tensão, K , no modo III
K_1	- fator de intensidade de tensão, K , no modo 1 (carregamento fora do plano)
K_2	- fator de intensidade de tensão, K , no modo 2 (carregamento fora do plano)
X_1	- eixo coordenado
X_2	- eixo coordenado
X_3	- eixo coordenado
J	- integral de linha circundando a ponta da trinca
$u_{i,1}$	- derivada dos deslocamentos em relação ao eixo X_1
W	- densidade de energia de deformação
t_i	- vetor tensão que atua no contorno
n_j	- componente do vetor unitário normal ao contorno
$d\Gamma$	- comprimento elementar ao longo do contorno
Γ_j	- contornos que circunda a ponta da trinca
$r^{-1/2}$	- singularidade de deformação (tensão)
r	- distância tomada a partir da ponta da trinca
Ω	- domínio contornado por Γ
σ_{ij}	- tensor tensão
ε_{kl}	- O tensor de deformação considerando os deslocamentos infinitesimais, em relação aos eixos coordenados
$u_{k,l}$	- derivadas dos deslocamentos em relação aos eixos coordenados
S_{ijkl}	- tensor de flexibilidade elástica
C_{ijkl}	- tensor de rigidez elástica
ε_i	- deformações de engenharia (tensor de deformação reduzida)
ν_{ij}	- coeficientes de Poisson
$\zeta_{ij,jk}$	- coeficientes de Chentsov
E_{kk}	- módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos X_k
ω_{ij}	- parâmetros função das raízes da eq. característica
$\eta_{jk,l}$	- coeficientes de influência mútua de primeira espécie
$\eta_{l,jk}$	- coeficientes de influência mútua de segunda espécie
T	- matriz de transformação, ou índice transposto de uma matriz
α	- ângulo de rotação do sistema de coordenadas

$\bar{Q}$	- matriz de rigidez transformada
$\bar{a}$	- matriz de flexibilidade transformada
$q(X_1, X_2)$	- função ponderadora
u_{rel}	- deslocamento relativo das faces da trinca
K_{rel}	- razão entre os fatores de intensidade de tensão
$\sigma_{\theta max}$	- tensão circunferencial máxima
G_{max}	- máxima taxa de liberação de energia
S_{min}	- densidade de energia mínima
θ_c	- ângulo de propagação da trinca
θ	- ângulo entre o raio e eixo imaginário paralela à face da trinca
σ_{12}	- tensão ao longo da frente da ponta da trinca
σ_{22}	- tensão ao longo da frente da ponta da trinca
u_1	- deslocamento relativo ao deslizamento entre as superfícies da trinca
u_2	- deslocamento relativo a abertura entre as superfícies da trinca
u_1^j	- deslocamento na direção 1 do nó j na ponta da trinca
u_1^l	- deslocamento na direção 1 do nó l na ponta da trinca
u_1^k	- deslocamento na direção 1 do nó k na ponta da trinca
u_1^m	- deslocamento na direção 1 do nó m na ponta da trinca
u_2^j	- deslocamento na direção 2 do nó j na ponta da trinca
u_2^l	- deslocamento na direção 2 do nó l na ponta da trinca
u_2^k	- deslocamento na direção 2 do nó k na ponta da trinca
u_2^m	- deslocamento na direção 2 do nó m na ponta da trinca
δ_{jk}	- delta de Kronecker
δ	- distância característica introduzida a partir da ponta da trinca
w_q	- fator de ponderação
σ_{ij}	- tensor das tensões
t_i	- vetor de forças de superfícies
a_{ij}	- tensor de flexibilidade considerando tensão e deformação reduzida para um estado plano de tensão
Q_{ij}	- tensor de rigidez considerando tensão e deformação reduzida
G_{ij}	- módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos X_i, X_j
b_{ij}	- tensor de flexibilidade considerando tensão e deformação reduzida para um estado de plano de deformação
$U(x_1, x_2)$	- função tensão
Δ_j	- operador diferencial
s_j	- raízes da equação característica do problema
α_j	- parcela real das raízes da equação características
β_j	- parcela imaginária das raízes da equação características ou ângulo da trinca

z_j	- funções de variáveis complexas
$\phi(z_j), \psi(z_j)$	- derivadas das funções tensão
b	- semi-eixo da elipse
$\sigma_1^I, \sigma_2^I, \sigma_6^I$	- tensões ao longo da frente da ponta da trinca para o modo I
$\sigma_1^{II}, \sigma_2^{II}, \sigma_6^{II}$	- tensões ao longo da frente da ponta da trinca para o modo II
u_1^I, u_2^I	- deslocamentos ao longo da frente da ponta da trinca para o modo I
u_1^{II}, u_2^{II}	- deslocamentos ao longo da frente da ponta da trinca para o modo II
F_{ij}	- forças nodais à frente da trinca
J_1^δ	- integral J_1 calculada a uma distância δ da ponta da trinca
J_2^δ	- integral J_2 calculada a uma distância δ da ponta da trinca
$[W^+ - W^-]$	- descontinuidade na densidade de energia de deformação
δ_1 e δ_2	- distâncias a partir da ponta da trinca
p_j, q_j	- funções das raízes da equação característica do problema
K_{IC}^I, K_{IC}^2	- tenacidade à fratura nas direções 1 e 2
σ, τ	- tensões aplicadas na chapa trincada
$\sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_{r\theta}$	- tensões em coordenadas cilíndricas
$2h$	- altura da chapa trincada
$2W$	- largura da chapa trincada
a	- comprimento de trinca ou semi-eixo da elipse
E	- módulo de Young do material.
α_{ij} e β_{ij}	- coeficientes que relacionam os valores de K_I e K_{II} com J_1 e J_2
D_i e E_i	- parâmetros função das raízes da equação característica
G	- taxa de liberação de energia
G_I	- componente da taxa de liberação de energia referente ao modo I de fratura
G_{II}	- componente da taxa de liberação de energia referente ao modo II de fratura
H	- espessura de uma placa laminada
H	- número de graus de liberdade da malha de elementos finitos
$\text{Im} []$	- parte imaginária de uma dada função
J_1	- primeira componente da integral (J_k)
J	- matriz Jacobiana
J_2	- segunda componente da integral (J_k)
J_k	- integral independente do percurso
K_t	- fator de concentração de tensão
L	- integral independente do percurso
L	- comprimento do elemento singular na ponta da trinca
M	- integral independente do percurso
m, n	- co-senos diretores
N	- número de elementos da roseta da ponta da trinca
$\text{Re} []$	- parte real de uma dada função
T	- termo não singular do campos de tensões na ponta da trinca

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	2
AGRADECIMENTOS.....	3
RESUMO	4
ABSTRACT	5
LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	10
LISTA DE SÍMBOLOS.....	11
SUMÁRIO	14
1 INTRODUÇÃO	17
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
1.2 MÉTODOS NUMÉRICOS NA MECÂNICA DA FRATURA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS	24
1.3 OBJETIVOS.....	29
1.4 DESCRIÇÃO DO PRESENTE TRABALHO	30
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA - ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA....	32
2.1 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS - LEI DE HOOKE GENERALIZADA	32
2.2 SOLUÇÃO GERAL DA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA PARA PROBLEMAS NO PLANO.....	38
2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA.....	42
3 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR ANISOTRÓPICA	48
3.1 CONCEITOS IMPORTANTES.....	48
3.2 METODOLOGIAS CLÁSSICAS PARA DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	
60	
3.2.1 Introdução	60
3.2.2 Métodos da correlação dos deslocamentos.....	61
3.2.3 Método da integral de fechamento de trinca modificada.....	64
3.2.4 Integral J	66
4 METODOLOGIA PROPOSTA PARA DETERMINAÇÃO DA INTEGRAL J_2	71

4.1 INTRODUÇÃO.....	71
4.2 FORMULAÇÃO	72
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	89
5.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	89
5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	91
5.2.1 Chapa com trinca central perpendicular à direção de carregamento de tração uniforme (Modo I de carregamento)	91
5.2.2 Chapa com trinca central formando um ângulo com a direção de carregamento de tração uniforme (Modo misto de carregamento)	97
5.2.3 Independência da Integral J_k - Chapa com trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme numa das extremidades.....	102
5.2.4 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme numa das extremidades.....	105
5.2.5 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades.....	108
6 DETERMINAÇÃO DA INTEGRAL J_I COM CARREGAMENTO NAS FACES DA TRINCA	113
6.1 FORMULAÇÃO	113
6.2 ESTUDO DE CASOS	119
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	128
7.1 CONCLUSÕES	128
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	130
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132
APÊNDICE A - Detalhes do equacionamento para implementação numérica da Integral J_k	147
A. Abordagem via integral de contorno	148
B. Análise da componente da integral J_2 nas faces da trinca.....	152
APÊNDICE B - Tabelas referentes aos valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão	155
B.1. Chapa com trinca central perpendicular à direção de carregamento de tração uniforme (Modo I de carregamento)	156

B,1, Chapa com trinca central formando um ângulo com a direção de carregamento de tração uniforme (Modo misto de carregamento)	158
B,1, Chapa com trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme numa das extremidades.....	159
B.1 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades.....	163
APÊNDICE C - Rotinas de cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizadas no ANSYS	165

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Materiais anisotrópicos são materiais que apresentam propriedades mecânicas que variam com a direção. Este comportamento ocorre em materiais que possuem fibras imersas em uma matriz de modo a melhorar sua eficiência estrutural. A associação de dois ou mais materiais distintos dá-se o nome de materiais compósitos. Os materiais compósitos de matriz polimérica surgiram, na sua vertente estrutural, em meados do século XX. Sua elevada resistência e rigidez específicas continuam a ser a combinação que lança os materiais compósitos para novas áreas. No entanto, a grande capacidade de amortecimento e o baixo coeficiente de expansão térmica são características que podem ser adaptadas em aplicações específicas.

Os compósitos são cada vez mais resistentes a solicitações de fadiga e dão uma maior flexibilidade de concepção e fabricação, o que pode reduzir significativamente o número de peças necessárias para um conjunto. Outras vantagens dos materiais compósitos são: a resistência a altas temperaturas, a corrosão e ao desgaste, especialmente em aplicações industriais. Estas características podem conduzir a custos mais baixos de ciclo de vida do produto.

Os avanços tecnológicos dos últimos anos permitem diminuir custos de matérias-primas e de processamento, sendo a garantia vir-se a usufruir mais plenamente as vantagens dos materiais compósitos no século XXI. Prevê-se que estes materiais, continuarão a ter uma aplicação privilegiada em mercados avançados (militar, espacial e aeronáutico), substituindo de forma crescente, os materiais tradicionais em aplicações mais “comuns” de engenharia (como a construção civil – pontes, reforço e reabilitação de pontes e os transportes – automóvel todo em material compósito). Finalmente, espera-se que contribuam para resolver

problemas específicos em alguns novos e importantes nichos de mercado como por exemplo o de próteses. Para terminar deve ser realçado o desafio permanente que estes materiais colocam à imaginação e, conseqüentemente, à investigação e desenvolvimento, o que os posiciona como materiais de elevado potencial de aplicação, (MARQUES, 2005).

Uma definição para material compósito pode ser encontrada em Reinhart e Clements (1987), como sendo uma combinação macroscópica de dois ou mais materiais distintos, havendo uma interface reconhecível entre eles. Nesta combinação, os constituintes retêm suas identidades; quer dizer, eles não se dissolvem ou se descaracterizam completamente e atuam em conjunto, devendo suas propriedades serem superiores às de cada constituinte individualmente.

Muitas vezes a definição de material compósito pode estar restrita a materiais que contenham um reforço e um material aglomerante (matriz). Entretanto na definição estabelecida por Reinhart e Clements (1987) espera-se que o aglomerante tenha a função de manter o reforço unido, transmitindo a este o carregamento aplicado, enquanto que o reforço tem como função suportar os carregamentos transmitidos pela matriz. Os materiais compósitos podem tipicamente ter um ou mais material(s) de reforço, envolvido(s) por uma matriz. No caso de materiais compósitos poliméricos, usualmente, o reforço é mais rígido e mais resistente do que a matriz e há uma fração volumétrica, ou seja, variação percentual dos constituintes, elevada.

Quanto à classificação dos materiais compósitos, a geometria do reforço é um dos principais aspectos a ser considerado, visto que as propriedades mecânicas dos compósitos dependem da forma e das dimensões do mesmo. Descrevem-se os reforços usualmente como sendo fibrosos ou particulados. Por esta razão, Matthews e Rawlings (1994) classificam os materiais compósitos com base na geometria dos seus componentes estruturais, Figura 1.1, separando estes em materiais compósitos reforçados por fibras ou reforçados por partículas.

Figura 1.1 - Organograma de classificação dos materiais compósitos (adaptado de Matthews e Rawlings, 1994)

Em relação à classificação descrita na Figura 1.1, o reforço particulado tem dimensões aproximadamente iguais em todas as direções e o seu arranjo pode ser aleatório ou orientado. Na maioria dos materiais compósitos reforçados por partículas a orientação das partículas é considerada aleatória para fins práticos. Já o reforço fibroso caracteriza-se pelo seu comprimento ser muito maior do que a dimensão da sua seção transversal (diâmetro). Na Figura 1.2 mostra-se, esquematicamente, alguns exemplos de materiais compósitos reforçados por partículas e por fibras.

Figura 1.2. Exemplos de materiais compósitos reforçados: (a) por partículas aleatórias; (b) por fibras descontínuas unidirecionais; (c) por fibras descontínuas aleatórias; (d) por fibras contínuas unidirecionais (adaptado de Matthews e Rawlings, 1994).

Apesar dos avanços surgidos na utilização dos materiais compósitos, certos obstáculos ainda dificultam a integração dos mesmos entre os materiais estruturais utilizados convencionalmente, como o aço ou o alumínio. A dificuldade na previsão do modo de falha exato do material reflete diretamente na confiabilidade dos componentes fabricados, e torna-se ainda mais sério para componentes de alta responsabilidade (CARVALHO, 1996).

Uma característica fundamental é a de que os compósitos possam ser usados em projetos de maneira a evitar a falha que sofrem os “materiais puros” pois, nos compósitos ao ocorrer falha na matriz, todavia tem-se nas fibras uma reserva estrutural do conjunto. Entretanto, a própria natureza dos materiais compósitos faz com que o modo de falha seja complexo, pois envolve vários mecanismos que evoluem simultaneamente. A Figura 1.3 ilustra alguns dos vários mecanismos de falhas que podem ocorrer, tais como: arrancamento da fibra da matriz (1), fibra em ponte (*fiber bridging*) (2), descolamento entre fibra e matriz (3), fratura da fibra (4), falha da matriz (5) (ANDERSON, 1995).

Figura 1.3. Mecanismos de falha nos materiais compósitos: (1) arrancamento da fibra da matriz; (2) fibra em ponte (*fiber bridging*); (3) descolamento entre fibra e matriz; (4) fratura da fibra; (5) falha da matriz. (adaptado de ANDERSON, 1995).

Além desses mecanismos de falhas que geralmente ocorrem dentro de cada lâmina (falha intralaminar), há também o processo de falha interlaminar que se caracteriza pela delaminação entre as lâminas (processo de separação entre duas lâminas adjacentes). Um projeto adequado para estruturas de materiais compósitos pode ser desenvolvido, desde que haja um claro entendimento dos mecanismos de falha e de sua evolução. Dessa forma, conclui-se que a análise do processo de falha nos compósitos é uma tarefa difícil, porém

indispensável, exigindo assim a utilização de modelos de falha que sejam capazes de representar o processo de falha com fidelidade.

A análise de cada modo de falha descrito anteriormente e a avaliação individual do seu efeito no processo de falha do compósito está fora dos objetivos deste trabalho.

Por isso, falhas relacionadas à fratura em materiais compósitos podem, geralmente, ser consideradas em dois níveis: Primeiro, havendo uma fase de formação e propagação de pequenas trincas. Nesta fase, as microestruturas e as interfaces desempenham o papel mais importante, o tamanho da trinca é da ordem das dimensões características do material (microestrutura da matriz, diâmetro das fibras, tamanho das fibras, distância entre fibras, etc.). Nesta primeira abordagem o material pode ser considerado heterogêneo anisotrópico composto de uma fibra, geralmente mais rígida que a matriz (caso dos materiais compósitos poliméricos) envolvida numa matriz isotrópica. A trinca pode existir somente em um dos constituintes num dado instante, na fibra ou matriz e ainda na interface entre os dois constituintes.

No segundo nível do processo de fratura, o tamanho da trinca geralmente é grande comparada com as dimensões características dos constituintes e como consequência, o material compósito pode ser modelado como um contínuo homogêneo anisotrópico com uma trinca macroscópica. Ou seja, a extensão da trinca pode ser modelada ocorrendo em um material idealizado, com uma combinação das propriedades dos constituintes. Nesta abordagem exclui-se a consideração detalhada dos mecanismos de falha mostrados na Figura 1.3.

No contexto descrito no parágrafo anterior é que se fundamenta o campo de estudo que será abordado neste trabalho.

Aqui, desenvolveu-se e estudou-se uma metodologia baseada nas leis da conservação da energia e no conceito das integrais independentes do percurso, para a análise de problemas lineares elasto-estáticos bidimensionais de trincas em materiais anisotrópicos, visto que, dependendo da orientação da trinca e/ou da direção do carregamento, mesmo considerando o material como sendo ortotrópico, a análise do problema deverá ser realizada dentro da abordagem da elasticidade linear anisotrópica.

Os primeiros trabalhos relativos ao estudo da fratura em materiais anisotrópicos foram realizados por Sih et al. (1965), Sih e Liebowitz (1968, p.108), Corten (1972) e Cherepanov (1979, p.71). Entretanto, o desenvolvimento pioneiro das integrais independentes do percurso

se deu por Cherepanov (1967) e Rice (1968). Desde então, inúmeros trabalhos têm sido desenvolvidos baseados no conceito destas integrais (uma delas conceituada como integral J_k) e suas aplicações à Mecânica da Fratura.

As leis da conservação para a elasto-estática linear, dentro do contexto das integrais independentes do percurso, foram primeiramente estudadas por Eshelby² (1956 apud KIENZLER e KORDISCH, 1990) e Günther³ (1962 apud KIENZLER e KORDISCH, 1990). Sem conhecer o trabalho de Günther (1962), Knowles e Sternberg (1972) desenvolveram três tipos de integrais independentes do percurso: Integrais J_k ($k=1,2$), Integral M e Integral L .

Uma interpretação física destas integrais, baseada na taxa de liberação de energia, foi primeiramente dada por Budiansky e Rice (1973). Para a presença de um ponto singular isolado (ex. uma cavidade livre de carregamento nas superfícies), a avaliação destas integrais ao longo de um percurso, no sentido anti-horário, contornando esta cavidade leva à forças guiadoras (ou momentos): de movimento, de expansão e rotação da cavidade relativa a sua configuração original, ou seja, determina a taxa de liberação de energia de movimento, expansão auto-similar e rotação da cavidade ou trinca.

Freund (1978) aplicou a Integral M no estudo de problemas trincas planas, em meio elástico, calculando o fator de intensidade de tensão. Ele estabeleceu uma relação entre a integral J_1 e a integral M . Semelhante relação foi dada para a integral J_2 e a integral L , por Herrmann e Herrmann (1981). Eles sugeriram que desta forma estas integrais podem estabelecer uma descrição mais natural da taxa de liberação da energia elástica para problemas de trincas planas.

Como discutido por Kanninen e Popelar (1985), a integral J definida por Rice (1968) é a primeira componente da integral J_k e é independente do percurso, a qual tem sido largamente utilizada devido ao significado físico da taxa de liberação de energia potencial por unidade de comprimento de avanço da trinca.

² ESHELBY, J. D. (1957). The Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 241, 376-96 apud KIENZLER, R.; KORDISCH, H. (1990). Calculation of J_1 and J_2 using the L and M integrals. *International Journal of Fracture*. v.43, n.3, p.213-225, Jun.

³ GÜNTHER, W. (1962). Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft 14 53-72 apud KIENZLER, R.; KORDISCH, H. (1990). Calculation of J_1 and J_2 using the L and M integrals. *International Journal of Fracture*. v.43, n.3, p.213-225, Jun.

Esta integral pode ser definida como uma medida do fluxo de energia absorvida, ou dissipada, por volume de material, no caso de um contorno fechado em um meio elástico, esse fluxo é nulo, mas na presença de uma trinca em um meio linear elástico, o fluxo é igual à taxa de liberação de energia potencial também conhecida como força guiadora da trinca (*driving force*).

Já para a segunda componente da integral J_k (integral J_2), alguns autores como Herrmann & Herrmann (1981), Herrmann (1981) e Chen e Zuo (1998) não deixam claro a afirmação da independência desta integral, sendo necessário um melhor estudo.

Mostrando que a aplicação das integrais L e M é vantajosa para cálculos numéricos de problemas elástico-lineares, Kienzler e Kordisch (1990), determinaram o fator de intensidade de tensão para condições de modo misto de carregamento das faces da trinca com excelente precisão, enquanto que o fator de intensidade de tensão calculado a partir da integral J_2 apresentou resultados particularmente, imprecisos.

Para superar estes problemas outros autores como Soni e Stern (1976) desenvolveram uma metodologia utilizando o conceito da integral independente do percurso baseado no teorema de reciprocidade de Betti, e Wang et al. (1980) usaram a metodologia, desenvolvida por Ishikawa (1980) e também estudada por Bui (1983) e Bui e Proix (1984), que analisa a contribuição desta integral para um estado superposto, a partir de dois estados originais independentes, esta metodologia também é chamada de método da separação dos modos.

Nestas duas metodologias, faz-se necessário calcular uma solução adicional auxiliar apropriada conhecida ao longo de cada percurso de integração.

Atualmente estudos relativos à extração dos fatores de intensidade de tensão em materiais anisotrópicos vêm se destacando, é importante salientar alguns trabalhos como os de Su e Sun (2003) utilizando-se o que os autores chamaram de *Fractal Two-Level Finite Element Method* (F2LFEM). Aliabadi e Sollero (1999), Wang e Sun (2005) também estudaram problemas de trincas em materiais anisotrópicos utilizando-se o método dos elementos de contorno (*Boundary Element Method – BEM*). Estudos analíticos foram feitos por Dong et al. (1999), Azhdari et al. (2000) e Nobile e Carloni (2005).

Banks-Sills et al. (2005) utilizaram o método da correlação dos deslocamentos e das integrais independentes do percurso junto com o conceito da separação dos modos e da integral de interação, aplicados ao método dos elementos finitos, para determinação dos

fatores de intensidade de tensão em materiais considerados monoclinicos, ou seja, com um plano de simetria elástica ($z = 0$).

Diante destas discussões iniciais, pretende-se estudar as metodologias da correlação dos deslocamentos, integral de fechamento de trinca modificada e integral J_k para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão em materiais anisotrópicos. Destaca-se aqui, o desenvolvimento de uma metodologia para o cálculo da integral J_2 tendo-se em vista a verificação da sua independência.

As metodologias aqui apresentadas foram estudadas e implementadas dentro do conceito do método dos elementos finitos. A metodologia para o cálculo da integral J_2 , será estendida a materiais anisotrópicos e seguirá o conceito desenvolvido por Eichen (1987) e Kim e Paulino (2002a) para materiais isotrópicos. Estes autores afirmam que a segunda componente da integral J_k é independente do percurso. No caso aqui considerado, foi utilizado o campo de tensões estabelecido por Yuan (1998) que leva em consideração o termo não singular (*T-stress*) da relação analítica das tensões. A inclusão deste termo foi importante para o desenvolvimento de uma expressão analítica da parcela componente da integral J_2 referente às faces da trinca.

1.2 MÉTODOS NUMÉRICOS NA MECÂNICA DA FRATURA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

O uso da Mecânica da Fratura nos projetos de engenharia evoluiu muito nos últimos anos, principalmente devido à utilização de métodos numéricos. Estes são utilizados na determinação dos parâmetros de fratura (fator de intensidade de tensão K , taxa de liberação de energia G , deslocamento da abertura das faces da trinca CTOD e integral J), na análise de tensões de corpos contendo trincas e no estudo da estabilização e/ou do crescimento de trincas.

No método dos elementos finitos consideram-se, basicamente, três etapas para análise no campo da Mecânica da Fratura: o modelamento da singularidade na ponta da trinca, determinação dos parâmetros de fratura e definição de crescimento e/ou estabilização da trinca.

Os primeiros trabalhos envolvendo o uso do método dos elementos finitos na Mecânica da Fratura data dos anos 70. Chan et al. (1970) empregaram elementos ditos convencionais e verificaram a necessidade de uma malha bastante refinada na região da ponta da trinca para representar adequadamente a singularidade de deformação (tensão) do tipo $r^{-1/2}$ onde r é a distância tomada a partir da ponta da trinca.

Vários autores propuseram a incorporação da natureza assintótica do campo de deformações (deslocamento) diretamente nas funções de forma dos elementos (AKIN, 1976; STERN e BECKER, 1979; TRACEY, 1971) para problemas bidimensionais para elementos triangulares de três e seis nós. Para problemas tridimensionais com elementos de seis e quinze nós foram propostos por Tracey (1974) e Hellen e Blackburn (1975).

Entretanto, grande passo foi dado por Henshell e Shaw (1975) e Barsoum (1976). Eles observaram que movimentando o nó do meio de um dos lados de um elemento quadrilátero de oito nós, para a posição a um quarto, a representação da singularidade de deformação e de tensão era obtida, elemento de ponto a um quarto (*quarter point element*). Adicionalmente, Barsoum (1977) mostrou que esta singularidade não era atingida na região interna ao elemento. Ele obteve resultados mais precisos para variação angular das deformações, quando construiu um elemento triangular a partir de um elemento quadrilátero de oito nós, pela união dos nós de um dos lados do elemento (*collapsed side*).

Os trabalhos citados anteriormente foram aplicados a materiais isotrópicos. Entretanto, os estudos da fratura de materiais anisotrópicos data dos anos 60. Os primeiros trabalhos realizados na obtenção do campo de deslocamentos e de tensões na ponta da trinca de materiais anisotrópicos foram os de Sih et al. (1965) e Sih e Liebowitz (1968) e Corten (1972).

Posteriormente, seguiram-se os trabalhos realizados por Bowie e Freese (1972) utilizando a técnica “*modified mapping-collocation*” para o cálculo dos fatores de correção geométrica de chapas carregadas biaxialmente e várias configurações de trincas para problemas em materiais anisotrópicos.

Utilizando esta mesma técnica, Gandhi (1972) estendeu os estudos anteriores para o caso de uma trinca inclinada em relação à direção de carregamento (tração uniforme) e em relação aos eixos principais de anisotropia do material. Estes autores verificaram que o grau de anisotropia do material influencia fortemente os valores dos fatores de intensidade de tensão para uma dada geometria com a condição de carregamento descrita anteriormente

(tração uniforme). Delale e Erdogan (1977) também estudaram o problema de trincas em materiais anisotrópicos (caso ortotrópico) de chapas com dimensões infinitas.

O conceito de elementos enriquecidos foi utilizado por Foschi e Barrett (1976) e Heppler e Hansen (1981) na análise de problemas de fratura de chapas de material anisotrópico em modo misto de carregamento. A aplicação do método dos elementos finitos híbridos, conceito desenvolvido por Pian (1964), foi feita por Mandell et al. (1974), eles determinaram os fatores de correção geométrica para diversas geometrias de corpos-de-prova e verificaram que o grau de anisotropia do material afeta de maneira significativa os fatores de intensidade de tensão. Sendo que neste estudo, os resultados numéricos concordaram bem com os resultados obtidos experimentalmente. Atluri et al. (1975) também utilizaram o conceito de elementos híbridos e estudaram problemas de fratura em modo misto de materiais compósitos.

O método da integral independente do percurso desenvolvido por Stern et al. (1976), baseado no teorema de reciprocidade de Betti, foi aplicado por Soni e Stern (1976) para problemas em modo misto de materiais anisotrópicos.

Já o método da integral independente do percurso, denominado de método da integral de interação, desenvolvido por Yau et al. (1980) foi aplicado por Wang et al. (1980) e Kim (1985) para os mesmos tipos de problemas de materiais anisotrópicos estudados por Soni e Stern (1976). Este método é baseado nos conceitos das leis da conservação da elasticidade e da mecânica da fratura. Ele faz uso da integral da conservação para dois estados superpostos de um sólido elástico: estado atual e estado auxiliar. Recentemente o método da integral de interação tem sido bastante aplicado por sua precisão e robustez (DOLBOW e GOSZ (2002), RAO e RAHMAN (2003), KIM e PAULINO (2003a) e BANKS-SILLS et. al. (2005))

Vale salientar que no trabalho de Wang et al. (1980) foi estabelecida uma importante relação entre a integral J_I e os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , para materiais anisotrópicos. Hurbult e Loo⁴ (1986 apud Chu e Hong, 1990) também definiram uma relação

⁴ HURBULT, A.; LOO, F. T. C. (1986). Calculation of mixed mode fracture stress intensity factors in an orthotropic plate using finite element technique. *J. Vibr.* v. 108, p. 282-287 apud CHU, S. J.; HONG, C. S. (1990). Application of the J_k integral to mixed mode crack problems for anisotropic for anisotropic composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*. v.35, n.6, p.1093-1103.

entre os valores de K_I e K_{II} e as componentes da integral J_k para o caso de uma trinca estando alinhada com uma das direções principais do material.

Seguindo o conceito da correlação dos deslocamentos Saouma e Sikiots (1986), Saouma et al. (1987) e Boone et al. (1987) realizaram estudos de propagação de trincas em materiais anisotrópicos. O conceito da integral independente do percurso foi aplicado para a determinação dos fatores de correção geométricos em modo I de carregamento por Sweeney (1986).

Hamoush e Salami (1990) baseados na metodologia da integral de fechamento de trinca modificada e em conjunção com a imposição de dois estados de equilíbrio independentes, realizaram estudo em modo misto de chapas de material anisotrópico.

Baseados na definição dada por Cherepanov (1979) para a integral independente do percurso, Chu e Hong (1990), estudando problemas de modo misto em chapas de materiais anisotrópicos determinaram as relações entre as componentes da integral J_k com os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} . Para o caso da componente J_1 , eles chegaram a mesma expressão estabelecida por Wang et al. (1980) e determinaram uma nova relação para a componente J_2 , entretanto esta relação é diferente da expressão obtida por Hurbult e Loo (1986). Para o cálculo da componente J_2 , Chu e Hong (1990) usaram um percurso muito próximo da ponta da trinca não necessitando avaliar a contribuição nas faces da mesma.

Outras relações entre as integrais J_k e os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidas nos trabalhos Hoenig (1982), Obata et al. (1989) e Ma e Chen (1996).

A maioria dos trabalhos descritos anteriormente foi aplicada em conjunto com o método dos elementos finitos. Uma das primeiras aplicações do método dos elementos de contorno em problemas de fratura em materiais anisotrópicos foi apresentada por Snyder e Cruse (1975) que usaram a função de Green para modelar uma trinca no centro de uma chapa anisotrópica. Procedimentos similares foram usados por Chan e Cruse (1986), Kamel e Liaw (1991) e Liaw e Kamel (1991). O método das sub-regiões e elementos de ponto a um quarto com singularidades de forças de superfícies foi usado por Tan e Gao (1992) para a análise de propagação de trincas em materiais ortotrópicos. Sollero e Aliabadi (1993) analisaram problemas elasto-estático bidimensional em materiais anisotrópicos usando o método das sub-regiões e estenderam o método da integral J independente do percurso.

No trabalho de Sollero e Aliabadi (1993), a metodologia desenvolvida foi baseada na relação entre a razão dos deslocamentos relativos das faces da trinca e a componente J_1 da integral J_k , sendo que não foi necessário calcular K_{II} diretamente a partir da componente J_2 , o que desta forma simplifica a análise sem a dificuldade de se calcular a parcela da componente J_2 referente às faces da trinca. Esta abordagem foi utilizada neste trabalho como forma de validação da metodologia aqui desenvolvida. Vale salientar que aqui foi também desenvolvida uma abordagem semelhante levando-se em conta a componente J_2 e a razão dos deslocamentos relativos das faces da trinca.

Baseados no trabalho de Eichen (1987), Chang e Pu (1997) calcularam a componente J_2 para materiais anisotrópicos, entretanto, nenhuma expressão explícita para computar a parcela desta componente relativa as faces da trinca foi utilizada. Chang e Wu (2001) estenderam o trabalho anterior de Chang e Pu (1997) considerando carregamento nas faces da trinca.

Santos e Carvalho (2001a) e Santos e Carvalho (2001b) estudaram problemas de modo I para materiais anisotrópicos, utilizando o método da correlação dos deslocamentos, da integral de fechamento de trinca modificada e da integral J na determinação dos fatores de intensidade de tensão. Nestes trabalhos foi verificada a influência da geometria dos elementos na ponta da trinca (roseta de elementos) para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

Estudos referentes à simulação do processo de propagação de trincas em materiais anisotrópicos podem ser encontrados nos trabalhos de Saouma et al. (1987), Boone, et al. (1987), Padovan e Tanjore (1998) e Lim et al. (2001).

Atualmente os estudos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão em materiais anisotrópicos ainda despertam interesse.

Kim e Paulino (2002b) utilizaram as metodologias da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada para o estudo de materiais com gradientes funcionais (*Functionally Graded Materials-FGM*), materiais nos quais as propriedades são funções das coordenadas espaciais. Kim e Paulino (2003b) aplicaram o conceito das integrais independentes do percurso para os mesmos casos do trabalho anterior.

Mais recentemente Su e Sun (2003) também determinaram os fatores de intensidade de tensão de materiais anisotrópicos. Banks-Sills et al. (2005) utilizaram o método dos elementos finitos junto com os conceitos da correlação dos deslocamentos e das integrais

independentes do percurso para determinação de fatores de intensidade de tensão em materiais monoclônicos, ou seja, com um plano de simetria elástica ($z = 0$), sendo que para estas integrais independentes do percurso eles utilizaram o conceito da separação dos modos e da integral de interação. Sun e Wang (2005) também estudaram problemas de trincas em materiais anisotrópicos utilizando-se do método dos elementos de contorno (*Boundary Element Method – BEM*).

Sendo assim, serão descritos na próxima seção, os objetivos deste trabalho levando-se em conta a descrição da problemática apresentada neste capítulo.

1.3 OBJETIVOS

Objetivo geral

Desenvolver e estudar uma metodologia, baseada no conceito da integral J_k , para a determinação dos fatores de intensidade de tensão de problemas bidimensionais (elasto-estáticos) de trincas em materiais anisotrópicos.

Objetivos específicos

- a) Desenvolver uma metodologia baseada no conceito das integrais independentes do percurso, para análise de problemas de trincas em materiais anisotrópicos;
- b) Determinar os valores da componente J_2 , da integral J_k , para materiais anisotrópicos, seguindo o conceito desenvolvido por Eichen (1987) e Kim e Paulino (2002), para materiais isotrópicos;
- d) Implementar, utilizando o Método dos Elementos Finitos, a metodologia no item anterior (integral J_k);
- c) Verificar a independência da segunda componente (J_2) da integral J_k ;

- d) Implementar, utilizando o Método dos Elementos Finitos, as metodologias da correlação dos deslocamentos, da integral de fechamento de trinca modificada e da integral J_k que usa a razão dos deslocamentos para desacoplar os modos I e II de carregamento das faces da trinca;
- e) Determinar os fatores de intensidade de tensão em chapas de materiais anisotrópicos (materiais compósitos);
- f) Analisar e validar a metodologia proposta comparando os resultados de problemas com soluções analíticas conhecidas e problemas solucionados através de métodos numéricos em trabalhos publicados (referências bibliográficas).

1.4 DESCRIÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

Neste trabalho foi desenvolvido e implementado metodologias, para determinação dos fatores de intensidade de tensão de problemas de fratura em materiais anisotrópicos.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão dos fundamentos teóricos da teoria no campo da elasticidade linear para materiais anisotrópicos.

No Capítulo 3, apresentam-se os fundamentos da Mecânica da Fratura para materiais anisotrópicos com a descrição dos métodos utilizados para a determinação dos fatores de intensidade de tensão usando o método dos elementos finitos.

No Capítulo 4, apresenta-se a formulação da metodologia para determinação da integral J_k para materiais anisotrópicos, a descrição do campo de tensão na ponta da trinca, levando-se em conta o segundo termo da série, para que a metodologia descrita fosse implementada, neste encontra-se uma das contribuições científicas do trabalho.

No Capítulo 5, apresentam-se os resultados obtidos, levando-se em consideração dados obtidos de problemas cuja solução analítica existe e problemas resolvidos por outros métodos computacionais, obtidos da literatura.

No Capítulo 6, descreve-se a formulação da metodologia para determinação da integral J_I levando-se em conta problemas de trincas com carregamento nas suas faces, este conceito também considerado uma contribuição científica do trabalho.

Por fim no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais; conclusões obtidas por meio das análises dos resultados apresentados durante o decorrer dos capítulos e as sugestões para possíveis trabalhos de futuras pesquisas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA - ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA

2.1 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS - LEI DE HOOKE GENERALIZADA

Apresentam-se a seguir, as equações governantes da elasto-estática. Considera-se um dado domínio Ω contornado por Γ (Figura 2.1(a)). A equação de equilíbrio, na ausência de forças de corpo, pode ser expressa por:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.1)$$

Onde a vírgula significa a derivada da variável em relação aos eixos coordenados.

Sendo que na eq. (2.1) as forças de campo foram desprezadas. Por sua vez, a condição de simetria do tensor tensão σ_{ij} (Figura 2.1(b)) nos leva a:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

Figura 2.1 – (a) Corpo carregado (b) Estado triplo de tensão

O vetor de forças de superfícies t_i em um ponto no contorno Γ do domínio Ω pode ser expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.3)$$

Onde n_j é o vetor normal a superfície.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação considerando os deslocamentos infinitesimais pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.4)$$

Onde $u_{k,l}$ são as derivadas dos deslocamentos em relação aos eixos coordenados.

Para assegurar a unicidade de deslocamentos, as componentes do tensor das deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,jl} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.5)$$

No caso bidimensional é reduzida a forma:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} \quad (2.6)$$

Referindo-se a um sistema de coordenadas retangular fixo X_i , a relação entre o tensor de tensões, σ_{ij} , e o tensor de deformações, ε_{ij} , para o material anisotrópico homogêneo linear elástico pode ser dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.7)$$

Onde $i, j, k, l = 1, 2$ ou 3 . Os índices repetidos referem-se ao somatório e C_{ijkl} é conhecido como tensor de rigidez elástica.

O inverso da equação (2.7) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.8)$$

Onde S_{ijkl} é o tensor de flexibilidade elástica.

A equação (2.7) é a forma geral da relação constitutiva para um sólido elástico e é conhecida como lei de Hooke generalizada. Os tensores de rigidez e flexibilidade são de quarta ordem, ou seja, indicam a existência de 81 (3^4) constantes elásticas. Baseado na simetria dos tensores de tensões e deformações, o tensor de rigidez tem as seguintes propriedades de simetria.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (2.9)$$

A igualdade dos dois primeiros e dos dois últimos índices reduz o número de constantes do tensor de rigidez e flexibilidade para 36.

Entretanto, se existe uma função densidade de energia de deformação $W = W(\varepsilon_{kl})$ esta pode ser definida por:

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.10)$$

Para W ser independente do percurso de carregamento e uma função somente da deformação final, então:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\epsilon_{ij} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sigma_{ij} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (2.13)$$

Os termos da diferenciação da equação (2.13) são intercambiáveis. Desta forma:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.14)$$

A mesma relação é obtida para S_{ijkl} . A relação (2.14) reduz o número de constantes elásticas para 21 no caso mais geral, dos quais 18 são independentes; neste caso o material é denominado triclinico (*triclinic* ou *aelotropic*). Como se verá adiante, o número de constantes elásticas pode ser reduzido quando considera-se a propriedade de simetria de material (LEKHNITSKII, 1981). As relações podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{1111} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{1111} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1111} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

As componentes do tensor das tensões e das deformações são freqüentemente utilizadas na notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1981), e na forma de uma matriz coluna.

$$\sigma^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) \quad (2.17)$$

O índice sobrescrito T significa o transposto da matriz. Nota-se que o fator “2” não aparece no vetor ε^T da equação (2.17) e esta expressão da deformação define as deformações de engenharia ε_i .

Desta forma a equação (2.16), pode ser escrita como segue:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Ou como sendo:

$$\varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j \quad \text{ou} \quad \sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (2.19)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

As constantes elásticas podem ser expressas em termos das constantes de engenharia como dado por Lekhnitskii (1981):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & a_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & a_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} \\ a_{14} &= \frac{\eta_{23,1}}{E_{11}} = \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & a_{15} &= \frac{\eta_{31,1}}{E_{11}} = \frac{\eta_{1,31}}{G_{13}} & a_{16} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_{11}} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ a_{22} &= \frac{1}{E_{22}} & a_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} = -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & a_{24} &= \frac{\eta_{23,2}}{E_{22}} = \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} \\ a_{25} &= \frac{\eta_{31,2}}{E_{22}} = \frac{\eta_{2,31}}{G_{13}} & a_{26} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_{22}} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} & a_{33} &= \frac{1}{E_{33}} \\ a_{34} &= \frac{\eta_{23,3}}{E_{33}} = \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & a_{35} &= \frac{\eta_{31,3}}{E_{33}} = \frac{\eta_{3,31}}{G_{13}} & a_{36} &= \frac{\eta_{12,3}}{E_{33}} = \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & a_{45} &= \frac{\zeta_{31,23}}{G_{23}} = \frac{\zeta_{23,31}}{G_{13}} & a_{46} &= \frac{\zeta_{12,23}}{G_{23}} = \frac{\zeta_{23,12}}{G_{12}} \\ a_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & a_{56} &= \frac{\zeta_{12,31}}{G_{13}} = \frac{\zeta_{31,12}}{G_{12}} & a_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Onde E_{kk} são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos X_k . G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $X_i X_j$. Os coeficientes ν_{ij} são chamados coeficientes de Poisson. Os coeficientes $\zeta_{ij,kl}$ são chamados de coeficientes de Chentsov, estes caracterizam as deformações de cisalhamento nos planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões de cisalhamento que atuam em outros planos paralelos aos planos principais de elasticidade. As constantes $\eta_{jk,l}$ são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie, estes caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões de cisalhamento atuando nos planos principais. Finalmente as constantes $\eta_{l,jk}$ são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam as deformações de cisalhamento nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais.

2.2 SOLUÇÃO GERAL DA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA PARA PROBLEMAS NO PLANO

Considerando o estado plano de tensão ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$) e a partir da relação constitutiva para um material ortotrópico pode-se verificar que nesta relação somente seis constantes elásticas independentes estarão presentes. Desta forma, a lei de Hooke generalizada, equação (2.18), pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Para o estado plano de deformação ($\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$). Uma vez que $a_{44}a_{55} - a_{45}^2 \neq 0$ tem-se que $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ e $\sigma_3 = -(a_{33})^{-1}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{26}\sigma_6)$. Desta forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\text{Onde, } b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

Verifica-se que as equações (2.22) e (2.23) são do mesmo tipo. Dessa forma, a solução encontrada para o estado plano de deformação poderá ser utilizada para o correspondente estado plano de tensão.

Substituindo-se as equações (2.4), (2.7) na equação (2.1), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos:

$$C_{ijkl} u_{k,jl} = 0 \quad (2.24)$$

Com a introdução das funções tensões de Airy, (LEKHNITSKII, 1981), as tensões podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \\ \sigma_6 &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo-se a equação (2.25) na equação constitutiva (2.21) e então na equação da compatibilidade, equação (2.6), resulta numa equação diferencial para as funções tensão $U = U(x_1, x_2)$:

$$a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_2^3} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} = 0 \quad (2.26)$$

Definindo-se o operador diferencial, como:

$$\Delta_j = \frac{\partial}{\partial x_2} - s_j \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (j = 1, 2, \dots, 4) \quad (2.27)$$

A equação governante em $U = U(x_1, x_2)$ torna-se:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 U = 0 \quad (2.28)$$

Expandindo-se a equação (2.28) tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^4}{\partial x_2^4} - (s_1 s_2 s_3 s_4) \frac{\partial U^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + (s_1 s_2 + s_1 s_3 s_1 s_4 + s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4) \frac{\partial U^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ & - (s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 s_4 + s_2 s_3 s_4) \frac{\partial U^4}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (s_1 s_2 s_3 s_4) \frac{\partial U^4}{\partial x_2^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

As equações (2.26) e (2.29) serão idênticas se s_1, s_2, s_3 e s_4 forem raízes da equação característica:

$$a_{11} s_j^4 - 2a_{16} s_j^3 + (2a_{12} + a_{66}) s_j^2 - 2a_{26} s_j + a_{22} = 0 \quad (2.30)$$

Se as raízes forem distintas, a solução da equação (2.30) pode ser dada por:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + s_1 x_2) + U(x_1 + s_2 x_2) + U(x_1 + s_3 x_2) + U(x_1 + s_4 x_2) \quad (2.31)$$

Entretanto, Lekhnitskii (1981) mostrou que as raízes da equação (2.30) são sempre complexas ou puramente imaginárias, ocorrendo em pares conjugados. Assumindo que $s_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j = 1, 2$), onde α_j e β_j são constantes $\beta_j > 0$ com $\beta_1 \neq \beta_2$, $s_3 = \bar{s}_1$ e $s_4 = \bar{s}_2$.

Desta maneira a função tensão $U(x_1, x_2)$ pode ser expressa na forma:

$$U(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re}[U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad (2.32)$$

Onde $U_1(z_1)$ e $U_2(z_2)$ são funções arbitrárias das variáveis complexas $z_j = x_1 + s_j x_2$ ($j=1,2$) e daí:

$$\Delta_j = \frac{\partial}{\partial x_2} - s_j \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_j} \quad (2.33)$$

Para evitar confusão nos índices $U_j(z_j)$, introduzem-se as notações a seguir:

$$\phi(z_1) = \frac{dU_1}{dz_1} \quad \psi(z_2) = \frac{dU_2}{dz_2} \quad (2.34)$$

Inserindo a equação (2.32) nas funções tensão a partir das equações (2.25) têm-se as componentes das tensões em termos de $\phi(z_1)$ e $\psi(z_2)$, dadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \operatorname{Re}[s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_2 &= 2 \operatorname{Re}[\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \sigma_6 &= -2 \operatorname{Re}[s_1 \phi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.35) na equação (2.24), desprezando-se os movimentos de corpo rígidos, e através da integração das componentes das deformações obtém-se:

$$u_1 = 2 \operatorname{Re}[p_1 \phi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \quad (2.36)$$

$$u_2 = 2 \operatorname{Re}[q_1 \phi(z_1) + q_2 \psi(z_2)]$$

Onde:

$$p_j = a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j \quad (2.37)$$

$$q_j = a_{12}s_j + \frac{a_{22}}{s_j} - a_{26}, \quad (j=1,2) \quad (2.38)$$

Verifica-se que a solução agora está diretamente associada à determinação de duas funções complexas que devem satisfazer as condições de contorno pertinentes ao problema.

2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA

Se for considerada apenas uma lâmina, nas quais as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (Figura 2.2), esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Onde Q_{ij} são as componentes do tensor de rigidez, ou seja:

$$Q = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (2.40)$$

Figura 2.2 – Lâmina ortotrópica

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= E_{11} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{22} &= E_{22} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{66} &= G_{12} & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\
 Q_{12} &= \nu_{21}E_{11} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_{22} / (1 - \nu_{12}\nu_{21})
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Sendo uma lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais E_{11} e E_{22} nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e a razão de Poisson ν_{12} . A quinta constante elástica, ν_{21} pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz Q .

$$\nu_{21}E_{11} = \nu_{12}E_{22}
 \tag{2.42}$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina (x_1, x_2) não são coincidentes com os eixos do laminado (x'_1, x'_2). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 2.3) para então se determinar a relação constitutiva.

Figura 2.3 – Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, x_2) e do laminado (x'_1, x'_2)

Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Onde σ'_i e ε'_j são os tensores de tensão e deformação respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado, σ_i e ε_j os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e T a matriz de transformação dada por:

$$T = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Sendo $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$.

Convém observar que a matriz inversa T^{-1} pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo θ , conforme a Figura 2.3, pelo ângulo negativo $-\theta$. A equação constitutiva pode ser escrita da forma.

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} T^{-1} Q (T^{-1})^T \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Onde $(T^{-1})^T$ representa a matriz transposta da matriz inversa de T e:

$$T^{-1} = T(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (2.46), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

A matriz $\bar{Q}$ é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas $\bar{Q}_{16}$ e $\bar{Q}_{26}$, são combinações lineares das outras quatro.

No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz $\bar{Q}$ é parecida com a matriz Q dos materiais totalmente anisotrópicos ($\bar{Q}_{16} \neq 0$ e $\bar{Q}_{26} \neq 0$). Quando se tem $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$ diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

Muitas vezes tem-se ainda a necessidade de se escrever o tensor de flexibilidade a_{ij} em relação a um outro referencial. Neste caso, por um procedimento similar ao realizado para encontrar as equações (2.49) determina-se que:

$$a'_{11} = a_{11} \cos^4 \theta + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \sin^4 \theta + (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^4 \theta + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \cos^4 \theta - (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta$$

$$a'_{12} = a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$a'_{66} = a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2(a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$a'_{16} = [a_{22} \sin^2 \theta - a_{11} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta + (a_{16} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) + a_{26} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

$$a'_{26} = [a_{22} \cos^2 \theta - a_{11} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta + (a_{16} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta))$$

(2.50)

Onde a'_{ij} representa a matriz de constantes elásticas do laminado escrita no sistema $x'_1 x'_2$ (Figura 2.3) enquanto que a_{ij} representa esta mesma matriz escrita no sistema $x_1 x_2$.

As raízes da equação característica podem ser escritas num novo sistema de coordenadas, conforme mostrado por LEKHNITSKII (1981), como:

$$s'_k = \frac{s_k \cos \theta - \text{sen} \theta}{\cos \theta + s_k \text{sen} \theta} \quad (2.51)$$

Onde s'_k representa as raízes da equação característica no referencial $x'_1 x'_2$ e s_k as raízes da mesma equação no referencial $x_1 x_2$.

3 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR ANISOTRÓPICA

3.1 CONCEITOS IMPORTANTES

A idéia central da Mecânica da Fratura é baseada na hipótese de que todo material contém trincas que poderá dar início a falha. A estimativa da vida remanescente de uma máquina ou componente estrutural requer o conhecimento da redistribuição das tensões causadas pela introdução destas trincas em conjunção com a condição de propagação da mesma. O surgimento de trincas resulta numa elevação das tensões nas suas vizinhanças (ponta ou frente da trinca) que deverá receber particular atenção uma vez que este ponto ou zona pode ser um iniciador da propagação.

As primeiras investigações do fenômeno de fratura parecem ter sido realizadas por Leonardo da Vinci. “... Leonardo da Vinci (1452-1519) realizou testes para determinar a resistência de fios de ferro. Ele encontrou uma relação inversa entre a resistência e o comprimento para fios de diâmetro constante. Uma tradução foi feita a partir dos rascunhos de da Vinci:

Observe what the weight was broke the wire, and in what part the wire broke... Then shorten this wire, at first by half, and see how much more weight it supports; and then make it one quarter of its original length, and so on, making various lengths and noting the weight that breaks each one and place in which it brakes.” (GDOUTOS, 1990, p.5).

Todhunter e Pearson⁵ (1986 apud GDOUTOS, 1990) referem-se a dois resultados experimentais análogos ao estudo de da Vinci. De acordo com estes autores, Lloy (1830) encontrou que a resistência média de barras curtas de ferro é mais alta do que a resistência de barras de ferro longas. Le Blanc (1839) verificou que fios longos de ferro são menos resistentes do que fios curtos de mesmo diâmetro. Stanton & Batson (1921) reportaram os resultados de testes conduzidos em barras entalhadas no *National Physical Laboratory, Teddington*, após a Primeira Guerra Mundial. A partir de uma série de testes verificou-se que o “trabalho à fratura” por unidade de volume diminuiu com o aumento das dimensões dos corpos de prova.

Em todos os trabalhos citados anteriormente deram indícios do chamado efeito de escala sobre a resistência dos materiais sólidos. Como já dito no primeiro parágrafo uma explicação para estes resultados pode ser atribuída ao fato de que todo material estrutural contém falhas que têm um efeito deteriorador sobre a resistência teórica do mesmo.

As primeiras soluções matemáticas para quantificar o efeito destas falhas no campo de tensões de um sólido podem ser atribuídas a Inglis (1913). Ele estudou o campo de tensões em uma placa de dimensões infinitas sujeita a tensão uniforme e fragilizada por um furo elíptico. Ele verificou que o termo responsável pela elevação da tensão nas proximidades do entalhe era da ordem de $1 + 2a/b$, onde a e b são os semi-eixos da elipse. Este termo foi definido como *Fator de Concentração de Tensão*, K_t , para um furo elíptico.

Método semelhante foi usado por Neuber⁶ (1938 apud KNOTT, 1973), para a determinação de fatores de concentração de tensão para diversos tipos de entalhes que se aproximavam da forma elíptica ou hiperbólica. Desde então, expressões e curvas para a determinação de fatores de concentração de tensão têm sido tabeladas manuais (PETERSON, 1974).

⁵ TODHUNTER, I.; PEARSON, K. (1986). *History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials*. Sections 1503 and 936, Cambridge University Press apud GDOUTOS, E. E. (1990). *Fracture mechanics criteria and applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

⁶ NEUBER, H. (1938). *Kerbspannungellehre*. Berlim, Springer. translated as *Theory of Notch Stresses*, David Taylor Model Basin, Translation 74, (Nov. 1945) apud KNOTT, J. F. (1973). *Fundamentals of Fracture Mechanics*. London, Butterworth & Co Publishers Ltd.

O fator de concentração de tensão (K_t) descreve o efeito da geometria do entalhe no valor da tensão local, isto é, na ponta do mesmo. É uma grandeza adimensional que não considera a distribuição de tensão na frente do entalhe.

O estudo da Mecânica da Fratura emergiu no século XX a partir da idéia de Griffith (1921, 1924) de *energia potencial mínima*. Nestes trabalhos ele estabeleceu os fundamentos necessários para o sucesso dos estudos teóricos da fratura, especialmente para materiais com comportamento frágil.

Griffith (1921, 1924) tomando como base às considerações gerais da energia potencial de um sistema, postulou o seguinte: "*a propagação instável de uma trinca ocorre quando a energia que está sendo relaxada pela propagação da mesma é absorvida pela criação de novas superfícies da trinca*".

De acordo com os resultados obtidos após uma série de testes realizados em vidros e baseado no trabalho de Inglis (1913), Griffith (1924) estabeleceu que:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (3.1)$$

Onde:

σ^* é o valor da tensão requerida para a instabilidade;

γ é a densidade de energia de superfície ou tensão de superfície;

E é o módulo de Young do material.

Esta equação indica qual o valor da tensão necessária para haver propagação instável na presença de uma trinca de comprimento " a ", ou alternativamente definir qual o tamanho crítico de defeito que pode existir num corpo na presença de uma tensão particular.

Estudos voltados para identificação da distribuição de tensões na frente de trincas foram desenvolvidos e um dos primeiros trabalhos realizados neste sentido foi o de Westergaard (1939). Neste trabalho, Westergaard estudou uma placa de dimensões infinitas, carregada biaxialmente e com uma trinca central. Sua metodologia é baseada na representação de potenciais complexos da função de tensão de Airy, analisando a compatibilidade das propriedades desta função com as condições de contorno adequadas

ao problema. Sneddon (1946) usando a função de tensão de Westergaard, foi o primeiro a calcular o campo de tensões na ponta de uma trinca.

Especificamente após a Segunda Guerra Mundial é que a Mecânica da Fratura desenvolveu-se como uma disciplina. Independentemente, Orowan (1955) e Irwin (1957) estenderam os estudos de Griffith para materiais dúcteis. Derivada a partir do teorema de Griffith, o conceito da taxa de liberação de energia, G , foi introduzido por Irwin (1957), sendo esta a forma mais utilizada para aplicações em engenharia.

Irwin (1957), observando as equações desenvolvidas por Westergaard verificou que o termo $(\sigma\sqrt{\pi a})$ estava sempre presente e que o campo de tensões na ponta da trinca ficava determinado quando este termo era conhecido. A partir dessa constatação ele definiu o *Fator de Intensidade de Tensão*, K , que no modo I de carregamento para uma placa isótropa carregada biaxialmente e de dimensões infinitas é dado por $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$.

Os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} para materiais anisotrópicos foram definidos, da mesma maneira que os fatores de intensidade de tensão para os materiais isotrópicos, como sendo as parcelas singulares das tensões na ponta da trinca. Desta forma, para o modo I, tem-se:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \quad (3.2)$$

Semelhantemente para o modo II, tem-se:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0) \quad (3.3)$$

Estes podem ser avaliados diretamente a partir das funções de variáveis complexas. No limite quando z_j se aproxima de $z_j^0 = x_1^0 + s_j x_2^0$, onde x_1^0 e x_2^0 são as coordenadas da ponta da trinca, os fatores de intensidade de tensão podem ser dados por:

$$K_I = 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{s_2 - s_1}{s_2} \right) \lim_{z_1 \rightarrow z_0} (z_1 - z_1^0)^{1/2} \phi'(z_1) \quad (3.4)$$

$$K_{II} = 2\sqrt{2\pi}(s_2 - s_1) \lim_{z_1 \rightarrow z_1^0} (z_1 - z_1^0)^{1/2} \psi'(z_1) \quad (3.5)$$

Estes podem ser descritos, para os modos de carregamento (Figura 3.1), como sendo K_I , K_{II} , K_I , K_2 e K_{III} .

Figura 3.1 – Os modos de carregamento: Modo I (a) e Modo II (b) devido a carregamentos de membrana; Modo I (c) e Modo 2 (d) devido a carregamentos de flexão e torção e Modo III (e) devido a carregamento de cisalhamento transversal.

Neste trabalho, somente serão considerados carregamentos de membrana (Modo I e/ou Modo II), Figura 3.1 (a) e (b). Os outros tipos de carregamento (flexão e torção) e o Modo III para cisalhamento transversal não serão considerados, Figura 3.1 (c), (d) e (e).

Por isso, pode-se dizer que o corpo é carregado no modo I (modo de tração) se o carregamento for aplicado paralelamente ao eixo X_2 . O carregamento é em modo II (modo de cisalhamento no plano) se a carga for aplicada paralelamente ao eixo X_1 . Em modo I para carregamento, as faces da trinca são separadas simetricamente em relação aos planos X_1X_2 e X_1X_3 . No modo II há um deslizamento simétrico em relação ao plano X_1X_2 e anti-simétrico em relação ao plano X_1X_3 .

Também se pode dizer que um problema de fratura é plano se os deslocamentos e trações forem funções apenas de X_1 e X_2 . O problema é dito em modo misto quando estão presentes mais de um modo de carregamento. Neste trabalho serão tratados apenas

problemas planos e, quando for dito modo misto, significa que o carregamento possui modos I e II.

O campo de tensões na ponta de uma trinca em um material anisotrópico foi determinado por Sih et al. (1965) e Sih & Liebowitz (1968) através da escolha de funções de tensão de potenciais complexos, baseado no problema de Riemann-Hilbert que trata da resolução de problemas de contornos unidimensionais de descontinuidades utilizando as funções de variáveis complexas de Muskhelishvili.

Estes autores definiram as funções tensão para o problema de uma placa contendo uma trinca carregada em tensão uniforme, como:

$$\phi'(z_j) = \frac{-s_2 K_I - K_{II}}{2\sqrt{2\pi z_j}(s_1 - s_2)} \quad (3.6)$$

$$\psi'(z_j) = \frac{s_1 K_I + K_{II}}{2\sqrt{2\pi z_j}(s_1 - s_2)} \quad (3.7)$$

Onde:

$$z_j - z_0 = r e^{i\theta} \quad (3.8)$$

r é a distância radial da ponta da trinca e θ o ângulo entre o raio e a linha imaginária paralela a face da trinca, Figura 3.2.

Figura 3.2 – Definição dos eixos coordenados na ponta da trinca.

Inserindo as funções tensões adequadamente nas expressões para as tensões e deslocamentos (equações 2.35 e 2.36), tem-se para cada modo de carregamento as tensões e deslocamentos correspondentes.

As tensões para um carregamento simétrico (modo I) são dadas por:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_2}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots, \\
\sigma_2^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_1}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots, \quad (3.9) \\
\sigma_6^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots,
\end{aligned}$$

E os deslocamentos são:

$$u_1^I = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[s_1 p_2 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2} - s_2 p_1 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2} \right] \right\} + \dots \quad (3.10)$$

$$u_2^I = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[s_1 q_2 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2} - s_2 q_1 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2} \right] \right\} + \dots,$$

As tensões para um carregamento anti-simétrico (modo II) são dadas por:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_2^2}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_1^2}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots, \\
\sigma_2^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots, \quad (3.11) \\
\sigma_6^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} \right] \right\} + \dots,
\end{aligned}$$

E os deslocamentos são:

$$u_1'' = K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[p_2 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2} - p_1 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2} \right] \right\} + \dots \quad (3.12)$$

$$u_2'' = K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[q_2 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2} - q_1 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2} \right] \right\} + \dots$$

Usando-se superposição, os estados gerais de tensão e deslocamento próximo à ponta da trinca podem ser considerados como uma soma de componentes dos modos I e II, ou seja:

$$\sigma_i = \sigma_i^I + \sigma_i^{II} \quad \text{e} \quad u_i = u_i^I + u_i^{II} \quad (3.13)$$

Adicionalmente aos fatores de intensidade de tensão, Sih et al. (1965) relacionaram as equações anteriores (equações 3.4 e 3.5) com a taxa de liberação de energia (G). As relações entre K_j e G_j ($j = \text{I, II}$) formam a base da equivalência da teoria de Griffith (1924) com os fatores de intensidade de tensão aqui definidos. Para esta idéia tomou-se como base o conceito desenvolvido por Irwin (1957), em que as tensões à frente da ponta da trinca e os deslocamentos nas faces da mesma são usados para calcular o trabalho realizado para fechar a trinca de volta a sua posição original.

Assumindo-se que a trinca cresça de um comprimento Δa então, a taxa de liberação de energia durante o crescimento da trinca será o trabalho realizado pelas tensões $\sigma_2(\Delta a - r^*, \theta = 0)$ atuando nos deslocamentos $u_2(r, \theta = \pi)$, Figura 3.3. Para $\Delta a \rightarrow 0$ as condições $u_2 \rightarrow u_2^*$ e $r \rightarrow r^*$ devem ser satisfeitas. Logo para o modo I de carregamento, tem-se:

Figura 3.3 – Crescimento de trinca auto-similar

$$G_I = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_2(r, \theta = 0) u_2(\Delta a - r, \theta = \pi) dr \quad (3.14)$$

Da mesma forma que foi analisada para o modo I, para o modo II de carregamento tem-se:

$$G_{II} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_6(r, \theta = 0) u_1(\Delta a - r, \theta = \pi) dr \quad (3.15)$$

Onde:

σ_2 e σ_6 são as tensões ao longo da frente da ponta da trinca;

u_1 e u_2 são os deslocamentos relativos ao deslizamento e abertura entre as superfícies da trinca;

G_I e G_{II} são as componentes da taxa de liberação de energia referentes aos modos I e II de fratura, respectivamente.

Ocorrendo um modo individual de carregamento das faces da trinca (modo I ou modo II) o fator de intensidade de tensão para materiais anisotrópicos pode ser dado como estabelecido por Sih et al (1965), como sendo:

$$G_I = \alpha_{11} K_I^2 \quad (3.16)$$

$$G_{II} = \alpha_{22} K_{II}^2 \quad (3.17)$$

Onde:

$$\alpha_{11} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im}\left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}\right] \quad (3.18)$$

$$\alpha_{12} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im}\left[\frac{1}{s_1 s_2}\right] \quad (3.19)$$

$$\alpha_{21} = \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im}[s_1 s_2] \quad (3.20)$$

$$\alpha_{22} = \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im}[s_1 + s_2] \quad (3.21)$$

Se mais de um modo de carregamento das faces da trinca estão presentes, como é o caso de modo misto de carregamento, as relações com o fator de intensidade de tensão podem ser dadas por:

$$G_I = \alpha_{11} K_I^2 + \alpha_{12} K_I K_{II} \quad (3.22)$$

$$G_{II} = \alpha_{22} K_{II}^2 + \alpha_{21} K_I K_{II} \quad (3.23)$$

Mais tarde, Rice (1968) definiu uma integral independente do percurso, para problemas de trincas bidimensionais em um material elástico linear ou não-linear, como uma medida do fluxo de energia absorvida, ou dissipada, por um volume de material. No caso de um contorno fechado em um meio elástico, esse fluxo é nulo.

Esta integral foi denominada, *integral J* (J_I), sendo uma integral de linha circundando a ponta da trinca (Figura 3.4). Desta forma a expressão para a integral J foi dada por:

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (W n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma \quad (3.24)$$

Onde:

$u_{i,1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}$ é a derivada dos deslocamentos em relação ao eixo x_1 ;

$W = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ é a densidade de energia de deformação;

$t_i = \sigma_{ij} n_j$ é o vetor tensão que atua no contorno;

n_j é a componente do vetor unitário normal ao contorno;

$d\Gamma$ é um comprimento elementar ao longo do contorno;

Γ_ϵ é o contorno que circunda a ponta da trinca, (Figura 3.4).

Figura 3.4 – Contornos circundando a ponta da trinca.

A integral J não é a única integral invariante baseada na lei da conservação da elasto-estática. Por exemplo, Knowles e Sternberg (1972) desenvolveram um total de três destas integrais.

$$J_k = \int_{\Gamma} (W n_k - T_i u_{i,k}) ds \quad (3.25)$$

$$L = \int_{\Gamma} \epsilon_{3ij} (W x_j n_i + T_i u_j - T_k u_{k,i} x_j) ds \quad (3.26)$$

$$M = \int_{\Gamma} (W x_i n_i - T_k u_{k,i} x_i) ds \quad (3.27)$$

Verifica-se que a integral J é a primeira componente do vetor J_k . Enquanto que as integrais J_k e L desaparecem para qualquer contorno fechado, em uma região não contendo nenhuma singularidade em material elástico (linear ou não linear), a integral M desaparecerá somente para contornos em regiões elásticas lineares, (KANNINEN e POPELAR, 1985).

Se o contorno circunda uma singularidade, em geral, as integrais diferem de zero. Entretanto, o valor da integral para qualquer outro contorno circundando a singularidade será invariante. A principal vantagem destas integrais é que elas descrevem uma característica invariante da singularidade. Se o contorno circunda a ponta da trinca, é importante que o contorno estenda-se ao longo das faces para a ponta da trinca, para assegurar a independência da integral J_2 .

A interpretação física das integrais J_k , L e M foi dada por Budiansk e Rice (1973), como sendo a taxa de liberação de energia quando uma “cavidade”, é transladada ao longo do eixo x_i relativo ao corpo material, é rotacionada em torno do eixo x_i e é expandida uniformemente.

Como desenvolvido por Wang et al. (1980) e Chu e Hong (1990) as componentes da integral J_k , para materiais anisotrópicos, podem ser relacionadas com os fatores de intensidade de tensão por:

$$J_1 = \alpha_{11} K_I^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) K_I K_{II} + \alpha_{22} K_{II}^2 \quad (3.28)$$

$$J_2 = \beta_{11} K_I^2 + \beta_{12} K_I K_{II} + \beta_{22} K_{II}^2 \quad (3.29)$$

Onde:

$$\beta_{11} = \frac{1}{2} \text{Im}[\omega_{11}\omega_{21} + \omega_{31}\omega_{41}] \quad (3.30)$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} \text{Im}[\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21} + \omega_{31}\omega_{42} + \omega_{32}\omega_{41}] \quad (3.31)$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} \text{Im}[\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{32}\omega_{42}] \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(-\frac{s_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{s_2}{\sqrt{s_2}} \right) & \omega_{12} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(-\frac{s_1^2}{\sqrt{s_1}} + \frac{s_2^2}{\sqrt{s_2}} \right) \\
\omega_{21} &= \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(-\frac{p_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{p_2}{\sqrt{s_2}} \right) & \omega_{22} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(-\frac{p_1 s_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{p_2 s_2}{\sqrt{s_2}} \right) \\
\omega_{31} &= \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{\sqrt{s_1}} - \frac{1}{\sqrt{s_2}} \right) & \omega_{32} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{\sqrt{s_1}} - \frac{s_2}{\sqrt{s_2}} \right) \\
\omega_{41} &= \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(-\frac{q_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{s_2}} \right) & \omega_{42} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(-\frac{q_1 s_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{q_2 s_2}{\sqrt{s_2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Os valores p_j e q_j ($j=1,2$) foram apresentados nas eqs. (2.37) e (2.38) como sendo:

$$p_j = a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j \quad \text{e} \quad q_j = a_{12}s_j + \frac{a_{22}}{s_j} - a_{26} \tag{3.34}$$

3.2 METODOLOGIAS CLÁSSICAS PARA DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.2.1 Introdução

Serão apresentadas três metodologias para modelagem bidimensional da fratura em materiais anisotrópicos. As metodologias que serão aqui descritas e utilizadas, são as seguintes:

- correlação dos deslocamentos na ponta da trinca;
- integral de fechamento de trinca modificada;
- integral J .

Os conceitos introduzidos até o presente são ampliados com vista à implementação numérica das metodologias previamente estabelecidas. As duas

primeiras metodologias têm a grande vantagem de poderem ser implementadas em um ambiente de pós-processamento de um *software* que use o método dos elementos finitos como ferramenta de análise. Entretanto é necessário que se possa haver uma razoável interação entre o usuário e o ambiente computacional.

3.2.2 Métodos da correlação dos deslocamentos

3.2.2.1 Dois nós nas faces da trinca

Utilizando-se a função de interpolação do elemento singular ($u_i(r)$) baseada nos deslocamentos nodais $u_2^j, u_2^l, u_2^k, u_2^m, u_1^j, u_1^l, u_1^k$ e u_1^m (Figura 3.5) Shih et al. (1976) estabeleceram uma relação para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão para materiais isotrópicos onde $\Delta u_i(r)$ é dado a partir da definição estabelecida por Henshel e Shaw (1975) e Barsoum (1976) como:

$$\Delta u_i(r) = [4(u_i^j - u_i^l) - (u_i^k - u_i^m)]\sqrt{\frac{r}{L}} + [2(u_i^k - u_i^m) - 4(u_i^j - u_i^l)]\frac{r}{L} \quad (3.35)$$

Na eq. (3.35) o primeiro índice, “i” indica os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 .

Figura 3.5 - Geometria da malha na ponta da trinca (roseta de elementos), mostrando o comprimento do elemento singular (L) e do elemento regular (b).

O fator de intensidade de tensão pode ser obtido considerando-se o termo com $r^{1/2}$ da expansão do deslocamento das eq. (3.10) e (3.12) nas faces da trinca. Usando a eq. (3.35) e tomando-se como base as análises realizadas por Saouma e Sikiotis (1986), Boone et al. (1987) e Padovan e Tanjore (1998), os valores dos fatores de intensidade de tensão podem ser dados por:

$$K_I = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{E_1[4(u_2^j - u_2^l) - (u_2^k - u_2^m)] - E_2[4(u_1^j - u_1^l) - (u_1^k - u_1^m)]}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.36)$$

$$K_{II} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{D_2[4(u_2^j - u_2^l) - (u_2^k - u_2^m)] - D_1[4(u_1^j - u_1^l) - (u_1^k - u_1^m)]}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.37)$$

Onde D_1, E_1, D_2 e E_2 são retirados das equações dos deslocamentos (3.10) e (3.12) para $(\theta = \pm\pi)$. Os índices 1 e 2 são relativos aos modos I e II de carregamento, respectivamente. Ou seja:

$$\begin{aligned} D_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 p_2 - s_2 p_1) \right); & E_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{s_1 - s_2} (p_2 - p_1) \right); \\ D_2 &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 q_2 - s_2 q_1) \right) e & E_2 &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{s_1 - s_2} (q_2 - q_1) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.2.2.2 Um nó nas faces da trinca

Esta análise é feita tomando-se os valores dos deslocamentos u_2^j, u_2^l, u_1^j e u_1^l para os nós a $1/4$ (nós j e l) da ponta da trinca, Figura 3.5.

Igualando-se as eq. (3.35) com as expressões analíticas dos deslocamentos eq. (3.10) e (3.12) e baseando-se nas análises realizadas por Shih et al. (1976) e Lim e Smith (1999) e Guinea (2000) para materiais isotrópicos, e por Santos e Carvalho (2001a e 2001b) para materiais anisotrópicos, a expressão é dada por:

$$K_I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{E_1(u_2^j - u_2^l) - E_2(u_1^j - u_1^l)}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.39)$$

$$K_{II} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{D_2(u_2^j - u_2^l) - D_1(u_1^j - u_1^l)}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.40)$$

3.2.2.3 Extrapolação dos deslocamentos

A técnica da extrapolação dos deslocamentos envolve a correlação dos deslocamentos nodais obtidos por elementos finitos com os valores teóricos baseados nas equações (3.10) e (3.12). Em geral a técnica da extrapolação pode ser realizada utilizando-se vários nós nas faces da trinca, entretanto por simplicidade somente dois nós nas posições $r = L/4$ e $r = L$ foram utilizados. Os deslocamentos foram avaliados para $(\theta = \pm\pi)$ considerando-se os nós j, l e k, m como mostrado na Figura 3.5 e depois extrapolando os valores de K_I e K_{II} para o nó i .

Entretanto, como estabelecido por Dong et al. (1999), do ponto de vista do significado físico, as faces superior e inferior da trinca não podem se sobrepor para condições de carregamento geral. Isto requer que os deslocamentos relativos das faces superior e inferior da trinca sejam iguais ou maiores que zero. De acordo com a análise realizada por Dong et al (1999), os deslocamentos relativos (analíticos) podem ser dados por:

$$\Delta u_1 = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (K_I D_1 + K_{II} E_1) \quad (3.41)$$

$$\Delta u_2 = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (K_I D_2 + K_{II} E_2) \quad (3.42)$$

Desta forma, os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados a partir dos deslocamentos obtidos por elementos finitos (SANTOS e CARVALHO, 2001a e 2001b), como:

$$K_I = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{E_1[8(u_2^j - u_2^l) - (u_2^k - u_2^m)] - E_2[8(u_1^j - u_1^l) - (u_1^k - u_1^m)]}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.43)$$

$$K_{II} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{D_2[8(u_2^j - u_2^l) - (u_2^k - u_2^m)] - D_1[8(u_1^j - u_1^l) - (u_1^k - u_1^m)]}{E_1 D_2 - D_1 E_2} \quad (3.44)$$

Onde $u_2^j, u_2^l, u_2^k, u_2^m, u_1^j, u_1^l, u_1^k$ e u_1^m são os valores dos deslocamentos nodais nas direções x_1 e x_2 , indicado pelos índices subscritos, relativos aos nós j, k, l e m , indicado pelos índices sobrescritos. L é definido como sendo o comprimento do elemento singular na ponta da trinca, Figura 3.5.

3.2.3 Método da integral de fechamento de trinca modificada

Este método é baseado no conceito desenvolvido por Irwin (1957) em que as tensões a frente da ponta da trinca e os deslocamentos nas faces da mesma são usados para calcular o trabalho realizado para fechar a trinca a sua posição original.

Da maneira como originalmente descrito, para o cálculo computacional de G são necessárias duas análises: uma para a trinca real e outra para a trinca virtual. Da primeira análise obtém-se o campo de tensões à frente da trinca, enquanto que da segunda obtém-se o campo de deslocamentos. Entretanto, com a suposição de que o campo de deslocamentos virtual é aproximadamente igual ao campo de deslocamentos real, uma só análise é necessária e a técnica passou a ser definida como integral de fechamento de trinca modificada (RAJU, 1987).

O conceito da integral de fechamento de trinca modificada foi proposto inicialmente por Rybicki e Kanninen (1977) para análise por elementos finitos (utilizando elementos quadriláteros de quatro nós). Eles mostraram que os valores de G_I e G_{II} podem ser escritos em termos das forças nodais equivalentes e dos deslocamentos nodais relativos. Posteriormente Ramamurthy et al. (1986) e Raju (1987) estenderam a análise de Ribick e Kanninen (1977) para vários elementos, inclusive elementos singulares.

A discussão realizada por Narayana e Dattaguru (1996) é muito importante para a computação correta dos fatores de intensidade de tensão. Desta forma pode-se ver que esta abordagem pode facilmente separar a taxa de liberação de energia G_I e G_{II} para o caso de modo misto de fratura.

A integral de fechamento de trinca modificada para um elemento singular ponto a um quarto (*quarter point*), em modo I e modo II de carregamento das faces da trinca, foi dada independentemente por Ramamurthy et al. (1986) e Raju (1987) como sendo:

$$G_I = \frac{1}{B} \frac{1}{2\Delta a} \{ F_{2i} [t_{11}(u_2^k - u_2^m) + t_{12}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2n} [t_{21}(u_2^k - u_2^m) + t_{22}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2o} [t_{31}(u_2^k - u_2^m) + t_{32}(u_2^j - u_2^l)] \} \quad (3.45)$$

$$G_{II} = \frac{1}{B} \frac{1}{2\Delta a} \{ F_{2i} [t_{11}(u_2^k - u_2^m) + t_{12}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2n} [t_{21}(u_2^k - u_2^m) + t_{22}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2o} [t_{31}(u_2^k - u_2^m) + t_{32}(u_2^j - u_2^l)] \} \quad (3.46)$$

Onde:

$$t_{11} = 14 - \frac{33\pi}{8}; \quad t_{12} = -52 + \frac{33\pi}{2}; \quad t_{21} = -\frac{7}{2} + \frac{21\pi}{16};$$

$$t_{22} = -17 - \frac{21\pi}{4}; \quad t_{31} = 8 - \frac{21\pi}{8}; \quad t_{32} = -32 + \frac{21\pi}{2};$$

B é a espessura do corpo;

F_{2i}, F_{2n} e F_{2o} são as forças nodais e $u_2^j, u_2^l, u_2^k, u_2^m, u_1^j, u_1^l, u_1^k$ e u_1^m , são os deslocamentos nodais, Figura 3.6(a).

Ocorrendo um modo individual de carregamento das faces da trinca (modo I ou modo II) os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados pelas equações (3.16) e (3.17).

Figura 3.6 – Representação das forças e deslocamentos nodais

Para problemas em modo misto e também trincas na interface entre dois materiais as equações (3.45) e (3.46) necessitam serem corrigidas para levar em consideração a distinção entre a contribuição das forças nas faces superior e inferior da trinca em torno do eixo x_1 e do nó “n” a partir dos elementos, superior e inferior à frente da ponta da trinca. Desta forma a equação final é dada segundo Raju (1987), por:

$$G_I = \frac{1}{B} \frac{1}{2\Delta a} \{ F_{2i} [t_{11}(u_2^k - u_2^m) + t_{12}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2n} [t_{21}(u_2^k - u_2^m) + t_{22}(u_2^j - u_2^l)] + F_{2o}^T [t_{31}(u_2^k - u_2^i) + t_{32}(u_2^j - u_2^i)] + F_{2o}^B [t_{31}(u_2^m - u_2^i) + t_{32}(u_2^l - u_2^i)] \} \quad (3.47)$$

$$G_{II} = \frac{1}{B} \frac{1}{2\Delta a} \{ F_{1i} [t_{11}(u_1^k - u_1^m) + t_{12}(u_1^j - u_1^l)] + F_{1n} [t_{21}(u_1^k - u_1^m) + t_{22}(u_1^j - u_1^l)] + F_{1o}^T [t_{31}(u_1^k - u_1^i) + t_{32}(u_1^j - u_1^i)] + F_{1o}^B [t_{31}(u_1^m - u_1^i) + t_{32}(u_1^l - u_1^i)] \} \quad (3.48)$$

Onde $F_{1o}^T, F_{2o}^T, F_{1o}^B$ e F_{2o}^B são as forças nodais do elemento superior e inferior à frente da ponta da trinca, Figura 3.6(b).

3.2.4 Integral J

Nesta metodologia, a Integral J é transformada em uma Integral de Domínio Equivalente-IDE (*Equivalent Domain Integral - EDI*) (LI, et al. 1985; MORAN e

SHIH, 1987a, 1987b). Na transformação utilizam-se funções ponderadoras em uma região formada por um contorno fechado próximo à ponta trinca. Utilizando-se a equação (3.24) em um caminho fechado (Figura 3.4), multiplicando o integrando por uma função ponderadora $q = q(X_1, X_2)$, tem-se:

$$J = - \int_{\Gamma} [W \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,k}] q n_j d\Gamma \quad (3.49)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, a forma final da integral em termos da representação da IDE, é dada por:

$$J = - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega - \int_{\Omega} [\frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}]] q d\Omega \quad (3.50)$$

Nota-se que na eq. (3.50) o segundo termo desaparece para problemas elásticos. No contorno mais próximo à ponta da trinca o valor da função ponderadora é unitário, enquanto que no contorno mais externo o valor é nulo. Para qualquer função suficientemente suave, a formulação da IDE é válida. Segundo Li et al. (1985) a metodologia da IDE torna a avaliação numérica da Integral J mais precisa e mais compatível com o MEF, sob o ponto de vista de implementação.

A conversão de integral de contorno em integral de domínio é bastante atrativa com relação à utilização do MEF. Um estudo comparativo entre o método da Integral J e sua respectiva formulação utilizando a metodologia IDE foi apresentada por Li et al. (1985).

Desta forma, entre os procedimentos que utilizam o conceito da Integral J na extração dos fatores de intensidade de tensão mais utilizados citam-se: o método direto, o método da decomposição e o método da integral de interação (MORAN e SHIH, 1987a e 1987b), (RAJU e SHIVAKUMAR, 1990) e (CHU e HONG, 1990).

Um estudo comparativo entre o método direto e o método da decomposição aplicado a problemas bidimensionais, foi apresentado por Raju e Shivakumar (1990) para materiais isotrópicos e por Chu e Hong (1990) para materiais anisotrópicos. O método direto envolve a avaliação numérica de integrais de linha na vizinhança da ponta da trinca. As duas integrais avaliadas, definem o fluxo total de energia que passa

através do contorno em volta da ponta da trinca nas direções paralela e perpendicular a trinca, (RAJU e SHIVAKUMAR, 1990).

O método da decomposição desenvolvido por Ishikawa (1980) e também estudado por Bui (1983) e Bui e Proix (1984), envolve a separação dos campos de deslocamento e tensão em parcelas simétrica e anti-simétrica. Nesse método, a integral do fluxo de energia próxima à ponta da trinca é avaliada apenas no domínio. A parcela simétrica da integral está relacionada com o modo de deformação I e a anti-simétrica como o modo de deformação II. Obviamente esse método envolve um procedimento adicional. É necessário decompor os campos em componentes simétricos e anti-simétricos. Entretanto, os modos puros são diretamente avaliados.

O método da integral de interação envolve a utilização de campos auxiliares assintóticos na região da ponta da trinca. Esse método foi desenvolvido com base na forma unificada da integral de contorno independente apresentada por Moran e Shih (1987a, 1987b). Dentre os métodos citados, esse é o mais geral para extração dos fatores de intensidade de tensão. Os campos auxiliares devem satisfazer as equações que regem o problema e podem ser superpostos aos campos atuais. A introdução desses campos auxiliares no sistema resulta em termos de interação na expressão da taxa de energia disponibilizada para a propagação da trinca, os quais podem ser utilizados para separar as parcelas da taxa de energia disponibilizada referente a cada modo. A integral de interação resultante é posteriormente transformada de integral de contorno para integral de domínio. Com a escolha prudente dos campos auxiliares, os fatores de intensidade de tensão, relativos a cada um dos modos, podem ser extraídos diretamente. Nahta e Moran (1993) enfatizaram a aplicação do método IDE para a extração dos fatores de intensidade de tensão em modos mistos. Aplicaram o método da integral de interação para problemas axi-simétricos de trincas em interface entre materiais. Gosz et al. (1998) utilizaram o mesmo método na avaliação dos fatores de intensidade de tensão ao longo de trincas curvas tridimensionais em interfaces entre materiais.

Outra forma de utilização da integral J para materiais anisotrópicos é a metodologia desenvolvida por Sollero e Aliabadi (1993) e Aliabadi e Sollero (1999). Estes autores, utilizando-se do cálculo da integral J (componente J_1 do vetor J_k) obtiveram os fatores de intensidade de tensão para materiais anisotrópicos com o auxílio do Método dos Elementos de Contorno. Neste trabalho foi utilizado um procedimento para desacoplar os fatores de intensidade de tensão, K_I e K_{II} , baseado na definição da

integral J para materiais anisotrópicos e na razão dos deslocamentos relativos na ponta da trinca. Neste caso, o cálculo da integral J_2 não foi necessário, pois a integração do termo que envolve cada superfície das faces da trinca causaria uma dificuldade a mais na análise.

Como foi visto para o caso da *metodologia da correlação do deslocamento*, os deslocamentos nas superfícies da trinca para $(\theta = \pm\pi)$, num corpo bidimensional de material anisotrópico podem ser escrito pelas equações (3.41) e (3.42), deslocamentos relativos.

Então a razão dos deslocamentos relativos é dada por:

$$u_{rel} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{K_I D_1 + K_{II} E_1}{K_I D_2 + K_{II} E_2} \quad (3.51)$$

E a razão dos fatores de intensidade de tensão é dada por:

$$K_{rel} = \frac{K_I}{K_{II}} = \frac{u_{rel} D_1 - E_1}{D_2 + u_{rel} E_2} \quad (3.52)$$

Ou:

$$K_I = K_{rel} K_{II} \quad (3.53)$$

Substituindo-se a eq. (3.53) na eq. (3.28), e resolvendo-se para K_{II} a seguinte relação pode ser obtida:

$$K_{II} = \left(\frac{J_1}{\alpha_{11} K_{rel}^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) K_{rel} + \alpha_{22}} \right) \quad (3.54)$$

Observa-se que neste caso o valor de K_{II} só depende dos parâmetros de material, da razão relativa dos deslocamentos das faces da trinca e da primeira componente do vetor J_k (integral J).

Para diferenciação dos resultados obtidos entre as metodologias que usam o conceito da integral de contorno, esta metodologia aqui foi denominada de **razão dos deslocamentos**.

No apêndice A, são apresentados os detalhes da formulação para implementação numérica do cálculo da integral J .

Capítulo 4

4 METODOLOGIA PROPOSTA PARA DETERMINAÇÃO DA INTEGRAL J_2

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a metodologia proposta para a determinação da integral J_k de problemas bidimensionais e materiais anisotrópicos, os detalhes da implementação para análise por elementos finitos são mostrados no apêndice A. Neste trabalho considerou-se o conceito da integral de linha baseado no trabalho de Owen e Fawkes (1983) e no conceito da Integral Equivalente de Domínio-IDE (*Equivalent Domain Integral - EDI*) baseado no trabalho de Raju e Shivakumar (1990).

O desenvolvimento da formulação foi baseado no conceito da integral de linha e pode ser aplicado levando-se em consideração o conceito da integral equivalente de domínio. A apresentação desta formulação é uma extensão da formulação desenvolvida por Eichen (1987) para materiais isotrópicos. Na abordagem adotada neste trabalho, o termo de tensão não singular (*T-stress*) é muito importante para o desenvolvimento da mesma, tendo-se em vista a análise da contribuição da parcela da integral J_2 referente às faces da trinca.

Aqui, a parcela da integral J_2 nas faces da trinca foi analisada por meio do campo de tensões analítico na ponta da trinca levando em consideração o termo não singular (*T-stress*) dado por Yuan (1998), sendo assim, foi determinada uma expressão analítica para o termo da integral J_2 referente às faces da trinca e incluída no cálculo da integral J_2 total (parcela referente ao contorno na ponta da trinca mais a parcela referente às faces da trinca).

Um ponto importante a se destacar, é que alguns trabalhos se contradizem a respeito da independência da integral J_2 , Herrmann e Herrmann (1981), Herrmann (1987) Chu e Hong (1990). Entretanto, Eichen (1987) mostrou que a independência da integral J_2 pode ser conseguida se o termo da integração da densidade de energia W ao longo das faces superior e inferior da trinca é incluído no cálculo da mesma. Kim e Paulino (2002), trabalhando com materiais com gradientes funcionais (*Functionally Graded Materials-FGM*) materiais cujas propriedades são dependentes das coordenadas espaciais também, mostraram a independência da integral J_2 .

Desta forma, foi verificada a independência da integral J_2 . Determinando assim, os fatores de intensidade de tensão individuais K_I e K_{II} para modo misto de problemas de fratura tendo em vista o estudo do início de crescimento e propagação de trinca.

4.2 FORMULAÇÃO

Considerando-se um corpo linear elástico sujeito a um campo de deformação bidimensional (estado plano de deformação ou estado plano de tensão) que possui uma função densidade de energia dada pela eq. (2.10) é possível derivar a lei do balanço de energia. Para derivar a lei do balanço de energia, o gradiente de W precisa ser avaliado como dado por:

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \quad (4.1)$$

Aplicando-se a eq. (2.12) na eq. (4.1) e utilizando-se as propriedades de simetria do tensor das tensões e a relação linearizada dos deslocamentos e do tensor das deformações, em notação indicial tem-se:

$$(W\delta_{jk} - \sigma_{ij}u_{i,k})_{,j} = 0 \quad (4.2)$$

Onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Esta equação representa a lei da conservação de energia para um corpo elástico homogêneo livre de forças de campo quando se analisa um contorno Γ não circundando defeitos ou trincas, em um plano local (x_1, x_2) ao longo de um domínio Ω .

Uma representação integral da eq. (4.2) pode ser obtida, integrando-se sobre o domínio Ω e aplicando o teorema da divergência de Gauss, da seguinte forma:

$$\oint_{\Gamma} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma = 0 \quad (4.3)$$

Onde n_j e n_k são vetores unitário normal ao contorno Γ .

Para derivar uma expressão integral válida na ponta da trinca, o domínio Ω é considerado como se mostra na Figura 4.1, onde Γ está sujeito às condições de contorno, tração aplicada e deslocamentos prescritos. O domínio Ω (livre da singularidade) é contornada por Γ que é composta dos segmentos Γ_0 , Γ_c^+ , Γ_c^- , Γ_ε .

Figura 4.1 – Corpo com uma trinca (adaptado de Kim e Paulino, 2002)

Desta forma, a eq. (4.3) leva a:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Se a direção de integração é revertida no terceiro termo da eq. (4.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_c^-} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Abordagem pela integral de contorno

Um vetor J_k é introduzido para o limite $\Gamma_\epsilon \rightarrow 0$, e daí tem-se:

$$J_k \equiv \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma \tag{4.6}$$

Então as eqs. (4.5) e (4.6) podem ser combinadas para produzir:

$$\begin{aligned}
J_k \equiv \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma &= \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \right. \\
&+ \left. \int_{\Gamma_c^+} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

É conveniente combinar os dois termos envolvendo a integração ao longo das faces da trinca, e denominá-los *contorno de integração associado* Γ_c . Para combinar estes termos, o contorno Γ_0 deve interceptar as faces, superior e inferior da trinca a uma mesma distância a partir da ponta da mesma, como mostrado na Figura 4.1. A eq. (4.7) conjuntamente com a eq. (4.6) leva à expressão geral:

$$J_k \equiv \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_0} [W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} ([W^+ - W^-] n_k^+ - [\sigma_{ij}^+ n_j^+ u_{i,k}^+ - \sigma_{ij}^- n_j^- u_{i,k}^-]) d\Gamma \right\} \quad (4.8)$$

Onde, (+) e (-) referem-se as faces superior e inferior da trinca, respectivamente e $n_k^+ = -n_k^-$ é o vetor unitário normal ao contorno Γ_c^+ .

A notação $[W^+ - W^-]$ denota a descontinuidade (*jump*) na densidade de energia de deformação através da abertura da trinca (EICHEN, 1987 e KIM e PAULINO, 2002).

Separando-se a eq. (4.8) para os modos I e II de carregamento, ou seja, para o modo I ($k = 1$). Sobre as faces da trinca n_1^+ é sempre nulo; quando as faces da trinca estão livres de carregamento, σ_{12} e σ_{22} são nulos. Desta forma, para faces livre de carregamento, o termo da *integral de contorno associado* em J_1 é anulado.

$$J_1 = \int_{\Gamma_0} [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma \quad (4.9)$$

E para o modo II ($k = 2$). Assumindo que as superfícies da trinca estão livres de carregamento a eq. (4.9) pode ser escrita como:

$$J_2 = \int_{\Gamma_0} [W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \quad (4.10)$$

Nota-se que a expressão para a integral J_2 dada pela eq. (4.10) inclui o termo responsável pela integração ao longo das faces da trinca da descontinuidade (*jump*) na densidade de energia de deformação.

Se somente o modo I de carregamento (deformação) existe, então a densidade de energia de deformação W é nula sobre as faces da trinca e, desta forma, a segunda componente da integral J_2 é anulada. Quando somente ocorre o modo II de deformação e somente o termo singular $r^{-1/2}$ existe no campo de tensão, a soma das parcelas das integrais sobre as faces da trinca é anulada devido à natureza anti-

simétrica das deformações e novamente a segunda componente da integral J_2 é anulada. Mas, problemas de trincas mais gerais, ambos os termos singular e não singular do campo de tensões podem existir na ponta da trinca e desta forma a componente da integral J_2 não é anulada (RAJU e SHIVAKUMAR, 1990).

Seguindo-se então, será derivada uma expressão analítica para o termo $[W^+ - W^-]$ com o objetivo de auxiliar a determinação da integral J_2 , esta formulação é baseada na metodologia inicialmente desenvolvida por Eichen (1987) para material isotrópico.

As expressões para as tensões e deslocamentos próximos da ponta da trinca inicialmente foram dadas Sih et al. (1965), entretanto para o estudo em curso usar-se-á o campo de tensões dado por Yuan (1998) que inclui o termo não singular da representação analítica das tensões e deslocamentos, dado por:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_2 s_1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_2}{d_2} - \frac{s_1}{d_1} \right] \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_2^2}{d_2} - \frac{s_1^2}{d_1} \right] \right\} + T \quad (4.11)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_2 s_1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_1}{d_2} - \frac{s_2}{d_1} \right] \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right] \right\} \quad (4.12)$$

$$\sigma_6 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right] \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_1}{d_1} - \frac{s_2}{d_2} \right] \right\} \quad (4.13)$$

$$u_1 = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 p_2 d_2 - s_2 p_1 d_1] \right\} + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [p_2 d_2 - p_1 d_1] \right\} + \\ + Tr(a_{11} \cos \theta + a_{16} \sin \theta) \quad (4.14)$$

$$u_2 = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 q_2 d_2 - s_2 q_1 d_1] \right\} + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [q_2 d_2 - q_1 d_1] \right\} + \\ + Tr(a_{12} \sin \theta) \quad (4.15)$$

Onde:

$$d_i = \sqrt{\cos\theta + s_i \sin\theta} \text{ com } (i = 1, 2);$$

T é o termo denominado *T-stress*.

Larsson e Carlsson⁷ (1973 apud YEH et al., 2006) mostraram que o campo de tensões de alguns corpos de prova bi-dimensionais diferem substancialmente dos campos analíticos. O grau de acordo foi dependente da geometria e condições de carregamento. Eles adicionaram o segundo termo da expansão do campo de tensões de Williams (1957), o chamado *T-stress*. Com a introdução deste termo os valores encontrados foram muito mais precisos. O termo *T-stress* foi definido como a tensão atuante paralela ao plano da trinca ao longo do eixo x_1 .

Uma expressão para o termo *T-stress* é dada por Yuan⁸ (1998 apud YEH et al., 2006) como sendo:

$$T = -i(g_{21} \operatorname{Im}(s_1 + s_2) + g_{22} \operatorname{Im}(s_1 s_2)) \quad (4.16)$$

Onde:

g_{21} e g_{22} são constante, no qual são funções do carregamento e da geometria.

Para um corpo de prova anisotrópico com trinca central, a expressão é dada por Yeh et al. (2006) como sendo:

⁷ LARSSON, S. G.; CARLSSON, A. J. (1973). Influence of non singular stress and specimen geometry on small-scale yielding at each tip in elastic-plastic materials. *Journal of Mechanics of Physics and Solids*. v. 21, p. 263-277 apud YEH, H. Y. et al (2006). Effect of T-stress on damage zone size predictions of notched laminated composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 25, n. 1, p. 89-98.

⁸ YUAN, F. G. (1998). Determination of stress coefficient terms in cracked solids for monoclinic materials with plane symmetry at $x_3=0$, NASA CR-1998-208729 apud YEH, H. Y. et al (2006). Effect of T-stress on damage zone size predictions of notched laminated composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 25, n. 1, p. 89-98.

$$\frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} = -0,6204 - 0,1803\left(\frac{2a}{W}\right) \quad (4.17)$$

Onde:

W é a largura do corpo de prova.

Aplicando-se nas eqs. (4.11) a (4.13) o valor de $\theta = \pi$, tem-se:

$$\sigma_1(r, \theta = +\pi) = \sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re}(s_1 s_2 i) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re}[(s_1 + s_2)i] + T \quad (4.18)$$

$$\sigma_2(r, \theta = +\pi) = \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re}(-i) \quad (4.19)$$

$$\sigma_6(r, \theta = +\pi) = \sigma_6 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re}(-i) \quad (4.20)$$

Segundo Su e Sun (2003), de acordo com os parâmetros s_1 e s_2 os problemas podem ser classificados em quatro casos como mostrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Classificação de problemas com materiais anisotrópicos (adaptado de Su e Sun, 20003)

Casos I, II e III correspondem aos materiais ortotrópicos com os eixos de elasticidade paralelos aos eixos coordenados, caso IV corresponde ao caso de

orientação geral dos eixos de elasticidade. Para os casos I-III quando os termos da matriz flexibilidade $a_{16} = a_{26} = 0$, a equação característica eq. (2.30) será da forma:

$$s^4 + 2\left(\frac{E_{11}}{2G_{12}} - \nu_{12}\right)s^2 + \frac{E_{11}}{E_{22}} = 0 \quad (4.21)$$

Introduzindo a notação $A = \frac{E_{11}}{2G_{12}}$ e $B = \frac{E_{11}}{E_{22}}$, diferentes valores das raízes,

s_1 e s_2 , podem ser obtidos a partir das diferentes relações A e B como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Classificação de anisotropia de problemas de trinca baseado nos parâmetros s_1 e s_2 (adaptado de Su e Sun, 2003).

<i>Caso</i>	<i>Orientação dos eixos de elasticidade</i>	<i>Coefficientes da matriz flexibilidade</i>	<i>Parâmetros s_1 e s_2</i>
I	Ortotrópico com os eixos de elasticidade coincidentes com os eixos coordenados Fig. 4.2 (a)	$a_{11}, a_{22}, a_{66}, a_{12} \neq 0$ $a_{16} = a_{26} = 0$	$s_1 = i\sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}} = i\beta_1$ $s_2 = i\sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}} = i\beta_2$
II	Ortotrópico com os eixos de elasticidade coincidentes com os eixos coordenados	$a_{11}, a_{22}, a_{66}, a_{12} \neq 0$ $a_{16} = a_{26} = 0$	$s_1 = i\sqrt{\sqrt{B}} = i\beta_1$ $s_2 = s_1 = i\beta_1$
III	Ortotrópico com os eixos de elasticidade coincidentes com os eixos coordenados	$a_{11}, a_{22}, a_{66}, a_{12} \neq 0$ $a_{16} = a_{26} = 0$	$s_1 = i\sqrt{-A \pm \sqrt{B - A^2}} = \alpha_1 + i\beta_1$ $s_2 = -\alpha_1 + i\beta_1$
IV	Ortotrópico com os eixos de elasticidade não coincidentes com os eixos coordenados Fig. 4.2 (b)	$a_{11}, a_{22}, a_{66}, a_{12} \neq 0$ $a_{16}, a_{26} \neq 0$	$s'_1 = \frac{s_1 \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + s_1 \sin \theta} = \alpha_1 + i\beta_1$ $s'_2 = \frac{s_2 \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + s_2 \sin \theta} = \alpha_2 + i\beta_2$

Fazendo-se o estudo para o caso I e aplicando-se os parâmetros s_1 e s_2 nas equações (4.18) a (4.20), tem-se:

$$\sigma_1(r, \theta = +\pi) = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}(\beta_1 + \beta_2) + T \quad (4.22)$$

$$\sigma_2(r, \theta = +\pi) = \sigma_6(r, \theta = +\pi) = 0 \quad (4.23)$$

Sabendo-se que:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1^2}{E_{11}} + \frac{\sigma_2^2}{E_{22}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{G_{12}} \sigma_6^2 \right) \quad (4.24)$$

E aplicando-se as equações 4.22 e 4.23 na eq. 4.22 tem-se:

$$W(r, \theta = +\pi) = W^+ = \frac{1}{2E_{11}} \left[\frac{K_{II}^2}{2\pi r} (\beta_1 + \beta_2)^2 - \frac{2K_{II}T}{\sqrt{2\pi r}} (\beta_1 + \beta_2) + T^2 \right] \quad (4.25)$$

Da mesma forma para $\theta = -\pi$, tem-se:

$$\sigma_1(r, \theta = -\pi) = -\sigma_1(r, \theta = +\pi) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}(\beta_1 + \beta_2) - T \quad (4.26)$$

Logo:

$$W(r, \theta = -\pi) = W^- = \frac{1}{2E_{11}} \left[\frac{K_{II}^2}{2\pi r} (\beta_1 + \beta_2)^2 + \frac{2K_{II}T}{\sqrt{2\pi r}} (\beta_1 + \beta_2) + T^2 \right] \quad (4.27)$$

Desta forma o valor do *jump* da energia de deformação será dado por:

$$W(r, \theta = +\pi) - W(r, \theta = -\pi) = [W^+ - W^-] = -\frac{2K_{II}T}{E_{11}\sqrt{2\pi r}}(\beta_1 + \beta_2) \quad (4.28)$$

Definindo-se uma distância característica, δ , os limites de integração no segundo termo da eq. (4.10) podem ser divididos em duas partes: a primeira parte a uma distância pré-determinada $(d - \delta)$ na ponta da trinca e a segunda parte está mais próxima da ponta da trinca a uma distância δ , como se mostra na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Figura esquemática do contorno de integração mostrando as distâncias $((d - \delta)$ e δ) definidas nas faces da trinca

De agora em diante a origem x_1 estará localizada no ponto onde o contorno Γ_0 intercepta as faces da trinca. A distância a partir deste ponto até a ponta da trinca é dada por d . Assume-se que a uma distância δ , o termo $[W^+ - W^-]$ é satisfatoriamente aproximado pela forma assintótica da eq. (4.26).

A seguinte aproximação é feita para a integração de $[W^+ - W^-]$ ao longo das faces da trinca:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma &= - \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] dx_1 \approx - \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] dx_1 + \\ &\quad - \int_{d-\delta}^d - \frac{2K_{II} T}{E_{11} \sqrt{2\pi r}} (\beta_1 + \beta_2) dx_1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Usando o fato de que ao longo das faces da trinca $r = d - x_1$ (Figura 4.3) e avaliando-se a integral na equação anterior, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \approx - \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] dx_1 + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.30)$$

Desta forma, baseado na eq. (4.10) e usando o resultado dado pela equação (4.30), a expressão aproximada para J_2 será:

$$J_2 = \int_{\Gamma_0} [W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] dx_1 + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.31)$$

Definindo-se a integral J_2^δ , a partir da eq. (4.31) como sendo:

$$J_2^\delta = \int_{\Gamma_0} [W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] dx_1 \quad (4.32)$$

Logo:

$$J_2 = J_2^\delta + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.33)$$

A quantidade J_2^δ é calculada usando a eq. (4.32) para dois valores de δ (δ_1 e δ_2). Estes valores de J_2^δ serão chamados $J_2^{\delta_1}$ e $J_2^{\delta_2}$ e dados por:

$$J_2^{\delta_1} = \int_{\Gamma_0} [W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta_1} [W^+ - W^-] dx_1 \quad (4.34)$$

$$J_2^{\delta_2} = \int_{\Gamma_0} [W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta_2} [W^+ - W^-] dx_1 \quad (4.35)$$

E a partir da eq. (4.33) obtém-se para δ_1 :

$$J_2 = J_2^{\delta_1} + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta_1}}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.36)$$

E para δ_2 :

$$J_2 = J_2^{\delta_2} + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta_2}}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.37)$$

As equações (4.36) e (4.37) podem ser reordenadas, e uma vez que as quantidades $J_2^{\delta_1}$ e $J_2^{\delta_2}$ tenham sido obtidas numericamente a partir das eqs. (4.34) e (4.35) a integral J_2 pode ser calculada da seguinte forma:

$$J_2 = \frac{J_2^{\delta_2} \sqrt{\delta_1} - J_2^{\delta_1} \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \quad (4.38)$$

$$\frac{4K_{II} T}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) = S = \frac{J_2^{\delta_2} - J_2^{\delta_1}}{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}} \quad (4.39)$$

Tendo-se determinado os valores da integral J_k (J_1 e J_2) a partir das eqs. (4.9) e (4.39) os valores dos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , são determinados a partir das relações (3.28) e (3.29). Neste trabalho os valores de δ_1 e δ_2 foram escolhidos nos pontos gaussianos dos elementos regulares da roseta de elementos na ponta da trinca, entre as distâncias $L \leq \delta \leq (L + b)$ Figura 3.5

Abordagem pela integral de domínio

Como dito anteriormente, a conversão de integral de contorno em integral de domínio é bastante atrativa com relação à utilização pelo MEF.

Considere dois contornos Γ_e (OABCO) e Γ_o (ODEFO) em torno da ponta da trinca como mostrado na Figura 4.4. Os dois contornos contornam uma área

DEFCBAD. Multiplicando-se a integral sobre Γ_ε pela unidade e a integral sobre Γ_0 por zero e considerando a definição da eq. (4.6) a integral J_k pode ser dada, por:

$$J_k = 1 \oint_{\Gamma_\varepsilon} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma - 0 \oint_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma \quad (4.40)$$

Figura 4.4 – Contornos circundando a ponta da trinca, (adaptado de Raju e Shivakumar (1990))

Esta manipulação é realizada para converter uma integral de contorno (linha) em uma integral de domínio (área). A eq. (4.40) pode ser expandida como:

$$J_k = 1 \oint_{ABC} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma - 0 \oint_{DEF} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma + 1 \oint_{CO} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma + 1 \oint_{OA} (Wn_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma \quad (4.41)$$

Uma função arbitrária continua $q = q(x_1, x_2)$ é introduzida tal que sua propriedade seja:

$$q = q(x_1, x_2) = 1 \quad \text{em} \quad \Gamma_{ABC} \quad (4.42)$$

$$q = q(x_1, x_2) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_{DEF}$$

Usando a função q a eq. (4.41) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned}
J_k &= \oint_{ABC} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma - \oint_{DEF} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&+ \oint_{CO} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \oint_{OA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma = \\
&= [- \oint_{CBA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma - \oint_{DEF} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma] + \\
&+ \oint_{CO} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \oint_{OA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Uma integral de contorno fechado ao longo de DEFCBAD pode ser definida adicionando-se e subtraindo-se as integrais de linha sobre as faces da trinca FC e AD, como:

$$\begin{aligned}
J_k &= - \oint_{CBA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma - \oint_{DEF} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&- \oint_{FC} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \oint_{FC} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&- \oint_{AD} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \oint_{AD} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&+ \oint_{CO} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \oint_{OA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
J_k &= - \oint_{DEFCBAD} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&+ \oint_{FC} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \oint_{AD} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) q d\Gamma + \\
&+ \oint_{CO} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \oint_{OA} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Desta forma, verifica-se na eq. (4.45) que a integral J_k é composta por um termo referente à integração no domínio e outro referente à integração no contorno (integral de área e integral de linha, respectivamente).

$$J_k = (J_k)_{dominio} + (J_k)_{linha} \quad (4.46)$$

No primeiro termo a integral de contorno (sobre DEFCBAD) exclui a ponta da trinca e o segundo termo corresponde à integração ao longo das faces da trinca. Pode-se notar que a expressão referente à integração no domínio pode ser expressa de acordo com as eqs. (3.49) e (3.50), já discutidas anteriormente (LI et al. 1985; MORAN e SHIH, 1987a, 1987b).

$$(J_k)_{dominio} = - \oint_{DEFCBAD} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) q d\Gamma = - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega \quad (4.47)$$

Para o segundo termo podemos aplicar a mesma interpretação discutida quando da obtenção das eqs. (4.7) e (4.8), ou seja, podemos associar as integrais sobre FC e AD e sobre CO e OA. Para combinar estes termos, o contorno Γ_e intercepta as faces, superior e inferior da trinca a uma mesma distância a partir da ponta da mesma (CO = OA), Figura 4.4.

Separando-se os termos referentes às faces superior e inferior da trinca com os sinais de (+) e (-) a partir da eq. (4.45) tem-se:

$$\begin{aligned} (J_k)_{linha} = & \left[\oint_{FC} (W^+ n_k^+ - \sigma_{ij}^+ n_j^+ u_{i,k}^+) q d\Gamma + \oint_{AD} (W^- n_k^- - \sigma_{ij}^- n_j^- u_{i,k}^-) q d\Gamma \right] + \\ & + \left[\oint_{CO} (W^+ n_k^+ - \sigma_{ij}^+ n_j^+ u_{i,k}^+) d\Gamma + \oint_{OA} (W^- n_k^- - \sigma_{ij}^- n_j^- u_{i,k}^-) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

A mesma interpretação que foi dada para obtenção da eq. (4.10) pode ser dada para a integral da eq. (4.48), $n_k^+ = -n_k^-$ é o vetor unitário normal ao contorno, combinando-se as duas somas das integrais sobre FC e AD e sobre CO e OA, para as faces da trinca livres de carregamento e modo II de deformação ($k = 2$), tem-se:

$$(J_2)_{linha} = \left[\oint_{FC} W^+ n_2^+ q d\Gamma - \oint_{AD} W^- n_2^+ q d\Gamma \right] + \left[\oint_{CO} W^+ n_2^+ d\Gamma - \oint_{OA} W^- n_2^+ d\Gamma \right] \quad (4.49)$$

Adotando-se a mesma definição que foi dada para a distância δ da ponta da trinca (Figura 4.3), observa-se que $FC = AD = (d - \delta)$ e $CO = OA = \delta$, desta forma podemos interpretar as duas parcelas da eq. (4.49) da seguinte forma:

$$(J_2)_{linha} = \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] q n_2^+ d\Gamma + \int_{d-\delta}^d [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \quad (4.50)$$

Observa-se neste caso o surgimento da notação $[W^+ - W^-]$ denotando a descontinuidade (*jump*) na densidade de energia de deformação. O segundo termo da integral da eq. (4.50) pode ser interpretado como sendo a parcela referente à definição adotada anteriormente, determinada analiticamente dada pela eq. (4.27) ou seja:

$$\int_{d-\delta}^d [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \approx \int_{d-\delta}^d -\frac{2K_{II} T}{E_{11} \sqrt{2\pi} r} (\beta_1 + \beta_2) dx_1 = \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.51)$$

Consequentemente para J_2 , a partir da eq. (4.46) e associando-se as eq. (4.47) (4.50) e (4.51), tem-se:

$$J_2 \approx - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega + \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] q n_2^+ d\Gamma + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.52)$$

Desta forma pode-se interpretar a eq. (4.52) da mesma forma que para o eq. (4.29), ou seja, definindo-se a integral J_2^δ como sendo:

$$J_2^\delta = - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega + \int_0^{d-\delta} [W^+ - W^-] q n_2^+ d\Gamma \quad (4.53)$$

Logo:

$$J_2 = J_2^\delta + \frac{4K_{II} T \sqrt{\delta}}{E_{II} \sqrt{2\pi}} (\beta_1 + \beta_2) \quad (4.54)$$

A quantidade J_2^δ é calculada usando a eq. (4.53) para dois valores de δ (δ_1 e δ_2). Estes valores de J_2^δ serão chamados $J_2^{\delta_1}$ e $J_2^{\delta_2}$ e dados por:

$$J_2^{\delta_1} = - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega + \int_0^{d-\delta_1} [W^+ - W^-] q n_2^+ d\Gamma \quad (4.55)$$

$$J_2^{\delta_2} = - \int_{\Omega} [W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j}] d\Omega + \int_0^{d-\delta_2} [W^+ - W^-] q n_2^+ d\Gamma \quad (4.56)$$

A interpretação para os valores de δ_1 e δ_2 é a de que se poderia fazer a análise anterior uma para os contornos FC, CO, OA e AD , ou seja $CO = OA = \delta_1$ e uma outra análise considerando os contornos $FC, C'O, OA'$ e AD ou seja $C'O = OA' = \delta_2$.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As metodologias descritas nos capítulos anteriores foram aplicadas ao cálculo dos fatores de intensidade de tensão de problemas bidimensionais de trincas em materiais anisotrópicos. Os valores das propriedades dos materiais foram considerados a partir de dados da literatura, servindo de base de comparação para os resultados obtidos.

Num pacote comercial é possível a implementação destas metodologias, desde que este permita certa interação com o usuário através de uma linguagem de programação. Como estas metodologias fazem uso de parâmetros da geometria do modelo, das propriedades do material, deslocamentos e das forças nodais possíveis de obter num ambiente de pós-processamento, os cálculos dos fatores de intensidade de tensão podem ser realizados utilizando-se as eqs. (3.37) a (3.48) e (4.9) e (4.38).

Inicialmente o programa aqui utilizado foi o ANSYS® versão 5.5, este permite uma interação maior com o usuário através de uma linguagem de *scripting* denominada *ANSYS Parametric Design Language* – APDL (ANSYS, 1998). Esta linguagem pode ser utilizada para automatizar aplicações comuns do usuário, como por exemplo, a criação de modelos parametrizados. A APDL também suporta uma grande gama de outras características tais como: comandos de repetição, macros, desvios condicionais (*If-Then-Else*), laços de *Do*, operações com escalares, vetores e matrizes, entre outras. No apêndice C podem se verificar as rotinas desenvolvidas para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão via correlação dos deslocamentos e via integral de fechamento de trinca modificada. Para o caso da integral J_k , também é descrito uma rotina para o seu cálculo, entretanto, algumas simplificações foram consideradas.

Para análise de fratura em materiais anisotrópicos, grandes dificuldades foram encontradas na implementação das metodologias da integral de fechamento de trinca modificada (MCCI) e da integral J_k no pacote comercial principalmente no uso e manipulação de números complexos.

Desta forma, foi desenvolvido no Laboratório de Tribologia e Compósitos – LTC (Departamento de Engenharia Mecânica /EESC/USP) um pacote computacional de análise linear elástica de problemas planos (quase-estático) baseado no Método dos Elementos Finitos, cuja finalidade foi, de superar todas as dificuldades encontradas. Esta implementação se deu a partir de rotinas existentes no trabalho de Owen e Fawkes (1983), usando elementos quadriláteros de oito nós. O mesmo, vem sendo denominado de EFICAS (Elementos Finitos CAseiro). Este pacote computacional tem seus módulos da seguinte forma:

Figura 5.1 - Fluxograma simplificado da estrutura do programa de elementos finitos EFICAS (ANGÉLICO et al., 2004).

Os detalhes do equacionamento matemático da metodologia da integral J_k para análise por Elementos Finitos, implementada no EFICAS pode ser observado no Apêndice A desta tese.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.2.1 Chapa com trinca central perpendicular à direção de carregamento de tração uniforme (Modo I de carregamento)

Neste caso, considerou-se uma chapa retangular com uma trinca central, conforme mostrado na Figura 5.2, o carregamento adotado foi o de tração uniforme nas bordas ($\sigma = 10\text{MPa}$). As condições de contorno de deslocamento foram tais que foi utilizado metade da chapa aplicando-se condições de simetria nos nós localizados em $X_1 = 0$ $u_1 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa são: altura $2h = 0,2\text{m}$, largura $2W = 0,2\text{m}$ e as relações entre a largura e o comprimento da trinca variaram de 0,1 até 0,8 ($0,1 \leq a/W \leq 0,8$).

Figura 5.2 – Chapa com uma trinca central.

O material foi considerado ortotrópico com os eixos do material paralelos aos eixos X_1 e X_2 do sistema de coordenadas global. Entretanto este material é considerado hipotético (não tem aplicação prática). Os dois parâmetros β_1 e β_2 (equações das raízes do problema) são dados de acordo com a relação descrita em Bowie e Freese (1972), como sendo:

$$\beta_1 \beta_2 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \quad \text{e} \quad \beta_1 + \beta_2 = \sqrt{2} \left[\left(\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \right) + \frac{E_{11}}{2G_{12}} - \nu_{12} \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

Tomando-se $\beta_1 = 1$, nas equações anteriores, tem-se:

$$\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}} \quad \text{e} \quad 1 + \beta_2 = \sqrt{2} \left[\left(\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \right) + \frac{E_{11}}{2G_{12}} - \nu_{12} \right]^{1/2} \quad (5.2)$$

No presente estudo, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e coeficiente de Poisson ν_{12} foram fixados ($G_{12} = 2,941 \text{ Pa}$, $\nu_{12} = 0,005$) variando-se o valor de β_2^2 $0,1 \leq \beta_2^2 \leq 4,5$ o módulo de Young longitudinal foi calculado da seguinte forma $E_{11} = G_{12}(\beta_2^2 + 2\nu_{12} + 1)$. As propriedades do material foram escolhidas de tal forma que os resultados pudessem ser comparados com os obtidos por Bowie e Freese (1972). A escolha foi de tal maneira que as raízes da equação característica são puramente imaginárias, Caso I na Tabela 4.1 (BOWIE e FREESE, 1972; SU e SUN, 2003).

A análise de convergência dos fatores de intensidade de tensão obtidos com os métodos estudados da solução na versão h de extensão do MEF foi feita por Santos e Carvalho (2001a, 2001b) e não será detalhada aqui. Esta extensão refere-se à mudança sistemática da discretização que gera um aumento no número de graus de liberdade da solução do problema. Neste caso envolvendo a variação do número de graus de liberdade pelo controle do tamanho dos elementos. Neste estudo foi considerado, o número de graus de liberdade da malha (H), a geometria (tamanho) do elemento singular na ponta da trinca (L) com $2 \leq a/L \leq 32$ e número de elementos na roseta na ponta da trinca (N) Figura 3.5. A região em torno da ponta da trinca foi modelada com três (03) anéis e dezesseis (16) e oito (08) setores de elementos.

Nos trabalhos de Santos e Carvalho (2001a, 200b) foi concluído que a relação a/L é muito importante no que diz respeito à convergência dos resultados obtidos. Esta observação também foi concluída por Raju (1990) e Ramamurthy et al. (1986).

Nestes trabalhos a melhor relação a/L foi encontrada ser maior ou igual a dezesseis, ou seja, $a/L \geq 16$ para as metodologias utilizadas nestes trabalhos, integral

de fechamento de trinca modificada e integral J_k , por isso utilizou-se aqui esta relação, na Figura 5.3 mostra-se uma das discretizações das malhas para $a/L = 16$ e $N = 16$.

Figura 5.3 – Discretização da malha de elementos finitos para $a/L = 16$ e $N = 16$.

Os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$), calculados pela metodologia da integral J_k , para vários valores da relação a/W ($0,1 \leq a/W \leq 0,8$), são mostrados nas tabelas (Tabela 5.1, Tabela 5.2, Tabela 5.3 e Tabela 5.4). No apêndice B são mostrados os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) calculados pelas metodologias descritas no capítulo 3 (correlação dos deslocamentos e integral de fechamento de trinca modificada) junto estão os valores obtidos dos trabalhos de Bowie e Freese (1972) e Su e Sun (2003). Os valores dos erros relativos sobre os valores de $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$, calculados por meio das metodologias descritas neste trabalho não foram maiores que 2,711 %. O erro encontrado foi para a razão $a/W = 0,8$ o que indica a influência do tamanho da trinca nos valores de K_I . Entretanto, mesmo este valor no erro, demonstra a precisão na metodologia desenvolvida, mesmo que utilizando o conceito da integral de contorno com os dados da eq. (4.9), gradientes de deslocamentos, deformações, tensões e densidade de energia de deformação, sendo calculados nos pontos gaussianos dos elementos do contorno de avaliação e não nos pontos nodais como indica a literatura no uso do conceito da integral equivalente de domínio (IDE), (BITTENCOURT et al., 1992, KIM e PAULINO, 2003 e KIM e PAULINO, 2004).

Tabela 5.1 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

β_2^2	$a/W=0,1$			
	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Integral J_k	Erro (%)
0,1	1,04	1,035	1,03712	-0,277
0,3	1,02	1,027	1,02092	0,0901
0,5	1,02	1,02	1,01730	-0,265
0,7	1,02	1,016	1,01551	-0,440
0,9	1,01	1,014	1,01442	0,4376
1,0	-	1,013	1,01401	-
1,1	1,01	1,012	1,01358	0,3544
1,5	1,01	1,009	1,01221	0,2188
2,5	1,01	1,006	1,01018	0,0178
3,5	1,01	1,004	1,00896	-0,1029
4,5	1,01	1,003	1,00818	-0,1802

Tabela 5.2 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

β_2^2	$a/W=0,2$			
	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Integral J_k	Erro (%)
0,1	1,16	1,148	1,16029	0,025
0,3	1,1	1,096	1,09542	-0,416
0,5	1,08	1,076	1,07629	-0,343
0,7	1,07	1,065	1,06565	-0,406
0,9	1,06	1,057	1,05855	-0,137
1,0	-	1,054	1,05573	-
1,1	1,05	1,052	1,05333	0,317
1,5	1,05	1,044	1,04629	-0,353
2,5	1,04	1,035	1,03721	-0,268
3,5	1,03	1,03	1,03287	0,278
4,5	1,03	1,028	1,03287	0,278

Tabela 5.3 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)

β_2^2	$a/W=0,5$			
	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Integral J_k	Erro (%)
0,1	1,85	1,816	1,84544	-0,246
0,3	1,57	1,566	1,56619	-0,242
0,5	1,46	1,454	1,45455	-0,373
0,7	1,39	1,390	1,39060	0,043
0,9	1,35	1,348	1,34915	-0,062
1,0	-	1,333	1,33333	-
1,1	1,32	1,319	1,31994	-0,004
1,5	1,28	1,281	1,28200	0,156
2,5	1,24	1,235	1,23651	-0,281
3,5	1,22	1,214	1,21619	-0,312
4,5	1,2	1,203	1,20460	0,3833

Tabela 5.4 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)

β_2^2	$a/W=0,8$			
	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Integral J_k	Erro (%)
0,1	3,1	3,112	3,13348	1,080
0,3	2,37	2,417	2,39862	1,207
0,5	2,17	2,196	2,18245	0,573
0,7	2,05	2,088	2,07669	1,301
0,9	1,99	2,023	2,01393	1,202
1,0	-	1,999	1,99101	-
1,1	1,95	1,98	1,97200	1,128
1,5	1,87	1,925	1,91975	2,660
2,5	1,81	1,862	1,85908	2,711
3,5	1,8	1,833	1,83087	1,715
4,5	1,8	1,815	1,81379	0,766

No gráfico da Figura 5.4 mostram-se os valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão determinados pela metodologia da integral J_k , para vários valores da relação a/W ($0,1 \leq a/W \leq 0,8$), comparados com os obtidos por Bowie e Freese (1972) e Su e Sun (2003).

Verifica-se pelos resultados, que existe uma dependência do grau de anisotropia, demonstrado pelos vários valores de β_2^2 , sobre os valores dos fatores de intensidade de

tensão, ou seja, quanto maior o valor de β_2^2 menor o valor dos fatores de intensidade de tensão para uma mesma relação a/W , esta conclusão também foi verificada por diversos autores (CHU e HONG (1990), SU e SUN (2003), WANG e SUN (2005) e BANKS-SILLS et al. (2005)), que estudaram este problema e sempre comparando seus resultados com o trabalho pioneiro de Bowie e Freese (1972). Como o caso é bastante estudado na literatura (ver revisão cronológica da literatura no capítulo 1), a verificação da independência da integral J_1 não foi realizada neste momento.

Figura 5.4 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) em função dos valores de β_2^2 e da relação a/W .

5.2.2 Chapa com trinca central formando um ângulo com a direção de carregamento de tração uniforme (Modo misto de carregamento)

Neste caso, considerou-se uma chapa retangular com uma trinca central formando um ângulo de quarenta e cinco graus ($\beta = 45^\circ$) com a direção de carregamento, conforme mostrado na Figura 5.5. O carregamento adotado foi o de tração uniforme nas bordas ($\sigma = 10 \text{ MPa}$). As condições de contorno de deslocamento foram tais que foi utilizado a chapa inteira aplicando-se aos dois nós localizados em $X_1 = \pm W$ e $X_2 = 0$, $u_2 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa foram: altura $2h = 0,2 \text{ m}$, largura $2W = 0,2 \text{ m}$ e a relação entre a largura e o comprimento da trinca foi de $a/W = 0,2$.

Figura 5.5 – Chapa com uma trinca central inclinada em relação a direção de carregamento.

O material foi o mesmo considerado no trabalho de Gandhi (1972), um compósito de epóxi com fibra de vidro, cujas propriedades são:

$$E_{11} = 48,29 \text{ GPa} \text{ (7,0 Mpsi)}, E_{22} = 17,24 \text{ GPa} \text{ (2,5 Mpsi)}$$

$$G_{12} = 6,89 \text{ GPa (1,0 Mpsi)} \text{ e } \nu_{12} = 0,29$$

Os fatores de intensidade de tensão normalizados foram calculados em termos de diferentes orientações dos eixos principais do material (diferentes direções das fibras), ou seja, $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Os valores estão mostrados na Tabela 5.5 e Tabela 5.6. Foi considerado a mesma sistemática de discretização realizada nos trabalhos de Santos e Carvalho (2001a, 2001b), para este problema foi utilizado a relação $a/L = 16$ e número de elementos na ponta da trinca $N = 16$ (roseta de elementos).

Nas tabelas (Tabela 5.5 e Tabela 5.6) estão também incluídos os resultados calculados pela metodologia desenvolvida por Sollero e Aliabadi (1993) e descrita no Capítulo 3, aqui foi denominada de metodologia da razão dos deslocamentos. Os valores dos erros aqui mostrados foram calculados com referência aos valores retirados do trabalho de Gandhi (1972), por ser um trabalho pioneiro e os vários estudos constantes na literatura fazerem comparação com o mesmo.

Verifica-se que os erros máximos foram de 10,366 % para o valor de $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ e de 21,245 % para $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$, entretanto estes erros somente foram encontrados para o valor de $\alpha = 45^\circ$ o que indica a aplicabilidade da metodologia desenvolvida para a integral J_k . Para as outras metodologias correlação dos deslocamentos e integral de fechamento de trinca modificada os valores foram tabelados e é mostrado no apêndice B.

Tabela 5.5 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	Gandhi (1972)	Su e Sun (2003)	Integral J_k	Razão dos Desl.	Erro (%)
0	0,525	0,5251	0,5219	0,5249	-0,590
45	0,519	0,5191	0,5728	0,5188	10,366
90	0,535	0,5395	0,5549	0,5367	3,719
105	0,543	0,5456	0,5575	0,5407	2,670
120	0,544	0,5400	0,5543	0,5411	1,893
135	0,538	0,5371	0,5369	0,5365	-0,204
180	0,525	0,5251	0,5219	0,5249	-0,590

Tabela 5.6 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)

α	<i>Gandhi (1972)</i>	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>	<i>Erro (%)</i>
0	0,516	0,5151	0,5159	0,5129	-0,019
45	0,514	0,5157	0,4048	0,5123	-21,245
90	0,529	0,5323	0,5117	0,5314	-3,270
105	0,531	0,5357	0,5032	0,5322	-5,235
120	0,527	0,5286	0,5189	0,5273	-1,537
135	0,522	0,5236	0,5217	0,5219	-0,057
180	0,516	0,5151	0,5159	0,5129	-0,019

Neste caso os erros foram maiores que os encontrados para o caso estudado para o modo I de carregamento.

Para a metodologia que usa a *razão dos deslocamentos* (SOLLERO e ALIABADI (1993)) os erros máximos foram de -0,533 % para $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ e de -0,601 % para $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$, ou seja, foram menores que os calculados pela integral J_K que corrige a componente da integral J_2 nas faces da trinca. Acredita-se que, como para a metodologia da *razão dos deslocamentos* não ser necessário o cálculo da integral J_2 só se usa o valor de J_1 e verificando-se pelo problema para o modo I que o cálculo da integral J_1 foi preciso, foi natural encontrar erros menores. O que levaria a concluir certa imprecisão no uso da metodologia da integral J_K que corrige a componente da integral J_2 nas faces da trinca.

Desta forma, fez-se um estudo da precisão no cálculo da integral J_2 , para isto fez-se a mesma interpretação que para o caso da metodologia da razão dos deslocamentos que usa a integral J_1 , usando a integral J_2 .

A relação dos fatores de intensidade de tensão dada pela eq. (3.52) ($K_{rel} = K_I / K_{II} = (u_{rel}D_1 - E_1)/(D_2 + u_{rel}E_2)$) foi aplicada na eq. (3.29), ou seja, substituindo-se a eq. (3.53) na eq. (3.29), e resolvendo-se para K_{II} a seguinte relação pode ser obtida:

$$K_{II} = \left(\frac{J_2}{\beta_{11}K_{rel}^2 + \beta_{12}K_{rel} + \beta_{22}} \right) \quad (5.1)$$

Observa-se que neste caso o valor de K_{II} só depende dos parâmetros de material, da razão relativa dos deslocamentos das faces da trinca (eq. (3.51)) e da segunda componente do vetor J_k (integral J_2).

Na Tabela 5.7 mostra-se os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ e $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$, calculados a partir do conceito da razão de deslocamentos com uso do valor da integral J_2 conforme indicado na eq. (5.1). Verifica-se que o erro máximo foi de 6,647 % para $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ e de 6,906 % para $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$, entretanto como descrito anteriormente, somente para o valor de $\alpha = 45^\circ$ o que indica a aplicabilidade da metodologia.

Tabela 5.7 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ e $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$) calculados a partir do valor de J_2

α	$K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$	Erro (%)	$K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$	Erro (%)
	<i>Gandhi</i> (1972)			<i>Gandhi</i> (1972)		
0	0,525	0,5233	0,249	0,516	0,5115	-0,872
45	0,519	0,4845	-6,647	0,514	0,4785	-6,906
90	0,535	0,5317	-0,617	0,529	0,5265	-0,472
105	0,543	0,5343	-1,602	0,531	0,5259	-0,96
120	0,544	0,5440	0,000	0,527	0,5301	0,588
135	0,538	0,5366	-0,260	0,522	0,5220	0,000
180	0,525	0,5234	-0,305	0,516	0,5115	-0,872

Desta forma, entende-se que a correção da componente da integral J_2 referente às faces da trinca é muito importante isso é confirmado pelos valores de $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$ dados na Tabela 5.8, onde estes foram calculados sem a correção da parcela da integral J_2 referente às faces da trinca, ou seja, os erros foram maiores ($-8,521 \leq \text{erro}(\%) \leq 9,349$). Segundo Chu e Hong (1990) os valores da integral J_2 podem ser calculados sem a correção, desde que os contornos sejam escolhidos de forma a estarem muito próximos da ponta da trinca, especificamente eles escolheram contornos que passaram dentro da roseta de elementos (elementos singulares) o que com isso, segundo estes autores não foi necessário corrigir o valor desta integral. Entretanto, eles verificaram uma variação muito maior nos valores desta integral (J_2) quando

comparado com a variação da integral J_1 , para a mesma distância do contorno em relação à ponta da trinca, o que indicou uma dependência dos valores da integral J_2 em relação ao contorno escolhido.

Tabela 5.8 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$) calculados a partir do valor de J_2 sem a correção da componente referente às faces da trinca

α	$K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$ <i>Gandhi (1972)</i>	$K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$	Erro (%)
0	0,516	0,5534	7,248
45	0,514	0,4702	-8,521
90	0,529	0,5032	-4,877
105	0,531	0,5449	2,618
120	0,527	0,5756	9,222
135	0,522	0,5708	9,349
180	0,516	0,5534	7,248

Desta forma, se pode concluir, que as metodologias aqui estudadas apresentam bastante precisão no cálculo dos fatores de intensidade de tensão, para o caso aqui considerado, chapa com trinca central formando um ângulo com a direção de carregamento de tração uniforme (modo misto de carregamento).

As metodologias da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada, também foram precisas no cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

Já para as metodologias da integral de contorno, estas também se mostraram bastantes eficazes, mesmo que utilizando o conceito da integral de contorno com os dados da eq. (4.9) (gradientes de deslocamentos, deformações, tensões e densidade de energia de deformação) sendo calculados nos pontos gaussianos dos elementos do contorno de avaliação.

5.2.3 Independência da Integral J_k - Chapa com trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme numa das extremidades

Neste exemplo avaliou-se a independência da Integral J_k . Para isto, considerou-se o problema de uma chapa retangular com uma trinca na borda, conforme mostrado na Figura 5.6, o carregamento adotado foi o de cisalhamento uniforme numa das extremidades ($\sigma = 10 \text{ MPa}$). As condições de contorno de deslocamento foram tais que para os nós localizados em $X_2 = -h$, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa são: altura $2h = 0,2 \text{ m}$, largura $W = 0,1 \text{ m}$ e comprimento da trinca $a = 0,05 \text{ m}$. O material foi o mesmo que usado por Chu e Hong (1990) e Su e Sun (2003) cujas propriedades são mostradas na Figura 5.6, identificado como material 2 e ângulo de orientação das fibras α igual à zero ($\alpha = 0$).

Material 2:

$$E_{11} = 141,8 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 9,45 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,19 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,31$$

Figura 5.6 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme

Para a análise de convergência dos valores da integral J_k , obtidas para a solução na versão h de extensão do MEF, utilizou-se a malha da Figura 5.3 com $H/2 = 1781$ e $a/L = 16$. A malha foi discretizada na região em torno da ponta da trinca, como descrito anteriormente, com três (03) anéis e dezesseis (16) setores de elementos. Na

Figura 5.7, mostra-se os contornos utilizados para a avaliação dos valores da integral J_k .

Figura 5.7 – Contornos utilizados para o cálculo da integral J_k

Na Figura 5.8, mostra-se os valores das integrais J_k (J_1 e J_2) para os diversos contornos estudados neste trabalho. Verifica-se, que não houve variação significativa nos valores tanto de J_1 como de J_2 o que prova a independência integral J_k , mesmo analisando-se um problema onde ocorra carregamento de flexão, os valores dos fatores de intensidade de tensão para este caso foram calculados e podem ser comparados com os dados por Chu e Hong (1990) e Su e Sun (2003) Tabela 5.6 e Tabela 5.7 para $\alpha = 0$ e $\alpha = \pm 90$, para os outros valores de α estes podem ser encontrados no Apêndice B.

Com este exemplo verifica-se para a integral J_2 o fato da correção das parcelas referentes às faces da trinca levar ao comportamento de independência do contorno escolhido. Segundo Chu e Hong (1990), a grande dispersão verificada nos valores de J_2 deveu-se ao fato de os mesmos não ter incluído nesta, a parcela referente às faces da trinca.

Tabela 5.9 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong (1990)</i>	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>
90	8.866	8.835	8.70557	8.70693
0	8.695	8.801	8.55219	8.54995
-90	8.866	8.835	8.70557	8.70693

Tabela 5.10 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong (1990)</i>	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>
90	1.037	1.030	0.89142	0.88799
0	1.358	1.339	1.15271	1.21527
-90	1.037	1.030	0.89142	0.88799

Figura 5.8 – Valores da Integral J_k para diversos contornos.

5.2.4 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme numa das extremidades

Neste caso, considerou-se uma chapa retangular com uma trinca na borda, conforme mostrado na Figura 5.15, o carregamento adotado foi o de tração uniforme numa das extremidades ($\sigma = 10 \text{ MPa}$). As condições de contorno de deslocamento foram tais que para os nós localizados em $X_2 = -h/2$ $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa são: altura $2h = 0,2 \text{ m}$, largura $W = 0,1 \text{ m}$ e comprimento da trinca $a = 0,05 \text{ m}$.

Material 2:

$$E_{11} = 141,8 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 9,45 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,19 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,31$$

Figura 5.9 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de tração uniforme numa das extremidades

O material foi o mesmo usado por Chu e Hong (1990) e Su e Sun (2003) cujas propriedades são mostradas na Figura 5.9, identificado como material 2. Considerando a análise de convergência dos fatores de intensidade de tensão obtidos com os métodos estudados da solução na versão h de extensão do MEF, utilizou-se a malha da Figura 5.7 com $H/2 = 1781$ e $a/L = 16$. Os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ e $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$) são mostrados na Tabela 5.11 e Tabela 5.12

para as metodologias estudadas neste trabalho integral J_k , metodologias da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada (MCCI).

No gráfico da Figura 5.10, mostra-se os valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para os modos I ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$) e modo II ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$). Nesta figura mostra-se a influência do ângulo α de orientação das fibras do material da chapa sobre os valores de K_I e K_{II} . Neste caso, não houve comparação com resultados da literatura.

Tabela 5.11 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$)

α	Integral J_k	Razão dos Desl.	Dois Pontos	Um Ponto	Extr. Desl.	MCCI
-90	2,83325	2,82584	2,83994	2,8629	2,85525	2,83193
-80	3,00947	3,00872	2,92608	3,00265	2,97712	2,96641
-70	3,22503	3,22358	3,17954	3,24146	3,22082	3,19315
-60	3,33766	3,33027	3,26872	3,35405	3,32561	3,2013
-50	3,38564	3,38212	3,28713	3,39887	3,36162	3,23798
-40	3,31748	3,30982	3,24759	3,33967	3,30898	3,18657
-30	3,15646	3,14701	3,05986	3,15313	3,12204	3,05897
-20	2,97749	2,97335	2,94563	2,99688	2,97979	2,92441
-10	2,81695	2,80732	2,77309	2,81473	2,80085	2,77097
0	2,74012	2,74012	2,70228	2,74192	2,7287	2,73301
10	2,82526	2,81521	2,78117	2,82309	2,80911	2,76484
20	2,98223	2,97764	2,95048	3,00191	2,98477	2,91352
30	3,16592	3,15543	3,06954	3,16324	3,13201	3,05328
40	3,31866	3,30977	3,2501	3,34205	3,3114	3,17417
50	3,36402	3,3599	3,27184	3,3824	3,34555	3,2137
60	3,30788	3,29926	3,24736	3,33071	3,30293	3,18081
70	3,09027	3,0852	3,05202	3,10552	3,08769	3,01016
80	2,86724	2,87424	2,80111	2,86865	2,84614	2,8303
90	2,83325	2,82584	2,83994	2,8629	2,85525	2,83193

Tabela 5.12 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	$Integral J_k$	$Razão dos Desl.$	$Dois Pontos$	$Um Ponto$	$Extr. Desl.$	$MCCI$
-90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-80	-0,29015	-0,28418	-0,26358	-0,2836	-0,27693	-0,29563
-70	-0,50617	-0,50152	-0,48535	-0,5043	-0,49798	-0,55155
-60	-0,74294	-0,72355	-0,67707	-0,72872	-0,7115	-0,51866
-50	-0,97103	-0,96135	-0,89119	-0,96611	-0,94114	-0,69865
-40	-1,12206	-1,09725	-1,01856	-1,10714	-1,07761	-0,83523
-30	-1,13317	-1,09287	-0,99504	-1,095	-1,06168	-0,89117
-20	-0,98754	-0,96003	-0,92207	-0,96763	-0,95244	-0,81873
-10	-0,65249	-0,51867	-0,46463	-0,52004	-0,50157	-0,54886
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,65504	0,51575	0,46155	0,51719	0,49864	0,36017
20	0,98851	0,95797	0,92003	0,96578	0,95053	0,72125
30	1,13443	1,08989	0,99228	1,09259	1,05915	0,82812
40	1,11758	1,08892	1,01124	1,09954	1,0701	0,78525
50	0,94761	0,93648	0,86882	0,94275	0,91811	0,66161
60	0,70847	0,68678	0,64337	0,69332	0,67667	0,48997
70	0,39726	0,38425	0,37207	0,38678	0,38188	0,29478
80	0,09151	0,11248	0,07755	0,09155	0,08689	0,08134
90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 5.10 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão

5.2.5 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades

Neste caso, considerou-se uma chapa retangular com uma trinca na borda, conforme mostrado na Figura 5.11, o carregamento adotado foi o de tração uniforme nas duas extremidades ($\sigma = 10 \text{ MPa}$). A condição de contorno de deslocamento foi tal que para o nó localizado em $X_1 = W/2$ e $X_2 = 0$ $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa são: altura $2h = 0,2 \text{ m}$, largura $W = 0,1 \text{ m}$ e comprimento da trinca $a = 0,05 \text{ m}$.

Material 2:

$$E_{11} = 141,8 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 9,45 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,19 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,31$$

Figura 5.11 – Chapa com uma trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades

O material foi o mesmo usado por Su e Sun (2003), cujas propriedades são mostradas na Figura 5.11, identificado como material 2. Considerando a análise de convergência dos fatores de intensidade de tensão obtidos com os métodos estudados da solução na versão h de extensão do MEF, utilizou-se a malha da Figura 5.3 com $H/2 = 1781$ e $a/L = 16$. Os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ e $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$) são mostrados na Tabela 5.10 e Tabela 5.11 para as metodologias da integral J_k e razão dos deslocamentos (com J_1) e nas Tabelas A5 e A6 no apêndice A para as metodologias da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada (MCCI).

Tabela 5.13 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>
-90	2,960	3,04007	3,04007
-80	2,994	3,07478	3,06881
-70	3,100	3,15332	3,15327
-60	3,209	3,23334	3,21912
-50	3,260	3,28238	3,26941
-40	3,227	3,27959	3,26189
-30	3,115	3,12315	3,09338
-20	2,961	2,80048	2,79487
-10	2,825	2,78273	2,76817
0	2,777	2,70773	2,70773
10	2,825	2,77848	2,76733
20	2,961	2,93888	2,93454
30	3,115	3,11907	3,09088
40	3,227	3,28093	3,26285
50	3,260	3,27764	3,26624
60	3,209	3,26868	3,25217
70	3,100	3,16907	3,16895
80	2,994	3,09436	3,08916
90	2,960	3,04007	3,04007

Tabela 5.14 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$)

α	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>
-90	0,000	-0,000120	0,000009
-80	-0,193	-0,22791	-0,20034
-70	-0,405	-0,45737	-0,45721
-60	-0,626	-0,68706	-0,65184
-50	-0,834	-0,91280	-0,87848
-40	-0,974	-1,10580	-1,04920
-30	-0,988	-1,09880	-0,97719
-20	-0,842	-0,928911	-0,89172
-10	-0,512	-0,657940	-0,46080
0	0,000	-0,001443	0,00041
10	0,512	0,607585	0,46155
20	0,842	0,960534	0,93198
30	0,988	1,091914	0,97691
40	0,974	1,107379	1,04955
50	0,834	0,907839	0,87785
60	0,626	0,699579	0,65854
70	0,405	0,459897	0,45954
80	0,193	0,223535	0,20184
90	0,000	-0,000120	0,000009

No gráfico da Figura 5.12 mostra-se os valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para o modo I ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$) e modo II ($K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$). Nestes gráficos mostram-se a influência do ângulo α de orientação das fibras do material da chapa.

Figura 5.12 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão

Três metodologias para a determinação dos fatores de intensidade de tensão foram implementadas e estudadas. Foram elas: da Correlação dos Deslocamentos, da Integral de Fechamento de Trinca Modificada (IFTM) e da Integral J_k . Na metodologia da integral J_k , além da abordagem desenvolvida neste trabalho, foi utilizada uma metodologia que faz uso da relação dos deslocamentos relativos nas faces da trinca, para desacoplar os fatores de intensidade de tensão para modo misto de carregamento.

A formulação usada é baseada no conceito da integral J_k . Esta metodologia leva em consideração a parcela da integral J_2 referente às faces da trinca. Com a introdução desta parcela na integral J_2 , foi possível a determinação dos fatores de intensidade de tensão diretamente (a partir da relação entre os valores de J_1 e J_2 com os valores de K_I e K_{II}).

Capítulo 6

6 DETERMINAÇÃO DA INTEGRAL J_I COM CARREGAMENTO NAS FACES DA TRINCA

6.1 FORMULAÇÃO

Este capítulo apresenta a metodologia utilizada para determinação da integral J_I para problemas de trincas bidimensionais em materiais anisotrópicos com carregamento nas suas faces. Em muitas aplicações de engenharia os carregamentos, nas faces da trinca, podem ocorrer devidos à pressurização de fluidos, pressão de contato e atrito interfacial. Por isso, o objetivo do presente capítulo é estender os estudos realizados nos capítulos anteriores (capítulos 4 e 5) para o caso em destaque.

Levando-se em consideração todas as hipóteses apresentadas no capítulo 4 e lembrando da eq. (4.7) que:

$$\begin{aligned} J_k &\equiv \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma = \\ &= \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon^+} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon^-} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Fazendo-se os sinais (+) e (-) referir-se aos parâmetros relativos as faces, superior e inferior da trinca, respectivamente, pode-se ter:

$$J_k \equiv \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_0} (Wn_k - \sigma_{ij}n_j u_{i,k}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon^+} W^+ n_k^+ d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon^+} \sigma_{ij}^+ n_j^+ u_{i,k}^+ d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon^-} W^- n_k^- d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon^-} \sigma_{ij}^- n_j^- u_{i,k}^- d\Gamma \right] \quad (6.2)$$

Combinando-se os dois termos envolvendo a integração ao longo das faces da trinca e denominando-os *contorno de integração associado* Γ_c . Para isto, o contorno Γ_0 deve interceptar as faces, superior e inferior da trinca a uma mesma distância a partir da ponta da mesma, como mostrado na Figura 4.1. Tendo-se $n_k^+ = -n_k^-$ o vetor unitário normal ao contorno Γ_c^+ . Assumindo-se que as superfícies das faces da trinca estão carregadas a eq. (6.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$J_k = \int_{\Gamma_0} [W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_k^+ d\Gamma - \int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,k}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,k}^-] n_j^+ d\Gamma \quad (6.3)$$

Separando-se a eq. (6.3) para o modo de carregamento correspondente, por exemplo, para o modo I ($k=1$). Sobre as faces da trinca n_1^+ é sempre nulo. Desta forma, para faces com carregamento, o primeiro termo da *integral de contorno associado* em J_1 não desaparece.

$$J_1 = \int_{\Gamma_0} [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma - \int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] n_2^+ d\Gamma \quad (6.4)$$

Nota-se que a expressão para a integral J_1 dada pela eq. (6.4) inclui o termo responsável pela integração ao longo das faces da trinca da descontinuidade levando-se em consideração o carregamento nas faces da mesma.

Seguindo-se então será determinada uma expressão para $[\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1}]$ baseado na metodologia desenvolvida no capítulo 4. A expressão para as tensões próximas a ponta da trinca foram dadas no capítulo 4 eqs. (4.16) e (4.24), bastando para isto calcularem-se as expressões para $\frac{\partial u_i^+}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u_i^-}{\partial x_1}$. Sabendo-se que as expressões para os deslocamentos foram dadas no capítulo 4 eqs. (4.14) e (4.15), para $\theta = \pm\pi$, tem-se:

$$u_1(r, \theta = +\pi) = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{s_1 - s_2} [s_1 p_2 - s_2 p_1] \right\} + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{s_1 - s_2} [p_2 - p_1] \right\} - \operatorname{Tr} a_{11} \quad (6.5)$$

$$u_2(r, \theta = +\pi) = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{s_1 - s_2} [s_1 q_2 - s_2 q_1] \right\} + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{s_1 - s_2} [q_2 - q_1] \right\} \quad (6.6)$$

Neste caso será aqui considerado o caso ortotrópico com os eixos principais do material alinhados com os eixos coordenados (caso I dado por Sun e Sun (2003), Tabela 4.1), desta forma $a_{16} = a_{26} = 0$, $s_1 = i\beta_1$ e $s_2 = i\beta_2$, logo:

$$u_1(r, \theta = +\pi) = K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} a_{11} (\beta_1 + \beta_2) - \operatorname{Tr} a_{11} \quad (6.7)$$

$$u_2(r, \theta = +\pi) = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{a_{22} (\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} \quad (6.8)$$

E daí:

$$\frac{\partial u_1(r, \theta = +\pi)}{\partial x_1} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} a_{11} (\beta_1 + \beta_2) - \operatorname{Tr} a_{11} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial u_2(r, \theta = +\pi)}{\partial x_1} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{a_{22} (\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} \quad (6.10)$$

A partir daí, tem-se:

$$\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} = \sigma_{ij}(r, \theta = +\pi) \frac{\partial u_i(r, \theta = +\pi)}{\partial x_1} = \left[-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (\beta_1 + \beta_2) + \operatorname{Tr} \right] \left[\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} a_{11} (\beta_1 + \beta_2) - \operatorname{Tr} a_{11} \right] \quad (6.11)$$

$$\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} = -\frac{K_{II}^2}{2\pi r} a_{11}(\beta_1 + \beta_2)^2 + \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) - T^2 a_{11} \quad (6.12)$$

$$\sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} = \sigma_{ij}(r, \theta = -\pi) \frac{\partial u_i(r, \theta = -\pi)}{\partial x_1} = \left[\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (\beta_1 + \beta_2) - T \right] \left[\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} a_{11}(\beta_1 + \beta_2) - T a_{11} \right] \quad (6.13)$$

$$\sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} = \frac{K_{II}^2}{2\pi r} a_{11}(\beta_1 + \beta_2)^2 - \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) + T^2 a_{11} \quad (6.14)$$

Logo:

$$\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} = \frac{4K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \quad (6.15)$$

Da mesma forma que no capítulo 4, definindo-se uma distância característica, denotada por δ , os limites de integração na eq. (6.4) podem ser divididos em duas partes: a primeira parte está a uma distância pré-determinada $(d - \delta)$ na ponta da trinca e a segunda parte está mais próxima da ponta da trinca na zona da distância δ , como se mostra na Figura 4.3.

De agora em diante a origem x_1 estará localizada no ponto onde o contorno Γ_0 intercepta as faces da trinca. A distância a partir deste ponto até a ponta da trinca é dada por d . Assume-se que a uma distância δ , o termo $[\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1}]$ é satisfatoriamente aproximado pela forma assintótica da eq. (6.15).

A seguinte aproximação é feita para a integração de $[\sigma_{ij}^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1}]$ ao longo das faces da trinca:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] n_2^+ d\Gamma &= - \int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 \cong - \int_0^{d-\delta} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 + \\ &- \int_{d-\delta}^d \frac{4K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) dx_1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Usando o fato de que ao longo das faces da trinca $r = d - x_1$ (Figura 4.3) e avaliando-se a integral na equação anterior, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] n_2^+ d\Gamma \cong - \int_0^{d-\delta} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 - \int_{d-\delta}^d \frac{4K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) dx_1 \quad (6.17)$$

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] n_2^+ d\Gamma \cong - \int_0^{d-\delta} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 - \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta} \quad (6.18)$$

Desta forma, baseado na eq. (6.4) e usando o resultado dado pela equação (6.18), a expressão aproximada para J_1 , para o caso em que as faces da trinca estejam carregadas, será:

$$J_1 \cong \int_0^d [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 - \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta} \quad (6.19)$$

Definindo-se a integral J_1^δ , a partir da eq. (6.19) como sendo:

$$J_1^\delta = \int_0^d [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma - \int_0^{d-\delta} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 \quad (6.20)$$

Logo:

$$J_1 = J_1^\delta - \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta} \quad (6.21)$$

$$J_1^\delta = J_1 + \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta} \quad (6.22)$$

A quantidade J_1^δ é calculada usando a eq. (6.20) para dois valores de δ (δ_1, δ_2). Estes valores de J_1^δ serão chamados $J_1^{\delta_1}$ e $J_1^{\delta_2}$ e dados por:

$$J_1^{\delta_1} = \int_0^{t-\delta_1} [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma - \int_0^{t-\delta_1} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 \quad (6.23)$$

$$J_1^{\delta_2} = \int_0^{t-\delta_2} [W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] d\Gamma - \int_0^{t-\delta_2} [\sigma_{ij}^+ u_{i,1}^+ - \sigma_{ij}^- u_{i,1}^-] dx_1 \quad (6.24)$$

E a partir da eq. (6.21), tem-se:

$$J_1^{\delta_1} = J_1 + \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta_1} \quad (6.25)$$

$$J_1^{\delta_2} = J_1 + \frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\delta_2} \quad (6.26)$$

Uma vez que as quantidades $J_1^{\delta_1}$ e $J_1^{\delta_2}$ tenham sido computadas numericamente a partir das equações (6.23) e (6.24) as eqs. (6.25) e (6.26) são resolvidas para se obter o valor da integral J_1 .

$$J_1 = \frac{J_1^{\delta_1} \sqrt{\delta_2} - J_1^{\delta_2} \sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (6.27)$$

$$\frac{8K_{II}}{\sqrt{2\pi}} T a_{11}(\beta_1 + \beta_2) = T^* = \frac{J_1^{\delta_2} - J_1^{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (6.28)$$

6.2 ESTUDO DE CASOS

Nesta seção serão estudados problemas de trincas com carregamentos em suas faces, estes problemas foram estudados por Azhdari et al. (2000), estes autores utilizaram o método de *Riemann-Hilbert* e o aplicaram a problemas bidimensionais de trincas em materiais homogêneos anisotrópicos (considerando elasticidade linear). Neste trabalho o problema de descontinuidade de uma linha foi formulado usando o método de *Riemann-Hilbert* com vista à obtenção do campo de tensões na ponta da trinca e como consequência os fatores de intensidade de tensão.

CASO I – Trinca central carregada numa parte da sua face superior

Considerando uma trinca reta em um plano de dimensões infinitas, Azhdari et al. (2000) determinaram uma expressão analítica para o fator de intensidade de tensão. Neste caso foi considerado carregamento de tração normal e transversal à face da trinca. O carregamento foi aplicado em uma extensão localizada em $b \leq X_1 \leq c$, como mostrado na Figura 6.1.

Figura 6.1 – Trinca carregada em parte da sua face superior, numa distância $b \leq X_1 \leq c$

A equação analítica para o fator de intensidade de tensão foi dada por Azhdari et al. (2000) para a ponta da trinca a esquerda dos eixos coordenados, ou seja, para $X_1 = -a$, daí tem-se:

$$K_I = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \sigma M_-(a, b, c) + \frac{i(c-b)}{\alpha - \bar{\alpha}} [\bar{\alpha}(\sigma - \alpha\tau)C_0 + \alpha(\sigma - \bar{\alpha}\tau)\bar{C}_0] \right\} \quad (6.29)$$

$$K_{II} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \tau M_-(a, b, c) + \frac{i(c-b)}{\alpha - \bar{\alpha}} [\bar{\alpha}(\sigma - \alpha\tau)C_0 + \alpha(\sigma - \bar{\alpha}\tau)\bar{C}_0] \right\} \quad (6.30)$$

Neste trabalho foi estudado problemas de modo I de carregamento, considerando carregamento de tração uniforme, ou seja, $\tau = 0$ e $\sigma \neq 0$, e a partir da eq. (6.28) tem-se:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left\{ -\frac{1}{2\pi a} M_-(a, b, c) - \frac{i(c-b)}{\alpha - \bar{\alpha}} [\bar{\alpha} C_0 + \alpha \bar{C}_0] \right\} \quad (6.31)$$

Verifica-se na eq. (6.30) que o termo entre chaves pode ser considerado como o fator de correção para o caso aqui descrito, ou seja:

$$Y = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \left\{ -\frac{1}{2\pi a} M_-(a, b, c) - \frac{i(c-b)}{\alpha - \bar{\alpha}} [\bar{\alpha} C_0 + \alpha \bar{C}_0] \right\} \quad (6.32)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-(s_1 s_2 - s_3 s_4) \pm \sqrt{(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)}}{s_1 s_2 (s_3 + s_4) - s_3 s_4 (s_1 + s_2)} = \\ &= \frac{-(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \pm i\sqrt{\beta_1 \beta_2 ((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2)}}{\beta_1 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \beta_2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$C_0 = \alpha \frac{a_{12}/a_{11} - s_1 s_2}{s_1 + s_2} \quad (6.34)$$

$$M_-(a, b, c) = \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - b^2} + a \left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{c}{a} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{b}{a} \right) \quad (6.35)$$

E $\bar{\alpha}$ e $\bar{C}_0$ são os conjugados de α e C_0 , respectivamente.

Para o caso de material ortotrópico o valor de C_0 é dado pela eq. (6.34) enquanto que o valor de α é dado por:

$$\alpha^2 = \frac{1}{s_1 s_2} \quad (6.36)$$

CASO II – Trinca central carregada inteiramente na sua face superior

Para este caso, Azhdari et al. (2000) determinaram uma expressão analítica para o fator de intensidade de tensão dada por:

$$K_I = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \sigma \pi a - \frac{2ia}{\alpha - \bar{\alpha}} \left[\bar{\alpha}(\sigma - \alpha \tau) C_0 + \alpha(\sigma - \bar{\alpha} \tau) \bar{C}_0 \right] \right\} \quad (6.37)$$

Considerando somente carregamento de tração uniforme, ou seja, $\tau = 0$ e $\sigma \neq 0$, tem-se:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left\{ 1 - \frac{2i}{\alpha - \bar{\alpha}} \left[\bar{\alpha} C_0 + \alpha \bar{C}_0 \right] \right\} \quad (6.38)$$

Verifica-se na eq. (6.37) que o termo entre chaves pode ser considerado como o fator de correção devido às condições do problema.

$$Y = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \left\{ 1 - \frac{2i}{\alpha - \bar{\alpha}} \left[\bar{\alpha} C_0 + \alpha \bar{C}_0 \right] \right\} \quad (6.39)$$

CASO III – Trinca central carregada nas suas faces superior e inferior

Considerando uma chapa de dimensões infinitas e uma trinca central carregada em suas faces superior e inferior, Figura 6.1, o fator de intensidade de tensão dado por Azhdari et al. (2000) foi o mesmo que o caso clássico de Irwin (1957), dado por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (6.40)$$

Exemplo

Neste estudo, considerou-se $\frac{1}{4}$ da chapa da Figura 5.2. Entretanto as condições de contorno foram tais que para os nós localizados em $a \leq X_1 \leq W$ o deslocamento adotado foi $u_2 = 0$ e para os nós localizados em $X_1 = 0$, $u_1 = 0$. Um estado plano de tensão foi assumido. As dimensões da chapa foram adotadas de tal maneira a minimizar o efeito geométrico da mesma, com altura $2h = 0,2m$, largura $2W = 0,2m$ e comprimento da trinca $2a = 0,02m$, ou seja, as relações a/W e L/a , foram 0,1 e 16 respectivamente. O material foi o mesmo considerado no Capítulo 5 para comparação com o trabalho de Bowie e Freese (1972), ou seja, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e o coeficiente de Poisson ν_{12} foram fixados ($G_{12} = 2,941 Pa$, $\nu_{12} = 0,005$) variando-se o valor de $\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$ $0,1 \leq \beta_2^2 \leq 4,5$ o módulo de Young na direção longitudinal foi calculado da seguinte forma $E_{11} = G_{12}(\beta^2 + 2\nu_{12} + 1)$.

O primeiro caso estudado é o de carregamento aplicado nas duas faces da trinca (superior e inferior), neste caso o valor do fator de intensidade de tensão normalizado ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a} = 1,0$) os resultados obtidos por meio das metodologias descritas neste trabalho podem ser vistos nas tabelas (Tabela 6.1 e Tabela 6.2). Na Tabela 6.1 apresenta-se os valores calculados com as metodologias da correlação dos deslocamentos e integral de fechamento de trinca modificada. Na Tabela 6.2 encontra-se os valores calculados pela metodologia da integral J_k , nesta são incluídos os valores calculados com os valores de J_1 corrigido e não corrigido.

De maneira geral, os valores dos erros relativos sobre os valores de K_I , não foram maiores que 3,886 % para o caso da integral J_1 e 4,752 % para o caso da correlação dos deslocamentos levando-se em conta a fórmula que usa dois nós na ponta da trinca. Entretanto foi verificada uma dependência nos valores dos fatores de

intensidade de tensão em relação ao grau de anisotropia do material, ou seja, quanto maior a relação $\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$ menor o erro no cálculo dos valores do fator de intensidade de tensão.

Tabela 6.1 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a} = 1,0$)

$\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$	<i>Dois Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Extr. Desl.</i>	<i>MCCI</i>
0,1	1,04752	1,03423	1,038656	1,03886
0,3	1,02851	1,01659	1,020570	1,02029
0,5	1,02503	1,01286	1,016919	1,01632
0,7	1,02351	1,01113	1,015262	1,01446
0,9	1,02249	1,00999	1,01415	1,01326
1,0	1,02211	1,00957	1,01375	1,01279
1,1	1,02174	1,00918	1,01337	1,01239
1,5	1,02060	1,00798	1,01219	1,01099
2,5	1,01856	1,00598	1,01017	1,00872
3,5	1,01731	1,00478	1,00895	1,00726
4,5	1,01640	1,00392	1,00805	1,00633

Tabela 6.2 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma\sqrt{\pi a} = 1,0$)

$\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$	<i>Integral J_k corrigida</i>	<i>Integral J_k não corrigida</i>	<i>Erro (%)</i>
0,1	1,03886	0,46686	3,886
0,3	1,02029	0,45005	2,029
0,5	1,01632	0,44705	1,632
0,7	1,01446	0,44573	1,446
0,9	1,01326	0,44469	1,326
1,0	1,01279	0,44420	1,279
1,1	1,01239	0,44373	1,239
1,5	1,01099	0,44202	1,099
2,5	1,00872	0,43865	0,872
3,5	1,00726	0,43647	0,726
4,5	1,00633	0,43503	0,633

Na Figura 6.2, mostra-se os valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados $K_I / \sigma \sqrt{\pi a} = 1,0$ em função de $\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$, confirmando o comportamento dependência do grau de anisotropia do material.

Figura 6.2 – Valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados em função de β_2^2

Para o caso em que a face superior da trinca está inteiramente carregada, os valores dos parâmetros usados na eq. (6.31) foram calculados para a determinação dos fatores de correção geométrica do problema mostrados na Tabela 6.3. Para todos os casos de anisotropia de material $0,1 \leq \beta_2^2 \leq 4,5$, as raízes do problema s_1 e s_2 são puramente imaginárias e os valores de Y são função somente da distância do carregamento aplicado (distâncias b e c).

Tabela 6.3 – Parâmetros para o cálculo do fator de correção.

b	c	M	Y
-0,003750	0,003750	-0,007687935	0,122357
-0,007500	0,007500	-0,016961	0,269947
-0,008125	0,008125	-0,018969	0,301894
-0,008750	0,008750	-0,021309	0,339139
-0,009375	0,009375	-0,024308	0,386866
-0,010000	0,010000	-0,031416	0,500000

Como se pode calcular, pela Tabela 6.4, os valores dos erros relativos sobre os valores de K_I , não foram maiores que 3,8 % para o caso da integral J_I e 4,8 % para o caso da correlação dos deslocamentos levando-se em conta a fórmula que usa dois nós na ponta da trinca. Entretanto foi verificada uma dependência nos valores dos fatores de intensidade de tensão em relação ao grau de anisotropia do material, ou seja, quanto maior a relação $\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$ menor o erro no cálculo dos valores do fator de intensidade de tensão.

Tabela 6.4 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a} = 0,5$)

$\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$	Dois Pontos	Um Ponto	Extr. Desl.	MCCI	Integral J_k
0,1	0,52384	0,51719	0,51941	0,54881	0,51897
0,3	0,51429	0,50833	0,51032	0,47593	0,51003
0,5	0,51254	0,50645	0,50848	0,48702	0,50835
0,7	0,51178	0,50559	0,50765	0,49447	0,50762
0,9	0,51128	0,50503	0,50711	0,50002	0,50717
1,0	0,51109	0,50483	0,50691	0,50235	0,50701
1,1	0,51089	0,50461	0,50671	0,50442	0,50684
1,5	0,51032	0,50401	0,50612	0,51116	0,50635
2,5	0,50932	0,50302	0,50512	0,52196	0,50550
3,5	0,50869	0,50243	0,50452	0,52893	0,50493
4,5	0,50823	0,50198	0,50407	0,53403	0,50448

Para este caso, calcularam-se os valores da integral J_I para três contornos a partir da ponta da trinca e dois valores de β_2^2 ($\beta_2^2 = 0,1$ e $\beta_2^2 = 4,5$) como mostrado

na Tabela 6.5 e Verifica-se que não há variações significativas nos valores da integral J_1 , confirmando assim o conceito de independência em relação ao contorno escolhido.

Tabela 6.5 – Valores da integral J_1 para os contornos da malha de elementos finitos.

Contorno	r/a	Integral J_1	
		$\beta_2^2 = 0,1$	$\beta_2^2 = 4,5$
1	0,0625	108156310369,1531	326698785744,7661
2	0,1250	108209384289,1531	326902356944,7661
3	0,1875	107457024083,8544	327513045968,7661

Figura 6.3 – Valores dos fatores de intensidade de tensão normalizados em função de β_2^2

Por fim, estudou-se o caso em que a face superior da trinca está parcialmente carregada, os valores dos parâmetros usados na eq. (6.31) foram calculados para a determinação dos fatores de intensidade de tensão normalizados

Estes valores são mostrados na Tabela 6.6, para dois casos de anisotropia de material $\beta_2^2 = 0,1$ e $\beta_2^2 = 4,5$, onde as raízes do problema s_1 e s_2 são puramente imaginárias os valores são função somente da distância do carregamento aplicado (distâncias b e c), (Figura 6.1).

Tabela 6.6 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para $\beta_2^2 = 0,1$

$\beta_2^2 = 0,1$	<i>Dois Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Extr. Desl.</i>	<i>MCCI</i>	<i>Integral J_k</i>
b					
0,003750	0,13055	0,13298	0,13173	0,16883	0,13201
0,007500	0,28171	0,28998	0,28722	0,29005	0,28779
0,008125	0,31273	0,32403	0,32026	0,31552	0,31789
0,008750	0,34701	0,36334	0,35789	0,34488	0,36171
0,009375	0,37739	0,41393	0,40175	0,38641	0,52114
0,010000	0,52384	0,51719	0,51941	0,54881	0,51897

Tabela 6.7 - Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão para $\beta_2^2 = 4,5$

$\beta_2^2 = 4,5$	<i>Dois Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Extr. Desl.</i>	<i>MCCI</i>	<i>Integral J_k</i>
b					
0,003750	0,12247	0,12534	0,12438	0,17779	0,12434
0,007500	0,26726	0,27626	0,27326	0,32163	0,27591
0,008125	0,29765	0,30954	0,30558	0,35295	0,30138
0,008750	0,33187	0,34821	0,34277	0,38979	0,36538
0,009375	0,36761	0,40181	0,39041	0,44571	0,50057
0,010000	0,50822	0,50198	0,50406	0,53403	0,50432

Como se pode calcular pelos dados da Tabela 6.6 e Tabela 6.7 os valores dos erros relativos sobre os valores de K_I , não foram maiores que 7,70 % (com um único valor com erro de 29,9 %) para o caso da integral J_1 e 2,44 % para o caso das metodologias da correlação dos deslocamentos. Para a metodologia da integral de fechamento de trinca modificada (MCCI) os erros foram maiores possivelmente, em virtude de se utilizar a equação que corrige o fato de a trinca está carregada em toda sua extensão, por isso, se faz necessário um estudo mais detalhado para este caso. Entretanto foi verificada uma dependência nos valores dos fatores de intensidade de tensão em relação ao grau de anisotropia do material, ou seja, quanto maior a relação

$\beta_2^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}}$ menor o erro no cálculo dos valores do fator de intensidade de tensão.

Capítulo 7

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidos estudos de trincas em materiais anisotrópicos, utilizando-se o método dos elementos finitos. Os problemas foram analisados dentro do campo da elasto-estática. Para isto, foi feita uma revisão da teoria da elasticidade para materiais anisotrópicos, dentro do campo da Mecânica da Fratura Linear Elástica – MFLE, e uma revisão bibliográfica no que diz respeito ao uso de métodos numéricos (MEF e MEC) na análise de problemas de materiais anisotrópicos. Sendo assim, foram apresentados alguns métodos para determinação dos fatores de intensidade de tensão utilizando o método dos elementos finitos.

Três metodologias para a determinação dos fatores de intensidade de tensão foram implementadas e estudadas. Foram elas: da Correlação dos Deslocamentos, da Integral de Fechamento de Trinca Modificada (IFTM) e da Integral J_k . Na metodologia da integral J_k , além da abordagem desenvolvida neste trabalho, foi utilizada uma metodologia que faz uso da relação dos deslocamentos relativos nas faces da trinca, para desacoplar os fatores de intensidade de tensão para modo misto de carregamento.

A formulação usada é baseada no conceito da integral J_k . Esta metodologia leva em consideração a parcela da integral J_2 referente às faces da trinca. Com a introdução desta parcela na integral J_2 , foi possível a determinação dos fatores de intensidade de tensão diretamente (a partir da relação entre os valores de J_1 e J_2 com os valores de K_I e K_{II}).

A introdução da componente da integral J_2 referente nas faces da trinca no cálculo numérico da integral J_k foi vista inicialmente como uma dificuldade a mais, entretanto, utilizando-se o conceito da integral de linha em conjunção com o MEF, esta pôde ser determinada.

Para se atingir este objetivo, uma relação analítica da parcela desta integral, para uma posição muito próxima da ponta da trinca foi determinada, para isto utilizou-se o campo de tensões que leva em consideração o termo não singular, *T-stress*. A introdução deste termo levou a uma expressão explícita da descontinuidade da energia de deformação referente às faces da trinca (*jump*). Com isto a influência da singularidade (na ponta da trinca) foi minimizada no cálculo da integral J_2 . Acredita-se que por isto a integral J_2 apresentou independência em relação ao contorno escolhido.

Neste trabalho, foi feito um estudo de problemas em que as faces da trinca estão com carregamento. Nestes casos, para o modo I, por exemplo, a parcela da integral J_1 referente às faces da trinca não é anulada e deve-se fazer a composição desta parcela com a parcela referente ao contorno.

Usando a mesma sistemática para a componente J_2 foi possível estabelecer uma formulação para calcular a parcela referente às faces da trinca, da componente J_1 , com esta correção pôde-se determinar com mais precisão os valores dos fatores de intensidade de tensão.

Diante destas discussões, especificamente pode-se concluir que:

- As metodologias da correlação dos deslocamentos e da integral de fechamento de trinca modificada, implementadas e estudadas neste trabalho, mostraram boa concordância com os resultados da literatura;
- A metodologia que usa a integral J_1 e os deslocamentos relativos das faces da trinca foi mais precisa na solução dos problemas aqui estudados, este fato ressalta a característica de independência da integral J_1 o que tornou o método fácil de ser implementado;

- Foi desenvolvida uma metodologia para determinar a integral J_K para problemas em materiais anisotrópicos, cujas componentes (J_1 e J_2) puderam ser avaliadas com precisão;
- O fato de usar uma parcela da integral J_2 referente as faces da trinca causou uma dificuldade a mais na implementação, entretanto, os fatores de intensidade de tensão puderam ser calculados de maneira satisfatória;
- Uma metodologia baseada na relação da integral J_2 e os deslocamentos relativos das faces da trinca foi implementada e observou-se que os fatores de intensidade de tensão foram obtidos adequadamente, confirmando a necessidade de correção da parcela referente às faces da trinca;
- A integral J_2 se mostrou independente do percurso para os casos estudados neste trabalho;
- Utilizando-se a mesma sistemática proposta para o cálculo da integral J_2 a integral J_1 foi determinada para problemas que envolvem carregamento nas faces da trinca.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Estudar problemas de trincas em chapas de materiais anisotrópicos com furos;
- Aplicar a metodologia aqui desenvolvida para problemas que incluam carregamento nas faces da trinca com tensão de cisalhamento;
- Aplicar a metodologia a problemas com carregamentos fora do plano Modo III, Modo 1 e Modo 2 no caso de carregamento de flexão e torção, Figura 3.1;
- Estudar problemas de trincas na interface entre dois ou mais materiais, por exemplo, o caso de bimateriais;
- Estudar a expressão que envolve o termo não singular do campo de tensões (T -stress) dada pela eq. (4.52) e determinar este com precisão;

- Aplicar a metodologia na análise de problemas dentro do campo da elasto-dinâmica, e verificar sua independência.

Capítulo 8

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKIN, J. E. (1976). The generation of elements with singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, n.6, p.1249-1260.

ALIABADI, M. H.; SOLLERO, P. (1998). Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates. *Composite Science and Technology*. v.58. p.1697-1703.

ALIABADI, M. H.; SOLLERO, P. (1999). *Fracture mechanics analysis of homogeneous anisotropic laminates*. In: BUSH, M. B., ed. *Discontinuous materials and structures*. Boston, WIT Press. Cap. 5, p.145-165.

ANDERSON, T. L. (1995). *Fracture mechanics, fundamentals and applications*. 2ed. Boca Raton, CRC Press.

ANGÉLICO, R. A.; CANTO, R. B.; TITA, V.; SANTOS, N. C.; CARVALHO, J. (2004). Interface gráfica para programa de elementos finitos. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 3., 2004, Bélem, Anais do III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. Belém, UFPA.

ANSYS APDL Programmer's Guide, 1998, SAS IP, Sep.

ANSYS Modeling and Meshing Guide, 1998, 3rd Edition. SAS IP, Sep.

ANSYS User's Manual, 1995, Procedures Volume. I, SAS IP, Aug.

ATLURI, S. N.; KOBAYASHI, A. S.; NAKAGAKI, M. (1975). A finite-element program for fracture mechanics analysis of composite material. *Fracture Mechanics of Composites. ASTM STP 593*, p.86- 98.

AYARI, M. L.; YE, Z. (1995). Maximum strain theory for mixed mode crack propagation in anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*, v.52. n.3. p389-400.

BANKS-SILLS, L.; HERSHKOVITZ, I.; WAWRZYNEK, P. A.; ELIASI, R.; INGRAFFEA, A. R. (2005). Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I – $z=0$ is a symmetric plane. *Engineering Fracture Mechanics*, v.72, p.2328-2358.

BARSOUM, R. (1976). On the use of isoparametric elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, p.25-37.

BARSOUM, R. (1977). Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.85-98.

BITTENCOURT, T. N., BARRY, A., INGRAFFEA, A. R. (1992). Comparison of mixed-mode stress-intensity factors obtained through displacement correlation, J -integral formulation, and modified crack-closure integral. *Fracture Mechanics: Twenty-Second Symposium, ASTM STP 1131*. ATLURI, S. N.; NEWMAN Jr., J. C.; RAJU, I. S.; EPSTEIN, J. S. eds., American Society for Testing Materials, Philadelphia, v.11, p.69-82

BOONE, T. J.; WAWRZYNEK, P. A.; INGRAFFEA, A. R. (1987). Finite element modeling of fracture propagation in orthotropic materials. *Engineering Fracture Mechanics*. v.26, n.2, p.185-201.

BOWIE, O. L.; FREESE, C. E. (1972). Central crack in plane orthotropic rectangular sheet. *International Journal of Fracture Mechanics*. v.8, n.1, p.49-58, Mar.

BUDIANSKI, B.; RICE, J. R. (1973). Conservation laws and energy-release rates. *Journal of Applied Mechanics*. v.40, p.201-203, Mar.

BUI, H. D. (1983). Associated path independent J-integrals for separating mixed modes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.31, n.6, p.439-448.

BUI, H. D.; PROIX, J. M. (1984). Numerical analysis of stress intensity factors in mixed modes problems, by path independent integrals J_I and J_{II} . In: PROCEEDINGS OF THE THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN FRACTURE MECHANICS. LUXMOORE, A. R.; OWEN, D. R. J. eds., Swansea, Pineridge Press Limited, p.139-148, Mar

CARVALHO, J. (1996). *Computer integrated design optimisation and manufacturing of filament wound parts*. Leuven (Heverlee). 198 p. Tese (Doutorado) – Katholieke Universiteit Leuven.

CHAN, K. S.; CRUSE, T.A. (1986). Stress intensity factors for anisotropic compact tension specimens with inclined cracks. *Engn. Fracture Mechanics*. v.23. p.863-874.

CHAN, S. K.; TUBA, I. S.; WILSON, W. K. (1970). On finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. v.2, p.1-17.

CHANG, J. H.; PU, L. P. (1997). A finite element approach for J_2 calculation in anisotropic materials. *Computers & Structures*. v.62, n.4, p.635-641.

CHANG, J. H.; WU, W. H. (2001). FE calculation of contour integrals in plane anisotropic elastic media with crack surface tractions. *Finite Elements in Analysis and Design*. v.37, p.673-686.

CHEN, Y. H. (1996). On the contribution of discontinuities in a near-tip stress field to the J -integral. *International Journal Engineering Science*. v.34, n.7, p.819-829.

CHEN, Y. H.; LU, T. J. (2001). Conservation laws of the J_k -vector for microcrack damage in piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*. v.38, p.3233-3249.

CHEN, Y. H.; ZUO, H. (1998). Investigation of macrocrack-microcrack interaction problems in anisotropic elastic solids – part I: general solution to the problem and application of the J -integral. *International Journal of Fracture*. v.91, p.61-82.

CHEREPANOV, G. P. (1967). Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. v.31, p.503-512.

CHEREPANOV, G. P. (1979). *Mechanics of brittle fracture*. New York. McGraw-Hill Inc.

CHU, S. J.; HONG, C. S. (1990). Application of the J_k integral to mixed mode crack problems for anisotropic for anisotropic composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*. v.35, n.6, p.1093-1103.

CORTEN, H. T. (1972). Fracture mechanics of composites. In: LIEBOWITZ, H., ed. *Fracture an advanced treatise V. VII Fracture of Nonmetals and Composites*. New York, Academic Press. Cap.9, p.675-769.

DELALE, F.; ERDOGAN, F. (1977). The problem of internal and edge cracks in an orthotropic strip. *Journal of Applied Mechanics*, v.44, n.2, p.237-242, Jun.

DOBLARE, M.; ESPIGA, F.; GRACIA, L.; ALCANTUD, M. (1990). Study of crack propagation in orthotropic materials by using the boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*. v.37. n.5. p953-967.

DOLBOW, J.; GOSZ, M. (2002) On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Solids Structures*. v.39, n.9, p.2557-2574.

DONG, Y. X.; ZHANG, C. H.; WANG, G. L.; CHIEW, S. P. (1999). Non-overlapping conditions for crack face displacement of anisotropic bodies. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. v.31, p.99-104.

EISCHEN, J. W. (1987). An improved method for computing the J_2 integral. *Engineering Fracture Mechanics*. v.26, n.5, p.691-700.

ERDOGAN, F.; SIH, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and tranverse shear. *Journal of Basic Engineering. ASME Transactions*, v.85D, p.519-527.

FOSCHI, R. O.; BARRET, J. D. (1976). Stress intensity factors in anisotropic plates using singular isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.10, p.1281-1287.

FREUND, L. B. (1978). Stress-intensity factor calculations base don a conservation integral. *International Journal Solids Structures*, v.14, p.241-250.

GANDHI, K. R. (1972). Analysis of an inclined crack centrally placed in an orthotropic rectangular pllata. *Journal of Strain Analysis*. v.7, n.3, p.157-162.

GDOUTOS, E. E. (1990). *Fracture mechanics criteria and applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

GOSZ, M.; DOLBOW, J.; MORAN, B. (1998). Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal Solids Structures*, v.35, n.15, p.1763-1783.

GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. v. A221, p. 163-198. In: HAYES, D. J. (1975). Origins of the Energy Balance Approach to Fracture. *Journal of Strain Analysis*. v.10, n.4, p.195-197.

GRIFFITH, A. A. (1924). The theory of rupture. *Proceedings of First Congress of Applied Mechanics*. Delft, p. 55-63. In: HAYES, D. J. (1975). Origins of the Energy Balance Approach to Fracture. *Journal of Strain Analysis*. v.10, n.4, p.195-197.

GUINEA, G. V.; PLANAS, J.; ELICES, M. (2000). K_I evaluation by the displacement extrapolation technique. *Engineering Fracture Mechanics*. v.66, p.243-255.

HAMOUSH, S. A.; SALAMI, M. R. (1990). A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*. v.36, n.6, p.965-970.

HAYES, D. J. (1975). Origins of the Energy Balance Approach to Fracture. *Journal of Strain Analysis*. v.10, n.4, p.195-197.

HELLEN, T. K.; BLACKBURN, W. S. (1975). The calculation of stress intensity in two and three-dimensions using finite element, In_ Computational Fracture Mechanics, E. Rybicki and S. Benzley, Eds. ASME Spec. Publ.

HENSHEL, R. D.; SHAW, K. G. (1975). Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.9, p.495-507.

HEPPLER, G.; HANSEN, J. S. (1981). Mixed mode fracture analysis of rectilinear anisotropic plates by high order finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.17, n.3, p.445-464, Mar.

HERMANN, A. G. (1981). On conservation laws of continuum mechanics. *International Journal of Solids and Structures*. v.17, p.1-9.

HERRMANN, A. G.; HERRMANN, G. (1981). On energy-release rates for plane crack. *Journal of Applied Mechanics*. v.48, n.3, p.525-528, Sep.

HOENIG, A. (1982). Finite-width correction factors for SEM testing of orthotropic materials in opening mode. *Journal Strain Analysis*, v.21, p.99-107.

HURBULT, A.; LOO, F. T. C. (1986). Calculation of mixed mode fracture stress intensity factors in an orthotropic plate using finite element technique. *Journal of Vibration*. v.108, p.282-287.

HUSSAIN, M.A.; PU, S. L.; UNDERWOOD, J. H. (1974). Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *Fracture Analysis, ASTM STP 560*. p.2-28.

IM, S.; KIM, K. S. (2000). An applications of two-state M -integral for computing the intensity of the singular near-tip field for generic wedge. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.49, p.129-151.

INGLIS, C. E. (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects*. v.55, p.219-241.

IRWIN, G. R., (1957). Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics. ASME Transactions*, v.24, p.361-364, Jun.

ISHIKAWA, H. (1980). A finite element analysis of stress intensity factors for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension. *International Journal of Fracture*. v.16, p.R243-R246.

KAMEL, M.; LIAW, B.M. (1991). Boundary element formulation with special kernels for an anisotropic plate containing an elliptical hole or a crack. *Engineering Fracture Mechanics*. v.39. p.695-711.

KANINEN, M. F.; POPELAR, C. H. (1985). Advanced fracture mechanics. New York, Oxford University Press.

KIENZLER, R.; KORDISCH, H. (1990). Calculation of J_I and J_2 using the L and M integrals. *International Journal of Fracture*. v.43, n.3, p.213-225, Jun.

KIM, H. J.; PAULINO, G. H. (2002a). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.52, n.8, p.1903-1935, Mar.

KIM, J. H.; PAULINO, G. H. (2002b). Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method. *Engineering Fracture Mechanics*, v.69, p.1557-1586.

KIM, J. H.; PAULINO, G. H. (2003a). T-stress, mixed mode, stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: unified approach using the interaction integral method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v.192, p.1463-1494.

KIM, J. H.; PAULINO, G. H. (2003b). Mixed-mode J-integral formulation and implementation using graded elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials. *Mechanics of Materials*. v.35. p.107-128.

KIM, J. W. (1985). A contour integral computational of stress intensity factors in the cracked orthotropic elastic plates. *Engineering Fracture Mechanics*. v.21, n.2, p.353-364.

KIM, Y. J.; KIM, H. G.; IM, S. (2001). Mode decomposition of three-dimensional mixed-mode cracks via two-state integrals. *International Journal of Solids and Structures*. v.38, p.6405-6426.

KNOTT, J. F. (1973). *Fundamentals of Fracture Mechanics*. London, Butterworth & Co Publishers Ltd.

KNOWLES, J. K.; STERNBERG, E. (1972). On a class of conservation laws in linearised and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. v.35, p.379-386.

LEKHNITSKII, S. G. (1981). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow, Mir Publishers.

LI, F. H.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. (1985). A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, v.9, p.187-207.

LIAW, B. M.; KAMEL, M. (1991). Crack approaching a curvilinear hole in an anisotropic plane under general loadings. *Engineering Fracture Mechanics*. v.40, p.25-35.

LIM, W. K.; CHOI, S. Y.; SANKAR, B. V. (2001). Biaxial load effects on crack extension in anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*. v.68, p.403-416.

LIN, X. B.; SMITH, R. A.; (1999). Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates part I: the numerical technique. *Engineering Fracture Mechanics*. v.63, n.5, p.503-522, Jul.

MA, H.; CHEN, Y. H. (1996). The explicit formulations for the J_k vector in both isotropic and anisotropic cases. *International Journal of Fracture*, v.75, p.R25-R28.

MANDELL, J. F.; McGARRY, F. J.; WANG, S. S.; IM J. (1974). Stress intensity factors for anisotropic fracture test specimens of several geometries. *Journal of Composite Materials*. v.8, p.106-116.

MARQUES, A. T. (2005). Materiais compósitos: um desafio permanente. (FEUP/INEGI), <http://www.spmateriais.pt/INEGI.htm>. Acesso em: 11 nov.

MATTHEWS, F. L.; RAWLINGS, R. D. (1994). *Composite materials: engineering and science*. London, Chapman & Hall.

MORAN, B.; SHIH, C. F. (1987a). A general treatment of crack tip contour integrals. *International Journal of Fracture*. v.35, p.295-310.

MORAN, B.; SHIH, C. F. (1987b). Crack tip associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, v.27, n.6, p.615-642.

NAHTA, R.; MORAN, B. (1993). Domain integrals for axisymmetric crack problems. *International Journal of Solids Structures*, v.30, n.15, p.2027-2040.

NAHTA, R.; MORAN, B. (1993). Domain integrals for axisymmetric crack problems. *International Journal of Solids Structures*, v.30, n.15, p.2027-2040.

NARAYANA, K. B.; DATTA GURU, B. (1996). Certain aspects related to computation by modified crack closure integral (MCCI). *Engineering Fracture Mechanics*. v.55, n.2, p.335-339.

NOBILE, L.; CARLONI, C. (2005). Fracture analysis for orthotropic cracked plates. *Composite Structures*, v.68, p.285-293.

OBATA, M.; NEMAT-NASSER, S.; GOTO, Y. (1989). Branched cracks in anisotropic elastic solids. *Transactions ASME*. v.56, p.858-864. Dec.

OROWAN, E. (1955). Energy criteria of fracture. *Welding Journal Research Supplies*. v.20, p-185.

PADOVAN, J.; TANJORE, G. (1998). Modelling crack propagation in anisotropic media. *Engineering Fracture Mechanis*. v.60, n.4, p.457-478.

PETERSON, R. E. (1974). *Stress concentration factors*. New York, John Wiley & Sons.

PIAN, T. H. H. (1964). Derivation of element stiffness matrix by assumed stress distribution. *AIAA Journal*. v.2, p.1333.

RAJU, I. S. (1987). Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*. v.28, n.3, p.251-274.

RAJU, I. S.; SHIVAKUMAR, K. N. (1990). An equivalent domain integral method in the two-dimensional analysis of mixed mode crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*, v.37, n.4, p.707-725.

RAMAMURTHY, T. S.; KRISHNAMURTHY, T.; NARAYANA, K. B.; VIJAYAKUMAR, K.; DATTA GURU, B. (1986). Modified crack closure integral method with quarter point elements. *Mechanics Research Communications*. v.13, n.4, p.179-186.

RAO, B. N.; RAHMAN, S. (2003). Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*. v.70, n.1, p.1-27.

REINHART, T. J.; CLEMENTS, L. L. (1987). *Engineered materials handbook*. v. 1, *Composites*. p.27-34. Ohio, ASM International.

RICE, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. v.35, n.2, p.379-386, Jun.

RYBICKI, E. F.; KANINEN, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. v.9, p.931-938.

SANTOS, N. C.; CARVALHO, J. (2001a). Stress intensity factors evaluation in anisotropic media by the displacement extrapolation technique. In: 13TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPOSITE MATERIAL – ICCM 13, Beijing.

SANTOS, N. C.; CARVALHO, J. (2001b). Comparison between methods of stress intensity factors evaluation in anisotropic media. In: EIGHTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPOSITES ENGINEERING - ICCE/8, Abstract accepted.

SAOUMA, V. E.; AYARI, M. L.; LEAVELL, D. A. (1987). Mixed-mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*. v.27, n.2, p.171-184.

SAOUMA, V. E.; SIKIOTIS, E. (1986). Stress intensity factors in anisotropic bodies using singular isoparametric elements. *Engineering Fracture Mechanics*. v.25, n.1, p.115-121.

SIH, G. C. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed-mode crack problems. *International Journal of Fracture Mechanics*. v.10, p.305-321.

SIH, G. C.; LIEBOWITZ, H. (1968). *Mathematical theories of brittle fracture*. In: LIEBOWITZ, H., ed. *Fracture an advanced treatise V. II Mathematical Fundamentals*. New York, Academic Press. Cap.2, p.68-190.

SIH, G. C.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R. (1965). On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture Mechanics*. v.1, n.3, p.189-203.

SNEDDON, I. N., (1946). The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London*. v.187A, p.229-260.

SNYDER, M. D.; CRUSE, T. A. (1975). Boundary integral analysis in anisotropic cracked plates. *Int. J of Fracture Mechanics*. v.11. p.315-328.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. (1993). Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. Journal of Fracture*. V.64. p.269-284.

SONI, M. L.; STERN, M. (1976). On the computational of stress intensity factors in fiber composite media using a contour integral method. *International Journal of Fracture*. v.12, n.3, p.331-344, Jun.

STERN, M.; BECKER, E. B. (1979). A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields. *International Journal for Numerical Method in Engineering*. v.12, p.279-288.

STERN, M.; BECKER, E. B.; DUNHAM, R. S. (1976). A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *International Journal of Fracture*. v.12, n.3, p.359-368, Jun.

SU, R. K. L.; SUN, H. Y. (2003) Numerical solutions of two-dimensional anisotropic crack problems. *International Journal of Solids and Structures*, v.40, p.4615-4635.

SWEENEY, J. (1986). Finite-width correction factors for SEN testing of orthotropic materials in opening mode. *Journal of Strain Analysis*. v.21, n.2, p.99-107.

TAN, C. L.; GAO, Y. L. (1992). Boundary integral equation fracture mechanics analysis of plane orthotropic bodies. *International Journal of Fracture*. v.53, p.959-973.

TRACEY, D. M. (1971). Finite Elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*. v.3, p.255-266.

TRACEY, D. M. (1974). Finite elements for three-dimensional elastic crack analysis. *Nuclear Engineering and Design*. v.26, p.282-290.

WANG, S. S.; YAU, J. F.; CORTEN, H. T. (1980). A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. *International Journal of Fracture*. v.16, n.3, p.247-259.

WANG, Y. B.; SUN, Y. Z. (2005). A new boundary integral equation method for cracked 2-D anisotropic bodies. *Engineering Fracture Mechanics*, v.72, p.2128-2143.

WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressure and cracks. *Journal of Applied Mechanics. ASME Transactions*, v.6, p.A49-A53.

YAU, J. F.; WANG, S. S.; CORTEN, H. T. (1980). A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal Applied Mechanics*. v.47, p.335-341, Jun.

YEH, H. Y.; RASHID, H. N.; YEH, H. L. (2006). Effect of T-stress on damage zone size predictions of notched laminated composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 25, n. 1, p. 89-98.

YUAN, F. G. (1998). Lecture on anisotropic elasticity application to composite fracture mechanics. <http://www.mae.ncsu.edu/faculty/yuan/Aniso.pdf> (20 Sep).

ZHENG, Y.; CHANG, S. W.; YUAN, Z. (2000). Path-independent integral for heterogeneous media with respect to field discontinuities. *Computational Materials*. v.18, p.212-224.

APÊNDICE A - Detalhes do equacionamento para implementação numérica da Integral J_k

A. Abordagem via integral de contorno

Como definido anteriormente as integrais J_1 e J_2 foram calculadas de acordo com a metodologia descrita por Owen e Fawkes (1983). Considerando-se a independência da integral J_k um contorno pode ser escolhido convenientemente de forma a coincidir com a linha de valores $\xi = \xi_p = \text{constante}$, como mostrado na Figura A.1.

Figura A.1 – Contorno para avaliação das integrais J_k adaptado de (Owen e Fawkes, 1983)

Desta forma, define-se um vetor normal $\mathbf{n}$ a este contorno da seguinte forma: os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são respectivamente dirigidos ao longo das linhas $\xi = \text{constante}$ e $\eta = \text{constante}$ dados por:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Um vetor $\mathbf{C}$ normal ao plano do elemento é dado pelo produto vetorial de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial \xi} - \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

E daí um vetor $\mathbf{D}$ normal ao contorno $\xi = \xi_p$ pode ser dado por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial X_2}{\partial \xi} - \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right) \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Finalmente tem-se:

$$\mathbf{n}^T = [n_1 \quad n_2 \quad 0] = \left[\frac{D_1}{N} \quad \frac{D_2}{N} \quad 0 \right]; \quad N = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \quad (\text{A.4})$$

Um comprimento de arco elementar ao longo do contorno $\xi = \xi_p$, pode ser dado por:

$$d\Gamma = \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \right)^2} d\eta \quad (\text{A.5})$$

Consequentemente para $\xi = \xi_p = \text{constante}$, tem-se:

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial \eta} d\eta \quad \text{e} \quad dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{A.6})$$

Para problemas no plano, a densidade de energia de deformação pode ser escrita como:

$$W = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

E o vetor força de superfície:

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Estas quantidades serão calculadas a partir da análise por elementos finitos utilizando-se um elemento quadrilátero quadrático, ou seja, um elemento quadrilátero de oito nós. As integrais J_k serão a soma da contribuição de cada elemento ao longo do contorno escolhido, Figura A.1. Ou seja:

$$J_k = \sum_{e=1}^{n_e} [J_k]^e \quad (\text{A.9})$$

Onde $[J_k]^e$ são os valores das integrais calculados em cada elemento “(e)” individual.

Na modelagem por elementos finitos, os deslocamentos são expressos pelas funções de forma e deslocamentos nodais dados por:

$$u_k = \sum_{j=1}^8 N_j u_k^j \quad (k=1,2) \quad (\text{A.10})$$

Onde $N_j = N_j(\xi, \eta)$ são as funções de forma dos elementos e ξ e η são as coordenadas locais elementares cujos valores variam entre ± 1 . Onde, u_k^j são os deslocamentos dos nós (j) nas direções dos sistemas coordenados correspondentes ($k=1,2$).

As derivadas cartesianas das componentes dos deslocamentos na eq. (A.10) são dadas por:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial X_1} = \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial X_1} (u_1, u_2)^j \quad \text{e} \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial X_2} = \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial X_2} (u_1, u_2)^j \quad (\text{A.11})$$

E as derivadas das funções de forma são dadas por:

$$\frac{\partial N_j}{X_1} = \sum_{j=1}^8 \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X_1} \right) \text{ e } \frac{\partial N_j}{X_2} = \sum_{j=1}^8 \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_2} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X_2} \right) \quad (\text{A.12})$$

Onde os termos $\partial \xi / \partial X_k$ e $\partial \eta / \partial X_k$ ($k=1,2$), podem ser obtidos a partir do inverso da matriz Jacobiano definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

O inverso da eq. (A.13) é dado por:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} & \frac{\partial \xi}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial X_1} & \frac{\partial \eta}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial X_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz Jacobiano.

Desta forma, todas as quantidades necessárias para o cálculo das integrais J_k (J_1 e J_2) foram definidas, podendo-se agora, calcular as mesmas da seguinte forma:

$$J_1 = - \int_{-1}^{+1} \left\{ W \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - \left[t_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + t_2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta \quad (\text{A.15})$$

$$J_2 = - \int_{-1}^{+1} \left\{ -W \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \left[t_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + t_2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta \quad (\text{A.16})$$

A integração nas eq. (A.15) e (A.16) é feita numericamente considerando-se:

$$J_1 = - \int_{-1}^{+1} I_1 d\eta \quad \text{e} \quad J_2 = - \int_{-1}^{+1} I_2 d\eta \quad (\text{A.17})$$

E desta forma, tem-se:

$$J_1 = - \sum_{q=1}^{NGAUSS} I_1(\xi_p, \eta_q) w_q \quad (\text{A.18})$$

$$J_2 = - \sum_{q=1}^{NGAUSS} I_2(\xi_p, \eta_q) w_q \quad (\text{A.19})$$

Ou seja, os valores de $I_k (k=1,2)$ são calculados nos pontos Gaussianos. Onde $NGAUSS = 2$ é número de pontos de integração neste caso (2x2) e w_q é o fator de ponderação correspondendo a η_q .

B. Análise da componente da integral J_2 nas faces da trinca

Esta análise segue as mesmas orientações do item anterior, entretanto considera-se para isto, um contorno que pode ser escolhido convenientemente de forma a coincidir com a linha de valores $\eta = \eta_p = \text{cte}$, como mostrado na Figura A.2.

Figura A. 2 – Contorno para avaliação das integrais J_k com $\eta = \eta_p = cte$

Da mesma forma que anteriormente descrito, define-se um vetor E normal a linha em $\eta = \eta_p$ dado por:

$$D = C \times B = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \frac{\partial X_2}{\partial \xi} - \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right) \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (A.20)$$

Finalmente tem-se:

$$n^T = [n_1 \quad n_2 \quad 0] = \left[\frac{E_1}{N} \quad \frac{E_2}{N} \quad 0 \right]; \quad L = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \quad (A.21)$$

Um comprimento de arco elementar ao longo do contorno $\eta = \eta_p$, pode ser dado por:

$$d\Gamma = - \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi} \right)^2} d\xi \quad (A.22)$$

E também

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial \xi} d\xi \quad \text{e} \quad dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial \xi} d\xi \quad (\text{A.23})$$

Desta forma, todas as quantidades necessárias para o cálculo da parcela da integral J_2 referente a descontinuidade na densidade de energia de deformação (jump) pode ser calculada, da eq. (4.10) tem-se:

$$J_2 = \int_{-1}^1 [W^+ - W^-] n_2 \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad (\text{A.24})$$

Ou:

$$J_2 = - \int_{-1}^1 [W^+ - W^-] \frac{\partial X_1}{\partial \xi} d\xi \quad (\text{A.25})$$

**APÊNDICE B - Tabelas referentes aos valores normalizados dos
fatores de intensidade de tensão**

B.1. Chapa com trinca central perpendicular à direção de carregamento de tração uniforme (Modo I de carregamento)

Tabela B 1 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) para $a/W = 0,1$

β_2^2	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Dois Pontos	Um Ponto	Ext. Desl.	MCCI
0,1	1,04	1,035	1,00691	0,99458	0,99869	1,03824
0,3	1,02	1,027	0,98872	0,9778	0,98144	1,0199
0,5	1,02	1,02	0,98551	0,97441	0,97811	1,01602
0,7	1,02	1,016	0,98408	0,97283	0,97658	1,01409
0,9	1,01	1,014	0,98326	0,97194	0,97572	1,01291
1,0	--	1,013	0,98303	0,97167	0,97546	1,01248
1,1	1,01	1,012	0,98273	0,97136	0,97515	1,01203
1,5	1,01	1,009	0,98179	0,97043	0,97422	1,01057
2,5	1,01	1,006	0,98058	0,96931	0,97307	1,00837
3,5	1,01	1,004	0,98016	0,96894	0,97268	1,00707
4,5	1,01	1,003	0,97986	0,96873	0,97244	1,00612

Tabela B 2 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) para $a/W = 0,2$

β_2^2	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Dois Pontos	Um Ponto	Ext. Desl.	MCCI
0,1	1,16	1,148	1,11919	1,10974	1,11289	1,16041
0,3	1,1	1,096	1,05703	1,04739	1,0506	1,09408
0,5	1,08	1,076	1,03959	1,02949	1,03285	1,0747
0,7	1,07	1,065	1,02993	1,01959	1,02304	1,06395
0,9	1,06	1,057	1,02349	1,01302	1,01651	1,05675
1,0	--	1,054	1,02095	1,01043	1,01394	1,0539
1,1	1,05	1,052	1,01882	1,00825	1,01177	1,05148
1,5	1,05	1,044	1,01256	1,00191	1,00546	1,04436
2,5	1,04	1,035	1,00476	0,99405	0,99762	1,03511
3,5	1,03	1,03	1,00125	0,99055	0,99412	1,03061
4,5	1,03	1,028	1,00125	0,99055	0,99412	1,03061

Tabela B 3 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) para $a/W = 0,5$

β_2^2	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Dois Pontos	Um Ponto	Ext. Desl.	MCCI
0,1	1,85	1,816	1,8448	1,85017	1,84838	1,84306
0,3	1,57	1,566	1,56874	1,56424	1,56574	1,56401
0,5	1,46	1,454	1,45914	1,45154	1,45407	1,45245
0,7	1,39	1,39	1,39616	1,387	1,39005	1,38848
0,9	1,35	1,348	1,35542	1,34527	1,34865	1,34706
1,0	--	1,333	1,33984	1,32932	1,33283	1,33123
1,1	1,32	1,319	1,32664	1,31581	1,31942	1,31783
1,5	1,28	1,281	1,28925	1,27754	1,28144	1,27982
2,5	1,24	1,235	1,24445	1,23168	1,23594	1,23422
3,5	1,22	1,214	1,2244	1,21115	1,21556	1,21375
4,5	1,2	1,203	1,21281	1,19933	1,20382	1,20197

Tabela B 4 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) para $a/W = 0,8$

β_2^2	Bowie e Freese (1972)	Su e Sun (2003)	Dois Pontos	Um Ponto	Ext. Desl.	MCCI
0,1	3,1	3,112	2,93879	3,06051	3,01993	3,11863
0,3	2,37	2,417	2,27681	2,32271	2,30741	2,39062
0,5	2,17	2,196	2,08495	2,10676	2,09949	2,17628
0,7	2,05	2,088	1,99112	2,00109	1,99776	2,07116
0,9	1,99	2,023	1,93556	1,93848	1,9375	2,00873
1,0	--	1,999	1,9153	1,91565	1,91553	1,98592
1,1	1,95	1,98	1,89848	1,89672	1,89731	1,96698
1,5	1,87	1,925	1,8523	1,84481	1,84731	1,91486
2,5	1,81	1,862	1,79884	1,78492	1,78956	1,85401
3,5	1,8	1,833	1,77401	1,75739	1,76293	1,82544
4,5	1,8	1,815	1,75891	1,74085	1,74687	1,80794

B,1, Chapa com trinca central formando um ângulo com a direção de carregamento de tração uniforme (Modo misto de carregamento)

Tabela B 5 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Dois Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Ext, Desl,</i>	<i>MCCI</i>
0	0,53354	0,52446	0,52749	0,52789
45	0,5227	0,51639	0,5185	0,51817
90	0,54632	0,53652	0,53978	0,53931
105	0,54479	0,53708	0,53965	0,54047
120	0,54264	0,53646	0,53852	0,53881
135	0,53813	0,53221	0,53419	0,53462
180	0,53354	0,52446	0,52749	0,52789

Tabela B 6 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Dois Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Ext, Desl,</i>	<i>MCCI</i>
0	0,50918	0,50395	0,5057	0,50452
45	0,51137	0,5043	0,50666	0,50586
90	0,53968	0,52878	0,53242	0,53121
105	0,53829	0,52916	0,5322	0,53189
120	0,53013	0,52271	0,52518	0,52441
135	0,52459	0,51769	0,51999	0,51902
180	0,50918	0,50395	0,5057	0,50452

B,1, Chapa com trinca na borda e carregamento de cisalhamento uniforme numa das extremidades

Tabela B 7 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong (1990)</i>	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl.</i>
-90	8,866	8,835	8,70557	8,70693
-80	9,721	9,793	10,22684	10,20959
-70	10,871	10,862	11,74949	11,74262
-60	11,269	11,231	11,82291	11,79911
-50	11,145	11,213	11,63103	11,62755
-40	10,871	10,905	11,10371	11,10189
-30	10,237	10,348	10,30686	10,3034
-20	9,621	9,669	9,55537	9,56987
-10	8,992	9,061	8,92273	8,89198
0	8,695	8,801	8,55219	8,54995
10	8,857	8,928	8,91379	8,90629
20	9,343	9,365	9,45159	9,44249
30	9,763	9,833	10,03033	10,01544
40	10,008	10,082	10,43253	10,41666
50	9,862	9,952	10,24769	10,24278
60	9,639	9,622	9,84773	9,84309
70	9,218	9,215	9,4369	9,43921
80	8,669	8,722	8,65856	8,66720
90	8,866	8,835	8,70557	8,70693

Tabela B 8 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong (1990)</i>	<i>Su e Sun (2003)</i>	<i>Integral J_k</i>	<i>Razão dos Desl,</i>
-90	1,037	1,03	0,89142	0,88799
-80	0,341	0,302	0,02987	0,06677
-70	-0,547	-0,493	-0,9208	-0,90741
-60	-1,234	-1,28	-1,68933	-1,64338
-50	-1,899	-2,014	-2,41553	-2,40784
-40	-2,444	-2,473	-2,81554	-2,81063
-30	-2,336	-2,472	-2,70709	-2,69478
-20	-1,926	-1,888	-2,11357	-2,19111
-10	-0,501	-0,591	-0,95174	-0,65902
0	1,358	1,339	1,15271	1,21527
10	3,171	3,294	3,65461	3,26623
20	4,646	4,548	5,05269	4,92526
30	4,966	5,012	5,5429	5,42186
40	4,778	4,82	5,31863	5,2176
50	4,101	4,15	4,4419	4,41147
60	3,41	3,395	3,5828	3,52674
70	2,707	2,647	2,81011	2,79064
80	1,775	1,788	1,77148	1,7406
90	1,037	1,03	0,89142	0,88799

Tabela B 9 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_t / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong</i> (1990)	<i>Su e Sun</i> (2003)	<i>Dois</i> <i>Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Extr, Desl,</i>	<i>MCCI</i>
-90	8,866	8,835	8,6494	8,85075	8,78364	8,60826
-80	9,721	9,793	9,78637	10,22643	10,07974	9,99251
-70	10,871	10,862	11,32535	11,86693	11,68641	11,40487
-60	11,269	11,231	11,31194	11,92862	11,72306	11,42298
-50	11,145	11,213	11,071	11,71773	11,50215	11,22465
-40	10,871	10,905	10,70861	11,25157	11,07058	10,7639
-30	10,237	10,348	9,87031	10,38534	10,21366	10,0719
-20	9,621	9,669	9,3468	9,7014	9,5832	9,45091
-10	8,992	9,061	8,68885	8,9859	8,88688	8,79729
0	8,695	8,801	8,33623	8,61497	8,52206	8,44326
10	8,857	8,928	8,67659	8,97453	8,87521	8,79129
20	9,343	9,365	9,28489	9,6102	9,50176	9,39723
30	9,763	9,833	9,65923	10,12956	9,97279	9,95169
40	10,008	10,082	10,16084	10,62026	10,46712	10,37313
50	9,862	9,952	9,9475	10,4111	10,25657	10,17873
60	9,639	9,622	9,67114	9,98433	9,87993	9,76104
70	9,218	9,215	9,33979	9,56553	9,49029	9,32931
80	8,669	8,722	8,38658	8,71253	8,60388	8,57969
90	8,866	8,835	8,6494	8,85075	8,78364	8,60826

Tabela B 10 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Chu e Hong</i> (1990)	<i>Su e Sun</i> (2003)	<i>Dois</i> <i>Pontos</i>	<i>Um Ponto</i>	<i>Extr, Desl,</i>	<i>MCCI</i>
-90	1,037	1,03	0,93686	0,90266	0,91406	0,89727
-80	0,341	0,302	0,18006	0,06688	0,1046	0,14001
-70	-0,547	-0,493	-0,76861	-0,93001	-0,87621	-0,62793
-60	-1,234	-1,28	-1,38264	-1,66142	-1,56849	-1,27253
-50	-1,899	-2,014	-2,07519	-2,42651	-2,3094	-1,89493
-40	-2,444	-2,473	-2,45277	-2,84853	-2,71661	-2,25304
-30	-2,336	-2,472	-2,28029	-2,71621	-2,5709	-2,29982
-20	-1,926	-1,888	-1,97237	-2,22122	-2,13827	-1,94836
-10	-0,501	-0,591	-0,41846	-0,66598	-0,58348	-0,71465
0	1,358	1,339	1,25472	1,22451	1,23458	1,15197
10	3,171	3,294	3,07617	3,29126	3,21956	3,3548
20	4,646	4,548	4,82828	5,01275	4,95126	4,96868
30	4,966	5,012	5,12297	5,48364	5,36342	5,53695
40	4,778	4,82	4,99326	5,31958	5,21081	5,33318
50	4,101	4,15	4,25129	4,48397	4,40641	4,43135
60	3,41	3,395	3,45697	3,57735	3,53722	3,50114
70	2,707	2,647	2,81906	2,82799	2,82501	2,72287
80	1,775	1,788	1,72837	1,74971	1,7426	1,71501
90	1,037	1,03	0,93686	0,90266	0,91406	0,89727

B.1 Chapa com trinca na borda e carregamento de tração uniforme nas duas extremidades

Tabela B 11 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_t / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Su e Sun</i>	<i>Two Point</i>	<i>One Point</i>	<i>Disp Extr</i>	<i>MCCI</i>
	(2003)				
-90	2,96	3,05191	3,11334	3,09286	3,03394
-80	2,994	3,00398	3,10925	3,07416	3,04674
-70	3,1	3,17386	3,24384	3,22051	3,20143
-60	3,209	3,28784	3,37584	3,34651	3,22735
-50	3,26	3,30252	3,41535	3,37774	3,25682
-40	3,227	3,25849	3,35106	3,3202	3,19891
-30	3,115	3,07299	3,16692	3,13561	3,07302
-20	2,961	2,95091	3,00236	2,98521	2,92998
-10	2,825	2,77935	2,82122	2,80727	2,77727
0	2,777	2,70827	2,74814	2,73485	2,70723
10	2,825	2,78012	2,82201	2,80804	2,76379
20	2,961	2,95478	3,00637	2,98917	2,9178
30	3,115	3,07364	3,16759	3,13628	3,05721
40	3,227	3,25837	3,3509	3,32006	3,18171
50	3,26	3,30188	3,41467	3,37707	3,24067
60	3,209	3,28791	3,37598	3,34662	3,21496
70	3,1	3,17404	3,24399	3,22068	3,20536
80	2,994	3,00423	3,10952	3,07442	3,04391
90	2,96	3,05191	3,11334	3,09286	3,03394

Tabela B 12 – Valores normalizados dos fatores de intensidade de tensão ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$)

α	<i>Su e</i> (2003)	<i>Sun</i>	<i>Two Point</i>	<i>One Point</i>	<i>Disp Extr</i>	<i>MCCI</i>
-90	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000
-80	-0,193		-0,19624	-0,21748	-0,2104	-0,15202
-70	-0,405		-0,45391	-0,47315	-0,46673	-0,53856
-60	-0,626		-0,66993	-0,72191	-0,70458	-0,52445
-50	-0,834		-0,88798	-0,96299	-0,93799	-0,7032
-40	-0,974		-1,01599	-1,1047	-1,07513	-0,83713
-30	-0,988		-0,99352	-1,09398	-1,06049	-0,89269
-20	-0,842		-0,91893	-0,96469	-0,94943	-0,81763
-10	-0,512		-0,46118	-0,51679	-0,49825	-0,54494
0	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,512		0,46128	0,51691	0,49836	0,35994
20	0,842		0,9217	0,96756	0,95227	0,7224
30	0,988		0,99537	1,09587	1,06237	0,82984
40	0,974		1,01767	1,10639	1,07682	0,78837
50	0,834		0,88893	0,96391	0,93892	0,67006
60	0,626		0,6704	0,72243	0,70508	0,49528
70	0,405		0,45425	0,47349	0,46708	0,45682
80	0,193		0,19641	0,21766	0,21058	0,13692
90	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000

APÊNDICE C - Rotinas de cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizadas no ANSYS

ROTINAS PARA O CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO

Metodologia da Correlação dos Deslocamentos

Rotina criada na linguagem de macros APDL.

```

!      NEILOR CESAR DOS SANTOS
!      ROTINA PARA O CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO
!      K Mixed Mode Determination - KMMDET3
!      MÉTODO DO DESLOCAMENTO DA ABERTURA DA TRINCA
!      PARA ELEMENTO SINGULAR QUARTER-POINT

!
FINISH
/PMACRO
/PREP7
!
!      ENTRADA DE DADOS
!
*ASK,CRACK,'COM O TAMANHO DA TRINCA',0
*ASK,WIDTH,'COM A ALTURA DO CORPO DE PROVA',0
*ASK,TGROW,'COM A DIREÇÃO DAS FACES DA TRINCA',0
*ASK,LEQPE,'COM O TAMANHO DO ELEMENTO QUARTER POINT',0
LIGAM=WIDTH-CRACK
!
!      SELEÇÃO DO NÓ NA PONTA DA TRINCA
!
/POST1
RSYS,0
CSYS,0
DSYS,0
ALLSEL,ALL
NPLLOT
*MSG,NOTE,
CLIQUE NO NÓ NA PONTA DA TRINCA
!
NSEL,S,P
*GET,NTIP1,NODE,,NUM,MIN
XTIP1=NX(NTIP1)
YTIPI=NY(NTIP1)
ZTIPI=NZ(NTIP1)
!
!      CRIAÇÃO DO SIST, DE COORD, NA PONTA DA TRINCA
!
LOCAL,11,0,XTIP1,YTIPI,ZTIPI,TGROW,0,0,,
CSYS,11
RSYS,11
!

```

```

!          SELEÇÃO DOS OUTROS NÓS
!
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,-(LEQPE/16),-(LEQPE/2)
*GET,NTIP2,NODE,,NUM,MIN
*GET,NTIP4,NODE,,NUM,MAX
XTIP2=NX(NTIP2)
YTIP2=NY(NTIP2)
ZTIP2=NZ(NTIP2)
XTIP4=NX(NTIP4)
YTIP4=NY(NTIP4)
ZTIP4=NZ(NTIP4)
!
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,-(LEQPE/2),-LEQPE
*GET,NTIP3,NODE,,NUM,MIN
*GET,NTIP5,NODE,,NUM,MAX
XTIP3=NX(NTIP3)
YTIP3=NY(NTIP3)
ZTIP3=NZ(NTIP3)
XTIP5=NX(NTIP5)
YTIP5=NY(NTIP5)
ZTIP5=NZ(NTIP5)
!
!          DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NOS
!          NÓS NA PONTA DA TRINCA
!
UXNT1=UX(NTIP1)
UXNT2=UX(NTIP2)
UXNT3=UX(NTIP3)
UXNT4=UX(NTIP4)
UXNT5=UX(NTIP5)
!
UYNT1=UY(NTIP1)
UYNT2=UY(NTIP2)
UYNT3=UY(NTIP3)
UYNT4=UY(NTIP4)
UYNT5=UY(NTIP5)
!
!          PROPRIEDADES DO MATERIAL
!
*GET,NUMAT,ACTIVE,,MAT,,
*GET,YOUNG,EX,NUMAT,,,,
*GET,POISS,PRXY,NUMAT,,,,
*IF,POISS,LE,1E-20,THEN
    *GET,POISS,NUXY,NUMAT,,,,
*ENDIF
SHEAR=YOUNG/(2*(1+POISS))
!

```

```

!      DETERMINAÇÃO DO TIPO DE ANÁLISE TEN, PLANA, DEF, PLANA ETC,
!
*GET,ELTYP,ACTIVE,,TYPE
*GET,ANATY,ETYP,ELTYP,ATTR,KOP3
!
*IF,ANATY,EQ,0,THEN      ! PARA O CASO DE TENSÃO PLANA
      KAPPA=(3-POISS)/(1+POISS)
      THICK=1
*ENDIF
!
*IF,ANATY,EQ,2,THEN      ! PARA O CASO DE DEFORMAÇÃO PLANA
      KAPPA=3-(4*POISS)
      THICK=1
*ENDIF
!
*IF,ANATY,EQ,3,THEN      ! PARA O CASO DE TENSÃO PLANA COM ESPESSURA
      KAPPA=(3-POISS)/(1+POISS)
      *GET,THICK,RCON,1,CONST,1
*ENDIF
!
!      DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO
!
PI=ACOS(-1)
RTWPI=SQRT(2*PI)
RLQPE=SQRT(LEQPE)
!
KI=((SHEAR/(KAPPA+1))*(RTWPI/RLQPE))*((4*(UYNT2-UYNT4))-(UYNT3-UYNT5))
!
KII=((SHEAR/(KAPPA+1))*(RTWPI/RLQPE))*((4*(UXNT2-UXNT4))-(UXNT3-UXNT5))
!
!      DELETANDO SISTEMA DE COORDENADAS CRIADO
!
CSDELE,11
CSYS,0
RSYS,0
DSYS,0
!
ALLSEL,ALL
!
!      GRAVANDO OS DADOS EM UM ARQUIVO (KMMDET3.dat)
!
*STATUS,KI      ! VISUALIZANDO OS RESULTADOS
*STATUS,KII
*DIM,LABEL,CHAR,2,3
*DIM,VALUE,,2,3
*IF,ANATY,EQ,0,THEN      ! PARA TENSÃO PLANA
      LABEL(1,1) = 'PLANE','STRESS'
*ENDIF
!
*IF,ANATY,EQ,2,THEN      ! PARA DEFORMAÇÃO PLANA
      LABEL(1,1) = 'PLANE','STRAIN'

```



```

*ENDIF
!
*IF,ANATY,EQ,3,THEN                ! PARA TENSÃO PLANA COM ESPESSURA
    LABEL(1,1) = 'PLANE ','STRESS'
*ENDIF
LABEL(1,2) = 'K','K'
LABEL(1,3) = 'I ','II ='
*VFILL,VALUE(1,1),DATA,KI,KII
/COM
/OUT,KMMDT3,dat
/COM,----- RESULTADOS -----
/COM,
/COM, TWO POINT FORMULAE
/COM,
*VWRITE,LABEL(1,1),LABEL(1,2),LABEL(1,3),VALUE(1,1)
(1X,A10,' ','A1,A4' ',F20,4)
/COM,-----
/OUT
FINISH
!
*LIST,KMMDT3,dat                ! LISTANDO O ARQUIVO DE DADOS

```

Metodologia da Integral de Fechamento de Trinca Modificada

```

!      NEILOR CESAR DOS SANTOS - SÃO CARLOS 26,12,2000
!      ROTINA PARA O CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO
!      MÉTODO DA INTEGRAL DE FECHAMENTO DE TRINCA MODIFICADA
!      PARA ELEMENTO SINGULAR QUARTER-POINT
!
!      MATERIAL ISOTRÓPICO
!
FINISH
/PMACRO
/PREP7
!
!      ENTRADA DE DADOS
!
*ASK,CRACK,'COM O TAMANHO DA TRINCA',0
*ASK,WIDTH,'COM A ALTURA DO CORPO DE PROVA',0
*ASK,TGROW,'COM A DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO',0
*ASK,LEQPE,'COM O TAMANHO DO ELEMENTO QUARTER POINT',0
LIGAM=WIDTH-CRACK
!
!      SELEÇÃO DO NÓ NA PONTA DA TRINCA
!
/POST1
RSYS,0
CSYS,0
DSYS,0

```

```

ALLSEL,ALL
NPLLOT
*MSG,NOTE,
CLIQUE NO NÓ NA PONTA DA TRINCA
!
NSEL,S,P
*GET,NTIP1,NODE,,NUM,MIN
XTIP1=NX(NTIP1)
YTIP1=NY(NTIP1)
ZTIP1=NZ(NTIP1)
!
!          CRIAÇÃO DO SIST, DE COORD, NA PONTA DA TRINCA
!
LOCAL,11,0,XTIP1,YTIP1,ZTIP1,TGROW,0,0,,
CSYS,11
RSYS,11
!
!          SELEÇÃO DOS OUTROS NÓS
!
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,-(LEQPE/16),-(LEQPE/2)
*GET,NTIP2,NODE,,NUM,MIN
*GET,NTIP4,NODE,,NUM,MAX
XTIP2=NX(NTIP2)
YTIP2=NY(NTIP2)
ZTIP2=NZ(NTIP2)
XTIP4=NX(NTIP4)
YTIP4=NY(NTIP4)
ZTIP4=NZ(NTIP4)
!
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,-(LEQPE/2),-LEQPE
*GET,NTIP3,NODE,,NUM,MIN
*GET,NTIP5,NODE,,NUM,MAX
XTIP3=NX(NTIP3)
YTIP3=NY(NTIP3)
ZTIP3=NZ(NTIP3)
XTIP5=NX(NTIP5)
YTIP5=NY(NTIP5)
ZTIP5=NZ(NTIP5)
!
!          DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NOS
!          NÓS NA PONTA DA TRINCA
!
UXNT1=UX(NTIP1)
UXNT2=UX(NTIP2)
UXNT3=UX(NTIP3)
UXNT4=UX(NTIP4)
UXNT5=UX(NTIP5)

```

```

!
UYNT1=UY(NTIP1)
UYNT2=UY(NTIP2)
UYNT3=UY(NTIP3)
UYNT4=UY(NTIP4)
UYNT5=UY(NTIP5)
!
!      DETERMINAÇÃO DAS FORÇAS NOS
!      NÓS NA FRENTE DA TRINCA
!
NSEL,S,LOC,X,0,0
NSEL,R,LOC,Y,0,0
ESLN,S
*GET,NELCT,ELEM,,COUNT
!
*DIM,NUELE,ARRAY,NELCT
J=0
*DO,I,1,NELCT/2
    NUELE(I)=ELNEXT(J)
    J=NUELE(I)
*ENDDO
!
*DO,I,1,NELCT/2
    *IF,I,EQ,1,THEN
        ESEL,S,ELEM,,NUELE(I)
    *ELSEIF,I,NE,1,THEN
        ESEL,A,ELEM,,NUELE(I)
    *ENDIF
*ENDDO
FSUM,RSYS
*GET,FXI,FSUM,0,ITEM,FX
*GET,FYI,FSUM,0,ITEM,FY
!
NSEL,S,LOC,X,LEQPE/4,LEQPE/4
NSEL,R,LOC,Y,0,0
FSUM,RSYS
*GET,FXJ,FSUM,0,ITEM,FX
*GET,FYJ,FSUM,0,ITEM,FY
!
NSEL,S,LOC,X,LEQPE,LEQPE
NSEL,R,LOC,Y,0,0
FSUM,RSYS
*GET,FXKT,FSUM,0,ITEM,FX
*GET,FYKT,FSUM,0,ITEM,FY
!
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,0,0
NSEL,R,LOC,Y,0,0
ESLN,S
*DO,I,(NELCT/2)+1,NELCT
    NUELE(I)=ELNEXT(J)

```

```

      J=NUELE(I)
*ENDDO
!
*DO, I, (NELCT/2)+1, NELCT
  *IF, I, EQ, 5, THEN
    ESEL, S, ELEM, , NUELE(I)
  *ELSEIF, I, NE, 1, THEN
    ESEL, A, ELEM, , NUELE(I)
  *ENDIF
*ENDDO
NSEL, S, LOC, X, LEQPE, LEQPE
NSEL, R, LOC, Y, 0, 0
FSUM, RSYS
*GET, FXKB, FSUM, 0, ITEM, FX
*GET, FYKB, FSUM, 0, ITEM, FY
!
ALLSEL, ALL
!
      !      DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS ELEMENTOS
      !      NA PONTA DA TRINCA
!
RLQPE=SQRT(LEQPE)
*GET, THICK, RCON, 1, CONST, 1
*IF, THICK, LE, 1E-20, THEN
  THICK=1
*ENDIF
!
      !      PROPRIEDADES DO MATERIAL
!
*GET, NUMAT, ACTIVE, , MAT, ,
*GET, YOUNG, EX, NUMAT, , , ,
*GET, POISS, PRXY, NUMAT, , , ,
*IF, POISS, LE, 1E-20, THEN
  *GET, POISS, NUXY, NUMAT, , , ,
*ENDIF
SHEAR=YOUNG/(2*(1+POISS))
!
      !      DETERMINAÇÃO DO TIPO DE ANÁLISE TEN, PLANA, DEF, PLANA ETC,
!
*GET, ELTYP, ACTIVE, , TYPE
*GET, ANATY, ETYP, ELTYP, ATTR, KOP3
!
*IF, ANATY, EQ, 0, THEN
  KAPPA=(3-POISS)/(1+POISS)
  THICK=1
*ENDIF
!
*IF, ANATY, EQ, 2, THEN
  KAPPA=3-(4*POISS)
  THICK=1
*ENDIF
      ! PARA O CASO DE TENSÃO PLANA
      ! PARA O CASO DE DEFORMAÇÃO PLANA

```



```

!
*IF, ANATY, EQ, 3, THEN                                ! PARA O CASO DE TENSÃO PLANA COM ESPESSURA
    KAPPA=(3-POISS)/(1+POISS)
    *GET, THICK, RCON, 1, CONST, 1
*ENDIF
!
!      DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO
!
PI=ACOS(-1)
RTWPI=SQRT(2*PI)
RLQPE=SQRT(LEQPE)
!
!      DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES "T's"
!
T11=14-((33*PI)/8)
T12=-52+((33*PI)/2)
T21=-3,5+((21*PI)/16)
T22=17-((21*PI)/4)
T31=8-((21*PI)/8)
T32=-32+((21*PI)/2)
!
FYT11=FYI*((T11*(UYNT3-UYNT5))+(T12*(UYNT2-UYNT4)))
FYT21=FYJ*((T21*(UYNT3-UYNT5))+(T22*(UYNT2-UYNT4)))
FYT41=FYKT*((T31*(UYNT3-UYNT1))+(T32*(UYNT2-UYNT1)))
FYT42=FYKB*((T31*(UYNT5-UYNT1))+(T32*(UYNT4-UYNT1)))
!
FXT11=FXI*((T11*(UXNT3-UXNT5))+(T12*(UXNT2-UXNT4)))
FXT21=FXJ*((T21*(UXNT3-UXNT5))+(T22*(UXNT2-UXNT4)))
FXT41=FXKT*((T31*(UXNT3-UXNT1))+(T32*(UXNT2-UXNT1)))
FXT42=FXKB*((T31*(UXNT5-UXNT1))+(T32*(UXNT4-UXNT1)))
!
SERRI=(1/(2*LEQPE*THICK))* (FYT11+FYT21+FYT41+FYT42)    ! (STRAIN ENERGY RELEASE
RATE - GI)
SERII=(1/(2*LEQPE*THICK))* (FXT11+FXT21+FXT41+FXT42)    ! (STRAIN ENERGY RELEASE
RATE - GII)
!
KI=SQRT(((8*SHEAR)/(KAPPA+1))*SERRI)
!
KII=SQRT(((8*SHEAR)/(KAPPA+1))*SERII)
!
!      DELETANDO SISTEMA DE COORDENADAS CRIADO
!
CSDELE, 11
CSYS, 0
DSYS, 0
!
ALLSEL, ALL

```

Metodologia da Integral J

Abordagem da integral de contorno

```

!C*****
!C
!C***  MACRO PARA AVALIAR A INTEGRAL J - ABORDAGEM DA INTEGRAL DE LINHA
!C
!C*****
!
!
/PMACRO
!
ALLSEL,ALL
!
EPLLOT
*MSG,NOTE,
CLIQUE NOS ELEMENTOS DO PATH
ESEL,S,P
*GET,NJIEL,ELEM,0,COUNT
!
*DO,IELEM,1,NJIEL
    ESEL,ALL
    ESEL,S,P
    *GET,LISTE(IELEM),ELEM,0,NUM,MAX
*ENDDO
!
ALLSEL,ALL
!
*ASK,TGROW,'COM A DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO',0
!
*ASK,MOSYM,'MODELO COMPLETO YES (Y) OR NO (N)', 'Y'
*IF,MOSYM,EQ,'Y',THEN
    NSYMM=1
*ELSEIF,MOSYM,EQ,'N',THEN
    NSYMM=2
*ENDIF
!
*ASK,NPXSI,'ENTER GAUSS POINT LOCATIONS',1
!
FACTR=8,0*SHEAR*NSYMM/(1,0+CAPPA)
!
J1CGL=0,0
J2CGL=0,0
!
*DO,IJIEL,1,NJIEL
    KELEM=LISTE(IJIEL)
    KNODE=4
    RNODE=1
    *DO,INODE,1,NNODE
        !

```

```

JNODE=INODE
*IF, INODE, GT, 1, THEN
    *IF, INODE, LT, 8, THEN
        *IF, MOD ( INODE, 2 ), EQ, 0, THEN
            KNODE=KNODE+1
            JNODE=KNODE
        *ELSEIF, MOD ( INODE, 2 ), NE, 0, THEN
            RNODE=RNODE+1
            JNODE=RNODE
        *ENDIF
    *ENDIF
*ENDIF
!
LNODE=NELEM (KELEM, JNODE)
ELCOD (1, INODE)=NX (LNODE)
ELCOD (2, INODE)=NY (LNODE)
ELDIS (1, INODE)=UX (LNODE)
ELDIS (2, INODE)=UY (LNODE)
*ENDDO
!
GAUSSQ !CALL MACRO THAT SETS UP GAUSS-LEGENDRE INTEGRATION CONSTANTS
KGASP=(NPXSI-1) *NGAUS
EXISP=POSGP (NPXSI)
*DO, JGAUS, 1, NGAUS
    ETASP=POSGP (JGAUS)
    !
    SFR2          !CHAMADA DA MACRO PARA DEFINIR AS FUNÇÕES DE FORMA
E SUAS DERIVADAS
    !
    KGASP=KGASP+1
    !
    JACOB2 !CHAMADA DA MACRO PARA O CÁLCULO DA MATRIZ JACOBIANO
    !
    DUBDX=0, 0
    DUBDY=0, 0
    DVBDX=0, 0
    DVBDY=0, 0
    *DO, INODE, 1, NNODE
        DUBDX=DUBDX+CARTD (1, INODE) *ELDIS (1, INODE)
        DUBDY=DUBDY+CARTD (2, INODE) *ELDIS (1, INODE)
        DVBDX=DVBDX+CARTD (1, INODE) *ELDIS (2, INODE)
        DVBDY=DVBDY+CARTD (2, INODE) *ELDIS (2, INODE)
    *ENDDO
    !
    *DO, ISTRE, 1, NSTRE
        STREN (ISTRE)=STRGP (KELEM, ISTRE, KGASP)
        STRAN (ISTRE)=STNGP (KELEM, ISTRE, KGASP)
    *ENDDO
    SEDEB=0, 5* (STREN (1) *DUBDX+STREN (3) * (DUBDY+DVBDX) +STREN (2) *DVBDY)
    SEDEN=0, 5* (STREN (1) *STRAN (1) +STREN (3) *STRAN (3) +STREN (2) *STRAN (2) )
    !

```

```

FIRS1=SEDEB*XJACM(2,2)
!
FIRS2=SEDEB*XJACM(2,1)
!
FMULT=XJACM(2,2)*XJACM(1,1)-XJACM(2,1)*XJACM(1,2)
DVEC1=FMULT*XJACM(2,2)
DVEC2=-FMULT*XJACM(2,1)
DNORM=SQRT(DVEC1*DVEC1+DVEC2*DVEC2)
NVEC1=DVEC1/DNORM
NVEC2=DVEC2/DNORM
DBIAN=SQRT(XJACM(2,1)*XJACM(2,1)+XJACM(2,2)*XJACM(2,2))
!
FAC11=(STREN(1)*NVEC1+STREN(3)*NVEC2)*STRAN(1)      !DUBDX
FAC12=(STREN(3)*NVEC1+STREN(2)*NVEC2)*DVBDX
!
FAC21=(STREN(1)*NVEC1+STREN(3)*NVEC2)*DUBDY
FAC22=(STREN(3)*NVEC1+STREN(2)*NVEC2)*STRAN(2)      !DVBDY
!
SECN1=(FAC11+FAC12)*DBIAN
SECN2=(FAC21+FAC22)*DBIAN
!
J1CGL=J1CGL+(FIRS1-SECN1)*WEIGP(JGAUS)
J2CGL=J2CGL+(-FIRS2-SECN2)*WEIGP(JGAUS)
!
      *ENDDO
!
*ENDDO
!
ALLSEL, ALL
!
*AFUN, DEG
J1CLO=COS(TGROW)*J1CGL+SIN(TGROW)*J2CGL
J2CLO=-SIN(TGROW)*J1CGL+COS(TGROW)*J2CGL
*AFUN, RAD
!
JI=, 25* ((SQRT(J1CLO-J2CLO)+SQRT(J1CLO-J2CLO))**2)
JII=, 25* ((SQRT(J1CLO-J2CLO)-SQRT(J1CLO-J2CLO))**2)

```

Abordagem da integral equivalente de domínio – método EDI

```

!C*****
!C
!C***  MACRO PARA AVALIAR A INTEGRAL J - EDI MÉTODO
!C
!C*****
!
/PMACRO
!

```



```

ALLSEL, ALL
!
EPLOT
*MSG, NOTE,
CLIQUE NOS ELEMENTOS DO PATH
ESEL, S, P
*GET, NJIEL, ELEM, 0, COUNT
!
*DO, IELEM, 1, NJIEL
    ESEL, ALL
    ESEL, S, P
    *GET, LISTE (IELEM), ELEM, 0, NUM, MAX
*ENDDO
!
ALLSEL, ALL
!
*ASK, TGROW, 'COM A DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO', 0
!
*ASK, MOSYM, 'MODELO COMPLETO YES (Y) OR NO (N)', 'Y'
*IF, MOSYM, EQ, 'Y', THEN
    NSYMM=1
*ELSEIF, MOSYM, EQ, 'N', THEN
    NSYMM=2
*ENDIF
!
FACTR=8, 0*SHEAR*NSYMM/(1, 0+CAPPA)
!
J1CGL=0, 0
J2CGL=0, 0
*DO, IJIEL, 1, NJIEL
    KELEM=LISTE (IJIEL)
    KNODE=4
    RNODE=1
    *DO, INODE, 1, NNODE
        !
        JNODE=INODE
        *IF, INODE, GT, 1, THEN
            *IF, INODE, LT, 8, THEN
                *IF, MOD (INODE, 2), EQ, 0, THEN
                    KNODE=KNODE+1
                    JNODE=KNODE
                *ELSEIF, MOD (INODE, 2), NE, 0, THEN
                    RNODE=RNODE+1
                    JNODE=RNODE
            *ENDIF
        *ENDIF
    *ENDIF
    !
    LNODE=NELEM (KELEM, JNODE)
    ELCOD (1, INODE)=NX (LNODE)
    ELCOD (2, INODE)=NY (LNODE)

```

```

        ELDIS(1, INODE)=UX(LNODE)
        ELDIS(2, INODE)=UY(LNODE)
        !
    *ENDDO

!
!
    GAUSSQ      !CHAMADA DA MACRO PARA CALCULAR AS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO DE
GAUSS-LEGENDRE
    KGASP=0
    *DO, IGAUS, 1, NGAUS
        *DO, JGAUS, 1, NGAUS
            EXISP=POSGP(IGAUS)
            ETASP=POSGP(JGAUS)
            !
            SFR2      !CHAMADA DA MACRO PARA DEFINIR AS FUNÇÕES DE FORMA
E SUAS DERIVADAS
            !
            KGASP=KGASP+1
            !
            JACOB2    !CHAMADA DA MACRO PARA O CÁLCULO DA MATRIZ JACOBIANO
            !
            *DO, ISTRE, 1, NSTRE
                STREN(ISTRE)=STRNO(KELEM, ISTRE, KGASP)
                STRAN(ISTRE)=STNNO(KELEM, ISTRE, KGASP)
            *ENDDO
            SEDEN=0, 5*(STREN(1)*STRAN(1)+STREN(3)*STRAN(3)+STREN(2)*STRAN(2))
            !C
            !C***    CALCULANDO AS DERIVADAS DA FUNÇÃO "Q"
            !C
            QFUN1     !CHAMADA DA MACRO PARA DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO Q
            !
            QFUNT=0, 0
            DQTDX=0, 0
            DQTDY=0, 0
            *DO, INODE, 1, NNODE
                QFUNT=QFUNT+QFUNC(INODE)*QVNOD(INODE)
                DQTDX=DQTDX+QFDEC(1, INODE)*QVNOD(INODE)
                DQTDY=DQTDY+QFDEC(2, INODE)*QVNOD(INODE)
            *ENDDO
            !C
            !C***    CALCULANDO OS TERMOS DA INTEGRAL J (J1 E J2)
            !C
            FIRS1=SEDEN*DQTDX
            !
            FIRS2=SEDEN*DQTDY
            !
            DVDXB=DVDXN(KELEM, 1, KGASP)
            DUDYB=DUDYN(KELEM, 1, KGASP)
            !
            FAC11=STREN(1)*STRAN(1)+STREN(3)*DVDXB
            FAC12=STREN(3)*STRAN(1)+STREN(2)*DVDXB

```

```

      SECN1=FAC11*DQTDX+FAC12*DQTDY
      !
      FAC21=STREN(1)*DUDYB+STREN(3)*STRAN(2)
      FAC22=STREN(3)*DUDYB+STREN(2)*STRAN(2)
      SECN2=FAC21*DQTDX+FAC22*DQTDY
      !
      FIRS3=SEDDC(KELEM,1)*QFUNT
      FIRS4=SEDDC(KELEM,2)*QFUNT
      !
      J1CGL=J1CGL+(SECN1-FIRS1)*WEIGP(JGAUS)*WEIGP(IGAUS)*DJACB)
      J2CGL=J2CGL+(SECN2-FIRS2)*WEIGP(JGAUS)*WEIGP(IGAUS)*DJACB)
      *ENDDO
    *ENDDO
  !
  *ENDDO
  !
  *AFUN, DEG
  J1CLO=COS(TGROW)*J1CGL+SIN(TGROW)*J2CGL
  J2CLO=-SIN(TGROW)*J1CGL+COS(TGROW)*J2CGL
  *AFUN, RAD
  !
  JI=,25*((SQRT(J1CLO-J2CLO)+SQRT(J1CLO-J2CLO))**2)
  JII=,25*((SQRT(J1CLO-J2CLO)-SQRT(J1CLO-J2CLO))**2)

```