Campus de São Carlos

**IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE ESFORÇOS
DINÂMICOS: MÉTODOS NO DOMÍNIO DO
TEMPO E DA FREQUÊNCIA**

MARCELO ALVES DOS SANTOS

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Varoto

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE ESFORÇOS
DINÂMICOS: MÉTODOS NO DOMÍNIO DO
TEMPO E DA FREQUÊNCIA**

MARCELO ALVES DOS SANTOS

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço: 31 / 10 / 01
Ass.: <i>Guilherme</i>

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto

DEDALUS - Acervo - EESC

31100036824

São Carlos
2001

Class.	TESE-EESC
Cat.	5562
Tombo	T0257/01

12 12 740

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da
Informação do Serviço de Biblioteca - EESC/USP

S237i Santos, Marcelo Alves dos
Identificação indireta de esforços dinâmicos :
métodos no domínio do tempo e da frequência / Marcelo
Alves dos Santos. -- São Carlos, 2001.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de
São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.
Área : Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto.

1. Identificação de forças. 2. Problemas inversos.
3. Análise modal. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MARCELO ALVES DOS SANTOS**

Dissertação defendida e julgada em 24-08-2001 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **PAULO SÉRGIO VAROTO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

Aprovado.

Prof. Dr. **JONAS DE CARVALHO**
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

Aprovado.

Prof. Dr. **ROBERTO HIDEAKI TSUNAKI**
(Universidade de Mogi das Cruzes - UMC)

Aprovado

Prof. Associado **ARTHUR JOSÉ VIEIRA PORTO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedicatória

A Deus e a Família alicerces de qualquer ser humano.
Um é a Rocha e outro a Mão que afaga.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto, exemplo a se seguir como profissional e caráter, agradeço pela excelente orientação durante a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pela bolsa de estudo fornecida.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da EESC/USP, pelos conhecimentos transmitidos e pela atenção e respeito prestados quando solicitados.

As funcionárias da secretária de pós-graduação, Beth e Ana Paula, pela atenção despendida e pela convivência agradável.

Aos funcionários do Laboratório de Dinâmica, Cristina, Suzete e China, pelo apoio e agilidade prestados quando solicitados em suas funções e responsabilidades.

Aos colegas de pós-graduação pela sua amizade, pelos bons momentos de prazer e descontração pelos quais passamos.

A minha família e esposa Sílvia pela compreensão e apoio nas horas mais difíceis pelas quais passei e pelas decisões que tomei.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	vii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix
RESUMO.....	xi
1. - INTRODUÇÃO.....	01
1.1. – Considerações Preliminares.....	01
1.2. - Objetivos do Trabalho.....	05
1.3 – Revisão Bibliográfica.....	06
1.4. – Organização da Dissertação.....	12
2. - MÉTODOS NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	20
2.1. - Deconvolução no Domínio do Tempo.....	15
2.2. - Técnica SWAT.....	19
2.2.1. - SWAT Modificado (Baseado nas Coordenadas Modais).....	27
3. - MÉTODOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	30
3.1. – Equações no Domínio da Frequência.....	31
3.2 – A Técnica da Pseudo-Inversa- sinais determinísticos.....	36
3.2.1. – A Decomposição em Valores Singulares.....	37
3.2.2. – A Determinação da pseudo-inversa.....	40
3.2.3. – A Técnica da Pseudo-Inversa – sinais aleatórios.....	43
4. ALGORÍTMOS E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	47
4.1 – Definição de parâmetros físicos.....	48
4.2 – Implementação da técnica SWAT.....	49
4.3. - Implementação da Pseudo-Inversa	50

4.6. - Resultados de Simulações.....	56
5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	64
5.1 – Descrição do aparato experimental.....	64
5.2 – Identificação de forças do tipo impacto	66
5.3 – Identificação de forças chirp	68
5.4 - Identificação de forças aleatórias.....	71
6. CONCLUSÕES.....	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	76

FIGURA 5.6 – Força de impacto identificada pela pseudo-inversa.....	68
FIGURA 5.7. – Sinal de excitação do tipo chirp.....	69
FIGURA 5.8 – Força chirp identificada em uma extremidade da viga.....	70
FIGURA 5.9 – Forças chirp identificada na viga.....	70
FIGURA 5.10. – Forças aleatórias identificadas para viga.....	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IIF	Identificação Indireta de Forças
SWAT	Sum of The Weighted Accelerations Technique
FRF	Função Resposta em Frequência
FFT	Fast Fourier Transform
NSR	Noise to Signal Ratio
DOF	Degree of Freedom
MDOF	Multiple Degrees of Freedom
PBC	Perturbed Boundary Condition
LDL^T	Decomposição Cholesky
$Q - R$	Tipo de Decomposição Matricial
DVS / SVD	Decomposição em Valores Singulares
ASDs	Auto Spectral Densities
CSDs	Cross Spectral Densities

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(t)$	Variável em função do tempo
$f(\omega)$	Variável em função da frequência
x_i	Variável na posição i
w	Vetor de Pesos SWAT
$[\]$	Matriz
$\{ \}$	Vetor
$\ddot{\{ \}}$	Vetor aceleração
$\dot{\{ \}}$	Vetor velocidade
$[\Phi]$	Matriz dos modos de vibrar
$\{T\}$	Vetor de coordenadas generalizadas
$[m]$	Matriz de massa nas coordenadas generalizadas
$[k]$	Matriz de rigidez nas coordenadas generalizadas
$[c]$	Matriz de amortecimento nas coordenadas generalizadas
$[M]$	Matriz de massa modal
$[K]$	Matriz de rigidez modal
$[C]$	Matriz de amortecimento modal
ω_i	i -ésima frequência natural
ω_{di}	Frequência natural amortecida do modo i
ξ_i	Fator de amortecimento modal do modo i
$\{ \}^T$	Transposto não conjugado de um vetor
$\{ \}^H$	Transposto Hermitiano de um vetor
$\{\phi_i^r\}^T$	Transposto do i -ésimo modo de corpo rígido
$[H(\omega)]$	Matriz de transferência ou de funções de resposta em frequência (FRF's).

$\overline{H}_{ij}(\Omega)$	função resposta em frequência na forma complexa, $\overline{H}_{ij}(\Omega)$, para coordenadas físicas sendo a resposta captada em i devido a uma excitação harmônica em j
$diag\{ \}$	Matriz diagonal
$()^+$	Pseudo-inversa
$\hat{x}$	Subconjunto das coordenadas x nas quais as componentes foram identificados
σ_i	Valor Singular

RESUMO

A identificação de esforços dinâmicos vem despertando um contínuo interesse da comunidade modal e de teste de vibrações principalmente nas duas últimas décadas. De forma semelhante como na maioria das técnicas de identificação modal, a identificação de forças, representa um problema inverso. Problemas inversos são conhecidos pelo fato de serem naturalmente mau condicionados numericamente, uma vez que os mesmos representam uma operação de deconvolução no tempo. Dentre os métodos utilizados na identificação de forças a partir de medidas de movimento, pode-se destacar a técnica da pseudo inversa no domínio da frequência. A técnica da pseudo inversa requer o conhecimento das medidas das respostas da estrutura usualmente acelerações assim como das funções respostas em frequência da estrutura (FRF). Este método requer a inversão das matrizes de FRF do sistema para todas as linhas espectrais na faixa de frequência de interesse. Este procedimento de inversão usualmente apresenta dificuldades numéricas em algumas frequências. Será levantado suas principais vantagens e desvantagens quando comparado com um método no domínio do tempo no caso da técnica SWAT, para alguns tipos de formas de excitação comumente empregadas em testes modais e de vibração. São apresentados resultados de simulações numéricas e resultados experimentais para uma estrutura simples.

Palavras-chave : pseudo-inversa, SWAT, teste modal, identificação de força.

ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to tackle a difficult problem in experimental modal analysis that is the indirect identification of input forces based on the knowledge of the structure's output response and dynamic characteristics, such as impulse responses and/or FRF. This represents an inverse problem in mechanics and usually offers great numerical difficulties in the process of identification of the input forces. There are methods for input force identification in the time and in the frequency domains. In the time domain the SWAT method (Sum of the Weighted Accelerations Technique) is a method that is based on the principle of motion of the mass center. This technique allows the estimation of the resulting force acting on the structure and is primarily used with impact force signals. In the frequency domain the pseudo-inverse technique is known to give estimates of the resulting forces acting on the structure under investigation. In this work numerically simulated as well as experimental results are presented for both methods and their major advantages and disadvantages are discussed. The pseudo-inverse method is further employed in the identification of experimental transient and random multiple inputs.

Keywords: force identification, modal analysis, inverse problems, SWAT, pseudo-inverse

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – Considerações Preliminares

Problemas de engenharia relacionados com o fenômeno da vibração estrutural são constantemente encontrados nos mais variados segmentos dos setores produtivos. Estes incluem desbalanceamentos em máquinas, desgastes excessivos em componentes, problemas de ressonância estrutural, etc. Desta forma, uma análise minuciosa das características dinâmicas da estrutura sob estudo se faz necessária, desde as etapas preliminares do projeto, até o momento de entrada em operação. Neste contexto, a Análise Modal Teórica e Experimental tem contribuído de maneira decisiva na identificação e na solução de problemas relacionados ao fenômeno da vibração estrutural.

De forma geral, a análise modal experimental é uma técnica que propicia a obtenção de modelos matemáticos para uma dada estrutura a partir de dados experimentais (Ewins, 1984). Tais modelos matemáticos podem ser usados na validação de modelos analíticos e/ou computacionais da estrutura, como é o caso freqüente de modelos computacionais obtidos através do método dos elementos finitos (Clough, 1984).

O conhecimento de modelos analíticos de estruturas, quer advindos de dados experimentais ou através de simulações computacionais possibilitam a predição da resposta dinâmica da estrutura à determinadas entradas, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Quando a análise é realizada no domínio do tempo, a estimação da resposta dinâmica é geralmente realizada através de técnicas de desacoplamento modal (Clough, 1993), e neste caso as entradas aplicadas ao sistema são usadas no domínio do tempo. Por outro lado, quando uma análise no domínio da frequência é realizada, as respostas dinâmicas são obtidas através das **Funções de Resposta em Frequência (FRF)** do sistema e das entradas aplicadas à estrutura no domínio da frequência. Neste caso, as séries de Fourier para sinais periódicos, bem como suas derivações para sinais transientes e aleatórios são freqüentemente utilizadas na obtenção do conteúdo em frequência das entradas (Ewins, 1984, McConnell, 1995).

A determinação da resposta dinâmica da estrutura sob estudo requer o conhecimento de um conjunto de entradas (forças) que atuam no sistema. Dois procedimentos podem ser usados na obtenção destes esforços, o método direto e o método indireto. No método direto, as forças aplicadas à estrutura sob estudo são obtidas a partir de medidas experimentais. A aplicação deste procedimento direto usualmente requer que transdutores de força sejam instalados no caminho de forças que se deseja medir (McConnell, 1995). Este procedimento pode ser usado apenas em casos muito especiais, pois além de mudar as condições de contorno da estrutura, os transdutores de força interagem com a mesma, mudando significativamente as características dinâmicas da estrutura (McConnell, 1995, Ewins, 1984, Maia et al, 1997). Então, para evitar estes e outros problemas relacionados à uma medida direta das forças aplicadas à estrutura, surgiram os métodos indiretos de identificação de esforços, que corresponde ao tema de pesquisa abordado nesta dissertação.

O presente trabalho de pesquisa aborda um *problema inverso* em análise modal experimental de estruturas, que corresponde à identificação das entradas (forças) dinâmicas aplicadas à estruturas a partir do conhecimento de certas características do sistema dinâmico em estudo, bem como de suas respostas

dinâmicas que resultam da aplicação destes esforços. Como exemplo, considere a situação mostrada na Figura 1.1, onde o método dos elementos finitos foi usado na identificação dos esforços em um dente de uma engrenagem.

Figura 1.1 – Modelo em elementos finitos usado na identificação de esforços (Shigley, 1991)

Este problema inverso possui uma importância relevada no contexto da análise modal, pois a obtenção de estimativas das entradas do sistema, geralmente desconhecidas, possibilita, em princípio, uma melhor compreensão do comportamento dinâmico da estrutura sob estudo (Hillary, 1982). Outra característica importante deste problema inverso, a qual freqüentemente se dá pouca atenção é o fato de que uma vez obtido um modelo matemático da estrutura, quer seja através de uma identificação modal experimental ou por meio de simulações computacionais, torna-se necessário o conhecimento de *modelos* apropriados de entradas tal que a resposta dinâmica da estrutura possa ser estimada com confiabilidade (Varoto, 1996).

A identificação de esforços a partir da resposta da estrutura tornou-se um tópico de crescente interesse a partir do início da década de 1980. Uma das

investigações pioneiras realizadas nesta área foi o trabalho de HILLARY (Hillary, 1982). Este trabalho abordou o problema da identificação de vários tipos de forças tais como as forças harmônicas e aleatórias. A modelagem das relações de entrada e saída foram realizadas no domínio da frequência através de medidas das FRF dos sistemas estudados. Os resultados reportados nesta investigação apontam para a chamada técnica da Pseudo Inversa (PI) (Hillary, 1984), onde as estimativas das forças são obtidas a partir de uma inversão da matriz de FRF da estrutura sob estudo. Problemas de mau condicionamento numérico no processo de inversão matricial, bem como de efeitos de ruídos experimentais são também apontados neste trabalho. A partir deste trabalho, o tópico despertou o interesse de vários pesquisadores, e vários estudos de identificação de forças no domínio da frequência foram realizados. Alguns destes trabalhos serão reportados adiante na revisão de literatura desta dissertação.

A identificação de esforços dinâmicos no domínio do tempo também tem merecido uma importância destacada no contexto da análise modal. Desde o início da década de 1980, várias técnicas de identificação de forças no tempo vem sendo desenvolvidas, e aplicadas na solução de problemas de engenharia. Uma técnica no domínio do tempo que vem sendo continuamente aplicada na identificação de forças do impulsivas foi inicialmente proposta por GREGORY (Gregory et al, 1986) é a técnica da soma das acelerações ponderadas, ou SWAT, como é mais conhecida. Esta técnica busca identificar uma *força resultante* bem como sua *linha de ação* através de acelerações medidas na estrutura sob estudo e de certos fatores de ponderação definidos a partir de características modais da estrutura. Uma vantagem deste método em relação à técnica da pseudo inversa é que ela geralmente não apresenta os problemas de mau condicionamento numéricos intrínsecos à primeira técnica. Por outro lado, a técnica SWAT fornece apenas uma estimativa da resultante das forças que atuam no sistema, enquanto que a técnica da pseudo inversa dá como resultado um conjunto de forças que, em determinados casos, são boas estimativas das forças que atuam na estrutura sob estudo.

Desta forma, os métodos de identificação indireta de esforços dinâmicos podem ser divididos em dois grupos, os métodos no domínio do tempo, e os métodos

no domínio da frequência. Em cada um destes grupos, os métodos propostos possuem características próprias e a escolha de um determinado método depende, dentre outros, dos dados experimentais disponíveis para a solução do problema inverso.

A próxima sessão realiza uma revisão de literatura sobre o tópico de identificação indireta de esforços.

1.2 – Objetivos da Dissertação

O objetivo principal desta dissertação é o de realizar um estudo sobre o problema inverso de identificação de forças a partir dos dados de resposta de aceleração da estrutura e das características dinâmicas da mesma. Serão estudados dois métodos de identificação indireta de forças, o método SWAT, que utiliza dados de resposta no domínio do tempo, e o método da pseudo-inversa, que utiliza dados de resposta no domínio da frequência. Busca-se com este estudo realizar uma análise comparativa destes dois métodos na identificação de esforços transientes do tipo impacto, levantando-se assim, suas principais vantagens e desvantagens, quanto a aplicação a dados experimentais. Também será estudado a aplicabilidade dos métodos à outras formas de excitação, incluindo sinais transientes do tipo varredura senoidal (comumente denominado de “chirp”) bem como a sinais aleatórios.

O cumprimento destes objetivos requer que inicialmente seja realizado um estudo teórico destes métodos de identificação indireta de esforços, para que em seguida os mesmos sejam aplicados a dados provenientes de simulações computacionais bem como dados experimentais.

A seguir será feita uma revisão bibliográfica sobre métodos de identificação indireta de esforços, bem como suas aplicações em dinâmica estrutural.

1.3 - Revisão Bibliográfica

De acordo com considerações iniciais realizadas na sessão 1.1, os métodos de identificação de esforços existentes encontram-se divididos em dois grupos: os métodos no domínio do tempo e os métodos no domínio da frequência.

1.2.1 – Métodos de Identificação de Esforços no Domínio do Tempo

Dos métodos propostos no domínio dos tempo, a técnica proposta por Gregory (Gregory et al, 1986) tem sido usada na identificação de forças de impacto. Esta técnica é denominada **SWAT** (Sum of The Weighted Accelerations Technique) e é baseada no princípio do movimento do centro de massa (Greenwood, 1984), freqüentemente usado em problemas da dinâmica de corpo rígido. O método **SWAT** produz uma soma de todas as forças e momentos aplicados no centro de massa, ou seja, ele não fornece qualquer informação sobre a distribuição espacial dos esforços aplicados. Este método foi inicialmente aplicado à uma estrutura simples constituída de uma viga suspensa por fios flexíveis, e conduziu à bons resultados na identificação das forças de impacto aplicadas à viga.

A aplicação correta da técnica **SWAT** depende da escolha apropriada de fatores de ponderação (Priddy et al., 1988). Estes fatores, por sua vez, dependem de uma escolha apropriada dos pontos de medida da resposta da estrutura. Priddy (Priddy et al., 1988) apresentou várias técnicas para uma escolha ótima dos fatores de ponderação para um uso adequado da técnica **SWAT**. Essas técnicas, assim como uma medida mais precisa nos modos estruturais de vibração da estrutura sob estudo, especialmente aqueles associados com frequências naturais mais baixas contribuem de forma decisiva para uma melhoria dos resultados obtidos na identificação de forças transientes.

Uma melhoria no método **SWAT** para definição dos fatores de ponderação tanto na predição de forças quanto no de momentos externos foi realizada por Priddy (Priddy et al., 1989). Neste caso, os fatores de ponderação possuem dimensão de

massa, e para o momento possuem dimensão do primeiro momento de massa. Algumas observações devem ser feitas com respeito à localização dos transdutores nas medidas dependentes do tempo dos componentes de momento para todo o corpo, uma vez que os mesmos são proporcionais ao movimento angular corpo rígido. Então, estes transdutores não podem estar localizados sobre linhas nodais de rotação de corpo rígido da estrutura sob estudo.

Carne (Carne et al, 1992) introduziu dois métodos para determinação dos fatores de ponderação na técnica SWAT, os quais são muito semelhantes em teoria. O primeiro método requer o uso da inversa da matriz dos modos de vibrar a qual não é usualmente mau condicionada. Já no segundo, os fatores de ponderação são obtidos a partir de uma solução por mínimos quadrados. Neste caso, os dados de resposta da estrutura são usados como coeficientes da matriz dos modos de vibrar. A teoria foi usada em resultados de um teste realizado para avaliar a energia absorvida por um corpo sujeito a um impacto. Um novo método para estimação dos pesos na técnica SWAT foi também proposto por Carne (Carne et al, 1994), o qual utiliza dados de FRF na estimação dos fatores de ponderação. Posteriormente, os resultados são comparados aos resultados obtidos a partir da inversão das matrizes dos modos de vibrar da estrutura.

Um método para identificação de forças no tempo em múltiplos pontos de excitação sobre placas laminadas retangulares foi proposto por Emboa (Emboa Wu et al., 1994). O método utiliza a teoria clássica de placas do método de Rayleigh–Ritz e do método da superposição modal para obtenção das *funções de Green* em uma transformação no tempo. Os resultados obtidos com esta técnica, tanto teóricos quanto experimentais em uma determinada estrutura foram comparados entre si, apresentando boa concordância, mesmo na presença de ruído nos dados experimentais. Além disso, o método mostrou-se eficaz mesmo na ausência de um modelo modal completo, o que é uma característica de modelos matemáticos obtidos a partir de dados experimentais.

Um método de identificação de forças de impacto através de sensores distribuídos é proposto por Keeyoung (Keeyoung et al, 1996) o qual foi aplicado à estruturas do tipo viga. O método baseia-se na comparação dos dados estimados para modelo do sistema, o qual por sua vez caracteriza-se pela resposta dinâmica da estrutura, com os dados de saída dos sensores. O algoritmo de identificação desenvolvido, segundo os autores, apresentou-se numericamente estável em simulações numéricas, sendo possível a aplicação à estruturas reais e complexas.

Um método para identificação de forças móveis foi proposto por Law (Law et al, 1997). Inicialmente é feita uma modelagem do piso de uma ponte como uma viga bi-apoiada com amortecimento viscoso, e um ou dois pontos de carregamento com a distância entre eixos fixa e de velocidade da carga móvel constante. O método baseia-se na superposição modal. Foram simulados os carregamentos e posteriormente determinada a força de interação veículo/ponte em laboratório. Resultados satisfatórios foram obtidos pela combinação do uso de momentos fletores com dados de aceleração.

Um método no domínio do tempo para a identificação de forças a partir de dados de resposta dinâmica da estrutura sob estudo foi proposto por Genaro (Genaro, G. et al, 1998). O método baseia-se na equações de equilíbrio modal, requerendo como dados de entrada, a aceleração no tempo, assim como um conjunto de auto-soluções (frequências naturais, modos de vibrar, fatores de amortecimento modais e massas generalizadas). Os autores demonstram a eficiência do método através de simulações numéricas, simulando até mesmo efeitos de dados experimentais de aceleração incompletos e efeito de níveis de ruídos sobre os resultados. O método apresentou resultados satisfatórios mesmo quando na presença de erros de origem aleatória contaminando os dados de entrada do algoritmo de identificação. Foi observado a capacidade de identificação da força aplicada à diferentes localizações sobre a estrutura e o bom condicionamento numérico das equações.

1.2.2 – Métodos de Identificação de Esforços no Domínio da Frequência

Como dito anteriormente, os métodos de identificação de esforços no domínio da frequência utilizam as FRF da estrutura sob estudo, bem como um conjunto de respostas da estrutura no domínio da frequência que são consequência da ação dos esforços a serem identificados. Estes métodos apresentam algumas vantagens e também desvantagens em relação aos métodos de identificação de forças no domínio do tempo. A seguir serão relatados alguns trabalhos relacionados a estes métodos.

Um dos métodos pioneiros de identificação de esforços no domínio da frequência é o chamado método da pseudo inversa (**PI**) (Hillary, B., 1983). Hillary conduziu um série de simulações teórico-experimentais para a identificação de esforços atuantes sobre estruturas, realizando entre outras, uma investigação sobre os efeitos de ruído experimental nos vetores modais na identificação de forças pontuais.

Um método desenvolvido por Elliott (Elliott et al. , 1988) no qual foi proposta a identificação de forças utilizando-se a decomposição em valores singulares da matriz de FRF da estrutura. Este método permite a redução dos níveis de ruído presentes nos dados de resposta em frequência da estrutura. Entretanto, a técnica não produz uma redução significativa do nível de ruído se os dados experimentais não apresentam uma relação sinal/ruído suficientemente alta.

Bell (Bell et al. , 1988) comparou o resultado de cinco diferentes métodos no domínio da frequência através do uso de modelos analíticos através de simulação e comparação com dados experimentais. O chamado método da densidade espectral cruzada demonstrou as melhores estimativas de forças tanto analíticas quanto experimentais.

Um método utilizando o chamado elemento-espectral combinado com um algoritmo estocástico (aleatório) genético foi desenvolvido por Doyle (Doyle, 1994) com o objetivo de localizar os pontos de impacto em uma dada estrutura. Os dados

teóricos foram comparados com os experimentais provenientes de uma viga de alumínio. O algoritmo é um processo iterativo que tenta melhorar o conjunto inicial de dados aleatórios e uma função avaliadora, resultando em uma correlação robusta na identificação de forças, graças a utilização do elemento-espectral. A escolha do algoritmo estocástico segundo o autor deve-se ao fato de permitir a incorporação de informações adicionais ou restrições, e também pelo fato de o algoritmo apresentar poucos problemas no processamento paralelo, o que o torna adequado para uso em processadores múltiplos.

É proposto por Lee(Lee, 1995) um método no domínio da frequência para a regularização dos dados de entrada, na tentativa da redução do erro na determinação da força. Em seu trabalho ele conduz uma investigação das características da inversa da função transferência e erros na FRF. Os erros na determinação indireta de forças foram analisados estatisticamente em faixas especiais de frequência, e onde os erros são muito grandes foi pesquisado o número de medidas de resposta e forças aplicadas. Comprovou-se que os erros próximo à inversa do primeiro polo de frequência é devido principalmente à deficiência do rank da sub-matriz de FRF. Já os erros nas vizinhanças das frequências de ressonância provem de erros de medidas presentes nas FRF.

O'Callahan (O'Callahan et al. 1996) propõe um método de identificação de forças e seus pontos de aplicação o qual requer acuracidade dos dados experimentais na forma de espectro de frequência, desenvolvimento e sistemas de matrizes de transferências de FRF's medidas e realização de uma inversa generalizada das matrizes de transferência relativa ao espectro de saída. Uma vantagem desta técnica é o fato de se realizar aproximações na determinação das entradas que são inacessíveis e sua maior desvantagem reside no fato de que quando as localizações de entrada são desconhecidas e o processo sendo inverso, os resultados podem depender das condições da inversa generalizada. Os autores conduziram testes sobre condições na quais se incluíram localizações relativas das forças para as respostas de saída, e também para o caso onde se excluíram localizações reais de forças para o conjunto de entrada dos diversos graus de liberdade considerados. Deste estudo, comprovou-se

que, quando as possíveis entradas foram incluídas os resultados são satisfatórios, e quando entradas reais foram excluídas os resultados se demonstraram dependentes das localizações relativas e foram-se então assumidas determinadas localizações de entrada. Não foi incluso o estudo de ruído uma vez que este não era o objeto do trabalho, e se estes forem incluídos as reduções de entrada deveriam ser feitas especialmente nas regiões próximas às frequências de ressonância da estrutura.

Karlsson (Karlsson, 1996) propõe uma técnica de identificação de carregamentos estruturais externos a partir de medidas de resposta harmônicas. O método realiza simulações numérica para ilustrar a sensibilidade no processos inversos a ruídos e a erros de modelagem da estrutura, sobre a suposição de uma relação linear entre as amplitudes desconhecidas de uma força harmônica e a resposta discreta de posições de medidas. É sugerido a utilização do número de condicionamento da matriz de função de transferência como uma indicação da acuracidade de medida direta da amplitude das forças em uma dada frequência, este se torna assim uma ferramenta importante para investigação da possibilidade de medida indireta de uma força para a performance de qualquer medida real.

Duas técnicas que incluem e medem os efeitos de momentos e rotações na modelagem de forças de transmissibilidade foram desenvolvidas por STEBBINS (Stebbins, M.A. et al., 1996). O primeiro método trata a estrutura como uma massa rígida no ponto de interesse, o qual é então excitado e a resposta é medida. A partir destes dados de resposta, e conhecendo-se a geometria da estrutura calcula-se as FRF's, sendo que o efeito de massa rígida em sistemas dinâmicos deve ser removido utilizando-se a técnica proposta pelos autores e denominada PBC ("Perturbed Boundary Conditions"). Já o segundo método de estimação de forças e momentos é baseado na estimação de uma FRF da estrutura a partir de uma célula de carga de seis eixos de medidas. A construção, calibração e aplicação desta célula de carga foi apresentada pelos autores, bem como um gráfico da sensibilidade do cristal para o transdutor em questão.

Okubo (Okubo, N. et al. , 1996) sugere um método para predição de forças de transmissibilidade entre componentes sobre operação para redução de vibração e ruído, estas reduções já mencionadas são conseguidas através de mudanças estruturais. Primeiramente, através da análise modal procede-se à medidas das FRF para os principais componentes, nos quais se incluem as principais fonte de vibração e em seguida no sub-componentes que geralmente não são fontes de vibração e ruído. Os componentes são então conectados através de um número finitos de coordenadas de interface. Por fim, é investigada a localização dos pontos de contato onde as forças transmitidas sejam as menores possíveis entre componentes principais e sub-componentes. O método apresentou resultados satisfatórios para uma estrutura simples quando comparado com um convencional que providenciou redução em um único ponto e em uma única direção, demonstrando-se válido também para estrutura mais complexas como a de uma motocicleta.

Varoto (Varoto, P.S. et al , 1997) demonstrou a importância da utilização das densidades espectrais cruzadas de aceleração na identificação de forças aleatórias. Os autores demonstraram a correlação entre as forças em um ensaio de múltipla excitação para uma viga livre-livre. Os resultados mostraram que, quando as densidades espectrais cruzadas de aceleração não são usadas na solução do problema inverso, grandes erros surgem nas forças aleatórias estimadas a partir do método da pseudo-inversa.

1.4 – Organização da Dissertação

Após este capítulo inicial no qual se tenta dar uma abordagem inicial sobre o trabalho ,e sobre o quê é e no que se insere a identificação indireta de forças, assim sendo os trabalhos desenvolvidos e os a serem desenvolvidos estão propostos da forma que será descrita a seguir :

Métodos de identificação no domínio do tempo serão discutidos no capítulo 2, onde se dará atenção em especial a técnica SWAT , discutindo-se sobre a sua aplicabilidade e principais vantagens e desvantagens da técnica.

A formulação da técnica da pseudo inversa bem como o tratamento do problema de mau condicionamento durante os processos de inversão das matrizes de respostas (FRFs) de um sistema é tratado no capítulo 3 deste trabalho.

No capítulo 4 trata da investigação numérica realizada através de simulação de um sistema através das técnicas de pseudo-inversa e SWAT e todos os fluxogramas dos programas e subrotinas. Serão realizadas simulações numéricas

O capítulo 5 trata de uma análise experimental para o processo de identificação indireta de esforços. Serão abordados métodos no tempo e na frequência.

O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e o capítulo 7 a bibliografia.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE ESFORÇOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

O objetivo principal deste capítulo é discutir o problema da identificação indireta de esforços no domínio do tempo. Inicialmente serão feitas algumas considerações enfatizando-se que a identificação indireta de esforços representa um problema de deconvolução no tempo. Em seguida será discutida uma técnica de identificação de forças que pode ser aplicada à sistemas de uma entrada e uma saída. A segunda e mais importante sessão do capítulo descreve duas versões da técnica SWAT, que utiliza dados da resposta da estrutura na identificação da resultante das forças que atuam sobre a mesma.

2.1.- Deconvolução no Domínio do Tempo

A deconvolução no domínio do tempo é uma técnica que pode ser usada na solução do problema inverso quando uma única força é aplicada a um determinado ponto da estrutura. Seja $f(t)$ a força desconhecida que atua no sistema e $x(t)$ o respectivo deslocamento resultante. Considerando-se o sistema linear e admitindo-se nulas todas as condições iniciais, a relação entre a entrada e a saída é dada no domínio do tempo pela *integral de Duhamel* (Craig, 1981)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

onde t representa uma variável de integração e $h(t - \tau)$ é a função resposta ao impulso unitário do sistema. A Equação (2.1) estabelece que a resposta do sistema é dada por uma soma ponderada dos valores da força excitadora $f(t)$ para todos os instantes no intervalo de tempo considerado. Neste caso, a função resposta ao impulso unitário $h(t - \tau)$ representa o fator de ponderação. Admitindo-se que a resposta ao impulso seja nula para todos os valores menores ou iguais a zero (sistema causal !), a Equação (2.1) pode ser rescrita como:

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Uma análise mais detalhada da Equação (2.1) ou de sua versão simplificada, Equação (2.2) revela algumas características importantes para o presente estudo. O deslocamento de saída $x(t)$ é geralmente obtido através de medidas experimentais, através de acelerômetros montados em pontos da estrutura previamente escolhidos. As funções de resposta ao impulso unitário também são geralmente obtidas através dos chamados ensaios modais (Ewins, 1984). Desta forma, tanto o deslocamento quanto a resposta ao impulso unitário representam grandezas que podem ser obtidos através de técnicas experimentais apropriadas. Então, a incógnita do processo inverso é a

amplitude da força bem como seu ponto de aplicação sobre a estrutura. Daí o fato da identificação indireta da força $f(t)$ representar um processo de deconvolução, visto que, a obtenção de uma estimativa de $f(t)$ a partir dos dados medidos requer que uma “inversão” da integral de convolução mostrada na Equação (2.2). Uma estimativa da força $f(t)$ pode ser obtida a partir de uma discretização temporal desta última equação.

Seja Δt o período uniforme de amostragem no domínio do tempo dos sinais correspondentes ao deslocamento $x(t)$ e a força $f(t)$. As amostras obtidas em n instantes de tempo são designadas respectivamente por $x(i\Delta t)$ e $f(i\Delta t)$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. De maneira análoga, a resposta ao impulso unitário pode ser discretizada sendo a i -ésima amostra representada por $h[(k-i)\Delta t]$. A partir desta discretização temporal, a Equação (2.2) pode ser rescrita como

$$x(k\Delta t) = \sum_{i=0}^k h[(k-i)\Delta t] f(i\Delta t) \Delta t \quad (2.3)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. A notação mostrada na Equação (2.3) pode ser simplificada escrevendo-se

$$x_i = x(i\Delta t)$$

$$f_i = f(i\Delta t)$$

$$h_{k-i} = h[(k-i)\Delta t]$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Então, utilizando a notação definida acima, a Equação (2.3) é rescrita como

$$x_k = \sum_{i=0}^k h_{k-i} f_i \quad (2.4)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Para obter as equações relacionando os valores da força excitadora com os respectivos valores da resposta para cada instante, a Equação (2.4) pode ser escrita de forma expandida, como um conjunto de equações da seguinte maneira

$$x_0 = h_0 f_0 \quad (2.5a)$$

$$x_1 = h_1 f_0 + h_0 f_1 \quad (2.5b)$$

$$x_2 = h_2 f_0 + h_1 f_1 + h_0 f_2 \quad (2.5c)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_{n-1} = h_{n-1} f_0 + h_{n-2} f_1 + \dots + h_0 f_{n-1} \quad (2.5d)$$

respectivamente para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

A partir das Equações (2.5) uma estimativa da força excitadora pode ser obtida para cada instante escrevendo-se

$$f_0 = \frac{x_0}{h_0} \quad (2.6a)$$

$$f_1 = \frac{x_1 - f_0 h_1}{h_0} \quad (2.6b)$$

$$f_2 = \frac{x_2 - f_0 h_2 - f_1 h_1}{h_0} \quad (2.6c)$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1} = \frac{x_{n-1} - f_0 h_{n-1} - \dots - f_{n-2} h_1}{h_0} \quad (2.6d)$$

com $h_0 \neq 0$

Embora o procedimento mostrado nas Equações (2.6) seja simples e rápido do ponto de vista computacional, ele não conduz a resultados satisfatórios (Genaro, 1997), uma vez que as operações matemáticas envolvidas no procedimento de cálculo representam diferenças entre parcelas oriundas a partir de dados experimentais, que

por sua vez, são afetadas por ruído presente nos dados de resposta e na função resposta ao impulso unitário.

Uma alternativa para a reconstrução dos valores da força excitadora consiste em rescrever as Equações (2.6) na forma de um sistema de equações na forma matricial, que será resolvido simultaneamente para todos os valores amostrados da força excitadora. Tal sistema é dado por

$$\{x\} = [H]\{f\} \quad (2.7)$$

onde :

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

e também

$$[H] = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_0 \end{bmatrix}$$

Assim, com a solução do sistema de equações simultâneas mostrado na Equação 2.7 pode-se obter estimativas melhores para os valores da força excitadora, visto que pode-se empregar técnicas de regularização na solução do sistema de equações, como é o caso da decomposição em valores singulares (SVD, *Singular Value Decomposition*), assim como outras técnicas numéricas que tem como objetivo

melhorar o condicionamento numérico do processo inverso. Esta técnica pode ser também aplicada a sistemas de múltipla entradas e múltiplas saídas (Genaro, 1997).

2.2 - A Técnica SWAT

A técnica **SWAT** (*Sum of the Weighted Accelerations Technique*) (Gregory et al., 1986) é uma técnica de identificação de esforços dinâmicos baseada no princípio do movimento do centro de massa, comumente usada na solução de problemas de dinâmica de corpos rígidos. Esta técnica emprega sinais de aceleração medidos no domínio do tempo no processo de identificação e requer o uso de certos fatores de ponderação no processo de obtenção da resultante das forças (e possivelmente de sua linha de ação) que atuam na estrutura sob estudo.

As Figuras 2.1 e 2.2 ilustram o procedimento para a aplicação da técnica SWAT. A Figura 2.1 ilustra uma estrutura instrumentada em N pontos por meio de sensores que tem por função medir as acelerações oriundas de um conjunto desconhecido de forças externas aplicadas à estrutura. Uma escolha adequada da posição dos N acelerômetros é de fundamental importância para o sucesso da técnica, e esta questão do posicionamento de sensores tem sido bastante discutida no contexto da análise modal experimental. A Figura 2.1 mostra ainda que a técnica assume a existência de uma força resultante cuja direção passa pelo centro de massa CM da estrutura. É justamente uma estimativa desta força que a técnica SWAT busca fornecer.

Figura 2.1 – Exemplo de estrutura instrumentada para técnica SWAT

A Figura 2.2 mostra um fluxograma onde são ilustrados os principais passos na identificação da resultante das forças $F(t)$. Neste caso, as N acelerações medidas na estrutura quando sob a ação dos esforços desconhecidos são multiplicadas por fatores de ponderação W_i , $i = 1, \dots, N$, e então entram em um somatório que culmina com a obtenção de uma estimativa da força resultante.

Figura 2.2 – Fluxograma ilustrando a técnica SWAT

As equações de movimento para um sistema linear possuindo N graus de liberdade podem ser escritas no domínio do tempo e na forma matricial como

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (2.8)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes quadradas e simétricas de ordem N de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, respectivamente. As matrizes de massa e rigidez são geralmente obtidas através de uma técnica de discretização, como por

exemplo, o método dos elementos finitos. Os vetores $\{x\} = \{x(t)\}$ e $\{f\} = \{f(t)\}$, $N \times 1$, contém respectivamente os deslocamentos da estrutura e as forças externas que atuam na mesma, e ambos são escritos em termos de variáveis geométricas. Neste caso, o vetor de forças externas aplicadas à estrutura representa a incógnita na Equação (2.8), enquanto que o vetor de deslocamentos e suas derivadas são obtidos experimentalmente, como mostrado na Figura 2.1.

A fim de se desenvolver a teoria da técnica SWAT, torna-se necessário inicialmente obter-se o modelo modal da estrutura que é de fundamental importância na obtenção de uma estimativa do vetor $\{f\}$. Como dito anteriormente, o modelo modal consiste das frequências naturais, dos modos de vibrar e dos fatores de amortecimento modais da estrutura. Inicialmente será feita a determinação das frequências naturais e dos modos de vibrar do sistema. Posteriormente, serão feitas algumas considerações quanto aos fatores de amortecimento modais.

Na determinação de frequências naturais e modos de vibrar, a Equação (2.8) é rescrita como

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.9)$$

onde neste caso fez-se $[C] = 0$ e $\{f\} = 0$. A solução da Equação (2.9) pode ser escrita como

$$\{x\} = \{\phi\}e^{\lambda t} \quad (2.10)$$

onde $\{\phi\}$ é um vetor de componentes reais e λ um número complexo. Substituindo-se a solução dada pela Equação (2.10) na Equação (2.9) tem-se

$$[[M]\lambda^2 + [K]]\{\phi\} = \{0\} \quad (2.11)$$

A Equação (2.11) representa um autoproblema quadrático (Clough, 1993), cuja solução fornece as frequências naturais (relacionadas com os autovalores) e os modos de vibrar da estrutura (autovetores). Uma solução diferente da trivial para a Equação (2.11) é obtida se e somente se o determinante da equação característica do sistema iguala-se a zero, ou seja,

$$|[M]\lambda^2 + [K]| = 0 \quad (2.12)$$

A solução da equação acima fornece os autovalores do sistema. Como exemplo, considere o caso onde o sistema possua apenas um grau de liberdade. Nesta situação, a Equação (2.12) reduz-se a

$$M \lambda^2 + K = 0 \quad (2.13)$$

cujas soluções fornecem o seguinte autovalor

$$\lambda = j \omega_n \quad (2.14)$$

com $j = (-1)^{1/2}$. A constante ω_n é a frequência natural do sistema de um grau de liberdade, e é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.15)$$

Para o caso do sistema possuindo N graus de liberdade, existem N autovalores e portanto N frequências naturais correspondentes, de acordo com a Equação (2.14). Cada autovalor quando substituído na Equação (2.11) fornece um autovetor que corresponde ao modo de vibrar relativo à frequência natural considerada.

Desta forma, calcula-se as N frequências naturais a partir dos autovalores bem como os N modos de vibrar da estrutura. Cada modo de vibrar representa um vetor

coluna de ordem $N \times 1$, e assim, os modos de vibrar podem ser agrupados na chamada matrix modal do sistema (Clough, 1993), dada por

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \{\phi\}_3 \dots \{\phi\}_N] \quad (2.16)$$

Para o caso de uma estrutura livre no espaço, os primeiros seis vetores modais correspondem aos chamados modos de vibrar de corpo rígido da estrutura. Estes modos de vibrar possuem frequências naturais nulas ($\lambda_r = 0$, $r = 1, \dots, 6$) e seus elementos representam deslocamentos normalizados dos graus de liberdade da estrutura para os quais não ocorre qualquer forma de deformação da estrutura sob estudo. Desta forma, a matriz modal pode ser rescrita diferenciando-se os modos de vibrar de corpo rígido dos demais modos de vibrar da estrutura

$$[\Phi] = [\{\phi^r\}_1 \{\phi^r\}_2 \dots \{\phi^r\}_6 \{\phi\}_7 \dots \{\phi\}_N] \quad (2.17)$$

Desta forma, tendo-se obtido as frequências naturais e os respectivos modos de vibrar da estrutura sob estudo, pode-se proceder o desenvolvimento da técnica SWAT com o objetivo de identificar-se a força externa aplicada ao sistema.

Segundo Clough et al. (Clough, 1993), a resposta do sistema pode ser escrita como uma combinação linear dos modos de vibrar

$$\{x\} = [\Phi]\{y\} \quad (2.18)$$

onde $\{y\} = \{y(t)\}$ é um vetor $N \times 1$ que corresponde à resposta do sistema nas chamadas coordenadas normais ou modais (Clough, 1993, Ewins, 1984). A Equação (2.18) estabelece então que, a resposta da estrutura nas coordenadas geométricas $\{x\}$ é obtida mediante uma transformação linear, tendo a matrix dos modos de vibrar do sistema não amortecido $[\Phi]$ como o operador linear que transforma a resposta em coordenadas modais (geométricas) em coordenadas geométricas (modais).

Substituindo-se a Equação (2.18) na Equação (2.8), têm-se

$$[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [C][\Phi]\{\dot{y}\} + [K][\Phi]\{y\} = \{f\} \quad (2.19)$$

Pré – multiplicando-se a Equação (2.19) pelo transposto do i -ésimo modo de corpo rígido $\{\phi^r\}_i$, tem-se :

$$\{\phi^r\}_i^T [M][\Phi]\{\ddot{y}\} + \{\phi^r\}_i^T [C][\Phi]\{\dot{y}\} + \{\phi^r\}_i^T [K][\Phi]\{y\} = \{\phi^r\}_i^T \{f\} \quad (2.20)$$

Considera-se neste caso que para os modos de corpo rígido, as forças elásticas e de amortecimento sejam nulas ou desprezíveis, ou seja

$$\{\phi^r\}_i^T [K] = \{0\} \quad (2.21)$$

$$\{\phi^r\}_i^T [C] = \{0\} \quad (2.22)$$

Desta forma, utilizando-se as Equações (2.21) e (2.22), a Equação (2.20) pode ser escrita em termos de um balanço entre as forças de inércia e a força externa, ou seja

$$\{\phi^r\}_i^T [M][\Phi]\{\ddot{y}\} = \{\phi^r\}_i^T \{f\} \quad (2.23)$$

O lado esquerdo da igualdade mostrada na Equação (2.23) pode ainda ser simplificado se a propriedade de ortogonalidade dos modos normais do sistema não amortecido em relação à matriz de massa for utilizada. Esta propriedade estabelece que (Clough, 1993)

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = \text{diag}[m] \quad (2.24)$$

onde os elementos da matriz diagonal $[m]$ de ordem N resultante são as massas modais ou massas generalizadas do sistema. Em particular, quando esta relação de ortogonalidade é usada em relação ao i -ésimo modo de vibrar de corpo rígido, obtém-se o seguinte resultado

$$m_i^r \ddot{y}_i = \{\Phi^r\}_i^T \{f\} \quad (2.25)$$

onde m_i^r representa a massa modal associada ao i -ésimo modo de vibrar de corpo rígido. O produto escalar mostrado no lado direito da Equação (2.25) representa a força modal associada ao i -ésimo modo de corpo rígido. Deve-se salientar que, que este produto escalar resultar nulo (o que indica uma relação de ortogonalidade entre o i -ésimo modo de corpo rígido e o vetor de forças externas aplicadas à estrutura) a Equação (2.25) possui solução nula para a aceleração modal do i -ésimo modo de corpo rígido, e não possui solução alguma para a força externa, uma vez que sua determinação é o objetivo do presente desenvolvimento. Assim, a solução para a força externa através da Equação (2.25) requer o conhecimento da massa modal associada ao i -ésimo modo de corpo rígido, bem como da aceleração modal e do modo de vibrar do i -ésimo corpo rígido. Estes dados são geralmente obtidos através de dados experimentais. Entretanto, a Equação (2.25) permite apenas que uma estimativa da força resultante e sua linha de ação em relação ao centro de massa da estrutura seja determinada. A razão disto reside no fato de que a Equação (2.25) emprega apenas os modos de vibrar de corpo rígido da estrutura, enquanto que em uma situação real, a estrutura apresenta deformações elásticas e dissipação de energia, o que por sua vez envolvem os modos de vibrar elásticos da estrutura sob estudo.

Uma dificuldade adicional em se usar a Equação (2.25) reside no fato de que na prática, os dados efetivamente mensuráveis são as acelerações absolutas da estrutura nas coordenadas geométricas x , e de acordo com a Equação (2.25) as acelerações nas variáveis modais são requeridas para a estimativa da força resultante. A fim de solucionar este problema, define-se o chamado *grau de liberdade generalizado* (ou *grau de liberdade SWAT*) a partir de um conjunto de acelerações medidas na estrutura $\{\ddot{z}(t)\}$, $M \times 1$, onde M representa o número de acelerômetros distribuídos pela estrutura, e que definem a base modal truncada experimental. O grau de liberdade SWAT é então definido por, (Bateman, et al. 1992):

$$\ddot{u}(t) = \sum_{p=1}^M w_p \ddot{z}_p(t) = \{w\}^T \{\ddot{z}(t)\} \quad (2.26)$$

onde o vetor $\{w\}$, $M \times 1$, contém fatores de ponderação (ou simplesmente pesos) a serem determinados.

Em seguida, o princípio da superposição modal expresso pela Equação (2.18) prevê que as acelerações no espaço físicos podem ser escritas como combinações lineares dos L primeiros modos de vibrar da estrutura, de acordo com:

$$\{\ddot{z}(t)\} = [\Phi] \{\ddot{y}(t)\} \quad (2.27)$$

onde neste caso a matrix $[\Phi]$ é $M \times L$ e o vetor $\{\ddot{y}(t)\}$ é $L \times 1$. Substituindo-se a Equação (2.27) na Equação (2.26), obtém-se o seguinte resultado

$$\ddot{u}(t) = \{w\}^T [\Phi] \{\ddot{y}(t)\} \quad (2.28)$$

Realizando uma substituição modal reversa com base na Equação (2.25) tem-se

$$\{w\}^T \{\ddot{x}(t)\} = \{\Phi\}_i^T \{f\} \quad (2.29)$$

A Equação (2.29) é a equação básica para a aplicação do SWAT. A determinação do vetor de ponderação é feita pela multiplicação da Equação (2.28) pela matriz dos modos de vibrar, daí tem-se :

$$\{w\}^T [\Phi] = \{\Phi\}_i^T [m][\Phi] \quad (2.30)$$

O lado direito da Equação (2.30) é um vetor coluna com zeros exceto na entrada correspondente ao modo de corpo rígido, o qual produz a massa modal, m_i , daí tem-se de uma forma generalizada :

$$[\Phi]^T \{w\} = \begin{bmatrix} m_i \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Resolvendo esta equação linear obtém-se os pesos necessários para a reconstrução da força excitadora. Deve ser observado que o número de pesos deve ser no mínimo o mesmo número de modos sob consideração a fim de se proceder a uma solução de forma completa e determinada.

2.2.1.- SWAT Modificado (Baseado nas Coordenadas Modais)

Este método emprega as equações de movimento no espaço modal, as respostas em aceleração amostradas no tempo, e as características modais da estrutura: frequências naturais, fatores de amortecimento, massas generalizadas e autovetores (modos de vibrar).

Seja um sistema mecânico linear de N graus de liberdade, simétrico, possuindo amortecimento do tipo viscoso proporcional, dado pelas seguintes equações de movimento sob a forma matricial :

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.32)$$

Realizando um desacoplamento modal na Equação (3.32) temos para o i -ésimo modo de vibrar

$$m_i \{\ddot{y}(t)\} + c_i \{\dot{y}(t)\} + \lambda_i m_i \{y(t)\} = \Phi_i^T \{f(t)\} \quad (2.33)$$

ou

$$\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_E(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad (2.34)$$

onde

$\{f_I(t)\}$ é o vetor das forças de inércia ;

$\{f_D(t)\}$ é o vetor das forças de amortecimento modais ;

$\{f_E(t)\}$ é o vetor das forças elásticas modais.

Da determinação experimental obtemos os vetores de forças inerciais, amortecimento e elásticas, possibilitando a determinação de $f(t)$, através de

$$\{f(t)\} = [\Phi]^{-T} (\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_E(t)\}) \quad (2.35)$$

Uma vez que trabalhos experimentais raramente obtém-se dados completos para os autovalores complexos e componentes dos autovetores (coordenadas instrumentadas) devido às dificuldades e impossibilidades de instrumentação de toda a estrutura, e se supormos que as coordenadas onde as forças são aplicadas constituem um subconjunto das coordenadas nas quais as componentes dos autovetores foram identificados, podemos escrever a eq. (2.29) da seguinte forma

$$\{\hat{f}(t_i)\} = ([\hat{\Phi}]^T)^+ (\{\hat{f}_I(t_i)\} + \{\hat{f}_D(t_i)\} + \{\hat{f}_E(t_i)\}) \quad (2.36)$$

onde

$$([\hat{\Phi}]^T)^+ \text{ é a pseudo-inversa de } [\hat{\Phi}]^T \text{ e } [\hat{\Phi}]^T \in R^{n,c}.$$

Assim admitindo que a aceleração tenha sido amostrada em um número “ z ” de instantes, pode-se realizar integrações sucessivas para determinação das velocidades e deslocamentos, seguindo da transformação dos mesmos para a base no espaço modal, e obtenção da força $\{\hat{f}(t_i)\}$ para cada instante de tempo “ i ” de “ z ” para os quais foram realizadas coleta de dados da resposta estrutural do sistema em análise.

Este método explora tanto os modos de corpo rígido quanto os modos elásticos da estrutura, o quê permite a sua aplicação a sistemas sob quaisquer condições de contorno, ao contrário do método SWAT original que é aplicável à estruturas sob condições de contorno livre-livre. Além de permitir a identificação das forças excitadoras em diferentes pontos de aplicação. Evita-se também trabalhar com matrizes mal condicionadas o quê geralmente se torna um problema durante processos de inversão , ao invés procura-se trabalhar com a matriz modal que se comporta de maneira numericamente melhor (GENARO, 1996).

CAPÍTULO 3

IDENTIFICAÇÃO DE ESFORÇOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

O objetivo deste capítulo é o de descrever os principais métodos de identificação de esforços dinâmicos no domínio da frequência. Será discutido o método da pseudo-inversa, que requer como dados de entrada a matriz das Funções de Resposta em Frequência (FRF) do sistema, normalmente composta das Acelerâncias, e também das acelerações no domínio da frequência. Estes dados possibilitam a determinação de um conjunto de pseudo-forças, que em determinadas condições aproximam-se das forças reais que atuam no sistema. Será discutida a aplicação da técnica da pseudo-inversa para sinais determinísticos e aleatórios. Também serão discutidos alguns aspectos quanto a aplicabilidade desta técnica a sinais experimentais, que geralmente são contaminados por ruídos. A técnica da pseudo-inversa é um método que oferece dificuldades numéricas, uma vez que requer que uma matriz retangular seja invertida, o que pode causar problemas de condicionamento numérico.

3.1 – Equações de Movimento no Domínio da Frequência

No Capítulo 2 foram discutidos alguns dos principais métodos de identificação de esforços dinâmicos no domínio do tempo. Em particular, foi discutida a técnica SWAT, que considera que a estrutura sujeita à esforços desconhecidos possa ser descrita por um conjunto de equações diferenciais de acordo com a Equação (2.8), repetida aqui por conveniência:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.1)$$

onde as matrizes características desta equação são matrizes quadradas de ordem N . O conjunto de equações no domínio do tempo mostrado na Equação (2.8) pode ser transformado para o domínio da frequência aplicando-se a transformada de Laplace (Inman, 1994, Craig, 1981) à ambos os lados da Equação acima considerando-se nulas todas as condições iniciais. O resultado desta operação é dado pela seguinte equação

$$\{X(s)\}[[M]s^2 + [C]s + [K]] = \{F(s)\} \quad (3.2)$$

onde $F(s)$ e $X(s)$ são respectivamente as transformadas de Laplace de $f(t)$ e de $x(t)$, e s é a variável de Laplace. A Equação (3.2) pode ser escrita para a solução $X(s)$ como

$$\{X(s)\} = [[M]s^2 + [C]s + [K]]^{-1} \{F(s)\} \quad (3.3)$$

Para transformar a Equação (3.3) para o domínio da frequência faz-se $s = j\omega$, sendo $j = (-1)^{1/2}$ e ω a frequência de excitação. O resultado é o seguinte

$$\{X(j\omega)\} = [[K] - [M]\omega^2 + j\omega[C]]^{-1} \{F(j\omega)\} \quad (3.4)$$

A Equação (3.4) define as relações de entrada e saída para o sistema linear com N graus de liberdade no domínio da frequência. Esta equação fornece a resposta do sistema a um conjunto de excitações harmônicas, de amplitudes e ângulos de fase não necessariamente iguais, mas de mesma frequência de excitação. A Equação (3.4) pode ser escrita utilizando-se uma notação compacta como

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (3.5)$$

onde $[H(\omega)]$ é a matrix quadrada de ordem N das **Funções de Resposta em Frequência** do sistema. Esta matriz contém as FRFs que normalmente são obtidas através de ensaios modais e técnicas de identificação modal no domínio da frequência e também no tempo, através das respostas ao impulso unitário e transformadas de Fourier (Ewins, 2000).

Uma maneira alternativa e muito interessante de se obter as características da resposta do sistema à uma excitação harmônica é através do conceito de superposição modal (Clough, 1993), mostrado no capítulo anterior através da Equação (2.18). Este princípio estabelece que a resposta harmônica do sistema no domínio do tempo é dada pela seguinte expressão

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + j 2\zeta_r \omega_r \omega)} \{F(\omega)\} e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

onde $\{\phi\}_r$ é o modo normal de vibração, m_r é a massa modal, ω_r a frequência natural e ζ_r o fator de amortecimento modal, pertencentes ao r -ésimo modo de vibrar do sistema. Estes parâmetros são chamados de parâmetros modais do sistema e são dependentes das características de massa, rigidez e amortecimento.

Da Equação (3.5) pode-se obter a expressão da matriz de resposta em frequência do sistema, que é dada por

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j 2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.7)$$

e da Equação (3.6) nota-se que o produto da matriz $[H(\omega)]$ pelo vetor de amplitudes da força de excitação $\{F(\omega)\}$ corresponde à amplitude da resposta do sistema no domínio da frequência, Equação (3.5).

Um elemento da matriz $[H(\omega)]$, $H_{pq} = H_{pq}(\omega)$ é definido como o quociente entre a resposta do sistema no ponto de coordenada p pela força de excitação aplicada ao ponto de coordenada q , ambos no domínio da frequência. Matematicamente,

$$H_{pq}(\omega) = \frac{X_p(\omega)}{F_q(\omega)} \quad (3.8)$$

e da Equação (3.7) um elemento da matriz de FRF pode ser escrito como

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rp} \phi_{rq}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j 2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.9)$$

Se a saída do sistema $X_p(\omega)$ é o deslocamento, a FRF $H_{pq}(\omega)$ recebe o nome de receptância. Duas outras FRF bastante utilizadas são a mobilidade e aceleração, que são definidas de acordo com a Equação (3.8), tomando-se como variáveis de resposta a velocidade e a aceleração, respectivamente. Estas duas FRF relacionam-se com a receptância através das seguintes relações

$$M_{pq}(\omega) = j\omega H_{pq}(\omega) \quad (3.10)$$

$$A_{pq}(\omega) = -\omega^2 H_{pq}(\omega) \quad (3.11)$$

A matriz das FRFs do sistema $[H(\omega)]$ é uma matriz quadrada de ordem N , ou seja o mesmo número de graus de liberdade do sistema. Esta matriz é também dependente da frequência de excitação ω , o que faz com que cada um de seus elementos seja uma função da frequência de excitação. Esta matriz pode ser escrita na forma expandida como

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \cdots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Os elementos da diagonal principal da matriz $[H(\omega)]$ são as FRF de ponto $H_{pp}(\omega)$, $p=q$, para as quais a excitação e a resposta são medidas no mesmo ponto. Neste caso, a Equação (3.9) reduz-se a

$$H_{pp}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rp}^2}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j 2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.13)$$

A Figura 3.1 mostra uma aceleração de ponto para uma estrutura típica de uma viga em suspensão “livre-livre”. Observa-se a presença de anti-ressonâncias (pontos de mínimo locais) entre frequências naturais consecutivas, uma ocorrência típica em FRF de ponto.

Já os elementos fora da diagonal principal da matriz $[H(\omega)]$ são as FRF de transferência da estrutura sob estudo. Neste caso $p \neq q$ e a expressão da FRF é aquela mostrada na Equação (3.9). A Figura 3.2 mostra duas acelerações de transferência para uma estrutura típica de uma viga de aço em suspensão “livre-livre”. Conforme pode-se observar nesta figura, a ocorrência da anti-ressonância não necessariamente está condicionada à sucessão das frequências naturais, ou seja, entre duas frequências naturais consecutivas não necessariamente existe uma anti-ressonância, como é o caso típico de FRF de ponto.

Figura 3.1 – FRF de ponto para uma viga livre-livre

Figura 3.2 – Acelerâncias de transferência para viga “livre-livre”

3.2 – A Técnica da Pseudo-Inversa – Sinais Determinísticos

Esta seção é devotada à descrição da técnica da pseudo-inversa na determinação das forças dinâmicas a partir de medidas de resposta da estrutura e do conhecimento das características de resposta em frequência da mesma. Inicialmente será discutida a aplicação da técnica da pseudo-inversa aos sinais determinísticos, ou seja, sinais que, no domínio da frequência apresentam informação de amplitude e fase. Posteriormente será discutida a aplicação da técnica para sinais aleatórios.

No domínio frequência, a técnica da pseudo-inversa para sinais determinísticos é de fácil entendimento, já que sua formulação é baseada na Equação (3.5) aqui repetida por conveniência

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (3.14)$$

Sendo a matriz de FRF quadrada e simétrica, as forças podem ser identificadas a partir da Equação (3.14) calculando-se a inversa da matriz $[H(\omega)]$, ou seja

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^{-1} \{X(\omega)\} \quad (3.15)$$

A Equação (3.15) estabelece que a matriz $[H(\omega)]$ é quadrada de ordem N , o que indica que os vetores das forças de excitação $\{F(\omega)\}$ e das respostas $\{X(\omega)\}$ possuem o mesmo número de elementos, que é igual ao número de graus de liberdade do sistema (N). Na grande maioria das situações práticas é sabido que estes vetores não possuem a mesma ordem ou seja, um número reduzido N_F de forças de excitação provocam as acelerações que são medidas em um número N_A de pontos na estrutura, e geralmente $N_A > N_F$. Tome-se como exemplo o caso de um ensaio modal em uma aeronave de médio porte, onde geralmente não mais do que duas fontes de excitação atuam simultaneamente ($N_F = 2$) e as respostas são medidas em pelo menos uma

centena de pontos ($N_A = 100$)¹. Neste e em outros casos similares, a Equação (3.15) deve ser reescrita como

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^+ \{X(\omega)\} \quad (3.16)$$

onde o símbolo “+” indica a *inversa generalizada* ou *pseudo-inversa* da matriz de FRFs do sistema em estudo, tendo em vista que a matriz de FRFs passa agora a ser uma matriz retangular $N_A \times N_F$ e sua inversa ordinária não mais existe. Na próxima secção serão discutidas duas técnicas bastante utilizadas na determinação da pseudo-inversa da matriz $[H(\omega)]$.

Embora a operação de inversão mostrada na Equação (3.15) ou (3.16) pareça trivial do ponto de vista matemático, desde que ela exige apenas que a matriz de FRF do sistema seja invertida (ou pseudo-invertida, no caso da Equação (3.16)), a determinação do vetor de forças desconhecidas pode apresentar sérias dificuldades numéricas, uma vez que a matrix $[H(\omega)]$ geralmente apresenta problemas durante o processo de inversão. Estes problemas estão relacionados principalmente com o fato de a matriz $[H(\omega)]$ ser dependente da frequência e, para determinadas frequências seu determinante aproximar-se de zero, o que indica uma singularidade localizada durante o processo de inversão. Uma das maneiras mais apropriadas de se verificar em quais frequências estas singularidades podem ocorrer é uma inspeção dos *valores singulares* da matriz $[H(\omega)]$. Os valores singulares de uma matriz são obtidos a partir da Decomposição em Valores Singulares (“Singular Value Decomposition – SVD”). Embora esta técnica esteja bem descrita em vários livros da área de análise numérica, Maia (Maia, 1989) apresenta uma descrição bastante didática da técnica SVD bem como suas potenciais aplicações em dinâmica estrutural.

3.2.1 – A Técnica da Decomposição de Valores Singulares (“SVD”)

Segundo Maia (Maia, 1989), uma matriz complexa de ordem $M \times N$ (geralmente com $M > N$) pode ser decomposta de acordo com a seguinte expressão

¹ Comunicação verbal com o Eng. Carlos Reffinetti, Gerente de Ensaio de Solo, EMBRAER, 2001.

$$[H] = [U][\Sigma][V]^H \quad (3.17)$$

onde “ H ” denota o operador Hermitiano (transposto complexo conjugado). As matrizes $[U]$ e $[V]$ são matrizes unitárias, que satisfazem as seguintes relações

$$[U]^H [U] = [U][U]^H = [I] \quad (3.18)$$

$$[V]^H [V] = [V][V]^H = [I] \quad (3.19)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. As Equações (3.18) e (3.19) implicam em

$$[U]^{-1} = [U]^H \quad (3.20)$$

$$[V]^{-1} = [V]^H \quad (3.21)$$

As colunas da matriz $[U]$ são denominadas de Vetores Singulares a Esquerda de $[H]$ e eles também são autovetores ortonormais de $[H][H]^H$. De forma análoga, as colunas de $[V]$ são os Vetores Singulares a Direita de $[H]$ e eles representam os autovetores ortonormais de $[H]^H[H]$ (Varoto, 1996). A matrix $[\Sigma]$ é dada por

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [S] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde a matriz diagonal $[S]$ de ordem N contém os *Valores Singulares* σ_p , $p = 1, \dots, N$ da matriz complexa das FRFs do sistema em ordem decrescente ($\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_N$). Os valores singulares são as raízes quadradas não negativas dos autovalores da matriz $[H]^H[H]$. Sendo $[H]^H[H]$ hermitiana, seus autovalores são sempre reais e portanto os valores singulares também são números reais.

O “rank” ou posto da matriz $[H]$ (número de colunas linearmente independentes em $[H]$) é o número de valores singulares não nulos de $[H]$ (Maia, 1989). A fim de se obter o “rank” desta matriz torna-se necessário definir-se um critério de aceitação de um determinado valor pequeno de σ_N ou simplesmente desprezá-lo em comparação com os demais valores singulares. Este critério depende da acuracidade dos valores esperados. Um critério razoável é o de calcular-se os quocientes consecutivos dos valores singulares, σ_1/σ_2 , σ_2/σ_3 , σ_3/σ_4 , ..., σ_{N-1}/σ_N . Por exemplo, se o “rank” de $[H]$ é 3 então σ_4 será muito pequeno e o quociente σ_3/σ_4 será muito alto quando comparado com σ_2/σ_3 .

O quociente de valores singulares pode também ser empregado no cálculo do número de condição espectral ρ de $[H]$, que é dado pelo quociente entre o maior e menor valor singular não nulo, ou seja

$$\rho = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (3.23)$$

O número de condição espectral, conforme mostrado na Equação (3.23) pode ser usado como um indicador de potenciais dificuldades na obtenção da inversa da matriz $[H]$ desde que um valor elevado para ρ geralmente reflete uma matriz mau condicionada. Deve-se salientar que, como a matriz das FRFs do sistema em estudo é função da frequência de excitação, os valores singulares e consequentemente a matriz $[S]$ também serão dependentes da frequência de excitação.

A Figura 3.3 mostra ilustra os possíveis problemas de condicionamento numérico que podem ser encontrados durante o processo de inversão da matriz $[H(\omega)]$ na determinação dos esforços segundo a Equação (3.15). Esta figura mostra uma FRF de ponto que foi medida em uma viga de aço na condição livre-livre (curva contínua) e o último dos valores singulares (curva tracejada) determinado durante o processo de inversão da matriz de FRFs da viga. Observa-se claramente no gráfico do valor singular a existência de valores muito pequenos na faixa de frequência coberta pelo teste. Estes valores ocorrem praticamente em frequências discretas (10 Hz, 50 Hz, 80 Hz, 185 Hz, 251 Hz) e indicam os prováveis locais onde a matriz de FRFs

torna-se praticamente singular. É interessante observar que estas frequências onde ocorrem os problemas de condicionamento numérico geralmente não coincidem com as frequências naturais da viga, conforme mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Acelerância de ponto (curva contínua) e valor singular (curva tracejada) para viga em suspensão livre-livre

Já a Figura 3.4 faz uma comparação entre o primeiro e o último valor singular para a matriz de FRFs da viga. Observa-se claramente que enquanto que o último valor singular (curva tracejada) apresenta os pontos de mínimo citados anteriormente e que oferecem dificuldades na inversão da matriz, o primeiro valor singular da sequência (curva contínua) apresenta pontos de mínimo que em algumas frequências chega a apresentar amplitude da ordem de 100 vezes menor que o último valor singular.

3.2.2 – Determinação da Pseudo-Inversa de $[H(\omega)]$

A Equação (3.16) requer que uma inversa generalizada da matriz de FRFs do sistema seja calculada. Isto geralmente pode ser feito de duas formas: (i) Utilizando-

se uma formulação baseada em mínimos quadrados ou ; (ii) Utilizando-se a Técnica de Decomposição em Valores Singulares discutida na secção precedente.

Figura 3.4 – Valores singulares para matriz de FRF de viga livre-livre. Curva contínua indica primeiro valor singular e curva tracejada indica ultimo valor singular.

A determinação da pseudo-inversa através de mínimos quadrados é feita resolvendo-se a seguinte equação (Varoto, 1996)

$$[H(\omega)]^+ = [[H(\omega)]^H [H(\omega)]]^{-1} [H(\omega)]^H \quad (3.24)$$

Deve-se observar que, embora a solução mostrada na Equação (3.24) seja única e a de menor erro, pois trata-se de uma solução por mínimos quadrados, uma inversão matricial de uma matriz quadrada ainda é requerida, conforme indica a Equação (3.24), e neste caso, os problemas de condicionamento numéricos citados anteriormente podem novamente causar problemas na determinação de $[[H(\omega)]^H [H(\omega)]]^{-1}$. Uma solução alternativa para a determinação de $[H(\omega)]^+$ é o uso da técnica SVD.

Além das dificuldades quanto ao condicionamento numérico já comentadas durante o processo de inversão da matriz $[H(\omega)]$, uma dificuldade adicional surge na

busca da pseudo-inversa dessa matriz, uma vez que podem existir infinitas inversas generalizadas para a mesma matriz (Watkins, 1990), ou seja, a inversa de uma matriz quadrada pode não ser única ! Watkins (Watkins, 1990) estabelece que para que exista unicidade no processo de pseudo-inversão, as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned}
 [H(\omega)][H(\omega)]^+ &= H(\omega) \\
 [H(\omega)]^+[H(\omega)][H(\omega)]^+ &= [H(\omega)]^+ \\
 [H(\omega)][H(\omega)]^+ &\text{ simétrica} \\
 [H(\omega)]^+[H(\omega)] &\text{ simétrica}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Caso estas condições sejam simultaneamente satisfeitas, a pseudo-inversa da matriz $[H(\omega)]$ existe e é única, recebendo o nome de pseudo-inversa de Moore-Penrose (Watkins, 1990). A determinação da pseudo-inversa da matriz $[H(\omega)]$ é feita a partir de

$$[H(\omega)]^+ = [V(\omega)][\Sigma(\omega)]^+[U(\omega)]^H \tag{3.26}$$

e de acordo com a definição da matriz $[\Sigma(\omega)]$, Equação (3.22), sua pseudo-inversa é facilmente calculada a partir de

$$[\Sigma(\omega)]^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_N} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Uma vez obtida a pseudo-inversa da matriz $[H(\omega)]$ a solução para as forças é facilmente encontrada a partir de

$$\{\hat{F}(\omega)\} = [\Sigma(\omega)]^+ \{X(\omega)\} \quad (3.28)$$

A Figura 3.5 ilustra o último valor singular na sequência decrescente que foi calculado para uma viga de aço livre-livre em duas situações. A curva contínua é o valor singular mostrado anteriormente e que foi determinado para a matriz $[H(\omega)]$ quadrada, enquanto que a curva tracejada corresponde ao valor singular calculado para a matriz $[H(\omega)]$ quando o número de medidas de resposta é superior ao de forças de excitação, sendo $[H(\omega)]$ retangular. Torna-se evidente pela comparação ainda que qualitativa destes valores singulares que sempre que possível é preferível resolver-se um sistema de equações onde o número de respostas seja maior que o de forças a serem determinadas, visto que isto confere uma melhoria significativa ao processo de inversão matricial.

Figura 3.5 – Comparação do último valor singular para matriz de FRF de viga de aço livre-livre: Curva contínua: matriz quadrada; Curva tracejada: matriz retangular.

3.3 – A Técnica da Pseudo-Inversa – Sinais Aleatórios

Esta secção é destinada à discussão da técnica da pseudo-inversa na identificação de esforços aleatórios. O conhecimento de tais esforços possui destacada importância em várias aplicações práticas, como é o caso típico de

estruturas aeronáuticas e espaciais sujeitas a carregamentos aerodinâmicos e acústicos, bem como estruturas veiculares sujeitas à forças de características aleatórias devido à ação do pavimento.

Considere um sistema linear possuindo N graus de liberdade, uma matriz quadrada $N \times N$ de FRFs $[H(\omega)]$ e sujeito à ação de múltiplas forças de natureza aleatória. As relações de entrada e saída para este sistema podem ser escritos como (Bendat, 1986)

$$[G_{xx}(\omega)] = [H(\omega)]^* [G_{ff}(\omega)] [H(\omega)]^T \quad (3.29)$$

onde os símbolos “*” e “ T ” denotam o complexo conjugado e a transposta não conjugada da matriz de FRFs, respectivamente. As matrizes $[G_{ff}(\omega)]$ e $[G_{xx}(\omega)]$, ambas quadradas de ordem N são as matrizes das densidades espectrais de entrada e saída, respetivamente. Os elementos na diagonal destas matrizes são funções reais da frequência de excitação e correspondem às Densidades Autos Espectrais de entrada e saída. Similarmente, os elementos fora da diagonal principal destas matrizes são funções complexas da frequência de excitação e correspondem às Densidades Espectrais Cruzadas de entrada e saída, respectivamente. Estas matrizes são obtidas a partir dos espectros em frequência dos sinais de entrada e saída, $\{F(\omega)\}$ e $\{X(\omega)\}$ de acordo com as seguintes relações (Bendat, 1986)

$$[G_{ff}(\omega)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{\tau} \varepsilon (\{F(\omega)\}^* \{F(\omega)\}^T) \quad (3.30)$$

$$[G_{xx}(\omega)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{\tau} \varepsilon (\{X(\omega)\}^* \{X(\omega)\}^T) \quad (3.31)$$

onde τ é o período de análise, ε o “valor esperado” (função esperança estatística).

Para sinais aleatórios a Equação (3.29) é usada para a determinação das forças desconhecidas em termos da matrix $[G_{ff}(\omega)]$ pelo método da pseudo-inversa conhecendo-se a matriz de FRFs do sistema e a matriz de respostas $[G_{xx}(\omega)]$. Pré e pós multiplicando-se ambos os lados da Equação (3.29) por $[[H(\omega)]^*]^+$ e $[[H(\omega)]^T]^+$ respectivamente, obtém-se o seguinte resultado para a matriz das densidades espectrais de entrada

$$[G_{ff}(\omega)] = [[H(\omega)]^+]^* [G_{xx}(\omega)] [[H(\omega)]^+]^T \quad (3.32)$$

A Equação (3.32) é a base para a determinação de esforços aleatórios. A matriz resultante do lado esquerdo da Equação (3.32) fornece as densidades auto espectrais bem como as densidades espectrais cruzadas das forças de excitação do sistema. A utilização desta equação requer além da matriz das FRFs do sistema, a matriz das densidades espectrais da resposta do sistema $[G_{xx}(\omega)]$. A obtenção desta última matriz geralmente requer que um número consideravelmente grande de medidas adicionais sejam efetuadas, uma vez, que os elementos fora da diagonal principal precisam ser medidos simultaneamente e não calculados a partir dos sinais temporais individuais captados em cada sensor de medida. Então, embora a Equação (3.32) represente a maneira correta de determinar-se os esforços desconhecidos, sua utilização pode, dependendo do número pontos de medidas, tomar um tempo considerável do ensaio.

Uma hipótese comumente aceita e que é usada para reduzir os tempos de ensaio e processamento de sinais aleatórios é assumir que as forças aleatórias que atuam no sistema sejam estatisticamente não correlacionadas (Hillary, 1983, Hillary 1984, Zhang, 1985). Através desta hipótese, as densidades espectrais de entrada são nulas, e a matriz $[G_{ff}(\omega)]$ torna-se diagonal, contendo apenas as densidades auto espectrais de entrada, e que são funções reais, na diagonal principal. Desta forma, a Equação (3.29) pode ser escrita de forma simplificada como

$$\{G_{xx}(\omega)\} = [|H(\omega)|^2] \{G_{ff}(\omega)\} \quad (3.33)$$

A solução para as forças desconhecidas a partir da Equação (3.33) fica então

$$\{G_{ff}(\omega)\} = [|H(\omega)|^2]^+ \{G_{xx}(\omega)\} \quad (3.34)$$

Uma rápida comparação entre as Equações (3.32) e (3.34) mostra as diferenças em se fazer a hipótese de forças não correlacionadas. Enquanto que a Equação (3.32) fornece como resposta uma matriz contendo não somente as densidades auto espectrais mas também as densidades espectrais cruzadas, a Equação (3.34) é uma equação real fornecendo apenas uma estimativa das densidades auto espectrais das forças desconhecidas. Então, quando a Equação (3.34) é usada, não se obtém qualquer informação sobre ângulos de fase entre as fontes excitadoras do sistema e consequentemente perde-se as informações de correlação das variáveis no domínio do tempo. Deve-se observar também que, além disso, tanto a Equação (3.32) quanto a Equação (3.34) requerem que a pseudo-inversa da matriz de FRF seja determinada, o que, a exemplo do que foi discutido para sinais determinísticos, pode trazer dificuldades numéricas.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORÍTMOS DE IDENTIFICAÇÃO DE ESFORÇOS E RESULTADOS DE SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo tem como objetivo principal desenvolver algoritmos numéricos para a identificação indireta de esforços dinâmicos tanto no domínio do tempo quando no da frequência. Para tanto, serão desenvolvidos programas computacionais na linguagem Matlab (Mathworks, 1999) e serão implementadas a técnica SWAT na identificação de forças no domínio do tempo e a técnica da pseudo-inversa no domínio da frequência. Durante o desenvolvimento deste capítulo, a implementação dos algoritmos será ilustrada através de fluxogramas, mostrando a sucessão das etapas implementadas. No final da dissertação serão apresentados os programas que foram utilizados na geração dos resultados. Estes algoritmos serão aplicados à dados provenientes de simulações numéricas com o objetivo de ilustrar algumas características importantes dos métodos estudados. No capítulo seguinte, os mesmos algoritmos serão aplicados a dados provenientes de ensaios experimentais em uma estrutura típica na identificação de vários tipos de esforços.

4.1 – Definição de Parâmetros Físicos

A Figura 4.1 mostra em linhas gerais as etapas que devem ser seguidas no processo de identificação indireta de forças. Todas as rotinas computacionais foram desenvolvidas em ambiente Matlab, podendo funcionar como rotinas independentes ou como um único programa, através dos recursos de “functions” que são disponibilizados pelo programa Matlab.

Figura 4.1. – Fluxograma do algoritmo de Identificação de Forças, “Main”.

A subrotina **CARACT** pode ser usada tanto com dados simulados numericamente, quanto com dados experimentais. Se for usada com dados numéricos, como é o caso de uma simulação com um sistema de parâmetros concentrados, esta rotina é utilizada na geração de matrizes de massa, rigidez e amortecimento, na introdução de condições de contorno e na obtenção de parâmetros modais, como modos de vibrar, frequências naturais e fatores de amortecimento modal, segundo um

modelo proporcional (amortecimento de Rayleigh) de amortecimento. Se esta rotina for utilizada com dados experimentais, ela geralmente carrega estes dados de outros arquivos, advindos de uma identificação modal prévia. A Figura 4.2 mostra em detalhes o fluxograma de operações desta rotina.

A subrotina **FORÇA** deve ser utilizada quando deseja-se usar os métodos de identificação com dados de forças simulados computacionalmente. Aqui são gerados vários tipos de forças dinâmicas, incluindo forças senoidais, forças transientes do tipo impacto e “chirp” e forças aleatórias. Se os programas forem utilizados com dados experimentais, o uso desta rotina é opcional, caso existam dados de forças medidas experimentalmente e deseje-se realizar comparações com as forças identificadas a partir dos dados de resposta. A Figura 4.3 mostra em detalhes o fluxograma de operações da rotina **FORÇA**.

A subrotina **FRF** faz a determinação das FRFs para o sistema simulado ou carrega as FRF experimentais e/ou regeneradas a partir da identificação modal prévia. A geração de FRF simuladas é feita a partir dos parâmetros modais calculados na etapa anterior e utilizando-se as equações desenvolvidas no capítulo anterior para as acelerâncias de ponto e de transferência. Para o caso de dados experimentais, esta rotina pode carregar as FRF medidas ou calculá-las a partir dos recursos de funções implícitas do Matlab para a transformada de Fourier. A Figura 4.4 mostra em detalhes o fluxograma de operações da rotina **FRF**.

A subrotina **IDENT** faz a identificação dos esforços e tem uma versão no domínio do tempo para a técnica SWAT e uma no domínio da frequência para a técnica da pseudo-inversa.

4.2 – Implementação da Técnica SWAT

As principais etapas de implementação numérica da rotina **IDENT** para a técnica SWAT estão mostradas na Figura 4.5. As principais etapas são a geração de dados de aceleração para o caso de simulações numéricas bem como a etapa de

escolha dos pesos para a técnica SWAT, conforme discutido no Capítulo 2. As acelerações foram calculadas a partir das forças excitadoras anteriormente geradas pelos outros algoritmos e pelos parâmetros físicos do sistema em estudo. Estas acelerações foram obtidas a partir do Método de Newmark com $b = 1/4$ (Craig, 1980). Desta forma pode-se reconstruir a força através da soma ponderada das acelerações tomadas em diferentes pontos da estrutura através da sub-rotina **PONDE**.

4.3 – Implementação da Técnica Pseudo-Inversa

A Figura 4.6 mostra as principais etapas do algoritmo numérico desenvolvido para a identificação de forças dinâmicas no domínio da frequência pela técnica da pseudo-inversa. Os dados de entrada desta subrotina são geralmente funções de excitação, de resposta e FRF já no domínio da frequência. Caso existam apenas dados no domínio do tempo disponíveis, esta rotina deve ser adaptada a estes dados, utilizando-se as técnicas de FFT pertinentes. Existem duas versões para o algoritmo da pseudo-inversa. Aquela mostrada na Figura 4.6 refere-se a aplicação a sinais determinísticos, onde são usados dados de espectros em frequência. A segunda versão destina-se à identificação de forças aleatórias, e usa dados de FRF e as densidades auto espectrais e cruzadas na geração das matrizes de entrada e saída conforme discutido no capítulo anterior.

Figura 4.2 - Fluxograma da Subrotina de Caracterização Modal, "CARACT".

Figura 4.3 - Fluxograma da Subrotina de Geração da Força de Excitação ,“FORÇA”.

Figura 4.4 - Fluxograma da Subrotina de Obtenção dos Dados de FRF's, "FRF".

Figura 4.5 – Fluxograma do algoritmo de Identificação de Forças, “SWAT”.

Figura 4.6. - Fluxograma da Subrotina de Identificação da Pseudo-Inversa

4.4 – Resultados de Simulações Numéricas

A fim de se obter uma idéia inicial sobre o desempenho das técnicas de identificação indireta de forças, foram realizadas algumas simulações numéricas com um sistema discreto de 09 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 4.7.

Figura 4.7 – Sistema discreto de 09 graus de liberdade

Inicialmente foram calculadas as propriedades modais para o sistema, tais como frequências naturais e modos normais de vibração. A Figura 4.8 mostra os cinco primeiros modos de vibrar identificados, sendo que o primeiro deles (Figura 4.8, parte (a)) refere-se ao modo de corpo rígido, por tratar-se de um sistema livre-livre. A linha pontilhada indica a posição dos nós para cada modo.

Figura 4.8 – Modos de vibrar para sistema 09 GDL

Figura 4.8 (Cont.) Modos de vibrar para sistema de 09 GDL

Tendo-se determinado as propriedades modais do sistema em estudo, foram também determinadas as FRFs e a seguir passou-se a utilizar as técnicas de identificação indireta de forças discutidas nos Capítulos 2 e 3, com os algoritmos numéricos descritos no Capítulo 4.

A primeira força gerada foi um pulso triangular, e os resultados obtidos para o método da pseudo-inversa estão mostrado na Figura 4.9. A Figura 4.9 (a) mostra o resultado da identificação deste pulso quando dados de aceleração são usados, ou seja, utilizou-se as FRF de aceleração do sistema. A Figura 4.9 (b) mostra a identificação do pulso quando as FRF de receptância são usadas.

Figura 4.9 – Resultados identificação pseudo-inversa: (a) usando acelerações ;(b) usando receptâncias. Curva contínua: identificado; Curva pontilhada: simulado.

A Figura 4.10 mostra os resultados da identificação deste pulso triangular quando a técnica SWAT é empregada. Neste caso, optou-se pela escolha de pesos de mesmo valor e iguais à unidade durante o processo de identificação.

Figura 4.10 - Força Identificada e Simulada a partir da Técnica SWAT.

Conforme pode ser observado, os dois métodos possibilitaram uma identificação indireta bastante precisa nesta simulação. As razões principais para estes resultados quase perfeitos foram principalmente as seguintes:

- A simulação utilizou todos os modos do sistema em questão, e, isto, em aplicações experimentais é impossível de ser realizado, visto que na prática, os sistemas possuem infinitos modos de vibrar, por serem sistemas contínuos.
- Ausência total de ruído (com exceção de algum ruído numérico presente na solução do problema inverso) durante a identificação das forças. Na prática, sabe-se que os ruídos experimentais sempre causam dificuldades, principalmente na solução destes problemas inversos, onde invariavelmente inversões de matrizes são exigidas, como é o caso da pseudo-inversa.

Levando-se em conta estes aspectos, resolveu-se investigar o efeito da incompleteza do modelo em estudo, deixando-se de fora alguns modos de vibrar na identificação de um pulso na forma de meio seno. Para tanto, utilizou-se a técnica da

pseudo-inversa, por ser, de acordo com a literatura, a técnica que se mostra mais sensível à incompleteza do modelo modal (Ewins, 1984).

A Figura 4.11 mostra o pulso na forma de meio seno gerado pelos algoritmos e o resultado da sua identificação pelo método da pseudo-inversa, quando todos os modos de vibrar são usados. O resultado é praticamente perfeito !

Figura 4.11 – Força tipo Meio-Seno Identificada através da Pseudo-Inversa (curva contínua: identificado; curva tracejada: simulado)

Já a Figura 4.12 mostra uma sucessão de forças identificadas através da técnica da pseudo-inversa onde sucessivamente aumentou-se o número de modos de vibrar que participam da resposta do sistema à esta força de excitação. Observe-se claramente que quando existem poucos modos de vibrar participando na resposta do sistema, a identificação da força excitadora fica comprometida, tanto na forma quanto na distribuição das amplitudes. Mas, a medida em que o número de modos presentes na resposta aumenta, o resultado vai melhorando substancialmente até que o resultado encontrado na Figura 4.11 volte a ser reproduzido. Esta simulação é bastante importante para chamar a atenção do experimentalista em análise modal a tomar cuidados especiais na escolha dos pontos de captação da resposta do sistema, e também nos pontos de aplicação de forças excitadoras, em ensaios modais experimentais.

Figura 4.12 – Influência do número de modos na identificação da força pela pseudo-inversa: Curva Vermelha : identificada; Curva Azul: simulada

A última simulação computacional realizada neste capítulo tratou da identificação de uma força aleatória no tempo. Neste caso, o objetivo principal desta simulação foi o de mostrar a diferença básica entre as Equações (3.32) e (3.34), aqui repetidas por conveniência:

$$[G_{ff}(\omega)] = [[H(\omega)]^+]^* [G_{xx}(\omega)] [[H(\omega)]^+]^T \quad (4.1)$$

$$\{G_{ff}(\omega)\} = [|H(\omega)|^2]^+ \{G_{xx}(\omega)\} \quad (4.2)$$

Conforme dito anteriormente, a Equação (4.2) é obtida pela hipótese de forças aleatórias estatisticamente não correlatas. A Figura 4.13 mostra os resultados da

identificação de uma força aleatória que foi aplicada ao sistema de 09 graus de liberdade. O resultado da Figura 4.13 (a) foi obtido pela Equação (4.1), e observa-se aqui que a densidade espectral da força identificada apresenta uma excelente concordância com a força simulada. O mesmo não é observado na Figura 4.13 (b) cujo resultado para a força identificada foi obtido mediante o uso da Equação (4.2). A razão para esta diferença tão grande reside no fato de que, mesmo as forças aleatórias sendo não correlatas (e neste caso existe apenas uma força) as respostas são sempre correlatas, o que em princípio exige que a Equação (4.1) seja empregada na identificação das forças de natureza aleatória (Varoto, 1996).

(a) Identificação com Eq. (4.1)

(b) Identificação com Eq. (4.2)

Figura 4.13 - Identificação de Forças Aleatórias (Densidades Espectrais)

CAPÍTULO 5

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados alguns resultados experimentais onde foram empregadas duas técnicas de identificação indireta de esforços dinâmicos, a técnica da pseudo-inversa e a técnica SWAT. Uma estrutura simples, na forma de uma barra de aço em suspensão “livre-livre” foi escolhida como estrutura de estudo. Diversos sinais de excitação foram aplicados à barra, incluindo sinais transientes e aleatórios, e as respostas foram medidas por sensores piezoelétricos. Então procurou-se reconstruir estas forças usando-se para tanto as técnicas previamente mencionadas.

5.1 – Descrição do Aparato Experimental para Medidas de FRF

Os resultados experimentais foram obtidos com uma estrutura na forma de uma barra de aço de 1000 mm de comprimento, $25,4\text{ mm}$ de largura e $6,25\text{ mm}$ de espessura. Esta barra foi suspensa por fios flexíveis a fim de simular a condição livre-livre em seu contorno. Os sinais de aceleração foram captados por acelerômetros piezoelétricos (B&K 4373, $S_q = 3,10\text{ pC/g}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$). Os dados de entrada e saída foram processados por um analisador espectral de quatro canais, marca Tektronix, modelo 2630. Os algoritmos de identificação de esforços foram escritos com o programa Matlab, conforme dito anteriormente.

A primeira etapa do procedimento experimental correspondeu a realização de um ensaio modal na viga em suspensão livre-livre com o objetivo de medir as FRFs de aceleração para diversos pontos sobre a viga. A Figura 5.1 abaixo mostra como foi feito este ensaio. Utilizou-se um martelo de impacto instrumentado marca PCB como fonte de excitação. As FRFs medidas cobriram a faixa de frequências de 0 a 2000 Hz . O analisador de sinais foi ajustado para adquirir os dados com uma frequência de amostragem de $f_s = 5120\text{ Hz}$, sendo que a resolução em frequência foi de $\Delta f = 1.25\text{ Hz}$. As FRFs medidas tem um total de 1601 pontos.

Figura 5.1 – Esquema do ensaio para medida de FRF

As Figuras 5.2 e 5.3 mostram duas FRFs, a primeira de ponto para uma das extremidades da viga e a segunda de transferência.

Figura 5.2 – Aceleração de ponto para viga livre-livre

Figura 5.3 – Aceleração de transferência para viga livre-livre

A Figura 5.2 revela a existência de 9 frequências naturais na faixa de frequências analisada. Após as medidas destas FRFs, iniciou-se o processo de identificação de forças que será descrito a seguir.

5.2 – Identificação de Forças do Tipo Impacto

Neste caso, a montagem mostrada na Figura 5.4 foi utilizada na identificação de forças de impacto. O uso do martelo de impacto utilizado na secção anterior mostrou-se ineficiente neste caso, pois como foram medidos 9 sinais de aceleração sobre a viga livre-livre, não foi possível efetuar todas as medidas simultaneamente. Então, optou-se por um sistema do tipo pêndulo balístico, como o mostrado na Figura 5.4 a fim de se ter alguma repetibilidade aos impactos introduzidos na viga.

O pêndulo foi construído a partir de um cilindro de nylon com um sensor de força montado na extremidade de impacto. Este sensor foi usado a fim de medir-se as forças introduzidas na viga, para efeitos de comparações com as forças identificadas. Em situações reais dificilmente tem-se acesso as estas forças.

(a)

(b)

Figura 5.4 – Aparato experimental para identificação de forças de impacto

Os mesmos sensores e equipamentos de processamento digital de sinais foram usados neste ensaio.

A Figura 5.5 mostra o resultado experimental da aplicação do método SWAT para a identificação da força de impacto aplicada ao centro geométrico da viga. Neste caso, observa-se que a força identificada seguiu, de forma geral, a forma da excitação aplicada à viga, somente que, a força identificada foi subestimada em amplitude, ou seja, o valor máximo desta ficou abaixo da força que foi aplicada à estrutura. Possíveis razões para esta discrepância em amplitudes pode ser a falta de uma repetibilidade maior dos impactos, o que pode ter causado diferenças significativas nos níveis de resposta exibidos pela viga; utilização de fatores de ponderação (pesos) não suficientemente adequados no equacionamento da técnica SWAT.

Figura 5.5 – Força de impacto identificada pela técnica SWAT.

A Figura 5.6 mostra os resultados da identificação de forças de impacto utilizando-se a técnica da pseudo-inversa. Observa-se neste caso que existe uma concordância melhor entre o impacto medido e aquele calculado pela técnica da pseudo-inversa, em comparação com o resultado obtido via técnica SWAT. Também neste caso a técnica da pseudo-inversa resultou em uma força cujo pico principal tem amplitude menor comparado com o dado experimental. Salienta-se que neste caso, os sinais foram processados no domínio da frequência através da Equação (3.16) e

transformados para o domínio do tempo através dos recursos de FFT do programa Matlab.

Figura 5.6 – Força de impacto identificada pela pseudo-inversa.

5.3 – Identificação de forças do tipo “Chirp”

Nesta caso a viga foi conectada a um excitador eletromagnético de vibração para fins de aplicação de uma força transiente do tipo “chirp”, que consiste basicamente em excitar-se a estrutura com uma varredura senoidal em um intervalo de tempo bastante reduzido de tal forma que a força aplicada tenha ainda características de uma excitação transiente, ou seja sua amplitude cai a zero (ou praticamente zero) no final da janela do período de análise. A Figura 5.7 mostra um sinal típico de “chirp” senoidal. Salienta-se que nesta seção apenas a técnica da pseudo-inversa foi aplicada, tendo-se em vista a dificuldade em se escolher pesos adequados para outros tipos de sinais de excitação que não sejam impactos.

Para o caso da viga de aço em questão, dois ensaios utilizando-se excitação “chirp” foram realizados. No primeiro ensaio, foi aplicado um único sinal de excitação em uma das extremidades da viga. Os sinais de resposta foram medidos como antes, e a técnica da pseudo-inversa foi então utilizada com o objetivo de reconstruir a força de excitação. Já no segundo ensaio, dois “chirps” simultâneos

foram aplicados à viga, sendo um em cada extremidade livre, e então novamente, aplicou-se novamente a técnica da pseudo-inversa na reconstrução destes sinais de excitação.

Figura 5.7 – Sinal de excitação do tipo “chirp” aplicado à viga

O resultado obtido para a identificação do primeiro sinal de excitação está mostrado na Figura 5.8. Observa-se neste caso que, até aproximadamente 1000 Hz , a força identificada mostra uma boa concordância com a força medida. A partir de 1000 Hz e até o final da faixa de frequências, a força identificada começa a desviar-se da força medida.

A Figura 5.9 mostra o resultado da identificação das duas forças “chirp”, cada uma delas aplicada à uma extremidade livre da viga. Observa-se, a exemplo do caso anterior uma razoável concordância dos resultados identificados e medidos até aproximadamente a metade da faixa de frequências. Neste caso, como foram identificadas duas forças simultaneamente, o processo de inversão matricial discutido no Capítulo 3 é mais suscetível à problemas de condicionamento numérico.

Figura 5.8 – Força Chirp identificada em uma extremidade da viga.

Figura 5.9 – Forças “chirp” identificadas na viga

Figura 5.9 (Cont.) – Forças Chirp identificadas em extremidades da viga

5.4 – Identificação de forças aleatórias

Neste caso, a exemplo do caso anterior, a viga foi excitada com duas forças aleatórias simultâneas, onde as forças foram aplicadas às extremidades livres da viga. Devido a indisponibilidade de duas fontes independentes de sinais aleatórios, o mesmo sinal aleatório foi usado para alimentar os dois excitadores conectados à viga em ambos os ensaios.

O objetivo principal aqui é verificar experimentalmente as diferenças entre as duas equações empregadas na identificação de esforços aleatórios, Equação (3.32) que leva em conta as densidades espectrais cruzadas entre os vários acelerômetros usados no ensaio, e a Equação (3.34) que assume que as forças são estatisticamente não correlatas e portanto apenas as densidades auto espectrais dos sinais de aceleração são usados.

A exemplo do que foi feito no Capítulo 4, estas equações são aqui repetidas por questão de conveniência

$$[G_{ff}(\omega)] = [[H(\omega)]^+]^* [G_{xx}(\omega)] [[H(\omega)]^+]^T \quad (5.1)$$

$$\{G_{ff}(\omega)\} = [|H(\omega)|^2]^+ \{G_{xx}(\omega)\} \quad (5.2)$$

A Figura 5.10 mostra os resultados obtidos para o ensaio, onde duas forças são simultaneamente aplicadas às extremidades livres da viga. O resultado mostrado na Figura 5.10 (a) refere-se à Equação (5.1) enquanto que o resultado mostrado na Figura 5.10 (b) refere-se à mesma força, somente que agora foi usada a Equação (5.2).

Figura 5.10 – Forças aleatórias identificadas em viga

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Este trabalho propôs-se a estudar um problema difícil em mecânica que corresponde à identificação de esforços dinâmicos a partir de dados da resposta do sistema e de certas características dinâmicas do sistema em estudo. Foram abordados técnicas de identificação indireta de esforços no domínio do tempo e na frequência. No domínio do tempo foi estudado o método SWAT, e no domínio da frequência o método da pseudo-inversa. As simulações numéricas e os ensaios experimentais realizados permitem que algumas conclusões sejam tiradas:

- método da pseudo-inversa se apresentou de forma satisfatória na identificação de forças, apresentando pequenos problemas de instabilidade numérica durante as inversões nas regiões de frequência próximas ou não às naturais, especialmente nas mais baixas. Problema o qual foi tratado de forma satisfatória através da técnica de decomposição de valores singulares;
- Durante a identificação a não inclusão de alguns modos na identificação tornou claro o efeito de dificultar e até mesmo conduzir a identificações errôneas. Não foi possível no presente trabalho realizar-se uma discussão mais ampla a respeito do aumento no número de respostas na identificação, mas fortes indícios indicam

para efeitos semelhantes aos exibidos no caso do número de modos presentes durante a identificação;

- Os efeitos da contaminação com ruídos ainda merecem um estudo mais detalhado, visto que não foram abordados neste trabalho, devido principalmente à dificuldade de uma modelagem realista de ruídos experimentais que possibilitem alcançar aspectos conclusivos quanto aos seus efeitos na identificação de forças.
- Quando comparado a pseudo-inversa com o SWAT, a pseudo-inversa no caso de uma força do tipo impulso apresentou resultados levemente melhores, devemos deixar claro que o SWAT parece ser mais sensível quanto a respeito à repetibilidade do impacto que a pseudo-inversa.
- Na técnica SWAT a escolha inadequada dos termos de ponderação mostrou-se um fator de grande importância, uma vez que pequenos distúrbios ou desequilíbrios na escolha dos pesos de ponderação conduziram a grandes erros na identificação final da força.
- A grande vantagem da técnica SWAT em relação à pseudo-inversa restringe-se basicamente a dois fatos. O primeiro o de evitar de se trabalhar com a inversão de matrizes, e o segundo o tempo que se perde com essas inversões.
- No caso da pseudo-inversa sua grande vantagem em relação ao SWAT, reside no fato de ter-se em mãos uma gama maior de informações, e principalmente a possibilidade de identificação de múltiplas excitações, o que não é possível com o SWAT já que ele trabalha com o conceito de força resultante. Deve se lembrar também que o SWAT é restrito a forças do tipo impacto, não sendo encontrado nenhuma referência a respeito da sua aplicação a outros tipos de forças.
- A técnica da pseudo-inversa foi aplicada com razoável sucesso na identificação de forças do tipo chirp e aleatórias. Foi possível nestes casos observar o efeito das instabilidades numéricas bem como a diferença em se usar diferentes formulações

no caso de forças aleatórias. Neste caso, recomenda-se que medidas adicionais sejam efetuadas, mas que as densidades espectrais cruzadas sejam usadas na identificação das forças de natureza aleatória, independentemente se as forças apresentarem correlação ou não.

Como trabalhos futuros é de grande interesse a aplicação destas técnicas na identificação de esforços sobre próteses humanas, em estudos da biomecânica, bem como na estrutura de veículos e aeronaves. E ainda, como um terceiro passo realizar um controle ativo em um sistema de forma que possibilite ao mesmo identificar as forças atuantes sobre o mesmo, e gerar uma resposta resultante de forma a manter o mesmo em equilíbrio. A identificação de forças distribuídas, tais como carregamentos acústicos e aerodinâmicos também merecem muita atenção, e são problemas, que, apesar de já terem sido pesquisados por diversos cientistas de renome, ainda estão aquém de uma solução ideal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allemang, R.J. et al. (1986). Time domain parameter- identification methods for linear modal-analysis-unifying approach. JOURNAL OF VIBRATION ACOUSTICS STRESSAND REABILITY IN DESIGN-TRANSACTIONS OF THE SAME. v.1, p.1-8.
- Archibald, M. ; Wicks, A. L. (1990).A time domain method for experimental determination of the impulse response function. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 15., USA, 1990. *Proceedings*. v.1, p.131-35.
- Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures* . ed. Prentice Hall, USA.
- Bell, R.G. ; Rodeman, R. (1988).External force estimation from transient response data. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 14., USA, 1988. *Proceedings*. v.1, p.588-93.
- Ben-Israel ,A; Greville,T.N.E.(1974).*Generalized inverses : theory and applications*. United States of America. Jhon Wiley & Sons, Inc.

- Callaham, J. ; Piergentili, F. (1996). Force estimation using operational data.
In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 22., USA,
1996. *Proceedings*. v.2, p.1586-92.
- Carne, T.G. ; Mayes, R. L.; Bateman, V.I. (1994). Force reconstruction using
the sum of weighted accelerations technique-max flat procedure. In:
INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 20., USA,
1994. *Proceedings*. v.2, p.1054-62.
- Carne, T.G. ; Mayes, R. L.; Bateman, V.I. (1992). Force reconstruction
using a sum of weighted accelerations technique. In:
INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 18., USA,
Proceedings. v.1, p.291-98.
- Caughey, T.K.;O'Kelly,M.E.J.(1965). Classical normal modes in damped
linear dynamic systems in : JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, 25,
p.343-364.
- Clough, R.W.;Penzien, J.(1993). *Dynamics of structures*. Singapore,
Mcgraw-Hill Inc.
- Craig, R.R.Jr. (1980). *Structural dynamics : na introduction to computer
methods*. United States of America, John Wiley & Sons.
- Desanghere, R.G. (1985). Indirect identification of forces. In:
INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 10.,USA,
1985. *Proceedings*. v.1., p.1-25.
- Doyle, F. (1997). A wavelet deconvolution method for impact force
identification. EXPERIMENTAL MECHANICS.v. 37, n. 4, p. 403-8, dec.

Doyle, F. (1994). A genetic algorithm for determining the location of structural impacts. *EXPERIMENTAL MECHANICS*. p. 37-44, mar.

Elliott, K.B. ; Juang, J.N. (1988). Force prediction using singular-value decomposition. In: *INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE*, 14., USA, 1988. *Proceedings*. v.2, p.1582-88.

Emboa, W. et al. (1995). Two methods for determining impact-force history on elastic plates. *EXPERIMENTAL MECHANICS*. p.11-18, march.

Emboa, W. ; Yeh, J.C. (1994). Identification of impact forces at multiple locations on laminated plates. *AIAA JOURNAL*. v.32,n. 12, p.2433-39, dec.

Ewins, D.J. (1984). *Modal testing : theory and practice*. Great Britain, John Wiley & Sons.

Fabunmi, J. (1987). Feasibility of dynamic load determination from measured mobilities. *SEM SPRING CONFERENCE*, Houston, Texas, *proceedings*, p. 845-850, jun.

Fabunmi, J. (1986). Effects of structural modes on vibratory force determination by the pseudoinverse technique. *AIAA JOURNAL*, v. 2, n.3, p. 504-9, mar.

Fasana, A. ; Piombo, B.A.D. (1996). Identification of linear mechanical systems by deconvolution techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, p.350-373.

Fregolent, A. ; Sestieri A. (1990). Assessment of procedures for force identification from external response. *15th INTERNATIONAL*

SEMINAR ON MODAL ANALYSIS. Leuven, Belgium, *proceedings*.
v.2, p. 825-838.

Genaro, G. ; Rade, D.A. (1998). Input force identification in the time domain.
In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 24., USA,
1998. *Proceedings*. v.1, p.124-29.

Genaro, G. (1997). *Identificação de forças excitadoras a partir das respostas dinâmicas no domínio do tempo*. Uberlândia.109p. Dissertação (Mestrado)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de
Uberlândia.

Golub, G.H. ; Loan,C.F.V.(1989). *Matrix computations*. Baltimore, Johns
Hopkins univ. press.

Gregory D.L. ; Priddy,T.G. ; Smallwood, D.O. (1986). Experimental
determination of the dynamic forces acting on non-rigid bodies. In:
AEROSPACE TECHNOLOGY CONFERENCE AND EXPOSITION,
Long Beach, CA, 1986. *Anais*. California, ATCE.oct.

Han, M-C; Wicks, A. L. (1990). Force determination with slope and strain
response measurement. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS
CONFERENCE, 15., USA, 1990. *Proceedings*. v.1, p.365-72.

Hillary, B. ; Ewins, D.J. (1984) The use of strain gauges in force
determination and frequency response function measurements in :
INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, feb.

Hillary, B. (1983). Indirect measurement of vibration excitation forces.
London. 251p. Tese (Doutorado) – Department of Mechanical
Engineering, Imperial College.

- Ibrahim, S.R. et al. (1991). Structural force identification at unmeasured locations. . In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 17., USA, *Proceedings*. v.2, p.927-933.
- Karlsson, S.E.S. (1996). Identification of external structural loads from measured harmonic responses. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v.1, p. 59-74.
- Keeyoung, C. et al. (1996). Identification of impact force and location using distributed sensors. AIAA JOURNAL., v. 34, n. 1, p. 136-142, jan.
- Kim, Y. R. ; Kim K. J. (1997) . Indirect input identification by modal model technique. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 23., USA, 1997. *Proceedings*. v.2, p.1263-69.
- Law, S.S. ; Chan, T.H.T. (1997). Moving force identification: time domain method. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION. v.1, p. 1-22.
- Lee, H. ; Park, Y. (1995). Error analysis of indirect force determination and regularisation method to reduce force determination error. MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING. v.6, p.615-633.
- Lee, J.K.; Park, Y. (1994). Response selection and dynamic damper application to improve the identification of multiple input forces of narrow frequency band. MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING, v.8, n.6, p.649-664.
- Linz, P. (1985). Analytical and numerical methods for volterra equations. In: *STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS - SIAM*.
- McConnell, K.G. (1995) . *Vibration testing : theory and practice*. John Wiley & Sons. New York, New York.

Maia, N. M. M. et al. (1997). *Theoretical and experimental modal analysis*.
ed. SRP Ltd. Taunton, Somerset, England

Martin, M. T. ; Doyle, J.F. (1996) . Impact force identification from wave
propagation responses. INT. J. IMPACT ENGNG. v. 18, n. 1, p. 65-77 .

Okubo, N. et al. (1996). Prediction of transmitted force between components
under operating condition for reduction of vibration and noise. . In:
INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 22., USA,
1996. *Proceedings*. v.1, p.613-18.

Priddy, T.G. ; Gregory D.L. ; Coleman, R.G. (1989). Measurement of time-
dependent external moments and forces by the sum of weighted
accelerations technique. SAND88-3081-Uc-38, feb.

Priddy, T.G. ; Gregory D.L. ; Coleman, R.G. (1988). Strategic placement of
accelerometers to measure forces by the sum of weighted accelerations.
SAND87-2567-Uc-38, jan.

Rao, S.S. (1995). *Mechanical vibrations*. Ed. Addison-Wesley Publishing
Company, USA.

Scharton, T. (1990). Motion and force controlled vibration testing.
PROCEEDINGS OF THE 36TH ANNUAL TECHNICAL MEETING,
Institute of Environmental Science (IES), v.1, New Orleans, Louisiana,
p.77-85, apr.

Shibo, X. et al. (1994). Identification of dynamic Load from strain response of
the monitoring car weight bridge. In: INTERNATIONAL MODAL
ANALYSIS CONFERENCE, 20., USA, 1994. *Proceedings*. v.2,
p.1179-81.

Starkey, J. M. ; Merrill, G. L. (1989). On the ill-conditioning nature of indirect force-measurement techniques. INTERNATIONAL JOURNAL OF ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS, v.4, n.3, p. 103-8.

Stebbins, M.A. et al (1996). Measuring and including the effects of moments and rotations for the accurate modeling of transmitted forces. . In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 22., USA, 1996. *Proceedings*. v.1, p.429-36.

Varoto, P.S. ; McConell, K.G. (1997). Reading the rules for the exchange and analysis of dynamic information in structural vibration. . In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 23., USA, 1997. *Proceedings*. v.2, p.1937-44.

Varoto, P.S. ; McConell, K.G. (1997). Predicting random excitation forces from acceleration response measurements. . In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 23., USA, 1997. *Proceedings*. v.2, p.1937-44.

Varoto, P.S. (1996). The rules for the exchange and analysis of dynamic information in structural vibration. Iowa. 233p. Tese (Doutorado) - Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, Iowa State University.

Varoto, P.S. (1991). Análise modal no domínio da frequência : um método de identificação multi-modos. São Carlos.193p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.