**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO NUMÉRICO PARA SIMULAÇÃO DA RESPOSTA
AEROELÁSTICA DE ASAS FIXAS**

Guilherme Ribeiro Benini

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: Prof. Assoc. Eduardo Morgado Belo

São Carlos
2002

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GUILHERME RIBEIRO BENINI**

Dissertação defendida e julgada em 28-06-2002 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Assoc. **EDUARDO MORGADO BELO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

aprovado

Prof. Dr. **PAULO AFONSO DE OLIVEIRA SOVIERO**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica /ITA)

aprovado

Dr. **ANTONINI PUPPIN MACEDO**
(Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A. /EMBRAER)

aprovado

Prof. Associado **ARTHUR JOSÉ VIEIRA PORTO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Profa. Assoc. **MARIA DO CARMO CALMURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais, José Carlos e Maria Silvia,
como um fruto da educação que me deram*

AGRADECIMENTOS

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro concedido na forma da bolsa de Mestrado (processo 00/00361-3).

Ao meu orientador, Prof. Eduardo Morgado Belo, por ter me iniciado no mundo científico e pela seriedade com que conduziu este trabalho.

Ao Prof. Flávio Donizeti Marques, por sempre ter acompanhado de perto o desenvolvimento de todo o trabalho.

Ao Prof. Paulo Afonso de Oliveira Soviero, do ITA, pela disposição em contribuir para este trabalho, esclarecendo várias dúvidas sobre o modelo aerodinâmico.

Aos colegas do Laboratório de Aeroelasticidade, Dinâmica de Vôo e Controle (LADinC), pela convivência e companheirismo que transformaram o dia-a-dia de trabalho em uma tarefa bastante agradável, e por todas as formas de ajuda que forneceram. Espero poder cultivar para sempre esta amizade.

À Bianca, por ter compartilhado comigo grande parte do tempo em que estive envolvido neste trabalho.

A todos os alunos e professores que lutaram e que continuam lutando para consolidar a Engenharia Aeronáutica dentro da Escola de Engenharia de São Carlos.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA	1
1.1 Introdução e Objetivo	1
1.2 O fenômeno de flutter	2
1.3 Modelos dinâmico-estruturais	2
1.4 Modelos aerodinâmicos	3
1.5 Modelos aeroelásticos	5
1.6 Especificações do método proposto	8
1.7 Organização da dissertação	8
CAPÍTULO 2	
MODELO DINÂMICO-ESTRUTURAL	10
2.1 Fundamentos teóricos	10
2.2 Descrição da estrutura	14
2.3 Modelo em elementos finitos	15
CAPÍTULO 3	
O MÉTODO DE MALHA DE VÓRTICES PARA AERODINÂMICA NÃO-ESTACIONÁRIA	21
3.1 Equações básicas	21
3.2 Soluções da equação de Laplace	22
3.2.1 Superposição das soluções elementares e o teorema de Kutta-Joukowski	22
3.3 A condição de Kutta e o teorema de circulação de Kelvin	24
3.4 O problema das asas finitas	26
3.5 A lei de Biot-Savart, os teoremas de Helmholtz e a linha de sustentação de Prandtl	27
3.6 Velocidade induzida por um segmento de vórtice reto	29
3.7 O método de malha de vórtices	31
3.7.1 Cálculo dos coeficientes de influência	32

3.7.2 Geometria da esteira	35
3.7.3 Cálculo do carregamento aerodinâmico	36
3.8 O caso não-estacionário	36
3.8.1 Sistemas de coordenadas	37
3.8.2 A condição de contorno para o caso não-estacionário	38
3.8.3 Modelo da esteira	38
3.8.4 Montagem do sistema de equações lineares	39
3.8.5 A equação de Bernoulli modificada e o cálculo do carregamento aerodinâmico	40
3.9 Procedimento de implementação do método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária	42
3.10 Resultados	42
CAPÍTULO 4	
ACOPLAMENTO ENTRE A DINÂMICA ESTRUTURAL E A AERODINÂMICA	49
4.1 Troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica	49
4.2 Interpolação por <i>splines</i> de superfície	52
4.3 Modos interpolados	54
4.4 Esquema de integração numérica	59
4.5 Resolução da equação de movimento	61
4.6 Algoritmo para implementação computacional	62
CAPÍTULO 5	
RESULTADOS AEROELÁSTICOS	64
CAPÍTULO 6	
CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
6.1 Sumário e Conclusões	76
6.2 Sugestões para trabalhos futuros	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Figura 1.1 – Metodologias de análise aeroelástica	6
---	---

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 – Aeronave projetada pelos alunos da EESC/USP	14
Figura 2.2 – Dimensões da asa	15
Figura 2.3 – Esquema estrutural da asa	15
Figura 2.4- Elementos utilizados na análise (SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC.®, 1997a)	16
Figura 2.5 – Malha de elementos finitos sobre a semi-asa	16
Figura 2.6 – Forma do primeiro modo de vibrar	17
Figura 2.7 – Forma do segundo modo de vibrar	18
Figura 2.8 – Forma do terceiro modo de vibrar	18
Figura 2.9 – Forma do quarto modo de vibrar	19
Figura 2.10 – Forma do quinto modo de vibrar	19
Figura 2.11 – Forma do sexto modo de vibrar	20
Figura 2.12 – Forma do sétimo modo de vibrar	20

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 – Representação do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro	23
Figura 3.2 - Representação do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro com sustentação	23
Figura 3.3 - Representação das linhas de corrente ao redor de um aerofólio para dois valores distintos de circulação	24
Figura 3.4- Representação do vórtice inicial e da geração de circulação ao redor do aerofólio	25
Figura 3.5 - Efeito do <i>downwash</i> em uma seção local de aerofólio	26
Figura 3.6 – Lei de Biot-Savart aplicada a um segmento de vórtice (ANDERSON, 1991)	27
Figura 3.7 – Esquema da linha de sustentação de Prandtl	28
Figura 3.8 – Segmento de vórtice reto e variáveis associadas (KATZ & PLOTKIN, 1991)	29
Figura 3.9 - Discretização da asa (KATZ & PLOTKIN, 1991)	31

Figura 3.10 – Definição do sentido positivo para a circulação em cada segmento do anel de vórtice (KATZ & PLOTKIN, 1991)	32
Figura 3.11 – Definição do vetor normal (KATZ & PLOTKIN, 1991)	32
Figura 3.12 - Processo de varredura para cálculo da velocidade induzida (KATZ & PLOTKIN, 1991)	33
Figura 3.13 – Anel de vórtice da esteira satisfazendo a condição de Kutta (KATZ & PLOTKIN, 1991)	34
Figura 3.14 – Efeito da geometria da esteira nos cálculos aerodinâmicos (KATZ & PLOTKIN, 1991)	35
Figura 3.15 – Decomposição da força normal nas forças de sucção e sustentação	36
Figura 3.16 - Sistemas de coordenadas (KATZ & PLOTKIN, 1991)	37
Figura 3.17 - Anéis de vórtice da esteira gerados a cada intervalo de tempo (KATZ & PLOTKIN, 1991)	39
Figura 3.18 - Algoritmo para implementação do método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária	42
Figura 3.19 – Coeficiente de sustentação (C_L) vs. tempo adimensional para movimento de aceleração súbita	43
Figura 3.20 – Comparação da simulação com a solução analítica de Wagner	44
Figura 3.21 – Coeficiente de sustentação vs. tempo para uma entrada de degrau no ângulo de ataque: a) variação do ângulo de ataque vs. tempo; b) variação do C_L vs. tempo para um incremento de tempo de 0,00125 s; c) variação do C_L vs. tempo, em uma janela de tempo iniciando-se um pouco antes e terminando um pouco após a ocorrência do degrau de ângulo de ataque, considerando-se três diferentes incrementos de tempo dT	45
Figura 3.22 – Coeficiente de sustentação vs. tempo para movimento oscilatório de arfagem	46
Figura 3.23 – Coeficiente de sustentação vs. ângulo de ataque para movimento oscilatório de arfagem	47
Figura 3.24 – Semi-asa discretizada juntamente com a esteira deformada	47
Figura 3.25 – Comparação dos valores de CL para dois modelos de esteira	48
Figura 3.26 – Distribuição de circulação na semi-asa para uma condição de regime permanente	48

CAPÍTULO 4

Figura 4.1. – Esquema da troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica	51
Figura 4.2 – Nós escolhidos para representar os modos de vibrar estruturais	54
Figura 4.3 – Comparação entre os deslocamentos no bordo de ataque para os modos de flexão vertical escritos na malha original e na malha reduzida	55
Figura 4.4 – Comparação entre a malha estrutural (*) e a malha aerodinâmica (o)	55
Figura 4.5 – Primeiro modo estrutural reproduzido na malha aerodinâmica (12,77 Hz)	56
Figura 4.6 – Terceiro modo estrutural reproduzido na malha aerodinâmica (54,45 Hz)	56
Figura 4.7 – Quarto modo estrutural reproduzido na malha aerodinâmica (63,62 Hz)	57
Figura 4.8 – Quinto modo estrutural reproduzido na malha aerodinâmica (122,74 Hz)	57
Figura 4.9 – Sétimo modo estrutural reproduzido na malha aerodinâmica (174,74 Hz)	58
Figura 4.10 – Comparação entre as curvas de nível dos modos interpolados (---) e dos modos estruturais (—)	58
Figura 4.11 – Esquema da redução de ordem utilizada na equação de movimento	60

CAPÍTULO 5

Figura 5.1 – Resposta aeroelástica para $V_\infty = 10$ m/s	66
Figura 5.2 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 10$ m/s	66
Figura 5.3 – Coeficiente de força normal (C_N) em função do tempo e correspondente FFT para $V_\infty = 10$ m/s	67
Figura 5.4 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 10$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	67
Figura 5.5 – Resposta aeroelástica para $V_\infty = 30$ m/s	68
Figura 5.6 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 30$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	68
Figura 5.7 – Resposta aeroelástica para $V_\infty = 50$ m/s	69
Figura 5.8 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 50$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	69
Figura 5.9 – Resposta aeroelástica para $V_\infty = 70$ m/s	70
Figura 5.10 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 70$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	70
Figura 5.11 – Resposta aeroelástica para $V_\infty = 80$ m/s	71

Figura 5.12 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 80$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	71
Figura 5.13 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 90$ m/s	72
Figura 5.14 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 90$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	72
Figura 5.15 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 100$ m/s	73
Figura 5.16 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 100$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais	73
Figura 5.17 – Comparação da resposta aeroelástica do sétimo modo para $V_{\infty} = 10$ m/s e dois valores de Δt diferentes	74
Figura 5.18 – Deslocamento na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 30$ m/s	74
Figura 5.19 – Ângulo de ataque na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 30$ m/s	74
Figura 5.20 – Deslocamento na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 100$ m/s	75
Figura 5.21 – Ângulo de ataque na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 100$ m/s	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades mecânicas dos materiais da asa (EESC/USP TEAM, 2000)	15
Tabela 2.2 – Frequências naturais e descrição dos modos de vibrar	17
Tabela 3.1 – Soluções básicas da equação de Laplace	22
Tabela 4.1 – Equações de previsão e correção	61

LISTA DE SÍMBOLOS¹

a	coeficiente de influência utilizado para o cálculo da circulação;
a_0, a_1, a_2	coeficientes do método de interpolação;
$\vec{A}, \vec{B}$	vetores utilizados para o cálculo do vetor normal;
b	semi-corda do aerofólio;
BF	bordo de fuga;
c	corda do aerofólio;
C_D	coeficiente de arrasto;
C_L	coeficiente de sustentação;
C_N	coeficiente de força normal;
$\frac{D}{Dt}$	derivada substancial;
D_i	força de arrasto induzido;
$\vec{e}$	vetor orientado na direção da velocidade induzida por um segmento de vórtice reto;
F_i	coeficientes do método de interpolação;
FFT	Transformada de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>);
$[G]$	matriz de transformação de coordenadas que utiliza os pontos de controle para representar a malha aerodinâmica;
$[\bar{G}]$	matriz de transformação de coordenadas que utiliza as extremidades dos anéis de vórtice para representar a malha aerodinâmica;
h	distância do segmento de vórtice a um ponto P (caso tridimensional);
h	distância do centro de uma singularidade aerodinâmica a um ponto P (caso bidimensional);
i	$\sqrt{-1}$;
i	contador utilizado na identificação do intervalo de tempo;
i, j	contadores usados na identificação dos painéis;
k	frequência reduzida;
K, L	contadores usados no cálculo dos coeficientes de influência;
$[K]$	matriz de rigidez da estrutura;
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez modal;
$\vec{l}$	vetor tangente a um segmento de vórtice;

¹ Alguns símbolos possuem mais de um significado, dependendo do contexto em que estão inseridos.

L	força de sustentação;
$\{L\}$	vetor de carregamento aerodinâmico;
LD	lado direito do sistema linear (no modelo aerodinâmico);
LD	lado direito da equação de movimento (no modelo aeroelástico);
m	número de painéis na asa;
M	número de painéis ao longo da corda;
$[M]$	matriz de massa da estrutura;
$[\overline{M}]$	matriz de massa modal;
$\vec{n}$	vetor normal;
n	número de pontos da malha estrutural;
n	número de modos escolhidos para representar a estrutura;
N	número de painéis ao longo da envergadura;
N	força normal;
N	número de graus de liberdade da estrutura;
p	pressão estática;
$\{P\}$	vetor de forças aplicadas em uma placa plana (referente ao método de interpolação);
$\vec{r}$	vetor que define a posição de um ponto P em relação a um ponto do segmento de vórtice;
$\vec{r}_0$	vetor que representa um segmento de vórtice reto ;
$\vec{r}_1$	vetor ligando a extremidade 1 de um segmento de vórtice reto a um ponto P;
$\vec{r}_2$	vetor ligando a extremidade 2 de um segmento de vórtice reto a um ponto P;
R	força aerodinâmica resultante;
$\vec{R}'$	força aerodinâmica resultante por unidade de comprimento;
$\vec{R}_0$	vetor que descreve a posição da origem do sistema de coordenadas fixo no corpo relativamente ao sistema inercial;
s	distância percorrida pelo aerofólio em semi-cordas;
S	área do painel;
t	tempo;
$(u, v, w)_i$	componentes da velocidade induzida pelos anéis de vórtice da asa e da esteira;
$[u_w, v_w, w_w]$	componentes da velocidade induzida pela esteira;
$[U, V, W]$	componentes da velocidade devido ao movimento da asa;

$\vec{v}$	velocidade devido ao movimento da asa;
$\vec{v}_{rel}$	velocidade da asa em relação ao sistema de coordenadas fixo no corpo;
$\vec{V}$	velocidade local (ou induzida);
$\vec{V}_{rel}$	velocidade relativa;
$\vec{V}_{\infty}$	velocidade do fluxo livre;
V_{θ}	componente de velocidade tangencial induzida por uma singularidade aerodinâmica;
V_r	componente de velocidade radial induzida por uma singularidade aerodinâmica;
$\vec{V}_0$	velocidade da origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo;
w	<i>downwash</i> ;
w	deslocamentos de uma placa plana (referente ao método de interpolação);
W	fator utilizado para estimar o erro local no método preditor-corretor;
(x,y)	coordenadas dos pontos da malha aerodinâmica;
(x_i,y_i)	coordenadas dos pontos da malha estrutural;
$\{x\}$	deslocamentos sofridos pela estrutura;
$\{\dot{x}\}$	velocidades sofridas pela estrutura;
$\{\ddot{x}\}$	acelerações sofridas pela estrutura;
$\{y_1\}$	vetor dos deslocamentos modais;
$\{y_2\}$	vetor das velocidades modais;
$\{y\}$	vetor com os deslocamentos e velocidades modais;

Símbolos gregos

α	ângulo de ataque geométrico;
α_{ef}	ângulo de ataque efetivo;
α_i	ângulo de ataque induzido;
α_0	ângulo de ataque inicial;
β	ângulo entre os vetores $\vec{l}$ e $\vec{r}$;
$\{\delta_x\}$	deslocamentos virtuais;
ϕ	potencial de velocidades;
ϕ	função de Wagner;

$\{\phi\}$	modo de vibrar da estrutura;
$\{\eta\}$	deslocamentos modais da estrutura;
$\{\ddot{\eta}\}$	acelerações modais da estrutura;
κ	intensidade da singularidade dipólo;
κ	coeficientes do método de interpolação;
ρ	densidade do ar;
ω	freqüência natural da estrutura;
ω	freqüência de oscilação do movimento de arfagem da asa;
Δb	comprimento dos anéis de vórtice ao longo da envergadura;
Δc	comprimento dos anéis de vórtice ao longo da corda;
Δt	intervalo de tempo;
$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$	deslocamentos sofridos pela esteira;
$[\Phi]$	matriz modal da estrutura;
Γ	intensidade da singularidade vórtice (ou circulação);
Λ	intensidade da singularidade fonte (ou sumidouro);
$\vec{\Theta}$	vetor que descreve a orientação do sistema de coordenadas fixo ao corpo;
$\vec{\Omega}$	velocidade angular do sistema de coordenadas fixo ao corpo;

Subscritos

a	refere-se à malha aerodinâmica;
e	refere-se à malha estrutural;
u	refere-se ao lado superior do anel de vórtice (<i>upper</i>);
l	refere-se ao lado inferior do anel de vórtice (<i>lower</i>);

Superescritos

P	refere-se à solução prevista;
C	refere-se à solução corrigida;

RESUMO

BENINI, G.R. (2002). *Modelo numérico para simulação da resposta aeroelástica de asas fixas*. São Carlos. 80p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Um modelo numérico para simulação da resposta aeroelástica de asas fixas é proposto. A estratégia adotada no trabalho é a de tratar a aerodinâmica e a dinâmica estrutural separadamente e então acoplá-las na equação de movimento. A caracterização dinâmica de uma asa protótipo é feita pelo método dos elementos finitos e a equação de movimento é escrita em função das coordenadas modais. O carregamento aerodinâmico não-estacionário é determinado pelo método de malha de vórtices. A troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica é feita através do método de interpolação por *splines* de superfície e a equação de movimento é resolvida iterativamente no domínio do tempo, utilizando-se um método preditor-corretor. As teorias de aerodinâmica, dinâmica estrutural e do acoplamento entre elas são apresentadas separadamente, juntamente com os respectivos resultados obtidos. A resposta aeroelástica da asa protótipo é representada por curvas de deslocamentos modais em função do tempo para várias velocidades de voo e a ocorrência de flutter é verificada quando estas curvas divergem (i.e. as amplitudes aumentam progressivamente). Transformadas de Fourier destas curvas mostram o acoplamento de frequências característico do fenômeno de flutter.

Palavras-chave: aeroelasticidade, flutter, método de malha de vórtices, aerodinâmica não-estacionária.

ABSTRACT

BENINI, G.R. (2002). *Numerical model for the simulation of the aeroelastic response of fixed wings*. São Carlos. 80p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (In Portuguese).

A numerical model for the simulation of the aeroelastic response of fixed wings is proposed. The methodology used in the work is to treat the aerodynamic and the structural dynamics separately and then couple them in the equation of motion. The dynamic characterization of a prototype wing is done by the finite element method and the equation of motion is written in modal coordinates. The unsteady aerodynamic loads are predicted using the vortex lattice method. The exchange of information between the aerodynamic and structural meshes is done by the surface splines interpolation scheme, and the equation of motion is solved interactively in the time domain, employing a predictor-corrector method. The aerodynamic and structural dynamics theories, and the methodology to couple them, are described separately, together with the corresponding obtained results. The aeroelastic response of the prototype wing is represented by time histories of the modal coordinates for different airspeeds, and the flutter occurrence is verified when the time histories diverge (i.e. the amplitudes keep growing). Fast Fourier Transforms of these time histories show the coupling of frequencies, typical of the flutter phenomenon.

Keywords: aeroelasticity, flutter, vortex lattice method, unsteady aerodynamics.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA

1.1 Introdução e Objetivo

O estudo dos problemas provenientes da interação entre fluidos e estruturas constitui uma área de pesquisa multidisciplinar, envolvendo o estudo da interação entre forças provocadas pelo movimento de fluidos, forças elásticas e forças de inércia atuantes em uma estrutura. Quando o fluido considerado é o ar, é mais comum utilizar a denominação de Aeroelasticidade para a área, que é um termo clássico da engenharia aeronáutica. A ocorrência de problemas aeroelásticos em aeronaves foi percebida desde os primeiros vôos de que há relatos. Um dos mais completos relatos históricos sobre o tema pode ser encontrado em GARRICK & REED (1981).

Existem diversos tipos de problemas aeroelásticos na engenharia aeronáutica, tais como divergência, reversão de comandos, flutter e buffeting. Problemas aeroelásticos também ocorrem no campo da engenharia civil, como o bem documentado desastre da ponte de Tacoma, em 1940, nos Estados Unidos. O estudo destes fenômenos pode ser encontrado nas referências clássicas de aeroelasticidade (BISPLINGHOFF et al., 1955; FUNG, 1993; DOWELL, 1995).

Neste trabalho, apenas o fenômeno de flutter será abordado e o objetivo principal é desenvolver um modelo numérico para simular a resposta aeroelástica de asas fixas que permita visualizar a ocorrência do flutter.

A busca por métodos de análise aeroelástica mais precisos para a utilização durante as fases de projeto de uma aeronave tem sido uma grande preocupação da indústria aeronáutica na atualidade. Isto se deve principalmente ao aumento da velocidade de vôo das aeronaves e à diminuição da rigidez da estrutura, aumentando a susceptibilidade de ocorrência de problemas aeroelásticos como o flutter.

A descrição do fenômeno de flutter, uma revisão dos modelos matemáticos que podem ser utilizados para sua análise e as especificações do método proposto são apresentados nos tópicos seguintes.

1.2 O fenômeno de flutter

O fenômeno de flutter pode ser definido como uma instabilidade dinâmica de uma estrutura flexível imersa em um escoamento de ar. A flexibilidade da estrutura permite que ela se deforme consideravelmente sob a ação do carregamento aerodinâmico resultante do escoamento de ar. Estas deformações por sua vez provocam alterações na distribuição do carregamento aerodinâmico, que produzem deformações estruturais adicionais e assim sucessivamente. Este comportamento iterativo persiste até que um equilíbrio estático seja atingido, ou seja, até que as forças aerodinâmicas não sejam suficientes para deformar mais a estrutura. Quando este equilíbrio estático não é alcançado ocorre o problema de divergência, que pode provocar a ruptura estática da asa. O problema dinâmico ocorre a partir deste equilíbrio estático, devido a perturbações no escoamento de ar ou na estrutura. As respostas a estas perturbações são obtidas pelo mesmo processo iterativo descrito anteriormente, mas apresentam um comportamento oscilatório. Respostas oscilatórias divergentes indicam a ocorrência do flutter.

O flutter pode ser ilustrado considerando-se um aerofólio imerso em um escoamento de ar, com o movimento representado por dois graus de liberdade: rotação em torno do eixo elástico e flexão vertical. Quando a velocidade do escoamento de ar está abaixo da velocidade crítica para ocorrência do flutter, cada um dos graus de liberdade do aerofólio apresenta respostas a perturbações decrescentes no tempo e em frequências próximas da frequência natural do modo de vibrar correspondente ao grau de liberdade. Neste caso o escoamento de ar fornece amortecimento à estrutura. Ultrapassando-se a velocidade crítica a resposta passa a ser crescente no tempo, ou seja, instável, e, além disso, o movimento dos dois graus de liberdade passa a ocorrer em uma mesma frequência, resultante do acoplamento dos modos de vibrar de flexão e torção. O acoplamento de modos é uma característica do fenômeno de flutter e é discutido no trabalho de HANCOCK et al. (1985). Mesmo em análises do flutter de asas, que envolvem mais de dois graus de liberdade, observa-se que os modos de vibrar mais representativos para as simulações são os modos fundamentais de flexão e torção (HANCOCK et al., 1985).

1.3 Modelos dinâmico-estruturais

O modelo dinâmico-estrutural mais simples para representar sistemas aeroelásticos é a seção típica bidimensional. Este modelo representa o movimento de um aerofólio rígido pelos graus de liberdade de torção e de deslocamento vertical. A dedução das equações de

movimento para a seção típica bidimensional é encontrada nas referências clássicas de aeroelasticidade (BISPLINGHOFF et al., 1955; FUNG, 1993; DOWELL, 1995).

Para a representação do comportamento dinâmico-estrutural de asas finitas é conveniente representá-las por modelos de vigas capazes de reproduzir movimentos de flexão e torção (BISPLINGHOFF et al., 1955). Uma vez que o desenvolvimento analítico destes modelos considera infinitos graus de liberdade, é preciso adotar simplificações que tornem o número de graus de liberdade finito. A técnica da superposição modal (MEIROVITCH, 1986) tem esta finalidade, representando a deformação de estruturas lineares em função de alguns de seus modos de vibrar. Alguns métodos para a obtenção dos modos de vibrar de vigas podem ser encontrados em BISPLINGHOFF et al. (1955).

Atualmente, o procedimento teórico mais adequado para a obtenção dos modos de vibrar e das frequências naturais de estruturas complexas é o método de elementos finitos (ZIENKIEWICS, 1986). Embora o método de elementos finitos permita a obtenção de modelos estruturais complicados, os modelos de vigas ainda são bastante utilizados, por necessitarem de um número bem menor de graus de liberdade. No trabalho de PREIDIKMAN & MOOK (2000) verifica-se a utilização de um modelo de vigas obtido pelo método dos elementos finitos para representar a dinâmica estrutural de uma asa.

Apesar do uso do método de elementos finitos estar consolidado na indústria aeronáutica, a determinação experimental dos modos de vibrar ainda é de fundamental importância. Algoritmos numéricos têm sido desenvolvidos para identificar propriedades modais a partir de dados de ensaios experimentais, como o proposto no trabalho de TSUNAKI (1999).

1.4 Modelos aerodinâmicos

O maior problema na determinação de modelos aeroelásticos reside na determinação precisa do carregamento aerodinâmico não-estacionário. Toda essa dificuldade é compreensível quando se examinam as equações básicas que envolvem os problemas de dinâmica dos fluidos (ANDERSON, 1991). As soluções analíticas destas equações ainda são de aplicação bastante limitada, uma vez que adotam várias simplificações. Isto tem motivado muitas pesquisas para o desenvolvimento de métodos numéricos para a solução das equações que representam o movimento dos fluidos.

O modelo analítico de maior destaque foi o desenvolvido por THEODORSEN (1934), que obteve uma expressão para o carregamento aerodinâmico não-estacionário sobre

uma placa plana oscilando em um escoamento de ar. A solução proposta por Theodorsen é calculada no domínio da frequência, limitada para movimentos harmônicos simples de pequena amplitude e para escoamentos potenciais. Algumas variações na formulação de Theodorsen foram propostas e são encontradas em BISPLINGHOFF et al. (1955). Posteriormente passou-se a representar o carregamento aerodinâmico não-estacionário em asas tridimensionais dividindo-as em algumas seções ao longo da envergadura e utilizando uma formulação bidimensional como a de Theodorsen para cada seção. Esta técnica é conhecida por “teoria das faixas” e é clássica em estudos de aeroelasticidade.

As estimativas de carregamento aerodinâmico tridimensional foram aprimoradas com o desenvolvimento da teoria da superfície de sustentação. Esta teoria é baseada na distribuição de singularidades dipólo pela superfície da asa. As intensidades destas singularidades são determinadas de modo a garantir que as linhas de corrente do escoamento passem pela superfície da asa. As primeiras implementações desta teoria consideravam distribuições contínuas destas singularidades sobre a asa. Uma destas implementações consiste do “método de colocação”, descrito em YATES Jr. (1985). Posteriormente passou-se a considerar distribuições discretas destas singularidades, o que permitiu a implementação numérica da teoria. A implementação numérica pode ser feita de duas maneiras: considerando-se o potencial de velocidades ou o potencial de acelerações.

O trabalho de ALBANO & RODDEN (1969) apresenta a implementação numérica baseada no potencial de acelerações, enquanto o trabalho de DJOJODIHARDJO & WIDNALL (1969) apresenta a implementação numérica baseada no potencial de velocidades. Uma comparação entre as duas implementações é encontrada em GIESING (1985). Estas implementações numéricas foram denominadas de métodos de malha de dipólos (*double lattice methods*). Se um valor constante para a singularidade dipólo for adotado em cada painel, o método de malha de vórtices (*vortex lattice method*) é obtido, de acordo com DJOJODIHARDJO & WIDNALL (1969).

A proposta deste trabalho é utilizar o método de malha de vórtices no domínio do tempo para a determinação do carregamento aerodinâmico não-estacionário sobre uma asa. A implementação do método é descrita detalhadamente em KATZ & PLOTKIN (1991). O método é limitado para escoamentos incompressíveis e potenciais. O trabalho de SOVIERO & BORTOLUS (1992) propõe modificações para incluir efeitos de compressibilidade, mas que são válidas apenas no domínio da frequência.

Esta filosofia de se representar o escoamento ao redor de asas finitas através da distribuição de singularidades aerodinâmicas sobre a asa foi estendida para modelar corpos de geometria arbitrária, como uma aeronave inteira, e ficou conhecida por “método de

painéis”. O trabalho de MARTINS (1997) apresenta um estudo de revisão, implementação e aplicação de métodos de painéis para aerodinâmica estacionária e o trabalho de PREIDIKMAN & MOOK (2000) utiliza um método de painéis não-estacionário para a simulação de respostas aeroelásticas.

Em um outro tipo de abordagem, DOWELL (1996) parte de um equacionamento aerodinâmico no domínio da frequência, utilizando o método de malha de vórtices para o caso não-estacionário, e chega a um modelo aerodinâmico de ordem reduzida, obtido a partir da escolha de determinados modos aerodinâmicos. Esta outra abordagem é bastante interessante por reduzir bruscamente o tempo de processamento necessário para realizar uma análise de flutter. Outros métodos para redução de ordem podem ser encontrados nos trabalhos de MARQUES (1997) e SILVA et al. (2001).

Atualmente, o grande avanço na área de computação permitiu o desenvolvimento de técnicas numéricas capazes de simular escoamentos mais complexos, como o regime transônico. Estas técnicas baseiam-se na discretização do fluido ao redor de um determinado corpo, e não na discretização da superfície do corpo, como ocorre nos “métodos de painéis”. Esta nova área ficou conhecida como “dinâmica dos fluidos computacional” e tem recebido grande atenção dos pesquisadores. Os principais avanços e desafios em “dinâmica dos fluidos computacional” podem ser encontrados em JAMESON (1997).

1.5 Modelos aeroelásticos

Os métodos usados na solução de problemas aeroelásticos se dividem em duas grandes categorias: os métodos que tratam o problema no domínio do tempo e os que tratam o problema no domínio da frequência. As vantagens de cada abordagem são mostradas na Figura 1.1 e descritas a seguir. As soluções no domínio da frequência requerem um menor esforço computacional e determinam a velocidade de flutter com maior precisão. Já as soluções no domínio do tempo permitem o conhecimento do comportamento da estrutura para qualquer velocidade de vôo, facilitam a interpretação do fenômeno físico, permitem a inclusão de não-linearidades e são mais adequadas para o projeto de sistemas de controle para supressão do flutter.

As soluções no domínio da frequência tiveram sua origem na formulação aerodinâmica de THEODORSEN (1934). A solução do problema aeroelástico no domínio da frequência consiste na resolução de um problema de autovalor, onde um amortecimento artificial (g) é obtido para cada valor da velocidade do escoamento de ar (V). Colocando-se

estes valores em uma curva, denominada de curva V -g, pode-se visualizar a velocidade de flutter, que corresponde a um amortecimento artificial nulo. Esta metodologia de análise é clássica em aeroelasticidade e pode ser estendida para casos tridimensionais, empregando-se a “teoria das faixas” para estimativa do carregamento aerodinâmico. Pelo fato de cada curva V -g estar associada a um modo de vibrar da estrutura, pode-se encontrar mais de um ponto de flutter nas análises tridimensionais. Obviamente, o ponto de flutter de interesse será o que ocorre com menor velocidade.

Figura 1.1 – Metodologias de análise aeroelástica.

Existem técnicas híbridas, que trabalham nos dois domínios, como a desenvolvida por SILVA (1994). Os coeficientes de influência aerodinâmicos são determinados no domínio da frequência, através da teoria das faixas, e depois convertidos para o domínio do tempo, através da representação por funções racionais. A utilização de funções racionais na representação aerodinâmica envolve constantes de tempo que influem diretamente na qualidade dos resultados. Uma metodologia de otimização destas constantes de tempo é proposta no trabalho de RODRIGUES (1998). A representação no domínio do tempo é útil para o projeto de sistemas de controle para supressão do flutter. No entanto, uma vez que o carregamento aerodinâmico obtido pela formulação de Theodorsen, que também é utilizada na teoria das faixas, é válido apenas na fronteira de instabilidade (THEODORSEN, 1934), o

desempenho do sistema de controle para velocidades abaixo e acima da velocidade crítica não pode ser previsto corretamente.

O uso de técnicas que trabalham nos dois domínios, como a desenvolvida por SILVA (1994), tem sido abandonado, uma vez que a representação do carregamento aerodinâmico no domínio do tempo tem ganhado bastante popularidade, permitindo o desenvolvimento de soluções aeroelásticas puramente no domínio do tempo e adequadas para qualquer velocidade de voo.

A solução ideal para o problema aeroelástico no domínio do tempo é através da solução simultânea das equações estruturais e aerodinâmicas. Como esta abordagem não é prática ainda, a estrutura e a aerodinâmica são tratadas separadamente e acopladas na equação de movimento, que passa a ser resolvida iterativamente, ou seja, para cada instante de tempo calcula-se primeiro o carregamento aerodinâmico e depois as correspondentes deformações estruturais.

Uma complicação adicional que surge na montagem da equação de movimento do sistema aeroelástico é devida ao fato do modelo aerodinâmico e do modelo estrutural serem obtidos utilizando-se métodos de discretização distintos. Para corrigir este problema é necessário desenvolver um esquema de troca de informações entre as malhas. O esquema clássico para este propósito é o método de interpolação por *splines* de superfície, desenvolvido por HARDER & DESMARAIS (1972). Recentemente, outros métodos têm sido testados para esta finalidade, como os descritos por SMITH et al. (2000) e GOURA et al. (2001).

O trabalho de STRGANAC & MOOK (1990) desenvolve um modelo numérico para análise aeroelástica de uma asa no domínio do tempo utilizando o método de malha de vórtices na representação do carregamento aerodinâmico não-estacionário sobre a asa, o mesmo proposto para este trabalho. Segundo STRGANAC & MOOK (1990) a solução no domínio do tempo mostrou-se bastante útil na interpretação física do fenômeno de flutter, permitindo inclusive animações do deslocamento da asa estudada e do escoamento de ar ao redor dela. O trabalho de PREIDIKMAN & MOOK (2000) segue a mesma linha, mas para a análise aeroelástica da asa considera a influência aerodinâmica de todas as partes da aeronave. Os dois trabalhos representam a resposta aeroelástica de uma asa no tempo através das coordenadas modais, para condições abaixo e acima da velocidade crítica. Respostas divergentes indicam a ocorrência do flutter. No trabalho de PREIDIKMAN & MOOK (2000) as curvas de resposta das coordenadas modais são convertidas para o domínio da frequência e evidenciam o acoplamento de frequências característico do fenômeno de flutter.

Outra observação que deve ser feita é que em ambos os trabalhos as respostas encontradas são não-lineares e mostram a ocorrência de ciclos limite. O surgimento destas não-linearidades é atribuído ao comportamento não-linear da esteira gerada pela asa no modelo aerodinâmico. O modelo estrutural é linear em ambos os casos. Ciclos limite também foram obtidos com a utilização de modelos aerodinâmicos lineares acoplados com modelos estruturais não-lineares, como mostrado no trabalho de TANG et al. (1999) e com a utilização de ambos os modelos não-lineares, como mostrado no trabalho de PATIL et al. (2000).

Os modelos numéricos propostos por STRGANAC & MOOK (1990) e PREIDIKMAN & MOOK (2000) foram estendidos para incluir sistemas de controle para supressão do flutter, como descrito nos trabalhos de LUTON & MOOK (1993) e HALL et al. (2000).

1.6 Especificações do método proposto

Sendo o objetivo principal deste trabalho desenvolver um modelo numérico para simular a resposta aeroelástica de asas fixas e visualizar a ocorrência do flutter, a estratégia adotada será a de tratar a dinâmica estrutural e a aerodinâmica separadamente e então acoplá-las na equação de movimento. As características dinâmicas de uma asa protótipo serão obtidas pelo método de elementos finitos e o carregamento aerodinâmico não-estacionário será determinado pelo método de malha de vórtices. O modelo dinâmico-estrutural será acoplado com o modelo aerodinâmico através de um método de interpolação por *splines* de superfície e a equação de movimento será resolvida iterativamente no domínio do tempo, com a utilização de um método preditor-corretor.

1.7 Organização da dissertação

A dissertação está dividida em 6 capítulos, que são descritos resumidamente nesta seção. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução ao problema abordado, o objetivo deste trabalho de pesquisa e a revisão da literatura relacionada com o tema.

O Capítulo 2 apresenta os detalhes do modelo dinâmico-estrutural utilizado, uma descrição estrutural da asa que será utilizada nas simulações aeroelásticas, o modelo da asa em elementos finitos e os resultados obtidos.

O Capítulo 3 apresenta a teoria envolvida no método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária e alguns resultados aerodinâmicos obtidos com a implementação computacional do método.

O Capítulo 4 discute como o modelo dinâmico-estrutural e o modelo aerodinâmico serão acoplados. O método de interpolação por *splines* de superfície é descrito e os resultados de sua implementação são apresentados. O tipo de método preditor-corretor proposto para resolver a equação de movimento é especificado.

O Capítulo 5 apresenta os resultados aeroelásticos obtidos com a implementação do modelo numérico proposto e uma discussão destes resultados.

O Capítulo 6 apresenta as principais conclusões relacionadas com o trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

MODELO DINÂMICO-ESTRUTURAL

2.1 Fundamentos teóricos

As equações de movimento de uma estrutura linear discretizada em N graus de liberdade podem ser representadas, na forma matricial, pela equação (2.1), onde o amortecimento estrutural foi desprezado (CLOUGH & PENZIEN, 1975; MEIROVITCH, 1986).

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{L(x, \dot{x}, t)\} \quad (2.1)$$

As matrizes $[M]$ e $[K]$ são quadradas de ordem N e são denominadas de matrizes de massa e rigidez da estrutura, respectivamente. Os vetores $\{x(t)\}$ e $\{\ddot{x}(t)\}$ têm dimensão $N \times 1$ e representam os deslocamentos e acelerações sofridos pela estrutura devido à aplicação de forças externas $\{L(x, \dot{x}, t)\}$. No caso particular de uma asa de avião, que é a estrutura a ser analisada, $\{L(x, \dot{x}, t)\}$ é o vetor que representa as forças aerodinâmicas sobre a asa. Uma característica importante do vetor de forças aerodinâmicas é que ele não depende somente do tempo, mas também da posição da asa em relação ao escoamento de ar e da velocidade com que as deformações estruturais ocorrem.

Os modos de vibrar e as frequências naturais da estrutura são obtidos da solução do problema de vibrações livres:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.2)$$

Assumindo como solução da equação (2.2) um movimento harmônico simples na forma

$$\{x(t)\} = \{\phi\}e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

onde ω é a frequência do movimento e $\{\phi\}$ é um vetor que representa a forma do movimento, chega-se a

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \quad (2.4)$$

que é um problema de autovalor (MEIROVITCH, 1986).

A única solução não trivial da equação (2.4) é obtida para

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.5)$$

A expansão do determinante da equação (2.5) resulta em uma equação polinomial de ordem N em ω^2 , também conhecida por polinômio característico. As raízes desta equação correspondem aos quadrados das N frequências naturais da estrutura.

As frequências naturais obtidas correspondem então aos autovalores da equação (2.4) e a cada uma delas está associado um autovetor, que representa o modo de vibrar da estrutura. Assim, substituindo-se cada valor de ω na equação (2.4) encontra-se o correspondente modo $\{\phi\}$. No entanto, a equação (2.4) é homogênea e possui infinitas soluções para $\{\phi\}$. Dessa forma as amplitudes dos modos de vibrar são indeterminadas, mas as formas desses modos são únicas, uma vez que $N - 1$ componentes do vetor $\{\phi\}$ podem ser escritas como função de uma outra componente, num processo conhecido por normalização (MEIROVITCH, 1986). Um tipo bem comum de normalização consiste em fazer o maior elemento do vetor $\{\phi\}$ igual a 1.

Com os modos de vibrar determinados pode-se agrupá-los na chamada matriz modal, dada pela equação (2.6).

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \{\phi\}_3 \quad \dots \quad \{\phi\}_N] \quad (2.6)$$

A matriz modal será utilizada como uma matriz de transformação de coordenadas na relação

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi\}_r \eta_r(t) \quad (2.7)$$

onde o vetor $\{\eta(t)\}$ representa os deslocamentos da estrutura em um domínio modal e pode ser entendido como um vetor de coeficientes que determinam a contribuição de cada modo de vibrar na resposta física da estrutura (CLOUGH & PENZIEN, 1975).

Uma vez que a matriz modal $[\Phi]$ é constante, pode-se escrever as relações

$$\{\dot{x}(t)\} = [\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} \quad (2.8)$$

e

$$\{\ddot{x}(t)\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} \quad (2.9)$$

Substituindo-se as equações (2.7) e (2.9) na equação de movimento dada pela equação (2.1) e pré-multiplicando todos os termos obtidos por $[\Phi]^T$ (transposta de $[\Phi]$) chega-se a

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{L(x, \dot{x}, t)\} \quad (2.10)$$

que pode ser reescrita na forma

$$[\bar{M}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\bar{K}]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{L(x, \dot{x}, t)\} \quad (2.11)$$

onde $[\bar{M}] = [\Phi]^T[M][\Phi]$ e $[\bar{K}] = [\Phi]^T[K][\Phi]$ são denominadas de matrizes de massa e rigidez modais, respectivamente.

Uma propriedade importante dos modos de vibrar é a ortogonalidade. Para dois modos de vibrar distintos $\{\phi\}_r$ e $\{\phi\}_s$, verifica-se que as equações (2.12) e (2.13) mostradas a seguir são válidas (MEIROVITCH, 1986). A prova destas equações se baseia no fato das matrizes de massa e rigidez serem simétricas, o que é uma característica de estruturas lineares.

$$\{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_s = 0 \quad (2.12)$$

$$\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_s = 0 \quad (2.13)$$

Com base nas propriedades de ortogonalidade conclui-se que as matrizes $[\bar{M}]$ e $[\bar{K}]$ são diagonais e portanto o sistema de N equações simultâneas representado na equação (2.1) se reduz a N equações de movimento independentes, cada uma representando a equação de movimento de uma estrutura com um único grau de liberdade, cuja solução pode ser

obtida bem mais facilmente. Considerando-se um determinado modo r tem-se então que $\omega_r^2 = \frac{\bar{K}_r}{\bar{M}_r}$. Esta técnica de desacoplamento das equações de movimento é conhecida por superposição modal (CLOUGH & PENZIEN, 1975), uma vez que a resposta física da estrutura é obtida por uma superposição de soluções modais (de acordo com a equação (2.7)).

Utilizando-se um tipo especial de normalização no processo de obtenção dos autovetores, definido na equação (2.14), a matriz de massa modal $[\bar{M}]$ se iguala à matriz identidade e a matriz de rigidez modal se reduz a uma matriz diagonal contendo as frequências naturais ao quadrado. A equação (2.11) pode então ser escrita na forma da equação (2.15).

$$[\Phi] = [\Phi][\bar{M}]^{-1/2} \quad (2.14)$$

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{L(x, \dot{x}, t)\} \quad (2.15)$$

Um outro recurso disponível para simplificar ainda mais a resolução da equação (2.15) consiste em truncar o somatório representado pela equação (2.7) considerando-se apenas alguns modos de vibrar. Desta forma as dimensões das matrizes envolvidas na equação (2.15) podem ser reduzidas consideravelmente, uma vez que apenas alguns modos são necessários para a obtenção de uma solução com boa precisão (CRAIG Jr., 1981).

Observando-se a equação (2.15) conclui-se que para representar a dinâmica de uma estrutura pode ser necessário apenas o conhecimento de suas frequências naturais e de seus modos de vibrar. No entanto, estas características dependem das matrizes de massa e rigidez, que por sua vez são dependentes do processo de discretização adotado para a estrutura. Para estruturas complexas, como é o caso de uma asa de avião, a ferramenta mais utilizada no processo de discretização é o método dos elementos finitos (ZIENKIEWICS, 1986).

O método dos elementos finitos baseia-se na idéia de dividir uma estrutura complexa em pequenos elementos de geometria simples. Cada elemento possui alguns pontos particulares denominados de nós, onde são especificados os graus de liberdade. As relações entre os graus de liberdade de diferentes nós pertencentes a um mesmo elemento são dadas por funções de interpolação características de cada tipo de elemento. Estas funções de interpolação devem satisfazer certos requisitos de compatibilidade, de modo a garantir que a conexão dos diversos elementos reproduza, por exemplo, os deslocamentos da estrutura

global. O conhecimento de como os graus de liberdade variam em toda a estrutura e das características mecânicas dos materiais que a constituem gera um modelo matemático (onde estão incluídas as matrizes de massa e rigidez) capaz de representar a resposta física da estrutura real.

O restante deste capítulo consiste em mostrar resultados de dinâmica estrutural obtidos pelo método dos elementos finitos para a asa que será utilizada nas simulações aeroelásticas.

2.2 Descrição da estrutura

A asa escolhida para as simulações aeroelásticas faz parte da aeronave projetada pelos alunos da EESC/USP para participar da Competição Internacional SAE de AeroDesign[®], que aconteceu no início de abril de 2000, na Florida, EUA. Detalhes sobre a competição podem ser encontrados em SAE AERODESIGN[®] (2001). A aeronave pode ser vista na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Aeronave projetada pelos alunos da EESC/USP.

A asa tem formato retangular e suas dimensões são mostradas na Figura 2.2. A estrutura consiste de um núcleo de Styrofoam[™] revestido por uma casca de materiais compósitos. Esta casca é de Kevlar[™] bi-direcional, em orientação $\pm 45^\circ$, reforçada por longarinas de carbono unidirecionais, de acordo com a Figura 2.3. As longarinas de carbono possuem largura constante e espessura variando de três camadas de tecido na raiz da asa para uma camada na ponta. O aerofólio é um Selig S1223. As propriedades mecânicas dos materiais utilizados são listadas na Tabela 2.1.

Figura 2.2 – Dimensões da asa.

Figura 2.3 – Esquema estrutural da asa.

Tabela 2.1 – Propriedades mecânicas dos materiais da asa (EESC/USP TEAM, 2000).

	Kevlar TM	Carbono	Styrofoam TM
Módulo Elasticidade 0° (GPa)	31	134	20×10^{-3}
Módulo Elasticidade 90° (GPa)	31	11	—
Módulo Elasticidade Transversal (GPa)	2	5	$4,5 \times 10^{-3}$
Densidade (kg/m ³)	3452	4082	42

2.3 Modelo em elementos finitos

Um modelo em elementos finitos da semi-asa foi gerado utilizando-se o *software* ANSYS[®]. Dois tipos de elementos foram utilizados: um elemento quadrilátero de casca laminada para os compósitos, com oito nós e seis graus de liberdade por nó, e um elemento tetraédrico para o núcleo de StyrofoamTM, com dez nós e três graus de liberdade por nó (Figura 2.4). A malha de elementos finitos na semi-asa é mostrada na Figura 2.5. Ela consiste de 5533 elementos, sendo 1400 para os compósitos e 4133 para o StyrofoamTM, totalizando 7124 nós. A explicação para uma malha tão refinada está no fato do mesmo modelo ter sido utilizado em análises estáticas, que requerem um maior detalhamento da

estrutura. A condição de contorno utilizada foi o engaste de todos os nós da raiz da semi-asa. O problema de autovalor foi resolvido pelo método de subespaços (SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC[©], 1997b).

Figura 2.4- Elementos utilizados na análise (SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC. [©],1997a).

Figura 2.5 – Malha de elementos finitos sobre a semi-asa.

Os valores das sete primeiras frequências naturais são mostrados na Tabela 2.2, juntamente com a descrição de cada modo de vibrar. As formas dos modos podem ser vistas nas Figuras 2.6 a 2.12.

Resultados para a asa inteira, em condição livre-livre, são encontrados no trabalho de MARQUES et al. (2001), onde a mesma técnica de modelagem por elementos finitos foi utilizada, porém com uma malha mais grosseira. Neste mesmo trabalho (MARQUES et al. (2001)), os resultados dos dois primeiros modos de flexão e do primeiro modo de torção foram comparados com valores obtidos experimentalmente e mostraram uma boa correlação, o que garante grande confiabilidade para os resultados fornecidos neste capítulo.

Tabela 2.2 – Frequências naturais e descrição dos modos de vibrar.

Modo	Frequência (Hz)	Descrição
1	12,77	1ª flexão vertical
2	25,59	1ª flexão lateral
3	54,45	2ª flexão vertical + torção
4	63,62	1ª torção
5	122,74	3ª flexão vertical
6	135,92	2ª flexão lateral + torção
7	174,74	2ª torção

Figura 2.6 – Forma do primeiro modo de vibrar.

Figura 2.7 – Forma do segundo modo de vibrar.

Figura 2.8 – Forma do terceiro modo de vibrar.

Figura 2.9 – Forma do quarto modo de vibrar.

Figura 2.10 – Forma do quinto modo de vibrar.

Figura 2.11 – Forma do sexto modo de vibrar.

Figura 2.12 – Forma do sétimo modo de vibrar.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DE MALHA DE VÓRTICES PARA AERODINÂMICA NÃO-ESTACIONÁRIA

3.1 Equações básicas

O método de malha de vórtices foi inicialmente desenvolvido para as condições de escoamento potencial, incompressível e estacionário. Este tipo de escoamento é descrito por duas equações básicas: a equação de Bernoulli e a equação de Laplace. A equação de Bernoulli (equação 3.1) é obtida a partir da equação da quantidade de movimento, para um escoamento que por hipótese é invíscito, incompressível, irrotacional, estacionário e não sofre ação de forças de campo. Ela representa que a soma da pressão estática (p) com a pressão dinâmica ($\frac{1}{2}\rho\vec{V}^2$) em qualquer ponto do escoamento é constante.

$$p + \frac{1}{2}\rho\vec{V}^2 = \text{constante} \quad (3.1)$$

A equação de Laplace (equação 3.2) é obtida a partir da equação da continuidade, para um escoamento que por hipótese é incompressível e irrotacional, e escrita em função do potencial de velocidades ϕ , definido na equação (3.3).

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{V} = \nabla\phi \quad (3.3)$$

A solução deste tipo de escoamento envolve primeiro a determinação do campo de velocidades, aplicando a equação de Laplace e, em seguida, a determinação do campo de pressões, através da equação de Bernoulli. A integração do campo de pressões fornece os esforços aerodinâmicos sobre o corpo em estudo.

A dedução das equações da quantidade de movimento e da continuidade a partir dos princípios físicos e os passos detalhados para a obtenção das equações de Bernoulli e Laplace são mostrados de maneira bem didática em ANDERSON (1991).

3.2 Soluções da equação de Laplace

A equação de Laplace tem quatro soluções básicas para o caso bidimensional. São elas: fluxo uniforme, fonte (ou sumidouro), dipólo e vórtice. A representação das linhas de corrente para cada solução pode ser vista na Tabela 3.1, juntamente com as respectivas expressões matemáticas para as velocidades ao longo das linhas de corrente. Nestas expressões, o termo u representa a velocidade em um sistema de coordenadas cartesianas; os termos V_r e V_θ representam as velocidades radial e tangencial, em um sistema de coordenadas cilíndrico; os termos Λ , κ e Γ representam as intensidades da fonte, do dipólo e do vórtice; e o termo h representa a distância de um ponto em relação ao centro. O sumidouro é a representação contrária da fonte, ou seja, ao invés das linhas de corrente saírem de um ponto central, elas chegam ao ponto central. Uma discussão mais detalhada sobre estas soluções pode ser encontrada em ANDERSON (1991).

Tabela 3.1 – Soluções bidimensionais básicas da equação de Laplace.

Fluxo Uniforme	Fonte(ou Sumidouro)	Dipólo	Vórtice

$u = V_\infty$	$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi h}$	$V_r = -\frac{\kappa \cos \theta}{2\pi h^2}$ $V_\theta = -\frac{\kappa \sin \theta}{2\pi h^2}$	$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi h}$

3.2.1 Superposição das soluções elementares e o teorema de Kutta-Joukowski

O fato mais importante a se observar é que a equação de Laplace é linear, o que garante que a soma de qualquer uma das soluções descritas anteriormente seja também uma solução.

Um exemplo clássico é a representação do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro pela superposição do fluxo uniforme com o dipólo (Figura 3.1). A adição do

vórtice representa o cilindro com sustentação (Figura 3.2), o que pode ser verificado experimentalmente colocando-se um cilindro para girar em torno de seu eixo em um túnel de vento. Neste caso, a força de sustentação ($\vec{R}'$), dada por unidade de envergadura, é a força aerodinâmica resultante atuando sobre o cilindro e está relacionada com a intensidade da circulação Γ do vórtice pelo teorema de Kutta-Joukowski (equação 3.4), deduzido a partir das equações de Laplace e Bernoulli (ANDERSON, 1991).

$$\vec{R}' = \rho \vec{V}_{\infty} \times \vec{\Gamma} \quad (3.4)$$

O teorema de Kutta-Joukowski aplica-se também para corpos arbitrários, como um aerofólio. A extensão do teorema para corpos arbitrários pode ser mostrada com a utilização de variáveis complexas (KATZ & PLOTKIN, 1991).

Figura 3.1 – Representação do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro.

Figura 3.2 - Representação do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro com sustentação.

É importante observar que, no caso do cilindro, partiu-se da soma de soluções elementares e chegou-se à representação do escoamento ao redor do corpo. No entanto, esta metodologia não é prática para geometrias arbitrárias. O que deve ser feito é especificar primeiro a geometria e depois encontrar a distribuição de singularidades correspondente, através da aplicação de condições de contorno, que são duas: (1) a uma distância infinita do corpo, em todas as direções, o escoamento apresenta condição de fluxo uniforme e (2) o

escoamento não penetra na superfície sólida do corpo, isto é, a velocidade é tangente à superfície (equação 3.5).

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = (\nabla \phi) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.5)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície.

3.3 A condição de Kutta e o teorema de circulação de Kelvin

Para o estudo do escoamento de ar ao redor de um aerofólio considerações adicionais precisam ser feitas para complementar a teoria, que são a condição de Kutta e o teorema de circulação de Kelvin.

Mostrou-se pelo teorema de Kutta-Joukowski que a sustentação está diretamente relacionada com a circulação. No caso do cilindro circular, por exemplo, um número infinito de valores de sustentação é possível, dependendo da velocidade de rotação do cilindro. No caso de um aerofólio, um número infinito de valores de sustentação também seria teoricamente possível, como pode ser observado na Figura 3.3 para dois valores de circulação distintos. Entretanto o que se observa a partir de experimentos em túnel de vento é que apenas a situação representada por Γ_b ocorre, ou seja, que existe um único valor de sustentação para cada ângulo de ataque, contrariando a teoria. Para adequar a teoria aos resultados experimentais deve-se impor que a intensidade do vórtice (Γ) no bordo de fuga (BF) seja nula, o que é conhecido por condição de Kutta (equação 3.6).

Figura 3.3 - Representação das linhas de corrente ao redor de um aerofólio para dois valores distintos de circulação.

$$\Gamma(\text{BF}) = 0 \quad (3.6)$$

A geração de circulação ao redor de um aerofólio pode ser explicada pelo teorema de circulação de Kelvin (equação 3.7), que expressa que a circulação é conservada, ou seja, ao longo de curvas contendo os mesmos elementos de fluido a variação da circulação com o tempo é zero (ANDERSON, 1991).

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + v \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

onde u , v e w são as componentes do vetor velocidade e x , y e z são as coordenadas espaciais.

O teorema de circulação de Kelvin pode ser ilustrado considerando-se um aerofólio inicialmente imerso em um fluido em repouso. Quando o fluido começa a movimentar-se, ele tende a contornar o bordo de fuga do aerofólio, como está indicado no lado esquerdo da Figura 3.3. Esta tendência no entanto é instável, fazendo com que o fluido se desprenda do aerofólio e gere o chamado vórtice inicial, que está representado na Figura 3.4. Existe uma circulação Γ_2 associada ao vórtice inicial e, para garantir que a equação (3.7) seja satisfeita, uma circulação de mesma intensidade e sentido oposto deve ser associada ao aerofólio, como pode ser visto na Figura 3.4.

Figura 3.4- Representação do vórtice inicial e da geração de circulação ao redor do aerofólio.

3.4 O problema das asas finitas

As discussões anteriores concentraram-se em problemas bidimensionais, como o escoamento ao redor de aerofólios. Esta seção tratará de escoamentos tridimensionais ao redor de asas finitas. A diferença de pressão entre a superfície inferior e superior da asa gera um fluxo de ar, próximo às pontas de asa, da superfície inferior para a superior, formando redemoinhos que são denominados por vórtices de ponta de asa. Estes vórtices de ponta de asa (redemoinhos) induzem por sua vez um fluxo de ar para baixo, denominado de *downwash*. A velocidade de *downwash* é representada pelo símbolo w . Esta velocidade induzida combina-se com a velocidade do fluxo livre, resultando em uma velocidade relativa, que atingirá a asa.

Observando a Figura 3.5 pode-se verificar que a velocidade relativa forma um ângulo α_i com a velocidade do fluxo livre, chamado de ângulo de ataque induzido. O escoamento chega então a uma seção local do aerofólio com um ângulo de ataque menor que o ângulo de ataque geométrico α , denominado de ângulo de ataque efetivo e dado pela equação (3.8).

$$\alpha_{ef} = \alpha - \alpha_i \quad (3.8)$$

Ainda de acordo com a Figura 3.5, o vetor da força resultante R , que é perpendicular à velocidade relativa, pode ser decomposto em duas componentes: uma perpendicular e outra paralela à velocidade do fluxo livre. A componente perpendicular representa a força de sustentação e a paralela representa uma força de arrasto, denominada de arrasto induzido.

Figura 3.5 - Efeito do *downwash* em uma seção local de aerofólio.

O valor da força resultante R é obtido da relação de Kutta-Joukowski (equação (3.4)). Assumido um ângulo de ataque α_i pequeno, as forças de sustentação e arrasto induzido são dadas pelas equações (3.9) e (3.10), respectivamente.

$$L = R \cos \alpha_i \stackrel{\cos \alpha_i \approx 1}{\Rightarrow} L = R \quad (3.9)$$

$$D_i = R \sin \alpha_i \stackrel{\sin \alpha_i \approx \alpha_i}{\Rightarrow} R \alpha_i \quad (3.10)$$

Conhecidas as diferenças entre a aerodinâmica de um aerofólio e de uma asa finita, pode-se descrever algumas ferramentas úteis para o desenvolvimento da teoria aerodinâmica aplicada a asas finitas, que são apresentadas na próxima seção.

3.5 A lei de Biot-Savart, os teoremas de Helmholtz e a linha de sustentação de Prandtl

A velocidade induzida por um segmento de vórtice $d\vec{l}$ em um ponto arbitrário P é calculada pela lei de Biot-Savart (equação (3.11)), de acordo com a Figura 3.6.

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.11)$$

Figura 3.6 – Lei de Biot-Savart aplicada a um segmento de vórtice (ANDERSON, 1991).

O campo de velocidades induzido por um segmento de vórtice é também uma solução da equação de Laplace e será utilizado para representar o escoamento ao redor de uma asa finita. Observa-se que a utilização da lei de Biot-Savart satisfaz a primeira condição

de contorno enunciada na Seção 3.2.1, ou seja, a uma distância infinita do corpo ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$) o escoamento não sofre nenhuma perturbação.

O alemão Helmholtz foi o primeiro a usar o conceito do segmento de vórtice em análises aerodinâmicas e estabeleceu três teoremas:

- 1) A intensidade de um segmento de vórtice é constante ao longo do seu comprimento.
- 2) Um segmento de vórtice não pode terminar em um fluido, devendo se estender até o infinito ou formar uma trajetória fechada.
- 3) Um segmento de vórtice não se destrói com o tempo e sua intensidade permanece sempre a mesma.

A idéia de se utilizar os segmentos de vórtice na análise aerodinâmica de asas finitas pode ser ilustrada com o conceito do vórtice-ferradura, que consiste na representação de uma asa finita por um segmento de vórtice fixo no espaço, de comprimento e direção iguais à envergadura da asa, e por dois segmentos de vórtice partindo das pontas da asa e se estendendo até o infinito. Ao segmento de vórtice da envergadura está associada a força aerodinâmica resultante, dada pelo teorema de Kutta-Joukowski. Os dois filamentos de vórtice que se estendem até o infinito estão de acordo com o teorema de Helmholtz, que diz que um filamento de vórtice não pode acabar em um fluido, e representam o efeito de *downwash*. A teoria da linha de sustentação de Prandtl, que é clássica em aerodinâmica, consiste na superposição de infinitos vórtices-ferradura, com diferentes comprimentos ao longo da envergadura (Figura 3.7), para representar a variação da circulação ao redor de uma asa.

Figura 3.7 – Esquema da linha de sustentação de Prandtl.

3.6 Velocidade induzida por um segmento de vórtice reto

No caso de um segmento de vórtice reto, indo do ponto 1 ao ponto 2, como mostrado na Figura 3.8, pode-se reescrever a lei de Biot-Savart na forma da equação (3.12), onde o vetor $\vec{e}$ representa a direção da velocidade induzida. Da Figura 3.8 tiram-se as relações (3.13), (3.14) e (3.15), que substituídas na equação (3.12) e integradas de 1 a 2 fornecem a equação (3.16).

Figura 3.8 – Segmento de vórtice reto e variáveis associadas (KATZ & PLOTKIN, 1991).

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \beta}{|\vec{r}|^2} |d\vec{l}| \vec{e} \quad (3.12)$$

$$|\vec{r}| = \frac{h}{\sin \beta} \quad (3.13)$$

$$|d\vec{l}| = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \quad (3.14)$$

$$|d\vec{l}| = -\frac{h}{\sin^2 \beta} d\beta \quad (3.15)$$

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \vec{e} \quad (3.16)$$

Do ponto de vista numérico é conveniente escrever a equação (3.16), que expressa a velocidade induzida, em função dos vetores posição. Aplicando o produto escalar obtêm-se as equações (3.17) e (3.18).

$$\cos \beta_1 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_1|} \quad (3.17)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_2|} \quad (3.18)$$

O produto vetorial fornece a equação (3.19). Uma vez que $\vec{r}_0 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, de acordo com a Figura 3.8, a equação (3.19) pode ser reescrita na forma (3.20).

$$\begin{aligned} \Rightarrow h &= \frac{|\vec{r}_0 \times \vec{r}_1|}{|\vec{r}_0|} \\ \vec{r}_0 \times \vec{r}_1 &= |\vec{r}_0| |\vec{r}_1| \sin \beta_1 \vec{e} = |\vec{r}_0| h \vec{e} \\ \Rightarrow \vec{e} &= \frac{\vec{r}_0 \times \vec{r}_1}{|\vec{r}_0| h} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_0|} \\ \vec{e} &= \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_0| h} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo as equações (3.17), (3.18) e (3.20) na equação (3.16), obtêm-se uma expressão para a velocidade induzida (equação (3.21)) em função dos vetores posição ($\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$) e da intensidade do segmento de vórtice (Γ).

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \quad (3.21)$$

3.7 O método de malha de vórtices

O método de malha de vórtices tem origem na teoria da superfície de sustentação, que é uma extensão da teoria da linha de sustentação de Prandtl e consiste na disposição de várias linhas de sustentação em diferentes estações ao longo da corda.

No método de malha de vórtices, a superfície de sustentação, que não tem espessura, é dividida em elementos quadriláteros, denominados de painéis, como pode ser observado na Figura 3.9. Do ponto de vista numérico a geometria dos painéis é armazenada com o auxílio dos contadores i e j , de tal forma que fornecendo o número de painéis ao longo da corda e da envergadura, assumindo que eles sejam igualmente espaçados em cada estação da corda e da envergadura e fornecendo a geometria da asa, as coordenadas dos vértices de cada painel são automaticamente identificadas.

A cada painel está associado um anel de vórtice. O segmento frontal de cada anel de vórtice é localizado a um quarto da linha de corda de cada painel e o ponto de controle, onde se aplica a condição de contorno, a três quartos, correspondendo ao centro de cada anel de vórtice (Figura 3.9). O sentido de Γ positivo é definido pela regra da mão direita, como mostrado na Figura 3.10 e os vetores normais $\vec{n}_K$ são definidos de acordo com a equação (3.22), com os vetores $\vec{A}_K$ e $\vec{B}_K$ definidos na Figura 3.11. É importante enfatizar que os anéis de vórtice utilizados neste trabalho são planos e, no caso de superfícies com curvatura acentuada, não representarão a geometria exata, necessitando de uma malha mais fina.

Figura 3.9 - Discretização da asa (KATZ & PLOTKIN, 1991).

Figura 3.10 – Definição do sentido positivo para a circulação em cada segmento do anel de vórtice (KATZ & PLOTKIN, 1991).

$$\vec{n}_K = \frac{\vec{A}_K \times \vec{B}_K}{|\vec{A}_K \times \vec{B}_K|} \quad (3.22)$$

Figura 3.11 – Definição do vetor normal (KATZ & PLOTKIN, 1991).

3.7.1 Cálculo dos coeficientes de influência

Para garantir que a condição de escoamento normal nulo sobre a superfície sólida seja satisfeita (equação 3.5), a soma das componentes normais da velocidade induzida pelos anéis de vórtice posicionados sobre a asa, pela esteira e pelo fluxo livre, deve ser nula em cada ponto de controle. A velocidade induzida por cada segmento dos anéis de vórtice é dada pela equação (3.21), e a velocidade induzida por cada anel de vórtice corresponde à soma das velocidades induzidas pelos segmentos que compõem o anel.

No caso de um escoamento de ar simétrico, ou seja, com componentes paralelas ao plano de simetria da asa (correspondente ao plano de simetria do avião), o esforço computacional pode ser reduzido modelando-se apenas meia asa (KATZ & PLOTKIN,

1991). Os efeitos da outra metade são considerados calculando-se a velocidade induzida pela imagem (em relação ao plano de simetria) de cada anel de vórtice. As componentes da velocidade induzida por cada par de anéis de vórtice (o anel considerado + a sua imagem) são dadas pela soma das componentes de cada anel paralelas ao plano de simetria e pela subtração da componente, de cada anel, perpendicular ao plano de simetria. Um caso particular em que se pode usar esta mesma técnica é a simulação do efeito solo, considerando-se o plano de simetria correspondendo ao solo (KATZ & PLOTKIN, 1991).

O cálculo da velocidade induzida pelos anéis de vórtice posicionados sobre a semi-asa e pelas suas imagens em todos os pontos de controle é feito pelo processo de varredura indicado na Figura 3.12, onde M é o número de painéis ao longo da corda e N ao longo da semi-envergadura. Para cada ponto de controle K (que varia de 1 a $M \times N$), o contador L também varia de 1 a $M \times N$. A leitura dos pontos de controle K também é feita pela mesma seqüência mostrada na Figura 3.12.

A velocidade induzida $\vec{V}_{KL}$ representa a velocidade induzida pelo anel de vórtice L sobre o ponto de controle K somada com a velocidade induzida pela sua imagem sobre o mesmo ponto de controle. Quando o anel de vórtice L está localizado no bordo de fuga, a intensidade do seu segmento de vórtice traseiro deve-se anular ao longo da envergadura, para satisfazer a condição de Kutta tridimensional (equação 3.6). Isto é feito com a adição de um anel de vórtice de mesma intensidade, representando a esteira (Figura 3.13). Para o caso estacionário a velocidade induzida pelo anel de vórtice da esteira é calculada e somada com a velocidade induzida pelo elemento L em questão, localizado no bordo de fuga. Para o cálculo da velocidade induzida pela esteira, no entanto, é preciso conhecer sua geometria, que será discutida mais adiante na Seção 3.7.2. Se a técnica das imagens descrita anteriormente for utilizada, a influência da imagem da esteira também precisa ser considerada.

Figura 3.12 - Processo de varredura para cálculo da velocidade induzida (KATZ & PLOTKIN, 1991).

Figura 3.13 – Anel de vórtice da esteira satisfazendo a condição de Kutta (KATZ & PLOTKIN, 1991).

Aplicando a condição de contorno para o ponto de controle $K=1$ pode-se escrever a equação (3.23), onde a circulação de cada anel de vórtice é desconhecida e $m = M \times N$ é o número de painéis utilizados na discretização da semi-asa. A partir da equação (3.23) são definidos os chamados coeficientes de influência (equação 3.24). Escrevendo a equação (3.23) em função dos coeficientes de influência para cada um dos m pontos de controle e passando a velocidade normal induzida pelo fluxo livre para o lado direito da equação, uma vez que ela já é conhecida, chega-se ao sistema de equações lineares representado na equação (3.25).

Uma vez que a influência de um painel nele mesmo é a maior, a matriz dos coeficientes de influência terá uma diagonal dominante, o que garante uma solução estável. O sistema linear pode então ser resolvido por métodos numéricos convencionais, sendo que o método de eliminação de Gauss foi o escolhido para este trabalho.

$$(\vec{V}_{11}\Gamma_1 + \vec{V}_{12}\Gamma_2 + \vec{V}_{13}\Gamma_3 + \dots + \vec{V}_{1m}\Gamma_m + \vec{V}_\infty) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (3.23)$$

$$a_{KL} = \vec{V}_{KL} \cdot \vec{n}_K \quad (3.24)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{pmatrix} = -\vec{V}_\infty \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vdots \\ \vec{n}_m \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.7.2 Geometria da esteira

A distinção entre os anéis de vórtice localizados na asa e os localizados na esteira é que estes últimos não representam forças aerodinâmicas. Considerando-se o teorema de Kutta-Joukowski (equação 3.4), a força aerodinâmica resultante em cada painel da esteira só será nula se o produto vetorial $\vec{V}_{rel} \times \vec{\Gamma}$ for nulo, ou seja, se o vetor que representa a circulação for paralelo ao vetor da velocidade relativa. É importante observar que em cada anel de vórtice existem quatro direções possíveis para o vetor que representa a circulação, uma associada a cada segmento de vórtice, de acordo com a regra da mão direita (Figura 3.10). Desses quatro vetores, apenas dois podem ser utilizados para satisfazer a condição de produto vetorial nulo descrita acima: são os vetores que têm a mesma direção que a corda da asa. Esta é uma condição difícil de ser satisfeita, uma vez que a direção da velocidade relativa depende diretamente do valor de *downwash*, que é calculado a partir da geometria da esteira, que ainda é desconhecida.

O que é feito no caso estacionário é especificar a forma da esteira baseando-se na intuição ou em visualizações do escoamento em experimentos de túnel de vento. Um exemplo da influência da escolha da geometria da esteira na solução é mostrado na Figura 3.14, onde os resultados de C_L e C_D foram obtidos para uma asa retangular com arqueamento de perfil e alongamento de 1,5. Segundo KATZ & PLOTKIN (1991), os resultados obtidos com a geometria da esteira mostrada no caso *c* foram os que mais se aproximaram dos resultados experimentais para a asa em questão.

Figura 3.14 – Efeito da geometria da esteira nos cálculos aerodinâmicos (KATZ & PLOTKIN, 1991).

3.7.3 Cálculo do carregamento aerodinâmico

A força de sustentação em cada painel pode ser obtida a partir dos valores de circulação obtidos da solução da equação (3.25), utilizando-se as equações (3.4) e (3.9). Para os painéis localizados no bordo de ataque escreve-se a equação (3.26a). A multiplicação por $\Delta b_{i,j}$ é necessária uma vez que o teorema de Kutta-Joukowski fornece a força de sustentação por unidade de comprimento. Para os outros painéis utiliza-se a equação (3.26b).

$$\Delta L_{i,j} = \rho V_{\infty} \Gamma_{i,j} \Delta b_{i,j}, i = 1 \quad (3.26a)$$

$$\Delta L_{i,j} = \rho V_{\infty} (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta b_{i,j}, i > 1 \quad (3.26b)$$

Para análises aeroelásticas, no entanto, é necessário conhecer a força normal que atua em cada painel. Esta força normal pode ser obtida a partir da força de sustentação, através da relação trigonométrica mostrada na equação (3.27), que está de acordo com a Figura 3.15.

$$N = L \cos \alpha \quad (3.27)$$

Figura 3.15 – Decomposição da força normal nas forças de sucção e sustentação.

A metodologia de obtenção da força de arrasto induzido não será discutida neste trabalho, uma vez que esta força não será utilizada na análise aeroelástica, mas pode ser encontrada, por exemplo, em KATZ & PLOTKIN (1991).

3.8 O caso não-estacionário

Até este ponto, a análise concentrou-se em escoamentos estacionários. A teoria envolvida no método de malha de vórtices foi desenvolvida partindo-se das equações de Laplace e Bernoulli. Apesar destas equações não considerarem termos dependentes do

tempo, algumas modificações permitem que o método de malha de vórtices seja aplicado na análise de escoamentos não-estacionários. Estas modificações serão discutidas nesta seção e são:

- alteração da condição de contorno de escoamento normal nulo;
- modificação da equação de Bernoulli;
- construção de um modelo não-estacionário para a esteira.

3.8.1 Sistemas de coordenadas

O tratamento de movimentos dependentes do tempo torna a seleção do sistema de coordenadas muito importante. É conveniente descrever o movimento não-estacionário da superfície, onde a condição de escoamento normal nulo é aplicada, por um sistema de coordenadas fixo ao corpo (x, y, z) , conforme mostrado na Figura 3.16. O movimento da origem O deste sistema (x, y, z) é descrito em função de um sistema de coordenadas inercial (X, Y, Z) e é assumido conhecido. Será assumido que no tempo $t = 0$ os dois sistemas coincidem. Desta forma, para $t > 0$, o movimento da origem O será descrito pelo vetor $\vec{R}_0(t)$ (equação (3.28)) e pela orientação instantânea do sistema (x, y, z) , dada por $\vec{\Theta}(t)$ (equação (3.29)).

$$\vec{R}_0(t) = (X_0(t), Y_0(t), Z_0(t)) \quad (3.28)$$

$$\vec{\Theta}(t) = (\phi(t), \theta(t), \psi(t)) \quad (3.29)$$

Figura 3.16 - Sistemas de coordenadas (KATZ & PLOTKIN, 1991).

3.8.2 A condição de contorno para o caso não-estacionário

No caso não-estacionário a equação de Laplace continuará a ser utilizada para a determinação do campo de velocidades. Embora a equação de Laplace não dependa diretamente do tempo, a dependência temporal será introduzida através da condição de contorno, como será visto adiante.

A equação de Laplace é válida para os dois sistemas de coordenadas mostrados na Figura 3.16, como é provado em KATZ & PLOTKIN (1991), mas sua solução é facilitada se a condição de contorno de escoamento normal nulo for aplicada no sistema de coordenadas fixo ao corpo. Desta forma, pode-se escrever a condição de contorno para cada instante de tempo de acordo com a equação (3.30), onde o gradiente do potencial de velocidades ϕ representa a velocidade induzida pela asa e pela esteira e o termo $\vec{v}$ representa a velocidade devido ao movimento da asa, dada pela equação (3.31). Os termos da equação (3.31) são descritos a seguir: $\vec{V}_0$ representa a velocidade instantânea da origem O , $\vec{\Omega}$ representa a velocidade angular instantânea do sistema (x, y, z) e $\vec{v}_{rel}$ representa a velocidade instantânea de movimento da asa em relação ao sistema (x, y, z) , onde está incluída a velocidade das deformações estruturais.

$$(\nabla \phi + \vec{v}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.30)$$

$$\vec{v} = -\left[\vec{V}_0 + \vec{v}_{rel} + \vec{\Omega} \times \vec{R}_0\right] \quad (3.31)$$

Em síntese, o que é feito para tratar o caso não-estacionário é modificar a condição de contorno para cada intervalo de tempo da simulação.

3.8.3 Modelo da esteira

No caso não-estacionário os anéis de vórtice da semi-asa são posicionados em $t = 0$ e os anéis de vórtice da esteira são gerados a cada intervalo de tempo, de acordo com a Figura 3.17. Os valores de circulação dos últimos anéis de vórtice da esteira gerados são iguais aos valores de circulação dos anéis de vórtice da semi-asa localizados no bordo de fuga, para satisfazer a condição de Kutta tridimensional (Figura 3.13). Assim, a cada instante de tempo novos anéis de vórtice da esteira são gerados e os correspondentes valores de circulação

determinados. É importante enfatizar que os valores de circulação obtidos para cada anel de vórtice da esteira permanecem os mesmos durante todo o tempo da simulação (o que está de acordo com o terceiro teorema de Helmholtz).

Conforme foi discutido na Seção 3.7.2, os anéis de vórtice da esteira devem se alinhar com a velocidade relativa local, para que a força aerodinâmica no anel seja nula. No caso estacionário é difícil se satisfazer esta condição e então uma geometria pré-determinada é assumida para a esteira. Já no caso não-estacionário uma posição pré-determinada é assumida apenas para os últimos anéis de vórtice da esteira gerados. A posição de todos os anéis de vórtice da esteira gerados anteriormente é corrigida a cada intervalo de tempo, a partir dos valores da velocidade induzida pela asa e pela esteira, de acordo com a equação (3.32).

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (u, v, w)_i \Delta t \quad (3.32)$$

Figura 3.17 - Anéis de vórtice da esteira gerados a cada intervalo de tempo (KATZ & PLOTKIN, 1991).

3.8.4 Montagem do sistema de equações lineares

A aplicação da condição de contorno para o caso não-estacionário (equação (3.30)) gera um sistema de equações análogo ao da equação (3.25). A matriz dos coeficientes de influência representará as velocidades normais induzidas pelos anéis de vórtice da asa sobre

os pontos de controle e o lado direito do sistema representará as velocidades induzidas pela esteira e as velocidades devido ao movimento da asa ($\vec{v}$). As velocidades induzidas pelos anéis de vórtice da esteira também são calculadas pela equação (3.21), utilizando-se os valores de circulação já conhecidos. Assim, o lado direito (LD) do sistema para cada ponto de controle pode ser escrito na forma da equação (3.33), onde $[U, V, W]_K$ são as componentes da velocidade devido ao movimento da asa sobre o ponto de controle K , incluindo a velocidade das deformações estruturais, e $[u_w, v_w, w_w]_K$ são as componentes da velocidade induzida pela esteira (*wake*) sobre o ponto de controle K . Com o sistema linear montado, o próximo passo é resolvê-lo para encontrar os valores de circulação associados aos anéis de vórtice da asa.

$$LD_K = -[U + u_w, V + v_w, W + w_w]_K \cdot \vec{n}_K \quad (3.33)$$

3.8.5 A equação de Bernoulli modificada e o cálculo do carregamento aerodinâmico

Na Seção 3.1 mostrou-se a equação de Bernoulli para escoamento potencial, incompressível e estacionário (equação 3.1). A equação de Bernoulli para tratar o caso não-estacionário é deduzida em KATZ & PLOTKIN (1991) e é mostrada na equação (3.34), onde os subscritos 1 e 2 referem-se a dois pontos distintos do escoamento.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\vec{V}_1^2}{2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\vec{V}_2^2}{2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_2 \quad (3.34)$$

Fazendo com que os pontos 1 e 2 da equação (3.34) representem os lados superior (*u-upper*) e inferior (*l-lower*) dos anéis de vórtice, respectivamente, pode-se escrever a equação (3.35).

$$\frac{p_l - p_u}{\rho} = \frac{\vec{V}_u^2}{2} - \frac{\vec{V}_l^2}{2} + \frac{\partial \phi_u}{\partial t} - \frac{\partial \phi_l}{\partial t} \quad (3.35)$$

Os dois últimos termos da equação (3.35) é que caracterizam o caso não-estacionário. A diferença entre eles é dada pela equação (3.36), obtida da definição de circulação.

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial t} - \frac{\partial \phi_l}{\partial t} = \frac{\partial(\phi_u - \phi_l)}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t-1)}{\Delta t} \quad (3.36)$$

Se $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$, a equação (3.35) se reduz à equação de Bernoulli para o caso estacionário e a diferença de pressão é dada pela equação (3.37).

$$\Delta p = \rho \left(\frac{\bar{V}_u^2}{2} - \frac{\bar{V}_l^2}{2} \right) \quad (3.37)$$

Esta diferença de pressão multiplicada pela área do painel fornece a força normal atuante sobre o painel. A força normal para o caso estacionário é obtida pela equação (3.27), a partir do teorema de Kutta-Joukowski, e a diferença de pressão correspondente é dada pela equação (3.38), onde S é a área do painel.

$$\Delta p = \frac{\rho V_\infty \Gamma \Delta b \cos \alpha}{S} \quad (3.38)$$

Igualando-se as equações (3.37) e (3.38) chega-se à equação (3.39).

$$\frac{\bar{V}_u^2}{2} - \frac{\bar{V}_l^2}{2} = \frac{V_\infty \Gamma \Delta b \cos \alpha}{S} \quad (3.39)$$

Substituindo-se as equações (3.39) e (3.36) na equação (3.35), chega-se à equação (3.40), que representa a diferença de pressão escrita em função dos valores de circulação obtidos da resolução do sistema de equações lineares descrito na Seção 3.8.4.

$$\frac{p_l - p_u}{\rho} = \frac{V_\infty \Gamma \Delta b \cos \alpha}{S} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (3.40)$$

É importante lembrar que o valor da circulação Γ para os painéis localizados no bordo de ataque é dado por Γ_{ij} , enquanto para os outros painéis é dado por $(\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j})$, conforme foi apresentado na Seção 3.7.3.

3.9 Procedimento de implementação do método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária

Um algoritmo para implementação do método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária é apresentado na Figura 3.18. O primeiro passo é a determinação da geometria da asa e de como ela será discretizada. Depois são fornecidas informações sobre a trajetória de voo e, no caso de análises aeroelásticas, sobre as deformações estruturais sofridas. Calcula-se então os coeficientes de influência e o lado direito da equação que representa a condição de contorno de escoamento normal nulo. O sistema linear é então montado e resolvido. Com os valores de circulação obtidos parte-se para a determinação do carregamento aerodinâmico. O último passo consiste na correção da posição dos anéis de vórtice da esteira. Esta seqüência de cálculo repete-se para cada intervalo de tempo. Quando a geometria da asa permanece inalterada com o tempo, os coeficientes de influência são constantes e precisam ser calculados somente para o primeiro intervalo de tempo.

Figura 3.18 - Algoritmo para implementação do método de malha de vórtices para aerodinâmica não-estacionária.

3.10 Resultados

O método de malha de vórtices não-estacionário foi implementado computacionalmente e alguns casos simulados são mostrados nesta seção. Uma asa retangular, sem arqueamento do perfil, foi utilizada para as simulações. A asa tem 1 m de corda e 6 m de semi-envergadura, o que equivale a um alongamento de 12, e foi discretizada em 4 painéis ao longo da corda e 13 painéis ao longo da semi-envergadura. Estes parâmetros

foram escolhidos para que os resultados possam ser comparados com os obtidos por KATZ & PLOTKIN (1991).

O primeiro caso analisado foi o de uma entrada degrau na velocidade do fluxo livre, em um instante de tempo inicial. Este caso também é conhecido por movimento de aceleração súbita. A asa encontra-se em repouso em $t < 0$ e é subitamente acelerada para frente com uma velocidade constante no instante $t = 0$. A simulação foi feita para uma velocidade de 50 m/s, um ângulo de ataque de 5° e um incremento de tempo de 0,00125 s. O valor do incremento de tempo foi obtido da relação $\Delta t = \Delta c / V_\infty / 4$ (onde Δc é o comprimento do anel de vórtice da asa ao longo da corda), que significa que os anéis de vórtice da esteira terão um comprimento quatro vezes menor que os anéis de vórtice da asa. O valor transiente do coeficiente de sustentação (C_L) para este caso é mostrado na Figura (3.19), em comparação com os resultados obtidos por KATZ & PLOTKIN (1991) para os mesmos parâmetros de simulação. A concordância entre os resultados, no entanto, não é muito boa, principalmente nos instantes de tempo iniciais.

Figura 3.19 – Coeficiente de sustentação (C_L) vs. tempo adimensional para movimento de aceleração súbita.

Outro teste para tentar validar a implementação computacional do método é a comparação com a solução analítica de Wagner, válida para o mesmo caso e obtida em BISPLINGHOFF et al. (1955). A expressão para a força de sustentação é dada pela equação (3.41), onde c é a corda do aerofólio, α_0 é o ângulo de ataque inicial, ϕ é a função de Wagner, dada pela equação (3.42), e s é a distância percorrida pelo aerofólio em semi-cordas.

$$L = \pi \rho V_{\infty}^2 c \alpha_0 \phi(s) \quad (3.41)$$

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.335e^{-0.3s} \quad (3.42)$$

Um detalhe importante é que a solução de Wagner é bidimensional. Para reproduzir uma condição bidimensional no método de malha de vórtices um alongamento de 1000 (mil) foi utilizado na simulação. As duas soluções são mostradas na Figura 3.20 e mostram uma boa concordância, o que sugere que a implementação do método está correta.

Pela Figura 3.20 observa-se que o pico inicial no valor de C_L (que também pode ser observado na Figura 3.19) ocorre apenas nos resultados simulados, não aparecendo na solução analítica de Wagner. O pico inicial é devido à parcela não-estacionária que aparece na equação de Bernoulli (dada pela equação (3.36)). Uma vez que o valor da circulação Γ em um tempo $t < 0$ é nula, a equação (3.36) adquire um valor bastante alto em $t = 0$, sendo responsável pelo pico inicial no valor de C_L . Acompanhando-se a dedução da solução analítica de Wagner em BISPLINGHOFF et al. (1955) observa-se que este problema também ocorre, fazendo com que o valor da parcela não-estacionária tenda ao infinito. Para corrigir este problema Wagner desconsiderou a contribuição da parcela não-estacionária para o instante de tempo inicial, eliminando o pico inicial no valor de C_L . O pico também poderia ser eliminado na simulação, mas observou-se que a sua ocorrência não prejudicou os resultados aeroelásticos obtidos, como pode ser visto no Capítulo 5.

Figura 3.20 – Comparação da simulação com a solução analítica de Wagner.

A ocorrência do pico de C_L também pode ser observada em um outro caso, que consiste de uma entrada degrau na velocidade do fluxo livre em um instante de tempo inicial seguida de uma entrada degrau no ângulo de ataque em um determinado instante de tempo posterior, como mostrado na parte superior da Figura 3.21.

A resposta em termos do coeficiente de sustentação para este caso é mostrada na parte do meio da Figura 3.21, também para uma velocidade de 50 m/s e um incremento de tempo de $0,00125 \text{ s}$. Pode ser visto que um pico de grande amplitude ocorre no instante de tempo em que o degrau é aplicado. Novamente, a ocorrência do pico é devida à parcela não-estacionária que aparece na equação de Bernoulli, uma vez que a diferença entre os valores de circulação antes e depois da aplicação da entrada degrau é grande e o intervalo de tempo pequeno. Uma comparação das amplitudes do pico para diferentes intervalos de tempo pode ser vista na parte inferior da Figura 3.21.

A influência do pico de C_L em instantes de tempo posteriores ao início da simulação não foi analisada neste trabalho. É importante, no entanto, alertar que estes picos podem surgir se perturbações arbitrárias forem aplicadas ao sistema aeroelástico, e neste caso sua influência pode ser importante, necessitando ser estudada.

Figura 3.21 – Coeficiente de sustentação vs. tempo para uma entrada degrau no ângulo de ataque: a) variação do ângulo de ataque vs. tempo; b) variação do C_L vs. tempo para um incremento de tempo de $0,00125 \text{ s}$; c) variação do C_L vs. tempo, em uma janela de tempo iniciando-se um pouco antes e terminando um pouco após a ocorrência do degrau de ângulo de ataque, considerando-se três diferentes incrementos de tempo dT .

Um outro caso analisado consiste de um movimento oscilatório de arfagem. Este caso pode ser comparado com a solução analítica de Theodorsen e também serve para validar a implementação computacional do método. Como a solução de Theodorsen é bidimensional, novamente um alongamento de 1000 será utilizado na simulação. A velocidade do fluxo livre e o valor do incremento de tempo serão os mesmos utilizados nos casos anteriores. A frequência de oscilação (ω) será de 60 rad/s (que corresponde a uma frequência reduzida k de 0,6, onde $k = \frac{\omega b}{V_\infty}$ e b é a semi-corda do aerofólio) e a amplitude de 4 graus, como mostrado na parte superior da Figura 3.22.

A variação do coeficiente de sustentação para este movimento é mostrada na parte inferior da Figura 3.22. Uma análise cuidadosa da Figura 3.22 mostra que o máximo valor de C_L ocorre antes do máximo valor do ângulo de ataque, indicando que a força de sustentação e o ângulo de ataque estão fora de fase. Isto é facilmente visto na Figura 3.23, com C_L variando em função do ângulo de ataque. A solução de Theodorsen (BISPLINGHOFF et al., 1955) é mostrada juntamente com a simulação na Figura 3.23, mas uma discrepância entre os resultados é observada. As causas destas discrepâncias não foram identificadas e optou-se por prosseguir o trabalho com a implementação computacional proposta.

Figura 3.22 – Coeficiente de sustentação vs. tempo para movimento oscilatório de arfagem.

Um outro teste realizado foi comparar os resultados obtidos com a utilização da esteira deformada e da esteira alinhada com o fluxo livre (linearizada). A Figura 3.24 mostra a semi-asa discretizada juntamente com a esteira deformada para uma condição de regime permanente, obtida para o caso de movimento de aceleração súbita. A forma da esteira reproduz claramente o vórtice de ponta de asa e o vórtice inicial.

Figura 3.23 – Coeficiente de sustentação vs. ângulo de ataque para movimento oscilatório de arfagem.

A comparação dos valores de C_L obtidos com os dois modelos de esteira não mostrou nenhuma diferença, como pode ser observado na Figura 3.25. Uma comparação deste tipo também pode ser encontrada no trabalho de DOJODIHARDJO & WIDNALL (1969) para um aerofólio bidimensional e as diferenças também foram consideradas desprezíveis. De fato, a asa simulada possui um alongamento alto, o que a aproxima bastante da condição de escoamento bidimensional. Na simulação de asas com alongamento baixo, provavelmente a utilização dos dois modelos de esteira produzirá resultados diferentes. Neste trabalho, a esteira linearizada será utilizada nas simulações aeroelásticas com o intuito de reduzir o esforço computacional.

Para ilustrar os efeitos tridimensionais, a Figura 3.26 mostra a distribuição de circulação na semi-asa para uma condição de regime permanente, evidenciando o comportamento decrescente da raiz para a ponta.

Figura 3.24 – Semi-asa discretizada juntamente com a esteira deformada.

Figura 3.25 – Comparação dos valores de CL para dois modelos de esteira.

Figura 3.26 – Distribuição de circulação na semi-asa para uma condição de regime permanente.

CAPÍTULO 4

ACOPLAMENTO ENTRE A DINÂMICA ESTRUTURAL E A AERODINÂMICA

4.1 Troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica

A primeira complicação que surge na montagem da equação de movimento do sistema aeroelástico é devida ao fato dos modos de vibrar e das forças aerodinâmicas serem calculados utilizando-se métodos de discretização distintos. Para resolver este problema é necessário que as forças aerodinâmicas aplicadas em pontos da malha aerodinâmica sejam convertidas para pontos da malha estrutural e ainda que os deslocamentos sofridos por pontos da malha estrutural sejam repassados para a malha aerodinâmica. Esta troca de informações entre as malhas pode ser representada por uma matriz de transformação de coordenadas, como mostrado na equação (4.1), onde o subscrito a se refere à malha aerodinâmica, o subscrito e se refere à malha estrutural e a matriz $[G]$ representa a matriz de transformação.

$$\{x\}_a = [G]\{x\}_e \quad (4.1)$$

A mesma matriz de transformação pode ser utilizada para converter os modos de vibrar obtidos nas coordenadas estruturais para as coordenadas aerodinâmicas, de acordo com a equação (4.2).

$$[\Phi]_a = [G][\Phi]_e \quad (4.2)$$

Uma vez que as forças representadas no sistema de coordenadas estruturais devem ser estruturalmente equivalentes às forças representadas no sistema de coordenadas aerodinâmicas, o trabalho virtual realizado por estas forças deve ser igual (equação 4.3).

$$\{\delta x\}_a^T \{L\}_a = \{\delta x\}_e^T [G]^T \{L\}_a = \{\delta x\}_e^T \{L\}_e \quad (4.3)$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, chega-se a

$$\{L\}_e = [G]^T \{L\}_a \quad (4.4)$$

que representa a transformação entre as forças envolvidas representadas nos dois sistemas.

A equação de movimento (2.15) pode então ser reescrita na forma

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]_e^T [G]^T \{L(\eta, \dot{\eta}, t)\}_a \quad (4.5)$$

Substituindo-se a equação (4.2) em (4.5) chega-se a

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]_a^T \{L(\eta, \dot{\eta}, t)\}_a \quad (4.6)$$

que representa a equação de movimento do sistema aeroelástico com as forças externas obtidas na malha aerodinâmica e convertidas para a malha estrutural.

Observa-se que esta conversão entre as malhas foi feita pré-multiplicando o vetor de forças aerodinâmicas pela transposta da matriz dos modos de vibrar escritos nas coordenadas aerodinâmicas. O método mais popular para obter esta matriz é o de interpolação por *splines* de superfície, desenvolvido por HARDER & DESMARAIS (1972) e descrito na próxima seção.

Um ponto importante a se observar é que a matriz dos modos de vibrar escritos nas coordenadas aerodinâmicas depende do conjunto de pontos escolhido para representar a malha aerodinâmica. Quando o objetivo é transferir as forças obtidas na malha aerodinâmica para a malha estrutural, este conjunto de pontos deve ser formado pelos pontos aonde as forças aerodinâmicas são definidas. Estes pontos são os pontos de controle, localizados no centro de cada anel de vórtice e são representados pelo vetor $\{x\}_a$. A transformação de coordenadas entre este conjunto de pontos e a malha estrutural é dada pela matriz $[G]$, utilizada acima.

Outro conjunto de pontos interessante para representar a malha aerodinâmica é constituído pelas extremidades dos anéis de vórtice posicionados sobre a asa. Quando o objetivo é repassar os deslocamentos sofridos pela malha estrutural para a malha aerodinâmica deve-se utilizar este outro conjunto de pontos, uma vez que ele é quem define a geometria da asa. Este outro conjunto de pontos é representado pelo vetor $\{\bar{x}\}_a$ e a ele está

associada uma outra matriz de transformação de coordenadas entre as duas malhas, denominada de $[\bar{G}]$.

Uma vez que a resolução da equação de movimento do sistema aeroelástico fornece os deslocamentos modais da estrutura, é preciso aplicar a transformação de coordenadas mostrada na equação (2.7) para se obter os deslocamentos físicos, escritos em coordenadas estruturais. Para converter estes deslocamentos para a malha aerodinâmica basta pré-multiplicar os termos da equação (2.7) pela matriz $[\bar{G}]$, o que resulta na equação (4.7), onde $[\bar{\Phi}]_a$ também é obtida pelo método de interpolação por *splines* de superfície.

$$\{\bar{x}\}_a = [\bar{\Phi}]_a \{\eta\}_e \quad (4.7)$$

Um esquema da troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica pode ser visto na Figura 4.1.

Figura 4.1. – Esquema da troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica.

4.2 Interpolação por *splines* de superfície

O método de interpolação por *splines* de superfície é baseado na solução da equação de flexão de uma placa plana infinita, dada por

$$D\nabla^4 \{w\} = \{P\} \quad (4.8)$$

onde D é a rigidez da placa, $\{w\}$ é o vetor de deslocamentos e $\{P\}$ é o vetor de forças aplicadas à placa.

A aplicação deste método em análises aeroelásticas tem como objetivo fazer com que a solução da equação (4.8) reproduza os deslocamentos provenientes de uma malha estrutural em uma malha aerodinâmica. Considerando-se uma malha estrutural com n pontos (x_i, y_i) e deslocamentos w_i conhecidos, deve-se encontrar as forças que devem ser aplicadas nestes n pontos para reproduzir os deslocamentos estruturais.

A solução da equação (4.8) para uma força aplicada na origem da placa é dada pela equação (4.9), escrita em termos da coordenada polar r , onde A e B são coeficientes que precisam ser determinados e P é a força aplicada (HARDER & DESMARAIS, 1972).

$$w(r) = A + Br^2 + \frac{P}{16\pi D} r^2 \ln r^2 \quad (4.9)$$

Uma deformação arbitrária da placa pode ser conseguida através da soma das soluções dadas pela equação (4.9) nos n pontos da malha estrutural. Esta soma é dada por

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \left[A_i + B_i r_i^2 + \frac{P_i}{16\pi D} r_i^2 \ln r_i^2 \right] \quad (4.10)$$

onde

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (4.11)$$

Uma forma mais usual para representar a equação (4.10) é dada por

$$w(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 \ln r_i^2 \quad (4.12)$$

onde

$$F_i = \frac{P_i}{16\pi D} \quad (4.13)$$

A solução da equação (4.12) envolve a determinação de $n+3$ coeficientes $(a_0, a_1, a_2 \text{ e } F_i)$, que são obtidos a partir das equações seguintes:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i = 0 \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i y_i = 0 \quad (4.16)$$

$$w_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j + \sum_{i=1}^n \kappa_{ij} F_i, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.17)$$

$$\kappa_{ij} = r_{ij}^2 \ln(r_{ij}^2) \quad (4.18)$$

$$r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (4.19)$$

As equações (4.14) a (4.19) constituem um sistema linear e podem ser escritas na forma matricial de acordo com a equação (4.20), descrita no trabalho de SILVA (1994).

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1j} & \cdots & \kappa_{1n} \\ 1 & x_2 & y_2 & \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2j} & \cdots & \kappa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_j & y_j & \kappa_{j1} & \kappa_{j2} & \cdots & \kappa_{jj} & \cdots & \kappa_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & \kappa_{n1} & \kappa_{n2} & \cdots & \kappa_{nj} & \cdots & \kappa_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Com os coeficientes determinados pode-se utilizar a equação (4.12) para determinar os deslocamentos sofridos pelos pontos da malha aerodinâmica.

Para se obter os modos de vibrar da estrutura escritos nas coordenadas aerodinâmicas deve-se fornecer como entrada para o algoritmo de interpolação os

deslocamentos estruturais correspondentes aos modos de vibrar obtidos pelo método dos elementos finitos. Os resultados obtidos para a asa descrita no Capítulo 2 são mostrados na próxima seção.

4.3 Modos interpolados

Antes de partir para a implementação do método de interpolação por *splines* de superfície é preciso esclarecer alguns pontos importantes. Primeiramente, é preciso observar que o método considera que todos os pontos estruturais e aerodinâmicos pertencem ao mesmo plano. Desta forma, os pontos estruturais e aerodinâmicos precisariam ser todos projetados no plano da asa. Em segundo lugar, deve-se lembrar que os gráficos dos modos de vibrar mostrados no Capítulo 2 foram obtidos a partir dos deslocamentos estruturais sofridos pelos 7124 nós do modelo de elementos finitos.

Para se facilitar a implementação do método de interpolação seria interessante considerar apenas alguns nós do modelo em elementos finitos, garantindo que eles representem corretamente a forma dos modos de vibrar. Foram então escolhidos 65 nós dispostos na casca superior da asa, de acordo com a Figura 4.2, sendo 5 na direção da corda e 13 na direção da semi-envergadura, gerando uma malha retangular. Uma comparação entre os modos de flexão vertical (modos 1, 3 e 5) representados na malha de elementos finitos original e na malha reduzida é mostrada na Figura 4.3, onde apenas os deslocamentos dos pontos localizados no bordo de ataque foram considerados. A Figura 4.3 garante que o modelo reduzido representa corretamente os modos de vibrar do modelo original, justificando sua utilização.

Figura 4.2 – Nós escolhidos para representar os modos de vibrar estruturais.

Por último, deve-se lembrar que o método de interpolação por *splines* de superfície é capaz de reproduzir apenas deslocamentos na direção que aponta para fora do plano onde os pontos estruturais foram fornecidos. Desta forma, os modos 2 e 6, que envolvem flexão lateral, não serão considerados.

Figura 4.3 – Comparação entre os deslocamentos no bordo de ataque para os modos de flexão vertical escritos na malha original e na malha reduzida.

Para mostrar a implementação do método de interpolação utilizou-se a malha estrutural representada na Figura 4.2 e uma malha aerodinâmica representada pelas extremidades de 52 anéis de vórtice empregados na discretização da asa, sendo 4 ao longo da corda e 13 ao longo da semi-envergadura. A Figura 4.4 mostra as duas malhas.

Figura 4.4 – Comparação entre a malha estrutural (*) e a malha aerodinâmica (o).

Os modos de vibrar reproduzidos na malha aerodinâmica podem então ser vistos nas Figuras 4.5 a 4.9. Observa-se que os modos obedecem à descrição dada na Tabela 2.2.

As curvas de nível dos modos interpolados são mostradas juntamente com as curvas de nível dos modos estruturais na Figura 4.10, mostrando a precisão do processo de interpolação.

Figura 4.5 – Primeiro modo estrutural (1^a flexão vertical) reproduzido na malha aerodinâmica (12,77 Hz).

Figura 4.6 – Terceiro modo estrutural (2^a flexão vertical + torção) reproduzido na malha aerodinâmica (54,45 Hz).

Figura 4.7 – Quarto modo estrutural (1ª torção) reproduzido na malha aerodinâmica (63,62 Hz).

Figura 4.8 – Quinto modo estrutural (3ª flexão vertical) reproduzido na malha aerodinâmica (122,74 Hz).

Figura 4.9 – Sétimo modo estrutural (2ª torção) reproduzido na malha aerodinâmica (174,74 Hz).

Figura 4.10 – Comparação entre as curvas de nível dos modos interpolados (---) e dos modos estruturais (—).

4.4 Esquema de integração numérica

A equação de movimento matricial que representa o sistema aeroelástico (equação 4.6), e que consiste de n equações independentes de segunda ordem, onde n é o número de coordenadas modais, será reescrita como um sistema de $2n$ equações de primeira ordem, com a utilização das equações (4.21) e (4.22). Os vetores $\{y_1(t)\}$ e $\{y_2(t)\}$ possuem dimensão $n \times 1$ e são constituídos dos deslocamentos e velocidades modais, respectivamente.

$$\{y_1(t)\} = \{\eta(t)\} \quad (4.21)$$

$$\{y_2(t)\} = \{\dot{\eta}(t)\} \quad (4.22)$$

Diferenciando as equações (4.21) e (4.22) e utilizando a equação (4.6) obtêm-se as equações (4.23) e (4.24).

$$\{\dot{y}_1(t)\} = \{y_2(t)\} \quad (4.23)$$

$$\{\dot{y}_2(t)\} = [\phi]_a^T \{L(t)\}_a - [\omega^2] \{y_1(t)\} \quad (4.24)$$

O lado direito das equações (4.23) e (4.24) será denotado pelo vetor $\{LD(t)\}$, de dimensão $2n \times 1$, onde os n primeiros termos referem-se à equação (4.23) e os n termos seguintes à equação (4.24). As equações (4.23) e (4.24) podem então ser agrupadas na equação (4.25), onde o vetor $\{\dot{y}(t)\}$ tem dimensão $2n \times 1$, sendo os primeiros termos referentes ao vetor $\{\dot{y}_1(t)\}$ e os últimos ao vetor $\{\dot{y}_2(t)\}$. Um esquema da redução de ordem utilizada é mostrado na Figura 4.11.

$$\{\dot{y}(t)\} = \{LD(t)\} \quad (4.25)$$

A equação (4.25) será resolvida por um método numérico do tipo preditor-corretor. Este tipo de método é adequado para a aplicação proposta neste trabalho por requerer que o vetor $\{LD(t)\}$ seja calculado apenas em intervalos de tempo fixos, ao contrário do que ocorre com os métodos do tipo Runge-Kutta, que requerem que o vetor $\{LD(t)\}$ seja calculado em frações do intervalo de tempo (CARNAHAN et al., 1969). Outro indício a

favor da utilização de um método do tipo preditor-corretor é que estes métodos foram utilizados satisfatoriamente para resolver as equações aeroelásticas nas teses de STRGANAC (1987) e PREIDIKMAN (1998).

Uma desvantagem na utilização de métodos do tipo preditor-corretor é que a estabilidade destes métodos depende do valor do incremento de tempo utilizado na integração numérica. Devido a esta característica, os métodos do tipo preditor-corretor são classificados como métodos “condicionalmente estáveis” (HUGHES, 1987), e necessitam de um cuidado especial na sua utilização.

Figura 4.11 – Esquema da redução de ordem utilizada na equação de movimento.

Neste trabalho, o método preditor-corretor será implementado na forma PECLE (LAMBERT, 1991), onde a letra P refere-se à previsão do vetor $\{y(t)\}$, a letra E à determinação (*evaluation*) do vetor $\{LD(t)\}$, a letra C à correção dos valores do vetor $\{y(t)\}$, e a letra L à determinação do erro de truncamento local.

No primeiro intervalo de tempo ($i=1$), somente o passo E será executado, que consiste em obter o vetor $\{LD(1)\}$ para as condições iniciais contidas no vetor $\{y(1)\}$. No segundo intervalo de tempo ($i=2$), somente os passos PE serão executados, obtendo o vetor $\{y(2)\}$ e o correspondente vetor $\{LD(2)\}$. A partir do terceiro intervalo de tempo, todos os passos serão executados. O erro de truncamento local é dado pela estimativa de Milne (LAMBERT, 1991) e modifica os valores corrigidos do vetor $\{y(t)\}$ de acordo com a equação (4.26), onde os sobrescritos *P* e *C* referem-se aos valores previstos e corrigidos e o fator *W* depende da ordem das equações de previsão e correção utilizadas.

$$\{y^C\} = \{y^P\} + W[\{y^C\} - \{y^P\}] \quad (4.26)$$

A família de métodos Adams-Bashforth será utilizada para as equações de previsão, e a família de métodos Adams-Moulton para as equações de correção (LAMBERT, 1991). As equações utilizadas para cada intervalo de tempo, juntamente com o valor do fator W , são mostradas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Equações de previsão e correção.

i	Previsão	Correção	W
2	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} + \Delta t \{LD(i-1)\}$	—	—
3	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{2} [3\{LD(i-1)\} - \{LD(i-2)\}]$	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{2} [\{LD(i)\} + \{LD(i-1)\}]$	$-\frac{1}{6}$
4	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{12} [23\{LD(i-1)\} -$ $- 16\{LD(i-2)\} + 5\{LD(i-3)\}]$	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{12} [5\{LD(i)\} +$ $+ 8\{LD(i-1)\} - \{LD(i-2)\}]$	$-\frac{1}{10}$
5 em diante	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{24} [55\{LD(i-1)\} - 59\{LD(i-2)\} +$ $+ 37\{LD(i-3)\} - 9\{LD(i-4)\}]$	$\{y(i)\} = \{y(i-1)\} +$ $+ \frac{\Delta t}{24} [9\{LD(i)\} + 19\{LD(i-1)\} -$ $- 5\{LD(i-2)\} + \{LD(i-3)\}]$	$-\frac{19}{270}$

4.5 Resolução da equação de movimento

Esta seção fará uma revisão do processo de obtenção da equação de movimento do sistema aeroelástico e uma descrição de como ela será resolvida.

Para montar a equação de movimento é preciso obter primeiramente as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura, de acordo com o que foi exposto no Capítulo 2. Deve-se também selecionar os modos que serão utilizados para representar o modelo dinâmico-estrutural. O próximo passo é reduzir o modelo de elementos finitos considerando-se apenas alguns nós, como foi feito na Seção 4.3 deste capítulo. Os modos de vibrar são então escritos nestes pontos selecionados e colocados na matriz $[\tilde{\Phi}]_e$, onde o sobrescrito $\sim$ se refere ao modelo reduzido. A hipótese fundamental para que a matriz reduzida possa ser utilizada nos cálculos é que as frequências naturais dos modos escolhidos sejam as mesmas para o modelo reduzido e para o modelo completo.

Com a malha aerodinâmica definida, aplica-se o método de interpolação por *splines* de superfície para reproduzir os modos de vibrar estruturais (representados pela matriz

$[\tilde{\Phi}]_e$) nas coordenadas aerodinâmicas. Os modos escritos nas coordenadas aerodinâmicas são armazenados nas matrizes $[\Phi]_a$ e $[\overline{\Phi}]_a$, dependendo do conjunto de pontos escolhido para representar a malha aerodinâmica. A matriz $[\Phi]_a$ será utilizada para transformar as forças da malha aerodinâmica para a malha estrutural enquanto a matriz $[\overline{\Phi}]_a$ será utilizada para transformar os deslocamentos da malha estrutural para a malha aerodinâmica.

Para resolver a equação de movimento é preciso primeiramente especificar as condições iniciais (deslocamentos e velocidades modais). Neste trabalho as condições iniciais serão assumidas nulas e a perturbação imposta ao sistema aeroelástico será dada por uma entrada degrau na velocidade do fluxo livre. O comportamento do carregamento aerodinâmico para este tipo de entrada foi mostrado na Seção 3.10.

O carregamento aerodinâmico é então determinado para o primeiro instante de tempo, de acordo com o algoritmo apresentado na Figura 3.17. A partir do segundo instante de tempo, os deslocamentos e velocidades modais serão determinados por um método preditor-corretor, conforme proposto na seção anterior. Estes deslocamentos e velocidades modais serão convertidos para deslocamentos e velocidades físicos (escritos em coordenadas aerodinâmicas), através da equação (4.7), e serão utilizados para alterar a malha aerodinâmica. A nova malha aerodinâmica fornecerá um novo vetor de forças, que será aplicado à estrutura no próximo instante de tempo. Este processo iterativo continuará durante todo o intervalo de tempo da simulação e as curvas com os deslocamentos modais em função do tempo representarão a resposta aeroelástica da estrutura.

4.6 Algoritmo para implementação computacional

Esta seção apresentará os passos necessários para a implementação computacional do modelo aeroelástico proposto. Estes passos estão enumerados abaixo. As equações de previsão e correção utilizadas para cada intervalo de tempo devem ser obtidas na Tabela 4.1. A programação foi feita na linguagem FORTRAN.

1) Fornecimento dos dados de entrada:

- dimensões da asa: corda e semi-envergadura;
- número de painéis utilizados na discretização aerodinâmica;
- propriedades aerodinâmicas: ângulo de ataque inicial, velocidade do fluxo livre e densidade do ar;
- parâmetros da simulação: número de intervalos de tempo e valor de cada intervalo de tempo.

- 2) Discretização aerodinâmica inicial.
- 3) Fornecimento dos dados dinâmico-estruturais obtidos a partir de um *software* de elementos finitos:
 - malha estrutural;
 - frequências naturais;
 - modos de vibrar;
- 4) Interpolação dos modos de vibrar.
- 5) Definição das condições iniciais.
- 6) Início das iterações no tempo.
 - Primeiro intervalo de tempo ($i=1$)
- 7) Atualização da malha aerodinâmica devido às condições iniciais.
- 8) Cálculo do carregamento aerodinâmico inicial.
 - Segundo intervalo de tempo ($i=2$)
- 9) Previsão de deslocamentos e velocidades modais.
- 10) Conversão dos deslocamentos e velocidades modais para deslocamentos e velocidades físicos (escritos em coordenadas aerodinâmicas).
- 11) Atualização da malha aerodinâmica devido aos deslocamentos e velocidades físicos.
- 12) Criação da esteira e cálculo do carregamento aerodinâmico.
 - Do terceiro intervalo de tempo ($i=3$) em diante
- 13) Previsão dos deslocamentos e velocidades modais.
- 14) Conversão dos deslocamentos e velocidades modais para deslocamentos e velocidades físicos (escritos em coordenadas aerodinâmicas).
- 15) Atualização da malha aerodinâmica devido aos deslocamentos e velocidades físicos.
- 16) Criação da esteira e cálculo do carregamento aerodinâmico.
- 17) Correção dos deslocamentos e velocidades modais previstos.
- 18) Modificação da solução corrigida pelo erro de truncamento local.
- 19) Conversão dos deslocamentos e velocidades modais para deslocamentos e velocidades físicos (escritos em coordenadas aerodinâmicas).
- 20) Atualização da malha aerodinâmica devido aos deslocamentos e velocidades físicos.
- 21) Criação da esteira e cálculo do carregamento aerodinâmico.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS AEROELÁSTICOS

Este capítulo apresenta as respostas aeroelásticas da asa descrita no Capítulo 2 para diferentes velocidades de vôo. As malhas estrutural e aerodinâmica são as mesmas que foram apresentadas na Figura 4.4, e o arqueamento do perfil não foi considerado para as simulações. O ângulo de ataque inicial é de 5 graus e a densidade do ar corresponde a condições ao nível do mar. As condições iniciais são nulas e a perturbação no sistema é dada por uma entrada degrau na velocidade do fluxo livre. As respostas aeroelásticas são representadas por curvas dos deslocamentos modais em função do tempo e as Transformadas de Fourier (FFTs) destas curvas mostram as frequências de oscilação contidas em cada resposta.

A resposta aeroelástica para a velocidade de 10 m/s é mostrada na Figura 5.1. Os deslocamentos modais tendem para uma posição de equilíbrio, correspondente ao equilíbrio estático da asa para esta velocidade de vôo, e o amortecimento aerodinâmico pode ser visto para todos os modos.

As Transformadas de Fourier destas curvas são mostradas na Figura 5.2, tendo sido normalizadas para que o maior valor de cada curva seja igual a 1. Observa-se que um pico inicial na amplitude ocorre em todas as curvas para uma mesma frequência. Este pico corresponde à frequência com que as forças aerodinâmicas excitam a estrutura. Esta afirmação pode ser confirmada observando-se a Figura 5.3, onde o coeficiente de força normal (C_N) em função do tempo para a asa toda e a correspondente FFT são mostrados. A frequência de excitação da força normal é a mesma que aparece nas curvas da Figura 5.2. Observa-se ainda que o comportamento do C_N para a asa elástica é análogo ao comportamento do C_L para a asa rígida (mostrado no Capítulo 3), e é característico da entrada degrau na velocidade do fluxo livre.

Desconsiderando-se os picos iniciais na Figura 5.2 e normalizando-se novamente as amplitudes das curvas, chega-se à Figura 5.4, que mostra claramente as frequências associadas com cada modo de vibrar da estrutura.

As respostas aeroelásticas para outras velocidades de vôo e as correspondentes FFTs sem os picos iniciais são mostradas nas Figuras 5.5 a 5.16.

Para a velocidade de 30 m/s, observa-se que a resposta do terceiro modo (2ª flexão vertical + torção) começa a sofrer influência do quarto modo (1ª torção), de acordo com a Figura 5.6. Para a velocidade de 50 m/s a resposta do terceiro e do quarto modo passam a ocorrer em uma mesma frequência (Figura 5.8). Para ambas as velocidades o amortecimento aerodinâmico é maior que para a velocidade de 10 m/s, uma vez que o equilíbrio estático da asa é encontrado em um tempo menor (Figuras 5.5 e 5.7).

Para a velocidade de 70 m/s, o amortecimento aerodinâmico diminui bastante (Figura 5.9) e todos os modos começam a ser excitados em uma mesma frequência (próximo aos 65 Hz). A resposta aeroelástica, no entanto, continua estável.

A resposta para a velocidade de 80 m/s (Figura 5.11) está próxima da fronteira de estabilidade, onde o amortecimento aerodinâmico é nulo. Para a velocidade de 90 m/s (Figura 5.13) já se observa a ocorrência da instabilidade, ou seja, do flutter, e para a velocidade de 100 m/s (Figura 5.15) esta instabilidade é bem mais evidente. As transformadas de Fourier destas respostas mostram o acoplamento de frequências característico do fenômeno de flutter (Figuras 5.12, 5.14 e 5.16).

Um cuidado especial deve ser tomado na escolha do incremento de tempo (Δt) para as simulações. A Figura 5.17 mostra uma comparação do comportamento do sétimo modo de vibrar para uma velocidade de 10 m/s e dois valores distintos do incremento de tempo. Para um valor de Δt igual a 0,0006875 s, o comportamento da curva é instável, o que não deveria ocorrer para uma velocidade tão baixa. A resposta correta foi obtida para um Δt de 0,0001 s. Estas variações na resposta devido ao valor do Δt são comuns em métodos numéricos do tipo preditor-corretor e o que deve ser feito é analisar o comportamento da resposta para diferentes valores de Δt , e então escolher o valor mais adequado. Nas simulações para as velocidades de 10, 30 e 50 m/s utilizou-se o valor de Δt igual a 0,0001 s, enquanto para as outras velocidades utilizou-se um valor um pouco menor (0,00008 s).

Para se ter uma idéia das grandezas físicas envolvidas nas respostas aeroelásticas, pode-se converter os deslocamentos modais para deslocamentos físicos. O deslocamento na ponta da asa em função do tempo, para o bordo de ataque e para o bordo de fuga, é mostrado para a velocidade de 30 m/s na Figuras 5.18 e para a velocidade de 100 m/s na Figura 5.20. O ângulo de ataque na ponta da asa em função do tempo é mostrado para estas velocidades nas Figuras 5.19 e 5.21, respectivamente. Para a velocidade de 30 m/s observa-se que o ângulo de ataque na ponta da asa para a condição de equilíbrio é um pouco menor que o ângulo de ataque inicial.

Figura 5.1 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 10$ m/s.

Figura 5.2 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 10$ m/s.

Figura 5.3 – Coeficiente de força normal (C_N) em função do tempo e correspondente FFT para $V_\infty = 10$ m/s.

Figura 5.4 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_\infty = 10$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.5 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 30$ m/s.

Figura 5.6 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 30$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.7 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 50$ m/s.

Figura 5.8 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 50$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.9 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 70$ m/s.

Figura 5.10 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 70$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.11 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 80$ m/s.

Figura 5.12 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 80$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.13 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 90$ m/s.

Figura 5.14 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 90$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.15 – Resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 100$ m/s.

Figura 5.16 – Transformadas de Fourier (FFTs) da resposta aeroelástica para $V_{\infty} = 100$ m/s desconsiderando-se os picos iniciais.

Figura 5.17 – Comparação da resposta aeroelástica do sétimo modo para $V_{\infty} = 10 \text{ m/s}$ e dois valores de Δt diferentes.

Figura 5.18 – Deslocamento na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 30 \text{ m/s}$.

Figura 5.19 – Ângulo de ataque na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 30 \text{ m/s}$.

Figura 5.20 – Deslocamento na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 100$ m/s.

Figura 5.21 – Ângulo de ataque na ponta da asa em função do tempo para $V_{\infty} = 100$ m/s.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Sumário e Conclusões

As características dinâmico-estruturais de uma asa protótipo foram representadas pela escolha de alguns modos de vibrar e correspondentes valores de frequências naturais obtidos através de um *software* de elementos finitos. A equação de movimento foi escrita em função de coordenadas modais.

O método de malha de vórtices foi implementado para determinar as forças aerodinâmicas em cada intervalo de tempo. Tentou-se validar a implementação do método comparando-se os resultados da simulação com as soluções analíticas de Wagner e de Theodorsen. A comparação com a solução de Wagner foi muito boa, mas a comparação com a solução de Theodorsen apresentou discrepâncias significativas. As causas destas discrepâncias ainda não foram identificadas, mas acredita-se que o comportamento da resposta aeroelástica não sofrerá mudanças.

O método escolhido para a troca de informações entre a malha aerodinâmica e a estrutural foi o método de interpolação por *splines* de superfície. Este método converte os modos de vibrar escritos na malha estrutural para a malha aerodinâmica, mas possui as limitações de trabalhar somente com malhas planas e de reproduzir somente deslocamentos perpendiculares a este plano. Para facilitar a aplicação do método, os modos escritos na malha estrutural foram representados por um modelo reduzido, obtido a partir da escolha de apenas alguns nós do modelo de elementos finitos original.

A integração da equação de movimento foi feita por um método numérico do tipo preditor-corretor. A escolha do valor do incremento de tempo utilizado nas simulações mostrou-se fundamental para a precisão das respostas aeroelásticas.

As respostas aeroelásticas obtidas pelo método numérico proposto são consideradas coerentes. A ocorrência do fenômeno de flutter foi visualizada e o correspondente acoplamento de frequências característico foi verificado. Deve-se lembrar, no entanto, que estas respostas são válidas apenas para escoamentos potenciais e incompressíveis. Mesmo com esta limitação, o modelo numérico proposto tem uma grande vantagem, que é o tempo

de processamento baixo em comparação com outros métodos para análise aeroelástica no domínio do tempo.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Algumas sugestões para trabalhos futuros serão feitas no sentido de poder-se otimizar o modelo numérico proposto. Estas sugestões são então descritas a seguir:

- Comparação entre os resultados aeroelásticos obtidos com a utilização do modelo numérico proposto e com a utilização do *software* MSC/NASTRAN[®];
- Realização de ensaios aeroelásticos em túnel de vento;
- Implementação de outros métodos de interpolação para a troca de informações entre as malhas estrutural e aerodinâmica, permitindo que a influência dos modos de flexão lateral seja estudada;
- Análise da ocorrência de picos de C_L para perturbações arbitrárias impostas ao sistema aeroelástico e da influência que estes picos exercem nas respostas aeroelásticas;
- Análise das discrepâncias que ocorrem quando o carregamento aerodinâmico para um movimento oscilatório de arfagem é comparado com a solução analítica de Theodorsen;
- Comparação entre resultados aerodinâmicos simulados e resultados obtidos de ensaios experimentais em túnel de vento;
- Inclusão de efeitos de compressibilidade no modelo aerodinâmico, aumentando a precisão dos resultados;
- Definição de critérios de estabilidade para o método preditor-corretor utilizado;
- Utilização de outros métodos numéricos para a resolução da equação de movimento;

Finalmente, outras sugestões serão feitas no sentido de aplicar o modelo numérico proposto em outros estudos, como as descritas a seguir:

- Utilização do modelo numérico proposto como uma ferramenta para o projeto de sistemas de controle para supressão de flutter;
- Extensão do modelo numérico proposto para a simulação da resposta aeroelástica de asas rotativas;
- Extensão do modelo numérico proposto para configurações completas de aeronaves;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBANO, E.; RODDEN, W.P. (1969). A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, v.7, n.2, p.279-285, Feb.
- ANDERSON, J. D. (1991). *Fundamentals of aerodynamics*. 2.ed. McGraw-Hill, Inc.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. (1955). *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O. (1969). *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. (1975). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.
- CRAIG Jr., R.R. (1981). *Structural Dynamics: an introduction to computer methods*. John Wiley & Sons.
- DJOJODIHARDJO, R.H.; WIDNALL, S.E. (1969). A numerical method for the calculation of nonlinear, unsteady lifting potential flow problems. *AIAA Journal*, v.7, n.10, p.2001-2009, Oct.
- DOWELL, E.H., ed. (1995). *A modern course in aeroelasticity*. 3.ed. Kluwer Academic Publishers.
- DOWELL, E.H. (1996). Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics: reduced-order models. *AIAA Journal*, v.34, n.8, p.1578-1588.
- EESC/USP TEAM (2000). *Technical Report - AeroDesign East*. Deland. /Relatório técnico EESC-USP/.
- FUNG, Y.C. (1993). *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Dover.
- GARRICK, I.E.; REED III, W.H. (1981). Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, v.18, n.11, p.897-912, Nov.
- GIESING, J.P. (1985). Basic principles and double lattice applications in potential aerodynamics. In: MORINO, L., ed., *Computational methods in potential aerodynamics*. Springer-Verlag. p.155-196.
- GOURA, G.S.L.; BADCOCK, K.J.; WOODGATE, M.A.; RICHARDS, B.E. (2001). A data exchange method for fluid-structure interaction problems. *Aeronautical Journal*, v.105, n.1046, p.215-221, Apr.

- HALL, B.D.; MOOK, D.T.; NAYFEH, A.H.; PREIDIKMAN, S. (2000). A novel strategy for suppressing the flutter oscillations of aircraft wings. In: *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno.
- HANCOCK, G.H.; WRIGHT, J.R.; SIMPSON, A. (1985). On the teaching of the principles of wing flexure-torsion flutter. *Aeronautical Journal*, v.88, n.888, p.285-305, Oct.
- HARDER, R.L.; DESMARAIS, R. N. (1972). Interpolation using surface splines. *Journal of Aircraft*, v.9, n.2. Feb.
- HUGHES, T.J.R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall.
- JAMESON, A. (1997). Essential elements of computational algorithms for aerodynamic analysis and design. *ICASE Report No. 97-68*.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. (1991). *Low-speed aerodynamics: from wing theory to panel methods*. McGraw-Hill, Inc.
- LAMBERT, J.D. (1991). *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. John Wiley & Sons.
- LUTON, J.A.; MOOK, D.T. (1993). Numerical simulations of flutter and its suppression by active control, *AIAA Journal*, v.31, n.12, p. 2312-2319, Dec.
- MARTINS, A.L. (1997). *Estudo de revisão, implementação e aplicação de métodos de painéis em aerodinâmica*. São Carlos. 224 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MARQUES, F.D. (1997). *Multi-layer functional approximation of non-linear unsteady aerodynamic response*. Glasgow. 173 p. Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Glasgow.
- MARQUES, F.D.; VAROTO, P.S.; BENINI, G.R.; OLIVEIRA, L.P.R. (2001). An investigation on the modal characteristics of an aircraft wing structure. In: ESPÍNDOLA, J.J. et al., eds., *Dynamic Problems of Mechanics*. Rio de Janeiro. ABCM. p.465-469.
- MEIROVITCH, L. (1986). *Elements of vibration analysis*. 2.ed. McGraw-Hill.
- PATIL, M.J.; HODGES, D.H.; CESNIK, C.E.S. (2000). Nonlinear aeroelastic analysis of complete aircraft in subsonic flow. *Journal of Aircraft*, v.37, n.5, p.753-760, Sept.-Oct.
- PREIDIKMAN, S. (1998). *Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems*. Blacksburg. 278 p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Virginia Polytechnic Institute and State University.
- PREIDIKMAN, S.; MOOK, D.T. (2000). Time-domain simulations of linear and nonlinear aeroelastic behavior. *Journal of Vibration and Control*, v.6, p.1135-1175.

- RODRIGUES, M. A. L. (1998). *Otimização de parâmetros de atraso para determinação de flutter*. São Carlos. 105 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SAE AERODESIGN[®] (2001). <<http://www.sae.org/students/aerodes.htm>>.
- SILVA, R.G.A. (1994). *Análise aeroelástica no espaço de estados aplicada a aeronaves de asa fixa*. São Carlos. 174 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVA, W.A. et al. (2001). Reduced-order modeling: cooperative research and development at the NASA Langley Research Center. In: *CEAS/AIAA/AIAE International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Madrid.
- SMITH, M.J.; HODGES, D.H.; CESNIK, C.E.S. (2000). Evaluation of computational algorithms suitable for fluid-structure interactions. *Journal of Aircraft*, v.37, n.2, p.282-294, Mar.-Apr.
- SOVIERO, P.A.O.; BORTOLUS, M.V. (1992). Generalized vortex lattice method for oscillating lifting surfaces in subsonic flow. *AIAA Journal*, v.30, n.11, p.2723-2729, Nov.
- STRGANAC, T. W. (1987). *A numerical model of unsteady, subsonic aeroelastic behavior*. Blacksburg. 109 p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Virginia Polytechnic Institute and State University.
- STRGANAC, T.W.; MOOK, D.T. (1990). Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior. *AIAA Journal*, v.28, n.5, p.903-909, May.
- SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC.[©] (1997a). *ANSYS elements reference*. 9.ed.
- SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC.[©] (1997b). *ANSYS structural analysis guide*. 3.ed. Chap.3: Modal Analysis.
- TANG, D.; DOWELL, E.H.; HALL, K.C. (1999). Limit cycle oscillations of a cantilevered wing in low subsonic flow. *AIAA Journal*, v.37, n.3, p.364-371, Mar.
- THEODORSEN, T. (1934). General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. *NACA Report 496*.
- TSUNAKI, R.H. (1999). *Identificação automatizada de modelos dinâmicos no espaço de estados*. São Carlos. 143 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- YATES Jr., E.C. (1985). Unsteady subsonic and supersonic flows – historical review; state of the art. In: MORINO, L., ed., *Computational methods in potential aerodynamics*. Springer-Verlag. p.95-154.
- ZIENKIEWICS, O.C. (1986). *The finite element method*. 3. ed. MacGraw-Hill.