HOMERO GHIOTI DA SILVA

*Regime Não-Linear de Trens de Ondas
Modulados na Direção Transversal em um
Escoamento de Poiseuille Plano*

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Doutor em En-
genharia Mecânica.

Área de Concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Dr. Marcello Augusto Fa-
raco de Medeiros.

São Carlos

2008

Dedico esta tese ao meu filho, Daniel, que é o maior presente que já recebi em minha vida. À minha esposa que foi minha companheira nesta jornada. Aos meus pais, por sempre terem me dado o apoio moral necessário.

Agradecimentos

- À Deus por ter me guiado durante toda esta trajetória.
- À minha família que sempre esteve do meu lado nos momentos difíceis.
- Ao professor Dr. Marcello Augusto Faraco de Medeiros pelo grande companherismo e paciência que teve ao me ensinar.
- Aos amigos do laboratório pelo companherismo e pelas frutíferas discussões.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Silva, H. G. (2008). Regime Não-Linear de Trens de Ondas Moduladas na Direção Transversal em um Escoamento de Poiseuille Plano. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

A presente tese se refere a três principais objetivos. Um objetivo foi desenvolver um código de simulação numérica direta para simulação de ondas de instabilidade em um escoamento de Poiseuille plano. O outro objetivo foi analisá-lo através do Método das Soluções Manufaturadas (MMS), e por fim, um terceiro objetivo foi estudar o regime não-linear da evolução de trens de ondas modulados em um escoamento de Poiseuille plano. O código resolve numericamente, com diferenças finitas de ordem de precisão alta e métodos pseudo espectrais, as equações de Navier-Stokes tri-dimensionais e incompressíveis numa formulação vorticidade-velocidade. O MMS é um método de verificação de código mais completo que os normalmente usados, por exemplo, comparação com Teoria de Estabilidade Linear. O código usa diferenças finitas de ordem alta de precisão, mas com diferentes ordens em diferentes regiões do domínio. O MMS é pouco utilizado neste tipo de código. Concluiu-se que estes códigos em geral não operam na chamada faixa assintótica de erro. Na faixa de trabalho, a ordem do erro varia no domínio computacional de forma consistente com os métodos numéricos empregados. Isto permite, entre outras coisas, a otimização do esquema numérico. Após os testes de verificação, simulações numéricas dos trens de ondas foram realizadas. A análise dos resultados foi feita através das teorias de instabilidade primária e secundária e teoria fracamente não-linear. Foi estudado um trem de ondas modulado numa região do diagrama de instabilidade onde vários estudos para ondas monocromáticas foram realizados. Os resultados sugeriram que nesta região o regime não-linear de transição dos trens de ondas modulados é governado pela instabilidade tipo-K. Com a redução da amplitude inicial de perturbação um cenário mais complexo, que pode estar envolvendo outros mecanismos, foi observado. Casos mais

próximos ao primeiro ramo do diagrama também foram estudados. Nesta região a teoria linear prevê ondas tri-dimensionais sendo as mais instáveis, fato que poderia favorecer a ocorrência da chamada transição oblíqua. Os resultados indicaram que o trem de ondas modulado se divide em duas regiões que tendem-se afastar uma da outra. Apesar de estar associado com a instabilidade linear, este comportamento não havia sido antecipado na literatura. Neste cenário, para trens de ondas modulados isolados, o regime não-linear não pode ser correlacionado claramente com nenhum dos cenários clássicos de transição. Neste contexto transição oblíqua pode estar restrito a situações que envolvem a interação entre trens de ondas modulados.

Palavras-chave: Transição natural. Trens de ondas modulados. Escoamento de Poiseuille plano. Verificação de Código. Método das Soluções Manufaturadas.

Abstract

Silva, H. G. (2008). The Nonlinear Regime of Spanwise Modulated Wavetrains in a Plane Poiseuille Flow. Thesis (Doctoral) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

The current thesis had three objectives. The first objective was to develop a code of direct numerical simulation (DNS) to simulation of waves of instability in a plane Poiseuille flow. The other main objective was to analyze it through the method of Manufactured Solutions (MMS). Finally, a third objective was to study the nonlinear regime of spanwise modulated wavetrains in a plane Poiseuille flow. Using high-order finite differences and pseudo-spectral methods, the DNS code solved the incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations in a vorticity-velocity formulation. The MMS is a verification method more complete than the others more often used, for example, comparison with Linear Stability Theory. The code used different high-order finite differences in different regions of the domain. The MMS has been little used for this type of code. It was concluded that these codes generally do not operate in the so-called error asymptotic range. In the working range, the observed order changes in the computational domain in a manner consistent with the numerical methods employed. This allows, among other things, optimization of the numerical scheme. After testing, numerical simulations of the wavetrains were performed. The analysis of the results was made based on the primary and secondary instability theories and weakly non-linear theory. A modulated wavetrain was studied in a region of the stability diagram where several studies for monochromatic waves were performed. The results suggested that in this region the non-linear regime of transition of the modulation wavetrain is governed by the K-type instability. With the reduction of the magnitude of the initial disturbance, a more complex scenario, which may involve other mechanisms, was observed. Cases near the first branch of the instability diagram were also studied. In this region, the linear theory predicts tri-dimensional waves

are the most unstable, a fact that could lead to the so-called oblique transition. The results indicated that the modulated wavetrain divided into two regions, which tend move further from each other. Despite being associated with the linear instability, this behavior was not anticipated in the literature. In this scenario, for isolated modulated wavetrains, the non-linear system could not be clearly correlated with any of the classic scenarios of transition. In this context, oblique transition may perhaps to situations involving the interaction between modulated wavetrains.

Keywords: Natural transition. Spanwise modulated wavetrains. Plane Poiseuille flow. Code verification. Method of manufactured solutions.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xix
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 Instabilidade e Transição	9
2.2 Verificação de Código: O Método das Soluções Manufaturadas	20
3 Modelagem Matemática das Ondas de Instabilidade em um Escoamento de Poiseuille Plano	27
3.1 Equações Governantes	27
3.2 Condições de Contorno	30
3.3 Introdução de Perturbações	31
4 Esquema de Solução e Metodologia Numérica	33
4.1 Espaço de Fourier: Derivadas nas direções x e z	33
4.2 Diferenças Finitas Compactas: Derivadas na direção y	35

4.2.1	Primeira Derivada	36
4.2.2	Segunda Derivada	37
4.3	Integração Temporal: Vorticidade no Interior do Domínio	38
4.3.1	Esquema de Solução	41
4.4	Vorticidade na Parede	42
4.5	Velocidade	43
5	Teste de Verificação do Código	45
5.1	O Método das Soluções Manufaturadas	45
5.1.1	Discretizações Espaciais	49
5.1.1.1	Análise do Erro Global.	51
5.1.1.2	Análise do Erro Local.	57
5.1.2	Discretizações Temporais	62
5.2	Instabilidade Primária	66
5.2.1	Teoria de Instabilidade Hidrodinâmica Linear	66
5.2.2	Simulações e Comparações de Casos Testes	69
5.2.3	Teste de Convergência de Malha	72
5.3	Instabilidade Secundária	73
5.3.1	Teoria de Instabilidade Secundária	73
5.3.2	Simulações e Comparações de Casos Testes	73
5.3.3	Estudo de Convergência na Malha	77
6	Trens de Ondas Modulados	81
6.1	Escolha dos Casos para as Simulações	82

6.2	Condição Inicial	85
6.3	Resultados e Análise das Simulações	88
6.3.1	Caso1: $\alpha = 1$	88
6.3.1.1	Investigação da Instabilidade tipo-K	93
6.3.1.2	Efeito de Amplitude	99
6.3.2	Caso2: $\alpha = 0,93$	103
6.3.3	Caso 3: $\alpha = 0,86$	107
7	Convergência de Malhas para as Simulações dos Trens de Ondas	113
7.1	Forma de Excitação do Escoamento e Condição Inicial	114
7.2	Convergência de Malhas	117
7.2.1	Direção Transversal	118
7.2.2	Direção Normal	123
7.3	Escolha do Passo no Tempo	124
8	Resultados, Observações Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros	127
8.1	Teste de Verificação de Código	128
8.1.1	Resultados	129
8.2	Trens de Ondas Modulados	130
8.2.1	Resultados	131
8.3	Observações Finais	134
8.4	Sugestões para Trabalhos Futuros	136

Lista de Figuras

1	Desenho esquemático da transição em camada limite devido à pequenas perturbações. Extraído de Kachanov (1994).	10
2	Esquema de interação entre ondas e a origem dos cenários clássicos de transição. <i>Superior</i> : transição tipo-K. <i>Intermediária</i> : transição tipo-H. <i>Inferior</i> : transição tipo-O.	11
3	Simulação numérica dos três cenários clássicos de transição. a) instabilidade tipo-K. b) instabilidade tipo-H. c) instabilidade tipo-O. O escoamento é da esquerda para direita. Copiado de Berlin (1998).	12
4	Comparação da evolução espacial de um trem de onda monocromático e um pacote de ondas.	13
5	Evolução espacial de pacotes de ondas em camada limite ao longo da linha do centro do escoamento. Figura no topo representa o pacote pelo pulso positivo. Copiado de Medeiros e Gaster (1999a).	15
6	Domínio espectral. Evolução espacial de um pacote de ondas em camada limite. Copiado de Medeiros e Gaster (1999b).	16
7	Evolução espacial de um trem de ondas em camada limite a uma distância de $0.6\delta^*$ da parede mostrada em planos direção transversal $\times$ tempo. Copiado de (MEDEIROS, 2004).	18
8	Comportamento do erro absoluto global para a vorticidade. Resultados usando a norma da média, L_1 . Extraído de Silva, Souza e Medeiros (2008).	23

9	Ilustração Esquemática do Domínio de Integração	31
10	Velocidade u projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, u no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$	47
11	Velocidade v projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, v no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$	47
12	Velocidade w projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, w no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$	47
13	Vorticidade ω_x projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para di- reita, ω_x no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	48
14	Vorticidade ω_y projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para di- reita, ω_y no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	48
15	Vorticidade ω_z projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para di- reita, ω_z no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	48
16	Forçante F_x projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_x no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	49
17	Forçante F_y projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_y no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	49
18	Forçante F_z projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_z no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$	49
19	Comportamento do erro de discretização global para a componente u da velocidade.	51
20	Comportamento do erro de discretização global para a componente v da velocidade.	52
21	Comportamento do erro de discretização global para a componente w da velocidade.	52

22	Erro total E_5 para as componentes da velocidade.	55
23	Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_x da vorticidade.	56
24	Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_y da vorticidade.	57
25	Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_z da vorticidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	58
26	Comportamento do erro de discretização local para a componente u da velocidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	59
27	Comportamento do erro de discretização local para a componente v da velocidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	60
28	Comportamento do erro de discretização local para a componente w da velocidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	61
29	Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_x da vorticidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	63
30	Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_y da vorticidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	64
31	Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_z da vorticidade. a) resultados com precisão dupla. b) resultados com precisão quádrupla.	65

32	Diagrama de instabilidade linear das ondas bi-dimensionais.	68
33	Evolução temporal da componente u da velocidade de ondas TS tri-dimensionais. Os resultados foram obtidos do ponto $(0, 12\lambda_x; 1, 85H; 0, 12\lambda_z)$ de u e foram comparados com a LST.	70
34	Valor absoluto do perfil da perturbação da velocidade na direção y após evolução de 10 ciclos no tempo.	71
35	Simulação da curva de amplificação temporal do caso teste instável I usando cinco diferentes malhas.	73
36	Evolução temporal da energia dos modos de Fourier durante as ressonâncias fundamental (a) e subharmônica (b).	76
37	Iso-superfície de valor 0,15 para os vórtices Λ resultantes da instabilidade do tipo K.	77
38	Iso-superfície de valor 0,15 para os vórtices Λ resultantes da instabilidade do tipo H.	78
39	Simulações da instabilidade tipo-K usando quatro diferentes malhas. Com- parações dos resultados para o modo $(1, 1)$	78
40	Curvas neutras de diagramas de instabilidade de ondas TS 2D e 3D.	83
41	Evolução espectral dos modos transversais fundamentais durante o início do estágio linear. <i>Topo à esquerda:</i> caso $\alpha = 1$. <i>Topo à direita:</i> caso $\alpha = 0,93$. <i>Inferior:</i> caso $\alpha = 0,86$	85
42	Caso $\alpha = 1$. Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Os modos de $(1, 0)$ até $(1; 0, 63)$ representam a faixa primária, os modos de $(1; 0, 84)$ até $(1; 1, 29)$ representam a faixa intermediária e os modos de $(1; 1, 68)$ até $(1; 2, 55)$ representam a faixa inferior.	87

43	Evolução temporal de amplitude dos modos fundamentais. Ajuste inicial de amplitude para duas faixas de modos.	88
44	Isosuperfícies $Q = 1 \times 10^{-5}$. Caso $\alpha = 1$	89
45	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(1, n\beta)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A_0 = 2 \times 10^{-5}$	91
46	Espectro Transversal no tempo adimensional $t = 2000$. A linha à frente representa os modos $(0, n\beta)$, a linha intermediária os modos $(1, n\beta)$ e a linha ao fundo os modos $(2, n\beta)$	92
47	Instabilidade tipo-K. Evolução temporal da amplitude dos modos transversais $(1, n\beta)$	94
48	Evolução temporal dos modos transversais. <i>Superior:</i> Evolução desde o início. <i>Inferior:</i> Vista ampliada do intervalo de tempo adimensional usado no cálculo do fator de crescimento dos modos.	96
49	Medidas do fator de amplificação das ondas TS tri-dimensionais apresentadas na figura 48.	97
50	Evolução temporal dos modos de Fourier. Comparação entre as simulações de instabilidade tipo-K e trem de ondas modulado.	98
51	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(1, n\beta)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 1 \times 10^{-5}$	100
52	Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 1 \times 10^{-5}$	101
53	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(1, n\beta)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 5 \times 10^{-6}$	101

54	Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 5 \times 10^{-6}$	102
55	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(1, n\beta)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 2, 5 \times 10^{-6}$	102
56	evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 2, 5 \times 10^{-6}$	103
57	Isosuperfícies $Q = 1 \times 10^{-5}$. Caso $\alpha = 0, 93$	104
58	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(0, 93; n)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$	105
59	Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ e da amplitude máximo do espaço físico. A linha tracejada indica o tempo adimensional onde se iniciou o crescimento explosivo dos modos.	107
60	Iso-superfícies $Q = 1 \times 10^{-6}$. Caso $\alpha = 0, 86$	108
61	Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. <i>Topo à esquerda:</i> modos $(0, n\beta)$. <i>Topo à direita:</i> modos $(1, n\beta)$. <i>Inferior:</i> modos $(2, n)$. Amplitude inicial dos modos fundamentais, $A = 2 \times 10^{-5}$	109
62	Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(0, 86; n\beta)$. Caso $\alpha = 0, 86$	110
63	Localização do caso estudo no diagrama de instabilidade linear para ondas bi-dimensionais.	114
64	Formato da perturbação visto em dois ângulos diferentes. Resultado recorde da posição fixada $y = 0, 15$	115

65	Condição inicial do espectro transversal para a componente longitudinal de velocidade numa posição fixa $y = 0,15H$	116
66	Perfil na direção normal de algumas ondas TS que compõem o trem de ondas. A região ampliada do gráfico mostra os pontos de máximo e da posição fixada $y = 0,15H$	117
67	Amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ da velocidade u na altura $y = 0,15$. Da esquerda para direita o número de modos transversais excitados foram $n = 11$, $n = 21$ e $n = 61$ respectivamente.	120
68	Componente longitudinal u da velocidade na altura fixa $y = 0,15H$. Da esquerda para direita, simulações com o menor beta transversal β_0 sendo 0,06, 0,03 e 0,01.	121
69	Amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ da componente u da velocidade na altura $y = 0,15H$. Da esquerda à direita, as simulações foram realizadas com $\beta_0 = 0,03$ e números de modos transversais sendo 43, 85, 169 respectivamente.	122
70	Resultados num domínio espectral transversal para a componente longitudinal de velocidade (u) recordados na altura $y = 0,15H$	122
71	Estudo da resolução na direção y . Evolução temporal dos modos $(1, 1)$ e $(1, 16)$ e comparações com a Teoria de Estabilidade Linear.	124
72	Estudo do espaçamento no tempo. Evolução temporal dos modos $(1, 1)$ e $(1, 16)$ e comparações com a Teoria de Estabilidade Linear.	125

Lista de Tabelas

1	Malhas usadas no TCM.	51
2	Parâmetros para as simulações dos casos testes lineares.	70
3	Parâmetros para as simulações das instabilidades tipo-K e H.	75
4	Parâmetros e malhas utilizados nas presentes simulações ¹	82
5	Parâmetros para os estudos da resolução transversal ²	119

Lista de Símbolos

$\mathcal{A}$	Vetor de coeficientes do lado esquerdo de um sistema de equações semi-implícitas usadas na solução com Crank-Nicolson;
A, B, C	Termos não lineares das equações de Navier-Stokes tri-dimensionais na formulação vorticidade-velocidade (termos no espaço de Fourier);
A_0	Amplitude inicial de um modo de Fourier;
A_t	Amplitude final de uma modo de Fourier;
$A(l, k)$	Amplitude do modo de Fourier (l, k) ;
a, b, c	Termos não lineares das equações de Navier-Stokes 3D na formulação vorticidade-velocidade (termos no espaço físico);
Δ	Operador gradiente;
Δx	Espaçamento da malha na direção x ;
Δy	Espaçamento da malha na direção y ;
Δz	Espaçamento da malha na direção z ;
Δt	Intervalo de tempo para a integração temporal;
∇^2	Laplaciano;
∇^{l,k^2}	Laplaciano no espaço de Fourier;

E_m	Erro numérico absoluto na malha m
$E_0(t)$	Energia Cinética do escoamento de Poiseuille plano;
$E_{i,k}(t)$	Energia Cinética dos modos de Fourier;
f_m	Solução numérica sobre a malha m ;
f_{manuf}	Solução manufaturada sobre a malha m ;
F_x	Termo forçante na direção x ;
F_y	Termo forçante na direção y ;
F_z	Termo forçante na direção z ;
g^p	Coeficiente do termo dominante do erro de truncamento espacial;
H	Metade da altura entre as placas;
$\Re$	Parte imaginária de um número complexo;
$K1, K2$	Partes de N que satisfazem $K1 + K2 = N$;
L_1	Norma da média;
L_∞	Norma do máximo;
$lmax$	Número máximo de iterações do fator de relaxamento usado juntamente com Crank-Nicolson;
L_x, L_z	Comprimento de uma metade do domínio Espectral nas direções longitudinal e transversal respectivamente;
m	m -ésima malha;
N_x, N_k	Número de modos em um lado do espectro nas respectivas direções x e z .
n_x, n_z	Número de pontos na discretizações na direções x e z ;

N	Número máximo de pontos para as discretizações na direção y
p	Ordem de precisão teórica do código;
Q	Nível da iso-superfície;
Re	Número de Reynolds;
$\Re$	Parte real de um número complexo;
$\mathcal{R}$	Vetor de coeficientes do lado direito de um sistema de equações semi-implícitas usadas na solução com Crank-Nicolson;
t	Tempo adimensional;
t_1	Tempo adimensional onde iniciou a perturbação;
t_2	Tempo adimensional onde terminou a perturbação;
u, v, w	Componentes da perturbação de velocidade no espaço físico;
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Soma das componentes das perturbações de velocidade e do escoamento base no espaço físico;
U, V, W	Componentes da perturbação de velocidade no espaço de Fourier;
U', V'	Componentes da velocidade do escoamento base;
U_{max}	Velocidade máxima na distribuição do perfil do escoamento de Poiseuille;
y_0	Altura no escoamento onde foi introduzido a perturbação;
s	Representante de qualquer variável $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, a, b, c$ no espaço físico;
S	Representante de qualquer variável $U, V, W, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, A, B, C$ no espaço de Fourier;

Símbolos Gregos:

- α Número de onda longitudinal;
- β Notação geral para número de onda transversal;
- β_0 Menor número de onda transversal;
- λ_x, λ_z Comprimentos de onda nas direções longitudinal e transversal respectivamente;
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ Componentes da perturbação de vorticidade na espaço físico;
- $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ Soma das componentes das perturbações de vorticidade com a do escoamento base no espaço físico;
- Ω' Vorticidade do escoamento base;
- $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ Componentes da perturbação de vorticidade na espaço de Fourier;
- ϕ Fase da perturbação;
- ν Viscosidade cinemática;

Subscritos e sobrescritos:

- $2D$ Bi-dimensional;
- $3D$ Tri-dimensional;
- m m -ésima perturbação;
- x, y, z Direções longitudinal, normal e transversal ao escoamento;
- $\rightarrow$ Notação para vetor;

* Quantidade dimensional;

' Primeira derivada;

" Segunda derivada;

l, j, k Contadores;

I, K Contadores;

Siglas:

CFL Condição de estabilidade para os termos convectivos da equação de Navier-Stokes;

DNS Abreviação em inglês de Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation*);

LST Abreviação em inglês de Teoria de Estabilidade Linear (*Linear Stability Theory*);

MMS Abreviação em inglês de Método das Soluções Manufaturadas (*Method of Manufactured Solutions*);

rhs abreviação em inglês de lado direito da equação (right hand side);

TCM Teste de Convergência de Malhas;

TEL Teoria de Estabilidade Linear;

TS3D Onda de Tollmien-Schlichting tri-dimensional;

TS2D Onda de Tollmien-Schlichting bi-dimensional;

Introdução

O fenômeno da transição laminar-turbulento de escoamentos é um assunto de intensa pesquisa, pois é de extremo interesse prático prever quando um dado escoamento é laminar ou turbulento. O fato é que a taxa de transferência de calor e o coeficiente de atrito são muito maiores em um corpo imerso em um escoamento turbulento que num escoamento laminar. Por um lado retardar a transição de um escoamento laminar para turbulento é de grande interesse para aerodinâmica de aeronaves. Por outro lado, em câmaras de combustão um escoamento altamente turbulento é necessário para uma eficiente mistura de ar e combustível.

O presente trabalho envolveu três principais objetivos. Um objetivo foi desenvolver um código computacional modificando um código já existente de simulação numérica direta espacial das equações de Navier-Stokes numa versão bi-dimensional para simulação numérica direta temporal numa versão tri-dimensional. O código foi desenvolvido para simular os primeiros estágios da transição laminar-turbulento de escoamentos de Poiseuille plano devido a evolução de sistemas de ondas de Tollmien-Schlichting. Tendo desenvolvido o código foi possível atingir outros dois principais objetivos que foram estudar uma metodologia de verificação de código usando o Método das Soluções Manufaturadas (MMS em inglês) e realizar um estudo do regime não-linear de trens de ondas modulados que levam um escoamento de Poiseuille plano à transição natural. Trens de ondas modulados

são sistemas formados por pequenas ondas tri-dimensionais de mesmo número de onda longitudinal e uma variedade de números de onda transversais. Transição natural é aquela que ocorre numa situação prática, por exemplo, a transição do escoamento sobre a asa de um avião em voo.

No campo da engenharia aeroespacial, uma importante parte dos estudos em transição se dá nos escoamentos sobre aerofólios e asas. Isto porque um retardo da posição do ponto de transição de um escoamento sobre um aerofólio têm influência direta na desempenho de uma aeronave devido à significativa redução de arrasto. A redução de arrasto leva à redução no consumo de combustível. De acordo com Reneaux (2004), estima-se que em torno de 22% do custo operacional direto (em inglês: DOC - Direct Operating Cost) de uma aeronave de longo alcance corresponda à gastos com combustíveis. Os outros 78% correspondem à gastos com taxas de aerovias e aeroportos, soldos e despesas da equipe de terra e de cabine, “leasing” das aeronaves, equipe de manutenção, material de consumo e depreciação da aeronave. É nítida, portanto, a importância de se desenvolver tecnologias que permitam a redução de arrasto. Além do mais, uma redução de consumo de combustível permite uma melhoria na qualidade do ar em torno de aeroportos, redução da quantidade de poluentes lançado no meio ambiente, menor impacto nas mudanças climáticas, dentre outros. Redução de arrasto permite também menor nível de ruído emitido pelas aeronaves.

Diante das recentes preocupações ambientais, a Europa têm-se preocupado com o projeto ecologicamente correto (em inglês, *greener by design*) pretendendo, para até 2050, o desenvolvimento de tecnologias aeronáuticas que permitam reduzir em até 50% a emissão de poluentes pelas aeronaves. A estratégia para este objetivo é desenvolver tecnologias que permitam redução de arrasto de aeronave em voo (GREEN, 2002). Com isso, as companhias aéreas também se beneficiariam, pois um aumento de 1% na relação sustentação-arrasto em cruzeiro, de uma aeronave como um Airbus A320, permite uma redução de combustível que corresponde a capacidade de elevar em 10 passageiros a carga paga. Como esta aeronave transporta cerca de 180 passageiros, é possível aumentar portanto 5% do

faturamento da companhia aérea, o que é da ordem de grandeza do seu lucro.

Dentre as tecnologias cabíveis para se reduzir arrasto de uma aeronave, destacam-se as técnicas de controle de escoamento laminar. A idéia é retardar o ponto de transição da camada limite do escoamento sobre as asas de um avião em vôo usando de artifícios como mudança do formato do aerofólio, sucção na camada limite, esfriamento e aquecimento das paredes do aerofólio, cancelamento de ondas, dentre outros (GAD.EL.HAK, 2000). Além destas técnicas existe também o uso de aerofólios híbridos, que empregam uma combinação ajuste de formato do aerofólio e sucção na camada limite (JOSLIN, 1998). Esta técnica é citada no projeto *Greener by design* como uma técnica promissora na busca de redução de arrasto das aeronaves em cruzeiro.

Em adição ao conceito de retardo do ponto de transição, o uso de métodos de predição do ponto de transição têm um importante impacto na indústria aeronáutica. Estes métodos são utilizados em projetos de aerofólios e asas. Dentre os métodos de predição, os mais justificáveis são aqueles que envolvem a Teoria de Estabilidade Hidrodinâmica Linear, tal como o método e^N . Este método assume que a transição acontece devido à pequenas perturbações que evoluem e descrevem na camada limite um comportamento exponencial previsto pela teoria Linear. O estágio não-linear não é levado em conta mas é, a grosso modo, correlacionado por um comportamento também linear. Isto porque o comportamento linear já é bem conhecido, estabelecido e amplamente comprovado por estudos experimentais, numéricos e teóricos. De modo contrário, o regime não-linear é bem mais complexo para se interpretar e, para um importante número de casos, acontece muito rápido no processo da transição. A partir de estudos de um número de escoamentos em túneis de vento de baixa turbulência, o fator N mais indicado para prever o ponto de transição é em torno de $N = 9$. Entretanto, outros valores de N também podem ser considerados dependendo do escoamento estudado e do nível de turbulência do escoamento externo à camada limite. Maiores detalhes sobre o método e^N podem ser encontrados em Boiko et al. (2002).

A maior importância deste método de predição se dá do ponto de vista prático, espe-

cialmente em projetos de aerofólios que possuem extensa região laminar. Estes aerofólios são bastante usados em aviões de pequeno porte ou em aviões de competições, que em geral possuem número de Reynolds mais baixos (DRELA; GILES, 1987). No entanto, do ponto de vista científico este método não é considerado suficiente principalmente devido ao desprezo das etapas não-lineares do processo. De fato, um dos desafios dos estudos em transição é entender e modelar os mecanismos não-lineares que promovem a origem da turbulência. O método e^N também não leva em conta a receptividade do escoamento às perturbações que induzem as ondas na camada limite e, portanto, não considera a amplitude inicial destas ondas.

O entendimento do estágio não-linear de um escoamento transicional de laminar para turbulento ainda requer muitos esforços por parte da ciência. A maior parte dos cenários de transição estudados são muito controlados e simplificados, e podem não descrever com razoável rigor o que acontece na situação prática, a transição natural. O fato é que nestes cenários simplificados os estudos são dedicados à evolução de pequenas ondas de instabilidade que são monocromáticas e bi-dimensionais. No entanto, as perturbações irregulares e aleatórias que ocorrem em situações práticas, causando a transição natural, resultam em sistemas de número elevado de pequenas ondas tri-dimensionais que são modulados nas direções longitudinal e transversal ao escoamento. Nos sistemas de ondas monocromáticas as interações não-lineares são mais simples e permitem mais facilmente a formulação de teorias que explicam o fenômeno. O que se espera é que, a partir destas teorias, outras possam ser desenvolvidas e permitam a predição ou até o controle do fenômeno em situações práticas. No entanto estes cenários controlados e simplificados não condizem muito com a transição natural (GASTER, 1978).

A transição natural pode ser aproximada introduzindo-se na camada limite uma perturbação que contém várias ondas tri-dimensionais de várias frequências (ondas moduladas tri-dimensionais). Estas perturbações imitam as perturbações que ocorrem em situações práticas. Uma série de experimentos e simulações numéricas sobre o desenvolvimento não-linear de ondas moduladas e tri-dimensionais em camada limite foram realizadas por

Medeiros e Gaster (1999a, 1999b) e Medeiros (2004). Os estudos permitiram uma série de conclusões mas o não-paralelismo da camada limite dificultou a interpretação dos dados experimentais e prejudicou maiores avanços na análise dos resultados. O presente trabalho se insere como um esforço para se entender o fenômeno da transição natural em escoamentos simplificados pelo paralelismo, tal como o escoamento de Poiseuille plano. Este trabalho limitou-se somente ao estudo da tri-dimensionalidade, ou seja, de sistemas de ondas modulados somente na direção transversal, os trens de ondas tri-dimensionais. De fato o modelo imita uma fonte harmônica puntual. Numa situação prática, estes sistemas de ondas podem ser gerados por uma rugosidade interagindo com uma onda acústica na superfície de um aerofólio.

A maior parte dos estudos do fenômeno da transição se dá em camadas limites sobre placas planas. Entretanto, na engenharia aeronáutica os principais interesses estão na interpretação deste fenômeno em camadas limites sobre asas. Claro que escoamentos sobre asas são muito mais complexos que os escoamentos sobre placas planas, principalmente pelo fato de uma asa ser finita, com possíveis curvaturas e enflechamento. Em placas planas estas dificuldades são descartadas. No entanto, em se tratando de transição devido a ondas Tollmien-Schlichting (TS) em camada limite, os mecanismos não-lineares que antecederem o ponto de transição são muito parecidos em ambas as configurações geométricas. Além do mais, existem importantes aplicações aeronáuticas de escoamentos transicionais a baixo número de Mach e por isso a incompressibilidade também é uma hipótese bastante assumida. Em suma, o objetivo dos estudos em transição é entender os mecanismos não-lineares que favorecem a transição de escoamentos mais simples com a esperança de se entender o fenômeno em escoamentos mais complexos. O presente trabalho não foge desta abordagem.

Do ponto de vista científico, estudos do fenômeno da transição em escoamentos de Poiseuille plano podem ser de fundamental importância para se entender o fenômeno da transição. O fato é que em camada limite o número de Reynolds depende da sua espessura e, portanto, varia de acordo com a posição na direção de evolução do escoamento. Isto

é contrário ao escoamento de Poiseuille plano cujo número de Reynolds é função de um parâmetro fixo, como a metade da distância entre as placas, e pode ser utilizado como um parâmetro de controle. Além do mais, já está estabelecido que os cenários clássicos de transição que acontecem em camada limite também acontecem em escoamentos de Poiseuille plano (NISHIOKA; LIDA; ICHIKAWA, 1975; ELOFSSON; ALFREDSSON, 1998). No entanto, talvez nenhum trabalho antes desta tese tenha investigado se, como acontece nos cenários simplificados de transição, os mecanismos não-lineares da transição natural em camada limite também acontecem em escoamentos de Poiseuille plano.

Experimentos físicos em escoamentos de Poiseuille plano são comparativamente mais difíceis de realizar e por isso, no presente trabalho, optou-se por simulações numéricas diretas. O esquema de solução das equações governantes utiliza métodos de ordem alta de precisão. Isto é necessário para simulações de escoamentos transicionais que, mesmo em um regime linear, requerem correta representação das variáveis de pequenas escalas no espaço e no tempo (ZANG; KIRST, 1989; SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005). O presente código numérico é uma extensão tri-dimensional e pseudo-espectral de um código numérico que foi desenvolvido por Souza, Mendonça e Medeiros (2005). Aquele código simula ondas TS bi-dimensionais evoluindo espacial e temporalmente ao longo do escoamento de Poiseuille plano. Simulações espaciais requerem grandes domínios computacionais. Isto porque é necessário representar em um só domínio toda a evolução do escoamento, incluindo os estágios linear e não-linear do processo. A formulação espacial é importante para os estudos de escoamentos não paralelos, tal como escoamento de camada limite, mas não essencial para escoamentos paralelos e por isso não foi adotada no presente trabalho. Alguns exemplos recentes de simulações espaciais do fenômeno da transição em camada limite usando métodos de alta ordem de precisão podem ser encontrados em Kloker (1998), Meitz e Fasel (2000) ou Souza (2003). Simulações espaciais de alta precisão de ondas de estabilidade em escoamentos de Poiseuille plano podem também ser encontradas em Fasel e Bestek (1980).

Para o presente trabalho que envolve um escoamento paralelo, pôde-se assumir con-

dição de contorno periódica em ambas as direções longitudinal e transversal do domínio. Isto permitiu o uso de métodos espectrais nestas direções e a realização de simulações com evolução temporal. Ao contrário do código numérico que realiza simulação espacial, o presente código simula uma evolução temporal. Quando comparada às simulações espaciais, as simulações temporais requerem um domínio computacional relativamente menor. De fato, é suficiente para a análise temporal o uso de um domínio computacional que comporte apenas um comprimento de onda na direção longitudinal. Além disso, nas direções periódicas o uso de métodos espectrais invés de diferenças finitas resulta cálculos mais eficientes e com melhor precisão. Estas vantagens reduzem significativamente o custo computacional. Simulações temporais dos cenários clássicos de transição do escoamento de Poiseuille plano podem ser vistas em Orzag e Patera (1983), Hwang e Wu (1998) e Weber (2000). Há quem realizou simulações temporais em camada limite, mas assumir paralelismo para estudos do regime não-linear da transição de escoamentos não-paralelos pode ser artificial demais. O presente trabalho não se dedicou à camada limite, mas alguns exemplos de simulações temporais dos cenários simplificados da transição em camada limite podem ser encontrados em Orzag e Patera (1983), Wray e Hussaini (1984), Laurien e Kleiser (1989) e Marxen (1998).

Tendo o código numérico desenvolvido foi possível estudar um método de verificação de código que pudesse ser mais robusto que os métodos mais usuais. Em geral, na área de simulações numéricas da transição, o que comumente se faz em termos de verificação é simular e comparar resultados lineares com a Teoria de Instabilidade Hidrodinâmica Linear. Além disso, usa-se comparar resultados numéricos com resultados obtidos por outros códigos computacionais. Devido ao limitado rigor matemático, estes testes podem não dar plena confiança de que o código está bem verificado. Um bom teste de verificação deve usar uma solução exata para comparações com a solução numérica. Esta solução deve testar todas as rotinas do código, sem nenhuma simplificação das equações simuladas, mantendo as condições de contorno do problema que se quer simular. Isto permite também um sistemático teste de convergência de malhas, onde pode-se verificar a ordem

de precisão com que o erro numérico converge para a solução exata. Uma maneira de se obter uma solução exata é construí-la artificialmente somando termos fontes nas equações simuladas. Este é o Método das Soluções Manufaturadas (em inglês *Method of Manufactured Solutions, MMS*) (ROACHE, 1998). No presente trabalho o MMS foi utilizado para o teste de verificação do presente código.

Os resultados do teste foram favoráveis dando confiança de que os erros de programação, caso existam, são irrelevantes. Eles confirmaram e apontaram a grande importância de se realizar um extenso teste de verificação de código.

Após a realização destes testes de verificação as simulações numéricas de trens de ondas modulado evoluindo em um escoamento de Poiseuille plano foram realizadas. Os resultados sugeriram que numa faixa extensa de parâmetros, o regime não-linear do presente escoamento foi influenciado por um cenário envolvendo amplificação das ondas tridimensionais por um mecanismo de ressonância conhecido como instabilidade tipo-K. Outros cenários também foram identificados, mas não puderam ser associados a nenhum dos cenários clássicos da transição.

A presente tese é organizada como segue: o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica separada em dois itens: um reportando sobre transição laminar-turbulento dos escoamentos parietais camada limite e escoamento de Poiseuille plano e o outro reportando sobre testes de verificação de código. O Capítulo 3 apresenta a formulação, domínio computacional, condições de contorno e uma técnica de perturbação que imita sucção e sopro nas paredes usado em experimentos. Capítulo 4 apresenta o esquema de solução e o método numérico adotado para as simulações numéricas. O Capítulo 5 apresenta os resultados do teste de verificação do presente código usando o MMS. Além deste teste lá se encontram também os resultados e comparações das simulações de casos descritos pelas Teorias de Estabilidade Linear e Secundária. No capítulo 6 são apresentadas as simulações de trens de ondas modulado em um escoamento de Poiseuille plano. Também naquele Capítulo é apresentado a análise dos resultados. Estudos da condição inicial, escolha dos parâmetros e teste de convergência de malhas para as simulações dos Capítulo

6 são apresentados no capítulo 7. O Capítulo 8 dá as observações finais e sugestões para trabalhos futuros e por fim o apêndice A apresenta os termos fontes usados nas equações governantes para o Teste de verificação usando o MMS.

Revisão Bibliográfica

A presente revisão envolveu dois diferentes assuntos. O primeiro se refere à instabilidade e transição de escoamentos laminares parietais, a saber, camada limite e escoamento de Poiseuille plano. O segundo apresenta um estudo de metodologias para se realizar um teste eficiente de verificação de um código computacional.

2.1 Instabilidade e Transição

O fenômeno da transição laminar-turbulento em escoamentos (camada limite, escoamento de Poiseuille plano, camada de mistura, etc) em geral se origina a partir da instabilidade do escoamento laminar a perturbações. Estas perturbações podem ser provocadas por rugosidades na superfície, turbulência no escoamento externo ou por ruído acústico, por exemplo. Quando estas perturbações são relativamente pequenas, dão origem às ondas Tollmien-Schlichting (TS). Estas ondas são instáveis para certas faixas de número de Reynolds e comprimentos de onda e apresentam crescimento exponencial quase sempre na direção do escoamento. A faixa de parâmetros para ondas instáveis e as taxas de amplificação são muito bem previstas pela teoria de instabilidade hidrodinâmica¹ linear (SCHMID; HENNINGSON, 2001; BOIKO et al., 2002; MENDONÇA, 2003). Quando estas ondas atingem grandes amplitudes, elas provocam a quebra da estrutura do escoamento

¹Embora usa-se o termo hidrodinâmica, a teoria de instabilidade hidrodinâmica se aplica também para qualquer outro tipo de escoamentos.

laminar dando origem à turbulência (KACHANOV, 1994). Antes da quebra da estrutura do escoamento laminar, as ondas TS apresentam um comportamento que não é previsto pela teoria linear. Este regime não-linear é, em última análise, aquele que determina o ponto de transição para a turbulência. A figura 1 apresenta um desenho esquemático de uma perturbação que origina uma onda TS evoluindo na camada limite sobre uma placa plana. Nesta figura, o parâmetro δ indica a espessura da camada limite, Re_c indica o número de Reynolds onde as ondas TS que ficam instáveis passam a crescer exponencialmente e Re_t indica o número de Reynolds onde o escoamento se torna turbulento.

Figura 1: Desenho esquemático da transição em camada limite devido à pequenas perturbações. Extraído de Kachanov (1994).

A transição laminar-turbulento pode também ser provocada pelas perturbações iniciais de grande amplitude sem o aparecimento das ondas Tollmien-Schlichting. Quando isto ocorre, a transição é chamada abrupta (em inglês, *by-pass transition*). A transição abrupta não é um tema abordado no presente trabalho.

A maior parte da pesquisa sobre o regime não-linear se dedica ao estudo da evolução de ondas TS 2D monocromáticas regulares. Estes estudos revelaram a existência de instabilidades secundárias que permitem a amplificação seletiva de ondas TS 3D oblíquas (KLEBANOFF; TIDSTROM; SARGENT, 1962; HERBERT, 1988; KACHANOV, 1994). Estas ondas TS 3D podem apresentar a mesma frequência da onda TS 2D ou sua frequência sub-harmônica. O fato é que durante seu crescimento, quando a onda TS 2D atinge uma

amplitude que corresponde em torno de 1 % da amplitude do escoamento base, causa um processo não-linear de ressonância entre a onda TS 2D e as selecionadas ondas TS 3D, promovendo crescimento em amplitude destas ondas tri-dimensionais. No primeiro caso têm-se a instabilidade tipo-K ou ressonância fundamental, no segundo a tipo-H ou ressonância sub-harmônica. Um terceiro cenário de transição foi revelado por estudos da evolução não-linear de pares de ondas TS 3D, resultando na formação de estrias longitudinais. Este cenário é denominado transição oblíqua ou transição tipo-O (ELOFSSON; ALFREDSSON, 1998). Um diagrama explicativo do processo não-linear para as três situações é mostrado na figura 2. A notação $(1, 0)$ indica uma onda TS 2D, $(1, 1)$ e $(1, -1)$ indicam ondas TS 3D oblíquas, todas mostradas em um gráfico $x \times z$ representando as direções periódicas longitudinal e transversal respectivamente. As linhas representam apenas as estrias e vales destas ondas, sendo as linhas escuras indicando as estrias e as linhas claras indicando os vales de mínima amplitude. Os círculos pretos indicam as regiões onde surgem as somas fortuitas entre as ondas. Nestas específicas regiões os diferentes processos não-lineares dão origem a vórtices longitudinais que são um dos ingredientes do regime turbulento (PANTON, 2001).

A figura 3 apresenta resultados de simulações numéricas da evolução espacial dos três cenários de transição descritos acima. Note nas figuras 3 **a)** e 3 **b)** o aparecimento dos vórtices longitudinais devido à ressonância entre as ondas. É característico da instabilidade tipo-K a formação de vórtices lambda que são alinhados na direção longitudinal e a do tipo-H os vórtices lambda em zigue-zague. Na transição tipo-O, os vórtices longitudinais formam estrias longitudinais que representam uma variação transversal do escoamento médio.

Devido em parte à complexidade dos fenômenos envolvidos, uma importante parte da pesquisa do regime não-linear focou principalmente casos relativamente simples e bem controlados, que resultam os cenários de transição citados acima. A expectativa é que estes estudos venham a lançar luz sobre a transição natural, aquela que ocorre nas aplicações práticas tal como no escoamento ao redor da asa de um avião em vôo. Neste caso as

Figura 2: Esquema de interação entre ondas e a origem dos cenários clássicos de transição. *Superior*: transição tipo-K. *Intermediária*: transição tipo-H. *Inferior*: transição tipo-O.

perturbações são não controladas e apresentam um caráter irregular e aleatório. Estas perturbações geram não somente uma onda TS 2D, mas também um grande número de ondas TS 3D de várias frequências. Este sistema de ondas, ou pacote de ondas, é fortemente modulado em ambas as direções longitudinal e transversal ao escoamento. Estudos experimentais indicam que, sob estas circunstâncias, as ondas TS se tornam não-lineares com amplitude de cerca de 20% daquela para ondas TS regulares e monocromáticas (GASTER, 1978). Isto pode ser identificado pela figura 4 que apresenta uma comparação da evolução espacial de dois sistemas de ondas, sendo um formado por ondas TS monocromáticas e regulares e o outro, um pacote de ondas TS moduladas. Ambos os sistemas tiveram a mesma amplitude inicial. É possível identificar explosões de alta frequência na evolução do pacote de ondas em amplitudes que o sistema monocromático podia ainda ser descrito pela teoria linear. Esta diferença pode resultar num correspondente efeito no ponto de transição (GASTER, 1978). Por este motivo alguns pesquisadores têm se dedicado ao estudo do regime não-linear de ondas TS moduladas (SHAIKH, 1997).

Figura 3: Simulação numérica dos três cenários clássicos de transição. **a)** instabilidade tipo-K. **b)** instabilidade tipo-H. **c)** instabilidade tipo-O. O escoamento é da esquerda para direita. Copiado de Berlin (1998).

Figura 4: Comparação da evolução espacial de um trem de onda monocromático e um pacote de ondas.

Estudos da evolução de ondas irregulares que imitam a transição natural revelaram que o seu regime não-linear é semelhante àquele que ocorre em pacotes de ondas gerados por perturbações pulso provocadas por uma fonte pontual (SHAIKH, 1997). Devido a isto, as perturbações pontuais têm sido usadas como um modelo para o estudo da transição natural (WANG; LELE; MOIN, 1996). Na presente tese, foram realizados estudos visando a interpretação dos estágios não-lineares iniciais do processo de transição para turbulência provocada por sistemas de ondas modulados. É neste sentido que se considera este trabalho como inserido no tema transição natural.

Estudos em camada limite, realizados por Medeiros e Gaster (1999a, 1999b), mostraram que existem vários aspectos do regime não-linear de pacotes de ondas moduladas que não podem ser explicados pelas teorias não-lineares desenvolvidas para ondas TS monocromáticas regulares. Dentre estes aspectos, destaca-se a influência da fase na evolução não-linear destes pacotes de ondas e os mecanismos de produção de ondas. A figura 5 mostra a evolução espacial de dois pacotes de ondas em camada limite (MEDEIROS; GASTER, 1999a). Estes pacotes de ondas foram gerados experimentalmente através de pulsos negativo ou positivo introduzidos no escoamento por um pequeno furo na placa. Os pacotes diferem de fase em 180° . Inicialmente os pacotes de ondas apresentam o mesmo formato apenas com sinal contrário, indicando um regime linear. A medida que se amplificam os pulsos começam a se deformar e não mais apresentam o mesmo formato, este é o regime não-linear. É possível verificar que a influência de não-linearidades no pulso positivo é bem mais forte que no pulso negativo. Como consequência, o pacote de onda positivo causa transição a uma distância do bordo de ataque consideravelmente menor que o negativo.

A figura 6 apresenta a evolução de um pulso positivo mostrada num domínio espectral (MEDEIROS; GASTER, 1999b). Inicialmente a energia se concentra apenas numa banda de frequências. Mais adiante surge uma segunda banda de frequências que se origina a partir de mecanismos não-lineares. É notável pela figura que a banda não-linear apresenta amplificação muito maior do que a linear e rapidamente se torna o sinal dominante.

Figura 5: Evolução espacial de pacotes de ondas em camada limite ao longo da linha do centro do escoamento. Figura no topo representa o pacote pelo pulso positivo. Copiado de Medeiros e Gaster (1999a).

Nestes estudos, Medeiros e Gaster (1999b) mostraram que num estágio avançado da não-linearidade, existe um mecanismo de geração de modos subharmônicos. Recentemente, Medeiros (2006) sugeriu que o regime não-linear deste processo passa por três estágios onde em cada um deles pode ser identificado um dos cenários clássicos da transição. O primeiro estágio se comportou semelhante à transição oblíqua, o segundo estágio foi dominado pela transição tipo-K e o terceiro e mais avançado estágio do início do regime não-linear as ondas foram amplificadas pelo mecanismo de ressonância subharmônica ou transição tipo-H. A transição tipo-H promove o crescimento de ondas de frequência subharmônica das ondas fundamentais e foi a responsável pelo crescimento da banda de ondas subharmônicas

Figura 6: Domínio espectral. Evolução espacial de um pacote de ondas em camada limite. Copiado de Medeiros e Gaster (1999b).

mostrada na figura 6. Porém, devido a camada limite não ser paralela, a análise que pode apontar quais os modos harmônicos que formam pares com estes modos subharmônicos gerados têm sido prejudicada.

Os mecanismos de produção de ondas geralmente são associados à geração de harmônicos ou de componentes de frequência zero. Isto se dá da auto interação de modos via os tensores de Reynolds (desprezados no modelo-linear). No entanto, isto é válido apenas na situação particular de ondas TS monocromáticas. Já os pacotes de ondas possuem um grande número de componentes, e desta forma, outros componentes que não são modos harmônicos ou componentes de frequência zero podem ser gerados pela interação dos modos via os tensores de Reynolds. Análise destes tensores de Reynolds para casos bi-dimensionais foi realizada por Stuart (1958, 1960) utilizando uma teoria fracamente não-linear. O modelo deriva formalmente a equação de Landau (1944). Stewartson e Stuart (1971) estenderam o modelo para pacotes de ondas derivando uma equação do tipo Schroedinger. O modelo foi ainda estendido para pacotes tri-dimensionais (DAVEY; STEWARTSON, 1974). No entanto, estas abordagens originaram modelos que dependem

apenas da amplitude dos componentes dos pacotes de ondas, sendo independentes da fase relativa entre eles.

Medeiros e Gaster (1995) desenvolveram um modelo fracamente não-linear utilizando dinâmica dos vórtices. Este modelo, embora bi-dimensional, previa várias características observadas experimentalmente para pacotes de ondas tri-dimensionais, entre elas a geração de modos sub-harmônicos e a dependência em relação à fase. Entretanto com simulações numéricas bi-dimensionais também realizadas por Medeiros e Gaster (1995), verificou-se que a tri-dimensionalidade é um ingrediente essencial do fenômeno. Os resultados sugeriram que nestes pacotes de ondas a não-linearidade é disparada pela modulação na direção transversal e não na direção longitudinal, como se pensava inicialmente.

Os resultados motivaram um estudo do regime não-linear de pacotes de ondas tri-dimensionais modulados apenas na direção transversal (os trens de ondas), na esperança de que estes pudessem iluminar o estudo da evolução de pacotes de ondas tri-dimensionais mais complexos. Os experimentos mostraram que o regime não-linear do trem de ondas tri-dimensionais envolve o aparecimento de uma distorção na velocidade média do escoamento (MEDEIROS, 2004).

A figura 7 apresenta a velocidade longitudinal ao longo do tempo para diferentes distâncias do bordo de ataque. Nesta figura a coordenada horizontal é o tempo e a coordenada vertical é a direção transversal. No regime linear o trem de ondas têm um formato de luas crescentes e durante sua evolução na camada limite, o trem de ondas cobre progressivamente uma porção maior do campo do escoamento. No regime não-linear, em torno de $x = 0.9m$, torna aparente as distorções das cristas das ondas e o aparecimento de estrias longitudinais.

Medeiros (2004) desenvolveu um modelo teórico tri-dimensional fracamente não-linear para explicar o efeito da modulação na direção transversal. Nos primeiros estágios os resultados concordaram com as teorias de instabilidade hidrodinâmica linear e fracamente não-linear. No entanto, os estágios mais avançados do processo envolveram outros ti-

Figura 7: Evolução espacial de um trem de ondas em camada limite a uma distância de $0.6\delta^*$ da parede mostrada em planos direção transversal $\times$ tempo. Copiado de (MEDEIROS, 2004).

pos de mecanismos não-lineares. É interessante observar que o surgimento destes outros mecanismos ocorre nas proximidades do ramo superior da curva neutra de instabilidade hidrodinâmica linear. O modelo teórico de Medeiros (2004) associou os efeitos relacionados com o ramo superior do diagrama à instabilidade tipo-K. Com isto, o modelo previa com razoável precisão estes mecanismos que aparecem nos estágios mais avançados da transição. No entanto, não foi possível determinar a importância do ramo superior do diagrama de instabilidade linear para o aparecimento da instabilidade tipo-K neste estágio não-linear. Medeiros (2004) atribuiu as dificuldades de análise dos resultados ao não-parallelismo do escoamento em camada limite. Medeiros (2004) propôs que fosse

feito estudos de mesma natureza em um escoamento paralelo tal como o escoamento de Poiseuille plano.

Como nos estudos do fenômeno da transição em camda limite, os mesmos estudos em escoamentos de Poiseuille plano também se concentraram, na maior parte, nos casos simplificados para análise dos cenários clássicos de transição. Talvez inspirados nos estudos experimentais de Nishioka, Lida e Ichikawa (1975) sobre a instabilidade secundária em escoamento de Poiseuille plano a $Re = 5000$, vários estudos foram realizados assumindo um número de Reynolds subcrítico, isto é, valores para o número de Reynolds que são menores que o número de Reynolds crítico. Em escoamento de Poiseuille plano o número de Reynolds crítico é conhecido sendo $Re_c = 5772$. Por exemplo, Orzag e Patera (1983) estudaram teoricamente a instabilidade secundária dos cenários clássicos de transição em escoamentos de Poiseuille plano a $Re = 1000$ e Herbert (1988) a $Re = 5000$. Estudos numéricos da instabilidade secundária neste mesmo escoamento foram realizados, por exemplo, por Sandham e Kleiser (1992) a $Re = 5000$. Cenários de transição oblíqua em escoamentos de Poiseuille plano também foram investigados experimentalmente e podem ser encontrados em (ELOFSSON; ALFREDSSON, 1998). No trabalho de Elofsson e Alfredsson (1998) o número de Reynolds foi $Re = 2000$.

Os estudos da transição em escoamento de Poiseuille plano envolveram grandes amplitudes iniciais tanto para os estudos da instabilidade secundária, quanto para os estudos da instabilidade oblíqua (em torno de 2 a 5 % da máxima velocidade do escoamento base). Para a proposta de se investigar a transição natural, objetivo desta tese, este nível de amplitude inicial é considerado demasiadamente alto. Isto porque um trem de ondas modulado envolve um número muito maior de ondas que os cenários simplificados citados acima. Entre outras coisas, o uso de altas amplitudes para os componentes de um trem de ondas modulado poderia excitar desde o início do processo uma forte não linearidade, o que poderia promover a transição do escoamento de forma abrupta, sem passar pelos estágios lineares e fracamente não-lineares do processo. Como se depreende na presente revisão bibliográfica, transição abrupta (*em inglês bypass transition*) não foi o interesse

deste trabalho. Por outro lado, o uso de baixas amplitudes iniciais para estudo de trens de ondas a número de Reynolds subcríticos não levaria o sistema de ondas ao processo não-linear, pois decairiam linearmente devido a estabilidade do escoamento.

Estudos de natureza numérica (STEMMER, 2001) sobre trens de ondas emanantes de fontes pontuais que evoluíram em uma camada limite também foram realizados. Eles também confirmaram o aparecimento de estrias longitudinais na evolução não-linear do escoamento. Aqueles estudos revelaram que o aparecimento de estrias longitudinais foi a principal causa para a quebra da estrutura de escoamento laminar. Porém, o trabalho de Stemmer (2001) não atribuiu importância à instabilidade fundamental e ao ramo superior do diagrama de instabilidade. É fato que naqueles estudos, as amplitudes das perturbações foram consideravelmente maiores que aquelas usadas nos experimentos de Medeiros (2004), o que pode ter sido um motivo para o não aparecimento da instabilidade tipo-K nos estudos de Stemmer (2001).

2.2 Verificação de Código: O Método das Soluções Manufaturadas

De uma maneira geral, para garantir que o código realize simulações numéricas com boa representação do problema sob estudo, testes de verificação e de validação devem ser realizados. Em Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamics, CFD*), verificação e validação têm diferentes significados e representam diferentes conceitos de avaliação, e um não pode ser substituído pelo outro. De acordo com Steinberg e Roache (1985), verificação é um estudo do código numérico que consiste em garantir que as equações escolhidas para um dado modelo são resolvidas corretamente e quantificar o erro numérico da solução. Teste de verificação é um exercício puramente matemático e nenhum realismo físico precisa ser satisfeito. Por outro lado, validação envolve comparações entre soluções numéricas e resultados experimentais, tendo como principal objetivo avaliar se as equações utilizadas no modelo são adequadas para modelar o problema físico de interesse. Enquanto que em verificação não é importante satisfazer as leis

físicas, em validação, satisfazer realismo físico é o mais importante. Para o presente trabalho já é estabelecido que as equações empregadas descrevem bem a evolução de ondas de instabilidade ao longo do escoamento de Poiseuille. Por este motivo, teste de validação do código não foi realizado.

Por outro lado teste de verificação pode ser dividido em duas categorias: verificação de solução e verificação de código. Verificação de solução envolve estimativa de erro (tolerância de métodos iterativos, truncamento e arredondamento) da solução numérica das equações. Uma maneira de realizar verificação de solução é por extrapolação de Richardson. Este tipo de estudo não foi realizado aqui mas pode ser encontrado em (ROY, 2003). Já verificação de código avalia a implementação das equações, condições de contorno e esquema de discretização, visando garantir a ausência de erros de programação. Este teste deve ser realizado antes dos testes de verificação de solução e validação. Para o presente trabalho, teste de verificação do código foi realizado.

Teste de verificação de código pode ser realizado de diferentes maneiras. Os testes mais usuais são comparações de soluções numéricas com soluções exatas de problemas com reduzida complexidade e comparações de soluções numéricas com soluções obtidas por outros outros códigos computacionais. Em geral, as soluções exatas são obtidas simplificando o modelo matemático, tal como o uso de geometrias simplificadas, desprezo de não-linearidades ou até o uso de outras condições iniciais ou de contornos. Consequentemente, comparações com este tipo de solução exata nem sempre testam todas as rotinas do código numérico utilizado para simular os problemas de interesse, que em geral são mais complexos. Já comparações de resultados numéricos entre códigos permitem somente comparar a precisão dos esquemas numéricos de forma qualitativa.

Uma boa prática de verificação de código é simular um problema que tenha solução exata e que imite o problema físico de interesse, isto é, satisfazendo condições de contorno idênticas sem simplificações na geometria ou equações. Este tipo de solução exata pode ser obtida através do Método das Soluções Manufaturadas (ROACHE, 1998; ROY, 2005). Este método de verificação envolve a introdução de termos fonte nas equações governantes

criando um problema não realístico mas que possui uma solução analítica. Esta solução analítica (manufaturada) pode ser usada para comparações com as soluções numéricas e um teste de convergência de malhas (TCM) pode dar a ordem de precisão dos cálculos. Após obter sucesso neste teste, o código está verificado e basta remover os termos fontes das equações.

Este tipo de verificação de código pode ser aplicado em qualquer esquema de solução envolvendo qualquer tipo de método numérico, independente da ordem de precisão empregada ou até da natureza das equações resolvidas. O MMS vem se estabelecendo como um importante modelo para verificação de código, sendo uma importante ferramenta também para a quantificação de precisão das soluções numéricas (ROACHE, 1994). A quantificação de precisão pode ser obtida por testes de convergência de malhas mas ainda é pouco realizada pelos programadores. No entanto, este tipo de estudo vem se destacando desde a década de 80 onde os editores da ASME Journal of Fluids Engineering (JFE) publicaram uma política de submissão informando que os artigos enviados para publicação naquela revista deveriam ter alguma quantificação de precisão da solução numérica (ROACHE; WHITE, 1986). Desde então, outros jornais de pesquisa adotaram similar política (AIAA-EDITORIAL, 1994). O JFE expandiu aquela política original incluindo a proibição de métodos com primeira ordem de precisão para derivadas espaciais (FREITAS, 1993a; ROACHE, 1994). Na presente tese a quantificação de precisão foi realizada usando o MMS.

Para verificação de código o teste de convergência de malhas deve atingir a faixa assintótica de discretização. A faixa assintótica é definida como a faixa de malhas onde predomina o erro de discretização de mais baixa ordem. Isto é particularmente verdade em algoritmos de solução para simulações numéricas onde as vezes é eficiente numericamente usar o acoplamento de diferentes ordens de aproximação para as discretizações espaciais. Em tais códigos é necessário ser mais atencioso para se estabelecer a faixa assintótica. Uma maneira de atingir a ordem assintótica de aproximação de um código usando métodos numéricos com ordens acopladas foi apresentada por Roy (2003) em um procedimento de verificação de solução. Ele realizou um estudo de convergência em um código que simula

um campo de escoamento contendo uma onda de choque. Aquele esquema numérico usou diferenças finitas de segunda ordem, mas devido ao uso de um limitador de fluxo a precisão formal daquele código foi reduzida para primeira ordem. Um teste de convergência de malhas indicou segunda ordem para uma certa faixa de malhas e primeira ordem na faixa assintótica.

Outra justificativa para códigos de ordens acopladas é o uso de diferenças finitas de ordem alta para simulações de escoamentos que envolvem paredes sólidas. Em tais códigos, a ordem de aproximação observada em um TCM pode depender da posição na malha, e portanto, a faixa assintótica pode não ser atingida. Safta, Alabi e Ladeinde (2006) usaram o MMS e testaram um código numérico que usa um esquema de solução com diferenças finitas compactas de 6^{th} ordem de precisão para a discretização das derivadas espaciais, exceto nos contornos onde uma aproximação de 5^{th} ordem de precisão foi utilizado. Safta, Alabi e Ladeinde (2006) mostraram que o uso de 5^{th} ordem de precisão nos contornos aparentemente não mudou a ordem observada que foi 6^{th} . Entretanto, mudando a discretização de 5^{th} para 4^{th} ordem de aproximação nos contornos, um efeito dominante de 4^{th} ordem de precisão foi observado.

Silva, Souza e Medeiros (2008) usaram o MMS para testar um código numérico de ordem alta acoplada para simulação da evolução de pequenas ondas de instabilidade em um escoamento de Poiseuille plano. Eles verificaram que a ordem observada em um TCM não só depende da posição na malha mas também da solução manufaturada envolvida e da equação simulada. Aquele código resolve numericamente as equações de Navier-Stokes bi-dimensionais numa formulação vorticidade-velocidade. O cálculo das derivadas espaciais foram realizados utilizando um esquema numérico com métodos de diferenças finitas compactas centradas de 4^{th} , 5^{th} e 6^{th} ordens de aproximação. Usando o número de onda longitudinal α da própria solução manufaturada como um parâmetro de controle, Silva, Souza e Medeiros (2008) observaram uma mudança de ordem para as malhas mais refinadas. A figura 8 mostra o resultado do estudo de convergência de malhas realizado para o cálculo da vorticidade daquele escoamento. Ao todo foram usados seis tipos de malhas.

Figura 8: Comportamento do erro absoluto global para a vorticidade. Resultados usando a norma da média, L_1 . Extraído de Silva, Souza e Medeiros (2008).

O parâmetro α representa o número de onda longitudinal daquela solução manufaturada. Na medida em que se assumiu valores mais altos de α a ordem de precisão observada nas malhas mais refinadas mudou de 6th para 4th. Como pode ser verificado na figura 8, para estes tipos de malhas, a faixa assintótica só foi alcançada quando menores valores de α foram assumidos. Existem outras situações onde determinar a faixa assintótica pode ser difícil, elas podem ser encontradas em Oberkampf, Trucano e Hirsch (2004) e Roache (1997).

Em linhas gerais, a maior importância da realização de um TCM, usando MMS na verificação de códigos de ordem alta acoplada, não é atingir a faixa assintótica mas sim obter maior controle do erro numérico do código em malhas fora da faixa assintótica. Para estudos numéricos da transição, onde códigos computacionais devem ter ordem alta de precisão e acoplada para situações que envolvem paredes sólidas, o MMS pode ser uma importante ferramenta de verificação (REED; HAYNES; SARIC, 1998). Entretanto, este método é pouco difundido nesta comunidade. Mesmo a literatura atual (BOIKO et al., 2002), ainda não aponta o MMS como um exemplo de ferramenta de verificação de

código.

Teste de verificação similar usando TCM também pode ser aplicado nas rotinas para a integração temporal. A proposta seria realizar um teste de refinamento de intervalos no tempo e analisar a ordem de convergência dos resultados. Para isto o erro de discretização temporal deve ser dominante sobre o erro de discretização espacial. Porém, em métodos explícitos temporais, a condição de estabilidade pode tornar este procedimento ineficiente ou até impossível, já que a escolha de intervalos no tempo fica restritiva. Por outro lado, estudos para métodos implícitos temporais são possíveis e podem ser encontrados em Knupp e Salari (2003) e Hristowa, Pelletier e Borggaard (2006). Knupp e Salari (2003) usaram uma malha suficientemente refinada no espaço para garantir que o erro de truncamento espacial foi reduzido ao nível de erro de arredondamento. Para aquela malha espacial, um teste de refinamento no tempo foi realizado e a ordem de convergência temporal foi observada. Hristowa, Pelletier e Borggaard (2006) refinaram malha espacial e o intervalo de tempo simultaneamente. Porém, o erro de discretização temporal não pode ser observado pois os resultados indicaram que o erro espacial na malha foi dominante sobre o erro temporal. De fato, métodos mais simples podem ser usados para verificação da discretização no tempo. Roache (1997) sugere avaliar a rotina temporal com uma solução bem simples somente para se estudar o erro de discretização temporal e detectar possíveis erros de implementação. Este método é indicado principalmente quando a condição de estabilidade é uma questão.

Modelagem Matemática das Ondas de Instabilidade em um Escoamento de Poiseuille Plano

3.1 Equações Governantes

As equações governantes na forma adimensional para um escoamento incompressível, transiente e tri-dimensional são apresentadas numa formulação velocidade-pressão em termos vetoriais como segue:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

onde o vetor $\vec{u}$ indica as componentes de velocidade u, v e w nas direções longitudinal (x), normal à parede (y) e transversal ao escoamento (z) e p indica pressão.

O número de Reynolds é definido como

$$Re = \frac{U_{max}H}{\nu}, \quad (3.3)$$

onde ν indica a viscosidade cinemática.

A vorticidade pode ser definida como o negativo do rotacional da velocidade, ou seja,

$$\vec{\omega} = -\nabla \times \vec{u}. \quad (3.4)$$

Os componentes de $\vec{\omega}$ são:

$$\omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Tomando o rotacional da equação de Navier-Stokes (3.1), elimina-se o gradiente de pressão. Usando as equações da continuidade e da definição da vorticidade, eqs. (3.2) e (3.4), pode-se obter a equação de transporte de vorticidade:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (3.6)$$

Tomando o rotacional da equação de definição da vorticidade (3.4) e usando a equação da continuidade (3.2) obtém-se

$$\nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega}, \quad (3.7)$$

que é a equação de Poisson para o vetor $\vec{u}$.

As equações (3.6) e (3.7) compõem as equações governantes numa formulação vorticidade-velocidade. Estas equações foram resolvidas numericamente para um escoamento entre duas placas, o escoamento de Poiseuille Plano. Elas foram adimensionalizadas usando os parâmetros de referência U_{max} e H , que são a velocidade na linha do centro e a metade da altura do canal. Estes parâmetros produzem as seguintes variáveis adimensionalizadas:

$$x = \frac{x^*}{H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad z = \frac{z^*}{H}, \quad (3.8)$$

$$u = \frac{u^*}{U_{max}}, \quad v = \frac{v^*}{U_{max}}, \quad w = \frac{w^*}{U_{max}}, \quad (3.9)$$

$$\omega_x = \omega_x^* \frac{H}{U_{max}}, \quad \omega_y = \omega_y^* \frac{H}{U_{max}}, \quad \omega_z = \omega_z^* \frac{H}{U_{max}}, \quad (3.10)$$

$$t = t^* \frac{U_{max}}{H}, \quad (3.11)$$

onde os termos com asterisco são quantidades dimensionais.

O escoamento total pode ser decomposto em um escoamento base somado com uma flutuação, ou seja:

$$u = \bar{U} + u'; \quad v = v'; \quad w = w' \quad (3.12)$$

$$\omega_x = \omega'_x; \quad \omega_y = \omega'_y; \quad \omega_z = \bar{\Omega}_z + \omega'_z, \quad (3.13)$$

onde $\bar{U}(y) = 2y - y^2$ representa o perfil do escoamento de Poiseuille e $\bar{\Omega}_z(y) = 2 - 2y$ representa sua vorticidade. As variáveis u', v' e w' representam as componentes da flutuação da velocidade e ω'_x, ω'_y e ω'_z as componentes da flutuação da vorticidade.

Substituindo as variáveis (3.12) e (3.13) nas equações (3.2), (3.6) e (3.7) e cancelando os termos que satisfazem a solução do escoamento de Poiseuille, obtêm-se as componentes das equações governantes somente para as perturbações:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = -\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_x \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_y \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \omega'_z}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_z; \quad (3.16)$$

onde

$$a = v' \omega'_x - (\bar{U} + u') \omega'_y, \quad (3.17)$$

$$b = (\bar{U} + u') \omega'_z + u' \bar{\Omega}_z - w' \omega'_x, \quad (3.18)$$

$$c = -v'(\bar{\Omega}_z + \omega'_z) + w'\omega'_y \quad (3.19)$$

representam os termos quadráticos e os termos não-lineares.

Utilizando as equações (3.2), (3.4), (3.7) juntamente com a condição solenoidal para o vetor $\vec{\omega}$, ou seja

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (3.20)$$

é possível derivar as seguintes equações de Poisson que relacionam velocidade e vorticidade:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y}; \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 v' = \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial x}; \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}. \quad (3.23)$$

As equações (3.14) a (3.16) e (3.21) a (3.23), juntamente com as condições de contorno apresentadas a seguir, são usadas no presente trabalho para a descrição da evolução temporal de pequenas ondas de instabilidade evoluindo temporalmente no escoamento de Poiseuille plano.

3.2 Condições de Contorno

As equações governantes foram resolvidas em um domínio de integração retangular mostrado na figura 9. Nas direções longitudinal (x) e transversal (z) o escoamento é periódico com o domínio se estendendo de $x = 0$ até $x = \lambda_x$ e $z = 0$ até $z = \lambda_z$, aberto em $x = \lambda_x$ e $z = \lambda_z$, onde λ_x e λ_z são comprimentos de onda nas direções x e z respectivamente. Na direção normal às paredes (y) o domínio se estende de $y = 0$ até $y = 2H$.

Nas paredes do canal, ($y = 0$ e $y = 2H$), as componentes u e w da velocidade são iguais à zero (condição de não deslizamento) e a componente normal v assume valor zero exceto quando a perturbação do tipo sucção e sopro (ver seção 3.3) é introduzida.

Figura 9: Ilustração Esquemática do Domínio de Integração

É importante observar que não existe condição de contorno pré-estabelecida para a vorticidade na parede. Logo a vorticidade na parede deve ser calculada a partir da velocidade garantindo conservação de massa e que o campo de vorticidade é solenoidal, isto é, equação 3.20.

As seguintes equações foram utilizadas para os cálculos da vorticidade na parede:

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\nabla^2 v)}{\partial z}, \quad (3.24)$$

$$\omega_y = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \nabla^2 v. \quad (3.26)$$

A equação (3.24) foi obtida aplicando a derivada com relação a x na equação (3.20) e eliminando o componente transversal da vorticidade usando a equação de Poisson para v . As equações (3.25) e (3.26) foram obtidas da definição da componente de vorticidade ω_y e da equação de Poisson para v . As equações (3.24) a (3.26) foram resolvidas numericamente assumindo que nas paredes $\partial v / \partial y = 0$.

3.3 Introdução de Perturbações

Pode-se introduzir perturbações (flutuações) no escoamento usando, como condição inicial, uma solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld (MENDONÇA, 2003). É possível também introduzir perturbações no escoamento usando uma técnica que imita

sucção e sopro nas paredes usados em experimentos físicos (LAURIEN; KLEISER, 1989; MARXEN, 1998). Esta técnica é de fácil utilização e não necessita da solução da equação de Orr-Sommerfeld. As perturbações são inseridas no escoamento ao longo das paredes através da componente da velocidade normal à parede (v). Por um curto intervalo de tempo $t_1 < t < t_2$, a introdução de perturbações no escoamento se dá no seguinte formato:

$$v(x, y_0, z, t) = A^m (1 - \cos(2\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1})) \Re(e^{i(\alpha^m x + \beta^m z + \phi^m)}); \quad (3.27)$$

onde A^m , α^m , β^m e ϕ^m indicam amplitude, números de onda longitudinal e transversal e fase da m -ésima perturbação, respectivamente, e o símbolo $\Re$ indica a parte real de $e^{i(\alpha^m x + \beta^m z + \phi^m)}$. No presente trabalho as perturbações foram introduzidas ao longo das duas paredes do canal. Desta forma, y_0 assumiu os valores 0 e $2H$.

Esquema de Solução e Metodologia Numérica

No presente capítulo encontra-se em detalhes o método numérico usado pelo presente esquema de solução usado no presente trabalho. Aqui encontra-se também o procedimento de solução das equações governantes bem como as dificuldades em se modificar um código DNS espacial para código DNS temporal.

4.1 Espaço de Fourier: Derivadas nas direções x e z

Explorando a condição de periodicidade nas direções longitudinal e transversal, pode-se aproximar as variáveis do escoamento por séries de Fourier truncadas da seguinte maneira:

$$s(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{l=0}^{N_x} S_{l,k}(y, t) e^{-i(\alpha_l x + \beta_k z)} \quad (4.1)$$

onde s denota as quantidades reais $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, a, b$ e c no espaço físico. Estas mesmas quantidades, denotadas por S na equação (4.1), são representadas pelas respectivas quantidades complexas $U, V, W, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, A, B$ e C no espaço de Fourier. Além disso, $\alpha_l = \frac{2\pi l}{\lambda_x}$; $-N_x \leq l \leq N_x$ e $\beta_k = \frac{2\pi k}{\lambda_z}$; $-N_z \leq k \leq N_z$ são respectivamente números de onda longitudinal e transversal, λ_x e λ_z os comprimentos de ondas relativos aos menores números de ondas positivos nestas duas direções.

Desta forma, as variáveis acima foram aproximadas por modos de Fourier e um algoritmo de solução usando Transformada de Fourier Rápida (em inglês, *Fast Fourier Transform, FFT*) foi usado no presente código. Para evitar o aparecimento de modos indesejáveis de mais alto número de onda que a de Nyquist (em inglês, *aliasing error*), (PRESS et al., 1992), a resolução no espaço de Fourier foi assumida sendo 2/3 da resolução do espaço físico em ambas direções x e z .

Substituindo-se a expressão (4.1) nas equações transporte de vorticidade (3.14) a (3.16), nas equações de Poisson (3.21) a (3.23) e nas equações para o cálculo da vorticidade nas paredes (3.24) a (3.26), obtêm-se as equações no espaço de Fourier como segue:

$$\frac{\partial \Omega_x^{l,k}}{\partial t} = -\frac{\partial A^{l,k}}{\partial y} - \beta_k B^{l,k} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_x^{l,k}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Omega_y^{l,k}}{\partial t} = \alpha_l A^{l,k} - \beta^k C^{l,k} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_y^{l,k}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Omega_z^{l,k}}{\partial t} = \beta_k B^{l,k} + \frac{\partial C^{l,k}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_z^{l,k}, \quad (4.4)$$

$$(\alpha_l^2 + \beta_k^2) U^{l,k} = \beta_k \Omega_y^{l,k} + \alpha_l \frac{\partial V^{l,k}}{\partial y}; \quad (4.5)$$

$$\nabla^{l,k^2} V^{l,k} = \beta_k \Omega_x^{l,k} + \alpha_l \Omega_z^{l,k}, \quad (4.6)$$

$$(\alpha_l^2 + \beta_k^2) W^{l,k} = -\alpha_l \Omega_y^{l,k} + \beta_k \frac{\partial V^{l,k}}{\partial y}, \quad (4.7)$$

$$\Omega_x^{l,k} = \frac{1}{\alpha_l^2 + \beta_k^2} (-\beta_k \nabla^{l,k^2} V^{l,k} + \alpha_l \frac{\partial \Omega_y^{l,k}}{\partial y}), \quad (4.8)$$

$$\Omega_y^{l,k} = 0, \quad (4.9)$$

$$\Omega_z^{l,k} = \frac{1}{\alpha_l} (\nabla^{l,k^2} V^{l,k} - \beta_k \Omega_x^{l,k}). \quad (4.10)$$

As equações (4.2) a (4.4) são usadas para avançar os componentes de vorticidade no tempo. As equações (4.5) a (4.7) são utilizadas para atualizar as componentes de velocidade e as equações (4.8) a (4.10) usadas para calcular os componentes de vorticidade nas paredes. Note que o operador laplaciano ∇^2 foi transformado em

$$\nabla^{l,k^2} = -\alpha_l^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_k^2. \quad (4.11)$$

Para $l = k = 0$ tem-se $\alpha_l = \beta_k = 0$ e as equações (4.8) e (4.10) não podem ser utilizadas para os cálculos de $\Omega_x^{0,0}$ e $\Omega_z^{0,0}$ respectivamente. Porém pode-se assumir, pela definição da componente longitudinal da vorticidade (equação 3.5), que $\Omega_x^{0,0} = 0$. A componente transversal da vorticidade $\Omega_z^{0,0}$ pode ser calculada usando:

$$\Omega_z^{0,0} = \frac{\partial U^{0,0}}{\partial y}. \quad (4.12)$$

As equações (4.2) a (4.10) foram aproximadas por modos de Fourier, calculados separadamente. Exceto os termos quadráticos não-lineares $A^{l,k}$, $B^{l,k}$ e $C^{l,k}$, que foram calculados no espaço físico seguindo o procedimento: as componentes da velocidade e da vorticidade foram transformados via a função inversa da FFT para o espaço físico e os produtos não-lineares foram realizados. Em seguida o resultado foi transformado para o espaço de Fourier via FFT. Este procedimento representa um esforço computacional menor do que se os produtos não-lineares fossem realizados diretamente no espaço de Fourier. O método aqui descrito é chamado de método pseudo-espectral.

4.2 Diferenças Finitas Compactas: Derivadas na direção y

O cálculo das derivadas na direção normal às paredes (ou direção y) foi realizado usando um esquema de diferenças finitas compactas de 5ª e 6ª ordens de aproximação. A importância de se usar métodos de ordem alta para escoamentos em transição laminar-turbulento foi reportado por Lele (1992). Naquele artigo, Lele apresenta esquemas de aproximações (através dos esquemas clássicos de Padé) de segunda até décima ordem para primeira, segunda e terceira derivada de uma dada função. Comparações entre esquemas compactos de alta ordem e esquemas de diferenças finitas tradicionais podem ser encontradas em Hirsh (1975). Recentemente, Souza, Mendonça e Medeiros (2005) confirmaram a necessidade de se usar esquemas de diferenças finitas compactas de alta

ordem de aproximação para estudos em transição laminar-turbulento. No trabalho de Souza, Mendonça e Medeiros (2005), simulações numéricas da evolução linear espacial de perturbações bi-dimensionais em um escoamento de Poiseuille foram realizadas. Esquemas de diferenças finitas compactas e não compactas de segunda até sexta ordem foram utilizados e os resultados foram comparados entre eles. Naquele trabalho, o esquema que utiliza diferenças finitas compactas de 5ª e 6ª ordem de precisão mostrou ser essencial para uma boa descrição das simulações de transição mesmo em um regime linear. No presente trabalho este mesmo esquema numérico foi utilizado e sua descrição segue em detalhes.

4.2.1 Primeira Derivada

Para o ponto na parede, $j = 1$, a seguinte aproximação não centrada de 5ª ordem foi adotada:

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24\Delta y}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + O(\Delta y^5). \quad (4.13)$$

Para o ponto próximo à parede, $j = 2$, uma aproximação não centrada de 6ª ordem foi adotada:

$$\begin{aligned} f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = & \frac{1}{120\Delta y}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) \\ & + O(\Delta y^6). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para os pontos centrais foi utilizada a seguinte aproximação centrada de 6ª ordem:

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12\Delta y}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + O(\Delta y^6). \quad (4.15)$$

Para os pontos $j = N - 1$ e $j = N$ as aproximações foram análogas às obtidas para os pontos $j = 1$ e $j = 2$ a menos de inversão de sinal. As aproximações citadas acima resultam em um sistema linear de equações, na incógnita f' , que foi resolvido usando o algoritmo de Thomas (PRESS et al., 1992). Em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix}
1 & 4 & & & & \\
& 1 & 6 & 2 & & \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & 1 & 3 & 1 \\
& & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & & 2 & 6 & 1 \\
& & & & & & 4 & 1
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \cdot \\ f'_i \\ \cdot \\ f'_{N-1} \\ f'_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta y} \begin{bmatrix} \frac{1}{24}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) \\ \frac{1}{120}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) \\ \cdot \\ \frac{1}{12}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) \\ \cdot \\ -\frac{1}{120}(-406f_N - 300f_{N-1} + 760f_{N-2} - 80f_{N-3} + 30f_{N-4} - 4f_{N-5}) \\ -\frac{1}{24}(-74f_N + 16f_{N-1} + 72f_{N-2} - 16f_{N-3} + 2f_{N-4}) \end{bmatrix}$$

4.2.2 Segunda Derivada

Para o ponto da parede, $j = 1$, a seguinte aproximação não centrada de 5ª ordem foi adotada:

$$13f''_1 + 137f''_2 = \frac{1}{60\Delta y^2}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 35f_6) + O(\Delta y^5). \quad (4.16)$$

Para o ponto próximo à parede, $j = 2$, uma aproximação não centrada de 6ª ordem foi adotada:

$$f''_1 + 12f''_2 + 3f''_3 = \frac{1}{360\Delta y^2}(4834f_1 - 8024f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) + O(\Delta y^6). \quad (4.17)$$

Para os pontos centrais foi utilizada a seguinte aproximação centrada de 6ª ordem:

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{1}{4\Delta y^2}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) + O(\Delta y^6). \quad (4.18)$$

Para os pontos $j = N - 1$ e $j = N$, as aproximações são análogas às obtidas para os

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 13 & 137 & & f_1'' & \frac{1}{60}(9775f_1 - 20285f_2 + \\ & & & & 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 35f_6) \\ 1 & 12 & 3 & f_2'' & \frac{1}{360}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + \\ & & & & 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) \\ & . & . & . & . \\ & & 2 & 11 & 2 \\ & & & f_i'' & \frac{1}{4}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + \\ & & & & 48f_{i+2} + 3f_{i+2}) \\ & . & . & . & = \frac{1}{\Delta y^2} . \\ & 3 & 12 & 1 & f_{N-1}'' & \frac{1}{360}(4834f_N - 8424f_{N-1} + \\ & & & & 1890f_{N-2} + 2320f_{N-3} - \\ & & & & 810f_{N-4} + 216f_{N-5} - \\ & & & & 26f_{N-6}) \\ & & 137 & 13 & f_N'' & \frac{1}{60}(9775f_N - 20285f_{N-1} + \\ & & & & 11170f_{N-2} - 550f_{N-3} - \\ & & & & 145f_{N-4} + +35f_{N-5}) \end{array} \right]$$

Primeiramente um método de Runge-Kutta de 4ª ordem de precisão foi utilizado para a integração temporal de todo o domínio computacional. Porém, devido a necessidade de se calcular a condição de contorno nas paredes para a vorticidade, surgiu uma instabilidade numérica particularmente nos cálculos da distorção do escoamento base nas paredes, representado pelos modos vorticidade transversal $\Omega_z^{0,0}$ e vetor velocidade longitudinal $U^{0,0}$. De fato para o cálculo de $U^{0,0}$ em todo o domínio usando a equação (4.36) é necessário o valor de $\Omega_z^{0,0}$ nas paredes. No entanto, $\Omega_z^{0,0}$ deve ser calculado a partir da equação (4.12), que depende dos valores de $U^{0,0}$ em todo o domínio. Têm-se portanto um sistema de duas

equações acopladas que deve ser resolvido usando um método iterativo para a solução. Porém, a integração temporal destes cálculos usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem de precisão não foi suficientemente robusto para evitar uma instabilidade numérica causada por este procedimento iterativo.

Em uma nova tentativa foi empregado uma aproximação por diferenças finitas para o termo $\partial^2 U^{0,0}/\partial y^2$ da equação (4.36), que não dependia dos valores de $\Omega_z^{0,0}$ nas paredes. Esta escolha permitiu calcular $U^{0,0}$ a partir de uma integração numérica da equação (4.36) com relação a y e posteriormente o cálculo de $\Omega_z^{0,0}$ nas paredes via equação (4.12) sem nenhum método iterativo. A integração temporal para estes cálculos também foi realizada com o método de Runge-Kutta aqui adotado. No entanto, este procedimento também resultou em uma instabilidade numérica. Finalmente, estes cálculos foram realizados com sucesso somente quando foi empregado o esquema de integração temporal semi-implícito envolvendo um método de Runge-Kutta e o método de Crank-Nicolson, descritos a seguir (MARXEN, 1998; MEITZ; FASEL, 2000). Desta forma os modos de Fourier, exceto o modo distorção do escoamento base, continuavam sendo avançados no tempo usando um método de Runge-Kutta de 4ª ordem de precisão. Já o modo distorção do escoamento base foi calculado avançando no tempo o termo difusivo em y , $\partial^2 \Omega_z^{0,0}/\partial y^2$, das equações de Navier-Stokes usando o método de Crank-Nicolson.

O presente método de Runge-Kutta de 4ª ordem utilizado funciona em 4 estágios conforme Ferziger e Peric (1997):

$$f_i = f_0 + \frac{\Delta t}{2} f'_0, \quad (4.19)$$

$$f_{ii} = f_0 + \frac{\Delta t}{2} f'_i, \quad (4.20)$$

$$f_{iii} = f_0 + \Delta t f'_{ii}, \quad (4.21)$$

$$f = f_{iv} = f_0 + \frac{\Delta t}{6} [f'_0 + 2(f'_i + f'_{ii}) + f'_{iii}], \quad (4.22)$$

onde f denota alguma componente da vorticidade, f' o lado direito da respectiva equação transporte de vorticidade e os subscritos 0, i , ii e iii indicam os quatro estágios do avanço no tempo sendo que o subscrito 0 indica a situação ao final do tempo anterior. O uso

deste mesmo método de Runge-Kutta de 4th ordem em simulações numéricas em transição laminar-turbulento também pode ser visto em Fasel, Rist e Konzelman (1991), Kloker (1998), Stemmer (2001), Souza (2003), dentre outros.

O método semi-implícito se resume em resolver, para cada estágio do método de Runge-Kutta escolhido, uma equação que é descrita como segue: escrevendo o lado direito da equação de transporte de vorticidade (em inglês *right hand size, rhs*) mantendo explícito o termo difusivo na direção normal às paredes $f_{yy} = \partial^2 \Omega^{\vec{0},0} / \partial y^2$ da seguinte maneira:

$$f' = rhs + \frac{1}{Re} f_{yy}. \quad (4.23)$$

Aplicando o método Crank-Nicolson no tempo para f_{yy} e avançando a equação (4.23) no tempo da seguinte maneira:

$$f' = \frac{1}{\Delta t} (f|^{it} - f|^{it+1}), \quad (4.24)$$

$$f_{yy} = \frac{1}{2} (f_{yy}|^{it} + f_{yy}|^{it+1}), \quad (4.25)$$

$$rhs = rhs^{s-1}|^{it+1}, \quad (4.26)$$

onde it é o nível no tempo, $s - 1 = 0, i, ii, iii$ são os estágios do método de Runge-Kutta com 0 denotando o nível de tempo anterior, it .

Usando uma discretização espacial em y com diferenças finitas compactas, calcula-se f_{yy} como um sistema linear de equações como segue:

$$\mathcal{A}f_{yy}|_{j=1,N} = \mathcal{R}f|_{j=1,N}, \quad (4.27)$$

onde N indica o número de pontos utilizados para a discretização de f ao longo de y .

Usando as equações (4.23) a (4.27) é possível derivar a seguinte equação para f :

$$\left(\frac{\Delta t}{2Re} \mathcal{R} - \mathcal{A}\right) f^s|_{j=1,N}^{it+1} = \left(\frac{\Delta t}{2Re} \mathcal{R} + \mathcal{A}\right) f^s|_{j=1,N}^{it} - \Delta t \mathcal{A} rhs^{s-1}|^{it+1}. \quad (4.28)$$

A equação (4.28) é calculada juntamente com um método iterativo que envolve os cálculos de $U^{0,0}$ e $\Omega_z^{0,0}$. Para atingir a convergência, os valores de $\Omega_z^{\vec{0},0}$ nas paredes passam

por um procedimento de relaxação como segue:

$$\vec{\Omega}_z|_{j=1}^{0,0} = \frac{l-1}{lmax-1} \vec{\Omega}_z|_{j=1}^{0,0,it+1} + \frac{lmax-l}{lmax-1} \vec{\Omega}_z|_{j=1}^{0,0,it} \quad (4.29)$$

$$\vec{\Omega}_z|_{j=2,N-1}^{0,0} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega}_z|_{j=2,N-1}^{0,0,it+1} + \vec{\Omega}_z|_{j=2,N-1}^{0,0,it}) \quad (4.30)$$

$$\vec{\Omega}_z|_{j=N}^{0,0} = \frac{l-1}{lmax-1} \vec{\Omega}_z|_{j=N}^{0,0,it+1} + \frac{lmax-l}{lmax-1} \vec{\Omega}_z|_{j=N}^{0,0,it}, \quad (4.31)$$

onde $lmax$ é o número de iterações necessárias para a convergência do método. Para o presente trabalho $lmax = 2$ foi suficiente para a convergência.

Os métodos de Runge-Kutta são condicionalmente estáveis, este fato limitou a escolha de Δt para as presentes simulações. No entanto seu uso é justificável para as simulações em transição laminar-turbulento que requerem incrementos de tempo (Δt) relativamente pequenos para se obter a precisão necessária. Além disso, um baixo armazenamento de dados torna o método de Runge-Kutta atrativo comparado com métodos incondicionalmente estáveis, tais como o método implícito de Crank-Nicolson. Por este motivo, o uso do método de Crank-Nicolson foi limitado para os cálculos somente onde foi necessário garantir maior estabilidade numérica. Além do mais, devido a amplitude do modo distorção do escoamento base ser proporcionalmente pequeno quando comparado com a amplitude dos modos restantes, a ordem temporal do esquema semi-implícito, que é dois, não dominou a ordem resultante na integração temporal, que foi quatro. Este fato justifica o uso de um método de Runge-Kutta que é de 4ª ordem de precisão invés do uso de um método de Runge-Kutta de 2ª ordem de precisão.

4.3.1 Esquema de Solução

O procedimento numérico para solução das equações (4.2) a (4.10) foi baseado em Marxen (1998) e é realizado da seguinte maneira: primeiro introduz-se a perturbação no domínio de integração imitando o método de injeção e sucção de massa nas paredes. Em seguida, para cada estágio do método de Runge-Kutta, os seguintes passos são necessários:

1. calcula-se os termos não-lineares $A^{i,k}$, $B^{i,k}$ e $C^{i,k}$ no espaço físico e em seguida

transforme-os para o espaço de Fourier;

2. calcula-se o lado direito da equação transporte de vorticidade como em (4.23). Aqui o cálculo do termo $\frac{1}{Re}\Omega_{yy}^{0,0}$ é uma primeira estimativa que será utilizada no procedimento iterativo indicado no item 4;
3. integra-se no tempo a equação de transporte de vorticidade em um estágio;
4. calcula-se o termo $\frac{1}{Re}\Omega_{yy}^{0,0}$ implicitamente com o método de Crank-Nicolson. Como não existe condição de contorno na parede para a vorticidade, o seguinte método iterativo foi necessário;
 - a) calcula-se a componente $V^{0,0}$ da velocidade usando a equação (4.6);
 - b) calculam-se $U^{0,0}$ em todo o domínio e $\Omega_z^{0,0}$ somente para os pontos das paredes;
 - c) depois de sobrelaxar os valores de $\Omega_z^{0,0}$ em todo o domínio calcula-se a equação (4.28);
5. depois do método iterativo convergir, calculam-se a componente $V^{i,k}$ da velocidade para os modos restantes usando a equação (4.6), as componentes $U^{i,k}$ e $W^{i,k}$ da velocidade para todos os modos usando as equações (4.5) e (4.7) e a vorticidade nas paredes para os modos restantes usando as equações (4.8) a (4.10).
6. retorna-se para o item 1 e repetem-se os cálculos acima até que o tempo de integração desejado seja alcançado.

4.4 Vorticidade na Parede

Como mencionado na seção (4.1), os componentes $\Omega_x^{i,k}$ e $\Omega_z^{i,k}$ da vorticidade nas paredes, $y = 0$ e $y = 2H$, foram calculados usando as equações (4.8) e (4.10). Para isto o valor do laplaciano de $V^{i,k}$ nas paredes foi necessário. Têm-se da equação (4.11) que:

$$\nabla^{i,k^2} V^{i,k} = -\alpha_i^2 V^{i,k} + \frac{\partial^2 V^{i,k}}{\partial y^2} - \beta_k^2 V^{i,k}. \quad (4.32)$$

O termo $\partial^2 V^{i,k}/\partial y^2$ para os pontos nas paredes foi discretizado usando a seguinte aproximação não compacta de 6ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^{i,k}}{\partial y^2}|_1 = & \frac{1}{\Delta y^2}(-134.89V^{i,k}|_1 + 216.V^{i,k}|_2 - 135.V^{i,k}|_3 + \\ & 80.V^{i,k}|_4 - 33.75V^{i,k}|_5 + 8.64V^{i,k}|_6 - V^{i,k}|_7), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^{i,k}}{\partial y^2}|_N = & \frac{1}{\Delta y^2}(-134.89V^{i,k}|_N + 216.V^{i,k}|_{N-1} - 135.V^{i,k}|_{N-2} + \\ & 80.V^{i,k}|_{N-3} - 33.75V^{i,k}|_{N-4} + 8.64V^{i,k}|_{N-5} - V^{i,k}|_{N-6}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.5 Velocidade

A cada estágio do Método de Runge-Kutta, o cálculo da componente $V^{i,k}$ da velocidade foi realizado primeiramente e em seguida as componentes $U^{i,k}$ e $W^{i,k}$ foram calculadas. Esta ordem foi necessária devido à necessidade dos valores de $V^{i,k}$ para os cálculos das outras componentes da velocidade. O cálculo de $V^{i,k}$ foi realizado resolvendo numericamente a equação (4.6). Note que, diferentemente da equação de Poisson (3.22), o procedimento de solução da equação (4.6) não requereu nenhum método iterativo. Segue abaixo o esquema de diferenças finitas compactas utilizado para a discretização da equação (4.6) ao longo da direção y . Nas paredes, $j = 1$ e $j = N$, a componente $V^{i,k}$ é nula exceto durante a perturbação do escoamento com injeção e sopro de massa, seção 3.3. Para $j = 2$ foi empregada a seguinte aproximação não centrada de 5ª ordem:

$$4f_2'' + f_3'' = \frac{1}{36\Delta y^2}(254f_1 - 432f_2 + 162f_3 + 16f_4) + O(\Delta y^5). \quad (4.35)$$

Para $3 \leq j \leq N - 2$ a aproximação (4.18) foi utilizada. A aproximação para o ponto $j = N - 1$ é análoga à aproximação para o ponto $j = 2$. As aproximações apresentadas acima formam um sistema linear onde as incógnitas são os valores de $V^{i,k}$ em cada ponto j . Desta forma, uma matriz pentadiagonal deve ser invertida no processo de solução.

Os cálculos das componentes $U^{i,k}$ e $W^{i,k}$ da velocidade foram realizados usando as equações (4.5) e (4.7), exceto quando $i = k = 0$. $W^{0,0}$ foi calculado resolvendo numerica-

mente a equação da definição da componente longitudinal de vorticidade, equação (3.4).

$U^{0,0}$ foi calculado resolvendo numericamente a equação:

$$\frac{\partial^2 U^{0,0}}{\partial y^2} = \frac{\partial \Omega_z^{0,0}}{\partial y}. \quad (4.36)$$

Note que o cálculo de $U^{0,0}$ depende exclusivamente de $\Omega^{0,0}$. Estes cálculos foram abordados com mais detalhes na subseção 4.3.

Teste de Verificação do Código

Neste capítulo é apresentado os testes de verificação do código que foram realizados neste presente trabalho. Primeiro um teste de verificação usando o Método da Solução Manufatura (MMS) foi realizado. Em seguida, as simulações e comparações de resultados descritos pela LST foram apresentadas. E por último, as comparações de resultados numéricos com resultados obtidos por outros códigos computacionais foi realizado.

5.1 O Método das Soluções Manufaturadas

Para o presente trabalho a solução manufaturada usada para as componentes u e w da velocidade tiveram a seguinte expressão:

$$u(x, y, z, t) = A_0 e^y y(y + 1 - \sqrt{5})(y + 1 + \sqrt{5})(y - 2) \cos(\alpha x + \beta z - \omega t), \quad (5.1)$$

$$w(x, y, z, t) = A_0 \beta e^y y(y + 1 - \sqrt{5})(y + 1 + \sqrt{5})(y - 2) \cos(\alpha x + \beta z - \omega t), \quad (5.2)$$

onde A_0 indica uma amplitude.

Têm-se que as componentes u e v da velocidade satisfazem as condições de contorno empregadas no código. Além do mais, a expressão e^y empregada em u e w garante que derivadas de qualquer ordem ao longo de y não se anulam no domínio. Isto é necessário para um sistemático estudo da ordem de precisão dos cálculos através de um teste de convergência de malhas que será detalhado adiante. Usando a equação da continuidade

(3.2) e as expressões para u e w , foi possível obter uma representação para a componente v :

$$v(x, y, z, t) = A \sin(\alpha x + \beta z - \omega t) e^y y^2 (\beta^2 y^2 - 4\beta^2 y + 4\beta^2 + \alpha y^2 - 4\alpha y + 4\alpha). \quad (5.3)$$

Note que, para v satisfazer a condição de contorno na direção y foi necessário empregar os termos $(y + 1 - \sqrt{5})$ e $(y + 1 + \sqrt{5})$ em u e w . As componentes ω_x , ω_y e ω_z da vorticidade foram obtidas usando as equações de definição de vorticidade (equação 3.4) e a expressão da velocidade 3.5. A vorticidade têm a seguinte expressão:

$$\omega_x(x, y, z, t) = A\beta e^y \cos(\alpha x + \beta z - \omega t) (-y^4 + 8y^2 - 8 - 4y^3 + \beta^2 y^4) \quad (5.4)$$

$$-4\beta^2 y^3 + 4\beta^2 y^2 + y^4 \alpha - 4y^3 \alpha + 4\alpha y^2 + 8y),$$

$$\omega_y(x, y, z, t) = -Ae^y y \sin(\alpha x + \beta z - \omega t) \beta (y^3 \alpha - 8\alpha y + 8\alpha - y^3) \quad (5.5)$$

$$+ 8y - 8),$$

$$\omega_z(x, y, z, t) = -Ae^y \cos(\alpha x + \beta z - \omega t) (\alpha y^4 \beta^2 - 4\alpha y^3 \beta^2 + 4\alpha y^2 \beta^2) \quad (5.6)$$

$$+ \alpha^2 y^4 - 4\alpha^2 y^3 + 4\alpha^2 y^2 + 8y - y^4 + 8y^2 - 8 - 4y^3).$$

Note que a dependência no tempo não é exponencial para evitar possíveis confusões com instabilidades numéricas (ETHIER; STEINMAN, 1994).

A presente solução manufaturada oscila no tempo com frequência ω , têm amplitude constante e é periódica nas direções x and z com número de ondas longitudinal e transversal α e β . Esta solução imita uma onda de instabilidade (onda de Tollmien-Schlichting) que se propaga ao longo de um escoamento de Poiseuille com amplitude constante. Os parâmetros α , β e ω foram também adimensionalizados com U_{max} e H da seguinte forma:

$$\alpha = \alpha^* H, \quad \beta = \beta^* H, \quad \omega = \frac{\omega^* H}{U_{max}}, \quad (5.7)$$

onde o sobrescrito $*$ indica variável dimensional.

As figuras 10 a 15 ilustram projeções das componentes da velocidade e vorticidade sobre os três planos espaciais, $x \times y$, $x \times z$ e $z \times y$, respectivamente. Os valores dos

parâmetros para esta ilustração foram $t = 0$, $A = \beta = 1$ e $\alpha = 1,1$. Os valores destes parâmetros foram tomados aleatoriamente, exceto o valor de α , pois $\alpha = 1$ anularia a componente normal ω_y da vorticidade, equação (5.5). Como mostrado nas figuras 10 a 12, peculiar da presente solução manufaturada, as componentes de velocidade u e w são idênticas para $\beta = 1$, equações (5.1) e (5.2). Além disso, cada componente da velocidade e da vorticidade têm, respectivamente, a mesma expressão nas direções x e z .

Figura 10: Velocidade u projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, u no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$.

Figura 11: Velocidade v projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, v no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$.

Figura 12: Velocidade w projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, w no plano $z = 0$, no plano $y = 1,85$ e no plano $x = 0$.

A solução manufaturada descrita acima é solução analítica do seguinte problema não realístico:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = -\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_x + F_x(x, y, z, t) \quad (5.8)$$

Figura 13: Vorticidade ω_x projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, ω_x no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

Figura 14: Vorticidade ω_y projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, ω_y no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

Figura 15: Vorticidade ω_z projetada nos três planos espaciais. Da esquerda para direita, ω_z no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} = -\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_y + F_y(x, y, z, t) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z + F_z(x, y, z, t); \quad (5.10)$$

onde F_x , F_y e F_z indicam as componentes do termo forçante que são apresentados no apêndice A.

As figuras 16 a 18 ilustram uma projeção das componentes do termo forçante sobre os três planos espaciais, $x \times y$, $x \times z$, $z \times y$. Para evitar erros algébricos, o termo forçante foi obtido usando um código de manipulação simbólica.

Figura 16: Forçante F_x projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_x no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

Figura 17: Forçante F_y projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_y no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

Figura 18: Forçante F_z projetado sobre os três planos espaciais. Da esquerda para direita, F_z no plano $z = 0$, plano $y = 1,85$ e plano $x = 0$.

5.1.1 Discretizações Espaciais

Um Teste de Convergência de Malhas (TCM) foi realizado e o comportamento do erro numérico de discretização das equações foi investigado. Devido ao uso de métodos espectrais ao longo das direções x e z e a solução manufaturada ser periódica nestas direções, o erro numérico possuiu erro de truncamento espacial provido especialmente pelas discretizações ao longo de y , onde métodos de diferenças finitas compactas foram utilizados. Durante o TCM, exceto por algum possível erro de programação, a ordem de precisão observada nos testes deve ser coerente com a ordem das aproximações pelas diferenças finitas aqui empregadas. Além do mais, para garantir que outros erros numéricos, tais

como erro de arredondamento, de truncamento temporal e de convergência (devido métodos iterativos) fossem insignificantes em relação ao erro de truncamento em y , os cálculos foram realizados com precisão dupla e somente 100 passos no tempo com intervalos dimensionais $\Delta t = 10^{-5}$ foram realizados. A tolerância de convergência das iterações foi adotada como 10^{-12} .

Os cálculos foram realizados para $Re = 1$ para garantir que os termos das equações governantes tivessem a mesma ordem de magnitude. Isto pode evitar mascaramento de erros de programação (ROACHE, 1998). Novamente, foi assumido $A_0 = \beta = 1$ e $\alpha = 1, 1$. O erro numérico em cada malha m usado foi o absoluto e denotado por E_m . Para espaçamento dy segue que:

$$E_m = |f_m - f_{manuf}| \sim g^p dy_m^p, \quad (5.11)$$

onde f_m representa alguma solução numérica sobre a malha m , f_{manuf} indica a solução manufaturada, p a ordem de precisão teórica das aproximações espaciais empregadas e g^p o coeficiente do termo dominante do erro de truncamento espacial.

No presente trabalho, foi investigado primeiro o erro numérico baseado nas normas da média aritmética simples L_1 e do máximo L_∞ . Em seguida, a análise do erro numérico sobre pontos isolados do domínio foi realizada. As normas L_1 e L_∞ são definidas como:

$$L_1(E_m) = (\sum_{k=1}^N E_m(k))/N, \quad (5.12)$$

$$L_\infty(E_m) = \max(E_m(k)); k = 1, \dots, N, \quad (5.13)$$

onde N indica o número de nós usados ao longo da direção y para a malha m .

A solução numérica foi obtida em sete diferentes malhas ($m = 1, \dots, 7$), onde cada malha têm o dobro de intervalos da malha anterior ao longo da direção y , mantendo a mesma discretização nas direções x e z . Estas malhas foram apresentadas na tabela 1.

O número de malhas escolhido para o TCM deve ser suficiente para que os resultados atinjam a faixa assintótica, ou seja a faixa de erros onde o termo de mais baixa ordem

Tabela 1: Malhas usadas no TCM.

malha	$n_x \times N \times n_z$	$\Delta x = 2\pi/\alpha/n_x$	$\Delta y = 2/(N-1)$	$\Delta z = 2\pi/\beta/n_z$
1	$16 \times 449 \times 16$	$0,3927/\alpha$	0,00445	$0,3927/\beta$
2	$16 \times 225 \times 16$	...	0,00893	...
3	$16 \times 113 \times 16$	...	0,01786	...
4	$16 \times 57 \times 16$	...	0,03448	...
5	$16 \times 29 \times 16$	...	0,07142	...
6	$16 \times 15 \times 16$	...	0,14285	...
7	$16 \times 8 \times 16$	...	0,28571	...

Figura 19: Comportamento do erro de discretização global para a componente u da velocidade.

do erro de truncamento é dominante. No entanto, como mostrado adiante, em esquemas numéricos com alta ordem que utilizam diferentes ordens de precisão, dependendo da região do domínio, da equação ou da variável, pode ser difícil atingir a faixa assintótica.

5.1.1.1 Análise do Erro Global.

As figuras 19 a 21 mostram o erro numérico para as três componentes u , v e w da velocidade, baseado nas normas L_1 e L_∞ . As linhas reta e contínua têm inclinações de 5ª a 6ª ordem respectivamente, e serviram como referência para as comparações com os resultados numéricos que foram indicados pelos símbolos. No presente teste de convergência de malhas, os resultados foram apresentados numa escala semi-logarítima.

Figura 20: Comportamento do erro de discretização global para a componente v da velocidade.

Figura 21: Comportamento do erro de discretização global para a componente w da velocidade.

Os resultados mostram uma convergência das componentes u e w de velocidade com 6ª ordem na norma L_1 e 5ª ordem na norma L_∞ , conforme as figuras 19 e 21. Por outro lado, a convergência da componente v foi com 6ª em ambas as normas L_1 e L_∞ , conforme a figura 20. Note também que o erro numérico sobre a malha 1 (a mais refinada) apresentou forte contaminação pelo erro de arredondamento em todas as componentes da velocidade.

As diferentes ordens de convergência para as componentes u e w , sendo de 5ª e 6ª nas respectivas normas L_∞ e L_1 , indicaram uma dominância relativa do erro numérico de 5ª ordem em alguma região da malha. Desta forma, aplicando a norma L_1 sobre um erro numérico E_m , têm-se:

$$L_1(E_m) = (\sum_{j=1}^{K1} E_m^{K1} + \sum_{k=1}^{K2} E_m^{K2})/N \sim (\sum_{j=1}^{K1} g^5 dy_m^5 + \sum_{k=1}^{K2} g^k dy_m^k)/N; \quad (5.14)$$

onde $K1$ e $K2$ satisfazem $K1 + K2 = N$ e indicam o número de nós na malha que resultaram erros de ordens 5 e k , respectivamente.

Como os métodos de diferenças finitas compactas empregados foram de 5ª a 6ª ordens de precisão, k pode assumir os valores 5 ou 6. Devido à dominância do erro numérico de 5ª ordem, têm-se que $g^k \ll g^5$ e isto torna desprezível o erro de k -ésima ordem na equação (5.14). Pode-se, portanto, assumir que

$$L_1(E_m) = (\sum_{j=1}^{K2} g^5 dy_m^5)/N. \quad (5.15)$$

Aplicando $N = 2H/dy_m$ na equação acima, têm-se:

$$\begin{aligned} L_1(E_m) &= (\sum_{j=1}^{K2} g^5 dy_m^5)/(2H/dy_m) = (\sum_{j=1}^{K2} g^5 dy_m^5 dy_m)/2H \\ &= \sum_{j=1}^{K2} (g^5/2H) dy_m^6, \end{aligned} \quad (5.16)$$

ou seja, apesar de o erro dominante ser de 5ª ordem de precisão, a norma L_1 resulta 6ª ordem.

Isto mostra que o cálculo do erro médio pode não ser uma ferramenta eficiente para

se estudar a ordem de precisão global de esquemas numéricos que possuem erro numérico dominado por alguma região da malha.

Geralmente a causa de erros dominantes em alguma região da malha resulta de uso de esquemas numéricos com diferentes ordens de aproximação para diferentes posições na malha. Em códigos desta natureza, é requerido muita atenção na análise da ordem de convergência, que pode depender também da equação envolvida e da variável simulada (SILVA; MEDEIROS; SOUZA, 2005; SILVA; SOUZA; MEDEIROS, 2006, 2008). Dos cálculos de u e w , a única fonte de erro de truncamento em y foi o cálculo do termo $\partial V^{i,k}/\partial y$, equações (4.5) e (4.7). Como apresentado na seção 4.2, as derivadas de primeira e segunda ordem em y foram realizadas usando métodos de diferenças finitas compactas descentradas de 6ª e 5ª ordem de precisão para os respectivos nós próximos e sobre o contorno, e centradas de 6ª ordem de precisão para os nós restantes da malha. O uso de métodos de diferenças finitas compactas centradas garantem erro de truncamento muito menor em magnitude que os métodos descentrados. Este fato resultou um erro numérico predominante na malha sobre a região próxima ao contorno no presente cálculo. De fato, a figura 22 mostra um gráfico semi-logarítimo da distribuição da magnitude do erro numérico para as componentes u , v e w da velocidade nas posições fixadas $\lambda_x/2$ e $\lambda_z/2$ das direções x e z respectivamente. Este resultado foi obtido usando a malha 3, tabela 1. Note que para as componentes u e w da velocidade a magnitude do erro numérico próximo aos contornos foi muito maior que no restante do domínio computacional. Por outro lado a componente v da velocidade não apresentou erro dominante em nenhuma região do domínio e talvez por isso as diferentes normas globais utilizadas no TCM apresentaram uma mesma ordem de convergência que foi 6ª ordem.

É fato que no TCM para a componente v da velocidade a figura 20 apresenta uma convergência de 7ª ordem de precisão sobre as malhas menos refinadas para a norma L_∞ e de 6ª ordem de precisão para as malhas mais refinadas. Uma explicação para este ocorrido é devido os cálculos de ω_x ou ω_z na equação (3.22) terem sido a fonte do erro de discretização de 6ª ordem de precisão que só dominou a ordem de convergência

Figura 22: Erro total E_5 para as componentes da velocidade.

quando malhas mais refinadas foram utilizadas no TCM. Já a convergência de 7^{th} ordem de precisão apresentada pelas malhas menos refinadas pode ser entendida analisando o erro de truncamento em y da discretização do termo $\partial^2 V^{i,k}/\partial y^2$ da equação (4.6). De fato, como apresentado na seção 4.5, a seguinte aproximação por diferenças finitas de 5^{th} ordem de precisão foi utilizada nos cálculos dos pontos próximos às paredes:

$$4v_2'' + v_3'' = \frac{1}{36\Delta y^2}(254v_1 - 432v_2 + 162v_3 + 16v_4) + O(\Delta y^5). \quad (5.17)$$

Têm-se que o valor de v'' já é conhecido em todos os pontos do domínio neste estágio do procedimento de solução, equação (4.6) e, portanto, o que se quer calcular é o valor de v . Sendo assim, multiplicando ambos os lados da expressão 5.17 por $36\Delta y^2$ têm-se a seguinte expressão:

$$36\Delta y^2(4v_2'' + v_3'') = (254v_1 - 432v_2 + 162v_3 + 16v_4) + O(\Delta y^7), \quad (5.18)$$

ou

$$254v_1 - 432v_2 + 162v_3 + 16v_4 = 36\Delta y^2(4v_2'' + v_3'') + O(\Delta y^7). \quad (5.19)$$

Note nesta expressão para cálculo de v um erro de discretização de 7^{th} ordem de precisão.

Figura 23: Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_x da vorticidade.

As figuras 23 a 25 mostram o erro numérico global para as três componentes ω_x , ω_y e ω_z da vorticidade. Devido a forte contaminação do erro de arredondamento sobre os resultados nas malhas mais refinadas, foi possível observar a ordem de convergência somente das componentes ω_x e ω_y . Os resultados apontaram convergências de 6ª e 5ª ordens para ω_x nas respectivas normas L_1 e L_∞ e 6ª ordem para ω_y independente da norma escolhida. Já para a componente transversal ω_z , foi possível verificar a ordem somente quando simulações com precisão quádrupla foram utilizadas. A figura 25 mostra separadamente os resultados obtidos usando precisão dupla, figura 25-a, e precisão quádrupla, figura 25-b. Note que, usando precisão quádrupla foi possível verificar a solução numérica convergindo com 6ª ordem de precisão na norma L_1 e com 5ª ordem de precisão na norma L_∞ .

Similar ao que ocorreu para as componentes u e w da velocidade, diferentes ordens de convergência, sendo de 5ª e 6ª nas respectivas normas L_∞ e L_1 , foram também observadas para as componentes ω_x e ω_z da vorticidade. Como nos cálculos para a velocidade, uma predominância do erro numérico na malha para ω_x e ω_z sobre as paredes também ocorreu. Isto porque numa formulação vorticidade-velocidade a condição de contorno normal à parede, não é pré-estabelecida e deve ser calculada, Capítulo 4. Estes cálculos foram necessariamente realizados usando métodos de diferenças finitas descentradas, resultando

Figura 24: Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_y da vorticidade.

um erro numérico de mais alta magnitude que os cálculos no interior do domínio, onde diferenças finitas compactas centradas foram empregadas. Somente para a componente ω_y esta condição de contorno não precisou ser calculada, e foi assumido o valor nulo para satisfazer a definição da vorticidade, equação (3.5).

5.1.1.2 Análise do Erro Local.

Para se observar a influência do erro numérico dominante sobre toda a malha, foi realizada uma análise local da ordem de convergência de cinco pontos ao longo do domínio, sendo dois sobre as paredes e três no interior do domínio para as componentes de ambas velocidade e vorticidade. As coordenadas na direção y destes respectivos pontos foram 0 ; $0,2857H$; $1,1429H$; $1,7143H$ e $2H$. Nas direções x e z foram usadas as coordenadas $\lambda_x/2$ e $\lambda_z/2$ respectivamente.

Na presente análise, simulações com dupla e quádrupla precisões também foram realizadas e comparadas. Novamente, as simulações com precisão quádrupla foram necessárias para diminuir relativamente ainda mais o erro de arredondamento, principalmente para as componentes da vorticidade no interior do domínio.

Figura 25: Comportamento do erro de discretização global para a componente ω_z da vorticidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

Figura 26: Comportamento do erro de discretização local para a componente u da velocidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

As figuras 26 a 28 mostram o erro numérico local para as três componentes da velocidade, u , v e w respectivamente. Somente resultados sobre os três pontos no interior do domínio foram apresentados para a velocidade, já que sobre as paredes a velocidade assume valor nulo.

Note uma convergência de 6ª ordem de precisão para todas as três componentes u , v e w da velocidade. É interessante que os resultados para u e w não apontam nenhuma influência de um erro numérico dominante de 5ª ordem de precisão, tal como apontado pela análise do erro global, figuras 19 e 21. Isto sugere que o erro dominante próximo às

Figura 27: Comportamento do erro de discretização local para a componente v da velocidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

Figura 28: Comportamento do erro de discretização local para a componente w da velocidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

paredes permanecem localizados e não contaminam a malha toda.

As figuras 29 a 31 mostram o erro numérico local para as três componentes da vorticidade, ω_x , ω_y e ω_z respectivamente. Nos pontos interiores ao domínio, os resultados apontam uma convergência com 6ª ordem de precisão para todas as componentes da vorticidade. No entanto, é observado uma convergência com 5ª ordem de precisão nos pontos sobre as paredes de ω_x e ω_z . Para estas variáveis, o erro numérico de 5ª ordem nos pontos das paredes foi muito maior em magnitude que nos pontos restantes do domínio computacional, onde 6ª ordem foi observada. Tal como ocorrido para a velocidade, não foi observado influência do erro dominante nos pontos das paredes sobre o restante da malha para os cálculos da vorticidade. Os resultados mostram também que os cálculos com quádrupla precisão foram indispensáveis para a análise da ordem de convergência para a vorticidade, principalmente para os pontos interiores ao domínio.

Em geral, os resultados obtidos do TCM foram coerentes com a ordem formal dos métodos de diferenças finitas empregadas no código, sendo de 5ª nos pontos sobre as paredes e 6ª ordem nos pontos verificados no interior do domínio. Todos estes resultados ofereceram confiança de que erros de programação são inexistentes e que o presente código foi bem verificado. Pode-se verificar que a faixa assintótica nem sempre foi atingida e que, dependendo da norma utilizada, foi observado um ordem diferente. Um ponto essencial destes resultados foi que o erro dominante permaneceu isolado. Isto sugere que o MMS serve também para otimizar códigos.

5.1.2 Discretizações Temporais

Como se depreende da revisão bibliográfica, testes de verificação usando TCM também podem ser aplicados nas rotinas temporais. Uma maneira é avaliar somente as rotinas temporais usando soluções manufaturadas mais simples. Este teste foi realizado no presente trabalho mas, por causa de sua simplicidade, não foi discutido neste texto.

Figura 29: Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_x da vorticidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

Figura 30: Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_y da vorticidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

Figura 31: Comportamento do erro de discretização local para a componente ω_z da vorticidade. **a)** resultados com precisão dupla. **b)** resultados com precisão quádrupla.

5.2 Instabilidade Primária

Esta seção reporta um teste de verificação do presente código na simulação da evolução linear de ondas de instabilidade ao longo do escoamento de Poiseuille plano. Os efeitos não-lineares foram analisados separadamente e apresentados na seção 5.3.2. No processo inicial da transição no escoamento de Poiseuille Plano ocorre o fenômeno da Instabilidade Primária que pode ser descrito por uma versão linearizada das equações de Navier-Stokes, a equação de Orr-Sommerfeld. A teoria envolvida neste estudo é chamada de Teoria de Estabilidade Linear *LST em inglês*.

Na presente seção, três casos testes foram simulados e os resultados foram comparados com resultados da LST. Uma breve discussão da LST é apresentada a seguir.

5.2.1 Teoria de Instabilidade Hidrodinâmica Linear

Nos primeiros estágios do processo de transição laminar-turbulento, onde as perturbações são muito pequenas, o escoamento total é decomposto como mostrado pelas equações (3.12) e (3.13). Neste regime a perturbação é do tipo onda com frequência ω e número de ondas longitudinal e transversal α e β , e pode ser escrita numa forma complexa como segue:

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{2}[\bar{v}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + cc], \quad (5.20)$$

onde cc indica complexo conjugado.

Esta onda evoluindo ao longo do escoamento é chamada de onda Tollmien-Schlichting.

A evolução desta perturbação em um escoamento base pode ser descrita por uma versão simplificada das equações de Navier-Stokes incompressíveis como segue: primeiro modela-se o escoamento total com as equações de Navier-Stokes e depois subtrai-se os termos da equação que satisfazem somente o escoamento base. No início do processo de transição os efeitos não-lineares no escoamento não são significantes e podem ser desprezados. Com alguma manipulação dos termos restantes destas equações, pode-se derivar a

equação de Orr-Sommerfeld:

$$(U - c)(\bar{v}'' - k^2\bar{v}) - U''\bar{v} = -\frac{i}{\alpha Re}(\bar{v}^{iv} - 2k^2\bar{v}'' + k^4\bar{v}), \quad (5.21)$$

onde $c = \omega/\alpha$ indica a velocidade de propagação da perturbação e $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

A equação (5.21) modela a evolução linear da componente da velocidade normal ao escoamento (v). A partir da solução da equação (5.21) é possível obter as componentes longitudinal (u) e transversal (w) da perturbação substituindo estes resultados nas equações governantes (3.1) e (3.2) apenas para perturbações desprezando não-linearidade.

A equação de Orr-Sommerfeld é um problema de auto-valor que pode ser resolvido numericamente dando-se um valor inicial (em inglês, *shooting method*) para a solução do problema. O procedimento numérico ajusta, por método iterativo, este valor inicial satisfazendo as condições de contorno do problema e retorna uma solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld. Detalhes da implementação deste algoritmo de solução podem ser vistos em Mendonça (2003). Caso se realize uma abordagem espacial, os números Re e ω são parâmetros reais pré-escolhidos e α uma variável complexa que é a solução do problema de auto-valor. Por outro lado, caso se realize uma abordagem temporal, o autovalor complexo procurado passará a ser $\omega = \omega_r + i\omega_i$, Re e α são os parâmetros reais pré-escolhidos. O número real ω_r representa a frequência de oscilação da referida onda e o número real ω_i sua taxa de decaimento ($\omega_i < 0$, onda estável) ou de crescimento ($\omega_i > 0$, onda instável). Caso ω_i seja nulo, a referida onda terá amplitude constante e é denominada onda neutra.

No presente trabalho foi utilizado uma versão de um código bi-dimensional desenvolvido por Mendonça (2003) para a solução da equação de Orr-Sommerfeld em um escoamento de Poiseuille. Inicialmente esta versão realizava uma abordagem espacial e foi modificada para uma abordagem temporal. Desta forma, variando ordenadamente os parâmetros reais α e Re foi possível obter um conjunto de autovalores complexos ω e representado no diagrama de estabilidade mostrado na figura 32. Além disso, este código calcula também as auto funções que podem ser utilizados como condição inicial nas

simulações bi-dimensionais aqui discutidas.

Figura 32: Diagrama de instabilidade linear das ondas bi-dimensionais.

A curva destacada na figura 32 é denominada curva neutra e representa o conjunto de ondas neutras. Os números destacados sobre as curvas representam taxas de amplificação. As letras A, B e C indicam os casos testes simulados na presente seção e foram discutidos com mais detalhes na subseção 5.2.2.

É possível também relacionar ondas do tipo (5.20) para campos bi-dimensionais e tri-dimensionais. No caso bi-dimensional, ($\beta = 0$), a equação de Orr-Sommerfeld resulta:

$$(U - c_{2d})(\bar{v}'' - \alpha_{2D}^2 \bar{v}) - U'' \bar{v} = -\frac{i}{\alpha_{2D} Re_{2D}}(\bar{v}^{IV} - 2\alpha_{2D}^2 \bar{v}'' + \alpha_{2D}^4 \bar{v}). \quad (5.22)$$

Comparando as equações (5.21) e (5.22) têm-se:

$$c_{2D} = c \quad (5.23)$$

$$\alpha_{2D} = k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (5.24)$$

$$\alpha_{2d} Re_{2D} = \alpha Re. \quad (5.25)$$

As equações (5.23) a (5.25) constituem uma transformação linear que é comumente

denominada transformação de Squire. Têm-se também das equações (5.24) e (5.25) que:

$$Re_{2D} = Re \frac{\alpha}{k} < Re. \quad (5.26)$$

Esta desigualdade permite um resultado chamado Teorema de Squire que relaciona soluções bi-dimensionais com soluções tri-dimensionais da seguinte forma: para cada solução da equação de Orr-Sommerfeld tri-dimensional existe sempre uma solução bi-dimensional em um número de Reynolds mais baixo. Em outras palavras o número de Reynolds crítico é menor para soluções bi-dimensionais.

5.2.2 Simulações e Comparações de Casos Testes

Para o presente trabalho foram realizadas simulações numéricas de três casos testes bi-dimensionais e três casos testes tri-dimensionais de Instabilidade Primária. Os casos testes bi-dimensionais escolhidos foram indicados no diagrama de instabilidade da figura 32 pelas letras A, B e C. Estes casos testes foram simulados e comparados com a Teoria de Estabilidade Linear e os resultados estão apresentados em (CREPALDI et al., 2006). Para aquelas simulações, autofunções que são soluções da equação de Orr-Sommerfeld bi-dimensional foram usadas como condição inicial. Para as presentes simulações, que são tri-dimensionais, a condição inicial foi originada de uma perturbação no escoamento, introduzida por uma técnica que imita uma sucção e sopro nas paredes, seção 3.3. Desta forma, não foi necessário nenhum pré-cálculo das autofunções da equação de Orr-Sommerfeld. Porém, os parâmetros usados nesta perturbação, tais como Re , α e β e o autovalor ω , foram escolhidos a partir do diagrama de instabilidade bi-dimensional, figura 32, e usando a Transformação de Squire. De fato, para cada Re , α e β dados, aplicou-se a transformação de Squire, o que resultou os parâmetros α_{2D} e Re_{2D} de uma solução da equação de Orr-Sommerfeld bi-dimensional. O autovalor ω_{2D} foi calculado como no diagrama de estabilidade, figura 32. A partir de ω_{2D} e usando a transformação de Squire inversa, obtêm-se o autovalor ω associado aos parâmetros Re , α e β escolhidos.

Três casos testes tri-dimensionais foram simulados: um caso linearmente estável (E),

Tabela 2: Parâmetros para as simulações dos casos testes lineares.

	E	N	I
Re	5719	6613	8007
ω_r	0,24451	0,2385	0,2306
ω_i	-0,00131	1×10^{-10}	0,00132
α	0,9	0,9	0,9
β	0,5	0,5	0,5

um caso neutro (N) e um caso linearmente instável (I). A tabela 2 apresenta os parâmetros juntamente com os respectivos autovalores.

As simulações destes casos testes foram realizadas usando uma malha espacial com 201 pontos na direção normal y e 8 modos de Fourier em ambas as direções periódicas x e z . As simulações foram realizadas durante 1600 intervalos no tempo com espaçamento dimensional $\Delta t = 0,1703$. Isto resultou um tempo adimensional de 200 que corresponde aproximadamente para 10 ciclos temporais dependendo do caso teste simulado. Todas as simulações apresentadas nesta subseção tiveram como amplitude inicial $A_0 = 10^{-4}$.

A figura 33 apresenta numa escala logarítmica os resultados das simulações numéricas da amplificação temporal dos casos testes mostrados na tabela 2. Os resultados foram obtidos do ponto $(0,12\lambda_x, 1,85H, 0,12\lambda_z)$ da componente u de velocidade escolhido aleatoriamente. Comparações com resultados da LST foram realizadas.

Os resultados mostram que foi necessário um tempo adimensional em torno de 2 ciclos para que a perturbação introduzida no escoamento convergisse para a solução da LST. Após este tempo, boa precisão para a curva de amplificação temporal foi alcançada para todos os casos testes E, N e I.

Fixando os pontos (j) na direção y , foi possível obter também o valor absoluto do formato (perfil) da perturbação ao longo da direção y da seguinte maneira:

$$o(j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_z} |f_{i,j,k}|^2}{n_x n_z}}, \quad (5.27)$$

onde $f_{i,j,k}$ representa alguma componente da velocidade ou vorticidade no ponto (i, j, k) e

Figura 33: Evolução temporal da componente u da velocidade de ondas TS tri-dimensionais. Os resultados foram obtidos do ponto $(0, 12\lambda_x; 1, 85H; 0, 12\lambda_z)$ de u e foram comparados com a LST.

n_x e n_z indicam o número de pontos no domínio computacional que foram utilizados para as respectivas direções x e z .

A figura 34 apresenta o módulo das autofunções u , v e w da velocidade para o caso teste I. A amplitude foi normalizada pelo máximo de u .

5.2.3 Teste de Convergência de Malha

Simulações do caso teste instável I usando outras malhas também foram realizados. Isto foi necessário para garantir que os resultados não dependiam da malha escolhida. Devido à utilização de um método pseudo-espectral nas direções x e z e métodos de diferenças finitas compactas na direção y , erros de truncamento na presente simulação foram causados somente pelas discretizações ao longo de y . Sendo assim, um refinamento de malhas somente na direção y foi realizado. Estudos de resolução nas direções x e z não foram necessários pois não acontece nenhuma geração de ondas com números de ondas mltiplos de α e β . Isto é devido ao fato de que os termos não-lineares das equações

Figura 34: Valor absoluto do perfil da perturbação da velocidade na direção y após evolução de 10 ciclos no tempo.

governantes, responsáveis pela geração destas novas ondas, são muito pequenos no estágio linear.

Cinco diferentes malhas usando respectivamente 81, 121, 161, 201 e 241 pontos na direção normal y foram usadas neste teste. As simulações foram realizadas adotando-se a mesma amplitude inicial de perturbação, mesmo tempo de simulação, intervalo no tempo (dt) e resolução longitudinal e transversal, usados nas simulações apresentadas na figura 34.

A figura 35 apresenta os resultados para a curva de amplificação temporal do caso teste (I) usando as cinco malhas escolhidas. Para efeito de comparação, o resultado previsto pela LST também é apresentado. As curvas estão numa escala semi-logarítima.

Independente da malha escolhida, as simulações somente foram comparáveis com o resultado teórico descrito pela LST somente depois de dois ciclos no tempo. A partir do terceiro ciclo no tempo, o resultado usando 81 pontos em y foi relativamente ruim. No entanto, com o aumento do refinamento em y foi possível verificar uma convergência da inclinação da curva de amplificação obtida numericamente para a inclinação prevista pela

Figura 35: Simulação da curva de amplificação temporal do caso teste instável I usando cinco diferentes malhas.

LST. As simulações usando 201 e 241 pontos em y mostram boa aproximação quando comparadas com a LST. Isto mostra que a malha com 201 pontos em y é adequada para descrever com boa resolução os casos testes lineares.

5.3 Instabilidade Secundária

5.3.1 Teoria de Instabilidade Secundária

A Teoria de Instabilidade Secundária constitui-se na análise da instabilidade do escoamento a partir do momento que efeitos não-lineares tornam-se relevantes. Em mais detalhes, quando as ondas de instabilidade crescem, as interações não-lineares se tornam mais fortes e contribuem para a formação de um novo escoamento principal. Este novo e mais complicado escoamento principal pode se tornar instável a pequenas perturbações que são descritas também por uma Teoria de Estabilidade Linear. Esta teoria é denominada Teoria de Instabilidade Secundária.

5.3.2 Simulações e Comparações de Casos Testes

Nesta subseção foi verificado se o presente código descreve bem os primeiros estágios não-lineares da transição do escoamento em estudo. As simulações representam dois experimentos clássicos de transição controlada: as ressonâncias do tipo K e H (HERBERT, 1988). A ressonância do tipo K se dá a partir da interação entre uma onda bi-dimensional de média amplitude e duas oblíquas de pequena amplitude. Estas ondas possuem mesma frequência e resultam na formação de vórtices de formato Λ com padrão alinhado. A ressonância tipo H também resulta de uma interação entre uma onda bi-dimensional de média amplitude e duas ondas oblíquas de pequena amplitude. No entanto, as ondas oblíquas possuem frequência igual à metade da frequência da onda bi-dimensional e a interação deste sistema de ondas resulta na formação de vórtices Λ com padrão alternado.

Diferente dos cenários experimentais que são melhor descritos por uma abordagem espacial, as presentes simulações foram realizadas usando uma abordagem temporal. Desta forma, um dos parâmetros da condição inicial de simulação foi o número de onda longitudinal ao invés da frequência de oscilação. Consequentemente, o cenário de ressonância tipo-K foi gerado a partir da interação entre uma onda bi-dimensional e duas ondas oblíquas com mesmo número de onda longitudinal. Já a ressonância do tipo-H foi gerada a partir da interação entre uma onda bi-dimensional e duas ondas oblíquas que possuíam metade do valor do número de onda longitudinal da onda bi-dimensional. Devido a abordagem temporal, que assume periodicidade nas direções x e z , o escoamento foi representado em modos de Fourier (m, n) onde m e n correspondem aos múltiplos dos menores números de onda longitudinal e transversal respectivamente. Sendo assim, uma onda fundamental bi-dimensional foi representada pelo modo $(1, 0)$, uma fundamental oblíqua pelo modo $(1, 1)$ e uma subharmônica oblíqua pelo modo $(1/2, 1)$.

As simulações foram comparadas com simulações numéricas descritas por Zang e Kirst (1989). Naquele trabalho, a energia cinética dos modos de Fourier para a componente u da velocidade é calculada como:

$$E_{i,k}(t) = \frac{1}{2}d_{i,k} \int_{-1}^1 |U^{i,k}(y, t)|^2 dy / E_0(t), \quad (5.28)$$

onde $d_{i,k} = (2 - \delta_{i0})(2 - \delta_{k0})$ é uma constante que depende da função delta de Kronecker¹ e $E_0(t)$ é a energia do escoamento base.

O número $d_{i,k}$ é usada para contar também a energia dos modos de Fourier simétricos. Por exemplo, $E_{1,1}$ satisfaz $d_{1,1} = (2 - \delta_{10})(2 - \delta_{10}) = 2 \times 2 = 4$. Logo $E_{1,1}$ é a soma da energia cinética dos modos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ para $U^{i,k}$. Note que a energia cinética foi normalizada pela energia cinética do escoamento de Poiseuille, denotado por E_0 .

Os parâmetros escolhidos para a presente simulação foram apresentados na tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros para as simulações das instabilidades tipo-K e H.

	Re	α_{2D}	α_{3D}	β	$A_{0_{2D}}$	$A_{0_{3D}}$
Tipo-K	8000	1	1	1	0,016	$1,3 \times 10^{-4}$
Tipo-H	8000	1	0,5	1	0,016	$2,76 \times 10^{-5}$

Para cada uma das simulações executadas nesta seção, uma perturbação do tipo sucção e sopro ao longo das paredes foi introduzida. Em seguida foi assumido um tempo adimensional de simulação correspondente a 640 intervalos com espaçamento $\Delta t = 0.1590$ para que esta perturbação convergisse para a solução da LST. Após este tempo inicial, as amplitudes foram ajustadas e os resultados foram comparados com os resultados de Zang e Kirst (1989). As comparações foram realizadas até um tempo adimensional de $t = 1120 \times \Delta t = 178,08$ para as simulações tipo-K, e $t = 1200 \times \Delta t = 190,8$ para o caso tipo-H. Para ambos os casos de instabilidade tipo-K e H, uma malha espacial com 161 pontos para a direção y e 32 pontos para cada uma das direções x e z foi utilizada. Novamente, devido o filtro anti-alias, foi assumido somente 20 modos de Fourier em ambas direções x e z . O domínio computacional comportou dois comprimentos de ondas em

¹Função delta de Kronecker: $\delta : \mathcal{Z} \rightarrow \{1, 0\}$ onde $\forall k \in \mathcal{Z}$, $\delta(k) = \delta_{k,1} = 0$ se $k \neq 1$ e 1 se $k = 1$.

ambas as direções periódicas x e z .

As figuras 36-a e b apresentam o desenvolvimento temporal da energia cinética dos modos de Fourier planar $(1,0)$ e fundamental transversal $(1,1)$ para a ressonância tipo-K e dos modos planar $(1,0)$ e sub-harmônico $(1/2,1)$ para a ressonância tipo-H respectivamente. Comparações dos resultados numéricos com os resultados de Zang e Kirst (1989) foram apresentadas nas figuras 36-a e b. Para efeito de comparação a energia cinética destes modos foi apresentada numa escala semi-logarítmica de base 10.

Figura 36: Evolução temporal da energia dos modos de Fourier durante as ressonâncias fundamental (a) e subharmônica (b).

Os resultados apresentam boa concordância com os resultados de Zang e Kirst (1989). No entanto, as ondas oblíquas ou tri-dimensionais, em ambos os casos, não exibem um cres-

cimento exponencial puro como previsto pela Teoria de Instabilidade Secundária descrita por Herbert (1988). Zang e Kirst (1989) atribuem este fato principalmente à diferença de fase inicial entre a onda bi-dimensional e as ondas oblíquas mas concluiu-se também que o ajuste de fase não deve influenciar na taxa de amplificação das ondas.

As figuras 37 e 38 mostram iso-superfícies da evolução temporal da vorticidade transversal ω_z para os casos de instabilidades do tipo K e H respectivamente. Vários instantes da evolução temporal da instabilidade do tipo K e tipo-H são apresentados nas figuras 37 e 38. Característico da instabilidade tipo-K, a ressonância resulta uma geração de vórtices Λ alinhados. Por outro lado, a ressonância tipo-H gera vórtices Λ que são não alinhados.

Figura 37: Iso-superfície de valor 0, 15 para os vórtices Λ resultantes da instabilidade do tipo K.

5.3.3 Estudo de Convergência na Malha

É mostrado na figura 36 que os resultados das simulações correntes usando uma malha espacial com 161 pontos na direção y teve boa concordância com os resultados numéricos apresentados em Zang e Kirst (1989). Nesta subseção, um estudo de refinamento de

Figura 38: Iso-superfície de valor 0,15 para os vórtices Λ resultantes da instabilidade do tipo H.

malhas na direção y verificou se a malha utilizada naquelas simulações foi necessária e suficiente para garantir ausência de influência de erro de truncamento sobre os resultados. Para este teste foram utilizados quatro diferentes malhas espaciais usando 81, 121, 161 e 201 pontos na direção y . As simulações foram realizadas usando os mesmos parâmetros das simulações apresentadas na seção 5.3.2.

A figura 39 apresenta os resultados das simulações do modo fundamental transversal para o caso da instabilidade tipo-K usando as quatro malhas indicadas.

Os resultados indicaram que a malha usando 81 pontos em y foi relativamente insuficiente para descrever bem a ressonância entre as ondas introduzidas no escoamento, mesmo nos instantes iniciais das simulações onde as ondas ainda não haviam entrado em ressonância. Durante este tempo inicial, até $t = 70$, uma oscilação temporal foi indicado por este resultado. Porém, usando a malha com 121 pontos em y foi possível verificar que esta oscilação temporal foi eliminada. Após este tempo inicial e durante a ressonância entre as ondas, os resultados indicaram um crescimento quase exponencial mas com uma

Figura 39: Simulações da instabilidade tipo-K usando quatro diferentes malhas. Comparações dos resultados para o modo $(1, 1)$.

taxa de crescimento diferente daquela indicada pelas simulações usando a malha com 81 pontos. No entanto, os resultados não mais mudaram de comportamento somente quando as malhas com 161 e 201 pontos em y foram utilizadas. Isto apontou a malha com 161 pontos em y sendo suficiente para as simulações destes casos da instabilidade secundária.

Trens de Ondas Modulados

Neste Capítulo são apresentados os resultados das simulações da evolução temporal dos trens de ondas modulados num escoamento de Poiseuille plano. Testes de convergência de malhas para as presentes simulações são apresentados no apêndice 7. A condição inicial foi obtida imitando-se numericamente uma técnica de sucção ou sopro usados em experimentos, como mostrado no capítulo 3. Desta forma, foi introduzido uma perturbação no escoamento e foi simulado, com o presente código numérico, a evolução desta perturbação até a formação das ondas TS. Em seguida, estas ondas foram corrigidas em amplitude e assumidas como sendo a condição inicial para as presentes simulações. O procedimento da geração da condição inicial é detalhado no Capítulo 7.

Os resultados foram apresentados tanto no espaço físico quanto no espaço de Fourier. A análise no espaço de Fourier permitiu verificar separadamente a evolução temporal de cada modo espectral. As ondas TS foram representadas no espaço de Fourier pelos modos $(m\alpha, n\beta)$, onde m e n são múltiplos dos menores números de onda longitudinal α e transversal β , respectivamente. Eles percorrem a faixa discreta $m = 0, 1, \dots, N_x$ e $n = 0, 1, \dots, N_z$. Desta forma, o modo $(\alpha, 0)$ representa a onda TS 2D, os modos $(\alpha, n\beta)$ representam as ondas TS 3D de número de onda longitudinal α e os modos $(2\alpha, n\beta)$, os harmônicos das ondas fundamentais. Os modos $(0, n\beta)$ representam a distorção tridimensional do escoamento base.

6.1 Escolha dos Casos para as Simulações

Foram simulados os três casos de trens de ondas indicados pelos círculos no diagrama de instabilidade, figura 40. Estes três casos tinham um mesmo número de Reynolds, $Re = 8000$, e diferentes valores de número de onda longitudinal (α). Os parâmetros destas simulações foram apresentados na tabela 4. Nesta tabela, os parâmetros N_x e N_z indicam o número de modos espectrais calculados nas direções longitudinal e transversal respectivamente. L_x e L_z indicam o comprimento do domínio espectral nas respectivas direções. Estes parâmetros se referem apenas a uma metade do domínio espectral.

Tabela 4: Parâmetros e malhas utilizados nas presentes simulações^a.

Parâmetros				Resolução espectral				Resolução tempo
	Re	α	β_0	N_x	$L_x = \alpha N_x$	N_z	$L_z = \beta_0 N_z$	dt
caso 1	8000	1	0,03	5	6,2832	85	2,55	0,329
caso 2	8000	0,93	0,01	5	6,7561	171	1,71	0,329
caso 3	8000	0,86	0,01	5	7,3060	171	1,71	0,329

Resolução no espaço físico									
	n_x	Δx	l_x	N	Δy	l_y	n_z	Δz	l_z
caso 1	16	0,3927	6,2832	201	0,01	$2H$	256	0,0245	209,44
caso 2	16	0,3927	6,7561	201	0,01	$2H$	512	0,0123	628,32
caso 3	16	0,3927	7,3060	201	0,01	$2H$	512	0,0123	628,32

^aOs parâmetros N_x , L_x , N_z e L_z são referentes somente a um lado do domínio espectral.

O primeiro caso envolveu o mesmo número de Reynolds e número de onda longitudinal usados por Zang e Kirst (1989) nas simulações dos cenários de transição tipo-K e H. Aquelas simulações foram reproduzidas na presente tese e as comparações são apresentadas na seção 5.3.

No contexto dos cenários clássicos de transição, $Re = 8000$ pode ser considerado um valor alto, pois é possível verificar a instabilidade tipo-K em escoamentos de Poiseuille plano mesmo para números de Reynolds subcríticos, como se depreende do Capítulo 2. No entanto, devido o fato de a transição natural envolver amplitudes iniciais bastante pequenas, torna-se indispensável para o processo de transição o uso de número de Reynolds supercrítico. Caso contrário o sistema de ondas não desencadearia um regime não-linear

Figura 40: Curvas neutras de diagramas de instabilidade de ondas TS 2D e 3D.

e, portanto, a transição, pois decairia linearmente devido a estabilidade do escoamento.

Dado que um dos objetivos do presente estudo foi investigar o comportamento não-linear de trens de ondas perto do primeiro e segundo ramos do diagrama de instabilidade linear, optou-se por escolher casos de trens de ondas que estão localizados dentro da faixa linearmente instável do mesmo diagrama e razoavelmente perto do número de Reynolds crítico. O motivo desta escolha foi o fato de que em camada limite a transição natural acontece numa região também linearmente instável. Na camada limite ocorre variação do número de Reynolds ao longo do processo de transição e, dependendo das condições de Re e amplitude das ondas TS, o trem de ondas modulado passa pelo primeiro ramo do diagrama e pode transicionar de laminar para turbulento em uma posição próxima ao segundo ramo. Como a proposta do presente trabalho foi verificar se os mecanismos não-lineares em camada limite também acontecem em escoamentos de Poiseuille plano, pareceu adequada a escolha dos casos marcados na figura 40. Para o presente texto, estes três casos de trens de ondas escolhidos foram associados aos seus respectivos números de ondas longitudinais, ou seja, casos $\alpha = 0,86$, $0,93$ e 1 .

Outra motivação para a escolha destes casos veio da Teoria de Instabilidade Linear. De fato, a figura 40 apresenta três curvas neutras no diagrama de instabilidade. A curva

para $\beta = 0$ representa a curva neutra das ondas TS 2D e é a mesma curva em destaque na figura 32. As curvas neutras para $\beta \neq 0$ foram obtidas usando a Transformação de Squire, equações (5.23) a (5.25).

Note que a curva $\beta = 0$ possui o menor número de Reynolds crítico, quando comparada com as outras curvas. Isto significa que as ondas TS 2D iniciam o crescimento linear numa posição do diagrama que é anterior à posição do início do crescimento das ondas TS 3D. Entretanto, nem sempre as ondas TS 2D são as mais críticas, isto é, possuem as maiores taxas de amplificação. Por exemplo, pela figura 40 uma onda TS 3D possuindo $\alpha = 0,86$; $Re = 8000$ e $\beta = 0,2$ possui taxa de amplificação linear maior que a respectiva onda TS 2D. Isto porque a onda TS 2D está mais próxima de sua curva neutra do que a onda TS 3D. Isto pode ser visualizado na figura 32 que apresenta também um mapeamento das taxas de amplificação das ondas TS em diferentes posições do diagrama. A figura 32 apresenta somente resultados para ondas TS 2D mas é qualitativamente semelhante para ondas TS 3D. No caso $\alpha = 1$ e $Re = 8000$, a situação se reverte, isto é, a onda TS 2D possui maior taxa de amplificação que a onda TS 3D com $\beta = 0,2$. Ainda em $Re = 8000$ e $\alpha = 1$ é possível também verificar na figura 32 que as ondas TS 3D para $\beta = 0,4$ são estáveis linearmente.

Usando este argumento foi possível escolher três casos de trens de ondas que possuem diferentes comportamentos durante a evolução linear. A figura 41 apresenta a evolução temporal da amplitude dos modos de Fourier dos três casos simulados. O caso $\alpha = 1$ representa um trem de ondas modulado onde as ondas TS com mais baixos números de ondas transversais possuem maiores taxas de crescimento linear. Especificamente neste caso, a onda TS 2D ($\beta = 0$) é a onda com a maior taxa de amplificação. Estas ondas que mais crescem linearmente tendem, em conjunto, se comportarem como uma onda 2D que pode promover uma instabilidade secundária tipo-K no processo. Por outro lado o caso $\alpha = 0,86$ possui máxima amplificação em números de ondas β relativamente altos, o que tende a favorecer o aparecimento da instabilidade oblíqua. O caso $\alpha = 0,93$ é um caso intermediário que possui uma faixa mais larga de modos representando ondas TS

Figura 41: Evolução espectral dos modos transversais fundamentais durante o início do estágio linear. *Topo à esquerda:* caso $\alpha = 1$. *Topo à direita:* caso $\alpha = 0,93$. *Inferior:* caso $\alpha = 0,86$.

com taxas de amplificação semelhantes e por isso poderia favorecer um comportamento misto ou até mesmo o aparecimento de um cenário desconhecido. Estas conjecturas sobre o início do regime não-linear dos casos escolhidos foram investigadas no presente capítulo.

6.2 Condição Inicial

Diferentes maneiras de se estabelecer a condição inicial para as simulações numéricas foram experimentadas no presente trabalho. Em todas elas a fase dos modos foi sempre a mesma, apenas a amplitude foi alterada. Uma maneira foi assumir os modos transversais do espectro de Fourier com mesma amplitude inicial ou um espectro plano. No entanto, este espectro plano era muito extenso e levava a um pico muito grande no espaço físico. Isto não era adequado para o presente estudo dos trens de ondas devido

à grande não-linearidade incitada no início do processo. Outra tentativa foi assumir os mesmos parâmetros da tentativa anterior ajustando somente uma faixa de modos transversais pouco mais extensa que a faixa linearmente instável. Desta forma, pode-se reduzir o pico no espaço físico e evitar as não-linearidades no início do processo. Ao final do regime linear esta condição inicial não deveria resultar diferenças da condição anterior, já que deixou-se somente de ajustar os modos com grande taxa de decaimento linear. No entanto, durante as simulações as interações não-lineares na evolução geraram amplitudes significativas para os modos que não foram ajustados na condição inicial. A figura 42 mostra a evolução temporal dos modos espectrais $(1, n\beta)$. Para efeito de simplificação e usando o fato que o espectro de Fourier é simétrico em relação ao modo $(1, 0)$, foram apresentados, neste Capítulo, figuras compostas somente de modos transversais com número de onda transversal β positivo. A amplitude de cada modo foi calculado no espaço de Fourier numa posição fixa $y = 0, 15H$ como segue:

$$A(l, k) = \sqrt{(\Re(U^{l,k}))^2 + (\Im(U^{l,k}))^2}, \quad (6.1)$$

onde $\Re$ e $\Im$ representam a parte real e parte complexa de um número complexo.

Na figura 42 a faixa de modos $(1, 0)$ até $(1; 0, 63)$ foi ajustada na condição inicial e foi chamada neste texto de faixa principal. Os modos restantes, de $(1; 0, 84)$ até $(1; 2, 55)$, não foram dados na condição inicial mas foram gerados devido a não-linearidade do processo. Estes modos harmônicos não descreveram um comportamento linear no tempo. De fato, a TEL prevê grandes taxas de decaimento exponencial no tempo para estes modos, o que não aconteceu mesmo para os resultados apresentados na figura 43 onde a faixa de modos $(1; 1, 68)$ até $(1; 2, 55)$ apresenta suave decaimento exponencial no tempo. Note que no início do processo uma faixa intermediária composta pelos modos $(1; 0, 84)$ até $(1; 1, 29)$ apresentaram amplitude diferente da faixa de modos $(1; 1, 68)$ até $(1; 2, 55)$. Possivelmente a faixa de modos intermediária é composta dos 1º harmônicos da faixa principal, enquanto a faixa de modos de mais altos β , faixa inferior, pode ser composta de 2º harmônicos. Os modos tracejados e menos destacados nas figuras 42 e 43 não apresentaram um compor-

tamento que pudesse ser atribuído a uma destas faixas e por isso não foram destacados.

Figura 42: Caso $\alpha = 1$. Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Os modos de $(1, 0)$ até $(1; 0, 63)$ representam a faixa primária, os modos de $(1; 0, 84)$ até $(1; 1, 29)$ representam a faixa intermediária e os modos de $(1; 1, 68)$ até $(1; 2, 55)$ representam a faixa inferior.

A figura 42 mostra um comportamento inicial não observado experimentalmente por Medeiros (2004) nos estudos realizados em um túnel de vento da transição natural em camada limite. De fato, em condições semelhantes das presentes simulações, as faixas de modos $(1; 0, 84)$ até $(1; 1, 29)$ e $(1; 1, 68)$ até $(1; 2, 55)$ não poderiam ser obtidas em um experimento por causa do ruído do túnel de vento, que possui flutuações de amplitudes maiores que as amplitudes dos modos que compõem estas faixas na figura 42. Por outro lado, as simulações numéricas espaciais realizadas por Stemmer (2001) também não apontaram esta não-linearidade durante o início daquela evolução. Isto porque aquelas simulações foram realizadas usando um domínio computacional limitado apenas em modos da faixa principal ajustada. Somente no regime fracamente não-linear aquele domínio computacional foi estendido para captar as pequenas escalas resultantes da não-linearidade do processo.

Para melhor representar uma solução realística, adotou-se para o presente trabalho uma condição inicial que pareceu mais semelhante ao caso experimental. Esta condição

inicial foi composta de todos os modos transversais resolvíveis. A amplitude dos modos da faixa primária foi mantida como nos casos anteriores e as amplitudes dos modos das faixas intermediária e inferior foram ajustadas para 10^{-8} . Esta condição inicial foi apresentada na figura 43. Intencionalmente, a amplitude inicial de cada modo foi suficientemente maior que a amplitude inicial dos modos secundários gerados pela não-linearidade e mostrados na figura 42. No início da evolução, os modos da faixa intermediária descreveram uma

Figura 43: Evolução temporal de amplitude dos modos fundamentais. Ajuste inicial de amplitude para duas faixas de modos.

trajetória um pouco diferente dos respectivos resultados da figura 42. Entretanto, os resultados finais permaneceram muito parecidos, figuras 42 e 43. Por este motivo, optou-se por simular os trens de ondas usando a condição inicial mostrada na figura 43.

6.3 Resultados e Análise das Simulações

Os resultados das simulações foram apresentados separadamente em sub-seções que correspondem aos casos destacados na figura 40.

6.3.1 Caso1: $\alpha = 1$.

Na presente seção os resultados no espaço físico foram representados pela componente u de velocidade e apresentados por iso-superfícies Q . Esta técnica é bastante empregada na identificação de vórtices em escoamentos e Q é uma variável que envolve o tensor gradiente da velocidade $\nabla \vec{u}$. Mais detalhes sobre esta técnica de visualização de vórtices e o formato de Q podem ser vistos em Jeong e Hussain (1994). A figura 44 apresenta iso-superfícies de $Q = 1 \times 10^{-5}$ da evolução temporal no espaço físico de um trem de ondas modulado em um escoamento de Poiseuille plano. Na figura 44 o domínio em x corresponde a dois comprimentos de ondas para facilitar a visualização.

Estes resultados foram apresentados na perspectiva para melhor visualização. A evolução do espectro de potência para os modos $(1, n\beta)$ da presente simulação foram apresentados na figura 43. No início da evolução o trem de ondas modulado apresentou uma estrutura com formato de lua crescente e foi bastante localizado na linha de centro do escoamento devido à alta modulação transversal. A baixa amplitude inicial permitiu o trem de ondas modulado evoluir linearmente durante os primeiros estágios. Neste regime linear as ondas satisfizeram uma relação de dispersão ² onde as estruturas no formato de lua crescente vão tomando maior espaço no domínio computacional e vão se tornando cada vez mais abertas. Isto porque as ondas TS 3D de baixo número de onda transversal (β) e a onda TS 2D têm taxas de crescimento bem maiores que as ondas TS 3D de β 's maiores. Além do mais, a onda TS 2D possui a maior taxa de amplificação. Estas propriedades tornaram o trem de ondas modulado fortemente bi-dimensional durante a evolução linear. Próximo ao tempo $t = 2000$ o trem de ondas modulado atingiu uma amplitude no qual os efeitos não-lineares se tornaram relevantes. A não-linearidade em seu estágio inicial provocou as pequenas deformações próximas à linha de centro mostradas na figura 44.

Medeiros (2004) verificou em seus experimentos em camada limite que os trens de ondas num regime fracamente não-linear experimentaram deformações próximo à linha de

²Relação de dispersão é uma relação entre os números de onda α , β , frequência ω e Re que no presente caso é obtido pela solução da equação de Orr-Sommerfeld. Esta relação é frequentemente apresentada na literatura como $F(\alpha, \beta, \omega, Re) = 0$.

Figura 44: Isosuperfícies $Q = 1 \times 10^{-5}$. Caso $\alpha = 1$.

centro em z . Num primeiro estágio, aquelas deformações eram provocadas pelas distorções tri-dimensionais do escoamento médio e apresentaram um formato de estrias longitudinais. Este efeito foi associado por Medeiros (2004) à transição oblíqua (ELOFSSON; ALFREDSSON, 1998). Nas simulações de Stemmer (2001) os efeitos não-lineares também foram atribuídos à transição oblíqua e segundo Stemmer aquele mecanismo dominou a transição do escoamento laminar para turbulento. Medeiros (2004) em seus estudos separou a parte oscilatória do sinal das distorções médias tri-dimensionais usando um filtro digital. Examinando a parte oscilatória foi possível detectar que, em um segundo estágio não-linear,

dois máximos de amplitude que emergiram um de cada lado da linha de centro daquele trem de ondas modulado. Estes picos de amplitude foram atribuídos à atividade não-linear. Segundo Medeiros (2004), esta estrutura surgiu de uma não-linearidade associada com a transição tipo-K. Como em (KLEBANOFF; TIDSTROM; SARGENT, 1962), o formato da parte oscilatória apresentava picos de amplitudes separados por um vale ao longo da linha de centro. Esta estrutura foi chamada de estrutura de picos e vales.

Análise no espaço físico é interessante, mas o espaço de Fourier trás informações mais definitiva a cerca do regime não linear. Além disso, no espaço de Fourier os efeitos não-lineares podem facilmente ser identificados em seus estágios iniciais. Por isso este trabalho concentra a análise no espaço de Fourier, figura 45. Os resultados foram apresentados em três gráficos. O gráfico superior à esquerda indica os modos estacionários $(0, n\beta)$ originados das interações não-lineares entre as ondas. Estes modos são os representantes das distorções tri-dimensionais do escoamento médio que resultam em estrias longitudinais. O gráfico superior à direita indica os modos $(1, n\beta)$. Neste conjunto de modos está presente a faixa de modos inicialmente excitada na condição inicial. E por fim o gráfico inferior representa os modos harmônicos $(2, n)$, também originados das interações não-lineares entre as ondas.

Para efeito de claridade desta última observação, o resultado apresentado na figura 45 sobre o último tempo adimensional ($t = 2000$) foi ampliado e mostrado na figura 46. A linha da frente representa os modos $(0, n\beta)$ responsáveis pela distorção tri-dimensional do escoamento médio. A linha intermediária representa os modos $(1, n\beta)$ ou modos fundamentais e a linha ao fundo os modos harmônicos $(2, n\beta)$.

A análise das figuras 45 e 46 sugeriram que o regime não-linear observado é uma instabilidade tipo-K. Em primeiro lugar, o regime se caracteriza pela formação de bandas espectrais com mesmo número de onda longitudinal dos modos fundamentais, associadas à bandas espectrais de mesmos números de onda transversais e com número de onda longitudinal nulo. Além disso, observa-se um comportamento explosivo destas ondas, o que é característico de uma instabilidade. O cenário não parece semelhante a uma

Figura 45: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda:* modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita:* modos $(1, n\beta)$. *Inferior:* modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A_0 = 2 \times 10^{-5}$.

Figura 46: Espectro Transversal no tempo adimensional $t = 2000$. A linha à frente representa os modos $(0, n\beta)$, a linha intermediária os modos $(1, n\beta)$ e a linha ao fundo os modos $(2, n\beta)$.

transição oblíqua. De fato a transição oblíqua não apresenta como componente principal modos espectrais não-lineares com número de onda longitudinal fundamental. Além disso, transição oblíqua não apresenta crescimento explosivo em seu estágio iniciais da não-linearidade.

A hipótese de que o fenômeno pudesse estar associado à instabilidade tipo-K foi então sujeito a uma análise mais detalhada. A análise se concentrou no estudo da banda $(1; 1, 2)$, pois a banda $(1; 2, 4)$ é claramente um harmônico transversal que se origina das auto interações dos modos compondo a banda $(1; 1, 2)$.

Durante a evolução temporal, o aparecimento destes picos de amplitude se deu em um tempo relativamente curto. É possível visualizar na figura 43 a alta taxa de amplificação dos modos das faixas intermediária e inferior depois do tempo adimensional próximo à $t = 1950$. Este comportamento é característico de uma instabilidade secundária. Além do mais, o crescimento de forma seletiva da banda de ondas TS 3D representadas no espectro pelo modo $(1, 1; 2)$ possuem mesmo número de onda longitudinal α da onda TS 2D. Estes fatos reforçam a conjectura da existência de uma instabilidade secundária tipo k . Resolveu-se então investigar com maiores detalhes a importância da instabilidade tipo k no processo de transição do presente caso.

6.3.1.1 Investigação da Instabilidade tipo-K

A instabilidade tipo-K é um dos cenários clássicos de transição comentados no capítulo 2 desta tese. Este cenário acontece tanto para camada limite quanto para escoamento de Poiseuille plano (ORZAG; PATERA, 1983). Para investigar a instabilidade tipo-K, foi realizado no presente estudo uma simulação numérica usando mesmos parâmetros adotados para a simulação do trem de ondas modulado mostrado na figura 44. Entretanto, neste caso apenas a onda TS 2D assumiu uma amplitude significativa na origem, $A_{2D} = 2,5 \times 10^{-4}$. Cada um dos modos restantes do espectro tiveram o valor da amplitude inicial $A_{3D} = 10^{-8}$. A idéia era produzir uma simulação de transição tipo-K clássica para servir como referência para a análise do trem de ondas modulado. A figura

47 apresenta a evolução em amplitude dos modos transversais $(1, n\beta)$ da presente simulação. As faixas destacadas na figura 43 foram igualmente destacadas neste resultado para

Figura 47: Instabilidade tipo-K. Evolução temporal da amplitude dos modos transversais $(1, n\beta)$.

efeito de comparação. Os resultados das figuras 43 e 47 apresentam algumas diferenças entre si. De fato, durante a evolução temporal as faixas de modos intermediária e inferior na figura 43 evoluíram de forma bem diferente destas mesmas faixas destacadas na figura 47. No tempo adimensional próximo à $t = 1600$, onde se iniciou a instabilidade secundária, a faixa intermediária possuiu uma amplitude bem menor que a correspondente faixa nos resultados da figura 43. Naquela figura, parece de fato que a faixa intermediária foi formada por modos harmônicos transversais dos modos da faixa principal. Isto favorecia uma maior amplitude da faixa intermediária nos tempos posteriores do processo. Além disso, o tempo adimensional onde se iniciou o crescimento explosivo dos modos foi diferente para os dois casos, sendo $t \sim 1750$ para os resultados da figura 43 e $t \sim 1600$ para os resultados da figura 47. Embora com estas diferenças, pareceu que qualitativamente os dois resultados foram similares pois ambos nos últimos estágios apresentaram comportamentos explosivos com taxas de amplificação semelhantes.

Uma característica importante da instabilidade tipo-K é a faixa de número de onda transversal mais instável. Para extrair esta faixa procurou-se processar os dados da figura

43. Entretanto, devido a outras interações não-lineares entre as diversas ondas TS 3D, não foi possível extrair uma taxa de amplificação que pudesse ser atribuída exclusivamente ao fenômeno da instabilidade tipo-K.

Foi então necessário simular separadamente vários sistemas compostos da onda TS 2D e duas ondas TS 3D oblíquas opostas. Cada sistema para um número de onda transversal diferente. É importante enfatizar que não se tratou de uma única simulação da onda TS 2D e um conjunto de ondas TS 3D, mas sim de um conjunto de simulações da onda TS 2D e pares de ondas TS 3D oblíquas cujos resultados foram apresentados na figura 48. Nestas simulações a onda TS 2D teve amplitude inicial $A_{2D} = 0,025$ e as ondas TS 3D tiveram amplitude inicial $A_{3D} = 1 \times 10^{-8}$. Inicialmente, as ondas TS 3D apresentaram um comportamento bastante oscilatório no tempo. Este é um processo característico deste tipo de simulação que frequentemente é associado ao ajuste de fase entre as ondas ressonantes.

Para se identificar a faixa de ondas mais instáveis, vários métodos podem ser usados. No presente caso a utilização de um fator de amplificação apresenta uma série de vantagens. O fator de amplificação é definido como $N = \ln \frac{A}{A_0}$ onde A e A_0 são as amplitudes em dois tempos definidos. Os modos que obtêm maior N são os mais instáveis no processo. As linhas contínuas em $t = 800$ e $t = 950$ indicam o intervalo de tempo onde foi medido o fator de crescimento de cada modo. Note que no tempo adimensional em torno de $t = 600$, onde a instabilidade tipo-K foi iniciada, as ondas TS 3D não apresentaram mesma amplitude devido principalmente às tentativas de ajuste de fase. Por exemplo, a onda TS com $\beta = 3,6$ demorou mais tempo que as outras ondas para se ajustar em fase com a onda TS 2D e por isso cresceu segundo a instabilidade secundária tendo uma amplitude menor. Outros pesquisadores que simularam a instabilidade tipo-K também verificaram tal comportamento em seus estudos. Entretanto, este fato não foi tão importante quando se objetivou estudar o fator de amplificação das ondas TS (ZANG; KIRST, 1989; ORZAG; PATERA, 1983).

A figura 49 mostra o fator de amplificação das ondas TS tri-dimensionais apresentadas

Figura 48: Evolução temporal dos modos transversais. *Superior*: Evolução desde o início. *Inferior*: Vista ampliada do intervalo de tempo adimensional usado no cálculo do fator de crescimento dos modos.

na figura 48. A curva contínua é uma interpolação dos valores obtidos. Os resultados indicam que uma extensa faixa de modos transversais foram amplificadas pela instabilidade tipo-K. No entanto, os modos transversais com β 's entre 1 e 2 possuíram os maiores valores de fator de crescimento. De acordo com a figura 48, parece que o modo com valor de β próximo à 1,5 apresenta maior taxa de amplificação devido a instabilidade secundária tipo-K. Este resultado é bem próximo do número de onda mais amplificado para o trem de ondas modulado mostrado na figura 45, que foi $\beta = 1,2$. Entretanto, este assunto será ainda melhor explorado mais adiante.

Um outro aspecto importante a ser analisado é a amplitude a partir da qual a onda

Figura 49: Medidas do fator de amplificação das ondas TS tri-dimensionais apresentadas na figura 48.

fundamental dispara a instabilidade secundária. Como se depreende da revisão bibliográfica da presente tese, o cenário da transição tipo-K envolve uma onda TS 2D que numa amplitude em torno de 1% do escoamento médio promove o crescimento via ressonância de um número de pequenas ondas TS 3D de mesmo número de onda longitudinal. Este argumento pode ser verificado por exemplo pelos resultados da figura 47. No entanto, de acordo à figura 43, é possível constatar que a onda TS 2D compondo o trem de ondas modulado não atingiu este nível de amplitude, mesmo nos tempos adimensionais bem depois de a instabilidade secundária ter sido disparada. É que a amplitude efetiva que promoveria o cenário de instabilidade tipo-K para o trem de ondas modulado, figuras 43 e 45, deveria estar relacionada com uma combinação da onda TS 2D com algumas ondas TS 3D de baixos valores para β e pertencentes à faixa principal dos modos transversais $(1, n\beta)$.

Esta amplitude efetiva poderia estar associada à máxima amplitude do presente trem de ondas modulado que, quando num estágio linear, se situa ao longo da linha de centro em z . De fato, a figura 50 compara a evolução temporal do pico de amplitude do trem de onda na linha central em z na altura $y = 0.15H$ e da onda TS 2D usada para os resultados da figura 48. É apresentado também a evolução das ondas TS 3D para as duas simulações em

Figura 50: Evolução temporal dos modos de Fourier. Comparação entre as simulações de instabilidade tipo-K e trem de ondas modulado.

questão objetivando apenas indicar onde se iniciou a instabilidade secundária para os dois resultados. Note que em ambos os casos as ondas TS 3D dispararam somente quando as respectivas ondas TS 2D para a simulação da instabilidade tipo-K e o pico de amplitude do trem na linha de centro atingiram uma amplitude em torno de 1% do escoamento base. Estes tempos estão indicados na figura 50 pelas retas transversais tracejadas. De fato os resultados suportam a idéia de que o regime não-linear observado no trem de ondas modulado é uma instabilidade tipo-K. Além disso os resultados sugerem que a amplitude da onda efetivamente promovendo a instabilidade tipo-K pode ser bem representado pela máxima amplitude do sistema de ondas.

É possível identificar na figura 50 que a onda TS 2D da simulação da instabilidade tipo-K possuiu maior taxa de amplificação linear que a amplitude na linha de centro do sistema de ondas. Como consequência, a onda TS 2D atingiu um maior nível de amplitude que o trem de ondas modulado ao longo da linha de centro. Este fator pode ter contribuído para que o modo transversal que mais cresceu segundo a instabilidade secundária no trem de ondas modulado, figuras 43 e 45, não possuir um valor de β próximo à $\beta = 1,5$ como

previsto pelos resultados da figura 49. É que Herbert (1988) mostrou em seus estudos teóricos em camada limite que a instabilidade sub-harmônica ou tipo-H seleciona uma faixa de ondas transversais cujo modo de maior valor de amplificação está diretamente relacionando à amplitude da onda TS 2D que promove o crescimento desta faixa. Desta forma, na medida em que a amplitude da onda TS atinge grandes valores o pico de maior amplitude no espectro de Fourier vai tendendo para β maiores. De-Paula (2007) realizou este tipo de análise para a instabilidade tipo-K em camada limite usando um código PSE e mostrou similar resultado. É provável que este resultado seja geral e valha também para o escoamento de Poiseuille plano. Como a amplitude efetiva da onda fundamental no trem de ondas modulado, durante o período de instabilidade secundária, é na média temporal menor que a comparada onda TS 2D da instabilidade tipo-K clássica, isto pode estar relacionado com a diferença no número de onda transversal mais amplificado.

Em resumo, pode-se dizer que existem várias semelhanças entre o regime não-linear observado para o trem de ondas modulado e a instabilidade tipo-K clássica. Em primeiro lugar, as taxas de amplificação das ondas instáveis a este regime são semelhantes, como mostra a figura 50. Além disso os números de ondas amplificadas são próximos. Por fim, a amplitude da onda primária que dispara o processo é em torno de 1%. Diante destes fatos concluiu-se que este regime não-linear pode ser atribuído a este tipo de instabilidade secundária.

6.3.1.2 Efeito de Amplitude

Na presente subseção foi realizado um estudo da influência da variação de amplitude inicial para o trem de ondas modulado caso $\alpha = 1$. Ao todo foram utilizadas três diferentes níveis de amplitude inicial, sendo 1×10^{-5} , 5×10^{-6} e $2,5 \times 10^{-6}$ para os modos transversais $(1,0)$ até $(1,2,55)$ que compuseram a faixa principal do trem de ondas modulado, e foi mantido a amplitude inicial 1×10^{-8} para os modos transversais restantes. Estas amplitudes foram menores que a amplitude inicial utilizada para os resultados da figura 45, que foi 2×10^{-5} . Isto porque amplitudes maiores podem favorecer ainda mais o

aparecimento da instabilidade tipo-K no processo. Portanto, esta escolha de amplitude não deveria dar nenhuma nova informação a respeito do comportamento não-linear deste trem de ondas modulado, exceto para amplitudes muito maiores que podem conduzir à transição abrupta.

Para cada caso mencionado foi analisado a evolução dos modos transversais num espectro de Fourier, similar à figura 45 da análise anterior. Novamente, os resultados foram apresentados em três subfiguras que indicam a evolução temporal dos modos $(0, n\beta)$, $(1, n\beta)$ e $(2, n\beta)$ respectivamente.

Em linhas gerais as figuras 52, 54 e 56 apresentam o mesmo crescimento explosivo característico da instabilidade tipo-K. Entretanto as bandas espectrais que cresceram não ficaram restritas as bandas instáveis da instabilidade tipo-K indicadas na figura 45. Conforme a amplitude diminuiu o espectro ficou mais complexo, figuras 51, 53 e 55, o que sugere que outros fenômenos podem estar em ação. Destaca-se um pico em $\beta = 0,6$ para os modos estacionários $(0, n\beta)$. Este pico talvez mereça atenção em trabalhos futuros. De qualquer modo, para amplitudes menores o fenômeno parece dominado pela instabilidade tipo-K.

Figura 51: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda:* modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita:* modos $(1, n\beta)$. *Inferior:* modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 1 \times 10^{-5}$.

Figura 52: Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 1 \times 10^{-5}$.

Figura 53: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda*: modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita*: modos $(1, n\beta)$. *Inferior*: modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 5 \times 10^{-6}$.

Figura 54: Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 5 \times 10^{-6}$

Figura 55: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda*: modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita*: modos $(1, n\beta)$. *Inferior*: modos $(2, n)$. Amplitude inicial $A = 2,5 \times 10^{-6}$.

Figura 56: evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$. Amplitude inicial $A = 2,5 \times 10^{-6}$

6.3.2 Caso2: $\alpha = 0,93$

Este caso de trem de ondas modulado apresentou uma dificuldade para a realização das simulações numéricas. De fato, usando mesmo domínio computacional do caso $\alpha = 1$ não foi possível simular por muito tempo este trem de ondas modulado sem que ele preenchesse totalmente o domínio no espaço físico. Em tempos posteriores possivelmente este trem de ondas modulados experimentariam interferências devido às sobreposições de trens de ondas modulados adjacentes associados com a periodicidade transversal adotada no modelo numérico. Como o comprimento do domínio físico é inversamente proporcional ao valor de β_0 , optou-se então por simular este trem de ondas modulado usando outros valores de β_0 , a saber, 0,02 e 0,01. Os parâmetros desta simulação foram apresentados na tabela 4. Somente usando $\beta_0 = 0,01$, foi possível obter um domínio computacional extenso o suficiente para se simular o início do regime não-linear do presente caso.

Entretanto, como pode ser observado na figura 57, este domínio computacional tornou-se não eficiente a partir de um tempo em torno de $t = 2750$. Resolveu-se portanto investigar os resultados do presente caso somente até o tempo de simulação $t = 2750$.

A figura 57 apresenta iso-superfícies de $Q = 1 \times 10^{-5}$ da evolução temporal deste trem de ondas modulado no espaço físico. Foi possível perceber a estrutura em formato de tipo lua crescente se abrindo durante a evolução temporal. Comparado com o trem de ondas modulado da figura 44, as estruturas de formato lua crescente no presente caso foram menos concentradas e mais finas em $z = 0$. Além disso, aparentou ter se alongado bem mais à direção transversal do domínio computacional. Estes resultados são esperados em vista do fato do modo dominante não ser mais o modo bi-dimensional.

No tempo $t = 2750$, é possível verificar que o trem de ondas modulado ocupou praticamente todo o domínio computacional. Desta forma, a evolução deste trem de ondas modulado em tempos posteriores a $t = 2750$ pode estar comprometida pela limitação do domínio computacional. Note que durante o tempo de simulação adotado para o presente caso, os efeitos não-lineares não foram identificados nos resultados da figura 57 mas podem

Figura 57: Isosuperfícies $Q = 1 \times 10^{-5}$. Caso $\alpha = 0,93$.

ser identificados no espaço de Fourier.

A figura 58 apresenta a evolução dos modos de Fourier. O tempo $t = 2750$ corresponde ao tempo adimensional onde foi obtida a última curva apresentada na figura 58 para os modos $(0, n\beta)$, $(0, 93; n\beta)$ e $(1, 86; n\beta)$. Nesta simulação, a faixa de números de onda transversais instáveis é mais larga. A partir do tempo adimensional em torno de $t = 1800$ os modos com valores para β próximos à $\beta = 0,25$ se destacaram devido suas taxas de amplificação serem um pouco maiores que a dos modos restantes. No entanto, nos tempos adimensionais a partir de $t = 2700$, surgiram picos de amplitudes dentro da

Figura 58: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda:* modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita:* modos $(0, 93; n)$. *Inferior:* modos $(2, n)$.

faixa linearmente instável em torno dos modos $(1; 0, 1)$ e $(1; 0, 3)$. Fora da faixa linearmente instável também surgiram picos de amplitudes. Eles se localizaram próximos aos modos $(1; 1, 2)$ e $(1; 1, 4)$. O surgimento destes picos em um intervalo de tempo bastante curto é característico da instabilidade tipo-K. Os modos $(0, n\beta)$ apresentaram um pico de amplitude próximo ao modo $(0; 1, 3)$ de mesma magnitude dos picos $(1; 1, 2)$ e $(1; 1, 4)$. O surgimento deste pico entre os modos estacionários deu outro indicativo de instabilidade tipo-K no processo.

A presente simulação resultou dois comportamentos diferentes que podem ser claramente identificados na figura 58. De fato, no tempo $t = 2750$, não existe simetria entre os resultados para β positivo e negativo, em particular em torno de $\beta = 1, 3$ para os modos $(0, 93; n\beta)$. Outro comportamento diferente foi o aparecimento de oscilações de alta frequência sobre os modos $(0, n\beta)$, principalmente no tempo adimensional $t = 1750$. Estes comportamentos levantaram dúvida sobre os resultados no tempo $t = 2750$. Eles podem

estar contaminados devido, por exemplo, ao comprimento limitado do domínio computacional. Isto porque neste tempo adimensional o domínio computacional no espaço físico não acomodou todo o trem de ondas modulado e pode ter ocorrido uma pequena influência dos trens de ondas adjacentes. Talvez este caso mereça ser investigado com maior profundidade em trabalhos futuros. Entretanto, não pareceu que houve influência destas anomalias para a simulação dos modos restantes do domínio até o tempo $t = 2750$.

A figura 59 apresenta o histórico da evolução temporal dos modos de Fourier $(1; 0, 67)$ a $(1; 1, 7)$. Juntamente é apresentado a evolução da amplitude máxima do trem de ondas modulado no espaço físico. O tempo adimensional onde aconteceu um crescimento

Figura 59: Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ e da amplitude máxima do espaço físico. A linha tracejada indica o tempo adimensional onde se iniciou o crescimento explosivo dos modos.

explosivo dos modos de Fourier foi indicado nesta figura pela linha tracejada transversal. A linha contínua transversal indica o tempo $t = 1750$, o mesmo tempo onde foi obtido o último resultado da figura 58. As ondas TS 3D dispararam em amplitude quando o máximo de amplitude do trem de ondas modulado no espaço físico margeou uma amplitude pouco superior à 1% da amplitude do escoamento base. Comparando-se as figuras 43 e 59 verifica-se que o crescimento explosivo dos modos não-lineares ocorreu para uma amplitude máxima do trem de ondas modulado um pouco maior que para o caso $\alpha = 0,93$.

Esta pequena diferença de comportamento entre os casos $\alpha = 1$ e $\alpha = 0,93$ pode estar relacionada a estrutura das ondas no espaço físico. De fato, o caso $\alpha = 1$ possui estruturas tipo lua crescente com curvatura menos acentuada que o formato do trem de ondas modulado no caso $\alpha = 0,93$. Portanto, o caso $\alpha = 1$ é mais parecido a um cenário bi-dimensional onde predomina o comportamento da instabilidade tipo-K. Entretanto, o presente resultado apresenta indícios de que mesmo este caso onde existe dominância de modos 3D no regime linear, ainda foi dominado pela instabilidade tipo-K. Estes indícios são o fato de haver um crescimento explosivo de modos associados com o ponto onde a amplitude máxima do trem de ondas modulado atingiu valores em torno de 1%. O espectro resultante não oferece muita confirmação deste cenário. O que se destaca é principalmente o crescimento não-linear de modos na faixa linearmente instável. Este fato talvez mereça mais investigações em trabalhos futuros. Mas, destaca-se que este fato pode ser muito relevante para a instabilidade não-linear de ondas moduladas.

6.3.3 Caso 3: $\alpha = 0,86$.

Como aconteceu no caso $\alpha = 0,93$ a presente simulação usando $\beta_0 = 0,03$ resultou um domínio computacional no espaço físico que não comportou todo o trem de ondas modulado. Desta forma, optou-se também por utilizar um domínio correspondente ao número de onda transversal $\beta_0 = 0,01$. A amplitude inicial do trem de ondas no espaço físico foi a mesma utilizada no caso $\alpha = 0,93$.

A figura 60 mostra iso-superfícies de $Q = 1 \times 10^{-6}$ da evolução temporal do presente trem de ondas modulado. Durante o filtro da instabilidade hidrodinâmica linear, onde cada modo evoluiu no tempo segundo sua taxa de amplificação, o trem de ondas modulado deixou de possuir maior amplitude localizada na linha de centro em z e passou a ser dominado por duas regiões que se afastaram uma da outra. Desta forma, ao invés de se ter um trem de ondas modulado com uma frente de ondas e máxima amplitude na linha de centro em z , se obteve dois trens de ondas que evoluíram em direções oblíquas e que possivelmente serão independentes um do outro em tempos posteriores de

Figura 60: Iso-superfícies $Q = 1 \times 10^{-6}$. Caso $\alpha = 0,86$.

desenvolvimento.

A figura 61 mostra a evolução temporal do espectro de potência para esta simulação até o tempo adimensional $t = 3750$. Os modos $(0, 86; n\beta)$ apresentaram somente o pico de amplitude no modo mais instável linearmente. Este modo permaneceu dominante durante todo o período até o tempo $t = 3750$ e nenhum outro pico na classe de modos $(0, 86; n\beta)$ foi indicado pelos resultados. Os modos estacionários $(0, n\beta)$ indicaram um pico de magnitude que, na medida da evolução, foi se localizando cada vez mais próximo do modo $(0, 1)$. Este pico nos modos estacionários pode ter sido resultado das interações

Figura 61: Evolução temporal dos modos transversais num domínio espectral. *Topo à esquerda:* modos $(0, n\beta)$. *Topo à direita:* modos $(1, n\beta)$. *Inferior:* modos $(2, n)$. Amplitude inicial dos modos fundamentais, $A = 2 \times 10^{-5}$.

não-lineares envolvendo o modo oscilatório $(0, 86; n\beta)$ tal como acontece para os cenários clássicos de transição oblíqua. No entanto, até o tempo adimensional $t = 3750$, o modo estacionário próximo ao modo $(0, 1)$ resultou pequena amplitude comparado com o modo próximo à $(0, 86; 0, 5)$. Isto porque o nível de não-linearidade atingida por esta simulação foi muito pequena. E portanto, devido à limitação computacional, não foi possível verificar se nos tempos posteriores este modo oscilatório cresceu como um harmônico do modo próximo a $(0, 86; 0, 5)$ e dominou o início do processo de transição.

A figura 62 apresenta a evolução temporal da amplitude máxima do trem de ondas modulado juntamente com a história dos modos transversais $(1; 0, 66) - (1; 1, 77)$. Na figura 62, a linha contínua transversal indica o último tempo adimensional onde os resultados das figuras 60 e 61 foram recordados. A linha tracejada transversal indica o tempo adimensional onde o trem de ondas modulado atingiu a amplitude de 1% da amplitude

Figura 62: Evolução temporal de amplitude dos modos de Fourier $(0, 86; n/\beta)$. Caso $\alpha = 0,86$.

do escoamento base. Note que após o tempo crítico para o início da instabilidade secundária, o trem de ondas modulado não apresentou nenhum comportamento diferenciado dos tempos anteriores. De fato os modos continuaram crescendo no tempo devido às interações não-lineares e não apresentaram nenhum crescimento explosivo em amplitude como aconteceu para os casos $\alpha = 1$ e $\alpha = 0,93$. No entanto, após o tempo $t = 3750$ os modos passaram a se comportar com uma nova taxa de amplificação. E, portanto, não é descartado a possibilidade do regime não-linear deste trem de ondas modulado ser também dominado pela transição tipo-K.

Em resumo, o regime não-linear dos trens de ondas mais afastados do primeiro ramo do diagrama de instabilidade parece ser dominado pela instabilidade tipo-K. Este resultado concorda com o que ocorre em camada limite. Na tentativa de verificar se, tal como na camada limite, um cenário semelhante à transição oblíqua quando se está próximo ao primeiro ramo do diagrama também acontece em escoamento de Poiseuille plano, um estudo de um caso nesta específica região do diagrama foi realizado. Entretanto, os trens de ondas se comportaram como duas regiões que se afastaram uma da outra e deixaram de se interagirem. Este tipo de cenário não condiz com um cenário de transição oblíqua, e também, não foi antecipado na literatura. Por outro lado, poderia acontecer interações

entre os trens de ondas adjacentes na direção transversal e o surgimento de um cenário de transição oblíqua modificado. Talvez, o presente código numérico pode não ser uma ferramenta adequada para simulá-lo. Este tipo de estudo não foi o objetivo desta tese, pois procurou-se apenas estudar mecanismos não-lineares de trens de ondas modulados que são isolados. Entretanto este resultado não deixa de ser importante principalmente porque o presente cenário pode ser semelhante aos cenários de transição de escoamentos compressíveis, onde as ondas TS que mais crescem são sempre tri-dimensionais. Outra observação digna de ser reforçada, quando a amplitude máxima deste trem de ondas modulado atinge valores em torno de 1%, a não-linearidade é bem menos aparente que nos casos anteriores. De fato, não existiu um nítido crescimento explosivo das ondas TS nesta amplitude crítica. Porém, não se pode descartar a possibilidade de se iniciar a instabilidade tipo-K em alguma amplitude maior pois pode estar acontecendo neste caso o mesmo acontecido para o caso $\alpha = 0,93$, onde se iniciou a instabilidade tipo-K somente para uma amplitude máxima do trem de ondas modulado maior que 1% da amplitude do escoamento base. Este cenário não antecipado talvez mereça ser investigado no futuro.

Convergência de Malhas para as Simulações dos Trens de Ondas

Neste capítulo são apresentados os resultados do estudo para uma escolha da malha adequada para a simulação numérica dos trens de ondas modulados. Este estudo engloba também uma análise da excitação do escoamento e a forma de gerar a condição inicial. Os estudos de resolução espacial e temporal foram realizados em tempos de simulação adequados para descreverem os primeiros estágios da transição. Isto porque a proposta da presente tese é investigar somente os primeiros mecanismos não-lineares de instabilidades que surgem no processo da transição. O caso de trem de ondas aqui estudado satisfaz $Re = 8000$ e número de onda longitudinal $\alpha = 1$. Este caso é indicado no diagrama linear de estabilidade pela letra maiúscula **A**, figura 63. O nível de modulação inicial na direção transversal cobriu a faixa discreta $0, \dots, 0,64$. O número de onda transversal de menor valor assumiu os valores $\beta = 0,01$, $\beta = 0,03$ e $\beta = 0,06$. Desta forma para se manter a mesma faixa discreta, os números de modos excitados inicialmente foram 61, 21 e 11 respectivamente. Os estudos realizados neste capítulo foram divididos nas seções 7.1, que reporta a forma de excitação do escoamento e a seção 7.2 que reporta os estudos de refinamento de malha.

Figura 63: Localização do caso estudo no diagrama de instabilidade linear para ondas bi-dimensionais.

7.1 Forma de Excitação do Escoamento e Condição Inicial

O principal objetivo desta seção foi gerar a condição inicial para as simulações dos trens de ondas modulados. Uma maneira é utilizando um código numérico que resolve a equação de Orr-Sommerfeld, equação (5.21), e obtendo o formato das auto-funções das ondas de Tollmien-Schlichting na direção normal ao escoamento. O formato da autofunção é usado para a construção das ondas TS que serão assumidas como condição inicial para a simulação dos trens de ondas. Este procedimento envolve dois códigos numéricos, um para gerar as ondas TS e o outro para simular a sua evolução. Alguns resultados bi-dimensionais usando este procedimento podem ser vistos em (CREPALDI et al., 2006). Outra maneira é introduzir uma perturbação no escoamento, imitando uma técnica de sucção ou sopro usado em experimentos, e simular a evolução desta perturbação até à formação das ondas de Tollmien-Schlichting. Em seguida, estas ondas são corrigidas em amplitude e assumidas sendo a condição inicial. Este procedimento requer somente o uso do próprio código numérico usado para as simulações da evolução das ondas TS. No entanto, durante o tempo de simulação necessário para a formação das ondas TS não é necessário a realização dos cálculos dos termos não lineares das equações.

Para o presente trabalho, o segundo procedimento foi utilizado. A perturbação inicial foi introduzida no escoamento através das paredes e constituiu de várias ondas oblíquas de diferentes ângulos de propagação e uma onda planar. As ondas são periódicas em x e possuem o mesmo número de onda longitudinal. Um mesmo valor de amplitude inicial e de ângulo de fase foram utilizados em cada onda. O domínio computacional compreendeu dois comprimentos de ondas na direção longitudinal e um na direção transversal. A figura 64 mostra no plano $y = 0,15H$ o formato da componente u da perturbação de velocidade no tempo $t = 0,159$.

Figura 64: Formato da perturbação visto em dois ângulos diferentes. Resultado recordado da posição fixada $y = 0,15$.

Esta perturbação convergiu para um sistema de ondas TS depois de um tempo adimensional correspondente a $t = 101,76$ ou quatro ciclos no tempo. Após este tempo as ondas TS foram corrigidas em amplitude e assumidas sendo a condição inicial para as simulações do trem de ondas. Neste mesmo tempo os cálculos não-lineares também foram assumidos.

Os resultados das simulações foram analisados em um espectro de Fourier. Isto permitiu verificar separadamente o comportamento de cada onda. A figura 65 mostra o espectro de Fourier transversal da condição inicial para as simulações de um trem de ondas modulado. Estes resultados foram obtidos da altura fixa $y = 0,15H$. A modulação transversal foi composta de vários números de ondas transversais β , igualmente espaçados com intervalo 0,03, onde $\beta = 0$ indica a onda bi-dimensional. Nesta figura é apresentado também

a banda espectral negativa. Note que a figura apresenta três curvas. A curva ao fundo representa os modos de Fourier harmônicos $(2, n\beta)$. A curva intermediária apresenta os modos $(1, n\beta)$. Nesta classe de modo se encontra também os 21 modos inicialmente excitados. A curva a frente representa os modos $(0, n\beta)$ que são os responsáveis pela distorção tri-dimensional do escoamento base (em inglês, *Mean Flow Distortion, MFD*). Os asteriscos indicados em cada curva representam os primeiros modos transversais onde age o filtro anti-alias. Este procedimento resulta uma resolução menor no espaço espectral quando comparado com o espaço físico, seção 4.1.

Figura 65: Condição inicial do espectro transversal para a componente longitudinal de velocidade numa posição fixa $y = 0, 15H$.

A faixa de modos inicialmente excitada foi $-0,63, \dots, 0,63$ e é composta dos modos linearmente instáveis $(-0,5, \dots, 0,5)$ e alguns modos linearmente estáveis. Esta faixa de modos de mesma amplitude poderia ter sido estendida para todo o domínio computacional transversal $(-2,55, \dots, 2,55)$. No entanto este procedimento não foi essencial pois os modos transversais fora da faixa instável possuem alta taxa de decaimento e, durante a evolução linear, atingem amplitudes muito pequenas quando comparadas com as amplitudes dos modos instáveis. No entanto, um domínio computacional transversal $(-2,55, \dots, 2,55)$ foi importante para as simulações do regime fracamente não-linear.

Embora os modos transversais foram excitados com mesma amplitude inicial, a figura 65 não apresenta uma distribuição planar. Isto porque a figura 65 foi gerada a partir de resultados da posição fixa $y = 0,15H$ da altura do canal, mas estes modos de Fourier representam ondas TS que possuem o valor máximo de amplitude em diferentes posições y . A figura 66 apresenta o perfil em y de algumas desta ondas TS. Os asteriscos indicam o valor máximo destes perfis e os círculos indicam os valores de amplitude na posição $y = 0,15H$. Esta região de interesse foi ampliada na figura. É possível verificar uma nítida diferença de amplitude entre os perfis na específica altura $y = 0,15H$. Esta diferença de amplitude caracteriza a distribuição apresentada na figura 65.

Figura 66: Perfil na direção normal de algumas ondas TS que compõem o trem de ondas. A região ampliada do gráfico mostra os pontos de máximo e da posição fixa $y = 0,15H$.

7.2 Convergência de Malhas

O presente estudo de convergência de malhas abordou somente as direções espaciais normal e transversal ao escoamento, que para o caso de trens de ondas modulados, são as direções que requerem maior resolução. Isto porque os cálculos na direção normal podem ser afetados pelo erro de discretização devido o método de diferenças finitas empregado.

Os cálculos na direção transversal, onde é assumido a modulação e a tri-dimensionalidade, é necessário uma escolha adequada do menor número de onda transversal, do tamanho do domínio espectral e do número de modos inicialmente excitados. Já na direção longitudinal é suficiente usar uma resolução para se simular apenas os modos 0 e α . Para as presentes simulações, foram calculados também os subharmônicos $\frac{1}{2}\alpha$ e $\frac{3}{2}\alpha$ e o harmônico 2α . Dentre estes modos somente o harmônico 2α apresentou algum nível de energia, porém, muito pequeno quando comparado com os outros modos, seção 6. Teste da escolha do passo no tempo Δt também foi realizado neste presente estudo. O estudo para escolha da malha adequada foi composto em três subseções que abordam respectivamente as direções espaciais transversal e normal e o estudo do passo no tempo.

7.2.1 Direção Transversal

O estudo da resolução transversal foi realizado em duas situações diferentes. A primeira situação foi fixar o comprimento do domínio espectral transversal e variar o comprimento do domínio físico na direção transversal. Isto pode ser feito quando se assume diferentes valores para o menor número de onda transversal β_0 . Nesta situação a faixa de modos inicialmente excitada permaneceu inalterada. A segunda situação foi o inverso da primeira, isto é, manter fixo o comprimento do domínio físico na direção transversal e variar o comprimento do domínio espectral transversal. Nesta situação o β_0 permaneceu constante enquanto que o número de modos inicialmente excitados e o comprimento do domínio espectral transversal foram variados.

A tabela 7.2.1 mostra os parâmetros de resolução nos estudos da convergência na direção transversal tanto no espaço físico quanto no espaço de Fourier. Lembrando que devido ao uso de um filtro anti-alias a resolução espectral é somente em torno de 2/3 da resolução física.

Aumentando o Número de Modos de Fourier Transversais

Na direção transversal, o trem de ondas, que é periódico, satisfaz um comprimento

Tabela 5: Parâmetros para os estudos da resolução transversal^a.
Resolução no Espaço de Fourier

Resolução no Espaço de Fourier		Resolução no Espaço Físico	
N_x	5	n_x	16
α	1	λ_x	$2\pi/\alpha = 6,2832$
N	201	N	201
N_z	43; 85 e 169	n_z	64; 128 e 256
β_0	0,06; 0,03; 0,01	λ_z	$2\pi/\beta_0 = 104,72; 209,44; 628,31$

^aOs parâmetros N_x , L_x , N_z e L_z são referentes somente ao lado positivo do domínio espectral.

de onda $\lambda_z = 2\pi/\beta_0$. Desta forma, foi necessário um estudo de malha para escolher um β_0 que evitasse, para qualquer instante de tempo da simulação, uma sobreposição entre trens de ondas adjacentes. O fato é que sobreposição de trens de ondas adjacentes poderia afetar e até dificultar a análise dos resultados nos estágios mais avançados da evolução. Neste estudo a faixa de modos inicialmente excitada foi mantida constante mas o número de modos de Fourier foi variado. A figura 67 mostra o espectro de Fourier transversal inicial para as três simulações realizadas. Devido o espectro de Fourier possuir a mesma distribuição de potência para ambos os modos transversais positivos e negativos, somente os modos transversais positivos foram apresentados na figura 67. Os respectivos valores $\beta_0 = 0,06$, $0,03$ e $0,01$ foram tomados como sendo os menores números de onda transversal em cada um dos casos estudados. Como consequência, o comprimento do domínio computacional variou de um caso para outro. Para resultar a mesma faixa inicial, o número de modos inicialmente excitados foi 61 para o caso $\beta_0 = 0,01$, 21 para o caso $\beta_0 = 0,03$ e 11 para o caso $\beta_0 = 0,06$.

A figura 68 mostra resultados no espaço físico da simulação do trem de ondas no tempo instantâneo $t = 992,2$. Foram escolhidos três valores para β_0 conforme a tabela 5. Neste instante de tempo os efeitos da não-linearidade foram pequenos e não puderam ser visualmente detectados na figura 68.

Usando $\beta_0 = 0,06$ a figura 68 mostra que o trem de ondas já preenche praticamente todo o domínio computacional, o que tornaria inevitável em tempos posteriores uma sobreposição dos trens de ondas adjacentes. Valores de β_0 sendo $0,03$ e $0,01$ apresentam

Figura 67: Amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ da velocidade u na altura $y = 0.15$. Da esquerda para direita o número de modos transversais excitados foram $n = 11$, $n = 21$ e $n = 61$ respectivamente.

suficiente resolução para este tipo de simulação mas evidentemente $\beta_0 = 0,03$ viabiliza menor custo computacional e portanto foi escolhido como sendo um valor adequado.

Aumentando o Comprimento do Domínio Spectral

Na medida em que os estágios não-lineares da evolução do trem de ondas vão sendo alcançados, os modos com mais altos valores de número de ondas transversais se tornam cada vez mais importantes. Sendo assim, é importante também verificar se o comprimento da faixa spectral transversal é adequado para a simulação dos mecanismos não-lineares do processo de transição. Três casos de resolução transversal foram estudados. A figura 69 apresenta a condição inicial para estas três simulações. Note que o número de modos

Figura 68: Componente longitudinal u da velocidade na altura fixa $y = 0,15H$. Da esquerda para direita, simulações com o menor beta transversal β_0 sendo 0,06, 0,03 e 0,01.

inicialmente excitados para todos os casos permaneceu constante mas o comprimento do domínio espectral transversal variou de um caso para o outro segundo os valores da tabela 7.2.1.

A figura 70 apresenta uma comparação do espectro de Fourier na direção transversal entre as três simulações realizadas no tempo instantâneo $t = 2086$. Este tempo de simulação é maior que o tempo de simulação do resultado da figura 68 e a não-linearidade do processo é bem mais destacado. Neste tempo de simulação já ocorreu a relação de dispersão entre as ondas, e a banda linear ou banda com taxa linear crescente já está bem aparente. Nestas simulações a faixa linear vai de $\beta = -0,5$ até $\beta = 0,5$. Dentro desta faixa existe também quatro picos de amplitude em β próximo aos $\beta = -0,2$ e $0,2$ e $\beta = -0,4$ e $0,4$. Fora da faixa é possível verificar picos de amplitude para valores de β próximos aos $\beta = -1$ e 1 e $\beta = -2$ e 2 . Estes picos apresentados na figura 70 são frutos das interações não-lineares e das ressonâncias entre os modos. No contexto do presente

Figura 69: Amplitude dos modos de Fourier $(1, n\beta)$ da componente u da velocidade na altura $y = 0,15H$. Da esquerda à direita, as simulações foram realizadas com $\beta_0 = 0,03$ e números de modos transversais sendo 43, 85, 169 respectivamente.

Figura 70: Resultados num domínio espectral transversal para a componente longitudinal de velocidade (u) recordados na altura $y = 0,15H$.

capítulo foi suficiente garantir que os picos de amplitude que apareceram no processo não dependeram da malha escolhida. Já a causa para a formação destes picos de amplitude foram detalhadas no capítulo 6.

Têm-se que usando uma resolução com 43 modos transversais foi possível simular a

banda linear e os picos de menores números de onda, $\beta = -0,2$ e $0,2$ e $\beta = 0,3$ e $0,3$. Mas esta resolução não pôde captar os picos dos betas mais altos. Similar acontecimento para a resolução usando 85 modos transversais, que não pôde captar os picos dos betas próximos à $\beta = -2$ e 2 . A simulação eficiente para se captar os picos de amplitudes na faixa espectral de $\beta = -2$ a $\beta = 2$ foi alcançada usando 169 modos transversais. Se caso usassemos uma malha com um número maior que 169 modos transversais, poder-se ia simular novos picos de amplitude que aconteceriam em betas maiores que os já mostrados. No entanto, devemos nos limitar aos primeiros mecanismos não-lineares da transição ou aos primeiros picos de amplitude presentes no domínio espectral. É suficiente para o estudo desta tese o nível de não-linearidade apresentado pela figura 70.

Os resultados indicaram que novos picos de amplitude foram surgindo a medida que o domínio espectral foi aumentando. Os picos comuns às diferentes malhas apresentaram diferentes amplitudes. Isto possivelmente devido a interação entre os modos no regime não-linear para cada simulação acontecer com número diferente de modos.

7.2.2 Direção Normal

Estudos de convergência de malhas para a direção normal ao escoamento (y) também foram realizados. Ao todo quatro número de pontos na direção y , usando 121, 161, 201, e 241, foram testados. Estas simulações utilizaram 16 pontos em x e 11 modos de Fourier longitudinais na direção longitudinal. Na direção z os parâmetros foram 128 pontos para o espaço físico, 169 modos de Fourier transversais e $\beta_0 = 0,03$. A figura 71 mostra comparações da evolução temporal dos modos planar $(1,0)$ e um harmônico transversal $(1;0,33)$, escolhidos aleatoriamente, usando as quatro resoluções avaliadas em y até o tempo adimensional $t = 1200$. Estas simulações foram realizadas com amplitude inicial dos modos envolvidos sendo 8×10^{-5} . Os resultados foram comparados com a Teoria de Estabilidade Linear. É possível identificar nesta figura os efeitos fracamente não-lineares a partir de um tempo adimensional próximo a $t = 1600$. Note que os resultados com as quatro malhas testadas estão em boa concordância com a teoria de estabilidade linear e

se diferenciam apenas quando a não-linearidade se torna aparente na evolução..

Figura 71: Estudo da resolução na direção y . Evolução temporal dos modos $(1, 1)$ e $(1, 16)$ e comparações com a Teoria de Estabilidade Linear.

Usando uma resolução em y com 121 pontos, os resultados não apresentaram boa descrição da evolução destes modos num regime não-linear. Usando 161 pontos nesta direção, somente o modo $(1,0)$ foi descrito com razoável concordância, diferente dos resultados para o modo $(1; 0, 33)$ que principalmente nos instantes finais da simulação não apresentaram uma boa descrição. Somente com 201 e 241 pontos em y foi possível verificar a independência da malha pelos resultados. Isto justifica o uso de 201 pontos nas discretizações espaciais na direção normal y para as simulações dos trens de ondas.

7.3 Escolha do Passo no Tempo

Foram testados três espaçamentos no tempo. O primeiro caso sendo $\Delta t_1 = 0,1590 \sim 0,2CFL$, o segundo caso sendo $\Delta t_2 = 0,3180 \sim 0,4CFL$ e o terceiro caso sendo $\Delta t_3 = 0,6360 \sim 0,8CFL$. Além do CFL o código satisfaz outro critério de estabilidade, a condição de Neuman. Esta condição é aplicada para os cálculos dos termos difusivos das equações governantes. A figura 72 mostra a evolução temporal dos modos de Fourier

planar $(1,0)$ e um harmônico transversal $(1;0,3)$ usando os dois primeiros espaçamentos de tempo citados acima. Para as direções x e z , as presentes simulações utilizaram os mesmos parâmetros das simulações apresentadas na subseção 7.2.2. Na direção normal, 201 pontos foram usados. A amplitude inicial dos modos que compõem a faixa excitada inicialmente foi $1,8 \times 10^{-5}$. Comparações com a resultados da Teoria de Estabilidade Linear (TEL) também foram apresentadas. Os resultados apresentados condizem bem com a TEL até ao tempo adimensional $t = 1950$, após este tempo os termos não-lineares estiveram presentes. Os resultados apresentaram boa concordância quando os dois espaçamentos aqui mencionados foram usados, mesmo quando os efeitos não-lineares tornaram-se significantes no processo. Simulação usando o espaçamento $\Delta t3$ resultaram em instabilidade numérica logo nos primeiros tempos adimensionais e não foram apresentados na figura 72.

Figura 72: Estudo do espaçamento no tempo. Evolução temporal dos modos $(1,1)$ e $(1,16)$ e comparações com a Teoria de Estabilidade Linear.

Resultados, Observações Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente estudo envolveu três principais objetivos. Um objetivo foi modificar um código de simulação numérica direta espacial das equações de Navier-Stokes numa versão bi-dimensional para simulação numérica direta temporal numa versão tri-dimensional. A formulação foi escrita em vorticidade-velocidade. Este código foi desenvolvido para simular os primeiros estágios da transição laminar-turbulento de escoamentos, fenômeno que envolve pequenas escalas no tempo e no espaço que devem ser calculadas com boa aproximação, por isso esquema numérico de ordem alta foi necessário. Inicialmente o código simulava a evolução espacial de pequenas ondas 2D de instabilidade em um escoamento de Poiseuille plano. Devido o fato de o escoamento de Poiseuille plano ser paralelo foi possível assumir condição de contorno periódica nas direções longitudinal e transversal ao escoamento e realizar simulações temporais, invés de espaciais, de pequenas ondas 3D no mesmo escoamento base. Esta mudança de simulação espacial para temporal permitiu um ganho computacional pois foi possível desenvolver um esquema de solução usando métodos bem mais simples e preciso para este tipo de escoamento.

As derivadas espaciais na direção normal ao escoamento foram calculadas com diferenças finitas compactas de 5^{th} e 6^{th} ordem de aproximação. As derivadas nas direções lon-

gitudinal e transversal ao escoamento foram calculadas usando método pseudo-espectral. Os cálculos temporais foram realizados com método de Runge-Kutta de 4th ordem de precisão exceto para os cálculos do modo $(0, 0)$ onde o método Crank-Nicolson foi necessário para garantir estabilidade numérica dos cálculos.

Tendo desenvolvido o código foi possível atingir outros dois principais objetivos que foram estudar testes de verificação de código e realizar um estudo dos primeiros estágios lineares e não-lineares da evolução de trens de ondas moduladas na direção transversal em um escoamento de Poiseuille plano.

8.1 Teste de Verificação de Código

Três tipos de teste de verificação de código foram realizados neste trabalho. O primeiro envolveu o Método das Soluções Manufaturadas (MMS). Este método permitiu um Teste de Convergência de Malhas (TCM) e a ordem de precisão do código foi investigada. O segundo consistiu em simulações do regime linear de ondas de instabilidades evoluindo em um escoamento de Poiseuille plano. Os resultados foram comparados com a Teoria de Estabilidade Linear e atingiram boa aproximação. O terceiro teste de verificação foi realizado simulando um cenário clássico da transição tipo-K e comparando os resultados com resultados numéricos apresentados pela literatura.

Dentre estes testes de verificação, o MMS ofereceu maior confiabilidade de que o código foi bem verificado. Isto porque foi possível obter uma solução manufaturada que imitou uma onda de instabilidade em um escoamento de Poiseuille plano. As condições de contorno foram mantidas e nenhuma simplificação das equações envolvidas foi realizada. Desta forma, os termos não-lineares também foram verificados. Depois de ter realizado o teste de verificação, bastou apenas anular o termo fonte das equações e o código já estava pronto para as simulações dos trens de ondas no escoamento de Poiseuille plano.

8.1.1 Resultados

Os resultados dos testes usando o MMS mostraram que dependendo da região do domínio, da variável ou da equação em estudo, o erro numérico pode ser predominante em magnitude. No presente caso, foi indicado pelos resultados um erro dominante para o cálculo da vorticidade na parede. Entretanto, os resultados também indicaram pouca contaminação deste erro numérico sobre os cálculos de outras regiões do domínio. O erro numérico dominante pareceu se comportar isoladamente.

Os resultados obtidos do TCM foram coerentes com a ordem formal dos métodos de diferenças finitas empregadas no código, sendo de 5^{th} ordem nos pontos sobre as paredes e 6^{th} ordem nos pontos verificados no interior do domínio. No entanto, pôde-se concluir seguramente que os resultados não atingiram a faixa assintótica. Caso contrário, 5^{th} ordem de precisão seria observada também para os pontos no interior do domínio. Os resultados apontaram o erro de arredondamento como sendo uma das dificuldades para se atingir a faixa assintótica. De fato, a solução numérica nas malhas mais refinadas foram bastante contaminados pelo erro de arredondamento. Este resultado foi confirmado testando o código usando precisão quádrupla para os cálculos.

Embora seja difícil atingir a faixa assintótica usando códigos desta natureza, a ordem de convergência observada foi coerente com a ordem formal de discretização. Mesmo onde não foi possível atingir a faixa assintótica, os resultados sugeriram uma ordem de convergência maior que a ordem formal da faixa assintótica.

É importante observar que códigos de ordem alta são intencionalmente usados com malhas pouco refinadas. O objetivo é obter resultados com alta precisão com baixo custo computacional. Desta forma, os presentes resultados sugerem que esquemas numéricos de ordem alta combinada não são usados na faixa assintótica. Nesta situação, o MMS pode ajudar também na otimização do esquema, já que o presente teste pode indicar a região do domínio, variável, equação ou termo de equação onde o erro numérico é dominante. Como os presentes resultados sugerem, se uma solução manufaturada imita o problema de

interesse a ser estudado, o erro numérico no teste provê boa indicação do erro numérico no problema de interesse. Isto permite remover a fonte do erro dominante aumentando a precisão do esquema numérico somente onde é efetivamente necessário.

8.2 Trens de Ondas Modulados

Após os testes de verificação do presente código, simulações de trens de ondas modulados na direção transversal, evoluindo temporalmente em um escoamento de Poiseuille plano, foram realizadas. Os trens de ondas foram compostos por várias ondas TS 3D de diferentes número de onda transversal e a onda TS 2D. A amplitude dos trens de ondas utilizados foi inicialmente bem pequena, similar àquelas que conduzem à transição natural.

Um sistema de ondas modulados nas direções longitudinal e transversal ao escoamento (pacotes de ondas tri-dimensionais) melhor imitam a transição natural. No entanto, devido à alta complexidade para a interpretação do regime não-linear destes sistemas, pretendeu-se estudar primeiro somente o efeito da tri-dimensionalidade, por isso, optou-se no presente trabalho simular sistemas de ondas modulados somente na direção transversal (os trens de ondas modulados). Os resultados obtidos das simulações foram analisados à luz das teorias de instabilidade hidrodinâmica linear, secundária e teoria fracamente não-linear.

Ao todo foram analisados três casos de trens de ondas modulados que possuíram mesmo número de Reynolds mas diferentes números de onda longitudinais α . Estes casos foram denominados no texto como casos $\alpha = 0,86$; $0,93$ e 1 . Os casos $\alpha = 0,86$ e $0,93$ se localizam na região instável central do diagrama de instabilidade linear para ondas 2D, e o caso $\alpha = 0,86$ se localiza próximo ao primeiro ramo do diagrama, não na região onde a onda 2D é estável. A escolha dos casos $\alpha = 1$ e $0,86$ foi inspirada pela teoria linear. De fato, pelo Teorema de Squire é possível verificar que no caso $\alpha = 1$ as ondas TS com menores números de onda transversais possuem maiores taxas de crescimento linear. Especificamente neste caso, a onda TS 2D ($\beta = 0$) é a onda com a maior taxa

de amplificação. Este conjunto de ondas TS tendem a se comportarem como uma onda 2D e promover a instabilidade tipo-K. Isto é diferente do caso $\alpha = 0,86$ onde a máxima amplificação ocorre em ondas TS 3D com número de ondas relativamente altos e tenderia a favorecer o aparecimento da transição oblíqua. O caso $\alpha = 0,93$ é um caso intermediário. Casos com α maiores que 1 não foram estudados neste trabalho pois é razoável supor que eles tenderiam a se comportar de maneira semelhante ao caso $\alpha = 1$ e favorecer a instabilidade tipo-K.

8.2.1 Resultados

Primeiro foi estudado o caso $\alpha = 1$. A partir de um certo tempo da evolução não-linear deste caso, as ondas TS experimentaram um crescimento explosivo característico de uma instabilidade. O início deste crescimento se deu quando a máxima amplitude do trem de ondas modulado atingiu 1% do valor da amplitude do escoamento base. A partir desta amplitude crítica, o sistema selecionou ondas TS 3D que se comportaram tendo maiores taxas de amplificação que as outras ondas TS restantes. Estas ondas TS 3D possuíam mesmo número de onda longitudinal das ondas fundamentais. Este comportamento foi parecido com transição tipo-K, onde a onda TS 2D quando atinge uma amplitude de 1% do escoamento base promove, via ressonância, o crescimento de pequenas ondas TS 3D com mesmo número de onda longitudinal da onda TS 2D. No caso, o trem de ondas se comportou como uma onda TS 2D promovendo o crescimento das ondas TS 3D e levando o processo à instabilidade tipo-K. Este caso foi estudado com diferentes níveis de amplitude. O que se verificou foi um cenário mais complexo, pois outros picos surgiram no espectro e podem estar relacionados a outros mecanismos ainda não identificados. Entretanto, os resultados apresentaram o mesmo crescimento explosivo característico da instabilidade tipo-K.

O caso $\alpha = 0,93$ apresentou um formato de trem de ondas um pouco diferente do caso $\alpha = 1$. As estruturas de formato meia lua crescente pareceram ter maior curvatura que a do caso anterior. Em tempos avançados do regime linear, os picos deixaram de

ser localizados na linha de centro em z e passaram a se localizar em duas regiões próximas aos limites do domínio computacional na direção transversal que tenderam a se distanciar uma da outra. Desta forma, foi necessário simular o presente caso com um domínio computacional maior na direção transversal. Foi possível verificar características semelhantes ao regime não-linear do caso $\alpha = 1$. Entretanto, o crescimento explosivo das ondas TS do presente caso aconteceu somente quando a amplitude máxima do trem de ondas atingiu um valor próximo à 1,1% da amplitude do escoamento base. Isto pode estar relacionado ao fato de as estruturas do tipo meia lua do presente caso serem mais curvadas que no caso $\alpha = 1$. Estruturas menos curvadas correspondem a um nível menor de tri-dimensionalidade. Dado que o clássico cenário da transição tipo-K resulta estruturas bi-dimensionais, pode ser mais fácil identificar o cenário clássico de transição tipo-K no trem de ondas modulado do caso $\alpha = 1$ que do caso $\alpha = 0,93$.

Por último, o caso $\alpha = 0,86$ foi investigado. Este caso se apresentou muito menos bi-dimensional que os outros casos estudados. As estruturas próximas aos limites do domínio na direção transversal do presente caso se destacaram bem mais do que no caso $\alpha = 0,93$. Mesmo num regime linear, estas estruturas se comportaram tendo amplitudes dominantes e tenderam a se distanciar uma da outra, a ponto de o trem de onda modulado não ser totalmente comportado pelo domínio computacional usado. Além do mais, as taxas de crescimento linear das ondas TS foram bem menores que as dos casos anteriores. Isto resultou em um maior tempo de simulação até o trem de ondas modulado atingir o regime não-linear.

Devido às características apresentadas para o caso $\alpha = 0,86$, o código numérico foi capaz de simular o regime não-linear daquele caso somente em um tempo relativamente curto. Durante este tempo de simulação, a onda TS 3D que mais cresceu linearmente permaneceu dominante durante toda a evolução. No espaço de Fourier, não foi indicado pelos resultados nenhum outro pico de amplitude que pudesse corresponder à outras ondas TS 3D. O histórico da evolução destes modos não apresentou nenhum comportamento explosivo dos modos quando a amplitude máxima do trem de ondas modulado atingiu 1%

da amplitude do escoamento base. Desta forma, os resultados não indicaram a presença da transição tipo-K para o presente caso. No entanto, o tempo de simulação do regime não-linear foi relativamente curto e pode não ter sido o suficiente para que a amplitude máxima do trem de ondas modulado atingisse a amplitude crítica para o crescimento da instabilidade do tipo-k.

Analisando a evolução dos modos estacionários do mesmo caso $\alpha = 0,86$, foi possível identificar um pico de amplitude. Este pico satisfaz um número de onda transversal quase igual ao dobro do número de onda transversal do modo correspondente à onda TS 3D dominante. No cenário da transição oblíqua este mesmo fenômeno acontece e domina o regime não-linear da evolução. No entanto, o tempo de evolução para o regime não-linear foi muito curto e a amplitude do pico da banda em torno de $\beta = 1$ foi muito pequena comparada com a amplitude do pico da banda fundamental para se ter indícios da transição oblíqua. Além do mais, o fato de o trem de ondas se dividir em duas regiões e evoluírem para direções oblíquas ao passo de não mais se interagirem, tem desqualificado a hipótese de que este cenário é resultante da transição oblíqua. Por outro lado, pode ser que estas duas partes do trem de ondas modulado se interajam com as respectivas partes de trens de ondas modulados adjacentes na direção transversal. Em situações práticas, os trens de ondas modulados que são adjacentes não necessariamente possuem as mesmas condições de amplitude, fase ou faixa de ondas transversais. Pode ser que estas interações resultam em um cenário de transição oblíqua modificado.

O tipo de comportamento observado para os trens de ondas modulados próximos ao primeiro ramo do diagrama não foi antecipado pela literatura. Além do mais, o estudo de trens de ondas modulados que resultam atividade não-linear somente devido a interação com os trens de ondas adjacentes não foi o objetivo deste trabalho, já que o foco principal seria estudar o regime não-linear de trens de ondas modulados isolados. Por outro lado, os resultados sugerem que este tipo de cenário pode estar associado aos cenários de transição de escoamento a elevados números de Mach, onde o regime linear é dominado por ondas TS tri-dimensionais. Neste sentido, este tipo de cenário não antecipado talvez mereça ser

investigado no futuro.

8.3 Observações Finais

Diante dos resultados do presente trabalho, algumas observações foram listadas abaixo.

Stemmer (2001) realizou simulações numéricas de trem de ondas modulado evoluindo em camada limite e identificou a transição oblíqua como sendo a causa da transição daquele escoamento. Entretanto, aquela investigação se deu em apenas um caso de trem de ondas modulado. No presente estudo, não é descartada a possibilidade de se ter algum caso onde a transição oblíqua domina o regime não-linear. Entretanto, este caso deve acontecer apenas em uma faixa restrita de parâmetros.

Medeiros (2004) realizou experimentos da evolução de trens de ondas modulados em camada limite e concluiu que o regime não-linear é composto por dois estágios. No primeiro estágio, apareceu a transição oblíqua no processo. No segundo estágio, apareceu também a transição tipo-K. Neste mesmo estágio, o trem de ondas modulado havia evoluído espacialmente até próximo ao segundo ramo do diagrama. Na correspondente região do diagrama de instabilidade para um escoamento de Poiseuille plano, os presentes resultados concordaram com os resultados de Medeiros (2004). De fato, a instabilidade tipo-K foi mais relevante para casos de trens de ondas modulados distantes do primeiro ramo do diagrama. Por outro lado, não foi possível identificar a transição oblíqua em nenhum caso estudado. Entretanto, os resultados sugerem uma explicação do porque o primeiro estágio da não-linearidade em camada limite é predominado pela transição oblíqua. De fato o primeiro estágio não-linear para aquele caso ocorreu quando o trem de ondas se localizava perto do primeiro ramo do diagrama. Como observado no presente trabalho, o regime linear de trens de ondas modulados localizados nesta região do diagrama apresenta ondas TS 3D com maior taxa de crescimento linear que a onda TS 2D. Este fato pode ter favorecido o aparecimento da instabilidade oblíqua naquele escoamento.

É importante notar que os escoamentos de Poiseuille plano e camada limite não pos-

suem os mesmos valores dos parâmetros número de ondas longitudinais e número de Reynolds. Isto pode resultar diferentes comportamentos do regime não-linear de ambos escoamentos.

Em estudos de previsão do ponto de transição, os métodos mais confiáveis envolvem teoria linear. Uma extensão desta abordagem é a verificação de qual regime não-linear é o mais relevante para uma dada condição do escoamento. Esta verificação têm tomado força na indústria aeronáutica e é feita através de simulações numéricas dos três cenários clássicos de transição. O cenário que se desenvolve mais rapidamente é considerado o dominante no processo. No entanto, os resultados do presente trabalho sugeriram que pode não ser uma boa prática prever ponto de transição através de modelos bi-dimensionais. De fato, todos os casos simulados neste trabalho reforçaram a idéia de que trens de ondas modulados dominados pela instabilidade tipo-K possuem um amplitude efetiva que se comporta como uma onda TS 2D e promove o crescimento seletivo de ondas TS 3D. No entanto, a amplitude efetiva de cada caso se comportou tendo menor taxa de amplificação linear que a taxa de amplificação de cada onda TS 2D correspondente. No caso da instabilidade secundária, isto poderia resultar uma previsão do ponto de transição em uma posição anterior do que acontece na prática.

Nem sempre as simulações numéricas de trens de ondas podem imitar fielmente o que ocorre em experimentos. O fato é que o nível de ruído experimental é bem mais alto que o erro numérico das simulações numéricas. Sendo assim, é possível identificar nas simulações numéricas faixas de ondas com altos número de ondas transversais que são geradas pelas interações não-lineares e que num experimento estas faixas estariam mergulhadas num ruído e não apresentariam mesmas características das faixas obtidas por simulações numéricas.

8.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

O método das soluções manufaturadas poderia ser utilizado para verificação de códigos com geometrias mais complexas que a do presente trabalho. Por exemplo, códigos para simulação de fronteiras imersas. Neste contexto existem grandes questões em aberto acerca da efetiva ordem de precisão destes métodos.

Os códigos de simulação das equações compressíveis mesmo em geometrias simplificadas também se beneficiariam do teste de verificação usando o método das soluções manufaturadas.

No estudo da instabilidade hidrodinâmica, pode-se usar modulação também na direção longitudinal e estudar a evolução não-linear de pacotes de ondas tri-dimensionais em um escoamento de Poiseuille plano. Os pacotes de ondas são sistemas que melhor imitam a transição natural.

O estudo do caso $\alpha = 0,86$ do presente trabalho indicou um cenário que pode ser típico em escoamentos compressíveis. Isto porque o aumento do número de Mach favorece o crescimento de ondas TS 3D e podem resultar mesmo comportamento linear identificado nos presentes resultados. De fato o estudo de trens de ondas modulados evoluindo em camada limite compressível já se encontra em andamento no Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística da Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

Referências

AIAA-EDITORIAL. Policy statement on numerical accuracy and experimental uncertainty. *AIAA Journal*, v. 32(1), p. 3–3, 1994.

BERLIN, S. *Oblique Waves in Boundary Layer Transition*. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology - Department of Mechanics, Stockholm, Sweden, 1998.

BOIKO, A. et al. *The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2002.

CREPALDI, F. et al. Temporal numerical simulation of disturbances propagation in a Poiseuille flow using spectral methods. In: *Escola de Primavera de Transição e Turbulência-EPTT*. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.], 2006.

DAVEY, A.; STEWARTSON, K. On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc. London A*, v. 338, p. 101–110, 1974.

DE-PAULA, I. B. *Influência de uma Rugosidade Tri-dimensional Isolada na Transição de Uma Camada Limite Sem Gradiente de Pressão*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - USP, São Carlos-São Paulo-Brasil, 2007.

DRELA, M.; GILES, M. Viscous-inviscid analysis of transonic and low reynolds number airfoils. *AIAA Journal*, v. 25(10), p. 1347–1355, 1987.

ELOFSSON, P.; ALFREDSSON, P. H. An experimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech*, v. 358, p. 177–202, 1998.

ETHIER, C. R.; STEINMAN, D. A. Exact fully 3-D Navier/Stokes solutions for benchmarking. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, v. 19, p. 369–375, 1994.

FASEL, H.; BESTEK, H. Investigation of nonlinear, spatial disturbance amplification in plane Poiseuille flow. In: *in Proc. Conf. on New Approaches and Concepts in Turbulence*. New York: [s.n.], 1980.

FASEL, H.; RIST, U.; KONZELMAN, U. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary-layer transition. *AIAA paper*, v. 28, p. 29–37, 1991.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Germany: Springer, 1997.

FREITAS, C. Editorial policy statement on the control of numerical accuracy. *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 115(3), p. 339–340, 1993a.

GAD.EL.HAK, M. *Flow Control-Passive, Active and Reactive Flow Management*. Notre Dame, Indiana: Cambridge University Press, 2000.

GASTER, M. The physical process causing breakdown to turbulence. In: *Naval Hydrodynamics Symposium*. Washington: [s.n.], 1978.

GREEN, J. Greener by design. *The Aeronautical Journal*, n. 1056, p. 57–114, 2002.

HERBERT, T. Secondary instability of boundary-layers. *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, v. 20, p. 487–526, 1988.

HIRSH, R. High order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact difference technique. *Journal of Computational Physics*, v. 19, p. 90–109, 1975.

HRISTOWA, H.; PELLETIER, D.; BORGGAARD. A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, v. 50, p. 817–844, 2006.

HWANG, G.; WU, S. Direct numerical simulation of the amplification of a 2d temporal disturbance in plane Poiseuille flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 26, p. 443–457, 1998.

JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech*, v. 285, p. 69–94, 1994.

JOSLIN, R. Aircraft laminar flow control. *Annu. Rev. Fluid. Mech*, v. 30, p. 1–29, 1998.

KACHANOV, Y. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 26, p. 411–482, 1994.

KLEBANOFF, P. S.; TIDSTROM, K. D.; SARGENT, L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *J. Fluid Mech*, v. 12, p. 1–34, 1962.

KLOKER, M. A robust high-resolution split-type compact finite difference scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. *Applied Scientific Research*, v. 59, p. 357–377, 1998.

KNUPP, P.; SALARI, K. *Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering*. [S.l.]: Chapman and Hall, CRC, Boca Raton, FL., 2003. Rosen KH 2003.

LANDAU, L. D. On the problem of turbulence. *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, v. 44, p. 311–314, 1944.

LAURIEN, E.; KLEISER, L. Numerical simulation of boundary-layer transition control. *J. Fluid Mech.*, v. 199, p. 403–440, 1989.

LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, v. 103, p. 16–42, 1992.

MARXEN, O. *Temporal Direct Numerical Simulation of a Flat Plate Boundary Layer, Diplomarbeit*. Tese (Doutorado) — University of Arizona, Arizona-USA, 1998.

MEDEIROS, M. The nonlinear evolution of a wavetrain emanating from a point source in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, v. 508, p. 287–317, 2004.

- MEDEIROS, M. *Os Primeiros Estágios Não-Lineares da Transição Natural em Camada Limite (livre-docência)*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo-Escola de Engenharia de São Carlos-Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, São Carlos, S.P., Brasil, 2006.
- MEDEIROS, M.; GASTER, M. The nonlinear evolution behavior of modulated Tollmien-Schlichting waves. In: *In IUTAM Conference on Nonlinear Instability and Transition in Tri-dimensional Boundary Layers*. Manchester: [s.n.], 1995.
- MEDEIROS, M.; GASTER, M. The influence of phase on the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, v. 397, p. 259–283, 1999.
- MEDEIROS, M.; GASTER, M. The production of subharmonic waves in the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, v. 399, p. 301–318, 1999.
- MEITZ, H.; FASEL, H. A compact-difference scheme for the Navier-Stokes equations in vorticity-velocity formulation. *Journal of Computational Physics*, v. 157, p. 371–403, 2000.
- MENDONÇA, M. T. *Estabilidade de Escoamentos de Laminas: Teoria Linear, capítulo 5*. Uberlândia-MG: ABCM-EPTT, 2003. 01-50 p.
- NISHIOKA, M.; LIDA, S.; ICHIKAWA, Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 72(4), p. 1882–1882731–751, 1975.
- OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G.; HIRSCH, C. Verification, validation and predictive capability in computational engineering and physics. *Appl. Mech. Rev.*, v. 57(5), p. 345–384, 2004.
- ORZAG, S.; PATERA, A. Secondary instability of wall-bounded shear flows. *J. Fluid Mech.*, v. 128, p. 347–385, 1983.
- PANTON, R. L. Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence. *Prog. Aero. Sciences*, v. 37, p. 341–383, 2001.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- REED, L. H.; HAYNES, T. S.; SARIC, W. Computational fluid dynamics validation issues in transition modeling. *AIAA Journal*, v. 36(5), p. 742–751, 1998.
- RENEAUX, J. Overview on drag reduction technologies for civil transport aircraft. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering-ECCOMAS*. Jyväskylä, Finland: [s.n.], 2004.
- ROACHE, P. J. Response: To the coments by Drs. W. Shyy and M. Sindir. *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 116(2), p. 198–199, 1994.
- ROACHE, P. J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, v. 29, p. 123–160, 1997.
- ROACHE, P. J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M.: Cambridge University Press, 1998.

- ROACHE, P. J.; WHITE, F. M. Editorial policy statement on the control of numerical accuracy. *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 108(1), p. 2–2, 1986.
- ROY, C. J. Grid convergence analysis for mixed-order numerical schemes. *AIAA Journal*, v. 41(4), p. 595–604, 2003.
- ROY, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *J. Comp. Physics*, v. 205, p. 131–156, 2005.
- SAFTA, C.; ALABI, K.; LADEINDE, F. Comparative advantages of high-order schemes for subsonic, transonic and supersonic flows. In: *44th AIAA Aerospace Science Meetings and Exhibit*. Reno-Nevada-USA: [s.n.], 2006.
- SANDHAM, N. D.; KLEISER, L. The late stages of transition to turbulence in channel flow. *J. Fluid Mech.*, v. 245, p. 319–348, 1992.
- SCHMID, P.; HENNINGSON, D. S. *Stability and Transition in Shear Flow*. New York, USA: Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 2001.
- SHAIKH, F. N. Investigation of transition to turbulence using white noise excitation and local analysis techniques. *J. Fluid Mech.*, v. 348, p. 29–83, 1997.
- SILVA, H. G.; MEDEIROS, M. A. F.; SOUZA, L. F. A verification test for a direct numerical simulation code that uses a high order discretization scheme. In: *18th International Congress of Mechanical Engineering, Proceedings of the COBEM-CD ROM*. Ouro Preto, Brazil: [s.n.], 2005.
- SILVA, H. G.; SOUZA, L.; MEDEIROS, M. On the verification of a mixed high-order accurate DNS code by the method of manufactured solutions - ACCEPTED FOR PUBLICATION. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, p. –, 2008.
- SILVA, H. G.; SOUZA, L. F.; MEDEIROS, M. A. F. Verification of a DNS code of high order of accuracy using the method of manufactured solutions. In: *Proceeding of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2006 - CD ROM*. Curitiba-PR, Brazil: [s.n.], 2006.
- SOUZA, L. *Instabilidade Centrífuga e transição laminar-turbulento de escoamentos sobre superfícies côncavas*. Tese (Doutorado) — Instituto tecnológico aeronáutico, São José dos Campos, S.P., Brazil, 2003.
- SOUZA, L.; MENDONÇA, M.; MEDEIROS, M. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, v. 48, p. 565–582, 2005.
- STEINBERG, S.; ROACHE, P. J. Symbolic manipulation and computational fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 57 (30), p. 251–283, 1985.
- STEMMER, C. *Direct Numerical Simulation of Harmonic Point Source Disturbances in an Airflow Boundary Layer with Adverse Pressure Gradient*. Tese (Doutorado) — Stuttgart University, Stuttgart, Germany, 2001.
- STEWARTSON, K.; STUART, J. T. A nonlinear theory of a wave system in a plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, v. 48, p. 529–545, 1971.

- STUART, J. T. On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, v. 4, p. 1–21, 1958.
- STUART, J. T. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid Mech.*, v. 9, p. 1–21, 1960.
- WANG, M.; LELE, S. K.; MOIN, P. Sound radiation during local laminar breakdown in a low-mach-number boundary layer. *J. Fluid Mech.*, v. 319, p. 197–218, 1996.
- WEBER, W. *Simulations of Turbulent Channel Flow Using The Temporal Mode, Masters Report*. Tese (Doutorado) — University of Arizona, Arizona, USA, 2000.
- WRAY, A.; HUSSAINI, M. Numerical experiments in boundary-layer stability. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, v. 392, p. 373–389, 1984.
- ZANG, T.; KIRST, S. Numerical experiments on stability and transition in plane channel flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, v. 1, p. 41–64, 1989.

APÊNDICE A – TERMO FONTE PARA A SOLUÇÃO MANUFATURADA

Termo fonte para o problema (5.8 a 5.10), seção (5.1). Para efeito de simplificação foi assumido nas expressões abaixo a letra B sendo $\alpha x + \beta z - \omega t$.

$$F_x(x, y, z, t) =$$

$$\begin{aligned} & A\beta e^y \cos(B) \alpha^3 y^4 + 8 \cos(B) \alpha^2 y - 8 \cos(B) \alpha^2 - 16 \cos(B) y - 8 \cos(B) \alpha - 4 \cos(B) \alpha^2 y^3 + \\ & 4 \cos(B) \alpha^3 y^2 - \cos(B) y^4 \alpha + 12 \cos(B) y^3 - 4 \cos(B) y^3 \alpha + \cos(B) y^4 - 6 \cos(B) \beta^2 - \\ & 8 \cos(B) \beta^2 y^3 - \cos(B) \alpha^2 y^4 + 96 e^y y^3 \sin(B) Re \beta^2 A \cos(B) - 24 \cos(B) - 4 \cos(B) \alpha y^3 \beta^2 - \\ & 8 \sin(B) \beta^2 \alpha y^3 Re 4 y^5 \sin(B) Re \alpha - 4 \sin(B) \omega Re y^3 - 6 \sin(B) \beta^2 \alpha y^5 Re + \\ & 8 e^y y^6 \sin(B) Re A \cos(B) \alpha - 24 e^y y^5 \sin(B) Re A \cos(B) \alpha + 12 \sin(B) \alpha^2 y^4 Re + 4 \cos(B) \beta^4 \\ & y^2 - 4 \cos(B) \alpha^2 \beta^2 y^3 - 8 \sin(B) \omega Re - 8 \sin(B) \alpha^2 y^3 Re + \cos(B) \beta^4 y^4 + \sin(B) \omega Re \beta^2 y^4 - \\ & 8 e^y y^4 \sin(B) Re A \cos(B) \alpha + \sin(B) y^6 \alpha^2 Re + \cos(B) \alpha y^4 \beta^2 - 6 \sin(B) \alpha^2 y^5 Re + \\ & \cos(B) \alpha^2 \beta^2 y^4 - 4 \cos(B) \alpha^3 y^3 + 4 \cos(B) \alpha^2 \beta^2 y^2 + \sin(B) \beta^2 y^6 \alpha Re + 4 \sin(B) \omega Re \beta^2 y^2 + \\ & 8 y^3 \sin(B) Re \alpha + 8 \cos(B) \alpha^2 y^2 + 4 \cos(B) \alpha y^2 \beta^2 - 2 \cos(B) \beta^2 y^4 + 4 \sin(B) \omega Re \alpha y^2 + \\ & 12 \sin(B) \beta^2 \alpha y^4 Re - \sin(B) \omega Re y^4 - 4 \cos(B) \beta^4 y^3 - 128 e^y y^2 \sin(B) Re A \cos(B) \alpha - \\ & 24 \beta^2 A e^y y^5 \cos(B) \sin(B) Re - 4 \sin(B) \omega Re y^3 \alpha - 4 \sin(B) \omega Re \beta^2 y^3 + \\ & 8 \beta^2 A e^y y^6 \cos(B) \sin(B) Re + 64 \beta^2 A e^y y \cos(B) \sin(B) Re + 32 y \sin(B) Re \alpha - y^6 \sin(B) \\ & Re \alpha + 16 \cos(B) \beta^2 y^2 - 8 \beta^2 A e^y y^4 \cos(B) \sin(B) Re + 8 \sin(B) \omega Re y + 18 y^4 \sin(B) Re \alpha + \\ & 16 \cos(B) \beta^2 y - 56 y^2 \sin(B) Re \alpha + 8 \cos(B) \alpha y^2 - 128 \beta^2 A e^y y^2 \cos(B) \sin(B) Re + \end{aligned}$$

$$96e^y y^3 \sin(B) Re A \cos(B) \alpha + 8 \sin(B) \omega Re y^2 + 8 \cos(B) \alpha y + 28 \cos(B) y^2 + \sin(B) \omega Re y^4 \alpha + 64 e^y y \sin(B) Re A \cos(B) \alpha / Re.$$

$$\begin{aligned}
F_y(x, y, z, t) = & -Ae^y y \beta (-\sin(B) \beta^2 y^3 - \cos(B) \omega Re y^3 \alpha + 8 \cos(B) \omega Re \alpha y - \sin(B) \alpha^2 y^3 - 8 \sin(B) \alpha^3 y + \\
& 8 \cos(B) \omega Re + \sin(B) y^3 \alpha^3 + 8 \sin(B) \alpha^2 y - \sin(B) y^3 \alpha - 4 \sin(B) \alpha y - 8 \sin(B) \alpha y^2 + \\
& 8 \sin(B) \alpha \beta^2 + \sin(B) y^3 + 8 \sin(B) y^2 + 8 \sin(B) \alpha^3 - 8 \sin(B) \alpha^2 + 4 \sin(B) y + 24 \sin(B) \alpha - \\
& 8 \sin(B) y \beta^2 \alpha + 8 \cos(B) y Re \beta^2 + 16 y \cos(B) \alpha^2 Re + 10 \cos(B) y^3 Re \beta^2 - \\
& 16 \cos(B) y^2 Re \beta^2 - 24 y^2 \cos(B) \alpha^2 Re - 4 y^4 \cos(B) \alpha Re + 2 y^3 \cos(B) \alpha Re + \\
& 8 y^2 \cos(B) \alpha Re + 2 y^4 \cos(B) \alpha^2 Re - y^5 \cos(B) \alpha^2 Re - 8 \cos(B) \omega Re y + y^5 \cos(B) \alpha Re + \\
& 8 y^3 \cos(B) \alpha^2 Re - 8 y \cos(B) \alpha Re + \cos(B) \omega Re y^3 + \sin(B) \alpha y^3 \beta^2 - 8 \cos(B) \omega Re \alpha - \\
& 24 \sin(B) + 64 Ae^y y^2 \alpha^2 Re - 64 Ae^y y^2 \alpha Re + 24 Ae^y y^4 \alpha^2 Re + 32 Ae^y y Re \beta^2 + \\
& 64 Ae^y y^2 \alpha Re \beta^2 - 64 Ae^y y^2 Re \beta^2 - 24 Ae^y y^4 Re \beta^2 + 32 Ae^y y \alpha Re + 56 Ae^y y^3 Re \beta^2 - \\
& 32 Ae^y y \alpha^2 Re + 56 Ae^y y^3 \alpha Re - 32 Ae^y y \alpha Re \beta^2 + 24 Ae^y y^4 \alpha Re \beta^2 - 56 Ae^y y^3 \alpha Re \beta^2 + \\
& 4 Ae^y y^5 Re \beta^2 + 4 Ae^y y^5 \alpha Re - 4 Ae^y y^5 \alpha^2 Re - 4 Ae^y y^5 \alpha Re \beta^2 - 24 Ae^y y^4 \alpha Re - \\
& 56 Ae^y y^3 \alpha^2 Re + 8 \sin(B) \beta^2 y - 8 \sin(B) \beta^2 - 48 y^4 \cos(B)^2 \alpha Re \beta^2 Ae^y - \\
& 128 y^2 \cos(B)^2 \alpha^2 Re Ae^y + 64 y \cos(B)^2 \alpha^2 Re Ae^y + 8 y^5 \cos(B)^2 \alpha^2 Re Ae^y + \\
& 128 y^2 \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y - 112 y^3 \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y - 128 y^2 \cos(B)^2 \alpha Re \beta^2 Ae^y + \\
& 8 y^5 \cos(B)^2 \alpha Re \beta^2 Ae^y - 64 y \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y + 112 y^3 \cos(B)^2 \alpha^2 Re Ae^y - \\
& 8 y^5 \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y + 64 y \cos(B)^2 \alpha Re \beta^2 Ae^y - 48 y^4 \cos(B)^2 \alpha^2 Re Ae^y + \\
& 112 y^3 \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y \beta^2 + 48 y^4 \cos(B)^2 \alpha Re Ae^y + 48 \cos(B)^2 y^4 Re \beta^2 Ae^y + \\
& 128 \cos(B)^2 y^2 Re \beta^2 Ae^y - 8 \cos(B)^2 y^5 Re \beta^2 Ae^y - 112 \cos(B)^2 y^3 Re Ae^y \beta^2 - \\
& 64 \cos(B)^2 y Re \beta^2 Ae^y - 2 \cos(B) y^4 Re \beta^2) / Re.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z(x, y, z, t) = & -Ae^y(-16\sin(B)yRe\beta^2 + 16\cos(B)\alpha^2y - 8\cos(B)\alpha\beta^2 + 4\cos(B)\alpha^4y^2 - 4\cos(B)\alpha^4y^3 + \\
& \cos(B)\alpha^4y^4 + 8\cos(B)\alpha y\beta^2 + 4\cos(B)\alpha^3y^2\beta^2 + \cos(B)\beta^4\alpha y^4 - 16\cos(B)\alpha^2 - \\
& 16\cos(B)y - 4\cos(B)\beta^4\alpha y^3 + 4\cos(B)\beta^4\alpha y^2 - 8\cos(B)\alpha^2y^3 - 6\sin(B)\alpha^3y^5Re + \\
& 12\cos(B)y^3 + \cos(B)\alpha^3y^4\beta^2 + \cos(B)y^4 - 8\cos(B)\beta^2 - 4\cos(B)\beta^2y^3 - \\
& 4\cos(B)\alpha^3y^3\beta^2 - 2\cos(B)\alpha^2y^4 + 96e^yy^3\sin(B)Re\beta^2A\cos(B) - 24\cos(B) - \\
& 4\cos(B)\alpha y^3\beta^2 - 2y^5\sin(B)Re\alpha - 4\sin(B)\omega Rey^3 + 8e^yy^6\sin(B)ReA\cos(B)\alpha - \\
& 24e^yy^5\sin(B)ReA\cos(B)\alpha - 4\cos(B)\alpha^2\beta^2y^3 - 8\sin(B)\omega Re - 6\sin(B)\alpha^2y^5\beta^2Re - \\
& 8e^yy^4\sin(B)ReA\cos(B)\alpha - \cos(B)\alpha y^4\beta^2 + \cos(B)\alpha^2\beta^2y^4 - 8\sin(B)y^3\alpha^3Re + \\
& 12\sin(B)\alpha^3y^4Re + 4\cos(B)\alpha^2\beta^2y^2 - 16y^3\sin(B)Re\alpha + 16\cos(B)\alpha^2y^2 + \\
& 8\cos(B)\alpha y^2\beta^2 - \cos(B)\beta^2y^4 - \sin(B)\omega Rey^4 + \sin(B)\alpha^2y^6\beta^2Re - \\
& 128e^yy^2\sin(B)ReA\cos(B)\alpha - 24\beta^2Ae^yy^5\cos(B)\sin(B)Re + 8\beta^2Ae^yy^6\cos(B)\sin(B)Re + \\
& 64\beta^2Ae^yy\cos(B)\sin(B)Re + 16y\sin(B)Re\alpha - y^6\sin(B)Re\alpha + 8\cos(B)\beta^2y^2 - \\
& 8\beta^2Ae^yy^4\cos(B)\sin(B)Re + 8\sin(B)\omega Rey + 18y^4\sin(B)Re\alpha + 8\cos(B)\beta^2y - \\
& 16y^2\sin(B)Re\alpha - 128\beta^2Ae^yy^2\cos(B)\sin(B)Re + 96e^yy^3\sin(B)ReA\cos(B)\alpha + \\
& 8\sin(B)\omega Rey^2 + 28\cos(B)y^2 + 12\sin(B)\alpha^2y^4\beta^2Re + 64e^yy\sin(B)ReA\cos(B)\alpha - \\
& 8\sin(B)\alpha^2y^3\beta^2Re + \sin(B)\alpha^3y^6Re + \sin(B)\omega Re\alpha^2y^4 + 4\sin(B)\omega Re\alpha y^2\beta^2 - \\
& 4\sin(B)\omega Rey^3\alpha\beta^2 + \sin(B)\omega Rey^4\alpha\beta^2 + 40\sin(B)y^2Re\beta^2 - 24\sin(B)y^3Re\beta^2 + \\
& 4\sin(B)\omega Re\alpha^2y^2 - 4\sin(B)\omega Re\alpha^2y^3 + 2\sin(B)y^5Re\beta^2)/Re.
\end{aligned}$$