UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE DE IMPACTO EM VIGAS USANDO-SE O
MÉTODO DE INTEGRAÇÃO EXPLÍCITA NO TEMPO**

Eng^o GIOVANNI DE MORAIS TEIXEIRA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Lirani

São Carlos
2002

Ter um aborrecimento é receber uma graça
Ser feliz é ser posto à prova
A sombra dos bambus varre os degraus
mas nem um grão de areia se agita ...
A lua mergulha no lago,
mas a água permanece imóvel
Na ponta de uma agulha
dar um salto perigoso.
Não são as palavras que permitem
ao homem compreender,
É preciso, antes, ser um homem
para depois compreendê-las.

Han Than (século VII)

Aos meus Pais e meus irmãos, por tudo que não possa exprimir por palavras.
A todos os meus professores e amigos de Campos Gerais, pela estima e incentivo.
À Patrícia, pelo amor e carinho.
A todos os que dedicaram sua vida à construção de um mundo melhor.
A Deus, como quer que o homem o conceba.

Agradecimentos

Ao Professor João Lirani, pelo apoio, orientação e compreensão.

Ao Professor Durval, pelo suporte matemático em momento oportuno e pela amizade verdadeira.

Aos Professores Humberto Breves Coda e Paulo Varoto, pelas contribuições adicionais.

Aos colegas Toddy, Alexandre, Mariano e Volnei, pelo companheirismo e também aos colegas dos Compósitos, Marco Antônio, Cláudio Torres, Rodrigo Canto, Geraldo e Neilor, sempre presentes.

Aos colegas Marcelo, Sayuri, Andrea, Mamoru, Jandira e Elena, pela companhia e amizade.

Às secretárias Beth e Ana Paula, pela presteza e amabilidade.

À Beth do Cafezinho, pelo profissionalismo e constante bom humor.

Aos amigos da Mahle Metal Leve, pela estima, apoio e também pelas críticas oportunas.

Ao CNPq - Conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico, que possibilitou-me acesso à educação de melhor qualidade, fundamental numa economia emergente como a nossa.

À EESC-USP, por todos os recursos que colocou à minha disposição, tornando possível a síntese de uma monografia coerente. Estendo este agradecimento a todas as pessoas que fazem parte do sistema e acreditam neste país. O trabalho destas pessoas quase nunca é devidamente reconhecido, fato este percebido na frase tão comum "... não estão fazendo mais do que a obrigação". Agradeço aos que fazem um pouco mais do que simplesmente cumprir seus compromissos.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiv
Resumo	xvi
Abstract	xvii
1. Introdução	1
1.1. Escopo do estudo	1
1.2. Conteúdo da dissertação	5
1.3. Objetivos	6
2. Análise modal de vigas	7
2.1 Freqüências naturais e modos de vibrar das vigas de Bernoulli-Euler	7
2.1.1. Hipóteses de Bernoulli-Euler	8
2.1.2. Freqüências naturais e modos de vibrar da viga bi-apoiada	9
2.1.3. Freqüências naturais e modos de vibrar da viga em balanço	12
2.2. Amortecimento	14
2.2.1. Amortecimento viscoso	16
2.2.2. Decremento logarítmico	17
2.2.3. Amortecimento histerético	19
2.2.4. Amortecimento proporcional	23
3. Projeto a impacto	24
3.1. Propagação de um pulso compressivo	24
3.1.1. Solução para a equação de onda	26

3.1.2. Intensidade da tensão propagada	26
3.2. Propagação de um impulso torsional	28
3.3. Onda de torção em tubos de parede fina	30
3.4. Impacto longitudinal em vigas	31
3.4.1. Tensões de impacto pelo método da energia	31
3.4.2. Aplicação da teoria elementar de ondas de tensão unidimensional	36
3.5. Impacto transversal em vigas	42
4. Análise não linear: Solução da equação de movimento de sistemas que sofrem impacto	48
4.1. Resolvendo a equação do movimento	48
4.1.2. Método das diferenças centrais	49
4.1.3. Método de Newmark	51
4.2. Amortecimento	52
4.3. Contato	53
4.3.1. Definições da superfície de contato	56
4.3.2. Controle da profundidade de contato	61
4.3.3. Rigidez de Contato	61
4.4. Soluções numéricas básicas	63
4.4.1. Método das aproximações sucessivas	63
4.4.2. Método de Newton-Raphson	65
5. Modelagem de impacto em vigas	67
5.1. Estrutura de laboratório	67
5.2. Detalhes da modelagem	68
5.3. Impacto longitudinal em vigas em balanço	68
5.4. Impacto transversal em vigas em balanço	71
5.5. Impacto transversal em vigas bi-apoiadas	76
5.6. Superfícies de tensão equivalente máxima em impacto	81
5.6.1. Impacto axial	83
5.6.1.1. Anel metálico	83
5.6.1.2 Viga T	84

5.6.2. Impacto transversal	85
5.6.3. Impacto torsional	86
5.7. Exemplo ilustrativo	88
5.7.1. Modelo geométrico	88
6. Conclusões	93
Referências Bibliográficas	95
Apêndice I	Tabela de propriedade de materiais
Apêndice II	Rotinas APDL
Apêndice III	Arquivos Matlab
Apêndice IV	Ajuste de curvas

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1. Esquerda: Trem de válvulas. Direita: Sistema de transmissão.	2
FIGURA 1.2. Suspensão de automóvel.	2
FIGURA 1.3. Vista frontal do <i>sub step</i> 2 no qual ocorre a maior tensão no <i>container</i> , na situação queda “de quina”, APARICIO SÁNCHEZ (2001).	4
FIGURA 2.1. Membro sob vibração transversal.	7
FIGURA 2.2. Viga bi-apoiada, CRAIG (1981).	10
FIGURA 2.3. Modos de vibrar da viga bi-apoiada, CRAIG (1981).	11
FIGURA 2.4. Viga em balanço, CRAIG (1981).	12
FIGURA 2.5. Modos de vibrar da viga em balanço, CRAIG (1981).	14
FIGURA 2.6. Razão de amplitudes vibratórias, SHIGLEY (1969).	15
FIGURA 2.7. Sistema de único grau de liberdade com amortecimento viscoso, STEIDEL (1989). Modelamento a partir do equilíbrio estático.	17
FIGURA 2.8. Sistema sub-amortecido, $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$, STEIDEL (1989).	18
FIGURA 2.9. Coeficiente de Perda, η , como função do módulo de elasticidade, E . A linha tracejada corresponde à condição $\eta=C/E$, ASHBY (1999).	20
FIGURA 2.10 Gráfico da força versus deslocamento definindo um loop histerético para um sistema com amortecimento viscoso. <i>a) c w > 0 b) c = 0</i> , INMAN (1994).	22
FIGURA 2.11 Gráfico tensão-deformação experimental, para um material carregado harmonicamente, ilustrando um loop histerético associado com amortecimento interno, INMAN (1994).	22
FIGURA 3.1. Barra descarregada, JOHNSON (1972).	25
FIGURA 3.2. Balanço de forças no elemento $ABB'A'$, JOHNSON (1972).	25
FIGURA 3.3. Onda de compressão ao longo de uma barra elástica.	27
FIGURA 3.4. Propagação de pulso torsional, JOHNSON (1972).	29
FIGURA 3.5. Onda torsional em tubos de parede fina, JOHNSON (1972).	30
FIGURA 3.6. Impacto na extremidade livre de uma barra, SPOTTS & SHOUP (1998).	31
FIGURA 3.7. Gráfico de tensão máxima num ensaio de impacto frontal de massa contra barra engastada em apenas uma das extremidades.	34

FIGURA 3.8. Impacto de um corpo em queda livre, SHIGLEY (1984).	35
FIGURA 3.9. (a) Corte mostrando a válvula na cabeça de um motor de automóvel; (b) modelo matemático de um sistema de cames, SHIGLEY (1984).	36
FIGURA 3.10. Trajetória das ondas de compressão elástica, TIMOSHENKO & GOODIER (1980).	37
FIGURA 3.11. Tensão na extremidade livre durante o impacto, TIMOSHENKO & GOODIER (1980).	40
FIGURA 3.12. Tensão na interface de contato.	41
FIGURA 3.13. Tensão máxima na extremidade engastada da viga em balanço sujeita a impacto na extremidade livre.	41
FIGURA 3.14. Impacto central em uma viga bi-apoiada, GOLDSMITH (1960).	42
FIGURA 3.15. Deflexão em função do tempo para vigas bi-apoiadas como resultado de impacto transversal no centro $a = 1/2$, GOLDSMITH (1960).	44
FIGURA 3.16. Viga em balanço sofrendo impacto em sua extremidade livre da massa m_2 a uma velocidade v , GOLDSMITH (1960).	46
FIGURA 3.17. Deflexão em função do tempo para vigas em balanço como resultado de impacto transversal na extremidade livre, $a = 1/2$.	46
FIGURA 4.1. Aproximação do método das diferenças centrais para a primeira derivada.	50
FIGURA 4.2. Corpos em contato no instante t .	53
FIGURA 4.3. Resolvendo a equação do movimento sem contato.	62
FIGURA 4.4. Método de Newton-Raphson para problemas de uma única variável e uma relação $H-\phi$ convexa, OWEN & HINTON (1980).	64
FIGURA 4.5. Método das aproximações sucessivas para problemas de uma única variável e uma relação $H-\phi$ convexa, OWEN & HINTON (1980).	66
FIGURA 5.1. Impacto longitudinal em viga em balanço. a) Modelo 3D. Elemento SOLID164. b) Modelo 1D. Elementos BEAM3 e MASS21	68
FIGURA 5.2. Comparativo entre as tensões (s_x) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.00047 segundos. Veja eq.(3.24 - 3.30). O algoritmo numérico explícito utilizou modelo sólido.	69

FIGURA 5.3. Comparativo entre as tensões ($\mathbf{s}_x$) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.00047 segundos. Veja eq.(3.24 - 3.30). O algoritmo numérico explícito utilizou elemento viga.	70
FIGURA 5.4. Impacto transversal em viga em balanço. a) Modelo 3D. Elemento sólido, SOLID164. b) Modelo 1D. Elemento viga, BEAM3 e massa, MASS21.	71
FIGURA 5.5. Deslocamento da extremidade livre da viga. Comparativo entre resultados esperados teórica e numericamente.	72
FIGURA 5.6. Comparativo entre as tensões ($\mathbf{s}_z$) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico implícito utilizou elemento viga .	72
FIGURA 5.7. Comparativo entre as tensões ($\mathbf{s}_z$) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico explícito utilizou elemento sólido .	73
FIGURA 5.8. Comparativo entre as tensões ($\mathbf{s}_z$) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico explícito utilizou elemento viga .	73
FIGURA 5.9. Análise modal do conjunto impactador - viga em balanço.	75
FIGURA 5.10. Impacto transversal em viga bi-apoiada. a) Modelo 3D. Elemento sólido, SOLID164. b) Modelo 1D. Elemento viga, BEAM3 e massa, MASS21.	76
FIGURA 5.11. Comparativo entre os deslocamentos (mm) provenientes de análise teórica e simulação, após o tempo de 0.015s de simulação.	77
FIGURA 5.12. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.015 segundos. Algoritmo numérico implícito, utilizando elemento viga .	78
FIGURA 5.13. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.0129 segundos. O algoritmo numérico explícito utilizou elemento sólido .	78
FIGURA 5.14. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.0129 segundos. O algoritmo numérico explícito utilizou elemento viga .	79
FIGURA 5.15. Modos de vibrar do conjunto impactador - viga bi-apoiada.	80

FIGURA 5.16. Esquema do impacto entre massa e anel.	83
FIGURA 5.17. Superfície de tensão equivalente máxima do impacto ilustrado pela fig.(5.16).	83
FIGURA 5.18. Impacto entre bloco e viga T.	84
FIGURA 5.19. Superfície de tensão equivalente máxima do impacto ilustrado pela fig.(5.18).	84
FIGURA 5.20. Impacto entre bloco e viga quadrada.	85
FIGURA 5.21. Superfície obtida por regressão linear múltipla.	86
FIGURA 5.22. Impacto torsional entre blocos e viga quadrada.	87
FIGURA 5.23. Superfície obtida por regressão linear múltipla.	87
FIGURA 5.24. Modelo geométrico empregado como exemplo.	88
FIGURA 5.25. Modelo do conjunto polia-eixo. Malha constituída de 5867 nós, num total de 24237 elementos tetraédricos lineares.	89
FIGURA 5.26. Modos de vibrar do conjunto polia-eixo.	90
FIGURA 5.27. Distribuição de tensões para o caso mais crítico, onde velocidade $w = 3.8 \text{ rad/s}$ e inércia $I=2982.9 \text{ kg.mm}^2$.	91
FIGURA 5.28. Representação gráfica da eq.(5.6).	91

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1. Valores típicos de amortecimento, STEIDEL (1989).	18
TABELA 3.1. Raízes f_i da eq. (3.35) como função de α , GOLDSMITH (1960).	43
TABELA 4.1. Tipos de contato e opções disponíveis no LS-DYNA.	57
TABELA 5.1. Dados do ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.1).	69
TABELA 5.2. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto longitudinal.	70
TABELA 5.3. Dados do ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.4).	71
TABELA 5.4. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto transversal em viga em balanço.	74
TABELA 5.5. Análise modal do conjunto vibratório no impacto transversal de viga em balanço.	74
TABELA 5.6. Conteúdo em frequência do sinal das tensões (analítico) no impacto transversal de um corpo na extremidade de viga em balanço.	75
TABELA 5.7. Dados do ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.10).	77
TABELA 5.8. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto transversal em viga bi-apoiada.	79
TABELA 5.9. Análise modal do conjunto vibratório no impacto transversal de viga bi apoiada.	79
TABELA 5.10. Conteúdo em frequência do sinal das tensões (analítico) no impacto transversal de um corpo no centro de uma viga bi apoiada. Esta análise de sinais corresponde ao sinal da curva azul da fig.(5.12).	80

TABELA 5.11. Dados do ensaio de impacto longitudinal.	83
TABELA 5.12. Dados do ensaio de impacto axial.	85
TABELA 5.13. Dados do ensaio de impacto transversal.	85
TABELA 5.14. Dados do ensaio de impacto torsional	86
TABELA 5.15. Frequências correspondentes aos modos de vibrar do modelo esquematizado na fig.(5.25).	89
TABELA 5.16. Tensão máxima equivalente (Von Mises) no eixo acionado subitamente pela polia da fig.(5.24).	92
TABELA A.1 Resumo dos valores de K e n para a relação tensão de escoamento-deformação, $\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$, para vários aços, ALTAN et al. (1983).	

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da secção transversal.
a	Razão de Massas - $\frac{m_1}{m_2}$.
c	Velocidade de onda. Coeficiente de amortecimento.
d	Deslocamento de partículas na zona comprimida.
E	Módulo de elasticidade na tração ou na compressão.
E_c	Energia cinética.
F	Força. Função qualquer.
F_d	Força devido ao amortecimento.
f_i	Raiz de equação transcendental.
g	Aceleração da gravidade.
G	Módulo de elasticidade no cisalhamento.
H	Matriz de rigidez global.
h	Fator de perda ou coeficiente de perda de energia.
I_x, I_y	Momentos de Inércia de uma secção transversal.
J	Momento polar de inércia.
k	Rigidez. Rigidez de contato.
L	Comprimento da viga.
I	Autovalor.
m_1	Massa do objeto (em repouso) que recebe o impacto
m_2	Massa do objeto (em movimento) causador do impacto.
M	Momento Fletor
M_t	Momento de Torção.
n	Coeficiente de Poison.

q	Ângulo.
R	Raio.
p	força externa por unidade de comprimento.
r	Densidade
P	Produtório. Funcional.
$S(x,t)$	Força cisalhante.
S_n	Pressão devido a uma onda de choque.
s_0	Tensão inicial.
s_x, s_y, s_z	Componentes normais de tensão, paralelas aos eixos x , y e z .
S	Somatória.
t	Tempo.
T	Período de tempo. Torque.
t	Tensão cisalhante.
u	Deslocamento na direção x .
U	Trabalho.
v, v_0	Velocidade. Velocidade inicial.
V_{OL}	Volume.
$w(x,t)$	Deflexão. Movimento transversal em um ponto $(x,0)$ da linha neutra da viga.
w	Velocidade angular. Frequência natural não amortecida.
y	Força residual.
$\mathbf{x}$	Razão de amortecimento. $\mathbf{x} = c/c_{cr}$.
x	Amplitude de vibração.
x, y, z	Coordenadas retangulares

RESUMO

O problema do impacto em corpos elásticos está massivamente presente na indústria e no funcionamento de grande parte dos equipamentos domésticos. Entender e dominar este fenômeno é fundamental não somente a indústria mecânica mas a todas as outras que nela se apóiam.

Neste trabalho são apresentados estudos básicos sobre impacto longitudinal, transversal e propagação de ondas de tensão elástica. São introduzidos conceitos de análise modal, amortecimento, não linearidade e transformada discreta de Fourier, empregada em análise de sinais.

O método dos elementos finitos foi a principal ferramenta matemática empregada. Com ele foi possível a construção das superfícies de tensão equivalente máxima, capazes de representar diversas situações de impacto que podem ocorrer a uma determinada geometria.

A compilação deste trabalho, em suma, visa a compreensão geral do fenômeno do impacto e da posição nele ocupada pelas grandezas físicas massa, velocidade e tensão. O conhecimento de como estas grandezas estão relacionadas permite projetar um sistema dinâmico com mais inteligência.

Palavras-chave: Impacto; Método dos Elementos Finitos; Não linearidade; Tensões em corpos elásticos; Análise modal.

ABSTRACT

The impact problem in elastic bodies is present in industry and working of most domestic equipments. The knowledge and understanding of this phenomenon is of fundamental importance to the mechanical industry and their dependents.

This work presents basic studies about longitudinal and transversal impact and elastic stress propagation. The concepts of modal analysis, damping, nonlinearities and discrete fourier transform, employed in signal analysis, are introduced.

The finite element method was the main mathematical tool used here. It allowed the construction of the surface of maximum equivalent stress, which represents many crashes situations that can occur in certain model.

In summary, this work intends the general comprehension of the impact phenomenon and the existing relation among mass, velocity and generated stresses. This comprehension allows to project dynamic systems with more intelligence.

Keywords : Impact; Finite element method; Nonlinearities; Stress in elastic bodies; modal analysis.

1. INTRODUÇÃO

1.1. ESCOPO DO ESTUDO

Os primeiros estudos a respeito da teoria do impacto tiveram início com a mecânica do corpo rígido. Segundo GOLDSMITH (1960) o pouco conhecimento que se tinha do fenômeno era compensada por fatores de correção que levassem em conta a perda de energia.

A teoria da elasticidade e plasticidade contribuíram bastante para o conhecimento que se têm hoje deste fenômeno, permitindo ser estudados os detalhes da propagação de ondas elásticas e a distribuição de tensões na região de contato.

A distinção entre choque e impacto não é muito comum, tanto no Brasil quanto na literatura estrangeira. Apresentá-la, porém, ajudará na compreensão desta dissertação. O termo ***Impacto* será empregado na situação de colisão de duas ou mais massas**. Um impacto controlado pode ser desejado em situações tais como nos processos de embutimento, estampagem e corte. Na maior parte do tempo, contudo, o objetivo é evitá-lo, por representar fonte de ruído e falha por fadiga, a exemplo do projeto de mancais, transmissões, trens de válvulas, fig.(1.1). O termo ***Choque* é mais genérico, descrevendo uma força transitória, subitamente aplicada, ou uma perturbação**, SHIGLEY (1984). *Impacto*, portanto, pode ser considerado como um caso especial de *Choque*.

Muitos dos elementos de máquinas que conhecemos estão sujeitos a cargas de impacto. A suspensão dos veículos automotores é um bom exemplo disso. Carregamento dinâmico é gerado sempre que se trafega em uma pista irregular. O veículo é transformado então em objeto impactador, transmitindo enorme quantidade de energia mecânica para os mancais. Alguns autores, dentre eles NORTON (1996), sugerem o uso de coeficiente de segurança **4** no projeto de partes de suspensão automotiva.

FIGURA 1.1. Esquerda: Trem de válvulas. Direita: Sistema de transmissão.

Nos acidentes automobilísticos, a quebra de componentes mecânicos absorve boa parte da energia do movimento, protegendo os passageiros de lesões e danos cerebrais causados por desacelerações elevadas, a exemplo do que acontece na **Fórmula 1**. A preocupação com a segurança de complexos nucleares e recipientes que transportam material radioativo também tem motivado pesquisas na área de impacto. A capacidade de uma estrutura veicular em absorver a energia cinética resultante de um impacto, mantendo a integridade do(s) ocupante(s), é denominada CAI (capacidade de absorção de impacto) ou *Crashworthiness*.

FIGURA 1.2. Suspensão de automóvel.

Crashworthiness é um conceito que se estende também à segurança de rodovias, *guard-rails* e placas de sinalização, projetadas para que se quebrem

facilmente em caso de colisão, evitando uma possível capotagem e os riscos de uma fatalidade.

A ação de forças subitamente aplicadas em corpos elásticos não é transmitida a todos os seus pontos simultaneamente. Segundo a mecânica da colisão, do ponto de contato partem ondas de tensão e deformação com velocidades finitas de propagação, viajando até o encontro das fronteiras do corpo, de onde são refletidas. A superposição de ondas desta natureza provoca maior solicitação no corpo em estudo. Assim como no caso da propagação de uma onda mecânica na superfície da água, não existe perturbação em um ponto até que a onda tenha tempo de alcançá-lo. No caso de sólidos elásticos, entretanto, existem mais de um tipo de onda e mais de uma velocidade característica de onda.

Devido às dificuldades no estabelecimento de um modelo teórico geral, apenas geometrias mais simples tem sido idealizadas e estudadas até então, com uso das leis de conservação do momento, do balanço de energia mecânica e das ondas de tensão. Todavia, o problema permanece e coeficientes de segurança, variando de 2 a 5, tem sido usados no intuito de prevenir danos causados por impacto.

Duas teorias clássicas são eleitas como suporte de todo o trabalho teórico desenvolvido nesta área. Em breve comentário encontrado em ESCALONA et al. (1999), são elas:

- A solução de St. Venant do impacto axial em barras, que resolve a equação de onda.
- A teoria de Hertz do impacto, MAYO (1999) e RAMAN (1920), que é uma extensão da teoria do contato de Hertz, podendo ser usada para impacto entre corpos compactos no qual deformações ocorrem principalmente nas vizinhanças da área de contato.

As principais hipóteses adotadas nas expressões para impacto axial e transversal em vigas elásticas são:

- A massa impactadora é tida como compacta o suficiente para que o processo seja considerado quase estático, o que significa que a propagação de ondas elásticas é muito mais rápida que a duração do contato durante o impacto, possibilitando considerá-la corpo rígido pontual.
-

- As superfícies em contato são planas e as tensões de contato são uniformes em toda a sua extensão.
- As velocidades não são suficientes para o processo de plastificação na região de contato.
- Atrito não é considerado.

O problema do impacto longitudinal em vigas em balanço tem sido abordado também como problema de valor inicial de sistema vibratório, substituindo engastes rígidos por molas flexíveis. De acordo com XING (1998), este tipo de abordagem é adequada ao estudo de placas, cascas ou até mesmo estruturas mais complexas.

GOLDSMITH (1960) e JOHNSON (1972) expõem a teoria de ondas de tensão unidimensionais em seus trabalhos, mas apenas GOLDSMITH (1960) aprofunda-se no impacto transversal em vigas bi-apoiadas e vigas em balanço, impacto em cabos flexíveis, colunas, bem como o processo dinâmico envolvendo deformações plásticas.

FIGURA 1.3. Vista frontal do *sub step 2* no qual ocorre a maior tensão no *container*, na situação queda “de quina”, APARICIO SÁNCHEZ (2001).

O maior interesse das pesquisas hoje concentra-se no estudo de impacto envolvendo plastificação e falha, BIRCH e ALVES (2000). Tais pesquisas foram inicialmente motivadas pelos objetivos militares dos anos 60 e 70. Hoje, ganham atenção por parte de engenheiros interessados em crashworthiness, JONES (1998), e na preservação da integridade de containers no transporte de materiais radioativos, APARICIO (2001). O uso de elementos finitos tem se tornado fundamental nestes

estudos. Com esta ferramenta matemática, é possível determinar a situação de colisão mais adversa, como o fez APARICIO (2001). Seu trabalho revelou que a situação menos adversa é a que ocorre quando o container cai “*de quina*”, fig(1.3), ou seja, sob um ângulo de 45° . A explicação encontrada está na energia absorvida pelo processo de plastificação, que não ocorre quando o mesmo se mantém vertical, quando então a área de contato do impacto é muito maior, transmitindo ao restante do conjunto níveis muito alto de tensão. Estudos envolvendo grandes deformações e taxas de deformações exigem uma compreensão maior das leis constitutivas de material, ALVES (1998), principalmente quando se trata de materiais compósitos, TITA E CARVALHO (2001).

1.2. CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

O *primeiro capítulo* é a introdução e define o assunto desta monografia, justificando também a necessidade de sua compreensão.

O *segundo capítulo* trata do estado atual do projeto a impacto, discutindo sobre o método da energia, ondas de tensão elástica, impacto torsional e longitudinal em vigas em balanço e bi-apoiadas. Este capítulo pretende delimitar o domínio do fenômeno, expor de que forma vem sendo estudado e aplicado em projetos mecânicos.

O *terceiro capítulo* introduz alguns conceitos importantes sobre análise modal, determinação de autovalores e autovetores de vigas bi-apoiadas e vigas em balanço. Também são discutidos os vários tipos de amortecimento, incluindo amortecimento viscoso, histerético e proporcional.

O *quarto capítulo* é responsável pela apresentação do método dos elementos finitos, discorrendo sobre sua origem, formulação e aplicação prática dentro do contexto do presente trabalho. São discutidos o método da integração explícita, não linearidade geométrica e de material.

O *quinto capítulo* discute a modelagem do problema de impacto em vigas em balanço e bi-apoiadas. Apresenta análise modal e análise de sinais para alguns modelos e são estabelecidas comparações entre os vários métodos numéricos e o que

há de teórico disponível, em termos de tensão equivalente máxima ao impacto. Introduz o conceito de superfície de tensões, como obtê-la e equacioná-la.

O *sexto capítulo* compreende as conclusões que podem ser inferidas do trabalho e de todo o material que foi consultado durante a sua elaboração.

Em seguida, a monografia prossegue com toda a relação de material utilizado na tarefa de pesquisa bibliográfica. Em anexo estão as tabelas consultadas, arquivos Matlab, rotinas APDL e teoria sobre ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados.

1.3. OBJETIVOS

1. Sintetizar as informações mais importantes sobre a teoria de impacto em vigas, análise modal e método da integração explícita no tempo, presentes nos *capítulos 1, 2, 3 e 4*.
 2. Comparar resultados dos algoritmos numéricos do método dos elementos finitos com a teoria clássica disponível, discussão do *capítulo 5*.
 3. Introduzir o conceito de superfície de tensão máxima ao impacto, equacionando-as segundo o método dos mínimos quadrados, a partir de resultados numéricos das simulações de impacto, apresentado nos *capítulos 5 e 6*.
 4. Eliminar o caráter subjetivo da divisão do choque em *leve, médio e pesado*, estabelecendo um critério bem definido para que ele seja classificado e, portanto, corretamente dimensionado, do ponto de vista de projeto, texto do *capítulo 6*.
-

2. ANÁLISE MODAL DE VIGAS

A análise modal aqui descrita refere-se a frequências naturais e modos de vibrar de vigas em balanço e bi-apoiadas. Justifica-se tal estudo pelo interesse na determinação correta dos parâmetros de amortecimento e avaliação do tamanho do passo no tempo, ou seja, *time step*, em simulações de impacto. Para problemas dinâmicos, a escolha de um *time step* maior que o período dos modos de vibrar mais representativos pode conduzir a resultados falaciosos. Para problemas situados no regime elástico, desconsiderando dano, fratura e atrito, amortecimento é a única forma de dissipar a energia de um sistema vibratório, quando então energia mecânica é convertida em calor e som.

2.1. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR DAS VIGAS DE BERNOULLI-EULER

FIGURA 2.1. Membro sob vibração transversal.

2.1.1 HIPÓTESES DE BERNOULLI-EULER

Da teoria elementar de vigas, são elas:

- Há um eixo da viga que não experimenta tração ou compressão. O eixo x será posicionado ao longo deste eixo neutro.
- Seções transversais perpendiculares ao eixo neutro no estado não deformado da viga permanecerá plano e perpendicular ao eixo neutro deformado, o que significa que cisalhamento pode ser desprezado.
- O material é linearmente elástico e a viga é homogênea em quaisquer das seções transversais.
- s_y e s_z é desprezível quando comparados a s_x .
- O plano xy é o plano principal. veja fig.(2.1).

A vibração transversal de vigas de Bernoulli-Euler é governada pela seguinte equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + rA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = p(x, t) \quad (2.1)$$

Na vibração livre, a eq. (2.1) reduz-se a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + rA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Com $EI = cte$.

Supondo que o movimento harmônico seja dado pela equação

$$w(x, t) = W(x) \cos(\omega t - q) \quad (2.3)$$

Pode-se substituir a eq.(2.3) na eq.(2.2), para obter a equação dos autovalores:

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - rA \omega^2 W = 0 \quad (2.4)$$

Para vibração livre de uma viga uniforme, eq.(2.4) torna-se:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - I^4 W = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{Sendo } I^4 = rA \omega^2 / EI \quad (2.6)$$

Seguindo CRAIG (1981), a solução geral da eq.(2.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$W(x) = A_1 e^{Ix} + A_2 e^{-Ix} + A_3 e^{iIx} + A_4 e^{-iIx} \quad (2.7)$$

Ou também:

$$W(x) = C_1 \sinh Ix + C_2 \cosh Ix + C_3 \sin Ix + C_4 \cos Ix \quad (2.8a)$$

Na equação acima, deve-se determinar as quatro constantes de amplitude C_1 , C_2 , C_3 e C_4 e o autovalor I , dispondo, segundo CRAIG (1981), das condições de contorno descritas abaixo:

a. Vínculo do tipo engaste:

Deslocamento e Curvatura nulos na extremidade fixa.

$$W = 0 \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

b. Vínculo do tipo apoio:

Deslocamento e Momento fletor nulos nos apoios simples.

$$W = 0 \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

c. Extremidade livre:

Momento fletor nulo na extremidade livre e cortante nulo.

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3 W}{dx^3} = 0$$

2.1.2. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR DA VIGA BI-APOIADA

Aplicando-se as condições do tipo apoio para resolver a eq.(2.8a), vem:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 & W(L) &= 0 \\ \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

A derivada segunda da eq.(2.8) é a equação seguinte:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = I^2 (C_1 \sinh Ix + C_2 \cosh Ix - C_3 \sin Ix - C_4 \cos Ix) \quad (2.8b)$$

FIGURA 2.2. Viga bi-apoiada, CRAIG (1981).

Para $x=0$, os termos acompanhados da função seno anulam-se na eq.(2.8a), resultando:

$$C_2 + C_4 = 0$$

Na eq.(2.8b) acontece o mesmo, restando:

$$I^2(C_2 - C_4) = 0$$

As duas equações anteriores formam um sistema, que, resolvido, chega em $C_2 = C_4 = 0$. Na outra extremidade da viga, $W(L)=0$. Da eq.(2.8a) e eq.(2.8b),

$$C_1 \sinh IL + C_3 \sin IL = 0 \quad (2.9)$$

$$I^2(C_1 \sinh IL - C_3 \sin IL) = 0 \quad (2.10)$$

Sendo este sistema um par de equações algébricas lineares e homogêneas em C_1 e C_3 , haverá uma solução não trivial apenas se o determinante dos coeficientes anular-se:

$$\begin{vmatrix} \sinh IL & \sin IL \\ I^2 \sinh IL & -I^2 \sin IL \end{vmatrix} = 0$$

então
$$-2I^2 \sinh IL \sin IL = 0$$

ou
$$\sinh IL \sin IL = 0 \quad (2.11)$$

Uma vez que a função seno hiperbólico anula-se apenas quando $(IL)=0$, então a única solução não trivial da eq.(2.11) será obtida quando:

$$\sin IL = 0 \quad (2.12)$$

A eq.(2.12) é a equação característica para este problema. Ela determina os autovalores I_r . Se a eq.(2.12) é retro substituída na eq.(2.9) ou na eq.(2.10), obtém-se:

$$C_1 = 0$$

Em suma, portanto, $C_1 = C_2 = C_4 = 0$. Da eq.(2.8a),

$$W(x) = C_3 \sin Ix = C \sin Ix \quad (2.13)$$

Onde I é determinado da eq.(2.12) e C é um fator de amplitude arbitrário.

As raízes da equação *senoidal* eq.(2.12) são:

$$\begin{aligned} I_1 L &= p \\ I_2 L &= 2p \\ &\vdots \\ I_r L &= rp \end{aligned} \quad (2.14)$$

Juntando a expressão para I da eq.(2.6), $I^4 = rA\omega^2/EI$, nas eq.(2.14), as frequências naturais ω_r podem ser determinadas, conforme expressão abaixo:

$$\omega_r = (I_r)^2 \left(\frac{EI}{rA} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

Quando a eq.(2.14) é substituída na eq.(2.13), CRAIG (1981), a equação da forma do modo torna-se:

$$W_r(x) = C \sin(I_r \cdot x) \quad (2.16)$$

FIGURA 2.3. Modos de vibrar da viga bi-apoiada, CRAIG (1981).

2.1.3. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR DA VIGA EM BALANÇO

FIGURA 2.4. Viga em balanço, CRAIG (1981).

Trata-se, uma vez mais, de resolver a eq.(2.8), com as condições de fronteira do tipo engaste e extremidade livre. As condições de contorno são as seguintes:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 & \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{d^3 W}{dx^3} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Derivando eq.(2.8a),

$$\frac{dW}{dx} = I(C_1 \cosh Ix + C_2 \sinh Ix + C_3 \cos Ix - C_4 \sin Ix) \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = I^2(C_1 \sinh Ix + C_2 \cosh Ix - C_3 \sin Ix - C_4 \cos Ix) \quad (2.19)$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = I^3(C_1 \cosh Ix + C_2 \sinh Ix - C_3 \cos Ix + C_4 \sin Ix) \quad (2.20)$$

Substituindo a eq.(2.8) e as equações (2.18),(2.19) e (2.20) nas condições de contorno, eq.(2.17), chega-se ao seguinte sistema, CRAIG (1981):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ I & 0 & I & 0 \\ I^2 \sinh IL & I^2 \cosh IL & -I^2 \sin IL & -I^2 \cos IL \\ I^3 \cosh IL & I^3 \sinh IL & -I^3 \cos IL & I^3 \sin IL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

A fim de que este conjunto de equações homogêneas tenha uma solução não trivial, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto conduz à equação característica:

$$\cos IL \cosh IL + 1 = 0 \quad (2.22)$$

cujas raízes são os autovalores I_r , multiplicados pelo comprimento L . Não existem expressões simples para as raízes da equação característica, o que requer uma solução numérica da eq.(2.22). Os quatro primeiros valores são:

$$\begin{aligned} I_1 L &= 1.8751 & I_2 L &= 4.6941 \\ I_3 L &= 7.8548 & I_4 L &= 10.996 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sabendo que $I^4 = \frac{rAw^2}{EI}$, vem:

$$w_r = \frac{(I_r L)^2}{L^2} \left(\frac{EI}{rA} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Então,

$$w_1 = \frac{3.516}{L^2} \left(\frac{EI}{rA} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

$$w_2 = \frac{22.03}{L^2} \left(\frac{EI}{rA} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

$$w_3 = \frac{61.70}{L^2} \left(\frac{EI}{rA} \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

Os modos de vibrar serão determinados a seguir. As primeiras duas equações da eq.(2.21) dizem que:

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_2 \\ C_3 &= -C_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

A terceira equação estabelece:

$$C_1 \sinh(I_r L) + C_2 \cosh(I_r L) - C_3 \sin(I_r L) - C_4 \cos(I_r L) = 0$$

que pode ser combinada com as equações eq.(2.26) para chegar a:

$$C_1 \sinh(I_r L) + C_2 \cosh(I_r L) + C_1 \sin(I_r L) + C_2 \cos(I_r L) = 0 \quad (2.27)$$

que, reorganizada, torna-se:

$$C_1 = -C_2 \left[\frac{\cosh I_r L + \cos I_r L}{\sinh I_r L + \sin I_r L} \right] = -k_r C_2 \quad (2.28)$$

Ou seja, $C_1 = f(C_2)$. As equações eq.(2.26) e eq.(2.28) podem ser combinadas com a eq.(2.8), resultando nos modos de vibrar:

$$W_r(x) = C\{\cosh I_r x - \cos I_r x - k_r [\sinh I_r x - \sin I_r x]\} \quad (2.29)$$

FIGURA 2.5. Modos de vibrar da viga em balanço, CRAIG (1981).

2.2. AMORTECIMENTO

A energia de um sistema vibratório amortecido é dissipada na forma de atrito, calor ou ainda como som, STEIDEL (1989). O mecanismo do amortecimento pode tomar uma dentre várias formas, e ainda freqüentemente mais que uma forma pode estar presente ao mesmo tempo. Amortecimento fluido pode ser viscoso ou turbulento. No *amortecimento viscoso*, a força de amortecimento é proporcional a velocidade. No *amortecimento turbulento*, a força é proporcional ao quadrado da velocidade. No atrito seco ou *amortecimento de Coulomb* a força de atrito é constante. É causado por atrito cinético entre superfícies secas deslizantes. *Amortecimento sólido* ou *histerético* é causado pelo atrito interno, quando um sólido é deformado. A amplitude de tensão é uma medida do amortecimento sólido.

O efeito do amortecimento em um sistema vibratório é ilustrado na fig.(2.6), a título de exemplo. Nela está representada a razão de amplitudes vibratórias¹,

¹ m é a massa da máquina. μ é a massa desbalanceada. X é a amplitude de vibração da máquina. e corresponde à excentricidade da massa desbalanceada.

$mX/m_u e$, de uma máquina como função da velocidade de operação. Observe que a amplitude de vibração desta máquina pode ser muitas vezes maior que a amplitude vibratória da massa desbalanceada que a originou, quando a velocidade de operação está próxima de uma de suas frequências naturais. A este fenômeno dá-se o nome de ressonância. Se uma máquina deve ser operada próxima à ressonância deve-se introduzir um grande amortecimento a fim de evitar amplitudes perigosas. Por outro lado, as curvas mostram uma razão de amplitude próxima à unidade, quando a velocidade de operação é três ou mais vezes a frequência natural e então o efeito do amortecimento é desprezível nesta situação.

Num problema de impacto acontece o mesmo. Os efeitos da fonte de excitação, o *corpo impactador*, podem ser amplificados ou não, e isto vai depender do fator de amortecimento, ξ . Amplitude e frequência do sinal das tensões resultantes são dependentes de amortecimento estrutural e frequências naturais do conjunto *impactador-impactado*. Por estas razões, este assunto será tratado neste capítulo, orientando a correta determinação do amortecimento nas simulações de impacto modeladas pelo método dos elementos finitos.

FIGURA 2.6. Razão de amplitudes vibratórias, SHIGLEY (1969).

2.2.1. AMORTECIMENTO VISCOZO

A escolha de um modelo representativo para a queda na amplitude das oscilações num sistema vibratório é baseada parcialmente em observações físicas e em parte na conveniência matemática, INMAN (1994). A teoria de equações diferenciais sugerem que o acréscimo do termo $c\dot{x}$, onde c é uma constante, resultará numa equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Observações físicas concordam bastante com este modelo e é usado com êxito numa variedade de sistemas mecânicos. Este tipo de amortecimento é denominado *viscoso* e c é o *coeficiente de amortecimento*, com unidades em $\frac{kg}{s}$. A equação do movimento para um sistema com único grau de liberdade com massa, mola e amortecedor, conforme fig.(2.7), é:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.30)$$

sujeita a condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Substituindo $x(t) = ae^{I t}$ na eq.(2.30), resulta:

$$(mI^2 + cI + k)ae^{I t} = 0 \quad (2.31)$$

Fazendo $ae^{I t} \neq 0$, reduz-se a eq.(2.31) a uma equação quadrática em I da forma:

$$mI^2 + cI + k = 0 \quad (2.32)$$

denominada **equação característica**, cuja solução escreve-se:

$$I_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km} \quad (2.33)$$

- I. $c^2 - 4km > 0$: super amortecimento
- II. $c^2 - 4km = 0$: amortecimento crítico
- III. $c^2 - 4km < 0$: sub amortecimento

O item II pode ser usado para definir o coeficiente de amortecimento crítico, c_{cr} :

$$c_{cr} = 2m\mathbf{w} = 2\sqrt{km} \quad (2.34)$$

onde $\mathbf{w}$ é a frequência natural não amortecida. Também torna-se importante definir o número adimensional $\mathbf{x}$, denominado razão de amortecimento, através da expressão:

$$\mathbf{x} = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\mathbf{w}} \quad (2.35)$$

De acordo com STEIDEL (1989), a frequência natural amortecida e a frequência natural não amortecida estão relacionadas uma a outra pela razão de amortecimento $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{w}_d = \mathbf{w}_n \sqrt{1 - \mathbf{x}^2} \quad (2.36)$$

FIGURA 2.7. Sistema de único grau de liberdade com amortecimento viscoso, STEIDEL (1989). Modelamento a partir do equilíbrio estático.

2.2.2. DECREMENTO LOGARÍTMICO

As amplitudes sucessivas de um sistema sujeito a amortecimento viscoso possuem uma relação logarítmica, como pode ser observado na fig.(2.8). A amplitude máxima, no tempo $t = t_0$, é x_0 . Um ciclo após, a amplitude diminui para x_1 , quando então $t = t_0 + t_d$. Dois ciclos após, a amplitude diminui para x_2 , com $t = t_0 + 2t_d$. A constante A é arbitrária, dependendo da amplitude do movimento x_0 em $t = t_0$. O período para o movimento amortecido, que é o tempo entre dois ciclos sucessivos é $2\pi/\mathbf{w}_d$.

$$x_0 = Ae^{-\mathbf{x}\mathbf{w}t_0}$$

$$x_1 = Ae^{-\mathbf{x}\mathbf{w}(t_0+t_d)} = x_0e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}t_d}$$

$$x_2 = Ae^{-\mathbf{x}\mathbf{w}(t_0+2t_d)} = x_0e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}2t_d}$$

Após n ciclos,

$$x_n = x_0 e^{-\mathbf{x} \mathbf{w} n t_d} \quad (2.37)$$

A quantidade $\mathbf{x} \mathbf{w} t_d = \mathbf{d}$ é a medida do amortecimento do sistema denominado *decremento logarítmico*, STEIDEL (1989):

$$x_n = x_0 e^{-n \mathbf{d}}$$

ou,

$$\mathbf{d} = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) \quad (2.38)$$

expresso ainda também por:

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} \mathbf{w} t_d = \mathbf{x} \mathbf{w} \left(\frac{2p}{\mathbf{w}_d} \right) = \frac{2p\mathbf{x}}{\mathbf{w}_d / \mathbf{w}} = \frac{2p\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \mathbf{x}^2}} \quad (2.39)$$

FIGURA 2.8. Sistema sub-amortecido, $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$, STEIDEL (1989).

	ξ
Amortecedores automobilísticos	0.1-0.5
Borracha	0.04
Estruturas de aço arrebiteadas	0.03
Concreto	0.02
Madeira	0.003
Aço laminado a frio	0.0006
Alumínio laminado a frio	0.0002
Bronze com teor de fósforo	0.00007

TABELA 2.1. Valores típicos de amortecimento, STEIDEL (1989).

O decremento logarítmico e a razão de amortecimento são constantes do sistema uma vez que não assumem valores arbitrários, mas são dependentes de folgas, condições superficiais, temperatura, tamanho, forma e outros fatores. Como exemplo, STEIDEL (1989), $d=4$ é um típico valor para o decremento logarítmico para um sistema de suspensão de automóveis novos. Após seis meses de uso, o decremento logarítmico cai para valores em torno de $d=2$.

2.2.3. AMORTECIMENTO HISTERÉTICO

Muitas outras formas de amortecimento estão disponíveis ao modelamento de dispositivos mecânicos e estruturas, além do amortecimento viscoso e amortecimento de Coulomb, INMAN (1994). Segundo mesmo autor, é comum estudar mecanismos de amortecimento pelo exame da energia dissipada por ciclo sob carregamento harmônico. Frequentemente, curvas de força versus deslocamento, ou tensão versus deformação são usadas para medir a energia perdida e conseqüentemente determinar uma medida do amortecimento no sistema. A energia dissipada por ciclo, ΔE , num sistema viscosamente amortecido com coeficiente c é dado por INMAN (1994):

$$\Delta E = \oint F_d dx = \int_0^{2p/w_{dr}} \left(c \dot{x} \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_0^{2p/w_{dr}} c \dot{x}^2 dt \quad (2.40)$$

F_d é a força devido ao amortecimento e ω_{dr} é denominada frequência de entrada, frequência de carregamento ou frequência de excitação.

No regime permanente, $x = X \sin w_{dr}t$, $\dot{x} = w_{dr}X \cos w_{dr}t$, e a equação (2.40) torna-se:

$$\Delta E = c \int_0^{2p/w_{dr}} (w_{dr}X \cos w_{dr}t)^2 dt = pcw_{dr}X^2 \quad (2.41)$$

Esta é a energia dissipada por ciclo por um amortecedor viscoso. Ela é usada para definir a perda de energia pelo pico de energia potencial, $\Delta E/U$. O mais usual, contudo, é a energia perdida por radiano dividida pela energia de deformação U_{max} .

Isto define o chamado *fator de perda* ou *coeficiente de perda*, η , fig.(2.9), dado por INMAN (1994):

$$h = \frac{\Delta E}{2pU_{\max}} \quad (2.42)$$

FIGURA 2.9. Coeficiente de perda, η , como função do módulo de elasticidade, E . A linha tracejada corresponde à condição $\eta = C/E$, ASHBY (1999).

$U_{\max}$ é definido como a energia potencial no deslocamento máximo de x . O fator de perda está relacionado à razão de amortecimento de um sistema viscosamente amortecido no ponto de ressonância. A fim de encontrá-lo, basta substituir DE da eq.(2.41) na eq.(2.42), assim:

$$h = \frac{p \cdot c w_{dr} x^2}{2p \left(\frac{1}{2} k x^2 \right)} \quad (2.43)$$

Na ressonância, $w_{dr} = w = \sqrt{k/m}$, tal que eq.(2.43) torna-se:

$$h = \frac{c}{\sqrt{km}} = 2\zeta \quad (2.44)$$

Consequentemente, o fator de perda é o dobro da razão de amortecimento.

Considerando a curva força versus deslocamento para um sistema com amortecimento viscoso, a força exigida para deslocar a massa é aquela que deve superar as forças de mola e de amortecimento, ou:

$$F = kx + c\dot{x} \quad (2.45)$$

Em regime permanente, quando então $x(t) = X \sin \omega_d t$, a eq.(2.45) torna-se:

$$F = kx + cX\omega \cos(\omega t) \quad (2.46)$$

Usando a identidade trigonométrica ($\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$) no termo $\cos \omega t$ resulta:

$$F = kx \pm cX\omega (1 - \sin^2 \omega t)^{1/2} \quad (2.47)$$

$$F = kx \pm c\omega (X - (X \sin \omega t)^2)^{1/2} \quad (2.48)$$

Lembrando da expressão $x(t) = X \sin \omega_d t$, pode-se organizar:

$$F = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2} \quad (2.49)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da eq.(2.49), vem:

$$\begin{aligned} (F - kx)^2 &= (\pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2})^2 \\ \Rightarrow F^2 - 2Fkx + k^2 x^2 &= c^2 \omega^2 (X^2 - x^2) \end{aligned}$$

A expressão final, derivada de por INMAN (1994), pode ser escrita:

$$\Rightarrow F^2 - 2Fkx + (k^2 + c^2 \omega^2) x^2 - c^2 \omega^2 X^2 = 0 \quad (2.50)$$

A eq.(2.50) é reconhecida como a equação geral para uma elipse ($c^2 \omega^2 > 0$), com rotação em torno da origem no plano F - x , como pode ser observada na fig.(2.10) abaixo. A fig.(2.10) é denominada loop histerético e a área enclausurada é a energia perdida por ciclo, como calculada pela eq.(2.41) e é igual a $\pi c \omega_d X^2$. Note que se $c = 0$, a elipse da fig.(2.10a) torna-se uma linha reta, com inclinação k , fig.(2.10b).

FIGURA 2.10 Gráfico da força versus deslocamento definindo um loop histerético para um sistema com amortecimento viscoso. *a)* $c\omega > 0$ *b)* $c = 0$, INMAN (1994).

Materiais são freqüentemente testados pela medida da tensão (força) e deformação (deslocamento) sob carregamento harmônico cuidadosamente controlado, INMAN (1994). Muitos materiais exibem atrito interno entre vários planos, enquanto deformado. Tais testes produzem loops histeréticos da forma mostrada na fig.(2.11). Note que para deformações crescentes (carregamento), o caminho é diferente que para deformações decrescentes (descarregamento). Este tipo de dissipação de energia é denominada **amortecimento histerético, amortecimento sólido ou amortecimento estrutural**.

FIGURA 2.11 Gráfico tensão-deformação experimental, para um material carregado harmonicamente, ilustrando um loop histerético associado com amortecimento interno, INMAN (1994).

A área enclausurada pelo *loop* histerético é, novamente, igual à energia perdida. Se o experimento é repetido para um número de freqüências diferentes a amplitude constante, pode-se concluir que a área é independente da freqüência e proporcional à amplitude da vibração e rigidez.

2.2.4. AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

A análise modal pode ser usada diretamente para resolver a equação do movimento, eq.(2.30), se a matriz de amortecimento $[C]$ puder ser escrita como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, da seguinte forma,

$$[C] = \mathbf{a}[M] + \mathbf{b}[K] \quad (2.51)$$

Sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ constantes. Esta forma de amortecimento é denominada amortecimento proporcional, RADCHENKO (1998). Substituindo a eq.(2.51) na equação do movimento, eq.(2.30), resulta:

$$[M]\ddot{x}(t) + (\mathbf{a}[M] + \mathbf{b}[K])\dot{x}(t) + [K]x(t) = 0 \quad (2.52)$$

Substituindo $x = [M]^{-1/2}q$ e multiplicando tudo por $[M]^{-1/2}$, segundo INMAN (1994):

$$\ddot{q}(t) + (\mathbf{a}[I] + \mathbf{b}[\tilde{K}])\dot{q}(t) + [\tilde{K}]q(t) = 0 \quad (2.53)$$

$$\text{Sendo } [\tilde{K}] = [K] / [M]$$

Substituindo ainda $q(t) = [P]r(t)$ e pré multiplicando por $[P]^T$, sendo $[P]$ a matriz de autovetores de $[\tilde{K}]$, tem-se:

$$\ddot{r}(t) + (\mathbf{a}[I] + \mathbf{b}[\Lambda])\dot{r}(t) + [\Lambda]r(t) = 0 \quad (2.54)$$

Isto corresponde a n equações modais desacopladas:

$$\ddot{r}_i(t) + 2\mathbf{x}_i\mathbf{w}_i\dot{r}_i(t) + \mathbf{w}_i^2 r_i(t) = 0 \quad (2.55)$$

onde $2\mathbf{x}_i\mathbf{w}_i = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{w}_i^2$, ou

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{a}}{2\mathbf{w}_i} + \frac{\mathbf{b}\mathbf{w}_i}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

Conhecendo-se a dinâmica do impacto, a análise modal é capaz de dizer quais os modos e frequências mais importantes para cada caso em questão. Adicionalmente, o conhecimento do fator de perda h (inerente ao material dos corpos em estudo) permite resolver a eq.(2.56), determinando os coeficientes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, que subordinam o amortecimento da estrutura às razões de amortecimento de dois dos modos dominantes².

² Essa é a forma como o software Ansys® trata amortecimento.

3. PROJETO A IMPACTO

Serão discutidos, a seguir, o método da energia, ondas de tensão elástica, impacto transversal e axial vigas em balanço e vigas bi-apoiadas, percorrendo também sobre ajuste de curvas, o que torna possível a construção de superfícies de tensão equivalente máxima para problemas de impacto.

3.1. PROPAGAÇÃO DE UM PULSO COMPRESSIVO

modelo uniaxial

A fig.(3.1) mostra uma barra isotrópica uniforme fixa no espaço, a qual será transmitido um pulso compressivo longitudinal. O é a origem do sistema de coordenadas fixas. Então $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$ estipula o deslocamento do plano $A'B'$, que é paralelo a AB , mas inicialmente distante $(x + dx)$ da origem O . Uma força aplicada rapidamente no tempo $t=0$ no plano $x=0$ causará uma perturbação que será propagada elasticamente ao longo da barra tal que sobre o plano AB , no tempo t , haverá uma tensão nominal compressiva, $-\mathbf{s}_x$.

O balanço de forças no elemento $ABB'A'$, mostrado na fig. (3.2), no estado descarregado, provoca-lhe uma aceleração, tal que a equação do movimento para um elemento da barra de área de seção transversal inicial A é:

$$-\frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial x} \cdot dx \cdot A = A \cdot \mathbf{r} \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Simplificando,

$$\frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial x} = -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

FIGURA 3.1. Barra descarregada, JOHNSON (1972).

Onde ρ é a densidade do material no estado descarregado. A deformação no elemento de comprimento ∂x é $\partial u / \partial x$. Então pode-se escrever:

$$-\frac{s_x}{\partial u / \partial x} = E \quad (3.3)$$

Onde E é o módulo de Young. Rearranjando,

$$s_x = -E \cdot \partial u / \partial x \quad (3.4)$$

Diferenciando,

$$\partial s_x / \partial x = -E \cdot \partial^2 u / \partial x^2 \quad (3.5)$$

Usando a eq.(3.2), chega-se a:

$$\rho \cdot \partial^2 u / \partial t^2 = E \cdot \partial^2 u / \partial x^2 \quad (3.6)$$

ou,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

que é a *equação da onda unidimensional* procurada.

FIGURA 3.2. Balanço de forças no elemento $ABB'A'$, JOHNSON (1972).

3.1.1. SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE ONDA

Supondo que u seja uma função do tipo:

$$u = f(x - ct) + F(x + ct) \quad (3.8)$$

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot f'(x - ct) + c \cdot F'(x + ct) \quad (3.9)$$

e,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot f''(x - ct) + c^2 \cdot F''(x + ct) \quad (3.10)$$

também,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct) + F'(x + ct) \quad (3.11)$$

então,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - ct) + F''(x + ct) \quad (3.12)$$

Consequentemente, comparando as eq.(3.10) e eq.(3.12), tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

Por comparação da eq.(3.13) com a eq.(3.7), tem-se:

$$c = \sqrt{\frac{E}{r}} \quad (3.14)$$

Na eq.(3.13), conforme JOHNSON (1972), c denota a **velocidade de propagação da perturbação elástica** através do espaço ocupado pela barra no seu estado descarregado.

3.1.2. INTENSIDADE DA TENSÃO PROPAGADA

Seja uma tensão uniforme S_x aplicada repentinamente na extremidade de uma barra, conforme fig.(3.3). No primeiro instante, uma camada infinitesimalmente fina

¹ Para $f'(x - ct)$ ou $F'(x + ct)$ poder-se-ia ter funções tais como $\sin(w)$, e^w , w^n , etc., onde w é $(x - ct)$ ou $(x + ct)$. Na hipótese de uma das funções da eq.(3.12) ser nula, tem-se simplesmente $u = f(x - ct)$.

de material sofre compressão. Uma perturbação elástica caminha então ao longo da barra, com uma velocidade c , transferindo sempre a compressão à camada mais próxima. Após um intervalo de tempo dt , um comprimento dx está comprimido, permanecendo o restante da barra em repouso.

FIGURA 3.3. Onda de compressão ao longo de uma barra elástica.

Assim,
$$c = dx/dt \quad (3.16)$$

A deformação na zona comprimida pode ser escrita como:

$$e_x = d/dx \quad (3.17)$$

d é o deslocamento das partículas na zona comprimida. A velocidade média das partículas na zona comprimida é:

$$v = d/dt$$

Então,
$$v = e_x \cdot dx/dt$$

Sabendo que
$$e_x = s_x/E$$

vem:
$$v = s_x/E \cdot dx/dt$$

ou:
$$v = s_x/E \cdot c$$

Das equações de impulso e momento,

$$m_2 \cdot v = F \cdot dt$$

$$r \cdot A \cdot dx \cdot v = A \cdot s_x \cdot dt$$

$$r \cdot A \cdot c \cdot dt \cdot v = A \cdot s_x \cdot dt$$

Então,
$$s_x = c \cdot r \cdot v \quad (3.18)$$

Ou,
$$s_0 = c \cdot r \cdot v \quad (3.19)$$

3.2. PROPAGAÇÃO DE UM PULSO TORSIONAL

Seja um torque T , que varia com o tempo, repentinamente aplicado na extremidade esquerda de uma barra no tempo $t=0$. A uma distância x desta extremidade, veja fig.(3.4), suponha que o plano transversal tenha rotacionado de um ângulo q relativamente a sua posição original no tempo $t=0$, da seção que contém a origem do sistema. Suponha também ser w a velocidade angular nesta seção. Então, um elemento da barra de comprimento dx mantém uma rotação relativa de uma extremidade com respeito a outra de $dx \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$. Seja $\frac{\partial T}{\partial x}$ a taxa da mudança no torque ao longo da barra prismática com distância x . Segundo JOHNSON (1972), o torque líquido no elemento é $dx \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$ e este mesmo produz uma aceleração angular de $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$, de forma que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = (I \cdot dx) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

onde $(I \cdot dx)$ é o momento de inércia do elemento de comprimento dx em torno do eixo da barra. De acordo com BEER (1995), no seu capítulo sobre ângulo de torção no regime elástico (eq.(3.16), pag.130), podemos escrever

$$T = J \cdot G \frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.21)$$

Combinando as eq.(3.21) e (3.20), chegamos a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = JG \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = I \frac{\partial^2 q}{\partial t^2},$$

Então,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{I}{JG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2},$$

ou

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{JG}{I} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

A eq.(3.22) é idêntica à equação de onda unidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, o que sugere

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} = c_T^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} \quad (3.23)$$

onde

$$c_T^2 = \frac{JG}{I} \quad (3.24)$$

c_T é a velocidade de propagação de um pulso torsional elástico ao longo da barra.

Para um círculo de raio r , o momento polar $J = \frac{1}{2}pr^4$ e a inércia $I = \frac{1}{2}pr^4 r$ conduzem a expressão seguinte:

$$c_T^2 = \frac{G \frac{pr^4}{2}}{\frac{pr^4}{2} r} \Rightarrow c_T^2 = G/r \quad (3.25)$$

FIGURA 3.4. Propagação de pulso torsional, JOHNSON (1972).

Se tivermos uma barra de seção quadrada de lado $2a$ o valor de c_T será $0.919\sqrt{G/r}$, pois $J \equiv 2.25a^4$.

3.3. ONDA DE TORÇÃO EM TUBOS DE PAREDE FINA

A um tubo de parede fina é dado um torque impulsivo, tal que a área A tenha uma velocidade angular w . Uma onda de tensão torsional é então propagada paralela ao eixo do tubo com uma velocidade c_t , tal que no tempo t o comprimento $c_t \cdot t$ terá sido trazido ao movimento com a velocidade de regime w .

FIGURA 3.5. Onda torsional em tubos de parede fina, JOHNSON (1972).

A tensão cisalhante média t que prevalece no comprimento $c_t \cdot t$ é conseguido ao equacionar o torque impulsivo à variação na quantidade de movimento angular, da seguinte forma, descrita por JOHNSON (1972):

$$[(\tau \cdot A) \cdot r] \cdot t = t \cdot c_t \cdot A \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \omega$$

$\underbrace{\quad}_{\text{força}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{comprim}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{volume}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{massa}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{inércia}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{quantidade de movimento angular}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{torque}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{impulso}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{volume}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{massa}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{inércia}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{quantidade de movimento angular}}$

w é a velocidade angular da seção transversal.

Assim,
$$t = r \cdot c_t \cdot r \cdot w^2 \quad (3.26)$$

² Um tubo de parede grossa pode ser considerado como composto de um certo número de tubos de parede fina para cada qual vale a relação $c_t = \sqrt{G/r}$.

3.4. IMPACTO LONGITUDINAL EM VIGAS

3.4.1. TENSÕES DE IMPACTO PELO MÉTODO DA ENERGIA

A apresentação deste método cumpre apenas finalidade histórica, pois ele é extremamente contra a segurança, uma vez que o deslocamento é aproximado como linear, eq.(3.27), e a tensão é assumida constante ao longo do comprimento da viga.

Na situação esquematizada pela fig.(3.6), o golpe do corpo na extremidade da viga gera uma onda de compressão que, viajando através da barra, é refletida pela parede (engaste), retornando até a massa m_2 , será novamente refletida pela superfície de contato e assim por diante³. A tensão máxima deve então ser várias vezes maior que a obtida pela eq.(3.19). A análise exata deste problema é bastante complexa. Contudo, uma solução aproximada, baseada no princípio da conservação da energia, pode ser obtida se hipóteses simplificadoras forem feitas.

A massa m_2 tem velocidade v antes do impacto, mas, após o impacto a velocidade é reduzida a v_d . Se é assumido que a massa m_2 e a barra permanecem em contato após a colisão, a extremidade da barra também tem a velocidade v_d . A solução do problema pelo método da energia é baseada na hipótese de que a todos os elementos na barra, sob impacto, são instantaneamente dadas velocidades que são proporcionais as suas distâncias da parede. Então, se u é a velocidade para o elemento a distância x da parede, vale a seguinte proporção, SPOTTS & SHOUP (1998):

$$\frac{u}{x} = \frac{v_d}{l} \quad \text{ou} \quad u = \frac{v_d}{l} x \quad (3.27)$$

FIGURA 3.6. Impacto na extremidade livre de uma barra, SPOTTS & SHOUP (1998).

A energia cinética do sistema, após o impacto, é dada por

$$E_c = \frac{m_2}{2} v_d^2 + \int_0^l \frac{u^2}{2} m_L dx \quad (3.28)$$

onde m_L é a massa por metro linear da barra ($m_L = m_1/L$). Substituindo o valor de u da eq.(3.27) na eq.(3.28) acima e integrando, tem-se:

$$E_c = \frac{m_2 \cdot v_d^2}{2} \left[1 + \frac{m_1}{3m_2} \right] \quad (3.29)$$

Aplicando o princípio da conservação da quantidade de movimento,

$$m_2 \cdot v = \int_0^l u \cdot m_L dx + v_d \cdot m_2$$

Usando a eq.(3.27), pode-se escrever:

$$m_2 \cdot v = \int_0^l \frac{v_d \cdot x}{l} \cdot m_L dx + v_d \cdot m_2$$

$$m_2 \cdot v = \frac{v_d}{l} \frac{x^2}{2} \frac{m_1}{l} \Big|_0^l + v_d \cdot m_2$$

$$m_2 \cdot v = \frac{v_d \cdot m_1}{2} + \frac{2}{2} v_d \cdot m_2$$

$$v_d = \frac{2m_2 \cdot v}{m_1 + 2m_2}$$

Substituindo o valor de v_d obtido da eq.(3.29) da Energia Cinética, vem:

$$E_c = 2m_2 \cdot v^2 \cdot \left[1 + \frac{m_1}{3m_2} \right] \Big/ \left[2 + \frac{m_1}{m_2} \right]^2 \quad (3.30)$$

A dedução apresentada não leva em conta a dissipação de energia durante o impacto. Essa simplificação faz supor que o corpo que se choca não deve ricochetear na estrutura e voltar, conservando parte de sua energia. Por sua vez, essa condição exige que a inércia da estrutura possa ser desprezada em face da inércia do corpo impactador. Na prática, nenhuma dessas condições fica satisfeita, e só uma parte da energia cinética do corpo se transfere para a estrutura. Assumir que ocorra uma transferência total de energia do corpo para a estrutura significa dimensionar a favor

³ Caso o corpo impactador e o corpo impactado não estejam mais em contato a intensidade da onda refletida será bem menor.

da segurança. Segundo BEER (1995), o valor máximo do trabalho de deformação elástica é representado pela equação:

$$U_{MAX} = \int \frac{s_{MAX}^2}{2E} dV_{OL} \quad (3.31)$$

No caso da barra uniforme da fig.(3.6), a tensão máxima tem o mesmo valor ao longo de toda a barra, então $U_{MAX} = s_{MAX}^2 V_{OL} / 2E$. Explicitando nessa expressão o valor s_{MAX} ,

$$s_{MAX} = \sqrt{\frac{2U_{MAX}E}{V_{OL}}} \quad (3.32)$$

Igualando, portanto, o trabalho de deformação elástica à energia cinética desenvolvida sob a forma da eq.(3.30), pode-se escrever:

$$s_{MAX} = \sqrt{\frac{2E}{V_{OL}} \cdot \underbrace{2m_2 \cdot v^2}_{\text{Energia Cinética - eq.(3.30)} \cdot \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}}$$

Sabendo que $V_{ol} = Al$, e que a rigidez axial da barra pode ser representada por

$k = AE/l$, pode-se substituir V_{ol} por $V_{ol} = A^2 E/k$:

$$s_{MAX} = \sqrt{\frac{2E \cdot k}{A^2 \cdot E} \cdot 2m_2 \cdot v^2 \cdot \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}}$$

Com mais alguma manipulação matemática, pode-se escrever:

$$s_{MAX} = \frac{v}{A} \sqrt{4k \cdot m_2 \cdot \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}}$$

FIGURA 3.7. Gráfico de tensão máxima num ensaio de impacto frontal de massa contra barra engastada em apenas uma das extremidades.

A expressão acima pode ser simplificada,

$$s_{\max} = \underbrace{2 \frac{v}{A} \sqrt{k \cdot m_1}}_{S_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_b} \cdot \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}}$$

E, finalmente,

$$\frac{s_{\max}}{s_0} = 2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}} \quad (3.33)$$

A eq.(3.33), derivada da formulação da energia, é representada pela fig.(3.7):

Na mesma linha de raciocínio, SHIGLEY (1984) equaciona a tensão causada pelo impacto de um corpo em queda livre na extremidade de uma viga posicionada na vertical, fig.(3.8) :

$$s_{MAX} = \frac{m_2 g}{A} + \frac{m_2 g}{A} \sqrt{1 + \frac{2A \cdot E \cdot h}{m_2 g \cdot L}} \quad (3.34)$$

É interessante notar nesta equação que, quando $h=0$, ou seja, se o corpo é solto já em contato com a extremidade⁴, a tensão é dada por:

$$s_{MAX} = 2 \frac{m_2 g}{A} \quad (3.35)$$

Isto ajuda a compreender por que os projetistas no passado dobravam arbitrariamente o fator de segurança quando estava previsto impacto. As equações de tensão e deflexão desenvolvidas para estruturas elásticas sem massa quase nunca fornecem valores conservadores, pois a constante dinâmica de mola difere ligeiramente do valor estático, que foi usado no desenvolvimento das equações anteriores e os sistemas reais possuem massa contínua ou distribuída.

FIGURA 3.8. Impacto de um corpo em queda livre, SHIGLEY (1984).

⁴ Isto dá origem ao que se convencionou chamar de "carga subitamente aplicada". Nesta conceituação, não há choque. Para haver choque deve-se ter energia cinética, isto é, deve haver, antes do contato, velocidade de aproximação.

O desenho esquemático da montagem de uma válvula na cabeça de um motor está mostrado na fig.(3.9a). Trata-se de um exemplo típico de um sistema came-seguidor. O modelo matemático equivalente do sistema de cames é mostrado na fig.(3.9b). É muito complicado para ser analisado no papel, mas perfeitamente capaz de ser resolvido computacionalmente, SHIGLEY (1984).

FIGURA 3.9. (a) Corte mostrando a válvula na cabeça de um motor de automóvel; (b) modelo matemático de um sistema de cames, SHIGLEY (1984).

3.4.2. APLICAÇÃO DA TEORIA ELEMENTAR DE ONDAS DE TENSÃO UNIDIMENSIONAL

Seja m_2 a massa do corpo impactador que se choca contra a viga por unidade de área da seção transversal desta viga, e v_o a velocidade inicial do corpo. Sendo que este corpo seja rígido, a velocidade das partículas na extremidade da viga no instante do impacto ($t=0$) é igual a v_o , e a tensão inicial de compressão, pela eq.(3.19), TIMOSHENKO & GOODIER (1980), escreve-se:

$$s_0 = v_o \cdot \sqrt{E \cdot r} \quad (3.36)$$

A velocidade do corpo e a pressão sobre a barra decrescerão gradualmente, devido a flexibilidade da barra. Como consequência, uma onda de tensão compressiva

decrecente irá se propagar ao longo do comprimento da barra, em direção ao engastamento. Esta tensão poderá ser determinada resolvendo-se a equação do movimento que se segue:

$$m_2 \frac{dv}{dt} = -SA \quad (3.37)$$

Substituindo v pela eq.(3.20), chegamos a:

$$\frac{m_2}{\sqrt{Er}} \frac{dS}{dt} = -SA \quad (3.38)$$

que resolvida fornece:

$$S = S_0 e^{-\left(\frac{t\sqrt{Er}}{m_2} \right)} \quad (3.39)$$

verdadeira no domínio do tempo $t < 2l/c$. Quando $t = 2l/c$ a onda de compressão retorna à interface do contato e, como a velocidade do impactador não pode ser modificada repentinamente, ela será refletida como se tivesse atingido um engastamento e a tensão de compressão na superfície de contato repentinamente aumentará de $2S_0$.

FIGURA 3.10. Trajetória das ondas de compressão elástica, TIMOSHENKO & GOODIER (1980).

A cada intervalo de tempo $T = 2l/c$ haverá o retorno de ondas de compressão, contribuindo para o acréscimo no valor da tensão. Para o primeiro intervalo de tempo, $0 < t < T$, a eq.(3.39) é satisfatória. No entanto, ela deverá ser modificada para levar em conta a chegada de novas ondas de compressão a cada final de

intervalo T . No segundo intervalo, a situação está como se apresenta na fig.(3.10c). Na situação descrita pela fig.(3.10c) a tensão total de compressão é produzida por duas ondas que se afastam da extremidade livre⁵ da barra e por uma que se aproxima. Se designarmos por $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$. . . as tensões totais de compressão na extremidade livre depois dos respectivos intervalos T , $2T$, $3T$, . .

As ondas que retornam a esta extremidade são simplesmente aquelas refletidas durante o intervalo precedente defasadas do intervalo T , devido ao tempo gasto para ir da extremidade livre até o engaste e retornar até o ponto de origem. Então, a compressão produzida por estas ondas na extremidade do choque é obtida pela substituição de t por $t-T$ na expressão para o compressão produzida pelas ondas refletidas durante o intervalo precedente. A expressão geral para a tensão de compressão total durante um intervalo qualquer $nT < t < (n+1)T$ é, portanto,

$$s = S_n(t) + S_{n-1}(t-T) \quad (3.40)$$

Na extremidade livre a velocidade das partículas é obtida pela diferença entre a velocidade devida à pressão $S_n(t)$ das ondas que se afastam desta extremidade e a velocidade devida à pressão $S_{n-1}(t-T)$ das ondas que retornam a esta extremidade. Logo, da eq.(3.36), vem:

$$v = \frac{1}{\sqrt{Er}} [S_n(t) - S_{n-1}(t-T)] \quad (3.41)$$

A relação entre $S_n(t)$ e $S_{n-1}(t-T)$ poderá ser obtida utilizando-se a equação do movimento, eq.(3.37), do impactador. Adotando α como relação entre a massa da barra e a massa do corpo, temos:

$$a = \frac{l r}{m_2} \quad (3.42)$$

Procedendo em conformidade com o anteriormente exposto, chegamos às expressões para os valores consecutivos $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$:

$$s_0(t) = s_0 e^{-\left(\frac{2at}{T}\right)}, \quad (3.43)$$

⁵ Extremidade livre de uma viga em balanço é a que efetivamente entra em contato com o corpo impactador, enquanto a outra extremidade encontra-se engastada.

para $0 < t < T$

$$s_1(t) = s_0 + \mathbf{s}_0 e^{-2a[t/T-1]} \left[1 + 4a \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right], \quad (3.44)$$

para $1 < t < 2T$

$$s_2(t) = s_1 + \mathbf{s}_0 e^{-2a[t/T-2]} \left[1 + 2(4a) \left(2 - \frac{t}{T} \right) + 2(4a^2) \left(2 - \frac{t}{T} \right)^2 \right], \quad (3.45)$$

para $2 < t < 3T$

$$s_3(t) = s_2 + \mathbf{s}_0 e^{-2a[t/T-3]} \left[1 + 2(6a) \left(3 - \frac{t}{T} \right) + 2(3)(4a^2) \left(3 - \frac{t}{T} \right)^2 + \frac{2(2)3}{3(3)} 8a^3 \left(3 - \frac{t}{T} \right)^3 \right],$$

para $3 < t < 4T$ (3.46)

... e assim por diante.

Na figura a seguir, fig.(3.11), estão representadas para $\mathbf{s}_0 = 1$ e para quatro relações distintas $a = 1/6, 1/4, 1/2, 1$. O valor máximo da tensão equivalente depende da razão de massas a . Para $a = 1/2$ e $a = 1$ esta tensão tem seu máximo em $t = T$. Para $a = 1/4$ e $a = 1/6$, a máxima tensão ocorre em $t = 2T$. O fim do impacto é marcado pelo valor nulo da tensão equivalente na extremidade da viga.

De acordo com JOHNSON (1972), A tensão máxima na extremidade engastada de uma viga em balanço, sujeita a impacto longitudinal na outra extremidade, (veja fig.(3.13)), pode ser bem ajustada pela seguinte equação,

$$\frac{\mathbf{s}_{MAX}}{\mathbf{s}_0} = 1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} + \frac{2}{3}} \quad (3.47)$$

Observa-se que para grandes valores de $1/a$, esta expressão fornece uma ótima aproximação. Para um valor muito pequeno de α o tempo de contato pode ser calculado pela fórmula elementar,

$$t = \frac{pl}{c} \sqrt{\frac{1}{a}} \quad (3.48)$$

que é obtida desprezando-se a massa da barra e supondo que a duração do impacto seja igual à metade do período da oscilação harmônica simples do corpo ligado à haste, TIMOSHENKO & GOODIER (1980).

FIGURA 3.11. Tensão na extremidade livre durante o impacto, TIMOSHENKO & GOODIER (1980).

É necessário, portanto, um tempo de simulação menor para razões de massa a maiores, eq.(3.48), fato evidenciado na fig.(3.12). A título de exemplo, tomemos, na

fig.(3.12), $a=l$. Para este caso em particular, o tempo $t = 3 \cdot l/c$ é suficiente para registrar todo o histórico das tensões resultantes na face de contato e, para $a=l/4$, o tempo $t = 6 \cdot l/c$ é o bastante.

FIGURA 3.12. Tensão na interface de contato.

FIGURA 3.13. Tensão máxima na extremidade engastada da viga em balanço sujeita a impacto na extremidade livre.

3.5. IMPACTO TRANSVERSAL EM VIGAS

O impacto transversal de um corpo rígido de massa m_2 e velocidade inicial v com uma viga uniforme de massa $m_1 = \rho AL$ tem sido investigada por vários métodos similarmente aos empregados para a análise de impacto longitudinal. A versão mais rudimentar do processo consiste em substituir a viga por uma mola sem massa de constante k , como ilustrado na fig.(3.14). O valor de k representa a força estática requerida para produzir uma deflexão transversal unitária w , atingindo o valor de $48EI/L^3$ para carregamento central. O balanço de energia para este sistema equaliza a energia cinética inicial do impactador à máxima energia de deformação armazenada pela mola no instante da máxima deflexão dinâmica w_m , como apresentado no trabalho de GOLDSMITH (1960).

FIGURA 3.14. Impacto central em uma viga bi-apoiada, GOLDSMITH (1960).

Uma vez que a deflexão estática é $w_s = m_2 g / k$, a razão entre deflexão dinâmica e estática pode ser expressa por meio da equação apresentada por GOLDSMITH (1960):

$$\frac{w_m}{w_s} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{w_s g}} \quad (3.49)$$

Discrepâncias significativas entre a eq.(3.49) e resultados experimentais foram atribuídos ao fato de que efeitos inerciais não foram considerados. Na tentativa de retificar esta omissão, foi deduzida a equação abaixo, conhecida como *equação de*

Cox, que partiu do balanço de energia e das leis de conservação da quantidade de movimento,

$$\frac{w_m}{w_s}\left(\frac{L}{2}\right) = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 k}{m_2 g^2 \left(1 + \frac{17}{35} a\right)}} \quad 6 \quad (3.50)$$

Note que nenhuma das equações anteriores fornecem informação alguma a respeito de tensões ou deformações na viga. Uma análise mais acurada do problema, do ponto de vista da teoria de vibrações, conduz à seguinte equação para deflexão:

$$w(x,t) = \frac{L^2 v}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^3} \frac{\frac{\sin\left(\frac{2f_i x}{L}\right)}{\cos(f_i)} - \frac{\sinh\left(\frac{2f_i x}{L}\right)}{\cosh(f_i)}}{\frac{1}{\cos^2(f_i)} - \frac{1}{\cosh^2(f_i)} + \frac{2a}{f_i^2}} \sin\left(\frac{4f_i^2 a^2}{L^2} t\right) \quad (3.51)$$

Onde x é o ponto da viga sob investigação. Sendo que $a^4 = EI/rA$ e f_i refere-se a cada uma das raízes da seguinte equação transcendental:

$$f_i(\tan(f_i) - \tanh(f_i)) = 2a \quad (3.52)$$

As primeiras sete raízes da eq.(3.52) são expostas na tab.(3.1) abaixo:

a	Pequeno	1/10	1/2	1	2	Grande
ϕ_1	0.75π	0.731	1.04799	1.19161	1.31965	0.5π
ϕ_2	1.25π	3.931	4.03652	4.11972	4.23720	1.5π
ϕ_3	2.25π	7.083	7.13400	7.18994	7.28084	2.5π
ϕ_4	3.25π	10.220	10.25664	10.29839	10.37041	3.5π
ϕ_5	4.25π		13.38770	13.42093	13.48020	4.5π
ϕ_6	5.25π		16.52269	16.55021	16.60043	5.5π
ϕ_7	6.25π		19.65969	19.68824	19.72671	6.5π

TABELA 3.1. Raízes f_i da eq. (3.35) como função de a , GOLDSMITH (1960).

A eq.(3.51), devidamente mostrada pela fig.(3.15), tem sido empregada como um padrão de comparação para deflexões obtidas experimentalmente em impactos transversais sobre vigas bi-apoiadas.

⁶ Razão de massas é denotada por a , sendo $a = m_1/m_2$.

As curvas senoidais, que representam apenas o efeito dos primeiros harmônicos do modo transversal de vibração da viga são predominantes, e então uma boa aproximação da deflexão máxima no ponto de impacto pode ser obtida considerando apenas o primeiro termo da série da eq.(3.51). GOLDSMITH (1960) mostra que a deflexão máxima pode ser então aproximada por

$$w_m \approx \frac{L^2 v}{a^2} \left[f_1^2 + \frac{f_1^4}{2a} \left\{ \frac{1}{\cos^2 f_1} - \frac{1}{\cosh^2 f_1} \right\} \right]^{-1} \quad (3.53)$$

FIGURA 3.15. Deflexão em função do tempo para vigas bi-apoiadas como resultado de impacto transversal no centro $a = 1/2$, GOLDSMITH (1960).

Com raciocínio análogo ao anterior, tem-se, com base em GOLDSMITH (1960):

(a) Viga de comprimento L , bi-engastada e impactada no centro:

$$w(x,t) = \frac{\nu L^2}{2a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^2} \left[\frac{(1 - \cos f_i \cosh f_i)(\cos f_i - \cosh f_i)(\sin f_i + \sinh f_i)}{(1 - \cos f_i \cosh f_i)^2 + Q \cdot (\cos f_i - \cosh f_i)^2} \right] \cdot \left[\frac{\sinh \frac{2f_i x}{L} - \sin \frac{2f_i x}{L}}{\cosh f_i - \cos f_i} - \frac{\cosh \frac{2f_i x}{L} - \cos \frac{2f_i x}{L}}{\sinh f_i + \sin f_i} \right] \sin \frac{4f_i^2 a^2 t}{L^2} \quad (3.54)$$

Onde

$$Q = \frac{f_i(1 - \cos f_i \cosh f_i)}{\sin f_i \cosh f_i + \cos f_i \sinh f_i}$$

b) *Viga em balanço de comprimento L, engastada em x=0 e impactada na outra extremidade:*

$$w = \frac{2\nu L^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^2} \left[\frac{(\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)(\sin f_i + \sinh f_i)(\cos f_i + \cosh f_i)}{(\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)^2 + Q \cdot (\sin f_i + \sinh f_i)^2} \right] \cdot \left[\frac{\cosh \frac{f_i x}{L} - \cos \frac{f_i x}{L}}{\cosh f_i + \cos f_i} - \frac{\sinh \frac{f_i x}{L} - \sin \frac{f_i x}{L}}{\sinh f_i + \sin f_i} \right] \sin \frac{f_i^2 a^2 t}{L^2} \quad (3.55)$$

Onde

$$Q = \frac{f_i(\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)}{1 + \cos f_i \cosh f_i}$$

c) *Viga bi-apoiada de comprimento L, impactada em x = ā = L - b̄ :*

$$w_1 = \frac{\nu L^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^3} \bar{B} \left[\frac{\sin \frac{2f_i \bar{b}}{L} \sin \frac{2f_i x}{L}}{\sin f_i \cos f_i} - \frac{\sinh \frac{2f_i \bar{b}}{L} \sinh \frac{2f_i x}{L}}{\sinh f_i \cosh f_i} \right] \cdot \sin \frac{4f_i^2 a^2 t}{L^2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \bar{a} \quad (3.56a)$$

$$w_2 = \frac{\nu L^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^3} \bar{B} \left[\frac{\sin \frac{2f_i \bar{a}}{L} \sin \frac{2f_i(L-x)}{L}}{\sin f_i \cos f_i} - \frac{\sinh \frac{2f_i \bar{a}}{L} \sinh \frac{2f_i(L-x)}{L}}{\sinh f_i \cosh f_i} \right] \cdot \sin \frac{4f_i^2 a^2 t}{L^2} \quad \text{para } \bar{b} \leq x \leq L \quad (3.56b)$$

Onde,

$$\bar{B} = \left[\frac{\bar{b} \operatorname{sen}^2 \frac{2f_i \bar{a}}{L} + \bar{a} \operatorname{sen}^2 \frac{2f_i \bar{b}}{L}}{L \operatorname{sen}^2 f_i \cos^2 f_i} - \frac{\bar{b} \operatorname{senh}^2 \frac{2f_i \bar{a}}{L} + \bar{a} \operatorname{senh}^2 \frac{2f_i \bar{b}}{L}}{L \operatorname{senh}^2 f_i \cosh^2 f_i} + \frac{2Q}{f_i^2} \right]^{-1}$$

Sendo

$$2Q = f_i \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2f_i \bar{b}}{L} \operatorname{sen} \frac{2f_i \bar{a}}{L}}{\operatorname{sen} f_i \cos f_i} - \frac{\operatorname{senh} \frac{2f_i \bar{b}}{L} \operatorname{senh} \frac{2f_i \bar{a}}{L}}{\operatorname{senh} f_i \cosh f_i} \right]$$

FIGURA 3.16. Viga em balanço sofrendo impacto em sua extremidade livre da massa m_2 a uma velocidade v , GOLDSMITH (1960).

FIGURA 3.17. Deflexão em função do tempo para vigas em balanço como resultado de impacto transversal na extremidade livre, $a = 1/2$.

Valendo-se dos resultados de deslocamento da eq.(3.55), pode-se chegar a resultados de tensões geradas no impacto transversal.

(a) *Viga de comprimento L, bi-apoiada e impactada no centro:*

$$s(x,t) = E \frac{hL^2 v}{2a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^3} \frac{-\left(\frac{2f_i}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2f_i x}{L}\right) - \left(\frac{2f_i}{L}\right)^2 \sinh\left(\frac{2f_i x}{L}\right)}{\frac{1}{\cos^2(f_i)} - \frac{1}{\cosh^2(f_i)} + \frac{2a}{f_i^2}} \sin\left(\frac{4f_i^2 a^2}{L^2} t\right) \quad (3.57)$$

b) *Viga em balanço de comprimento L, engastada em x=0 e impactada na outra extremidade:*

$$s(x,t) = E \frac{h v L^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i^2} \left[\frac{(\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)(\sin f_i + \sinh f_i)(\cos f_i + \cosh f_i)}{(\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)^2 + Q \cdot (\sin f_i + \sinh f_i)^2} \right] \cdot \left[\frac{\left(\frac{f_i}{L}\right)^2 \cosh \frac{f_i x}{L} + \left(\frac{f_i}{L}\right)^2 \cos \frac{f_i x}{L}}{\cosh f_i + \cos f_i} - \frac{\left(\frac{f_i}{L}\right)^2 \sinh \frac{f_i x}{L} + \left(\frac{f_i}{L}\right)^2 \sin \frac{f_i x}{L}}{\sinh f_i + \sin f_i} \right] \sin \frac{f_i^2 a^2 t}{L^2} \quad (3.58)$$

Sendo

$$Q = \frac{f_i (\sin f_i \cosh f_i - \cos f_i \sinh f_i)}{1 + \cos f_i \cosh f_i}$$

h: altura da secção transversal da viga, fig.(3.4).

4. ANÁLISE NÃO LINEAR: SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DE SISTEMAS QUE SOFREM IMPACTO

Basicamente, a resolução do sistema $[K]\{x\} = \{F\}$ corresponde a análise linear de um problema estrutural, porque o vetor de deslocamentos $\{x\}$ é função linear do vetor de forças aplicadas $\{F\}$, isto é, sendo as cargas $\mathbf{a}\{F\}$ invés de $\{F\}$, com $\mathbf{a}$ constante, o deslocamento correspondente é $\mathbf{a}\{x\}$. Quando este não é o caso, trata-se de uma análise não linear. BATHE (1995) atribui o fenômeno da não linearidade a três grandes causas:

- Grandes deslocamentos, rotações e deformações que ocorrem durante o processo, caracterizando *não linearidade cinemática*.
- Plasticidade e viscoplasticidade, caracterizando *não linearidade constitutiva*.
- Contato e atrito, caracterizando *não linearidade de condições de contorno*.

Em um problema de impacto podem estar presentes todas as formas possíveis de não linearidade. Isso vai depender, sobretudo, da severidade do choque, relacionada intrinsecamente às velocidades e massas dos corpos envolvidos. O escopo desta dissertação, contudo, limitará o problema da não linearidade às condições de contorno.

4.1. RESOLVENDO A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

O procedimento básico consta da derivação de fórmulas de recorrência que relacionem os valores de deslocamento $\{\mathbf{d}\}$, velocidade $\{\dot{\mathbf{d}}\}$ e aceleração $\{\ddot{\mathbf{d}}\}$ num instante de tempo t a estas mesmas quantidades num tempo posterior $t + \Delta t$, onde

Δt é o incremento no tempo. As fórmulas de recursão permitem à solução caminhar no tempo, tendo início com as condições iniciais no tempo $t = 0$, continuando passo a passo até o encontro da precisão estipulada. As receitas computacionais pertencem a duas grandes classes: Algoritmos Explícitos e Algoritmos Implícitos.

Nas fórmulas de recursão explícitas um conjunto de equações algébricas desacopladas é resolvida a cada passo no tempo para $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$, enquanto que nas fórmulas de recursão implícitas um conjunto de equações acopladas é resolvida a cada passo no tempo para $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$.

As diferenças entre os métodos supracitados está na eficiência computacional, precisão e estabilidade, cujo escopo escapam à presente discussão.

4.1.2. MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS

É deduzido a partir da combinação dos métodos de diferenças posteriores e diferenças anteriores, que utilizam ambos o conceito da derivação numérica por expansão da série de Taylor. Através dele pode-se escrever:

$$\{\dot{\mathbf{d}}\}_t = \frac{\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} - \{\mathbf{d}\}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (4.1)$$

$$\{\ddot{\mathbf{d}}\}_t = \frac{\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} - 2\{\mathbf{d}\}_t + \{\mathbf{d}\}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (4.2)$$

sendo que o erro cometido pelo truncamento da série é da ordem de Δt^2 . Obtém-se as fórmulas de recorrência para $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$ escrevendo-se a equação do movimento no tempo t e absorvendo as eq.(4.1) e (4.2). Assim,

$$[M]\{\ddot{\mathbf{d}}\}_t + [C]\{\dot{\mathbf{d}}\}_t + [K]\{\mathbf{d}\}_t = \{F(t)\} \quad (4.3)$$

Introduzindo as eq.(4.1) e (4.2), obtém-se:

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} = \{F(t)\} - \left[[K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right] \{\mathbf{d}\}_t - \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{\mathbf{d}\}_{t-\Delta t} \quad (4.4)$$

sendo $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$, do lado esquerdo, o vetor de incógnitas nodais e todos os termos do lado direito são conhecidos. A eq.(4.4) pode ser resumida da seguinte forma:

$$[\bar{K}]\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} = \{\bar{F}\}_t \quad (4.5)$$

Onde

$$[\bar{K}] = \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right]$$

e

$$\{\bar{F}\}_t = \{F(t)\} - \left[[K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right] \{d\}_t - \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{d\}_{t-\Delta t}$$

Sendo $[\bar{K}]$ a matriz de rigidez efetiva e $\{\bar{F}\}$ o vetor de carregamento efetivo. Se as matrizes usadas na formulação são utilizadas na forma completa então fica caracterizado o algoritmo implícito, enquanto que o uso das matrizes de massa e amortecimento na forma agrupada, $[\bar{K}]$ torna-se diagonalizada e a eq.(4.5) é desacoplada, resultando num algoritmo explícito. Apesar da eficiência computacional do algoritmo explícito, sua desvantagem reside na escolha do tamanho dos passos no tempo, que não devem exceder Δt_{cr} , o que o torna condicionalmente estável. Uma solução estável depende da escolha

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \leq \frac{T_n}{p} \quad (4.6)$$

onde T_n é o menor período de vibração de um sistema de tamanho n , correspondente ao mais alto modo de vibrar, w_n , que é $T_n = 2p/w_n$.

FIGURA 4.1. Aproximação do método das diferenças centrais para a primeira derivada.

O cálculo de $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$ envolve o conhecimento de $\{\mathbf{d}\}_t$ e $\{\mathbf{d}\}_{t-\Delta t}$ e, portanto, é necessário um procedimento de partida. Uma vez que $\{\mathbf{d}\}_{t=0}$ e $\{\dot{\mathbf{d}}\}_{t=0}$ são condições iniciais conhecidas, a aceleração $\{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t=0}$ é encontrada a partir da equação de movimento, eq. (4.3). A eq.(4.1) pode ser usada, desta forma, no cálculo de $\{\mathbf{d}\}_{-\Delta t}$:

$$\{\mathbf{d}\}_{-\Delta t} = \{\mathbf{d}\}_{t=0} - \Delta t \{\dot{\mathbf{d}}\}_{t=0} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t=0} \quad (4.7)$$

4.1.3. MÉTODO DE NEWMARK

Trata-se de um método implícito de integração no tempo, incondicionalmente estável. Ele trabalha com uma média da aceleração durante cada passo individual no tempo. Então, valendo-se das condições iniciais no início de cada passo no tempo, o deslocamento e a velocidade no final deste mesmo passo é previsto usando as fórmulas para aceleração constante. Daí, as equações de Newmark para o deslocamento e velocidade no tempo $t + \Delta t$ são:

$$\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{d}\}_t + \{\dot{\mathbf{d}}\}_t \Delta t + \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{\text{médio}} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (4.8a)$$

$$\{\dot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{\mathbf{d}}\}_t + \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{\text{médio}} \Delta t \quad (4.8b)$$

onde,

$$\{\ddot{\mathbf{d}}\}_{\text{médio}} = \frac{\{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{\mathbf{d}}\}_t}{2} \quad (4.8c)$$

Obtém-se as fórmulas de recorrência escrevendo-se a eq.(4.3) no tempo $t + \Delta t$,

$$[M] \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t} + [K] \{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} = \{F(t + \Delta t)\}$$

Antes de mais nada, resolve-se $\{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t}$ em termos de $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$ e outros vetores, combinando as eq.(4.8c) e (4.8a). Em seguida, este resultado é inserido na eq.(4.8b) com o objetivo de expressar $\{\dot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t}$ em termos de $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$ e outros vetores. Então, a substituição de $\{\ddot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t}$ e $\{\dot{\mathbf{d}}\}_{t+\Delta t}$ na equação do movimento permite escrever a fórmula de recorrência em termos da rigidez efetiva e do vetor de carregamento:

$$[\bar{K}] \{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t} = \{\bar{F}\}_{t+\Delta t} \quad (4.9)$$

sendo a matriz efetiva expressa por:

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] \quad (4.10)$$

e o vetor de carregamento efetivo expresso por:

$$\{\bar{F}\}_{t+\Delta t} = \{F(t+\Delta t)\} + [C] \left\{ \frac{2}{\Delta t} \{\mathbf{d}\}_t + \{\dot{\mathbf{d}}\}_t \right\} + [M] \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} \{\mathbf{d}\}_t + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{\mathbf{d}}\}_t + \{\ddot{\mathbf{d}}\}_t \right\} \quad (4.11)$$

Os termos do lado direito da eq.(4.9) são conhecidos, sendo $\{\mathbf{d}\}_{t+\Delta t}$, do lado esquerdo, o vetor de incógnitas nodais. Note que a matriz de rigidez efetiva, $[\bar{K}]$, da eq.(4.10), depende da matriz de rigidez do sistema e, conseqüentemente, isto não permite diagonalizar a matriz de rigidez efetiva simplesmente diagonalizando as matrizes de massa e de amortecimento, como é possível fazer no método das diferenças centrais. Portanto, o algoritmo de Newmark é implícito, o que significa que a cada passo no tempo deve ser resolvido um conjunto de equações simultâneas.

4.2. AMORTECIMENTO

Nos problemas da mecânica dos sólidos as informações a este respeito são muito limitadas e, mais ainda quando se trata de problemas não lineares. É usual assumir que a matriz de amortecimento $[C]$ seja proporcional à matriz de massa $[M]$ e a matriz de rigidez $[K]$. Esta abordagem é conhecida como amortecimento de Rayleigh:

$$[C] = \mathbf{a}[M] + \mathbf{b}[K] \quad (4.12)$$

No método das diferenças centrais é aceita a hipótese de que $\mathbf{b} = 0$, conforme OWEN (1980):

$$[C] = \mathbf{a}[M] \quad (4.13)$$

ou

$$c_{ii} = \mathbf{a} m_{ii}^1 \quad (4.14)$$

onde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{x}_r \mathbf{w}_r \quad (4.15)$$

¹ Note que a matriz de massa é diagonal, conforme considerações em OWEN(1980), seção 10.4.1.

na qual $\mathbf{x}_r$ e $\mathbf{w}_r$ são o fator de amortecimento e frequência circular para o r -ésimo modo de vibrar. Esta modelagem é um tanto quanto pobre, uma vez que $\mathbf{a}$ é o mesmo para todos os modos de vibrar. Então, se é assumido $r = 1$ os modos mais altos estarão sub-amortecidos enquanto que o oposto seria mais desejável. De qualquer forma, este é o preço pago por uma modelagem tão conveniente.

4.3. CONTATO

FIGURA 4.2. Corpos em contato no instante t .

Além de ser o principal causador de não linearidade geométrica, traz consigo o problema do atrito, que pode ser modelado por meio de diversas leis, todas não lineares. Na análise dos problemas de contato existem duas fases bem distintas:

- A primeira dedica-se a busca e localização dos contatos que estão sendo gerados
- A segunda introduz a formulação do problema de contato no contexto geral de análise pelo método dos elementos finitos, de forma que se verifiquem as condições de compatibilidade cinemática impostas pelas restrições de contato,

assegurando que não sejam produzidas penetrações entre os sólidos que se interagem.

Com relação a segunda fase, temos dois grandes algoritmos:

- Método dos multiplicadores de Lagrange
- Método da penalização

O método dos multiplicadores de Lagrange calcula de modo exato as restrições de contato, com o inconveniente de aumentar o número de incógnitas e introduzir zeros na diagonal principal da matriz de rigidez, o que sugere a troca de posições de linhas e colunas na matriz de rigidez. É um método particularmente útil quando se quer estacionar um funcional com restrições adicionais impostas, como demonstra o exemplo seguinte:

Seja o seguinte funcional: $\Pi = 2x^2 - xy + 18x + 6y$

Ele deve ser estacionado, o que implica em $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$

A condição adicional pode ser estabelecida como: $x - y = 0$

Desta forma, um novo funcional pode ser elaborado, adicionando-se incógnitas I (multiplicadores):

$$\bar{\Pi} = 2x^2 - xy + 18x + 6y + I(x - y)$$

Agora basta fazer: $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial I} = 0$

O que resultará num sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} 4x - y + I &= -18 \\ -x + 0y - I &= -6 \\ x - y + 0 &= 0 \end{aligned}$$

o que resulta em $x = y = -12$ e $I = 18$

No caso de contato, I é a força normal de contato, constante², enquanto que a restrição imposta é a distância entre as superfícies, que deve ser maior ou igual a zero.

² Modelar uma força não constante implica em aproximar a força de contato por meio de uma função.

O método da penalização exige que as restrições de contato sejam calculadas de forma aproximada, por meio de um fator de penalização. Este método não conduz a um aumento no número de incógnitas, embora possa levar a um mal condicionamento da matriz de rigidez, com o aumento do fator de penalização. Por outro lado, penetrações inaceitáveis de um sólido em outro podem resultar da escolha de um fator de penalização muito pequeno.

Considerando o contato esboçado pela fig.(4.2), pelo princípio dos trabalhos virtuais, tem-se o seguinte funcional:

$$\Pi = -\int_V \mathbf{s} \cdot d\mathbf{e} + \int_V d\mathbf{u} F^B + \int_S d\mathbf{u}^S F^S dS + \int_C d\mathbf{u}^C F^C dC \quad (4.16)$$

Onde:

$\mathbf{s}$: Tensões internas

$d\mathbf{e}$: Deformações virtuais internas

$d\mathbf{u}$: Deslocamento virtual

$d\mathbf{u}^S$: Deslocamento virtual na superfície de forças de área (pressão externa, p.ex.)

$d\mathbf{u}^C$: Deslocamento virtual na superfície de contato

F^B : Forças de campo (N / m^3)

F^S : Forças de área (N / m^2)

F^C : Forças de contato

onde são incluídas as seguintes restrições adicionais:

$$g \geq 0, \quad \mathbf{I} \geq 0, \quad g\mathbf{I} = 0$$

Com a utilização do método dos elementos finitos, os princípios variacionais e o método dos multiplicadores de Lagrange, define-se o funcional modificado:

$$\bar{\Pi}$$

então ele poderá ser estacionado conforme:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{I}} = 0$$

o que conduz a um sistema de equações da forma:

$$\begin{bmatrix} K_T & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \mathbf{I} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix}$$

Onde:

K_T : Matriz tangente de rigidez.

$$[B] = [L][N]$$

Δu : Incremento de deslocamentos

R, g : Valores residuais

FARAHANI et al. (2000) propõe um método para contato/impacto entre corpos deformáveis no qual as desvantagens dos métodos dos Multiplicadores de Lagrange e da Penalização não estão presentes. Tendo definido um corpo como contator e outro como alvo, são supostas que forças de contato são desenvolvidas entre nós do contator e a superfície alvo. O método se baseia na transformação da rigidez e eliminação dos graus de liberdade normais dos nós do contator. Garante o autor que o método é absolutamente geral e pode ser usado em problemas não lineares dinâmicos e estáticos.

Um algoritmo especial de integração também é apresentado por HU (1997), num trabalho onde é mostrado um método onde se possa evitar as falhas do clássico método dos multiplicadores de Lagrange, ao lidar com problemas de contato dinâmico com forças de inércia relativamente altas. Resultados estáveis podem ser obtidos quando o tamanho do passo de integração no tempo é pequeno.

Trabalhos relacionados podem ser encontrados também em RADCHENKO (1998) e WASFY et al. (1997).

4.3.1. DEFINIÇÕES DA SUPERFÍCIE DE CONTATO

1º PASSO: Determinar o tipo de superfície de contato que melhor define o modelo físico.

Com o objetivo de descrever adequadamente as interações entre geometrias complexas durante o contato na dinâmica do impacto, um grande número de opções de superfícies de contato estão disponíveis no software ANSYS/LS-DYNA. Estes tipos de contato incluem node-to-surface, surface-to-surface, single surface, single edge, eroding, tied, tiebreak, drawbead, e opções de contato rígido. Para análises mais gerais, as opções mais recomendadas são:

- Contato automático de superfícies simples (ASSC)

- Contato de nó contra superfície (NTS)
- Contato de superfície contra superfície (STS)

	Superfície simples	Nós x Superfície	Superfície x Superfície
Geral	SS	NTS	STS, OSTs
Automático	ASSC	ANTS	ASTS
Rígido		RNTR	ROTR
Tied		TDNS	TDSS
Tiebreak		TNTS	TSTS
Eroding	ESS	ENTS	ESTS
Drawbead		DRAWBEAD	

TABELA 4.1 Tipos de contato e opções disponíveis no LS-DYNA.

TIPOS DE CONTATO

Como mostrado na tabela anterior, existem três tipos de contato básico:

1. CONTATO DE SUPERFÍCIES SIMPLES (SS, ASSC, ESS)

Estabelecido quando uma superfície de um corpo toca a si mesma ou a superfície de um outro corpo. Neste modelo, o programa automaticamente determina qual superfície dentro do modelo pode vir a entrar em contato. Consequentemente, é o tipo de contato mais simples de se definir, porque não se exige definição de superfície alvo e contatora. Utilizado na maioria das aplicações envolvendo impacto.

2. CONTATO DE NÓ CONTRA SUPERFÍCIE (NTS, ANTS, RNTR, TDNS, TNTS, ENTS, DRAWBEAD)

É o tipo de contato estabelecido quando um nó da superfície contatora penetra a superfície alvo. Comumente usado para contatos gerais entre duas superfícies. Usa as mesmas regras do ANSYS para determinar qual superfície é alvo ou contatora: *A superfície plana, côncava, possuindo malha mais grosseira, maior rigidez ou sendo consideravelmente maior que a outra é considerada alvo, enquanto que a que restar é considerada superfície contatora.*

3. CONTATO SUPERFÍCIE CONTRA SUPERFÍCIE (STS, OSTS, ASTS, ROTR, TDSS, TSTS, ESTS, SE)

Ocorre quando uma superfície de um corpo penetra a superfície de outro. Tipo de contato mais utilizado em corpos que possuem formas arbitrárias e áreas de contato relativamente grandes. É mais eficiente para corpos que experimentam grandes deslizamentos, como blocos deslizando em um plano ou esferas escorregando dentro de uma canaleta.

OPÇÕES DE CONTATO

Para cada um dos três tipos de contato há várias opções de contato disponíveis:

1. CONTATO GERAL (SS, NTS, STS, OSTS)

Utiliza o mais simples dos algoritmos de contato. As opções NTS e STS são duas das três opções mais recomendadas para o ANSYS/LSDYNA. A principal vantagem no uso deste algoritmo está na sua extrema rapidez e robustez. A única preocupação está em definir qual lado da superfície é sólido e qual lado é ar. Esta definição é automática quando se trata de elementos sólidos, mas o mesmo não pode ser dito do elemento casca.

2. CONTATO AUTOMÁTICO (ASSC, ANTS, ASTS)

Um dos algoritmos mais utilizados. A principal diferença entre *contato geral* e *contato automático* é que a orientação da superfície de contato para o elemento shell é automaticamente determinada pelo algoritmo de *contato automático*.

3. CONTATO DE DESGASTE

Uma das superfícies em contato está sujeita a falha.

4. CONTATO RÍGIDO (RNTR, ROTR)

Tipicamente utilizado na dinâmica de multi-corpos, onde todos os corpos são rígidos.

4. CONTATO AMARRADO (TDNS, TDSS)

As superfícies (nós) da superfície contatora são colados aos da superfície alvo, após o contato. O efeito deste tipo de contato é que a deformação da superfície alvo implica na deformação da superfície escravizada. Na definição deste tipo de contato, o corpo com a malha mais grosseira deve sempre ser definido como superfície alvo. Apenas os graus de liberdade translacionais (UX, UY, UZ) são afetados por este tipo de contato.

6. CONTATO TIEBREAK (TNTS, TSTS)

Cola os nós da superfície de contato aos da superfície alvo até que algum critério de falha seja atingido.

7. CONTATO DRAWBEAD (DRAWBEAD)

Tipicamente usado em conformação de chapas, na qual um cuidado especial deve ser tomado na restrição do blank, pois durante as simulações de estampagem é comum a perda de contato entre a chapa e o punção.

2º PASSO: Definindo contato entre entidades.

Com exceção dos tipos de contato de superfície simples (ASSC, SS E ESS), todas as opções de contato exigem que sejam identificadas as superfícies contatora e alvo onde possa ocorrer o contato. Esta identificação pode ser feita utilizando componentes feitos de nós e/ou partes.

3º PASSO: Especificando coeficientes de atrito.

O coeficiente de atrito usado no contato é determinado do coeficiente de atrito estático (FS), coeficiente de atrito dinâmico (FD) e o coeficiente de decaimento exponencial (DC). É suposto que o coeficiente de atrito seja independente da velocidade relativa (V_{REL}) das superfícies em contato.

$$m_c = FD + (FS - FD)e^{-DC \cdot V_{REL}}$$

O coeficiente para atrito viscoso (VC), pode ser usado para limitar a força de atrito a um máximo:

$$F_{LIM} = VC \cdot A_{CONT}$$

Onde,

F_{LIM} : Força limite.

A_{CONT} : Área do segmento contactado pelo nó.

Valor sugerido para atrito viscoso:

$$VC = \frac{s_0}{\sqrt{3}}$$

Sendo s_0 a tensão de escoamento do material contactado.

Para evitar oscilações indesejáveis no contato (p.ex. simulação de conformação de chapas), é aplicado um amortecimento perpendicular às superfícies de contato dado por:

$$\mathbf{x} = \frac{VDC}{1DO} \mathbf{x}_{CRIT} \cdot \mathbf{eg} \cdot VDC = 20$$

Onde,

VDC: Coeficiente de amortecimento viscoso.

$$\mathbf{x}_{CRIT} = 2m\mathbf{w}$$

$$m = \min(m_{contator}, m_{alvo})$$

$$\mathbf{w} = \sqrt{K \frac{m_{contator} + m_{alvo}}{m_{contator} \cdot m_{alvo}}}$$

K : Rigidez da interface.

4º PASSO: Dados adicionais de entrada.

Para contatos tipo Eroding, Rigid, Tiebreak e Drawbead pode ser requerida alguma informação adicional

5º PASSO: Dados adicionais de entrada.

Para cada tipo de contato pode ser especificado tempo de nascimento e de morte. Isto permite ativar contatos em qualquer momento da análise transiente e desativá-los mais tarde.

4.3.2. CONTROLE DA PROFUNDIDADE DE CONTATO

Para as opções de contato STS, NTS e OSTs deve ser garantido que não seja definido falso contato entre componentes no modelo. Para estes tipos de contato, é suposta (pelo software ANSYS/LSDYNA) uma profundidade de contato de 1.10^{10} . Então, sempre que um nó contator atravessa a superfície alvo (e vice versa), contato é definido e uma força proporcional a profundidade de contato é gerada. Numa análise dinâmica explícita, é comum para contatos falsos indesejados ser definido por causa da geometria das partes, que podem estar em movimento relativo. Nos casos onde um contato não é genuíno, e a profundidade de contato é relativamente alta, as forças de contato podem se tornar excessivas e causar instabilidade ao modelo. Por esta razão, o programa ANSYS/LSDYNA permite a especificação de uma profundidade de contato máxima, além da qual qualquer penetração é considerada falsa e será ignorada.

Para todas as outras opções de contato que não sejam STS, NTS e OSTs, a profundidade de penetração do contato é automaticamente limitada pela espessura do elemento e não pode ser ajustada pelo usuário. As expressões para a profundidade de contato para elementos do tipo *solid* e *shell* são listadas a seguir:

Elementos tipo *shell*:

$$PC = \min \left\langle \text{espessura da casca}, 0.4 \cdot \min \text{ tamanho do elemento}, 0.5 \cdot \sqrt{\text{área}} \right\rangle$$

Elementos tipo *solid*:

$$PC = \min \left\langle \frac{\text{volume}}{\text{área}}, 0.5 \cdot \sqrt{\text{área}} \right\rangle$$

4.3.3. RIGIDEZ DE CONTATO

Uma relação de rigidez entre dois corpos deve ser estabelecida para que o contato ocorra. Sem esta os corpos passam através um do outro. Esta relação é gerada através de uma ‘*mola elástica*’ colocada entre os dois corpos, onde a força de contato é igual ao produto da rigidez de contato, k e a penetração d . A quantidade de penetração d entre os dois corpos é então dependente da rigidez k . Idealmente, não deveria haver penetração, mas isto implicaria em $k = \infty$, conduzindo a instabilidades

numéricas. O valor de k utilizado depende da rigidez relativa dos corpos em contato. No ANSYS/LSDYNA, a rigidez de contato é determinada pela seguinte relação:

Para segmentos sobre elementos *solid*:

$$k = \frac{fs \cdot Area^2 \cdot K}{volume}$$

Para segmentos sobre elementos *shell*:

$$k = \frac{fs \cdot Area \cdot K}{\min diagonal}$$

$Area$: área do segmento de contato

K : módulo volumétrico do elemento contactado

fs : fator de penalização (*geralmente 0.1*)

Em quase todos os casos, o parâmetro da rigidez de contato determinada automaticamente pelo programa ANSYS/LSDYNA fornecerá bons resultados. A rigidez de contato, contudo, pode ser mudada para todas as superfícies de contato, adotando um novo valor para o fator de penalização, fs . Na prática, o incremento deste valor acima de 0.1 poderá causar instabilidades.

FIGURA 4.3. Resolvendo a equação do movimento sem contato.

Suponha, contudo, um problema de impacto no qual se conheça exatamente que partes dos sólidos entrarão em contato, como esquematizado na fig.(4.3). A cada nó do *Corpo I* estão especificadas velocidade e aceleração, representadas pelas setas

que apontam na direção de $-x_3$. O *Corpo J*, que receberá o impacto do *Corpo I*, está engastado.

Esse problema é análogo ao de se resolver a equação de movimento para um único corpo, constituído dos *Corpos I e J*, o qual possui os nós superiores com condições iniciais de velocidade e aceleração diferentes dos demais, que pertencem à porção inferior do corpo. No lugar do contato, representado no modelo pela *linha negra*, ter-se-á graus de liberdade acoplados. No lugar de dois corpos, teremos um sistema único, o que não impede que sejam especificadas propriedades de material diferentemente para as duas porções constituintes do sistema.

4.4. SOLUÇÕES NUMÉRICAS BÁSICAS

A maioria dos problemas não lineares requer a solução de um sistema de equações simultâneas da forma:

$$H\mathbf{f} + \mathbf{f} = 0 \quad (4.17)$$

na qual $\mathbf{f}$ é o vetor de incógnitas, $\mathbf{f}$ o vetor de cargas aplicadas e H a matriz de rigidez global do sistema. Se os coeficientes da matriz H dependem do vetor de incógnitas nodais $\mathbf{f}$ ou de suas derivadas, então o problema se torna não linear. Em tais casos não há uma solução direta para a eq.(4.17), o que sugere a aplicação de métodos iterativos. Há muitas opções para a sequência iterativa a ser empregada. A seguir, serão discutidas duas delas.

4.4.1. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Este procedimento usa os valores das variáveis nodais $\mathbf{f}$ do passo anterior a fim de atualizar os valores da matriz de coeficientes $H(\mathbf{f})$. Rescrevendo eq.(4.17), tem-se:

$$\mathbf{f} = -[H(\mathbf{f})]^{-1} \mathbf{f} \quad (4.18)$$

O que resulta na $(r+1)^{ésima}$ iteração:

$$\mathbf{f}^{r+1} = -[H(\mathbf{f}^r)]^{-1} \mathbf{f} \quad (4.19)$$

Sendo o processo convergente, $r \rightarrow \infty$ levará o vetor $\mathbf{f}$ à solução correta. Uma desvantagem desta metodologia, pode logo ser notada, está no cálculo da matriz H , que deve ser efetuado a cada iteração. É necessário supor um valor inicial para o vetor $\mathbf{f}$, a fim de começar o processo, calculando a matriz H . A convergência se dá quando a diferença entre dois valores consecutivos do vetor $\mathbf{f}$ for menor que uma dada tolerância. A fig.(4.4) ilustra o procedimento para o caso onde a matriz H e o vetor $\mathbf{f}$ são reduzidos aos seus equivalentes escalares. A suposta dependência entre h e $\mathbf{f}$ é uma função que deve ser conhecida antes do emprego deste algoritmo. Esta propriedade de material é incluída na fig.(4.4), esboçando a relação $H(\mathbf{f})\mathbf{f} - \mathbf{f}$ através da curva mais escura. Na fig.(4.4b) temos uma curva delineando a convergência de $\mathbf{f}$. Embora o processo convirja para o caso de uma única variável, ele poderá apresentar instabilidade para múltiplos graus de liberdade, não garantindo sempre convergência.

FIGURA 4.4. Método de Newton-Raphson para problemas de uma única variável e uma relação H - ϕ convexa, OWEN & HINTON (1980).

4.4.2. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

É suposta a existência de um sistema de forças residuais $\mathbf{y}$, tal que:

$$\mathbf{y} = H\mathbf{f} + \mathbf{f} \neq 0 \quad (4.20)$$

Estas forças residuais podem ser interpretadas como uma medida do desequilíbrio da eq.(4.17). Uma vez que H é função de $\mathbf{f}$ e possivelmente de suas derivadas, então pode ser afirmado que $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{f})$ e a expressão que permite calcular $\mathbf{y}^r$ correspondente a $\mathbf{f}^r$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{y}_i^r = - \sum_{j=1}^N \Delta \mathbf{f}_j^r \left(\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{f}_j} \right)^r \quad (4.21)$$

na qual N é o número total de variáveis no sistema e o sobrescrito r denota a r -ésima aproximação em direção a solução verdadeira. Substituindo o valor de $\mathbf{y}$ da eq.(4.20) dentro da eq.(4.21) e seguindo a regras de derivação, podemos expressar $\mathbf{y}$ na forma matricial, como se segue:

$$\mathbf{y}(\mathbf{f}^r) = -J(\mathbf{f}^r) \Delta \mathbf{f}^r \quad (4.22)$$

onde os termos da matriz J são da forma:

$$J_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{f}_j} \right)^r = h_{ij}^r + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial \mathbf{f}_j} \right)^r \mathbf{f}_k^r \quad (4.23)$$

sendo h_{ij} os termos gerais da matriz H .

A expressão anterior, eq.(4.23), pode ser reorganizada da seguinte maneira:

$$J(\mathbf{f}) = H(\mathbf{f}) + H'(\mathbf{f}) \quad (4.24)$$

onde o último termo contém apenas os termos não-simétricos. O processo de Newton-Raphson pode ser finalmente escrito, usando eq.(4.22) e eq.(4.24), assim:

$$\Delta \mathbf{f}^r = -[J(\mathbf{f}^r)]^{-1} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{f}^r) = -[H(\mathbf{f}^r) + H'(\mathbf{f}^r)]^{-1} \mathbf{y}(\mathbf{f}^r) \quad (4.25)$$

Esta expressão permite corrigir o vetor de incógnitas nodais $\mathbf{f}$ a partir do vetor de forças residuais $\mathbf{y}$ calculado para cada iteração. Esta técnica está esquematizada na fig.(4.5), para a situação de uma única variável. A solução para o problema não linear advém do anulamento de $\mathbf{y}$, uma vez que este termo é medida direta do desequilíbrio da equação governante, como indicado na eq.(4.20).

FIGURA 4.5. Método das aproximações sucessivas para problemas de uma única variável e uma relação $H(\phi)$ convexa, OWEN & HINTON (1980).

5. MODELAGEM DE IMPACTO EM VIGAS

Os métodos analíticos para obtenção da tensão máxima no impacto axial e transversal em vigas bi-apoadas e vigas em balanço serão comparados ao método da integração explícita no tempo (MIET) e ao algoritmo implícito de Newmark. Foram empregados modelos 1D e 3D para modelamento do fenômeno. As diferenças encontradas serão comentadas oportunamente.

5.1. ESTRUTURA DE LABORATÓRIO

Este trabalho foi desenvolvido no Laboratório CAD/CAE do Departamento de Engenharia Mecânica da USP/São Carlos, que contém softwares e hardwares capazes de processar simulações numéricas de fenômenos físicos de engenharia.

Hardwares

- Estação de trabalho IBM RISC 39H, 128 Mb de memória e 4,5 Gb de disco rígido.
- PC IBM Netfinity 3000 com processador Pentium II, 400MHz, 128Mb de memória RAM e 24Gb de disco rígido.

Softwares

- CAE: ANSYS/LSDYNA 5.51 – plataforma Windows NT.
 - CAD: Pro Engineer 2000 – plataforma UNIX.
-

5.2. DETALHES DA MODELAGEM

O software utilizado na simulação numérica foi o ANSYS/LSDYNA 5.51, utilizando integração explícita no tempo na solução da equação do movimento. Em todos os modelos foram utilizados os elementos sólido de 8 nós (SOLID 164), o elemento viga (BEAM3) e o elemento massa (MASS21). Os estudos não consideram atrito nem contato; os modelos de material utilizados são elásticos lineares. O controle da massa do objeto impactador é feito com a alteração da densidade do material e não do volume do corpo, preservando, portanto, as condições de contato. Outro ponto importante é que o tempo de simulação adotado nem sempre corresponde ao sugerido no trabalho, o que não deve ser interpretado como contradição, mas experimentação.

5.3. IMPACTO LONGITUDINAL EM VIGAS EM BALANÇO

FIGURA 5.1. Impacto longitudinal em viga em balanço.

a) Modelo 3D. Elemento SOLID164.

b) Modelo 1D. Elementos BEAM3 e MASS21

A fig.(5.1) ilustra a situação onde um cubo de aço choca-se frontalmente com uma viga de aço de médio teor de carbono, conforme tab.(5.1). No gráfico da tensão s_x versus duração do impacto, fig.(5.2), a curva analítica (azul) é a representação gráfica das eq.(3.40) – eq.(3.46). As demais curvas representam soluções numéricas da equação de movimento, empregando o método dos elementos finitos. A tab.(5.2)

apresenta os valores máximos de tensão para cada método empregado e o erro relativo ao método analítico disponível.

Viga de seção quadrada		Cubo
Volume:	0.00016 m^3	Volume: $8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$
Massa:	1.256 kg	Massa: 3.14 kg
Material:	Aço	Material: Aço
Ex :	$2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$	Ex : $2.07 \times 10^{15} \text{ Pa}$
v:	0.3	v: 0.3
Tempo	0.00047 s	
Vel. Impacto :	2 m/s

TABELA 5.1. Dados do ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.1).

FIGURA 5.2. Comparativo entre as tensões (s_x) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.00047 segundos. Veja eq.(3.24 - 3.30). O algoritmo numérico explícito utilizou elemento sólido.

O algoritmo explícito utilizando elemento viga, fig.(5.3), é o que mais se aproxima do comportamento da curva analítica. Os algoritmos explícitos apresentaram menores erros na predição da tensão máxima equivalente. Confirmando as tendências teóricas, pode-se dizer que tensão máxima e duração do impacto longitudinal em viga em balanço estão relacionadas, ambas, à razão de

massas α ¹. Para $\alpha = 0.4$, por exemplo, a tensão máxima pode chegar a 2.5 vezes o valor de s_0 ². Se a razão de massas fosse $\alpha = 1/6$, a tensão máxima seria ainda maior, cerca de 3.5 vezes o valor de s_0 .

FIGURA 5.3. Comparativo entre as tensões (s_x) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.00047 segundos. Veja eq.(3.24 - 3.30). O algoritmo numérico explícito utilizou elemento viga.

Método	Analítico	Numérico Implícito	Numérico Explícito	Numérico Explícito
Energia		Elemento Viga	Elemento Viga	Elemento Sólido
	MPa	MPa	MPa	MPa
<i>Smax</i>	154	196	225	190
<i>Erro</i>	21%	0%	15%	3%

TABELA 5.2. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto longitudinal.

¹ α é a razão entre massa da viga (sofre o impacto) e massa do corpo que produz impacto, $\alpha = m_1/m_2$.
² A definição de s_0 aparece no Capítulo 3, eq.(3.19): $s_0 = c \cdot r \cdot v$.

5.4. IMPACTO TRANSVERSAL EM VIGAS EM BALANÇO

FIGURA 5.4. Impacto Transversal em viga em balanço.

a) Modelo 3D. Elemento sólido, SOLID164.

b) Modelo 1D. Elemento viga, BEAM3 e massa, MASS21.

Viga de Seção quadrada	Cubo	Esquema
Volume: $0.16 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ Massa: 1.256 Kg Material: Aço Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ν : 0.3 Vel. Impacto : 2 m/s	Volume: $0.80 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ Massa: 3.14 Kg Material: Aço Ex : $2.07 \times 10^{15} \text{ Pa}$ ν : 0.3 Tempo Impacto: 0.016 s	<p>Unidades: mm</p>

TABELA 5.3. Dados do Ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.4).

A fig.(5.4) é o esboço de uma situação de impacto transversal. Nos gráficos apresentados pelas figuras que vão de fig.(5.5) a fig.(5.8), os resultados teóricos são sempre representados pela curva azul. Nestas figuras estão representados valores de tensão máxima, que ocorrem no engastamento da viga em balanço. A tab.(5.3) apresenta os dados de entrada para uma simulação típica de impacto transversal. Os resultados de tensão máxima apresentados pelo algoritmo implícito, usando o método dos elementos finitos, fig.(5.6), são os que mais se aproximam do equacionamento analítico³.

³ Abordagem teórica no capítulo 3. A eq.(3.55) representa o deslocamento de um determinado ponto x da viga, decorridos t segundos do instante inicial do impacto. A eq.(3.58) representa a tensão resultante do impacto transversal como função da posição x na viga e determinado tempo t .

FIGURA 5.5. Deslocamento da extremidade livre da viga. Comparativo entre resultados esperados teórica e numericamente.

FIGURA 5.6. Comparativo entre as tensões (σ_z) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico implícito utilizou **elemento viga**.

FIGURA 5.7. Comparativo entre as tensões (s_z) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico explícito utilizou **elemento sólido**.

FIGURA 5.8. Comparativo entre as tensões (s_z) provenientes de análise teórica e simulação, decorridos 0.016 segundos. Veja eq.(2.38). O algoritmo numérico explícito utilizou **elemento viga**.

	Analítico	Numérico Implícito Elemento Viga	Numérico Explícito Elemento Viga	Numérico Explícito Elemento Sólido
	MPa	MPa	MPa	Mpa
<i>S_{max}</i>	548	548	334	408
<i>Erro</i>	0%	0%	39%	25%

TABELA 5.4. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto transversal em viga em balanço.

A tab.(5.5) é resultado da análise modal do conjunto representado pela fig.(5.4). A segunda coluna da tabela diz respeito ao espectro de frequências do conjunto massa/viga, tomados como um todo. A terceira coluna da tabela diz respeito ao espectro de frequências da viga isoladamente. A equação básica a ser resolvida numa análise modal não amortecida típica é um problema clássico de autovalores, CONTE (1975) e DIEGUEZ (1992):

$$[K]\{f_i\} = w_i^2 [M]\{f_i\} \quad (5.1)$$

Onde:

$[K]$: Matriz de rigidez da estrutura.

$[M]$: Matriz de massa da estrutura.

$\{f_i\}$: Vetor correspondente ao i-ésimo modo de vibrar (*autovetor*).

w_i : Frequência natural do i-ésimo modo de vibrar (*autovalor*).

Modo	Frequência Conjunto	Frequência Viga
	Hz	Hz
1	30.89	103.97
2	466.10	649.71
3	1212.60	1810.80
4	1483.00	3220.50
5	3065.70	3525.10

TABELA 5.5. Análise modal do conjunto vibratório no impacto transversal de viga em balanço.

A frequência de **30.89Hz**, tab.(5.5), corresponde ao primeiro modo de vibrar do conjunto da fig.(5.4). Uma vez que o impacto produz esforços de flexão, este primeiro modo, sendo de flexão, é considerado dominante. O período de **0.0324s** é suficiente para que um ponto da extremidade da linha neutra desloque-se 10mm para baixo, fig.(5.5), retorne ao ponto de origem, suba novamente seus 10mm e

novamente retorne ao ponto de origem. Com a ausência de amortecimento, metade apenas deste período, **0.0162s**, já é tempo suficiente para registrar a máxima tensão resultante, que é de tração. A tab.(5.6) apresenta o conteúdo em frequências do sinal (*curva azul*) mostrado na fig.(5.6), resultante do impacto transversal esboçado na fig.(5.4).

Modo	Frequência Sinal de Tensões Hz
1	30.20
2	476.30
3	1496.40
4	3098.00

TABELA 5.6. Conteúdo em frequência do sinal das tensões (analítico) no impacto transversal de um corpo na extremidade de viga em balanço.

FIGURA 5.9. Análise modal do conjunto impactador - viga em balanço.

Os valores mostrados na tab.(5.6) são obtidos através de uma operação matemática denominada **FFT**, *Fast Fourier Transform*, sobre os dados da fig.(5.6). A **FFT** é simplesmente um algoritmo para computar a **DFT**, *Discrete Fourier Transform*, que é uma operação básica usada em muitas aplicações de processamento de sinais. É usada para transformar uma sequência ordenada de dados, usualmente no domínio do tempo, para o domínio da frequência, tal que as informações espectrais

sobre a sequência possam ser conhecidas explicitamente. A expressão geral para a **DFT**, segundo STEARNS & DAVID (1996), é a seguinte:

$$X_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi m}{N} k\right) - j \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi m}{N} k\right) \quad (5.2)$$

$m = 0, 1, \dots, N-1$

Onde,

x_k : Dados amostrais, ou simplesmente *signal*.

X_m : Espectro em frequências de x_k .

N : Número de amostras na sequência de dados.

m, k : Variáveis contadoras.

É importante notar como os valores da tab.(5.6), conteúdo em frequências do sinal da fig.(5.6), estão próximos das frequências naturais do conjunto impactador/viga, tab.(5.5), especialmente o primeiro modo de vibrar, cuja frequência é de **30.20Hz**. Este fato realça a importância da análise modal num problema de natureza dinâmica. Conhecida a dinâmica do impacto e, portanto, o modo de vibrar dominante do conjunto, o período de tempo relacionado a este modo pode ser usado como estimativa do tempo de simulação necessário ao estudo do fenômeno.

5.5. IMPACTO TRANSVERSAL EM VIGAS BI-APOIADAS

FIGURA 5.10. Impacto transversal em viga bi-apoiada.

a) Modelo 3D. Elemento sólido, SOLID164.

b) Modelo 1D. Elemento viga, BEAM3 e massa, MASS21.

Viga de Seção Quadrada Cubo		Esquema
Volume: $0.312 \times 10^{-3} \text{ m}^3$	Volume: $0.80 \times 10^{-5} \text{ m}^3$	
Massa: 2.512 kg	Massa: 3.14 kg	
Material: Aço	Material: Aço	
Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$	Ex : $2.07 \times 10^{15} \text{ Pa}$	
v: 0.3	v: 0.3	
Tempo Impacto: 0.013 s Vel. Impacto : 2 m/s		

TABELA 5.7. Dados do ensaio do impacto transversal realizado conforme ilustrado pela fig.(5.10).

FIGURA 5.11. Comparativo entre os deslocamentos (mm) provenientes de análise teórica e simulação, após o tempo de 0.015s de simulação.

FIGURA 5.12. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.015 segundos. Algoritmo numérico implícito, utilizando **elemento viga**.

FIGURA 5.13. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.0129 segundos. O algoritmo numérico explícito utilizou **elemento sólido**.

FIGURA 5.14. Comparativo entre as tensões provenientes de análise teórica e simulação, decorrido o tempo de 0.0129 segundos. O algoritmo numérico explícito utilizou **elemento viga**.

	Analítico	Numérico Implícito Elemento Viga	Numérico Explícito Elemento Viga	Numérico Explícito Elemento Sólido
	MPa	MPa	MPa	MPa
<i>Smax</i>	465	445	296	271
<i>Erro</i>	0%	4.30%	36.3%	41.8%

TABELA 5.8. Comparação dos valores de tensão entre métodos numéricos e analíticos no impacto transversal em viga bi-apoiada.

Modo	Frequência Conjunto	Frequência Viga
	Hz	Hz
<i>1</i>	38.78	72.98
<i>2</i>	291.70	291.70
<i>3</i>	493.70	655.48
<i>4</i>	1163.20	1163.20
<i>5</i>	1513.20	1813.40
<i>6</i>	2604.10	2604.10

TABELA 5.9. Análise modal do conjunto vibratório no impacto transversal de viga bi apoiada.

Abaixo, fig.(5.15), tem-se a representação dos modos de vibrar do conjunto impactador - viga em balanço. Nestas circunstâncias, o modo de vibrar dominante é o

primeiro. Contudo, a influência dos demais modos não está descartada, como constatado na tab.(5.10), através da análise de sinais das tensões resultantes.

FIGURA 5.15. Modos de vibrar do conjunto impactador - viga bi-apoiada.

Modo	Frequência Sinal de Tensões
	Hz
1	39.73
2	130.80
3	494.20
4	851.70
5	1334.00
6	1516.50

TABELA 5.10. Conteúdo em frequência do sinal das tensões (analítico) no impacto transversal de um corpo no centro de uma viga bi apoiada. Esta análise de sinais corresponde ao sinal da curva azul da fig.(5.12).

A fig.(5.10) ilustra uma situação de impacto transversal em vigas bi-apoiadas⁴. A tab.(5.7) mostra detalhes do modelo usado nas simulações. As fig.(5.12) a (5.14) mostram comparações entre resultados obtidos dos modelos numéricos e o equacionamento teórico. Na comparação com a teoria, o algoritmo implícito, usando elemento viga, produz os resultados mais próximos, como exposto na tab.(5.8).

O *erro* na tab.(5.8) é a medida do afastamento dos resultados obtidos, em termos de tensão máxima, em relação aos valores calculados analiticamente. O modelo da fig.(5.10a) produz os resultados ilustrados pela fig.(5.13). *Erro* aqui não significa, vale dizer, afastamento em relação a valores verdadeiros, medindo apenas a diferença que há entre valores obtidos pelo método dos elementos finitos e valores obtidos analiticamente. Novamente, os resultados de tensão máxima apresentados pelo algoritmo implícito do método dos elementos finitos, fig.(5.12), são os mais próximos do equacionamento analítico.

5.6. SUPERFÍCIES DE TENSÃO EQUIVALENTE MÁXIMA EM IMPACTO

As superfícies de tensão equivalente máxima visam representar um conjunto de situações de impacto no qual duas variáveis, massa e velocidade do impactador, assumem valores conhecidos e equidistantemente espaçados dentro de um intervalo. A cada situação, com massa e velocidade determinada, corresponde um valor de tensão, a máxima tensão equivalente (Von Mises), ocorrida no corpo que sofre o impacto, e absorve parte da energia cinética do impactador antes da colisão.

A hipótese é que esta tensão máxima, de alguma forma, seja dependente dos valores de massa e velocidade do impactador, tanto quanto da maneira como o impacto acontece e da geometria dos corpos envolvidos. Se é verdade que esta proporção existe, então o objetivo é entendê-la em termos das duas primeiras variáveis, isolando os demais efeitos numa variável única, representada pela letra C , eq.(5.3).

A verificação de tal dependência abre caminhos para um possível trabalho de parametrização, e os dados de entrada resumem-se a de razões de massa, forma e

⁴ Para cada posição x da viga é possível saber a deflexão resultante, decorridos t segundos do instante inicial do impacto. O equacionamento deste problema está no capítulo 3, eq.(3.51), $w=f(x,t)$.

velocidade dos corpos envolvidos. De uma certa forma, esse trabalho já existe, para alguns casos bem particulares e a idéia, portanto, é a de estendê-lo a situações mais complicadas, onde ferramentas numéricas são freqüentemente requeridas e nem sempre disponíveis.

A parametrização, sob a forma de tabelas e/ou gráficos, permite estimativas rápidas de fatores de segurança em projetos e, igualmente importante, redução de custos com aquisição de softwares de simulação numérica e tempo de processamento.

As superfícies de tensão equivalente máxima são, portanto, uma representação gráfica da função que relaciona tensão no corpo impactado com velocidade e massa do corpo que produz o referido impacto. Os parâmetros *a*, *b* e *c*, componentes da função mencionada, são determinados por meio de uma regressão linear múltipla⁵, a partir dos dados originados nas simulações numéricas.

Assim, propondo situações de impacto com velocidades, massas, condições de contorno e de carregamento diversas, a intenção é a de comparar cada uma das funções obtidas a fim de identificar semelhanças nos parâmetros funcionais mencionados suficientes ao estabelecimento de um modelo generalista.

Os estudos que se seguem referem-se a impacto axial, transversal e torsional em corpos engastados. Os corpos representados nas fig.(5.16), fig.(5.18), fig.(5.20) e fig.(5.22) correspondem aos modelos usados na construção das superfícies de tensão equivalente máxima devido ao impacto. Cada modelo é usado em 100 situações distintas de impacto, com velocidade inicial do impactador variando de 0.2m/s a 2.0m/s e massa do impactador variando de 0.2kg a 2.0kg. Uma rotina em linguagem APDL⁶ assume todo o trabalho de pós-processamento, fazendo uma varredura por todos os nós do corpo impactado, a cada sub-intervalo de tempo, à procura do valor máximo de tensão equivalente de Von Mises. Os gráficos apresentados nas fig.(5.17), fig.(5.19), fig.(5.21) e fig.(5.23) são elaborados a partir da seguinte equação:

$$S = C.M^a V^b \quad (5.3)$$

⁵ Apêndice IV. AJUSTE DE CURVAS.

⁶ Apêndice II. ROTINAS APDL.

5.6.1. IMPACTO AXIAL

5.6.1.1. ANEL METÁLICO

A tab.(5.11) fornece detalhes do impacto ilustrado pela fig.(5.16). A fig.(5.17) apresenta os resultados, que são bem ajustados pela seguinte equação:

$$\sigma = 20.8424 \cdot M^{0.4185} V^{1.0115} \text{ MPa} \quad (5.4)$$

FIGURA 5.16. Esquema do impacto entre massa e anel.

FIGURA 5.17. Superfície de tensão equivalente máxima do impacto ilustrado pela fig.(5.16).

	Anel Metálico	Cubo
Volume:	0.22619 x10 ⁻³ [m ³]	Volume: 5 x 10 ⁻⁴ [m ³]
Massa:	1.7756 [kg]	Massa: varia de 0.2 a 2.0 [kg]
Material:	Aço	Material: Aço
Ex :	2.07x10 ¹¹ [Pa]	Ex : 2.07x10 ¹¹ [Pa]
Tempo de Análise:	0.0040 [s]	Velocidade de impacto : 0.2 a 2.0 [m/s]

TABELA 5.11. Dados do ensaio de impacto longitudinal.

5.6.1.2. VIGA T

A tab.(5.12) apresenta as características do impacto ilustrado pela fig.(5.18). A fig.(5.19) mostra a superfície de tensão máxima obtida⁷. A equação a seguir ajusta os resultados do pós-processamento:

$$s = 81.858 \cdot 10^6 \cdot M^{0.5306} V^{1.0331} \quad (5.5)$$

FIGURA 5.18. Impacto entre bloco e viga T

FIGURA 5.19. Superfície de tensão equivalente máxima do impacto ilustrado pela fig.(5.18).

⁷ No Apêndice III Arquivos Matlab encontra-se a listagem de um arquivo escrito na linguagem Matlab que determina os coeficientes C , a e b , da equação eq.(5.3).

Viga T	Cubo
Volume: $0.22619 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$	Volume: $5 \times 10^{-4} \text{ [m}^3\text{]}$
Massa: 1.7756 [kg]	Massa: varia de 0.2 a 2.0 [kg]
Densidade: 7850 kg/m^3	Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$	Tempo de Análise: 0.0040 [s]

TABELA 5.12. Dados do ensaio de impacto axial.

5.6.2. IMPACTO TRANSVERSAL

A tab.(5.13) apresenta as características do impacto descrito na fig.(5.20). A fig.(5.21) mostra a superfície de tensão máxima obtida. A eq.(5.6) abaixo ajusta os resultados do pós-processamento:

$$\sigma = 31.97 \cdot 10^6 \cdot M^{0.3842} V^{1.0009} \quad (5.6)$$

Viga Quadrada	Cubos
Volume: $0.75 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$	Volume: $12.5 \times 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]}$
Massa: 5.8875 [kg]	Massa: varia de 0.2 a 2.0 [kg]
Densidade: 7850 kg/m^3	Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$	Tempo de Análise: 0.0040 [s]

TABELA 5.13. Dados do ensaio de impacto transversal.

FIGURA 5.20. Impacto entre bloco e viga quadrada.

FIGURA 5.21. Superfície obtida por regressão linear múltipla.

5.6.3. IMPACTO TORSIONAL

A tab.(5.14) apresenta as características do impacto ilustrado pela fig.(5.22). A fig.(5.23) mostra a superfície de tensão máxima obtida e que pode ser representada pela equação seguinte:

$$\sigma = 52.81 \cdot 10^6 \cdot M^{0.4937} V^{1.0047} \quad (5.7)$$

Viga Quadrada	Cubos
Volume: $0.75 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$	Volume: $1.5625 \times 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]}$
Massa: 5.8875 [kg]	Massa: varia de 0.2 a 2.0 [kg]
Densidade: 7850 kg/m^3	Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Ex : $2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$	Tempo de Análise: $0.40 \times 10^{-3} \text{ [s]}$

TABELA 5.14. Dados do ensaio de impacto torsional

FIGURA 5.22. Impacto torsional entre blocos e viga quadrada.

FIGURA 5.23. Superfície obtida por regressão linear múltipla.

5.7. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Até este momento, o presente capítulo dedicou-se a estabelecer comparações entre o modelamento matemático do fenômeno de impacto, através do método dos elementos finitos, e a teoria disponível até então. Mostrou também a importância da análise modal para o entendimento da dinâmica da colisão e determinação do tempo necessário de simulação. Buscou, ainda, trabalhar os resultados de uma forma inédita, organizando-os nos gráficos que se convencionou chamar de “Superfícies de Tensão Equivalente Máxima ao Impacto”.

Após todo o exposto, faz-se oportuno apresentar um exemplo mais detalhado sobre a metodologia empregada no estudo dos fenômenos de impacto.

5.7.1. MODELO GEOMÉTRICO

FIGURA 5.24. Modelo geométrico empregado como exemplo.

O modelo geométrico da fig.(5.24) representa um sistema mecânico utilizado na transmissão de movimento, muito empregado em máquinas de elevação e transporte. Trata-se de uma polia, acoplada a um eixo de seção circular por

interferência. A escolha deste modelo deve-se, sobretudo, à conveniência construtiva e computacional. Na fig.(5.25) o modelo elementos finitos que representa o modelo geométrico da fig.(5.24). O eixo é engastado, nos nós da seção indicada, e à polia é dada uma velocidade angular inicial, correspondente a um acionamento abrupto do sistema.

FIGURA 5.25. Modelo do conjunto polia-eixo. Malha constituída de 5867 nós, num total de 24237 elementos tetraédricos lineares.

O tempo de análise pode ser estimado através de análise modal⁸, como comentado anteriormente.

Modo de vibrar	Frequência (Hz)
1	52.749
2	52.861
3	56.375
4	77.564
5	93.898
6	94.084
7	96.337
8	102.75

TABELA 5.15. Frequências correspondentes aos modos de vibrar do modelo esquematizado na fig.(5.25).

A fig.(5.26c) é a ilustração esquemática do terceiro modo de vibrar do conjunto da fig.(5.25). Este terceiro modo corresponde à torção pura, com período de

⁸ Vide Anexo B.1. ROTINAS APDL .

0.0189 segundos. Isso significa que, nas condições indicadas, o conjunto deverá inverter o movimento angular na metade deste tempo e, a cada 0.0189 segundos, as condições iniciais se repetem, caso o modelo não esteja considerando o amortecimento estrutural do material do conjunto.

FIGURA 5.26. Modos de vibrar do conjunto polia-eixo.

A fig.(5.28) é a ilustração da distribuição de tensões no conjunto decorridos 0.007125 s do instante inicial do impacto. Nessa situação, a massa da polia corresponde a 2.0kg, inércia $I=2982.9 \text{ kg.mm}^2$ e a velocidade angular $\omega=3.8\text{rad/s}$, o que resulta em uma tensão equivalente a 598.3 MPa. Este valor pode ser encontrado levando os mesmos valores de inércia e velocidade angular à equação abaixo,

$$s = 2.1362 \cdot I^{0.5377} w^{0.999} [MPa] \quad (5.6)$$

responsável pelo gráfico da fig.(5.28).

FIGURA 5.27. Distribuição de tensões para o caso mais crítico, onde velocidade $w = 3.8 \text{ rad/s}$ e inércia $I=2982.9 \text{ kg.mm}^2$.

FIGURA 5.28. Representação gráfica da equação eq.(5.6).

Na tab.(5.16), um sumário dos valores de tensão encontrados em cada situação de impacto. As cores separam a tabela no que se pode chamar de **Choque Leve, Médio e Pesado**, classificados com base no critério da energia cinética ($E_c = I \cdot w^2$) do corpo que provoca o impacto. Em outras palavras,

Choque Leve $I.\omega^2 < 10768.3$

Choque Médio $10768.3 < I.\omega^2 < 32304.8$

Choque Pesado $32304.8 < I.\omega^2$

		Valores de Tensão Máxima Equivalente [MPa]									
		Inércia da Polia [Kg.mm2]									
Velocidade Angular ω (rad/s)		298.2	596.5	894.8	1193.1	1491.4	1789.7	2088	2386.3	2684.6	2982.9
	2	1192.8	2386.0	3579.2	4772.4	5965.6	7158.8	8352.0	9545.2	10738.4	11931.6
	2.2	1443.3	2887.1	4330.8	5774.6	7218.4	8662.1	10105.9	11549.7	12993.5	14437.2
	2.4	1717.6	3435.8	5154.0	6872.3	8590.5	10308.7	12026.9	13745.1	15463.3	17181.5
	2.6	2015.8	4032.3	6048.8	8065.4	10081.9	12098.4	14114.9	16131.4	18147.9	20164.4
	2.8	2337.9	4676.6	7015.2	9353.9	11692.6	14031.2	16369.9	18708.6	21047.3	23385.9
	3	2683.8	5368.5	8053.2	10737.9	13422.6	16107.3	18792.0	21476.7	24161.4	26846.1
	3.2	3053.6	6108.2	9162.8	12217.3	15271.9	18326.5	21381.1	24435.7	27490.3	30544.9
	3.4	3447.2	6895.5	10343.9	13792.2	17240.6	20688.9	24137.3	27585.6	31034.0	34482.3
	3.6	3864.7	7730.6	11596.6	15462.6	19328.5	23194.5	27060.5	30926.4	34792.4	38658.4
	3.8	4306.0	8613.5	12920.9	17228.4	21535.8	25843.3	30150.7	34458.2	38765.6	43073.1
		Leve			Médio				Pesado		

TABELA 5.16. Tensão máxima equivalente (Von Mises) no eixo acionado subitamente pela polia da fig.(5.24).

Neste exemplo, a escala dos valores de tensão máxima equivalente está dividida em quatro partes. A primeira quarta parte destinada ao denominado choque leve, dois quartos intermediários destinados ao choque médio e o quarto restante ao choque pesado. Apesar desta divisão destinar um intervalo de valores maiores ao choque médio, verifica-se que maior número de valores pode ser classificado como choque leve e, ainda, uma minoria efetivamente como choque pesado. Isto sugere que uma divisão linear da escala de tensões em partes iguais pode induzir o projetista a super dimensionar o sistema, atribuindo a alguns valores médios de tensão a característica de “pesados”.

6. CONCLUSÕES

Os primeiros três capítulos da dissertação, *introdução*, *análise modal de vigas* e *projeto a impacto*, cumprindo o primeiro dos quatro objetivos deste trabalho, reúnem informações gerais sobre a teoria da propagação das ondas de choque, impacto transversal em vigas, análise modal, amortecimento, contato, método da integração explícita no tempo, etc. Todos esses temas, combinados, formam os alicerces da análise estrutural dinâmica.

Comparações entre resultados teóricos e numéricos são estabelecidas no quinto capítulo, satisfazendo, assim, o segundo objetivo do trabalho. O método dos elementos finitos foi capaz de registrar o comportamento das ondas de tensão elástica, permitindo reproduzir e confirmar resultados teóricos. Foi mostrado que o sinal das tensões resultantes de um impacto reproduzem as características naturais da estrutura como um todo, ou seja, suas propriedades dinâmicas, que são o conteúdo em frequência, amortecimento e modos de vibrar. A análise modal é, portanto, uma forma eficiente de determinar o tempo de simulação nos modelos de elementos finitos.

O equacionamento das superfícies de tensão a impacto, nas diversas situações estudadas, indicaram uma clara tendência dos *valores de tensão* em variar na proporção da raiz quadrada da massa do corpo impactador e linearmente com a velocidade deste mesmo corpo, com pouca dispersão. Através destes resultados é possível entender melhor o que vem a ser um choque *leve*, *médio* ou *pesado* e, portanto, dimensionar corretamente diversos sistemas mecânicos. A sugestão do quinto capítulo é que essa classificação seja feita considerando o produto do quadrado da velocidade pela massa, em outras palavras, proporcional a energia cinética do objeto impactador.

Apesar da importância do amortecimento, especialmente como dissipador de energia nos estudos de impacto, este foi um item não considerado nas simulações. Fica a sugestão de sua abordagem por parte de novos trabalhos na área. Também sugestão é o estudo de casos envolvendo elemento sólido e algoritmo implícito para os casos de impacto em vigas estudados. Algo que acrescentaria bastante também envolve o estudo do comportamento dos vários tipos de elementos disponíveis. Elemento tetraédrico linear, utilizado nesta dissertação, é apontado como sendo bastante pobre, mas até o momento não se sabe quanto.

A classificação do impacto em leve/médio/pesado ainda precisa ser trabalhada, buscando tornar as variáveis de entrada adimensionais, o que facilitaria a parametrização. Estudos estatísticos, com uma população mais abrangente, também ajudariam a sedimentação das propostas estabelecidas, com a também inclusão de estudos experimentais, a título de validação.

Interessante também é a busca de um vínculo maior da análise modal e análise de sinais com o fenômeno do impacto, através de programação na formulação dos elementos finitos, a fim de ter melhor controle dos resultados. Algo que ficou muito claro durante todo o presente trabalho é que impacto, sendo um fenômeno de natureza dinâmica, precisa de informações dinâmicas para bem caracterizá-lo, e isso justifica toda nossa tentativa em fornecer as bases bibliográficas necessárias ao seu bom entendimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGELET DE SARACIBAR, C.; OÑATE, E. (1991). *Modelado numérico de procesos de conformado de láminas metálicas*. Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Cap.5, p.5.1-5.80. /Monografia nº 8/
- ALTAN,T. et al. (1983). *Conformação de metais: fundamentos e aplicações*. Trad. Reginaldo Teixeira Coelho. 1. ed. São Carlos, Publicação EESC-USP.
- ALVES, M. (1998). *Material constitutive law for large strains and strain rates*. Journal of Engineering Mechanics, v.126, p.215-218.
- APARICIO SÁNCHEZ, C. A. (2001). *Estudo de impacto usando elementos finitos e análise não linear*. São Carlos, 129p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ASHBY, MICHAEL F. (1999). *Materials selection in mechanical design*. 2.ed. London, Butterworth-Heinemann.
- BATHE, K. J. (1995). *Finite element procedures*. 1.ed. Upper Saddle River, Prentice Hall.
- BEER, F.P.; JOHNSTON Jr, E.R. (1995). *Resistência dos materiais*. 3.ed. São Paulo, Makron.
- BIRCH, R.S.; ALVES, M. (2000). Dynamic failure of structural joint systems. *Thin-Walled Structures*, n.2, v.36, p.137-154, feb.
- CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. (1985). *Numerical methods for engineers with personal computer applications*. 1.ed. New York, McGraw-Hill.

- CONTE, S.D. (1975). *Elementos de Análise Numérica*. Porto Alegre, Globo.
- CRAIG, R. R. (1981). *Structural dynamics*. 1. ed. New York, John Wiley.
- ESCALONA, J.L.; MAYO, J.; DOMÍNGUEZ, J. (1999). A new numerical method for the dynamic analysis of impact loads in flexible beams. *Mechanism and machine theory*, n.5, v.34, p.765-780, Jul.
- DIEGUEZ, J. P. P. (1992). *Métodos numéricos computacionais para a engenharia*, v.1, Rio de Janeiro, Interciência.
- FARAHANI, K.; MOFID, M.; VAFAI, A. (2000). A solution method for general contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.1-2, v.187, p.69-77, Jun.
- GOLDSMITH, W. (1960). *Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids*. 1.ed. London, Edward Arnold.
- HEUBNER, K.H.; THORNTON, E.A.; BYROM, T.G. (1994). 3. ed. *The finite element method for engineers*. New York, John Wiley.
- HU, N. (1997). A solution method for dynamic contact problems. *Computers & Structures*, n.6, v.63, p.1053-1063, Jun.
- INMAN, D. J. (1994). *Engineering vibration*. 1.ed. New Jersey, Prentice Hall.
- JOHNSON, W. (1972). *Impact strength of materials*. 1.ed. Londres, Edward Arnold.
- JONES, N.L. (1997). *Structural Impact*. 1.ed. Cambridge University Press, Cambridge.
- KOBAYASHI, S.; OH, S. I.; ALTAN, T. (1989). *Metal forming and the finite element method*. New York, Oxford University Press.

- KORMI, K.; WEBB, D. C.; JOHNSON, W. (1997). *The application of the FEM to determine the response of a pretorsioned pipe cluster to static or dynamic axial impact loading*. Computers & Structures, v.62, p.353-368.
- LAZAN, B. J. (1968). *Damping of materials and members in structural mechanics*. 1.ed. Oxford, New York, Pergamon Press.
- LIRANI, J. (2000). Notas de aula do curso de pós-graduação SEM-754 Elementos Finitos II, Departamento de Engenharia Mecânica, EESC-USP.
- MAYO, C.W. (1999). Loose-part mass and energy estimation. *Progress in Nuclear Energy*, n.3, v.34, p.263-282.
- NING, HU. (1997). A solution method for dynamic contact problems. *Computers & Structures*, n.6, v.63, p.1053-1063, Jun.
- NORTON, R.L. (1996). *Machine design*. 1.ed. New Jersey, Prentice Hall.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*. 2.ed. Swansea, Pineridge Press.
- RADCHENKO, I. (1998). Discrete modeling of dynamic states of contact systems with arbitrary number of elastic bodies. *Mathematical and Computer Modelling*, n.4-8, v.28, p.449-454, Aug.
- RAMAN, C. V. (1920). On some applications of Hert's theory of impact. *Physical Review*, v.15, p.227-284.
- ROCKEY, K.C. et al. (1983). *The finite element method*. 2. ed. New York, John Wiley.
- SHI, P. (1998). Simulation of impact involving an elastic rod. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.3-4, v.151, p.497-499, Jan.
- SHI, P. (1998). The restitution coefficient for a linear elastic rod. *Mathematical and Computer Modelling*, n-4-8, v.28, p.427-435, Aug.

- SHIGLEY, J. E. (1984). *Elementos de Máquinas*. 3.ed. v.2. Rio de Janeiro, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- SHIGLEY, J. E. (1969). *Dinamic analysis of machines*. New York, McGraw-Hill.
- STEIDEL, R. F. (1989). *An introduction to mechanical vibrations*. 3.ed. New York, John Wiley.
- STEARNS, S. D.; DAVID, R. A. (1996). *Signal processing algorithms in matlab*. New Jersey, Prentice Hall.
- SPOTTS, M.F.; SHOUP, T.E. (1998). *Design of machine elements*. 7.ed. New Jersey, Prentice Hall.
- TEIXEIRA, G.M.; LIRANI, J.L. (2001). *A study of impact loading in a cantilevered beam by using the explicit time integration algorithm*. Submetido ao Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica em Março/2001.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1980). *Teoria da Elasticidade*. 3.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- TITA, V.; CARVALHO, J. (2001). Study on impact behavior of composites using the finite element method, *International Conference on Composite Material*, Jun.
- WASFY, T. M.; NOOR, A. K. (1997). Computational procedure for simulating the contact/impact response in flexible multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.1-2, v.147, p.153-166, Jul.
- XING, Y.; ZHU, D. (1998). Analytical solutions of impact problems of rod structures with springs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.3-4, v.160, p.315-323, Jul.
- YU, J.L.; JONES, N. (1997). *Numerical simulation of impact loaded steel beams and the failure criteria*. *International Journal of Solids and Structures*, v.34, p.3977-4004.

APÊNDICE I

TABELA DE PROPRIEDADE DE MATERIAIS

Aço	C	Mn	P	S	Si	N	Al	Hist	Temp	Taxa	K	n
								Mat	[°C]	Deform		
										[1/s]	[MPa]	
Armco iron...	0.02	0.03	0.021	0.010	Tr			A	20	(c)	608.11	0.25
1006.....	0.06	0.29	0.02	0.042	Tr	0.004		A	20	(c)	617.77	0.31
1008.....	0.08	0.36	0.023	0.031	0.06	0.007		A	20	(c)	657.06	0.24
	0.07	0.28			0.27			A	20	(c)	657.06	0.17
1010.....	0.13	0.31	0.010	0.022	0.23	0.004		A	20	(c)	715.67	0.22
1015.....	0.15	0.40	0.01	0.016	Tr			F,A	0	30	630.18	0.116
1015.....	0.15	0.40	0.01	0.016	Tr			F,A	200	30	508.14	0.140
1015 (d).....	0.15	0.40	0.045	0.045	0.25			A	20	1.6	784.62	0.10
1015 (d).....	0.15	0.40	0.045	0.045	0.25			A	300	1.6	794.27	0.11
1020.....	0.22	0.44	0.017	0.043	Tr	0.005		A	20	(c)	745.32	0.20
1035.....	0.36	0.69	0.025	0.032	0.27	0.004		A	20	(c)	901.83	0.17
								A	20	1.6	961.12	0.11
								A	300	1.6	843.22	0.16
1045 (d).....	0.45	0.65	0.045	0.045	0.25			A	20	1.6	1019.73	0.11
								A	20	1.5	950.78	0.14
								A	300	1.6	872.87	0.15
1050 (e).....	0.51	0.55	0.016	0.041	0.28	0.0062	0.03	A	20	(c)	970.77	0.16
1060.....								A	20	1.6	1127.28	0.09
								A	20	1.5	1087.98	0.12
2317 (e).....	0.19	0.55	0.057	0.023	0.26	0.016		A	20	(c)	766.69	0.170

(a) *Tr*=traços;

(b) *A*=recozido, *F*=forjado, *HR*=laminado a quente;

(c) máquina de teste de baixa velocidade, sem especificação de velocidade de teste;

(d) composição dada é normal (referência não específica análise);

(e) composição aproximada;

TABELA I. Resumo dos valores de K e n para a relação tensão de escoamento-deformação, $\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$, para vários aços, ALTAN et al. (1983).

APÊNDICE II

ROTINAS APDL

```
!***** PROCURA PELA MÁXIMA TENSÃO NA DIREÇÃO DE Z ***** MAXIMO.MAC
FINISH
/PREP7
*ABSET,WORKING... ,BOTH
  MOSTRA=0

*GET,NMAX,NODE,0,NUM,MAX
ESEL,S,MAT,,1
NSLE,S

FINISH
/POST1
SET,LAST
*GET,ULTIMO,ACTIVE,0,SET,SBST

TOPO=ULTIMO/20
AUX=0
TMAIOR=0

*DO,GSUB,1,ULTIMO,1
  MOSTRA=MOSTRA+1

      !***** STATUS DIALOG BOX *****
      *IF,MOSTRA,GE,TOPO,THEN
        MOSTRA=0
        PERCENT=(GSUB/ULTIMO)*100
        *ABCHECK,PERCENT
      *ENDIF
!*****

SET,1,GSUB

*DO,NNO,1,NMAX,1
  ESTADO=NSSEL(NNO)

      *IF,ESTADO,EQ,1,THEN
        *GET,AUX,NODE,NNO,S,Z
        *IF,AUX,GT,TMAIOR,THEN
          TMAIOR=AUX
          NMAIOR=NNO
          SMAIOR=GSUB
        *ENDIF
      *ENDIF

*ENDDO
*ENDDO
*ABFINISH

SAVE
!*****
```

```
!***** PROCURA PELO MÁXIMO DESLOCAMENTO ***** DESLOC.MAC

FINISH
/POST1

SET,LAST
*GET,ULTIMO,ACTIVE,0,SET,SBST
```

```
AUX=0
DMAIOR=0
```

```
*DO,GSUB,1,ULTIMO,1
  SET,1,GSUB
```

```
  *DO,NNO,1,25,1
    AUX=UY(NNO)
    *IF,AUX,GT,DMAIOR,THEN
      DMAIOR=AUX
      NMAIOR=NNO
      SMAIOR=GSUB
    *ENDIF
  *ENDDO
*ENDDO
```

```
!*****
```

```
!***  ROTINA PARA EXPORTAR RESULTADOS  ***
```

```
EXPORT.MAC
```

```
*CFOPEN,FILE_TM      ! NOME DO ARQUIVO DE SAÍDA
*VWRITE,TMAIOR(1,1),TMAIOR(1,2),TMAIOR(1,3),TMAIOR(1,4),TMAIOR(1,5),
TMAIOR(1,6),TMAIOR(1,7),TMAIOR(1,8),TMAIOR(1,9),TMAIOR(1,10)
(F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2,'
',F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2,' ',F14.2)
*CFCLOS
```

```
*CFOPEN,FILE_NM      ! NOME DO ARQUIVO DE SAÍDA
*VWRITE,NMAIOR(1,1),NMAIOR(1,2),NMAIOR(1,3),NMAIOR(1,4),NMAIOR(1,5),
NMAIOR(1,6),NMAIOR(1,7),NMAIOR(1,8),NMAIOR(1,9),NMAIOR(1,10)
(F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,'
',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0)
*CFCLOS
```

```
*CFOPEN,FILE_SM      ! NOME DO ARQUIVO DE SAÍDA
*VWRITE,SMAIOR(1,1),SMAIOR(1,2),SMAIOR(1,3),SMAIOR(1,4),SMAIOR(1,5),
SMAIOR(1,6),SMAIOR(1,7),SMAIOR(1,8),SMAIOR(1,9),SMAIOR(1,10)
(F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0,'
',F4.0,' ',F4.0,' ',F4.0)
*CFCLOS
```

```
!*****
```



```
!*** ROTINA PARA GERAÇÃO DE SUPERFÍCIES DE IMPACTO *** AUTOMATIC.MAC
```

```
*DIM,NMAIOR,ARRAY,10,10
*DIM,SMAIOR,ARRAY,10,10
*DIM,TMAIOR,ARRAY,10,10
```

```
FINISH
/PREP7
```

```
!*****
!  NAO QUEREMOS FAZER VARREDURA NO STRIKER - APENAS NA PECA
!*****
```

```
ESEL,S,MAT,,1
NSLE,S
```

```
*GET,NMAX,NODE,0,NUM,MAX
ALLSEL,ALL
```

```
!*****
!%%%%%%%%%%
!%%% VOLUME DO STRIKER
```

```
VSEL,S,MAT,,2
*GET,VOLMAX,VOLU,0,NUM,MAX
VSUM,0
*GET,VVOL,VOLU,VOLMAX,VOLU
ALLSEL,ALL
!%%%%%%%%%%
```

```
AUXSET=0
IT=-1
LIN=0
*DO,VEL,0.2,2.0,0.2
  CHEGAR=(0.1E-3)/VEL
  TEMPO=CHEGAR+(0.40E-3)
```

```
LIN=LIN+1
```

```
COL=0
*DO,MASSA,0.2,2.0,0.2
  COL=COL+1
  IT=IT+1
```

```
!*****DEFININDO CONSTANTES E RODANDO O MODELO *****
```

```
FINISH
/PREP7
```

```
DDD=MASSA/(VVOL)
MP,DENS,2,DDD
EDIVELO,STRIKER,0,0,-VEL
```

```
      /SOLU                                !Menu de Solucao
      TIME,TEMPO                           !TEMPO DE ANALISE
      SOLVE                                !Resolvendo ...
```

```
!*****
```

[illegible]

```
!IMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTO
!  
! Simulação de impacto longitudinal de massa contra viga quadrada em balanço. Massa de 3.14kg  
! impactando contra viga de 1.256kg, num período de tempo de 0.0004s, com velocidade inicial de  
! 2m/s. Os elementos utilizados são o BEAM3 e o MASS21. A viga dividida em 20 elementos e o  
! intervalo de tempo dividido em um total de 40000 substeps.  
!  
!IMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTO  
  
/UNITS,SI  
/NOPR  
/PMETH,OFF,0  
KEYW,PR_SET,1  
KEYW,PR_STRUC,1  
KEYW,PR_THERM,0  
KEYW,PR_FLUID,0  
KEYW,PR_MULTI,0  
/GO  
  
/PREP7  
k,,0,0,0  
k,,400e-3,0,0  
l,1,2  
  
ET,1,BEAM3  
R,1,0.0004,1.333333e-008,0.02,0,0,0,  
  
MP,EX,1,2.07E+011  
MP,NUXY,1,0.3  
MP,DENS,1,7800  
LESIZE,1,,20,,,,1  
  
TYPE, 1  
MAT, 1  
REAL, 1  
ESYS, 0  
SECNUM,  
LMESH, 1  
  
FINISH  
/SOLU  
!*  
ANTYPE,4      ! TRANSIENT ANALYSIS  
TRNOPT,FULL  
LUMPM,0  
  
FINISH  
/PREP7  
  
ET,2,MASS21  
R,2,3.14,3.14,,,,,  
  
TYPE, 2  
MAT, 1  
REAL, 2  
ESYS, 0
```

SECNUM,
KMESH, 2
NSEL,S, , 2
CM,STRIKER,NODE
ALLSEL,ALL

FINISH
/SOLU

D,1,ALL,0 ! CONSTRAIN
IC,2,UX,-2 ! INITIAL VELOCITY

!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU
SOLCONTROL,ON ! SOLUTION CONTROL
NLGEOM,ON ! LARGE DISPLACEMENTS
SSTIF,ON ! STRESS STIFFNESS
NROPT,AUTO, , ! ON, IF NECESSARY
PIVCHECK,1 ! CHECKING SMALL PIVOT TERMS
EQLV, , 0,
TOFFST,0,

!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU

OUTPR,ALL,5, ! SOLUTION PRINTOUT
OUTRES,ALL,5,

TIME,4e-4
AUTOTS,-1
NSUBST,40000, , 1
KBC,1
TSRES,ERASE

SOLVE
FINISH

/POST1 ! GENERAL POST-PROCESSOR
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXI,NMISC, 1
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXJ,NMISC, 3
PRETAB,SMAXI,SMAXJ

FINISH
/POST26 ! TIME HISTORY
NUMVAR,10,
FILE,'viga','rst',' '

NSOL,2,2,U,Y,uy ! DISPLACEMENTS
ESOL,3,1,3,NMIS,1,SMAXII ! STRESS

! PLVAR,2
PLVAR,3
!IMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTOLONGITUDINALIMPACTO

!IMPACTOTRANSVERSALIMPACTOTRANSVERSALIMPACTOTRANSVERSALIMPACTOT
!

! Simulação de impacto transversal de massa contra viga quadrada cantilever. Massa de 3.14kg
! impactando contra viga de 1.256kg num período de tempo de 0.018s, com velocidade inicial de
! 2m/s. Os elementos utilizados são o BEAM3 e o MASSA21. Viga dividida em 20 elementos e
! intervalo de tempo dividido em um total de 40000 substeps.
!

!IMPACTOTRANSVERSALIMPACTOTRANSVERSALIMPACTOTRANSVERSALIMPACTOT

/UNITS,SI
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_MULTI,0
/GO

/PREP7
k,,0,0,0
k,,400e-3,0,0
l,1,2

ET,1,BEAM3
R,1,0.0004,1.333333e-008,0.02,0,0,0,

MP,EX,1,2.07E+011
MP,NUXY,1,0.3
MP,DENS,1,7800
LESIZE,1,,20,,,,,1

TYPE, 1
MAT, 1
REAL, 1
ESYS, 0
SECNUM,
LMESH, 1

FINISH
/SOLU
ANTYPE,4 ! TRANSIENT ANALYSIS
TRNOPT,FULL
LUMPM,0

FINISH
/PREP7

ET,2,MASS21
R,2,3.14,3.14,,,,,

TYPE, 2
MAT, 1
REAL, 2
ESYS, 0
SECNUM,

```
KMESH, 2

NSEL,S,,2
CM,STRIKER,NODE
ALLSEL,ALL

FINISH
/SOLU

D,1,ALL,0      ! CONSTRAIN
IC,2,UY,-2     ! INITIAL VELOCITY

!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU
      SOLCONTROL,ON      ! SOLUTION CONTROL
      NLGEOM,ON          ! LARGE DISPLACEMENTS
      SSTIF,ON           ! STRESS STIFFNESS
      NROPT,AUTO,,      ! ON, IF NECESSARY
      PIVCHECK,1        ! CHECKING SMALL PIVOT TERMS
      EQSLV,, ,0,
      TOFFST,0,
!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU

OUTPR,ALL,5,          ! SOLUTION PRINTOUT
OUTRES,ALL,5,

TIME,0.018
AUTOTS,-1
NSUBST,40000,, ,1
KBC,1
TSRES,ERASE

SOLVE
FINISH

/POST1              ! GENERAL POST-PROCESSOR
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXI,NMISC, 1
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXJ,NMISC, 3
PRETAB,SMAXI,SMAXJ

FINISH
/POST26             ! TIME HISTORY
NUMVAR,10,
FILE,'viga','rst',' '

NSOL,2,2,U,Y,uy     ! DISPLACEMENTS
ESOL,3,1,,NMIS,1,SMAXII ! STRESS

! PLVAR,2
  PLVAR,3
!IMPACTOTTRANSVERSALIMPACTOTTRANSVERSALIMPACTOTTRANSVERSALIMPACTOT
```

```
!BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA
!  
! Simulação de impacto transversal de massa contra viga quadrada bi-apoiada. Massa de 3.14kg  
! impactando contra viga de 1.256kg num período de tempo de 0.0154s, com velocidade inicial de  
! 2m/s. Os elementos utilizados são o BEAM3 e o MASSA21. Viga dividida em 20 elementos e  
! intervalo de tempo dividido em um total de 40000 substeps.  
!  
!BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA  
  
/UNITS,SI  
/NOPR  
/PMETH,OFF,0  
KEYW,PR_SET,1  
KEYW,PR_STRUC,1  
KEYW,PR_THERM,0  
KEYW,PR_FLUID,0  
KEYW,PR_MULTI,0  
/GO  
  
/PREP7  
k,1,0,0,0  
k,2,400e-3,0,0  
k,3,800e-3,0,0  
l,1,2  
l,2,3  
  
ET,1,BEAM3  
R,1,0.0004,1.333333e-008,0.02,0,0,0,  
MP,EX,1,2.07E+011  
MP,NUXY,1,0.3  
MP,DENS,1,7800  
LESIZE,ALL,,20,,,,,1  
  
TYPE, 1  
MAT, 1  
REAL, 1  
ESYS, 0  
SECNUM,  
LMESH, ALL  
  
FINISH  
/SOLU  
  
ANTYPE,4 ! TRANSIENT ANALYSIS  
TRNOPT,FULL  
LUMPM,0  
  
FINISH  
/PREP7  
  
ET,2,MASS21  
R,2,3.14,3.14,3.14,,,,,  
  
TYPE, 2  
MAT, 1  
REAL, 2
```

ESYS, 0
SECNUM,
KMESH, 2
NSEL,S, , ,2
CM,STRIKER,NODE
ALLSEL,ALL

FINISH
/SOLU

!RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTR
D, 1,UY,0
D,22,UY,0
D, 2,UX,0
!RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTRICÇÕES RESTR

IC,2,UY,-2 ! INITIAL VELOCITY

!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU
SOLCONTROL,ON ! SOLUTION CONTROL
NLGEOM,ON ! LARGE DISPLACEMENTS
SSTIF,ON ! STRESS STIFFNESS
NROPT,AUTO, , ! ON, IF NECESSARY
PIVCHECK,1 ! CHECKING SMALL PIVOT TERMS
EQSLV, , ,0,
TOFFST,0,

!SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLUTIONOPTIONS SOLU

OUTPR,ALL,5, ! SOLUTION PRINTOUT
OUTRES,ALL,5,

TIME,0.0154
AUTOTS,-1
NSUBST,40000, , ,1
KBC,1
TSRES,ERASE

SOLVE
FINISH

!POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAME
/POST1
SET,FIRST
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXI,NMISC, 1
AVPRIN,0,0,
ETABLE,SMAXJ,NMISC, 3
FINISH
!POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAMENTO POSTPROCESSAME

!HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HIS
/POST26
NUMVAR,10,
FILE,viga,rst,
ESOL,2,21, ,NMIS,1,MAXIMO_I
PLVAR,2
!HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HISTORICO HIS

!BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA BIAPOIADA
!IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAE
!

! Macro geradora do modelo elementos finitos que representará a situação de impacto entre polia e
! eixo. Elementos tetraédricos de quatro nós com tamanho médio de 3mm. Eixo engastado e
! e condição inicial é velocidade angular na polia, considerada elemento impactador.

!
!IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAE

*AFUN,DEG
WPSTYLE,,,,,,,,,0
/PMETH,OFF
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,LSDYNA,1

/PREP7

CYL4,0,0,50 ! Diam maior = 50mm
CYL4,0,0,10 ! Diam alma = 10mm
CYL4,0,0,15 ! Diam centro = 15mm

AGEN,2,2, , , 30, , , 0 ! Copiando Círculos
AGEN,2,2, , , -30, , , 0
AGEN,2,2, , , 30, , , 0
AGEN,2,2, , , -30, , , 0

ADELE,2, , , 1

FLST,3,5,5,ORDE,2
FITEM,3,3
FITEM,3,-7
ASBA,1,P51X
NUMCMP,ALL

VEXT,1, , , 0,0,-10
NUMCMP,ALL

CYL4,0,0,45
*GET,AMAX,AREA,0,NUM,MAX
VEXT,AMAX, , , 0,0,-2
*GET,VMAX,VOLU,0,NUM,MAX
VSBV,1,VMAX

NUMCMP,ALL

WPOFF,0,0,-8
CYL4,0,0,45
*GET,AMAX,AREA,0,NUM,MAX
VEXT,AMAX, , , 0,0,-2
*GET,VMAX,VOLU,0,NUM,MAX
VSBV,1,VMAX

WPOFF,0,0,5

CYL4,0,0,47,0,55,360,-4

VSBV, 3, 1

! Criando áreas do volume central

FLST,2,4,4

FITEM,2,47

FITEM,2,49

FITEM,2,52

FITEM,2,51

AL,P51X

FLST,2,4,4

FITEM,2,99

FITEM,2,101

FITEM,2,103

FITEM,2,104

AL,P51X

! Criando o volume central

FLST,2,6,5,ORDE,4

FITEM,2,1

FITEM,2,-2

FITEM,2,38

FITEM,2,-41

VA,P51X

NUMCMP,ALL

FLST,2,1,5,ORDE,1

FITEM,2,2

VEXT,P51X, , ,0,0,-50

/INPUT,mat1,mac

/INPUT,mat2,mac

/PNUM,MAT,1

/NUM,1

ESIZE,3,0,

ET,1,SOLID164

TYPE, 1

MAT, 1

MSHAPE,1,3D

MSHKEY,0

VMESH,2

TYPE, 1

MAT, 2

VMESH,1

VMESH,3

ESEL,S,MAT,,1

NSLE,S

CM,npolia,NODE

ALLSEL,ALL

NSEL,S,LOC,Z, -58-0.01,-58+0.01

D,ALL,ALL,0

ALLSEL,ALL

OMEGA=1

EDIVELLO,npolia,0,0,0,OMEGA,0,0,0,90,90,0

/SOLU

TIME,0.025,

EDINT,3,0,

EDRST,200,

EDHTIME,1000,

EDENERGY,1,1,1,1

SAVE

SOLVE

!IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAEIXO IMPACTOPOLIACONTRAE

APÊNDICE III

ARQUIVOS MATLAB

```
%REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARM
%
% Regressao Linear Multipla dos dados de Tensao Equivalente Maxima
% no exemplo de impacto polia contra eixo, simulando choque torsional.
%
% om      : Velocidade angular omega
% polia.dat : Matriz com os dados de entrada
% X       : Vetor com valores de massa
% Y       : Vetor com valores de velocidade
% a       : Coeficientes da equacao -> Sigma = a1*(V^a2)*(M^a3)
%
%REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARM

clc; clear; close all;
load polia.dat;

Z = polia;
Y = 2.0:0.2:3.8;
X = 0.2:0.2:2.0;
C = Z;

mesh(X,Y,Z,C)
xlabel('Massa [kg]');
ylabel('Velocidade [m/s]');
zlabel('Tensão Máxima Equivalente [MPa]');

cont=0; om=2.0-0.2;
for i=1:10
    om=om+0.2;
    m=0;
    for j=1:10
        m = m+0.2;
        cont = cont+1;
        Y(cont) = log(poliamat(i,j));
        X1(cont) = log(om);
        X2(cont) = log(m);
    end
end

X1=X1'; X2=X2'; Y=Y';

X = [ones(size(X1)) X1 X2 ];
a = X\Y

Y2 = X*a;
MaxErr = max(abs(Y2 - Y))

a(1)=exp(a(1))
%REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARMULTIPLA REGRESSAOLINEARM
```

APÊNDICE IV

AJUSTE DE CURVAS

1. AJUSTE PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A interpolação polinomial é inadequada para o ajuste de dados que apresentam uma variação em torno de uma certa curva. Na fig.(1) ilustra-se o caso em questão, onde dados experimentais apresentam uma relativa dispersão em torno de uma linha reta, como mostrado na fig.(1c). Visualmente percebe-se uma relação positiva entre os valores do eixo x e os valores do eixo y , ou seja, a tendência indica que aos maiores valores de x estão associados os maiores valores de y . Usando um polinômio de sexta ordem para o ajuste dos dados, como indicado na fig.(1b), ele passará exatamente através de todos os pontos. A variação nos dados, contudo, faz com que este polinômio oscile muito no intervalo entre os pontos, fornecendo valores errôneos.

Mais conveniente em tais casos é derivar uma função aproximada que adequadamente ajuste a forma ou a tendência geral dos dados em necessariamente acertar em cheio os pontos individuais. A fig.(1c) mostra como uma linha reta pode ser usada para genericamente caracterizar uma direção dos dados sem passar através de qualquer ponto particular.

Uma maneira de determinar a linha na fig.(1c) é examinar visualmente os dados plotados e então rascunhar a melhor linha através dos pontos. Embora o bom senso possa conduzir esta aproximação a bons resultados, ela é particularmente deficiente por ser arbitrária. Isto significa que a menos que os pontos definam exatamente uma linha reta (neste caso a interpolação seria apropriada) diferentes analistas traçariam diferentes linhas.

FIGURA 1. a) Dados exibindo erro significativo. b) Ajuste polinomial oscilando além do alcance dos dados. c) Resultado mais satisfatório usando o ajuste dos mínimos quadrados, CHAPRA & CANALE (1985).

Com base no exposto, foram desenvolvidos alguns critérios para quantificar a qualidade do ajuste, dentre os quais se apresenta a regressão dos mínimos quadrados, que tem o mérito de fornecer a curva que minimiza a discrepância entre os pontos dados e seus próprios pontos.

1.1. REGRESSÃO LINEAR

Uma linha reta que se ajusta a um dado conjunto de pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) é a entidade geométrica mais simples de se aproximar pelo método dos mínimos quadrados. Escrevendo sua equação na forma

$$y = a_0 + a_1x + E \quad (1)$$

onde a_0 e a_1 são coeficientes representando a interseção e a curvatura, respectivamente, e E é o erro, ou resíduo entre o modelo e os dados, que podem ser representados pelo rearranjo da eq.(1) como

$$E = y - a_0 - a_1x$$

Então, o erro, ou resíduo, é a discrepância entre os valores verdadeiros de y e os valores aproximados, $a_0 + a_1x$, preditos pela equação linear.

1.2. CRITÉRIO PARA O MELHOR AJUSTE

Uma estratégia para o ajuste da melhor linha através dos dados seria minimizar a soma dos erros residuais, como em

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) \quad (2)$$

Contudo, este é um critério inadequado, como ilustrado na fig.(2a), que descreve o ajuste de uma linha reta a dois pontos. Obviamente, o melhor ajuste é a linha conectando os dois pontos. Contudo, qualquer linha reta passando através do ponto do meio da linha de conexão (exceto a linha vertical) resulta no mínimo valor da eq.(2) igual a zero por causa do cancelamento dos erros.

FIGURA 2 Exemplos de alguns critérios para melhor ajuste que são inadequados para a regressão: a) minimiza a soma dos resíduos. b) minimiza a soma dos valores absolutos dos resíduos. c) minimiza o máximo erro de cada ponto individual, CHAPRA & CANALE (1985).

Um outro critério poderia minimizar a soma dos valores absolutos das discrepâncias, como em

$$\sum_{i=1}^n |E_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - a_0 - a_1 x_i| \quad (3)$$

A fig.(2b) demonstra porque este critério é também inadequado. Para os quatro pontos mostrados, qualquer linha reta caindo dentro das linhas tracejadas mostradas também minimizará o valor absoluto da soma. Então, este critério não fornece um melhor ajuste único.

Uma terceira estratégia para o melhor ajuste é o critério minimax. Nesta técnica, a linha escolhida é a que minimiza a máxima distância que um ponto individual está da linha. Como desenhado na fig.(2c), esta estratégia não se adapta para a regressão porque ela concede exagerada influência a um ponto único com erro exagerado.

Conforme CHAPRA & CANALE (1985), uma estratégia que supera as deficiências das aproximações retro mencionadas é a que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, Sr , como em

$$Sr = \sum_{i=1}^n E_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \quad (4)$$

Este critério tem inúmeras vantagens, inclusive o fato de que resulta em uma única linha para um certo conjunto de dados. Antes de discutir estas propriedades, será

apresentada uma técnica para a determinação dos valores a_0 e a_1 , que minimizam a eq.(4).

1.3. MÍNIMOS QUADRADOS DE UMA LINHA RETA

A fim de determinar os valores de a_0 e a_1 , a eq.(4) é diferenciada em relação a cada coeficiente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]\end{aligned}$$

A critério de simplificação, todas as somatórias indicadas serão de $i=1$ a $i=n$. Igualando estas derivadas a zero resultará em um mínimo S_r . Se isto é feito, as equações anteriores podem ser rescritas como:

$$\begin{aligned}0 &= \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i \\ 0 &= \sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2\end{aligned}$$

Então, sabendo-se que $\sum a_0 = na_0$, as equações acima podem ser expressas como um conjunto de duas equações lineares simultâneas com duas incógnitas, a_0 e a_1 :

$$\begin{aligned}na_0 + \sum x_i a_1 &= \sum y_i \\ \sum x_i a_0 + \sum x_i^2 a_1 &= \sum x_i y_i\end{aligned}$$

1.4. ERRO NA REGRESSÃO LINEAR

Segundo CHAPRA & CANALE (1985), o desvio padrão para a linha de regressão pode ser determinado da forma seguinte:

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \quad (5)$$

onde $S_{y/x}$ é caracteriza o erro padrão da estimativa. O subscrito “y/x” estabelece que o erro é para o valor previsto de y correspondente ao cada valor particular de x. Da mesma forma que o desvio padrão, o erro padrão da estimativa quantifica a dispersão (ou afastamento) dos dados. $S_{y/x}$, contudo, quantifica o afastamento em

torno de uma linha de regressão, de forma contrária ao desvio padrão original, S_y , o qual quantifica o afastamento em torno da média.

A qualidade do ajuste recém obtido pode ser medida, portanto, pelo acima exposto. Isto é particularmente útil para a comparação de várias regressões, como pode ser visto na fig.(3). Para fazer isto, retorna-se aos dados originais e determina-se a soma dos quadrados em torno da média para a variável dependente (no caso presente, y). Esta soma total dos quadrados é representada por S_t . Esta é a quantia do afastamento na variável dependente que existe previamente à regressão. Após apresentar a regressão linear, o valor de S_r pode ser calculado, o qual é a soma dos quadrados dos resíduos em torno da regressão linear obtida. Isto representa o afastamento que fica após a regressão. A diferença entre as duas quantidades, ou $S_t - S_r$, quantifica o melhoramento ou a redução do erro devido ao modelo de linha reta. Esta diferença pode ser normalizada ao erro total, resultando em

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \quad (6)$$

Neste ponto, faz-se necessária uma palavra de advertência. Embora o coeficiente de correlação forneça uma cômoda medida da “qualidade do ajuste”, deve-se tomar cuidado para não relacionar mais sentido a ele do que o prometido. Apenas por ser “ r ” próximo a 1 não significa que o ajuste é necessariamente bom. Por exemplo, é possível obter valores de r relativamente altos mesmo quando a relação básica entre y e x não se apresenta linear.

1.5. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

Uma extensão proveitosa da regressão linear é o caso onde y é uma função de duas ou mais variáveis. Por exemplo, y pode ser uma função linear de x_1 e x_2 , como em:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

Esta equação é bastante útil no ajuste de dados experimentais onde a variável a ser estudada é freqüentemente uma função de duas outras. Para este caso bidimensional, a “linha de regressão” torna-se um “plano de regressão”. Como previamente, os

melhores valores dos coeficientes são determinados pela colocação da soma dos quadrados dos resíduos:

$$S_r = \sum_1^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i})^2$$

FIGURA 3. Regressão linear, apresentando: a) erro pequeno e b) erro grande, CHAPRA & CANALE (1985).

Diferenciando em relação a cada um dos coeficientes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2 \sum_1^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i}) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2 \sum_1^n x_{1,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i}) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} &= -2 \sum_1^n x_{2,i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i}) \end{aligned} \quad (7)$$

Os coeficientes que resultam na mínima soma dos quadrados dos resíduos são obtidos igualando as derivadas parciais a zero e expressando a eq.(7) como um conjunto de equações lineares simultâneas:

$$\begin{aligned} na_0 + \sum x_{1,i} a_1 + \sum x_{2,i} a_2 &= \sum y_i \\ \sum x_{1,i} a_0 + \sum x_{1,i}^2 a_1 + \sum x_{1,i} x_{2,i} a_2 &= \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} a_0 + \sum x_{1,i} x_{2,i} a_1 + \sum x_{2,i}^2 a_2 &= \sum x_{2,i} y_i \end{aligned}$$

Ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

A regressão linear múltipla pode ser formulada para o caso mais geral,

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$$

onde os coeficientes que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos, CHAPRA & CANALE (1985), são determinados na resolução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} & \dots & \sum x_{m,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \dots & \sum x_{1,i}x_{m,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{2,i}x_{1,i} & \sum x_{2,i}^2 & \dots & \sum x_{2,i}x_{m,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{m,i} & \sum x_{m,i}x_{1,i} & \sum x_{m,i}x_{2,i} & \dots & \sum x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \\ \vdots \\ \sum x_{m,i} y_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

O erro padrão da estimativa para regressão linear múltipla é formulado como:

$$S_{y/x_1, x_2, \dots, x_m} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}} \quad (10)$$

Embora possam existir certos casos onde a variável é linearmente relacionada a duas ou mais outras variáveis, a regressão linear múltipla tem a utilidade adicional na derivação de equações de potência da forma geral:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \quad (11)$$

Tais equações são extremamente úteis no ajuste de dados experimentais. A fim de que seja possível efetuar a regressão linear múltipla, a eq.(11) é transformada com o auxílio de logaritmos, resultando:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \dots + a_m \log x_m$$