

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA CURVA LIMITE DE
ESTABILIDADE QUANTO À FLAMBAGEM PLÁSTICA EM
CHAPAS METÁLICAS

Mariano Eduardo Moreno

Tese apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Engenharia Mecânica

ORIENTADOR: Prof. Tit. João Lirani

São Carlos
2006

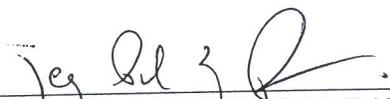
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MARIANO EDUARDO MORENO**

Tese defendida e julgada em 06-01-2006 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Titular **JOÃO LIRANI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) aprovado



Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) aprovado



Prof. Dr. **ERNESTO MASSAROPPI JUNIOR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado



Prof. Titular **HAZIM ALI AL-QUERESHI**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC) Aprovado



Prof. Livre-Docente **SERGIO TONINI BUTTON**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) APROVADO



Prof. Associado **JONÁS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica



Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALLJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Aos meus pais, René e Margarita,
Aos meus irmãos Ignacio, Patrícia e Ramón

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor João Lirani pela orientação e amizade.

Ao professor Hazim Ali Al-Qureshi por todo o apoio e motivação dados para a realização deste trabalho.

Aos colegas do laboratório Sérgio Evangelista e Alexandre Malavolta, pelo auxílio durante todo o período deste projeto.

Aos demais membros do laboratório de Mecânica Aplicada e Computacional.

Ao pessoal dos laboratórios de Tribologia e Compósitos, Otimização de Processos de Fabricação, LaMAFE e Materiais pela ajuda na execução dos ensaios experimentais.

Ao pessoal das Secretarias de Graduação e Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica pela atenção nas questões burocráticas.

Aos colegas de Pós-Graduação e Graduação e professores do Departamento de Engenharia Mecânica.

À FAPESP – Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa de estudos.

A todos os demais que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

Resumo

MORENO, M.E. (2006). *Determinação numérica da curva limite de estabilidade quanto à flambagem plástica em chapas metálicas*. São Carlos. 151p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Dentre os principais problemas que ocorrem na estampagem de chapas metálicas estão a fratura, e estricção (*necking*) e o enrugamento (*wrinkling*). Este último pode fazer com que a peça fabricada seja rejeitada por problemas que vão desde motivos estéticos até dificuldades de montagem destas peças e desgaste excessivo da ferramenta. Diversos pesquisadores tem estudado o problema de instabilidade à compressão que origina o fenômeno de enrugamento. Pretende-se estudar os principais métodos para predição do enrugamento, a saber, a teoria da bifurcação, a introdução de uma falha induzida e a aplicação do indicador proposto por Nordlund e Häggblad (coeficiente NH). O método escolhido será implementado junto a um programa de análise por elementos finitos de modo a obter diagramas limite de estabilidade, para então ser aplicado a peças mais genéricas. O procedimento é aplicado a peças de geometria relevante para serem ensaiadas experimentalmente de modo a validar as simulações numéricas propostas.

Palavras-chave: Enrugamento, conformação de chapas metálicas, método dos elementos finitos, diagramas limite de estabilidade, flambagem plástica

Abstract

MORENO, M.E. (2006). *Numerical determination of the stability limit curve applied to plastic buckling in sheet metal forming operation*. São Carlos. 151p. Thesis (Doctoral) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Among the main problems in sheet metal forming processes are the fracture, the necking and the wrinkling behavior of the material. The last one can produce rejected parts due difficulties in the assembly of these parts or excessive wear of the tooling. Many researchers have been studied the problem of the compression instability phenomenon that origins the wrinkling behavior. The objective of this work is the study of the main methods available to the wrinkling prediction, as the bifurcation theory, the induced defect and an indicator proposed by Nordlund and Häggblad (NH coefficient). The more suitable method will be implemented into a finite element analysis software in order to obtain the stability limit diagrams that can be used in the design of generic shape parts. Experimental studies will be done in parts subjected to compressive forming loads in order to validate the numerical simulations.

Keywords: Wrinkling, sheet metal forming, finite element method, stability limit diagrams, plastic buckling

Lista de Figuras

Figura 3.1 Corpo de prova genérico para ensaio de tração.....	7
Figura 3.2 Esquema de fixação do CDP plano em ensaios de tração: (a) Fixação por pino. (b) Fixação por cunha.....	7
Figura 3.3 Resistência ao escoamento: (a) Curva onde a resistência ao escoamento não é bem definida; (b) Curva típica de um aço baixo carbono.....	9
Figura 3.4 Esquema de extensômetro montado no CDP.....	11
Figura 3.5. Tração uniaxial. (a) Corpo de prova; (b) Curvas tensão/deformação (KOBAYASHI et al. 1989).....	11
Figura 3.6 Representação geométrica de um estado de tensões plástico no espaço ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).....	16
Figura 3.7 “Yield locii” no plano π para os critérios de máxima tensão de cisalhamento e energia de distorção.....	16
Figura 3.8 Equilíbrio com forças externas.....	18
Figura 3.9 Representação gráfica dos modelos matemáticos de comportamento com encruamento.....	20
Figura 3.10 Dois estados de tensão e um vetor taxa de deformação.....	22
Figura 3.11 Deformações na largura e espessura do CDP.....	25
Figura 3.12 Direção do CDP em relação à direção de laminação.....	26
Figura 3.13 Coluna submetida a carregamento axial de compressão nas posições inicial (linha tracejada) e deformada (linha contínua).....	28
Figura 3.14 Curvas baseadas nos módulos tangente e duplo. Comparação com resultados experimentais e curva elástica de Euler [JOHNSON & MELLOR, 1962]....	30
Figura 3.15 Padrões para uma placa retangular simplesmente suportada: padrão (a) é um caso especial do padrão (b), se for considerado $c = a$	35
Figura 4.1 Processo de análise por Elementos Finitos (BATHE, 1996).....	38
Figura 4.2 Trajetória da solução em um problema de bifurcação e resposta ao colapso de um modelo.....	50
Figura 4.3. Representação da constante esférica do critério arc length.....	52
Figura 5.1 Esquema do ensaio de enrugamento em peça cônica (TAYLOR, 1988)....	60

Figura 5.2 Limites de enrugamento e fratura na estampagem de peças cônicas (TAYLOR, 1988).....	60
Figura 5.3 Esquema do ensaio de instabilidade Yoshida - YBT (TAYLOR, 1988).....	61
Figura 5.4 Diagramas combinados de limite de conformação e enrugamento. (TAYLOR, 1988).....	62
Figura 6.1 Alterações geométricas no CDP de modo a mudar o estado de tensões que induz à instabilidade no ensaio YBT.....	76
Figura 6.2 Modelo numérico para levantamento dos pontos da curva limite.....	77
Figura 6.3 Passos na determinação do ponto de enrugamento.....	78
Figura 6.4 Dimensões dos CDPs [mm]. Nos ensaios foi utilizado $e = 1\text{mm}$	80
Figura 6.5 CDP acoplado à máquina de ensaios.....	80
Figura 6.6 CDPs cortados por jato d'água.....	81
Figura 6.7 CDP para o ensaio YBT.....	81
Figura 6.8 Dispositivo de ensaios e CDP acoplados à prensa hidráulica.....	82
Figura 6.9 Prolongadores com strain gauges colados.....	83
Figura 6.10 Análise por EF dos prolongadores: (a) distribuição de deformações na direção de solitação; (b) distribuição de deformações equivalentes.....	83
Figura 6.11 (a) Esquema da colagem dos strain gauges no pescoço do prolongador; (b) Ligação feita entre os strain gauges.....	84
Figura 6.12 Detalhe da garra de fixação do CDP.....	84
Figura 6.13 Medida de deslocamento fora do plano no centro do CDP.....	85
Figura 6.14 Montagem de dispositivos para medidas de deslocamento.....	86
Figura 6.15 Esquema geral do dispositivo acoplado à prensa e ao computador.....	86
Figura 6.16 Detalhamento dos componentes do dispositivo de ensaios.....	87
Figura 6.17 Malha gerada para o CDP e detalhe da região do defeito induzido.....	89
Figura 6.18 Materiais utilizados: na região A, elasto-plástico com encruamento isotrópico; na região B elasto-plástico perfeito.....	89
Figura 6.19 Malha em elemento hexaédrico e revestimento em shell onde pode-se perceber o defeito induzido: vista explodida.....	90
Figura 6.20 Configuração do modelo numérico.....	91
Figura 6.21 Detalhes da configuração 1 e do carregamento imposto.....	91
Figura 6.22 Malha expandida gerada na configuração 1.....	92
Figura 6.23 Modelo para obtenção dos estados de tensão: (a) Modelo deformado; (b) corte para auxiliar a visualização.....	93
Figura 7.1 Curvas médias Tensão-Deformação para o aço 1010.....	98
Figura 7.2 Curva média tensão-deformação para o alumínio.....	99
Figura 7.3 Aparato experimental utilizado.....	101
Figura 7.4 Computador com software de acionamento remoto da câmera digital que	

faz as aquisições de imagens durante os ensaios.....	101
Figura 7.5 CDP montado no dispositivo de ensaios e relógios comparadores para as medidas de deslocamento.....	102
Figura 7.6 Detalhe do relógio comparador montado no centro do CDP.....	102
Figura 7.7 Detalhe da câmera posicionada abaixo do barramento da prensa fotografando uma face do CDP.....	103
Figura 7.8 Escorregamento no braço do CDP: (a) CDP; (b) Detalhe da região de escorregamento.....	103
Figura 7.9 CDP estirado até a ruptura sem ocorrer a flambagem (direita) e CDP não deformado (esquerda).....	104
Figura 7.10 Ensaio com o CDP encurtado na região dos braços.....	105
Figura 7.11 Ensaio com o CDP encurtado e braços largos.....	106
Figura 7.12 Deslocamentos medidos em um ensaio final de CDP com braço de 40mm de largura.....	107
Figura 7.13 Deslocamentos medidos em um ensaio final de CDP com braço de 50mm de largura.....	107
Figura 7.14 Configuração deformada do CDP do ensaio YBT. Em linha tracejada a configuração original.....	109
Figura 7.15 Tensões efetivas no passo final de estiramento do CDP: (a) Solução pelo LS-DYNA – tensões em [MPa]; (b) Solução pelo ANSYS – tensões em [Pa].....	110
Figura 7.16 Elemento da região central do CDP: (a) Configurações inicial e após a flambagem; (b) Elementos da região central do CDP respectivos às configurações inicial e final.....	111
Figura 7.17 Estados submetidos ao longo do ensaio YBT.....	112
Figura 7.18 Histórico de tensões principais na região central do CDP: (a) Face superior; (b) Plano médio; (c) Face inferior. Tensões em [Mpa]. Tempo em [s].....	114
Figura 7.19 Histórico de tensões principais na região central do CDP: (a) Face superior; (b) Face inferior. Tensões em [Pa]. Tempo em [s].....	115
Figura 7.20 Deslocamento fora do plano de um nó no centro do CDP ao longo do tempo de aplicação de carga. Deslocamento em [mm]; Tempo em [s].....	116
Figura 7.21 Evolução das tensões principais e das deformações plásticas efetivas ao longo do tempo. Tensões em [Mpa]; Tempo em [s].....	117
Figura 7.22 Efeito do tamanho do defeito induzido no início da instabilidade: (a) Defeito de 0,1mm; (b) Defeito de 0,2mm.....	120
Figura 7.23 Correlação entre ensaios numéricos e experimentais do YBT.....	121
Figura 7.24 Variações do modelo numérico para levantamento de curvas.....	123
Figura 7.25 Curva limite para $a = b$	125
Figura 7.26 Histórico de deformações principais.....	125

Figura 7.27 Curva limite para $a = 1,1.b$	126
Figura 7.28 Curva limite para $a = 1,2.b$	127
Figura 7.29 Curva limite para $a = 1,3.b$	127
Figura 7.30 Curva limite para $b = 1,1.a$	128
Figura 7.31 Curva limite para $b = 1,3.a$	129
Figura 7.32 Curva limite para $b = 1,4.a$	129
Figura 7.33 Modelo EF utilizado para os testes do coeficiente NH.....	131
Figura 7.34 Coeficiente NH nos pontos B e C em função do tempo de simulação....	132
Figura 7.35 Linha de elementos considerada no levantamento do coeficiente NH....	133
Figura 7.36 Deslocamento do em z do elemento central em função do tempo.....	134
Figura 7.37 Coeficiente NH – ponto 1.....	134
Figura 7.38 Coeficiente NH – ponto 2.....	135
Figura 7.39 Coeficiente NH – ponto 3.....	135
Figura 7.40 Coeficiente NH – ponto 4.....	136
Figura 7.41 Coeficiente NH – ponto 5.....	136
Figura 7.42 Coeficiente NH – ponto 6.....	137
Figura 7.43 Coeficiente NH – ponto 7.....	137
Figura 7.44 Coeficiente NH – ponto 8.....	138
Figura 7.45 Condições de contato em uma estampagem de um copo: A – região sem contato; B – região com contato matriz/chapa chapa/prensa-chapas.....	139
Figura 7.46 Modos de enrugamento: (a) Situação sem enrugamento; (b) Primeiro modo de enrugamento; (c) Segundo modo de enrugamento; (d) Sétimo modo de enrugamento.....	140
Figura A1.1: Elemento sólido e coordenadas naturais dos nós.....	A1.3
Figura A2.1 Aproximação bilinear para a curva tensão deformação do CP1.....	A2.2
Figura A2.2 Aproximação por lei de potências para a curva tensão-deformação do CP1.....	A2.3
Figura A2.3 Aproximação por lei de potências para a curva tensão-deformação do CP1-al.....	A2.4

Lista de Tabelas

Tabela 7.1 Propriedades médias utilizadas nas simulações numéricas.....	97
Tabela 7.2 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em aço.....	98
Tabela 7.3 Propriedades médias utilizadas nas simulações numéricas.....	98
Tabela 7.4 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em alumínio....	99
Tabela 7.5 Defeitos induzidos adotados em cada caso.....	109
Tabela 7.6 Tensões e deslocamentos máximos utilizando o ANSYS.....	118
Tabela 7.7 Tensões e deslocamentos máximos utilizando o LS-DYNA.....	118
Tabela 7.8 Tensões principais no instante de flambagem utilizando o ANSYS.....	118
Tabela 7.9 Tensões principais no instante de flambagem utilizando o LS-DYNA.....	119
Tabela A2.1 Dados do ensaio de tração para corpos de prova em aço.....	A2.1
Tabela A2.2 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em aço..	A2.2
Tabela A2.3 Dados do ensaio de anisotropia para corpos de prova em aço.....	A2.3
Tabela A2.4 Dados medidos após o ensaio de anisotropia.....	A2.3
Tabela A2.5 Dados dos corpos de prova para ensaio de tração em alumínio.....	A2.4
Tabela A2.6 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em alumínio.	A2.4
Tabela A2.7 Dados do ensaio de anisotropia para corpos de prova em alumínio....	A2.5
Tabela A2.8 Dados medidos após o ensaio de anisotropia.....	A2.5

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos:

<i>a</i>	Vetor de acelerações [m/s ²]
<i>A</i>	Matriz Jacobiana
<i>A</i>	Área atual da seção de um corpo de prova [m ²]
<i>A_o</i>	Área inicial da seção de um corpo de prova [m ²]
<i>C</i>	Matriz de amortecimento [N/(m/s)]
<i>C</i>	Tensor constitutivo [Pa]
<i>d</i>	Vetor de deslocamentos [m]
<i>D</i>	Parte simétrica do tensor gradiente de velocidades [s ⁻¹]
<i>D^p</i>	Parte plástica do tensor taxa de deformação [s ⁻¹]
<i>e</i>	Deformação de engenharia [adimensional]
<i>E</i>	Módulo de Young [Pa]
<i>f</i>	Função de escoamento
<i>f</i>	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
<i>F</i>	Parâmetro de anisotropia
<i>F</i>	Tensor gradiente de deformações [adimensional]
<i>F_(i)</i>	Vetor de forças nodais internas [N]
<i>Ḟ</i>	Taxa de tração nominal aplicada a um orpo [N]
<i>f^b</i>	Vetor forças de campo [N]
<i>f^s</i>	Vetor forças de superfície [N]
<i>g</i>	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
<i>G</i>	Parâmetro de anisotropia
<i>G</i>	Módulo de cisalhamento [Pa]
<i>h</i>	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
<i>h</i>	Escalar que mede a taxa de encruamento [Pa]
<i>H</i>	Parâmetro de anisotropia
<i>i</i>	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 3)
<i>I</i>	Momento de inércia de área [m ⁴]
<i>I</i>	Coeficiente NH [adimensional]
<i>I₁</i>	Primeiro invariante do tensor de tensões [Pa]
<i>I₂</i>	Segundo invariante do tensor de tensões [Pa ²]
<i>I₃</i>	Terceiro invariante do tensor de tensões [Pa ³]
<i>j</i>	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 3)
<i>J₁</i>	Primeiro invariante do tensor de tensões desviadoras [Pa]
<i>J₂</i>	Segundo invariante do tensor de tensões desviadoras [Pa ²]
<i>J₃</i>	Terceiro invariante do tensor de tensões desviadoras [Pa ³]
<i>k</i>	Coeficiente de resistência [Pa]
<i>k</i>	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 3)
<i>K</i>	Tensão de escoamento a cisalhamento [Pa]

K	Matriz de rigidez [N/m]
l	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 3)
l	Comprimento atual de uma região de medida [m]
l	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
L	Parâmetro de anisotropia
L	Tensor gradiente de velocidades [s^{-1}]
l_o	Comprimento inicial de uma região de medida [m]
m	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
M	Parâmetro de anisotropia
M	Matriz de massa [kg]
$M_{\alpha\beta}$	Momento por unidade de comprimento [N]
n	Expoente de encruamento [adimensional]
n	Parâmetro de anisotropia normalizado [adimensional]
n	Versor especificando a direção da taxa de deformação plástica [adimensional]
N	Parâmetro de anisotropia
n_i	Versor normal à superfície considerada [adimensional]
P	Carregamento de tração ou compressão [N] ou por unidade de comprimento [N/m]
P_E	Carregamento de Euler [N]
$p1$	Carregamento de tração na direção 1 [Pa]
$p2$	Carregamento de compressão na direção 2 [Pa]
R	Vetor de carregamentos externos [N]
\hat{R}	Vetor de carregamentos efetivos [N]
r_i	<i>r-value</i> (parâmetro de anisotropia) medido na direção <i>i</i> [adimensional]
r_m	Valor médio do <i>r-value</i> [adimensional]
s	Tensor de tensões nominais [Pa]
S_F	Área onde são prescritas condições de (taxa de) tração [m ²]
S_V	Área onde são prescritas condições de taxa de deslocamento [m ²]
t	Tempo [s]
t	Espessura atual de uma região de medida [m]
t_o	Espessura inicial de uma região de medida [m]
U	Vetor de deslocamentos [m]
\dot{U}	Vetor de velocidades [m/s]
\ddot{U}	Vetor de acelerações [m/s ²]
V	Volume do corpo [m ³]
v	Vetor de velocidades [m/s]
v_i	Componentes do vetor velocidades [m/s]
w	Largura atual de uma região de medida [m]
w_o	Largura inicial de uma região de medida [m]
W	Parte anti-simétrica do tensor gradiente de velocidades [s^{-1}]
W_{ext}	Energia externa [J]
W_{int}	Energia interna [J]
W_{kin}	Energia cinética [J]
W_p	Trabalho plástico total [J]
x	Coordenada espacial cartesiana <i>x</i> [m]
x	Posição de uma partícula de um corpo na configuração deformada [m]
X	Posição de uma partícula de um corpo na configuração de referência [m]
X	Fator que define o carregamento na direção 2 dividido pelo carregamento na direção 2 [adimensional]
y	Coordenada espacial cartesiana <i>y</i> [m]

Y_i	Componente i da tensão de escoamento [Pa]
z	Coordenada espacial cartesiana z [m]

Símbolos Gregos minúsculos:

α	Fator de redução no cálculo do incremento de tempo crítico para integração explícita no tempo [adimensional]
α	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 2)
β	Fator de normalização no algoritmo <i>arc length method</i> [adimensional]
β	Índice de variação na notação tensorial (variação de 1 a 2)
χ	Função que mapeia a configuração atual do corpo em função das coordenadas de referência
δ_{ij}	Função delta de Kronecker
ε	Deformação verdadeira [adimensional]
ε^e	Deformação elástica [adimensional]
ε^p	Deformação plástica [adimensional]
ε^T	Deformação total [adimensional]
ε_l	Deformação verdadeira ao longo do comprimento l de um corpo [adimensional]
ε_w	Deformação verdadeira ao longo da largura w de um corpo [adimensional]
ε_t	Deformação verdadeira ao longo da espessura t de um corpo [adimensional]
$\dot{\varepsilon}$	Tensor taxa de deformação [adimensional]
$\dot{\varepsilon}^p$	Tensor taxa de deformação plástica [adimensional]
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica equivalente [adimensional]
ϕ	Função de forma dos elementos
γ_{ij}	Componentes de deformação à cisalhamento para $i \neq j$ [adimensional]
η	Coordenada natural de um elemento
κ	Parâmetro de encruamento função do trabalho plástico total (<i>work hardening</i>) ou do histórico de deformações (<i>strain hardening</i>)
λ	Multiplicador para cálculo do algoritmo de bifurcação [adimensional]
$\dot{\lambda}$	Constante plástica
ν	Coefficiente de Poisson [adimensional]
π	Plano π
ρ	Densidade de material [kg/m ³]
$\dot{\rho}$	Taxa de variação da curvatura [1/ms]
σ	Tensor de tensões verdadeiras [Pa]
σ_i	Tensões principais para $i = 1, 2, 3$
σ_m	Componente hidrostático de tensão [Pa]
σ'	Tensor de tensões desviadoras [Pa]
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva [Pa]
τ_{ij}	Componentes de cisalhamento do tensor de tensões ($i \neq j$)
ξ	Coordenada natural de um elemento
ξ_Q	Coordenadas naturais dos pontos de quadratura de um elemento
ζ	Coordenada natural de um elemento

Símbolos Gregos maiúsculos:

Δl	Comprimento de arco no algoritmo <i>arc length method</i>
Δr	Coefficiente de anisotropia planar
Δt	Incremento de tempo [s]
$\Delta \Pi$	Varição na energia potencial total
$\Delta \dot{\theta}$	Taxa de variação do ângulo de inclinação

Lista de Abreviaturas e Siglas

CDP:	Corpo de prova
EF:	Elementos finitos
FLD:	<i>Forming limit diagram</i>
FPC:	Força do prensa-chapas
MEF:	Método dos elementos finitos
NH:	Nome adotado para o indicador proposto por Nordlund e Hägblad
PDV:	Princípio dos deslocamentos virtuais
UMAT:	<i>User material</i> – material definido pelo usuário implementado no código do programa LS-DYNA®
YBT:	<i>Yoshida buckling test</i>

Sumário

1	Introdução.....	1
2	Objetivos.....	4
3	Teoria da Plasticidade.....	6
	3.1 Ensaio de Tração.....	6
	3.2 Tensão, Deformação e Taxa de Deformação.....	10
	3.3 Critérios de Escoamento.....	15
	3.4 Equilíbrio e Princípio das Taxas de Trabalhos Virtuais.....	17
	3.4.1 Equações de Equilíbrio.....	17
	3.4.2 Equilíbrio com Forças Externas.....	17
	3.4.3 Princípio da Taxa de Trabalho Virtual.....	18
	3.5 Encruamento.....	19
	3.6 Potencial Plástico e Regra de Fluxo.....	21
	3.7 Princípio do Máximo Trabalho Plástico.....	22
	3.8 Equações de Prandtl-Reuss e Levy-Mises.....	23
	3.9 Anisotropia Plástica.....	24
	3.10 Instabilidade Plástica.....	27
	3.10.1 Flambagem em Colunas.....	27
	3.10.2 Teoremas de Análise Limite.....	31
	3.10.3 Flambagem Plástica de Placas e Cascas.....	32
	3.10.4 Análise Limite de Placas.....	33
4	Método dos Elementos Finitos.....	37
	4.1 Integração Explícita no Tempo.....	40
	4.2 Implementação da Integração Explícita no Tempo.....	43
	4.3 Integração Implícita no Tempo.....	47
	4.3.1 Algoritmos Tipo Newton-Raphson.....	48
	4.3.2 Algoritmos Tipo “Arc-Length”.....	49
	4.4 Implementação do Método de Newton.....	53
	4.5 Implementação de Modelo de Material.....	56
5	Enrugamento em Chapas Metálicas.....	58
	5.1 Propriedades dos Materiais e o Enrugamento.....	58

5.2 Ensaio e Diagramas Limite de Conformação.....	59
5.3 Modelos para Avaliação do Início do Enrugamento.....	62
5.3.1 Teoria da Bifurcação.....	62
5.3.2 Inserção de Imperfeição Inicial.....	68
5.3.3 Coeficiente de Nordlund e Häggblad.....	69
6 Materiais e Métodos.....	75
6.1 Descrição da Metodologia Empregada.....	75
6.2 ETAPA 1: Caracterização.....	79
6.3 ETAPA 2: Ensaio Experimental do Yoshida Buckling Test.....	81
6.3.1 Preparação dos Corpos de Prova.....	81
6.3.2 Dispositivo de Ensaio.....	81
6.3.3 Aplicação de Carga.....	87
6.4 ETAPA 3: Simulação Numérica do Ensaio YBT.....	87
6.5 ETAPA 4: Obtenção dos Demais Estados de Tensão.....	90
6.6 ETAPA 5: Levantamento das Curvas de Estabilidade.....	93
6.7 ETAPA 6: Aplicação da Curva Limite de Estabilidade a Projetos.....	93
6.8 Equipamentos Utilizados.....	94
6.8.1 Recursos Computacionais.....	94
6.8.2 Ensaio Experimentais.....	95
7 Resultados e Discussões.....	97
7.1 Resultados dos Ensaio de Caracterização de Materiais.....	97
7.1.1 Ensaio para Aço 1020.....	97
7.1.2 Ensaio para Alumínio 7475-O.....	98
7.2 Resultados dos Ensaio Experimentais YBT.....	99
7.3 Resultados dos Ensaio Numéricos YBT.....	107
7.3.1 Análises em Aço.....	108
7.3.2 Simulações Baseadas nos Ensaio Experimentais.....	121
7.4 Simulações Numéricas para Determinação das Curvas Limite de Estabilidade.....	122
7.4.1 Resultados para o Modelo 1 ($a = b$).....	123
7.4.2 Resultados para o Modelo 2 ($a > b$).....	125
7.4.3 Resultados para o Modelo 3 ($a < b$).....	128
7.5 Implementação do Coeficiente NH.....	129
7.5.1 Testes da Implementação.....	129
7.5.2 Aplicação ao Ensaio Yoshida.....	132
7.6 Considerações Sobre o Contato no Enrugamento de Peças Conformadas.....	139

8 Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros.....	141
<i>8.1 Conclusões.....</i>	141
<i>8.2 Sugestões de Trabalhos Futuros.....</i>	142
9 Referências Bibliográficas.....	143
10 Bibliografia.....	151
Apêndice 1.....	A1.1
Apêndice 2.....	A2.1

1 Introdução

Dentre os principais problemas encontrados em processos de conformação de chapas metálicas estão as falhas por excesso de material – o enrugamento, e por falta de material – a estrição. Tais problemas são tradicionalmente resolvidos através de “tentativa e erro” na construção das matrizes, tornando seu projeto bastante caro. Uma solução que vem cada vez mais ocupando espaço nas indústrias consiste na simulação numérica de tais processos, para se ter um maior conhecimento do histórico de solicitações sofrido pelo material durante a conformação mecânica. Desta maneira, a solução por tentativa e erro pode ser reduzida com a correta utilização de simulações numéricas. Dentre os principais métodos para a simulação de processos de estampagem, destaca-se o *método dos elementos finitos*, devido a sua versatilidade na descrição de formas complexas e na eficaz implementação de algoritmos para o tratamento das não linearidades envolvidas em tais simulações.

O estudo do problema de enrugamento na conformação de chapas metálicas tem crescido devido ao desenvolvimento de ligas metálicas de alta resistência, que permitem a produção de peças conformadas mais finas e com propriedades similares às de peças feitas em ligas tradicionais. A diminuição na espessura das chapas faz com que estes materiais sejam mais susceptíveis ao enrugamento caso não se tome os devidos cuidados durante a conformação. Esta tese apresenta uma contribuição para a caracterização do início do problema de enrugamento que ocorre em conformação de chapas metálicas, restringindo o estudo ao caso de regiões onde não ocorre contato com a matriz ou punção, ou seja, na região das paredes da peça formada na estampagem. Para tal estudo, a tese foi dividida em 10 capítulos, que estão divididos da seguinte maneira:

CAPÍTULO 1: Introdução – apresenta-se a motivação para o estudo realizado e a estrutura do texto da tese.

CAPÍTULO 2: Objetivos – apresenta-se a definição clara dos objetivos propostos por este trabalho e dos recursos necessários à sua execução.

CAPÍTULOS 3 a 5: Revisão Bibliográfica – apresenta-se de maneira resumida o embasamento teórico necessário ao estudo apresentado. Para a melhor compreensão está dividido em três partes:

- Na primeira parte apresenta-se a teoria da plasticidade e sua aplicação a problemas típicos de conformação mecânica, para uma melhor compreensão das formulações envolvidas no tratamento teórico do problema;
- Na segunda parte abordada-se a implementação numérica dos tópicos apresentados na primeira parte, bem como o algoritmo de funcionamento dos programas comerciais utilizados, de modo a explicar como foram utilizados no tratamento do problema e como foram feitas as implementações de rotinas desenvolvidas para auxílio do monitoramento do processo de enrugamento;
- Na terceira parte aborda-se especificamente o estudo do fenômeno de enrugamento em conformação de chapas. São apresentados os estudos mais relevantes da área, comentando-se suas vantagens e limitações.

CAPÍTULO 6: Materiais e Métodos – apresenta-se a metodologia de trabalho utilizada e sua implementação. A forma de abordagem é apresentada e justificada em detalhes. Descrevem-se também equipamentos e programas utilizados para sua obtenção.

CAPÍTULO 7: Resultados e Discussões – faz-se uma ampla demonstração dos resultados obtidos em todas as fases do projeto e uma discussão das dificuldades e sucessos encontrados no desenvolvimento do trabalho. Os resultados abrangem as etapas de ensaios experimentais, simulações numéricas (incluindo a avaliação dos programas utilizados) e implementação de algoritmos junto ao programa LS-DYNA ®.

CAPÍTULO 8: Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros – apresentam-se as conclusões relativas ao trabalho e sugestões para sua melhoria e continuidade.

CAPÍTULO 9 e 10: Referências Bibliográficas e Bibliografia Consultada - referências de literatura utilizadas neste trabalho.

APÊNDICES: detalhamentos e informações adicionais referentes a deduções e resultados apresentados no texto principal.

2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho consiste em uma proposta de trabalho para caracterização do fenômeno de enrugamento, defeito que pode ocorrer em processos de conformação de chapas.

O fenômeno ocorre devido a uma flambagem plástica em uma região submetida a um carregamento biaxial, sendo em uma das direções um carregamento de tração e na outra um carregamento de compressão. Quando este último atinge um valor crítico, ocorre a flambagem, elástica ou plástica, de acordo com os níveis de carregamento aplicados. Pretende-se focar este trabalho na análise da caracterização do colapso plástico.

Existem soluções analíticas para problemas simples envolvendo o colapso plástico de chapas, mas em geral é difícil aplicar a problemas mais complexos, como por exemplo, em conformação de chapas metálicas. O trabalho inicia um estudo de uma forma de abordagem que possa ser aplicada a problemas mais genéricos. Inicialmente o procedimento apresentado não é aplicável a qualquer processo de conformação de chapas, mas a regiões ou casos particulares deste tipo de processo, conforme mencionado na Introdução. Discutem-se algumas formas de se estender a metodologia apresentada orientando-se uma direção de pesquisa sobre o assunto.

Para se chegar a este objetivo, a metodologia trabalhada faz uso de ensaios experimentais em um corpo de prova no qual se induz um estado biaxial de tração-compressão, de modo a provocar uma flambagem na direção de compressão.

Em seguida faz-se a simulação numérica de um modelo que não pode ser reproduzido fisicamente, mas numericamente pode-se variar o estado de tensões deste corpo caracterizando-se várias condições nas quais ocorre a instabilidade, inclusive procurando-se reproduzir a situação realizada experimentalmente.

Finalizando-se, propõe-se o levantamento de curvas limite quanto ao enrugamento, semelhantes aos diagramas limite de conformação - FLD (*forming limit diagram*), que podem ser aplicados ao projeto voltado para a conformação de chapas metálicas.

Também neste trabalho foi implementado o coeficiente NH, proposto por NORDLUND e HÄGGBLAD (1997), para o auxílio no monitoramento das regiões da peça onde começa a ocorrer o enrugamento, como ferramenta de apoio para a aplicação do método proposto a peças mais complexas.

3 Teoria da Plasticidade

Diversas referências podem ser citadas de textos específicos sobre a teoria clássica da plasticidade. Dentre as principais referências, tem-se obras como os textos de HILL (1950a), JOHNSON & MELLOR (1962), MENDELSON (1983), LUBLINER (1990), CHEN & ZHANG (1991) e KHAN & HUANG (1995).

Na aplicação da teoria da plasticidade a problemas envolvendo conformação mecânica, pode-se citar como importantes referências os trabalhos de AL-QURESHI (1985a, 1985b, 1990), ALTAN et al. (1986) e KOBAYASHI et al (1989).

Apresenta-se inicialmente uma abordagem referente ao ensaio de tração, através do qual são obtidas as principais grandezas para o estudo da teoria de plasticidade. Em seguida, são apresentados os conceitos de tensão, deformação e suas taxas, critério de escoamento, trabalho plástico, potencial plástico, regra de fluxo, encruamento e anisotropia.

3.1 Ensaio de Tração

Os ensaios de tração têm como objetivo o levantamento de propriedades de modo a prever o comportamento do material em situações diferentes da de carregamento uniaxial. Inicialmente é medida a resistência do material, em termos da tensão necessária para causar uma deformação plástica apreciável, ou em termos da máxima tensão que o material pode suportar. Estes parâmetros, na prática, são utilizados em conjunto com fatores de segurança para projeto mecânico. Podem-se fazer medidas da ductilidade do material e de quanto ele pode ser deformado antes da fratura. A baixa ductilidade em um ensaio de tração normalmente está associada a uma baixa resistência à fratura. Propriedades elásticas também podem ser medidas, mas atualmente medidas mais precisas podem ser obtidas através de técnicas de ultra-som.

Um corpo de prova (CDP) típico para ensaios de tração é mostrado na Figura 3.1, mostrando as regiões por onde o corpo é preso e a região onde as medidas são feitas (*gauge length*). O CDP pode ser construído a partir de uma chapa plana ou uma barra de seção transversal circular. Existem várias formas de se prender o CDP, algumas das quais mostradas na Figura 3.2.



Figura 3.1 Corpo de prova genérico para ensaio de tração

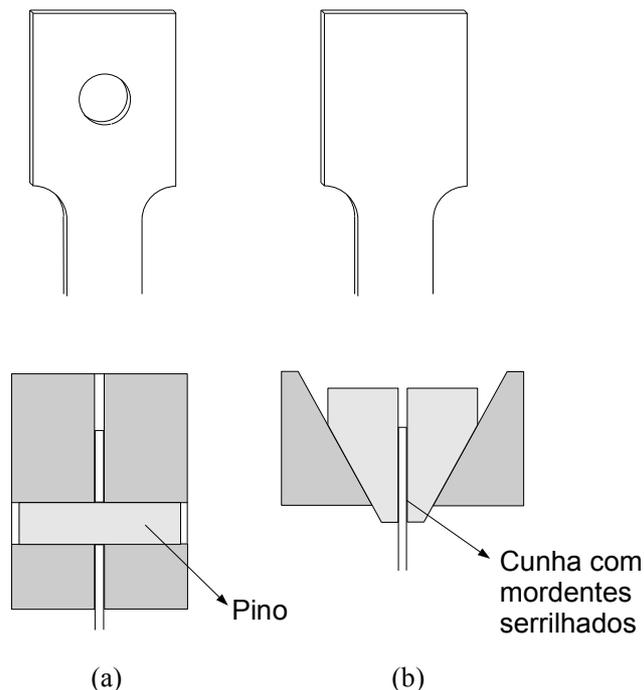


Figura 3.2 Esquema de fixação do CDP plano em ensaios de tração: (a) Fixação por pino. (b) Fixação por cunha

Quando um sólido metálico é submetido a pequenas tensões, a curva tensão-deformação apresenta três características a serem destacadas [MALVERN, 1969]:

1. Uma região inicial, linear, responsável pela resposta elástica;
2. Escoamento;
3. Região plástica de encruamento, onde as tensões crescem mais lentamente com a deformação que na região elástica e uma deformação permanente permanece após o descarregamento.

Para a maioria dos materiais a porção inicial é linear. O coeficiente angular desta região linear, chamada de *módulo de Young*, é obtida por:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3.1)$$

onde σ e ϵ são respectivamente a tensão e a deformação axial no ponto.

Na região elástica a razão entre a deformação de contração na lateral do CDP e a deformação axial é denominada coeficiente de Poisson:

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (3.2)$$

Como as deformações elásticas são normalmente muito pequenas, uma medição precisa do módulo de Young e coeficiente de Poisson em um CDP requer medidas de deformações com um extensômetro extremamente sensível.

Quando a tensão atinge um valor limite, o comportamento tensão-deformação deixa de ser linear e a deformação não é recuperada totalmente após o descarregamento. A deformação que permanece é chamada deformação plástica. A primeira deformação plástica corresponde ao primeiro desvio da linearidade. A partir desse ponto tem-se a contribuição das porções plástica e elástica na deformação total. Assim:

$$\epsilon_T = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (3.3)$$

Onde ϵ_e é a contribuição elástica e ϵ_p é a contribuição plástica.

A definição de limite entre a parte elástica e plástica teoricamente pode ser dada como sendo a tensão na qual a curva tensão deformação desvia da linearidade. Contudo, na prática, este ponto depende da precisão da medição de deformação. Então para evitar-se este problema, o início da plasticidade é descrito usualmente como um *offset* da resistência ao escoamento, que pode ser medido com grande repetibilidade.

Para construir o gráfico desta maneira deve-se construir uma linha reta paralela à porção linear inicial da curva tensão-deformação, usualmente

deslocada de $\varepsilon = 0,002$ (deformação de 0,2%). A resistência ao escoamento é a tensão na qual esta linha intercepta a curva tensão-deformação, conforme mostrado na Figura 3.3(a). Outros valores de *offset* podem ser usados em casos particulares. A vantagem em definir-se a resistência ao escoamento desta maneira é que este parâmetro pode ser reproduzido facilmente, diminuindo a dependência da resolução do sistema de medida.

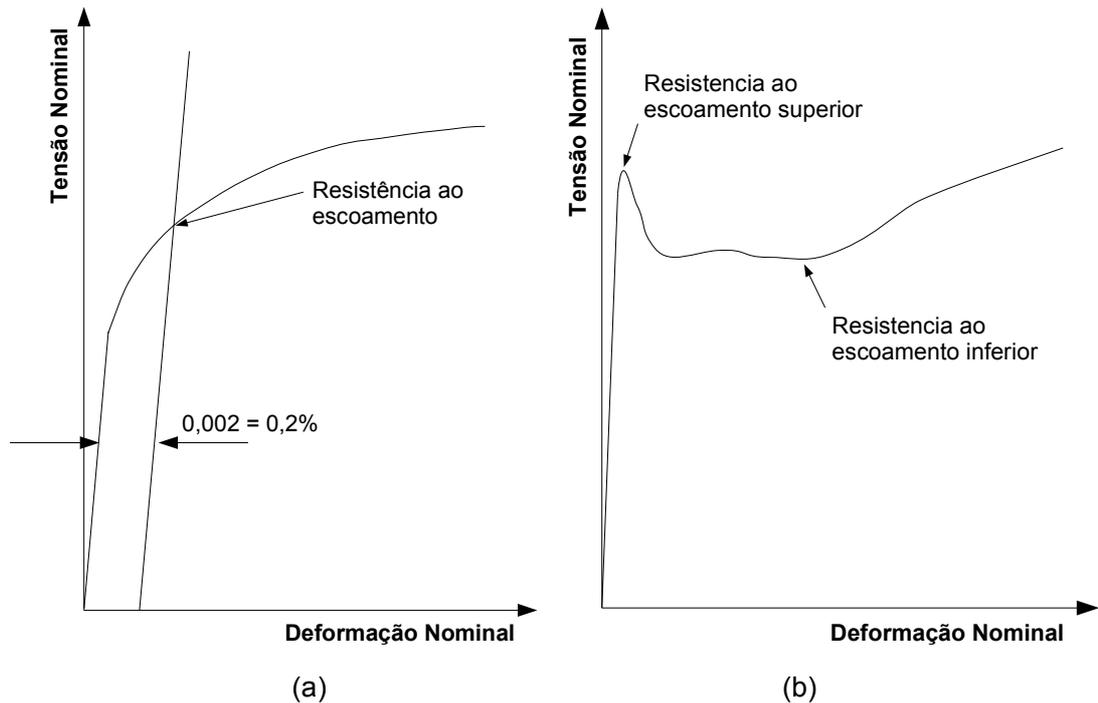


Figura 3.3 Resistência ao escoamento: (a) Curva onde a resistência ao escoamento não é bem definida; (b) Curva típica de um aço baixo carbono

Para alguns materiais (como aços baixo carbono) a curva tensão deformação tem um máximo inicial seguido de tensões mais baixas, como mostrado na Figura 3.3(b). Para estes materiais, o valor inferior da região de resistência ao escoamento é utilizado para descrever o escoamento. Isto porque medidas do máximo inicial são extremamente sensíveis a como o carregamento axial é aplicado durante o ensaio de tração.

A resistência à tração é definida como o valor mais alto de tensão nominal. Até o carregamento máximo a deformação deve ser uniforme na região de medida. Para materiais dúcteis a resistência à tração corresponde ao ponto onde a deformação começa a localizar-se, formando a estrição. Em materiais menos dúcteis ocorre a fratura antes da estrição.

O método mais simples para medidas de deformação, muitas vezes utilizado para metais dúcteis e polímeros, assume que as deformações sejam grandes o suficiente para que possam ser calculadas com precisão diretamente a partir da translação do carro da máquina. Desta forma, não são necessárias medidas diretas no corpo de prova. Assumindo-se que o deslocamento do carro corresponde ao alongamento do CDP, a deformação nominal pode ser facilmente calculada dividindo-se o deslocamento do carro no instante desejado pelo comprimento da região de deformação. Este procedimento, no entanto, negligencia que uma parte do movimento do carro corresponde à distorção elástica da máquina de tração, das garras e da região de suporte do CDP. A precisão pode ser melhorada desde que se faça uma calibração do sistema, determinando-se antecipadamente a quantidade de deslocamento associada à distorções na máquina em função do carregamento.

Quando se trata de pequenas deformações, uma grande precisão pode ser obtida com o uso de um extensômetro montado diretamente sobre o corpo de prova (Figura 3.4). As medidas são armazenadas digitalmente e o valor é lido por um computador. Extensômetros típicos têm comprimento de medida fixo em 25 ou 50 mm (1 ou 2 pol). A deformação máxima captada por extensômetros de 25 mm pode ser de 10%, 50% ou 100%, de acordo com o modelo.

3.2 Tensão, Deformação e Taxa de Deformação

As grandezas que podem ser usadas para descrever o mecanismo de deformação de um corpo, passando de uma configuração para outra por meio da aplicação de um carregamento externo, são a tensão, a deformação e a taxa de deformação (KOBAYASHI et al., 1989).

Considere o ensaio uniaxial de tração de um CDP de seção transversal cilíndrica, de comprimento inicial l_0 e de seção transversal de área A_0 conforme a Figura 3.5. O CDP é tracionado axialmente por uma força P até o comprimento l e área A , no tempo t . A resposta do material fornece uma curva tensão-deformação. A deformação é assumida homogênea até o início da formação da estrição (*necking*).

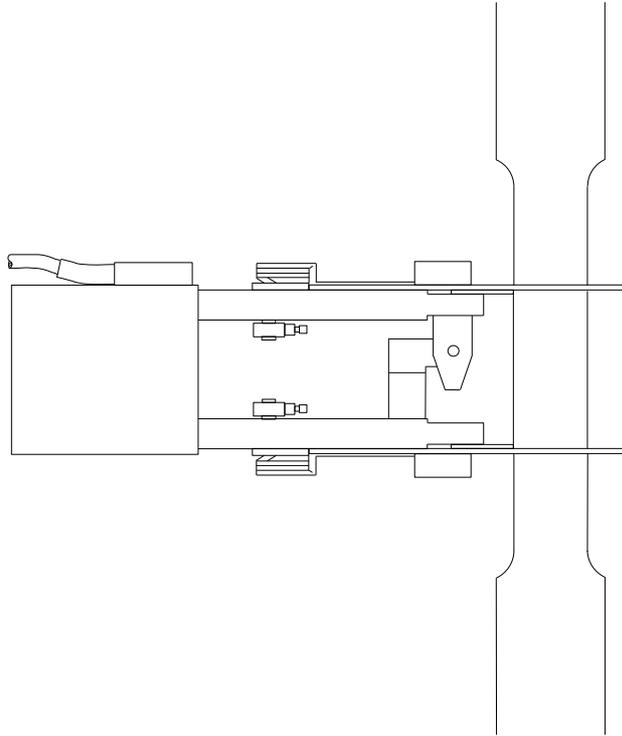


Figura 3.4 Esquema de extensômetro montado no CDP

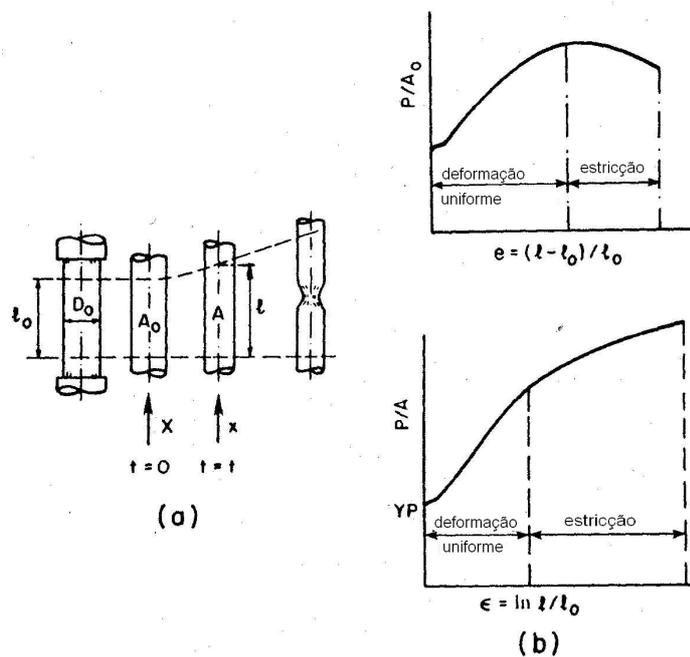


Figura 3.5. Tração uniaxial. (a) Corpo de prova; (b) Curvas tensão/deformação (KOBAYASHI et al. 1989).

Há dois modos de descrever a deformação de um meio contínuo, a Lagrangiana e a Euleriana. A descrição Lagrangiana emprega as coordenadas X_i de uma partícula no estado de referência (não deformada) como variável

independente, enquanto na descrição Euleriana as variáveis independentes são as coordenadas x_i de um ponto material no estado deformado. Quando a deformação é infinitesimal, onde produtos de diferenciais dos deslocamentos podem ser desprezados, não se necessita fazer distinção entre ambas.

Na teoria da deformação infinitesimal, as tensões e taxas de deformação (ou deformações infinitesimais) são expressas em relação a um sistema de coordenadas fixo na configuração do material no tempo em consideração. No caso de tração uniaxial:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\dot{l}}{l} \\ d\epsilon &= \frac{dl}{l}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Onde o ponto sobre a variável indica derivada em relação ao tempo. A tensão definida no conjunto de equações (3.4) é chamada tensão verdadeira ou tensão de Cauchy. A deformação total é medida integrando-se a deformação infinitesimal:

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l d\bar{\epsilon} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)\tag{3.5}$$

é chamada deformação logarítmica ou natural.

Na análise de conformação de metais, onde ocorrem grandes deformações, seguem-se todas as partículas do corpo em movimento, da configuração original até a final, adotando-se assim uma formulação Lagrangiana (do material) do problema. Na descrição Lagrangiana de deformação finita, as medidas de tensão e deformação são expressas como mostrado a seguir.

Seja a posição da partícula na configuração deformada no tempo t designada por:

$$x = \chi(X, t)\tag{3.6}$$

Onde X é a posição de referência da partícula e t é o tempo. No caso de tração uniaxial, seja X direcionada ao longo do eixo longitudinal do CDP. Então:

$$x = X + \left(\frac{l-l_0}{l_0}\right)X\tag{3.7}$$

Extensão é definida como sendo o gradiente de deslocamento relativo à posição de referência e é expresso por:

$$\frac{\partial(x-X)}{\partial X} = \frac{l-l_0}{l_0} = e \quad (3.8)$$

Onde e é definido como deformação de engenharia (deformação nominal).

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie é definido como a intensidade da força atuando no corpo deformado mas medido por unidade de área da configuração de referência, enquanto a tensão de Cauchy é definida por unidade de área no estado deformado. Em tração uniaxial, a tensão de engenharia (ou tensão nominal) é:

$$p_{11} = \frac{P}{A_0} \quad (3.9)$$

que corresponde a um componente do tensor de tensões não simétrico de Piola-Kirchhoff.

O valor de tensão correspondente à deformação Lagrangiana é dado por:

$$s_{11} = \frac{p_{11}}{1+e} \quad (3.10)$$

A tensão dada pela eq. (3.10) corresponde a um componente do tensor simétrico (ou segundo tensor) de tensões de Piola-Kirchhoff.

No contexto da análise pelo método dos elementos finitos de processos de conformação de metais, pode-se considerar duas formas de abordar o problema: a **formulação de sólido** ou **formulação de fluxo**. A formulação de sólido é o caso mais geral, onde a porção elástica da deformação não é desprezada. Na formulação de fluxo estabelece-se a hipótese de que as deformações elásticas são desprezíveis frente as deformações inelásticas. É um caso particular da formulação de sólido, mas é aplicável em muitos processos de conformação de metais. Do ponto de vista de análise computacional, a formulação de fluxo é muito mais econômica que a de sólido.

A formulação de fluxo é baseada na teoria de deformação infinitesimal, enquanto a formulação de sólido considera deformação finita.

O tensor de taxa de deformação $[\dot{\epsilon}_{ij}]$, onde $i, j = x, y, z$, é simétrico e seus componentes são definidos por:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} & \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} \\
\dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} & \dot{\epsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\
\dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} & \dot{\epsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde v_i são os componentes de velocidade e $\dot{\gamma}_{ij}$ são os componentes de taxa de deformação ao cisalhamento em engenharia. Em notação indicial pode-se escrever:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.12}$$

onde a vírgula significa derivada parcial em relação à coordenada que a segue.

O tensor de tensões de Cauchy $[\sigma_{ij}]$, onde $i, j = 1, 2, 3$ ou x, y, z , é também simétrico e representado por:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

A tensão também pode ser especificada em termos dos três componentes principais, ou dos invariantes do tensor. As tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as raízes da equação abaixo:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \tag{3.14}$$

onde I_1, I_2, I_3 , são quantidades independentes das direções dos eixos escolhidos e chamadas de invariantes do tensor de tensões σ_{ij} .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\
I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_z \tau_{xy}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3
\end{aligned} \tag{3.15}$$

É comum dividir-se o tensor de tensões em duas partes, o tensor de tensões esféricas e o tensor de tensões desviadoras (*deviatoric stress*).

Assim, o tensor de tensões esféricas pode ser escrito como $\delta_{ij} \sigma_m$, onde $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ é o componente hidrostático da tensão e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O tensor de tensões desviadoras é dado por:

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \tag{3.16}$$

Os três componentes principais do tensor de tensões desviadoras não

são independentes, uma vez que $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'$ é igual a zero.

Os invariantes do tensor de tensões desviadoras podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \\ J_2 &= -(\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1') \\ J_3 &= \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 Critérios de Escoamento

O critério de escoamento é uma lei definindo um limite de elasticidade sob qualquer combinação de tensões possível. É expresso por:

$$f(\sigma_{ij}) = C(\text{const}) \quad (3.18)$$

A função de tensões $f(\sigma_{ij})$ é chamada função de escoamento. A validade de qualquer critério de escoamento proposto deve ser verificada experimentalmente.

O critério de von Mises estabelece que o escoamento ocorre quando J_2 atinge um valor crítico. O critério pode ser escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = k^2 \quad (3.19a)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (3.19b)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6k^2 \quad (3.19c)$$

onde k é um parâmetro que ajusta a escala de tensão e dependência das propriedades de material.

As constantes nas equações (3.18) e (3.19) podem ser determinadas a partir de um estado simples, como tensão uniaxial. No escoamento em tração simples, $\sigma_1 = Y$ (tensão aplicada) e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Assim, pode-se escrever a equação (3.19) como:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2 \quad (3.20)$$

O parâmetro k pode ser identificado como tensão de escoamento a cisalhamento e $k = Y/\sqrt{3}$, conforme o critério mostrado na equação (3.19).

Um estado de tensões é completamente especificado pelos valores das três componentes principais. Então, cada estado de tensões pode ser representado por um vetor no espaço tridimensional de tensões, onde as tensões principais são tomadas como sendo as coordenadas cartesianas. Na

Figura 3.6, \overline{OS} é o vetor $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e seu componente \overline{OP} é o vetor representando a tensão desviadora $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$. \overline{OP} sempre reside sobre o plano π cuja equação é dada por $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. O componente hidrostático $(\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$ da tensão é representado por \overline{PS} (paralelo à geratriz do cilindro), que é perpendicular ao plano π .

Um critério de escoamento, que seja independente do componente hidrostático de tensão, pode ser representado por uma curva C no plano π . O *yield locus* correspondente ao critério de tensão de cisalhamento (Tresca) e de energia de distorção (von Mises) são dadas respectivamente pelo hexágono regular e pelo círculo mostrado na Figura 3.7.

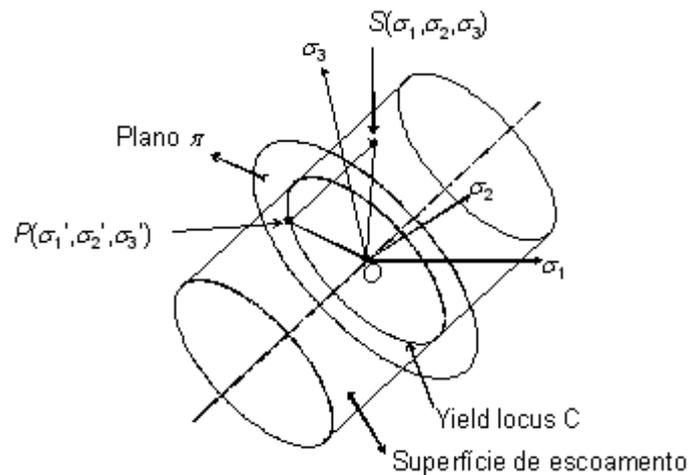


Figura 3.6 Representação geométrica de um estado de tensões plástico no espaço

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

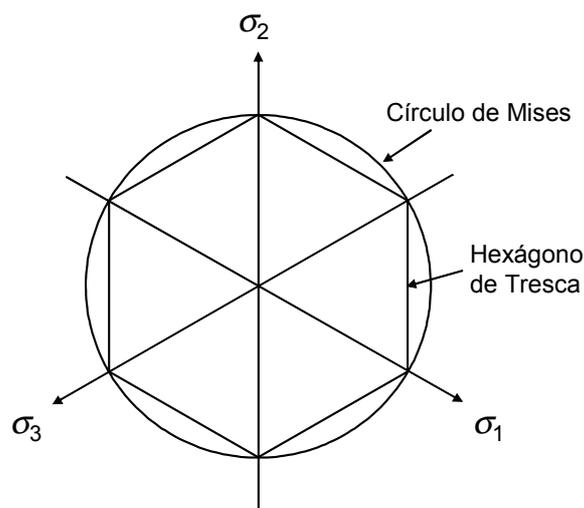


Figura 3.7 “Yield locii” no plano π para os critérios de máxima tensão de cisalhamento e energia de distorção.

3.4 Equilíbrio e Princípio das Taxas de Trabalhos Virtuais

3.4.1 Equações de Equilíbrio

Em um sistema de coordenadas retangular cartesiano, as equações de equilíbrio, desprezadas as forças de campo, são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (3.21)$$

Em notação indicial, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,i} = 0 \quad (3.22)$$

onde os índices duplicados indicam somatório.

3.4.2 Equilíbrio com Forças Externas

A tensão ao longo da fronteira representada pela aresta BC está em equilíbrio com a força de tração F_i (Figura 3.8). O equilíbrio de tensões pode ser escrito como:

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.23)$$

onde n_j é o versor normal ao segmento BC. Para o caso bi-dimensional, mostrado na Figura 3.8, as equações podem ser escritas:

$$\begin{aligned}F_x &= l \sigma_x + m \tau_{xy} \\ F_y &= m \sigma_y + l \tau_{yx}\end{aligned}\quad (3.24)$$

onde $l = \frac{dx}{dL}$ e $m = \frac{dy}{dL}$ são os co-senos diretores da normal n do contorno.

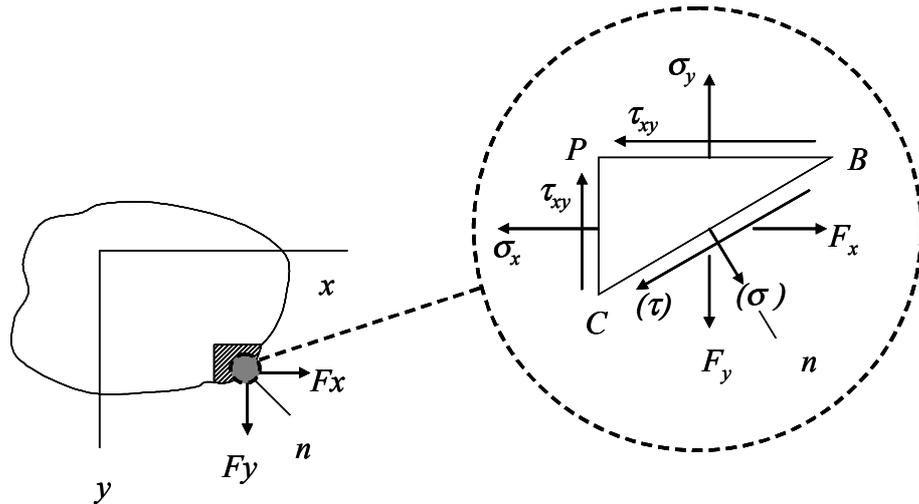


Figura 3.8 Equilíbrio com forças externas

3.4.3 Princípio da Taxa de Trabalho Virtual

O princípio da taxa de trabalho virtual estabelece que para um campo de tensões que está em equilíbrio com o corpo e com as forças superficiais aplicadas, a taxa de trabalho interna no corpo deformado é igual à taxa de trabalho realizada pelas forças superficiais para todos os campos de velocidade que são contínuos e continuamente diferenciáveis (campos de velocidade virtuais). Considere-se um campo de tensões σ_{ij} em equilíbrio e v_j um campo qualquer de velocidades virtuais. O princípio estabelece que:

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV = \int_S F_j v_j dS \quad (3.25)$$

onde V é o volume do corpo e S é a superfície. Desde que σ_{ij} seja simétrico, pode-se também escrever:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_j v_j dS \quad (3.26)$$

onde $\dot{\epsilon}_{ij}$ é a taxa de deformação derivável de v_j de acordo com

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Como prova, deve-se observar que:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_j) - v_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

onde $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ e $\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_j) dV = \int_S v_j \sigma_{ij} n_i dS$

Para o caso bi-dimensional da Figura anterior pode-se então escrever:

$$\int_V \left(\sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dV = \int_V (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dV = \int_S (F_x v_x + F_y v_y) dS \quad (3.27)$$

3.5 Encruamento

Após o escoamento inicial, o nível de tensão necessário para provocar nova deformação plástica pode ser dependente do grau de deformação plástica atual. Tal fenômeno é chamado de encruamento. Portanto, a superfície de escoamento varia a cada estágio da deformação plástica, com as superfícies de escoamento subseqüentes sendo de algum modo dependentes das deformações plásticas.

Alguns modelos que descrevem o encruamento em um material são ilustrados na Figura 3.9. Além destes, podem ser utilizados modelos combinando os encruamentos isotrópico e cinemático. Em (a) mostra-se um material perfeitamente plástico, onde o nível da tensão de escoamento independe do grau de plastificação. Se as superfícies de escoamento subseqüentes forem uma expansão uniforme da curva de escoamento original, sem translação, como mostrado em (b), o modelo de encruamento é dito isotrópico. Por outro lado, se as superfícies de escoamento subseqüentes preservarem suas dimensões e orientações mas transladarem no espaço das tensões como um corpo rígido, (Figura 3.9c) o encruamento é dito cinemático. O modelo de encruamento cinemático confirma o efeito Bauschinger observado experimentalmente no carregamento cíclico (OWEN, 1980).

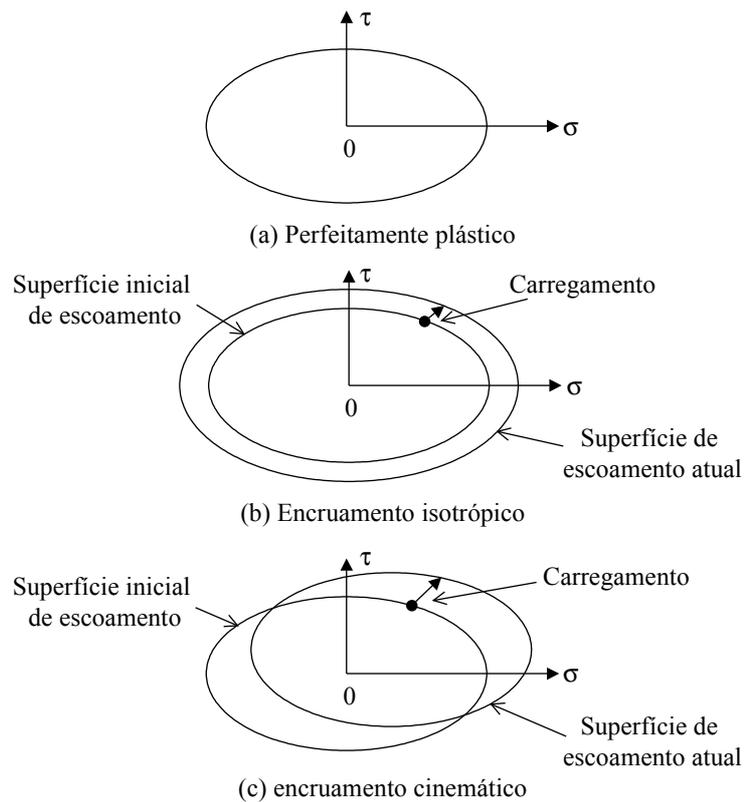


Figura 3.9 Representação gráfica dos modelos matemáticos de comportamento com encruamento.

O desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento pode ser definido relacionando-se a tensão de escoamento à deformação plástica por meio do parâmetro de encruamento κ . Isto pode ser feito de dois modos. Primeiramente, o grau de encruamento pode ser postulado como sendo uma função apenas do trabalho plástico total, W_p (*work hardening*). Então

$$\kappa = W_p \quad (3.28)$$

Onde:

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (3.29)$$

Na qual $(d\epsilon_{ij})^p$ são os componentes de deformação plástica ocorrendo durante um incremento de deformação.

Alternativamente, κ pode ser relacionado a uma medida de deformação plástica total chamada de *deformação plástica efetiva* ou *equivalente*, a qual é definida (para o critério de von Mises) incrementalmente como

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p\}^{1/2} \quad (3.30)$$

Para situações onde a hipótese de que o escoamento independe de

qualquer tensão hidrostática é válida, $(d\epsilon_{ij})^p = 0$ e conseqüentemente:

$$(d\epsilon_{ij}')^p = (d\epsilon_{ij})^p.$$

Assim, (3.30) pode ser reescrita como

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ (d\epsilon_{ij}')^p (d\epsilon_{ij}')^p \right\}^{1/2} \quad (3.31)$$

Então o parâmetro de encruamento κ é assumido como sendo definido por

$$\kappa = \bar{\epsilon}^p \quad (3.32)$$

onde $\bar{\epsilon}^p$ é o resultado da integração de $d\bar{\epsilon}$ ao longo do histórico de deformação. Este comportamento é chamado encruamento por deformação (*strain hardening*).

Assumindo-se que tensão e deformação sejam paralelos, estados de tensão onde $f = \kappa$ representam estados plásticos enquanto comportamento elástico é caracterizado por $f < \kappa$. Em um estado plástico, $f = \kappa$, a mudança incremental na função de escoamento devido a uma mudança incremental de tensão é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma \quad (3.33)$$

Então se:

- $df < 0$, descarregamento elástico ocorre (comportamento elástico) e o ponto de tensão retorna para dentro de superfície de escoamento.
- $df = 0$, carregamento neutro (comportamento plástico para um material perfeitamente plástico) e o ponto de tensão permanece sobre a superfície de escoamento.
- $df > 0$, carregamento plástico (comportamento plástico para um material com encruamento) e o ponto de tensão permanece sobre a superfície de escoamento em expansão.

3.6 Potencial Plástico e Regra de Fluxo

Quando o regime de deformação estende-se à faixa plástica, as relações entre tensão e deformação são deduzidas utilizando-se o conceito de potencial plástico.

As razões dos componentes da taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ (ou deformação plástica infinitesimal $d\epsilon_{ij}^p$) são definidas por:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma} \dot{f} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma} df \quad (3.34)$$

Onde g e h são funções escalares dos invariantes de tensão desviadora e f é a função de escoamento (se $\dot{f}=0$, carregamento neutro e $\dot{f}<0$, descarregamento). A função $g(\sigma_{ij})$ é denominada potencial plástico. Embora a eq. (3.34) esteja escrita na forma de uma taxa, as relações entre tensão e deformação são independentes do tempo.

Assumindo-se uma simples relação $g = f$, a eq.(3.34) torna-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\lambda \quad (3.35)$$

onde $\dot{\lambda}$ ou $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade positiva, sendo igual a $h\dot{f}$ ou $h.df$. A eq. (3.35) é a regra de fluxo associada à função de escoamento $f(\sigma_{ij})$.

3.7 Princípio do Máximo Trabalho Plástico

O princípio do máximo trabalho plástico segue da regra de fluxo e da convexidade do *yield locus* [KOBAYASHI et al, 1989].

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (3.36)$$

Onde σ_{ij} é um estado de tensões de escoamento, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ é taxa de deformação associada, e σ_{ij}^* é um outro estado qualquer representado por um ponto sobre ou no interior da superfície de escoamento.

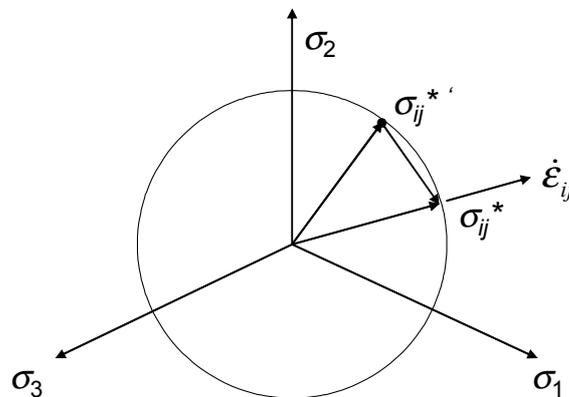


Figura 3.10 Dois estados de tensão e um vetor taxa de deformação.

Desde $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ seja paralelo à normal à superfície de escoamento no ponto σ_{ij}^* , $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p$ é proporcional ao produto escalar da normal saindo da

superfície de escoamento no ponto σ_{ij}' com a corda unindo σ_{ij}^{*} e σ_{ij}' (Figura 3.10).

3.8 Equações de Prandtl-Reuss e Levy-Mises

Com a função de escoamento dada por $f(\sigma_{ij}) = J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'$ a regra de fluxo discutida anteriormente torna-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma_{ij}' \dot{\lambda} \quad (3.37)$$

Desde que:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}'} \frac{\partial \sigma_{kl}'}{\partial \sigma_{ij}'} = \sigma_{ij}' \quad (3.38)$$

Percebendo-se que os índices repetidos k e l indicam somatório em relação a estas quantidades.

A regra de fluxo pode ser escrita como:

$$\frac{\epsilon_x^p}{\sigma_x'} = \frac{\epsilon_y^p}{\sigma_y'} = \frac{\epsilon_z^p}{\sigma_z'} = \frac{\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}} \quad (3.39)$$

Combinando-se os componentes de taxa de deformação elástica e taxa de deformação plástica de acordo com $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^e$, obtêm-se as equações de Prandtl-Reuss para sólidos elasto-plásticos:

$$\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}' \dot{\lambda} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}' + \delta_{ij} \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_m$$

onde G , E e ν são, respectivamente, o módulo de cisalhamento, módulo de Young e coeficiente de Poisson.

Para materiais rígido-plásticos, assume-se que $\epsilon_{ij} \approx \epsilon_{ij}^p$, e as equações de Levy-Mises são obtidas removendo-se os sobre-escritos p na equação da regra de fluxo. Estas equações são expressas em termos dos componentes de tensão por três equações do tipo

$$\dot{\epsilon}_x = \left[\sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] \dot{\lambda} = \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \frac{2}{3} \dot{\lambda} \quad (3.40a)$$

E três do tipo

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = \tau_{xy} \dot{\lambda} \quad (3.40b)$$

3.9 Anisotropia Plástica

Considere-se um estado de anisotropia que possua três planos de simetria mutuamente ortogonais em cada ponto. O mais simples critério de escoamento para materiais anisotrópicos é aquele que reduz o critério de energia de distorção quando a anisotropia é pequena. Assumindo-se o critério de escoamento como sendo o quadrático dos componentes de tensão, de acordo com a formulação de HILL (1948), obtém-se a seguinte formulação para anisotropia:

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (3.41)$$

Onde os eixos ortotrópicos são tomados como os eixos coordenados (x , y , z) e F , G , H , L , M e N são parâmetros de anisotropia. Os parâmetros na eq. (3.41) não são definidos mas suas proporções são para o comportamento de um determinado material. Pode-se reescrever (3.41) como:

$$\begin{aligned} 2f(\sigma_{ij}) &= f(\sigma_y - \sigma_z)^2 + g(\sigma_z - \sigma_x)^2 + h(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2l\tau_{yz}^2 + 2m\tau_{zx}^2 + 2n\tau_{xy}^2 \\ &= 2\bar{\sigma}^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $f(\sigma_{ij})$ é o potencial plástico, $\bar{\sigma}$ é a tensão efetiva, e f , g , h , l , m , n , são números puros, sujeitos a condições dependendo da seleção de $\bar{\sigma}$ como propriedade de referência do material.

Para materiais isotrópicos:

$$f = g = h = 1 \quad \text{e} \quad n = 3 \quad (\text{e } n = l = m)$$

Se Y_x , Y_y , Y_z , são as tensões de escoamento à tração nas direções principais de anisotropia, pode-se mostrar que:

$$Y_x^2 = \frac{2\bar{\sigma}^2}{g+h}, \quad Y_y^2 = \frac{2\bar{\sigma}^2}{f+h} \quad \text{e} \quad Y_z^2 = \frac{2\bar{\sigma}^2}{f+g}$$

Freqüentemente, a anisotropia de materiais é representada pelas razões de deformação, conhecidas como *r-values* ou fator de anisotropia. O *r-value* é definido como sendo a razão entre a deformação verdadeira na largura e a deformação verdadeira na espessura na região de alongamento uniforme em um corpo de prova submetido a um ensaio de tração (TAYLOR 1988) e pode ser expresso como:

$$r = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_t} = \frac{\ln(w/w_0)}{\ln(t/t_0)} \quad (3.43)$$

onde w é a largura do corpo de prova, ϵ_w é a deformação verdadeira ao longo da largura w , t é a espessura do corpo de prova e ϵ_t é a deformação

verdadeira na direção da espessura, conforme mostrado na Figura (3.11).

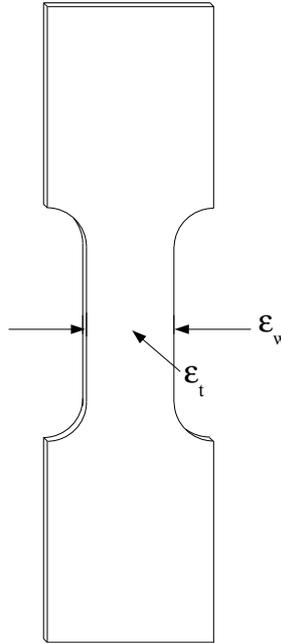


Figura 3.11 Deformações na largura e espessura do CDP

O *r-value* é a medida da capacidade do material de resistir à diminuição excessiva na espessura. Nas operações de estampagem, o material no flange é esticado radialmente e comprimido circunferencialmente. Um alto valor de *r* indica que o material tem boas propriedades de estampagem.

É comum medir o *r-value* médio ou a anisotropia normal média, r_m , e a anisotropia planar Δr . Define-se:

$$r_m = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} ; \quad \Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2} \quad (3.44)$$

onde os índices subscritos referem-se ao ângulo θ entre a linha de centro do corpo de prova e a direção de laminação (Figura 3.12). Segundo TAYLOR (1988), o valor r_m determina a profundidade média possível de ser obtida em uma operação de estampagem profunda. O valor de Δr mede a variação de *r* no plano da chapa, determinando a extensão do fenômeno de *earing*, (aspecto ondulado na borda da chapa após a operação de estampagem). Uma estampagem ótima é obtida pela combinação de um alto valor de r_m e um baixo valor de Δr . Para um material totalmente isotrópico, tem-se $r_m = 1$ e $\Delta r = 0$. Para materiais anisotrópicos *r* pode ser maior ou menor que 1.

De modo análogo, podem-se avaliar outras propriedades como por exemplo, o coeficiente de resistência *k* e o expoente de encruamento *n*. Assim:

$$n_m = \frac{n_0 + 2n_{45} + n_{90}}{4} ; \quad k_m = \frac{k_0 + 2k_{45} + k_{90}}{4} \quad (3.45)$$

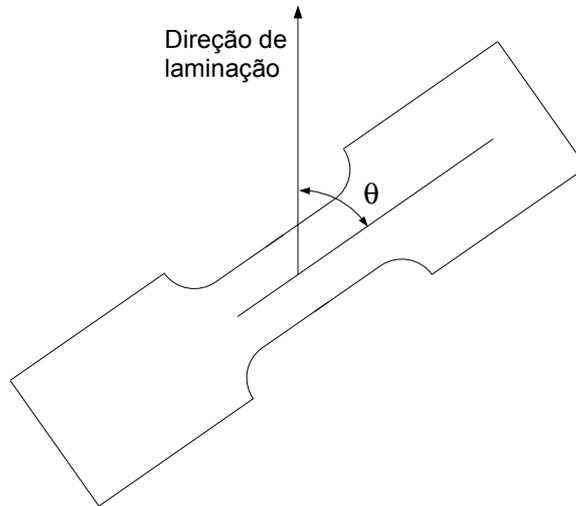


Figura 3.12 Direção do CDP em relação à direção de laminação.

Para chapas finas, torna-se difícil uma medida precisa da deformação ao longo da espessura. Assim, é mais conveniente deduzir-se esta deformação a partir da relação de volume constante $\epsilon_l + \epsilon_w + \epsilon_t = 0$, sendo ϵ_l a deformação no comprimento do CDP, dado por $\ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$. Substituindo-se encontra-se que:

$$r = \frac{-\epsilon_w}{(\epsilon_w + \epsilon_l)} \quad (3.46)$$

De modo a evitar-se os efeitos da região de fixação do CDP, a medida de deformação ao longo do comprimento é feita em uma região de medidas, que é padronizada segundo normas específicas para este tipo de ensaio.

A fim de se evitar a região onde tem início a estricção recomenda-se que as medidas de deformação sejam feitas quando atinge-se uma elongação de 15%.

Apesar do *r-value* não variar muito ao longo do ensaio de tração, uma elongação de 15% permite que as medidas sejam feitas com precisão razoável. Cabe ressaltar que a medida de r está sujeita a um erro maior do que pode-se a princípio pensar. Se a precisão das medidas é de $\pm 0,01$, o erro na estimativa de r poderá ser de $\pm 25\%$. Assim, deve-se evitar medidas a menos de 15% de elongação.

Para um corpo de prova submetido a tração, cortado a um ângulo α em relação à linha de centro (direção x), r pode ser obtido em função das taxas de deformação pelas equações apresentadas a seguir:

$$\sigma_x = Y \cos^2 \alpha, \quad \sigma_y = Y \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy} = Y \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.47)$$

onde Y é a tensão de escoamento à tração. O valor de r pode ser escrito como:

$$r = \frac{\epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha - \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon_x} \quad (3.48)$$

Conforme KAWKA e MAKINOUCI (1996), para materiais ortotrópicos, os coeficientes de Hill, em termos de r -values são expressos por:

$$F = \frac{H}{r_{90}} = \frac{r_0}{r_{90}(r_0+1)}; \quad G = \frac{H}{r_0} = \frac{1}{(r_0+1)}; \quad H = \frac{r_0}{(r_0+1)}; \\ 2N = \frac{(r_0+r_{90})(2r_{45}+1)}{r_{90}(r_0+1)} \quad (3.49)$$

3.10 Instabilidade Plástica

3.10.1 Flambagem em Colunas

Quando uma coluna é submetida a um carregamento crescente de compressão a falha por flambagem ocorre com um carregamento muito menor que o necessário para esmagar o material. Os carregamentos aplicados, mesmo que cuidadosamente em laboratórios, são levemente excêntricos e o material da coluna é não-homogêneo. Tais fatores dão origem a tensões de flexão inicialmente pequenas que podem conduzir a uma condição de instabilidade.

Na condição de flambagem as tensões podem ser menores ou maiores que o limite elástico, dependendo da geometria analisada. A solução para o problema de instabilidade elástica baseia-se na hipótese que o equilíbrio de uma coluna reta torna-se instável quando existem outras posições de equilíbrio infinitesimalmente próximas à posição de equilíbrio reta original, para um mesmo carregamento. A flambagem não ocorre a menos que um distúrbio infinitesimal seja aplicado. Para uma coluna simples, com apoio simples, como mostrado na Figura 3.13, e assumindo-se deflexões pequenas, a equação diferencial pode ser dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \quad (3.50)$$

Onde P é o carregamento crítico de flambagem, E é o módulo de Young e I é momento de inércia de área da seção transversal da coluna.

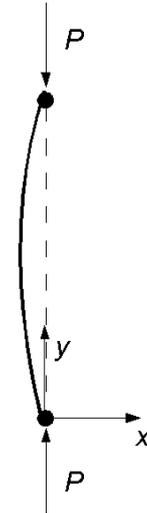


Figura 3.13 Coluna submetida a carregamento axial de compressão nas posições inicial (linha tracejada) e deformada (linha contínua)

A solução para o problema é dada por:

$$y = \bar{A} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \bar{B} \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) \quad (3.51)$$

A carga de flambagem é dado pela conhecida expressão de Euler:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{k}\right)^2} \quad (3.52)$$

Onde L é o comprimento efetivo da coluna, A é a área da seção transversal, k é o raio de giração mínimo e (L/k) é o índice de esbeltez.

A solução é limitada para P/A menor que o limite de escoamento do material.

Para a solução do problema de flambagem plástica, um breve histórico é apresentado por JOHNSON e MELLOR (1962). As soluções discutidas são o módulo tangente (*tangent-modulus formula*) e o módulo duplo (*double-modulus formula*), também encontrada na literatura como módulo reduzido (*reduced modulus*).

A primeira das soluções simplesmente substitui o módulo de Young na equação de Euler pelo módulo tangente do material no ponto da curva tensão-

deformação a compressão correspondente à tensão de instabilidade. Assume-se a hipótese que a mudança da posição original para a posição flexionada ocorre com o aumento da carga axial e não há reversão no sentido das tensões e deformações. O carregamento de flambagem é dado por:

$$P = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (3.53)$$

A solução do módulo reduzido assume que a passagem para a configuração flexionada ocorre sob efeito de um carregamento constante. Com o dobramento da coluna um lado passa a sofrer um efeito de tração (lado convexo) e o outro um efeito de compressão (lado côncavo). Assim pode-se deduzir um módulo reduzido dado em função do módulo tangente para considerar o efeito das tensões de tração e do módulo de Young para considerar o descarregamento que ocorre quando existe a reversão das tensões. O módulo duplo é dado por:

$$\bar{E} = \frac{4E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (3.54)$$

O carregamento de flambagem:

$$P = \frac{\pi^2 \bar{E} I}{l^2} \quad (3.55)$$

A solução para ambos (equações 3.53 e 3.55) os casos é similar, mudando-se o termo correspondente ao módulo, pode-se portanto considerar a resposta em termos de um módulo efetivo, seja este o módulo tangente ou o módulo reduzido.

Estas duas abordagens apresentam dois limites para a flambagem de colunas: um limite inferior, dado pelo módulo tangente, e um limite superior, dado pelo módulo duplo.

JOHNSON e MELLOR (1962) apresentam uma correlação entre resultados de flambagem em uma barra de aço com seção quadrada (5/8") e extremidades esféricas, reproduzido na Figura 3.14. As teorias apresentadas conduzem a limites máximos e mínimos para a instabilidade. Os ensaios experimentais indicaram melhores resultados usando-se a teoria do módulo tangente, exceto para colunas muito curtas, provavelmente devido ao fato de colunas curtas serem menos sensíveis a pequenos distúrbios, e desta forma o carregamento crítico apresenta uma tendência ao limite superior.

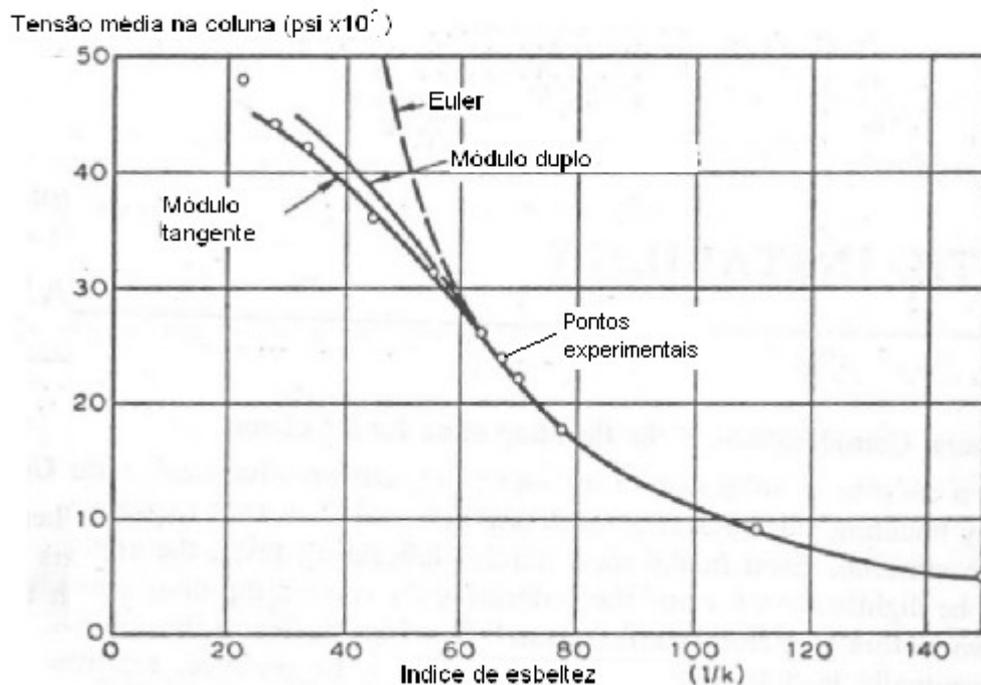


Figura 3.14 Curvas baseadas nos módulos tangente e duplo. Comparação com resultados experimentais e curva elástica de Euler [JOHNSON & MELLOR, 1962]

Em ensaios feitos em barras reais, é inevitável o aparecimento de imperfeições, como uma curvatura inicial ou uma excentricidade no carregamento. Isto faz com que um momento de flexão apareça desde o início do ensaio, e, conseqüentemente, haja uma flexão desde o início do carregamento.

Para um carregamento aplicado a uma pequena distância e do eixo neutro, a deflexão y pode ser dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{Pe}{EI} \quad (3.56)$$

A deflexão máxima é dada por:

$$y_{max} = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right] \quad (3.57)$$

Onde P_E é o carregamento de Euler. A deflexão permanece da ordem de e até o carregamento ser próximo ao valor de Euler, passando a aumentar a partir deste ponto.

Para uma coluna com uma deflexão inicial y_0 e amplitude e pode-se chegar a uma solução semelhante. A equação é dada por:

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} - \frac{d_0^{2y}}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \quad (3.58)$$

A deflexão máxima pode ser escrita como:

$$y_{max} = \frac{e}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (3.59)$$

Para uma coluna imperfeita, o carregamento de flambagem pode ser interpretado como um carregamento que as imperfeições tornam significativamente amplificado. O efeito das imperfeições tem papel importante no estudo do comportamento pós-colapso. Tal estudo foi amplamente discutido por HUTCHINSON [1974].

3.10.2 Teoremas de Análise Limite

Teoremas de análise limite dão limites inferiores e superiores para corpos que podem ser modelados como elasto-plásticos quando estes atingem um estado crítico, ou seja, estados em que um pequeno acréscimo no carregamento produzem aumentos significativos na deformação plástica [LUBLINER, 1990]. Os teoremas de análise limite são baseados no princípio do máximo trabalho plástico, apresentado no ítem 3.6 deste capítulo.

Define-se como um estado de colapso plástico iminente aquele onde uma taxa de deformações diferente de zero ocorre sob a ação de um carregamento constante. O termo iminente é utilizado pois analisa-se o início do estado, e inicialmente as magnitudes das deformações são pequenas e as acelerações podem ser desprezadas, e o problema tratado como quase-estático.

Pode-se definir um **teorema de limite inferior** supondo-se que no colapso os carregamentos de corpo e de superfície sejam dados por \mathbf{f}^b e \mathbf{f}^s , respectivamente, e os campos de tensão, velocidade e taxa de deformação dados por $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{v} e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Supondo-se um campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}^*$ que não viole o critério de escoamento e que esteja em equilíbrio com os carregamentos $\mathbf{f}^{b*} = (1/s)\mathbf{f}^b$ e $\mathbf{f}^{s*} = (1/s)\mathbf{f}^s$ onde s é um fator numérico e, pelo princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \frac{1}{s} \left(\int_S \mathbf{f}^s \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f}^b \cdot \mathbf{v} dV \right) = \frac{1}{s} \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (3.60)$$

Pelo princípio do máximo trabalho plástico:

$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}$ e portanto, $s \geq 1$, podendo-se dizer que s é um fator de segurança.

Pode-se também definir um **teorema de limite superior**. Supondo-se que em vez de σ^* foi determinado um campo de velocidades \mathbf{v}^* (um mecanismo de colapso) com um campo de taxa de deformações $\dot{\epsilon}^*$ correspondente, e carregamentos $\mathbf{f}^{b*} = c \mathbf{f}^b$ e $\mathbf{f}^{s*} = c \mathbf{f}^s$ satisfazendo:

$$\int_S \mathbf{f}^{s*} \cdot \mathbf{v}^* dS + \int_V \mathbf{f}^{b*} \cdot \mathbf{v}^* dV = \int_V D_p(\dot{\epsilon}^*) dV \quad (3.61)$$

Onde $D_p(\dot{\epsilon}^*)$ corresponde à máxima dissipação plástica.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_V D_p(\dot{\epsilon}^*) dV = c \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \quad (3.62)$$

O princípio do máximo trabalho plástico leva a $D_p(\dot{\epsilon}^*) \geq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^*$ e, conseqüentemente, $c \geq 1$, podendo ser encarado como um fator de sobrecarga.

3.10.3 Flambagem Plástica de Placas e Cascas

Considere-se uma placa fina submetida a uma força por unidade de comprimento aplicada na sua borda (P^a) e uma força por unidade de área (p^a). As forças de membrana podem ser dadas por:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (3.63)$$

Adota-se aqui a convenção de utilizar-se índices com o alfabeto grego quando estes variam de 1 a 2 e índices latinos para variações de 1 a 3.

Estas forças de membrana devem respeitar a equação de equilíbrio e as condições de contorno dadas respectivamente pelas equações (3.64) e (3.65)

$$N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha^a = 0 \quad (3.64)$$

$$v_\beta N_{\alpha\beta} = P_\alpha^a \quad (3.65)$$

Onde v é a normal ao contorno da placa.

O equilíbrio torna-se instável quando a placa sofre uma deflexão $w(x,y)$ sem a aplicação de forças adicionais. O plano médio da placa sofre um deslocamento de segunda ordem \bar{u}_α tal que:

$$2\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} = \bar{u}_{\alpha,\beta} + \bar{u}_{\beta,\alpha} = -w_{,\alpha}w_{,\beta} \quad (3.66)$$

O trabalho feito pelas forças aplicadas neste deslocamento, pode, com o auxílio do teorema da divergência, ser dado por:

$$\begin{aligned} \oint_C P_\alpha^a \bar{u}_\alpha ds + \int_A p_\alpha \bar{u}_\alpha dA &= \oint_C \nu_\beta N_{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha ds + \int_A p_\alpha \bar{u}_\alpha dA \\ &= \int_A [(N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha) \bar{u}_\alpha + N_{\alpha\beta} \bar{u}_{\alpha,\beta}] dA \end{aligned} \quad (3.67)$$

A segunda variação da energia potencial externa pode ser escrita como:

$$\delta^2 \Pi_{ext} = \int_A N_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} \delta w_{,\beta} dA \quad (3.68)$$

A energia interna:

$$\delta^2 \Pi_{int} = \int_A \delta M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} dA \quad (3.69)$$

Utilizando-se de $\delta M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} = (\delta M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha})_{,\beta} - \delta M_{\alpha\beta,\beta} \delta w_{,\alpha}$ o critério de energia torna-se:

$$\int_A (\delta M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha\beta} \delta w_{,\beta}) \delta w_{,\alpha} dA = 0 \quad (3.70)$$

Escrevendo-se a relação incremental entre tensão e deformação de um material isotrópico em um estado de tensão plana como:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\bar{E}} [(1 + \bar{\nu}) \dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \bar{\nu} \dot{\sigma}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (3.71)$$

Onde $\bar{\nu}$ é a taxa instantânea de contração, e \bar{E} é o módulo instantâneo (que em geral é diferente do módulo tangente). Aplicando-se a teoria do módulo tangente, obtém-se uma relação incremental de momento-curvatura:

$$\delta M_{\alpha\beta} = \bar{D} [(1 - \bar{\nu}) \delta w_{,\alpha\beta} + \bar{\nu} \delta w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (3.72)$$

onde $\bar{D} = \frac{\bar{E} h^3}{12(1 - \bar{\nu}^2)}$ é o módulo plástico efetivo. Em geral a aplicação destas relações em um problema é bastante complicada.

3.10.4 Análise Limite de Placas

Para a análise limite de placas, é importante a definição da linha de escoamento (*yield curve*, também chamada de *hinge curve*). A linha de escoamento é uma curva em uma região A ocupada pelo plano médio de uma placa, na qual a inclinação devido a uma deflexão w é descontínua [LUBLINER, 1990]. Esta teoria é uma extensão da teoria desenvolvida para

barras que trata a formação de regiões de instabilidade como regiões onde se formam mecanismos (tais regiões são tratadas como articulações plásticas, ou *plastic hinges*). Analisam-se as estruturas de modo a estabelecer o conjunto de mecanismos capaz de conduzir a estrutura ao colapso com a menor energia, e estima-se o menor valor de carregamento crítico.

Definindo-se $\Delta\theta$ como a mudança de inclinação ao longo de uma linha normal à curva de escoamento avaliada em uma região de largura δ . A taxa principal de curvatura é definida como $\dot{\rho}_1$, dada por $|\dot{\rho}_1| = \Delta\dot{\theta}/\delta$ e considerando-se $|\dot{\rho}_1| \gg |\dot{\rho}_2|$. Seja a dissipação plástica por unidade de área definida como:

$$\bar{D}_p = M_{\alpha\beta} \dot{\rho}_{\alpha\beta} \quad (3.73)$$

Para um material que segue o critério de von Mises a equação (3.73) torna-se:

$$\bar{D}_p(\dot{\rho}) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_U \sqrt{\dot{\rho}_1^2 + \dot{\rho}_1 \dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2^2} \quad (3.74)$$

Onde M_U é conhecido como *ultimate moment*, dado por:

$$M_U = \sigma_y \frac{h^2}{4} \quad (3.75)$$

E h é a espessura da placa.

Se $\bar{D}_p(\dot{\rho})$ é integrado ao longo da largura δ da região, tem-se a dissipação plástica por unidade de comprimento da curva de escoamento, e,

para o critério de von Mises, $\frac{2}{\sqrt{3}} M_U |\Delta\dot{\theta}|$.

A dissipação interna total necessária para a análise limite é, portanto,

$$D_{int} = \int_V D_p(\dot{\epsilon}) dV = \frac{2}{\sqrt{3}} M_U \left[\int_A \sqrt{\dot{\rho}_1^2 + \dot{\rho}_1 \dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2^2} dA + \int_{HC} |\Delta\dot{\theta}| ds \right] \quad (3.76)$$

Onde HC é a curva de escoamento.

De acordo com a teoria do limite superior o padrão da curva de escoamento deve ser tal que minimize D_{int} / D_{ext} , onde D_{ext} é a taxa de trabalho

externo, dada por $D_{ext} = \int_A q \dot{w} dA$.

Considerando-se como exemplo uma placa retangular, simplesmente suportada (ou seja, sem deflexão nas bordas), com dimensões $2a$ por $2b$, conforme mostrado na Figura 3.15. Sendo v_0 a velocidade do centro da placa,

pode-se mostrar que a taxa de descontinuidade da inclinação das linhas de escoamento é dada por $\sqrt{(v_0/a)^2 + (v_0/b)^2}$. Então para um material seguindo o critério de von Mises e com a configuração de linhas de escoamento da Figura 3.15(a):

$$D_{int} = \frac{8}{\sqrt{3}} M_U v_0 \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} M_U v_0 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$D_{ext} = \frac{1}{3} P v_0$$

Igualando-se as dissipações plásticas encontra-se um limite superior

igual a $P = 24 \frac{M_U}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$.

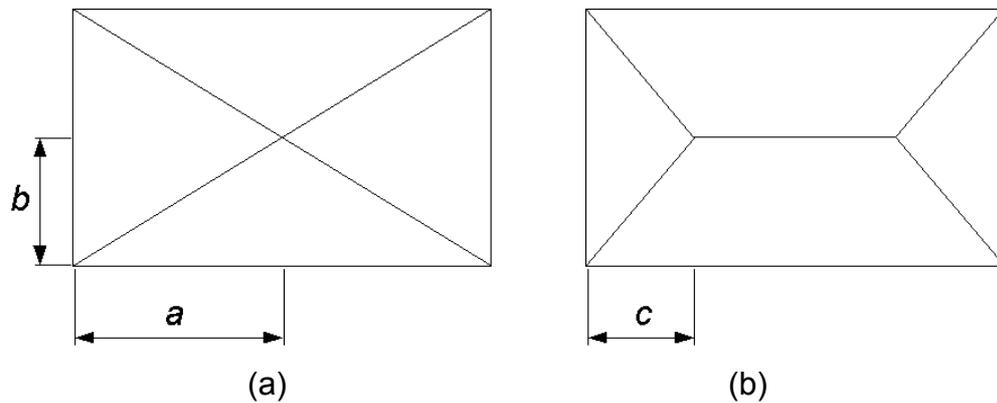


Figura 3.15 Padrões para uma placa retangular simplesmente suportada: padrão (a) é um caso especial do padrão (b), se for considerado $c = a$

Para a configuração da Figura 3.15(b) tem-se:

$$D_{int} = \frac{8}{\sqrt{3}} M_U v_0 \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) + 2(a-c) 4 \frac{M_U v_0}{b\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} M_U v_0 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right)$$

$$D_{ext} = \frac{P}{4ab} v_0 \left[\frac{4}{3} bc + 2b(a-c) \right] = \frac{1}{6} P v_0 \left(3 - \frac{c}{a} \right)$$

A razão D_{int} / D_{ext} é mínima quando c é dado por:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} - \frac{b}{a} \right]$$

$$\text{Portanto, } P \leq \frac{16}{3\sqrt{3}} M_U \frac{a}{b} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} + \frac{b}{a} \right]^2$$

Este limite superior é menor que aquele dado pelo caso (a), exceto para

o caso de um quadrado, onde os limites são iguais.

Se a placa não for simplesmente suportada as linhas da borda da placa tornam-se também linhas de escoamento.

Um limite inferior para a placa simplesmente suportada pode ser obtido assumindo-se um campo de momentos estaticamente admissível da forma:

$$m_{11} = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad m_{22} = 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad m_{12} = -\lambda \frac{xy}{ab}$$

Onde $m_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{M_U}$ e λ é uma constante a ser determinada.

A condição de equilíbrio $m_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \frac{-\sqrt{3}P}{8abM_U}$ fornece:

$$P = 16 \frac{M_U}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \lambda \right)$$

O melhor valor de limite inferior ocorre para o maior valor de λ de modo que o critério de escoamento não seja violado. Para o critério de von Mises o maior valor admissível de λ é $1/\sqrt{3}$, e para o critério de Tresca, $1/2$.

4 Método dos Elementos Finitos

Para prever o desempenho de componentes mecânicos, o projetista dispõe hoje de uma série de ferramentas matemáticas. Soluções analíticas podem ser usadas em certos casos, mas sua aplicação é limitada a situações específicas nas quais uma solução matemática da equação pode ser encontrada. Uma maneira mais abrangente de tratar problemas estruturais consiste no uso de métodos numéricos de análise. Apesar de tais métodos fornecerem soluções aproximadas, em muitos casos é a única maneira que os projetistas dispõem para encontrar as respostas que procuram.

Dentre estas ferramentas computacionais de auxílio o método dos elementos finitos (MEF) é uma das mais importantes. O método dos elementos finitos considera a região de solução do problema formada por pequenos elementos interconectados entre si. A região em estudo é modelada analiticamente ou aproximada por um conjunto de elementos discretos pré-definidos. Uma vez que estes elementos possam ser colocados juntos em um número incontável de diferentes configurações, pode-se modelar formas geométricas bastante complexas. Além disso, possibilita-se que o projetista tenha bastante flexibilidade na aplicação de cargas e condições de contorno, o que torna este método o mais utilizado atualmente em análises estruturais.

O método dos elementos finitos é aplicável a uma grande faixa de problemas de valores de contorno em engenharia. Em um problema de valor de contorno, uma solução é procurada na região do corpo (domínio), enquanto nos contornos desta região os valores das variáveis dependentes (ou suas derivadas) são conhecidos.

O processo de análise por elementos finitos é esquematizado na Figura 4.1 (BATHE, 1996). Idealizando um problema físico por um modelo matemático requer-se hipóteses que conduzem a um conjunto de equações diferenciais que governam o modelo matemático. Sendo o método dos Elementos Finitos

um procedimento numérico, é necessário considerar-se a acuracidade da solução.

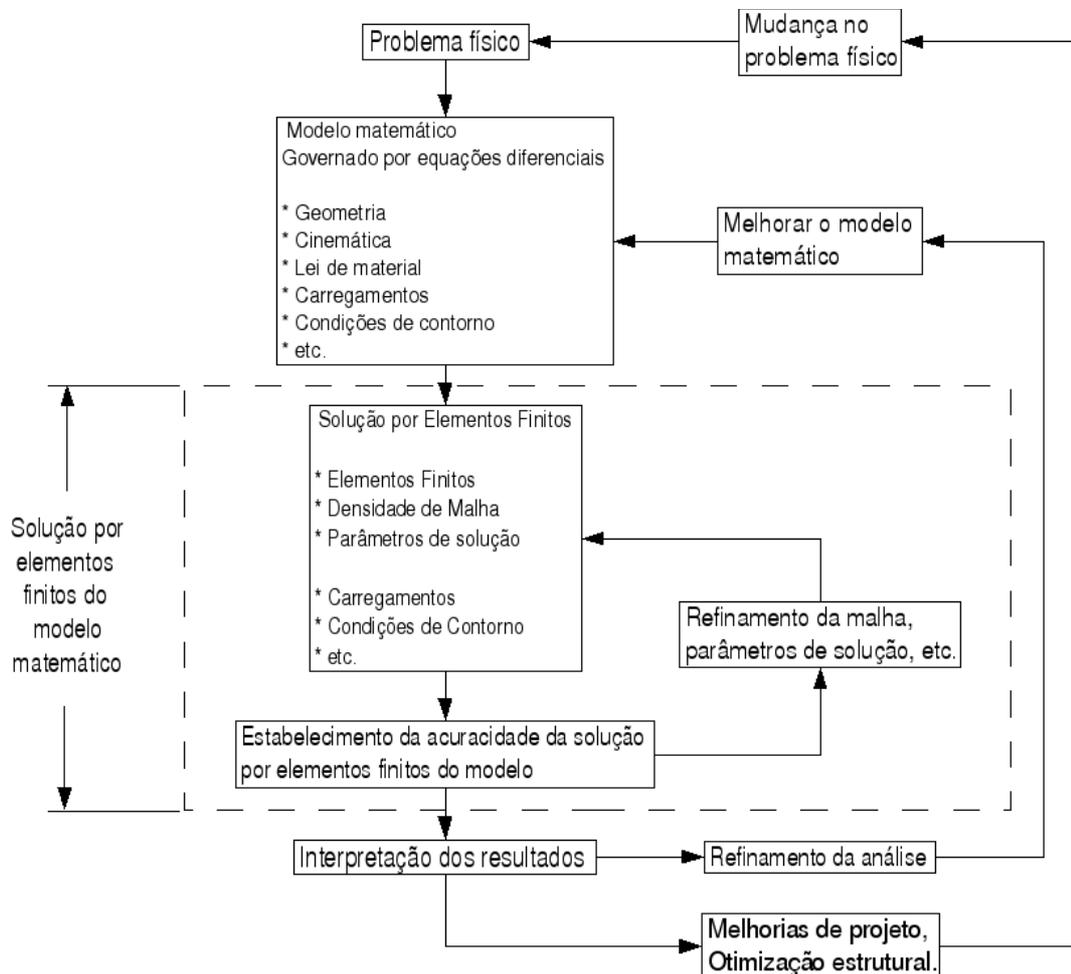


Figura 4.1 Processo de análise por Elementos Finitos (BATHE, 1996)

De acordo com HUEBNER et al. (1995), o método pode ser sumarizado basicamente em 3 etapas: pré-processamento, solução (*solver*) e pós-processamento, descritas a seguir:

Pré-Processamento

É a etapa de preparação do problema para posteriormente solucioná-lo. É nesta fase que se faz a modelagem do fenômeno, assumindo hipóteses, condições iniciais, condições de contorno e carregamentos, assim como a escolha do elemento, das propriedades dos materiais e da geometria que representará a forma do componente a ser analisado.

Solução (solver)

A solução do problema tem como ponto de partida o modelo

configurado na etapa anterior. Portanto, a precisão das respostas depende basicamente da capacidade do engenheiro em abstrair o fenômeno. A solução é baseada em um algoritmo numérico que visa resolver da maneira mais rápida e acurada, uma equação diferencial com condições de contorno e/ou condições iniciais impostas pelo modelo.

Pós-Processamento

Esta é a última etapa. Ela depende apenas das necessidades do engenheiro que está modelando o problema. Ou seja, ela é o conjunto solução da equação diferencial que descreve o fenômeno em estudo, podendo ser deslocamentos nodais, deformações, gradientes de tensão, deslocamentos nodais ao longo do tempo entre outros.

Esses recursos implementados computacionalmente permitem estimar a solução de um problema complexo em um tempo relativamente pequeno, fazendo com que se otimize o tempo de desenvolvimento de projetos de componentes sujeitos a carregamentos estáticos, térmicos, dinâmicos e outros.

O método dos elementos finitos é detalhado de forma bastante abrangente por autores como ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000), BATHE (1996), BELYTSCHKO et al (2000) e HUEBNER et al (1995), entre outros. As referências citadas acima apresentam o detalhamento da tecnologia de elementos finitos e sua aplicação a problemas tanto lineares como problemas não lineares, muito mais complexos, que incluem grandes deformações, deslocamentos, não-linearidade de material (plasticidade, anisotropia etc.) e problemas envolvendo contato entre componentes.

Os programas de análise são divididos em dois grupos de acordo com o procedimento de abordagem utilizada para o programa: a abordagem estática (quase-estática) e a abordagem dinâmica. Dentro do trabalho apresentado foi feita uma implementação de material compilada pelo autor. O texto a seguir apresenta os aspectos mais relevantes do ponto de vista de implementação de uma rotina especificada pelo usuário.

É apresentado um detalhamento do tipo de problema resolvido através de cada uma das abordagens e o contexto no qual é feita a sua implementação no código de Elementos Finitos (EF). É destacado o ponto onde é feita a intervenção de modo a implementar-se a rotina de material definida pelo usuário.

MAKINOUCI (1996) fornece uma breve descrição das principais abordagens para a análise por elementos finitos de processos de conformação, utilizando-se uma formulação de material elasto-plástico.

(a) Abordagem estática implícita: considerando-se que o processo de estampagem não é realmente um processo de impacto, assume-se um equilíbrio quase estático para o processo. O esquema estático implícito de integração no tempo satisfaz este requerimento, desde que as condições de equilíbrio sejam asseguradas em cada passo de integração no tempo. Contudo, devido principalmente à mudança das condições de atrito e contato entre a ferramenta e a chapa em cada iteração, esta abordagem apresenta problemas na simulação de processos de conformação de chapas.

(b) Abordagem dinâmica explícita: neste tipo de abordagem, as equações de equilíbrio dinâmico são a base da formulação. Tem a grande vantagem de não ser necessária a montagem e fatoração da matriz de rigidez, obtendo-se a solução para um incremento de tempo mais rapidamente que em uma abordagem estática. Para obter-se a solução neste tipo de abordagem, o incremento de tempo deve ser limitado de maneira que a onda de dilatação não ultrapasse nenhum elemento. É comum utilizar-se incrementos de tempo da ordem de 10^{-6} segundos. Para reduzir o tempo de cálculo, a simulação é feita com o punção em velocidade acelerada, chegando a 100 vezes a velocidade real, o que pode conduzir a resultados não realistas. Segundo AHMED e HASHMI (1999) pode-se adotar um período de simulação muito menor que o tempo real de deformação, contudo a energia cinética de deformação deve ser mantida abaixo de um certo nível de tal forma que o efeito dinâmico na simulação seja mínimo.

Nas simulações apresentadas neste trabalho, são utilizadas as abordagens dinâmica com integração explícita no tempo e quase-estática com integração implícita no tempo.

4.1 Integração Explícita no Tempo

BATHE (1996) apresenta detalhes da implementação do “*método das diferenças centrais*”, que é a base do procedimento de integração explícita no tempo, utilizado pelo programa LS-DYNA®.

A equação de equilíbrio governando a resposta linear dinâmica de um

sistema de elementos finitos é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (4.1)$$

Onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez; \mathbf{R} é o vetor de carregamentos externos; \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$ são, respectivamente os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração globais do sistema de elementos finitos.

Um dos procedimentos comumente utilizados para se estimar as velocidades e acelerações é o “*método das diferenças centrais*”, que assume as acelerações no instante t como sendo:

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad (4.2)$$

O erro na expressão (4.2) é da ordem de Δt^2 , e para se ter a mesma ordem de erro na expansão da velocidade, deve-se utilizar:

$$\dot{\mathbf{U}}^t = \frac{1}{2\Delta t} (-\mathbf{U}^{t-\Delta t} + \mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad (4.3)$$

A solução de deslocamento para o tempo $t + \Delta t$ é obtida considerando-se a equação (4.1) no tempo t , ou seja:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (4.4)$$

Substituindo-se as equações (4.2) e (4.3) em (4.4) e rearranjando-se os termos, temos:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{t-\Delta t} \quad (4.5)$$

Esta equação é resolvida para $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$. Observa-se que a solução para o tempo $t + \Delta t$ é baseada nas condições de equilíbrio no tempo t . Por este motivo, o procedimento de integração é chamado de “*integração explícita no tempo*”, e cabe ressaltar que este esquema de integração não requer a fatoração da matriz de rigidez no processo de solução passo a passo.

Também é importante observar que utilizando-se o método das diferenças centrais o cálculo de $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ envolve \mathbf{U}^t e $\mathbf{U}^{t-\Delta t}$. Portanto, é necessário um procedimento de inicialização para o cálculo da solução no tempo Δt . Inicialmente são conhecidos \mathbf{U}^0 e $\dot{\mathbf{U}}^0$ (condições iniciais de deslocamento e velocidade fornecidas com o problema). Através da equação (4.1) pode-se obter a aceleração no tempo 0, $\ddot{\mathbf{U}}^0$. E através das relações

(4.2) e (4.3) pode-se obter $\mathbf{U}^{-\Delta t}$ como sendo:

$$\mathbf{U}^{-\Delta t} = \mathbf{U}^0 - \Delta t \dot{\mathbf{U}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^0 \quad (4.6)$$

Este método é efetivo apenas quando cada passo de incremento no tempo pode ser executado de maneira eficiente. O método é condicionalmente estável, o que exige um incremento de tempo pequeno, e, portanto, um grande número de incrementos de tempo. Assim, o método é bastante empregado quando pode-se assumir a matriz de massa como sendo agrupada (matriz diagonal) e o amortecimento dependente da velocidade possa ser desprezado. Com estas condições, a equação (4.5) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{R}}^t \quad (4.7)$$

Onde:

$$\hat{\mathbf{R}}^t = \mathbf{R}^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{t-\Delta t} \quad (4.8)$$

Portanto, se a matriz de massa é diagonal, o sistema de equações (4.1) pode ser resolvido sem fatorar as matrizes, isto é, apenas operações de multiplicação de matrizes são necessárias para a obtenção do vetor de carregamento efetivo $\hat{\mathbf{R}}^t$. A seguir, os componentes de deslocamento podem ser obtidos usando-se:

$$U_i^{t+\Delta t} = \hat{R}_i^t \left(\frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \right) \quad (4.9)$$

Onde $U_i^{t+\Delta t}$ e \hat{R}_i^t são, respectivamente, os i -ésimos componentes dos vetores $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ e $\hat{\mathbf{R}}^t$ e m_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal da matriz de massa, assumindo-se que $m_{ii} > 0$.

Como a matriz de rigidez global não precisa ser triangularizada, não há a necessidade de se montar a matriz. Conforme a equação a seguir, pode-se perceber que $\mathbf{K}\mathbf{U}^t$, como aparece na equação (4.8) pode ser avaliado à nível elementar, somando-se as contribuições de cada elemento para o vetor de carregamento efetivo.

$$\mathbf{K}\mathbf{U}^t = \sum_i \mathbf{K}_{(i)} \mathbf{U}^t = \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t \quad (4.10)$$

Desta maneira, $\hat{\mathbf{R}}^t$ pode ser avaliado eficientemente usando-se:

$$\hat{R}^t = R^t - \sum_i F_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2} M (U^{t-\Delta t} - 2U^t) \quad (4.11)$$

Outra vantagem na utilização do método das diferenças centrais na forma mostrada na equação (4.9) é que a solução pode ser conduzida à nível do elemento, não sendo necessária a montagem da matriz global de rigidez, e portanto diminuindo o esforço computacional de armazenagem em cada passo. Esta abordagem permite que sistemas de ordem grande sejam eficientemente resolvidos.

A solução por este tipo de algoritmo, no entanto, exige um tamanho muito pequeno para o incremento de tempo, sendo que em geral deve ser menor que um incremento de tempo crítico, calculado a partir das propriedades de massa e rigidez do modelo global. Esquemas de integração que exigem o uso de um incremento de tempo menor que um valor crítico são chamados de condicionalmente estáveis.

A seguir apresentam-se detalhes da implementação da rotina de integração explícita no algoritmo geral do procedimento de análise por elementos finitos. Também são feitas mais considerações sobre o tamanho crítico do incremento de tempo.

4.2 Implementação da Integração Explícita no Tempo

BELYTSCHKO et al. (2000) apresentam um algoritmo com os passos necessários à implementação do esquema de integração explícita no tempo. O fluxograma apresentado é geral, incluindo condições iniciais diferentes de zero, tamanho variável do incremento de tempo, elementos com mais de um ponto de quadratura (ou ponto de integração) e amortecimento. O amortecimento é modelado como uma força linear viscosa ($f^{damp} = C^{damp} v$).

As variáveis dependentes no algoritmo são as velocidades e as tensões de Cauchy. Devem ser fornecidas condições iniciais de velocidade, tensões de Cauchy e todas as variáveis de estado do material. Os deslocamentos iniciais são assumidos como sendo nulos.

Algoritmo para integração explícita no tempo

1. Condições iniciais e inicialização:

ajustar v^0 (velocidade no tempo 0), σ^0 (estado de tensões no tempo 0), e

valores iniciais para outras variáveis de estado do material;

$\mathbf{d}^0 = 0$, $n = 0$, $t = 0$; computar a matriz \mathbf{M}

2. Executar subrotina *getforce*

3. Computar as acelerações $\mathbf{a}^n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n - \mathbf{C}^{damp} \mathbf{v}^{n-1/2})$

4. Atualização de tempo: $t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1/2}$, $t^{n+1/2} = \frac{1}{2}(t^n + t^{n+1})$

5. Primeira atualização parcial das velocidades nodais:

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^n + (t^{n+1/2} - t^n) \mathbf{a}^n$$

6. Impor as condições de contorno de velocidade:

Para o nó l em Γv_i : $v_{il}^{n+1/2} = \bar{v}_i(\mathbf{X}_l, t^{n+1/2})$

7. Atualizar os deslocamentos nodais: $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t^{n+1/2} \mathbf{v}^{n+1/2}$

8. Executar subrotina *getforce*

9. Computar \mathbf{a}^{n+1}

10. Segunda atualização parcial das velocidades nodais:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1/2} + (t^{n+1} - t^{n+1/2}) \mathbf{a}^{n+1}$$

11. Verificar o balanço de energia no passo $n + 1$: equações descritas no texto

12. Atualizar o contador $n \leftarrow n + 1$

13. Saída. Se a simulação ainda não está completa, voltar para o passo 4.

Algoritmo da subrotina *getforce para integração explícita*

Subrotina *getforce*

0. Inicialização: $\mathbf{f}_n = 0$, $\Delta t_{crit} = \infty$

1. Computar as forças externas globais \mathbf{f}_{ext}^n

2. *Loop* sobre os elementos e

i. Obtenção dos deslocamentos nodais e velocidades dos elementos

ii. $\mathbf{f}_e^{int, n} = 0$

iii. *Loop* sobre os pontos de quadratura ξ_Q

a. Se $n = 0$, ir para o passo d.

b. Computar as medidas de deformação: $\mathbf{D}^{n-1/2}(\xi_Q)$, $\mathbf{F}^n(\xi_Q)$, $\mathbf{E}^n(\xi_Q)$

c. Computar as tensões $\boldsymbol{\sigma}^n(\xi_Q)$ pelas equações constitutivas

$$d. \mathbf{f}_e^{int,n} \leftarrow \mathbf{f}_e^{int,n} + \mathbf{B}^T \sigma^n \overline{w}_Q J |_{\xi_Q}$$

Fim do *loop* sobre os pontos de quadratura

iv. Computar as forças nodais externas no elemento, $\mathbf{f}_e^{ext,n}$

$$v. \mathbf{f}_e^n = \mathbf{f}_e^{ext,n} - \mathbf{f}_e^{int,n}$$

vi. Computar Δt_{crit}^e , se $\Delta t_{crit}^e < \Delta t_{crit}$ então $\Delta t_{crit} = \Delta t_{crit}^e$

vii. Alocar \mathbf{f}_e^n no vetor global \mathbf{f}^n

3. Fim do *loop* sobre os elementos

$$4. \Delta t = \alpha \Delta t_{crit}$$

A principal parte do procedimento é o cálculo das forças nodais, realizado pela subrotina *getforce*. Os principais passos desta subrotina são melhor descritos a seguir.

1. Extração dos deslocamentos e velocidades nodais do elemento a partir dos vetores globais.
2. As medidas de deformação são computadas para cada ponto de quadratura do elemento.
3. As tensões são computadas através das equações constitutivas para cada ponto de quadratura.
4. São calculadas as forças nodais internas através da integração do produto entre a matriz \mathbf{B} e as tensões de Cauchy no domínio do elemento.
5. As forças nodais do elemento são alocadas dentro do vetor global.

Na primeira aplicação do procedimento, as medidas de deformação e tensões (passos 1 e 2, respectivamente) não são computadas. Em vez disso, as forças nodais internas são computadas diretamente a partir das tensões iniciais.

A maioria das condições iniciais são facilmente trabalhadas em métodos explícitos. Por exemplo, se velocidades ou deslocamentos são prescritos como funções do tempo ao longo de qualquer contorno, as condições de contorno de velocidade/deslocamento podem ser impostas atribuindo-se as velocidades nodais de acordo com:

$$v_{ii}^{n+1/2} = \bar{v}_i(\mathbf{X}_i, t^{n+1/2}) \quad (4.13)$$

As condições de contorno também podem ser impostas em sistemas de coordenadas locais. Neste caso, as equações de movimento devem ser

expressas em componentes do sistema de coordenadas local; as forças nodais devem ser transformadas em componentes globais antes da montagem das matrizes globais. A orientação do sistema de coordenadas local pode variar com o tempo mas as fórmulas de integração no tempo devem ser modificadas para considerar a rotação do sistema de coordenadas.

O “*incremento de tempo crítico*” também é chamado de “*incremento de tempo estável*”. Um incremento de tempo estável para uma malha de elementos de deformação constante com materiais de comportamento independente de taxas é dado por:

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{crit} \quad , \quad \Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \leq \min_{e,l} \frac{2}{\omega_l^e} = \min_e \frac{l_e}{c_e}$$

Onde ω_{max} é a frequência máxima do sistema linearizado, l_e é um comprimento característico do elemento e , c_e é a velocidade de onda corrente no elemento e , e α é um fator de redução que considera efeitos de desestabilização de não-linearidades, com valor sugerido de $0,8 < \alpha < 0,98$.

No método das diferenças centrais a energia é normalmente integrada no tempo por um método de baixa ordem, segundo a regra do trapézio. As energias interna e externa são integradas conforme o procedimento a seguir.

$$W_{int}^{n+1} = W_{int}^n + \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2} (\mathbf{v}^{n+1/2})^T (\mathbf{f}_{int}^n + \mathbf{f}_{int}^{n+1}) = W_{int}^n + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_{int}^n + \mathbf{f}_{int}^{n+1}) \quad (4.14)$$

$$W_{ext}^{n+1} = W_{ext}^n + \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2} (\mathbf{v}^{n+1/2})^T (\mathbf{f}_{ext}^n + \mathbf{f}_{ext}^{n+1}) = W_{ext}^n + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_{ext}^n + \mathbf{f}_{ext}^{n+1}) \quad (4.15)$$

Onde $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n$. A energia cinética é dada por:

$$W_{kin}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^n)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^n \quad (4.16)$$

As energias internas também podem ser computadas nos pontos de quadratura do elemento. Assim:

$$\begin{aligned} W_{int}^{n+1} &= W_{int}^n + \frac{1}{2} \sum_e \Delta (\mathbf{d})_e^T (\mathbf{f}_{e,int}^n + \mathbf{f}_{e,int}^{n+1}) \\ W_{int}^{n+1} &= W_{int}^n + \frac{1}{2} \Delta t^{n+1/2} \sum_e \sum_{n_Q} \bar{w}_Q \mathbf{D}_Q^{n+1/2} : (\boldsymbol{\sigma}_Q^n + \boldsymbol{\sigma}_Q^{n+1}) \mathbf{J}_{\xi_Q} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_Q^n = \boldsymbol{\sigma}^n(\xi_Q)$

A conservação da energia exige que:

$$|W_{kin} + W_{int} - W_{ext}| \leq \epsilon \max(W_{kin}, W_{int}, W_{ext})$$

Onde ε é uma pequena tolerância, em geral da ordem de 10^{-2} .

4.3 Integração Implícita no Tempo

O procedimento de integração implícita no tempo é explicado a seguir baseando-se no trabalho de BATHE (1996).

A abordagem de um procedimento de solução incremental passo-a-passo assume que a solução para um tempo discreto t é conhecida e é necessário obter-se a solução para um tempo $t + \Delta t$, onde Δt é um incremento de tempo adequado. O sistema de equações a ser resolvido em uma análise não-linear, no tempo $t + \Delta t$ é:

$$\mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Onde o vetor $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$ armazena os carregamentos nodais externos, e $\mathbf{F}^{t+\Delta t}$ é o vetor de forças nodais, equivalentes às tensões nodais. A avaliação de ambos os vetores é feita utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais. Como as forças nodais $\mathbf{F}^{t+\Delta t}$ têm uma dependência não-linear com os deslocamentos nodais, é necessário um procedimento iterativo para encontrar a solução da eq. (4.18).

Assumindo-se que os carregamentos sejam independentes das deformações, pode-se escrever:

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t + \Delta \mathbf{F} \quad (4.19)$$

Onde $\Delta \mathbf{F}$ é o incremento de forças nodais correspondente ao incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{U}$. A aproximação para o incremento de forças nodais pode ser feita utilizando-se a matriz de rigidez tangente, \mathbf{K}^t , que corresponde às condições de geometria e de material no tempo t . Assim:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}^t \Delta \mathbf{U} \quad (4.20)$$

Onde $\mathbf{K}^t = \partial \mathbf{F}^t / \partial \mathbf{U}^t$ é a derivada das forças nodais internas em relação aos deslocamentos nodais.

Substituindo-se (4.19) e (4.20) em (4.18), obtém-se:

$$\mathbf{K}^t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^t \quad (4.21)$$

Resolvendo-se para os incrementos de deslocamentos nodais, podem-se obter os deslocamentos no tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U} \quad (4.22)$$

No procedimento de solução, resolve-se iterativamente, para $i = 1, 2, 3...$

as equações:

$$\Delta \mathbf{R}_{(i-1)} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}_{(i)} = \Delta \mathbf{R}_{(i-1)} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{U}_{(i)}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{U}_{(i)} \quad (4.25)$$

Com as condições iniciais dadas por: $\mathbf{U}_{(0)}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t$, $\mathbf{F}_{(0)}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t$ e

$$\mathbf{K}_{(0)}^{t+\Delta t} = \mathbf{K}^t$$

Para cada iteração, calcula-se através de (4.23) o vetor que considera os carregamentos desbalanceados no equilíbrio, e através de (4.24) obtém-se um incremento de deslocamentos que permite a estimativa de um novo campo de deslocamentos através de (4.25). O processo é repetido até que os vetores $\Delta \mathbf{R}_{(i-1)}$ ou $\Delta \mathbf{U}_{(i)}$ sejam suficientemente pequenos.

4.3.1 Algoritmos Tipo Newton-Raphson

Um dos procedimentos mais usados para a solução de equações não lineares em elementos finitos são os algoritmos do tipo Newton-Raphson.

As equações a serem resolvidas são:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

Onde:

\mathbf{U}^* é uma estimativa para o campo de deslocamentos;

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{R}^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^*) - \mathbf{F}^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^*) \quad (4.27)$$

Assumindo-se um procedimento iterativo de solução avaliado em $\mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}$, pode-se fazer uma expansão em séries de Taylor, que resulta em:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}} (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}) + \text{termos de ordem superior} \quad (4.28)$$

Substituindo-se (4.27) em (4.28) e utilizando-se (4.26):

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}} (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}) + \text{termos de ordem superior} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \quad (4.29)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior, pode-se calcular um incremento de deslocamentos a partir de:

$$\mathbf{K}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}_{(i)} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \quad (4.30)$$

Onde $\mathbf{K}_{(i-1)}^{t+\Delta t}$ é a matriz atual de rigidez tangente, dada por:

$$\mathbf{K}_{(i-1)}^{t+\Delta t} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t}} \quad (4.31)$$

Os novos valores para o campo de deslocamentos podem, então, ser dados por:

$$\mathbf{U}_{(i)}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}_{(i-1)}^{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{U}_{(i)} \quad (4.32)$$

4.3.2 Algoritmos Tipo “Arc-Length”

No problema de bifurcação, onde a um pequeno incremento de carregamento corresponde um grande deslocamento, a matriz de rigidez torna-se singular no ponto de bifurcação e o procedimento de solução numérica pelo método de Newton-Raphson não pode prosseguir. Afim de se conseguir a convergência próximo a pontos de bifurcação apresenta-se uma solução proposta por RIKS (1979).

Para analisar o comportamento pós-colapso utiliza-se um algoritmo “*singular point passing*”, como o *arc length method*, de modo a melhorar a convergência próximo ao ponto de singularidade.

Para a determinação de uma solução secundária, chega-se a um problema de autovalor. No esquema de ramificação da solução para um caminho secundário tem-se uma convergência pobre próxima ao ponto de bifurcação. Para a solução do problema, tradicionalmente, adota-se um escalar artificial multiplicando o autovetor como solução no ponto de bifurcação para sobrepor o problema de convergência, conforme será detalhado adiante. No entanto, em passos posteriores, a solução pode ser afetada pelo tamanho do múltiplo artificial. Dessa maneira, uma solução apresentada por KIM et al (2000) consiste na utilização de um escalar múltiplo do autovetor no ponto de bifurcação como estimativa inicial para o procedimento, eliminando-se a artificialidade do tamanho do escalar. A determinação do escalar é feita pela minimização da energia de deformação.

Algoritmo de bifurcação

Para um sistema conservativo, a variação da energia potencial total $\Delta \Pi$ devido a uma variação admissível de deslocamento $\delta \mathbf{u}$ pode ser escrita como:

$$\Delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_i} \delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{u}_i \partial \mathbf{u}_j} \delta u_i \delta u_j + \dots \quad (4.33)$$

A primeira variação da energia potencial total, $\partial \Pi / \partial x_i$, vale para um ponto em equilíbrio e a segunda variação é positiva definida para um sistema estável. Em termos da rigidez tangente, a condição de estabilidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j = K_{ij} \delta u_i \delta u_j > 0 \quad (4.34)$$

Onde K_{ij} é a rigidez tangente.

O ponto limite de estabilidade é atingido quando:

$$\det[\mathbf{K}] = 0 \quad (4.35)$$

A trajetória da solução após o ponto de bifurcação não pode ser a trajetória primária, mas sim a trajetória secundária (Figura 4.2).

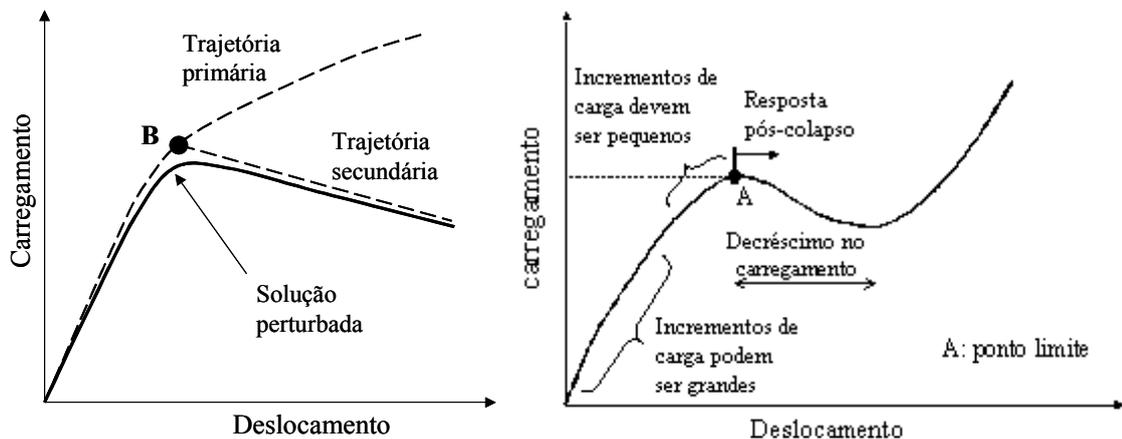


Figura 4.2 Trajetória da solução em um problema de bifurcação e resposta ao colapso de um modelo

O comportamento próximo ao ponto de colapso exige incrementos muito pequenos e existe a dificuldade em se ultrapassar o ponto de colapso, onde a matriz de rigidez é singular (a derivada da curva carregamento-deslocamento é zero) e além desse ponto necessita-se um procedimento de solução especial que permita um decréscimo no carregamento e um aumento no deslocamento. A idéia básica desse tipo de procedimento consiste na introdução de um multiplicador do carregamento que aumenta ou diminui a intensidade do carregamento aplicado, de modo a obter-se uma convergência mais rápida em cada passo, para permitir ultrapassar o ponto de colapso e avaliar a resposta pós-colapso.

As equações para o tempo $t + \Delta t$ são:

$$\lambda^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

onde $\lambda^{t+\Delta t}$ é um escalar multiplicador do carregamento, a ser determinado, e \mathbf{R} é o vetor de carregamento de referência para n graus de liberdade do modelo de EF e \mathbf{F} é o vetor de n forças nodais correspondentes à tensão no elemento.

O valor do multiplicador pode aumentar ou diminuir e o incremento por passo varia de acordo com a resposta estrutural do sistema.

A eq. (4.36) representa um sistema de n equações e $n+1$ incógnitas. O procedimento para resolução da eq. (4.36) é escrito como:

$$\mathbf{K}^T \Delta \mathbf{U}_{(i)} = (\lambda_{(i-1)}^{t+\Delta t} + \Delta \lambda_{(i)}) \mathbf{R} - \mathbf{F}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \quad (4.37)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangencial.

Como incógnitas têm-se os incrementos de deslocamento e os incrementos de multiplicadores de carregamento. A equação adicional é dada por uma equação de restrição entre $\Delta \lambda_{(i)}$ e $\Delta \mathbf{U}_{(i)}$ do tipo:

$$f(\Delta \lambda_{(i)}, \Delta \mathbf{U}_{(i)}) = 0 \quad (4.38)$$

Definindo-se, dentro de um passo:

$$\mathbf{U}_{(i)} = \mathbf{U}_{(i)}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t \quad (4.39)$$

$$\lambda_{(i)} = \lambda_{(i)}^{t+\Delta t} - \lambda^t \quad (4.40)$$

onde $\mathbf{U}_{(i)}$ representa o incremento total em deslocamentos dentro de um passo de carga e $\lambda_{(i)}$ representa o incremento total no multiplicador de carga. Aplicando-se como restrição o critério “*spherical constant arc length*”, ilustrado na Figura 4.3:

$$(\lambda_{(i)})^2 + \frac{\mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{U}_{(i)}}{\beta} = (\Delta l)^2 \quad (4.41)$$

onde Δl é o comprimento do arco para cada passo e β é um fator de normalização. O valor de Δl é selecionado com base no histórico de iterações e diminuído se são encontradas dificuldades na convergência. Normalmente Δl é grande para respostas lineares e pequeno para respostas não lineares

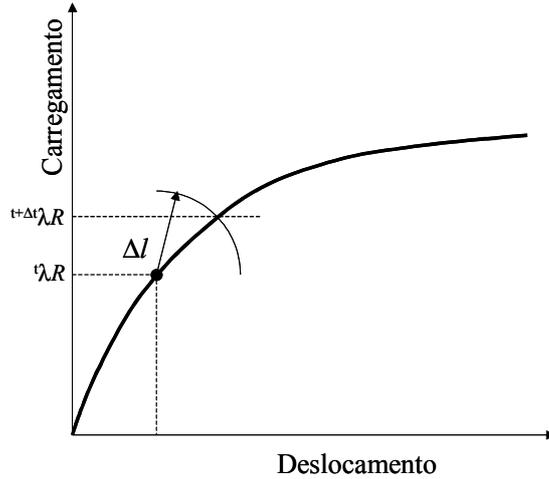


Figura 4.3. Representação da constante esférica do critério *arc length*.

A equação (4.37) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}^\tau \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(i)} = \lambda_{(i-1)}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{F}_{(i-1)}^{t+\Delta t} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}^\tau \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}} = \mathbf{R} \quad (4.43)$$

e, portanto,

$$\Delta \mathbf{U}_{(i)} = \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(i)} + \Delta \lambda_{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}} \quad (4.44)$$

usando-se:

$$\lambda_{(i)} = \lambda_{(i-1)} + \Delta \lambda_{(i)} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{U}_{(i)} = \mathbf{U}_{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(i)} + \Delta \lambda_{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}} \quad (4.46)$$

Substituindo-se (4.45) e (4.46) em (4.41) obtém-se uma equação quadrática em $\Delta \lambda_{(i)}$.

O incremento de teste (*trial increment*) de deslocamento nodal ao longo da trajetória secundária é dado, segundo RIKS (1979), por:

$$\Delta \mathbf{u}^s = a(\Delta \mathbf{u}^p + b \mathbf{v}) \quad (4.47)$$

Onde os índices p e s referem-se à trajetória primária ou secundária, a e b são constantes positivas que podem ser determinadas e \mathbf{v} é um autovetor em um ponto singular calculado por:

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = 0 \quad (4.48)$$

Através do *arc length control* a constante a é determinada a partir do comprimento de arco prescrito. Neste trabalho a determinação faz-se por meio da minimização da energia total de deformação. O valor $\Delta \mathbf{u}^s$ é utilizado como aproximação inicial para a solução através do método de Newton-

Raphson e é atualizada ao longo das iterações. Assim, o efeito da magnitude de a no comportamento de enrugamento é eliminado.

A constante b é determinada a partir da condição de que a trajetória secundária deve ser ortogonal à primária, como mostrado:

$$\Delta \mathbf{u}^p \cdot \Delta \mathbf{u}^s = 0 \quad (4.49)$$

$$b = -\frac{\Delta \mathbf{u}^p \cdot \Delta \mathbf{u}^p}{\Delta \mathbf{u}^p \cdot \mathbf{v}} \quad (4.50)$$

No entanto, segundo a equação (4.50), b não pode ser determinado quando o autovetor \mathbf{v} é ortogonal à trajetória primária, que é o que acontece na maioria dos problemas de bifurcação. Assim, o incremento de deslocamento nodal pode simplesmente ser tomado como:

$$\Delta \mathbf{u}^s = a \mathbf{v} \quad (4.51)$$

4.4 Implementação do Método de Newton

Os algoritmos para integração implícita no tempo e solução do equilíbrio são apresentados por BELYTCHKO et al (2000) e reproduzidos a seguir. Os problemas dinâmico e de equilíbrio são resolvidos através do *time-stepping*: os carregamentos externos e outras condições são descritos como funções do tempo, que é incrementado dentro da faixa de interesse. Em problemas de equilíbrio, o tempo é muitas vezes substituído por um parâmetro que aumenta monotonicamente. Soluções de processos de equilíbrio obtidos desta maneira são chamados “soluções incrementais”.

O procedimento descrito no fluxograma refere-se ao algoritmo Newton Total, onde a matriz Jacobiana é avaliada e invertida a cada passo do procedimento iterativo. O algoritmo implícito começa com a imposição das condições iniciais. Tais condições podem ser trabalhadas da mesma maneira que nos métodos explícitos. Os deslocamentos iniciais são considerados nulos.

Os deslocamentos \mathbf{d}^{n+1} são obtidos através de um procedimento iterativo. Para o início do procedimento, um valor inicial \mathbf{d} é necessário, e normalmente usa-se a solução do passo anterior. O resíduo é calculado para este valor inicial. Na solução do equilíbrio, o resíduo depende somente das forças nodais internas e externas, obtidas através da subrotina *getforce*, que é similar àquela descrita no procedimento explícito, mas não é feito o cálculo do incremento de tempo estável. Em soluções de problemas implícitos

transientes, os resíduos também dependem das acelerações.

Algoritmo para integração implícita no tempo

1. Condições iniciais e inicialização de parâmetros:

$$\mathbf{v}^0, \sigma^0; \mathbf{d}^0 = \mathbf{0}, n = 0, t = 0; \text{ computar } \mathbf{M}$$

2. Obter $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{d}^0, 0)$

3. Computar as acelerações iniciais $\mathbf{a}^n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}^n$

4. Estimar a solução no passo seguinte $\mathbf{d}_{new} = \mathbf{d}^n$ ou $\mathbf{d}_{new} = \tilde{\mathbf{d}}^{n+1}$

5. Iterações de Newton para o *incremento de tempo* $n+1$:

a. Executar a subrotina *getforce* que computa: $\mathbf{f}(\mathbf{d}_{new}, t^{n+1})$

$$\text{b. } \mathbf{a}^{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{new} - \tilde{\mathbf{d}}^{n+1}), \quad \mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \gamma \Delta t \mathbf{a}^{n+1}$$

$$\text{c. } \mathbf{r} = \mathbf{M} \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{f}$$

d. Computar a matriz Jacobiana $\mathbf{A}(\mathbf{d})$

e. Modificar $\mathbf{A}(\mathbf{d})$ para as condições de contorno essenciais

f. Resolver as equações lineares $\Delta \mathbf{d} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}$

$$\text{g. } \mathbf{d}_{new} \leftarrow \mathbf{d}_{old} + \Delta \mathbf{d}$$

h. Verificar o critério de convergência; se não foi atingido, voltar ao passo 5-a.

6. Atualizar deslocamentos, contadores e tempo: $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}_{new}$, $n \leftarrow n+1$,
 $t \leftarrow t + \Delta t$

7. Verificar o balanço de energia

8. Saída; Se a simulação ainda não está completa, voltar para o passo 4.

Algoritmo para solução do equilíbrio

1. Condições iniciais e inicialização: $\mathbf{d}^0 = \mathbf{0}$; σ^0 ; $n = 0$; $t = 0$; $\mathbf{d}_{new} = \mathbf{d}^0$

2. Iterações de Newton para o incremento de carga $n + 1$:

a. Executar a subrotina *getforce* que computa: $\mathbf{f}(\mathbf{d}_{new}, t^{n+1})$;

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{d}, t^{n+1})$$

b. Computar $\mathbf{A}(\mathbf{d}_{new})$

c. Modificar $\mathbf{A}(\mathbf{d}_{new})$ para as condições de contorno essenciais

d. Resolver as equações lineares $\Delta \mathbf{d} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}$

- e. $\mathbf{d}_{new} \leftarrow \mathbf{d}_{new} + \Delta \mathbf{d}$
- f. Verificar o critério de erro. Se não foi atingido, ir para o passo 2-a.
3. Atualizar deslocamentos, contador e tempo: $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}_{new}$, $n \leftarrow n+1$,
 $t \leftarrow t + \Delta t$
4. Saída; Se a simulação ainda não está completa, voltar para o passo 2.

Algoritmo da subrotina *getforce para integração implícita*

Subrotina *getforce*

0. Inicialização: $\mathbf{f}_n = 0$
1. Computar as forças externas globais \mathbf{f}_{ext}^n
2. *Loop* sobre os elementos e
 - i. Obtenção dos deslocamentos nodais e velocidades dos elementos
 - ii. $\mathbf{f}_e^{int, n} = \mathbf{0}$
 - iii. *Loop* sobre os pontos de quadratura ξ_Q
 - a. Se $n = 0$, ir para o passo d.
 - b. Computar as medidas de deformação: $\mathbf{D}^{n-1/2}(\xi_Q), \mathbf{F}^n(\xi_Q), \mathbf{E}^n(\xi_Q)$
 - c. Computar as tensões $\boldsymbol{\sigma}^n(\xi_Q)$ pelas equações constitutivas
 - d. $\mathbf{f}_e^{int, n} \leftarrow \mathbf{f}_e^{int, n} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^n \overline{W}_Q J|_{\xi_Q}$
 - Fim do *loop* sobre os pontos de quadratura
 - iv. Computar as forças nodais externas no elemento, $\mathbf{f}_e^{ext, n}$
 - v. $\mathbf{f}_e^n = \mathbf{f}_e^{ext, n} - \mathbf{f}_e^{int, n}$
 - vi. Alocar \mathbf{f}_e^n no vetor global \mathbf{f}^n
3. Fim do *loop* sobre os elementos

A matriz Jacobiana é calculada para o último estado do corpo. Condições de contorno homogêneas de deslocamento podem ser impostas modificando-se a matriz Jacobiana da seguinte forma: a equação correspondente ao componente de deslocamento nulo é ou omitida, ou substituída por uma equação que estabelece que o componente se anule. Isto pode ser feito igualando-se a zero os termos das linhas e colunas correspondentes da matriz Jacobiana e dos termos do lado direito da equação, e posicionando-se uma constante positiva na diagonal. Para restrições mais

complexas (como o contato, por exemplo), utilizam-se multiplicadores de Lagrange ou métodos de penalização.

4.5 Implementação de Modelo de Material

Alguns programas disponíveis de elementos finitos permitem que o usuário implemente uma rotina própria de modelo de material. Esta rotina, usualmente é escrita em linguagem FORTRAN e compilada junto ao programa principal. No contexto geral do software, de acordo com os algoritmos apresentados anteriormente, as rotinas de material são implementadas junto à subrotina chamada nos algoritmos acima de *gefforce*. Dentro desta subrotina, existe um *loop* sobre os elementos do modelo (item 2), dentro deste existe um *loop* sobre os pontos de quadratura (item iii) e, finalmente, dentro do item (c) é feita a atualização das tensões via rotina de material.

Para a rotina de material, pode-se estabelecer um número arbitrário de variáveis de história que podem ser utilizadas para passar as informações de um passo da integração no tempo a outro. Os valores atualizados na rotina de material são calculados no ponto de integração. Desta maneira, a rotina é chamada para cada ponto de integração, e em um *loop* mais externo, a rotina percorre todos os elementos que tem propriedades de material definidas pela subrotina.

A implementação da subrotina permite que se tenha acesso à matriz gradiente de deformação, quando da utilização de elementos do tipo sólido, o que aumenta o número de variáveis de história em 9 termos. Para elementos do tipo casca o procedimento de obtenção do gradiente de deformação é diferente, e deve ser implementado pelo usuário, de maneira similar à descrita no Apêndice 1.

A definição do sistema de coordenadas é opcional, mas torna-se necessária quando o material possui propriedades direcionais, como por exemplo modelos de plasticidade anisotrópica e de materiais compósitos.

Para um modelo geral de subrotina de material definido pelo usuário (UMAT), são fornecidos como dados de entrada as constantes de material, como por exemplo Módulo de Young, coeficiente de Poisson, Módulo de elasticidade volumétrico (Bulk Modulus) e Módulo de Cisalhamento. Nos *loops* mais externos ao ponto de chamada da subrotina são definidos o incremento

de tempo, o incremento de deformação, a temperatura (se necessário) e do modelo gerado conseguem-se as informações sobre os tipos de elementos utilizados, por exemplo, hexaédrico, casca ou viga e quantidade de nós.

Como saídas da subrotina tem-se a atualização de tensões para o novo passo e as variáveis de história, onde se armazenam informações como por exemplo a deformação plástica total, os componentes do gradiente de deformação do passo correspondente, os coeficientes da matriz constitutiva elasto-plástica, e qualquer outro dado que se deseja tornar disponível no incremento seguinte de deformação.

O programa de análise por elementos finitos LS-DYNA ® permite a opção de se compilar um modelo de material especificado pelo usuário e este recurso foi utilizado como uma porta para a implementação de cálculos adicionais dentro do programa devido ao acesso às informações em cada passo de cálculo.

5 Enrugamento em Chapas Metálicas

Em uma operação típica de estampagem o punção entra em contato com a chapa (*blank*), estica-a e começa a puxá-la através do anel do prensa-chapas. As bordas da chapa são puxadas para regiões com perímetros progressivamente menores, o que produz tensões de compressão na direção circunferencial. Caso estas tensões atinjam um valor crítico para determinado material e espessura, ocorrem suaves ondulações (*buckles*). Estas podem desenvolver-se em ondulações mais pronunciadas, conhecidas como rugas (*wrinkles*), gerando o fenômeno de enrugamento. As rugas podem ocorrer:

- a) na região do prensa-chapas, quando a pressão no prensa-chapas não é suficiente para evitá-las;
- b) fora do prensa-chapas, em regiões onde a chapa sob compressão circunferencial não é apoiada ou tem contato de apenas um lado, ou sofre mudanças abruptas de seção durante o processo (TAYLOR, 1988).

Segundo KOBAYASHI et al (1989) o enrugamento sobre uma face plana da matriz pode ser evitado por uma força correta aplicada no prensa-chapas enquanto que o enrugamento na entrada da matriz é evitado tomando-se raios de entrada da matriz grandes o bastante comparados à espessura da chapa. No entanto, nem sempre é possível fazer tais alterações sem comprometer outros aspectos do processo de fabricação. SZACINSKI e THOMSON (1991) afirmam que a deformação adicional induzida pelo aumento de carga no prensa-chapas pode aproximar a chapa de seu limite de fratura, portanto, existe apenas uma faixa estreita de trabalho, exigindo um cuidadoso balanço entre os limites de fratura e enrugamento.

5.1 Propriedades dos Materiais e o Enrugamento

A influência das propriedades dos materiais na formação de rugas tem

sido objeto de extensa pesquisa. Segundo TAYLOR (1988) em operações de estampagem (*drawing*) há uma concordância geral, baseada em experimentos com peças cônicas e cilíndricas, de que um alto valor do coeficiente de anisotropia normal média (r_m) e um baixo valor de coeficiente de anisotropia planar (Δr) reduzem a instabilidade (enrugamento) tanto no flange como nas paredes da peça. Uma baixa razão entre a tensão de escoamento e o módulo elástico (Y / E) diminui a possibilidade de acontecer o enrugamento na parede da peça, bem como sua intensidade, caso ocorra. O valor do coeficiente de encruamento (usualmente representado por n) tem efeito indireto: quando a força do prensa-chapas é mantida constante, o valor de n não tem efeito. Contudo, materiais com altos valores de n habilitam maior força no prensa-chapas, o que reduz a instabilidade.

5.2 Ensaio e Diagramas Limite de Conformação

Dois tipos de ensaios são utilizados para o estudo do enrugamento: o ensaio de enrugamento de uma peça cônica e o ensaio de instabilidade elástica de Yoshida (*Yoshida buckling test* - YBT). Na Figura 5.1 apresenta-se um esquema do ensaio da peça cônica. Neste ensaio, o punção é muito menor que a abertura da matriz e, conseqüentemente, a parede cônica da peça não está em contato com o punção nem com a matriz. Assim, sob certas condições formam-se rugas nas paredes da peça. Com altos níveis de força do prensa-chapas as tensões de tração na direção radial na parede previnem a formação de rugas e, então, os raios do punção ou da matriz tornam-se os fatores limitantes do aparecimento das mesmas. A máxima força do prensa-chapas, entretanto, está limitada pela fratura da peça, como pode ser visto na Figura 5.2. A força no prensa chapas (FPC) deve variar dentro da faixa mostrada na figura. A profundidade máxima de conformação ocorre na interseção dos limites à fratura e enrugamento, conforme mostrado.

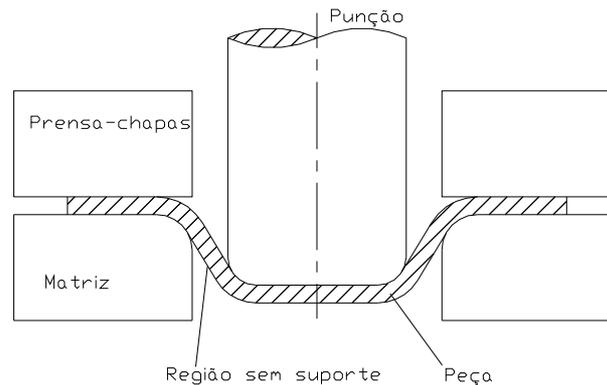


Figura 5.1 Esquema do ensaio de enrugamento em peça cônica (TAYLOR, 1988).

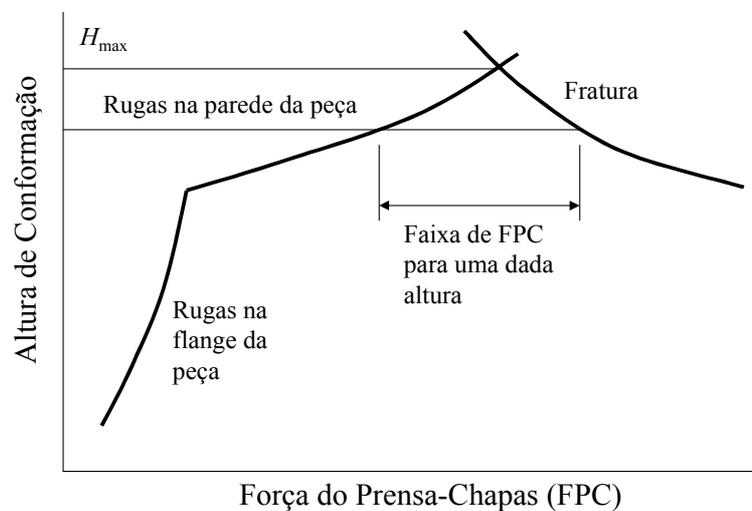


Figura 5.2 Limites de enrugamento e fratura na estampagem de peças cônicas (TAYLOR, 1988)

No ensaio de Yoshida, um corpo de prova quadrado é preso em cantos opostos e tracionado na direção diagonal (Figura 5.3). Tensões não uniformes são geradas no corpo de prova, e estas tensões causam uma instabilidade no centro ao longo da direção de carregamento. O material excedente nas laterais induz tensões de compressão na região central, provocando o enrugamento. Este ensaio muitas vezes não é aplicado para alumínio, pois os corpos de prova fraturam antes do início da instabilidade para a maioria de suas ligas.

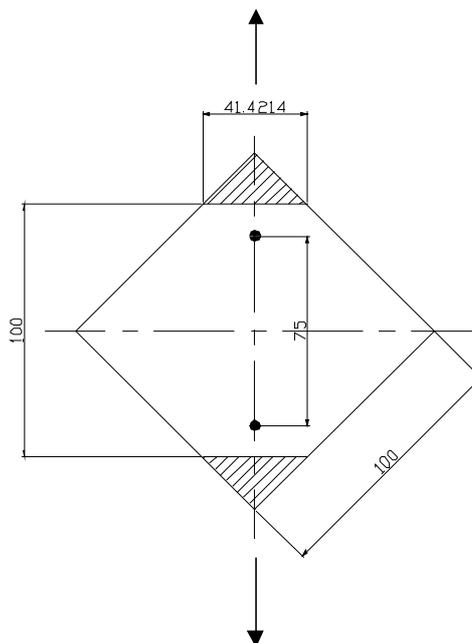


Figura 5.3 Esquema do ensaio de instabilidade Yoshida - YBT (TAYLOR, 1988).

O nível em que se inicia o enrugamento depende fortemente de uma combinação das deformações principais. Estas informações são representadas graficamente em um diagrama limite de conformação, determinando regiões seguras e regiões propensas à formação de rugas.

Na Figura 5.4 as deformações críticas ao enrugamento são desenhadas sobre o diagrama limite de conformação. Outra forma de se obter o diagrama é utilizando-se o espaço das tensões principais, utilizado por autores como KIM e SON (2000). O diagrama pode ser obtido estudando-se o estado de tensões ou deformações em uma peça no início do enrugamento. Através de mudanças na geometria da peça podem-se obter outros estados que conduzam ao enrugamento, possibilitando o levantamento de uma curva determinando o limite para a operação e o material considerados. KIM et al (2000) sugerem modificações na geometria do corpo de prova do ensaio YBT, que podem ser utilizadas no levantamento da curva de enrugamento. Tais modificações consistem em cortar as pontas da direção onde é induzida a compressão de modo a alterar o estado de tensões no centro do CDP, para um mesmo carregamento de tração.

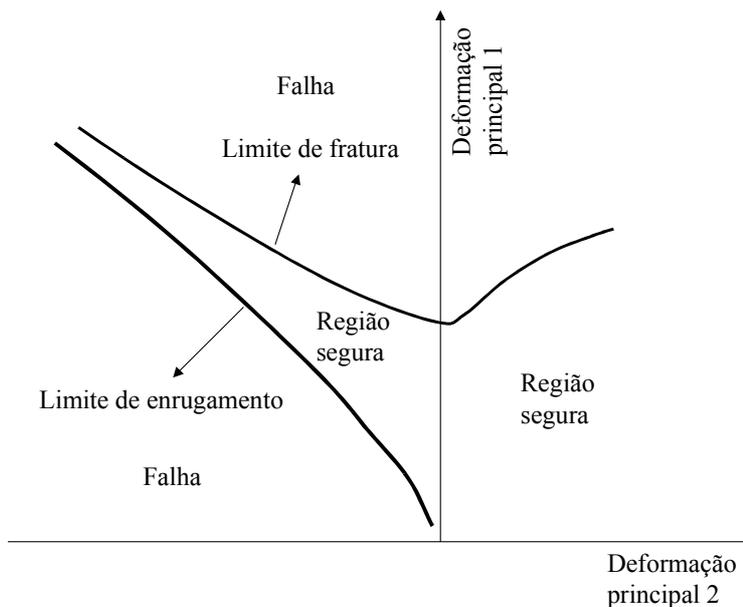


Figura 5.4 Diagramas combinados de limite de conformação e enrugamento.
(TAYLOR, 1988).

Um dos principais objetivos deste trabalho consiste na obtenção do diagrama limite quanto a enrugamento usando-se o método dos elementos finitos, evitando-se assim custosos e demorados ensaios experimentais.

5.3 Modelos para Avaliação do Início do Enrugamento

5.3.1 Teoria da Bifurcação.

Em uma série de artigos, HILL desenvolveu a teoria da unicidade para sólidos rígido-plásticos. Em HILL (1956a) estabelecem-se os princípios da teoria. Em um problema normal, o ponto de escoamento de um sólido rígido-plástico é definido especificando-se um campo de velocidades \mathbf{v} sobre um contorno S_v e a tração superficial sobre a área restante S_f . Embora estas condições de contorno determinem o estado de tensões de uma peça em deformação plástica, não estão completamente determinados os modos de deformação. Assim, HILL mostra que especificando-se \dot{F} em S_f , pode-se definir unicamente o modo de deformação considerando-se que as mudanças geométricas são desprezíveis e existe encruamento no corpo. Em HILL (1956b) o procedimento desenvolvido é aplicado a uma viga de perfil cônico e os resultados são discutidos. Uma teoria um pouco mais generalizada é apresentada em HILL (1957a), onde a hipótese de mudanças geométricas desprezíveis é abandonada pela inclusão de alguns termos na formulação do

problema. Em HILL (1957b) são feitas considerações sobre a formulação obtida. Analisa-se o funcional de unicidade, que define uma taxa de encruamento crítica, acima da qual o modo de deformação é único, e abaixo da qual, provavelmente, não. Apresenta-se um funcional modificado para o caso de mudanças significativas na geometria e prova-se que o modo atual de deformação minimiza este funcional.

Em 1958, HILL, em artigo clássico, estabelece a teoria geral da bifurcação e unicidade para sólidos elasto-plásticos. Neste artigo, define-se uma condição suficiente para o problema, caracterizado como um problema de valor de contorno com a aplicação de um campo de velocidades em uma área e especificando-se trações na área restante. Formulando-se o problema desta maneira Hill desenvolve uma teoria estabelecendo as condições onde existe uma solução única e definida para o problema, apresentada a seguir de forma resumida. No desenvolvimento serão utilizadas as notações tensorial e indicial, de acordo com a conveniência.

É importante notar que se tem não a taxa de mudança da tração verdadeira, mas sim a taxa de mudança de tração nominal, baseada na configuração atual. O tensor de tensões nominais, $s_{ij}(t)$, é não simétrico associado a eixos fixos ortogonais. Em qualquer instante $t + \delta t$, subsequente a t , o j -ésimo componente de força no elemento plano é $(s_{ij} + \delta s_{ij})dS$, que é perpendicular ao i -ésimo eixo no instante t e de área infinitesimal dS . A força em $t+\delta t$ na área plana, cuja área vetorial é $L_i dS$ no instante t , tem componentes $(F_j + \delta F_j)dS$, onde:

$$F_j = L_i s_{ij}$$

$$\delta F_j = L_i \delta s_{ij}$$

F_j é a tração nominal baseada na configuração no tempo t . A condição de contorno prescrita é dada por:

$$\dot{F}_j = L_i \dot{s}_{ij} \quad (5.1)$$

As equações de equilíbrio, desconsiderando-se as forças de campo, são dadas por:

$$\frac{\partial \dot{s}_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (5.2)$$

x_i é a posição dos elementos no tempo t .

As equações angulares de equilíbrio são satisfeitas associando-se s_{ij}

com o tensor de tensões verdadeiras, em relação aos mesmos eixos:

$$\dot{s}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^0 = \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \sigma_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Resultados experimentais são dados em termos do tensor de tensões verdadeiras, associado com eixos ortogonais rotacionando com os elementos.

$$\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^0 = \sigma_{ik} W_{kj} + \sigma_{jk} W_{ki}$$

Onde $W_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2$ é a parte anti-simétrica do tensor gradiente de velocidade (responsável pelo giro).

Combinando-se as equações anteriores, pode-se chegar a

$$\dot{s}_{ij} - \left(\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik} D_{jk} + \sigma_{jk} D_{ik}) \quad (5.3)$$

Onde $D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, ou taxa de deformação.

Estabelecidas as relações da análise de tensões, passa-se ao estabelecimento das relações das propriedades de material considerando-se o comportamento de um elemento elástico, tendo ou não sofrido plasticidade anteriormente, e o comportamento de um elemento em regime plástico.

Em um elemento onde a resposta a mudanças infinitesimais é puramente elástica, as relações entre tensão-deformação e taxa de deformação são tomadas como sendo homogêneas lineares e podem ser escritas como:

$$\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (5.4)$$

onde o módulo C_{ijkl} depende da tensão atual e orientação dos eixos de anisotropia e, possivelmente, se o elemento já sofreu plasticidade, do histórico de deformação.

Estipula-se que o módulo possua a simetria:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (5.5)$$

Escrevendo-se (5.4) em uma notação mais simplificada:

$$\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (5.6)$$

Onde os elementos tensoriais estão considerados no espaço-9. \mathbf{C} é uma matriz simétrica 9x9, $\text{tr}(\mathbf{L})$ é o traço da matriz gradiente de velocidades e o símbolo $:$ indica a contração de um par de índices repetidos que aparecem na mesma ordem.

Para um elemento plástico, a hipótese mais simples é:

$$\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (5.7)$$

onde \mathbf{D}^p – parte plástica da taxa de deformação;

\mathbf{C} – matriz simétrica dependente do histórico de deformação.

Supondo-se:

$$\mathbf{D}^p = h^{-1} [\mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma)] \mathbf{n} \quad \text{quando } \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) \geq 0 \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{0} \quad \text{quando } \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) \leq 0 \quad (5.8b)$$

onde h é um escalar positivo que mede a taxa atual de encruamento (*work hardening*) e depende da tensão e do histórico de carregamento, \mathbf{n} é o versor especificando a “direção” da taxa de deformação plástica e depende da tensão e do histórico de carregamento. Considerando-se plasticidade associativa, definida no item 3.6, $\mathbf{n} = \partial f / \partial \sigma$ e f é a função de escoamento. A primeira condição em (5.8) indica um elemento sofrendo carregamento plástico, a segunda um elemento em descarregamento elástico puro ou descarregamento elástico a partir de uma situação de plasticidade.

Invertendo-se as relações (5.7) e (5.8), pode-se chegar a:

$$\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D} = \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) (1 + h^{-1} \mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n}) \quad \text{quando } \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) \geq 0$$

$$\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D} = \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) \quad \text{quando } \mathbf{n} : (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) \leq 0$$

desde que $1 + h^{-1} \mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} > 0$. Esta inequação é satisfeita para qualquer $h > 0$, exigindo-se:

$$\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} > 0 \quad \text{em um elemento plástico} \quad (5.9)$$

Isto é, a forma quadrática de \mathbf{C} é positiva para vetores desviadores – isto tem interpretação que a taxa de deformação na direção \mathbf{n} constitui carregamento. Então, em um elemento plástico:

$$\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma = \mathbf{C} : \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} : \mathbf{C})}{(\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + h)} : \mathbf{D} \quad \text{quando } \mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (5.10a)$$

$$\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad \text{quando } \mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D} \leq 0 \quad (5.10b)$$

Onde \otimes indica o produto tensorial entre os tensores resultantes das contrações dos termos entre parênteses.

Os únicos sólidos elasto-plásticos que se tem estudado experimentalmente são os metais comuns que possuem um módulo de elasticidade tão grande em comparação com as tensões suportadas pelo material que talvez não haja sentido em manter o termo $\text{tr}(\mathbf{L})\sigma$ nem em postular qualquer particular dependência da tensão com \mathbf{C} na faixa elástica. As

eqs. (5.7), (5.8) e (5.10) se reduzem a relações aceitáveis, com \mathbf{n} como o fersor normal à superfície de escoamento. Estabelecida a relação de comportamento de material nas situações de carregamento possíveis, passa-se ao estabelecimento de certas identidades fundamentais.

Seja E , função do gradiente de velocidade, dado por:

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k} \sigma_{ij}) D_{ji} - \frac{1}{2} \sigma_{ik} (2D_{ij} D_{jk} - v_{j,i} v_{j,k}) \quad (5.11)$$

Sejam \mathbf{D}^* e \mathbf{D} taxas de deformação distintas e $\dot{\sigma}^*$, $\dot{\sigma}$ as respectivas taxas de tensão de um elemento em uma dada condição e estado de tensões. Escreve-se $\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}^* - \mathbf{D}$, $\Delta \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^* - \dot{\sigma}$. Deve-se perceber que quando o elemento é plástico, $\Delta \mathbf{D}$ e $\Delta \dot{\sigma}$, considerados como simples vetores, não correspondem necessariamente à maneira como foi relatada em (5.10).

Para definir o critério de unicidade, HILL (1958) apresenta o Lema I:

Em um elemento elástico, existe a identidade imediata, derivada de (5.6):

$$\Delta(\dot{\sigma} + tr(\mathbf{L})\sigma) : \Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{D} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D} \quad (5.12)$$

Em um elemento plástico, para $h \geq 0$,

$$\Delta(\dot{\sigma} + tr(\mathbf{L})\sigma) : \Delta \mathbf{D} \geq \Delta \mathbf{D} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{n} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D})^2}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + h} \quad (5.13)$$

Estas definições são usadas na derivação do critério de unicidade.

A igualdade em (5.13) é assegurada quando ambas as taxas de deformação sofrem um carregamento adicional. A desigualdade é assegurada quando $\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D}^* \geq 0$ e $\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D} < 0$. Então o lado esquerdo da equação (5.13) é:

$$\Delta \mathbf{D} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D}^*)(\mathbf{n} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D})}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + h}$$

Este valor excede o lado direito. Finalmente, se ambas as taxas de deformação produzem descarregamento, sua diferença satisfaz a eq. (5.12) e, portanto, a eq. (5.13), com igualdade apenas se $\mathbf{n} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{D} = 0$.

Observa-se a distribuição atual de tensões em um dado corpo, junto com as propriedades de material em cada ponto. Omitindo-se por simplicidade as forças de campo, a taxa de tração nominal $\dot{\mathbf{F}}$ é especificada sobre a área \mathbf{S}_F e a velocidade \mathbf{v} sobre a área restante \mathbf{S}_v . Estas equações e as equações de campo (5.2), (5.3), (5.6) e (5.10) definem o problema de valor de contorno

para o campo interno de velocidades.

Supondo-se que possam haver duas soluções possíveis (não diferindo meramente pelo movimento de corpo rígido quando $\mathbf{S}_v = 0$) e denotando-se sua diferença por $\Delta \mathbf{v}$. Então, das equações (5.1) e (5.2), com S e V sendo a área e volume atuais,

$$0 = \int \Delta \dot{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{v} dS = \int \Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} dV$$

Substituindo-se (5.3) na relação acima e utilizando-se as relações:

$$\mathbf{BA} = (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)^T;$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T).$$

Pode-se chegar a:

$$0 = \int \Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} dV = \int \Delta (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) : \Delta \mathbf{D} dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v})$$

Onde:

$$\Sigma(\Delta \mathbf{v}) = \int \Delta \sigma_{ik} (2 \Delta D_{ij} \Delta D_{jk} - \Delta v_{j,i} \Delta v_{j,k}) dV$$

Uma condição suficiente para unicidade da solução é que:

$$\int \Delta (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) : \Delta \mathbf{D} dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v}) > 0 \quad (5.14)$$

Para diferenças $\Delta \mathbf{v}$ de cada par distinto de campos de velocidade contínuos tomando os dados valores em S_v .

Pode-se substituir esta condição por um critério mais fraco que é um funcional apenas do vetor simples $\Delta \mathbf{v}$.

Do Lema I, quando $h \geq 0$, $\int \Delta (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma) : \Delta \mathbf{D} dV \geq H(\Delta \mathbf{v})$ onde:

$$H(\mathbf{v}) = \int \mathbf{D} : \mathbf{C} : \mathbf{D} dV - \int \frac{(\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{D})^2}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + h} dV^p \quad (5.15)$$

sendo V_p o volume total da região plastificada. Então se obtém a condição suficiente:

$$H(\mathbf{w}) - \Sigma(\mathbf{w}) > 0 \quad (5.16)$$

para todos os campos contínuos de velocidade \mathbf{w} válidos em S_v mas não identicamente iguais a zero em V .

Adiante H_0 será escrito como H para $h = 0$ em V_p , correspondendo a um sólido sem encruamento. Similarmente, H_∞ será escrito em vez de

$\int \mathbf{D} : \mathbf{C} : \mathbf{D} dV$, para o valor de H quando $h \rightarrow \infty$ em V_p , correspondendo a um sólido que não tenha sido previamente encruado (não tenha sofrido deformação plástica). Nota-se que $H_0 \leq H \leq H_\infty$.

Podem-se distinguir as seguintes situações:

- (i) $\Sigma < H_\infty$ para todos os campos w . O problema é único para comportamento puramente elástico.
- (ii) $\Sigma < H_0$ para todos os campos w . O problema é único para todo $h \geq 0$, desde $H \leq H_0$ e $\Sigma < H$ sempre.
- (iii) $\Sigma \leq H_0$ todos os campos w , com igualdade em pelo menos um. O problema é único sempre que $h > 0$ (sólido com encruamento) desde que $\Sigma \leq H_0 < H$. Mas nada pode ser concluído quando $h = 0$ sobre qualquer ponto em V_p (sólido sem encruamento) desde que $\Sigma = H_0 = H$ para pelo menos um campo.
- (iv) $\Sigma > H_0$ para pelo menos um campo e $\Sigma < H_\infty$ para todos. O problema é único com certeza somente para taxas de encruamento suficientemente grandes.

Uma vez definido o critério de bifurcação para sólidos elasto-plásticos por HILL (1958), aplicado a sólidos caracterizados por uma superfície de escoamento com cantos suavizados, HUTCHINSON (1974) faz uma especialização dessa teoria para uma classe de sólidos tridimensionais e é aplicado à teoria de placas e cascas de Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV). O desenvolvimento realizado por HUTCHINSON (1974) é utilizado em trabalhos como o de NEALE & TUĞCU (1990), estudando a influência de vários materiais e diferentes geometrias na formação do enrugamento, AMÉZIANE-HASSANI & NEALE (1991), analisando como prever o enrugamento trabalhando-se no sentido de levantar-se curvas limite no espaço das tensões atuantes, KIM & SON (2000), estudando o comportamento quanto ao enrugamento de chapas anisotrópicas submetidas a tensão biaxial plana, investigando-se a influência de parâmetros como a tensão de escoamento, o coeficiente de encruamento e de anisotropia normal.

Esta é uma teoria complicada, que tem como principal desvantagem a sua aplicação a corpos com geometria mais simples, chamados perfeitos. Problemas onde existe o contato no ponto de instabilidade não podem ser tratados por este método.

5.3.2 Inserção de Imperfeição Inicial

Neste caso enquadram-se, por exemplo, os trabalhos de CAO e BOYCE

(1997), WANG e CAO (2000). As situações estudadas por estes autores utilizam um critério para enrugamento estabelecido por uma combinação de análise por elementos finitos e conservação de energia. No modelo de elementos finitos são incorporadas imperfeições para capturar os comportamentos de início de enrugamento e após seu início. Um meio de se incorporar imperfeições é a utilização de “imperfeições modais” (formas modais senoidais), onde a superfície intermediária da placa é ajustada para ter uma certa forma senoidal. Assim, predispõe-se a superfície média a ter uma ondulação senoidal:

$$z_0 = A t_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (5.17)$$

Em adição a esta condição, deve-se especificar condições de contorno para os modos de enrugamento específicos. Várias imperfeições modais devem ser simuladas de modo a obter o comportamento correto quanto à instabilidade. Uma simplificação pode ser feita utilizando periodicamente elementos mais finos e com suas linhas neutras deslocadas. A periodicidade corresponde aos picos modais. Colunas de elementos podem ter a espessura dada por $t = (1 - f)t_0$ com f assumindo um valor da ordem de 0,02 e com a superfície média deslocada, $z_0 = A t_0$, sendo A um valor pequeno na direção positiva ou negativa de z de acordo com o modo a ser capturado.

Uma vez que toda estrutura possui falhas inerentes, este tipo de abordagem pode conduzir a resultados mais próximos da realidade, no entanto, a resposta do modelo é muito sensível às variações das imperfeições induzidas.

Necessita-se também, um conhecimento prévio do comportamento do corpo analisado, de modo a poder estabelecer o melhor ponto de inserção da imperfeição. Porém, como ponto positivo na utilização de tal análise, ela possui fácil implementação junto a um modelo de elementos finitos. Esta técnica pode ser utilizada em conjunto com diversos métodos de análise por elementos finitos, ou seja, com a abordagem explícita ou a implícita.

5.3.3 Coeficiente de Nordlund e Häggblad

NAKAMACHI e HUO (1996) utilizam um programa de elementos finitos dinâmico explícito para investigar a propagação dinâmica do enrugamento e

instabilidades em uma placa quadrada pressionada por um punção hemisférico rígido, variando-se a velocidade do punção. NORDLUND e HÄGGBLAD (1997) utilizam modelos similares aos destes autores para reproduzir o efeito de enrugamento e propõem um índice baseado nos tensores de tensão e velocidades de conformação que é calculado em cada elemento no qual a chapa é dividida indicando os prováveis locais de início de enrugamento. O índice proposto será denominado coeficiente NH, como sugerido por SELMAN et al. (2002), e é avaliado em cada elemento através da seguinte expressão:

$$I = \frac{\int_{V_{elem}} (\dot{\sigma}_{ij} v_{j,i} + \sigma_{ij} v_{j,i} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{j,i} v_{i,k}) dV}{\int_{V_{elem}} (|\dot{\sigma}_{ij} v_{j,i}| + |\sigma_{ij} v_{j,i} v_{k,k}| + |\sigma_{kj} v_{j,i} v_{i,k}|) dV} \quad (5.18)$$

Onde V_{elem} é o volume de um elemento, $\dot{\sigma}_{ij}$ é a taxa de tensões e v_j a velocidade. O índice está sempre na faixa $(-1 \leq I \leq 1)$. Quando o índice torna-se negativo, obtém-se um provável ponto de início de enrugamento, podendo-se determinar a distribuição de rugas durante a deformação da peça. O indicador é utilizado por LEJEUNE et al. (2002) para prever enrugamento em processos de *hydroforming* e comparado com o critério de Timoshenko para casos simples, obtendo-se bons resultados. NORDLUND (1998) complementa o trabalho anterior propondo um algoritmo de refinamento de malha acoplado ao índice proposto. Com auxílio deste indicador, localizam-se os pontos prováveis de início do enrugamento e, em seguida, realiza-se o refinamento de malha nestes pontos utilizando o algoritmo de re-alocação de nós. Deste modo pode-se realizar a simulação de processo genérico utilizando-se uma malha mais grosseira que o necessário para prever o enrugamento de maneira adequada, o que implica em um tempo menor de processamento. A seguir a malha é refinada apenas nos pontos necessários. O indicador foi implementado com sucesso tanto em um esquema de integração explícito como no esquema implícito. Este método tem a vantagem de ser aplicável a peças de formato mais genérico que as resolvidas pelo método da bifurcação. SELMAN et al. (2002) também desenvolvem o índice e o aplicam em conjunto com um procedimento de refinamento de malha.

Desenvolvimento da obtenção do coeficiente NH: Chapas metálicas em estado de compressão possuem risco de formação de rugas. Neste trabalho foi

utilizada uma abordagem *quase-dinâmica* (integração explícita no tempo), pois nesta formulação as rugas desenvolvem-se gradualmente e de maneira numericamente estável. A formação de rugas é caracterizada pela ocorrência de áreas onde a deformação é dominada por fortes rotações locais, fora do plano. Este comportamento pode ser acompanhado através da evolução de uma quantidade escalar simples denominada *incremento de trabalho interno de 2ª ordem*.

No desenvolvimento a seguir adotam-se as hipóteses de um corpo formado por elementos do tipo casca e de que o carregamento é aumentado monotonicamente em função do tempo.

O princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) fornece:

$$\int_{tV} {}^t P_{ij} \delta u_{j,i} dV = \int_{tV} {}^t f_i^b \delta u_i dV + \int_{tS_r} {}^t f_i^s \delta u_i dS \quad (5.19)$$

onde:

P_{ij} : tensor de tensões nominais

δu_i : deslocamentos virtuais

f^b : forças externas de volume (forças de campo)

f^s : forças externas de superfície

Se a configuração atual é escolhida como configuração de referência, pode-se afirmar que o tensor de Cauchy é idêntico ao tensor nominal, ou seja:

$${}^t \sigma_{ij} = {}^t P_{ij}$$

Utilizando-se a formulação Lagrangiana atualizada, o carregamento incremental é dado por:

$${}^t f_i^b \rightarrow {}^t f_i^b + \Delta f_i^b, \quad {}^t f_i^s \rightarrow {}^t f_i^s + \Delta f_i^s \quad (5.20)$$

resultando em um campo de deformação incremental Δu_i

O trabalho externo durante o carregamento é dado por:

$$W^{ext} \approx \int_{tV} \left({}^t f_i^b + \frac{1}{2} \Delta f_i^b \right) \Delta u_i dV + \int_{tS_r} \left({}^t f_i^s + \frac{1}{2} \Delta f_i^s \right) \Delta u_i dS \quad (5.21)$$

A seguir desenvolve-se a formulação para o trabalho interno correspondente. O tensor de tensões nominal é aumentado de acordo com:

$${}^t P_{ij} \rightarrow {}^{t+\Delta t} P_{ij} \approx {}^t P_{ij} + {}^t \dot{P}_{ij} \Delta t \quad (5.22)$$

onde:

$${}^t\dot{P}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi} ({}^{t+\xi}P_{ij})|_{\xi=0} = \frac{\partial}{\partial \xi} ({}^{t+\xi}J \quad {}^{t+\xi}F_{ik}^{-1} \quad {}^{t+\xi}\sigma_{kj})|_{\xi=0} = {}^t\dot{\sigma}_{ij} + {}^t\sigma_{ij} {}^t v_{k,k} - {}^t\sigma_{kj} {}^t v_{i,k} \quad (5.23)$$

e onde:

${}^{t+\xi}F_{ij}$ é o gradiente de deformação incremental e ${}^{t+\xi}J = \det(\mathbf{F})$, utilizados para conversão do tensor de tensões nominais em tensor de tensões de Cauchy;

${}^t v_i$ é o campo de velocidades.

O trabalho interno é dado por:

$$W^{int} \approx \int \left(\dot{P}_{ij} + \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k}) \Delta t \right) \Delta u_{j,i} dV$$

$$W^{int} \approx \int \dot{P}_{ij} \Delta u_{j,i} dV + \frac{\Delta t}{2} \int (\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k}) \Delta u_{j,i} dV \quad (5.24)$$

Igualando-se o trabalho interno e externo e substituindo-se a eq. (5.19)

[PDV] tem-se:

$$\Delta t \int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k}) u_{j,i} dV = \int_V \Delta f_i^b \Delta u_i dV + \int_{S_f} \Delta f_i^s \Delta u_i dS \quad (5.25)$$

Dividindo-se a equação por Δt^2 e considerando-se:

$$f_i^b = \frac{\Delta f_i^b}{\Delta t} \quad \text{e} \quad f_i^s = \frac{\Delta f_i^s}{\Delta t} \quad (5.26)$$

$$I = \int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k}) v_{j,i} dV = \int_V \dot{f}_i^b v_i dV + \int_{S_f} \dot{f}_i^s v_i dS \quad (5.27)$$

Esta é a expressão para o trabalho de 2ª ordem (ou, mais precisamente “rate of internal power”).

Passando-se para *notação tensorial*:

$$I = \int_V \text{tr} \{ (\dot{\sigma} + \text{tr}(\mathbf{L})\sigma - \mathbf{L}\sigma) \mathbf{L} \} dV = \int_V \dot{f}^b \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S_f} \dot{f}^s \cdot \mathbf{v} dS \quad (5.28)$$

Onde $\text{tr}()$ é o operador traço e \mathbf{L} é o gradiente do tensor de velocidade.

Utilizando-se a taxa de tensão de Jaumann ($\dot{\tau}$) do tensor de tensões de Kirchhoff ($\tau = J\sigma$)

$$\dot{\tau} = \sigma + \text{tr}(\mathbf{D})\sigma - \mathbf{W}\sigma - \sigma\mathbf{W}^T \quad (5.29)$$

onde \mathbf{D} e \mathbf{W} são as parcelas simétrica e anti-simétrica do tensor gradiente de velocidade. Então:

$$I = \int_V \text{tr} \left\{ \dot{\tau} \mathbf{D} + \sigma (-\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \right\} dV \quad (5.30)$$

Usou-se acima o fato de que $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)$ para quaisquer tensores **A** e **B**.

O domínio ao qual o indicador pode ser aplicado é uma região considerada pequena. Para uma implementação em elementos finitos, esta região pode ser tomada como o volume de um elemento. As integrais são resolvidas *no volume de cada elemento*.

De modo a manter o coeficiente NH no intervalo [-1,1] realiza-se o procedimento:

Divide-se (5.30) em três integrais:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (5.31)$$

Onde:

$$I_1 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{D} + \sigma(-\mathbf{D}\mathbf{D}^T) \right\} dV \quad (5.32)$$

$$I_2 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \sigma(\mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{D}) \right\} dV \quad (5.33)$$

$$I_3 = \int_{V_{elem}} \text{tr} \left\{ \sigma(\mathbf{W}\mathbf{W}^T) \right\} dV \quad (5.34)$$

Define-se o indicador de enrugamento, definido para cada elemento, como sendo:

$$I_{elem} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{|I_1| + |I_2| + |I_3|} \quad (5.35)$$

onde a relação $|\bar{I}_{elem}| \leq 1$ é satisfeita. Usando-se a propriedade

$\int |f| d\Omega \geq \left| \int f d\Omega \right|$ onde f é uma função integrada em Ω , pode-se escrever o coeficiente NH como:

$$I = \frac{\int_V \text{tr} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{D} + \sigma(-\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \right\} dV}{\int_V \left(\left| \text{tr} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{D} - \sigma \mathbf{D}\mathbf{D}^T \right\} \right| + \left| \text{tr} \left\{ \sigma(\mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{D}) \right\} \right| + \left| \text{tr} \left\{ \sigma \mathbf{W}\mathbf{W}^T \right\} \right| \right) dV} \quad (5.36)$$

Podem-se observar as seguintes tendências do indicador em relação ao campo de deslocamento incremental:

(1) CAMPO DE DESLOCAMENTO INCREMENTAL DOMINADO PELA ROTAÇÃO:

I_3 possui os componentes relativos à rotação. Estudando-se os estados de tensões que tipicamente conduzem à flambagem, supondo-se o crescimento gradual das rugas, por razões geométricas, formam-se linhas com

curvaturas que mudam de sinal. Estas linhas, com curvatura inicial quase zero rotacionarão sobretudo na fase inicial de enrugamento.

$$I_{elem} \rightarrow \frac{I_3}{|I_3|} = \pm 1 \quad (5.37)$$

onde o sinal negativo reflete a situação de tensão compressiva de membrana – portanto situação válida para o caso de flambagem

(2) CAMPO DE DESLOCAMENTO INCREMENTAL DOMINADO PELO TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO:

$$I_{elem} \rightarrow \frac{I_1}{|I_1|} = +1 \quad (5.38)$$

O valor do indicador pode, portanto, ser usado como medida para possível situação de enrugamento.

Assim, podem-se apresentar como vantagens no tratamento deste problema através do indicador:

- Inicialmente não são necessárias suposições sobre forma e distribuição das rugas;
- Não está limitado a rugas do tipo “bifurcação pura”;
- Independente do modelo de material;
- Pode ser usado em situações que apresentem contato;
- Baixo custo computacional;
- Fácil de implementar em códigos existentes de EF.

6 Materiais e Métodos

6.1 Descrição da Metodologia Empregada

Para a análise do fenômeno de enrugamento em chapas metálicas empregou-se um procedimento dividido em uma série de etapas que são descritas a seguir. Também são feitas considerações sobre as simplificações adotadas durante o procedimento.

As etapas propostas visam desenvolver uma metodologia de trabalho na qual, baseados em um ensaio experimental relativamente simples, possam ser criadas condições que permitam estender sua aplicação a estados mais genéricos através de simulações por elementos finitos, obtendo-se não apenas uma solução, mas um conjunto de soluções que possa ser aplicado como uma ferramenta de projeto.

A análise foi limitada ao caso onde não existe contato da chapa estudada com outros corpos.

Etapa 1

Nesta etapa são feitos os ensaios de caracterização do material, obtendo-se a curva tensão deformação do material. Também são feitas medidas de anisotropia e o levantamento de outros parâmetros de materiais que possam melhorar o modelo numérico. Aos valores ensaiados, são ajustados modelos que serão utilizados nas simulações utilizando MEF feitas na etapa 3.

Etapa 2

Com o objetivo de se traçar as curvas limite de estabilidade quanto ao enrugamento, a primeira etapa proposta consiste na realização do ensaio Yoshida Buckling Test, que foi descrito no ítem 5.2.

Ao se fazer o ensaio, para comparações com resultados numéricos

obtidos posteriormente, são monitorados ao longo do processo o deslocamento da garra, utilizando relógio comparador, o deslocamento para fora do plano da região central do CDP, também por meio de um relógio comparador, a força nos prolongadores que acoplam a garra aos braços articulados do dispositivo de ensaios e imagens digitais do CDP para a medida de deslocamento e posterior cálculo de deformação na região do *gauge length*.

Etapa 3

A terceira parte consiste na calibração numérica de um modelo elementos finitos do YBT. É construído um modelo do CDP do ensaio de Yoshida e é aplicado um deslocamento compatível com os ensaios experimentais (Etapa 2). O processo de instabilidade é acionado por um defeito induzido criado no CDP. Tal defeito é modelado através da utilização de outro tipo de elemento, e suas dimensões são variadas de modo a permitir um melhor ajuste do comportamento do modelo em relação ao experimento. As grandezas monitoradas ao longo do experimento são utilizadas como parâmetro de comparação.

Cabe ressaltar que com pequenas alterações na geometria do CDP pode-se induzir outros estados de tensões, porém, dentro de uma faixa restrita de valores [KIM, YOON & YANG, 2000]. Um exemplo de alterações na geometria pode ser visto na Figura 6.1. A partir de um certo limite, quando a largura torna-se pequena e não é capaz de induzir tensões de compressão suficientemente altas para provocar a flambagem, o CDP do ensaio Yoshida passa a comportar-se como um ensaio de tração simples.

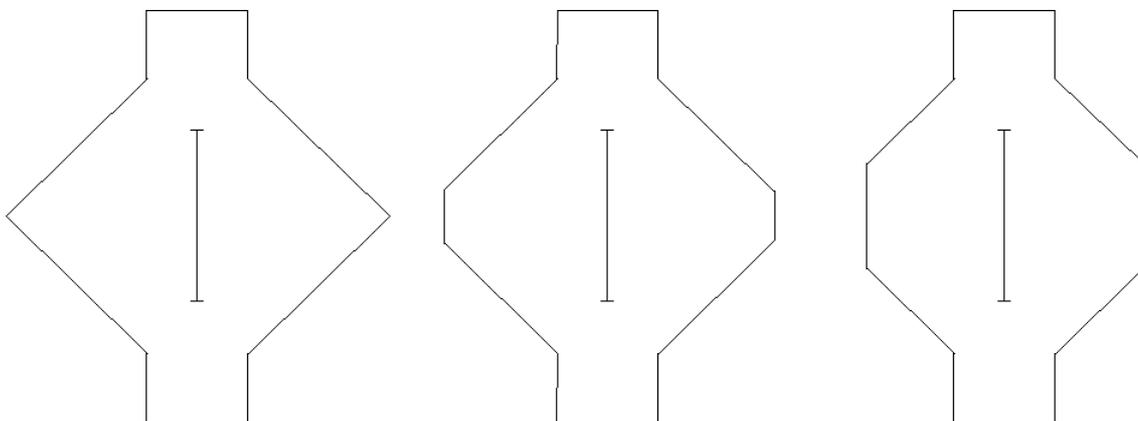


Figura 6.1 Alterações geométricas no CDP de modo a mudar o estado de tensões que induz à instabilidade no ensaio YBT.

Estas modificações podem ser feitas para se ter mais dados apoiados em resultados experimentais, mas os pontos obtidos desta maneira são insuficientes para uma boa estimativa de uma curva limite.

Assumindo-se que o estado de tensões do modelo corresponde à uma boa aproximação da realidade após o ajuste dos parâmetros de simulação, passa-se para a etapa 4 da metodologia.

Etapa 4

O estado de tensões da região central do CDP, onde ocorre a instabilidade, é monitorado e reproduzido em um outro CDP, que é modelado apenas numericamente (Figura 6.2). A configuração deste modelo permite que sejam feitas diversas variações no estado de tensões, através da mudança nos estados de carregamento tração/compressão impostos. Para cada simulação considera-se uma relação constante entre o carregamento de tração e de compressão, e ambos são aumentados até que se obtenha o comportamento de instabilidade, sempre mantendo a proporcionalidade dos carregamentos. Em uma próxima simulação modifica-se o valor desta constante e repete-se o procedimento. Desta forma, faz-se o monitoramento da resposta do modelo no segundo quadrante do espaço de deformações principais (deformação principal 1 positiva e deformação principal 2 negativa).

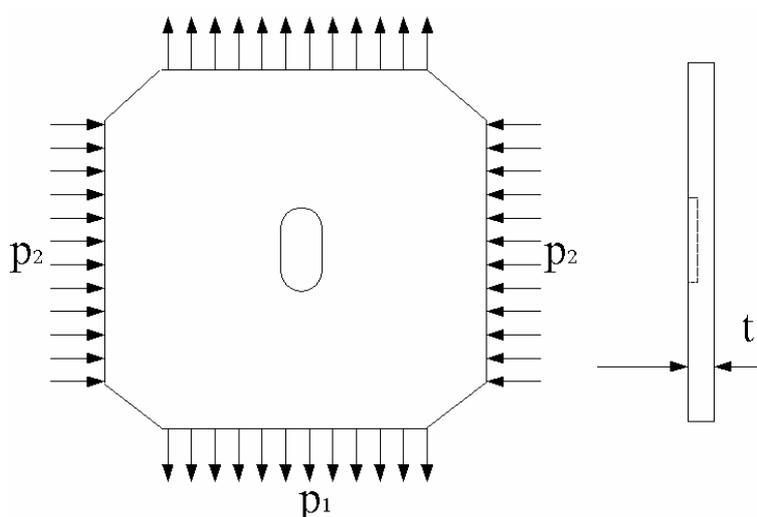


Figura 6.2 Modelo numérico para levantamento dos pontos da curva limite

Etapa 5

De posse dos dados das simulações da etapa 4 os resultados são pós-processados, permitindo-se o levantamento de diversos pontos da curva limite

de estabilidade. Faz-se então uma análise dos pontos levantados, para estabelecer uma lei que defina a forma desta curva e uma margem de segurança aceitável para a aplicação em problemas mais complexos que possam ser representados por este conjunto de condições.

Etapa 6

Os resultados obtidos na etapa 5 são aplicados a casos compatíveis com o modelo de instabilidade em regiões não suportadas (sem contato com outros corpos). Por exemplo, em uma estampagem de uma peça na forma de um copo, a região da parede do copo, considerando-se um folga razoável entre o punção e a parede da matriz.

Neste caso, mais complexo, o monitoramento dos pontos de provável início e crescimento do enrugamento é feito através do coeficiente NH. Para efeito de testes, tal coeficiente é inicialmente aplicado à casos de comportamento conhecido, como o próprio ensaio Yoshida.

As etapas descritas se relacionam de acordo com o fluxograma mostrado na Figura 6.3. A primeira coluna do fluxograma refere-se à determinação dos estados de tensão limite para o material analisado e a segunda coluna à aplicação dos resultados a um processo mais complexo.

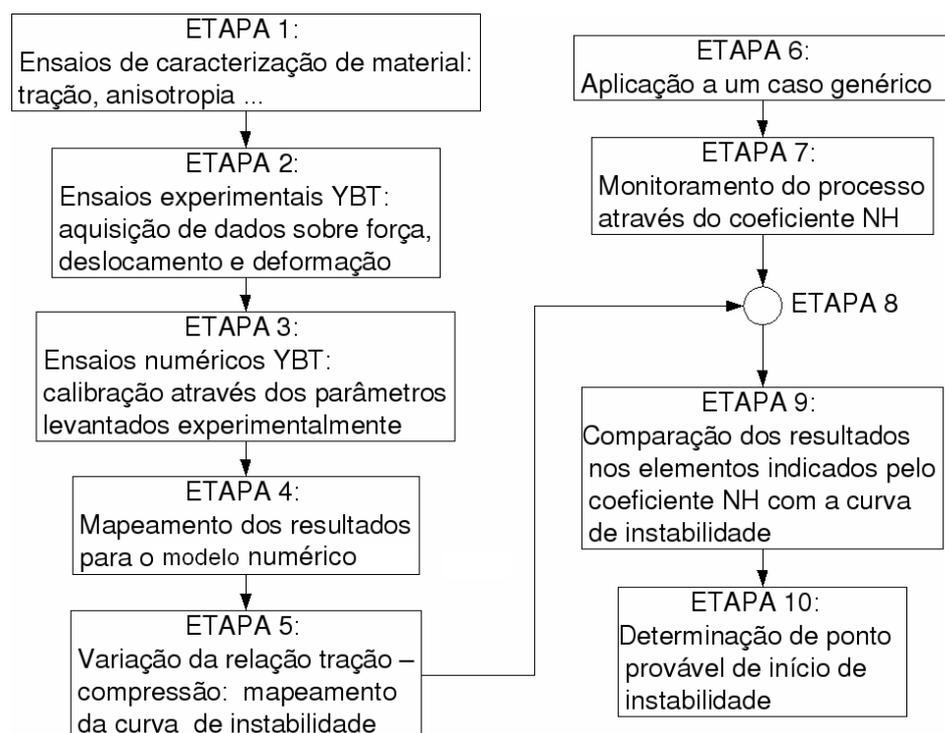


Figura 6.3 Passos na determinação do ponto de enrugamento

O foco do trabalho desenvolvido consiste na definição das 5 primeiras etapas, correspondentes à primeira coluna do Figura 6.5, mais uma implementação do coeficiente NH, apresentada no fluxograma como etapa 7.

Na etapa 7, o monitoramento dos pontos para os quais faz-se o levantamento dos níveis críticos de tensão fornecidos na Etapa 5 é feito com auxílio do coeficiente NH. Este coeficiente indica regiões com probabilidade de sofrerem o enrugamento e nestas regiões é feito o monitoramento das deformações comparando-se com a curva limite. Desta maneira, o esforço computacional é diminuído uma vez que os cálculos não são realizados no modelo completo, que pode chegar a ter um número muito grande de graus de liberdade, o que tornaria o processo consideravelmente lento.

Nas etapas 9 e 10 é feito o monitoramento dos pontos indicados e a trajetória de comportamento é comparada com a curva limite, definindo se o ponto está em uma região segura ou em uma zona crítica.

Após esta breve descrição das etapas envolvidas no processo de caracterização do ponto de instabilidade, será feita uma descrição mais detalhada dos métodos e materiais empregados em cada um dos passos descritos.

6.2 ETAPA 1: Caracterização

Inicialmente foram feitos os ensaios de caracterização de materiais utilizados. Para tanto foram construídos CDPs para ensaios de tração e anisotropia. Os materiais ensaiados foram aço 1010 e alumínio 7475-O.

As dimensões dos CDPs são mostradas na Figura 6.4. Os ensaios foram feitos em máquina de ensaios EMIC 10000, mostrada na Figura 6.5 com um corpo de prova e extensômetro já posicionados.

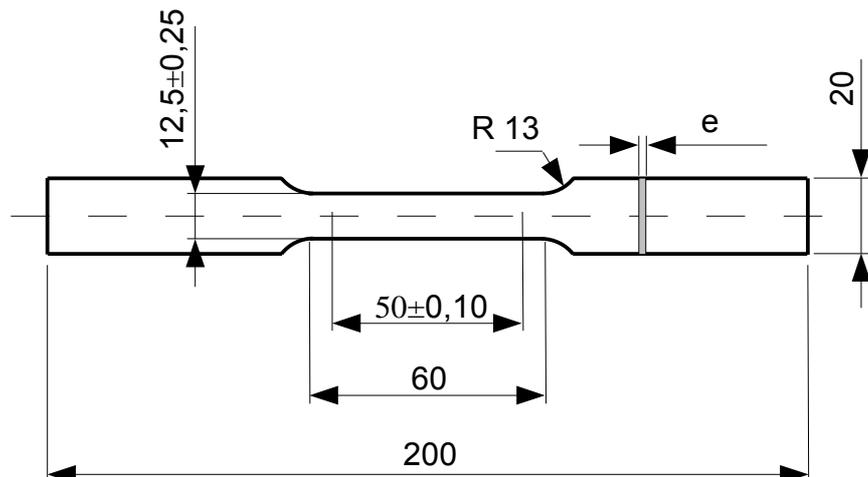


Figura 6.4 Dimensões dos CDPs [mm]. Nos ensaios foi utilizado $e = 1\text{mm}$

As leituras de deformação foram feitas utilizando-se um extensômetro com comprimento base de 50mm. As curvas tensão-deformação foram determinadas de acordo com o procedimento descrito no item 3.1. O procedimento de determinação da tensão de escoamento foi através do valor mínimo de tensão na região do patamar para o aço e o *offset* da inclinação do trecho elástico em 0,2% para o caso do alumínio.



Figura 6.5 CDP acoplado à máquina de ensaios

6.3 ETAPA 2: Ensaio Experimental do Yoshida Buckling Test

6.3.1 Preparação dos Corpos de Prova

Os corpos de prova para o YBT foram recortados das chapas pelo processo de corte por jato de água. Posteriormente foi feito o acabamento lixando-se as bordas para diminuir a rugosidade inerente ao processo de corte utilizado bem como eventuais micro-trincas. A Figura 6.6 mostra uma chapa com os CDPs recortados, mas ainda não destacados. A Figura 6.7 mostra um CDP para o ensaio de Yoshida. As dimensões dos CDPs seguem as mostradas no capítulo 5 (Figura 5.3). Utilizou-se em todos os casos chapas de espessura de 1mm.

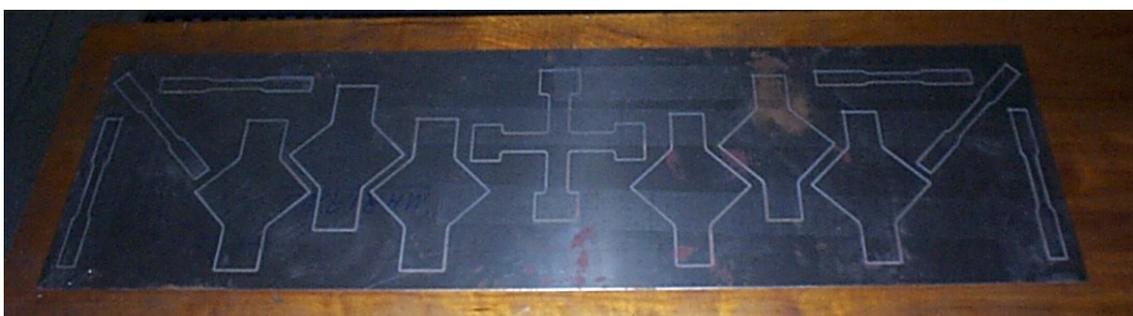


Figura 6.6 CDPs cortados por jato d'água

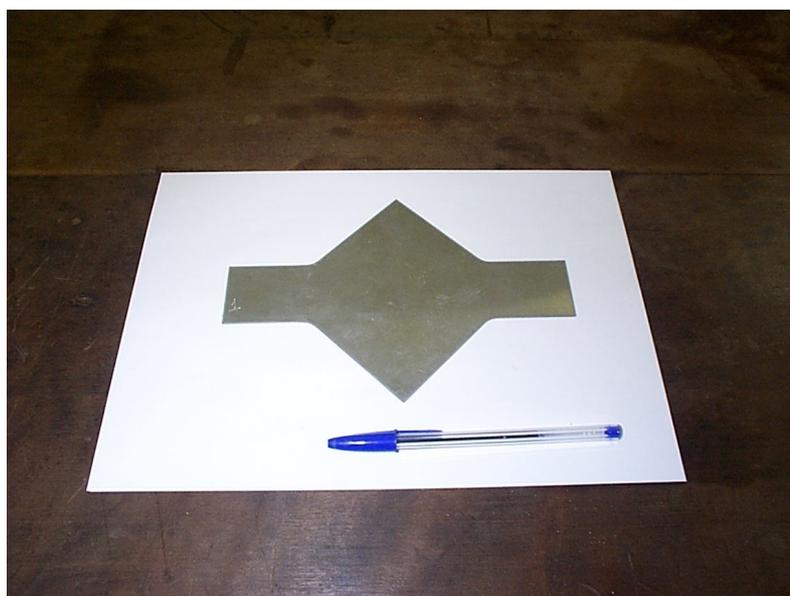


Figura 6.7 CDP para o ensaio YBT

6.3.2 Dispositivo de Ensaio

Para os ensaios do YBT utilizou-se inicialmente uma prensa hidráulica

de 60 toneladas e depois uma de 30 toneladas, apenas por motivo de disponibilidade do equipamento. A esta prensa foi acoplado um dispositivo de ensaios disponibilizado pelo professor Hazim Al-Qureshi do ITA. O dispositivo consiste de uma base sobre a qual correm dois carros nos quais estão acopladas as garras que prendem o CDP. A estes carros está conectado um sistema de barras que transforma o movimento vertical da prensa em um movimento horizontal distribuído entre os carros, conforme visto na Figura 6.8.

Para as medidas de força nos braços foram usinadas peças denominadas prolongadores, sobre às quais colaram-se *strain gauges* de modo a formar-se um célula de carga. A Figura 6.9 mostra os prolongadores com os *strain gauges* colados. A Figura 6.10 mostra a análise por elementos finitos destes componentes que foi utilizada para dimensionar a célula de carga projetada. A Figura 6.11 mostra o esquema de colagem dos *strain gauges* e o esquema de conexão elétrica.



Figura 6.8 Dispositivo de ensaios e CDP acoplados à prensa hidráulica

Foram feitas modificações nas garras do dispositivo para se impedir o escorregamento dos CDPs durante a aplicação de carga. Para tanto, foi construído um sistema de *draw beads* provocando uma curvatura da porção do CDP que fica dentro da garra. Esta curvatura associada à força normal aplicada pelos parafusos melhora a fixação do CDP. Estas modificações

podem ser vistas no detalhe mostrado na Figura 6.12.

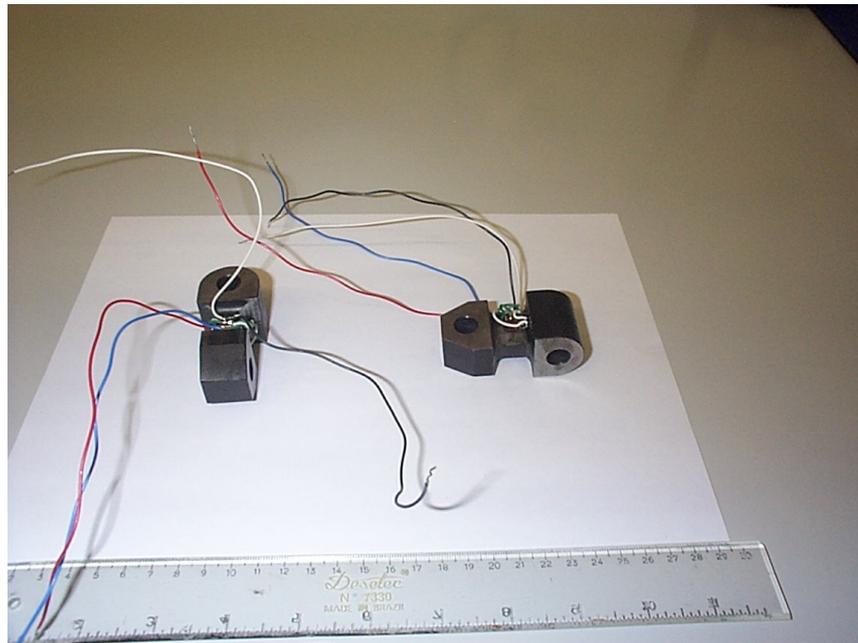
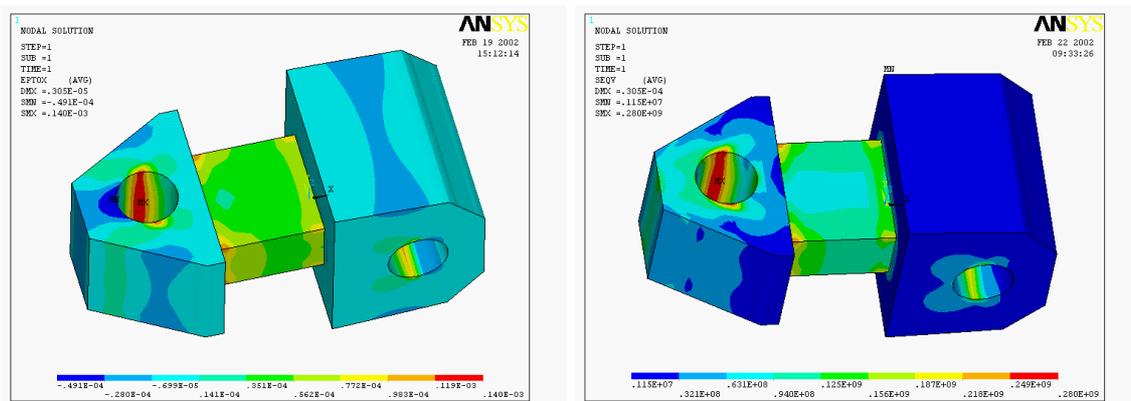


Figura 6.9 Prolongadores com *strain gauges* colados



(a)

(b)

Figura 6.10 Análise por EF dos prolongadores: (a) distribuição de deformações na direção de solicitação; (b) distribuição de deformações equivalentes

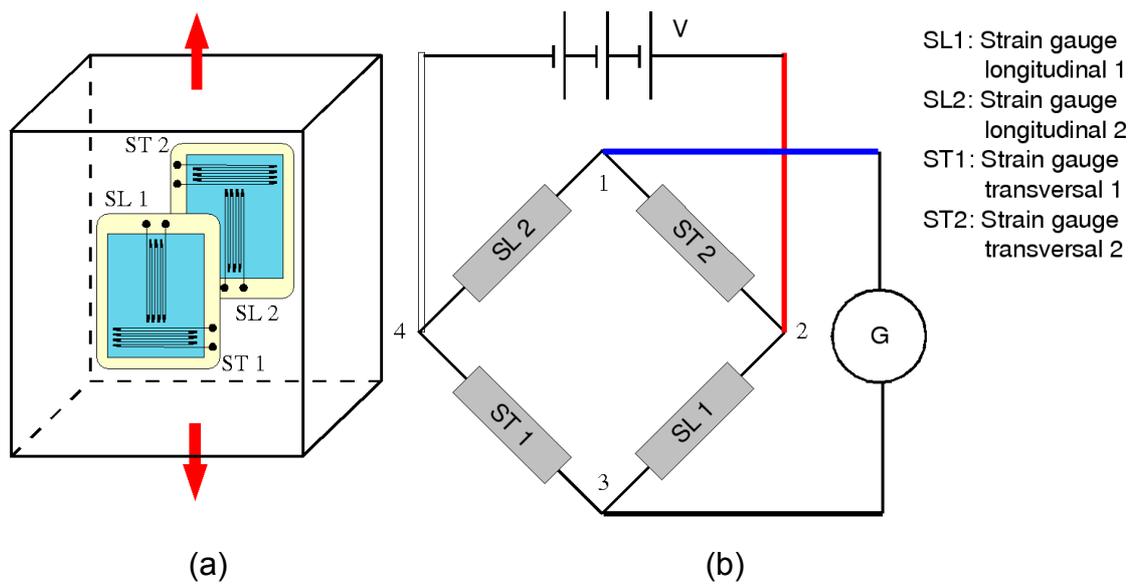


Figura 6.11 (a) Esquema da colagem dos *strain gauges* no pescoço do prolongador;
 (b) Ligação feita entre os *strain gauges*.

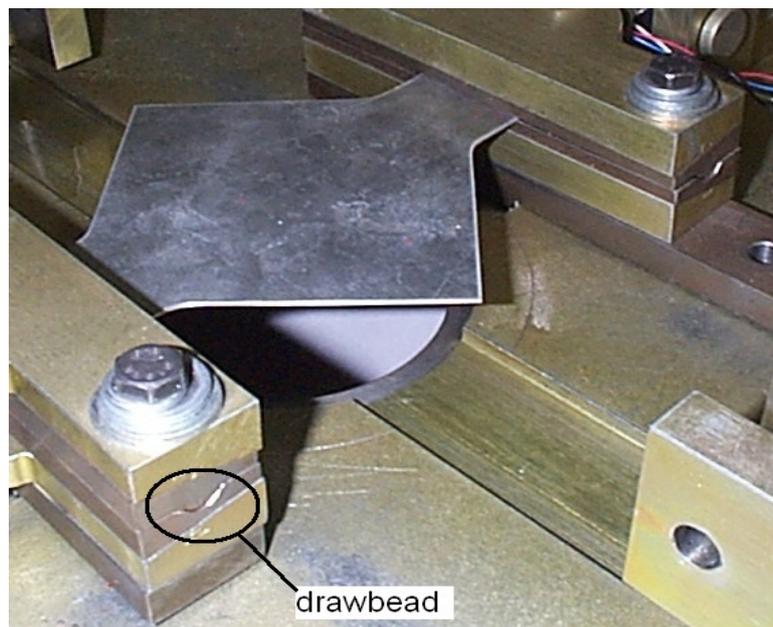


Figura 6.12 Detalhe da garra de fixação do CDP

Para as medições de força e de deslocamento, foi adotado o seguinte procedimento: as medições de deslocamento na direção perpendicular ao plano no ponto central do CDP foram tomadas com um relógio comparador (Figura 6.13). O deslocamento no carro é utilizado como uma referência durante a aplicação de carga nos ensaios, e é feito através de relógio

comparador (Figura 6.14). A valores prescritos de deslocamento do carro são feitas as medidas (cálculos) de alongamento do *gauge length* do CDP. Esta medida é feita por meio de fotos tiradas por um máquina digital acionada conforme a leitura do deslocamento do carro. No CDP é feita a marcação do *gauge length* e a variação deste comprimento é analisada medindo-se a diferença de comprimento entre uma foto e outra. A estimativa da diferença de comprimento é feita medindo-se a quantidade de *pixels* entre as marcações do *gauge length* e comparando-se fotos sucessivas, permitindo o cálculo do alongamento. Finalmente, as medidas de força são tomadas pela célula de carga montada na região da garra do dispositivo. As medidas foram tomadas de maneira discreta, sendo lidos os dados a cada incremento de deslocamento prescrito do carro.

Um esquema mostrando a montagem do ensaio é apresentado nas Figuras 6.15 e 6.16. Na Figura 6.15 mostra-se um esquema geral do dispositivo acoplado à prensa e ligado ao computador. Na Figura 6.16 é feito um detalhamento do dispositivo e os componentes e dispositivos de medidas envolvidos.

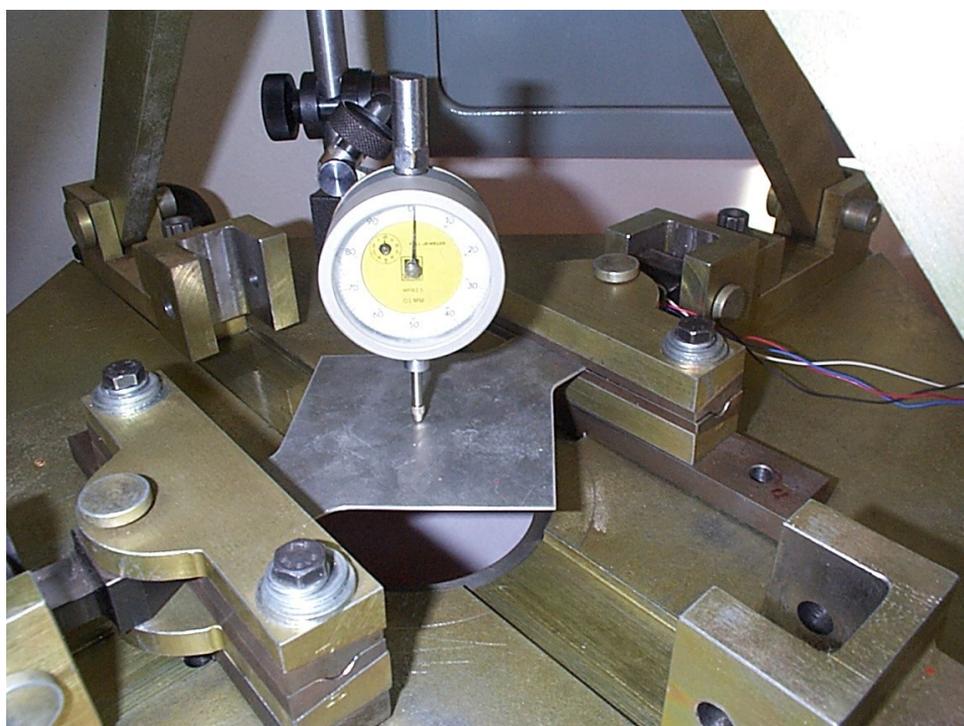


Figura 6.13 Medida de deslocamento fora do plano no centro do CDP

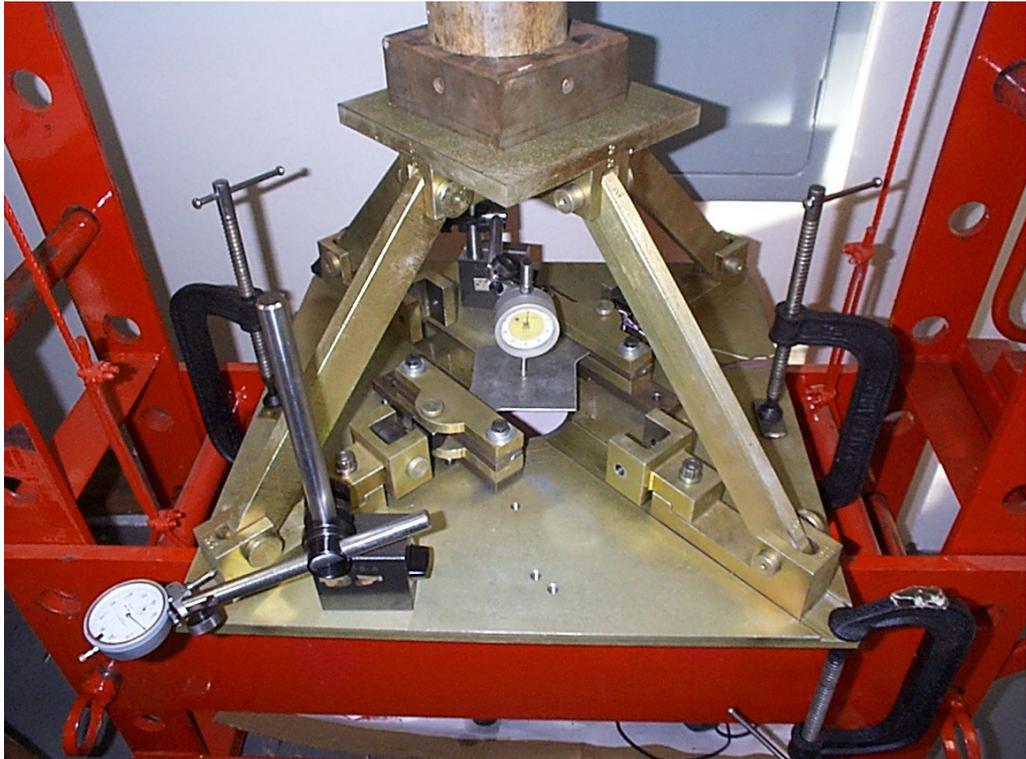


Figura 6.14 Montagem de dispositivos para medidas de deslocamento

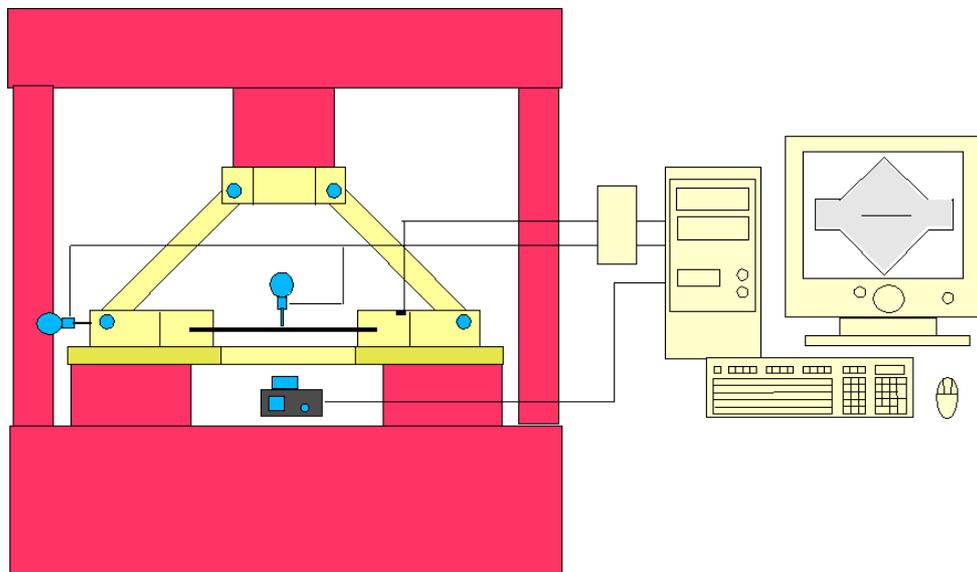


Figura 6.15 Esquema geral do dispositivo acoplado à prensa e ao computador

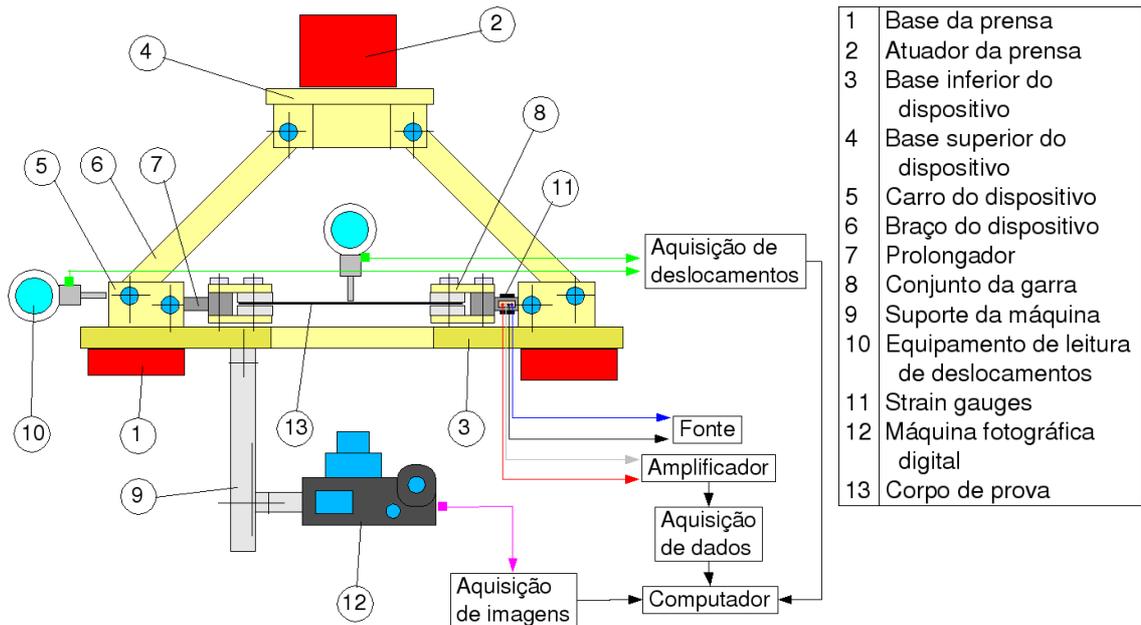


Figura 6.16 Detalhamento dos componentes do dispositivo de ensaios

6.3.3 Aplicação de Carga

A aplicação de carga é feita manualmente na prensa de maneira bastante lenta, pois é considerada como quase-estática em posteriores análises por EF. As leituras são controladas pelo relógio comparador que monitora o deslocamento do carro que prende o CDP, conforme já detalhado no ítem anterior. Baseado nas leituras de deslocamento, em valores prescritos, o carregamento é interrompido e é feita a aquisição de uma imagem do CDP para estimativa de deformações no *gauge length*. Nas leituras de força, adquiridas pela célula de carga, esta interrupção no carregamento é identificada como um patamar na curva levantada. Com o reinício do carregamento, a curva retoma o comportamento de crescimento monotônico.

6.4 ETAPA 3: Simulação Numérica do Ensaio YBT

Em uma segunda etapa do processo de caracterização do enrugamento é feita a reprodução numérica do ensaio YBT. São utilizados os parâmetros de material levantados na ETAPA 1 e é feita a modelagem utilizando-se tanto um programa com integração explícita no tempo (LS-DYNA ®), como o de integração implícita (ANSYS ®). Apenas um quarto do modelo é simulado, com o objetivo de poupar esforço computacional. A Figura 6.17 apresenta uma configuração de malha para o ensaio YBT, com a malha refletida para se ver o

CDP inteiro. Nesta etapa é feito um ajuste do modelo numérico com os dados do procedimento experimental. Desta forma são modificados alguns parâmetros como a largura, comprimento e profundidade do defeito induzido utilizado para desencadear o processo de instabilidade, e é realizado o ajuste da curva do material, de acordo com procedimento descrito adiante. Verifica-se a ocorrência da instabilidade logo no início do processo de plastificação do material mas, ao atingir este ponto, a região presa pela garra já se encontra em processo mais adiantado de plastificação. Em materiais como o aço de baixo carbono, verifica-se a formação de um patamar na curva tensão-deformação logo após o primeiro escoamento, e, após este patamar, a curva adquire um comportamento muito similar a uma lei de potências. Como a instabilidade ocorre no início da plastificação, parece adequado que para os CDPs confeccionados em aço seja utilizado um modelo de material próximo ao perfeitamente plástico na região central (que deve incluir todo o *gauge length*) e um modelo com encruamento na região dos braços e do início da mudança de seção, conforme a Figura 6.18.

O modelo numérico é construído de forma paramétrica, de modo a poder-se alterar facilmente as dimensões e densidade de malha, essenciais na fase de ajuste para eliminar dificuldades de convergência encontradas nas simulações com algoritmo implícito, e problemas de *hourglass* encontrados nas simulações explícitas com integração reduzida.

Na construção do modelo do CDP do ensaio YBT foram utilizados dois tipos de elementos: para um CDP com um defeito induzido de 10% da espessura, primeiro foi construído um modelo perfeito em elemento do tipo sólido (hexaedro) com 90% do valor da espessura. em seguida, foi gerada uma malha em elemento tipo casca (quadrilátero) cuja espessura tem valor dos 10% restantes. Esta malha apenas não foi feita na região onde se pretendia induzir o defeito. Este procedimento pode ser melhor entendido observando-se a Figura 6.19, onde apresenta-se um quarto do CDP.

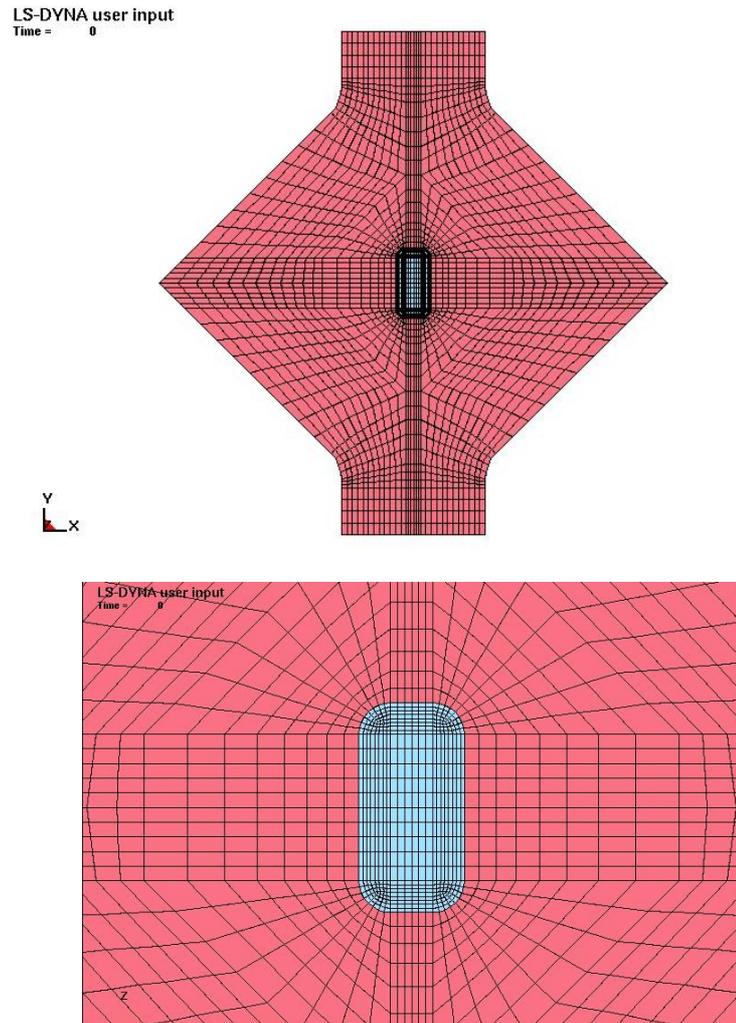


Figura 6.17 Malha gerada para o CDP e detalhe da região do defeito induzido

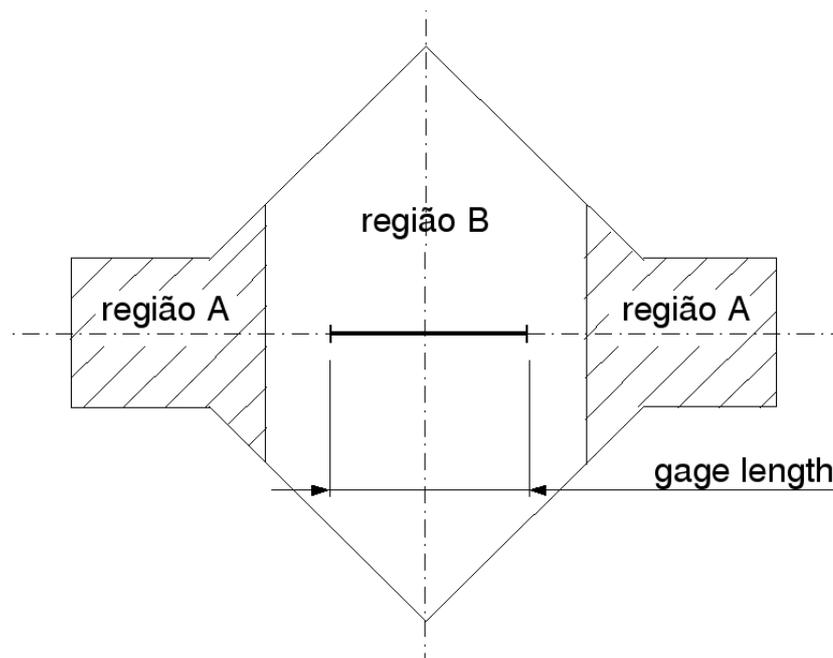


Figura 6.18 Materiais utilizados: na região A, elasto-plástico com encruamento isotrópico; na região B elasto-plástico perfeito

Os resultados obtidos neste passo são ajustados para uma melhor representação do procedimento experimental e estes dados são aplicados na etapa 4.

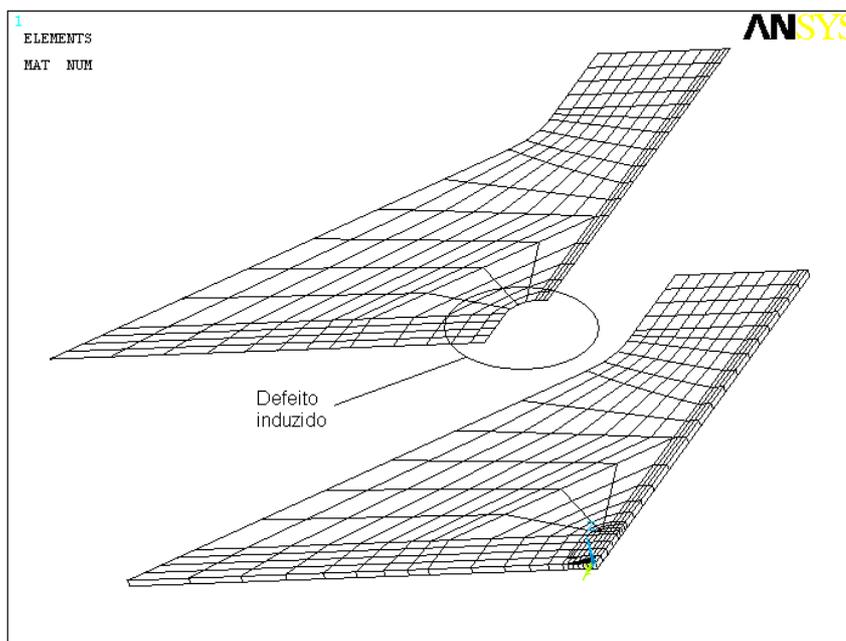


Figura 6.19 Malha em elemento hexaédrico e revestimento em shell onde pode-se perceber o defeito induzido: vista explodida

6.5 ETAPA 4: Obtenção dos Demais Estados de Tensão

Os resultados obtidos no passo anterior são transferidos para outro modelo, cuja configuração é apresentada na Figura 6.20, chamada no texto por *configuração 1*, em virtude de terem sido testadas outras configurações. Este modelo representa a região central do ensaio YBT, a partir de onde forma-se o estado de tensões responsável pela instabilidade. Considerando-se duas direções ortogonais, e alinhando-se o modelo com estas direções, aplica-se um carregamento de tração em uma das direções e um carregamento de compressão na direção ortogonal. Sejam os carregamentos de tração P_1 e de compressão P_2 , conforme mostrado na Figura 6.21. Define-se X como sendo $X = P_2/P_1$, então são feitas diversas simulações variando-se o parâmetro X , tomado como constante em cada simulação. Procedendo-se desta maneira procura-se estudar a influência da variação da razão entre carregamentos em uma geometria fixa.

A variável X apresenta sempre um valor negativo (P_1 e P_2 tem sinais opostos), portanto podem acontecer três situações:

a) $|P_1| > |P_2|$

O módulo de X assume valores entre 0 e 1; para o trabalho foram adotados valores entre 0,1 e 0,9

b) $|P_2| > |P_1|$

O módulo de X assume valores maiores que 1. Este carregamento facilmente leva à flambagem elástica, portanto não foram feitas tais análises;

c) $|P_1| = |P_2|$

O módulo de X tem valor igual a 1.

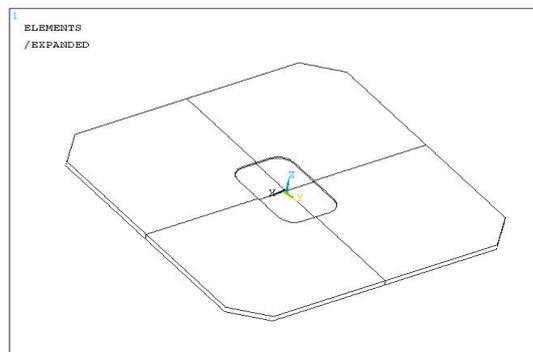


Figura 6.20 Configuração do modelo numérico

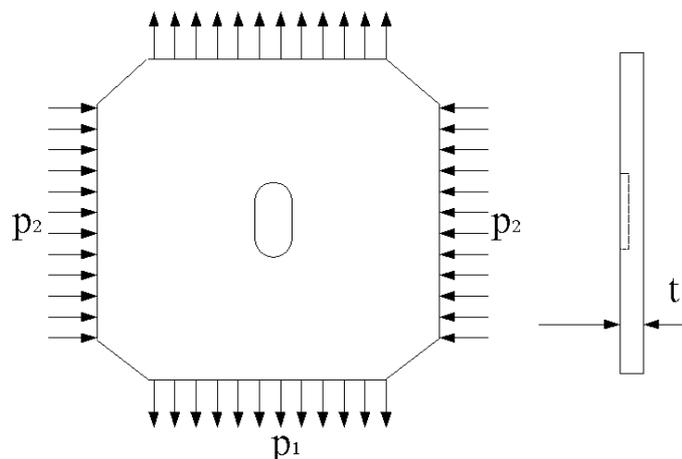


Figura 6.21 Detalhes da configuração 1 e do carregamento imposto

Para a simulação, uma vez que o modelo foi construído com elementos do tipo sólido, a entrada dos carregamentos P_1 e P_2 foi feita na forma de uma pressão aplicada nos elementos.

As quebras de canto nas laterais do CDP foram colocadas com o objetivo de não haver um carregamento $P1$ e $P2$ atuando no mesmo nó. Tal fato poderia causar dificuldades na convergência e as condições de contorno seriam mais severas (as condições restringindo o deslocamento na direção normal ao plano da chapa não são aplicadas nestes cantos), novamente podendo causar dificuldades de convergência. O fato das vinculações nas extremidades impedirem o deslocamento destas na direção normal ao plano inicial da chapa faz com que não ocorra curvatura nos nós da borda, limitando o fenômeno de enrugamento à região do centro do modelo numérico.

A Figura 6.22 apresenta o modelo expandido (foi feita a simulação de um quarto do modelo e aplicadas condições de simetria).

Com a variação do parâmetro X obtém-se o início do colapso para diferentes estados de carregamento. Para se calibrar o modelo, é necessário o estudo de um caso de comportamento conhecido. Assim, a partir do experimento do ensaio de Yoshida e de sua simulação numérica, é possível caracterizar um ponto da curva limite por meio do modelo numérico. Uma vez ajustado este ponto, varia-se o valor de X com todos os outros parâmetros e vinculações mantidos constantes de modo a se obter novos pontos de uma curva limite.

A Figura 6.23 apresenta o resultado de um modelo após atingir a instabilidade. Na Figura 6.23(a) apresenta-se o modelo deformado e na Figura 6.23(b) uma vista em corte para melhor visualização.

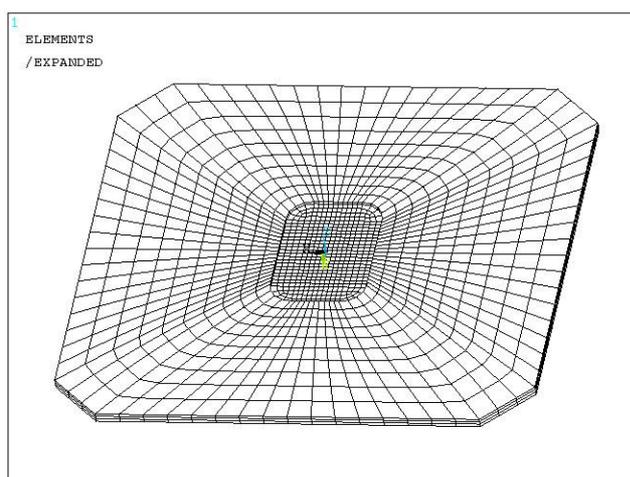


Figura 6.22 Malha expandida gerada na configuração 1

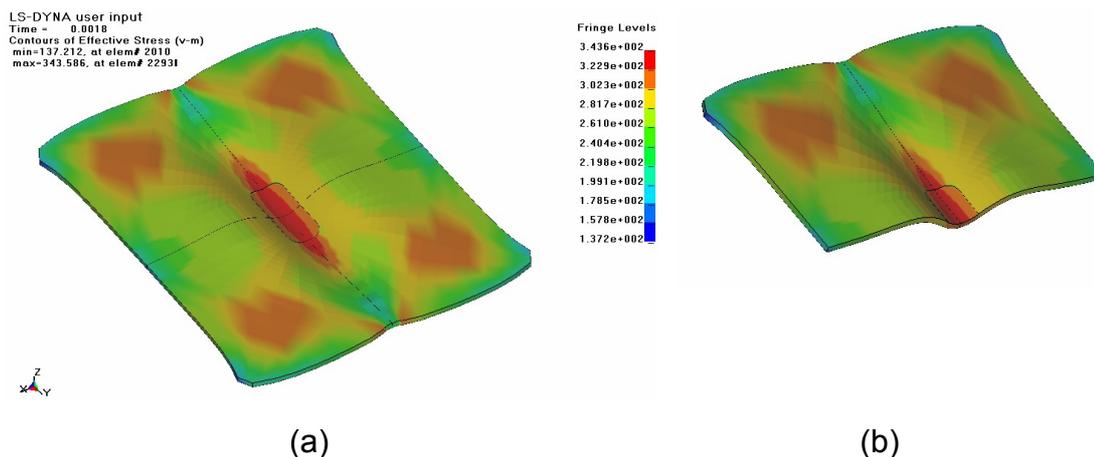


Figura 6.23 Modelo para obtenção dos estados de tensão: (a) Modelo deformado; (b) corte para auxiliar a visualização

6.6 ETAPA 5: Levantamento das Curvas de Estabilidade

Os resultados das simulações numéricas são utilizados para a construção de pontos de um gráfico no espaço das tensões principais definindo uma região onde não ocorre a instabilidade e outra, a partir da qual, existe um forte probabilidade que isto ocorra.

A quantidade de pontos para a construção desta curva vai depender do número de simulações realizados na etapa 3. De posse dos pontos obtidos numericamente, ajusta-se uma curva que define o limite de estabilidade.

Para uma melhor compreensão do fenômeno envolvido, foram também propostas variações na geometria do modelo numérico, alterando sua geometria e estudando-se os efeitos decorrentes. As mudanças propostas consistiram em alterar as dimensões das laterais, fazendo com que o modelo tenha uma forma retangular, com dimensões a e b . Tal procedimento é melhor detalhado no item 7.4.

A cada variação na geometria, retorna-se à etapa 4 e varia-se o parâmetro de carregamento X dentro dos valores propostos.

6.7 ETAPA 6: Aplicação da Curva Limite de Estabilidade a Projetos

Embora a aplicação aqui desenvolvida tenha sido restrita ao caso onde não existe o contato entre a região de análise e as ferramentas que trabalham a peça, espera-se poder aplicar os critérios sugeridos para este trabalho em determinadas condições, como a região não suportada em uma estampagem profunda. A investigação da influência do contato exigiria um novo estudo,

partindo-se do ponto onde termina esta tese e fica como uma sugestão de prosseguimento nesta linha de pesquisa. Conforme comentado anteriormente, o monitoramento de regiões onde pode ter início o enrugamento em peças mais complexas pode ser feito com auxílio do coeficiente NH. Desta forma, limita-se o número de elementos analisados, poupando esforço computacional.

A implementação deste coeficiente foi feita junto ao programa LS-DYNA® através de uma UMAT (rotina de modelo material programada pelo usuário em FORTRAN e compilada com o programa fonte do LS-DYNA®). Este recurso permite que o histórico de variação do coeficiente possa ser monitorado ao longo da simulação, e possa ser utilizado como um critério na escolha de pontos a serem monitorados como candidatos a pontos de início do colapso plástico.

Para este trabalho foi feita a implementação, foram realizados testes para conhecer a eficiência e limitações do coeficiente, utilizando geometrias simples onde o comportamento do coeficiente é conhecido, e em seguida ele foi aplicado a um caso mais complexo do ponto de vista do estado de carregamentos, cujo comportamento quanto à flambagem é conhecido. Este caso foi o ensaio de Yoshida.

6.8 Equipamentos Utilizados

6.8.1 Recursos Computacionais

As simulações numéricas foram feitas junto ao Laboratório de Mecânica Aplicada e Computacional (LaMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da USP São Carlos, em um computador Pentim III 933 MHz com 1.0 GB de memória RAM. O sistema operacional utilizado foi o RedHat Linux 7.3.

Os programas de elementos finitos utilizados foram:

- ANSYS® v 7.0
- LS-DYNA® 970 r 3858 – double precision
- LS-DYNA® 970 r 3858 – single precision
- LS-POST® (pós-processador para as análises no LS-DYNA)

Para se fazer a compilação do LS-DYNA de modo a incluir o cálculo do coeficiente NH utilizou-se:

- INTEL® Fortran Compiler 7.0 LINUX
- MATLAB® 6.5 r 13 LINUX

Para aquisição de imagens durante os ensaios:

- CANON Remote Capture ®

Para análise das imagens para estimativa de deslocamentos / deformações no CDP utilizou-se:

- Corel PHOTO-PAINT ® 10

Para o novo projeto do dispositivo de ensaios utilizou-se:

- SOLID EDGE ® v 15

6.8.2 Ensaios Experimentais

Os ensaios de caracterização de materiais foram realizados junto ao Departamento de Materiais, Aeronáutica e Automobilística da USP São Carlos. Foi utilizada uma máquina de ensaios EMIC 10000.

Os primeiros ensaios do YBT foram realizados junto ao Laboratório de Tribologia e Compósitos (LTC) e os ensaios finais junto ao Laboratório de Otimização de Processos de Fabricação (OPF) do Departamento de Engenharia Mecânica da USP São Carlos.

Foram utilizados equipamentos emprestados pelo Laboratório de Dinâmica para leitura dos sinais dos *strain gauges*.

O dispositivo de ensaios foi construído no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e colocado à disposição pelo Prof. Tit. Hazim Al-Qureshi, professor aposentado pelo ITA e hoje atuando como professor colaborador na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Posteriormente foram feitas modificações junto às oficinas do LAMAFE (Laboratório de Máquinas-Ferramentas) e OPF (Otimização de Processos de Fabricação).

Equipamentos utilizados:

- Prensa hidráulica (60 ton) – Laboratório: LTC;
- Prensa hidráulica (30 ton) – Laboratório: OPF;
- Torquímetro (0 a 20 Nm) – Laboratório: Motores

Instrumentos para medição:

- Strain gauges biaxiais;
- Ponte de Wheatstone;
- Relógios comparadores [resolução de centésimos e milésimos de milímetros];
- Base prismática.

Aquisição de imagens:

- Câmera Digital CANON Powershot G5 5.1 MPixels;
- Computador Pentium II 300 MHz para controle da câmera.

7 Resultados e Discussões

7.1 Resultados dos Ensaios de Caracterização de Materiais

Apresentam-se inicialmente os dados da caracterização Aço SAE 1010 e em seguida os dados levantados para o Alumínio 7475-O.

7.1.1 Ensaios para Aço 1020

Foram feitos os ensaios de tração e anisotropia. A Tabela 7.1 apresenta os valores médios utilizados nas simulações numéricas, bem como o modo de cálculo destes valores médios em relação aos valores apresentados na Tabela 7.2. Na Figura 7.1 apresentam-se sobrepostas as curvas médias estimadas por lei de potências e aproximação bilinear.

Tabela 7.1 Propriedades médias utilizadas nas simulações numéricas

Propriedade		Média
Tensão de escoamento [MPa]	$\bar{\sigma}_Y = (\sigma_{Y0} + 2\sigma_{Y45} + \sigma_{Y90})/4$	245,4
Módulo de elasticidade [MPa]	$\bar{E} = (E_0 + 2E_{45} + E_{90})/4$	$2,15 \cdot 10^5$
Módulo tangente [MPa]	$\bar{E}_t = (E_{t0} + 2E_{t45} + E_{t90})/4$	682,5
Coefficiente de resistência [MPa]	$\bar{k} = (k_0 + 2k_{45} + k_{90})/4$	518,3
Expoente de encruamento	$\bar{n} = (n_0 + 2n_{45} + n_{90})/4$	0,185

Foram estimados os valores para os coeficientes de Lankford nas orientações de 0, 45 e 90 graus, conforme mostrado na Tabela 7.2. Nesta tabela também são apresentados também os valores de anisotropia média e planar.

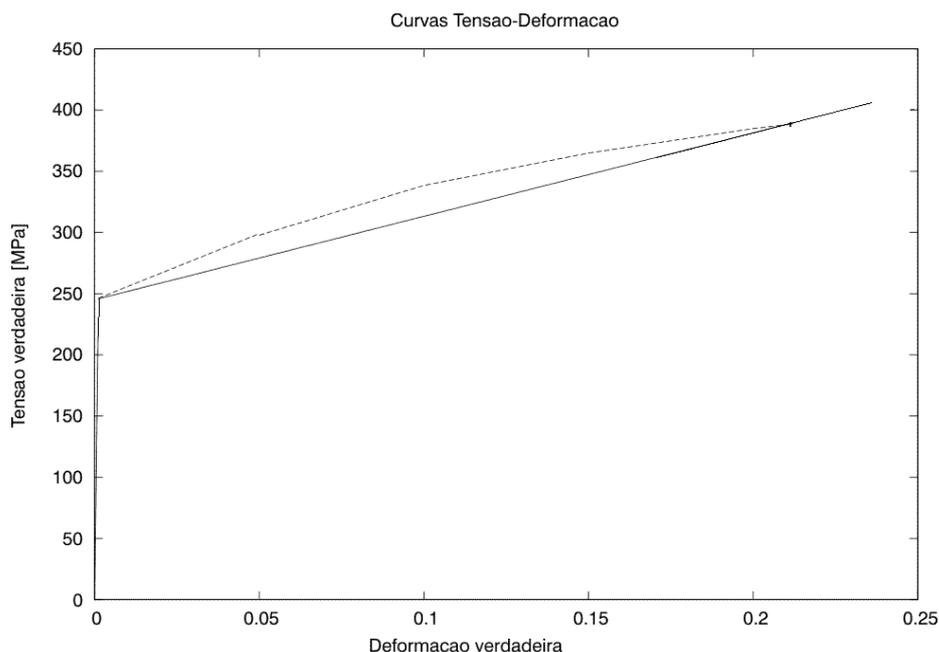


Figura 7.1 Curvas médias Tensão-Deformação para o aço 1010

Tabela 7.2 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em aço

Propriedade	Valor estimado		
	0°	45°	90°
Coefficiente de Lankford (r)	2,67	1,11	2,07
Valores médios			
Anisotropia média	$\bar{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90})/4$		1,74
Anisotropia planar	$\Delta r = (r_0 - 2r_{45} + r_{90})/2$		1,27

7.1.2 Ensaios para Alumínio 7475-O

A Tabela 7.3 apresenta os valores médios utilizados nas simulações numéricas, bem como o modo de cálculo destes valores médios em relação aos valores medidos. A Figura 7.2 apresenta a curva tensão-deformação com os valores médios da Tabela 7.3.

Tabela 7.3 Propriedades médias utilizadas nas simulações numéricas

Propriedade		Média
Tensão de escoamento [MPa]	$\bar{\sigma}_Y = (\sigma_{Y0} + 2\sigma_{Y45} + \sigma_{Y90})/4$	89,75
Módulo de elasticidade [MPa]	$\bar{E} = (E_0 + 2E_{45} + E_{90})/4$	$0,701 \cdot 10^5$
Coefficiente de resistência [MPa]	$\bar{k} = (k_0 + 2k_{45} + k_{90})/4$	357,92
Expoente de encruamento	$\bar{n} = (n_0 + 2n_{45} + n_{90})/4$	0,239

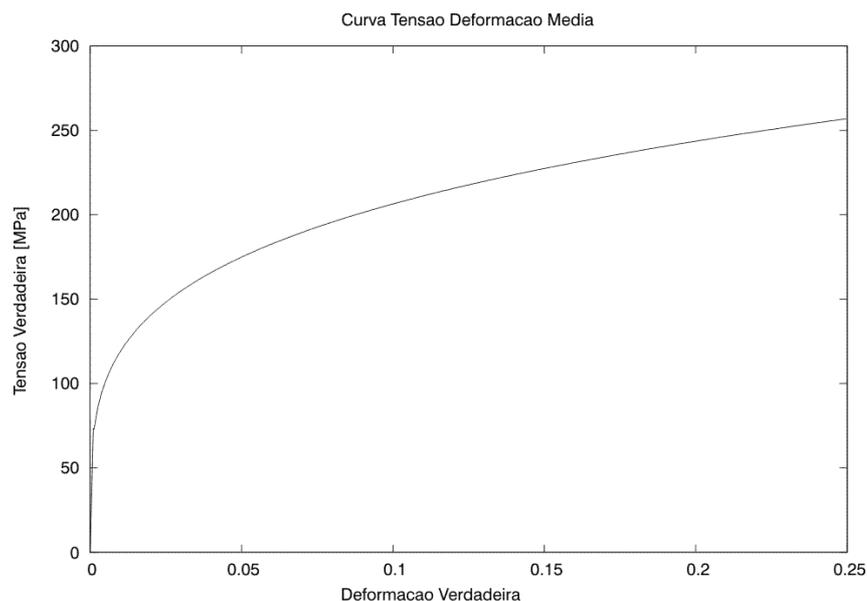


Figura 7.2 Curva média tensão-deformação para o alumínio

A Tabela 7.4 apresenta os valores para o coeficiente de Lankford a 0, 45 e 90 graus, bem como os valores de anisotropia média e planar.

Tabela 7.4 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em alumínio

		Ensaio 1	Ensaio 2	Média
Coeficiente de Lankford (R)	r_0	1,737	0,572	1,155
	r_{45}	0,801	0,930	0,866
	r_{90}	0,553	0,641	0,597
Anisotropia média $\bar{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90})/4$		0,973	0,768	0,871
Anisotropia planar $\Delta r = (r_0 - 2r_{45} + r_{90})/2$		0,344	-0,324	0,010

7.2 Resultados dos Ensaios Experimentais YBT

Os primeiros ensaios foram feitos para conhecer o comportamento do sistema como um todo (folgas e acomodações das juntas do dispositivo), e detalhes de preparação, alinhamento e fixação do CDP. Foram utilizados os relógios comparadores para se ter idéia da precisão na aplicação de carga no sistema e do comportamento do CDP. Nos primeiros ensaios realizados houve o problema de escorregamento do CDP, apesar do uso do *draw bead*. A peça foi apertada manualmente com uma chave comum. Estimou-se o nível de

aperto necessário para evitar o escorregamento (cerca de 5 Nm) e empregou-se um torquímetro para tal controle.

As Figuras 7.3 a 7.7 apresentam a preparação para os ensaios utilizando uma prensa hidráulica de 30 toneladas. A Figura 7.3 mostra o conjunto prensa, dispositivo e computador para aquisição de imagens. A Figura 7.4 mostra detalhe do computador que faz o acionamento da câmera e na tela uma imagem da região central do CDP monitorado. Uma marcação é feita no CDP, com uma linha de referência ao longo do comprimento do CDP e linhas perpendiculares em posições conhecidas. A Figura 7.5 mostra o dispositivo de ensaios montado com o CDP e os relógios comparadores posicionados para as medidas. Durante a fase de ensaios vários posicionamentos foram adotados para o relógio que mede o deslocamento aplicado ao braço do CDP. A configuração mostrada na figura é apoiada em uma extremidade da garra de fixação, que possui uma área maior para posicionamento. No entanto, em alguns casos ocorreu um pequeno desalinhamento do CDP durante a montagem que levou a uma pequena rotação da garra nos passos iniciais de carga, invalidando as medidas iniciais. A Figura 7.6 mostra um detalhe do relógio comparador posicionado no centro do CDP para medir o deslocamento w fora do plano. O posicionamento do relógio comparador é feito através de uma marcação no CDP, gravando a posição de seu centro. A Figura 7.7 mostra o posicionamento da câmera digital abaixo do barramento da prensa, fotografando o CDP por baixo do dispositivo de ensaios, através de um furo feito na base do dispositivo. As imagens foram utilizadas para estimar deslocamentos reais, uma vez que em alguns ensaios ocorreram pequenos escorregamentos que tornaram as medidas de deslocamento da garra não confiáveis.



Figura 7.3 Aparato experimental utilizado



Figura 7.4 Computador com software de acionamento remoto da câmera digital que faz as aquisições de imagens durante os ensaios



Figura 7.5 CDP montado no dispositivo de ensaios e relógios comparadores para as medidas de deslocamento



Figura 7.6 Detalhe do relógio comparador montado no centro do CDP



Figura 7.7 Detalhe da câmera posicionada abaixo do barramento da prensa fotografando uma face do CDP

Apesar das soluções apresentadas para evitar o escorregamento na fixação, para os CDPs em alumínio continuam a existir problemas, pois minimizando-se o escorregamento (não foi totalmente evitado) chegou-se a um limite de ruptura na garra muito próximo ao ponto de flambagem, invalidando praticamente todos os ensaios.

Para o aço, como mostrado nas Figura 7.8, voltou-se a ter o problema de escorregamento, apesar do aperto controlado por torquímetro e de terem sido tomadas medidas para aumentar o atrito entre as superfícies em contato.



Figura 7.8 Escorregamento no braço do CDP: (a) CDP; (b) Detalhe da região de escorregamento

A primeira solução tomada foi diminuir a largura do braço do CDP. Utilizando-se um braço com largura de 40 mm, mostrado na Figura 7.9, a região entre a garra e o corpo do CDP recebeu todo o carregamento de tração, comportando-se como um ensaio de tração, não sendo capaz de induzir a flambagem no ensaio Yoshida. O ensaio foi feito até a ruptura do CDP como mostrado na Figura 7.9. Aumentando-se a largura do braço o CDP tende-se ao escorregamento durante o processo. As simulações numéricas com o braço mais largo conduzem a um resultado satisfatório, mas implicam em um aumento no carregamento em que ocorre a flambagem, superior ao limite da fixação do CDP proporcionado pelo *draw bead*.



Figura 7.9 CDP estirado até a ruptura sem ocorrer a flambagem (direita) e CDP não deformado (esquerda)

Para resolver o problema, foram encurtados os braços do CDP de modo a diminuir o comprimento da região que estava se comportando como um ensaio de tração e transmitir o carregamento para a área central do CDP.

A Figura 7.10 mostra que tal ensaio foi bem sucedido, obtendo-se o resultado esperado para os CDPs nesta configuração. Foi mantido valor da largura dos braços como 40mm.



Figura 7.10 Ensaio com o CDP encurtado na região dos braços

A mesma solução foi tentada para os CDPs com configuração de um braço mais largo (50 mm), e novamente o ensaio Yoshida chegou ao ponto de flambagem, no entanto, os esforços chegaram a um limite, pois em tais ensaios o CDP sempre apresentou um escorregamento significativo muito próximo ao ponto de flambagem, inviabilizando a maior parte dos ensaios.

A Figura 7.11 mostra o melhor dos ensaios nesta configuração, onde um escorregamento significativo teve início logo após ao incremento de carga que levou à flambagem. Durante a aplicação de carga pode-se sentir várias vezes um leve tranco característico de escorregamento do CDP acompanhado de uma variação brusca na leitura do relógio comparador responsável pela leitura do deslocamento do carro com a garra de fixação.

Durante a flambagem dos CDPs o ponto de início é bem caracterizado, pois ao aumento de carregamento o relógio responsável pelo deslocamento dos braços permanece sem alterar a posição mesmo com um aumento de carga, enquanto o relógio que mede o deslocamento central passa a registrar o um grande aumento. Após a estabilização deste incremento de carga, responsável pelo instante inicial de flambagem, o sistema ainda passa por uma fase de adaptação, chegando a uma nova geometria estável, mas de uma

maneira regular, obtendo-se deslocamentos em ambos os relógios de uma maneira mais previsível (monotônica sem variações bruscas).



Figura 7.11 Ensaio com o CDP encurtado e braços largos

Este comportamento pode ser acompanhado através das Figuras 7.12 e 7.13. A primeira refere-se ao CDP com braço de 40mm, e pode-se observar um rápido aumento no deslocamento do centro do CDP no início do ensaio (cerca de 0,5mm de deslocamento em cada braço), seguido de uma diminuição na inclinação da curva, que ocorre quando o CDP procura uma nova configuração mais estável. A segunda figura mostra o comportamento de um CDP com braço de 50mm e pode-se ver o rápido deslocamento na região central com um pequeno avanço no carro. O ponto seguinte está distante devido a um escorregamento ocorrido na aplicação do incremento de carga correspondente. A curva refere-se ao CDP mostrado na Figura 7.11.

Na comparação com os modelos numéricos não foi utilizada a medida do deslocamento do carro medida através do relógio comparador. Este foi utilizado como forma de controle do carregamento imposta à prensa durante a execução dos ensaios. Para as comparações foram utilizadas as imagens da câmera digital e a marcação riscada nos CDPs.

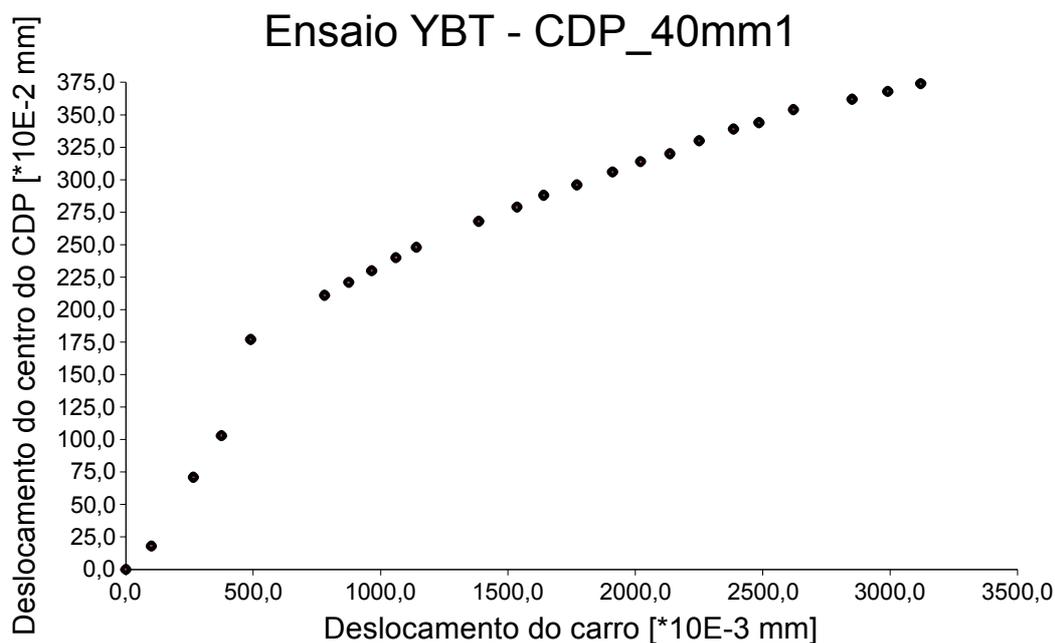


Figura 7.12 Deslocamentos medidos em um ensaio final de CDP com braço de 40mm de largura

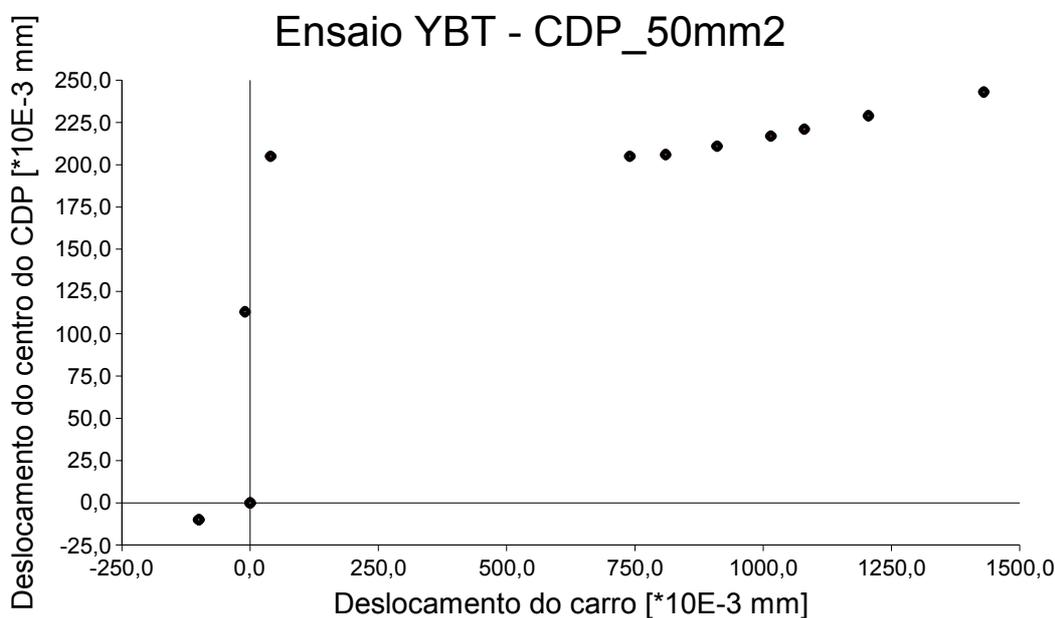


Figura 7.13 Deslocamentos medidos em um ensaio final de CDP com braço de 50mm de largura

7.3 Resultados dos Ensaio Numéricos YBT

Foram feitas as modelagens do CDP do ensaio YBT através dos programas ANSYS ® 7.0 e LS-DYNA 970 ®. Em ambos os casos a

modelagem foi feita da maneira descrita no capítulo 6, utilizando-se um elemento do tipo sólido para a região perfeita do CDP e o elemento do tipo *shell* para criar o defeito induzido.

Na abordagem utilizando-se o ANSYS ®, foi utilizado a integração implícita no tempo, conforme descrito no item 4.3. O carregamento foi aplicado de duas maneiras distintas: a primeira através da prescrição de uma força atuando nos braços do CDP e utilizando-se para a solução um procedimento do tipo *arc-length method*; a segunda maneira através da prescrição de um deslocamento controlado nos braços do CDP e fazendo-se a solução por meio de procedimentos do tipo Newton-Raphson. O processo de solução foi mais estável utilizando-se a condição de deslocamentos prescritos, pois no caso deste CDP simples, tais deslocamentos são conhecidos e o algoritmo de solução converge mais rapidamente.

Na abordagem utilizando-se o LS-DYNA ® o carregamento prescrito foi o deslocamento das garras em função do tempo. O processo analisado é tido como quase-estático, mas a sua simulação utilizando-se a velocidade real do processo faz com que o tempo de solução seja muito grande. Foram feitas diversas análises, aumentando-se o a velocidade do processo até identificar em que ponto passa-se a ter uma influência do carregamento dinâmico na resposta. Com isto, pôde-se aumentar a velocidade do processo em cerca de cem vezes, obtendo-se a mesma resposta. A partir deste valor passou-se a observar uma mudança no comportamento do início do ponto de flambagem do CDP, que passa a ocorrer cada vez mais distante no tempo, e percebeu-se um comportamento mais instável da solução, com oscilações em torno da solução obtida anteriormente.

7.3.1 Análises em Aço

Foram feitos uma série de análises variando-se a profundidade do defeito induzido, enquanto foram mantidas fixas a largura e comprimento do defeito. A relação entre o valor do defeito induzido, o programa utilizado e a nomenclatura adotada para cada caso é mostrada na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 Defeitos induzidos adotados em cada caso.

Programa	Profundidade do defeito induzido		
	0,20 mm	0,15 mm	0,10 mm
ANSYS ®	ST_AN-01	ST_AN-02	ST_AN-03
LS-DYNA ®	ST_LS-01	ST_LS-02	ST_LS-03

A Figura 7.14 apresenta uma configuração de malha deformada após a simulação. Na Figura 7.15 apresenta-se um exemplo típico de estado de tensões ao final de um estiramento de 2,5 mm em cada braço do CDP. São mostrados resultados utilizando-se o ANSYS ® e o LS-DYNA ®. Observa-se claramente que o CDP já está fora de seu plano inicial, indicando que o estado de flambagem bidimensional já ocorreu. O exemplo na figura refere-se em (a) ao caso ST_LS-01 e em (b) ao caso ST_AN-01, conforme a nomenclatura da Tabela 7.5.

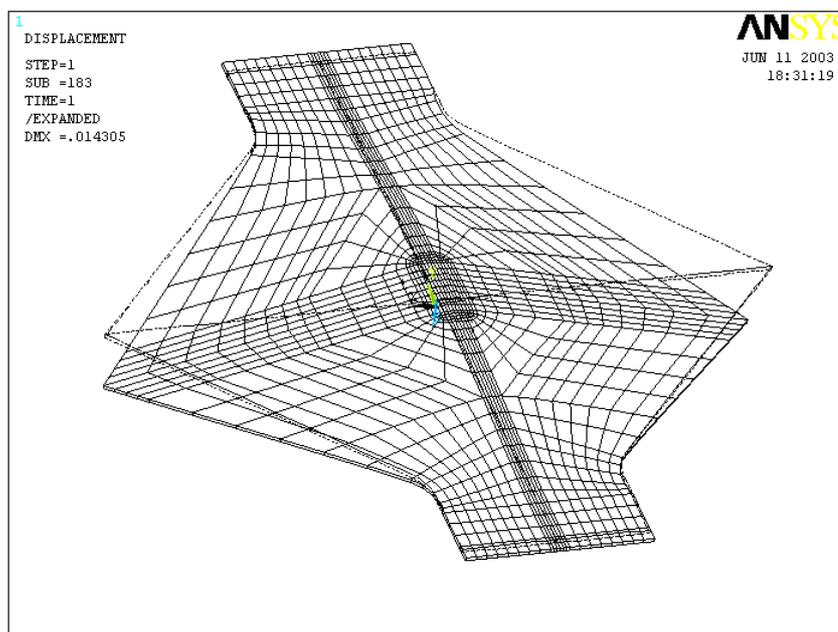
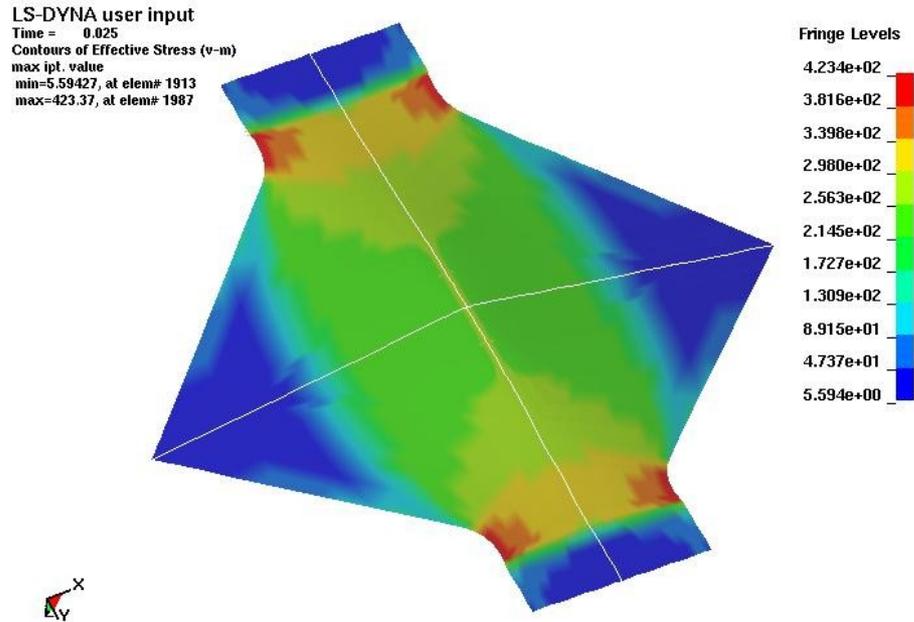
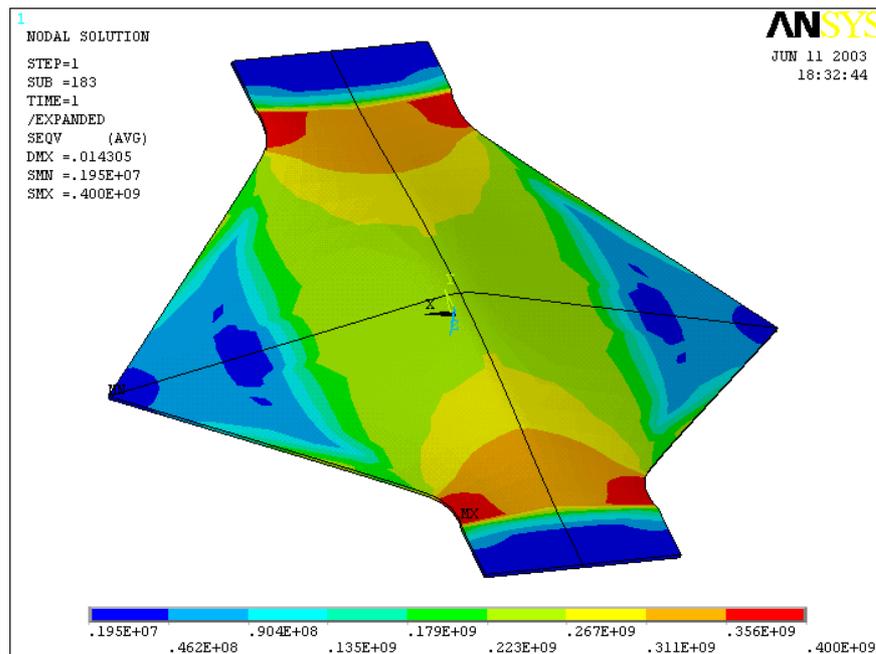


Figura 7.14 Configuração deformada do CDP do ensaio YBT. Em linha tracejada a configuração original



(a)



(b)

Figura 7.15 Tensões efetivas no passo final de estiramento do CDP: (a) Solução pelo LS-DYNA – tensões em [MPa]; (b) Solução pelo ANSYS – tensões em [Pa]

O padrão de distribuição de tensões é muito semelhante. Para a simulação ST_LS-01 encontrou-se um valor máximo de tensão efetiva de 423MPa e para o caso ST_AN-01 o valor máximo de tensão efetiva foi de 400MPa (diferença de cerca de 5%). Tais padrões podem ser vistos na Figura 7.16 (a) para o caso ST_LS-01 e na Figura 7.15 (b) para o caso ST_AN-01.

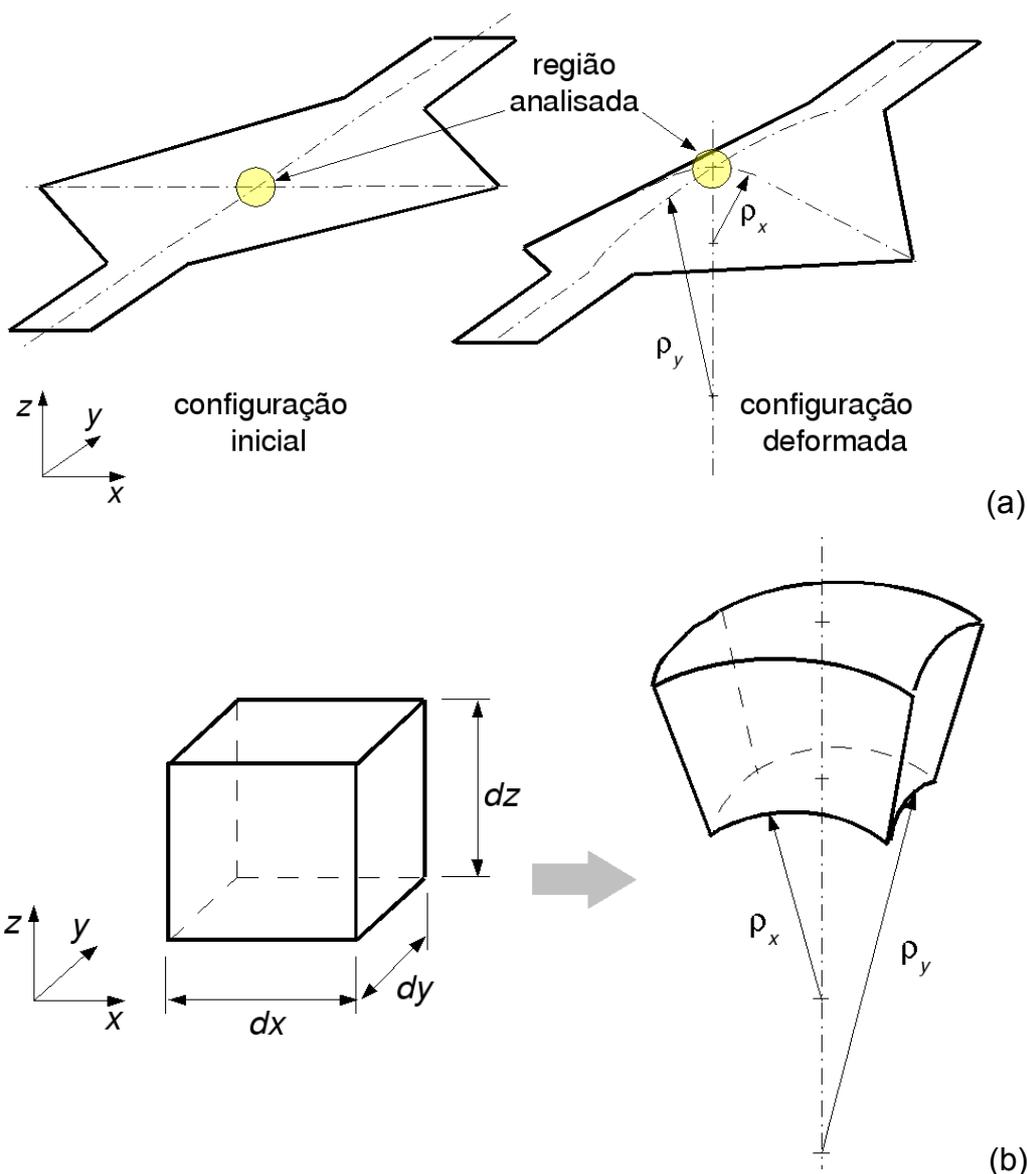


Figura 7.16 Elemento da região central do CDP: (a) Configurações inicial e após a flambagem; (b) Elementos da região central do CDP respectivos às configurações inicial e final

Analisando-se a região central do CDP, destacada na Figura 7.16(a), antes e depois do colapso, verifica-se que ocorre uma flexão do CDP em duas direções. O comportamento de um elemento do centro do CDP é mostrado na Figura 7.16(b), destacando-se as curvaturas assumidas na região central, representadas por ρ_x , na direção em que ocorre a instabilidade, e por ρ_y , na direção perpendicular (direção de aplicação de tração no CDP). A análise do comportamento deste elemento é bastante útil na avaliação da coerência dos resultados do histórico de tensões ao longo do tempo que será apresentada a seguir.

Na Figura 7.17 apresenta-se o elemento central mostrado na Figura 7.16(b) projetado nos planos xz e yz , relativos à direção em que ocorre a flambagem e a direção perpendicular a esta, respectivamente. Verifica-se que, inicialmente, a região central sofre um processo estável de tração na projeção yz e compressão em xz . Quando ocorre a flambagem no plano xz , apresenta-se uma curvatura acentuada neste plano, de modo a tracionar a região superior do CDP e comprimir a região inferior. Os valores de tração chegam a ser superiores à tensão de compressão que estavam sendo induzidas pela geometria do CDP. Na região inferior, quando ocorre a instabilidade, a tensão de compressão é intensificada devido à curvatura que ocorre. No plano yz a situação parte de uma tração estável, e, quando ocorre a flambagem no plano xz , o material sofre uma curvatura compatível com os deslocamentos sofridos devido à instabilidade.

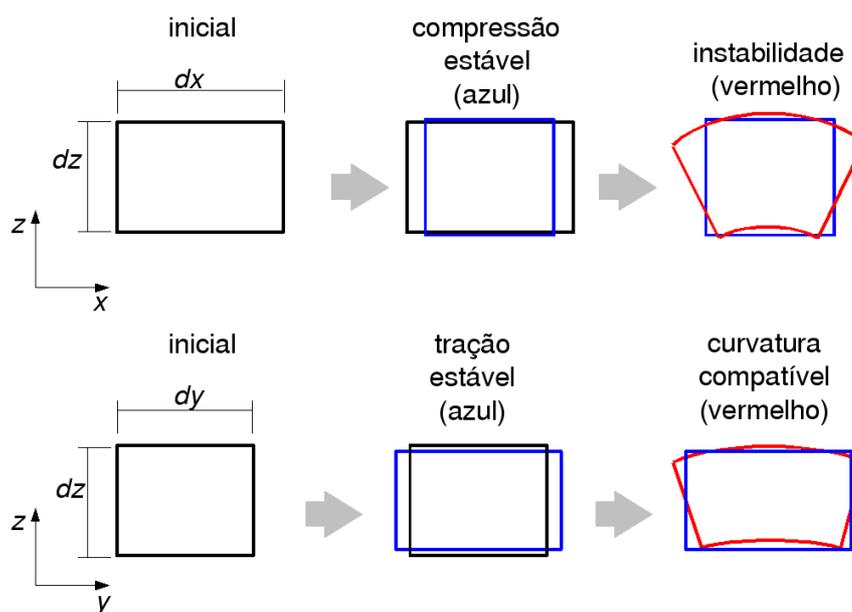


Figura 7.17 Estados submetidos ao longo do ensaio YBT

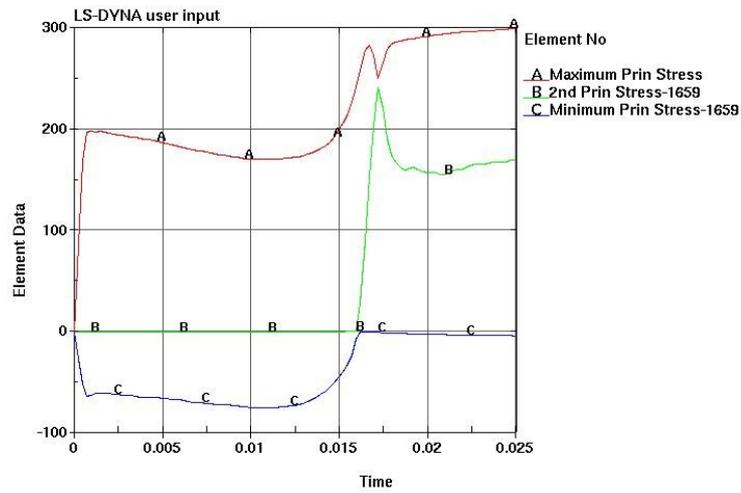
As Figuras 7.18 e 7.19 apresentam o comportamento das tensões principais no centro do CDP, utilizando-se respectivamente os programas LS-DYNA® e ANSYS®. Cabe ressaltar que uma das tensões principais é sempre nula, o que corresponde ao estado plano de tensões no CDP. No ponto central do CDP as tensões principais 1, 2 e 3 são as mesmas que as tensões x , y e z , devido à simetria da geometria e carregamento. Nos demais pontos as tensões principais seguem a orientação do modo de deformação do material,

distanciando-se dos valores alinhados com o sistema de coordenadas global a medida que o CDP sofre o colapso.

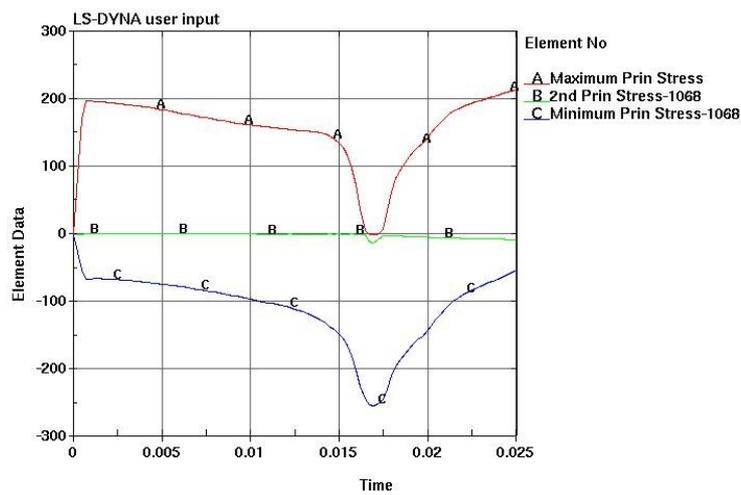
Na Figura 7.18(a) pode-se perceber ao longo da história da tensão principal 3 (negativa) no ponto central superior um comportamento inicial de aumento de carregamento (em módulo), seguido por uma mudança significativa com um crescimento suave até um valor de máximo, a partir do qual inicia uma queda bastante acentuada. Tal comportamento pode ser explicado em cada trecho da seguinte forma: o aumento inicial de carregamento corresponde à resposta elástica do material respondendo ao deslocamento aplicado nos braços do CDP. A segunda fase, de crescimento suave, corresponde à plastificação do material na região de transição entre o braço e o corpo do CDP. Devido à diferença na largura do material, esta região atinge primeiro o escoamento, e passa a “absorver” uma parte maior do deslocamento prescrito aplicado aos braços. As tensões crescem até que a porção central do CDP atinge a plastificação. Logo após o início da plastificação da região central, o nível da tensão principal 3 atinge seu máximo absoluto e começa a diminuir de modo mais acentuado. Este é o ponto em que ocorre a flambagem no ensaio YBT. O instante de início do colapso é bem caracterizado pela curva de tensão principal 3, analisando-se o ponto na parte de cima da chapa (a instabilidade gera uma curvatura convexa): neste ponto a curvatura faz com que apareçam tensões de tração, anulando a compressão à que a chapa estava submetida. Desta maneira, o ponto de instabilidade fica caracterizado no gráfico, pois esta mudança ocorre em um intervalo muito curto de tempo, quando para um pequeno deslocamento no braço do CDP corresponde uma resposta grande de dobramento do CDP. O tempo que a instabilidade leva para ocorrer é proporcional ao tamanho do defeito induzido.

Na Figura 7.18(b) apresenta-se o mesmo gráfico para um elemento no centro da espessura (na espessura foram utilizados três elementos), isto é, próximo à linha neutra. Pode-se fazer uma comparação similar à anterior, observando-se o comportamento da tensão principal de compressão, que passa por uma mudança brusca a partir da instabilidade, mas com um pequeno atraso em relação ao ponto anterior. Em 7.18(c) o ponto de instabilidade não fica bem caracterizado, uma vez que a curvatura da chapa induz um aumento na tensão de compressão, não provocando uma mudança significativa no gráfico. Posteriormente, a curva muda de inclinação devido ao

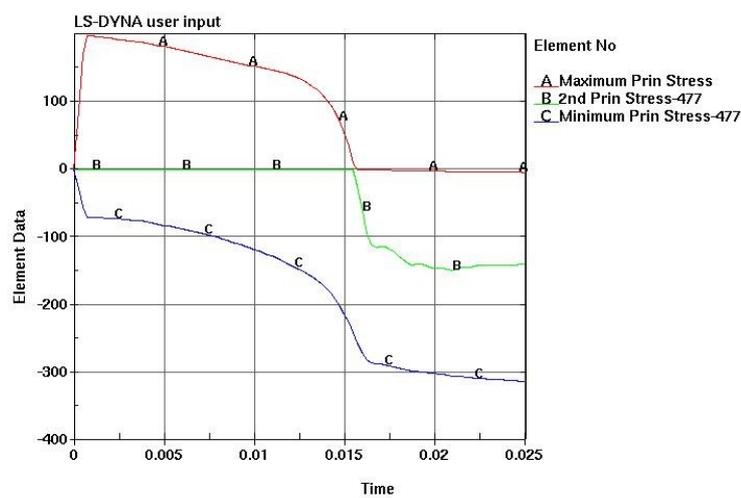
ajuste do material, mas este ponto está atrasado em relação ao início do fenômeno.



(a)



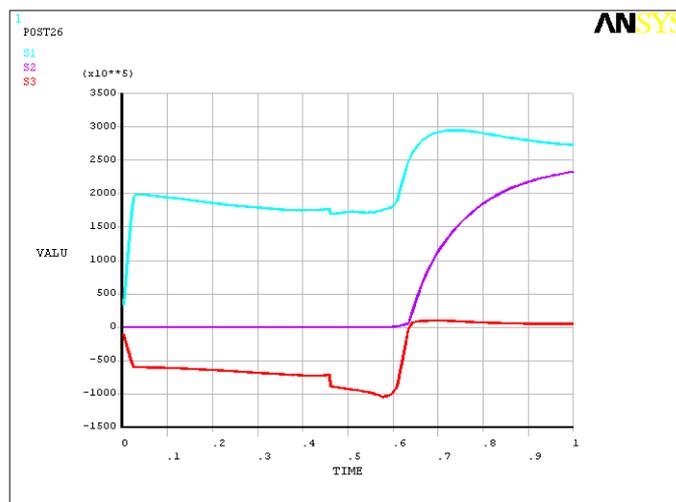
(b)



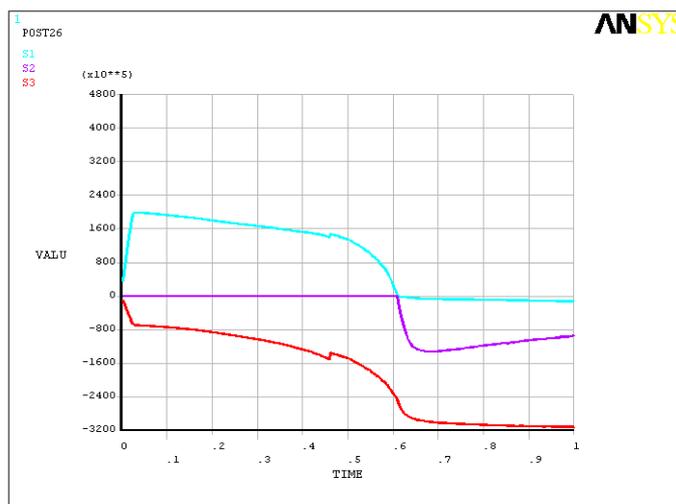
(c)

Figura 7.18 Histórico de tensões principais na região central do CDP: (a) Face superior; (b) Plano médio; (c) Face inferior. Tensões em [Mpa]. Tempo em [s]

Um comportamento similar aparece na utilização do programa ANSYS®, como pode ser visto na Figura 7.19. No entanto, como foi utilizada uma malha mais grossa para descrever o CDP os resultados apresentam menor qualidade. Analisando-se as tensões principais na região da face superior, verifica-se que o comportamento depois do ponto de flambagem difere do previsto com o programa LS-DYNA®. Acredita-se que uma malha com uma melhor discretização ao longo da espessura deve conduzir a resultados mais próximos. No LS-DYNA® foram utilizados 3 elementos na espessura e no ANSYS® apenas dois, pois a utilização de mais elementos na espessura apresentou maior dificuldade na convergência, o que impossibilitou tais análises.



(a)



(b)

Figura 7.19 Histórico de tensões principais na região central do CDP: (a) Face superior; (b) Face inferior. Tensões em [Pa]. Tempo em [s]

Na Figura 7.20 apresenta-se o deslocamento de um ponto no centro do CDP na direção fora do plano de sua geometria inicial. Verifica-se que a região onde começa a apresentar um grande deslocamento para uma entrada pequena corresponde ao tempo de pouco mais de 0,015s, que é o mesmo tempo onde ocorre o pico de tensão principal 1 discutido nos parágrafos anteriores.

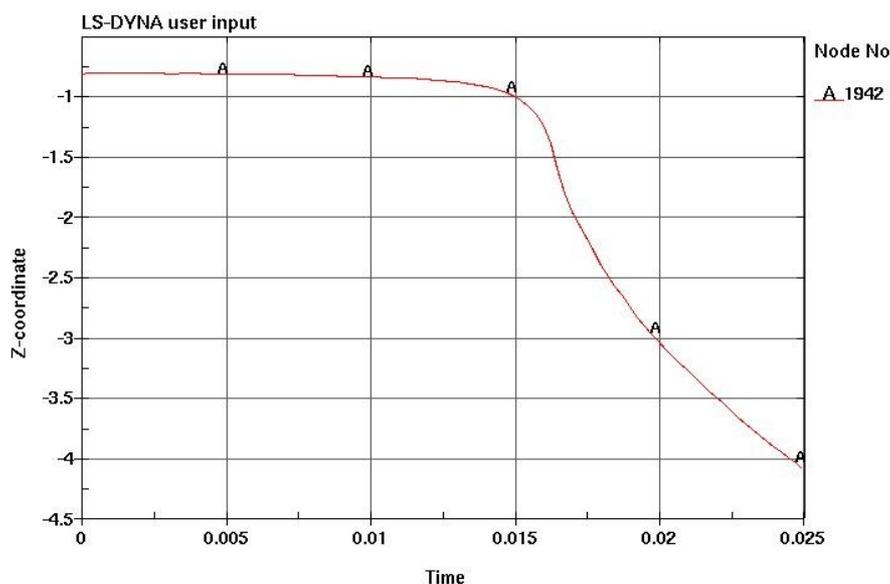


Figura 7.20 Deslocamento fora do plano de um nó no centro do CDP ao longo do tempo de aplicação de carga. Deslocamento em [mm]; Tempo em [s]

Pelo fato da flambagem ocorrer no início da plastificação, mas quando a transição dos braços para o corpo do CDP já está em um nível alto de plastificação sugere-se a modelagem do CDP em aço com dois modelos de materiais, sendo o da região de transição modelada a partir de dados obtidos a partir da curva completa do ensaio de tração e a região central, que compreende o *gauge length* modelada através de um comportamento semelhante ao início da plastificação. Para o modelo que utiliza aço baixo carbono, a região central do CDP pode ser modelada como perfeitamente plástica e ter os dados obtidos a partir do patamar de escoamento verificado na curva tensão-deformação. O comportamento de plastificação da região central pode ser acompanhado através da Figura 7.21, onde a deformação plástica equivalente em elementos localizados nas camadas superior, central e inferior são apresentados em função do tempo, em escala igual à da Figura

7.18, que tem a parte (a) reproduzida para uma melhor visualização.

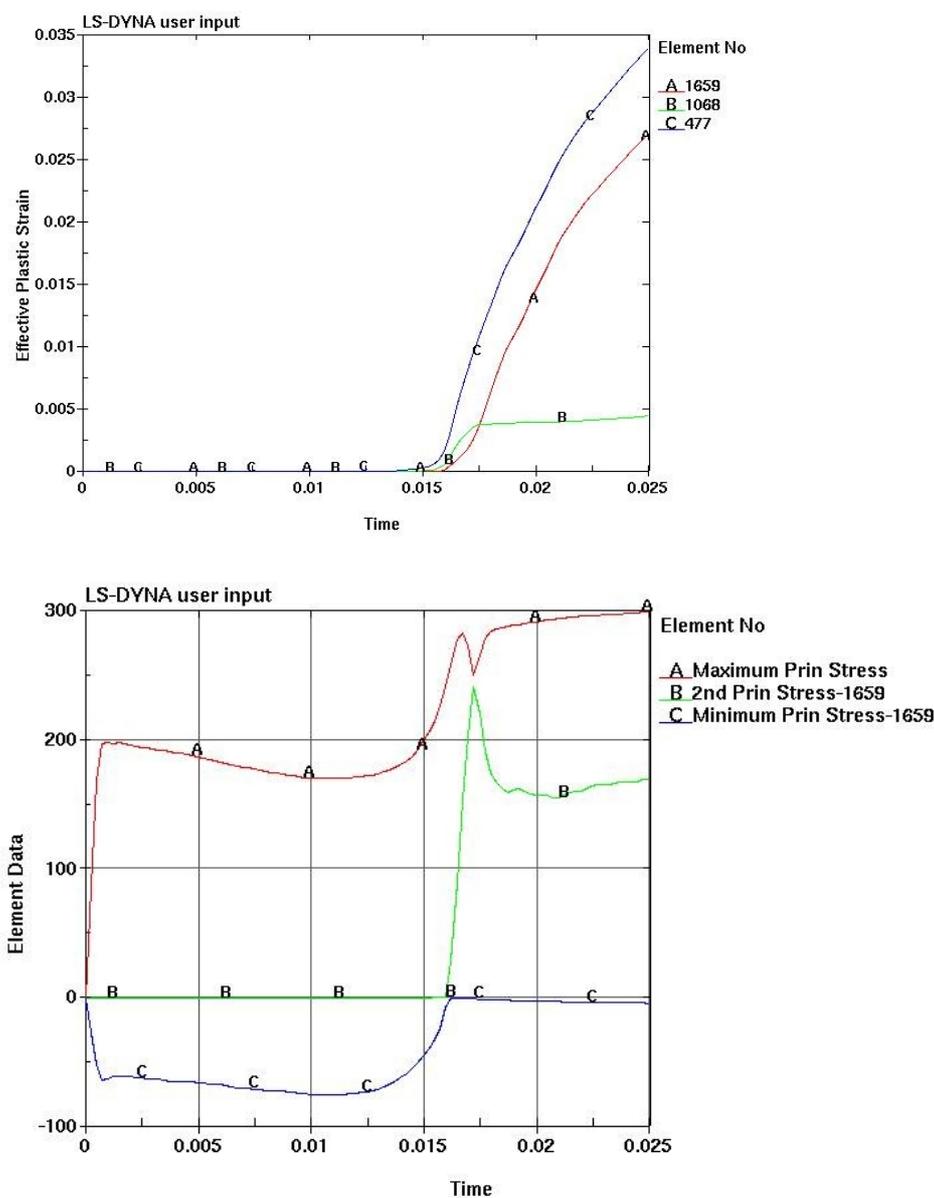


Figura 7.21 Evolução das tensões principais e das deformações plásticas efetivas ao longo do tempo. Tensões em [Mpa]; Tempo em [s]

Os padrões das curvas para os demais casos seguiram os formatos apresentados nos casos relatados acima. Desta maneira, serão apresentados a seguir os resultados para os demais modelos em forma de tabelas comparando as diferenças obtidas com a variação do defeito induzido e do programa utilizado. Serão feitos comentários sobre dificuldades de convergência e variação em densidade de malha, que foram efetuadas em casos onde a simulação tornou-se mais crítica.

A Tabela 7.6 relaciona para cada caso o nível de tensões equivalentes encontrado nas simulações e o deslocamento da região central do CDP ao final da aplicação de um deslocamento de 2,5mm em cada braço do CDP. Os valores correspondentes, calculados através do programa LS-DYNA ® são apresentados na Tabela 7.7. Devido ao maior número de elementos utilizados ao longo da espessura, neste caso o número de informações é maior, e os valores de tensões principais são apresentados em três posições ao longo da espessura.

Tabela 7.6 Tensões e deslocamentos máximos utilizando o ANSYS

	Caso:	ST_AN-01	ST_AN-02	ST_AN-03
Tens. eqv.	Superior	255,5	255,3	*
[MPa]	Inferior	278,3	283,5	*
Desl. [mm]	-			*

* Problemas de convergência na solução

Tabela 7.7 Tensões e deslocamentos máximos utilizando o LS-DYNA

	Caso:	ST_LS-01	ST_LS-02	ST_LS-03
Tens. eqv.	Superior	263,5	261,9	258,9
[MPa]	Médio	248,1	248,7	250,5
	Inferior	268,2	267,4	265,3
Desl. [mm]	-	3,3	3,0	2,7

Tabela 7.8 Tensões principais no instante de flambagem utilizando o ANSYS

	Caso:	ST_AN-01	ST_AN-02	ST_AN-03
Tensões*:	Tempo [s]:	0,59 **	0,65**	-
Tens. pr. 1	Superior	180,0	156,0	***
[MPa]	Inferior	55,0	53,0	***
Tens. pr. 2	Superior	-103,0	-122,0	***
[MPa]	Inferior	-220,0	-215,0	***
* A terceira componente de tensão principal é igual a zero (tensão plana).				
** Tempo total da simulação variando de 0 a 1s.				
*** Problemas na convergência da solução				

Tabela 7.9 Tensões principais no instante de flambagem utilizando o LS-DYNA

Caso:		ST_LS-01	ST_LS-02	ST_LS-03
Tensões*:	Tempo [s]:	0,0150 **	0,0173 **	0,0185 **
Tens. pr. 1 [MPa]	Superior	198,9	206,2	174,0
	Médio	135,8	91,9	92,6
	Inferior	55,3	-14,6	19,0
Tens. pr. 2 [MPa]	Superior	-45,5	-55,6	-106,5
	Médio	-147,1	-185,9	-185,5
	Inferior	-212,9	-252,6	-235,6
* A terceira componente de tensão principal é igual a zero (tensão plana).				
** Tempo total da simulação variando de 0 a 0,025s.				

Com a variação da profundidade do defeito induzido no CDP, pode-se perceber uma mudança no ponto característico de início da instabilidade. Conforme comentado anteriormente, o ponto de instabilidade é caracterizado por uma mudança brusca no comportamento da tensão principal de compressão atuando no CDP, acompanhado por uma mudança no comportamento à tração depois de um pequeno intervalo de tempo. Variando-se a profundidade do defeito de modo a diminuí-lo, percebe-se que o comportamento de mudança na tensão de compressão passa de uma mudança mais suave, para o defeito de 0,2mm para uma mudança mais brusca, com um ponto onde ocorre a mudança mais caracterizado, que já pode ser visto para o defeito de 0,15mm, e fica mais acentuado com defeito de 0,1mm, conforme ilustrado na Figura 7.22.

Os valores de tensões principais no ponto central são mostrados na Tabela 7.8 para os resultados obtidos com o ANSYS ® e na Tabela 7.9 para os resultados do LS-DYNA ®, no instante de tempo em que se caracteriza o início da instabilidade. Embora o comportamento das curvas seja bastante similar, conforme o defeito é diminuído, o tempo para o surgimento dos efeitos de instabilidade é maior, e aparecem melhor caracterizados. Este comportamento está de acordo com o que se espera quando se trabalha provocando a instabilidade por meio de um defeito induzido. Quanto menor o defeito, o comportamento tende a se aproximar daquele previsto para um modelo perfeito. No entanto é preciso que seja conhecido o ponto onde deve ser aplicado o defeito (que pressupõe um conhecimento prévio do modo de falha).

Os resultados das simulações utilizando-se tanto o LS-DYNA ® como o

ANSYS ® levaram a resultados semelhantes. A grande vantagem que o programa LS-DYNA ® obteve foi a maior robustez quanto à convergência. Ao se diminuir a profundidade do defeito induzido para o caso de 0,1mm, não foi possível obter uma resposta utilizando o ANSYS ®.

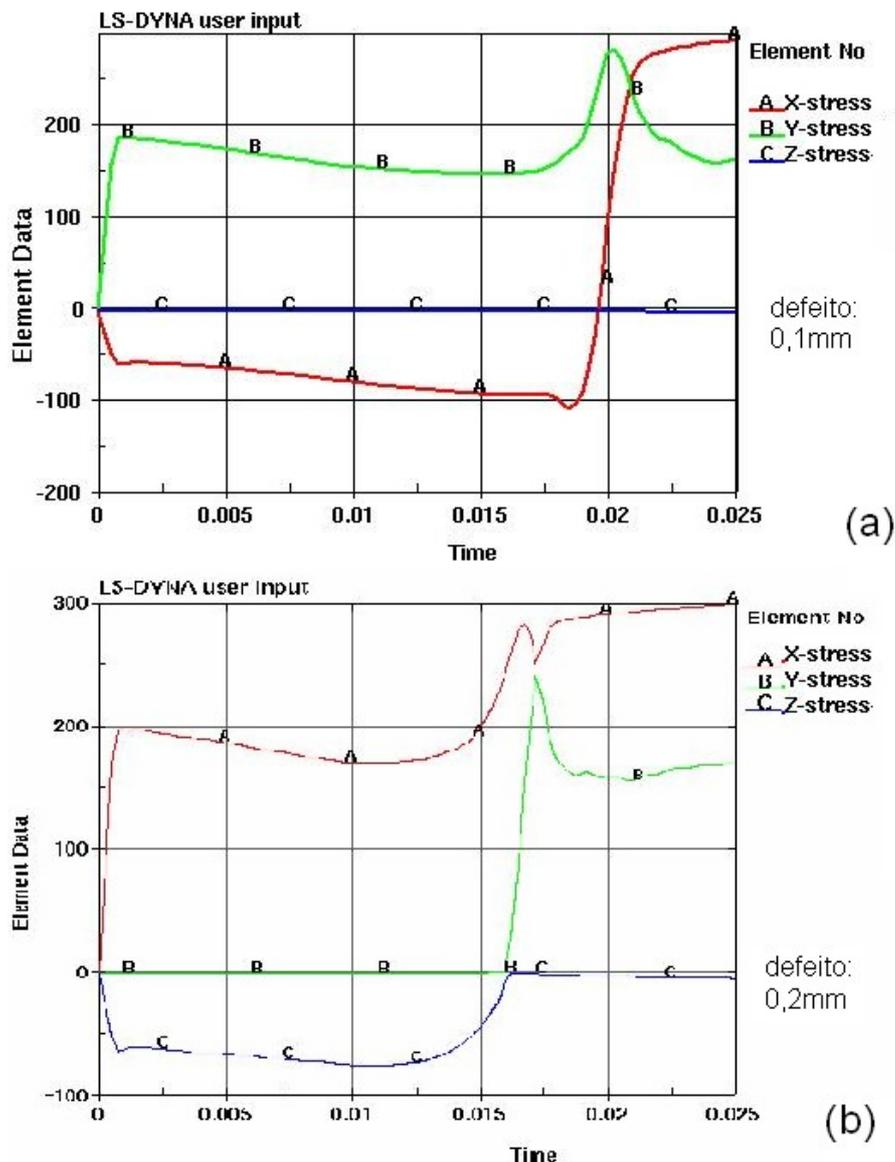


Figura 7.22 Efeito do tamanho do defeito induzido no início da instabilidade: (a) Defeito de 0,1mm; (b) Defeito de 0,2mm

Outro ponto a ressaltar é que para a determinação de outros estados tração-compressão que conduzam à instabilidade é necessária a utilização de carregamentos de força (ou pressão) e não de deslocamento, como é o caso do modelo para o YBT. O programa ANSYS ® necessita para este tipo de análise de algoritmos como o *arc length method*, que apresentou dificuldades

quanto ao tempo de processamento e tamanho dos arquivos gerados. O LS-DYNA® mostrou-se a melhor opção para o prosseguimento do trabalho.

7.3.2 Simulações Baseadas nos Ensaios Experimentais

Alterando-se os valores do defeito induzido no modelo numérico, e utilizando-se como referência o deslocamento fora do plano do centro do CDP e as medidas de deslocamento das marcações feitas nos ensaios experimentais avaliadas através das fotos digitais, conseguiu-se chegar a valores muito próximos dos medidos.

A curva de deslocamento da região do braço do CDP contra o deslocamento de sua região central é mostrada na Figura 7.23. As dimensões finais do defeito foram 0,1 mm de profundidade, 10 mm de largura e 12 mm de comprimento.

Conforme os resultados experimentais, as simulações válidas do ensaio Yoshida foram utilizando como material o aço, e a configuração com o braço do CDP com 40 mm de largura.

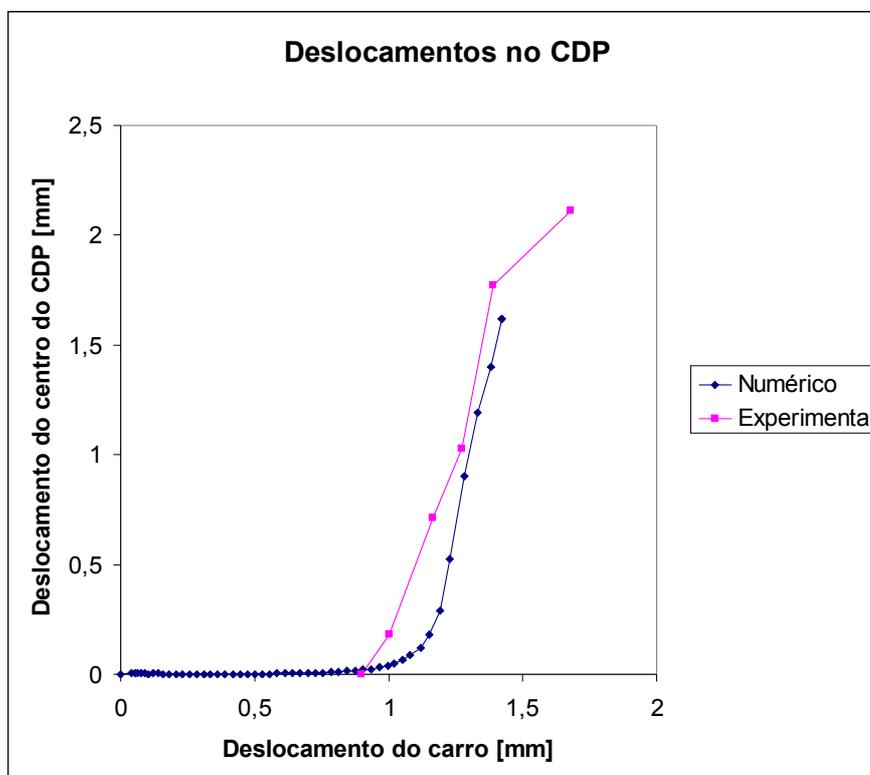


Figura 7.23 Correlação entre ensaios numéricos e experimentais do YBT.

7.4 Simulações Numéricas para Determinação das Curvas Limite de Estabilidade

Para a aplicação do modelo proposto no capítulo 6 são feitas as seguintes hipóteses:

- O defeito inicial é pequeno em relação ao tamanho do resto do CDP, tanto nas dimensões de largura e comprimento, como na dimensão de profundidade.
- A espessura nominal da chapa analisada é a espessura da região fora do defeito.
- A geometria do defeito é definida como sendo compatível com a forma do modo de enrugamento que espera-se obter. Tais dimensões são obtidas do modelo do ensaio Yoshida.
- As dimensões do CDP assumem que o enrugamento em uma peça é um fenômeno localizado e as bordas do CDP estão fora da região afetada pela instabilidade.

Para o levantamento das curvas limite de estabilidade, foi definida uma estratégia de simulações, de modo a variar da melhor maneira possível os estados de deformação responsáveis pela flambagem plástica.

A geometria do CDP foi escolhida de forma a ser compatível com as dimensões do ensaio Yoshida, utilizado como referência no desenvolvimento de todos os modelos numéricos aplicados.

Foi utilizado um modelo referência com lado igual a 60mm e espessura de 1mm. Uma peça quadrada destas dimensões pode ser inscrito no CDP do ensaio Yoshida. Conforme descrito anteriormente, foi variada a razão entre os carregamentos nas laterais de modo a induzir o carregamento de instabilidade plástica de flambagem em vários estados de tensão. Na variação deste carregamento foi adotado que o módulo do carregamento de tração é sempre maior que o módulo do carregamento de compressão, pois o oposto induz a instabilidade ainda no estado elástico, afastando-se da proposta do trabalho.

A variação do carregamento foi feita no intervalo $0,2 \leq X \leq 0,9$, onde X é o parâmetro que relaciona os carregamentos de tração e compressão. Cabe ressaltar que foi testado o valor de $X = 0,1$ mas com este valor em nenhum dos casos ocorre a instabilidade. Para o valor de $X = 0,2$ a instabilidade sempre

ocorre em níveis muito elevados de tensão e deformação, próximos ou superiores aos valores de ruptura, justificando a não utilização deste valor nas curvas levantadas.

Em seguida foram alterados as dimensões geométricas do lado dos modelos numéricos.

Chamando-se de a e b os lados do modelo, onde ao longo de a aplica-se o carregamento de tração e ao longo de b o carregamento de compressão, foram estudados os casos com $1,1.b \leq a \leq 1,3.b$ e $1,1.a \leq b \leq 1,4.a$. A menor das dimensões foi mantida como sendo fixa e igual a 60 mm em ambos os casos. A Figura 7.24 ilustra as condições de variação dos parâmetros a e b . No texto a seguir serão utilizados os nomes modelo 1, 2 e 3 para definir, respectivamente, as condições de a igual a b , a maior que b e b maior que a .

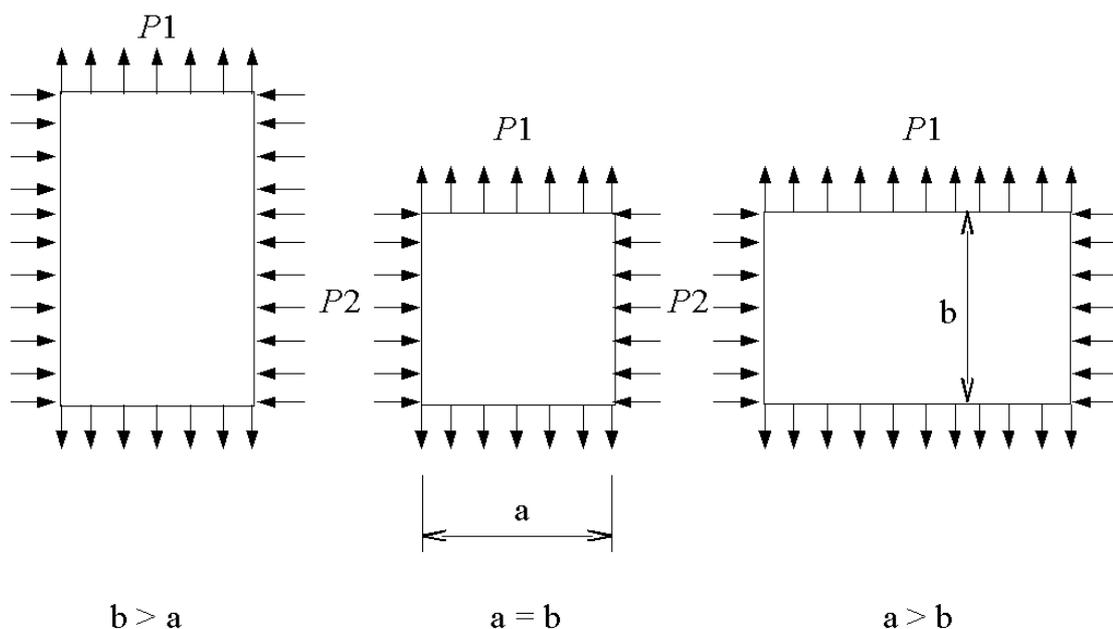


Figura 7.24 Variações do modelo numérico para levantamento de curvas

7.4.1 Resultados para o Modelo 1 ($a = b$)

O parâmetro X foi variado de 0,2 a 0,9 e obtidos os pontos para o gráfico mostrado na Figura 7.25. Foi feita uma aproximação linear para a curva obtida, de modo a utilizar-se uma abordagem comum a todos os resultados. Alguns resultados são melhor aproximados por curvas de ordem maior, mas isto nem sempre é verdade. A equação da reta de aproximação é mostrada na figura da curva correspondente.

Nos resultados deve-se observar que os pontos onde ocorre maior deformação (em módulo) tem origem nas situações onde o carregamento de tração é muito maior em módulo do que o carregamento de compressão. Nestes pontos o início da instabilidade não é bem caracterizado, começando de maneira bastante suave e com uma progressão lenta. Para definição do ponto escolhido foi adotado como parâmetro o deslocamento em z do elemento central atingir um valor correspondente a uma fração da espessura do modelo (em geral cerca de 20%).

À medida que o carregamento de compressão inicial é maior, o fenômeno torna-se mais bem caracterizado, conforme o esperado. Analisando-se o histórico de deformações percebe-se que a medida que a instabilidade torna-se mais caracterizada, o ponto crítico passa a ser visível acompanhando-se a trajetória deformação principal 3. Nos modelos, a deformação principal 1 ocorre na direção de aplicação do carregamento de tração, a deformação principal 3 na direção da espessura da chapa e a deformação principal 3 na direção do carregamento de compressão. Durante o processo estável (antes da flambagem), o valor da deformação principal 3 é muito menor que as outras deformações principais. A partir da instabilidade a deformação principal 3 deixa de ser desprezível, indicando um estado tridimensional de deformação. A instabilidade plástica à compressão leva a um aumento da espessura do material responsável pelo aumento na deformação nesta direção. Tal comportamento é bem caracterizado nos modelos onde o carregamento de compressão maior que 0,5 vezes o carregamento de tração. A Figura 7.26 mostra o histórico de deformações principais ao longo da simulação com um fator $X = 0,6$. A linha vertical no tempo 0,00158s corresponde ao início da flambagem plástica do modelo.

Análise semelhante pode ser feita para os demais casos mostrados a seguir.

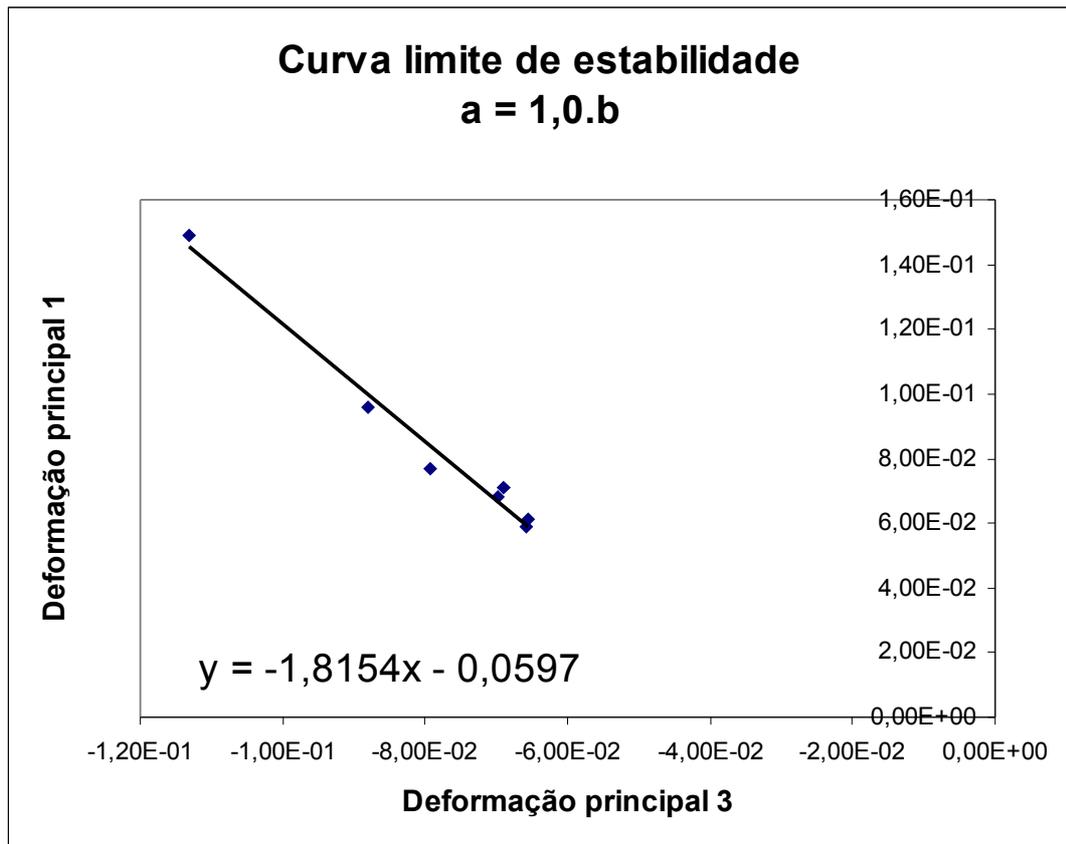


Figura 7.25 Curva limite para a = b

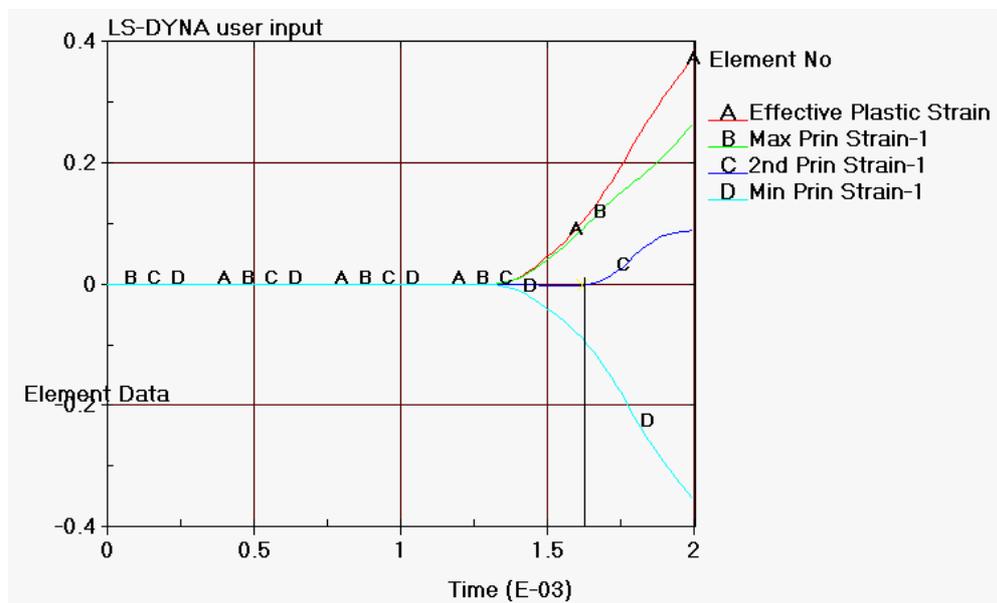


Figura 7.26 Histórico de deformações principais

7.4.2 Resultados para o Modelo 2 ($a > b$)

Para a configuração do modelo 2 foram utilizadas as relações:

- i. $a = 1,1.b$

ii. $a = 1,2.b$

iii. $a = 1,3.b$

Os resultados das curvas limite são mostrados nas Figuras 7.27 a 7.29, respectivamente.

Para este conjunto de resultados foi observado que a partir do caso $a = 1,3.b$ a combinação de um carregamento alto de tração e baixo de compressão conduziram a um modo diferente de flambagem, com mais de um ponto de instabilidade simultâneo. Estes pontos foram desconsiderados na construção dos diagramas limite.

Os resultados das Figuras 7.27 e 7.28 apresentam praticamente a mesma reta interpolando os pontos. O resultado da Figura 7.29 apresenta uma inclinação diferente, mas este modelo teve os primeiros pontos descaracterizados por apresentarem outro modo de flambagem, como foi comentado anteriormente.

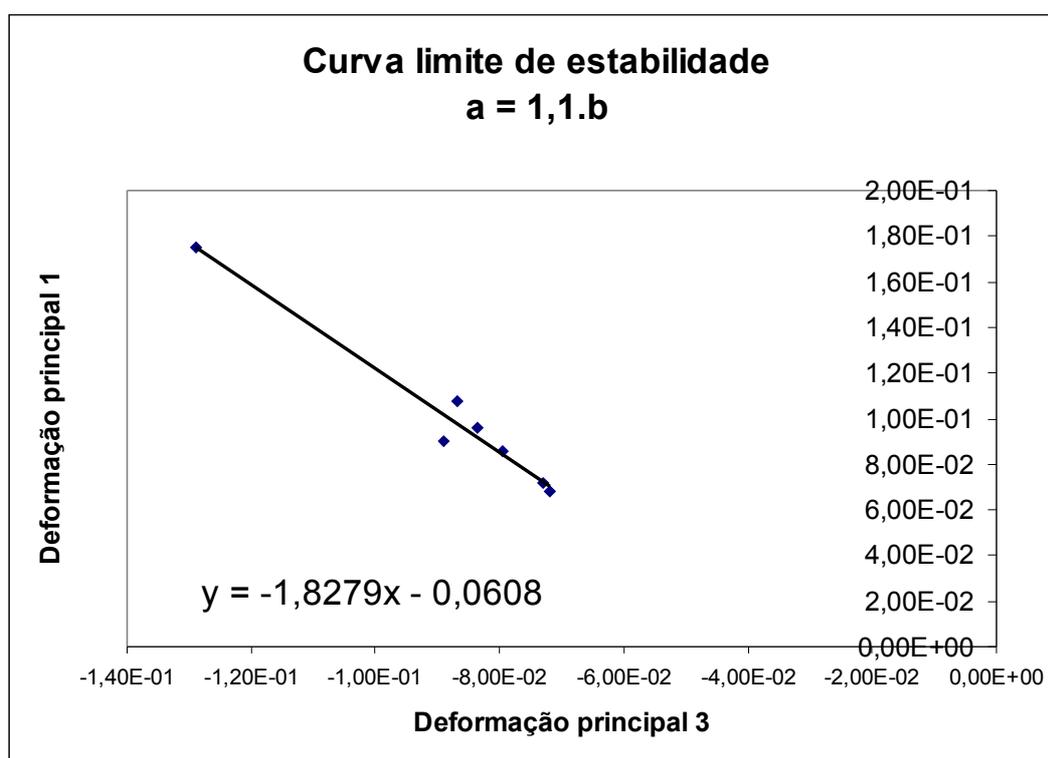


Figura 7.27 Curva limite para $a = 1,1.b$

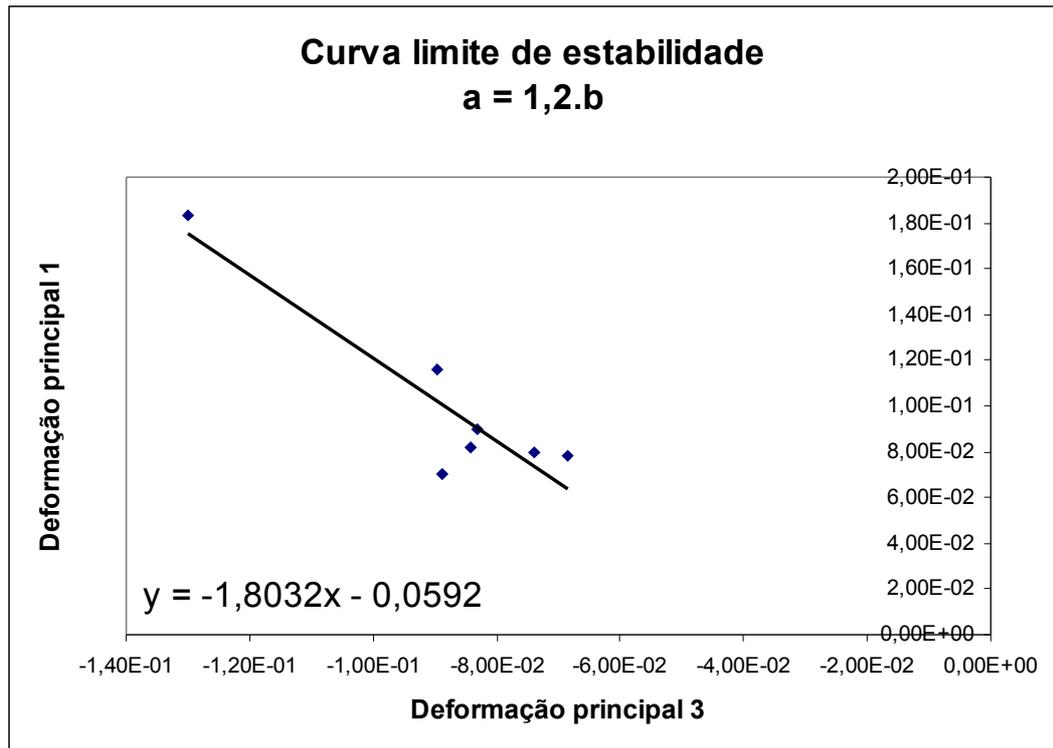


Figura 7.28 Curva limite para a = 1,2.b

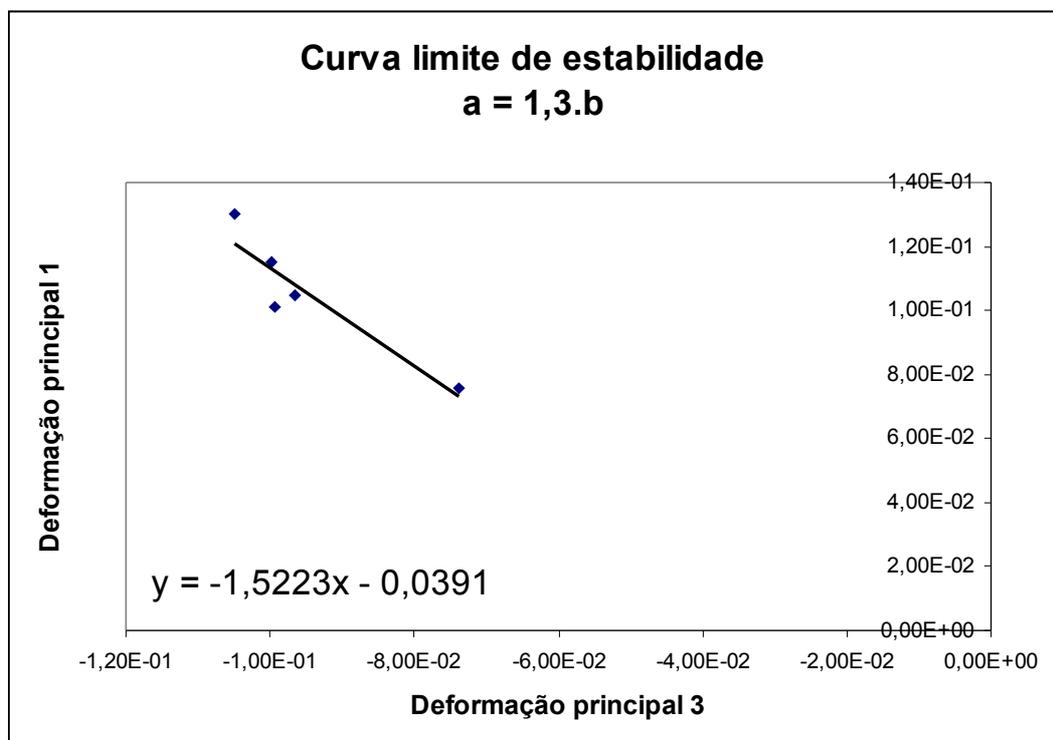


Figura 7.29 Curva limite para a = 1,3.b

7.4.3 Resultados para o Modelo 3 ($a < b$)

Para a configuração do modelo 3 foram utilizadas as relações:

- i.* $b = 1,1.a$
- ii.* $b = 1,3.a$
- iii.* $b = 1,4.a$

Os resultados das curvas limite são mostrados nas Figuras 7.30 a 7.32, respectivamente.

Os modelos para b igual a $1,1.a$ e $1,4.a$ apresentaram resultados muito similares, resultando em aproximadamente a mesma curva.

Quando se utiliza uma aproximação polinomial de segunda ordem as situações *i.* e *ii.* apresentam uma semelhança muito maior.

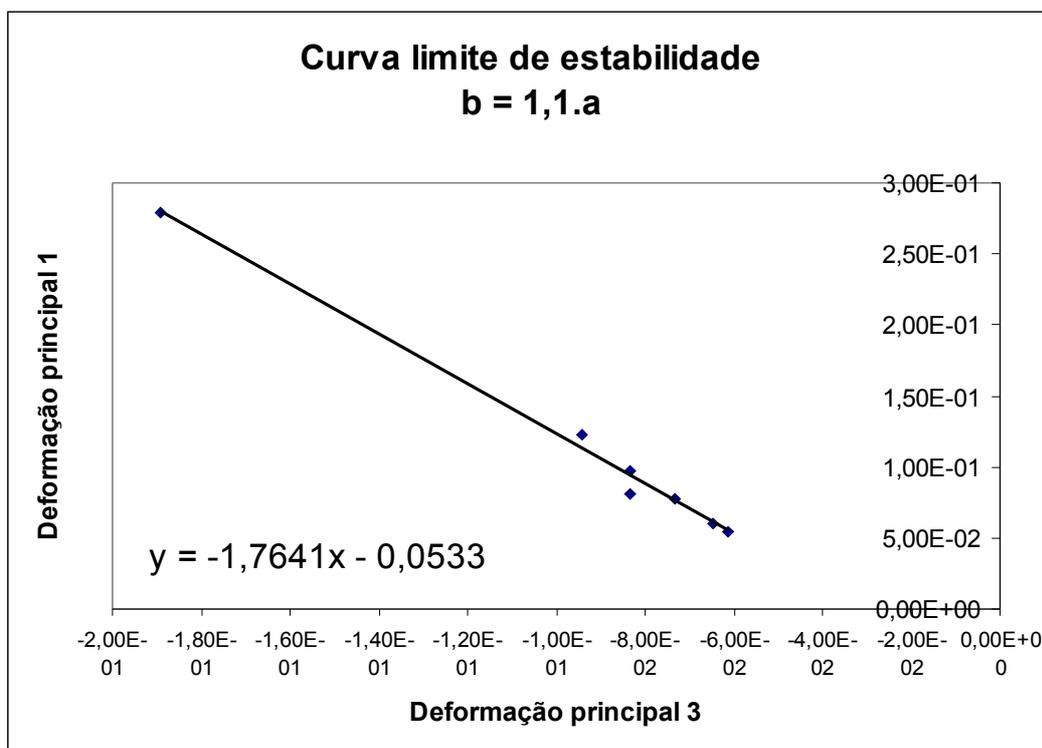


Figura 7.30 Curva limite para $b = 1,1.a$

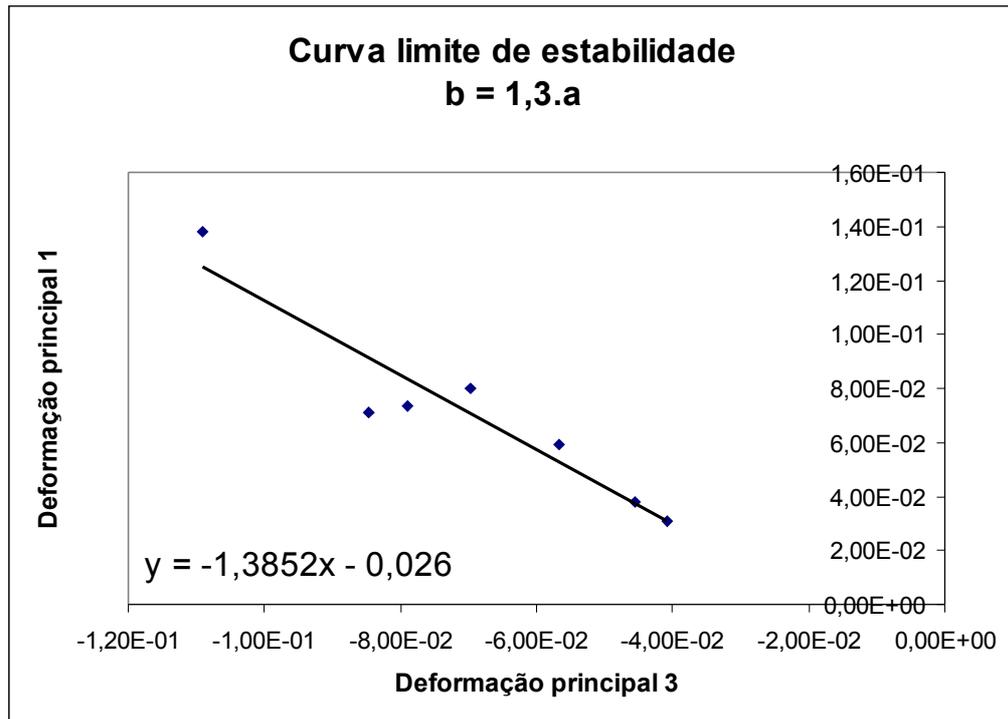


Figura 7.31 Curva limite para b = 1,3.a

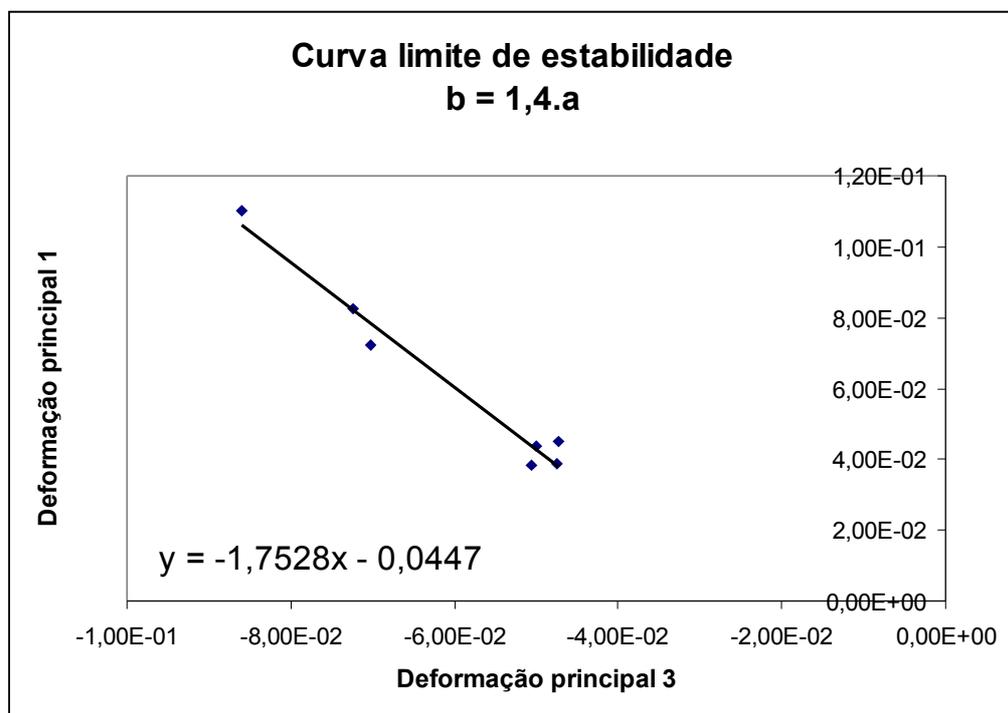


Figura 7.32 Curva limite para b = 1,4.a

7.5 Implementação do Coeficiente NH

7.5.1 Testes da Implementação

Conforme detalhado anteriormente, a extensão dos resultados para

modelos maiores e com um estado de carregamento mais complexo (difícil de monitorar) que utilizam uma grande quantidade de elementos, faz com que a comparação de resultados para verificação de pontos críticos seja computacionalmente custosa.

Para acelerar este procedimento, foi proposta a implementação do coeficiente NH com o objetivo de fornecer um critério de pontos candidatos ao monitoramento do estado de tensões/deformações. O procedimento de implementação foi descrito no capítulo anterior, e foi realizado junto ao programa LS-DYNA®.

Inicialmente foram feitos uma série de testes para verificar o funcionamento do coeficiente. Foram propostos casos básicos onde o comportamento do coeficiente é conhecido e foi feita a modelagem e acompanhamento de sua variação ao longo do tempo de simulação.

O primeiro caso estudado foi uma placa sendo tracionada. Como não existe o componente responsável pelo giro, apenas um componente de deformação, a tendência do coeficiente é permanecer com valor igual a um, a menos de instabilidades numéricas inerentes ao programa, conforme o esperado.

A seguir foi estudado o caso da mesma chapa estar tracionada e começar a sofrer um giro. Quando inicia-se o estágio onde há predominância do giro, o comportamento previsto para o coeficiente NH é a tendência para os valores de +1 ou -1. O sinal é estabelecido pela predominância de um carregamento principal de tração (+) ou compressão (-). Desta forma, para o segundo caso proposto, o valor esperado foi próximo a +1.

Os resultados destes dois testes foram satisfatórios, com leves alterações no valor do coeficiente, mas não no sinal, que permaneceu dentro do esperado.

O terceiro caso proposto envolve o teste de uma placa sob carregamento de compressão que passa a sofrer uma rotação. Como o programa leva em consideração os efeitos de massa, foi necessário acrescentar ao modelo uma rigidez adicional para que a placa não sofresse um dobramento ao se aplicar o carregamento responsável pela rotação (que ocorre devido à pouca espessura da placa). Desta forma, o modelo adotado foi o de uma estrutura formada por duas placas perpendiculares entre si pela linha de centro, mostrada na Figura 7.33.

Neste exemplo tem-se o estado predominante de compressão acompanhado de um giro, esperando-se, então, uma tendência do coeficiente NH a ter um valor de -1.

Em todos os modelos foi feita a análise com interesse no regime plástico, pois o objeto de estudo é a instabilidade de enrugamento que ocorre neste regime.

A Figura 7.33 mostra o modelo de elementos finitos e indica alguns pontos onde foi avaliado o coeficiente NH. A seguir, nas Figuras 7.34a e 7.34b são mostrados os históricos do coeficiente para os elementos indicados. Verifica-se que o resultado apresenta uma oscilação em torno do ponto esperado como resultado, mas este comportamento é considerado normal devido ao método numérico empregado.

Nestes modelos, foi aplicada uma tensão de compressão suficiente para atingir-se o regime plástico no tempo de 0 a 0.1 (eixo das abscissas). A partir de então a tensão foi mantida constante enquanto o conjunto todo sofria uma rotação em torno da linha indicada no canto inferior esquerdo da Figura 7.33.

O comportamento do coeficiente NH do ponto 0.1 até 0.2 foi predominantemente negativo conforme o esperado.

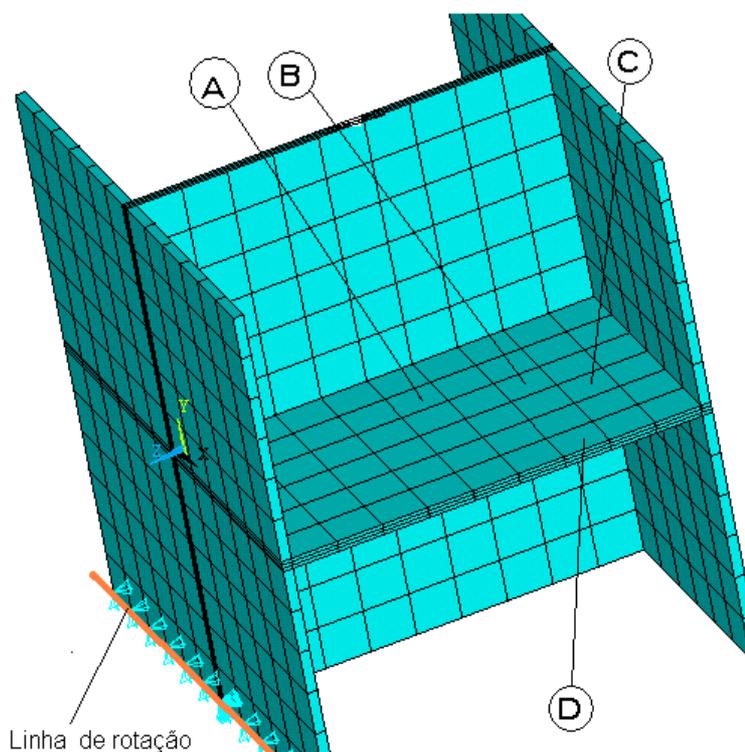
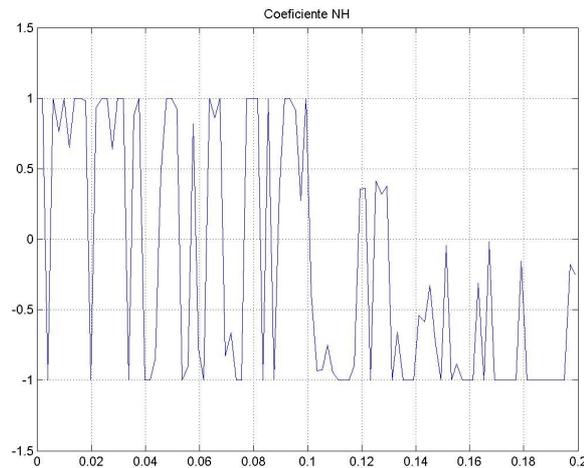
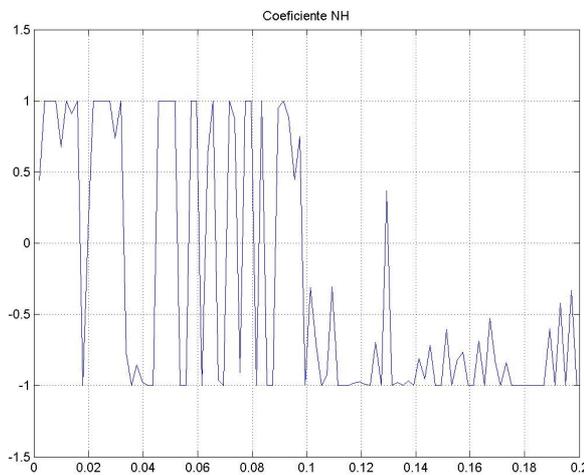


Figura 7.33 Modelo EF utilizado para os testes do coeficiente NH



(a) Elemento B



(b) Elemento C

Figura 7.34 Coeficiente NH nos pontos B e C em função do tempo de simulação

7.5.2 Aplicação ao Ensaio Yoshida

Uma vez testado o comportamento do coeficiente, foi feita a aplicação em um caso conhecido mas de maior complexidade, o ensaio Yoshida. O histórico no tempo do coeficiente foi avaliado nos elementos em uma linha do centro do modelo, seguindo pelo eixo x abrangendo a região em que ocorre deformação plástica. A partir de uma certa coordenada o comportamento das bordas do CDP nunca é plástico, e portanto não foi analisado.

A Figura 7.35 mostra um quarto do modelo do ensaio Yoshida, e os gradientes mostram o estado final de deformação plástica. A região considerada foram os elementos onde existe gradiente de deformação plástica que estão ressaltados com uma linha mais escura. Nesta figura, a escala foi alterada, e os elementos que estão fora desta escala estão representados pelo

gradiente de cor vermelha (limite superior da escala).

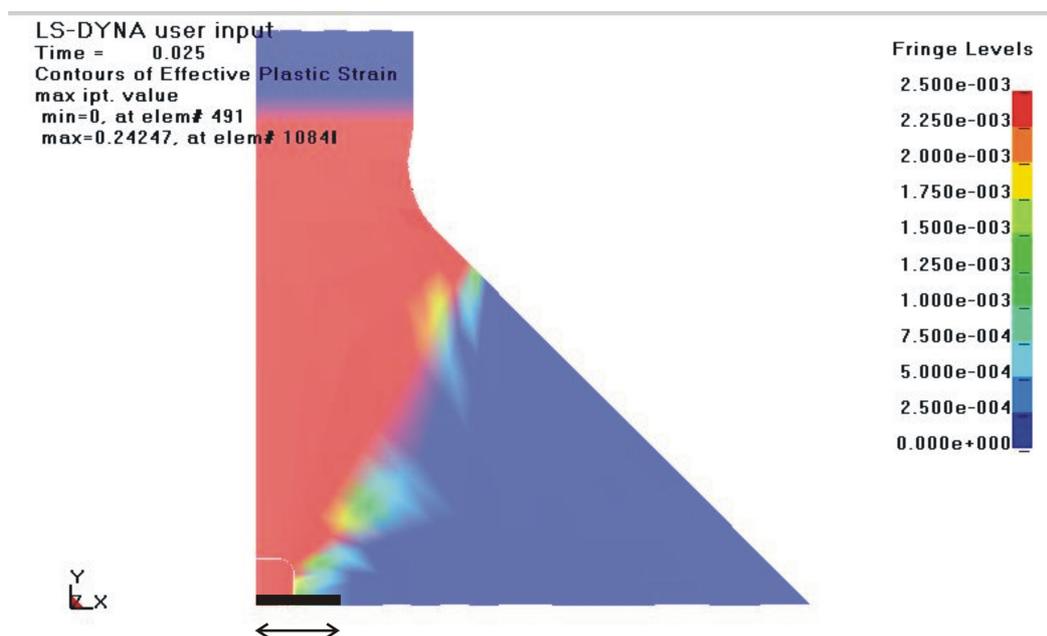


Figura 7.35 Linha de elementos considerada no levantamento do coeficiente NH

A Figura 7.36 mostra os deslocamentos na direção z do elemento central do modelo, observando-se que a instabilidade plástica ocorre próxima do tempo 0,02s. O resultado esperado é que próximo a este instante de tempo o comportamento do coeficiente NH tenda ao valor de -1, indicando a predominância de um estado de tensões compressivo, acompanhado de uma tendência ao giro do elemento.

As Figuras 7.37 a 7.44 mostram os resultados para elementos na região indicada, fornecidos em função do tempo. A Figura 7.37 corresponde ao elemento no centro do CDP e a Figura 7.45 ao elemento na borda da região com deformação plástica.

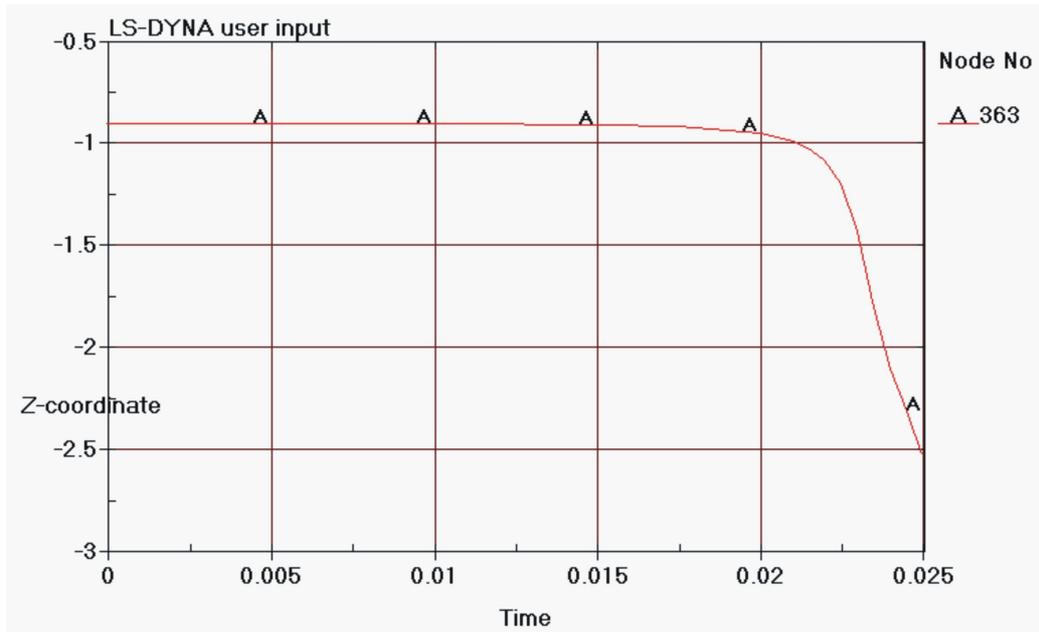


Figura 7.36 Deslocamento do em z do elemento central em função do tempo

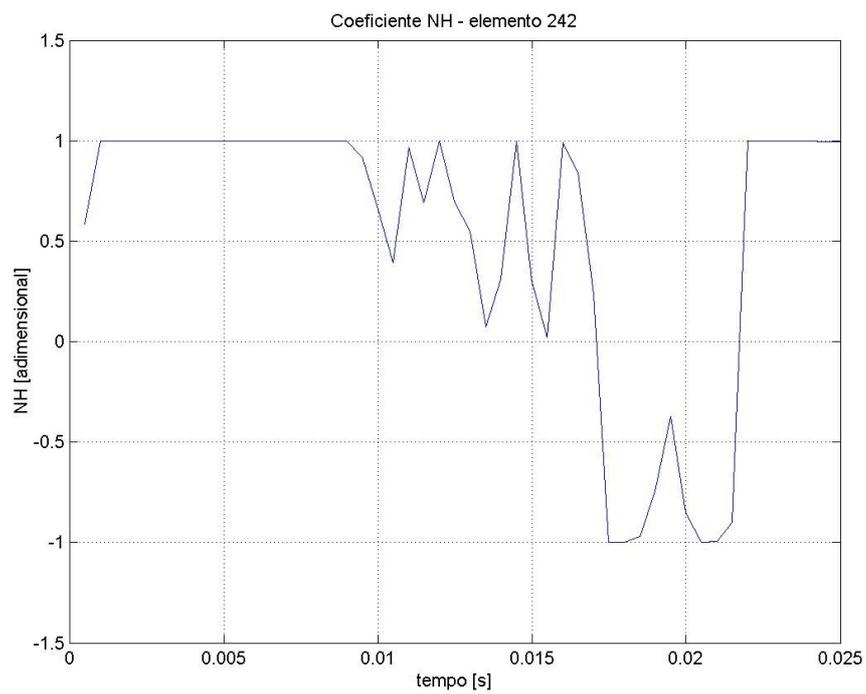


Figura 7.37 Coeficiente NH – ponto 1

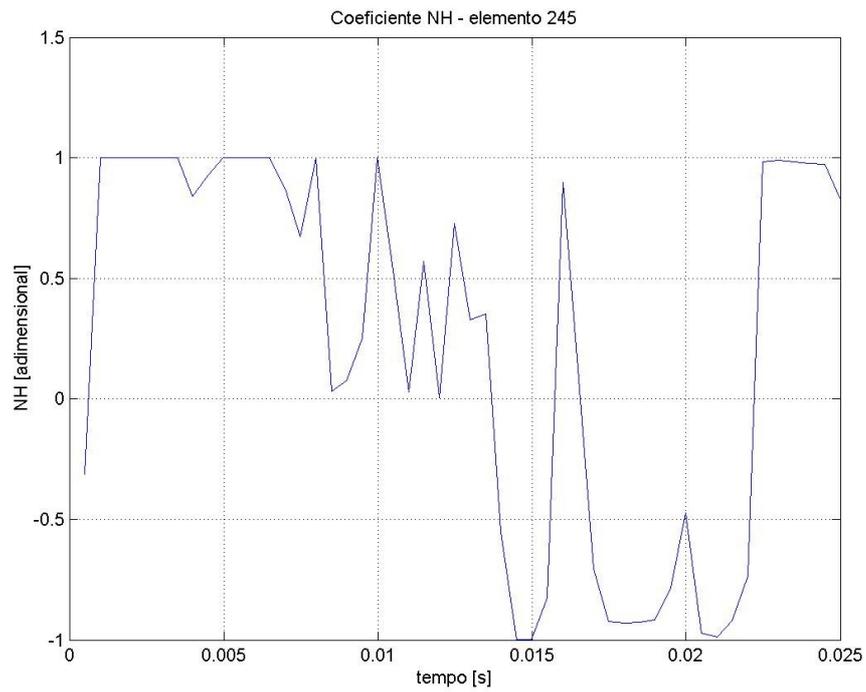


Figura 7.38 Coeficiente NH – ponto 2

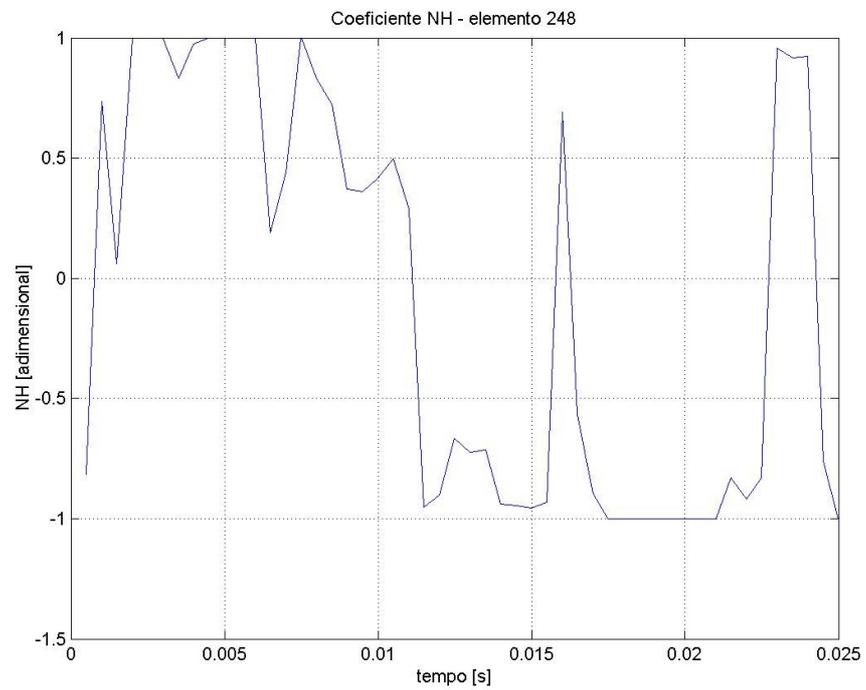


Figura 7.39 Coeficiente NH – ponto 3

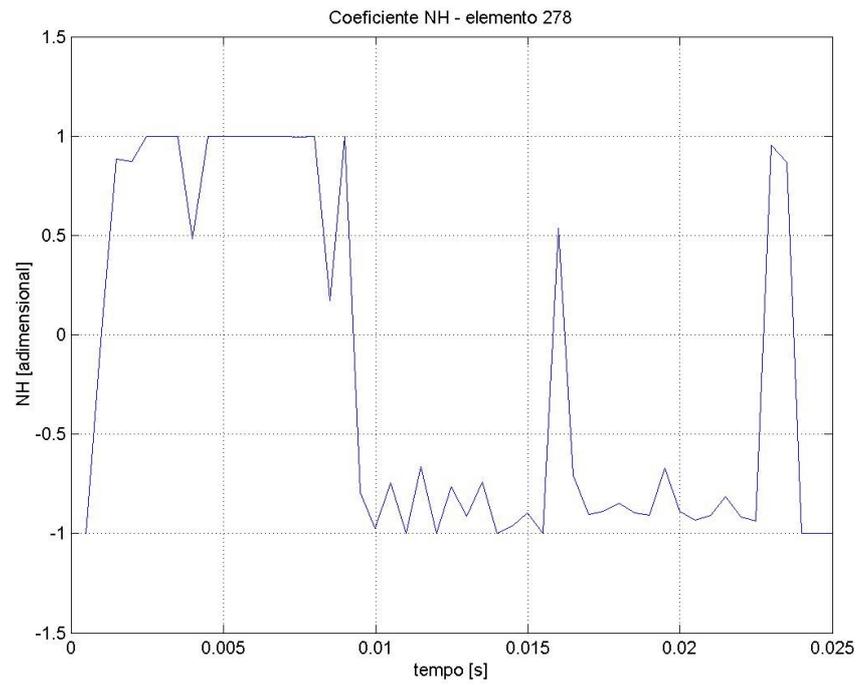


Figura 7.40 Coeficiente NH – ponto 4

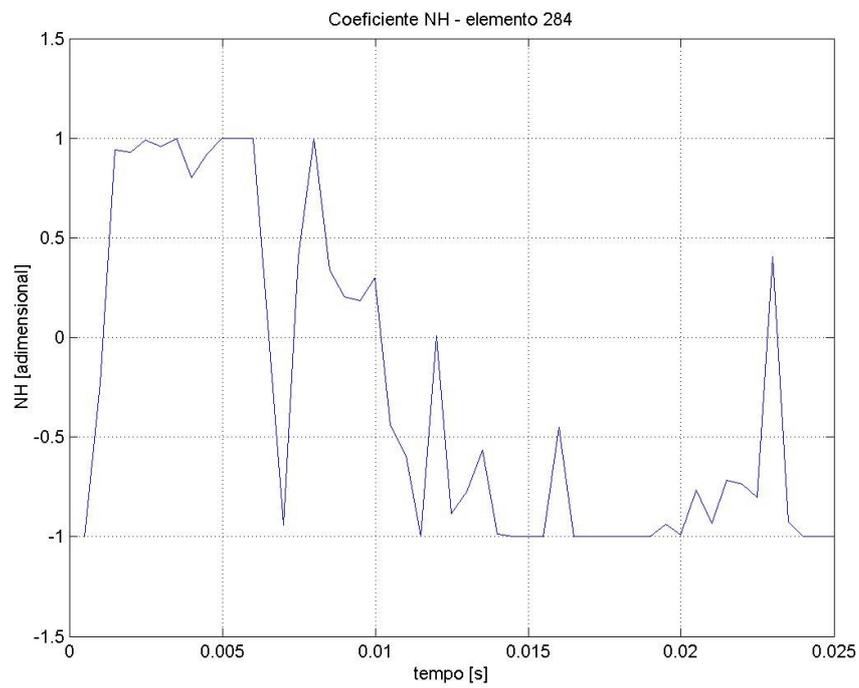


Figura 7.41 Coeficiente NH – ponto 5

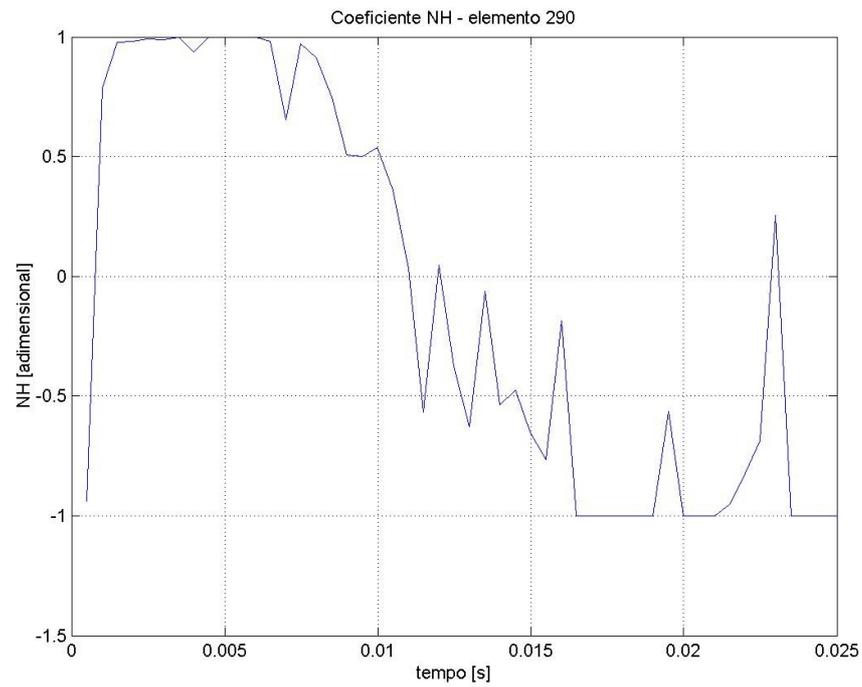


Figura 7.42 Coeficiente NH – ponto 6

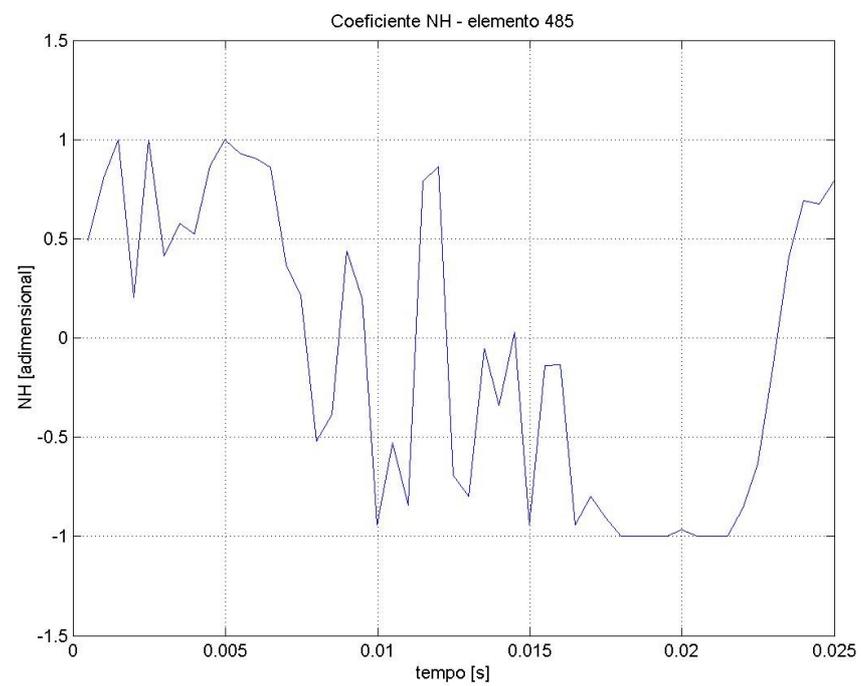


Figura 7.43 Coeficiente NH – ponto 7

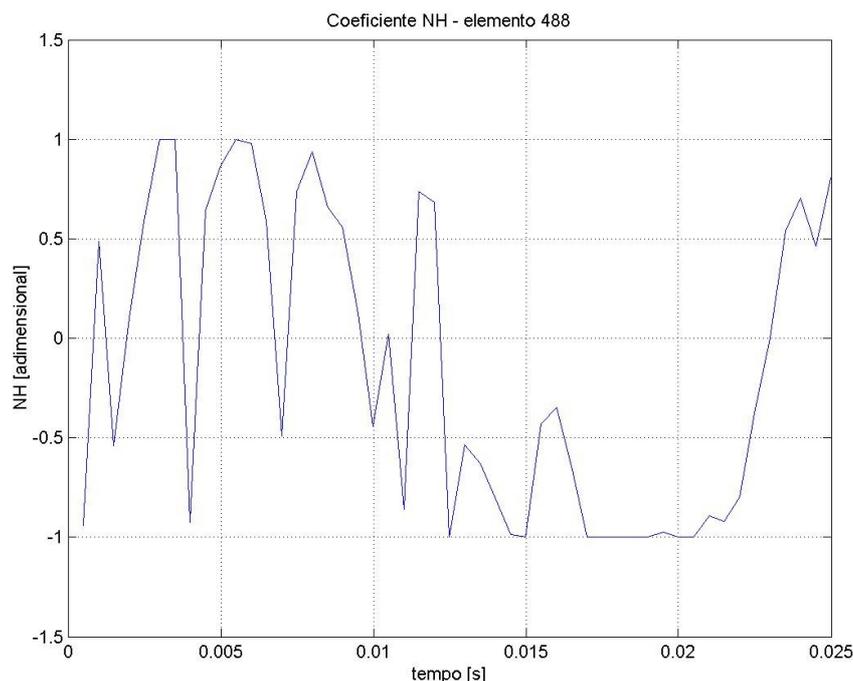


Figura 7.44 Coeficiente NH – ponto 8

Verifica-se na análise destes resultados que o coeficiente sofre uma oscilação grande e embora no ponto de instabilidade o sinal do coeficiente seja negativo, na maioria dos casos isto ocorre bem antes do instante de início da flambagem.

Deve-se lembrar que a tendência do coeficiente é de, em caso de predominância do efeito de rotação, tender a +1 ou -1, estando os valores negativos associados a estados compressivos. No caso aplicado, o estado de tensões é uma combinação de um carregamento de tração em uma direção e um carregamento de compressão em outra. Isto pode fornecer uma explicação para oscilação apresentada ao longo do tempo da simulação.

De maneira geral, o coeficiente comporta-se com uma predominância do valor positivo no início da simulação, passando em seguida para o valor negativo quando o modelo já possui um estado de compressão mais acentuado. Pela característica dos gráficos, conclui-se que o coeficiente deva ser analisado de modo contínuo, e não seu valor isolado em um instante de tempo. Considerando-se a variação ao longo do tempo pode-se analisar a tendência predominante do coeficiente, que mostrou-se uma variável mais interessante para o presente trabalho.

7.6 Considerações Sobre o Contato no Enrugamento de Peças Conformadas

O que foi discutido até agora é válido para uma região livre de contato. Em um processo de estampagem como o apresentado na Figura 7.45, a região da parede da peça formada não apresenta contato com as superfícies do punção e da matriz.

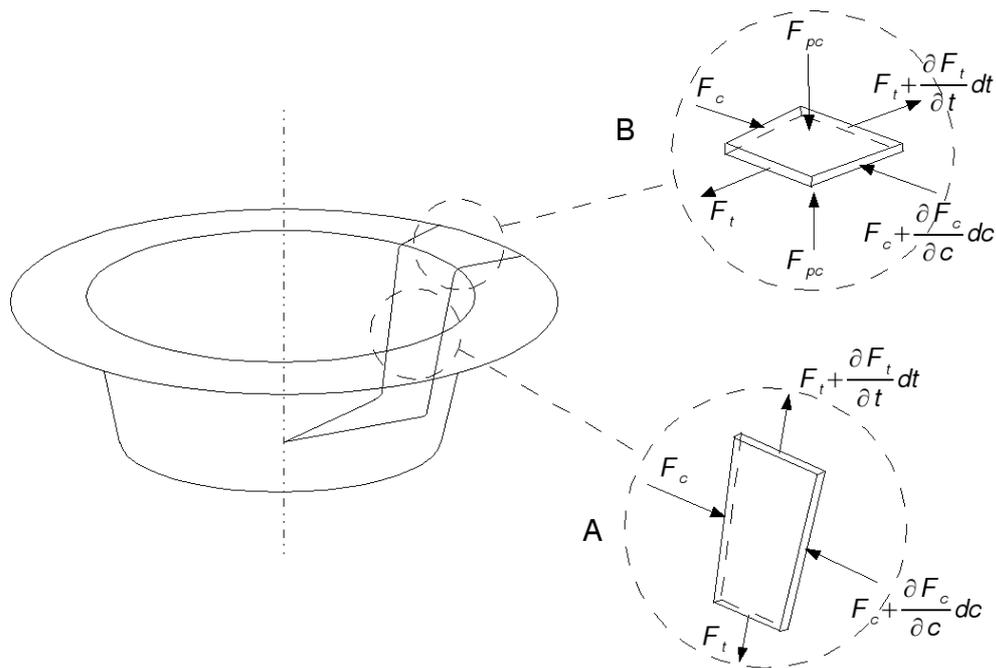


Figura 7.45 Condições de contato em uma estampagem de um copo: A – região sem contato; B – região com contato matriz/chapa chapa/prensa-chapas.

Este tópico apresenta considerações sobre a região da chapa localizada entre a matriz e o prensa-chapas em uma estampagem. Conforme visto anteriormente, uma das maneiras de se evitar o enrugamento em chapas sendo estampadas consiste no controle da força exercida pelo prensa-chapas. Desta forma, aplica-se uma restrição lateral, que impede a formação da instabilidade.

Para tentar vencer esta restrição, aparecem os modos seguintes de instabilidade. Assim, em vez de termos o primeiro modo, o sistema tende a apresentar como característica modos mais elevados, com um número maior de pontos de inflexão. Com este número maior de pontos, tende a existir um número maior de pontos onde a força tende a atuar no sentido de levantar o prensa-chapas. A Figura 7.46 ajuda a entender melhor esta idéia. Na Figura

7.46a está representada a região da chapa confinada entre a matriz e o prensa-chapas. Em 7.46b temos o que seria o primeiro modo de enrugamento. A região de contato com a matriz e com prensa-chapas não consegue fazer força o suficiente para levantar o prensa chapas. Com o aumento da força de compressão em um passo seguinte, aparece a tendência de aparecer o segundo modo de enrugamento, conforme a Figura 7.46c. Novamente, caso esta configuração não consiga vencer a força do prensa-chapas, aparece um novo modo de enrugamento, e assim sucessivamente, conforme mostrado em 7.46d. Existe um limite até onde pode ser aumentada a força do prensa-chapas em relação à profundidade de estampagem a ser obtida. Um estudo mais aprofundado deste processo pode ser bastante útil no projeto de estampos e fica como a principal sugestão de trabalho a ser desenvolvido futuramente. Tal estudo permitiria, por exemplo, calcular uma força de prensa-chapas variável ao longo do processo, otimizando o fluxo de material e permitindo um maior aproveitamento quanto à profundidade obtida em cada passo do processo.

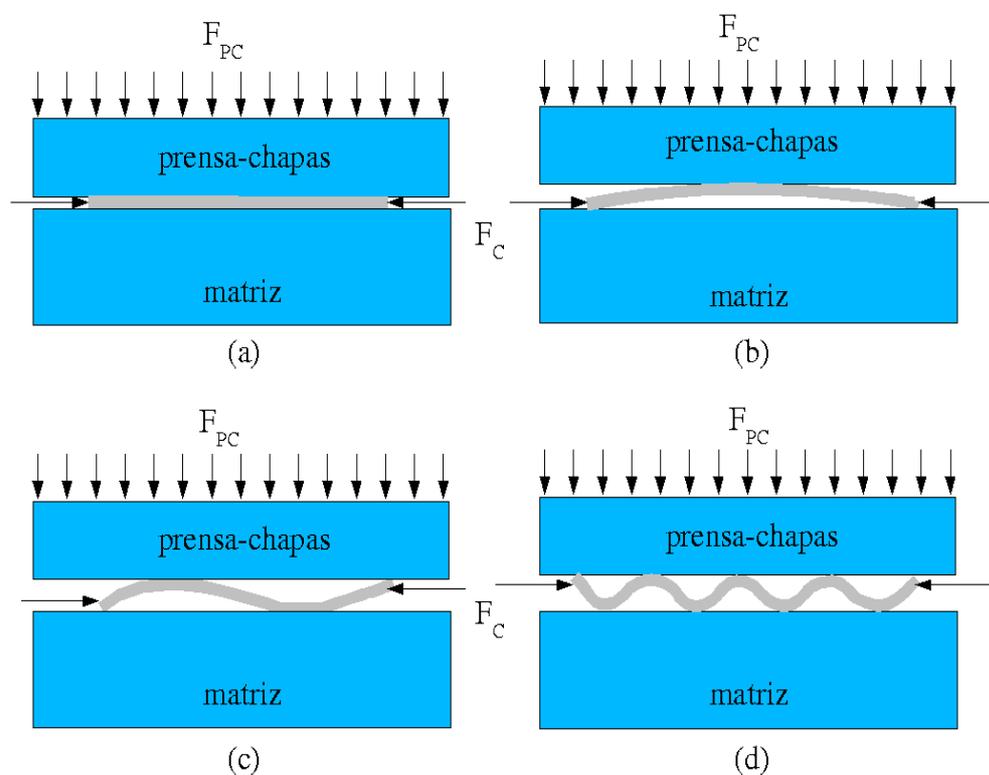


Figura 7.46 Modos de enrugamento: (a) Situação sem enrugamento; (b) Primeiro modo de enrugamento; (c) Segundo modo de enrugamento; (d) Sétimo modo de enrugamento.

8 Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros

8.1 Conclusões

Foi possível a obtenção de curvas limite de estabilidade quanto a flambagem plástica. O procedimento apresentado mostrou-se adequado dentro das etapas em que o foco foi concentrado. As simulações numéricas foram confrontadas e calibradas com ensaios experimentais para fornecer a base para um levantamento numérico de pontos adicionais da curva limite. Os ensaios podem ser melhorados, trazendo mais informações para as análises numéricas. Sugestões neste sentido são feitas no próximo tópico.

Foram sugeridas configurações alternativas para o modelo numérico de obtenção das curvas, que podem ser adaptados conforme as condições do problema a que se pretende aplicar os resultados.

Como contribuições adicionais também foi estudado e implementado o coeficiente NH, levando o autor a um estudo mais aprofundado da mecânica computacional, para conseguir utilizar as ferramentas disponíveis e implementar as rotinas em conjunto com um programa comercial de elementos finitos.

O coeficiente NH mostrou-se uma ferramenta com certas limitações, apresentando um comportamento instável em algumas situações. No entanto, a análise do histórico do coeficiente ao longo da simulação e não apenas de seu valor em um determinado instante pode auxiliar na determinação de pontos onde pode ocorrer a instabilidade.

Na modelagem do ensaio de Yoshida, foram levantadas várias questões sobre a interpretação de resultados, bem como testados programas de elementos finitos com formulações e algoritmos de soluções diferentes e analisados em função do tipo de problema estudado neste trabalho.

O LS-DYNA mostrou-se uma solução mais adequada no contexto do trabalho devido a um comportamento mais robusto na modelagem dos parâmetros do defeito induzido, permitindo maior flexibilidade em sua

manipulação. Este programa também mostrou-se mais adequado em tempo de processamento em casos onde as condições de carregamento são dadas por forças (ou pressões) ao invés de deslocamentos prescritos.

8.2 Sugestões de Trabalhos Futuros

O trabalho apresentado é o início de um estudo mais aprofundado sobre o tema envolvendo o enrugamento em chapas metálicas. Como continuação para a linha de pesquisa, sugerem-se alguns pontos, apresentados a seguir:

- Estudo de outros conjuntos de carregamento e condições de contorno capazes de fornecer mais informações sobre estados de deformações não obtidos neste trabalho.
- Investigação da influência do contato no modo de flambagem no ensaio YBT; a pressão com que o contato é exercido pode determinar um melhor conhecimento da força do prensa-chapas necessária para evitar a instabilidade; devido à grande não linearidade presente neste tipo de análise, considera-se este um projeto de grande dificuldade, mas que pode estender o projeto desenvolvido a processos de conformação de chapas de um ponto de vista mais geral.
- Prosseguimento dos ensaios experimentais de modo a melhorar o sistema de aquisição de dados durante os ensaios, aumentando a confiabilidade das medidas; os deslocamentos podem ser monitorados de forma contínua através de um sistema de aquisição acoplado a um LVDT, e devidamente sincronizados com leituras de carregamento e aquisição de imagens. Novas geometrias para os CDPs podem ser trabalhadas para melhorar as informações de entrada das análises numéricas.
- Extensão da proposta a outros tipos de defeitos induzidos na chapa que não o defeito geométrico, como por exemplo o estudo da influência de tensões residuais, induzidas de maneira térmica ou mecânica, e verificação de sua influência no ponto de flambagem.

9 Referências Bibliográficas

AGELET DE SARACIBAR, C.; OÑATE, E. (1991) *Modelado numérico de procesos de conformado de láminas metálicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. /Monografía no. 8/

AHMED, M.; HASHMI, M.S.J. (1999). Three dimensional finite element simulation of bulge forming. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED MATERIALS AND PROCESSING TECHNOLOGIES 99 and 16th ANNUAL CONFERENCE OF THE IRISH MANUFACTURING COMMITTEE, Dublin, Ireland, 1999. Dublin, Dublin City University. p.153-160.

AL-QURESHI, H.A. (1985a). *Conformação de chapas metálicas*. Apostila. São José dos Campos, ITA.

AL-QURESHI, H.A. (1985b). *Formability of sheet metals*. Apostila. São José dos Campos, ITA.

AL-QURESHI, H.A. (1991). *Processos e mecanismos da conformação dos metais*. Apostila. São José dos Campos, ITA.

ALTAN, T.; OH, S.I.; GEGEL, H.L. (1983). *Metal forming: fundamentals and application*. Metals Park, American Society for Metals – ASM. 353p.

AMÉZIANNE-HASSANI, H.; NEALE, K.W. (1991). On the analysis of sheet metal wrinkling. *International Journal of Mechanical Sciences*. v.33. n.1 p.13-30.

BATHE, K.J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall. Upper Saddle River. 1037p.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W.K.; MORAN, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Willey & Sons. Chinchester. 650p.

BONET, J.; WOOD, R.D. (2000). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York, Cambridge University Press. 248p.

CAO, J.; BOYCE, M.C. (1997). A predictive tool for delaying wrinkling and tearing failures in sheet metal forming. *Journal of Engineering Materials and Technology*. v.119. n.4. p.354-365. Oct.

CAO, J.; BOYCE, M.C. (1997). Wrinkling behaviour of rectangular plates under lateral constraint. *International Journal of Solids and Structures*. v.34. n.2. p.153-176. Jan.

CAO, J.; WANG, X. (2000). An analytical model for plate wrinkling under tri-axial loading and its application. *International Journal of Mechanical Sciences*. v.42. n.3. p.617-633. Mar.

CHEN, W.F.; ZHANG, H. (1991). *Structural plasticity*. Springer-Verlag. New York. 250p.

CRISFIELD, M.A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures – Volume 1: Essentials*. John Willey & Sons. Chichester. 345p.

CRISFIELD, M.A. (2000). *Non-linear finite element analysis of solids and structures – Volume 2: Advanced topics*. John Willey & Sons. Chichester. 494p.

DURBAN, D. (1988). Plastic buckling of rectangular plates under biaxial loading. In: *Buckling of Structures: theory and experiments*. Elsevier, Amsterdam. p.183-194.

EVANGELISTA, S.H. (2000). *Diagramas de limite de conformação aplicados à análise por elementos finitos de um processo de estampagem de chapas metálicas*. São Carlos. 135p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

EVANGELISTA, S.H.; LIRANI, J.; AL-QURESHI, H.A. (2002). Implementing a modified Marciniak-Kuczynski model using the finite element method for the simulation of sheet metal deep drawing. *Journal of Materials Processing Technology*. v.130-131, p.135-144. Dec.

EVANGELISTA, S.H.; LIRANI, J.; AL-QURESHI, H.A. (2003). An investigation of in-plane biaxial tension test of metal sheet. In: 10th INTERNATIONAL CONFERENCE ON SHEET METAL – SHEMET2003, Belfast, 2003. *Proceedings*. Belfast, University of Ulster. p.421-428.

FERNANDEZ, F.F.; AL-QURESHI, H.A. (1999). Desenvolvimento de novo teste para ensaio de estiramento “in-plane” de chapas metálicas. In: II CONFERÊNCIA NACIONAL DE CONFORMAÇÃO DE CHAPAS, Porto Alegre, 1999. *Anais*. Porto Alegre, UFRGS. p.97-106.

HALLQUIST, J.O. (1991). *LS-Dyna3D theoretical manual*. LSTC. Livermore.

HILL, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London A*. p.281-297.

HILL, R. (1950a). *The Mathematical Theory of Plasticity*. London. Oxford University Press.

HILL, R. (1950b). The theory of plane plastic strain for anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London A*. p.428-437.

HILL, R. (1952). On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.1, p.19-30.

HILL, R. (1956a). On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.4. p.247-255.

HILL, R. (1956b). On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid II. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.5. p.1-8.

HILL, R. (1957a). On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid III. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.5. p.153-161.

HILL, R. (1957b). On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid IV. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.5. p.302-307.

HILL, R. (1957c). On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.5. p.229-241.

HILL, R. (1957d). Stability of rigid-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.6. p.1-8.

HILL, R (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v.6, p.236-249.

HINTON, E.; OWEN, D.R.J. (1977). *Finite element programming*. Academic Press. London. 305p.

HOSFORD, W.F. (1996). Overview of tensile testing. In: *Tensile testing*,

HUEBNER, K.H.; THORNTON, E.A.; BYROM, T.G. (1995). *The finite element method for engineers*. New York. John Wiley & Sons.

HUGHES, T.J.R.; COHEN, M.; HAROUN, M. (1978). Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and Design*. v.46, p.203-222.

HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K. (1981). Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v.26, n.3, p.331-362. Jun.

HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K. (1981). Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. Two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v.27, n.2, p.167-181. Jul.

HUTCHINSON, J.W. (1974). Plastic buckling. In: ADVANCES IN APPLIED MECHANICS. v.14. New York, Academic Press. p.67-144.

HUTCHINSON, J.W.; KOITER, W.T. (1970). Post buckling theory. *Applied Mechanics Reviews*. v.23. n.12. Dec.

JALINIER, J.M.; HAYASHI, H.; SHIBASAKI, O.; YOSHIDA, K. (1982). Analysis of surface deflection by means of Yoshida buckling test. *Scientific Paper of the Institute of Physical and Chemical Research*. v.76. n.3. p.75-82. Sep.

JOHNSON, W.; MELLOR, P.B. (1962). *Plasticity for mechanical engineers*. London. Van Nostrand Company. 412p.

KHAN, A.S.; HUANG, S. (1995). *Continuum theory of plasticity*. John Willey & Sons. New York. 421p.

KIM, J.B.; YANG, D.Y.; YOON, J.W. BARLAT, F. (2000). The effect of plastic anisotropy on compressive instability in sheet metal forming. *International Journal of Plasticity*. v.16. n.6. p.649-676.

KIM, J.B.; YOON, J.W.; YANG, D.Y. (2000) Wrinkling initiation and growth in modified Yoshida buckling test: finite element analysis and experimental comparison. *International Journal of Mechanical Sciences*. v.42.n.9. p.1683-1714. Sep.

KIM, Y.; SON, Y. (2000). Study on wrinkling limit diagram of anisotropic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. v.97. p.88-94.

KOBAYASHI, S.; OH, S.I.; ALTAN, T. (1989). *Metal Forming and the Finite-Element Method*. New York: Oxford University Press. 377p.

LEJEUNE, A.; BOUDEAU, N.; GELIN, J.C. (2002). Prediction of localized wrinkling in metal forming process. In: 5th INTERNATIONAL ESAFORM CONFERENCE ON MATERIAL FORMING, Kraków, 2002. *Proceedings*. Kraków, Akademia Górniczo-Hutnicza. p.547-550.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. (1994). *Mechanics of solid materials*. Avon. Cambridge University Press. 556p.

LIRANI, J. (1985). *Determinação da estabilidade teórica contra trepidação de máquinas ferramentas com auxílio de computador*. São Carlos. 219p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LUBLINER, J. (1990). *Plasticity theory*. New York: Macmillan Publishing Company. 495p.

MAKINOUCI, A. (1996). Sheet metal forming simulation in industry. *Journal of Materials Processing Technology*, v.60, p.19-26. Jun.

MALVERN, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 713p.

MARCINIAK, Z.; DUNCAN, J.L. (1992). *The mechanics of sheet metal forming*. London: Edward Arnold. 168p.

MEINDERS, T. (2000). *Developments in numerical simulations of the real life deep drawing process*. 112p. Ph.D. Thesis, University of Twente, Enschede, Ponsen & Looijen Wageningen.

MENDELSON, A. (1983). *Plasticity: theory and application*. Malabar, Robert E. Krieger Publishing Company. 353p.

MORENO, M.E. (2000). *Desenvolvimento e implementação de metodologia de otimização da geometria do blank em processos de conformação de chapas metálicas*. São Carlos. 88p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MORENO, M.E.; CARVALHO, J.; LIRANI, J.; AL-QURESHI, H.A. (2002). Methodology to obtain the ideal blank shape in deep drawing processes by using the finite element method. In: 5th INTERNATIONAL ESAFORM CONFERENCE ON MATERIAL FORMING, Kraków, 2002. *Proceedings*. Kraków, Akademia Górniczo-Hutnicza. p.543-546.

MORENO, M.E.; CARVALHO, J.; LIRANI, J.; AL-QURESHI, H.A. (2003). Finite element analysis of anisotropic sheet metal deep drawing operation. In: 10th INTERNATIONAL CONFERENCE ON SHEET METAL – SHEMET2003, Belfast, 2003. *Proceedings*. Belfast, University of Ulster. p.551-558.

NAKAMACHI, E.; HUO, T. (1996). Dynamic-explicit elastic plastic finite-element simulation of hemispherical punch-drawing of sheet metal. *Engineering Computations*. v.13. n.2-4. p.327-338.

NEALE, K.W.; TUĞÇU, P. (1990). A numerical analysis of wrinkle formation tendencies in sheet metals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.30. n.8 p.1595-1608. Dec.

NORDLUND, P.; HÄGGBLAD, B. (1997). Prediction of wrinkle tendencies in explicit sheet metal-forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.40, p.4079-4095.

NORDLUND, P. (1998). Adaptivity and wrinkle indication in sheet metal-

forming. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v.161, n.1-2, p.127-143. Aug.

OWEN, D.R. J.; HINTON, E. (1986). *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, Pineridge Press.

PARK, K.; KIM, Y. (1995). The effect of material and process variables on the stamping formability of sheet materials. *Journal of Materials Processing Technology*. v.51. n.1-4. p.64-78. Apr.

PERRY, C.C.; LISSNER, H.R. (1955). *The strain gage primer*. New York. McGraw-Hill. 281p.

RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*. v.15. p.529-551.

SCHULER (1998). *Metal forming handbook*. Berlin. Springer. CD-ROM.

SELMAN, A.; MEINDERS, T.; van der BOOGAARD, A.H.; HUETINK, J. (2002). On adaptive mesh refinement in wrinkling prediction analysis. In: 5th INTERNATIONAL ESAFORM CONFERENCE ON MATERIAL FORMING, Kraków, 2002. *Proceedings*. Kraków, Akademia Górniczo-Hutnicza. p.551-554.

SEMIATIN, S.L.; JONAS, J.J. (1984). *Formability and workability of metals - Plastic instability and flow localization*. Metals Park. American Society for Metals. 299p.

SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). *Computational inelasticity*. Springer-Verlag. New York. 392p.

SPENCER, A.J.M. (1980). *Continuum mechanics*. Hong Kong, Longman Scientific & Technical. 182p.

SZACINSKY, A.M.; THOMSON, P.F. (1991). Comparison of effect of material properties on growth of wrinkles in sheet metal during forming and their removal. *Material Science and Technology*. v.7. n.3. p.224-227. Mar.

TAKEYA, T. (2003). *Análise experimental de estruturas – notas de aula*. São Carlos, EESC-USP. 50p.

TAYLOR, B. (1988). Formability testing of sheet metals. In: METALS Handbook: Forming and forging. Ohio, ASM. v.14, p.877-899.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. (1951). *Theory of Elasticity*. New York. McGraw-Hill. 506p.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. (1961). *Theory of Elastic Stability*. Tokyo. McGraw-Hill Kogakusha. 541p.

TRIANAFYLLIDIS, N.; NEEDLEMAN, A. (1980). An analysis of wrinkling in the Swift cup test. *Journal of Engineering Materials and Technology*. v.102. p.241-248. Jul.

WANG, X.; CAO, J. (2000). On the prediction of side-wall wrinkling in sheet metal forming processes. *Journal of Mechanical Sciences*. v.42. n.12. p.2369-2394. Dec.

YOON, J.W.; YANG, D.Y.; CHUNG, K. (1999). Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v.174. n.1-2. p.23-36.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (2000a). *The finite element method – The basis*. Oxford: Butterworth Heinmann. 689p.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (2000b). *The finite element method – Solid mechanics*. Oxford: Butterworth Heinmann. 459p.

10 Bibliografia

ANSYS (2003). *Ansys commands reference*. Ansys Inc.

ANSYS (2003). *Ansys, Inc. theory reference*. Ansys Inc.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O. (1969). *Applied numerical methods*. New York: John Wiley. 604p.

CEREDA, R.L.D.; MALDONADO, J.C. (1987). *Introdução ao Fortran 77 para microcomputadores*. São Paulo: McGraw-Hill. 211p.

INTEL® (2003). INTEL® Fortran Programmer's Reference. USA: Intel Corporation. 566p.

LS-DYNA Keyword user's manual – version 970. (2003). Livermore: LSTC. 1564p.

PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. (1992). *Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing*. USA: Cambridge University Press.

PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. (1996). *Numerical recipes in Fortran 90: the art of parallel scientific computing*. USA: Cambridge University Press.

Apêndice 1

Procedimento para se Implementar o Coeficiente NH no LS-DYNA ®:

Conforme a dedução do coeficiente NH apresentada no capítulo 5.3.3, são necessários três tensores para o cálculo das integrais:

1. o tensor de tensões σ ;
2. o tensor taxa de tensão $\dot{\sigma}$;
3. o tensor gradiente de velocidade L .

Em um incremento de tempo tipicamente a configuração do corpo em um passo $n + 1$ pode ser escrito como função da configuração no passo n e do comprimento do passo Δt . Considerando-se o início da análise do indicador em um incremento de tempo n , calcula-se o tensor gradiente de velocidade em um tempo intermediário $(n + 1/2)$, obtendo-se então os termos $v_{i,j}^{n+1/2}$ do tensor L .

O procedimento para obtenção do tensor L pode ser implementado de duas maneiras. Para alguns

elementos, o programa LS-DYNA ® fornece o gradiente de deformação F . Desta forma, para se obter a matriz L , dada por:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = v_{i,j} \quad (\text{A1.1})$$

A partir do gradiente de deslocamento F , dado por:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

Pode-se proceder através de:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A1.3})$$

O cálculo da derivada no tempo de \mathbf{F} é feito computando-se a matriz em dois passos consecutivos n e $n+1$:

No passo n tem-se \mathbf{F}^n e Δt^n . Em $n+1$ tem-se \mathbf{F}^{n+1} e Δt^{n+1} . Definindo-se $\Delta t^{n+1/2}$ como:

$$\Delta t^{n+1/2} = \frac{\Delta t^n + \Delta t^{n+1}}{2} \quad (\text{A1.4})$$

Calculam-se \mathbf{F} e sua derivada como sendo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^n \quad (\text{A1.5})$$

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{F}^n) \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} \quad (\text{A1.6})$$

Invertendo-se (A1.5) e utilizando-se (A1.6) obtém-se \mathbf{L} através de (A1.3).

Para elementos onde a matriz \mathbf{F} não é disponibilizada o procedimento de obtenção do gradiente de velocidade é um pouco mais trabalhoso, sendo dado pelo procedimento demonstrado a seguir.

Considere-se um elemento sólido conforme a Figura (A1.1), onde constam os eixos referentes às coordenadas naturais do elemento e a numeração de seus 8 nós. A interpolação geométrica para este elemento pode ser escrita como:

$$x_i = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) x_i^j(t) \quad (\text{A1.7})$$

Onde i refere-se à direção considerada (x , y ou z), j ao nó correspondente e ϕ corresponde à função de forma do elemento considerada no nó j , dada por:

$$\phi_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j) \quad (\text{A1.8})$$

Onde ξ_j , η_j , ζ_j são os valores nodais, conforme a Figura (A1.1) e tem valores de +1 ou -1.

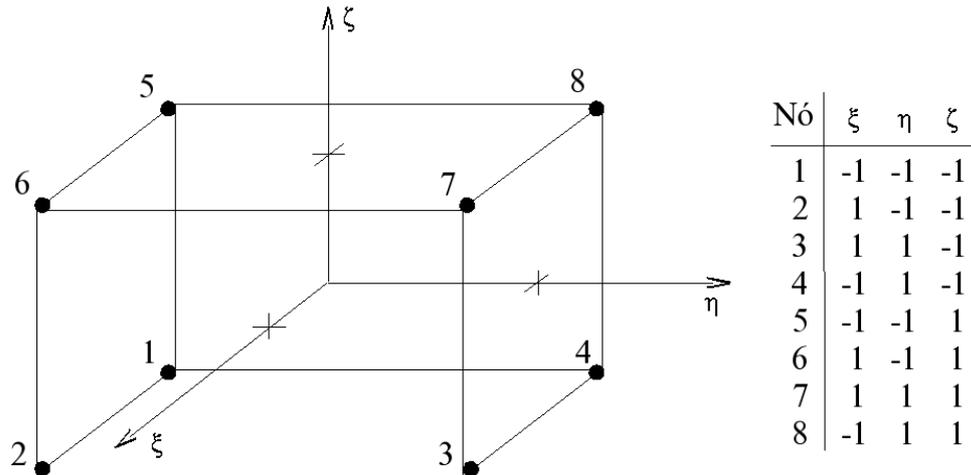


Figura A1.1: Elemento sólido e coordenadas naturais dos nós.

Deseja-se calcular \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \tag{A1.9}$$

Uma vez que as funções de forma não são dependentes do tempo, apenas das variáveis espaciais, e que os deslocamentos nodais são dependentes do tempo mas não das coordenadas espaciais, o procedimento de obtenção de \mathbf{L} é feito, inicialmente derivando-se a equação (A1.7) em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) \dot{x}_i^j(t) \tag{A1.10}$$

Fazendo-se a derivada parcial em relação a \mathbf{x} :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^8 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi_j(\xi, \eta, \zeta) \right) \dot{x}_i^j(t) \tag{A1.11}$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{x}} \tag{A1.12}$$

Onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana. Seus termos podem ser encontrados derivando-se a equação (A1.7) em relação à variável correspondente à posição na matriz.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.13})$$

Invertendo-se (A1.12) encontra-se que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (\text{A1.14})$$

Que, substituindo-se (A1.14) em (A1.11) resulta:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^8 \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_j(\xi, \eta, \zeta) \right) \dot{x}_i^j(t) \quad (\text{A1.15})$$

Através da equação (A1.15) pode-se montar o gradiente de velocidade, ressaltando-se que o procedimento para a derivada temporal do vetor de coordenadas nodais é o mesmo aplicado na equação (A1.6) para se fazer a derivada de \mathbf{F} . Conhecendo-se as coordenadas em dois incrementos consecutivos de tempo, a subtração destes valores define o incremento de deslocamento neste intervalo de tempo. Dividindo-se pelo incremento de tempo médio, obtém-se a derivada dos deslocamentos nodais, ou o vetor de velocidades nodais no instante considerado. Conhecendo-se a função de forma do elemento (e suas derivadas parciais) e calculando-se a matriz Jacobiana (e sua inversa) pode-se obter o gradiente de velocidade, conforme demonstrado na equação (A1.15). Procedimento análogo pode ser utilizado para outros tipos de elementos, como elementos do tipo casca (*shell*) desde que se conheçam as funções de forma do elemento.

Uma vez definido o gradiente de velocidades, determinam-se os tensores taxa de deformação e de giro. Estes são definidos como as partes simétrica e anti-simétrica do gradiente de velocidade. Assim:

$$\mathbf{D}_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{n+1/2} + v_{j,i}^{n+1/2}) \quad (\text{A1.16})$$

$$\mathbf{W}_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{n+1/2} - v_{j,i}^{n+1/2}) \quad (\text{A1.17})$$

A taxa de tensões de Jaumann é calculada como:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2} = \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{D}_{kl}^{n+1/2} \quad (\text{A1.18})$$

Onde \mathbf{C}_{ijkl} tensor constitutivo.

Então as novas tensões podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \left(\dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2} + \sigma_{ik}^n W_{kj}^{n+1/2} + \sigma_{jk}^n W_{ki}^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} \quad (\text{A1.19})$$

Onde $\Delta t^{n+1/2}$ é o mesmo dado em (A1.4)

Assim, podem-se definir os tensores necessários como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^n \quad (\text{A1.20})$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^{n+1/2} - \sigma_{ij}^n}{\Delta t^{n+1/2}} \quad (\text{A1.21})$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^{n+1/2} \quad (\text{A1.22})$$

O custo computacional deve ser o mesmo envolvido no cálculo de forças internas. No entanto o coeficiente não necessita ser calculado em todo incremento de tempo. Pode ser calculado com a mesma frequência da saída de resultados, sendo então o custo computacional muito baixo. Tipicamente esta frequência de saída fica entre 100 e 1000 resultados ao longo do tempo de simulação.

Apêndice 2

Ensaio de Caracterização de Materiais

A seguir são apresentados os resultados dos ensaios de tração e de anisotropia para os materiais aço SAE 1010 e alumínio 7475-O utilizados nos ensaios experimentais deste trabalho. A partir dos valores levantados foram calculados valores médios utilizados nos modelos numéricos.

A Tabela A2.1 apresenta os dados iniciais dos CDPs em aço para o ensaio de tração. w_1, w_2 e w_3 referem-se à largura do CDP, medidas em três pontos diferentes. w_m corresponde ao valor médio. t_1, t_2 e t_3 referem-se à espessura do CDP, também medidas em três pontos diferentes. t_m corresponde ao valor médio. Também apresenta-se na última coluna a orientação em relação à direção de laminação a partir da qual o CDP foi recortado. Os valores estimados a partir dos ensaios, e utilizados para um cálculo médio são apresentados na Tabela A2.2: força máxima, tensão verdadeira máxima, valor da tensão de escoamento, módulo de Young, e os valores para a aproximação da curva de material por uma lei bilinear (módulo tangente) e por uma lei de potências (coeficiente de resistência e expoente de encruamento), para cada direção de orientação dos CDPs (0, 45 e 90 graus).

Tabela A2.1 Dados do ensaio de tração para corpos de prova em aço

ID	Largura [mm]				Espessura [mm]				Orient. [°]
	w_1	w_2	w_3	w_m	t_1	t_2	t_3	t_m	
CP1	12,38	12,43	12,35	12,39	1,07	1,08	1,09	1,08	0
CP2	12,42	12,47	12,42	12,44	1,08	1,08	1,09	1,08	45
CP3	12,46	12,48	12,47	12,47	1,08	1,08	1,1	1,08	90

Tabela A2.2 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em aço

Propriedade	Valor estimado		
	0°	45°	90°
Força máxima [kN]	4,2	4,2	4,2
Tensão máxima [MPa]	316,4	314,4	313,4
Tensão de escoamento [MPa]	243,6	249,1	239,9
Módulo de elasticidade [MPa]	$2,16 \cdot 10^5$	$2,19 \cdot 10^5$	$2,07 \cdot 10^5$
Módulo tangente [MPa]	704	657	712
Coefficiente de resistência [MPa]	521	521	510
Expoente de encruamento	0,185	0,188	0,179

As Figuras A2.1 e A2.2 mostram respectivamente para um dos CDPs, a curva experimental sobreposta à aproximação bilinear e à aproximação por lei de potência.

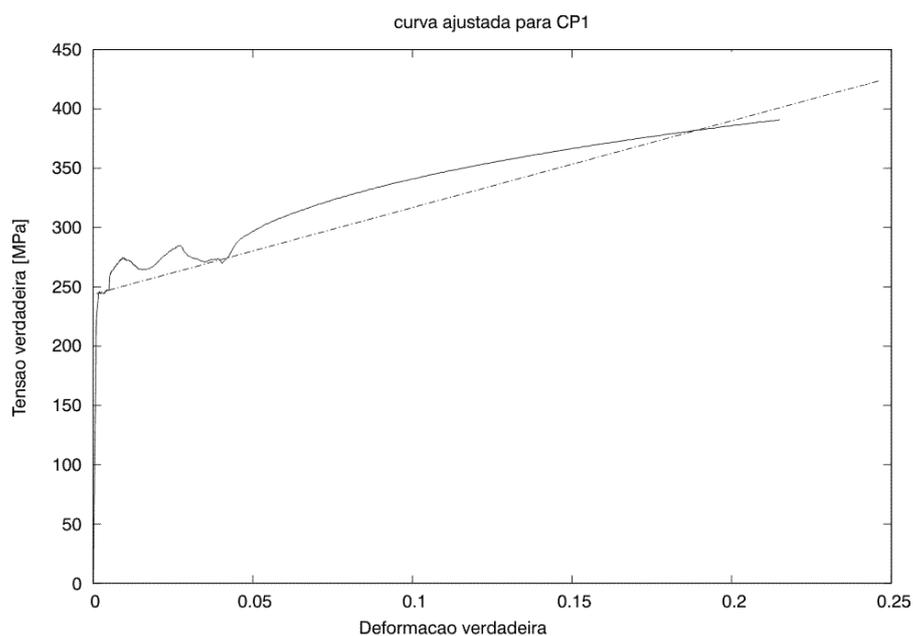


Figura A2.1 Aproximação bilinear para a curva tensão deformação do CP1

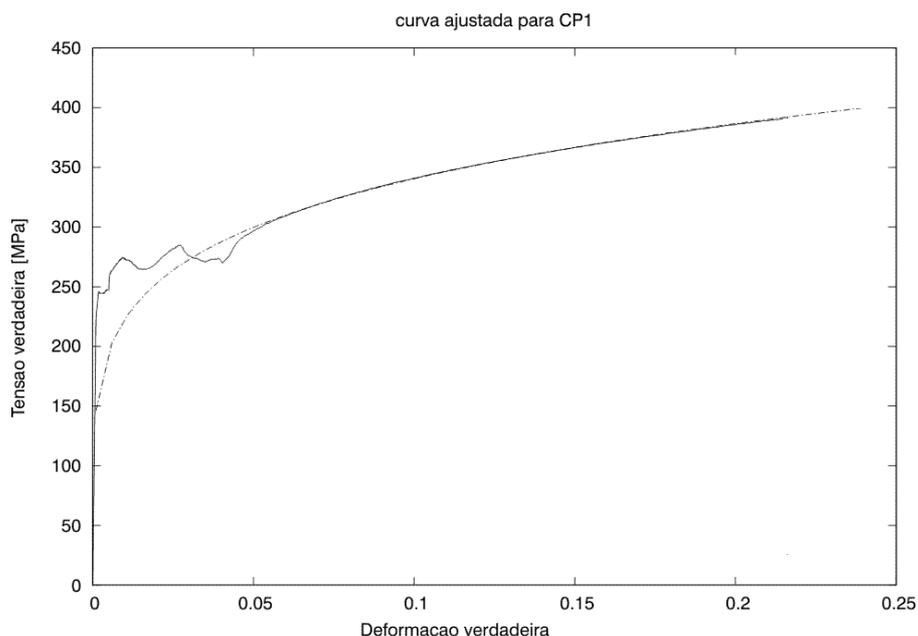


Figura A2.2 Aproximação por lei de potências para a curva tensão-deformação do CP1

As Tabelas A2.3 e A2.4 mostram as medidas iniciais e finais dos CDPs utilizados para uma estimativa dos parâmetros de anisotropia do material. Foram medidos dimensões de largura, espessura e comprimento medidos em pontos diferentes do CDP para os ensaios de anisotropia

Tabela A2.3 Dados do ensaio de anisotropia para corpos de prova em aço

ID	Largura [mm]				Espessura [mm]				Comprimento [mm]		Orient [°]
	w_1	w_2	w_3	w_m	t_1	t_2	t_3	t_m	l_{o1}	l_{o2}	
CP4	12,41	12,43	12,39	12,41	1,1	1,09	1,1	1,1	49,93	50,02	0
CP5	12,37	12,4	12,38	12,38	1,08	1,08	1,08	1,08	49,92	50,02	45
CP6	12,49	12,54	12,49	12,51	1,08	1,09	1,1	1,09	49,96	49,96	90

Tabela A2.4 Dados medidos após o ensaio de anisotropia

ID	Largura [mm]				Comprimento [mm]		Orient. [°]
	wf_1	wf_2	wf_3	wf_m	lf_1	lf_2	
CP4	11,7	11,58	11,6	11,63	54,64	54,66	0
CP5	11,75	11,78	11,84	11,79	54,92	54,88	45
CP6	11,76	11,78	11,75	11,76	54,78	54,65	90

A Tabela A2.5 apresenta os dados iniciais dos CDPs em alumínio para o

ensaio de tração. Os valores estimados a partir dos ensaios, e utilizados para um cálculo médio são apresentados na Tabela A2.6.

Tabela A2.5 Dados dos corpos de prova para ensaio de tração em alumínio

Orient. [°]	ID	Largura [mm]	Espessura [mm]
		W_m	t_m
0	CP1-Tal	12,62	1,56
45	CP2-Tal	12,61	1,56
90	CP3-Tal	12,63	1,55

Tabela A2.6 Dados estimados através dos ensaios para corpos de prova em alumínio

	Valor estimado		
	0°	45°	90°
	3,7	3,8	3,8
Propriedade	188,6	192,1	191,9
Força máxima [kN]	86,5	90,3	91,9
Módulo de elasticidade [MPa]	$0,766 \cdot 10^5$	$0,639 \cdot 10^5$	$0,758 \cdot 10^5$
Coefficiente de resistência [MPa]	357,65	357,19	359,65
Expoente de encruamento	0,244	0,237	0,237

A Figura A2.3 mostra para um dos CDPs, a curva experimental sobreposta à aproximação por lei de potência.

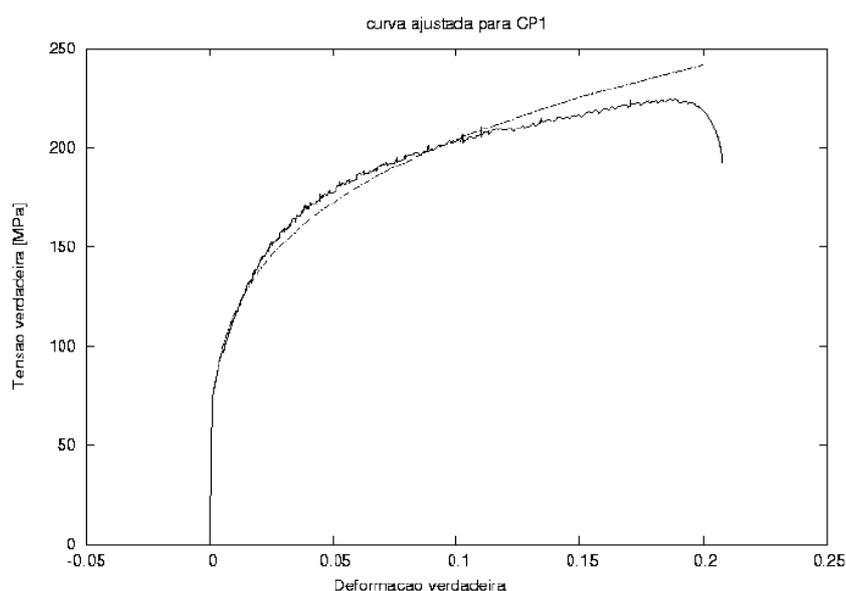


Figura A2.3 Aproximação por lei de potências para a curva tensão-deformação do CP1-al

Tabela A2.7 Dados do ensaio de anisotropia para corpos de prova em alumínio

Orient. [°]	ID	Largura [mm]	Espessura [mm]	Comprimento [mm]
		w_m	t_m	l_{o_m}
0	CP1-1al	12,29	1,08	50,07
45	CP2-1al	12,12	1,02	50,00
90	CP3-1al	12,05	1,06	50,01
0	CP1-2al	12,22	1,04	49,83
45	CP2-2al	12,19	1,07	50,15
90	CP3-2al	12,34	1,06	49,79

Tabela A2.8 Dados medidos após o ensaio de anisotropia

Orient. [°]	ID	Largura [mm]	Comprimento [mm]
		wf_m	l_{of_m}
0	CP1-1al	11,63	54,62
45	CP2-1al	11,65	54,65
90	CP3-1al	11,68	54,69
0	CP1-2al	11,84	54,35
45	CP2-2al	11,68	54,80
90	CP3-2al	11,90	54,64

As Tabelas A2.7 e A2.8 mostram as medidas iniciais e finais dos CDPs utilizados para uma estimativa dos parâmetros de anisotropia do material.