Demian Gomes da Silva

*Vibrações Ressonantes Não-Lineares em
Estruturas Tipo Viga Sob Excitação
Paramétrica e Combinada*

São Carlos, S.P

Abril de 2006

Demian Gomes da Silva

*Vibrações Ressonantes Não-Lineares em
Estruturas Tipo Viga Sob Excitação
Paramétrica e Combinada*

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador:
Prof. Paulo Sergio Varoto

São Carlos, S.P

Abril de 2006

Dedicatória

*“Para todas as mulheres da minha família, em especial para
minha mãe”*

Agradecimentos

É muito difícil descrever em palavras o quanto eu sou grato a todos que contribuíram de alguma maneira a realização deste trabalho. Em especial, eu gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Paulo Sérgio Varoto pela oportunidade, liberdade e por promover excelentes condições de trabalho.

Também sou grato aos membros da banca examinadora Professores Carlos A. de Almeida, Marcelo A. Trindade, Luiz C. S. Góes e José M. Balthazar. Muito obrigado pela disposição e pelas importantes sugestões e contribuições.

Muito obrigado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CnPQ) pelo suporte financeiro e pelo extremo profissionalismo. O apoio desta importante instituição foi fundamental para que a presente pesquisa pudesse ser desenvolvida.

Agradeço a colaboração dos técnicos José F. de Moraes (Xina), Jair Diego, Sergio Ferreira, Adão e José Carlos e das secretárias Cristina M. Pessa e Ana Paula. Todos estes profissionais ajudaram muito na execução da presente pesquisa.

Sou muito grato ao Núcleo de Manufatura Avançada (NuMA) e ao Prof. Reginaldo T. Coelho e ao colega Adriano Fagali pelo apoio na usinagem de diversas peças.

Aos meus amigos desde o tempo de graduação Alessandro (Guaraná), pela ajuda na usinagem de várias peças e Paulo Barbieri (Batata) pelos importantes conselhos.

Muito obrigado aos amigos que fiz durante minha excelente passagem por São Carlos: Paulo Varoto, Leopoldo Oliveira, Marcelo Trindade, Ana Lúcia Libardi, Vânia Varoto, Whisner Mamed, José Saiz Jabardo e Enio Bandarra. A amizade de vocês foi muito importante para minha tranquilidade de espírito.

À minha família e aos anjos da guarda meus sinceros agradecimentos.

Demian Gomes da Silva, Abril 2006

*“If I have seen further it is by standing on the shoulders of
giants”*

— *Isaac Newton (1642-1727)*

Sumário

1	Introdução	p. 33
1.1	Estruturas Tipo Viga	p. 35
1.2	Investigações Anteriores	p. 37
1.2.1	Vibração Paramétrica	p. 37
1.2.2	Vibração Autoparamétrica	p. 42
1.2.2.1	Ressonância Interna na Ordem de Um-Para-Um . . .	p. 42
1.2.2.2	Ressonância Interna na Ordem de Dois-Para-Um . .	p. 44
1.2.2.3	Combinação de Ressonâncias Internas	p. 45
1.2.3	Vibração Combinada	p. 46
1.3	Presente Investigação	p. 47
1.3.1	Objetivos	p. 48
1.3.2	Organização	p. 49
2	Uma Perspectiva Sobre Vibrações Lineares e Não-Lineares	p. 51
2.1	Modelagem Física e Derivação das Equações de Movimento	p. 51
2.2	Solução dos Modelos Matemáticos e Interpretação dos Resultados . .	p. 55
2.2.1	Solução de Modelos Lineares: Análise Modal	p. 56
2.2.2	Solução de Modelos Não-Lineares: Método das Múltiplas Es- calas e da Expansão Direta	p. 58
2.3	Vibrações Externas, Paramétricas, Autoparamétricas e Combinadas .	p. 62

2.3.1	Sistemas Vibratórios com Um Grau de Liberdade	p. 63
2.3.1.1	Vibrações Externas	p. 63
2.3.1.2	Vibrações Paramétricas	p. 67
2.3.1.3	Vibrações Combinadas	p. 72
2.3.2	Sistemas Vibratórios Não-Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 73
2.3.2.1	Vibrações Autoparamétricas	p. 74
2.3.2.2	Interação Modal: Outros Mecanismos	p. 76
2.4	Sumário e Conclusões	p. 78

3 Modelagem Dinâmica dos Sistemas Estruturais Sob Investigação p. 81

3.1	Sistemas Estruturais Sob Investigação	p. 82
3.1.1	Sistema Estrutural com Um Grau de Liberdade	p. 82
3.1.2	Sistema Estrutural com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 86
3.2	Modelagem Não-Linear do Sistema com Um Grau de Liberdade	p. 88
3.2.1	Modelo Físico	p. 88
3.2.2	Sumário das Hipóteses Iniciais	p. 90
3.2.3	Cinemática do Movimento	p. 91
3.2.4	Campos de Deslocamento, Deformação e Tensão	p. 92
3.2.5	Energias Cinética, Deformação Elástica e Forças Não-Conservativas Generalizadas	p. 94
3.2.6	Equação de Movimento	p. 98
3.2.6.1	Modelo Dimensional Linear Clássico	p. 99
3.2.6.2	Adimensionalização do Modelo Não-Linear Completo	p. 100
3.3	Modelagem Linear do Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 102
3.3.1	Modelo Geométrico	p. 103
3.3.2	Atribuições	p. 103
3.3.3	Discretização	p. 105

3.3.4	Imposições das Condições de Contorno	p. 106
3.3.5	Modelo Dinâmico Final	p. 107
3.4	Sumário do Capítulo	p. 108
4	Identificação Modal dos Sistemas Estruturais Sob Investigação	p. 111
4.1	Sistema Estrutural com Um Grau de Liberdade	p. 112
4.1.1	Análise Modal Teórica	p. 112
4.1.1.1	Discussões I: Cenário Teórico	p. 115
4.1.1.2	Discussões II: Cenário Experimental	p. 118
4.1.2	Análise Modal Experimental	p. 124
4.1.2.1	Definição do Ensaio	p. 124
4.1.2.2	Configuração Experimental	p. 125
4.1.3	Resultados Experimentais e Comparação com os Teóricos . . .	p. 126
4.2	Sistema Estrutural com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 131
4.2.1	Análise Modal Teórica	p. 131
4.2.2	Análise Modal Experimental	p. 135
4.2.2.1	Definição do Ensaio	p. 135
4.2.2.2	Configuração Experimental	p. 137
4.2.3	Resultados Experimentais e Comparação com os Teóricos . . .	p. 138
4.2.4	Nota Sobre a Representatividade do Modelo Frente Aeronave Real	p. 146
4.3	Sumário do Capítulo	p. 146
5	Vibração Paramétrica Não-Linear: Análises e Experimentos	p. 149
5.1	Análises Teóricas	p. 149
5.1.1	Desenvolvimento Analítico	p. 152
5.1.2	Análise da Vibração Transiente	p. 156
5.1.3	Análise da Vibração em Regime Permanente	p. 162
5.1.3.1	Estabilidade das Soluções de Equilíbrio	p. 165

5.1.3.2	Curvas Resposta-Frequência	p. 172
5.1.3.3	Curvas Resposta-Amplitude	p. 177
5.1.3.4	Curvas Resposta-Amortecimento Quadrático	p. 183
5.2	Experimentos	p. 187
5.2.1	Desenvolvimento Experimental	p. 187
5.2.1.1	Aparato Experimental	p. 187
5.2.1.2	Planejamento e Descrição dos Ensaos Experimentais	p. 190
5.2.2	Resultados Transiente e Comparação com a Teoria	p. 191
5.2.2.1	O Fenômeno	p. 191
5.2.2.2	Efeito do Meio Viscoso	p. 193
5.2.3	Resultados em Regime Permanente e Comparação com a Teoria	p. 195
5.2.3.1	Curvas Resposta-Frequência	p. 195
5.2.3.2	Curvas Resposta-Amplitude	p. 198
5.3	Força de Arrasto Devido à Vibração Paramétrica: Investigação Ex- perimental	p. 201
5.3.1	Avaliação do Tipo de Escoamento	p. 202
5.3.2	Dependência do Coeficiente de Arrasto em Relação a Veloci- dade: Breve Avaliação	p. 204
5.4	Sumário do Capítulo	p. 208
6	Vibração Combinada Não-Linear: Simulações e Experimentos	p. 213
6.1	Simulações Computacionais	p. 214
6.1.1	Caso 1: $\Psi = \Theta = 2\omega_n$	p. 216
6.1.2	Caso 2: Ψ e ω_n Comensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$	p. 218
6.1.3	Caso 3: Ψ e ω_n Incomensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$	p. 221
6.2	Experimentos	p. 222
6.2.1	Desenvolvimento Experimental	p. 222
6.2.1.1	Planejamento e Descrição dos Ensaos Experimentais	p. 222

6.2.1.2	Aparato Experimental	p. 223
6.2.2	Resultados Experimentais e Comparação com os Simulados . .	p. 225
6.3	Sumário do Capítulo	p. 227
7	Vibração Autoparamétrica Não-Linear: Identificação e Experi-	
	mentos	p. 233
7.1	Identificação e Caracterização de Ressonâncias Autoparamétricas . .	p. 234
7.1.1	Implementação Computacional e Aplicação	p. 237
7.2	Experimentos com o Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade	p. 238
7.2.1	Aparato Experimental	p. 238
7.2.2	Planejamento e Descrição dos Ensaios Experimentais	p. 239
7.3	Resultados Experimentais	p. 241
7.3.1	Resultados Transientes	p. 241
7.3.1.1	Caso Linear: Vibração Ressonante Externa	p. 242
7.3.1.2	Caso Não-Linear: Vibração Ressonante Autoparamétrica	p. 249
7.3.1.3	Efeito do Tempo na Nucleação da Vibração Ressonante Autoparamétrica	p. 259
7.3.2	Resultados em Regime Permanente	p. 262
7.3.2.1	Curva Resposta-Frequência	p. 262
7.3.2.2	Curva Resposta-Amplitude	p. 267
7.4	Sumário do Capítulo	p. 269
8	Conclusões Finais e Recomendações	p. 273
8.1	Conclusões Finais	p. 273
8.2	Contribuições	p. 276
8.3	Recomendações	p. 277
A	Caracterização das Fontes de Excitação Acústica e Excitador B&K	
	4812	p. 285

A.1	Fonte de Excitação Via Base	p. 285
A.1.1	Identificação do Excitador	p. 286
A.1.2	Avaliação da Forma de Onda	p. 287
A.1.3	Avaliação da Rotação da Mesa do Excitador	p. 289
A.1.4	Conclusões	p. 291
A.2	Fonte de Excitação Acústica	p. 291
A.2.1	Definição das Características da Fonte Acústica	p. 291
A.2.2	Caracterização da Fonte Acústica	p. 292
A.2.2.1	Avaliação da Forma de Onda	p. 293
A.2.2.2	Avaliação da Energia Acústica Disponível	p. 295
B	Perfil de Pressão Sobre o Sistema com 1 G.L: Determinação Ex- perimental	p. 299
B.1	Experimento	p. 299
B.2	Resultados	p. 300
C	Efeito do Campo Acústico Sobre o Sistema com 1 G.L	p. 303
C.1	Desenvolvimento	p. 303
C.2	Conclusões	p. 305
D	Implementação do Método das Múltiplas Escalas em Matemática Simbólica	p. 307
D.1	Algoritmo Básico: Sistemas com Um Grau de Liberdade	p. 307
D.2	Implementação Computacional	p. 309
D.3	Validação da Rotina	p. 310
D.4	Sintaxe	p. 311
D.5	Um Exemplo Completo	p. 312
E	Método das Múltiplas Escalas: Rotinas Computacionais	p. 315
E.1	Rotina Principal: <i>mme1GL</i>	p. 315

E.2	Sub-Rotina: <i>sort-var</i>	p. 317
E.3	Sub-Rotina: <i>ggrau</i>	p. 318
E.4	Sub-Rotina: <i>trig-sim</i>	p. 319
E.5	Sub-Rotina: <i>conjugado</i>	p. 319
E.6	Sub-Rotina: <i>forma-polar</i>	p. 319
E.7	Sub-Rotina: <i>Dt-operador</i>	p. 320
E.8	Sub-Rotina: <i>perturba</i>	p. 320
F	Ressonâncias Autoparamétricas: Rotina Computacional	p. 321
F.1	Sintaxe	p. 321
F.2	Rotina: <i>AutoRes</i>	p. 321
G	FRFs Experimentais e Sintetizadas: Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 325
H	Modos Normais: Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 327
I	Circuito Eletrônico Empregado no Ensaio do Fio de Fumaça	p. 335
J	Vibração Ressonante Externa: Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade	p. 337
J.1	Desenvolvimento Analítico	p. 337

Resumo

GOMES DA SILVA, D. (2006). Vibrações Ressonantes Não-Lineares em Estruturas Tipo Viga Sob Excitação Paramétrica e Combinada. São Carlos, 2006. 341p Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Desenvolve uma pesquisa em dinâmica estrutural não-linear com enfoque teórico e experimental direcionada para uma importante classe de estruturas flexíveis. É motivada pelos novos requerimentos das indústrias em termos de inovações, das agências certificadoras em termos de segurança e conforto e, por restrições relativas ao meio ambiente cada vez mais severas. Como consequência, o cenário atual e os desafios da engenharia moderna são bem diferentes daqueles encontrados antigamente. Atualmente as estruturas são mais flexíveis e operam sob condições cada vez mais severas. O aumento da flexibilidade torna as não-linearidades mais ativas e, juntamente com a ação de diferentes formas de excitação, produzem um cenário dinâmico complexo. Neste cenário, diversos fenômenos dinâmicos intrinsecamente não-lineares podem se desenvolver e conseqüentemente comprometer a integridade estrutural, prejudicar a operação e incrementar os problemas de ruído. Tais fenômenos são altamente perigosos, principalmente por não serem previstos e nem ao menos conhecidos pela teoria dinâmica linear. Dentre estes fenômenos, a pesquisa se propõe a abordar dois: vibrações ressonantes paramétricas e autoparamétricas. Especificamente, a pesquisa investiga a influência da viscosidade do meio de operação e da presença de excitações combinadas nos fenômenos de ressonância paramétrica. No caso das ressonâncias autoparamétricas o objetivo específico é avaliar técnicas experimentais na caracterização do fenômeno, assim como, promover entendimentos mais profundos sobre suas características. Para atingir os objetivos propostos, são construídas duas estruturas de laboratório com características aeronáuticas. A primeira faz alusão a um estabilizador vertical. Nesta estrutura foram desenvolvidos os trabalhos relativos à vibração ressonante paramétrica. A segunda é uma simplificação de um sistema estrutural asa-pilone-turbina. Nesta segunda estrutura foram avaliadas técnicas experimentais para a identificação, caracterização e análise da vibração ressonante autoparamétrica. Os resultados teóricos e experimentais demonstram que a viscosidade do meio de operação age positivamente na dinâmica da estrutura, reduzindo níveis máximos de vibração em regime permanente, simplificando a dinâmica em respostas transientes e facilitando as relações de estabilidade/instabilidade. Por fim apresenta resultados experimentais demonstrando que a energia vibratória da asa pode ser transferida por intermédio de uma ressonância autoparamétrica principal para a sub-estrutura pilone-turbina resultando em níveis extremamente elevados de vibração.

Palavras-chave: vibrações não-lineares; excitação paramétrica; excitação autoparamétrica; excitação combinada.

Abstract

GOMES DA SILVA, D. (2006). Nonlinear Resonance Vibrations in Beam Type Structures Under Parametric and Combined Excitations. São Carlos, 2006. 341p Ph.D Thesis - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This document presents results of theoretical and experimental investigations on the nonlinear vibration characteristics of an important class of flexible structures. The motivation for such a study arises mainly from the increasing need for lightweight structural members. The weight reduction associated to the use of novel materials contribute to the increase of flexibility what can cause the appearance of nonlinear effects not previously observed. These nonlinear phenomena associated to the fact that, in field conditions the structure is frequently subjected to complex dynamic loads of different nature, results in a complex dynamic environment when estimation of the structure's dynamic response is concerned. Moreover, these nonlinear effects potentially may cause undesired vibration level, in some cases causing malfunction and failure of the entire structure. The research is focused on studying the effects of medium viscosity as well as combined excitations on parametrically resonant vibrating structures. It is specifically aimed characterize the phenomenons either analytically and experimentally by constructing laboratory test specimens that resemble aircraft structures. For that purpose a vertical fin is built in order to conduct experiments on the principal parametric resonance phenomenon. An analytical single degree of freedom model of this structure including nonlinear terms is derived and the results of numerically simulated results through perturbation technique are compared to experimental results obtained in the laboratory. A second structure is built that resembles a typical wing-pylon-engine substructure and it is used to study autoparametric resonance vibrations. In this case the structure is considered with multiple degrees of freedom and the results of a finite element model is correlated with experimentally obtained results. Theoretical and experimental results shows that the environment viscosity affects in a significant manner the dynamic response of the structures under test, decreasing the maximum vibration levels in steady-state regime, simplifying the dynamics in transient responses and facilitating the relationship between instability/stability. At the end, it is shown experimental results demonstrating that vibratory energy from the wing substructure can be transferred by an autoparametric resonance to the substructure pylon-engine. All the experimental results do not found linear theory counterparts.

Keywords: nonlinear vibrations; parametric excitation; autoparametric excitation; combined excitation.

Lista de Figuras

1	Modelo dinâmico simplificado desenvolvido a partir de elementos tipo viga e massas concentradas para um avião comercial de médio porte .	p. 36
2	Contrapartida em uma aeronave real dos sistemas estruturais que servirão de objeto de estudo para a presente pesquisa.	p. 82
3	Sistema estrutural com um grau de liberdade	p. 84
4	Sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade.	p. 86
5	Modelo físico da estrutura sob investigação quando sob ação de excitações combinadas e do meio de operação	p. 89
6	Modelo geométrico tridimensional da estrutura sob investigação. . . .	p. 103
7	Características do elemento Solid45.	p. 104
8	Características do elemento Beam4.	p. 104
9	Malha mapeada utilizada no modelo geométrico tridimensional da estrutura sob investigação.	p. 106
10	Ampliação da turbina e da nervura. Pode-se observar os detalhes da malha mapeada gerada.	p. 106
11	Restrições impostas ao modelo. Na base restringiu-se todos os graus de liberdade da porção inferior, assim como, na união pilone/turbina.	p. 107
12	Ilustração da aplicação do <i>step-relaxation method</i>	p. 113
13	Comparação entre a FRF obtida via SRM original e a verdadeira FRF	p. 117
14	Erro percentual entre a FRF obtida via SRM original e a verdadeira FRF	p. 117

15	Descrição esquemática do processo de aquisição de sinais utilizado no step-relaxation method	p. 119
16	Sinais simulados de excitação e resposta acoplados com DC	p. 121
17	Sinais simulados de excitação e resposta acoplados com AC	p. 122
18	Magnitude e fase do filtro passa-alta tipo Butterworth de primeira ordem utilizado para transformar os sinais simulados de acoplados DC para acoplados AC.	p. 122
19	Comparação entre a verdadeira FRF de receptância e a estimada via SRM utilizando sinais de excitação e resposta acoplados com AC. . .	p. 123
20	Erro relativo entre a verdadeira FRF de receptância e a estimada via SRM utilizando sinais de excitação e resposta acoplados com AC. .	p. 123
21	Configuração experimental utilizada durante o ensaio modal.	p. 126
22	Sinais experimentais de excitação e resposta originais, seguido pelos respectivos espectros em amplitude.	p. 127
23	Sinais experimentais de excitação e resposta modificados, seguido pelos respectivos espectros em amplitude.	p. 129
24	Resultado do emprego do método do ajuste do círculo na extração dos parâmetros modais de interesse.	p. 130
25	Diagrama de Bode apresentando o módulo da FRF de aceleração. Resultados experimentais e comparação com resultados teóricos, obtidos para dois valores de m_o	p. 130
26	Pontos de aplicação da excitação e medição da resposta no sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Configuração empregada durante o ensaio modal.	p. 136
27	Configuração experimental típica utilizada durante o ensaio modal da estrutura com múltiplos graus de liberdade.	p. 137
28	Diagrama de Bode apresentando o módulo das FRFs de aceleração da estrutura com múltiplos graus de liberdade. Resultados experimentais.	p. 139
29	Comparação entre FRFs experimentais e sintetizadas a partir dos parâmetros modais obtidos.	p. 143
30	Segundo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 144

31	Quarto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 145
32	Comparativo entre os resultados numéricos e analíticos relativos à re- sposta paramétrica transiente	p. 157
33	Comparativo da resposta paramétrica transiente obtido via solução numérica e método das múltiplas escalas	p. 158
34	Predições do efeito do amortecimento não-linear sobre a amplitude da resposta paramétrica transiente	p. 160
35	Predições do efeito do amortecimento não-linear sobre a fase da re- sposta transiente	p. 161
36	Característica típicas do ponto de equilíbrio estável tipo nó para as soluções triviais do sistema com um grau de liberdade	p. 169
37	Característica típicas do ponto de equilíbrio estável tipo foco para as soluções triviais do sistema com um grau de liberdade	p. 169
38	Característica típicas do ponto de equilíbrio tipo sela para as soluções triviais do sistema com um grau de liberdade	p. 170
39	Curva resposta-freqüência típica na ausência do amortecimento não- linear para o sistema com um grau de liberdade	p. 173
40	Curva resposta-freqüência típica demonstrando o efeito do amorteci- mento não-linear para o sistema com um grau de liberdade	p. 174
41	Influência do amortecimento não-linear na resposta não-trivial do sis- tema com um grau de liberdade	p. 175
42	Valores críticos de εH_2 em função de εH_3 que levam ao desaparec- imento da bifurcação sela-nó, relativo ao sistema com um grau de liberdade	p. 176
43	Curva resposta-amplitude típica na ausência do amortecimento não- linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e $\varepsilon \sigma = -0.73$	p. 178
44	Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amorteci- mento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon \sigma = -0.73$	p. 179
45	Curvas típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear ded- icada à pontos de interesse específico	p. 180

46	Curva resposta-amplitude típica na ausência do amortecimento não-linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e $\varepsilon \sigma = 0$, relativa ao sistema com um grau de liberdade.	180
47	Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon \sigma = 0$, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p. 182
48	Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon \sigma = 0$	p. 183
49	Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon \sigma = 0$, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p. 184
50	Curva típica resposta-freqüência demonstrando dois pontos específicos de operação, relacionado com o sistema com um grau de liberdade . .	p. 185
51	Curva típica resposta-amortecimento quadrático demonstrando o efeito da variação de εH_2 sobre a magnitude da resposta, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p. 186
52	Curva típica resposta-amortecimento quadrático demonstrando o efeito da variação de εH_2 sobre a magnitude da resposta, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p. 186
53	Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração paramétrica.	p. 188
54	Vibração paramétrica principal obtida experimentalmente. principal.	p. 191
55	Resposta paramétrica principal do item de teste obtida experimentalmente para diferentes amplitudes da excitação paramétrica.	p. 192
56	Resposta paramétrica principal experimental do item de teste quando a resposta não-trivial perde a estabilidade e retorna a uma condição de equilíbrio trivial.	p. 193
57	Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente. Resultado teórico considerando nulo o efeito do amortecimento quadrático	p. 194
58	Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente demonstrando o efeito do amortecimento quadrático	p. 194
59	Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente. Resultado teórico considerando nulo o efeito do amortecimento quadrático	p. 196

60	Curvas resposta-freqüência teórica e experimental demonstrando o efeito do amortecimento quadrático	p.196
61	Curvas resposta-freqüência teórica e experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação paramétrica	p.198
62	Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente. Resultado teórico considerando nulo o efeito do amortecimento quadrático	p.199
63	Curvas resposta-freqüência teórica e experimental demonstrando o efeito do amortecimento quadrático	p.200
64	Curvas resposta-amplitude teórica para dois valores de amortecimento quadrático do amortecimento e experimental	p.201
65	Arranjo experimental empregado na avaliação sobre o tipo de escoamento induzido pela vibração paramétrica principal.	p.203
66	Seqüencia fotográfica demonstrando a evolução do escoamento em torno da estrutura. Nota-se claramente a formação de vortices, demonstrando que trata-se de um escoamento turbulento.	p.205
67	Resultados fotográficos comprovando a qualidade do ensaio empregando o método do fio de fumaça	p.206
68	Estimativa experimental da variação do número de Reynolds sobre a massa concentrada durante o desenvolvimento da ressonância paramétrica principal.	p.207
69	Distribuição de pressão obtida experimentalmente sobre a estrutura com um grau de liberdade	p.215
70	Resposta temporal típica para vibração combinada com as excitações em de fase, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p.217
71	Resposta temporal típica para vibração combinada com as excitações fora de fase, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p.218
72	Resposta típica da vibração combinada quando $\Psi : \omega_n = 1 : 20$, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p.219
73	Resposta típica da vibração combinada quando $\Psi : \omega_n = 3 : 20$, relativa ao sistema com um grau de liberdade	p.220
74	Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração combinada.	p.224

75	Sinais experimentais das excitações paramétrica e externa representados nos domínios do tempo e da frequência. Caso em que as excitações estão em fase.	p. 226
76	Sinais experimentais das excitações paramétrica e externa representados nos domínios do tempo e da frequência. Caso em que as excitações estão fora de fase.	p. 226
77	Resultados experimentais e teóricos da vibração combinada, considerando as excitações em fase.	p. 228
78	Resultados experimentais e teóricos da vibração combinada, considerando as excitações em fora de fase	p. 229
79	Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração autoparamétrica.	p. 238
80	Assinatura ideal da amplitude da força de excitação autoparamétrica para os quatro níveis utilizados.	p. 241
81	Vibração externa ressonante da coordenada x_1 provocada por uma excitação periódica monocomponente. Resultado teórico, obtido a partir da Eq (7.20). Região I demonstra o surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante, região II demonstra a condição de regime permanente e Região III a extinção quando a força de excitação torna-se nula.	p. 243
82	Assinatura experimental da amplitude da força de excitação externa para o nível H1. Excitação periódica monocomponente à 21.15 Hz . . .	p. 244
83	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração forçada linear região I	p. 245
84	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração forçada linear região II	p. 247
85	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração forçada linear região III	p. 248
86	Assinatura experimental da amplitude da força de excitação autoparamétrica para o nível H3. Excitação periódica monocomponente à 21.15 Hz	p. 249
87	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração autoparamétrica região I	p. 251

88	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Decomposição dos modos que compõem a vibração autoparamétrica região I	p. 253
89	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração autoparamétrica região II	p. 255
90	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Vibração autoparamétrica região III	p. 257
91	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Decomposição dos modos que compõem a vibração autoparamétrica região III	p. 258
92	Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Avaliação do efeito do tempo de exposição no surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante autoparamétrica.	p. 261
93	Curva resposta-frequência experimental demonstrando o efeito da frequência da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção ascendente e força de excitação externa de 5.0 N.	p. 263
94	Curva resposta-frequência experimental demonstrando o efeito da frequência da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção descendente e força de excitação externa de 5.0 N.	p. 265
95	Curva resposta-amplitude experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção ascendente e frequência de excitação de 21.15 Hz.	p. 267
96	Curva resposta-amplitude experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção descendente e frequência de excitação de 21.15 Hz.	p. 269
97	Configuração experimental utilizada durante a obtenção da FRF do excitador eletrodinâmico B&K 4812.	p. 286
98	Diagrama de Bode demonstrando a FRF experimental do excitador eletrodinâmico B&K 4812.	p. 287

99	Resultados experimentais demonstrando a presença de harmônicos na resposta do excitador eletrodinâmico B&K 4812, mesmo quando a excitação (volts) possui apenas uma componente espectral em 36.132 Hz. Note também a presença de uma frequência parasita em 60 Hz proveniente da rede elétrica.	p. 288
100	Resultados experimentais demonstrando a rotação em torno do eixo Y da mesa do excitador eletrodinâmico B&K 4812.	p. 290
101	Desenho ilustrativo da fonte acústica projetada para desenvolver a melhor qualidade sonora do auto-falante: (a) vista frontal e; (b) vista lateral. Dimensões são: $W = 500mm$, $H = 460mm$ e $T = 290mm$. . .	p. 292
102	Arranjo experimental para avaliar a qualidade da excitação acústica, no que diz respeito a forma de onda.	p. 294
103	Medidas experimentais do nível de pressão sonora à 150 mm do centro do auto-falante e com excitação em 18 Hz	p. 295
104	Medidas experimentais do nível de pressão sonora à 150 mm do centro do auto-falante e com excitação em 36 Hz	p. 296
105	Medidas experimentais da velocidade do cone da fonte acústica quando excitada à 36.132 [Hz].	p. 297
106	Arranjo experimental para determinar o perfil da pressão incidindo sobre a estrutura de um grau de liberdade onda. O excitador eletrodinâmica permaneceu desligado durante todo o ensaio.	p. 300
107	Distribuição de pressão obtida experimentalmente sobre a estrutura com um grau de liberdade	p. 301
108	Diagrama esquemático da estrutura do código simbólico desenvolvido para a implementação computacional do método das múltiplas escalas para problemas com um grau de liberdade.	p. 309
109	FRFs experimentais e sintetizadas do sistema com múltiplos graus de liberdade. Quatro primeiras.	p. 325
110	FRFs experimentais e sintetizadas do sistema com múltiplos graus de liberdade. Seis últimas.	p. 326
111	Primeiro modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 328

112	Segundo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 329
113	Terceiro modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 330
114	Quarto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 331
115	Quinto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 332
116	Sexto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 333
117	Sétimo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.	p. 334
118	Diagrama do circuito eletrônico empregado durante o ensaio do fio de fumaça.	p. 335

Lista de Tabelas

1	Características dinâmicas típicas de um avião comercial com duas turbinas sob a asa.	p. 88
2	Propriedade dos Materiais Empregados	p. 105
3	Modelo modal experimental do sistema com múltiplos graus de liberdade.	p. 141
4	Comparativo entre as frequências naturais lineares obtidas teoricamente pelo método dos elementos finitos e as experimentais.	p. 142
5	Resultados para várias simulações quando Ψ and ω_n são incomensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$	p. 221
6	Parâmetros estatísticos para a velocidade do cone quando excitado à $36.132Hz$ e vários níveis de amplitude.	p. 298
7	Resultados finais demonstrando a pressão teórica e conseqüentemente a força distribuída agindo sobre o sistema de um grau de liberdade. . .	p. 298
8	Problemas avaliados com o programa <i>mme1GL</i>	p. 311

Lista de Abreviaturas e Siglas

Siglas

<i>ASTM</i>	American Society for Testing and Materials
<i>OXYZ</i>	Sistema de coordenadas cartesiano ortogonal
<i>SRM</i>	Step relaxation method
<i>G.L.</i>	Grau de liberdade

Lista de Símbolos

Símbolos Romanos

q	Coordenada generalizada; números primos
p	Números primos
t	Tempo
k	Constantes interas positivas, negativas ou nulas
$\mathcal{A}$	Excitações forçadas tipo harmônica
$\mathcal{B}$	Forças de fricção viscosas
$\mathcal{C}$	Forças não-lineares conservativas complementares
$\mathcal{D}$	Excitações paramétricas lineares e/ou não-lineares
H	Magnitude das excitações forçadas tipo harmônica
G	Magnitude das forças de fricção viscosas
I	Magnitude das excitações paramétricas
$[M]$	Matriz de massa
$[K]$	Matriz de rigidez
$[C_1]$	Matriz de amortecimento linear viscoso
$\{x\}$	Vetor de coordenadas geométricas
T	Múltipla escala; energia cinética
T_n	Período de vibração livre
a	Amplitude
h	Espessura
L	Comprimento
$p(x, t)$	Pressão acústica distribuída
$w(x, t)$	Coordenada generalizada na direção Z
u, w	Deslocamento
$U_B(t)$	Deslocamento da base
$F(t)$	Força de excitação externa
c	Velocidade do som, amortecimento

k	Número de onda
Z_r	Impedância de radiação
$[e_{ij}]$	Tensor de deformação
E	Módulo de elasticidade
V	Volume
A_1, A_2, B_1, B_2	Constantes geométricas
m_o	Massa concentrada
U	Energia potencial
I_y	Momento de inércia de área em relação ao eixo Y
Q_{nc}	Força não-conservativa generalizada

Símbolos Gregos

Λ, Γ	Excitação paramétrica
Ω	Excitação forçada
ω	Frequência natural não amortecida
ε	Constante real
β	Ângulo de Fase
α	Amplitude
λ	Comprimento de onda
ρ	Densidade de volume
$\bar{\Omega}$	Frequência reduzida
ζ	Fator de amortecimento modal
$[\sigma_{ij}]$	Tensor de deformação
Π	Energia de deformação elástica
Θ	Excitação paramétrica adimensional
Ψ	Excitação externa adimensional

Subescritos

$(\cdot)_F$	Flexão
$(\cdot)_T$	Torção
$(\cdot)_n$	n-ésimo termo
$(\cdot)_i$	i-ésimo termo
$(\cdot)_J$	J-ésimo termo
$(\cdot)_r$	r-ésimo termo
$(\cdot)_m$	r-ésimo termo

$(\cdot)_l$	l-ésimo termo
$(\cdot)_o$	Massa concentrada

Superescritos

$(\cdot)^*$	Variável admensional
-------------	----------------------

CAPÍTULOUM

Introdução

“Ogni nostra cognizione prencipia da sentimenti.”

— *Leonardo Da Vinci (1452-1519)*

A engenharia contemporânea busca a cada dia melhores soluções para os problemas, necessidades e desejos da humanidade. Este interesse também é comercial, e a busca por resultados financeiros positivos vêm levando tais companhias ao desenvolvimento e fabricação de produtos inovadores. No início da década de 1950, um dos mais avançados aviões comerciais era o Lockheed Super Constellation, totalmente construído com ligas metálicas, movido por motores a pistão e capacidade de transportar até cento e nove passageiros a no máximo 600 Km/h. Atualmente, um dos mais avançados aviões comerciais existentes é o Airbus A340/600, construído com grande variedade de materiais, impulsionado por turbinas a jato e capacidade de transportar até trezentos e oitenta passageiros a quase 1000 Km/h. Provavelmente a busca pelo desenvolvimento de produtos que sejam mais baratos e eficientes, mais seguros e rápidos e menos poluentes será nas próximas décadas o maior objetivo das indústrias e mercados contemporâneos.

Porém, o desenvolvimento de produtos tecnologicamente mais avançados requer soluções inovadoras em todos os seguimentos envolvidos, de materiais inovadores à

logísticas de transporte e produção. Já a obtenção de soluções inovadoras indubitavelmente induz a desafios no contexto da engenharia. Estes desafios se estendem à todos os seguimentos relacionados com o projeto, desenvolvimento e produção.

Durante as fases de desenvolvimento é vital que o comportamento dinâmico de um novo produto seja conhecido. O desconhecimento dos níveis e características da resposta dinâmica pode levar a níveis de tensões no material não previstas à priori, e subsequente falha. Também, pode levar a falha estrutural devido à aplicação de carregamentos repetitivos, os quais estão diretamente envolvidos com fadiga, propagação de trincas e acumulação de danos estruturais. Ainda, a resposta dinâmica pode reduzir ou inibir a performance devido à fatores ergonômicos e de emissão de ruído.

Na época do Super Constellation, a análise dinâmica clássica baseada na teoria linear era considerada suficiente para a compreensão das características vibratórias de praticamente todas as estruturas projetadas. Entretanto nos últimos cinquenta anos, as estruturas vêm sofrendo fortes modificações. As estruturas modernas são mais otimizadas, empregam materiais inovadores e são normalmente mais flexíveis. Em especial, com aumento da flexibilidade as não-linearidades geométricas tornam-se mais ativas, provocando o surgimento de vibrações com características não-lineares. Nestes casos, a análise dinâmica linear deve ser considerada apenas como uma fase inicial de análise, uma vez que diversas características das vibrações não-lineares não podem ser extraídas pela teoria linear clássica.

Em adição à potencial presença de não-linearidades ativas, as estruturas modernas quando em operação, podem sofrer a ação de excitações de naturezas diferentes. Exemplos incluem excitações devido a força de contato, acústica e provocada por desbalanceamentos residuais. Em termos mais específicos, independentemente da natureza, as excitações podem ser classificadas segundo a maneira que aparecem nas equações de movimento. Dentro desta classificação, as excitações podem ser externas (ou diretas), paramétricas e combinadas. Excitações combinadas ocorrem nos casos em que excitações externas e paramétricas agem simultaneamente.

Diferentemente das excitações forçadas as quais aparecem matematicamente como uma não-homogeneidade nas equações de movimento, as excitações paramétricas aparecem como uma variação temporal em algum coeficiente nestas equações. Tal como as excitações externas podem provocar grandes respostas da estrutura sob certas circunstâncias especiais, as excitações paramétricas também podem provocar altíssimas amplitudes, ainda que, sob circunstâncias mais especiais. Já excitações combinadas podem incrementar consideravelmente a complexidade vibratória.

Assim, a potencial presença de não-linearidades ativas juntamente com excitações paramétricas ou combinadas compõem um cenário dinâmico complexo. A complexidade deste cenário aumenta quando são consideradas as características do meio de operação, tal como viscosidade e temperatura. Dentro deste cenário, vibrações com características especiais podem se desenvolver e conseqüentemente comprometer a segurança, prejudicar a operação ou ainda reduzir o desempenho de um novo produto. Para todos estes exemplos é fundamental que os níveis vibratórios encontrados em serviço sejam antecipados e mantidos sob controle. Entretanto para antecipar e manter a vibração sobre controle é necessário o conhecimento dos mecanismos que provocam estas vibrações, assim como, das variáveis que os afetam. Exatamente para a aquisição deste conhecimento é que a presente tese está dirigida.

1.1 Estruturas Tipo Viga

Elementos estruturais podem ser divididos segundo sua geometria e condições de carga. Dentro desta classificação encontram-se seis grupos: os cabos, as barras, as vigas, as membranas, as placas e as cascas (NAYFEH; PAI, 2004). Cabos são estruturas unidimensionais que podem suportar apenas cargas de tração. Cordas são descritivos dos casos em que os cabos estão pré-tencionados e retos.

Barras são estruturas unidimensionais que podem suportar cargas de tração, compressão e torção. Nos casos em que uma barra está sujeita unicamente a carregamentos longitudinais de tração, estas são usualmente denominadas de varas. Se uma barra está sujeita unicamente a carregamentos longitudinais de compressão, esta é denominada de coluna. Vigas são estruturas que possuem uma dimensão muito maior que as outras duas e são primariamente submetidas a carregamentos laterais, resultando em flexão do seu eixo de referência. Uma viga genérica deve suportar tração, compressão, flexão, cisalhamento transversal e carregamentos torcionais. Em outras palavras, cabos, cordas, barras, varas e colunas são casos especiais de uma viga genérica e arcos são vigas inicialmente curvadas.

Vigas desempenham um importante papel como sistemas estruturais. Várias estruturas – das mais simples as mais complexas – normalmente empregam em alguma extensão elementos estruturais tipo viga. Exemplos da aplicação direta de estruturas tipo viga incluem a agulha de uma simples máquina de costura; um simples poste para transmissão de energia elétrica e uma pá de uma turbina aeronáutica. Ainda um bom número de estruturas podem ser formadas a partir de elementos tipo viga. Dentre estas, pode se citar as treliças, os porticos e os chassis automobilísticos.

Ainda, várias outras estruturas complexas são modeladas e analisadas a partir destes elementos. Fung & Chang (1998) modelaram um braço robótico utilizando elementos tipo viga e massas concentradas. Beal (1965) estudaram a dinâmica de foguetes também desenvolvendo um modelo simplificado a partir de elementos tipo viga.

Em adição a estes exemplos, a indústria aeroespacial desenvolve modelos estruturais e aeroelásticos a partir de elementos tipo viga e massas concentradas. O trabalho de Wright (2002) demonstra de maneira geral o desenvolvimento deste tipo de modelo na indústria aeronáutica. Mais especificamente o trabalho dos russos Chuban et al. (2002) descreve a aplicação destes modelos em predições de flutter. Neste caso, eles modelaram um avião comercial com capacidade para até 240 passageiros com estes elementos, tal como ilustra a Figura (1). A versatilidade e importância dos elementos estruturais tipo viga ainda pode ser verificada nos mais diversos equipamentos e sistemas mecânicos e eletro-mecânicos. Exemplos incluem transdutores de aceleração angular (BELLO et al., 2003), ventiladores piezoelétricos (YOO; HONG; CAO, 2000) e sistemas micro-estruturais.

Figura 1: Modelo dinâmico simplificado desenvolvido a partir de elementos tipo viga e massas concentradas para um avião comercial de médio porte, neste caso um Tupolev Tu-204 com capacidade de transportar até 240 passageiros (Cortesia V. D. Chuban, TsAGI, Moscow, RU).

Assim, dependendo das características principais as estruturas podem ser enquadradas em classes. Em especial, quando uma estrutura é formada por elementos estruturais tipo viga ou possa ser modelada utilizando estes elementos, esta estrutura pertence à

classe tipo viga. Exatamente para abordar tipos de vibrações não-lineares proveniente desta classe estrutural é que a presente pesquisa está focada.

1.2 Investigações Anteriores

Os primeiros estudos sobre o fenômeno oscilatório datam entre 582 e 507 antes de Cristo, quando o filósofo e matemático grego Pythagoras investigou o som musical produzido pela oscilação de uma corda. Fisicamente a oscilação é produzida devido a presença de mecanismos que transformam energia potencial em cinética e vice-versa. Desde então, é sabido que ao se retirar um dado sistema — que possua os mecanismos de transformação energética — da sua posição de equilíbrio estático, este irá oscilar em torno de um (as vezes mais) ponto de equilíbrio.

Nos últimos cinqüenta anos, vários trabalhos científicos vêm buscando o entendimento das diferenças e peculiaridades da dinâmica estrutural não-linear. Dentre todos, uma grande parcela empregaram com objeto de estudo elementos estruturais tipo-viga. Os resultados de tais pesquisas são extremamente motivadores e de valor imensurável.

Neste item, alguns dos mais importantes trabalhos desenvolvidos em estruturas tipo viga que abordam vibrações paramétricas, autoparamétricas e combinada foram selecionados segundo sua relevância à presente pesquisa e serão revisados.

1.2.1 Vibração Paramétrica

Quando um sistema estrutural sofre a ação de uma excitação do tipo paramétrica, ocorre uma modificação variante com o tempo em algum parâmetro do sistema (NAYFEH; MOOK, 1979). Neste caso, a vibração proveniente deste tipo de excitação é dita **vibração paramétrica**. Em especial, este tipo de vibração ocorre somente se o sistema estiver envolvido em uma condição de **ressonância paramétrica** de forma direta ou combinada.

A literatura é incerta em relação a data é quem fez a primeira observação sobre a vibração paramétrica. Entretanto, este fato é atribuído a Michael Faraday. Em 1831 Faraday observou que o líquido (mosto) contido no interior de um cilindro (tonel) oscilava com a metade da frequência da pá misturadora do mosto¹. Em 1859, Melde ao fixar uma corda entre um suporte rígido e a extremidade de um diapasão² observou

¹Sumo da uva, antes de se completar o processo de fermentação do vinho.

²Pequeno instrumento de aço na forma de U que dá uma nota constante e serve para por ele se aferirem as vozes e instrumentos musicais.

que, apesar da força de excitação ser longitudinal, a corda poderia vibrar lateralmente e ainda na metade da frequência de vibração do diapásão. Somente em 1887, Lord Rayleigh explicou matematicamente os fenômenos observados por Faraday e Melde (EVAN-IWANOWSKI, 1965; NAYFEH; MOOK, 1979).

Desde os trabalhos iniciais de Faraday, Melde e Lord Rayleigh até os dias atuais, vários trabalhos foram realizados sobre a vibração paramétrica. Atualmente é conhecido que tal fenômeno pode estar presente em diversos tipos de sistemas dinâmicos, tais como, em sistemas elétricos-mecânicos, sistemas fluídicos-estruturais e puramente estruturais (CARTMELL, 1990a; EVAN-IWANOWSKI, 1965; NAYFEH; MOOK, 1979). Neste contexto, Zavodney (1987) apresenta uma abrangente revisão sobre diversos sistemas mecânicos excitados parametricamente. Este trabalho pode ser considerado um marco nesta linha de pesquisa.

A vibração paramétrica em sistemas puramente estruturais foi investigada, aparentemente, pela primeira vez por Beliaev em 1924. Ele analisou a resposta de uma coluna pivotada em ambas as extremidades e submetida a um carregamento periódico. Os resultados demonstraram que a coluna poderia oscilar com metade da frequência de excitação Ω se esta frequência estivesse perto de uma das frequências naturais do movimento lateral, mesmo que o carregamento axial estivesse abaixo do carregamento de flambagem da coluna (EVAN-IWANOWSKI, 1965). Posteriormente, outros autores pesquisaram tal fenômeno em outros tipos de elementos estruturais. Einaudi em 1936 foi o primeiro a pesquisar a ocorrência em placas e Bublik e Merkulov em 1942 foram os primeiros a analisar o fenômeno em laminas cilíndricas (EVAN-IWANOWSKI, 1965).

Desde as primeiras investigações sobre a vibração paramétrica em sistemas puramente estruturais, a comunidade científica sempre despendeu muita atenção sobre os sistemas estruturais compostos por elementos do tipo viga. Nos últimos 25 anos muitos trabalhos foram publicados sobre investigações realizadas nesta classe de estrutura.

Sato, Saito & Otomi (1978) estudaram teoricamente a resposta em regime permanente de uma viga horizontal simplesmente apoiada portando uma massa concentrada submetida a influência gravitacional e sob excitação paramétrica. Os autores consideraram na modelagem matemática os termos não-lineares decorrente da curvatura da viga, termos de inércia longitudinal da viga e também a inércia de rotação da massa concentrada. Assumiram a aproximação para um único modo e aplicaram o método de Galerkin para a obtenção da equação diferencial não-linear. Posteriormente o método do balanço harmônico foi empregado para resolver a equação diferencial não-linear e obtenção da resposta vibratória do sistema. Também foram discutidos os efeitos do

peso, da inércia de rotação e da localização da massa concentrada. Quatro anos mais tarde, Saito & Koizumi (1982) estenderam o trabalho de Sato, Saito & Otomi (1978). A contribuição consiste basicamente na realização de ensaios experimentais os quais possibilitaram que curvas resposta-amplitude experimentais fossem obtidas e confrontadas com as obtidas teoricamente.

Gürgöze (1986) estudou teoricamente uma variação do sistema estudado anteriormente nos trabalhos de Sato, Saito & Otomi (1978) e Saito & Koizumi (1982), cuja principal alteração é a disposição do sistema. Neste trabalho, o sistema é posicionado verticalmente de maneira a se assemelhar a um sistema típico de acionamento das válvulas de um motor de combustão interna. Especificamente, o sistema é idealizado como uma viga vertical simplesmente apoiada na extremidade inferior e portando uma massa concentrada na extremidade superior, cujo movimento horizontal nesta extremidade é restrito e o movimento vertical é submetido a uma excitação periódica axial. Também considera na modelagem matemática os termos não-lineares decorrentes da curvatura da viga, termos de inércia longitudinal da viga e também a inércia de rotação da massa concentrada, assim como, utiliza aproximação para um único modo e aplica o método de Galerkin para a obtenção da equação diferencial não-linear. Os efeitos de vários parâmetros, tais como, massa, rigidez e fator de amortecimento, sobre as curva resposta-amplitude, backbone e diagramas de estabilidade são investigados.

Zavodney & Nayfeh (1989) realizaram um extenso trabalho teórico e experimental em finas vigas de aço e fibra de carbono portando uma massa concentrada, dispostas na configuração livre-engastada e submetidas a excitação axial via base. A teoria de Euler-Bernoulli foi empregada para a derivação da equação diferencial parcial para uma posição arbitrária da massa concentrada. A equação governante foi discretizada utilizando o método de Galerkin e posteriormente, foi empregado o método das múltiplas escalas para a determinação da solução aproximada para um único modo. Curvas resposta-frequência e resposta-amplitude foram obtidas teoricamente e experimentalmente para três tipos de vigas. Atenção especial foi dada pelos autores ao fato de todas as vigas testadas terem falhado por fadiga devido ao severo nível vibratório decorrente da vibração paramétrica principal.

Cartmell (1990b) apresentou um importante trabalho sobre a obtenção das equações de movimento aplicado a elementos tipo viga na configuração livre-engastada e submetida a excitação via base, tal como estudada anteriormente por Zavodney & Nayfeh (1989), exceto pelo fato da excitação ser aplicada transversalmente ao invés de axialmente. Inicialmente a cinemática do problema é abordada, posteriormente a energia do sistema é obtida e por fim, a equação de Lagrange é aplicada resultando na equação

do movimento. Sua principal intenção foi demonstrar o uso das teorias clássicas da engenharia na modelagem refinada tridimensional deste tipo de estrutura.

Lee (1995) estudou a estabilidade de um sistema estrutural semelhante ao estudado por Zavodney & Nayfeh (1989) exceto pelo fato de que ao invés de vertical o sistema foi posicionado horizontalmente. O modelo matemático do sistema foi obtido por intermédio do princípio de Hamilton (MEIROVITCH, 1970). Os efeitos da excitação senoidal axial aplicada na extremidade fixa sobre a estabilidade do sistema foi investigada em termos de deslocamento, velocidade e aceleração utilizando o método de Bolotin. São apresentadas regiões de instabilidade para diversas combinações entre a massa concentrada e amplitude da excitação em termos de deslocamento, velocidade e aceleração.

Anderson, Nayfeh & Balachandran (1996) estudaram teoricamente e experimentalmente um sistema semelhante ao estudado por Zavodney & Nayfeh (1989) com excessão da inexistência de uma massa concentrada na extremidade livre da viga. Realizaram uma investigação teórica e experimental focada no primeiro e segundo modos de flexão de uma viga fina de aço excitada parametricamente. Diferentemente de Zavodney & Nayfeh (1989) foi introduzido uma força não-linear de amortecimento, o que resultou em uma melhor concordância entre os resultados teóricos e os experimentais. Em adição, os resultados experimentais demonstram que os termos não-lineares decorrentes da curvatura da viga possuem um papel importante na vibração paramétrica envolvendo o primeiro modo natural e os termos não-lineares de inércia possuem um papel fundamental na vibração paramétrica do segundo modo, e por isso, não devem ser desprezados.

Esmailzadeh & Jalili (1998) realizaram um estudo teórico sobre uma estrutura exatamente igual a estudada por Anderson, Nayfeh & Balachandran (1996), a qual é composta por uma viga na configuração livre-engastada portando uma massa concentrada na extremidade livre e excitada axialmente pela base e posicionada horizontalmente. Utilizaram ao invés da teoria de Euler-Bernoulli a teoria de Timoshenko para introduzir os efeitos da inércia de rotação e das tensões de cisalhamento. Apresentam mapas de fase e diagramas de estabilidade obtidos numericamente para várias características físicas do sistema. Em suas conclusões afirmam que para o caso da excitação ser conhecida, o aumento da massa concentrada diminui a região de estabilidade do sistema.

Esmailzadeh & Nakhaie-Jazar (1998) realizaram um estudo teórico semelhante ao desenvolvido anteriormente por Esmailzadeh & Jalili (1998), que apesar de ser pouco

inovador é muito esclarecedor. Empregaram a teoria de Euler-Bernoulli e posteriormente a equação de Lagrange para a obtenção da equação diferencial não-linear de movimento para duas configuração do sistema: (i) sistema posicionado verticalmente e submetido a excitação via base na direção axial vertical; (ii) sistema posicionado verticalmente e submetido a excitação via base na direção horizontal. Estabelecem as condições suficientes para o sistema possuir comportamento oscilatório periódico e utilizam para este fim funções de Green e empregam o teorema de ponto fixo de Schauder. Já Forehand & Cartmell (2001) reexaminaram rigorosamente o trabalho de Cartmell (1990b). Algumas equações fundamentais foram profundamente investigadas e comprovadas.

Um dos mais tradicionais trabalhos envolvendo combinação de ressonâncias paramétricas foi desenvolvido por Dugundji & Mukhopadhyay (1973). Eles investigaram teoricamente e experimentalmente a resposta dinâmica de uma viga metálica na condição livre-engastada, submetida a uma excitação periódica via base e dirigida segundo a direção de maior rigidez. Inicialmente as investigações foram decorrentes de uma combinação de ressonâncias paramétricas envolvendo os primeiros modos de flexão e torção ($\Lambda \approx \omega_{F1} + \omega_{T1}$). Posteriormente, outro caso foi investigado envolvendo o segundo modo de flexão e o primeiro de torção ($\Lambda \approx \omega_{F2} + \omega_{T1}$) também em uma combinação do tipo aditiva. Os resultados experimentais demonstram que a viga exibe movimentos significativos tanto em flexão quanto em torção.

Mais recentemente, Anderson, Balachandran & Nayfeh (1994) investigaram experimentalmente a resposta dinâmica de uma viga na condição livre-engastada em três casos distintos. Em um destes, a viga foi excitada periodicamente pela base no sentido longitudinal, cuja frequência de excitação paramétrica Λ foi aproximadamente igual ao dobro da terceira frequência natural em flexão ω_{F3} , assim o terceiro modo foi excitado por uma ressonância paramétrica principal, isto é, $\Lambda \approx 2\omega_{F3}$. Nesta condição, interações modais foram verificadas envolvendo o primeiro e quarto modos decorrentes de uma combinação de ressonância paramétrica tipo aditiva, tal que $\Lambda \approx \omega_{F1} + \omega_{F4}$.

Ainda vários outros importantes trabalhos – principalmente teóricos – foram desenvolvidos envolvendo vibrações paramétricas decorrente da combinação de ressonâncias paramétricas. Dentre estes pode-se citar Mook, Haquang & Plaut (1986), Yabuno (1994), Kar & Sujata (1990).

1.2.2 Vibração Autoparamétrica

A **vibração autoparamétrica** é um fenômeno vibratório único de sistemas não-lineares com múltiplos graus de liberdade e pode envolver dois ou mais modos naturais, dependendo da intensidade do acoplamento não-linear existente. Este tipo de vibração somente ocorre quando o sistema possui **ressonâncias internas**, do tipo direto ou combinado. Embora possa envolver vários modos, a vibração autoparamétrica ocorre com maior frequência quando envolve dois modos naturais. Assim a revisão apresentada a seguir contempla estes casos.

1.2.2.1 Ressonância Interna na Ordem de Um-Para-Um

A vibração autoparamétrica decorrente de ressonâncias internas na ordem de um-para-um pode ocorrer entre dois modos naturais de mesma ordem (em cada possível plano de movimento) em elementos estruturais que possuem simetria, tal como elementos tipo viga com secções transversais quadradas ou circulares. Também pode ocorrer em estruturas assimétricas, e nestes casos, entre dois modos naturais de ordem diferente.

Um dos mais completos trabalhos realizados neste contexto é atribuído a Zaretsky & Crespo da Silva (1994) que realizaram uma investigação teórica e experimental sobre o fenômeno de interação modal decorrente de uma ressonância interna na ordem de um-para-um em quatro vigas, duas com secções transversais retangulares e duas quadradas. Todas as vigas foram analisadas na configuração livre-engastada e excitadas transversalmente pela base via excitação monocomponente periódica no plano xy de maneira a sintonizar um modo natural transversal de interesse (ressonância externa primária). Os resultados experimentais mostram excelente correlação com resultados teóricos obtidos segundo análise de perturbação aplicada a um modelo matemático não-linear, desenvolvido anteriormente por Crespo da Silva & Glynn (1978) o qual retém não-linearidades provenientes da curvatura e inércia da viga. Interessante comportamento dinâmico foi obtido em vigas com secções transversais quadradas, as quais devido a uma ressonância interna na ordem de um-para-um, ao serem excitadas unicamente segundo um determinado plano xy transferem energia fora deste plano e assim também apresentaram movimentos vibratórios no plano xz , resultando em um movimento circular da viga.

Outro trabalho que merece destaque foi desenvolvido por Nayfeh & Pai (1989) que investigaram teoricamente a vibração planar e não-planar de duas vigas na condição livre-engastada, uma com secção transversal retangular e a outra quadrada. Tal como

em Zaretzky & Crespo da Silva (1994), Nayfeh & Pai (1989) também utilizaram o modelo matemático não-linear, desenvolvido por Crespo da Silva & Glynn (1978) mantendo as não-linearidades provenientes da curvatura e inércia da viga. Embora exista uma série de semelhanças entre os trabalhos de Zaretzky & Crespo da Silva (1994) e Nayfeh & Pai (1989) também existem grandes diferenças entre eles. A principal consiste na forma de excitação do sistema, enquanto Zaretzky & Crespo da Silva (1994) consideraram o caso de uma ressonância externa primária segundo uma determinada direção, Nayfeh & Pai (1989) consideraram o caso de uma ressonância paramétrica principal na qual um determinado modo na direção z é parametricamente excitado via excitação da base (na direção x). Este modo por sua vez transfere energia vibratória para outro modo na direção y via uma ressonância interna na ordem de um-para-um. No caso das vigas de secção quase quadrada Nayfeh & Pai (1989) investigaram a transferência de energia entre o primeiro modo de flexão na direção z e o primeiro modo também de flexão na direção y . Já no caso das vigas de secção retangular Nayfeh & Pai (1989) investigaram a transferência de energia entre o primeiro modo de flexão na direção z e o segundo modo também de flexão na direção y , ainda segundo uma ressonância interna na ordem de um-para-um. Os resultados demonstram que para certas condições de excitação e geometria da viga, vibrações com características periódicas não-planares são possíveis, resultando em movimentos circulares periódicos. Ainda com a variação de um dos parâmetros, a condição de movimento circular periódico pode perder sua estabilidade via uma bifurcação tipo Hopf, resultando em movimentos circulares não-periódicos e ainda sob certas condições de carregamento até em movimentos caóticos.

Ainda outros trabalhos importantes foram realizados com o objetivo de avançar a compreensão da vibração autoparamétrica em elementos tipo viga provenientes de uma ressonância interna na ordem de um-para-um. Dentre estes, merece destaque o trabalho de Lee, Lee & Chang (1997) que estudaram a transferência de energia entre um modo de torção e um modo de flexão de uma viga na condição livre engastada e excitada torcionalmente pela base segundo uma ressonância forçada primária. Ainda outro importante trabalho foi realizado por Restuccio, Krousgrill & Bajaj (1991) que investigaram a transferência de energia entre modos de flexão nas direções y e z decorrentes de excitação paramétrica principal aplicado na direção x de uma viga inextensional na condição engastada-engastada/deslizante. Ainda valiosas contribuições nesta direção são encontradas nos trabalhos de Haight & King (1971), Shyu, Mook & Plaut (1993a) e Shyu, Mook & Plaut (1993b).

1.2.2.2 Ressonância Interna na Ordem de Dois-Para-Um

Sethna (1965) ao estudar a resposta dinâmica de um pêndulo elástico planar, foi um dos primeiros pesquisadores a estudar a vibração autoparamétrica provocada por ressonância interna na ordem dois-para-um em sistemas forçados e considerando o efeito do amortecimento.

Um dos mais importantes trabalhos publicados em estruturas tipo viga é atribuído a Haddow, Barr & Mook (1984) que realizaram um estudo teórico e experimental em uma estrutura em forma de “L”, composta de duas vigas delgadas. Com o propósito de aproximar a estrutura a um sistema com dois graus de liberdade, duas massas concentradas foram colocadas nas extremidades livres de cada viga. A estrutura foi projetada de maneira que os dois modos em flexão tivessem as respectivas frequências naturais lineares associadas na razão de 1:2. Portanto nesta estrutura ressonâncias forçadas primárias ocorrem quando a frequência de excitação Ω está próxima de uma das frequências naturais lineares, ω_1 e ω_2 . A estrutura foi modelada adicionando a inércia das vigas às massas concentradas e, posteriormente, após a obtenção de informações sobre a cinemática do problema, expressões relativas a energia cinética e de deformação foram obtidas. As equações de movimento foram derivadas a partir das equações de Lagrange e o modelo de amortecimento linear viscoso foi adicionado às equações de movimento, as quais retêm não-linearidades até segunda ordem e, portanto, efeitos da curvatura das vigas não foram considerados no modelo. As análises teóricas foram desenvolvidas via método das múltiplas escalas para dois casos de ressonância externa primária: o primeiro quando $\Omega \approx \omega_1$ e o segundo quando $\Omega \approx \omega_2$ ambos com $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Experimentalmente, eles inicialmente realizaram uma identificação modal da estrutura, resultando na identificação das frequências naturais lineares, ω_1 e ω_2 , possibilitando assim que os ensaios não-lineares subsequentes pudessem ser realizados, também para os mesmos dois casos de ressonâncias externas. Curvas clássicas resposta-frequência e resposta-amplitude foram obtidas teoricamente e experimentalmente, as quais concordam qualitativamente. Eles demonstraram a existência física do fenômeno de salto e a não-existência de regime permanente nas respostas dinâmicas. Provavelmente o maior contribuição deste trabalho foi a observação física, pela primeira vez na literatura, do fenômeno de saturação modal³.

Ainda outros autores realizaram importantes investigações teóricas e experimentais utilizando a mesma configuração estrutural inicialmente estudada por Haddow, Barr & Mook (1984). Dentre estes, Nayfeh & Zavodney (1988) reportaram observações ex-

³O fenômeno não-linear de saturação modal é caracterizado quando a amplitude de um modo natural diretamente excitado torna-se independente do nível da excitação.

perimentais — no caso de ressonâncias externas do primeiro modo ($\Omega \approx \omega_1$) — de modulações em amplitude e fase na resposta vibratória, as quais demonstram a troca de energia entre os modos, assim como, a transição de movimentos periódicos para aperiódicos. Já Nayfeh et al. (1989) observaram experimentalmente — no caso de ressonâncias externas do segundo modo ($\Omega \approx \omega_2$) — respostas periódicas, quase-periódicas e caóticas, demonstrando a complexidade do comportamento dinâmico desta clássica estrutura tipo “L”. Por fim, Balachandran (1990) também explorou estruturas com geometria tipo “L” para investigar teoricamente e experimentalmente a influência da interação modal provocada por ressonâncias internas na resposta vibratória provocada por excitações harmônicas. Diferentemente das investigações anteriores, que empregaram estruturas metálicas, Balachandran (1990) também avaliou estruturas de fibra de carbono. Este trabalho pode ser considerado um dos mais extensos envolvendo este assunto.

Também merece destaque o trabalho desenvolvido por Roberts & Cartmell (1984) que, além de ser um dos primeiros trabalhos experimentais sobre o vibração autoparamétrica, prima pela simplicidade e absoluta clareza, tanto sobre a modelagem quanto sobre a física do problema. Eles estudaram teoricamente e experimentalmente uma estrutura simples construída a partir de duas vigas e duas massas rígidas. A primeira viga foi montada horizontalmente na condição livre-engastada e a segunda viga foi montada verticalmente na extremidade livre da primeira mas rotacionada tal que sua vibração transversal ocorre fora de plano em relação a primeira.

Ainda existem trabalhos na literatura que demonstram a ocorrência de vibração autoparamétrica decorrente de uma ressonância interna na ordem ordem de três-para-um, além da ocorrência de interação modal envolvendo vários modos ou multimodal (NAYFEH, 2000).

1.2.2.3 Combinação de Ressonâncias Internas

Um trabalho marcante envolvendo combinação de ressonâncias internas foi publicado por Bux & Roberts (1986). Eles estudaram teoricamente e experimentalmente uma estrutura composta por duas massas concentradas e duas vigas acopladas. A primeira viga foi montada horizontalmente na condição livre-engastada e a segunda viga foi montada verticalmente na extremidade livre da primeira mas rotacionada tal que sua vibração transversal ocorre fora de plano em relação a primeira. A partir da movimentação da massas concentrada — posicionada ao longo do comprimento da segunda viga — eles fixaram $\omega_2 \approx \omega_B + \omega_T$, na qual ω_2 é a frequência natural linear do segundo modo em flexão da viga horizontal, ω_B é a frequência natural do

primeiro modo em flexão da viga vertical e ω_T é a primeira frequência do modo torsional da viga horizontal. Posteriormente a estrutura foi excitada externamente tal que $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_B + \omega_T$. Curvas resposta-frequência e resposta-amplitude foram então obtidas as quais demonstram a troca de energia entre o modo diretamente excitado — segundo modo em flexão da viga horizontal — e os modos de flexão da viga vertical e o de torção da viga horizontal, os quais foram indiretamente excitados via uma combinação de ressonâncias internas.

Ainda outros importantes trabalhos — principalmente teóricos — foram desenvolvidos envolvendo vibração autoparamétrica decorrente da combinação de ressonâncias internas. Exemplos incluem Ashworth & Barr (1987) e Yamamoto, Yasuda & Kato (1986).

1.2.3 Vibração Combinada

Em condições reais de serviço, podem ocorrer condições em que um sistema estrutural sofra a ação de excitações externas e paramétricas simultaneamente. Nestes casos, a excitação é dita combinada e a vibração resultante, denominada de **vibração combinada**.

Haquang & Mook (1987b) realizaram uma importante investigação analítica em sistemas fracamente não-lineares sob a ação de excitação combinada. Eles utilizaram o método das múltiplas escalas para investigar a resposta em regime permanente quando a frequência da excitação paramétrica Γ esta próxima de uma frequência natural ω_n do sistema e para três condições: (i) sem a presença de excitação externa; (ii) excitação externa presente mas não envolvida em uma condição de ressonância e; (iii) quando a frequência da excitação externa Ω é igual a frequência da excitação paramétrica Γ . Eles utilizaram curvas resposta-frequência para ilustrar os efeitos de amortecimento, amplitude da excitação e diferencia entre o ângulo de fase entre as excitações.

Ainda no mesmo ano, Haquang & Mook (1987a) publicaram outro extenso e importante estudo teórico focado na interação entre as excitações paramétricas e externas em sistemas fracamente não-lineares com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Basicamente a mesma abordagem empregada no trabalho anterior (HAQUANG; MOOK, 1987b) foi utilizada para analisar a vibração combinada. Os autores descreveram a dificuldade em se definir estratégias de controle quando a estrutura está sob a ação de excitações combinadas.

Até a presente data, apenas algumas investigações experimentais foram realizadas com o objetivo de se investigar o comportamento dinâmico de estruturas flexíveis sob

a ação de excitações combinadas. Este número reduzido de publicações reforça a complexidade e os problemas intrínsecos destes ensaios.

Um dos únicos trabalhos experimentais envolvendo estruturas tipo viga foi realizado por Nayfeh, Nayfeh & Mook (1995). Eles estudaram um tubo fino de latex com diâmetro interno de 3 mm, diâmetro externo de 6 mm e com 213 mm de comprimento. Um excitador eletrodinâmico posicionado em uma das extremidades foi empregado para excitar a estrutura. A outra extremidade foi engastada em uma parede rígida. O shaker foi inclinado de maneira que, a linha de ação da força aplicada na estrutura tivesse componentes paralelo e transversal em relação ao eixo do tubo. O movimento da armadura do shaker foi monitorado por um acelerômetro preso à mesa do shaker e o deslocamento do tubo medido por um sistema óptico montado próximo a extremidade fixa do tubo. Várias curvas experimentais resposta-frequência foram obtidas para vários parâmetros físicos e posteriormente comparados com os resultados teóricos.

A pequena quantidade de investigações, principalmente experimentais, ilustram que o comportamento dinâmico de estruturas flexíveis sob a ação simultânea de excitações paramétricas e externas ainda não foi bem compreendido. Condições nas quais as excitações aparecem como forças distribuídas, com múltiplas componentes espectrais, mesclando excitações periódicas com aleatórias, dentre várias outras, ainda não foram investigadas.

1.3 Presente Investigação

A revisão de literatura apresentada na seção anterior resume os principais trabalhos realizados nas últimas décadas. Neste contexto destacam-se os trabalhos realizados nos Estados Unidos da América. Em especial, os trabalhos do Prof. Ali H. Nayfeh na Virginia Polytechnic Institute and State University, do Prof. Marcelo R. M. Crespo da Silva, da Rensselaer Polytechnic Institute e do Prof. Balakumar Balachandran, da Universidade de Maryland. Os trabalhos realizados por estes autores, diretamente ou sob orientação, são notáveis pela profundidade teórica. Igualmente importantes são os trabalhos desenvolvidos no Reino Unido, em especial pelo Prof. Matthew P. Cartmell, na Universidade de Glasgow. Estes trabalhos se destacam pela proficiência experimental e forte apelo físico presente na modelagem. Também se destacam as pesquisas desenvolvidas no Japão, em especial os trabalhos do Prof. Kimihiko Yasuda, da Universidade de Nagoya.

No Brasil, as pesquisas relativas as vibrações não-lineares em sistemas estruturais ainda encontram-se prematuras e pouco desenvolvidas. A maioria dos trabalhos anteri-

ormente realizados abordam outros tipos de sistemas dinâmicos, tal como pêndulos, ou tratam diretamente modelos matemáticos, sem contrapartida física específica. Neste aspecto, destacam-se os trabalhos do Prof. José Manoel Balthazar da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

Apesar dos progressos evidentes alcançados pela pesquisa relativa a vibrações não-lineares em sistemas estruturais, ainda existe muito a ser descoberto. Uma observação mais cuidadosa na revisão de literatura apresentada revela que a influência do meio de operação (temperatura, viscosidade) e as conseqüências de excitações externas agindo simultaneamente com excitações paramétricas e autoparamétricas são temas superficialmente explorados em termos mundiais. Em adição, no Brasil existe uma profunda lacuna relativa trabalhos experimentais em vibrações não-lineares, em especial não existem trabalhos experimentais sendo realizados envolvendo vibrações não-lineares em sistemas estruturais. Segundo, em todo o mundo a maioria dos trabalhos experimentais envolvendo sistemas estruturais abordam excitações externas ou excitações paramétricas. Até a presente data, poucas investigações experimentais foram realizadas com o objetivo de se investigar o comportamento dinâmico de estruturas flexíveis sob a ação de excitações combinadas. Apenas Nayfeh, Nayfeh & Mook (1995) realizaram experimentos em sistemas estruturais tipo viga sob excitação combinada. Por fim, não existem registros na literatura de investigações experimentais sobre vibração combinada causada por excitação externa tipo acústica.

1.3.1 Objetivos

Do exposto, o objetivo da tese é investigar teórica e experimentalmente a vibração proveniente de estruturas ressonantes tipo viga, operando em meio viscoso e excitadas parametricamente, autoparametricamente ou por excitação combinada. Em termos específicos, a pesquisa também se propõe em investigar como a viscosidade do meio e a ação de excitações externas do tipo acústica afetam as características da vibração paramétrica. Ainda, como o tempo de exposição à excitação autoparamétrica afeta a vibração resultante.

Para atingir os objetivos propostos, serão empregadas duas estruturas tipicamente aeronáuticas. A primeira faz alusão a um estabilizador vertical. Nesta estrutura serão desenvolvidos os trabalhos relativos à vibração paramétrica principal e a vibração combinada, bem como serão avaliados os efeitos da viscosidade do meio de operação e da excitação acústica externa sobre a vibração decorrente. A segunda é uma simplificação de um sistema estrutural asa/pilone/turbina. Nesta segunda estrutura serão desen-

volvidos os trabalhos relativo a vibração autoparamétrica, assim como, serão avaliadas técnicas teórica-experimentais para sua identificação e caracterização.

1.3.2 Organização

A presente tese está dividida em sete capítulos principais contemplando o cerne da pesquisa e, dez apêndices contendo material de apoio.

A tese inicia-se com um capítulo de fundamentos. Neste capítulo é realizado – sob a ótica do autor – uma perspectiva sobre vibrações lineares e não-lineares. São apresentados e discutidos aspectos relevantes envolvendo a modelagem dinâmica não-linear, características de vários modelos matemáticos lineares e não-lineares e estratégias de solução. Ainda diversas condições de ressonância de interesse são formalmente definidas.

O Capítulo 3 apresenta a modelagem dinâmica dos sistemas estruturais que servirão de objeto de estudo. Inicialmente estes sistemas são apresentados e suas características discutidas. Então é apresentada a modelagem dinâmica não-linear da primeira estrutura, considerando a ação de excitações combinadas e da viscosidade do meio de operação. Por fim, é apresentado o modelo linear em elementos finitos do sistema com múltiplos graus de liberdade, enfatizando as principais etapas da sua obtenção.

O Capítulo 4 apresenta detalhadamente o processo de identificação modal dos sistemas estruturais. Inicialmente, as características modais do sistema com um grau de liberdade são teoricamente obtidas e posteriormente confrontadas com resultados experimentais. A seguir, o sistema com múltiplos graus de liberdade tem suas propriedades modais identificadas a partir de previsões teóricas e ensaios experimentais. Os resultados obtidos neste capítulo promovem o conhecimento dinâmico fundamental dos sistemas sob investigação.

No Capítulo 5 são desenvolvidos estudos teóricos e experimentais sobre a vibração paramétrica não-linear. Inicialmente são abordados os aspectos teóricos, seguidos de análises realizadas considerando regime transitório e também permanente. Experimentos são detalhadamente apresentados e seus aspectos principais discutidos. Finalizando o capítulo, é realizada uma investigação experimental sobre a força de arrasto induzida pela vibração paramétrica.

Já o Capítulo 6 apresenta resultados numéricos e experimentais sobre a vibração combinada não-linear. Simulações numéricas são desenvolvidas envolvendo vários parâmetros, tais como, o ângulo de fase entre as excitações, magnitude da excitação forçada e

a relação entre as frequências de excitação paramétrica e externa. Posteriormente, são apresentados os resultados experimentais obtidos utilizando uma fonte acústica como excitação externa. Por fim, os resultados simulados e experimentais são comparados e importantes conclusões obtidas.

O penúltimo capítulo envolve a vibração autoparamétrica não-linear. Inicialmente é proposto uma metodologia simples e prática para a identificação de condições propícias para o desenvolvimento deste tipo de vibração. Posteriormente, um amplo estudo experimental é desenvolvido, enfatizando as características transitórias, assim como, em regime permanente. Este capítulo é um dos mais interessantes e surpreendentes.

Por fim, a tese termina com um capítulo de conclusões finais. Ainda neste capítulo é apresentado várias propostas de trabalhos futuros. Eu espero que a leitura desta tese seja tão empolgante e surpreendente quanto foi a sua confecção. Bem vindo e boa leitura.

CAPÍTULO

DOIS

Uma Perspectiva Sobre Vibrações Lineares e Não-Lineares

“Ut sementem feceris, ita metes.”

— Cícero (106-43 a.C)

Embora o conceito de vibração possa ser aplicado tanto para sistemas lineares quanto não-lineares, o conhecimento das peculiaridades e características únicas das vibrações não-lineares exige a imersão em um universo a parte. Neste universo não-linear, muitos conceitos, técnicas e valores que são verdadeiros e válidos no universo linear não mais se aplicam. Assim, este capítulo tem como objetivo apresentar uma perspectiva envolvendo vibrações lineares e não-lineares, em especial sobre vibrações paramétricas, autoparamétricas e combinadas.

2.1 Modelagem Física e Derivação das Equações de Movimento

O desenvolvimento de um modelo matemático capaz de descrever com confiabilidade as principais características dinâmicas de uma estrutura flexível compreende uma

das principais tarefas da dinâmica estrutural. A obtenção de um modelo matemático é fundamental, pois a partir deste modelo pode-se simular inúmeras condições operacionais ou avaliar como parâmetros externos ou da própria estrutura afetam seu comportamento dinâmico.

Entretanto, a modelagem dinâmica de um sistema estrutural não é uma tarefa simples. Tamanha dificuldade ocorre pois não basta a obtenção de um modelo matemático, é necessário a obtenção de um modelo que possa ser manipulado, resolvido e que ainda capture as principais características dinâmicas da estrutura. Assim alguns fatores precisam ser desprezados e outros aproximados. Ainda, os possíveis efeitos do meio em que a estrutura irá operar precisam ser ponderados, uma vez que elementos como viscosidade e temperatura podem alterar significativamente o comportamento dinâmico estrutural.

O nível e quantidade hipóteses simplificadoras assumidas leva tanto ao desenvolvimento de um modelo dinâmico elementar linear quanto a um modelo não-linear mais elaborado. O estabelecimento ou não de fortes hipóteses simplificadoras normalmente é baseada em dois aspectos principais: (i) o nível da resposta vibratória previsto e; (ii) o conhecimento das características do meio de operação da estrutura. Assim, obtenção de um modelo matemático linear é o resultado do estabelecimento de profundas hipóteses simplificadoras.

De maneira condensada, fontes de não-linearidades são geralmente classificadas de acordo com os seguintes mecanismos (NAYFEH, 2000): (i) Fricção: Tais mecanismos são essencialmente não-lineares, como é o caso do atrito seco (Coulomb), amortecimento histerético ou estrutural, forças de arrasto aerodinâmicas, etc. O modelo de amortecimento viscoso linear é simplesmente uma idealização. (ii) Geométrico: Surgem quando o sistema experimenta grandes deformações ou grandes deflexões e aparecem na formulação da energia potencial elástica. Em estruturas, grandes deformações usualmente resultam em relações não-lineares entre curvatura-deslocamento e também deformações não-lineares. (iii) Inércia: São deriváveis a partir da energia cinética do sistema. As acelerações de Coriolis e centrífuga, assim como a deflexão transversal de vigas são alguns exemplos deste mecanismo. (iv) Material: Tal mecanismo é proveniente da relação constitutiva elástica não-linear do material, a qual relaciona tensão com deformação. Materiais compósitos geralmente apresentam tal comportamento. Além dos principais mecanismos geradores descritos acima, existem ainda outras fontes de não-linearidades, tais como condições de contorno (TABADDOR, 2000), impactos, efeitos de backlash e free play (NAYFEH; MOOK, 1979).

É interessante notar que a maioria destas fontes corresponde às chamadas não-linearidades fracas, uma vez que o comportamento dinâmico do sistema é ainda dominado pelos termos lineares, embora os termos não-lineares possam desencadear o surgimento de fenômenos intrinsecamente não-lineares de absoluta importância, tais como os mencionados no Capítulo 2.

Seja linear ou não-linear a definição sobre a natureza do modelo a ser obtido, a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis geralmente recai sobre duas categorias: os modelos discretos e os contínuos. Ambas as categorias possuem pontos positivos e negativos e, portanto, a escolha sobre qual tipo de modelo adotar depende de vários fatores. Os modelos discretos são os mais amplamente utilizados na mecânica estrutural. Uma das maneiras de obtê-los consiste, inicialmente, em discretizar as equações diferenciais parciais e condições de contorno, utilizando o método dos resíduos ponderados ou um método variacional. A outra consiste em empregar um método variacional diretamente sobre as equações de energia. Em ambos os casos, o resultado final consiste em um conjunto com muitas equações diferenciais ordinárias acopladas linearmente e/ou não-linearmente. Estas equações são geralmente truncadas de maneira a reduzir o número de equações, e desta maneira obter um modelo de ordem reduzida.

Embora seja difícil descrever um modelo dinâmico discreto que represente todas as possibilidades e casos encontrados na dinâmica estrutural, o modelo apresentado a seguir é representativo da maioria destes modelos,

$$\ddot{q}_n + \omega_{nn}^2 q_n = \mathcal{A} + \varepsilon^L (-\mathcal{B} - \mathcal{C} - \mathcal{D}), \quad n = 1, 2 \dots m \quad (2.1)$$

na qual:

- $\ddot{q}_n + \omega_{nn}^2 q_n$ representam fisicamente as forças lineares de inércia e rigidez, respectivamente. Ainda ω_{nn}^2 é uma constante que representa a frequência natural não amortecida do n-ésimo modo.
- $\mathcal{A} = \sum_{a=1}^A H_n^a e^{i\Omega_a t}$ representa as possíveis excitações externas do tipo harmônicas. Ainda H_n representa a magnitude e Ω_a a frequência das excitações.
- $\mathcal{B} = \sum_{b=1}^B G_{nn}^b \dot{q}_n |\dot{q}_n|^{(b-1)}$ representa as possíveis forças de fricção viscosas, lineares e/ou não-lineares. Ainda G_{nn} representa a magnitude de tais excitações.
- $\mathcal{C} = N_n(q_n, q_{n+1}, \dots, q_m, \dots)$ representa as forças não-lineares conservativas complementares. Estas ainda podem ser funções das derivadas temporais de primeira e segunda ordem das coordenadas generalizadas $(q_n, q_{n+1}, \dots, q_m, \dots)$.

- $\mathcal{D} = \sum_{d=2}^D I_{nn}^{(d-1)} e^{i\Gamma_{(d-1)} t} q_n^{(d-1)}$ representa as possíveis excitações paramétricas, lineares e/ou não-lineares. Ainda I_n representa a magnitude e Γ_d a frequência da excitação.

Na Equação (2.1), geralmente, a função $N_n(q_n, q_{n+1}, \dots, q_m, \dots)$ é expressa na forma de polinômios de q_m ou de suas derivadas temporais $\dot{q}_m$ e $\ddot{q}_m$ e, ainda, normalmente truncadas até terceira ordem. Nesta equação ainda é possível observar que os termos em parênteses são multiplicados por um pequeno parâmetro ε^L para $L = 1, 2, 3, \dots$. Estes por sua vez, representam a intensidade destes termos quando comparados aos termos lineares posicionados do lado esquerdo da equação. Como ε^L representa uma pequena constante ($\varepsilon \ll 1$), tão pequena quanto a ordem de L , este fato classifica este modelo genérico como fracamente não-linear (NAYFEH, 2000).

Uma observação mais cuidadosa do modelo anterior revela que a excitação paramétrica foi descrita estritamente em termos de deslocamento $q^{(d-1)}$, que dependendo do valor d pode ser linear ou não-linear. De maneira geral, uma excitação paramétrica pode provocar a variação temporal de qualquer termo de um modelo matemático, seja este relacionado com a inércia, fricção ou rigidez. Ainda pode aparecer tanto nos termos lineares como não-lineares. Entretanto, em sistemas estruturais, as excitações paramétricas estão geralmente relacionadas com os termos relativos à rigidez. Assim, o modelo descrito pela Equação (2.1) é mais dedicado e representativos de sistemas estruturais. Ainda este modelo apesar de ser linearmente desacoplado, permanece não-linearmente acoplado devido à função N . Devido a presença deste acoplamento não-linear, vários fenômenos intrinsecamente não-lineares podem surgir, como o fenômeno de saturação e a interação modal.

Nos casos em que é assumido que a estrutura irá responder à ação das excitações dentro de um nível infinitesimal, os termos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dentro dos colchetes da Equação (2.1) podem ser desprezados. Em adição, se é assumido que a estrutura irá operar em um meio com baixa velocidade relativa, o termo representativo das forças dissipativas pode ser reduzido para $B = 1$, que corresponde as forças de fricção estruturais. Assim, sob as fortes hipóteses de resposta infinitesimal e sem influência do campo de operação, a Equação (2.1) é reduzida ao modelo linear elementar, não-conservativo e forçado como,

$$\ddot{q}_n + \varepsilon^L G_{nn} \dot{q}_n + \omega_{nn}^2 q_n = \sum_{a=1}^A H_n^a e^{i\Omega_a t}, \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

Por outro lado, se é considerado que a estrutura pode desenvolver amplitude finita de resposta - geralmente alguns poucos milímetros - o modelo matemático será mais

complexo que o descrito pela Equação (2.2), uma vez que os termos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dentro dos parênteses na Equação (2.1) podem ser importantes. Ainda devido à amplitude finita de resposta, mais que uma força dissipativa pode agir sobre o sistema.

Infelizmente, na modelagem não-linear de estruturas flexíveis cada problema possui suas próprias características, as quais irão determinar a extensão e a forma final do modelo matemático não-linear. Este fato impede a descrição de modelos não-lineares com termos bem definidos, tal como ocorre com os modelos lineares, os quais independentemente da estrutura sob investigação são geralmente descritos como apresenta a Equação (2.2).

O item a seguir aborda a próxima etapa da análise dinâmica teórica, isto é, a fase de solução dos modelos dinâmicos, sejam eles lineares ou não-lineares.

2.2 Solução dos Modelos Matemáticos e Interpretação dos Resultados

Vários métodos estão disponíveis na literatura para a solução de modelos matemáticos em dinâmica estrutural. Tais métodos de solução podem ser agrupados em duas grandes famílias: a linear e a não-linear. A família linear é composta por quatro métodos principais: (i) os métodos de solução clássicos; (ii) a transformada de Laplace; (iii) os métodos matriciais e; (iv) os numéricos. A família não-linear é composta por três grupos principais: (i) os métodos exatos; (ii) os métodos analíticos aproximados e; (iii) os métodos numéricos.

Independentemente da natureza linear ou não-linear do modelo, os métodos numéricos podem ser empregados para a solução do problema. Quando um modelo é resolvido numericamente, a solução obtida consiste na resposta temporal do sistema para uma condição de excitação ou condição inicial. Embora os resultados obtidos a partir destas simulações sejam certamente úteis para determinadas investigações específicas, elas são geralmente difíceis de ser interpretados de forma mais geral. Tal dificuldade decorre das diversas possibilidades de escolha dos parâmetros de excitação ou diversas possíveis condições iniciais. Por outro lado, investigações analíticas podem apresentar de maneira clara como o comportamento dinâmico do sistema é afetado pela amplitude e/ou frequência da excitação, viscosidade e/ou temperatura do campo de operação ou ainda devido a geometria e material da estrutura. Assim, as análises analíticas são mais informativas que as numéricas, pois possibilitam um melhor entendimento da física envolvida; a clara observação da influência de parâmetros relativos às excitações, meio de

operação e características físicas da estrutura.

No contexto da presente pesquisa, dois métodos analíticos merecem destaque: um pertencente à família dos métodos lineares e outro à família dos não-lineares, respectivamente conhecidos com análise modal linear (EWINS, 2000; MAIA; SILVA, 1997) e método das múltiplas escalas (NAYFEH, 1973; NAYFEH; MOOK, 1979). As principais características destes dois métodos serão apresentadas nas seções subseqüentes, iniciando com a análise modal.

2.2.1 Solução de Modelos Lineares: Análise Modal

Para melhor ilustrar a solução de modelos dinâmicos lineares utilizando o método da análise modal (MEIROVITCH, 1986), o modelo linear e desacoplado descrito pela Equação (2.2) pode ser reescrito em coordenadas geométricas e parâmetros físicos como,

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C_1] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \sum_{a=1}^A \{F_a\} e^{i\Omega_a t} \quad (2.3)$$

na qual $[M]$ representa a matriz de massa, $[C_1]$ a matriz de amortecimento viscoso linear, $[K]$ a matriz de rigidez, $\{F_a\}$ a magnitude da força de excitação externa harmônica e $\{x\}$ as coordenadas geométricas. Ainda este modelo é linearmente acoplado.

A análise modal linear teórica é formalmente definida como um método de obtenção da resposta do sistema, o qual utiliza a matriz modal ¹ $[\Phi]$, composta pelos modos naturais lineares do sistema $\{\varphi\}_n$ ($n = 1, 2, \dots, m$), como transformação linear, com o objetivo de desacoplar² o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares que, matematicamente, representam o sistema físico. Como resultado, a dinâmica da estrutura, inicialmente descrita em função de x coordenadas nodais, é redefinida em função de m coordenadas modais (também denominadas normais). As vantagens de tal transformação são evidentes: primeiro o número de coordenadas modais m é muito menor que x e conseqüentemente a dimensão do problema é drasticamente reduzido; segundo um conjunto de m equações diferenciais independentes é consideravelmente mais fácil de ser resolvido do que um conjunto de n equações acopladas.

Uma vez que as soluções para todas as m -ésimas equações desacopladas q_m são

¹A matriz modal $[\Phi]$ é obtida a partir da solução de um auto-problema clássico aplicado ao modelo linear conservativo descrito por $[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = 0$.

²Duas hipóteses são especialmente realizadas para promover o desacoplamento da matriz de amortecimento $[C_1]$. A primeira é assumir que o amortecimento é viscoso e linear e a segunda, que a distribuição do amortecimento é proporcional a uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez (EWINS, 2000).

conhecidas, a solução para os deslocamentos da estrutura nas coordenadas espaciais $\{x\}$ é obtida por intermédio do princípio da superposição modal, assim:

$$\{x\} = \{\varphi\}_1 q_1 + \{\varphi\}_2 q_2 + \dots + \{\varphi\}_m q_m = \sum_{n=1}^N \{\varphi\}_n q_n \quad (2.4)$$

A Equação (2.4) descreve que, segundo a teoria linear clássica e para condições iniciais nulas, a resposta forçada de um sistema estrutural pode ser descrito por intermédio de um somatório das coordenadas modais q_r ponderadas pelos respectivos modos normais lineares $\{\varphi\}_r$. Ainda em termos espectrais, a resposta vibratória contém apenas componentes espectrais diretamente relacionadas com as componentes espectrais da excitação externa. Também demonstra que se o sistema estrutural for sintonizado em um determinado modo r , a resposta dinâmica da estrutura será composta apenas pela variável modal q_r ponderada pelo respectivo modo normal linear $\{\varphi\}_r$. Assim, segundo a teoria linear clássica, é impossível que modos naturais de um sistema vibratório troquem energia entre si. Entretanto sob certas condições e na presença de não-linearidades ativas é possível que a troca dinâmica de energia entre modos naturais ocorra (NAYFEH, 2000).

A análise modal teórica também possibilita a obtenção do modelo de resposta do sistema estrutural sob investigação. No caso de modelos discretos com múltiplos graus de liberdade, o modelo de resposta é comumente descrito por intermédio de um conjunto de funções de resposta em frequência (FRF's). Fisicamente, cada FRF representa uma razão entre a resposta do sistema por unidade de excitação a cada frequência de excitação Ω (MCCONNELL, 1995). Os modelos de resposta são de extrema utilidade no contexto da dinâmica estrutural e são empregados para diversos fins, tal como nas previsões de fadiga e flutter (MAIA; SILVA, 1997). Ainda no caso de investigações não-lineares, os modelos de resposta são empregados na determinação de regiões nas quais a dinâmica é crítica.

Enquanto a análise modal é uma poderosa ferramenta para a solução e análise de modelos dinâmicos lineares e invariantes com o tempo, esta infelizmente não pode ser empregada na solução de modelos não-lineares. Tal incapacidade provem do fato de que, os modelos não-lineares não podem ser desacoplados por intermédio da matriz modal e conseqüentemente, todo o procedimento subsequente é comprometido. Portanto, para a solução e análise de modelos dinâmicos não-lineares torna-se necessário o emprego de alguma técnica dedicada a tais modelos. Dentre as citadas anteriormente, o método das múltiplas escalas é amplamente empregado para tal fim, e hoje é a ferramenta mais utilizada para a obtenção de soluções e análises analíticas de modelos não-lineares.

2.2.2 Solução de Modelos Não-Lineares: Método das Múltiplas Escalas e da Expansão Direta

O método das múltiplas escalas pertence ao grupo das técnicas analíticas aproximadas (também denominadas de técnicas de perturbação), do qual também fazem parte outras técnicas, como por exemplo o método da expansão direta ou *straightforward expansion* (NAYFEH, 1973). A essência dos métodos de perturbação consiste em obter a solução de um modelo não-linear por intermédio da perturbação da solução do modelo linear correspondente. A escolha do método mais adequado a uma aplicação específica evidentemente depende da experiência do usuário, assim como, do conhecimento das limitações existentes em todos.

O método da expansão direta pode ser particularmente útil na identificação das diversas condições de ressonância de um sistema vibratório. Neste caso, a variável dependente $q_n(t)$ é expressa em função de outras variáveis $q_{n,m}(t)$ as quais ainda são dependentes do tempo t , tal como

$$q_n(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{J-1} \varepsilon^j q_{i,j}(t) + O(\varepsilon_J) \quad (2.5)$$

Ao substituir a Equação (2.5) nas equações de movimento, obtém-se um conjunto de equações perturbadas para a determinação de $q_{i,0}, q_{i,1}, \dots, q_{i,J}$, ordenadas hierarquicamente segundo o valor do expoente presente no pequeno fator ε . Estas equações podem então ser recursivamente resolvidas. Neste procedimento recursivo, as condições de ressonância podem então ser identificadas.

Embora seja adequado na identificação das condições de ressonância, o método da expansão direta não pode ser empregado de maneira eficaz sob diversas análises de interesse, como por exemplo na obtenção da resposta do sistema em regime permanente. Nestas análises outros métodos de perturbação devem ser empregados, dentre estes o mais amplamente utilizado é o método das múltiplas escalas³.

Neste método em específico as variáveis originais do problema q_n dependentes do tempo t são uniformemente expandidas em termos de duas ou mais novas variáveis $q_{i,j}$ as quais são dependentes das múltiplas escalas $T_0, T_1, \dots, T_J$. Este procedimento obviamente requer que as derivadas temporais das novas variáveis dependentes $q_{i,j}$ sejam igualmente expressas em termos das escalas, com a conseqüência geral que a

³Na presente pesquisa é seguido uma versão do método das múltiplas escalas denominada de procedimento de expansão de derivadas (NAYFEH, 1973). Entretanto existem outras variações para o método das múltiplas escalas.

uniformidade da expansão seja relativamente bem preservada mesmo para problemas não-conservativos que incorporam excitações e dissipações. As múltiplas variáveis independentes T_j são geradas em relação ao tempo real t , tal que $T_j = \epsilon^j t, j = 0, 1, 2, \dots$. Assim de maneira geral, as variáveis dependentes são tipicamente expressas como séries assintóticas generalizadas, ou matematicamente como,

$$q_n(t; \epsilon) = \sum_{j=0}^{J-1} \epsilon^j q_{i,j}(T_0, T_1, \dots, T_J) + O(\epsilon T_J) \quad (2.6)$$

na qual $T_j = \epsilon^j t$ e $\epsilon \ll 1$. Ainda a expansão de $q_n(t; \epsilon)$ é considerada uniformemente válida até a ordem $O(\epsilon^{-J})$.

Como a variável independente original (escala temporal t) foi substituída por novas variáveis (escalas) independentes $T_j = \epsilon^j t, j = 0, 1, 2, \dots$, as derivadas em relação a t devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_j tal que,

$$d/dt = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad e \quad d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (2.7)$$

na qual o operador $D_j = \partial/\partial T_j$. Desta maneira um problema dinâmico originalmente descrito na forma de equações diferenciais ordinárias é transformado na forma de equações diferenciais parciais, aumentando a complexidade algébrica inicial do problema.

Ao substituir a Equação (2.6) juntamente com as expansões das derivadas temporais em termos das novas escalas na equação do movimento, obtém-se um conjunto de equações perturbadas para a determinação de $q_{i,0}, q_{i,1}, \dots, q_{i,J}$, ordenadas hierarquicamente segundo o valor do expoente presente no pequeno fator ϵ , as quais podem então ser recursivamente resolvidas. As soluções destas equações contém funções arbitrárias das escalas temporais $T_0, T_1, \dots, T_J$, geralmente denominadas de A_m . Para a determinação destas funções, condições adicionais precisam ser impostas. Como a Equação (2.6) precisa ser válida para tempos da ordem de ϵ^{-J} , então $\epsilon^j q_j$ deve ser uma pequena correção para $\epsilon^{j-1} q_{j-1}$, que por sua vez deve ser uma pequena correção para $\epsilon^{j-2} q_{j-2}$. Assim é requerido para todos $T_0, T_1, \dots, T_J$ que $\frac{q_j}{q_{j-1}} < \infty$. Esta imposição é caracterizada pela eliminação dos termos seculares e a partir desta ação são geradas equações adicionais para a obtenção das funções A_m .

Finalmente, as soluções perturbadas $q_{i,j}(T_0, T_1, \dots, T_J)$ para a condição de ressonância de interesse são recombinaadas de acordo com a Equação (2.6), resultando em uma solução aproximada — mas freqüentemente precisa — da variável dependente

no domínio do tempo $q_n(t; \varepsilon)$.

Especialmente do ponto de vista da engenharia é importante analisar as características da resposta dinâmica em regime permanente. Mais especificamente como os níveis da resposta são afetados com a variação de parâmetros relacionados com as fontes de excitação ou ainda com as características físicas do sistema. Neste aspecto o método das múltiplas escalas é uma poderosa ferramenta. A partir da aplicação deste método, pode-se obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas de equações de modulação (NAYFEH, 1973). Estas equações podem representadas como,

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_1 = f_1(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \\ a'_2 = f_1(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \\ \vdots \\ a'_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \\ a_1\beta'_1 = g_1(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \\ a_2\beta'_2 = g_2(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \\ \vdots \\ a_i\beta'_i = g_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, T_i, \dots) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

na qual $\frac{\partial a_i}{\partial T_i} = a'_i$ e $\frac{\partial \beta_i}{\partial T_i} = \beta'_i$. Ainda nesta equação, a_i representa a amplitude e β_i a fase, ambos para a i -ésima coordenada. Ainda as funções f_i e g_i podem depender de vários parâmetros, tanto relativos as amplitudes a_i e fase β_i quanto aos próprios parâmetros físicos da estrutura.

Do exposto anteriormente, pode-se observar que as equações de modulação caracterizam o comportamento da resposta. Portanto é interessante determinar as soluções destas equações. Soluções constantes são denominadas de **soluções de equilíbrio** ou **pontos fixos**. Uma solução de equilíbrio corresponde a uma resposta periódica ou a um círculo limite.

Soluções de equilíbrio são determinadas impondo $a'_i = \beta'_i = 0$ nas equações de modulação. A estabilidade de uma solução de equilíbrio é determinada a partir do computo da autovalores da matriz Jacobiana correspondente a versão **autônoma**⁴ das Equações (2.8) e evoluída em um ponto de equilíbrio.

Quando todos os autovalores possuem parte real negativa, a solução de equilíbrio é **assintoticamente estável** e o ponto de equilíbrio é um **foco estável** ou um **nó**. Por outro lado, quando um ou mais autovalores possuem parte real positiva, a solução de equilíbrio é **instável**. Se alguns dos autovalores são reais e positivos enquanto os

⁴Descritivo dos casos em que o sistema é independente do tempo (NAYFEH; MOOK, 1979).

demais são negativos, então o ponto de equilíbrio é denominado de **sela**. Se alguns dos autovalores são complexos conjugados com parte real positiva enquanto os demais são negativos, então o ponto de equilíbrio é denominado de **foco instável**.

Graficamente, quando uma variável de estado da solução de equilíbrio, tal como a_i , é apresentada como função de um certo parâmetro (bifurcação), o gráfico resultante é denominado de **diagrama de bifurcação**. Estes diagramas são especialmente úteis quando se deseja avaliar a influência dos parâmetros relativos as excitações, assim como, relativo as próprias características do sistema, tal como, massa ou rigidez. Quando o parâmetro de bifurcação utilizado é a frequência da excitação, este diagrama é denominado de **curva resposta-frequência**. Já quando o parâmetro de bifurcação utilizado é a amplitude da excitação, o diagrama resultante é denominado de **curva resposta-amplitude**.

Para um sistema de dimensão i , se um parâmetro — tal como a frequência ou magnitude da excitação — for lentamente alterado, uma solução de equilíbrio estável perde a estabilidade se a parte real de um autovalor ou um par de complexo conjugados cruzam da região esquerda do plano complexo para a região direita. No ponto de cruzamento, o sistema encontra-se sobre uma bifurcação, pois ocorrem mudanças qualitativas no caracter da dinâmica do sistema. Se a perda de estabilidade é resultante de um autovalor real cruzando do lado esquerdo para o lado direito do plano, a bifurcação é denominada estática. Bifurcações estáticas podem ser do tipo **sela-nó**, **forquilha** ou **transcrítica**. Por outro lado, se a alteração de um parâmetro provocar que um par de autovalores complexo-conjugado cruzam transversalmente o eixo imaginário, da porção esquerda para a porção direita do plano complexo, então o sistema perde estabilidade através de uma bifurcação do tipo **Hopf**. Este tipo de bifurcação é denominado de bifurcação dinâmica pois resulta na construção de um círculo limite. Segundo Seydel (1994), quando ocorre uma bifurcação tipo Hopf a solução de equilíbrio “retorna a vida”.

De maneira conclusiva, o método das múltiplas escalas se consolidou no meio científico da dinâmica não-linear como método de solução padrão, como confirma a recente publicação de Cartmell et al. (2003). Por intermédio do emprego deste método, é possível se analisar, ainda que localmente, regiões em que a dinâmica é crítica, ou seja, condições específicas que levam a estrutura a responder com altas magnitudes ou ainda a apresentar comportamentos não esperados, o que é de extrema importância em termos de engenharia. Entretanto, pela própria natureza do método, torna-se necessário um esforço algébrico considerável para a obtenção das curvas resposta-frequência e resposta-amplitude. Tal esforço aumenta drasticamente com o aumento do número de

graus de liberdade do problema, o que é um ponto negativo do método.

Felizmente nos dias de hoje, existe no mercado alguns softwares para a manipulação simbólica, como por exemplo o MapleTM e o MathematicaTM. O emprego destes softwares possibilita — ainda limitado pelo número de graus de liberdade do problema — a superação dos inconvenientes algébricos da aplicação do método. Aliando as características lógicas do método das múltiplas escalas, ao poder da matemática simbólica, recentemente Khanin, Cartmell & Gilbert (2000) e posteriormente Khanin & Cartmell (2001) implementaram computacionalmente o método das múltiplas escalas utilizando estratégias de processamento paralelo via MathematicaTM.

De maneira conclusiva, a análise teórica de um sistema estrutural deve ter como ponto de partida o conhecimento de suas características lineares, ou seja, o conhecimento de seus parâmetros modais. Em uma segunda etapa, as características dinâmicas não-lineares podem ser investigadas especificamente nas regiões ou condições de interesse. Gomes da Silva & Varoto (2004a) ao estudar a suficiência dos modelos de resposta clássicos na predição do comportamento dinâmico de uma estrutura flexível, descrevem — teoricamente e experimentalmente — com detalhes todo este processo.

2.3 Vibrações Externas, Paramétricas, Autoparamétricas e Combinadas

Atualmente, a teoria das vibrações mecânicas indica que o referido sistema vibratório pode vibrar livremente ou ser “forçado” a vibrar em torno de um ponto de equilíbrio. No caso do sistema ser forçado a vibrar, três mecanismos principais podem estar envolvidos: excitações externas, paramétricas e autoparamétricas. Como consequência direta destes mecanismos, a vibração (ou resposta) provocada é denominada respectivamente de **vibração externa**, **vibração paramétrica** e **vibração autoparamétrica**. Ainda, quando o sistema sofre a ação simultânea de excitações externas e paramétricas, a vibração resultante é denominada de **vibração combinada**.

Diferentes formas de excitação provocam diferentes tipos de resposta vibratória. Excitações puramente paramétricas podem provocar respostas vibratórias com características totalmente diferentes daquelas, por exemplo, provocadas por excitações externas ou combinadas. Ainda, número e condições em que a dinâmica é crítica podem ser bem distintas. Portanto, o principal objetivo deste item é apresentar e definir as principais diferenças e condições críticas encontradas em sistemas estruturais, quando submetidos à excitações externas, paramétricas, autoparamétricas ou combinadas.

2.3.1 Sistemas Vibratórios com Um Grau de Liberdade

O comportamento dinâmico de vários sistemas vibratórios reais pode ser avaliado ou caracterizado a partir de um único grau de liberdade. Exemplos geralmente incluem sistemas que possuem grandes massas concentradas, como reservatórios de água ou turbinas aeronáuticas. No item a seguir, será avaliado o comportamento desta classe de sistemas quando sujeito a excitações externas.

2.3.1.1 Vibrações Externas

Vibração externa é a resposta dinâmica provocada quando um sistema está sujeito a ação de forças externas (diretas), que por sua vez, aparecem nas equações de movimento como uma não-homogeneidade.

Quando o sistema vibratório inicialmente descrito pela Equação (2.1) é reduzido a um grau de liberdade ($n = 1$) e está sujeito apenas a excitações externas, o modelo matemático resultante é descrito como:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \sum_{a=1}^A H_a e^{i\Omega_a t} + \varepsilon^L \left(- \sum_{b=1}^B G_b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} - N(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right) \quad (2.9)$$

Pode-se observar no modelo anterior que todos os coeficientes são constantes, independentes do tempo. Ainda, este modelo pode ser reduzido à sua forma elementar que ocorre na ausência de termos não-lineares.

Sistema Linear

Neste caso, impondo $N(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$ e considerando o modelo dissipativo linear viscoso ($B = 1$), a Equação (2.9) é reduzida para,

$$\ddot{q} + \varepsilon^L G \dot{q} + \omega^2 q = H e^{i\Omega t} \quad (2.10)$$

A presença da excitação externa transforma o modelo matemático em uma equação diferencial não-homogênea cuja solução é composta por duas partes: (i) solução homogênea, causada pelas condições iniciais; (ii) a solução particular. Fisicamente, a composição destas duas soluções é descrita por uma fase transiente e posteriormente este sistema é forçado a oscilar segundo as características da força de excitação. A fase transiente ocorre nos instantes iniciais do movimento, durante o qual o sistema oscila na sua frequência natural ω_n . Após alguns instantes de tempo, esta fase transiente

termina e o sistema é forçado a oscilar segundo a frequência de excitação Ω .

Ao atingir a condição de regime permanente, o sistema responde com amplitude diretamente proporcional à força de excitação H e exatamente na mesma frequência Ω . Também, mesmo existindo uma grande variação na magnitude de excitação, a frequência natural ω do sistema permanece constante. Além disso, não existem componentes harmônicos⁵ na resposta do sistema.

Nos casos em que a excitação externa possui mais de uma componente espectral, o sistema responde independentemente a cada uma das componentes e não há composição e nem combinação entre elas.

Ao se resolver o modelo matemático descrito pela Equação (2.10) observa-se a presença de um termo preocupante. Neste caso, um termo do tipo:

$$\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

na qual Ω é a frequência da excitação externa e ω é a frequência natural do sistema. Se a frequência de excitação Ω se aproximar da frequência natural do sistema ω , este termo torna-se muito grande, fazendo com que a resposta do sistema seja muito elevada. Portanto, esta condição corresponde a uma condição específica de ressonância, denominada de ressonância externa primária.

Do exposto acima, pode-se definir a primeira condição de ressonância de uma estrutura flexível com n graus de liberdade, a qual é denominada ressonância externa primária.

Definição 1 *Uma estrutura flexível apresenta uma condição de ressonância externa primária, se e somente se, a excitação externa possuir uma componente espectral Ω_n cujo valor é igual à alguma frequência natural ω_n da estrutura (EVAN-IWANOWSKI, 1976).*

A seguir, serão apresentadas as características oscilatórias de um sistema de um grau de liberdade ainda excitado externamente, mas na presença de termos não-lineares. Neste caso, várias diferenças são encontradas.

⁵Componentes harmônicos são componentes espectrais múltiplos da componente fundamental.

Sistema Não-Linear

Quando o sistema vibratório inicialmente descrito pela Equação (2.9) está sujeito apenas a excitação externa monocomponente, e existem não-linearidades ativas, seu modelo matemático é representado como,

$$\ddot{q} + \varepsilon S(\dot{q}) + \omega^2 q + \varepsilon N(q, \dot{q}, \ddot{q}) = H e^{i\Omega t} \quad (2.11)$$

no qual na qual a função $S(\dot{q}) = \sum_{b=1}^B G_b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)}$ passa a representar as todas as forças de fricção agindo sobre o sistema.

Os sistemas representados pela Equação (2.11) apresentam um comportamento oscilatório bem mais complexo. Apesar de conter apenas um grau de liberdade, estes sistemas podem exibir mais de um ponto de equilíbrio e conseqüentemente mais de uma condição de ressonância. Além de um maior número de ressonâncias, estes sistemas podem apresentar uma condição de ressonância mesmo quando a frequência de excitação Ω está nas proximidades da frequência natural linear ω_n . Isto pode ocorrer pois a frequência natural ω_n pode não ser constante e, nestes casos, pode ser função da amplitude do movimento, ou seja, $\omega = \omega(q)$. Ainda, outros importantes fenômenos podem ocorrer, como por exemplo, o fenômeno de salto (*jump*) (NAYFEH; MOOK, 1979).

Ao se buscar uma solução para este modelo empregando o método de expansão direta (*straightforward*) (NAYFEH, 1973), a solução da Equação (2.11) pode ser descrita da forma,

$$q(t) = q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \dots \quad (2.12)$$

Substituindo a Equação (2.12) na Equação (2.11) e equacionando os coeficientes como potências de ε , obtém-se um conjunto de equações diferenciais não-homogêneas de segunda ordem para q_i na forma

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : \ddot{q}_0 + \omega^2 q_0 = H e^{i\Omega t} \\ \varepsilon^1 : \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = S_0(\dot{q}_0) + N_0(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0) \\ \varepsilon^2 : \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = S_1(\dot{q}_0, \dot{q}_1) + N_1(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \\ \vdots \end{cases} \quad (2.13)$$

Dependendo da forma das não-linearidades descritas pela função $N(q, \dot{q}, \ddot{q})$ e da ordem em que a expansão é realizada, as soluções para q_i podem conter outros termos

preocupantes. Em adição ao termo descrito pela Equação (2.11) — obtida para o caso linear ou para $q_i = q_0$ — as soluções para $q_1, q_2 \dots q_i$ podem conter termos do tipo

$$\frac{1}{\Omega^2 - n^2\omega^2} \quad e \quad \frac{1}{n^2\Omega^2 - \omega^2}$$

os quais são muito grandes quando $\Omega \approx n\omega$ e $n\Omega \approx \omega$, respectivamente. Nestas condições, a expansão perde sua uniformidade, pois os termos da expansão q_1 e q_2 apresentam grandes amplitudes. Assim, novas condições de ressonância surgem quando $\Omega \approx n\omega$ e $n\Omega \approx \omega$. Estas condições são denominadas de ressonâncias secundárias, pois aparecem nos termos de alta ordem da expansão, isto é, em $q_1, q_2 \dots$. Nestes casos, pode ser necessário que a excitação externa tenha grande magnitude para provocar grandes amplitudes de resposta.

Definição 2 *Uma estrutura flexível apresenta uma condição de ressonância externa secundária quando:*

$$\Omega = \frac{p}{q}\omega_n, \quad \frac{p}{q} \neq 1 \quad (2.14)$$

na qual Ω é a frequência de excitação externa e ω_n a n -ésima frequência natural linear do sistema. Ainda, p e q são números primos⁶, usualmente pequenos ou de baixa ordem (EVAN-IWANOWSKI, 1976).

Na literatura, geralmente as ressonâncias externas secundárias são denominadas subharmônicas ou super-harmônicas. As ressonâncias subharmônicas são caracterizadas quando $\Omega \approx n\omega$ e, neste caso, são ditas de ordem $\frac{1}{n}$. As ressonâncias super-harmônicas são da forma $n\Omega \approx \omega$ e são denominadas de ordem n , em que $n = \frac{p}{q}$ tal como apresenta a Definição (2). Como exemplo ilustrativo, nos casos em que $N(q, \dot{q}, \ddot{q})$ representa uma não-linearidade cúbica, então as ressonâncias $\Omega \approx 3\omega$ e $3\Omega \approx \omega$ podem ocorrer. Ainda, dependendo da ordem da expansão, ressonâncias do tipo $\Omega \approx \frac{2}{3}\omega$ e $\frac{2}{3}\Omega \approx \omega$ também são possíveis. Similarmente, para sistemas com não-linearidades quadráticas, as ressonâncias do tipo $\Omega \approx 2\omega$ e $2\Omega \approx \omega$ também podem ocorrer.

Nos casos em que o sistema é submetido a uma excitação harmônica composta por mais de uma componente, é necessário incorporar ao modelo matemático todas estas excitações. Neste caso o modelo torna-se:

⁶Um número primo p é um inteiro positivo que só é divisível por ± 1 e $\pm p$. Os primeiros números primos são: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.

$$\ddot{q} + \varepsilon S(\dot{q}) + \omega^2 q + \varepsilon N(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \sum_{a=1}^A H_a e^{i\Omega_a t} \quad (2.15)$$

Sistemas vibratórios descritos pelo modelo anterior respondem a excitação de forma combinada. Nestes casos, em adição as ressonâncias subharmônica e super-harmônicas, combinações de ressonâncias também podem ocorrer. Por exemplo, se a excitação conter duas componentes espectrais, Ω_1 e Ω_2 e se $N(q, \dot{q}, \ddot{q})$ representa uma não-linearidade cúbica, combinação de ressonâncias externas da forma $\omega \approx 2\Omega_2 \pm \Omega_1$, $\omega \approx \Omega_2 \pm 2\Omega_1$ e $\omega \approx \frac{1}{2}(\Omega_2 \pm \Omega_1)$ podem ocorrer. No caso de três componentes espectrais de excitação (Ω_1, Ω_2 e Ω_3), combinação de ressonâncias externas da forma $\omega \approx \pm\Omega_1 \pm \Omega_2 \pm \Omega_3$ também é são possíveis. Ainda duas ou mais condições de ressonância podem ocorrer simultâneamente.

Definição 3 *Uma estrutura flexível pode apresentar combinação de ressonâncias externas quando:*

$$k_o \omega \approx \sum_{r=1}^n k_r \Omega_r \quad (2.16)$$

na qual Ω_r é a r -ésima frequência de excitação externa e ω_r a r -ésima frequência natural do sistema. Ainda k_o é inteiro positivo ou zero e k_r são inteiros positivos, negativos ou nulos (NAYFEH, 2000).

2.3.1.2 Vibrações Paramétricas

Quando um sistema estrutural sofre a ação de uma excitação do tipo externa, esta excitação aparece no modelo matemático como uma não-homogeneidade. Esta caso foi abordada no item anterior. No presente item será abordado o caso em que a excitação aparece como um coeficiente na equação de movimento. Neste caso, o sistema sofre a ação de uma excitação do tipo paramétrica e a vibração resultante é denominada de vibração paramétrica.

Quando um sistema estrutural é submetido a ação de uma excitação paramétrica, o modelo matemático com parâmetros constantes é transformado em um modelo com parâmetros variáveis, dependentes do tempo. Portanto o termo paramétrico é descritivo dos casos nos quais, por alguma razão, a ação de uma excitação aparece como uma modificação variante com o tempo em algum parâmetro do sistema (NAYFEH; MOOK, 1979)). Sob a ação de uma excitação paramétrica tipo harmônica, estes sistemas podem ser representados como,

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon^L \sum_{b=1}^B G^b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} + \varepsilon^L N(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \varepsilon^L \sum_{d=2}^D I^{(d-1)} e^{i\Gamma_{(d-1)} t} q^{(d-1)} = 0 \quad (2.17)$$

Considerando apenas que a excitação paramétrica seja linear, ou seja, fazendo ($D = 2$) a Equação (2.17) é simplificada para

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon^L I e^{i\Gamma t}) q + \varepsilon^L \sum_{b=1}^B G^b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} + \varepsilon^L N(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (2.18)$$

Mathieu (1868) ao estudar o problema de vibrações aplicado em uma membrana elíptica (NAYFEH; MOOK, 1979), empregou a mais simples equação que descreve alguns os principais efeitos de uma excitação paramétrica.

A Equação de Mathieu é obtida quando o modelo descrito pela Equação (2.18) é reduzido ao caso linear e conservativo. Assim,

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon^L I e^{i\Gamma t}) q = 0, \quad ou \quad \ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon^L I \cos \Gamma t) q = 0 \quad (2.19)$$

Sistemas paramétricos podem apresentar altas amplitudes quando a frequência de excitação está relacionada (por algum número inteiro ou fracionário) com uma (ou mais) frequência natural do sistema, sem que isso implique em perfeito sincronismo entre a frequência de excitação e a natural (CARTMELL, 1990a).

Para uma discussão mais apropriada sobre as possíveis condições de ressonância de um sistema excitado parametricamente é interessante buscar uma solução para a Equação (2.19) empregando o método de expansão direta (*straightforward*). Neste caso, a solução pode ser descrita da forma,

$$q(t) = q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \dots \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação (2.20) na Equação (2.19) e equacionando os coeficientes como potências de ε , obtém-se um conjunto de equações diferenciais não-homogêneas de segunda ordem para q_i na forma

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : \ddot{q}_0 + \omega^2 q_0 = 0 \\ \varepsilon^1 : \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = -I q_0 \cos \Gamma t \\ \varepsilon^2 : \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = -I q_1 \cos \Gamma t \\ \vdots \end{cases} \quad (2.21)$$

A solução geral para q_0 pode ser expressa como,

$$q_0 = \alpha \cos (\omega t + \beta) \quad (2.22)$$

na qual α e β são constantes. Então, substituindo a solução q_0 e desprezando a solução homogênea, a solução para q_1 torna-se

$$q_1 = \frac{I\alpha}{2\Gamma(\Gamma + 2\omega)} \cos [(\Gamma + \omega)t + \beta] + \frac{I\alpha}{2\Gamma(\Gamma - 2\omega)} \cos [(\Gamma - \omega)t + \beta] \quad (2.23)$$

Em relação a Equação (2.23) pode-se observar que quando $\Gamma = 2\omega$, a solução particular para q_1 irá produzir uma resposta com grande magnitude. Esta condição é denominada de ressonância paramétrica primária ou de primeira ordem. É nesta condição que surgem as maiores amplitudes de resposta, e por isso esta condição é mais conhecida como **ressonância paramétrica principal**. Este termo é o que será empregado nesta tese, assim como, a vibração decorrente será denominada de **vibração paramétrica principal**. Ainda nesta equação, pode-se observar que quando $\Gamma = 0$ existe a presença de um pequeno divisor. Entretanto este caso corresponde apenas a um carregamento estático cujo efeito pode ser a alteração na frequência natural do sistema.

Se Γ está distante de 0 e 2ω , a expansão direta pode prosseguir para a próxima ordem. Assim a solução particular de q_2 é descrita como,

$$\begin{aligned} q_2 = & \frac{-I^2\alpha t}{4\omega(\Gamma + 2\omega)(\Gamma - 2\omega)} \sin (\omega t + \beta) + \frac{I^2\alpha}{16\Gamma^2(\Gamma + \omega)(\Gamma + 2\omega)} \cos [(2\Gamma + \omega)t + \beta] + \\ & + \frac{I^2\alpha}{16\Gamma^2(\Gamma - \omega)(\Gamma - 2\omega)} \cos [(2\Gamma - \omega)t + \beta] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ao observar o resultado descrito pela Equação (2.24) pode se observar — em adição aos casos descritos anteriormente — que uma nova condição de ressonância ocorre quando $\Gamma \approx \omega$. Uma vez que esta condição de ressonância ocorre em expansões de or-

dem superior, esta recebe o nome de ressonância paramétrica secundária ou de segunda ordem. Na literatura esta condição é mais conhecida como **ressonância paramétrica fundamental**. Em adição, ao se realizar expansões de mais alta ordem, observa-se ainda outras condições de ressonância. Assim, pode-se apresentar a seguinte definição:

Definição 4 *Uma estrutura flexível pode apresentar ressonâncias paramétricas quando:*

$$\Gamma \approx r\omega_n, \quad r = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.25)$$

na qual Γ é a frequência da excitação paramétrica e ω_n é a n -ésima frequência natural do sistema.

Peculiaridades Sobre Vibrações Paramétricas

As causas e características da ressonância paramétrica são consideravelmente diferentes das ressonâncias externas. Exemplos destas diferenças incluem a relação entre a frequência de excitação paramétrica Γ e as frequências naturais do sistema ω_n . Ainda excitações paramétricas podem provocar resposta com intensas magnitudes em direções ortogonais à direção da aplicação da excitação.

Excitações paramétricas somente podem levar a uma ressonância paramétrica se o sistema já apresentar pelo menos pequenas oscilações. Em outras palavras, somente se existir uma quantidade mínima de energia vibratória armazenada no sistema. Assim, o aumento de amplitude — e conseqüentemente da energia vibratória — provocado no caso de uma ressonância paramétrica é dependente da energia armazenada no sistema. Diferentemente do que acontece no caso de uma ressonância externa, cujo aumento de energia vibratória é proporcional à raiz quadrada da energia.

O aumento da amplitude da resposta e assim da energia da vibração paramétrica decorre do trabalho das forças que periodicamente alteram um determinado parâmetro. A máxima transferência de energia ocorre quando o parâmetro é alterado duas vezes durante um período de vibração natural. Isto é, quando a frequência da excitação paramétrica Γ é o dobro de uma frequência natural do sistema ω_n , ou seja, na condição de ressonância paramétrica principal.

Dissipações de energia provocada pela presença de forças de atrito lineares também são proporcionais à energia já armazenada no sistema. No caso de um sistema vibratório sofrer a ação de uma excitação externa uma condição de ressonância externa pode ocorrer mesmo que a magnitude da força seja mínima. Entretanto a perda de

energia restringe o aumento descontrolado de amplitude uma vez que estas dissipações aumentam com a energia tão rápido quanto for o investimento de energia proveniente do trabalho da excitação externa.

No caso de ressonâncias paramétricas, tanto o investimento de energia provocado pelo trabalho proveniente da excitação paramétrica quanto as perdas de fricção são proporcionais à energia armazenada no sistema. Portanto a razão entre elas independe da amplitude. Assim, ressonâncias paramétricas só são possíveis quando uma porcentagem de energia é excedida, isto é: quando o incremento de energia durante um período exceder a quantidade de energia dissipado durante o mesmo período. Para satisfazer este requerimento, a magnitude da excitação paramétrica deve exceder algum valor crítico, o qual depende do mecanismo de fricção. No entanto, se este valor mínimo for excedido, a perda de energia devido a fricção linear não pode restringir o aumento da amplitude vibratória. De maneira conclusiva, quando um sistema linear está envolvido em uma ressonância paramétrica, a magnitude da resposta aumenta indefinidamente.

Em adição à condição de ressonância paramétrica descrita acima, quando a excitação paramétrica for composta por duas componentes harmônicas em que o valor da soma ou subtração de suas frequências for igual ao dobro de uma frequência natural do sistema uma condição de ressonância paramétrica principal também pode ocorrer (CARTMELL, 1990a).

Tal como as forças de fricção lineares, forças não-lineares exercem grande influência sobre as características da ressonâncias paramétricas. Neste caso, os efeitos provocados são quase sempre em favor da integridade estrutural.

Um bom exemplo ocorre na presença de não-linearidades deriváveis a partir da energia potência do sistema, ou matematicamente quando $N(q, \dot{q}, \ddot{q})$ está presente na equação de movimento. Com o aumento da amplitude estas não-linearidades podem afetar uma (ou mais) frequência natural linear do sistema. Geralmente o que ocorre é a alteração do valor numérico desta frequência natural. Se uma condição de ressonância paramétrica é satisfeita para amplitudes infinitesimais de vibração, com o decorrer do tempo o sistema começa a desenvolver maiores amplitudes de resposta. Juntamente com o aumento da amplitude o valor da frequência natural envolvida na ressonância é alterado. Como consequência, em um determinado momento a condição de ressonância é violada. Como isso, o aumento incontrolável da amplitude de vibração é contida uma vez que a excitação paramétrica não encontra mais condições favoráveis para introduzir ainda mais energia no sistema vibratório.

Ainda outros importantes efeitos são provocados por outros tipos de não-linearidades,

como por exemplo não-linearidades de fricção. Juntamente com o aumento da amplitude provocada por uma ressonância paramétrica, ocorre um aumento de energia vibratória do sistema e conseqüentemente este passa a desenvolver maiores velocidades. Ao se mover com grandes velocidades em um meio fluídico — mesmo com baixa densidade — ocorre a formação de vortices, cuja produção requer energia. Desta maneira, se desenvolve outra força de fricção, denominada **amortecimento turbulento**. O amortecimento turbulento pode ser considerado como proporcional ao quadrado da velocidade, e pode ser matematicamente escrito como $F_D \propto G\dot{q}|\dot{q}|$.

De maneira geral, a presença de não-linearidades ativas leva a formação de outra forma de equilíbrio, denominado de círculo limite. O círculo limite é um segundo tipo de atrator, ou seja, um estado oscilatório fechado que atrai todos os movimentos adjacentes (THOMPSON; STEWART, 1986). Neste caso o círculo formado é estável. Para a formação de um círculo limite estável é necessário se assegurar que a origem (0,0) é instável e, portanto para pequenas amplitudes a trajetória do movimento move-se para fora enquanto para grandes amplitudes o movimento move-se para dentro (THOMPSON; STEWART, 1986).

De maneira conclusiva, a presença de não-linearidades ativas em um sistema excitado parametricamente altera significativamente o comportamento vibratório decorrente de uma condição de ressonância. Estas alterações estão relacionadas com o mecanismo e intensidade das não-linearidades e portanto é difícil que generalizações sejam feitas a respeito do comportamento dinâmico resultante. Ainda existe a possibilidade, que em sistemas estruturais — que é mais uma regra que uma exceção — mais de uma fonte de não-linearidade esteja ativa. Nestes casos, ocorre a possibilidade de combinação de efeitos provocados pelas não-linearidades e conseqüentemente aumenta a dificuldade de generalizações a respeito do comportamento dinâmico destas estruturas. Cada caso precisa ser avaliado individualmente.

2.3.1.3 Vibrações Combinadas

No caso de um sistema estrutural sofrer a ação de uma excitação do tipo externa, esta excitação aparece no modelo matemático como uma não-homogeneidade. Quando um sistema estrutural é submetido a ação de uma excitação paramétrica, o modelo matemático com parâmetros constantes é transformado em um modelo com parâmetros variáveis, dependentes do tempo. Ainda pode ocorrer condições em que o sistema sofra a ação de excitações externas e paramétricas simultaneamente. Nestes casos, a excitação é dita combinada e a vibração resultante, denominada de vibração combinada. Sob a ação de uma excitação combinada harmônica, estes sistemas podem

ser representados como:

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon^L \left(\sum_{b=1}^B G_b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} + N(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \sum_{d=2}^D I_{(d-1)} e^{i\Gamma_{(d-1)} t} q^{(d-1)} \right) = \sum_{a=1}^A H_a e^{i\Omega_a t} \quad (2.26)$$

No caso em que as excitações aparecem apenas nas variável de deslocamento linear q , a equação é reduzida para

$$\ddot{q} + (\omega^2 + \varepsilon^L I e^{i\Gamma t}) q + \varepsilon^L \left(\sum_{b=1}^B G_b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} + N(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right) = \sum_{a=1}^A H_a e^{i\Omega_a t} \quad (2.27)$$

ou ainda em um caso mais complexo em que a excitação paramétrica é composta por várias componentes espectrais

$$\ddot{q} + \left(\omega^2 + \varepsilon^L \sum_{d=1}^D I_d e^{i\Gamma_d t} \right) q + \varepsilon^L \left(\sum_{b=1}^B G_b \dot{q} |\dot{q}|^{(b-1)} + N(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right) = \sum_{a=1}^A H_a e^{i\Omega_a t} \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) representa um dos casos mais complexos que podem ser encontrados em sistemas com um grau de liberdade. Este caso é descrito por uma equação diferencial ordinária não-linear, com coeficientes variáveis e não-homogênea. Nestes casos, o sistema estrutural pode exibir um comportamento fantástico e complexo, principalmente devido a interação entre as duas formas de excitação. Por fim, atualmente pouco é conhecido sobre natureza das diversas peculiaridades da vibração combinada, especialmente em sistemas não-lineares.

2.3.2 Sistemas Vibratórios Não-Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade

A seção anterior apresentou varias características dinâmicas de sistemas estruturais modelados com um grau de liberdade. Muitos casos reais podem ser representados a partir destes modelos. Entretanto, em vários outro casos torna-se necessário a inclusão de outros graus de liberdade. Nestes casos o modelo matemático é descrito como um conjunto de equação diferenciais, que podem ser lineares ou não-lineares, parciais ou ordinárias, homogêneas ou não-homogêneas. Estas equações de movimento são usualmente acopladas, tanto linearmente quanto não-linearmente e assim o comportamento de um estado do sistema pode ser influenciado pelo comportamento de outros esta-

dos. Como consequência dos acoplamentos não-lineares, e na presença de excitações paramétricas, externas ou combinadas podem surgir outros fenômenos dinâmicos de extrema importância, diferentes dos descritos no item anterior. A presente seção se destina a apresentação e definição de alguns destes fenômenos, iniciando com os sistemas não-lineares excitados autoparametricamente.

2.3.2.1 Vibrações Autoparamétricas

Vibrações autoparamétricas possuem características diferentes das vibrações paramétricas. Primeiramente podem ocorrer apenas em sistemas com múltiplos graus de liberdade. Neste caso, o sistema pode ser descrito em duas partes. A primeira consiste em um oscilador excitado externamente, e o segundo consiste em um oscilador excitado parametricamente pela resposta do elemento forçado. Assim, vibrações autoparamétricas é descritiva dos casos em que por alguma razão o próprio movimento do sistema excita-o parametricamente. Matematicamente um caso com dois graus de liberdade pode ser representado (a partir da Equação 2.1) como,

$$\ddot{q}_1 + \omega_{11}^2 q_1 + \varepsilon^L \sum_{b=1}^B G_{11}^b \dot{q}_1 |\dot{q}_1|^{(b-1)} + \varepsilon^L N_1(q_1, q_2) = 0 \quad (2.29)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_{22}^2 q_2 + \varepsilon^L \sum_{b=1}^B G_{22}^b \dot{q}_2 |\dot{q}_2|^{(b-1)} + \varepsilon^L N_2(q_1, q_2) = H e^{i\Omega t} \quad (2.30)$$

na qual a função N_n que representa as não-linearidades complementares. Neste exemplo, N_n é assumida como função apenas dos deslocamentos q_1 e q_2 .

Nas Equações (2.29) e (2.30), a coordenada q_2 é diretamente excitada, enquanto a q_1 não é. Ainda dependendo do valor de Ω , q_2 pode ser excitada em uma ressonância externa primária ou secundária. Como o sistema é amortecido, pode ser esperado que após algum tempo, a participação da componente q_1 na resposta seja nula. Neste caso é esperado que a resposta seja descrita apenas pela componente q_2 . Entretanto isto não é sempre verdadeiro. Dependendo das não-linearidades e dos parâmetros do sistema, é possível que a resposta contenha componentes de ambas as coordenadas q_1 e q_2 . Isto ocorre pois, em adição às ressonâncias externas, este sistema pode exibir ressonâncias internas.

O fenômeno de ressonância interna pode ser ainda melhor compreendido a partir de um exemplo explícito. Neste caso, ao fazer a função $N_1 = q_1 q_2$ e $N_2 = q_1^2$ e reduzindo $B = 1$, o sistema de equações é descrito como,

$$\ddot{q}_1 + (\omega_{11}^2 + \varepsilon^L q_2) q_1 + \varepsilon^L G_{11} \dot{q}_1 = 0 \quad (2.31)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_{22}^2 q_2 + \varepsilon^L G_{22} \dot{q}_2 + \varepsilon^L q_1^2 = H e^{i\Omega t} \quad (2.32)$$

Se a frequência da excitação externa for tal que $\Omega = \omega_{22}$ o segundo modo é excitado em uma condição de ressonância externa primária. Neste caso, após alguns instantes a resposta do segundo modo atinge o estado de regime permanente e pode ser descrita como,

$$q_2 = \alpha_2 \cos(\omega_{22}t + \beta_2) \quad (2.33)$$

Porém, a resposta do segundo modo é uma função do tempo e aparece na Equação (2.31) como um coeficiente variável de q_1 . Desta maneira, q_2 torna-se um coeficiente “paramétrico” para o primeiro modo. Neste caso, a excitação paramétrica do primeiro modo é proveniente não de uma fonte externa, mas sim da própria estrutura, em especial de outro modo ressonante.

Ainda, segundo a Definição (4) um sistema exibe uma ressonância paramétrica principal quando a frequência da excitação paramétrica for aproximadamente o dobro de uma frequência natural do sistema. Assim, se a frequência natural do segundo modo ω_{22} for aproximadamente igual ao dobro de ω_{11} e $\Omega = \omega_{22}$, o sistema descrito pelas Equações (2.31) e (2.32) apresenta uma condição de ressonância interna na ordem de dois-para-um.

Do exposto acima, pode-se definir mais uma condição de ressonância para sistemas estruturais:

Definição 5 *Uma estrutura flexível pode apresentar ressonâncias internas (autoparamétricas) quando as frequências naturais ω_n são comensuráveis ou quase comensuráveis, isto é, existem inteiros positivos ou negativos k_i tal que (NAYFEH, 2000):*

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_i\omega_i \approx 0 \quad (2.34)$$

Em estruturas que apresentam não-linearidades cúbicas, ressonâncias internas podem ocorrer se $\omega_n \simeq \omega_m$, $\omega_n \simeq |\pm 2\omega_m \pm \omega_k|$, ou $\omega_n \simeq |\pm \omega_m \pm \omega_k \pm \omega_l|$. Nos casos em que não-linearidades quadráticas estão ativas, além das condições descritas anteriormente, ressonâncias internas podem ocorrer se $\omega_n \simeq 2\omega_m$ ou $\omega_n \simeq \omega_m \pm \omega_k$ (NAYFEH, 2000).

É interessante notar que as ressonâncias internas também podem ocorrer quando o sistema primário é excitado parametricamente a partir de uma fonte externa. Neste caso, o modelo matemático inicialmente descrito pelas Equações (2.31) e (2.32) torna-se,

$$\ddot{q}_1 + (\omega_{11}^2 + \varepsilon^L q_2) q_1 + \varepsilon^L G_{11} \dot{q}_1 = 0 \quad (2.35)$$

$$\ddot{q}_2 + (\omega_{22}^2 + \varepsilon^L I e^{i\Gamma t}) q_2 + \varepsilon^L G_{22} \dot{q}_2 + \varepsilon^L q_1^2 = 0 \quad (2.36)$$

Neste caso, uma condição de ressonância interna pode ocorrer se a q_2 estiver envolvida em uma ressonância paramétrica principal ou fundamental com a excitação paramétrica proveniente de uma fonte externa.

Ressonâncias internas (autopamétricas) constituem um dos mecanismos responsáveis por outro fantástico fenômeno: a interação modal. O fenômeno de interação modal é na sua essência caracterizado pela troca dinâmica e contínua de energia vibratória entre os modos naturais de um sistema vibratório. Dependendo dos parâmetros do sistema, soluções periódicas das Equações (2.29) e (2.30) podem não existir. Ao invés disso, existem soluções nas quais a energia vibratória é continuamente canalizada entre q_1 e q_2 .

Devido ao fenômeno de interação modal, a energia proveniente de uma estrutura principal pode ser transferida para uma subestrutura, cujo resultado pode ser uma alta amplitude vibratória, e conseqüentemente, a diminuição da sua vida em fadiga. Por outro lado, este mecanismo pode ser explorado para transferir energia da estrutura principal para uma subestrutura de sacrifício, aumentando assim a vida em fadiga da estrutura principal. Estes dois efeitos diretos demonstram a importância de se compreender e investigar ressonâncias internas, assim como, a vibração proveniente destas condições.

2.3.2.2 Interação Modal: Outros Mecanismos

Além das ressonâncias internas, o fenômeno de interação modal pode ser provocado mesmo quando as frequências naturais da estrutura ω_n forem incomensuráveis. Nestes casos, a troca de energia entre modos naturais pode ser provocado pela combinação de ressonâncias paramétricas, combinação de ressonâncias externas ou combinação de ressonâncias internas.

Combinação de Ressonâncias Paramétricas: Em estruturas modeladas com múlti-

plos graus de liberdade e submetida à excitação paramétrica harmônica, combinação de ressonâncias paramétricas do tipo aditivo ou subtrativo pode ocorrer quando $\Lambda \approx \omega_i \pm \omega_j$, na qual Λ é a frequência da excitação paramétrica e ω_m são as frequências naturais lineares da estrutura.

Combinação de Ressonâncias Externas: Quando uma estrutura é submetida a uma excitação externa periódica, o fenômeno de interação modal pode ser provocado pela combinação de ressonâncias externas. Em estruturas com não-linearidades quadráticas, combinação de ressonâncias externas pode ocorrer quando $\Omega \approx \omega_i \pm \omega_j$, na qual Ω é a frequência da excitação externa. No caso de não-linearidades cúbicas, combinação de ressonâncias externas pode ocorrer quando $\Omega \approx |\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k|$, $\Omega \approx |2\omega_i \pm \omega_j|$, e $\Omega \approx \frac{1}{2}(\omega_i \pm \omega_j)$. A última condição é denominada de subcombinação de ressonâncias externas.

Combinação de Ressonâncias Internas: Combinação de ressonâncias internas podem ocorrer em estruturas com não-linearidades quadráticas ativas se $\omega_k \approx \omega_i + \omega_j$. Em adição, nos casos de não-linearidades cúbicas ativas, também podem ocorrer se $\omega_l \pm \omega_k \pm \omega_j \pm \omega_i \approx 0$ ou $\omega_k \pm 2\omega_j \pm \omega_i \approx 0$.

Ressonâncias na Ordem de Um-Para-Zero: Além dos mecanismos descritos anteriormente, recentemente vários estudos experimentais sugerem que um outro tipo de mecanismo pode provocar a troca de energia vibratória entre modos naturais. Nestes experimentos, um modo de alta frequência foi diretamente excitado — externamente ou parametricamente — entretanto, a resposta vibratória do sistema contém uma grande contribuição do primeiro modo. A resposta vibratória contém lentas modulações em amplitude e fase na resposta do modo de alta frequência, sendo a frequência de modulação aproximadamente igual à frequência natural associada ao primeiro modo. Estes resultados indicam que o mecanismo responsável pela ativação do primeiro modo não é nem uma ressonância interna clássica e nem combinações de ressonâncias externas ou paramétricas. Ao invés disso, o surgimento do primeiro modo é acompanhado por lentas modulações dos modos de alta frequência. Assim o mecanismo responsável por esta troca de energia é a interação entre a dinâmica lenta do modo de alta frequência — representada por sua amplitude e fase — com a dinâmica, a qual é lenta, do modo de baixa frequência. Este mecanismo pode ser visualizado como uma ressonância interna na ordem de um-para-zero (NAYFEH, 2000). Na literatura este mecanismo é ainda conhecido como troca de energia entre modos amplamente espaçados e ainda interações não-ressonantes.

2.4 Sumário e Conclusões

Este capítulo abordou importantes assuntos relacionados com a dinâmica de sistemas estruturais lineares e não-lineares. O primeiro assunto tratado envolveu a modelagem dinâmica de sistemas estruturais. Foi exposto que todas as estruturas são inerentemente não-lineares e que divisão entre linear e não-linear refere-se exclusivamente à extensão do modelo matemático e não à estrutura. Em adição, na modelagem não-linear de estruturas flexíveis cada problema possui suas próprias características, as quais irão determinar a extensão e a forma final do modelo matemático não-linear. Este fato impede a descrição de modelos não-lineares com termos bem definidos, tal como ocorre com os modelos lineares.

Outro assunto abordado refere-se a solução de modelos matemáticos em dinâmica estrutural. Neste aspecto, foi enfatizado que dependendo da natureza linear e não-linear de um modelo, torna necessário o emprego de métodos adequados. Embora sempre seja possível a obtenção de soluções numéricas, investigações analíticas podem apresentar de maneira clara como o comportamento dinâmico do sistema é afetado pela amplitude e/ou frequência da excitação, viscosidade e/ou temperatura do campo de operação ou ainda devido a geometria e material da estrutura. Assim, as análises analíticas são mais informativas que as numéricas, pois possibilitam um melhor entendimento da física envolvida; a clara observação da influência de parâmetros relativos às excitações, meio de operação e características físicas da estrutura. Por fim, a análise teórica de um sistema estrutural deve ter como ponto de partida o conhecimento de suas características modais. Em uma segunda etapa, as características dinâmicas não-lineares podem ser investigadas especificamente nas regiões ou condições de interesse.

Além da modelagem e solução de modelos, o presente capítulo também apresentou as diferenças e peculiaridades relativas às vibrações externas, paramétricas, autparamétricas e combinadas. Em especial, varias outra condições de ressonância foram formalmente definida, a maioria pouco conhecida dos dinamicistas clássicos.

Na teoria clássica das vibrações lineares é definido que um sistema estrutural apresenta uma condição de ressonância, se e somente se, a excitação externa possuir uma componente espectral Ω_n cujo valor é igual à alguma frequência natural ω_n da estrutura. Esta condição de ressonância é denominada de ressonância externa primária. Entretanto, foi apresentado que na presença de não-linearidades ativas, outras condições de ressonância externa podem ocorrer.

Diferentemente da excitação externa, existem casos em que a excitação aparece como um coeficiente na equação de movimento. Neste caso, o sistema sofre a ação

de uma excitação do tipo paramétrica, as qual também podem levar a condições de ressonância. Entretanto as causas e características da ressonância paramétrica são consideravelmente diferentes das ressonâncias externas. Exemplos destas diferenças incluem a relação entre a frequência de excitação paramétrica Γ e as frequências naturais do sistema ω_n . Ainda excitações paramétricas podem provocar resposta com intensas magnitudes em direções ortogonais à direção da aplicação da excitação. Neste contexto, vibrações paramétricas proveniente destas condições ressonantes podem ser letais à integridade estrutural.

Excitações paramétricas são muitas vezes provocadas pelo próprio movimento oscilatório da estrutura, nestes casos a excitação é denominada de autoparamétrica. Um dois principais efeitos de uma excitação autoparamétrica é a transferência de energia vibratória entre modos naturais. Também pode levar a fenômenos extremamente importantes como o da saturação modal. Estes fenômenos tanto podem afetar negativamente o desempenho e a segurança da estrutura quanto podem ser explorados para transferir energia vibratória a partir de uma estrutura principal para uma estrutura de sacrifício, ou seja, como forma de controle passivo.

Por fim, é estabelecido um dos casos mais complexos em dinâmica estrutural. Neste caso, o sistema estrutural sofre a ação de excitações externas e paramétricas simultaneamente. Nestes casos, a excitação é dita combinada e a vibração resultante, denominada de vibração combinada.

CAPÍTULOTRÊS

Modelagem Dinâmica dos Sistemas Estruturais Sob Investigação

“One geometry cannot be more true than another; it can only be more convenient.

Geometry is not true, it’s advantageous.”

— R. M. Pirsing (nascido em 1928)

A modelagem dinâmica de sistemas estruturais é uma arte. Tal como a arte não é única, a modelagem dinâmica também não é. Uma mesma estrutura pode ser modelada utilizando hipóteses simplificadoras diferentes e, quando o modelo resultante é resolvido, os resultados serem muito próximos. Por outro lado, modelagens mais precisas podem resultar em modelos que não podem ser resolvidos adequadamente. Assim o grande desafio da modelagem de sistemas estruturais é a obtenção de um modelo matemático que capture as principais características dinâmicas da estrutura e ainda possa ser resolvido adequadamente. Evidentemente esta nem sempre é uma tarefa simples. É dentro deste contexto que se insere o presente capítulo.

3.1 Sistemas Estruturais Sob Investigação

Os sistemas estruturais que darão suporte às investigações propostas pela presente pesquisa compreendem duas estruturas tipicamente aeronáuticas. A primeira faz alusão a um estabilizador vertical. A segunda é uma simplificação de um sistema estrutural asa/pilone/turbina. A Figura (2) apresenta esquematicamente estas estruturas, assim como, a contrapartida em uma aeronave real.

Figura 2: Contrapartida em uma aeronave real dos sistemas estruturais que servirão de objeto de estudo para a presente pesquisa.

Estas estruturas foram idealizadas, projetadas e construídas para possibilitar que a teoria de viga mais simples¹ pudesse ser empregada durante a modelagem. Com isso espera-se que as características das vibrações sob interesse fiquem claras e, assim, estes fenômenos possam ser bem compreendidos.

3.1.1 Sistema Estrutural com Um Grau de Liberdade

A estrutura apresentada na Figura (3) foi idealizada e construída para se investigar, teoricamente e experimentalmente, as vibrações paramétricas e combinadas, assim como, dos efeitos da viscosidade do meio de operação sobre estes tipos de vibração.

Esta estrutura é composta por uma fina viga de aço ASTM A240 engastada em uma

¹Quanto mais complexa a teoria adotada, mais complexo será o modelo decorrente. Dentro desta complexidade matemática, muitos significados físicos importantes podem ficar perdidos ou serem mal compreendidos.

das extremidades e com uma massa concentrada na extremidade livre. O aço inoxidável ASTM A240 foi empregado devido a sua alta resistência mecânica aliada com excelente acabamento superficial. Com estas características a nucleação de trincas é dificultada e assim, a possível ocorrência de fadiga é minimizada. Zavodney & Nayfeh (1989) reportam a ocorrência de fadiga da estrutura devido a vibração paramétrica principal.

Esta viga possui 100 mm de comprimento, 20 mm de largura e 1 mm de espessura. Estas dimensões foram criteriosamente definidas devido a dois motivos. Primeiro afastar os modos torcionais dos modos de flexão (plano de menor rigidez) de maneira que os modos de torção pudessem ser negligenciados nas análises futuras. Para isso a viga é curta, possui comprimento menor que trinta vezes sua largura².

O segundo motivo é negligenciar os efeitos das tensões de cisalhamento e da inércia de rotação. Segundo Shames & Dym (1985), em vigas a tensão de cisalhamento e as tensões normais são da ordem de h/L e $(h/L)^2$, respectivamente, em que h é a espessura da viga e L o comprimento. Assim a tensão normal transversa é negligenciada na maioria das análises, já que é muito pequena. Por outro lado as tensões de cisalhamento são importantes em problemas que apresentam grande razão de aspecto h/L e para estudos em alta frequência. A viga projetada na presente dissertação possui razão de aspecto muito pequena ($h/L = 0.01$) e conseqüentemente os efeitos de tensão de cisalhamento e tensão normal transversa podem ser negligenciados com segurança, mas apenas para baixas frequências.

Com objetivo de assegurar que o protótipo apresentasse um dos modos de flexão com baixa frequência e ainda assegurasse as condições citadas acima, optou-se por adicionar a viga uma massa concentrada. Desta maneira as dimensões da viga permanecem inalteradas.

A massa concentrada foi usinada com 10 mm de altura, 40 mm de largura e 20 mm de espessura, usando aço carbono ASTM A36. Por fim foi presa a extremidade livre da viga. A outra extremidade foi firmemente engastada a uma base auxiliar, também usinada em ASTM A36.

De maneira conclusiva, a estrutura apresentada na Figura (3) foi projetada para ser o mais simples possível. Suas dimensões foram escolhidas de maneira a privilegiar a flexão e apenas um plano e evitar a ocorrência de ressonâncias internas em flexão. Ainda devido a geometria, os modos de torção foram afastados dos modos de flexão do plano de menor rigidez. Os efeitos secundários foram eliminados pois a viga possui pequena

²Esta informação foi observada em laboratório e também foi descrita por Zavodney & Nayfeh (1989).

razão de aspecto e o modo de interesse possui baixa frequência natural associada.

Figura 3: Sistema estrutural com um grau de liberdade: (a) vista frontal; (b) vista lateral.

Para a realização do estudo proposto, é requerido que a estrutura apresentada seja submetida a ação de fontes externas de excitação, cuja ação provoquem excitações paramétricas e externas.

Quando uma viga na condição livre-engastada é excitada axialmente via base, surge uma excitação paramétrica em um dos planos ortogonais. Esta configuração é clássica e muitos trabalhos importantes foram realizados desta maneira. Alguns exemplos incluem os trabalhos de Zavodney & Nayfeh (1989), Cartmell (1990b) e Esmailzadeh & Jalili (1998). Portanto é possível com esta configuração provocar uma excitação paramétrica no eixo de menor rigidez flexional.

Enquanto a introdução de uma excitação paramétrica na estrutura foi facilitada pela base científica existente, a introdução simultânea de uma excitação externa é uma tarefa bem mais complicada. Tal complicação provem das relações de compromisso existente na presente pesquisa no que diz respeito as fases teóricas e experimentais. Em estudos puramente teóricos, excitações podem ser facilmente inseridas no modelo, por outro lado, na experimentação isso é muito mais complicado.

Uma alternativa direta seria inclinar a incidência da excitação via base. Desta maneira a excitação iria conter componentes axiais e transversais e, assim, excitações paramétricas e externas seriam aplicadas a estrutura. Esta solução foi adotada por Nayfeh, Nayfeh & Mook (1995) em um dos únicos trabalhos experimentais deste tipo. Neste caso ambas as excitações, paramétrica e externa, são proveniente da mesma fonte e portanto este é um caso mais restrito. Na maioria das estruturas reais, excitações são provenientes de varias fontes. Assim, no caso de excitações periódicas o ângulo de fase entre excitações pode ser um parâmetro importante. Portanto é muito mais interessante que as excitações paramétrica e externa sejam provenientes de fontes independentes,

embora aumente a complexidade experimental do problema.

Para introduzir de maneira independente a excitação externa é necessário o posicionamento de outro excitador. Um excitador eletromagnético (*shaker*) é uma possível solução. Entretanto para excitar a estrutura o *shaker* precisa ser acoplado à estrutura. Por se tratar de uma estrutura bem flexível em flexão e com pequena massa modal, os efeitos do acoplamento entre o *shaker* e a estrutura podem ser muito severos. Varoto & Oliveira (2002) apresentam um estudo muito interessante sobre as características do acoplamento *shaker*/estrutura.

Para contornar os efeitos negativos do acoplamento *shaker*/estrutura é interessante o uso de um mecanismo de excitação que não tenha contato direto com a estrutura. Neste requisito, uma fonte de excitação acústica é um bom mecanismo. É conhecido que a emissão acústica pode excitar uma estrutura flexível e não existe contato mecânico entre a estrutura e o dispositivo de excitação. A excitação acústica de estruturas flexíveis é empregada em várias tarefas. Exemplos incluem a identificação de amortecimento modal em painéis aeronáuticos (PLATTEN; WRIGHT; COOPER, 2002), determinação das propriedades modais em contato com meio acústico (KIRKUP; AMINI, 1991) e na caracterização da resposta dinâmica de placas carregadas termicamente (MURPHY; VIRGIN; RIZZI, 1996). Assim decidiu-se que a excitação externa seria introduzida a partir de uma fonte de excitação acústica.

A grande maioria das estruturas é projetada para operar no ar e sob condições ambientais de temperatura e pressão. Este fato se justifica pois as estruturas são desenvolvidas para serem utilizadas e operadas pelos seres humanos. Evidentemente existe um número significativo de estruturas que operam sob condições extremas de temperatura (altas ou baixas temperaturas); pressão (alta ou baixa) e em outros meios como água, óleo, vácuo, dentre outros. Ainda existem casos em que a estrutura deve operar corretamente em combinações das condições citadas anteriormente. Um avião é um exemplo típico de uma estrutura sujeita a combinação de fatores ambientais. Os passageiros embarcam e desembarcam sob condições ambientais, mas o voo ocorre em um ambiente com baixas temperaturas e pressões reduzidas.

Do exposto acima, o meio escolhido para a operação da estrutura sob investigação será o ar sob condições ambientais de temperatura e pressão. Ainda será considerado que, na posição de equilíbrio estático da estrutura (ausência de excitações) não existe movimento relativo entre o meio e a estrutura.

3.1.2 Sistema Estrutural com Múltiplos Graus de Liberdade

Inspirado no bem sucedido projeto europeu Garteur³ Link & Friswell (2003), a estrutura apresentada na Figura(4) foi projetada e construída para investigar as características da vibração autoparamétrica, assim como, identificar e caracterizar sua ocorrência.

Figura 4: Sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade.

Este protótipo foi idealizado de maneira a respeitar as principais características estruturais de uma asa aeronáutica com motores suspensos: longarinas, nervuras e pilone-turbina. Para reduzir a complexidade geométrica, os ângulos de inclinação de uma asa real, assim como, o recobrimento foram desconsiderados. Ainda todas a estrutura foi idealizada a partir de elementos tipo viga e massas concentradas rígidas.

Em especial, as massas concentradas presentes neste protótipo levam em consideração algumas características geométricas interessantes. As turbinas foram idealizadas de maneira a se aproximar geometricamente da forma real. A mesma filosofia foi empregada nas nervuras. Embora esta caracterização geométrica tenha complicado muito o processo construtivo do protótipo, assim como, seja dispensável para fins puramente dinâmicos, optou-se pela inclusão de características geométricas pois em trabalhos futuros este mesmo protótipo — depois de ter a asa recoberta — poderá ser empregado em estudos aeroelásticos não-lineares promovidos pelo Laboratório de Dinâmica da

³Trata-se de um amplo estudo realizado em dinâmica estrutural linear pelo Group for Aeronautical Research and Technology in EUROpe (GARTEUR). Neste estudo foi utilizado um protótipo para simular o comportamento dinâmico de um avião. O protótipo foi projetado e construído pelo ONERA (www.onera.fr) um dos mais importantes centros de pesquisa do mundo.

EESC/USP. Nesta direção, as nervuras são perfis aeronáuticos reais tipo Clark Y.

Uma das principais características deste protótipo consiste na simplicidade de variação das suas frequências naturais. Isso ocorre pois todas as massas concentradas podem ser movidas ao longo de suas respectivas estruturas e posteriormente fixadas em uma nova posição de interesse, reintegrando assim a estrutura. A modificação ou ajuste de algumas frequências naturais de interesse é fundamental na geração de condições para o surgimento de ressonâncias autoparamétricas, tal como discutido anteriormente.

Outro requerimento imposto ao protótipo é a representabilidade da ordem de ocorrência dos principais modos naturais de uma estrutura real típica. Para alcançar esta característica, vários especialistas⁴ mundiais foram consultados com o propósito de reter a simplicidade e ainda garantir que esta estrutura apresentasse um comportamento dinâmico semelhante ao encontrado em um avião real. Especialmente para a presente pesquisa, é interessante que a ordem dos modos naturais do protótipo fosse a mesma apresentada por um avião real típico. A Tabela (1) apresenta algumas das principais características dinâmicas típicas de um avião de grande porte com duas turbinas suspensas sob a asa. Estas informações foram cordialmente fornecidas pelo senhor Michael Sinapius (*German Aerospace Center DLR*).

Ao se observar mais cuidadosamente as informações contidas na Tabela (1) nota-se duas características interessantes. A primeira é a alta densidade modal presente: são vinte e quatro modos naturais em menos de dezoito Hertz. Isso equivale a aproximadamente um modo por Hert. A outra são as baixa frequência naturais, principalmente relativas as asas e turbinas. Estas duas características são responsáveis por promover grandes complicações no processo de identificação experimental das características lineares deste tipo de estrutura. Em adição, é interessante ressaltar que as frequência naturais relativas aos modos de asa são fortemente afetadas pelo volume de combustível presente na aeronave⁵.

Em termos construtivos, o protótipo foi construído quase na sua totalidade de aço ASTM A36. As excessões são a turbina que é de ferro fundido e os elementos de fixação do pilone — na turbina e na asa — feitos de alumínio 2024 T6. As nervuras foram usinadas em CNC a partir de blocos de aço, já a turbina e as fixações empregaram operações de usinagem convencionais.

⁴Michael Sinapius (DLR, Alemanha); Pascal Lubrina (ONERA, França); Dennis Göege (DLR, Alemanha) e Charlie Pickel (Boeing, EUA).

⁵Aviões comerciais carregam a maior parte do combustível em tanques posicionados no interior das asas.

Tabela 1: Características dinâmicas típicas de um avião comercial com duas turbinas sob a asa.

Modos e Frequências Naturais		
Modo ^a	Simetria	Frequência Natural Típica [Hz] ^b
Flexão Asa 2n	Simétrico	3.0
Flexão Asa 3n	Assimétrico	3.5
Turbina Lateral	Assimétrico	4.0
Turbina Lateral	Simétrico	4.3
Flexão Vertical Fuselagem 2n	Simétrico	4.4
Flexão Lateral Fuselagem	Simétrico	4.5
Turbina Vertical	Simétrico	5.5
Rolagem Estabilizador horizontal	Assimétrico	5.8
Flexão Lateral Fuselagem Frontal	Assimétrico	6.0
Turbina Vertical	Assimétrico	6.5
Flexão Planar Asa	Simétrico	7.5
Flexão Vertical Fuselagem 3n	Simétrico	8.0
Flexão Estabilizador Vertical	Assimétrico	8.3
Flexão Planar Estab. Horizontal	Assimétrico	8.6
Flexão Asa 4n	Simétrico	8.8
Rolagem Turbina	Assimétrico	10.0
Rolagem Turbina	Simétrico	10.5
Flexão Estabilizador Horizontal	Simétrico	10.8
Flexão Lateral Fuselagem 3n	Assimétrico	11.0
Flexão Asa 5n	Assimétrico	12.0
Flexão Lateral Fuselagem Traseira	Assimétrico	13.0
Flexão Vertical Fuselagem	Simétrico	14.0
Torção Asa	Simétrico	17.0
Torção Asa	Assimétrico	17.6

^an representa o número de nós.^bCortesia Michael Sinapius (DLR, Alemanha).

3.2 Modelagem Não-Linear do Sistema com Um Grau de Liberdade

3.2.1 Modelo Físico

Neste item, inicialmente um modelo físico é apresentado. Neste modelo estão definidos o sistema de coordenadas no qual será descrito o movimento da estrutura. Também, são definidas as variáveis e as relações geométricas de interesse. Ainda as excitações são matematicamente descritas e devidamente posicionadas.

A partir do sistema estrutural apresentado na Figura (3) foi idealizado um modelo físico, tal como apresenta a Figura (5). Neste modelo físico, um sistema cartesiano ortogonal $OXYZ$ é fixado na base da viga, segundo sua posição indeformada. O sistema de coordenadas foi disposto tal que o eixo X passe pela linha central da viga.

A origem O pode ser submetida a um deslocamento, mas somente na direção X . Este deslocamento é denominado de $U_B(t)$.

Em adição, uma pressão acústica distribuída $p(x, t)$ pode agir transversalmente no plano de menor rigidez flexional, ou seja, na direção Z . A coordenada generalizada $w(x, t)$ é empregada para medir a deformação da viga na direção Z , a partir da sua posição indefomada. Também as coordenadas generalizadas com subíndice o são empregadas para medir a deformação do centro geométrico da massa concentrada, a partir da sua posição indefomada.

Figura 5: Modelo físico da estrutura sob investigação quando sob ação de excitações combinadas e do meio de operação. Excitação paramétrica provocada pela excitação via base $U_B(t)$. Excitação externa provocada pela pressão acústica $p(x, t)$.

Como é conhecido, qualquer estrutura sólida exposta a um campo sonoro dentro de um meio fluídico contínuo irá responder em algum grau às flutuações de pressão agindo na interface entre os dois meios. Em adição, existe uma reação do meio fluídico ao movimento da estrutura sólida, resultando em um acoplamento entre a estrutura e o fluído (FAHY, 1987). Devido a este mecanismo, o campo sonoro age como se adicionasse massa e amortecimento à estrutura, cuja consequência direta é a alteração de alguns parâmetros modais. Entretanto a magnitude do efeito causado devido ao campo sonoro sobre as características da estrutura está ligado à vários fatores que dependem tanto da estrutura quando das características físicas do meio, principalmente sua densidade.

Baseado neste fato, é importante conhecer se os efeitos provocados pela excitação

acústica devem ou não ser incorporados no modelo matemático. Foi realizado uma avaliação dos efeitos do campo acústico sobre a estrutura por intermédio do cálculo da impedância de radiação do fluido para uma condição de interesse, tal como apresenta o Apêndice C. Os resultados finais sugerem que o acoplamento entre o sistema estrutural e o campo acústico (ar) tem efeitos mínimos sobre as características puramente estruturais. A pequena área superficial da estrutura e a baixa densidade do meio fluido quando comparado ao da estrutura foram os fatores determinantes. Portanto esta estrutura pode ser considerada acusticamente desacoplada, para a condição analisada.

3.2.2 Sumário das Hipóteses Iniciais

Conforme apresentou os parágrafos precedentes, a estrutura foi projetada de maneira que a teoria de viga mais simples pudesse ser empregada. Em adição, o item anterior apresentou que a fonte de excitação acústica (no ponto de operação investigado) não acrescenta massa e nem amortecimento ao sistema estrutural, assim agindo puramente como uma fonte de excitação. Com as características do modelo físico concebido, o modelo matemático a ser derivado irá assumir as seguintes hipóteses iniciais:

- H1** A vibração transversal da viga é puramente planar e completamente descrita no plano OZX .
- H2** Os efeitos das tensões de cisalhamento e da inércia de rotação da viga serão desprezados.
- H3** Todas as secções transversais a linha central da viga permanecem planas e normais a linha central.
- H4** O material da viga obedece a lei constitutiva de Hook para materiais isotrópicos. Também não existem deformações plásticas e geração de calor⁶ durante a vibração.
- H5** Quando comparada a massa concentrada, a massa da viga é pequena. Portanto os efeitos da massa da viga serão desprezados.
- H6** Os efeitos da excitação acústica sobre as características físicas da estrutura (massa e amortecimento estrutural) podem ser negligenciadas quando a fonte acústica operar em 36 Hz e para as constantes do ar $\rho = 1.21 \text{ kg / m}^3$ e $c = 343 \text{ m / s}$.

⁶Esta é uma hipótese simplificadora na expressão da energia de deformação elástica, cuja origem é a primeira lei da termodinâmica. Maiores detalhes podem ser obtidos em Boresi, Schmidt & Sidebottom (1993) e Wylen, Sountag & Borgnakke (1995).

3.2.3 Cinemática do Movimento

Quando a estrutura é sujeita à vibração transversal com amplitude finita, um plano imaginário transversal e normal a linha central da viga no ponto b translada na direção Z uma quantidade $w(x, t)$. Também translada na direção X uma quantidade u_c e rotaciona no plano XZ uma quantidade fornecida pela inclinação $\partial w / \partial x$ da curva de deflexão no ponto b .

A partir da Figura (5), pode-se observar que a tangente no ponto b' é fornecida por $\tan \alpha = \partial w / \partial x$. Então o ângulo α neste mesmo ponto pode ser escrito na forma de série como:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^5 + \dots \quad (3.1)$$

Em adição, a contração axial infinitesimal du_c medida a partir do ponto b posicionado na coordenada $(x, z) = (dx, 0)$ até a projeção do ponto b' no eixo X é fornecido por

$$du_c = dx (1 - \cos \alpha) = dx \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{24} \alpha^4 + \dots \right) \quad (3.2)$$

É interessante expressar a contração axial du_c como uma função do deslocamento lateral $w(x, t)$. Isto pode ser feito pela simples substituição da Equação (3.1) na Equação (3.2), cujo resultado final é

$$du_c = \frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{3} dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{18} dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^6 + \dots \quad (3.3)$$

Como mencionado anteriormente, devido a rotação de qualquer secção transversal da viga surge um deslocamento adicional u_r na direção X . A Figura (5) apresenta em destaque uma pequena região da viga, a partir da qual uma expressão para u_r pode ser encontrada. De acordo com esta figura, o deslocamento u_r é obtido considerando o deslocamento em flexão na direção X de um ponto na secção transversal da viga na posição z abaixo do eixo central, assim

$$u_r = -z \sin \alpha = -z \alpha + \frac{1}{6} z \alpha^3 - \frac{1}{120} z \alpha^5 + \dots \quad (3.4)$$

ou empregando a Equação (3.1), u_r pode ser reescrito como função do deslocamento lateral $w(x, t)$ como

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - \frac{7}{40} z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^5 + \dots \quad (3.5)$$

A partir dos resultados obtidos nesta seção, um possível campo de deslocamento para este problema pode ser definido. A partir deste campo de deslocamento, o campo de deformação correspondente pode ser derivado e por último o campo de tensões. Estas tarefas serão apresentadas na próxima seção.

3.2.4 Campos de Deslocamento, Deformação e Tensão

A partir das informações sobre a cinemática do movimento, juntamente com as hipóteses realizadas é proposto o seguinte campo de deslocamento,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du_c(x, t) + u_r(x, t) - U_B(t) \\ 0 \\ w(x, t) \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

o qual indica que cada secção transversal da viga possui um deslocamento u_1 na direção X , não se desloca na direção Y ($u_2 = 0$) e possui deslocamento u_3 na direção Z .

A partir deste campo de deslocamento, o campo de deformação pode ser derivado. Entretanto, antes que isto seja realizado é necessário uma breve discussão sobre a teoria dos pequenos deslocamentos (BORESI; SCHIMIDT; SIDEBOTTOM, 1993).

Na cinemática dos corpos elásticos, as equações comumente referidas como relações deformação-deslocamento são descritas por intermédio de equação diferenciais parciais não-lineares. Na forma matricial, estas relações podem ser descritas por um tensor⁷ de segunda ordem, ou

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial s_j} + \frac{\partial u_j}{\partial s_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial s_i} \frac{\partial u_k}{\partial s_j} \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

A teoria dos pequenos deslocamentos é empregada para linearizar a Equação (3.7). Para isso é considerado que: se os deslocamentos e suas derivadas são pequenos, as deformações das fibras do material em um plano não são afetadas pelos deslocamentos fora deste plano. Neste caso, tanto as derivadas ao quadrado quando o produto das derivadas de u_1, u_2 e u_3 são negligenciáveis quando comparadas com as próprias derivadas (BORESI; SCHIMIDT; SIDEBOTTOM, 1993). Assim, segundo a teoria dos pe-

⁷Tensores são uma generalização de escalares e vetores. Tensores de ordem zero são escalares, de ordem um são vetores e de ordem dois são matrizes (BOAS, 1983).

quenos deslocamentos, o tensor de deformação e_{ij} é simplificado para,

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

na qual $\partial s_1 = \partial x$, $\partial s_2 = \partial y$, $\partial s_3 = \partial z$, representam as variações segundo eixo de coordenadas cartesiano.

Desta maneira, aplicando a Equação (3.8) ao campo de deslocamento específico do problema (Equação 3.6) e utilizando a hipótese **H2** (mais especificamente desprezando os efeitos das tensões de cisalhamento), o campo de deformação é derivado e descrito como

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial(du_c)}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A partir do campo de deformação descrito pela Equação (3.9), o campo de tensões pode ser computado. Para isso é necessário o conhecimento de algumas características do material da viga.

Especificamente no problema abordado, a estrutura sob investigação construída unicamente a partir de materiais metálicos. Mais especificamente a viga é de aço inox.

O aço contém milhões de cristais orientados aleatoriamente em cada milímetro cúbico do seu volume. Devido à aleatoriedade da distribuição cristalina, é razoável considerar que este material é isotrópico, ou seja, suas propriedades físicas são independentes da direção. Especificamente em relação à propriedade elástica, estes materiais são denominados de elasticamente isotrópicos (BORESI; SCHIMIDT; SIDEBOTTOM, 1993).

Outra questão importante a respeito do material é a relação linear ou não-linear entre tensão e deformação durante o regime elástico. Materiais metálicos, como é o caso do aço inox, geralmente possuem regime elástico linear. Nestes casos, a lei constitutiva de Hook⁸ pode ser empregada. Mais especificamente, pode ser empregado a lei constitutiva de Hook para materiais isotrópicos⁹.

⁸A lei constitutiva de de Hooke é fundamentalmente uma relação linear entre tensão e deformação.

⁹Pois Existem modelos de Hooke para materiais anisotrópicos e ortotrópicos, entretanto todos os modelos consideram o material como elástico-linear. Maiores detalhes podem ser encontrados em

De acordo com as considerações sobre a natureza do material feitas acima e considerando nulo os efeitos de Poisson, o campo de tensões é simplesmente descrito como,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \frac{\partial(du_c)}{\partial x} + E \frac{\partial u_r}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

na qual E é o módulo de elasticidade do material. No próxima seção as expressões para as energias cinética e deformação elástica, assim como as forças generalizadas não-conservativas serão obtidas.

3.2.5 Energias Cinética, Deformação Elástica e Forças Não-Conservativas Generalizadas

A energia cinética da estrutura sob investigação pode ser descrita como

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} m_o \dot{u}_i^o \dot{u}_i^o \quad (3.11)$$

na qual u_i ($i = 1, 2, 3$) descreve o campo de deslocamento e u_i^o ($i = 1, 2, 3$) o deslocamento pontual para $x = L$. Ainda $(\cdot)$ representa derivada temporal, ρ e V são respectivamente a densidade do material e volume da viga e m_o a massa concentrada.

Para simplificar a Equação (3.11), a contribuição da massa distribuída da viga será negligenciada (hipótese básica H5), assim como, a energia de rotação das massas concentrada e distribuída. A partir destas simplificações, a energia cinética é agora descrita por

$$T = \frac{1}{2} m_o [(\dot{u}_1^o)^2 + (\dot{u}_3^o)^2] \quad (3.12)$$

A partir desta equação, a tarefa para a obtenção de T consiste em vários passos. Primeiro é derivar em relação ao tempo o campo de deformação modificado pelas simplificações feitas acima. O resultado final após ser elevado ao quadrado são expressões para $(\dot{u}_1)^2$ e $(\dot{u}_3)^2$. Segundo, os termos dentro dos colchetes do lado direito da expressão $(\dot{u}_1)^2$ e $(\dot{u}_3)^2$ são descritos como funções de $w(x, t)$ e de suas derivadas espaciais. O terceiro passo consiste em realizar uma redução espacial tal que, a deflexão massa concentrada possa ser obtida. Isto pode ser feito utilizando uma expressão da forma,

$$w(x, t) = \phi(x) w_o(t) \quad (3.13)$$

na qual $\phi(x)$ representa o primeiro modo natural linear da estrutura e $w_o(t)$ representa a coordenada modal associada com este modo natural. Como resultado final é encontrado expressões para $(\dot{u}_1^o)^2$ e $(\dot{u}_3^o)^2$. Quando truncadas de maneira a resultar em não-linearidades de até terceira ordem na equação de movimento, estas expressões são descritas como

$$(\dot{u}_1^o)^2 = (A_1)^2 w_o^2 \dot{w}_o^2 - 2A_1 w_o \dot{w}_o \dot{U}_B + \frac{8}{3} A_2 w_o^3 \dot{w}_o \dot{U}_B + (\dot{U}_B)^2 \quad (3.14)$$

$$(\dot{u}_3^o)^2 = \dot{w}_o^2 \quad (3.15)$$

Substituindo as expressões de $(\dot{u}_1^o)^2$ e $(\dot{u}_3^o)^2$ na Equação (3.12), obtém-se a equação para a energia cinética do sistema, assim

$$T = \frac{1}{2} m_o \dot{w}_o^2 + \frac{1}{2} m_o \left[(A_1)^2 w_o^2 \dot{w}_o^2 - 2A_1 w_o \dot{w}_o \dot{U}_B + \frac{8}{3} A_2 w_o^3 \dot{w}_o \dot{U}_B + (\dot{U}_B)^2 \right] \quad (3.16)$$

na qual A_1 e A_2 são constantes geométricas descritas como

$$A_1 = \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.17)$$

e

$$A_2 = \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^4 dx \quad (3.18)$$

e a expressão para a forma espacial do primeiro modo linear $\phi(x)$ é

$$\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (3.19)$$

Uma vez que a energia cinética do sistema é conhecida, o próximo passo em direção a equação de movimento consiste na obtenção da energia potencial. Neste caso, a energia potencial é composta por duas parcelas: uma é devido à energia de deformação elástica Π e a outra devido a energia potencial gravitacional U_{grav} . Matematicamente a energia potencial do sistema é

$$U = \Pi + U_{grav} \quad (3.20)$$

A contribuição da energia potencial gravitacional U_{grav} na energia potencial total do sistema U é pequena e pode ser negligenciada. Assim a energia potencial total decorre a energia de deformação elástica, ou seja, por $U = \Pi$.

Em termos de tensões e deformações, a energia de deformação elástica pode ser escrita de maneira geral, considerando a ausência de fluxo de calor, como

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

Especificamente para a estrutura sob investigação, as tensões e deformações envolvidas são descritas pelas Equações (3.9) e (3.10). Neste caso, a energia de deformação é reduzida para

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.22)$$

Como a relação entre tensão-deformação do material da estrutura pode ser descrito pela lei constitutiva de Hooke e negligenciando os efeitos de Poisson, a energia de deformação elástica é descrita como,

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V E \varepsilon_{xx}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA dx \quad (3.23)$$

No campo de deformação a componente ε_{xx} é composta por contribuições do deslocamento total de contração u_c e também por u_r . Entretanto, a contribuição de u_c é pequena quando comparada a contribuição de u_r . Para simplificar a análise, a contribuição de u_c na energia de deformação será desprezada. Assim,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left[z^2 (w'')^2 - z^2 (w'')^2 (w')^2 \right] dA dx \quad (3.24)$$

na qual $(\prime)$ descreve a derivada parcial em relação a x .

Escrevendo $w(x, t)$ como função de $\phi(x)$ e $w_o(t)$ (Equação 3.13) e truncando o resultado final de maneira a resultar em não-linearidades de até terceira ordem na equação de movimento, a expressão final para a energia potencial do sistema é

$$U = \Pi = \frac{1}{2} EI_y B_1 w_o^2 - \frac{3}{2} EI_y B_2 w_o^4 + \dots \quad (3.25)$$

na qual I_y é o momento de inércia de área em relação ao eixo Y . As constantes geométricas B_1 e B_2 são fornecidas pelas seguintes expressões,

$$B_1 = \int_0^L (\phi'')^2 dx \quad (3.26)$$

$$B_2 = \int_0^L (\phi'')^2 (\phi')^2 dx \quad (3.27)$$

A última etapa antes que a equação de movimento possa ser derivada consiste na definição das forças não-conservativas agindo sobre o sistema. Na estrutura sob investigação existe a presença de três forças não-conservativas diretas¹⁰. A primeira representa o amortecimento estrutural e será modelada em termos da coordenada generalizada w_o como $c_1 \dot{w}_o$. A segunda representa o arrasto aerodinâmico (ou amortecimento turbulento) agindo sobre a estrutura (quando em movimento) decorrente dos efeitos do meio viscoso. O amortecimento turbulento será modelado em termos de w_o como proporcional ao quadrado da velocidade, ou matematicamente como $c_2 \dot{w}_o |\dot{w}_o|$. Ambas as forças dissipativas descritas acima agem na direção negativa do deslocamento transversal virtual δw_o .

A última força não-conservativa é a força de excitação externa $F(t)$, proveniente da fonte acústica. Esta força é caracterizada como harmônica e mono-componente, orientada na direção z e aplicada no centro de gravidade da massa concentrada. Este ponto de aplicação é idealizado, como será observado mais adiante. A excitação externa $F(t)$ age na direção positiva do deslocamento virtual δw_o , enquanto que as forças de atrito são orientadas na direção negativa. Fisicamente, $F(t)$ é proveniente da distribuição de pressão acústica $p(x, t)$ sobre a estrutura. Assim $F(t)$ pode ser escrita em função da pressão acústica $p(x, t)$ como

$$F(t) = \int_{Area} p(x, t) \phi(x) dx \quad (3.28)$$

Então o trabalho virtual não-conservativo δW_{nc} realizado sobre o sistema é descrito como $\delta W_{nc} = [-c_1 \dot{w}_o - c_2 \dot{w}_o |\dot{w}_o| + F(t)] \delta w_o$. Uma vez que o trabalho virtual não-conservativo é definido em função das força não-conservativa generalizadas Q_{nc} como $\delta W_{nc} = Q_{nc} \delta w_o$, então a força não-conservativa generalizada Q_{nc} é obtida como

$$Q_{nc} = \frac{\delta W_{nc}}{\delta w_o} = -c_1 \dot{w}_o - c_2 \dot{w}_o |\dot{w}_o| + F(t) \quad (3.29)$$

¹⁰Embora a excitação imposta via base também realize trabalho não-conservativo, seus efeitos foram anteriormente incorporados na cinemática do movimento.

3.2.6 Equação de Movimento

Na seção anterior foram obtidas as expressões para a energia cinética T , energia potencial U e forças não-conservativas generalizadas Q_{nc} . A partir daqueles resultados, é possível a obtenção da equação de movimento. Isto pode ser realizado por intermédio da bem conhecida equação de Lagrange (MEIROVITCH, 1970). Para a estrutura sob investigação, a equação de Lagrange é escrita como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_o} \right) - \frac{\partial T}{\partial w_o} + \frac{\partial U}{\partial w_o} = Q_{nc} \quad (3.30)$$

Desenvolvendo cada termo da equação de Lagrange e substituindo os resultados na Equação (3.30), a equação de movimento transversal da estrutura é

$$\begin{aligned} \left(1 + \underbrace{A_1^2 w_o^2}_{\bullet} \right) \ddot{w}_o + \left(\frac{c_1}{m_o} + \underbrace{\frac{c_2}{m_o} |\dot{w}_o|}_{\bullet} \right) \dot{w}_o + \left(\underbrace{A_1^2 \dot{w}_o^2}_{\bullet} - \underbrace{A_1 \ddot{U}_B}_{\bullet} + \frac{EI_y B_1}{m_o} \right) w_o + \\ + \left[\underbrace{\frac{4}{3} A_2 \ddot{U}_B}_{\bullet\bullet} - \underbrace{\left(\frac{6EI_y B_2}{m_o} \right)}_{\bullet\bullet} \right] w_o^3 = \frac{F(t)}{m_o} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta equação é classificada como uma equação diferencial ordinária não-linear, não-homogênea e com termos variáveis. Em termos estruturais, esta equação mantém os efeitos não-lineares devido a contratura e a curvatura da viga, resultando em não-linearidades quadráticas e cúbicas. Ainda considera o efeito do atrito como o ar, provocado quando a viga exprime altas velocidades de oscilação.

Em adição, se ambos os termos identificados com $(\bullet)$ e $(\bullet\bullet)$ forem desprezados, esta equação é reduzida ao modelo linear clássico não-conservativo e forçado. Por outro lado, se somente os termos identificados com $(\bullet\bullet)$ forem ignorados, esta equação é reduzida ao mesmo modelo obtido por Gomes da Silva & Varoto (2004b) mais um termo forçado. Gomes da Silva & Varoto (2004b) consideraram apenas as não-linearidades estruturais até segunda ordem. Ainda se os termos identificados com $(\bullet\bullet)$ mais o amortecimento não-linear forem ignorados, esta equação é simplificada à mesma obtida por Cartmell (1990a) mais um termo forçado. Todos os autores citados, desenvolveram modelos semelhantes para a mesma configuração estrutural. Por fim, estes casos confirmam a adequação deste modelo, assim como, demonstra a sua complexidade.

Em relação às excitações é considerado que tanto a excitação externa quanto a

paramétrica são harmônicas e monocomponentes. Assim, a excitação paramétrica pode ser escrita como

$$\ddot{U}_B(t) = -Q\lambda^2 \cos(\lambda t + \varphi) = -Q_o \cos(\lambda t + \varphi) \quad (3.32)$$

e a excitação forçada como,

$$F(t) = F_o \cos(\Omega t) \quad (3.33)$$

nas quais Q_o e F_o são respectivamente as magnitudes da aceleração da base e da força externa. Já λ e Ω são respectivamente a frequência da excitação paramétrica e externa; e φ representa o ângulo de fase entre as excitações.

Com a forma e características das excitações devidamente definidas, a equação de movimento pode ser escrito na sua forma dimensional final como,

$$\begin{aligned} (1 + A_1^2 w_o^2) \ddot{w}_o + \left(\frac{c_1}{m_o} + \frac{c_2}{m_o} |\dot{w}_o| \right) \dot{w}_o + \left(A_1^2 \dot{w}_o^2 + A_1 Q_o \cos(\lambda t + \varphi) + \frac{EI_y B_1}{m_o} \right) w_o + \\ \left[-\frac{4}{3} A_2 Q_o \cos(\lambda t + \varphi) - \frac{6EI_y B_2}{m_o} \right] w_o^3 = \frac{F_o}{m_o} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

A Equação (3.34) representa uma condição relativamente complexa, na qual a estrutura sob investigação sofre os efeitos de excitações combinadas e da força de atrito do meio de operação. Esta equação também é interessante pois a partir dela é possível que casos mais simples sejam derivados. Dentre este encontra-se o caso linear clássico.

3.2.6.1 Modelo Dimensional Linear Clássico

O conhecimento do modelo linear clássico é de vital importância pois a partir dele é possível se estimar a frequência natural não-amortecida, assim como, correlacionar as características modais lineares teóricas e experimentais. Ainda a partir deste modelo condições em que a dinâmica é crítica podem ser identificadas.

O caso linear clássico é descrito sob a hipótese que a magnitude do movimento é infinitesimal, ou seja, é muito pequena. Neste caso todos os termos não-lineares e paramétricos da Equação (3.34) são nulos. Sob estas condições, o modelo fornecido pela Equação (3.34) é reduzido a sua forma mais primitiva, assim

$$\ddot{w}_o + \frac{c_1}{m_o} \dot{w}_o + \frac{EI_y B_1}{m_o} w_o = \frac{F_o}{m_o} e^{i\Omega_e t} \quad (3.35)$$

na qual $\cos(\Omega t) = e^{i\Omega t}$.

Este modelo pode ainda ser descrito em função da razão de amortecimento modal ζ . Por definição (RAO, 1995), o coeficiente do amortecimento linear viscoso c_1 pode ser escrito em função de ζ , da massa concentrada m_o e da frequência natural não-amortecida ω_n como $c_1 = 2\zeta m_o \omega_n$. Substituindo esta relação na Equação, resulta

$$\ddot{w}_o + 2\zeta\omega_n\dot{w}_o + \omega_n^2 w_o = \frac{F_o}{m_o} e^{i\Omega_e t} \quad (3.36)$$

na qual a frequência natural não-amortecida ω_n é fornecida por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI_y B_1}{m_o}} \quad (3.37)$$

3.2.6.2 Adimensionalização do Modelo Não-Linear Completo

Para solução de modelos dinâmicos não-lineares é necessário o emprego de alguma técnica apropriada. Das duas, o método da expansão direta e das múltiplas escalas foram brevemente apresentadas no Capítulo 2. Para a correta aplicação de uma destas técnicas na solução de um problema não-linear, é necessário decidir a ordem de importância (isto é, grande ou pequena) dos diferentes elementos presentes no modelo matemático. A ordem de importância é relativa e assim, os elementos são comparados entre si e entre os elementos básicos (lineares). Para que esta comparação seja possível é necessário que todos os elementos do modelo sejam adimensionais.

Este processo é denominado de adimensionalização, que significa fazer as variáveis do modelo matemático tornarem-se sem dimensão. Este processo também coloca o modelo matemático em uma forma mais simples facilitando o processo algébrico, sem que com isso haja qualquer alteração nas características físicas. Assim o processo de adimensionalização é sempre indicado quando o modelo matemático é não-linear, seja para soluções aproximadas, seja para simulações numéricas. Desta maneira, este item descreve o processo de adimensionalização do modelo matemático completo, descrito pela Equação (3.34).

O processo de adimensionalização da Equação (3.34) é simples. Inicialmente duas novas variáveis adimensionais são definidas:

$$w_o^* = A_1 w_o, \quad t^* = t/T_n \quad (3.38)$$

na qual T_n é o período da vibração livre não-amortecida. Ainda o asterisco denota quantidades adimensionais.

Posteriormente as derivadas de primeira e segunda ordem de w_o em relação ao tempo dimensional t são descritas em função da variável adimensional w_o^* . Assim via regra da cadeia obtém-se

$$\dot{w}_o = \frac{1}{A_1 T_n} \dot{w}_o^* \quad (3.39)$$

$$\ddot{w}_o = \frac{1}{A_1 T_n^2} \ddot{w}_o^* \quad (3.40)$$

Substituindo as Equações (3.39) e 3.40 na Equação (3.34), juntamente com a adimensionalização temporal das excitações, resulta na equação final adimensionalizada, ou

$$(1 + w_o^{*2}) \ddot{w}_o^* + H_1 \dot{w}_o^* + H_2 \dot{w}_o^* |\dot{w}_o^*| + [(2\pi)^2 + \dot{w}_o^{*2} + H_3 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^* - [H_5 + H_4 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^{*3} = H_6 \cos(\Psi t^*) \quad (3.41)$$

na qual

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{c_1 T_n}{m_o}; & H_2 &= \frac{c_2}{m_o A_1}; & H_3 &= Q_o A_1 T_n^2 \\ H_4 &= \frac{4 A_2 Q_o T_n^2}{3 A_1^2}; & H_5 &= \frac{6 B_2 E I_y T_n^2}{m_o A_1^2}; & H_6 &= \frac{F_o A_1 T_n^2}{m_o} \\ \Theta &= \lambda T_n; & \Psi &= \Omega T_n \end{aligned}$$

Pode-se observar que o modelo não-linear completo na sua forma adimensional (Equação 3.41) apresenta uma estrutura mais simples, quando comparado a forma com dimensão (Equação 3.34). Esta característica do processo de adimensionalização é positiva pois facilita o desenvolvimento algébrico, sempre trabalhoso, durante a fase de solução.

3.3 Modelagem Linear do Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade

A complexidade topológica de uma estrutura flexível representa um fator decisivo dentro da modelagem dinâmica. Quando a estrutura em questão é topologicamente simples — como é o caso da estrutura estudada no item anterior — é plenamente possível a derivação de modelos não-lineares. Por outro lado, com o aumento da complexidade topológica torna-se muito difícil, senão impossível, que modelos não-lineares sejam obtidos. Ainda que, seja possível, tais modelos possuirão um número expressivo de graus de liberdade. E como é notoriamente conhecido, atualmente ainda não é possível realizar investigações analíticas de modelos não-lineares com extensa quantidade de graus de liberdade.

Baseado no parágrafo anterior, este item irá apresentar apenas a obtenção de um modelo linear para o sistema com múltiplos graus de liberdade. Para isso, o método dos elementos finitos representa uma poderosa ferramenta e será empregado na obtenção do modelo espacial linear da estrutura apresentada na Figura (4). Neste ponto é importante ressaltar que o modelo linear não só servirá para a identificação modal deste sistema estrutural, como também será empregado na identificação de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas. Portanto este modelo é de fundamental importância para os propósitos da presente pesquisa.

Matematicamente, busca-se a obtenção de um modelo matemático da seguinte forma,

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (3.42)$$

na qual $[M]$ representa a matriz global de massa, $[K]$ a matriz global de rigidez e $\{q\}$ as coordenadas generalizadas globais segundo plano cartesiano XYZ .

Para que o modelo matemático geral descrito pela Equação (3.42) represente a estrutura sob investigação, é necessário que $[M]$, $[K]$ e $\{q\}$ sejam determinados especificamente para esta estrutura. Para isso, torna-se necessário a execução de quatro macro etapas: (i) criação de um modelo geométrico da estrutura segundo sistema de coordenadas XYZ , no qual cada elemento estrutural ou subestrutura possua elementos geométricos (linhas, áreas ou volumes) bem definidos; (ii) atribuir à cada elemento geométrico do modelo um tipo de elemento finito compatível com as características geométricas; (iii) discretizar os elementos geométricos em sub-regiões compatíveis com as atribuições relativas aos elementos e (iv) impor as condições de contorno presentes

na estrutura real.

Nos itens a seguir, cada uma destas quatro etapas será apresentada com mais detalhes. Por fim, todas estas fases do desenvolvimento foram realizadas no software comercial AnsysTMV6.0.

3.3.1 Modelo Geométrico

Um modelo geométrico representativo da estrutura foi criado utilizando os recursos de Cad próprios do software comercial. Para isso foram criados *keypoints* para cada uma das intersecções da estrutura real e posteriormente estes *keypoints* foram interligados por linhas. Para cada conjunto de linhas que delimitassem uma região fechada, foram atribuídas áreas e para cada conjunto de áreas foram delimitados volumes, formando assim um modelo geométrico tridimensional. O resultado final é apresentado na Figura (6).

Figura 6: Modelo geométrico tridimensional da estrutura sob investigação.

3.3.2 Atribuições

Nesta etapa são escolhidos os elementos que serão utilizados na discretização, assim como, quais partes da estrutura serão atribuídas e representadas por estes elementos.

Dentre os tipos de elementos disponíveis, foram escolhidos dois elementos os quais serão aplicados neste estudo. O primeiro é denominado de Solid45. Este é um elemento tridimensional definido por oito nós. Possui três graus de liberdade por nó: translação nas direções nodais x , y e z . Sua geometria, localização dos nós e sistema de coordenadas é apresentado na Figura (7).

O segundo é denominado Beam4. Este é um elemento uniaxial com capacidades de tensão, compressão, torção e flexão. Possui seis graus de liberdade em cada nó:

Figura 7: Características do elemento Solid45.

translação nas direções nodais x, y e z ; rotações em torno dos eixos nodais x, y e z . O Beam4 é definido por dois nós, área da seção transversal, dois momentos de inércia de área I_{zz} e I_{yy} , momento torçor I_{xx} , duas espessuras T_{ky} e T_{kz} , ângulo de orientação θ em torno do eixo elementar x e as propriedades do material. Sua geometria, localização dos nós e sistema de coordenadas é apresentado na Figura (8).

Figura 8: Características do elemento Beam4.

Toda a estrutura será modelada utilizando estes dois elementos. O Solid45 é empregado nas longarinas, nervuras, turbina e base de fixação. Já o Beam4 é empregado apenas no pilone. Em relação ao materiais empregados — conforme descrito anteriormente — a estrutura utiliza apenas dois tipos: aço ASTM A36 e alumínio 2024

T3. As propriedades de interesse destes materiais são apresentadas na Tabela (2). Por fim, o elemento Beam4 foi definido utilizando área seção transversal $A = 4.9087 \text{ mm}^2$, $I_{yy} = I_{zz} = 1.9174 \text{ mm}^4$, $I_{xx} = 3.8349 \text{ mm}^4$, $T_{ky} = 2.5 \text{ mm}$, $T_{kz} = 2.5 \text{ mm}$.

Tabela 2: Propriedade dos Materiais Empregados

Propriedade dos Materiais			
Material	E [kg/(mm · s ²)] ^a	ρ [kg/(mm ³)]	ν [–]
Aço ASTM A36	200.00×10^6	82.51×10^{-7}	0.26
Al 2024 T3	72.04×10^6	27.80×10^{-7}	0.33

^aUnidade de acordo com a unidade de comprimento empregada no modelo

Uma vez que o modelo geométrico encontra-se definido e os elementos devidamente atribuídos, a próxima etapa descreve o processo de discretização deste modelo, também conhecido como geração da malha.

3.3.3 Discretização

A geração da malha consiste em dos processos mais importantes durante o desenvolvimento de um modelo pelo emprego dos método dos elementos finitos. Inicialmente a malha deve respeitar as características dos elementos empregados, por exemplo, no caso do Solid45 cada sub-região gerada deve ter quatro lados. Outro ponto fundamental consiste no nível de refinamento da malha. Se a malha gerada for muito refinada, o processo de solução pode ser excessivamente demorado. Por outro lado, se a malha for grossa pode comprometer a precisão dos resultados. Assim deve haver equilíbrio no que diz respeito a densidade da malha.

Para garantir que a malha respeitasse as características dos elementos associados, optou-se pela geração mapeada. Neste procedimento de geração tem-se total controle sobre a malha e conseqüentemente melhorando a qualidade final do modelo. Vale a pena destacar que a geração da malha mapeada despende muito mais tempo que o procedimento de geração livre, entretanto a mapeada é sempre preferida. A Figura (9) apresenta o resultado final.

Por fim, a Figura (10) apresenta ampliações da turbina/pilone e da nervura. Nestas duas ampliações pode-se observar com maior riqueza de detalhes a qualidade da malha gerada no modelo.

Figura 9: Malha mapeada utilizada no modelo geométrico tridimensional da estrutura sob investigação.

Figura 10: Ampliação da turbina e da nervura. Pode-se observar os detalhes da malha mapeada gerada.

3.3.4 Imposições das Condições de Contorno

Freqüentemente a estrutura real a ser estudada possui condições de contorno. Exemplos incluem as condições de fixação de subestruturas nas estruturas principais ou restrições externas impostas ao movimento da estrutura. Entretanto, representar fielmente as características destas condições de contorno em um modelo em elementos finitos representa uma tarefa absolutamente complexa. Mesmo com experiência e conhecimento das principais características das condições de contorno reais, definir como e onde devem ser impostas restrições no modelo computacional representa um dos maiores desafios da modelagem via elementos finitos.

Uma observação mais cuidadosa da estrutura real apresentada na Figura (4) revela duas regiões onde ocorrem restrição do movimento. A primeira região é a junção da asa com a base auxiliar. Já a segunda é são as uniões entre turbina/pilone e pilone/asa. Uma possível representação computacional para estas condições de contorno é a apresentada na Figura (11).

Figura 11: Restrições impostas ao modelo. Na base restringiu-se todos os graus de liberdade da porção inferior, assim como, na união pilone/turbina.

Nesta figura foram restringidos todos os graus de liberdade da porção inferior da base, assim como, da porção de acoplamento entre a entre turbina/pilone e pilone/asa. Esta solução foi baseada em observações e no próprio “sentimento” do autor sobre o problema. Os bons resultados obtido e apresentado ao longo deste capítulo confirmam a representabilidade deste modelo.

3.3.5 Modelo Dinâmico Final

Com a execução das quatro macro etapas descritas anteriormente, foram obtidas especificamente para a estrutura sob investigação as matrizes globais de massa $[M]$ e rigidez $[K]$, assim como do vetor posição $\{q\}$ segundo sistema cartesiano XYZ .

Em linhas gerais, a determinação específica das características de inércia, rigidez e de movimento da estrutura é inicialmente obtida fazendo que, em cada nó as condições de equilíbrio dinâmico e compatibilidade entre os elementos Solid45 e Beam4 sejam respeitadas. Posteriormente, são assumidas funções de forma dentro de cada elemento, tal que, deslocamento, velocidade e aceleração em qualquer ponto seja dependente sobre dos valores nodais. A seguir, as relações deformação-deslocamento e tensão-deformação dentro de um elemento típico são satisfeitas. Depois, as massas, rigidez e carregamentos nodais elementares são determinados e formam as respectivas matrizes elementares. Por fim, as matrizes elementares são submetidas a um processo de montagem, resultando nas matrizes globais de massa e rigidez. Evidentemente este processo é muito mais complexo e envolve muitas outras etapas intermediárias. Maiores detalhes sobre este procedimento podem ser encontrados em Bathe (1982).

Em resumo, o modelo dinâmico linear não amortecido possui aproximadamente 6000 graus de liberdade. Deste total, em torno de 300 graus de liberdade estão atribuídos ao elemento Beam4 e os 5700 restantes ao Solid45. Uma vez que um modelo dinâmico espacial é conhecido, as características dinâmicas fundamentais podem ser

extraídas.

3.4 Sumário do Capítulo

Provavelmente neste ponto tenha ficado mais claro as primeiras palavras escritas no início deste capítulo: “a modelagem dinâmica de sistemas estruturais é uma arte”. Foram várias as hipóteses, sempre bem fundamentadas, juntamente com tantas considerações e interpretações. Estas ações demonstram que a modelagem é realmente uma arte.

Neste capítulo inicialmente foram abordados importantes assuntos relativos às características das estrutura sob investigação. Foi descrito que as estruturas foram concebidas de tal maneira que a teoria de viga mais simples pudesse ser empregada.

Especificamente em relação ao sistema estrutural com um grau de liberdade foram discutidos as maneiras possíveis e as solução adotadas com relação às fontes de excitação. Como resultado final foi apresentado uma estrutura tipo viga esbelta e flexível, excitada pela base via excitador eletrodinâmico e transversalmente via excitação acústica. Ainda foi definido o meio e as condições de operação desta estrutura, cuja decisão foi baseada em aplicações normalmente encontradas.

Ainda em relação à este sistema estrutural, foi derivado um modelo físico o qual incorpora as ações das excitações via base (paramétrica) e acústica (externa), assim como devido a viscosidade do meio de operação. Este modelo não considera condições com carga térmica. Também as hipóteses simplificadoras básicas foram descritas com detalhes.

A partir do modelo físico, as características da cinemática são desenvolvidas de maneira que seu significado físico ficasse preservado. Deste ponto, foi definido um campo de deslocamento, o qual possibilitou a derivação do campo de deformação e tensão correspondente. Neste processo, foram apresentadas e adotadas outras hipóteses simplificadoras. O conhecimento dos campos de deslocamento, deformação e tensão possibilitou que expressões para energia cinética e de deformação fossem obtidas. Ainda as forças generalizadas não-conservativas foram explicitamente apresentadas.

Com o conhecimento das expressões energéticas e das forças generalizadas, a equação de movimento não-linear foi obtida. Os efeitos estruturais não-lineares devido a contração e a curvatura da viga foram preservados, assim como, o efeito do amortecimento turbulento. Esta equação foi truncada de maneira a apresentar não-linearidades até terceira ordem. Esta equação ainda possui coeficientes variáveis, o que indica a pre-

sença da excitação paramétrica. Também é não-homogênea, indicando a presença da excitação externa. Por fim, um modelo linear clássico derivado a partir do não-linear. Também apresenta uma versão adimensional do modelo não-linear completo. Ambos serão empregados em investigações futuras.

Já em relação ao sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade, inicialmente o sistema foi detalhadamente apresentado. Destacou-se que uma das principais características deste sistema é a simplicidade de variação das suas frequências naturais. Isso ocorre pois todas as massas concentradas podem ser movidas ao longo de suas respectivas estruturas e posteriormente fixadas em uma nova posição de interesse, reintegrando assim a estrutura. A modificação ou ajuste de algumas frequências naturais de interesse é fundamental na geração de condições para o surgimento de ressonâncias autoparamétricas.

Posteriormente foi derivado um modelo linear utilizando o método dos elementos finitos. Este modelo foi obtido a partir da execução de quatro macro etapas. Primeiro, houve a criação de um modelo geométrico da estrutura segundo sistema de coordenadas XYZ , no qual cada elemento estrutural ou subestrutura possua elementos geométricos (linhas, áreas ou volumes) bem definidos. Segundo, foi atribuído à cada elemento geométrico do modelo um tipo de elemento finito compatível com as características geométricas. Na terceira etapa, os elementos geométricos foram discretizados em sub-regiões compatíveis com as atribuições relativas aos elementos e por último, as condições de contorno presentes na estrutura real foram impostas.

CAPÍTULO

QUATRO

Identificação Modal dos Sistemas Estruturais Sob Investigação

“Solo dopo aver conosciuto la superficie delle cose...ci si può spingere a cercare quel che c'è sotto. Ma la superficie delle cose è inesauribile.”

— I. Calvino (1923-1985)

No contexto da presente pesquisa o estudo do comportamento dinâmico com amplitude infinitesimal implica na ausência dos efeitos não-lineares. O comportamento dinâmico linear desempenha um papel fundamental sob vários aspectos. Primeiro todas as investigações desta pesquisa estão direcionadas a sistemas fracamente não-lineares, ou seja, sistemas que possuem seu comportamento dinâmico dominado pelos termos lineares. Segundo, possíveis condições nas quais a dinâmica é crítica podem ser identificadas a partir das características modais da estrutura, mais especificamente, a partir das frequências naturais lineares.

Assim, este capítulo é dedicado à identificação modal dos sistemas estruturais apresentados no capítulo anterior. Ambos os sistemas serão inicialmente identificados teoricamente e posteriormente experimentalmente. Por fim, os modelos modais teórico e experimental são confrontados e as características dinâmicas fundamentais das estru-

turas conhecidas.

4.1 Sistema Estrutural com Um Grau de Liberdade

4.1.1 Análise Modal Teórica

Como é amplamente conhecido (EWINS, 2000), funções de resposta em frequência (FRF) representam características intrínsecas de uma estrutura e, portanto, independe das características da excitação forçada. Assim, um sistema linear invariante no tempo pode ser excitado de diversas maneiras para a determinação de suas FRF's. As formas de excitação mais comuns incluem: seno, aleatório, impulso e a súbita relaxação de carregamento estático.

Em especial, o sistema estrutural com um grau de liberdade — apresentada no capítulo anterior — é relativamente pequeno e muito flexível. Neste caso a súbita relaxação de carregamento estático surge como a maneira mais adequada para excitar externamente este sistema e extrair sua FRF. Na literatura, a súbita relaxação de carregamento estático também é conhecida como *step-relaxation method* ou SRM.

A Figura (12) ilustra a aplicação do SRM neste sistema estrutural. Inicialmente para $t = T_1$ um carregamento $F(t)$ é lentamente aplicado a estrutura até que um determinado nível de força estática F_0 seja atingido, o que ocorre em $t = T_2$. Neste ponto inicia-se uma segunda etapa. A partir de $t = 0$ o nível F_0 é mantido até $t = T_3$ quando é subitamente retirado da estrutura, fazendo com que a estrutura oscile livremente.

Matematicamente o procedimento descrito leva a um modelo não-homogêneo sujeito a condições iniciais não-nulas. Isto decorre pois existe a aplicação de uma força $F(t)$ que por sua vez provoca um deslocamento inicial na estrutura. Portanto a partir do modelo desenvolvido no capítulo anterior, o modelo matemático que descreve esta condição é

$$\ddot{w}_o + 2\zeta\omega_n\dot{w}_o + \omega_n^2 w_o = \frac{F(t)}{m_o} \quad (4.1)$$

na qual ω_n representa a frequência natural não-amortecida e $F(t)$ é a força externa. Ainda esta equação está sujeita as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} w_o(0) = w_h \\ \dot{w}_o(0) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Figura 12: Ilustração da aplicação do *step-relaxation method*: (a) descrição força; (b) resposta vibratória da estrutura.

Devido a aplicação da força, a estrutura sofre uma deformação elástica representada pelo deslocamento inicial w_h . Assim, a magnitude da força estática F_0 está relacionada com a condição inicial de deslocamento w_h como:

$$F_0 = EI_y B_1 w_h \quad (4.3)$$

Em adição, a partir da Figura (12a) a força $F(t)$ pode ser matematicamente descrita a partir da Equação (4.3) juntamente com a função degrau unitária¹ $U(t)$ como,

$$F(t) = F_0 [1 - U(t)], \quad t > 0 \quad (4.4)$$

na qual $U(t)$ é definida Haykin & Veen (1999) como:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < T_3 \\ 1, & t \geq T_3 \end{cases} \quad (4.5)$$

Após todas estas definições, a obtenção da função de resposta em frequência da estrutura pode prosseguir. A transformada de Laplace é provavelmente o método de

¹Também conhecida como função de Heaviside. Em alguns livros, é atribuído a esta função o valor de $1/2$ quando $t = 0$, mas no presente caso isso não faz diferença.

resolução mais indicado para o problema. Assim aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (4.1) obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{w}_o\} + \mathcal{L}\{2\zeta\omega_n\dot{w}_o\} + \mathcal{L}\{\omega_n^2 w_o\} = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{m_o}\right\} \quad (4.6)$$

Desenvolvendo a transformada de Laplace em cada termo da expressão anterior e substituindo a condição inicial de velocidade $\dot{w}_o(0) = 0$ resulta em

$$[s^2 W_o(s) - s w_h] + 2\zeta\omega_n [s W_o(s) - w_h] + \omega_n^2 W_o(s) = \frac{1}{m_o} F(s) \quad (4.7)$$

na qual,

$$F(s) = \frac{F_0 (1 - e^{-T_3 s})}{s} \quad (4.8)$$

Resolvendo a Equação (4.7) para $W_o(s)$ resulta em

$$W_o(s) = \frac{F(s)}{m_o (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{(s + 2\zeta\omega_n) w_h}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.9)$$

Dividindo ambos os lados da expressão acima por $F(s)$ obtém-se

$$\frac{W_o(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_o (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{(s + 2\zeta\omega_n) w_h}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) F(s)} \quad (4.10)$$

A Equação (4.10) pode ser decomposta em duas parcelas bem definidas,

$$\hat{H}(s) = H(s) + \Delta H(s) \quad (4.11)$$

na qual $\hat{H}(s) = W_o(s)/F(s)$ descreve a função de transferência obtida via SRM.

A primeira parcela $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{1}{m_o (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.12)$$

e a segunda parcela $\Delta H(s)$ é

$$\Delta H(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n) w_h}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) F(s)} \quad (4.13)$$

Por definição Haykin & Veen (1999), a função transferência de um sistema linear

e invariante no tempo (LTI) é a transformada de Laplace da resposta ao impulso. Fisicamente a função transferência fornece uma descrição das características de entrada e saída do sistema no plano complexo $s = \sigma + j\omega$.

Desta maneira é observado que a Equação (4.12) descreve a verdadeira função transferência para o sistema sob investigação, enquanto a Equação (4.13) descreve o erro entre a verdadeira função de transferência $H(s)$ e $\hat{H}(s)$ obtida pelo SRM. Este erro $\Delta H(s)$ é gerado devido a presença da condição inicial w_h .

A verdadeira função de resposta em frequência de receptância é obtida considerando a projeção no eixo complexo da verdadeira função de transferência $H(s)$. Esta projeção é realizada simplesmente substituindo $s = j\omega$ na Equação (4.12), assim

$$H(j\omega) = \frac{1}{m_o(\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega)} \quad (4.14)$$

analogamente o erro $\Delta H(j\omega)$ é

$$\Delta H(j\omega) = \frac{(j\omega + 2\zeta\omega_n) w_h}{(\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega) F(j\omega)} \quad (4.15)$$

4.1.1.1 Discussões I: Cenário Teórico

Na seção anterior foi demonstrado que devido a condições iniciais não-nulas a verdadeira função de resposta em frequência não pode ser obtida sem a inclusão de erros. Estes erros são de caráter teórico, tal como demonstrado anteriormente. Nesta seção, os efeitos deste erro no resultado final da FRF serão discutidos de forma mais aprofundada.

Uma FRF pode ser apresentada de várias maneiras. No diagrama de Nyquist a parte real da FRF é apresentada no eixo da abscissa, enquanto a parte imaginária é representa no eixo da ordenada. Outra forma bastante comum é o diagrama de Bode. Nesta forma de apresentação, o módulo e/ou do ângulo de fase da FRF são apresentados em função da frequência. Usando a teoria clássica dos números complexos, o módulo da Equação (4.11) que descreve uma estimativa da FRF da estrutura via SRM é obtido como,

$$\left| \hat{H}(j\omega) \right| = |H(j\omega)| + |\Delta H(j\omega)| \quad (4.16)$$

na qual o módulo da FRF verdadeira é

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{m_o [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2]^{1/2}} \quad (4.17)$$

e o módulo do erro $\Delta H(j\omega)$ é descrito como,

$$|\Delta H(j\omega)| = \frac{\{\omega^2 [(2\zeta\omega_n w_h)^2 + (\omega w_h)^2]\}^{1/2}}{\{-2F_0^2 [\cos(\omega T_3) - 1] [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2]\}^{1/2}} \quad (4.18)$$

A Equação (4.18) demonstra que quando $\cos(\omega T_3) = 1$ o erro encontrado na Equação (4.16) torna-se infinito. Estes valores ocorrem em $p = 2\pi n/\omega T_3$ para $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. No domínio da frequência estes valores correspondem à frequências nulas na transformada de Fourier da força $F(t)$.

Embora represente o valor em módulo, dependendo do valor de $\cos(\omega T_3)$ o resultado da Equação (4.18) pode ainda ser um valor complexo. Este problema pode ser contornado utilizando a seguinte igualdade trigonométrica :

$$\sin(\omega T_3/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\omega T_3/2)}{2}} \quad (4.19)$$

Substituindo a igualdade trigonométrica após manipulação algébrica adequada, é obtido a seguinte expressão para a magnitude do erro,

$$|\Delta H| = \frac{\{\omega^2 [(2\zeta\omega_n w_h)^2 + (\omega w_h)^2]\}^{1/2}}{\{[2F_0 \sin(\omega T_3/2)]^2 [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2]\}^{1/2}} \quad (4.20)$$

A Figura (13) apresenta um resultado comparativo entre a FRF obtida via SRM e a verdadeira FRF. Imediatamente pode-se notar que o termo $\Delta H(j\omega)$ afeta fortemente o valor da magnitude da FRF. No resultado obtido segundo SRM nota-se que a formação de lóbulos, cuja frequência de repetição é exatamente descrito como $1/T_3$. Como T_3 corresponde ao período que o carregamento estático foi mantido até a subida relaxação, quando maior for este período mais próximos os lóbulos estarão. Como anteriormente mencionado estes lóbulos correspondem à frequências nulas na transformada de Fourier da força $F(t)$.

Na Figura (14) é apresentado o erro percentual relativo entre o valor verdadeiro da magnitude da FRF e o valor estimado pelo SRM. Observa-se que antes da ressonância encontra-se a região com os menores erros, embora ainda sejam elevados. Este fato é creditado ao domínio da força elástica nesta região da FRF de receptância.

Figura 13: Comparação entre a FRF obtida via SRM original e a verdadeira FRF. Resultado obtido para $\omega_n = 18.2$ Hz, $\zeta = 0.0013$, $m_o = 0.1183$ Kg, $T_3 = 0.3$ s, $w_h = 0.005$ m e $F_0 = 5$ N.

Figura 14: Erro percentual entre a FRF obtida via SRM original e a verdadeira FRF. Resultado obtido para $\omega_n = 18.2$ Hz, $\zeta = 0.0013$, $m_o = 0.1183$ Kg, $T_3 = 0.3$ s, $w_h = 0.005$ m e $F_0 = 5$ N.

Do ponto de vista puramente teórico, a aplicação do step-relaxation method (SRM) é inviável porque não permite a correta extração das funções de resposta em frequên-

cia da estrutura. O fator determinante nesta limitação teórica do método reside na presença da condição inicial w_h naturalmente imposta pela aplicação do carregamento estático. Entretanto no cenário experimental esta limitação do método pode ser contornado. O item a seguir aborda, ainda teoricamente, como o SRM pode ser utilizado com sucesso na identificação modal da estrutura.

4.1.1.2 Discussões II: Cenário Experimental

No campo experimental, as funções de resposta em frequência são estimadas a partir de sinais dinâmicos de aceleração (velocidade ou deslocamento) e força. Estes sinais, embora representem estas grandezas físicas, são adquiridos como sinais de voltagem. Portanto experimentalmente não são obtidos $w_o(t)$ e $F(t)$, mas $e_w(t)$ e $e_f(t)$. Mais especificamente os sinais em voltagem analógicos $e_w(t)$ e $e_f(t)$ são discretizados e então tornam-se $e_w[n]$ e $e_f[n]$. A partir destes sinais discretos e digitais, a função de resposta em frequência do sistema pode ser estimada como,

$$H_m(j\omega) = \frac{E_w(j\omega)}{E_f(j\omega)} \quad (4.21)$$

na qual $E_w(j\omega) = \mathcal{F}\{e_w[n]\}$ e $E_f(j\omega) = \mathcal{F}\{e_f[n]\}$. O operador $\mathcal{F}\{\}$ representa a transformada de Fourier.

Evidentemente a função de resposta em frequência $H_m(j\omega)$ é uma aproximação da verdadeira função de resposta em frequência $H(j\omega)$. Desta maneira $H_m(j\omega)$ e $H(j\omega)$ podem ser relacionadas da seguinte maneira,

$$H_m(j\omega) = H_i(j\omega) H(j\omega) \quad (4.22)$$

na qual $H_i(j\omega)$ representa a função de resposta em frequência equivalente de toda a cadeia de medição empregada na aquisição dos sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$.

A função de resposta em frequência equivalente $H_i(j\omega)$ é basicamente composta por oito outras funções de resposta em frequência, ou

$$H_i(j\omega) = \left(\frac{H_t^o(j\omega)}{H_t^i(j\omega)} \right) \left(\frac{H_g^o(j\omega)}{H_g^i(j\omega)} \right) \left(\frac{H_{dc}^o(j\omega)}{H_{dc}^i(j\omega)} \right) \left(\frac{H_{aa}^o(j\omega)}{H_{aa}^i(j\omega)} \right) \quad (4.23)$$

O primeiro termo nesta expressão representa a razão entre a FRF do transdutor de resposta $H_t^o(j\omega)$ pela FRF do transdutor de excitação $H_t^i(j\omega)$. Ambas FRF's são descritas em função das características elétricas e mecânicas de cada transdutor.

Maiores detalhes sobre os termos intrínsecos a estas FRF's podem ser encontradas em Dally, Riley & McConnell (1993). O segundo termo descreve a razão entre a FRF do amplificador do sinal de resposta $H_g^o(j\omega)$ pela FRF do amplificador do sinal de excitação $H_g^i(j\omega)$. O terceiro termo é o mais importante para a discussão desta seção. Este termo descreve a razão entre as FRF's de dois filtros passa alta, cada um aplicado independentemente a cada um dos sinais. Estes filtros são os responsáveis por gerar os sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$ acoplados com DC ou acoplados AC. O último termo representa a razão entre as FRF's dos filtros anti-aliasing aplicados aos sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$. A Figura (15) representa em diagrama de blocos a descrição esquemática da Equação (4.23).

Figura 15: Descrição esquemática do processo de aquisição de sinais utilizado no step-relaxation method

Para que a FRF estimada experimentalmente $H_m(j\omega)$ seja a verdadeira FRF $H(j\omega)$ é necessário que, na Equação (4.22), $H_i(j\omega) = 1$. Esta condição ideal é muito difícil de ser encontrada na prática, devido principalmente ao primeiro termo. Entretanto se for utilizado um amplificador do mesmo modelo ou um amplificador com vários canais, é razoável assumir que o segundo termo torna-se unitário. Também se o mesmo projeto filtro analógico anti-aliasing for empregado em ambos os canais, é razoável assumir que o último termo é unitário. Assim a Equação (4.23) pode ser simplificada à,

$$H_i^s(j\omega) = \left(\frac{H_t^o(j\omega)}{H_t^i(j\omega)} \right) \left(\frac{H_{dc}^o(j\omega)}{H_{dc}^i(j\omega)} \right) \quad (4.24)$$

na qual o índice s foi adicionado para indicar que trata-se de uma versão simplificada.

A Equação acima ainda pode ser mais simplificada em duas circunstâncias. Primeira ocorre quando os sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$ são adquiridos acoplados com valor DC. Esta situação equivale a não utilização do filtro passa-alta. A segunda circunstância ocorre quando o mesmo projeto de filtro é utilizado sobre os sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$ para torná-los

acoplados com AC. Em ambos os casos o segundo termo da Equação (4.24) torna-se unitário, simplificando ao máximo a expressão.

Após esta breve discussão sobre um dos aspectos da estimação experimental de uma FRF, os aspectos experimentais da estimativa de funções de resposta em frequência via step-relaxation method pode ser retomado.

Lauffer, Carne & Nord (1985) propuseram uma solução prática para tornar o step-relaxation eficaz na estimação da FRF. A solução encontrada consiste em transformar ambos os sinais $e_w(t)$ e $e_f(t)$ acoplados com AC. Desta maneira o nível DC presente no sinal de força é transformado em um pulso exponencial e o nível DC que representa a condição inicial presente no sinal de deslocamento é retirado do sinal. Como discutido anteriormente e apresentado em McConnell & Sherman (1993) se o mesmo projeto de filtro for utilizado em ambos os canais, seu efeito é cancelado no cálculo da FRF e desta maneira não altera o resultado final.

Matematicamente os filtros analógicos empregados para fazer os sinais acoplados AC podem ser descritos como um filtro Butterworth Haykin & Veen (1999) passa-alta de primeira ordem ou

$$H_{dc}(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_c + j\omega} \quad (4.25)$$

na qual ω_c é a frequência de corte.

Como etapa conclusiva da discussão dos aspectos teóricos da análise transiente envolvendo o ambiente experimental, sinais de excitação e resposta vibratória da viga foram simulados. Estes sinais foram gerados a partir da expressão da força transiente representada pela Equação (4.4) e da parcela que representa a vibração livre amortecida. Para a força transiente foi utilizado $F_o = 4.97$ N e $T_3 = 1.92$ s. Já para simular a resposta livre, utilizou-se $c_1 = 0.0221$ Kg/s, $m_o = 0.0636$ Kg, $w_h = 0.005$ m e $\omega_d = 114.35$ rd/s. Todos estes parâmetros referem-se a dados reais da estrutura, como será apresentado futuramente.

A Figura (16) apresenta os sinais obtidos. Na Figura (16a) é apresentado o sinal de força original (acoplado com DC), seguido pelo seu espectro em amplitude (Figura (16b)). No espectro em amplitude pode-se notar o forte efeito provocado pela aperiodicidade do sinal temporal, cujo resultado no surgimento do efeito de leakage. O leakage também está presente no sinal da resposta vibratória, novamente provocado pela aperiodicidade deste sinal. A partir dos espectros de força e deslocamento viga claro que não se pode estimar adequadamente a FRF de receptância da estrutura.

Figura 16: Sinais simulados de excitação e resposta acoplados com DC: (a) sinal de excitação; (b) espectro em amplitude sinal de excitação; (c) sinal de resposta e; (d) espectro em amplitude sinal de resposta.

Já a Figura (17) apresenta a versão acoplada com AC dos mesmos sinais apresentados anteriormente na Figura (16). Na Figura (17a) observa-se que devido a aplicação do filtro passa-alta o pulso retangular foi transformado em um pulso exponencial. Nota-se ainda que o pulso exponencial é periódico e assim o problema de leakage presente no sinal de força acoplado com DC é eliminado. A Figura (17b) descreve este resultado. O mesmo efeito ocorre quando o filtro passa alta é aplicado sobre o sinal de resposta, transformado este em um sinal periódico. As Figuras (17c) e (17d) apresentam estes resultados.

Os sinais de força e deslocamento acoplados com AC foram obtidos aplicando sobre os sinais originais acoplados com DC um filtro² passa-alta butterworth de primeira ordem e com frequência de corte $f_c = 3$ Hz. Como anteriormente sugerido o mesmo filtro foi aplicado tanto sobre o sinal de força quanto de deslocamento. A Figura (18) apresenta graficamente as características deste filtro.

²Este filtro foi projetado com auxílio do software Matlab. Dentro deste ambiente a função de resposta em frequência deste filtro é $H(j\omega) = j\omega / (0.030 + j\omega)$. Nota-se que nesta expressão a frequência de corte é numericamente diferente da descrita pela Equação (4.25). Esta diferença decorre pois o Matlab requer que a frequência de corte seja normalizada pela frequência de Nyquist, que neste caso foi de 100 Hz.

Figura 17: Sinais simulados de excitação e resposta acoplados com AC: (a) sinal de excitação; (b) espectro em amplitude sinal de excitação; (c) sinal de resposta e; (d) espectro em amplitude sinal de resposta.

Figura 18: Magnitude e fase do filtro passa-alta tipo Butterworth de primeira ordem utilizado para transformar os sinais simulados de acoplados DC para acoplados AC.

A partir dos sinais acoplados com AC e descritos na Figura (17), a função de resposta em frequência de receptância foi estimada a partir do estimador H_1 (MAIA; SILVA, 1997). O resultado desta FRF estimada via SRM/AC foi então comparada com a verdadeira FRF descrita pela Equação (4.14). O resultado desta comparação é apresentado na Figura (19). Ainda nesta figura observa-se que a FRF estimada via SRM/AC se aproxima com boa precisão da verdadeira FRF.

Figura 19: Comparação entre a verdadeira FRF de receptância e a estimada via SRM utilizando sinais de excitação e resposta acoplados com AC.

Por fim, a Figura (20) apresenta uma análise comparativa entre a FRF estimada via SRM/AC e a verdadeira FRF. Exceto exatamente na condição de ressonância, nota-se que o erro relativo entre as FRF's foi de menos de 4% na faixa de 0 – 30 Hz onde estão as informações mais importantes sobre as características modais da estrutura.

Figura 20: Erro relativo entre a verdadeira FRF de receptância e a estimada via SRM utilizando sinais de excitação e resposta acoplados com AC.

4.1.2 Análise Modal Experimental

Esta seção descreve o processo de identificação modal realizado sobre o item de teste descrito no Capítulo 3. O principal objetivo é a determinação das propriedades dinâmicas lineares, em especial a primeira frequência natural em flexão e o fator de amortecimento modal associado.

4.1.2.1 Definição do Ensaio

Para a obtenção da primeira frequência natural em flexão e o fator de amortecimento modal, foi escolhido o procedimento padrão de ensaio modal. Neste, por intermédio de algum mecanismo de excitação, o item de teste é excitado em uma ampla faixa de frequências e a resposta medida por um acelerômetro. A força aplicada ao item de teste também é medida, mas com um transdutor de força. Os sinais de excitação e resposta são então processados utilizando técnicas padrão de processamento de sinais, culminando na obtenção da função de resposta em frequência (FRF). A partir desta FRF e pelo emprego de algum procedimento de identificação, pode-se então extrair os parâmetros modais desejados.

Durante a definição das características do ensaio modal, houve uma grande preocupação sobre as características do mecanismo de excitação. Esta preocupação decorre das próprias características do item de teste. Embora muito simples, a estrutura possui algumas características problemáticas, no que diz respeito ao desenvolvimento de um ensaio modal: é pequena e principalmente é muito flexível.

Assim, foram avaliados diversos mecanismos de excitação para medir a FRF do item de teste. O primeiro foi conduzido fixando um excitador eletrodinâmico à massa concentrada. Entretanto, este mecanismo de excitação foi considerado insatisfatório. Como o item de teste é muito flexível, foi observado significativa interação entre o excitador e a estrutura, especialmente na vizinhança da primeira frequência natural em flexão. O fenômeno de *force drop off*³ alterou significativamente a FRF medida, comprometendo a correta extração dos parâmetros modais. Então um segundo mecanismo de excitação foi empregado, neste caso um martelo de impacto. Embora muito versátil, o ensaio de impacto também apresentou problemas, na maioria devido à impactos duplos. A extrema dificuldade de promover um único impacto sobre o item de teste decorre da sua grande flexibilidade. Os resultados obtidos deste ensaio também foram considerados pobres.

³Este fenômeno pode ocorrer durante um ensaio modal quando ao passar por uma condição de ressonância externa a força fornecida pelo excitador eletrodinâmico diminui abruptamente. Maiores detalhes podem ser encontrados em Varoto & Oliveira (2002)

No item 4.1.1, foi apresentado uma extensa discussão sobre a súbita relaxação de um carregamento estático. Ainda naquela seção demonstrou-se que este mecanismo de excitação concentra a maior parte da energia em baixas frequências e assim torna-se muito atrativo para ser empregado em estruturas muito flexíveis. Assim, realizou-se testes preliminares sobre o item de teste para avaliar sua adequação. Os resultados foram muito promissores e assim decidiu-se que a súbita relaxação de um carregamento estático ou *step relaxation method* seria empregado como mecanismo de excitação.

Também foram avaliados outros dois pontos importantes para a correta execução do ensaio modal. O primeiro consiste na seleção dos transdutores. Especificamente neste ensaio são necessários apenas dois transdutores, um de força e um aceleração. Foi selecionado um transdutor de força com alta sensibilidade. Esta escolha baseia-se no seguinte: devido a grande flexibilidade da estrutura, pequenos valores de força provocam grandes deslocamentos e como o ensaio linear requer deslocamentos muito pequenos (idealmente infinitesimais) serão utilizados baixos níveis de força. Já o transdutor de aceleração selecionado possui baixa sensibilidade e pequena massa. Esta escolha baseia-se no seguinte: possuindo pequena massa, a alteração na massa da estrutura será mínima; já a escolha sobre a baixa sensibilidade é na verdade um requerimento para os ensaios não-lineares que serão realizados no futuro. No próximo capítulo este aspecto será melhor explicado.

O último ponto de definição consiste na condição de fixação da estrutura. Como anteriormente comentado, a estrutura foi engastada em uma base robusta, assim espera-se chegar o mais próximo possível de uma condição teórica de engaste. A próxima seção descreve com detalhes a configuração final.

4.1.2.2 Configuração Experimental

A Figura (21) apresenta a configuração experimental final para a realização do ensaio modal. Nesta, o item de teste foi inicialmente engastado a uma robusta base de aço e este conjunto final foi firmemente fixado sobre a mesa de um excitador eletrodinâmico B&K 4801. Durante todo o ensaio modal, o excitador foi mantido desligado e assim servindo apenas como uma referência fixa para o item de teste.

O mecanismo de excitação consiste em um fino fio de aço. Este foi fixado em uma de suas extremidades à massa concentrada da estrutura e do outro lado a um transdutor de força B&K 8001 (340 pC/N), que por sua vez está fixo a uma base auxiliar. Uma vez que o carregamento estático foi aplicado ao item de teste, o fio foi subitamente cortado e o transdutor de força registrou a excitação aplicada. A resposta foi capturada por

Figura 21: Configuração experimental utilizada durante o ensaio modal.

um acelerômetro miniatura B&K 4374 (1.06 pC/g) fixado sobre o centro de gravidade da massa concentrada. Este sensor pesa aproximadamente 0.64 g , o que equivale à 1% do peso da massa concentrada m_o .

Finalmente, o sistema de aquisição de sinais consiste em dois amplificadores de carga B&K 2626, um para o sinal de força e o outro para o sinal de aceleração e um sistema A/D Agilent E1432 comandado pelo software MTS I-DEAS 10.

Durante o ensaio, utilizou-se uma janela em frequência até 100 Hz , com um total de 2048 pontos resultando em uma resolução temporal de $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ e uma resolução em frequência de $\Delta f = 0.097 \text{ Hz}$.

4.1.3 Resultados Experimentais e Comparação com os Teóricos

Como demonstrado na Seção (4.1.1.2), teoricamente um ensaio modal utilizando como mecanismo de excitação a súbita relaxação de um carregamento estático não converge para a verdadeira função de resposta em frequência. Entretanto, também foi demonstrado que no ambiente experimental este problema pode ser resolvido pela simples aplicação de um filtro passa-alta, aplicado nos sinais de excitação e resposta antes que a FRF seja computada. Desta maneira pode-se obter uma boa estimativa para a função de resposta em frequência. Em termos práticos, os sinais depois de

filtrados são denominados de sinais acoplados em AC.

A Figura (22) apresenta os sinais experimentais de excitação e resposta obtidos durante o ensaio, ambos acoplados em AC. Em adição, esta figura apresenta os respectivos espectros em amplitude. Na porção esquerda, são apresentados os sinais temporais de força e aceleração. Pode-se observar que o sinal temporal de força apresenta um comportamento típico de um impulso. Este comportamento era exatamente o esperado e predito pela teoria. Já o sinal de aceleração exibe um decaimento exponencial típico de sistemas vibratórios com um grau de liberdade. Em adição nota-se excelente simetria da oscilação em relação ao valor de equilíbrio, o que confirma a qualidade construtiva do item de teste.

Figura 22: Sinais experimentais de excitação e resposta originais, seguido pelos respectivos espectros em amplitude.

Em adição, a porção direita da Figura (22) apresenta os espectros em amplitude dos sinais de força e aceleração. O espectro de força apresenta um decaimento contínuo durante a faixa de 0 – 100 Hz. Fisicamente a presença deste decaimento significa que a entrega de energia para a estrutura diminui com o aumento da frequência. Entretanto, em nenhum valor de frequência o espectro atingiu valor igual a zero, o que se acontecesse significaria que não houve entrega de energia para esta frequência e conseqüentemente um possível modo não teria sido excitado.

Já o espectro da aceleração apresenta um pico dominante próximo a 18 Hz e outros dois pequenos picos próximos à 36 Hz e 54 Hz. Fisicamente este espectro demonstra que a estrutura oscila segundo uma componente dominante próxima a 18 Hz, mas também exista a sutil participação do primeiro e segundo harmônicos desta frequência. A presença destes harmônicos deve-se às não-linearidades naturais da estrutura. É importante observar que embora buscou-se excitar a estrutura de maneira a promover a menor magnitude de resposta e conseqüentemente evitar o surgimento de efeitos não-lineares, isto não foi totalmente possível. Entretanto os efeitos não-lineares são duas ordens de grandeza menores e assim neste caso, pode-se considerá-los desprezíveis.

Outro ponto importante observado: o sinal de resposta não decaiu completamente, mesmo com o emprego de uma janela temporal de dezesseis segundos. Como consequência foi introduzido no espectro correspondente o fenômeno de vazamento ou *leakage* Oppenheim & Schaffer (1999), que por sua vez é prejudicial na estimativa da FRF McConnell (1995).

Para reduzir os problemas relacionados com o vazamento, principalmente devido a não periodicidade dentro da janela temporal do sinal de aceleração, empregou-se a solução clássica proposta por McConnell (1995). Esta solução consiste no enjanelamento dos sinais de excitação e resposta. Em especial, o sinal de excitação foi enjanelado com uma janela retangular, desta maneira eliminando os valores negativos do sinal temporal de força, que por sua vez, não possuem contrapartida física e sim representam o tempo de resposta do condicionador-amplificador. Já o sinal de resposta foi enjanelado com uma janela exponencial, cujos parâmetros foram especialmente selecionados para este caso. A Figura (23) apresenta o resultado final.

Uma vez que os erros devido ao vazamento foram reduzidos ao máximo, os sinais estão prontos para serem empregados na estimativa da FRF do item de teste. Dentre os possíveis estimadores (MAIA; SILVA, 1997), isto é H_1 , H_2 , H_3 e H_v , optou-se pelo uso do H_1 . Esta decisão foi baseada na observação que o sinal de força possui a melhor relação sinal/ruído quando comparado com o sinal de aceleração. Por fim, o estimador H_1 foi implementado em MatlabTM, e posteriormente esta rotina foi empregada na estimação da FRF de aceleração do item de teste.

Uma vez que a FRF foi estimada, a extração dos parâmetros modais de interesse pode prosseguir. Para isso, o software MTS I-Deas 10 foi utilizado para a extração dos parâmetros modais. Em especial, foi empregado o método do ajuste do círculo Maia & Silva (1997), cujos resultados foram: (i) frequência natural amortecida $\omega_d = 18.066$ Hz; (ii) fator de amortecimento modal medido $\zeta_m = 0.17\%$. Entretanto é importante

Figura 23: Sinais experimentais de excitação e resposta modificados, seguido pelos respectivos espectros em amplitude.

ressaltar que este fator de amortecimento modal representa os efeitos do verdadeiro fator de amortecimento modal ζ e da razão de amortecimento da janela exponencial ζ_w McConnell (1995). Subtraindo o efeito da janela exponencial utilizada, resulta em $\zeta = 0.1272\%$. A Figura (24) apresenta o resultado do ajuste do círculo.

A Figura (25) apresenta graficamente via diagrama de Bode o módulo da FRF estimada experimentalmente. Em adição, esta figura apresenta o resultado comparativo com a FRF de aceleração teórica. Os resultados comparativos foram obtidos utilizando os parâmetros modais identificados anteriormente e para dois valores da massa concentrada m_o . O primeiro valor de m_o representa o real valor da massa concentrada e equivale à $m_o = 63.6\text{ g}$. Já o segundo valor utilizado $m_o = 118\text{ g}$ é que promove o melhor ajuste ao resultado experimental.

Observa-se que para $m_o = 63.6\text{ g}$ as FRF teórica e experimental não se ajustam, embora apresentem uma boa correlação. Esta diferença sugere que o valor numérico de m_o está subestimado. Durante a modelagem do sistema em questão realizada no Capítulo 3, foram feitas algumas hipóteses simplificadoras, descritas na Seção (3.2.2). Dentre estas, a hipótese H5⁴ desconsiderava o efeito da massa da viga, e assim foi

⁴Hipótese [H5]: Quando comparada a massa concentrada, a massa da viga é muito pequena.

Figura 24: Resultado do emprego do método do ajuste do círculo na extração dos parâmetros modais de interesse.

Figura 25: Diagrama de Bode apresentando o módulo da FRF de aceleração. Resultados experimentais e comparação com resultados teóricos, obtidos para dois valores de m_0 .

considerado que a massa concentrada representava toda a massa da estrutura. Assim, a partir dos resultados comparativos descritos na Figura (25) conclui-se que a hipótese H5 não foi adequada.

Portanto os efeitos da massa da viga serão desprezados.

Já para a FRF teórica construída com $m_o = 118$ g observa-se uma excelente correlação com os resultados experimentais. Este valor de m_o é 85% maior do que o valor real da massa concentrada. Esta diferença foi a princípio considerada excessiva, entretanto considerando que os erros experimentais são da ordem de 6 – 10%, os efeitos de massa do acelerômetro e do seu cabo, assim como, que a condição de engaste experimental não é perfeito, a diferença pode ser fortemente reduzida.

De maneira conclusiva, o modelo teórico foi ajustado para os seguintes valores: $m_o = 118$ g, $\omega_d = 18.066$ Hz e $\zeta = 0.1272$ %. A partir deste ponto, estes serão os valores utilizados.

4.2 Sistema Estrutural com Múltiplos Graus de Liberdade

4.2.1 Análise Modal Teórica

No Capítulo 3 foi derivado para o sistema com múltiplos graus de liberdade um modelo linear utilizando o método dos elementos finitos. Matematicamente, este modelo é originalmente descrito pela Equação (3.42) e por conveniência é repetido aqui pela seguinte equação:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (4.26)$$

A solução completa da vibração linear livre descrita pela Equação (4.26) é frequentemente descrita por duas matrizes

$$[\omega_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

e

$$[\Psi] = [\{\psi_1\} \quad \{\psi_2\} \cdots \{\psi_n\}] \quad (4.28)$$

Estas duas matrizes contêm uma descrição total das características dinâmicas lineares do sistema. Assim as Equações (4.27) e (4.28) constituem o que é conhecido como modelo modal Maia & Silva (1997). O modelo modal descreve as características

dinâmicas lineares do sistema por intermédio das suas propriedades modais, o que é o oposto do modelo espacial no qual o sistema é descrito segundo suas propriedades espaciais, como é o caso da Equação (3.42).

A determinação do modelo modal pode ter como ponto de partida, explorar a possibilidade da Equação (3.42) ter soluções separadas do tempo e da forma, tal como

$$q_i = u_i f(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.29)$$

Este tipo de solução implica que a razão entre as amplitudes de duas coordenadas do sistema são independentes do tempo. Fisicamente, este fato significa que todas as coordenadas do sistema realizarão movimento síncrono e que a configuração do sistema não altera sua forma durante o movimento, mas somente sua amplitude.

Substituindo a Equação (4.29) na Equação (3.42), obtém-se

$$[M] \{u\} \ddot{f}(t) + [K] \{u\} f(t) = \{0\} \quad (4.30)$$

Alterando a notação, a Equação (4.30) implica em n equações do tipo

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j f(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.31)$$

A dependência temporal pode ser separada da seguinte forma,

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.32)$$

Observando a equação anterior, pode-se reconhecer que o lado direito da expressão é independente do tempo e devido ao fato do lado esquerdo ser independente do índice i , as razões presentes em ambos os lados devem ser iguais à uma constante. Considerando uma variável positiva ω^2 , a Equação (4.32) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (4.33)$$

e

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) u_j = 0 \quad (4.34)$$

A escolha do sinal da constante ω^2 é proveniente de considerações físicas do sistema. Por se tratar de um sistema conservativo linear e estável, o deslocamento deve permanecer finito com o aumento do tempo t . Portanto com a escolha de uma constante positiva, obtém-se movimento harmônico, o qual está de acordo com as limitações físicas de energia total finita.

A Equação (4.33) é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução é trivial é fornecida por

$$f(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (4.35)$$

na qual A é uma constante arbitrária, ω representa a frequência de oscilação e ϕ o ângulo de fase.

Observando a solução da Equação (4.33) nota-se que todas as coordenadas do sistema realizam movimento harmônico com mesma frequência ω . Entretanto, a questão remanescente é determinar se existe um valor para esta frequência. A resposta para esta questão está na Equação (4.34), que por sua vez, constitui um conjunto de n equações homogêneas lineares em relação à incógnita u_j .

O problema de determinar o valor da constante positiva ω^2 para o qual o conjunto de equações homogêneas lineares tem uma solução não trivial é denominado de um problema de autovalor. O caso trivial no qual todos os u_j são iguais à zero deve ser ignorado, pois esta solução representa o caso de equilíbrio estático.

Um problema de autovalor — matematicamente apresentado pela Equação (4.34) — pode ser escrito em notação matricial da seguinte maneira

$$[k] \{u\} = \omega_r^2 [m] \{u\} \quad (4.36)$$

o qual é mais especificamente um autoproblema associado com as matrizes $[m]$ e $[k]$. A Equação (4.36) possui solução não-trivial, se e somente se, o determinante de seus coeficientes u_j forem nulos. Esta condição pode ser expressa como

$$\Delta(\omega^2) = |[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad (4.37)$$

na qual $\Delta(\omega^2)$ é denominado de determinante característica.

Fazendo a expansão do determinante característico, obtém-se uma equação algébrica de n -ésima ordem em ω^2 , conhecida como equação característica. Esta equação

possui em geral n raízes distintas, conhecidas como auto-valores.

As n raízes da equação característica são reais e positivas, denotadas por $\omega_1^2, \omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, devido ao fato das matrizes $[k]$ e $[m]$ serem simétricas e positiva definida. A raiz quadrada positiva das raízes da equação característica ω_i representam as frequências naturais do sistema. Com este resultado, uma parte do modelo modal — representado pela Equação (4.27) — é conhecido.

Uma vez que as frequências naturais foram obtidas, as amplitudes u_i do movimento harmônico podem ser determinados. Substituindo os auto-valores na Equação (4.36), obtém-se n equações da seguinte forma

$$[k] \{u\} = \omega_r^2 [m] \{u\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.38)$$

Para cada valor de ω_r^2 a Equação (4.38) possui uma solução não-trivial, representada pelo vetor solução $\{\psi_r\}$, denominado de autovetor do problema.

Cada autovetor é formado por n números reais determináveis dentro de uma constante arbitrária multiplicativa, pois $\alpha \{\psi_r\}$ também é solução da equação homogênea (4.38). Devido a este fato, não é possível determinar unicamente as amplitudes ψ_r^i . O que pode ser determinado é a razão entre os elementos que compõem qualquer um dos autovetores $\{\psi_r\}$. Assim, para uma frequência natural ω_r , a Equação (4.38) fornece um vetor $\{\psi_r\}$ o qual possui forma única, mas amplitudes arbitrárias. Os autovetores $\{\psi_r\}$ são também denominados de vetores modais e representam matematicamente o que é conhecido como modos naturais lineares de vibração.

Devido ao fato que um autovetor possuir amplitude arbitrária, como já mencionado, uma pratica comum consiste em especificar o valor de um dos elementos que compõe autovetor e normalizar os $n-1$ elementos remanentes em relação ao valor especificado. Este processo é denominado de normalização e os autovetores resultantes deste processo são denominados de modos normais. Outra maneira conveniente de normalizar um autovetor é utilizando a matriz de inércia $[m]$ (ou $[k]$ se desejado). Ainda mais uma maneira utilizada — principalmente quando é necessário a apresentação gráfica da forma de um modo natural — consiste em adotar o valor unitário ao maior elemento presente no vetor modal e posteriormente normalizar os demais elementos em relação à este. Deve ficar claro que qualquer que seja o processo de normalização, este é unicamente realizado por conveniência, matemática ou gráfica, e portanto carece de qualquer significado físico.

A obtenção dos vetores modais $\{\psi_r\}$ que compõem a matriz modal linear $[\Psi]$,

juntamente com a matriz de frequências naturais lineares $[\omega_r^2]$ representam o término do processo de obtenção do modelo modal da estrutura sob investigação. Em termos práticos, o modelo modal teórico foi obtido a partir da solução modal do software comercial AnsysTMV6.0. Os resultados serão apresentados no momento oportuno ainda neste capítulo.

4.2.2 Análise Modal Experimental

Esta seção descreve o processo de identificação modal realizado sobre o item de teste descrito na Figura (4). O principal objetivo é a determinação experimental das propriedades modais da estrutura, em especial, os oito primeiros modos naturais lineares juntamente com as respectivas frequências naturais e fatores de amortecimento modal.

4.2.2.1 Definição do Ensaio

Embora uma estrutura real possua infinitos graus de liberdade, é impossível que todos sejam medidos experimentalmente. Felizmente, para a determinação de um bom modelo modal é suficiente a medição de um número finito de graus de liberdade. Além do número, também é importante o conhecimento do tipo de movimento a ser medido, isto é, se o movimento é de translação ou rotação. Em estruturas flexíveis, normalmente⁵ não é possível a decomposição do movimento em translação pura ou rotação pura, uma vez que, o movimento resultante é decorrente da participação destes dois tipos de graus de liberdade. Entretanto, em termos práticos, graus de liberdade de rotação são muito difíceis de serem medidos. Como decorrência, um modelo modal é normalmente determinado levando-se em consideração apenas movimentos translacionais e, portanto, compreende a uma aproximação do verdadeiro modelo modal.

Aliando as idéias descritas no parágrafo anterior juntamente com as características do modelo modal teórico obtido na Seção (4.2.1), foi definido dez pontos de medida, cada um representando um grau de liberdade de translação. A Figura (26) ilustra cada um dos pontos de medição adotados.

Em relação à metodologia, foi empregado o método da função de resposta em frequência, com uma única entrada e múltiplas saídas (SIMO). Nesta configuração, a estrutura é excitada — a partir de um mecanismo de excitação — em apenas um ponto e a resposta resultante é medida simultaneamente nos dez pontos de medida. Os sinais de resposta foram obtidos por transdutores de aceleração, enquanto que o sinal

⁵Exceções incluem pontos nodais e condições de contorno.

Figura 26: Pontos de aplicação da excitação e medição da resposta no sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Configuração empregada durante o ensaio modal..

de excitação por transdutor de força. Estes sinais depois de processados resultam na obtenção simultânea de dez funções de resposta em frequência do tipo aceleração.

Analogamente ao ocorrido anteriormente com o ensaio modal da estrutura com um grau de liberdade, houve grande preocupação com as características dos mecanismos de excitação, assim como, com a maneira em que é aplicada a estrutura uma vez que existem modos de interesse nas direções X e Y.

Assim, inicialmente foi utilizado como mecanismo de excitação o martelo de impacto. Embora versátil, em termos práticos o ensaio apresentou severas limitações provenientes de impactos duplos e assim este mecanismo foi abandonado. Então o método da súbita relaxação do carregamento estático foi empregado. Embora bons resultados tenham sido alcançados até 40 Hz, não foi possível excitar os modos de interesse acima desta frequência. Assim este método de excitação foi abandonado. Por fim, foi empregado um excitador eletrodinâmico inicialmente fixado à asa segundo a direção Y. Observou-se que nesta configuração os modos de asa foram bem excitados, entretanto o mesmo não ocorreu com os modos de turbina na direção X. Então o excitador foi reposicionado, agora fixado na turbina segundo a direção X. Nesta segunda configuração, os modos de turbina nesta direção foram bem excitados, mas alguns mo-

dos de asa não. Assim decidiu-se que o excitador seria posicionado na turbina, mas de forma inclinada. Desta maneira, os modos de interesse foram bem excitados e assim esta configuração foi selecionada.

A partir do modelo modal teórico, observou-se que alguns modos possuem frequências naturais baixas. Especificamente o primeiro modo de flexão da asa ocorre em torno de 3 Hz. Desta maneira, foram selecionado acelerômetros capazes de medir frequências abaixo deste valor. O item a seguir descreve com detalhes todos as características da instrumentação e análise de sinais empregada.

4.2.2.2 Configuração Experimental

A Figura (27) ilustra a configuração experimental final para a realização do ensaio modal⁶. Nesta, o item de teste foi inicialmente engastado a uma robusta base por intermédio de um sistema de fixação apropriado.

Figura 27: Configuração experimental típica utilizada durante o ensaio modal da estrutura com múltiplos graus de liberdade.

O mecanismo de excitação consiste em um excitador eletrodinâmico MB Dynamics Modal 50. Este foi acoplado a estrutura por intermédio de uma *stinger*. A *stinger* por sua vez foi fixada em uma de suas extremidades à estrutura e do outro lado a uma cabeça de impedância B&K 8001 (340 pC/N), que por sua vez está fixo na mesa do

⁶Note que nesta figura o posicionamento do excitador é ilustrativo. Durante o ensaio modal, o excitador foi fixado sobre a turbina tal como apresenta a Figura 26.

excitador. A resposta foi capturada por oito acelerômetros PCB 333b (100 mV/g) e 5.6 g cada fixados sobre as nervuras da asa e dois PCB U353B16 (9.4 mV/g) e 2.6 g fixados na turbina, tal como apresenta a Figura (27).

O sistema de aquisição de sinais consiste em dois amplificadores de carga B&K 2626 utilizados para os sinais de força e aceleração provenientes da cabeça de impedância e um condicionador de sinais PCB series 481 para os demais acelerômetros. A conversão A/D e geração do sinal de excitação é realizado por um Agilent E1432 comandado pelo software MTS I-DEAS 10.

Durante o ensaio modal, foi utilizado sinais tipo *burst randon* para excitação. Como parâmetros de aquisição, utilizou-se frequência de amostragem de 256 Hz e 4096 pontos, resultando em uma janela em frequência até 100 Hz com 1601 linhas espectrais e resolução de frequência de 0.0625 Hz. Esta alta resolução em frequência se faz necessária uma vez que os fenômenos relativos a vibração paramétrica ou autoparamétrica ocorrem em regiões estreitas de frequência, tal como será futuramente apresentado. Por fim, as FRF's experimentais foram estimadas utilizando estimador Hv e posteriormente submetidas a um procedimento padrão de média estável, com base em dez FRF's. Todo este procedimento foi realizado por intermédio das ferramentas presentes no software MTS I-DEAS 10.

4.2.3 Resultados Experimentais e Comparação com os Teóricos

A Figura (28) apresenta as funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente. Ao todo, foram medidas dez FRFs as quais compõem o modelo de resposta experimental do sistema com múltiplos graus de liberdade. Mais especificamente, as FRFs medidas formam uma linha do modelo de resposta.

Uma vez que as FRFs foram experimentalmente estimadas, a extração dos parâmetros modais pode ser realizado. Para isso, foi utilizado o método da polireferência Maia & Silva (1997) presente no módulo modal do software MTS I-Deas 10. Para que os parâmetros modais sejam obtidos mais precisamente, o método da polireferência requer a estimação do resíduo modal, isto é, a contribuição dos modos não-medidos ou não-considerados sobre os de interesse. Mais precisamente, é geralmente necessário a estimação do resíduo decorrente dos modos de baixa frequência e decorrente dos modos de alta frequência.

Para a estimação do resíduo modal decorrente dos modos presentes acima da faixa de frequência de interesse utilizou-se a seguinte estratégia. A janela de frequência

Figura 28: Diagrama de Bode apresentando o módulo das FRFs de aceleração da estrutura com múltiplos graus de liberdade. Resultados experimentais.

originalmente medida é de 0 à 100 Hz, entretanto a janela de frequência efetivamente utilizada no processo de identificação foi de 0 à 60 Hz. Os modos contidos a partir de 60 Hz até 100 Hz foram utilizado na estimação do resíduo modal. Já o resíduo modal decorrente dos modos de baixa frequência não é necessário neste caso, uma vez que a faixa de frequência de interesse inicia-se à 0 Hz. Assim o modelo modal identificado compreende os principais modos naturais presentes até 60 Hz. Este modelo é apresentado numericamente na Tabela 3.

Tabela 3: Modelo modal experimental do sistema com múltiplos graus de liberdade.

Modo #	1	2	3	4	5	6	7
Frequência [Hz]	3.530	10.505	11.076	20.972	29.812	41.565	57.913
Amortecimento [%]	0.142	0.523	1.339	0.492	0.567	0.659	0.678
Forma Modal	1Y	0.061	0.187	0.550	2.650	2.670	4.290
	2Y	0.264	0.238	0.079	0.154	2.890	1.320
	3Y	2.450	-0.756	6.760	38.201	-3.840	18.300
	4Y	1.110	-0.920	1.370	39.301	-3.690	-7.030
	5X	-0.509	4.620	1.240	1.390	-0.038	0.144
	5Y	-0.966	-1.180	-9.290	-0.444	-15.010	-0.376
	6Y	2.770	-2.850	8.970	69.01	-72.900	6.040
	7Y	2.910	-3.030	4.110	71.101	-67.701	-31.401
	8Y	11.500	4.760	-4.910	-24.001	0.921	-4.660
	9Y	11.000	4.310	-10.401	-21.501	19.100	7.530

A base teórica que envolve a análise modal estabelece claramente a relação existente entre modelo espacial, modelo de resposta e modelo modal (EWINS, 2000). Assim, teoricamente é possível a partir de um modelo espacial, a obtenção do modelo de resposta e do modelo modal. Já experimentalmente, é possível a partir do modelo modal a obtenção do modelo de resposta e talvez do modelo espacial.

A relação existente entre os modelos é especialmente útil do ponto de vista experimental pois possibilita que a qualidade do modelo modal seja avaliado a partir da síntese do modelo de resposta, isto é, a partir dos parâmetros modais extraídos de um modelo modal experimental, o modelo de resposta teórico é sintetizado. Desta maneira pode-se avaliar se o modelo modal foi obtido corretamente.

Assim, a partir do modelo modal numericamente descrito pela Tabela 3 foram sintetizadas dez funções de resposta em frequência. A Figura 29 apresenta duas destas FRFs. As oito remanescentes são apresentadas no Apêndice G.

Quando as FRFs sintetizadas são comparadas com as experimentais pode-se observar uma boa correlação entre elas. De maneira geral, existe boa definição dos picos indicando que as frequências naturais foram corretamente obtidas. Também existe boa correlação entre a espessura dos picos, demonstrando que os fatores de amortecimento modal estão corretos. As maiores discrepâncias são observadas nas anti-ressonâncias, entretanto estas discrepâncias são de importância secundária no que diz respeito ao entendimento das características dinâmicas fundamentais da estrutura.

Continuando a analisar os resultados teóricos e experimentais, a Tabela (4) apresenta uma análise comparativa entre as frequências naturais lineares teóricas (obtidas pelo método dos elementos finitos) e as experimentais.

Tabela 4: Comparativo entre as frequências naturais lineares obtidas teoricamente pelo método dos elementos finitos e as experimentais.

Frequências Naturais Lineares				
Número	Descrição	Teórico [Hz]	Experimental [Hz]	Diferença %
1	0-n Flexão Asa Y	3.473	3.534	1.75
2	Turbina Lateral	10.082	10.505	4.19
3	Turbina Vertical	11.563	11.076	-4.21
4	1-n Flexão Asa Y	25.800	20.972	-18.71
5	1º Torção Asa	32.874	20.812	-36.69
6	1º Flexo/Torção	66.388	41.565	-37.39
7	2º Torção Asa	72.214	57.913	-19.80

Pode-se observar nesta tabela que foram obtidos — dentro da faixa de frequência avaliada — sete modos normais. Deste total, cinco referem-se a asa (estrutura principal) e envolvem flexão na direção Y e torção. Os dois remanescentes referem-se ao

Figura 29: Comparação entre FRFs experimentais e sintetizadas a partir dos parâmetros modais obtidos.

sistema pilone/turbina (estrutura secundária) e envolvem apenas flexão nas direções Y (vertical) e X (lateral).

Tabela (4) ainda apresenta a diferença percentual entre os resultados teóricos e experimentais. De maneira global, a discrepância entre os resultados tende a aumentar com o aumento da frequência. A menor diferença obtida foi de 1.75% referente ao modo 0-n Flexão Asa Y . Já a maior diferença refere-se ao modo flexo-torcional cuja variação foi de 37.39%.

Usualmente espera-se a obtenção de resultados experimentais com erros em torno de 6% (MCCONNELL, 1995). Dentro desta faixa encontram-se os três primeiros modos identificados. Os quatro restantes estão fora desta margem. As possíveis fontes para as discrepâncias verificadas nestes quatro modos são provavelmente decorrentes da condição de contorno e do refinamento da malha empregada no modelo teórico.

Por fim é apresentado dois resultados comparativos entre os modos de vibrar. A Figura (30) apresenta o segundo modo de vibrar, a partir da qual pode-se observar que trata-se do modo lateral de turbina. Ainda pode-se observar que existe uma pequena flexão da asa provocada pelo momento torçor gerado no acoplamento pilone/asa.

Figura 30: Segundo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Já a Figura (31) apresenta o quarto modo de vibrar, a partir da qual pode-se ob-

servar que trata-se do segundo modo de flexão da asa. Ainda pode-se observar que não se trata de uma flexão pura da asa, mas sim de uma flexão dominante juntamente com torção. O resultado comparativo entre todos os modos é apresentado no Apêndice (H).

Figura 31: Quarto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

De maneira conclusiva, esta seção apresentou os resultados experimentais da análise modal executada sobre o sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade, assim como, da análise comparativa com os resultados teóricos. De maneira geral os resultados obtidos foram considerados satisfatórios. A partir destas análises pôde-se obter e conhecer as características dinâmicas fundamentais deste sistema estrutural. As informações extraídas são o primeiro passo em direção à investigação das vibrações autoparamétricas.

4.2.4 Nota Sobre a Representatividade do Modelo Frente Aeronave Real

Durante a etapa de idealização e projeto da estrutura sob investigação, houve uma preocupação especial em relação a representabilidade dinâmica entre o protótipo e uma estrutura real. Especialmente foi considerado importante que a ordem dos modos naturais do protótipo fosse a mesma apresentada por um avião real típico.

A partir das informações dinâmicas obtidas na seção anterior é possível extrair algumas informações a respeito da representabilidade do protótipo. Ao se confrontar as informações contidas nas Tabelas (1) e (4) observar-se inicialmente que o primeiro modo natural um avião comercial típico é o 2- n flexão da asa. Se for considerado hipoteticamente apenas meio avião, este modo corresponderia ao primeiro modo de flexão da asa. No protótipo construído este foi exatamente o primeiro modo natural.

Continuando a observar estas tabelas, ao se desprezar os modos assimétricos — que não possuem contrapartida no protótipo construído — nota-se que o próximo modo do avião comercial é o lateral de turbina. Esta característica também foi observada no protótipo, no qual o segundo modo obtido teoricamente é o lateral da turbina.

Prosseguindo a comparação mantendo a compatibilidade geométrica entre a estrutura real e o protótipo — isto é desconsiderando modos de fuselagem, e tail — observa-se que o próximo modo do avião comercial é o vertical da turbina interna. Novamente encontra-se contrapartida no protótipo, que por sua vez indica exatamente esta ordem. Ainda observa-se que o protótipo representa a ordem dos próximos dois modos.

Portanto, a partir desta análise pôde-se observar com base nas predições teóricas e experimentais, que o protótipo representa a ordem dos modos naturais típicos de um avião real e assim cumpre com sucesso esta importante característica.

4.3 Sumário do Capítulo

Neste capítulo foram obtidas teórica e experimentalmente as propriedades modais dos sistemas estruturais sob investigação. Inicialmente as análises se direcionaram para o sistema com um grau de liberdade e, posteriormente, o sistema com múltiplos graus de liberdade foi analisado.

Embora o sistema com um grau de liberdade seja muito simples, o processo para a obtenção das suas propriedades modais não foi igualmente simples. Decorrente do

pequeno tamanho e grande flexibilidade, as técnicas comumente empregadas na análise modal se mostraram inadequadas. Assim, foi necessário o emprego de uma técnica que, embora seja considerada padrão dentro do contexto da análise modal, não é muito usual. A súbita relaxação do carregamento estático ou SRM (*step relaxation method*) é comumente empregada em estruturas de grande porte.

Inicialmente, foram desenvolvidos e discutidos todos os aspectos teóricos envolvendo a aplicação do SRM no sistema com um grau de liberdade. Foi demonstrado que devido a condições iniciais não-nulas a verdadeira função de resposta em frequência não pode ser obtida sem a inclusão de erros. Entretanto no ambiente experimental, o simples acoplamento em AC dos sinais medidos contorna este problema e promove a correta obtenção de uma FRF.

Uma vez que a análise modal teórica foi desenvolvida, o sistema estrutural com um grau de liberdade foi submetido aos ensaios experimentais. Os ensaios foram configurados para que o SRM pudesse ser utilizado. Desta maneira uma única função de resposta em frequência foi obtida e a partir do método do ajuste do círculo, os parâmetros modais de interesse obtidos, encerrando assim a identificação modal do sistema com um grau de liberdade.

Posteriormente, foi abordado o sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Inicialmente, foram desenvolvidos e discutidos todos os aspectos teóricos envolvendo a análise modal teórica deste sistema. Em uma segunda etapa, o modelo em elementos finitos foi utilizado e as propriedades modais de interesse foram obtidas.

Uma vez que importantes informações sobre o comportamento dinâmico linear do sistema foram obtidas, foi planejado um aparato experimental que pudesse extrair com sucesso as propriedades modais da estrutura. Durante este planejamento, os resultados teóricos foram de grande utilidade, pois forneceram informações sobre a faixa de frequência onde se localizavam os principais modos naturais e como são as formas destes modos naturais.

Como resultado do ensaio modal, foi extraído um conjunto de funções de resposta em frequência as quais compõem o modelo de resposta do sistema. A partir deste modelo de resposta e pelo emprego do método da polireferência, os parâmetros modais de interesse foram satisfatoriamente obtidos atingindo assim os objetivos.

O capítulo se encerra com uma breve nota sobre a representabilidade do sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade frente a uma aeronave real típica. Foi obtido boa representabilidade na forma e ordem dos modos naturais o que torna o estudo desenvolvido muito mais interessante.

CAPÍTULO

CINCO

Vibração Paramétrica Não-Linear: Análises e Experimentos

*“Os Deuses certamente não revelaram tudo aos mortais desde o princípio, mas
procurando os homens encontram pouco a pouco o melhor.”*

— Xenófanes (565-470 a.C)

Nos casos em que é assumido que uma estrutura pode desenvolver amplitude finita de vibração, as não-linearidades naturais e intrínsecas tornam-se mais ativas e portanto o modelo matemático precisa incluir estas não-linearidades. Exatamente neste contexto se insere o presente capítulo. Especificamente será considerado que a estrutura está submetida a uma excitação paramétrica harmônica e sofre a ação do meio viscoso que a circunda. As investigações desenvolvidas neste capítulo serão baseadas no sistema estrutural com um grau de liberdade.

5.1 Análises Teóricas

Nesta seção será investigado o comportamento dinâmico da estrutura sob a ação de uma excitação paramétrica principal e do meio viscoso. O modelo matemático para esta

situação pode ser extraído do que foi derivado no Capítulo 2 simplesmente considerado nula a excitação externa. Assim o modelo adimensional que representa o problema é descrito como,

$$(1 + w_o^{*2}) \ddot{w}_o^* + H_1 \dot{w}_o^* + H_2 \dot{w}_o^* |\dot{w}_o^*| + [(2\pi)^2 + \dot{w}_o^{*2} + H_3 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^* - [H_5 + H_4 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^{*3} = 0 \quad (5.1)$$

na qual

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{c_1 T_n}{m_o}; & H_2 &= \frac{c_2}{m_o A_1}; & H_3 &= Q_o A_1 T_n^2 \\ H_4 &= \frac{4A_2 Q_o T_n^2}{3A_1^2}; & H_5 &= \frac{6B_2 EI_y T_n^2}{m_o A_1^2}; & \Theta &= \lambda T_n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Conforme descrito anteriormente, sempre que o problema permitir deve-se buscar soluções analíticas. Embora a modelo descrito na Equação (5.1) represente um problema complexo e que além de não-linear envolve dissipação de energia este modelo será resolvido analiticamente. Para isto, será empregado o método das múltiplas escalas.

Na teoria da perturbação a idéia básica é decompor um problema complexo envolvendo um pequeno parâmetro ε em um número maior de problemas mais simples. Muitas vezes o próprio problema a ser resolvido apresenta naturalmente um pequeno parâmetro ε . Em outros casos, ε precisa ser introduzido artificialmente.

Nestes casos, infelizmente não existe uma única maneira ou uma regra clara que descreva como ε precisa ser introduzido na equação de movimento de maneira a colocá-la em uma forma apropriada para ser resolvida via algum método de perturbação. Entretanto, Cartmell (1990a) apresenta algumas direções para auxiliar a execução desta tarefa. A idéia básica consiste em identificar os termos na equação de movimento que aparentam ser mais significantes ou mais “fortes” e aqueles que aparentam ser mais “fracos”. Nesta tarefa é sempre necessário que a equação de movimento esteja na forma adimensional.

Examinando a Equação (5.1) existe dois termos que são vitais para o movimento vibratório. Estes termos representam fisicamente as forças de inércia e rigidez lineares, expressas respectivamente como $\ddot{w}_o^*$ e $(2\pi)^2 w_o^*$. Estes dois termos são os mais fortes da equação e serão reescritos como $\varepsilon^0 \ddot{w}_o^*$ e $\varepsilon^0 (2\pi)^2 w_o^*$. No próximo nível são considerados

os termos que ditam o fluxo de energia através da estrutura ou seja, as forças dissipativas e de excitação. Estes termos podem ser considerados como de primeira ordem em ε e assim reescritos como $\varepsilon^1 H_1 \dot{w}_o^*$, $\varepsilon^1 H_2 \dot{w}_o^* |\dot{w}_o^*|$ e $\varepsilon^1 H_3 \cos(\Theta t^* + \varphi) w_o^*$. Note que o termo paramétrico de mais alta ordem ainda não foi considerado. Além deste termos, os provenientes da curvatura (cúbicos) e os provenientes da inércia (cruzados) ainda não foram considerados. Anderson, Nayfeh & Balachandran (1996) demonstraram experimentalmente a importância dos efeitos não-lineares da curvatura da viga. Estes mesmos autores comentam ainda os termos cruzados podem ser importantes. Mediante estas informação e pretendendo obter uma solução mais acurada possível, todos os demais termos do modelo também serão considerados como de primeira ordem em ε .

Portanto o modelo não-linear adimensional e ordenado segundo as considerações descritas acima torna-se,

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 \ddot{w}_o^* + \varepsilon^0 (2\pi)^2 w_o^* = & - \varepsilon^1 w_o^{*2} \ddot{w}_o^* - \varepsilon^1 \dot{w}_o^{*2} w_o^* - \varepsilon^1 H_1 \dot{w}_o^* - \varepsilon^1 H_2 \dot{w}_o^* |\dot{w}_o^*| - \\ & - \varepsilon^1 H_3 \cos(\Theta t^* + \varphi) w_o^* + \varepsilon^1 H_4 \cos(\Theta t^* + \varphi) w_o^{*3} + \\ & + \varepsilon^1 H_5 w_o^{*3} \end{aligned} \quad (5.3)$$

na qual

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 H_1 &= \frac{c_1 T_n}{m_o}; & \varepsilon^1 H_2 &= \frac{c_2}{m_o A_1}; & \varepsilon^1 H_3 &= Q_o A_1 T_n^2 \\ \varepsilon^1 H_4 &= \frac{4 A_2 Q_o T_n^2}{3 A_1^2}; & \varepsilon^1 H_5 &= \frac{6 B_2 E I_y T_n^2}{m_o A_1^2}; & \Theta &= \lambda T_n; \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como descrito anteriormente as análises teóricas via técnicas de perturbação somente podem ser realizadas localmente, ou seja, normalmente na região de uma condição onde a dinâmica é considerada crítica. Esta região é geralmente uma condição de ressonância.

Assim, no item a seguir a análise teórica do comportamento vibratório da estrutura irá ser dirigido para a condição mais crítica sob excitação paramétrica, descrita quando a estrutura apresenta uma condição de ressonância paramétrica principal.

5.1.1 Desenvolvimento Analítico

Com anteriormente discutido o fenômeno de ressonância paramétrica principal ocorre quando a frequência da excitação paramétrica assume valor aproximadamente igual ao dobro de uma frequência natural não-amortecida. Especificamente no contexto do problema abordado neste item, uma condição de ressonância paramétrica principal ocorre quando a frequência natural normalizada $\bar{\omega}_n = 2\pi$ está relacionada com a frequência da excitação paramétrica Θ como

$$(2\pi)^2 = \left(\frac{1}{2}\Theta\right)^2 - \varepsilon\sigma \quad (5.5)$$

na qual $\varepsilon\sigma$ representa um parâmetro de sintonia que expressa a proximidade da ressonância paramétrica principal.

Uma solução de primeira ordem para a Equação (5.3) é procurada utilizando o método das múltiplas escalas na forma,

$$w_o^*(\varepsilon; t^*) = w_0(T_0, T_1) + \varepsilon w_1(T_0, T_1) \quad (5.6)$$

na qual $T_0 = t$ representa uma escala de tempo rápida, que caracteriza movimentos que ocorrem na frequência $\bar{\omega}_n$ e $T_1 = \varepsilon^1 t$ representa uma escala de tempo lenta e caracteriza as variações de amplitude e fase da resposta vibratória. Em termos de T_0 e T_1 , as derivadas temporais são escritas como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^{*2}} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

na qual o operador $D_n = \partial / (\partial T_n)$.

Substituindo as Equações (5.7), (5.6) e (5.5) na Equação (5.3) e equacionando os coeficiente como potências de ε , obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\varepsilon^0 : D_0^2 w_0 + \frac{1}{4} \Theta^2 w_0 = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : D_0^2 w_1 + \frac{1}{4} \Theta^2 w_1 &= \sigma w_0 - 2 D_0 D_1 w_0 - \frac{1}{2} H_3 e^{i\Theta T_0} w_0 - \frac{1}{2} H_3 e^{-i\Theta T_0} w_0 - w_0^2 D_0^2 w_0 - \\ &- H_1 D_0 w_0 - H_2 D_0 w_0 |D_0 w_0| - w_0 (D_0 w_0)^2 + \frac{1}{2} H_4 e^{i\Theta T_0} w_0^3 + \\ &+ \frac{1}{2} H_4 e^{-i\Theta T_0} w_0^3 + H_5 w_0^3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

A Equação (5.8) é freqüentemente referenciada na literatura como de equação perturbada de ordem-zero. Uma observação mais cuidadosa revela que esta descreve apenas a participação dos termos lineares. Assim sua solução é imediatamente aparente e pode ser escrita na forma complexa como,

$$w_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{\frac{1}{2}i\Theta T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-\frac{1}{2}i\Theta T_0} \quad (5.10)$$

ou ainda na forma

$$w_0(T_0, T_1) = a(T_1) \cos \left[\frac{1}{2} \Theta T_0 + \beta(T_1) \right] \quad (5.11)$$

nas Equações (5.10) e (5.11) a e β são grandezas reais enquanto A representa uma grandeza complexa. Ainda $\bar{A}$ é o complexo conjugado de A . Comparando as Equações (5.10) e (5.11) pode se concluir que,

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}, \quad \bar{A}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\beta(T_1)} \quad (5.12)$$

a qual é a forma polar da Equação (5.10).

Na atual ordem de análise, isto é $O(\varepsilon^0)$, os parâmetros a , β e A são funções indeterminadas da escala T_1 . Eles podem ser determinados impondo as condições de solvabilidade na ordem $O(\varepsilon^1)$. Substituindo a solução de ordem $O(\varepsilon^0)$ expressa pela Equação (5.10) na equação perturbada de primeira ordem obtém-se,

$$\begin{aligned}
D_0^2 w_1 + \frac{1}{4} \Theta^2 w_1 = & \frac{1}{2} \left(H_4 A^3 - i H_1 A \Theta + A^2 \bar{A} \Theta^2 - H_3 \bar{A} + 3 H_4 A \bar{A}^2 \right) e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0} + \\
& \left(-i A' \Theta + \sigma A + 3 H_5 A^2 \bar{A} \right) e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0} - \\
& \frac{1}{2} \left(H_3 A - i H_1 \bar{A} \Theta - A \bar{A}^2 \Theta^2 - H_4 \bar{A}^3 + 3 H_4 A^2 \bar{A} \right) e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} + \\
& \left(-i \bar{A}' \Theta - \sigma \bar{A} - 3 H_5 A \bar{A}^2 \right) e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} + \\
& \frac{1}{2} \left(H_4 A^3 e^{\frac{5}{2} i \Theta T_0} - H_3 A e^{\frac{3}{2} i \Theta T_0} + A^3 e^{\frac{3}{2} i \Theta T_0} \Theta^2 \right) + \\
& \frac{1}{2} \left(\bar{A}^3 e^{-\frac{3}{2} i \Theta T_0} \Theta^2 - H_3 \bar{A} e^{-\frac{3}{2} i \Theta T_0} + H_4 \bar{A}^3 e^{-\frac{5}{2} i \Theta T_0} \right) + \\
& H_5 \bar{A}^3 e^{-\frac{3}{2} i \Theta T_0} + H_5 A^3 e^{\frac{3}{2} i \Theta T_0} + \frac{3}{2} H_4 A \bar{A}^2 e^{-\frac{3}{2} i \Theta T_0} + \frac{3}{2} H_4 A^2 \bar{A} e^{\frac{3}{2} i \Theta T_0} - \\
& - H_2 f \left(\frac{1}{2} i \Theta A e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0}, -\frac{1}{2} i \Theta A e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} \right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

na qual o operador $\frac{d}{dT_1}() = ()'$ e a função f é definida como,

$$\begin{aligned}
f \left(\frac{1}{2} i \Theta A e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0}, -\frac{1}{2} i \Theta A e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} \right) = & \left(\frac{1}{2} i \Theta A e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0} - \frac{1}{2} i \Theta A e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} \right) \cdot \\
& \cdot \left| \frac{1}{2} i \Theta A e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0} - \frac{1}{2} i \Theta A e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} \right|
\end{aligned} \tag{5.14}$$

A função f tal como descrita pela Equação (5.14) não permite que a análise continue, e portanto, necessita ser descrita de uma maneira mais apropriada. Como f é periódica, então pode ser expandida como uma série de Fourier, ou

$$\Upsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(A, \bar{A}) e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0 n} \tag{5.15}$$

na qual $f_n(A, \bar{A})$ é descrito por,

$$f_n(A, \bar{A}) = \frac{\Theta}{4\pi} \int_0^{4\pi/\Theta} f e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} dT_0 \tag{5.16}$$

Como a solução procurada é proveniente de expansão de primeira ordem é suficiente considerar apenas o primeiro termo da série de Fourier. Assim a Equação (5.14) pode ser reescrita em uma forma apropriada para a continuidade da resolução, ou

$$\Upsilon = e^{\frac{1}{2} i \Theta T_0} \frac{\Theta}{4\pi} \int_0^{4\pi/\Theta} f e^{-\frac{1}{2} i \Theta T_0} dT_0 \tag{5.17}$$

Substituindo a Equação (5.17) na equação perturbada de primeira-ordem e real-

izando algumas manipulações algébricas simples, pode-se notar que dependendo da função A todas as soluções particulares desta equação contem termos proporcionais a $e^{\pm \frac{1}{2}i\Theta T_0}$. Estes termos são denominados de termos seculares, caracterizados por aumentarem indefinidamente com o aumento de T_0 . Assim o termo εw_1 pode dominar w_0 resultando em uma expansão não-uniforme e conseqüentemente divergindo totalmente a solução. Para evitar que a solução divirja a condição de solvabilidade¹ é imposta resultando na equação de modulação descritas na forma complexa, tal como:

$$-iA'\Theta - \frac{1}{2}iH_1 A\Theta - H_2\Delta - \frac{1}{2}H_3 \bar{A} + \frac{3}{2}H_4 A\bar{A}^2 + \frac{1}{2}H_4 A^3 + \sigma A + \left(3H_5 + \frac{1}{2}\Theta^2\right) A^2 \bar{A} = 0 \quad (5.18)$$

na qual

$$\Delta = \frac{\Theta}{4\pi} \int_0^{4\pi/\Theta} f e^{-\frac{1}{2}i\Theta T_0} dT_0 \quad (5.19)$$

A Equação (5.18) pode ser descrita em uma forma mais apropriada denominada na literatura de forma polar das equações de modulação Nayfeh (2000). A forma polar é obtida por intermédio descrição² polar de A . Para isso a Equação (5.12) é substituída na Equação (5.18) e posteriormente é realizando a integração da Equação (5.19). Finalmente a partir do resultado final, as partes real e imaginária são separadas resultando nas equações de modulação. Neste caso estas são descritas pelo seguinte sistema de equações³,

$$a' = \left(-\frac{1}{4\Theta} \varepsilon H_4 a^3 + \frac{1}{2\Theta} \varepsilon H_3 a\right) \sin(2\beta) - \frac{1}{2} \varepsilon H_1 a - \frac{2}{3\pi} \varepsilon H_2 \Theta a^2 \quad (5.20)$$

$$a\beta' = \left(-\frac{1}{2\Theta} \varepsilon H_4 a^3 + \frac{1}{2\Theta} \varepsilon H_3 a\right) \cos(2\beta) + \frac{1}{8\Theta} (-6\varepsilon H_5 - \Theta^2) a^3 - \frac{\varepsilon \sigma a}{\Theta} \quad (5.21)$$

Portanto a partir das Equações (5.6) e (5.11) a aproximação de primeira ordem para a solução do problema é fornecido pela seguinte expressão:

$$w_o^* \approx a(T_1) \cos[2\pi T_0 + \beta(T_1)] + O(\varepsilon) \quad (5.22)$$

¹A condição de solvabilidade consiste em impor uma condição tal que os termos seculares sejam eliminados Nayfeh (2000).

²Também podem ser descritas na forma cartesiana.

³Note que ε está novamente presente. Foi introduzido multiplicando ambos os lados da Equação (5.18) por ε . Desta maneira os coeficientes adimensionais H_i voltaram à sua forma original.

na qual $a(T_1)$ e $\beta(T_1)$ são governados pelas Equações (5.20) e (5.21). Observa-se ainda que esta equação retém apenas a participação dos termos de ordem até $O(\varepsilon^0)$.

Ao se observar a Equação (5.22) nota-se que a amplitude da resposta vibratória é regida pela variável a enquanto a fase pela β . Deste modo as equações de modulação retém a essência da dinâmica da estrutura e assim ao invés de se analisar o modelo matemático completo descrito pela Equação (5.3) as análises podem ser realizadas baseadas nas equações de modulação. Este é um aspecto altamente positivo do método das múltiplas escalas.

Com base no conhecimento teórico e prático adquirido nesta seção, foi escrito uma rotina em matemática simbólica para a solução de uma classe de problemas fracamente não-lineares utilizando o método das múltiplas escalas. Esta rotina possui código aberto, com isso espera-se contribuir para o desenvolvimento no Brasil de futuras pesquisas na área de dinâmica não-linear. Todo o procedimento, algoritmo, sintaxe e rotinas estão descritas nos Apêndices (D) e (E).

No próximo item, as características transiente da vibração paramétrica principal são analisadas. Em especial os efeitos provocados pela presença do amortecimento não-linear será profundamente investigado.

5.1.2 Análise da Vibração Transiente

No contexto da dinâmica linear, quando uma estrutura é excitada externamente as características da resposta transiente são constantemente desprezadas. Isto ocorre pois estes transientes desaparecem rapidamente devido ao amortecimento estrutural, seguido por uma condição de regime permanente. Já no contexto da dinâmica não-linear e especificamente no caso da vibração paramétrica principal, normalmente os transientes permanecem por muito mais tempo. Ainda em alguns casos a resposta dinâmica na região que antecede uma possível condição de regime permanente pode apresentar magnitude superior àquela existente em regime permanente. Nestes casos, é importante o conhecimento das características na região transiente pois é nesta região que ocorrem, por exemplo, as maiores tensões internas no material. As características na região de resposta transiente também pode ser importante para um desejável controle do fenômeno. Muitas vezes para ser realmente eficiente, o controle deve agir antes que a estrutura desenvolva a vibração paramétrica principal, ou seja, deve inibir o desenvolvimento deste fenômeno.

Porém antes que as equações de modulação sejam empregadas nas análises subsequentes, é importante avaliar sua capacidade em descrever a resposta vibratória da

estrutura. Esta avaliação pode ser realizada comparando-se os resultados obtidos a partir da solução numérica da equação de movimento (Equação (5.3)) com o resultado obtido a partir da solução obtida via múltiplas escalas (Equação (5.22)).

Tanto a equação de movimento, quanto as equações de modulação foram numericamente resolvidas utilizando uma rotina baseada no método de Adams-Bashforth-Moulton Shampine & Gordon (1975). Este método foi escolhido ao invés do tradicional Runge-Kutta de ordem 4 ou 5 por ser mais eficiente em tolerância severas e devido às próprias características dos problemas, principalmente pela complexidade da equação de movimento. Na prática o método realmente mostrou-se computacionalmente muito eficiente e soluções para longos tempos foram obtidas rapidamente. A Figura (32) apresenta as soluções obtidas.

A Figura (32a) apresenta uma solução típica obtida diretamente da equação de movimento, já a Figura (32b) apresenta uma solução típica obtida via múltiplas escalas. Ambas as solução apresentadas nestas figuras desconsideram os efeitos do amortecimento não-linear. Quando comparadas, pode-se observar grande semelhança entre os resultados. Já a maior diferença observada é o tempo necessário para a o início do desenvolvimento da vibração paramétrica principal. No caso da solução obtida por intermédio da equação de movimento, o tempo necessário foi aproximadamente de 1000, enquanto que no caso da solução obtida via múltiplas escalas foi necessário menos da metade deste tempo. Não encontrou-se claramente algum motivo que pudesse explicar este fato.

Figura 32: Comparativo da resposta transiente: (a) resultado obtido via solução numérica da Equação (5.3) e; (b) resultado obtido via múltiplas escalas, Equação (5.22). Ambos resultado não consideram o efeito do meio viscoso. Resultados obtidos com $\varepsilon H_1 = 0.0077$; $\varepsilon H_2 = 0.00$; $\varepsilon H_3 = 1.7132$; $\varepsilon H_4 = 2.7820$; $\varepsilon H_5 = 51.1779$ e $\Theta = 12.56$.

Já a Figura (33) apresenta sobrepostos os resultados apresentados na Figura (32). Note que a diferença de tempo para o desenvolvimento da ressonância foi artificialmente

ajustado para os propósitos de comparação. A partir da Figura (33) pode-se observar claramente uma excelente correlação entre as soluções. A solução obtida via método das múltiplas escalas está muito próxima da obtida via solução da equação de movimento original. Portanto a partir deste momento a solução descrita pela Equação (5.22) pode ser empregada com confiança.

Figura 33: Comparativo da resposta transiente obtido via solução numérica da Equação (5.3) e solução aproximada obtida via múltiplas escalas, Equação (5.22). Pode-se observar que embora aproximada, a solução obtida via múltiplas escalas é muito precisa para este caso. Resultados obtidos com $\varepsilon H_1 = 0.0077$; $\varepsilon H_2 = 0.00$; $\varepsilon H_3 = 1.7132$; $\varepsilon H_4 = 2.7820$; $\varepsilon H_5 = 51.1779$ e $\Theta = 12.56$.

Do ponto de vista teórico, a solução obtida pelo método das múltiplas escalas é precisa. Assim, a partir deste ponto um dos principais objetivos da presente dissertação será abordado: a influência do meio de operação, mais precisamente da viscosidade. Especificamente busca-se aqui avaliar teoricamente os efeitos do amortecimento quadrático na magnitude e fase da vibração da estrutura quando sujeita a condição de ressonância paramétrica principal.

Para isso, várias simulações foram realizadas a partir das equações de modulação. Nestas simulações apenas o coeficiente εH_2 foi variado, todos os parâmetros permaneceram constante. Foram empregados cinco valores para εH_2 : $\varepsilon H_2 = 0.0000$, $\varepsilon H_2 = 0.0077$, $\varepsilon H_2 = 0.0773$, $\varepsilon H_2 = 0.1546$, $\varepsilon H_2 = 0.2320$ e $\varepsilon H_2 = 0.3093$. Note que o valor $\varepsilon H_2 = 0.0000$ representa a operação no vácuo. Em todas as simulações os demais coeficientes foram: $\varepsilon H_1 = 0.0077$; $\varepsilon H_3 = 1.7132$; $\varepsilon H_4 = 2.7820$; $\varepsilon H_5 = 51.1779$ e $\Theta = 12.56$. Note que $\Theta = 12.56$ representa uma condição de perfeita sintonia da

ressonância paramétrica principal.

A Figura (34) apresenta os efeitos provocados pelo meio viscoso na amplitude da resposta. Nesta figura pode-se observar três regiões distintas e denominadas de *I*, *II* e *III*. A região *I* descreve a magnitude da resposta entre $t^* = 0$ até t^* onde a magnitude da resposta é máxima. A região *II* inicia-se onde a magnitude é máxima e estende-se até o início da condição de regime permanente. A última, a região *III*, descreve o início da condição de regime permanente em diante.

Na ausência dos efeitos viscosos do meio, ou seja, par $\varepsilon H_2 = 0.0000$ quando $t^* \approx 300$ a amplitude do movimento começa a aumentar rapidamente. Este ponto corresponde ao tempo necessário para o início do desenvolvimento da vibração paramétrica principal. Após um curto intervalo de tempo, a vibração atinge a maior magnitude, que corresponde à $a \approx 0.16$ e marca o término da região *I*. A partir deste ponto inicia-se a região *II* na qual obtém-se uma solução aperiódica, cuja amplitude máxima varia inicialmente entre $a \approx 0.16$ e $a \approx 0.06$. Com o passar do tempo ocorre uma diminuição (aproximadamente exponencial) desta variação de amplitude até que uma condição de regime permanente é alcançada, finalizando a região *II*. A partir deste ponto obtém-se uma solução periódica em regime permanente com amplitude $a \approx 0.12$. De maneira conclusiva, nota-se que na ausência dos efeitos viscosos do meio de operação as maiores amplitudes ocorrem no início do desenvolvimento da ressonância, na fronteira entre as regiões *I* e *II*. Quando em regime permanente as amplitudes são da ordem de 25% menores que a máxima obtida. Também é necessário muito tempo para que a estrutura alcance uma condição de regime permanente e portanto a região *II* é extensa. Por fim, observa-se um comportamento dinâmico relativamente complexo.

Ao se introduzir um leve efeito do meio viscoso representado por $\varepsilon H_2 = 0.0773$ são observadas intensas modificações na magnitude da resposta. Primeiramente houve uma redução do valor de máxima amplitude. Este passou de $a \approx 0.16$ (para $\varepsilon H_2 = 0.0000$) para $a \approx 0.13$ o que equivale a uma redução de aproximadamente 19%. Entretanto a extensão da região *I* permaneceu praticamente inalterada. Segundo, a região de resposta aperiódica (região *II*) foi drasticamente reduzida e assim uma condição periódica de regime permanente foi alcançada mais rapidamente. Por fim a magnitude da resposta em regime permanente foi ligeiramente menor à encontrada para $H_2 = 0.0000$. Nota-se ainda que a presença do amortecimento não-linear não altera o tempo necessário para a ativação da ressonância.

Aumentando ainda mais o efeito do meio viscoso para $\varepsilon H_2 = 0.1546$, observa-se que a solução aperiódica é praticamente eliminada e assim a região *II* é quase extinta.

Figura 34: Predições do efeito do amortecimento não-linear sobre a amplitude da resposta transiente. Resultados obtidos com $\varepsilon H_1 = 0.0077$; $\varepsilon H_3 = 1.7132$; $\varepsilon H_4 = 2.7820$; $\varepsilon H_5 = 51.1779$ e $\Theta = 12.56$.

A forte variação na magnitude da resposta nos instantes iniciais de desenvolvimento da ressonância encontrado para $\varepsilon H_2 = 0.0000$ desaparece quase por completo. Ainda a máxima amplitude encontrada difere timidamente da amplitude em regime permanente e permanece por apenas alguns instantes. A condição periódica em regime permanente descrita pela região *III* é rapidamente alcançada, mas com magnitude consideravelmente menor. A magnitude foi reduzida de $a \approx 0.12$ quando $\varepsilon H_2 = 0.0000$ para $a \approx 0.102$, o que equivale a uma redução de aproximadamente 17%. Mesmo para $\varepsilon H_2 = 0.1546$ não se observa alterações no tempo necessário para o início do desenvolvimento da ressonância.

Elevando ainda mais o efeito do amortecimento quadrático para $\varepsilon H_2 = 0.2320$, observa-se a completa extinção da região *II*. Assim, tão logo a ressonância se desenvolve já surge uma condição de regime permanente, descrita pela região *III*. Quando comparado com $\varepsilon H_2 = 0.0000$ a magnitude em regime permanente passa de $a \approx 0.12$ para $a \approx 0.07$ equivalente a redução de 28%. Também não se observa alteração do tempo necessário para a ativação da ressonância.

A partir deste ponto, aumentos sucessivos em εH_2 provocam apenas redução na magnitude da resposta em regime permanente. Não se observa mais nenhum outro efeito.

Já Figura (35) apresenta o efeito provocado pelo meio viscoso na fase da resposta dinâmica. Estas predições foram obtidas para as mesmas condições descritas para a magnitude.

Figura 35: Predições do efeito do amortecimento não-linear sobre a fase da resposta transiente. Resultados obtidos com $\varepsilon H_1 = 0.0077$; $\varepsilon H_3 = 1.7132$; $\varepsilon H_4 = 2.7820$; $\varepsilon H_5 = 51.1779$ e $\Theta = 12.56$.

Na ausência dos efeitos viscosos do meio de operação ($\varepsilon H_2 = 0.0000$) nota-se que próximo a $t^* \approx 0$, o ângulo de fase β passa rapidamente de $\beta \approx 0$ para $\beta \approx 0.8$. Uma vez atingido este valor, β permanece constante durante quase toda a região I. Quase no fim da região I, a ressonância começa a se desenvolver e na fronteira com a região II, β atinge o menor valor $\beta \approx -0.5$. A partir deste ponto o valor de β sofre fortes alterações periódicas, inicialmente entre $\beta \approx -0.5$ e $\beta \approx +0.5$. Com o desenvolver da região II, estas variações vão diminuindo até que a região III é alcançada. Nesta região, o valor de β torna-se constante e numericamente vale $\beta \approx 0$.

A introdução de um leve efeito do meio viscoso, representado por $\varepsilon H_2 = 0.0773$ provoca intensas modificações na fase da resposta. Inicialmente existe uma forte modificação do valor mínimo de β . Este passou de $\beta \approx -0.5$ com $\varepsilon H_2 = 0.0000$ para $\beta \approx +0.1$ com $\varepsilon H_2 = 0.0773$. Segundo, a região II foi fortemente reduzida e a fase atinge valor constante mais rapidamente. Também este valor constante passa de $\beta \approx 0$ para $\beta \approx +0.2$. Por outro lado, o comportamento de β na região I praticamente permaneceu inalterado.

Aumentando ainda mais o valor de εH_2 para $\varepsilon H_2 = 0.1546$ nota-se que a região *I* permanece inalterada, exceto pelo valor de β na fronteira com a região *II* que foi fortemente alterado. Este valor é praticamente o mesmo encontrado durante todo o tempo restante. Nota-se ainda que a região *II* foi praticamente extinta. O valor de $\beta = \text{constante}$ aumenta ainda mais e chega à $\beta \approx 0.39$.

A partir deste ponto, aumentos sucessivos de εH_2 fazem com que o valor de β também aumente e aproxima-se do valor constante encontrado na região *I*, ou seja, $\beta \approx 0.8$.

De maneira conclusiva, as predições teóricas demonstram que as características viscosas do meio de operação promovem efeitos positivos na resposta transiente da estrutura. Primeiramente, mesmo para valores modestos de εH_2 a resposta dinâmica tem sua complexidade reduzida, uma vez que ocorre a eliminação das fortes oscilações de amplitude presentes assim que a resposta torna-se máxima. A ausência destas fortes oscilações é altamente positivo, tanto do ponto de vista da integridade estrutural quando do ponto de vista de controle. Também as predições demonstram que a amplitude em regime permanente sofre consideráveis reduções, o que também é desejável. Por outro lado, infelizmente nem pela presença de grandes valores de εH_2 (fisicamente realizáveis) pode inibir que o fenômeno de ressonância paramétrica ocorra. Ainda neste capítulo esta constatação será explicada com mais embasamento teórico, e envolve questões de estabilidade.

5.1.3 Análise da Vibração em Regime Permanente

O conhecimento das características da vibração paramétrica principal em regime permanente é tão importante quanto o conhecimento das características transientes. Especialmente do ponto de vista de engenharia é importante analisar como a magnitude em regime permanente é afetada com a variação de parâmetros relacionados com a excitação paramétrica; com as características físicas da estrutura, tais como, massa, rigidez ou amortecimento ou ainda com as características do meio de operação. Em especial, esta seção apresenta como a vibração paramétrica principal resposta em regime permanente é afetada pelas características viscosas do meio de operação e dos parâmetros da excitação paramétrica. Os resultados são graficamente apresentados a partir de curvas de bifurcação.

Movimentos em regime permanente corresponde a pontos fixos (isto é, soluções constantes) das equações de modulação, expressas pelas Equações (5.20) e (5.21). Matematicamente, estas condições correspondem à $a'_i = \beta'_i = 0$. Portanto, em regime perma-

nente as equações de modulação são reescritas como:

$$\left(-\frac{1}{4\Theta}\varepsilon H_4 \bar{a}^3 + \frac{1}{2\Theta}\varepsilon H_3 \bar{a}\right) \sin(2\beta) - \frac{1}{2}\varepsilon H_1 \bar{a} - \frac{2}{3\pi}\varepsilon H_2 \Theta \bar{a}^2 = 0 \quad (5.23)$$

$$\left(-\frac{1}{2\Theta}\varepsilon H_4 \bar{a}^3 + \frac{1}{2\Theta}\varepsilon H_3 \bar{a}\right) \cos(2\beta) + \frac{1}{8\Theta}(-6\varepsilon H_5 - \Theta^2)\bar{a}^3 - \frac{\varepsilon\sigma\bar{a}}{\Theta} = 0 \quad (5.24)$$

na qual $\bar{a}$ descreve a amplitude vibratória em regime permanente.

As soluções triviais do sistema anterior são imediatamente aparentes e correspondem a $\bar{a} = 0$. Já as soluções não-triviais – que correspondem à $\bar{a} \neq 0$ – são obtidas eliminando dependência do sistema anterior em relação ao ângulo de fase $\beta(T_1)$. Para isso, é isolado no lado direito das respectivas equações os termos que contenham $\sin(2\beta)$ e $\cos(2\beta)$. As equações resultantes são elevadas ao quadrado e adicionadas. Após algumas manipulações algébricas simples, as soluções não-triviais podem ser encontrada a partir da resolução da seguinte equação algébrica:

$$C_4 \bar{a}^4 + C_3 \bar{a}^3 + C_2 \bar{a}^2 + C_1 \bar{a} + C_0 = 0 \quad (5.25)$$

na qual os coeficientes são expressos por⁴,

$$\begin{aligned} C_4 &= -9\pi^2\varepsilon H_4\varepsilon H_3\Theta^2\varepsilon\sigma - 54\pi^2\varepsilon H_4\varepsilon H_3\varepsilon H_5\varepsilon\sigma + 9\pi^2\varepsilon H_4^2\varepsilon\sigma^2 \\ &\quad - \frac{117}{4}\pi^2\varepsilon H_4^2\varepsilon H_3^2 - 32\Theta^4\varepsilon H_4\varepsilon H_3\varepsilon H_2^2 + \frac{9}{16}\pi^2\varepsilon H_3^2\Theta^4 \\ &\quad + 9\Theta^2\varepsilon H_4^2\varepsilon H_1^2\pi^2 + \frac{81}{4}\pi^2\varepsilon H_3^2\varepsilon H_5^2 + \frac{27}{4}\pi^2\varepsilon H_3^2\varepsilon H_5\Theta^2 \\ C_3 &= -48\Theta^3\varepsilon H_4\varepsilon H_3\varepsilon H_2\varepsilon H_1\pi \\ C_2 &= -18\Theta^2\varepsilon H_4\varepsilon H_3\varepsilon H_1^2\pi^2 + 27\pi^2\varepsilon H_4\varepsilon H_3^3 + 54\pi^2\varepsilon H_3^2\varepsilon H_5\varepsilon\sigma \\ &\quad + 16\Theta^4\varepsilon H_3^2\varepsilon H_2^2 + 9\pi^2\varepsilon H_3^2\Theta^2\varepsilon\sigma - 36\pi^2\varepsilon H_4\varepsilon H_3\varepsilon\sigma^2 \\ C_1 &= 24\Theta^3\varepsilon H_3^2\varepsilon H_2\varepsilon H_1\pi \\ C_0 &= 36\pi^2\varepsilon H_3^2\varepsilon\sigma^2 + 9\Theta^2\varepsilon H_3^2\varepsilon H_1^2\pi^2 - 9\pi^2\varepsilon H_3^4 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Uma observação mais cuidadosa da Equação (5.25) revela que esta possui em geral quatro raízes complexas. Esta característica se contrapõem aos requerimentos utilizados na solução perturbada que assumem a como uma grandeza real. Para transpor esta dificuldade específica, deve-se assumir alguma hipótese fisicamente válida.

⁴Note que os coeficientes εH_i representam uma única grandeza e não a multiplicação de ε por H_i . O mesmo vale para $\varepsilon\sigma$.

O modelo matemático descrito pela Equação (5.3) assume os efeitos de duas forças de fricção: uma linear devido ao material e outra não-linear devido ao arrasto. No caso em que ambas forças de atrito estejam agindo sobre a estrutura e razoável assumir que a energia dissipada pela força de arrasto é muito maior que a dissipada internamente no material. Baseado nesta hipótese, pode-se assumir que em regime permanente $\varepsilon H_1 = 0$ e assim a solução da Equação (5.25) torna-se bi-quadrática ou matematicamente,

$$\bar{a} = \pm \frac{\sqrt{-2 E_4 E_2 \pm 2 E_4 \sqrt{E_2^2 - 4 E_4 E_0}}}{2 E_4} \quad (5.27)$$

na qual os coeficientes E_i são descritos por⁵,

$$\begin{aligned} E_4 &= -9 \pi^2 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \Theta^2 \varepsilon \sigma - 54 \pi^2 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \varepsilon H_5 \varepsilon \sigma + 9 \pi^2 \varepsilon H_4^2 \varepsilon \sigma^2 - \frac{117}{4} \pi^2 \varepsilon H_4^2 \varepsilon H_3^2 \\ &\quad - 32 \Theta^4 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \varepsilon H_2^2 + \frac{9}{16} \pi^2 \varepsilon H_3^2 \Theta^4 + \frac{81}{4} \pi^2 \varepsilon H_3^2 \varepsilon H_5^2 + \frac{27}{4} \pi^2 \varepsilon H_3^2 \varepsilon H_5 \Theta^2 \\ E_2 &= 27 \pi^2 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3^3 + 54 \pi^2 \varepsilon H_3^2 \varepsilon H_5 \varepsilon \sigma + 16 \Theta^4 \varepsilon H_3^2 \varepsilon H_2^2 + 9 \pi^2 \varepsilon H_3^2 \Theta^2 \varepsilon \sigma - 36 \pi^2 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \varepsilon \sigma^2 \\ E_0 &= 36 \pi^2 \varepsilon H_3^2 \varepsilon \sigma^2 - 9 \pi^2 \varepsilon H_3^4 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Em adição a fase $\bar{\beta}$ é descrita por,

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{G_1}{G_2} \right) \quad (5.29)$$

na qual G_1 e G_2 são expressos por,

$$G_1 = 8 \Theta (4 \varepsilon H_2 \Theta \varepsilon H_4 \bar{a}^3 - 4 \varepsilon H_2 \Theta \varepsilon H_3 \bar{a}) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= 3 \pi (6 \varepsilon H_5 \varepsilon H_4 \bar{a}^4 + \varepsilon H_4 \Theta^2 \bar{a}^4 + 8 \varepsilon H_4 \varepsilon \sigma \bar{a}^2) + \\ &\quad + 3 \pi (-12 \varepsilon H_3 \varepsilon H_5 \bar{a}^2 - 2 \varepsilon H_3 \Theta^2 \bar{a}^2 - 16 \varepsilon H_3 \varepsilon \sigma) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Uma vez que as soluções de equilíbrio ou pontos fixos foram obtidas, é importante que a estabilidade destas soluções seja avaliada. A próxima seção é dedicada a esta análise.

⁵Note que os coeficientes E_i são obtidos assumindo $\varepsilon H_1 = 0$ nos coeficientes C_i .

5.1.3.1 Estabilidade das Soluções de Equilíbrio

Conforme mencionado no Capítulo 2, a estabilidade das soluções de equilíbrio triviais ou não-triviais pode ser convenientemente investigada a partir das equações de modulação descritas em coordenadas cartesianas. Na Seção (5.1.1), as equações de modulação foram obtidas segundo coordenadas polares. Alternativamente estas equações podem ser reescritas segundo coordenadas cartesianas como,

$$p' = -\frac{p\varepsilon H_1}{2} - \frac{2p\sqrt{p^2+q^2}\varepsilon H_2 \Theta}{3\pi} - \frac{q^3\varepsilon H_4}{2\Theta} + \frac{q\varepsilon H_3}{2\Theta} + \frac{3p^2q\varepsilon H_5}{4\Theta} + \frac{3q^3\varepsilon H_5}{4\Theta} + \frac{\Theta p^2q}{8} + \frac{\Theta q^3}{8} + \frac{q\varepsilon\sigma}{\Theta} \quad (5.32)$$

$$q' = -\frac{q\varepsilon H_1}{2} - \frac{2q\sqrt{p^2+q^2}\varepsilon H_2 \Theta}{3\pi} - \frac{p^3\varepsilon H_4}{2\Theta} + \frac{p\varepsilon H_3}{2\Theta} - \frac{3pq^2\varepsilon H_5}{4\Theta} - \frac{3p^3\varepsilon H_5}{4\Theta} - \frac{\Theta pq^2}{8} - \frac{\Theta p^3}{8} - \frac{p\varepsilon\sigma}{\Theta} \quad (5.33)$$

na qual o operador $()' = \frac{d()}{dT_1}$. Note que estas equações descrevem um sistema autônomo⁶ bidimensional.

Com as equações de modulação convenientemente escritas, a estabilidade das soluções de equilíbrio pode ser analisada. Para isso, inicialmente é necessário a obtenção da matriz Jacobiana Seydel (1994) associada com as Equações (5.32) e (5.33), ou seja

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

na qual os coeficientes J_{ij} são

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\frac{\varepsilon H_1}{2} - \frac{2\varepsilon H_2 \Theta \sqrt{p^2+q^2}}{3\pi} - \frac{2\varepsilon H_2 \Theta p^2}{3\pi\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{3\varepsilon H_5 pq}{2\Theta} + \frac{\Theta pq}{4} \\ J_{12} &= -\frac{2\varepsilon H_2 \Theta pq}{3\pi\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{3\varepsilon H_4 q^2}{2\Theta} + \frac{\varepsilon H_3}{2\Theta} + \frac{3\varepsilon H_5 p^2}{4\Theta} + \frac{9\varepsilon H_5 q^2}{4\Theta} + \frac{\Theta p^2}{8} + \frac{3\Theta q^2}{8} + \frac{\varepsilon\sigma}{\Theta} \\ J_{21} &= \frac{\varepsilon H_3}{2\Theta} - \frac{2\varepsilon H_2 \Theta pq}{3\pi\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{3\varepsilon H_4 p^2}{2\Theta} - \frac{9\varepsilon H_5 p^2}{4\Theta} - \frac{3\varepsilon H_5 q^2}{4\Theta} - \frac{3\Theta p^2}{8} - \frac{\Theta q^2}{8} - \frac{\varepsilon\sigma}{\Theta} \\ J_{22} &= -\frac{\varepsilon H_1}{2} - \frac{2\varepsilon H_2 \Theta \sqrt{p^2+q^2}}{3\pi} - \frac{2\varepsilon H_2 \Theta q^2}{3\pi\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{3\varepsilon H_5 pq}{2\Theta} - \frac{\Theta pq}{4} \end{aligned} \quad (5.35)$$

A estabilidade de uma solução de um ponto de equilíbrio representada por $(p, q) =$

⁶Conforme anteriormente descrito, refere-se à independência temporal do sistema

$(\bar{p}, \bar{q})$ depende da localização no plano complexo dos autovalores da matriz Jacobiana descrita anteriormente. Estes autovalores μ_m são as raízes da equação característica obtida a partir da seguinte equação,

$$\begin{vmatrix} \bar{J}_{11} - \mu & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

na qual $\bar{J}_{ij}$ representa a matriz Jacobiana associada especificamente a uma a solução de equilíbrio do tipo $(p, q) = (\bar{p}, \bar{q})$.

Embora cada posição na matriz Jacobiana seja composta por um número elevado de termos, com o auxílio de um software de manipulação simbólica foi possível a obtenção da equação característica algebricamente. Portanto os autovalores podem ser obtido a partir da solução da seguinte expressão algébrica,

$$r_2 \mu_1^2 + r_1 \mu_1 + r_0 = 0 \quad (5.37)$$

na qual os coeficientes r_m são descritos como,

$$r_2 = 1 \quad (5.38)$$

$$r_1 = \varepsilon H_1 + \frac{2\varepsilon H_2 \Theta \bar{p}^2}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + \frac{2\varepsilon H_2 \Theta \bar{q}^2}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} r_0 = & -\frac{\varepsilon H_3^2}{4\Theta^2} + \frac{\varepsilon \sigma \bar{q}^2}{2} + \frac{\varepsilon \sigma^2}{\Theta^2} + \frac{3\Theta^2 \bar{p}^4}{64} + \frac{\Theta \varepsilon H_2 \varepsilon H_1 \bar{p}^2}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + \frac{\Theta \varepsilon H_1 \varepsilon H_2 \bar{q}^2}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + \\ & + \frac{9\varepsilon H_5 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{8} + \frac{8\Theta^2 \varepsilon H_2^2 \bar{p}^2}{9\pi^2} + \frac{27\varepsilon H_5^2 \bar{p}^4}{16\Theta^2} - \frac{9\varepsilon H_4^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{4\Theta^2} + \frac{27\varepsilon H_5^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{8\Theta^2} - \\ & - \frac{9\varepsilon H_4 \varepsilon H_5 \bar{q}^4}{8\Theta^2} + \frac{3\Theta^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{32} - \frac{3\varepsilon H_4 \bar{q}^4}{16} + \frac{27\varepsilon H_5^2 \bar{q}^4}{16\Theta^2} + \frac{\varepsilon \sigma \bar{p}^2}{2} + \frac{3\varepsilon H_4 \bar{p}^4}{16} + \\ & + \frac{9\varepsilon H_5 \varepsilon H_4 \bar{p}^4}{8\Theta^2} + \frac{9\varepsilon H_5 \bar{q}^4}{16} + \frac{9\varepsilon H_5 \bar{p}^4}{16} + \frac{3\varepsilon H_5 \varepsilon \sigma \bar{q}^2}{\Theta^2} + \frac{3\varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \bar{q}^2}{4\Theta^2} + \\ & + \frac{3\varepsilon H_3 \varepsilon H_4 \bar{p}^2}{4\Theta^2} + \frac{3\varepsilon \sigma \varepsilon H_4 \bar{p}^2}{2\Theta^2} + \frac{3\varepsilon H_3 \varepsilon H_5 \bar{p}^2}{4\Theta^2} + \frac{\varepsilon H_3 \bar{p}^2}{8} - \frac{3\varepsilon H_4 \varepsilon \sigma \bar{q}^2}{2\Theta^2} - \\ & - \frac{3\varepsilon H_3 \varepsilon H_5 \bar{q}^2}{4\Theta^2} + \frac{3\Theta^2 \bar{q}^4}{64} - \frac{\varepsilon H_2 \bar{q} \varepsilon H_4 \bar{p}^3}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} - \frac{\varepsilon H_3 \bar{q}^2}{8} - \frac{\varepsilon H_4 \varepsilon H_2 \bar{p} \bar{q}^3}{\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + \\ & + \frac{2\varepsilon H_2 \varepsilon H_3 \bar{p} \bar{q}}{3\pi \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + \frac{3\varepsilon H_5 \varepsilon \sigma \bar{p}^2}{\Theta^2} + \frac{8\Theta^2 \varepsilon H_2^2 \bar{q}^2}{9\pi^2} + \frac{\varepsilon H_1^2}{4} \end{aligned} \quad (5.40)$$

A partir deste ponto todo o esforço algébrico realizado é recompensado, pois a análise de estabilidade das soluções de equilíbrio consiste em se investigar as soluções da Equação (5.37).

Estabilidade das Soluções Triviais: Neste caso, a soluções de equilíbrio é descrita como $(\bar{p}, \bar{q}) = (0, 0)$. Substituindo esta condição nas Equações (5.38)-(5.40) resulta na seguinte expressão para a Equação (5.37),

$$\mu^2 + \varepsilon H_1 \mu - \frac{\varepsilon H_3^2}{4\Theta^2} + \frac{\varepsilon H_1^2}{4} + \frac{\varepsilon \sigma^2}{\Theta^2} = 0 \quad (5.41)$$

cujas soluções são:

$$\mu_{1,2} = -\frac{\varepsilon H_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon H_3^2 - 4\varepsilon \sigma^2}}{2\Theta} \quad (5.42)$$

Observando os autovalores descritos pela Equação (5.42) nota-se que estes podem ser complexos ou reais. A distinção entre a natureza destes autovetores pode ser avaliada em dois casos:

1. Caso $\varepsilon H_3^2 - 4\varepsilon \sigma^2 < 0$: Neste caso os autovalores $\mu_{1,2}$ formam um par de complexo conjugado e portanto trata-se de um ponto de equilíbrio tipo Foco. Em adição, como a parte real destes autovalores é sempre negativa este ponto de equilíbrio é estável. Em função do parâmetro de sintonia $\varepsilon \sigma$ esta condição é satisfeita quando:

$$\varepsilon \sigma > \frac{\varepsilon H_3}{2}, \quad ou \quad \varepsilon \sigma < -\frac{\varepsilon H_3}{2} \quad (5.43)$$

Se $\varepsilon \sigma \neq 0$ e a variável de controle for εH_3 , então esta condição ocorre quando,

$$\varepsilon H_3 < 2\varepsilon \sigma \quad (5.44)$$

por outro lado especificamente quando $\varepsilon \sigma = 0$ o caso em questão não mais se aplica pois os autovalores tornam-se reais.

2. Caso $\varepsilon H_3^2 - 4\varepsilon \sigma^2 > 0$: Neste caso os autovalores $\mu_{1,2}$ sempre serão reais e $\mu_1 \neq \mu_2$. Nesta condição é possível a ocorrência de dois tipos de pontos de equilíbrio: nó ou ponto de sela. A distinção entre eles pode ser avaliada a partir do sinal de cada autovetor, ou seja:

- Se $\mu_1 \cdot \mu_2 > 0$, então o ponto de equilíbrio é definido como um nó. Isto ocorre pois ambos os autovalores possuem o mesmo sinal. Em função do parâmetro de sintonia $\varepsilon \sigma$ esta condição é satisfeita quando,

$$\varepsilon \sigma > \sqrt{\frac{\varepsilon H_3^2 - \varepsilon H_1^2 \Theta^2}{4}}, \quad ou \quad \varepsilon \sigma < -\sqrt{\frac{\varepsilon H_3^2 - \varepsilon H_1^2 \Theta^2}{4}} \quad (5.45)$$

ou no caso da variável de controle for εH_3 esta condição ocorre quando,

$$\varepsilon H_3 < \sqrt{4\varepsilon\sigma^2 + \varepsilon H_1^2\Theta^2} \quad (5.46)$$

Por fim, observa-se que dentro das condições em questão, os valores de $\mu_{1,2}$ serão sempre negativos e portanto caracterizando o ponto de equilíbrio como estável.

- Se $\mu_1 \cdot \mu_2 < 0$, então os autovalores possuem sinais diferentes e o ponto de equilíbrio é um ponto de sela, que é por definição sempre instável Seydel (1994). Em função do parâmetro de sintonia $\varepsilon\sigma$ esta condição é satisfeita quando,

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon H_3^2 - \varepsilon H_1^2\Theta^2}{4}} < \varepsilon\sigma < \sqrt{\frac{\varepsilon H_3^2 - \varepsilon H_1^2\Theta^2}{4}} \quad (5.47)$$

ou no caso da variável de controle for εH_3 esta condição ocorre quando,

$$\varepsilon H_3 > \sqrt{4\varepsilon\sigma^2 + \varepsilon H_1^2\Theta^2} \quad (5.48)$$

A partir da análise das soluções de equilíbrio triviais apresentada anteriormente pode-se observar alguns fatos importantes. Primeiramente em nenhuma das condições que regem a estabilidade da estrutura aparecem os termos relativos às não-linearidades geométricas, de inércia ou de fricção. Este fato condiz exatamente com os aspectos físicos do problema, uma vez que todas estas não-linearidades surgem devido ao movimento oscilatório da estrutura.

Segundo, mesmo se tratando de soluções triviais — que são naturalmente mais simples — observa-se a possível existência de três pontos de equilíbrio distintos: nó e foco estáveis, ponto de sela instável. A ocorrência de um destes três pontos depende das características da excitação (Q_o e Θ) e da estrutura (A_1 e εH_1). Portanto dependendo do valor destas características um destes três pontos de equilíbrio pode ocorrer.

A Figura (36) apresenta o fluxo ao redor do nó estável. Nota-se que neste caso a estrutura não oscila e converge para o equilíbrio trivial rapidamente. Ainda nesta figura é apresentado as condições nas quais este tipo de ponto de equilíbrio ocorre.

Já a Figura (37) apresenta o fluxo ao redor de outro possível ponto de equilíbrio, neste caso um foco estável. Pode-se observar que a estrutura oscila ao redor deste ponto de equilíbrio e a cada ciclo a magnitude da oscilação diminui até a extinção do movimento. Em adição, nesta figura é também apresentado as condições nas quais este tipo de ponto de equilíbrio ocorre.

Figura 36: Característica típicas do ponto de equilíbrio estável tipo nó para as soluções triviais. A esquerda é demonstrado um mapa plano típico do nó estável, obtido a partir da integração numérica das Equações (5.32) e (5.33) com $\varepsilon H_1 = 0.0160$, $\varepsilon H_2 = 0.3330$, $\varepsilon H_3 = 0.07412$, $\varepsilon H_4 = 0.0160$, $\varepsilon H_5 = 0.62.7218$ e $\varepsilon \sigma = 0.36$. A direita encontram-se as condições de ocorrência deste tipo de ponto de equilíbrio.

Figura 37: Característica típicas do ponto de equilíbrio estável tipo foco para as soluções triviais. A esquerda é demonstrado um mapa plano de fase típico do foco estável. Mapa obtido a partir da integração numérica das Equações (5.32) e (5.33) com $\varepsilon H_1 = 0.0160$, $\varepsilon H_2 = 0.3330$, $\varepsilon H_3 = 0.07412$, $\varepsilon H_4 = 0.0160$, $\varepsilon H_5 = 0.62.7218$ e $\varepsilon \sigma = 0.85$. A direita encontram-se as condições de ocorrência deste tipo de ponto de equilíbrio.

Po fim, a Figura (38) apresenta o fluxo típico ao redor de um ponto de sela. Observa-se neste caso que o movimento sofre uma repulsão quanto se aproxima da solução trivial. Nesta mesma figura encontram-se as condições de ocorrência deste ponto de equilíbrio instável.

De maneira conclusiva observa-se que o surgimento de um nó ocorre em uma estreita faixa, tanto quando o parâmetro de controle for $\varepsilon \sigma$ ou εH_3 . Fisicamente o amortecimento estrutural – intrínseco em εH_1 – é o responsável pela extensão da faixa de ocorrência do nó, isto é, quanto maior o amortecimento estrutural maior é a faixa de ocorrência deste tipo de ponto de equilíbrio. Por outro lado, o aumento do amortecimento estrutural dentro de níveis fisicamente realizáveis não é capaz de evitar o surgimento de um ponto de sela e portanto evitar que a ressonância paramétrica principal ocorra e conseqüentemente o desenvolvimento da vibração paramétrica principal.

Figura 38: Característica típicas do ponto de equilíbrio tipo sela para as soluções triviais. A esquerda é demonstrado um mapa plano de fase típico do ponto de sela. Mapa obtido a partir da integração numérica das Equações (5.32) e (5.33) com $\varepsilon H_1 = 0.0160$, $\varepsilon H_2 = 0.3330$, $\varepsilon H_3 = 0.07412$, $\varepsilon H_4 = 0.0160$, $\varepsilon H_5 = 0.62.7218$ e $\varepsilon \sigma = 0.20$. A direita encontram-se as condições de ocorrência deste tipo de ponto de equilíbrio.

Estabilidade das Soluções Não-Triviais: Neste caso é necessário que os autovalores sejam obtidos diretamente da solução da Equação (5.37). Devido ao grande número de termos presente nos coeficientes desta equação, é inviável do ponto de vista matemático que os autovalores sejam obtidos analiticamente, tal como no caso das soluções triviais. Entretanto a análise de estabilidade pode ser alternativamente realizada pelo emprego do critério de Routh-Hurwitz. Para uma aplicação mais efetiva deste critério é interessante que a equação característica descrita pela Equação (5.37) seja reescrita em coordenadas polares. Realizando a transformação cartesiano $\rightarrow$ polar resulta,

$$r_2^p \mu_1^2 + r_1^p \mu_1 + r_0^p = 0 \quad (5.49)$$

na qual o super-escrito p denota coordenadas polares e os coeficientes r_2^p , r_1^p e r_0^p são descritos por⁷:

⁷Note que os coeficientes r_2^p , r_1^p e r_0^p respeitando a hipótese feita anteriormente não levam em consideração o amortecimento estrutural e são válidos para $\bar{a} > 0$.

$$\begin{aligned}
r_2^p &= 1 \\
r_1^p &= \frac{2\bar{a}\Theta\varepsilon H_2}{\pi}, \quad \bar{a} > 0 \\
r_0^p &= \frac{2\bar{a} \cos(\bar{\beta}) \varepsilon H_2 \sin(\bar{\beta}) \varepsilon H_3 \Theta^2 \pi}{3} - \bar{a}^3 \sin(\bar{\beta}) \varepsilon H_4 \cos(\bar{\beta}) \varepsilon H_2 \Theta^2 \pi + \\
&\quad + \frac{3\Theta^4 \bar{a}^4 \pi^2}{64} + \frac{8\Theta^4 \varepsilon H_2^2 \bar{a}^2}{9} + \frac{27\bar{a}^4 \varepsilon H_5^2 \pi^2}{16} + \frac{\varepsilon H_3 \bar{a}^2 \cos(\bar{\beta})^2 \Theta^2 \pi^2}{4} + \\
&\quad + \frac{9\bar{a}^4 \varepsilon H_4 \varepsilon H_5 \pi^2 \cos(\bar{\beta})^2}{4} - \frac{3\bar{a}^4 \varepsilon H_4 \Theta^2 \pi^2}{16} + \frac{3\bar{a}^2 \varepsilon H_4 \varepsilon H_3 \pi^2}{4} + \\
&\quad + \frac{9\bar{a}^4 \varepsilon H_5 \Theta^2 \pi^2}{16} - \frac{\varepsilon H_3 \bar{a}^2 \Theta^2 \pi^2}{8} + \frac{\bar{a}^2 \varepsilon \sigma \Theta^2 \pi^2}{2} - \frac{9\bar{a}^4 \varepsilon H_4 \varepsilon H_5 \pi^2}{8} - \\
&\quad - \frac{3\varepsilon H_3 \bar{a}^2 \varepsilon H_5 \pi^2}{4} - \frac{9\bar{a}^4 \varepsilon H_4^2 \cos(\bar{\beta})^2 \pi^2}{4} - \frac{3\bar{a}^2 \varepsilon H_4 \varepsilon \sigma \pi^2}{2} + \\
&\quad + \frac{9\bar{a}^4 \varepsilon H_4^2 \cos(\bar{\beta})^4 \pi^2}{4} + 3\bar{a}^2 \varepsilon H_5 \varepsilon \sigma \pi^2 + \frac{3\bar{a}^4 \varepsilon H_4 \Theta^2 \pi^2 \cos(\bar{\beta})^2}{8} + \\
&\quad + 3\varepsilon \sigma \varepsilon H_4 \bar{a}^2 \cos(\bar{\beta})^2 \pi^2 + \frac{3\varepsilon H_3 \varepsilon H_5 \bar{a}^2 \cos(\bar{\beta})^2 \pi^2}{2} - \frac{\varepsilon H_3^2 \pi^2}{4}, \quad \bar{a} > 0 \quad (5.50)
\end{aligned}$$

nos quais $\bar{a}$ e $\bar{\beta}$ são respectivamente descritos pelas Equações (5.27) e (5.29).

No caso da Equação (5.49) o critério de Routh-Hurwitz descreve que as condições necessárias e suficientes para que todas as raízes tenham parte real negativa e portanto estáveis são:

$$r_2^p > 0, \quad r_1^p > 0, \quad r_0^p > 0 \quad (5.51)$$

Observando a Equação (5.51) juntamente com as informações contidas na Equação (5.50) nota-se que r_2^p e r_1^p sempre serão maiores que zero. Assim para se ter acesso à estabilidade das soluções é necessário que apenas uma das três equação descritas pela Equação (5.51) seja avaliada. Portanto para que uma solução de equilíbrio não-trivial seja estável $r_0^p > 0$, caso contrário, esta solução é instável.

A partir deste ponto o comportamento dinâmico em regime permanente pode ser cautelosamente investigado. Nas próximas seções será apresentado o efeito relativos à excitação paramétrica nas características da vibração em regime permanente. Juntamente será apresentado como que o amortecimento não-linear afeta estes resultados. Por fim será demonstrado como que o amortecimento não-linear afeta as características da resposta em regime permanente para uma condição de excitação específica. A próxima seção apresenta os efeitos da frequência da excitação paramétrica sobre as características da vibração paramétrica principal.

5.1.3.2 Curvas Resposta-Frequência

Quando um diagrama de bifurcação possui como parâmetro de controle uma variável relacionada com a frequência de excitação, este diagrama é denominado curva resposta-frequência. A Figura (39) apresenta uma curva resposta-frequência típica considerando que a estrutura está operando no vácuo, isto é, para $\varepsilon H_2 = 0$. Inicialmente observa-se que a curva está inclinada para a esquerda, indicando que para este modo natural os termos não-lineares de inércia são mais fortes que os termos não-lineares devido a curvatura. Em adição, linhas sólidas descrevem ramificações estáveis, enquanto que as linhas tracejadas descrevem ramificações instáveis. Neste figura o parâmetro de controle é descrito por $\varepsilon\sigma$, que por sua vez descreve a proximidade da frequência de excitação paramétrica de uma condição de ressonância paramétrica principal.

Aumentando o valor de $\varepsilon\sigma$ a partir do ponto *A* a resposta permanece trivial e estável até que o valor crítico $\varepsilon\sigma = -\frac{\varepsilon H_3}{2}$ seja atingido. Este valor crítico corresponde ao ponto *C*. Aumentando ainda mais o valor do parâmetro de controle a partir do ponto *C*, a resposta trivial perde a estabilidade através de uma bifurcação subcrítica de forquilha e salta subitamente para o ponto *D*, pertencente a uma ramificação não-trivial estável. Exatamente neste momento ocorre o surgimento da vibração paramétrica principal e a estrutura oscila periodicamente. A partir do ponto *D* a magnitude da resposta diminui continuamente com o aumento de $\varepsilon\sigma$ até que o ponto *E* seja atingido. Com o aumento de $\varepsilon\sigma$ além do ponto *E* uma resposta trivial estável é novamente atingida através de uma bifurcação supercrítica de forquilha. Este caso – em que $\varepsilon\sigma$ tem seu valor aumentado – é denominado de varredura ascendente.

Por outro lado, quando é realizado uma varredura descendente de $\varepsilon\sigma$ partindo do ponto *F* a resposta permanece trivial e estável até que o ponto *E* seja atingido. Este ponto corresponde ao valor crítico $\varepsilon\sigma = \frac{\varepsilon H_3}{2}$. Ao ultrapassar o ponto *E*, a resposta trivial perde a estabilidade através de uma bifurcação supercrítica de forquilha e uma ramificação não-trivial estável *EDG* é alcançada. A partir deste ponto, a amplitude da resposta aumenta continuamente conforme $\varepsilon\sigma$ diminui, ultrapassando o ponto *D* e caminhando em direção ao ponto *G*. Um pouco antes que este ponto seja atingido, a amplitude começa a diminuir timidamente. Quando o ponto *G* é efetivamente atingido a ramificação não-trivial *EDG* perde a estabilidade através de uma bifurcação sela-nó (*turning point*) e a resposta salta subitamente para o ponto *B*, pertencente a ramificação trivial estável *ABC*. A partir do ponto *B*, a resposta permanece trivial e estável com a diminuição de $\varepsilon\sigma$.

Por fim pode-se observar na Figura (39) outra característica importante. Na liter-

Figura 39: Curva resposta-frequência típica na ausência do amortecimento não-linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e para $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$, $\varepsilon H_4 = 3.4674$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$.

atura a maioria dos resultados teóricos obtidos para o caso de ressonância paramétrica principal em vigas na configuração livre-engastada, como por exemplo em Zavodney & Nayfeh (1989) e Nayfeh & Pai (2004), descrevem que no vácuo as ramificação não-triviais estável e instável não se encontram. Entretanto conforme apresentado na figura anterior, as previsões teóricas obtidas na presente pesquisa descrevem que ramificação não-triviais estável *EDG* e instável *CG* encontram-se no ponto *G*. Este resultado diverge dos trabalhos anteriores.

Após uma reflexão sobre esta questão, observou-se que a inclusão do termo de excitação paramétrica de alta ordem — descrito na equação de movimento (5.3) como $\varepsilon^1 H_4 \cos(\Theta t^* + \varphi) w_o^{*3}$ — é o responsável por fazer com que as ramificação não-triviais estável *EDG* e instável *CG* encontrem-se no ponto *G*. Como este termo foi naturalmente derivado das energias do sistema e portanto não foi adicionado artificialmente (tal como as suposições sobre as forças de atrito) pode-se concluir que trata-se de um termo importante, sobre tudo para as características de estabilidade das soluções.⁸

Com o conhecimento da influência da variação na excitação paramétrica sobre as

⁸Como este assunto diverge do objetivo da presente dissertação, estudos mais aprofundados sobre a influência do termos de excitação paramétrica de alta ordem devem ser realizados em pesquisas futuras.

características da vibração em regime permanente quando a estrutura opera em vácuo, os efeitos provocados pelo meio viscoso podem ser avaliados. Mais especificamente vários meios viscosos com diferentes densidades podem ser avaliados a partir da inclusão do parâmetro εH_2 .

A Figura (40) apresenta como que as características da densidade do meio de operação afetam a curva-resposta frequência. Em linhas gerais, pode-se observar inicialmente que independentemente do valor do parâmetro εH_2 os pontos críticos C e E não tem seu valor alterado. Em adição a assimetria da curva tende a diminuir com o aumento de εH_2 . Em termos específicos duas características são fortemente alteradas: a amplitude da resposta e a estabilidade da ramificação não-trivial instável CG .

Figura 40: Curva resposta-frequência típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear e para $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$, $\varepsilon H_4 = 3.4674$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$.

O máximo valor da magnitude da resposta $\bar{a}_{max}$ é uma informação sempre importante e desejada. Neste aspecto é igualmente importante o conhecimento do efeito do amortecimento não-linear sobre $\bar{a}_{max}$. Para satisfazer esta necessidade a Figura (41) apresenta como que o amortecimento quadrático afeta $\bar{a}_{max}$. Na Figura (41a) observa-se inicialmente que não existe uma proporcionalidade direta entre a redução de $\bar{a}_{max}$ e a intensidade do amortecimento quadrático. Ao contrário, existe uma relação não proporcional e com três regiões bem definidas. Na primeira região a taxa de variação do valor máximo da resposta, isto é, $\frac{\partial \bar{a}_{max}}{\partial \varepsilon H_2}$ é pequena. Já na segunda região ocorre el-

evacão considerável desta taxa e nesta região ocorre as maiores taxas de variação. Por fim na terceira região a taxa de variação é reduzida constantemente conforme aumenta a intensidade do amortecimento não-linear. Outra informação importante é o efeito do nível da amplitude da excitação paramétrica — descrita pelo parâmetro adimensional εH_3 — no comportamento das curvas.

Já a Figura (41b) apresenta a redução percentual relativa à ausência do amortecimento não-linear, isto é, para $\varepsilon H_2 = 0$. Para $\varepsilon H_3 = 2.62$, ao se elevar a intensidade do amortecimento quadrático de $\varepsilon H_2 = 0$ para $\varepsilon H_2 = 0.1$, $\bar{a}_{max}$ é reduzido em 5.3%. Essa faixa de valores encontra-se na primeira região. Para um acréscimo da mesma ordem — ou seja, igual à 0.1 — mas elevando $\varepsilon H_2 = 0.15$ para $\varepsilon H_2 = 0.251$, $\bar{a}_{max}$ é reduzido em 22.5%. Essa faixa de valores encontra-se na segunda região. Assim observa-se que para o mesmo acréscimo em εH_2 houve uma redução na amplitude máxima da resposta quase cinco vezes maior. Por fim ao se elevar $\varepsilon H_2 = 0.60$ para $\varepsilon H_2 = 0.70$, $\bar{a}_{max}$ é reduzido em 4%. Essa faixa pertence à terceira região.

Figura 41: Influência do amortecimento não-linear na resposta não-trivial $\bar{a}$: (a) variação do máximo valor de $\bar{a}$ com o amortecimento não-linear ε ; (b) redução percentual do máximo valor de $\bar{a}$ relativo a operação em vácuo. Curvas obtidas para: (—) $\varepsilon H_1 = 0.0$, $\varepsilon H_3 = 2.62$, $\varepsilon H_4 = 4.25$, $\varepsilon H_5 = 62.72$; (...) $\varepsilon H_1 = 0.0$, $\varepsilon H_3 = 2.13$, $\varepsilon H_4 = 3.46$, $\varepsilon H_5 = 62.72$ e (---) $\varepsilon H_1 = 0.0$, $\varepsilon H_3 = 1.57$, $\varepsilon H_4 = 2.55$, $\varepsilon H_5 = 62.72$.

Assim conclui-se que o valor de $\bar{a}_{max}$ é menos sensível à εH_2 quando este se aproxima de 0 ou de 1. Por outro lado é mais sensível para valores entre 0.1 e 0.4. Entretanto esta faixa de maior sensibilidade é fortemente afetada pela magnitude da excitação paramétrica, representada por εH_3 , tal como apresenta a Figura (41).

De volta a Figura (40) nota-se que a estabilidade da ramificação não-trivial instável CG é fortemente alterada com o amortecimento não-linear. Esta é uma observação importante pois envolve a formação da bifurcação sela-nó descrita pelo ponto G . Esta bifurcação é responsável pelo fenômeno de salto quando se realiza uma varredura descendente em $\varepsilon \sigma$.

A partir da resolução numérica da Equação (5.27) – que descreve as soluções para $\bar{a}$ não-triviais – pode-se identificar valores críticos de εH_2 na curva resposta-frequência que fazem desaparecer a bifurcação descrita pelo ponto G . Como visto anteriormente a curva resposta-frequência é fortemente afetada pela magnitude da excitação, representada diretamente por εH_3 . Portanto os valores críticos do amortecimento não-linear também são afetados por εH_3 . A partir de vários valores εH_3 constatou-se que os valores críticos de εH_2 que fazem desaparecer a bifurcação G podem ser obtidos a partir da seguinte expressão:

$$\varepsilon H_2^{crit} = -0.012\varepsilon H_3^2 + 0.14\varepsilon H_3 + 0.14 \quad (5.52)$$

A expressão anterior juntamente com os resultados preditos pela teoria são apresentados na Figura (42).

Figura 42: Valores críticos de εH_2 em função de εH_3 que levam ao desaparecimento da bifurcação sela-nó descrita na Figura (40) pelo ponto G . Para $\varepsilon H_1 = 0.0$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$. O parâmetro εH_4 tal como εH_3 depende da amplitude da excitação paramétrica e pode ser obtido a partir da Equação (5.4).

Portanto a partir da Equação (5.52) pode-se estimar para uma condição de excitação conhecida qual deve ser o valor de εH_2 que faz com desaparecer o fenômeno de salto. Este resultado pode ter aplicações diretas no projeto de nano estruturas que podem operar em diferentes meios viscosos.

5.1.3.3 Curvas Resposta-Amplitude

Quando um diagrama de bifurcação possui como parâmetro de controle uma variável relacionada com a amplitude da excitação, este diagrama é denominado curva resposta-amplitude. Este tipo de diagrama é fundamental para a compreensão de como as características da vibração paramétrica principal em regime permanente são alteradas com a amplitude da excitação. Igualmente importante é a compreensão de como a viscosidade do meio de operação afeta as características deste diagrama. Assim esta seção é destinada em analisar estes assuntos.

Como é amplamente conhecido (NAYFEH; MOOK, 1979) a proximidade de uma condição de ressonância afeta fortemente as características das curvas resposta-freqüência. Especificamente no problema abordado neste capítulo, esta proximidade é descrita pelo parâmetro $\varepsilon\sigma$. Portanto nesta seção serão avaliados três casos distintos, cuja distinção refere-se à proximidade de uma exata condição de ressonância paramétrica principal.

Caso $\varepsilon\sigma < 0$: A Figura (43) apresenta uma curva resposta-freqüência típica considerando que a estrutura está operando no vácuo ($\varepsilon H_2 = 0$) e para $\varepsilon\sigma = -0.73$. Em adição, linhas sólidas descrevem ramificações estáveis, enquanto que as linhas tracejadas descrevem ramificações instáveis. Nesta figura o parâmetro de controle é descrito por εH_3 , que por sua vez descreve a magnitude da excitação paramétrica.

Aumentando o valor de εH_3 a partir do ponto A a resposta permanece trivial e estável até que o valor crítico $\varepsilon H_3 = \sqrt{4\varepsilon\sigma^2 + \varepsilon H_1^2 \Theta^2}$ seja atingido. Este valor crítico corresponde ao ponto C . Aumentando ainda mais o valor do parâmetro de controle a partir do ponto C , a resposta trivial perde a estabilidade através de uma bifurcação subcrítica de forquilha e salta subitamente para o ponto D , que pertence a uma ramificação não-trivial estável. Exatamente neste momento ocorre o surgimento da vibração paramétrica principal e a estrutura oscila periodicamente. A partir do ponto D a magnitude da resposta aumenta continuamente com o aumento de εH_3 .

Realizado o caminho inverso – ou seja, partindo do ponto E – observa-se que a amplitude da resposta diminui continuamente conforme εH_3 diminui, ultrapassando o ponto D e caminhando em direção ao ponto F . Um pouco antes que este ponto seja atingido, a amplitude começa a diminuir mais intensamente. Quando o ponto F é efetivamente atingido a ramificação não-trivial EDF perde a estabilidade através de uma bifurcação sela-nó (*turning point*) e a resposta salta subitamente para o ponto B , pertencente a ramificação trivial estável ABC . A partir do ponto B , a resposta permanece trivial e estável com a diminuição de εH_3 .

Figura 43: Curva resposta-amplitude típica na ausência do amortecimento não-linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e $\varepsilon \sigma = -0.73$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

Com o conhecimento da influência da variação da magnitude da excitação paramétrica sobre a vibração em regime permanente quando a estrutura opera em vácuo, os efeitos provocados pelo meio viscoso podem ser avaliados. Mais especificamente vários meios viscosos com diferentes densidades podem ser avaliados a partir da inclusão do parâmetro εH_2 .

A Figura (44) apresenta como que as características da densidade do meio de operação afeta a curva resposta-amplitude. Em linhas gerais, pode-se observar inicialmente que independentemente do valor do parâmetro εH_2 o ponto crítico C não tem seu valor alterado. Esta característica confirma as previsões de estabilidade realizada anteriormente e portanto o surgimento da ressonância paramétrica principal independe da densidade do meio de operação. Em termos específicos duas características são fortemente alteradas: a amplitude vibratória e a estabilidade da ramificação não-trivial instável CF .

Em relação a Figura (44) é interessante observar a magnitude da resposta nos pontos D e F , denominadas respectivamente de $\bar{a}_D$ e $\bar{a}_F$. A magnitude $\bar{a}_D$ descreve o valor mínimo da amplitude vibratória assim que a ressonância paramétrica principal se desenvolve, ou seja, se o ponto crítico C for excedido. Já a magnitude $\bar{a}_F$ descreve

Figura 44: Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon\sigma = -0.73$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

o valor mínimo da amplitude da resposta no instante que a estrutura deixa a condição de ressonância paramétrica principal. A Figura (45) apresenta os valores de $\bar{a}_D$ e $\bar{a}_F$ em função de εH_2 .

Além do forte efeito provocado pelo amortecimento quadrático na magnitude da curva resposta-amplitude, a estabilidade da ramificação não-trivial instável CF também é alterada. Para uma condição específica, se um determinado valor de εH_2 for excedido a bifurcação sela-no descrita pelo ponto F desaparece. Em adição a bifurcação subcrítica de forquilha descrita pelo ponto C torna-se uma bifurcação transcritical. Devido a mudança na característica desta bifurcação, o fenômeno de salto é extinto.

Caso $\varepsilon\sigma = 0$: Embora este caso seja muito difícil de ocorrer em uma condição real de operação da estrutura, demonstra algumas características interessantes. Figura (46) apresenta uma curva resposta-amplitude típica considerando que a estrutura está operando no vácuo e para e com a excitação paramétrica perfeitamente sintonizada com a condição de ressonância paramétrica principal ($\varepsilon\sigma = 0$).

Aumentando o valor de εH_3 a partir do ponto A a resposta permanece trivial e estável até que o valor crítico $\varepsilon H_3 = \sqrt{\varepsilon H_1^2 \Theta^2}$ seja atingido. Este valor crítico corresponde ao ponto C . Aumentando ainda mais o valor do parâmetro de controle a partir do ponto

Figura 45: Curvas típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear especificamente nos pontos D e F presentes na Figura (44). Resultado obtido para $\varepsilon\sigma = -0.73$, $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_2 , εH_3 , εH_4 são variáveis.

Figura 46: Curva resposta-amplitude típica na ausência do amortecimento não-linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e $\varepsilon\sigma = 0$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

C , a resposta trivial perde a estabilidade através de uma bifurcação transcritical e a solução passa suavemente para ramificação não-trivial estável CE . Exatamente neste

momento ocorre o surgimento da vibração paramétrica principal e a estrutura oscila periodicamente. A partir do ponto C a magnitude da resposta aumenta continuamente com o aumento de εH_3 .

Realizado o caminho inverso, ou seja, partindo do ponto E observa-se que a amplitude da resposta diminui continuamente conforme εH_3 diminui. Este comportamento se mantém até que o ponto C seja atingido no qual a ramificação não-trivial CF perde a estabilidade através de uma bifurcação transcítica e a resposta passa suavemente para a ramificação trivial estável AC . A partir deste ponto, a resposta permanece trivial e estável com a diminuição de εH_3 .

Uma característica interessante observada na figura anterior é o baixo valor de εH_3 que leva a deflagrar a vibração paramétrica principal. Nesta figura este valor crítico é aproximadamente 0.2, enquanto que para a Figura (43) é aproximadamente 1.4, ou seja, quase 600% maior.

A Figura (47) apresenta como que as características da densidade do meio de operação afeta a curva resposta-amplitude. Em linhas gerais, pode-se observar inicialmente que independentemente do valor do parâmetro εH_2 o ponto crítico C não tem seu valor alterado. Esta característica confirma as predições de estabilidade realizada anteriormente e portanto o surgimento da vibração paramétrica principal independe da densidade do meio de operação também para esta condição. Em termos específicos apenas a magnitude da resposta é fortemente alterada. Em adição, não ocorre alteração na característica da bifurcação descrita pelo ponto C que independentemente do valor de εH_2 permanece transcítica.

Uma característica interessante observada na figura anterior é que o aumento εH_2 tende a linearizar a ramificação não-trivial estável CE .

Caso $\varepsilon \sigma > 0$: A Figura (48) apresenta uma curva resposta-amplitude típica considerando que a estrutura está operando no vácuo e para $\varepsilon \sigma = 0.73$.

Aumentando o valor de εH_3 a partir do ponto A a resposta permanece trivial e estável até que o valor crítico $\varepsilon H_3 = \sqrt{4\varepsilon \sigma^2 + \varepsilon H_1^2 \Theta^2}$ seja atingido. Este valor crítico corresponde ao ponto C . Aumentando ainda mais o valor do parâmetro de controle a partir do ponto C , a resposta trivial perde a estabilidade através de uma bifurcação transcítica e a solução passa suavemente para ramificação não-trivial estável CE . Exatamente neste momento ocorre o surgimento da vibração paramétrica principal e a estrutura oscila periodicamente. A partir do ponto C a magnitude da resposta aumenta continuamente com o aumento de εH_3 .

Figura 47: Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon\sigma = 0$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

Realizado o caminho inverso, ou seja, partindo do ponto E observa-se que a amplitude da resposta diminui continuamente conforme εH_3 diminui. Este comportamento se mantém até que o ponto C seja atingido no qual a ramificação não-trivial CF perde a estabilidade através de uma bifurcação transcítica e a resposta passa suavemente para a ramificação trivial estável AC . A partir deste ponto, a resposta permanece trivial e estável com a diminuição de εH_3 .

Ao se comparar a Figura (48) obtida para $\varepsilon\sigma = 0.73$ com a Figura (46) obtida para $\varepsilon\sigma = 0$ pode-se observar algumas semelhanças. Primeiro, ambas possuem uma bifurcação transcítica através da qual a resposta passa de uma ramificação trivial para uma não-trivial. Segundo, as características de estabilidade são praticamente as mesmas em ambos os casos. Por outro lado, existem diferenças profundas. Primeiro as magnitudes de $\bar{a}$ são bem maiores na Figura (46). Isso ocorre principalmente devido as características observadas nas curvas resposta-freqüência, que por sua vez demonstraram uma forte assimetria à esquerda. Já a condição apresentada na Figura (48) é a que necessita que a excitação paramétrica seja mais intensa para deflagrar a vibração paramétrica principal.

A Figura (49) apresenta como que as características da densidade do meio de op-

Figura 48: Curva resposta-amplitude típica na ausência do amortecimento não-linear ($\varepsilon H_2 = 0$) e $\varepsilon \sigma = 0.73$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

eração afetam a curva resposta-amplitude para $\varepsilon \sigma = 0.73$. Em linhas gerais, pode-se observar inicialmente que independentemente do valor do parâmetro εH_2 o ponto crítico C não tem seu valor alterado, confirmando as previsões de estabilidade. Em termos específicos apenas a magnitude da resposta é fortemente alterada. Em adição, não ocorre alteração na característica da bifurcação descrita pelo ponto C que independentemente do valor de εH_2 permanece transcítica.

Na próxima seção é proposto um novo tipo de diagrama de bifurcação, o qual possui como variável de bifurcação o amortecimento quadrático. Este novo diagrama é denominado de curva resposta-amortecimento quadrático e pode ter importantes aplicações.

5.1.3.4 Curvas Resposta-Amortecimento Quadrático

Nas Seções (5.1.3.2) e (5.1.3.3) foram discutidos vários aspectos teóricos sobre a influência da excitação paramétrica sobre a magnitude da vibração paramétrica principal em regime permanente. Em adição, o efeito provocado pela viscosidade do meio sobre os resultados foi minuciosamente avaliado. Do ponto de vista de engenharia, os resultados obtidos naquelas duas seções são valiosos sobre dois aspectos principais: (i)

Figura 49: Curva resposta-amplitude típica demonstrando o efeito do amortecimento não-linear (εH_2) e para $\varepsilon\sigma = +0.73$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial) e $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Note que εH_3 , εH_4 são variáveis.

evitar que o fenômeno de ressonância paramétrica ocorra e; (ii) predizer a magnitude da resposta, no caso de ocorrência do fenômeno. Entretanto em muitas outras ocasiões, este tipo de ressonância pode ser explorado, isto é, é requerido que a estrutura ou subsistema opere nesta condição⁹. Exatamente nestes casos é importante conhecer os efeitos provocados pela alteração da viscosidade do meio, uma vez que a maioria dos fluidos têm densidade como função de outras variáveis, como por exemplo a temperatura. Exatamente nestes casos, as curvas resposta-amortecimento quadrático podem ser valiosas.

Para que uma curva resposta-amortecimento quadrática possa ser gerada, é necessário definir um ponto de operação específico. A Figura (50) apresenta uma curva resposta-frequência que define uma condição de operação específica. Nesta curva pode-se observar três regiões distintas, denominadas por *I*, *II* e *III*. Também observa-se dois pontos especiais, indicados por *P1* e *P2*. Estes pontos representam condições de operação específicas. Por fim, nota-se que o ponto *P1* está situado na região *I*, enquanto o *P2* está na região *II*.

⁹Vários dispositivos utilizam a vibração para promover algum efeito requerido. Exemplos incluem ventiladores bimorph e medidores de densidade.

Figura 50: Curva típica resposta-frequência demonstrando dois pontos específicos de operação, designados como $P1$ e $P2$. Curva obtida com $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial), $\varepsilon H_2 = 0.1$, $\varepsilon H_3 = 2.1352$, $\varepsilon H_4 = 3.4674$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$.

Quando a estrutura opera segundo o ponto $P1$ a magnitude da resposta é fornecida por $\bar{a}_{P1}$. Neste caso o valor desta magnitude pode ser uma necessidade de projeto, ou seja é um valor requerido. A Figura (51) apresenta o efeito produzido pela variação de εH_2 sobre $\bar{a}_{P1}$. Pode-se observar a presença de duas ramificações, uma estável e uma instável. Caso εH_2 diminua até o valor mínimo igual $\varepsilon H_2 = 0$ a estrutura ainda permanece oscilando, mas com amplitude 4% maior. Por outro lado se εH_2 aumentar além do ponto $P1$ a amplitude do movimento diminui constantemente sobre a ramificação não-trivial estável até que o ponto C seja alcançado. Neste ponto, $\bar{a}_{P1}$ é reduzido em 19%. Se εH_2 ultrapassar o ponto C , a solução não-trivial estável perde sua estabilidade através de uma bifurcação sela-nó e o movimento vibratório é extinto.

Quando a estrutura opera segundo o ponto $P2$ a magnitude da resposta é fornecida por $\bar{a}_{P2}$. Neste caso o valor desta magnitude também é um valor requerido. A Figura (52) apresenta o efeito produzido pela variação de εH_2 sobre $\bar{a}_{P2}$. Pode-se observar a presença de uma única ramificação estável. Desta maneira seja qual for a variação de εH_2 a resposta continua não-trivial e estável. Por outro lado, há forte redução no valor de $\bar{a}_{P2}$.

De maneira conclusiva, curvas resposta-amortecimento quadrático são muito informativas. Foi possível se observar que dentro da região II o movimento é sempre estável

Figura 51: Curva típica resposta-amortecimento quadrático demonstrando o efeito da variação de εH_2 sobre a magnitude da resposta. Curva obtida com $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$, $\varepsilon H_4 = 3.4674$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\varepsilon \sigma = -2$.

Figura 52: Curva típica resposta-amortecimento quadrático demonstrando o efeito da variação de εH_2 sobre a magnitude da resposta. Curva obtida com $\varepsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\varepsilon H_1 = 0.016$ (trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$, $\varepsilon H_4 = 3.4674$, $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\varepsilon \sigma = 0$.

e portanto a ressonância não pode ser extinta com a variação de εH_2 . Esta região é a mais indicada quando precisa-se garantir que a estrutura não irá parar de oscilar. Já a região I possui regiões de instabilidade e portanto o movimento pode se extinguir pela variação de εH_2 . É importante ressaltar que este último fato acontece devido as características de inclinação da curva resposta-frequência, que no caso abordado aqui inclina-se para a esquerda. No caso da inclinação ser à direita, as características observadas na região I passariam a ser observadas na região três, mas a analogia entre os resultados é mantida.

5.2 Experimentos

Verificar experimentalmente as predições dinâmicas obtidas por intermédio de modelos é essencial. Esta importância torna-se ainda maior quando as predições são provenientes de modelos não-lineares. Isto se deve a inerente complexidade decorrente da obtenção destes modelos, assim como, do grande número de hipóteses necessárias para a extração de um modelo que equilibre precisão nas predições e robustez e simplicidade na sua forma. Em adição, investigações experimentais não-lineares ainda promovem extenso sentimento sobre a física envolvida, dispersam suspeitas importantes e fornecem subsídios para a compreensão mais profunda sobre as características dinâmicas da estrutura sobre investigação.

Dentro deste contexto está inserido esta seção. Em termos específicos, três assuntos serão abordados. Dois envolvem diretamente as características vibratórias da estrutura com um grau de liberdade e um envolve as características do escoamento induzido pela vibração paramétrica principal. Os resultados experimentais serão confrontados com os teóricos cujo objetivo é verificar a veracidade das predições teóricas, assim como, promover um entendimento ainda mais profundo sobre a vibração paramétrica principal e como o meio viscoso age sobre este tipo de vibração.

5.2.1 Desenvolvimento Experimental

5.2.1.1 Aparato Experimental

A Figura (53) apresenta o arranjo experimental definido e empregado nas investigações sobre a vibração paramétrica principal do item de teste.

A geração do sinal de excitação, assim como, o controle da magnitude deste sinal foi realizado por um HP Agilent E8408A VXI Mainframe gerenciado pelo software I-DeasTM Test V10. Este sinal foi inicialmente amplificado por um B&K 2707

Figura 53: Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração paramétrica.

e então enviado para o excitador eletrodinâmico B&K 4810.

De maneira geral, todas as fontes de excitação controlada possuem suas próprias características e limitações. Comumente quando é requerido um ensaio mais específico — como é o caso dos ensaios não-lineares — é fundamental que as características e principalmente das limitações das fontes de excitação empregadas sejam conhecidas. Tal importância decorre da facilidade em excitar a estrutura de uma maneira não adequada ou não requerida.

Dentro dos requerimentos da presente pesquisa é importante avaliar três características relacionadas com excitador eletrodinâmico B&K 4810: (i) as ampliações e atenuações na resposta do excitador; (ii) se existe ou não harmônicos na resposta e; (iii) possíveis movimentos de rotação da mesa.

Nesta direção, o excitador eletrodinâmico foi submetido a três ensaios, cada um dedicado a investigar cada um dos três itens descritos no parágrafo anterior. Em relação as condições de ampliações/atenuações, os resultados demonstraram que existe uma condição de amplificação próxima à 4.2 KHz. Entretanto esta região crítica ainda é um valor alto e não irá influenciar os ensaios não-lineares futuros. Segundo, pode-se observar no detalhe da faixa entre 10 to 100 Hz, que existe uma zona de amplificação próxima à 22 Hz. Esta região está situada próxima da condição em que serão futuramente realizados os ensaios não-lineares, e assim é preocupante. Em especial, esta última região de amplificação é a responsável por requer que a obtenção experimental das curvas resposta-freqüência seja realizada utilizando um sistema de controle de

amplitude em malha fechada.

Em relação a existência de harmônicos na resposta do excitador eletrodinâmico, os resultados demonstraram a presença do primeiro harmônico da frequência de entrada. Entretanto, para uma amplitude de entrada do excitador igual à $V(t) = 0.1 \text{ V}$ este harmônico possui amplitude quatro ordens de grandeza menor do que a componente fundamental. Por outro lado, quando a amplitude de entrada foi elevada para $V(t) = 1.5 \text{ V}$, observou-se um aumento significativo da magnitude do primeiro harmônico. Este que para $V(t) = 0.1 \text{ V}$ era quatro ordens de grandeza menor, aumentou e passou a ser duas ordens de grandeza menor que a componente fundamental. Assim neste quesito, o excitador irá promover boas condições de excitação para pequenas amplitudes de entrada.

Por último as investigações experimentais sobre possíveis rotações da base do excitador demonstraram que mesmo para a condição mais crítica considerada, os valores de rotação da mesa do excitador foram considerados aceitáveis, assim espera-se que a rotação da base não irá influenciar os resultados provenientes dos futuros ensaios não-lineares.

O Apêndice (A) apresenta uma detalhada descrição dos procedimentos, assim como, apresenta todos os resultados das análises realizadas para a correta caracterização do excitador B&K 4801 empregado nos ensaios não-lineares.

Continuando a descrição do arranjo experimental, foram empregados três transdutores piezoelétricos. Dois para monitorar o movimento da mesa do excitador (relativo à excitação), e outro para o movimento transversal (flexão) do item de teste. A aceleração translacional da base foi capturada por um acelerômetro B&K modelo 4371 (9.84 pC/g), e o possível movimento de rotação em torno do eixo Y foi monitorado utilizando um acelerômetro angular Kistler model 8836M01 ($34 \mu\text{V/rad/s}^2$). Já o movimento translacional do item de teste foi capturado por um acelerômetro miniatura B&K modelo 4374 (1.06 pC/g).

O sinal de aceleração translacional da base é inicialmente condicionado e amplificado por um dispositivo B&K tipo 2626 e então enviado para o sistema de aquisição. No sistema de aquisição, este sinal é empregado para alimentar o controle de amplitude em malha fechada, assim como, é registrado para as análises futuras. O sinal de aceleração do item de teste é também condicionado e amplificado por um B&K 2626 e posteriormente registrado pelo sistema de aquisição. Por fim, a aceleração angular — devido às próprias características do transdutor — é enviada diretamente para o sistema de aquisição.

Por fim, todos os sinais envolvidos neste arranjo foram monitorados por intermédio de um osciloscópio HP Agilent modelo 54621D. Para evitar movimentos do excitador, este foi preso seguramente sobre o piso do laboratório.

5.2.1.2 Planejamento e Descrição dos Ensaios Experimentais

No total, foram planejados oito ensaios experimentais, todos relativos à vibração paramétrica principal. Quatro deles possui como variável de controle a frequência da excitação paramétrica e assim descrevem experimentalmente as curvas resposta-frequência. Outros quatro possuem como variável de controle a magnitude da excitação e assim descrevem curvas resposta-amplitude.

As curvas resposta-frequência foram obtidas para dois níveis de excitação, 39.24 m/s^2 e 29.43 m/s^2 . Ambos valores foram mantidos sob controle pelo sistema de controle em malha fechada. Para cada uma destas magnitudes, foi realizado uma varredura senoidal ascendente durante todo o intervalo de frequência requerido e posteriormente, o mesmo procedimento na direção descendente, totalizando quatro ensaios.

Já as curvas resposta-amplitude foram obtidas para duas frequências específicas, 36.132 Hz e 36.000 Hz . Para ambos os casos, a magnitude da excitação foi gradativamente aumentada até atingir o máximo valor fisicamente realizável dentro do arranjo experimental. Uma vez atingido este valor, a magnitude da excitação foi, então, gradativamente diminuída até um valor mínimo, também totalizando quatro ensaios.

Em termos práticos, os procedimentos descritos nos parágrafos anteriores também possibilitam — para uma condição específica das variáveis de excitação — a obtenção dos sinais de resposta da estrutura em função do tempo. Entretanto para isso, é necessário que o sinal de resposta seja bifurcado para outro sistema de aquisição, neste caso foi utilizado o Tektronix 2630.

Já as curvas resposta-frequência e resposta-amplitude — mais especificamente os resultados da resposta em regime permanente $\bar{a}$ para cada condição de excitação específica — são registrados com o auxílio do osciloscópio Agilent modelo 54621D. Uma vez que a resposta em regime permanente é alcançada, a magnitude da amplitude é anotada diretamente no osciloscópio. Este procedimento é repetido para cada frequência, no caso das curvas resposta-frequência, ou para cada amplitude de excitação no caso das curvas resposta-amplitude.

Uma vez que o aparato e o procedimento experimental foram descritos, vamos aos resultados. A próxima seção apresenta os resultados transientes.

5.2.2 Resultados Transiente e Comparação com a Teoria

A Seção (5.1.2) apresentou uma extensa análise puramente teórica das características da resposta transiente quando o item de teste encontrava-se envolvido em uma condição de ressonância paramétrica principal. Na presente seção, as características da resposta paramétrica principal transiente serão retomadas, entretanto sob a abordagem experimental. Inicialmente, será feita uma breve apresentação experimental sobre o fenômeno. Posteriormente, os resultados experimentais serão confrontados com as predições teóricas, resultando em conclusões sobre a influência do meio viscoso nas características da resposta transiente.

5.2.2.1 O Fenômeno

A Figura (54) apresenta o item de teste envolvido em uma ressonância paramétrica principal. Especificamente, a Figura (54a) apresenta como o item de teste responde durante o desenvolvimento do fenômeno. Já a Figura (54b) apresenta uma fotografia do item de teste quando o fenômeno encontra-se totalmente desenvolvido.

Figura 54: Vibração paramétrica principal do item de teste obtida experimentalmente. Resultado obtido para aceleração da base em 39.24 m/s^2 : (a) resposta temporal e; (b) item de teste em ressonância paramétrica principal (regime permanente).

Na Figura (54a) pode-se notar três regiões bem definidas. A primeira ocorre do início do sinal até aproximadamente $t = 3$ segundos. Neste intervalo, o fenômeno de ressonância ainda não começou a se desenvolver. Quando t supera este valor, inicia-se a segunda região que vai até aproximadamente $t = 10$ segundos. Nesta segunda região, o fenômeno se desenvolve. Ao superar este valor temporal, a estrutura atinge uma condição de regime permanente, o qual perdura até o fim. É interessante ressaltar que este foi exatamente o comportamento predito pela teoria.

Ainda nesta figura, pode-se notar duas características importantes. A primeira se refere ao tempo necessário para que a estrutura atingisse a condição de regime permanente. Até esta condição, foram necessários aproximadamente dez segundos. Este é um tempo relativamente longo, e certamente pode ser explorado quando é requerido se controlar o fenômeno. Segundo refere-se ao nível de amplificação provocado pelo fenômeno. Para uma aceleração da base de 39.24 m/s^2 a estrutura respondeu em quase três vezes mais, em torno de 110 m/s^2 . Esta informação, juntamente com a fotografia apresentada na Figura (54b) descrevem o nível de intensidade vibratória presente em uma vibração paramétrica principal.

Já a Figura (55) apresenta como — depois de desenvolvido — a estrutura reage quando a magnitude da excitação vai sendo gradativamente reduzida.

Figura 55: Resposta paramétrica principal do item de teste obtida experimentalmente para diferentes amplitudes da excitação paramétrica.

Na figura anterior, inicialmente a aceleração da base foi estabelecida em 4 g e 36.132 Hz. Esta condição levou a deflagrar o fenômeno. Depois de atingir regime permanente e mantendo sempre a mesma frequência de excitação, a magnitude foi reduzida para 3.7 g. Como consequência natural, a magnitude da vibração em regime permanente também foi reduzida. Este mesmo comportamento ocorreu para os valores subseqüentes de 3 g e 2.25 g. Entretanto, quando a aceleração da base foi de 1.4 g o fenômeno foi extinto. Exatamente o comportamento dinâmico apresentado quando a estrutura sai da condição de ressonância paramétrica principal é muito interessante. A Figura (56) apresenta mais claramente esta condição.

Nesta figura, pode-se observar que — assim como no desenvolvimento do fenômeno — também são necessários vários segundos para que a magnitude de vibração reduza. O mais interessante é que esta redução é completamente diferente do que ocorre no

caso de uma vibração livre. O decaimento (envelope) pode ser dividido em duas regiões distintas. Na primeira o envelope possui uma forma quadrática negativa, já na segunda região, o envelope possui um decaimento exponencial, muito próximo do que acontece na vibração livre.

Figura 56: Resposta paramétrica principal experimental do item de teste quando a resposta não-trivial perde a estabilidade e retorna a uma condição de equilíbrio trivial.

A próxima seção trás resultados experimentais confrontados com as previsões teóricas envolvendo o efeito do meio viscoso sobre a vibração paramétrica principal.

5.2.2.2 Efeito do Meio Viscoso

A Figura (57) apresenta comparativamente a magnitude predita pela teoria na ausência do amortecimento quadrático e a magnitude obtida experimentalmente. Os demais parâmetros teóricos foram calculados em conformidade com as condições de excitação.

Nesta figura, nota-se claramente uma grande discrepância entre o resultado predito pela teoria e o obtido experimentalmente. Especificamente, o resultado experimental não possui as fortes oscilações observadas no resultado teórico. Segundo, o nível de magnitude é bem menor no resultado experimental. Este último resultado já sugere que existe a ação de outra(s) forças dissipativas agindo sobre o item de teste.

Já a Figura (58) confronta os resultados preditos considerando a ação do amortecimento quadrático com os resultados experimentais. Especificamente, as previsões teóricas foram geradas para $\varepsilon H_2 = 0.285$ e $\varepsilon H_2 = 0.333$.

Nesta figura, observa-se claramente uma melhora significativa na correlação entre

Figura 57: Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente. Resultado teórico considerando nulo o efeito do amortecimento quadrático $\varepsilon H_2 = 0.00$ e $\varepsilon H_1 = 0.0160$; $\varepsilon H_3 = 2.1352$; $\varepsilon H_4 = 3.4674$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\Theta = 12.56$.

Figura 58: Resultado comparativo da magnitude da resposta transiente demonstrando o efeito do amortecimento quadrático. Resultados teóricos para $\varepsilon H_2 = 0.285$ e $\varepsilon H_2 = 0.333$. Demais parâmetros: $\varepsilon H_1 = 0.0160$; $\varepsilon H_3 = 2.1352$; $\varepsilon H_4 = 3.4674$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\Theta = 12.56$.

os resultados teóricos e experimentais. Ao utilizar $\varepsilon H_2 = 0.285$, os resultados teóricos se correlacionam muito bem com os experimentais, tanto em forma quanto em relação

à magnitude. Aumentando mais o valor de εH_2 para 0.333 observa-se que embora qualitativamente ainda exista uma boa correlação com o resultado experimental, quantitativamente ocorre uma subestimação da magnitude da resposta, especialmente em regime permanente. Esta subestimação de magnitude sugere que, para esta condição transiente, este valor de εH_2 está acima do real. Por fim, é interessante observar que as predições teóricas e os resultados experimentais estão bem correlacionados no que se refere ao tempo necessário para deflagar o fenômeno.

5.2.3 Resultados em Regime Permanente e Comparação com a Teoria

Esta seção segue a mesma filosofia apresentada na seção anterior, entretanto aqui serão discutidas as questões envolvendo as características vibratórias em regime permanente, especialmente sob o ponto de vista experimental. Sob este enfoque, serão apresentadas as curvas resposta-freqüência e resposta amplitude experimentais. Em adição, estas curvas experimentais serão confrontadas com as curvas determinadas teoricamente. Serão enfatizados os aspectos relativos à amplitude, estabilidade e principalmente sob os efeitos da viscosidade do meio de operação. Inicialmente, serão abordadas as curvas resposta-freqüência.

5.2.3.1 Curvas Resposta-Freqüência

A Figura (59) apresenta duas curvas resposta-freqüência típicas, uma experimental e outra teórica. A curva teórica foi obtida sob a hipótese de operação no vácuo, ou segundo a formulação desenvolvida anteriormente, considerando $\varepsilon H_2 = 0.00$. Já a curva experimental foi obtida sob condições atmosféricas.

Quando as curvas — teórica e experimental — descritas na figura anterior são comparadas, o primeiro ponto a chamar a atenção é a enorme diferença de amplitude entre elas. O máximo valor de amplitude $\bar{a}$ descrito pela curva teórica é $\bar{a} \approx 0.225$ enquanto que o máximo valor apresentado pela curva experimental é de $\bar{a} \approx 0.1$, ou seja, aproximadamente 125% menor. Esta grande diferença entre amplitudes sugere a existência de forças dissipativas importantes atuando sobre o sistema.

Para avaliar melhor esta questão, novas curvas teóricas foram geradas, agora incorporando os efeitos dissipativos decorrentes da viscosidade do meio, ou seja, devido a força de arrasto. Os resultados comparativos são apresentados na Figura (60).

Nesta figura, nota-se que a introdução dos efeitos da força de arrasto reduz forte-

Figura 59: Curvas resposta-freqüência teórica e experimental. Curva teórica obtida não levando em consideração o efeito do amortecimento quadrático ($\varepsilon H_2 = 0.00$). Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (não-trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$; $\varepsilon H_4 = 3.4674$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Experimento com freqüência de excitação paramétrica igual à 36.132 Hz e 39.24 m/s².

Figura 60: Curvas resposta-freqüência teórica e experimental demonstrando o efeito do amortecimento quadrático. Curvas teóricas obtidas para $\varepsilon H_2 = 0.285$ e $\varepsilon H_2 = 0.333$. Demais parâmetros $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (não-trivial), $\varepsilon H_3 = 2.1352$; $\varepsilon H_4 = 3.4674$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$. Experimento com freqüência de excitação paramétrica igual à 36.132 Hz e 39.24 m/s².

mente o valor da magnitude da curva teórica. Em especial, quando empregado $\varepsilon H_2 = 0.333$ os resultados teóricos e experimentais encontram-se muito bem correlacionados. Em especial, as predições dos níveis de amplitude em regime permanente encontram-se muito próximas dos resultados experimentais.

Entretanto, nota-se uma discreta discrepância entre os resultados no que diz respeito aos pontos de bifurcação. Experimentalmente, quando ocorre a variação ascendente da frequência da excitação paramétrica, houve uma pequena penetração na região predita na teoria como trivial-instável. Como consequência, não houve correlação em relação ao ponto (na direção ascendente) onde a solução trivial-estável perde a estabilidade. Analogamente, quando ocorre a variação descendente da variável de bifurcação, também observa-se discrepâncias na determinação do ponto de bifurcação. Neste caso, o resultado apontou antecipadamente o ponto de bifurcação. Por fim, levando-se em conta todos as variáveis que podem prejudicar os ensaios experimentais, estas discrepâncias são aceitáveis.

Ainda na Figura (60) observa-se outra característica interessante. Nesta figura existem duas curvas teóricas, uma considerando $\varepsilon H_2 = 0.285$ e outra considerando $\varepsilon H_2 = 0.333$. Quando comparadas, a curva teórica com $\varepsilon H_2 = 0.333$ ajusta-se melhor do que a gerada com $\varepsilon H_2 = 0.285$. Entretanto, na Figura (58) a qual descreve o comportamento transiente, ocorre justamente o contrário: para este caso, a melhor correlação entre os resultados teóricos e experimentais ocorrem quando $\varepsilon H_2 = 0.285$. Esta mudança de padrão sugere que quando a vibração paramétrica principal encontra-se desenvolvido há bastante tempo, a força de arrasto é mais intensa. Ainda neste capítulo, esta observação será explicada com maior embasamento físico.

No Capítulo (5) realizou-se uma detalhada análise de estabilidade do problema em questão. Nesta análise, foi descrito que a perda de estabilidade das soluções triviais é praticamente regida pela variável adimensional εH_3 , que por sua vez está intimamente relacionada com a aceleração da base Q_o . A determinação dos pontos de bifurcação onde a solução trivial perde sua estabilidade é uma informação valiosa, especialmente quando deseja-se evitar o surgimento da ressonância paramétrica principal.

Neste contexto estão inseridos os resultados descritos pela Figura (61). Esta figura apresenta curvas resposta-frequência teórica e experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação paramétrica sobre a vibração em regime permanente. Em especial, os efeitos da magnitude da excitação sobre os pontos de bifurcação trivial-estável/instável.

Nesta figura, observa-se uma boa correlação entre os resultados teóricos e exper-

Figura 61: Curvas resposta-frequência teórica e experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação paramétrica. Curvas teóricas obtidas para $\epsilon H_2 = 0.333$. Para $Q_o = 39.24 \text{ m/s}^2$: $\epsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\epsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\epsilon H_3 = 2.1352$; $\epsilon H_4 = 3.4674$; $\epsilon H_5 = 62.7218$. Para $Q_o = 29.43 \text{ m/s}^2$: $\epsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\epsilon H_1 = 0.0$ (não-trivial), $\epsilon H_3 = 1.7292$; $\epsilon H_4 = 2.8081$; $\epsilon H_5 = 62.7218$. Experimento com frequência de excitação paramétrica igual à 36.132 Hz.

imentais para ambas as magnitudes Q_o da excitação paramétrica. Especialmente em relação aos pontos de bifurcação das solução trivial estável/instável, os resultados experimentais comprovaram que realmente quando menor a magnitude da excitação, mais próxima da condição de perfeita sintonia ($\epsilon\sigma = 0$) deve estar a frequência de excitação para deflagrar o fenômeno. Estes resultados foram analiticamente preditos pela análise de estabilidade desenvolvida no Capítulo (5).

5.2.3.2 Curvas Resposta-Amplitude

A Figura (62) apresenta duas curvas resposta-amplitude típicas, uma experimental e outra teórica. A curva teórica foi obtida sob a hipótese de operação no vácuo. Já a curva experimental foi obtida sob condições atmosféricas.

Quando as curvas — teórica e experimental — descritas na figura anterior são comparadas, o primeiro ponto a chamar a atenção é a enorme diferença entre elas. A curva teórica está excessivamente deslocada para a esquerda, assim como, apresenta maiores magnitudes. Conforme demonstrando anteriormente no Capítulo (5), quando $\epsilon\sigma < 0$ a presença da força de arrasto tende a deslocar para a direita e diminuir as amplitude das curvas resposta-amplitude. Exatamente esta é a tendência experimentalmente observada na Figura (62).

Figura 62: Curvas resposta-amplitude teórica e experimental. Curva teórica obtida não levando em consideração o efeito do amortecimento quadrático ($\epsilon H_2 = 0.00$). Demais parâmetros $\epsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\epsilon H_1 = 0.0160$ (não-trivial), $\epsilon H_3 = 2.2236$; $\epsilon H_4 = 3.6109$; $\epsilon H_5 = 62.7218$ e $\epsilon \sigma = -0.725$. Experimento com frequência de excitação paramétrica igual à 36.132 Hz.

Para avaliar melhor esta questão, novas curvas teóricas foram geradas, agora incorporando os efeitos dissipativos decorrentes da viscosidade do meio, ou seja, devido a força de arrasto. Estes resultados são apresentados na Figura (63).

Nesta figura, nota-se que a introdução dos efeitos da força de arrasto reduz fortemente o valor da magnitude da curva teórica, assim como, a desloca para a direita. Em especial, quando empregado $\epsilon H_2 = 0.227$ os resultados teóricos e experimentais encontram-se satisfatoriamente correlacionados. Do ponto de vista qualitativo, existe uma boa correlação: observa-se a existência dos pontos de bifurcação, assim como, a tendência da amplitude em regime permanente $\bar{a}$. Já pelo ponto de vista quantitativo, os resultados encontram-se relativamente distorcidos, especialmente no que diz respeito à magnitude da amplitude $\bar{a}$. Uma observação mais cuidadosa na região entre $30 < Q_o < 50$ revela que, as magnitudes experimental e teórica de $\bar{a}$, estão relativamente distantes. Por outro lado, a partir de $Q_o > 50$ existe uma clara tendência de aproximação entre estas magnitudes. Ao longo deste capítulo serão apresentadas algumas justificativas para estas observações.

No Capítulo (5) realizou-se uma detalhada análise de estabilidade do problema em questão. Nesta análise, foi descrito que no caso das curvas resposta-amplitude a perda

Figura 63: Curvas resposta-amplitude teórica e experimental demonstrando o efeito do amortecimento quadrático. Curvas teóricas obtidas com $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (não-trivial), $\varepsilon H_2 = 0.227$, $\varepsilon H_3 = 2.2236$; $\varepsilon H_4 = 3.6109$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\varepsilon \sigma = -0.725$. Experimento com frequência de excitação paramétrica igual à 36.132 Hz.

de estabilidade das soluções triviais para $\varepsilon \sigma < 0$ ocorre quando $\varepsilon H_3 = \sqrt{4\varepsilon \sigma^2 + \varepsilon H_1^2 \Theta^2}$. Como o fator $\varepsilon H_1^2 \Theta^2$ é constante — pois depende do amortecimento e da exata condição de ressonância paramétrica — a perda de estabilidade trivial é praticamente regida pela variável adimensional $\varepsilon \sigma$, que por sua vez descreve a proximidade da condição de perfeita sintonia da condição de ressonância paramétrica principal. Quando menor o valor de $\varepsilon \sigma$ maior será o valor crítico de εH_3 para que a solução trivial perca a estabilidade. Esta informação é de extrema utilidade nos casos em que não se deseja que o fenômeno ocorra.

Neste contexto estão inseridos os resultados descritos pela Figura (64). Quando esta figura é comparada com a Figura (63) os resultados experimentais demonstram que foi necessário maior magnitude da excitação para a perda de estabilidade. Em termos do parâmetro de sintonia $\varepsilon \sigma$, quando a frequência de excitação foi de $\lambda = 36.132$ Hz o ponto de perda de estabilidade foi predito com $\varepsilon \sigma = -0.72$. Já quando a frequência de excitação foi de $\lambda = 36.000$ Hz o ponto de perda de estabilidade foi predito com $\varepsilon \sigma = -0.787$, que em módulo é maior que o primeiro. Assim, os resultados experimentais confirmam as previsões de estabilidade/instabilidade da solução trivial.

Em resumo, tanto as curvas resposta-amplitude apresentadas nesta seção quanto as resposta-frequência apresentadas na seção anterior demonstram que a força de arrasto

Figura 64: Curvas resposta-amplitude teórica para dois valores de amortecimento quadrático $\varepsilon H_2 = 0.227$ e $\varepsilon H_2 = 0.172$ e experimental. Curvas teóricas obtidas com $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (trivial), $\varepsilon H_1 = 0.0160$ (não-trivial), $\varepsilon H_3 = 2.2236$; $\varepsilon H_4 = 3.6109$; $\varepsilon H_5 = 62.7218$ e $\varepsilon \sigma = -0.787$. Experimento com frequência de excitação paramétrica igual à 36.000 Hz.

desempenha um importante papel no comportamento dinâmico quando o item sob investigação está envolvido em uma ressonância paramétrica principal. Em adição os resultados transientes, sugerem que a força de arrasto não é constante. Esta tendência também foi notada na Figura (63), em especial no detalhe apresentado nesta figura. Neste detalhe nota-se que quando ocorre o aumento da magnitude da excitação na direção ascendente, a amplitude da vibração é maior que a amplitude anotada para a mesma magnitude de excitação, porém na direção descendente. Maiores magnitudes de vibração — para a mesma condição de excitação — sugerem que a força de arrasto é menor. Ainda neste detalhe pode-se observar que os valores da amplitude da vibração tendem a se encontrarem conforme o ensaio prossegue. Estes indícios relativos à força de arrasto serão explicados com maior embasamento físico nas seções seguintes.

5.3 Força de Arrasto Devido à Vibração Paramétrica: Investigação Experimental

Um conceito mundialmente aceito e conhecido é o de força de arrasto. Esta é uma força mecânica causada pela interação e contato de um corpo sólido com um fluido. Assim, a força exercida sobre um corpo sólido movendo-se através de um meio

flúidico depende de mecanismos complexos envolvendo velocidade relativa do corpo em relação ao fluído, densidade e viscosidade do fluído, forma do corpo e rugosidade da sua superfície. Matematicamente, o modelo clássico para a força de arrasto é White (1974)

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \quad (5.53)$$

na qual $F_D [N]$ é a força de arrasto, $C_D [-]$ é o coeficiente de arrasto, $\rho [Kg/m^3]$ é a densidade, $A [m^2]$ é a área seccional perpendicular ao fluxo e $v [m/s]$ é a velocidade relativa entre o corpo e o fluído.

Na Equação (5.53), o coeficiente de arrasto não é constante e depende da velocidade do corpo, viscosidade do meio, forma do corpo e da rugosidade superficial do corpo. O número de Reynolds consiste em número adimensional especialmente útil para caracterizar a dependência do coeficiente de arrasto em relação a velocidade. Basicamente, o número de Reynolds é a razão entre as forças de inércia do meio sobre as forças viscosas.

Para valores pequenos de Reynolds — geralmente $Re < 10^{-1}$ — o escoamento é denominado laminar. Neste caso, o coeficiente de arrasto é inversamente proporcional a velocidade. Assim, a força de arrasto é linear, ou seja, diretamente proporcional a velocidade,

$$F_D = \frac{1}{2} \rho A v, \quad Re < 10^{-1} \quad (5.54)$$

Por outro lado, quando o número de Reynolds é grande o escoamento é turbulento. Tipicamente para Reynolds entre $Re > 10^3$ e $Re > 10^5$, o coeficiente de arrasto C_D torna-se aproximadamente constante. Exatamente este é o caso modelado pela Equação (5.53), isto é, quando a força de arrasto depende do quadrado da velocidade relativa v . Por fim, para $1 < Re < 1000$ o escoamento é dito intermediário e o coeficiente de arrasto depende da velocidade, ou seja, $C_D = f(v)$.

5.3.1 Avaliação do Tipo de Escoamento

A partir da breve discussão sobre a força de arrasto promovida na seção anterior, foi exposto duas características muito interessantes. A primeira descreve que quando o escoamento é laminar, a força de arrasto pode ser modelada como diretamente proporcional à velocidade, ou seja, linear. Já a segunda descreve que se o escoamento for

turbulento, a força de arrasto pode ser modelada como quadrática. Esta relação entre as características físicas sobre o tipo de escoamento (laminar ou turbulento) e o tipo de expressão matemática que rege a força de arrasto é muito pertinente para a presente pesquisa. Se for possível observar experimentalmente o tipo de escoamento provocado pela vibração paramétrica principal, pode-se concluir com convicção os efeitos provocados — pela densidade do meio de operação — sobre a dinâmica do item de teste. Exatamente neste contexto se insere a presente seção.

Para a realização desta tarefa foi montado um arranjo experimental semelhante ao empregado durante as investigações sobre a vibração paramétrica principal, porem com duas características especiais: (i) o meio viscoso que circunda a estrutura foi enclausurado e; (ii) foi introduzido um mecanismo próximo a estrutura para a visualização do escoamento induzido pela vibração paramétrica principal. A Figura (65) apresenta este arranjo experimental.

Figura 65: Arranjo experimental empregado na avaliação sobre o tipo de escoamento induzido pela vibração paramétrica principal.

O meio viscoso que circunda a estrutura foi enclausurado por uma grande caixa de acrílico, cujo objetivo é evitar que perturbações externas — não provenientes do movimento oscilatório da estrutura — interferissem no padrão do escoamento. Em adição, esta caixa possui dimensões suficientemente grandes para evitar interferência das suas paredes sobre o escoamento.

Para possibilitar a visualização do fluxo ao redor da estrutura, foi empregado o método do fio de fumaça (*smoke wire method*). Este método é capaz de produzir fumaça a partir da vaporização de óleo devido ao aquecimento resistivo promovido por um fino fio de níquel-cromo. O fio de níquel cromo possui 0.1 mm de diâmetro, 250 mm

de comprimento e aproximadamente $30\ \Omega$ de resistência elétrica. O óleo passado sobre o fio consiste em uma mistura em partes iguais de parafina líquida e querosene. O calor resistivo foi gerado a partir da descarga elétrica de dois capacitores de $100\ \mu\text{F}$ e $250\ \text{V}$. Um diagrama completo do circuito eletrônico empregado pode ser obtido no Apêndice (I).

Inicialmente a estrutura foi envolvida em uma condição de ressonância principal, provocada por uma excitação via base com frequência igual à 36.132 e magnitude de $39.24\ \text{m/s}^2$. Estas características da excitação foram monitoradas pelo acelerômetro fixado sobre a mesa do excitador. Assim que a condição de vibração em regime permanente foi alcançada, o fio de fumaça foi gerado. Quase simultaneamente a geração da fumaça, várias fotografias sequenciais foram tiradas por intermédio de uma máquina digital estrategicamente posicionada em frente à estrutura. Os resultados são apresentados na Figura (66).

Na Figura (66) são apresentadas seis fotografias ordenadas sequencialmente — de (a) à (f) — de acordo com tempo decorrido a partir da geração da fumaça. A Figura (66a) apresenta o cenário quase que no exato momento da geração da fumaça. Já na Figura (66c) nota-se claramente a formação de vortices. Por fim, a Figura (66f) demonstra o escoamento já evoluído.

Exatamente na Figura (66f), a fotografia comprova explicitamente que a vibração paramétrica principal provoca um escoamento turbulento. Desta maneira, está comprovado que realmente existe ação da força de arrasto não-linear sobre a estrutura.

Como ensaio conclusivo, foram tiradas duas fotografias complementares. A primeira representa o escoamento ao redor da estrutura não envolvida em uma condição de ressonância principal, mas excitada pela base à $39.24\ \text{m/s}^2$. Nota-se claramente que o fio de fumaça permanece imóvel. A segunda representa a estrutura desenvolvendo o fenômeno de ressonância paramétrica principal e com a mesma magnitude de $39.24\ \text{m/s}^2$. Estes resultados comprovam a qualidade deste ensaio e demonstram que o movimento da base do excitador não afeta o escoamento.

5.3.2 Dependência do Coeficiente de Arrasto em Relação a Velocidade: Breve Avaliação

Nas seções anteriores, os resultados transientes apresentados na Figura (58) sugerem que a força de arrasto não é constante, pelo menos, não nos instantes iniciais do movimento vibratório. Esta tendência também foi notada na Figura (63), em especial no detalhe presente nesta figura.

Figura 66: Sequência fotográfica demonstrando a evolução do escoamento em torno da estrutura. Nota-se claramente a formação de vórtices, demonstrando que trata-se de um escoamento turbulento.

Figura 67: Resultados fotográficos do ensaio empregando o método do fio de fumaça: (a) estrutura não envolvida em uma condição de ressonância principal, mas excitada pela base à 39.24 m/s^2 e; (b) estrutura desenvolvendo o fenômeno de ressonância paramétrica principal também com magnitude de excitação igual à 39.24 m/s^2 . Estes resultados comprovam a qualidade deste ensaio.

Na breve discussão promovida na Seção (5.3) foi apresentado que o modelo matemático tradicional da força de arrasto Equação (5.53) considera que a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade. Assim, para que este modelo seja válido, os termos $C_D \rho A$ devem ser constantes.

Entretanto, segundo White (1974) o coeficiente de arrasto C_D não é constante e depende da velocidade do corpo, viscosidade do meio, forma do corpo e da rugosidade superficial do corpo. Para uma mesma estrutura e para uma certa condição climática é razoável considerar que viscosidade do meio, forma e rugosidade superficial do corpo sejam constantes. Mesmo assim, C_D ainda é afetado pela velocidade.

Avaliar profundamente a dependência do coeficiente de arrasto C_D em relação à velocidade consiste em uma tarefa exaustiva e necessita de equipamentos dedicados, como por exemplo, de um túnel de vento. Esta tarefa é potencialmente mais complicada quando o corpo em questão se deforma, como é o caso da estrutura sob investigação. Assim esta seção não pretende apresentar resultados conclusivos sobre este assunto. Entretanto para o propósito de confirmar os indícios sobre a variação da força de arrasto demonstrada nos resultados anteriores, pode-se fazer uma breve mas suficiente avaliação sobre o número de Reynolds decorrente da vibração paramétrica principal.

Segundo White (1974) o número de Reynolds é matematicamente descrito como,

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta} \quad (5.55)$$

na qual L [m] é um comprimento característico, ρ [Kg/m³] é a densidade, η [Ns/m²] é a viscosidade dinâmica e v [m/s] é a velocidade relativa entre o corpo e o fluido.

A partir das fotografias apresentadas na Figura (66) pôde-se observar que a ponta da viga é a região onde o escoamento é mais crítico. Assim, decidiu-se que o número de Reynolds deveria ser calculado neste ponto. Neste caso, o comprimento característico adotado foi $L = 0.04\text{ m}$. Para as condições atmosféricas normais $\rho = 1.075\text{ Kg/m}^3$ e $\eta = 1.85 \cdot 10^{-5}\text{ Ns/m}^2$. Para que o número de Reynolds possa ser calculado a partir da Equação (5.55) ainda falta uma última informação: a velocidade de translação presente na ponta da viga durante o desenvolvimento da ressonância paramétrica principal.

Para contornar esta dificuldade, foi utilizado um arranjo experimental semelhante ao apresentado na Figura (53). A única modificação realizada foi a substituição do acelerômetro responsável por medir o movimento da viga, por um transdutor laser Polytec CLV 1000 (2.0 (mm/s)/V). Esta substituição é interessante já que devido as suas próprias características, o sinal de movimento proveniente do transdutor laser é em velocidade.

Desta maneira todas as informações foram reunidas e então pôde-se avaliar o número de Reynolds presente na extremidade superior da viga durante o desenvolvimento da ressonância paramétrica principal. A Figura (68) apresenta o resultado final, na qual o número de Reynolds é traçado em função do tempo.

Figura 68: Estimativa experimental da variação do número de Reynolds sobre a massa concentrada durante o desenvolvimento da ressonância paramétrica principal.

Nesta figura pode-se notar duas regiões distintas. A primeira região descreve resul-

tados para Reynolds menores que 10^3 . Já a segunda para Reynolds maiores que 10^3 . Na prática, é razoável assumir que para $Re > 10^3$ o coeficiente de arrasto é constante.

Os resultados apresentados na Figura (68) demonstram que durante os primeiros dezessete segundos, Reynolds encontra-se dentro da primeira região, e assim, durante este tempo o coeficiente de arrasto é afetado pela velocidade. Portanto a força de arrasto não pode ser modelada adequadamente pela Equação (5.53). Acima deste tempo, os valores de Reynolds migram para a segunda região onde se espera-se que o coeficiente de arrasto seja constante.

De maneira conclusiva, a breve investigação experimental desenvolvida nesta seção demonstrou que realmente o coeficiente de arrasto C_D varia nos instantes inicial de desenvolvimento do fenômeno de ressonância paramétrica principal. Em adição, também foi demonstrado que, quando em regime permanente o coeficiente de arrasto tende a tornar-se constante. Estas características concordam com as observações realizadas na resposta transiente e nas curvas resposta-amplitude.

5.4 Sumário do Capítulo

Este capítulo apresentou os resultados teóricos e experimentais envolvendo vibrações paramétricas não-lineares. Inicialmente o capítulo foi dedicado às investigações teóricas e posteriormente às experimentais.

Foram intensamente explorados as características teóricas do sistema estrutural com um grau de liberdade envolvido em uma condição de ressonância paramétrica principal. Dentro deste contexto, as características da vibração transiente foram profundamente exploradas, em especial os resultados obtidos via múltiplas escalas foram confrontados com os simulados diretamente a partir da equação de movimento. Desta comparação demonstrou-se que realmente o método das múltiplas escalas pode prover resultados muito precisos.

Em adição, foram detalhadamente observadas as características do desenvolvimento da vibração paramétrica principal. Também foram avaliados os efeitos da viscosidade do meio de operação sobre o desenvolvimento deste tipo de vibração. Em especial, os efeitos do meio de operação sobre a magnitude e fase da vibração paramétrica principal.

Também foram analisadas as características da resposta em regime permanente. Neste contexto, demonstrou-se a utilidade do uso de ferramentas computacionais para manipulação simbólica. Em adição, realizou-se uma rigorosa análise de estabilidade, totalmente desenvolvida de forma analítica.

Ainda dentro das características da vibração em regime permanente, foram obtidas curvas resposta-frequência, as quais foram explicadas segundo o contexto físico do problema. O efeito da viscosidade do meio de operação sobre estas curvas foi profundamente investigado, em especial demonstrou-se: (i) como a viscosidade do meio altera a magnitude da resposta; (ii) modifica as condições de estabilidade/instabilidade da ramificações não-triviais; (iii) como afeta a magnitude máxima da resposta. Em adição foi proposta uma expressão para prever o nível de amortecimento quadrático que faz desaparecer a ramificação não-trivial instável das curvas resposta-frequência. Por fim, descobriu-se que a inclusão do termo paramétrico de alta ordem faz com que as ramificações não-triviais estável e instável se encontrem.

Continuando as investigações em regime permanente, foram obtidas curvas resposta-amplitude. Os aspectos físicos descritos por estas curvas foram explicadas para três casos de interesse em relação à proximidade da condição de ressonância principal: (i) quando a excitação é ligeiramente menor que a exata condição de ressonância, as curvas obtidas demonstram ramificações não-triviais estáveis e instáveis e duas condições de bifurcação bem definidas. Demonstrou-se que a viscosidade do meio pode alterar estas características de estabilidade/bifurcação; (ii) quando a excitação está exatamente sintonizada com a condição de ressonância observou-se que baixos níveis de excitação são suficientes para deflagrar o fenômeno. Entretanto a viscosidade do meio não afeta as características de estabilidade/bifurcação, mas reduz fortemente os níveis vibratórios e; (iii) quando a excitação é ligeiramente maior que a exata condição de ressonância, observou-se um comportamento dinâmico semelhante ao caso de exata sintonia, entretanto níveis mais altos de excitação são requeridos para deflagrar o fenômeno.

Finalizando a análise em regime permanente, foi proposto um diagrama de bifurcação inédito na literatura, o qual foi denominado de curva resposta-amortecimento quadrático. De maneira geral, este diagrama é particularmente útil nos casos em que é requerido que a estrutura opere na condição de ressonância paramétrica principal. Nestes casos é vital observar os efeitos dinâmicos provocados pela alteração da viscosidade do meio.

Posteriormente, foram realizados vários ensaios experimentais e os resultados experimentais confrontados com os teóricos.

Dentro deste contexto, as características da resposta transiente foram profundamente exploradas. Foi observado que é necessário um tempo relativamente longo para que a estrutura atingisse a condição de regime permanente. Esta característica pode ser explorada em estratégias de controle do fenômeno.

Outra característica transiente interessante foi observada quando a estrutura sai da condição de ressonância paramétrica principal. Observou-se — assim como no desenvolvimento do fenômeno — também são necessários vários segundos para que a magnitude de vibração reduza. O mais interessante é que esta redução é completamente diferente do que ocorre no caso de uma vibração livre. O decaimento (envelope) pode ser dividido em duas regiões distintas. Na primeira o envelope possui uma forma quadrática negativa, já na segunda região, o envelope possui um decaimento exponencial, muito próximo do que acontece na vibração livre.

Ainda referente as características transientes da vibração paramétrica principal, foi profundamente investigado o efeito provocado pelo meio viscoso. Quando comparados os resultados experimentais com as previsões teóricas, foi observado que a inclusão do amortecimento quadrático nas previsões promove melhorias significativas na correlação entre os resultados. Assim de maneira conclusiva, foi demonstrado que o amortecimento quadrático afeta fortemente as características transientes da resposta paramétrica principal.

Posteriormente foram avaliadas experimentalmente as características em regime permanente da vibração paramétrica principal. Em adição os resultados experimentais foram confrontados com as previsões teóricas. Inicialmente foram avaliadas as características da resposta em regime permanente frente a variações na frequência da excitação paramétrica. Neste caso foi demonstrado que a inclusão dos efeitos do meio viscoso promovem uma excelente correlação entre os resultados. Em especial as previsões dos níveis de amplitude encontraram-se muito próximas dos resultados experimentais.

Entretanto, notou-se uma discreta discrepância entre os resultados no que diz respeito aos pontos de bifurcação. Experimentalmente, quando ocorre a variação ascendente da frequência da excitação paramétrica, houve uma pequena penetração na região predita na teoria como trivial-instável. Como consequência, não houve correlação em relação ao ponto (na direção ascendente) onde a solução trivial-estável perde a estabilidade. Analogamente, quando ocorre a variação descendente da variável de bifurcação, também observa-se discrepâncias na determinação do ponto de bifurcação. Neste caso, o resultado apontou antecipadamente o ponto de bifurcação.

Em adição, foram avaliadas as previsões sobre as características de perda de estabilidade das soluções triviais. Em especial, foram avaliados os efeitos da magnitude da excitação sobre os pontos de bifurcação trivial-estável/instável. Observou-se boa correlação entre os resultados teóricos e experimentais quando a magnitude da excitação foi alterada. Os resultados experimentais comprovaram que realmente quando menor

a magnitude da excitação, mais próxima da condição de perfeita sintonia ($\varepsilon\sigma = 0$) a frequência de excitação deve encontrar-se para deflagrar o fenômeno. Estes resultados foram analiticamente preditos pela análise de estabilidade.

Posteriormente foram avaliadas experimentalmente as características da resposta em regime permanente frente a variações na magnitude da excitação paramétrica. Quando as curvas teórica na ausência do amortecimento quadrático foi comparada com a experimental observou-se enorme diferença entre elas. A curva teórica está excessivamente deslocada para a esquerda, assim como, apresenta maiores magnitudes. Com a introdução do amortecimento quadrático na predição teórica, houve uma forte redução no valor da magnitude da curva teórica, assim como, houve deslocamento expressivo para a direita. Neste caso, os resultados teóricos e experimentais encontraram-se satisfatoriamente correlacionados.

Do ponto de vista qualitativo, observou-se boa correlação: observa-se a existência dos pontos de bifurcação, assim como, a tendência da amplitude em regime permanente $\bar{a}$. Já pelo ponto de vista quantitativo, os resultados encontram-se relativamente distorcidos, especialmente no que diz respeito à magnitude da amplitude $\bar{a}$.

Em adição, foram avaliadas as predições sobre as características de perda de estabilidade das soluções triviais, frente à variação da magnitude da excitação paramétrica. Os resultados experimentais demonstram que foi necessário maior magnitude da excitação para a perda de estabilidade quando a frequência da excitação encontra-se mais distante da condição de perfeita sintonia. Esta característica confirmam as predições de estabilidade/instabilidade da solução trivial.

Em relação às discrepâncias observadas entre os resultados teóricos e experimentais apresentadas nas curvas resposta-frequência e resposta-amplitude, foram identificadas duas potenciais fontes. A primeira refere-se as pequenas, mas presentes, rotações da base do excitador. A penetração na região trivial-instável observada nos resultados experimentais foi provavelmente causada pela rotação da base. Esta fonte também afetou a amplitude da curva resposta-amplitude, principalmente na região próxima do ponto de bifurcação entre as soluções triviais/não-triviais. Outra fonte de discrepância que pode ter afetado estes resultados é atribuído à imperfeições na estrutura e ao desalinhamento residual da direção da excitação paramétrica em relação ao eixo principal da estrutura. Por fim, é sempre esperado erros experimentais na ordem de 6 – 10% devido aos transdutores, amplificadores, cabos, sistema de aquisição e características do engaste.

Tanto as curvas resposta-amplitude apresentadas quanto as resposta-frequência

demonstram que a força de arrasto desempenha um importante papel no comportamento dinâmico quando o item sob investigação está envolvido em uma ressonância paramétrica principal. Em adição os resultados transientes, sugerem que a força de arrasto não é constante. Esta tendência também foi notada nas curvas resposta-amplitude. Nestas figuras, observou-se que com o aumento da magnitude da excitação na direção ascendente, a magnitude da resposta é maior que a magnitude anotada para a mesma magnitude de excitação, porém na direção descendente. Maiores magnitudes de resposta — para a mesma condição de excitação — sugerem que a força de arrasto é menor. Ainda nestas figuras, observou-se que os valores da magnitude da resposta tendem a se encontrarem conforme o ensaio prossegue. Estes indícios sugerem que as características da força de arrasto precisam ser exploradas mais profundamente.

Para se investigar mais profundamente as características da força de arrasto, foram realizados dois ensaios. No primeiro, foram avaliadas as características do escoamento induzido pela vibração paramétrica principal. Os resultados obtidos demonstram explicitamente que a vibração paramétrica principal provoca um escoamento turbulento. Desta maneira, está comprovado que realmente existe ação da força de arrasto não-linear sobre a estrutura.

No segundo ensaios, foram avaliadas brevemente as características de dependência do coeficiente de arrasto em relação à velocidade. Os resultados demonstraram que o coeficiente de arrasto C_D varia nos instantes inicial de desenvolvimento do fenômeno de ressonância paramétrica principal. Em adição, também foi demonstrado que, quando em regime permanente o coeficiente de arrasto tende a tornar-se constante. Estas características concordam com as observações realizadas na resposta transiente e nas curvas resposta-amplitude.

Como contribuição, foi apresentada a rotina desenvolvida e escrita em matemática simbólica para a solução de problemas fracamente não-lineares. Esta rotina possui código aberto, com isso espera-se motivar o desenvolvimento no Brasil de pesquisas futuras na área de dinâmica não-linear. Foi apresentado um algoritmo abrangente que pode servir de suporte para futuros desenvolvimentos da rotina. Ainda foi demonstrado o processo de validação da rotina desenvolvida, enfatizando o sucesso na solução de muitos problemas de um grau de liberdade. Para auxiliar e facilitar o emprego da rotina por outros usuários, foi apresentado (em apêndice) um exemplo completo. Por fim, todo o código é integralmente apresentado em apêndice, com isso espera-se contribuir para o desenvolvimento da pesquisa brasileira em dinâmica não-linear.

CAPÍTULO

SEIS

Vibração Combinada Não-Linear: Simulações e Experimentos

“Quelli che s’innamoran di pratica senza scienza son come ’l nochieri ch’entra in navilio senza timone o bussola, che mai ha certezza dove si vada.”

— Leonardo Da Vinci (1452-1519)

O capítulo anterior abordou a vibração paramétrica principal em meio viscoso. Como demonstrado, do ponto de vista dinâmico a presença da excitação paramétrica e do meio viscoso compõem um cenário complexo. Entretanto, quando uma estrutura encontra-se em condições reais de operação, outro cenário é muito comum. Neste além de sofrer os efeitos da excitação paramétrica e do meio de operação, a estrutura também sofre simultaneamente a ação de uma excitação externa. A presença destes três elementos, compõem um cenário muito complexo. Exatamente dentro deste cenário que o sistema estrutural com um grau de liberdade será levado. Em especial a excitação externa é proveniente de uma fonte acústica. Assim, este capítulo é dedicado em investigar a vibração combinada principal.

6.1 Simulações Computacionais

Embora soluções analíticas sejam sempre mais informativas, o problema abordado neste capítulo será tratado numericamente. Esta decisão foi baseada em duas razões principais: (i) Haquang & Mook (1987a) apresentaram que dependendo dos parâmetros do modelo matemático – que é similar ao que será abordado na presente pesquisa – as predições obtidas analiticamente via múltiplas escalas foram insatisfatórias, principalmente devido a complexidade intrínseca do modelo e; (ii) para os propósitos desta seção os resultados podem ser obtidos mais rapidamente via simulações numéricas.

Especificamente, nesta seção será investigado o comportamento vibratório da estrutura sob a ação de excitações combinadas do tipo harmônica e do meio viscoso. Entretanto a viscosidade do meio é considerada como um valor fixo e portanto, não é uma variável de investigação. Nesta seção as variáveis de investigação estão relacionadas com as características das excitações. Em termos específicos são:

- Ângulo de fase entre as excitações paramétrica e forçada;
- Magnitude da excitação forçada;
- Relação entre as frequências da excitação paramétrica e externa;

Em especial busca-se obter informações de como estes parâmetros influenciam a resposta dinâmica da estrutura quando envolvida em uma ressonância paramétrica principal, ou seja, na vibração combinada principal. Este entendimento é vital para que no futuro estratégias de controle possam ser desenvolvidas e aplicadas.

Para atingir os objetivos descritos acima, será empregado o modelo matemático para o caso da vibração combinada derivado anteriormente no Capítulo (3). Na sua forma adimensional, este modelo é reescrito aqui por conveniência como¹,

$$(1 + w_o^{*2}) \ddot{w}_o^* + H_1 \dot{w}_o^* + H_2 \dot{w}_o^* |\dot{w}_o^*| + [(2\pi)^2 + \dot{w}_o^{*2} + H_3 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^* - [H_5 + H_4 \cos(\Theta t^* + \varphi)] w_o^{*3} = H_6 \cos(\Psi t^*) \quad (6.1)$$

na qual

¹Note que neste modelo não existe a ponderação por ε . Isto ocorre pois este modelo será resolvido numericamente.

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{c_1 T_n}{m_o}; & H_2 &= \frac{c_2}{m_o A_1}; & H_3 &= Q_o A_1 T_n^2 \\
H_4 &= \frac{4 A_2 Q_o T_n^2}{3 A_1^2}; & H_5 &= \frac{6 B_2 E I_y T_n^2}{m_o A_1^2}; & H_6 &= \frac{F_o A_1 T_n^2}{m_o} \\
\Theta &= \lambda T_n; & \Psi &= \Omega T_n
\end{aligned}$$

Para que as predições do modelo matemático desenvolvido anteriormente possam ser criteriosamente comparadas com os resultados experimentais é necessário o conhecimento do perfil de pressão incidente sobre a estrutura. A distribuição de pressão é requerida para a obtenção do fator H_6 presente no modelo matemático.

Para isso, foi desenvolvido um procedimento experimental o qual se destinou a determinação experimental do perfil de pressão agindo sobre a estrutura. Este procedimento consistiu na determinação da pressão incidente sobre a estrutura em vinte e seis pontos diferentes, fixando a excitação acústica em 36 Hz e para três valores de excitação $V(t)$: 1.7 V, 2.11 V e 2.55 V. A Figura (69) apresenta os resultados obtidos. Em adição, o Apêndice (B) apresenta com detalhes todo o procedimento experimental adotado.

Figura 69: Distribuição de pressão obtida experimentalmente para a fonte acústica operando em 36.127 Hz e excitada por três intensidades diferentes: (a) 1.70 V; (b) 2.11 V; (c) 2.11 V e (d) pontos de medida.

Como resultado conclusivo, para que a distribuição de pressão apresentada pela Figura (69) possa ser inserida no modelo matemático que representa o comportamento dinâmico da estrutura, é necessário a obtenção de uma expressão matemática. Assim,

foi ajustado sobre os resultados uma curva linear, resultando nas seguintes expressões para a distribuição de pressão sobre a estrutura:

$$p_{170}(x) = 22.6x + 2.67 \quad (6.2a)$$

$$p_{211}(x) = 27.4x + 3.37 \quad (6.2b)$$

$$p_{255}(x) = 33.0x + 4.08 \quad (6.2c)$$

Uma vez que todas as informações necessárias para a realização das simulações computacionais foram reunidas, a atenção voltou-se para os aspectos computacionais.

Assim, foi construída de forma modular uma rotina computacional baseada na plataforma MatlabTM, a qual emprega para a solução do problema o método de Adams-Bashforth-Moulton Shampine & Gordon (1975). Desta forma, todos os ingredientes necessários para que as simulações computacionais fora reunidos. Na próxima seção será analisado um caso específico, no qual $\Psi = \Theta = 2\omega_n$.

6.1.1 Caso 1: $\Psi = \Theta = 2\omega_n$

Nesta seção, serão descritas algumas observações iniciais sobre a vibração combinada principal. Em adição, também será avaliado os efeitos do ângulo de fase φ entre as excitações. Serão apresentados resultados numéricos para duas condições diferentes. A primeira situação visa simular a condição na qual as excitações (paramétrica e externa) estão em fase. A segunda visa simular a condição fora de fase. Entretanto, em ambos os casos o sistema apresenta uma ressonância paramétrica principal ($\Theta = 2\omega_n$) e ambas as excitações possuem a mesma frequência, isto é, $\Psi = \Theta$.

A Figura (70) apresenta uma resposta temporal típica quando as excitações estão em fase e para excitação externa com pequena magnitude. Do ponto de vista global aparentemente não se observa fortes modificações atribuídas a excitação externa. Entretanto ao examinar mais especificamente a região próxima ao início do desenvolvimento da vibração paramétrica (região detalhe) pode-se fazer uma importante observação.

Com o desenvolvimento da vibração paramétrica a estrutura responde segundo sua primeira frequência natural ω_n juntamente com harmônicos desta. Simultaneamente, devido a presença da excitação externa a estrutura também responde, entretanto em uma frequência igual à $2\omega_n$, ou seja, com o dobro da sua frequência natural.

Com a observação descrita no parágrafo anterior, pode-se concluir que quando a razão entre a vibração externa e a vibração paramétrica é grande, existe uma clara

separação destas componentes. Esta condição ocorre quando a excitação externa apresenta grande magnitude, assim espera-se que a vibração total seja complexa. Por outro lado quando a razão é pequena – isto é, quando a vibração paramétrica é muito maior do que a vibração externa – após um tempo, as características da vibração total são regidas pelas características da vibração paramétrica.

Figura 70: Resposta temporal típica para vibração combinada com as excitações em de fase. Resultado simulado com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.1779$ e $H_6 = 0.47$.

A Figura (71) apresenta as modificações provocadas quando as excitações estão fora de fase e os demais parâmetros são exatamente os mesmos utilizados na simulação com φ em fase. Quando comparado com o caso em fase, pode-se observar um comportamento dinâmico similar. Em adição não se observa nenhuma modificação importante, nem mesmo na região de desenvolvimento da vibração paramétrica.

De maneira conclusiva, esta seção apresentou que o ângulo de fase entre as excitações não produz nenhuma modificação importante no comportamento dinâmico. A partir destes resultados, as investigações sobre a vibração combinada pode ser expandida para dois casos mais gerais. O primeiro é caracterizado quando a frequência da excitação externa Ψ é comensurável com a frequência natural ω_n . O segundo e mais complexo é caracterizado quando a frequência da excitação externa Ψ é incomensurável

Figura 71: Resposta temporal típica para vibração combinada com as excitações fora de fase. Resultado simulado com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.1779$ e $H_6 = 0.47$.

com a frequência natural ω_n . Em ambos os casos a estrutura está envolvida em uma ressonância paramétrica principal.

6.1.2 Caso 2: Ψ e ω_n Comensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$

Nesta seção serão discutidos as características da interação entre a vibração externa e paramétrica, assim como, suas conseqüências sobre o comportamento dinâmico da estrutura. Em especial será abordado o caso geral caracterizado quando Ψ e ω_n são comensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$.

Dizer que Ψ e ω_n são comensuráveis significa que existem inteiros k_i positivos ou negativos e diferentes de zero tal que, $k_1\Psi + k_2\omega_n = 0$. Em termos da excitação paramétrica principal esta condição equivale a $k_1\Psi + 1/2k_2\Theta = 0$.

Foram realizadas duas simulações. Na primeira, considerou-se a razão $\Psi : \omega_n = 1 : 20$ para três amplitudes da excitação externa, representada pelo coeficiente adimensional H_6 . A segunda simulação foi realizada para $\Psi : \omega_n = 3 : 20$ e para os mesmos três valores de H_6 .

A Figura (72) apresenta os resultados teóricos quando $\Psi : \omega_n = 1 : 20$ e para três valores de H_6 . A parte central desta figura apresenta a vibração temporal total. Na parte esquerda é apresentado o tempo expandido para o início da vibração, a qual

representa somente a vibração externa, cujo período é $T_\Psi = 1$ s. Na parte direita da figura é apresentado o tempo expandido da vibração total, formada devido a combinação da vibração paramétrica com a vibração forçada. Nesta porção pode-se observar a complexidade do comportamento dinâmico da estrutura, assim como, observa-se que neste caso a magnitude da resposta varia periodicamente com período $T_r = 1$ s. Em outras palavras, o período da modulação em amplitude é $T_r = 1$ s.

Figura 72: Resposta típica da vibração combinada quando $\Psi : \omega_n = 1 : 20$. Resultado simulado com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.1779$ e para três valores de H_6 : (a) $H_6 = 0.47$; (b) $H_6 = 1.43$ and; (c) $H_6 = 1.90$.

A partir dos resultados apresentados na Figura (72) a periodicidade da resposta quando $t \gg 0$ é numericamente igual ao período da resposta forçada, isto é, $T_\Psi = T_r = 1$ s. Este resultado sugere que o período da modulação em amplitude para $t \gg 0$ é ditada pela frequência da excitação externa. Entretanto, antes de se tomar qualquer conclusão precipitada neste sentido, é conveniente analisar o que acontece na segunda simulação, caracterizada por $\Psi : \omega_n = 3 : 20$.

A Figura (73) apresenta os resultados obtidos quando $\Psi : \omega_n = 3 : 20$. Se realmente a excitação externa é a responsável em ditar o período da modulação em amplitude para $t \gg 0$, a periodicidade deverá ser $T_r = 0.33$ s. Entretanto, os resultados apresentados nesta figura apontam para uma periodicidade igual à $T_r = 1$ s. Conseqüentemente este resultado sugere a ocorrência de um processo mais complexo, isto é, não é somente a frequência da excitação externa que determina o período da modulação presente na vibração combinada para $t \gg 0$.

Figura 73: Resposta típica da vibração combinada quando $\Psi : \omega_n = 3 : 20$. Resultado simulado com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.1779$ e para três valores de H_6 : (a) $H_6 = 0.47$; (b) $H_6 = 1.43$ and; (c) $H_6 = 1.90$.

O entendimento físico sobre processo que rege o período da modulação presente na vibração combinada desenvolvida foi obtido após várias outras simulações. O que ocorre é um processo de modulação entre a vibração externa e a vibração paramétrica, cuja natureza é altamente não-linear. Assim é proposto o seguinte axioma:

Axioma 6.1 *O período da modulação em amplitude da vibração combinada de um sistema não-linear com um grau de liberdade, envolvido em uma ressonância paramétrica principal e para o qual a frequência de excitação externa é comensurável com a frequência natural não-amortecida é dado pelo inverso do maior divisor comum entre a frequência da excitação externa e a frequência natural não-amortecida, ambas em Hertz.*

Ao aplicar o Axioma (6.1) para o primeiro caso, isto é, quando $\Psi : \omega_n = 1 : 20$ resulta em: o maior divisor comum entre 1 Hz e 20 Hz é 1 Hz, cujo inverso é 1 s. Para o segundo caso, no qual $\Psi : \omega_n = 3 : 20$ resulta em: o maior divisor comum entre 3 Hz e 20 Hz é 1 Hz, cujo inverso é 1 s. Estes resultados estão em conformidade com os resultados teóricos apresentados nas Figuras (72) e (73).

Nesta seção foram obtidos resultados significativos sobre o comportamento dinâmico da estrutura sob investigação. O principal resultado consiste na proposição de um axioma que pode ser empregado para prever qual será o período da modulação em am-

plitude da vibração combinada. Em adição, foi observado um comportamento dinâmico rico, complexo e desafiante no contexto de ser controlado. Na próxima seção é analisado um caso ainda mais geral, caracterizado quando Ψ e ω_n são incomensuráveis e a estrutura está envolvida em uma ressonância paramétrica principal.

6.1.3 Caso 3: Ψ e ω_n Incomensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$

Infelizmente em situações reais poucas situações recaem sobre as condições analisadas na seção anterior. Conseqüentemente, existe um grande interesse em se analisar situações nas quais Ψ e ω_n são incomensuráveis. Exatamente estes casos serão abordados nesta seção.

Após inúmeras simulações, pôde-se observar claramente que os casos incomensuráveis, quando comparados com os comensuráveis, são muito mais complexos. Em adição, não foi possível encontrar nenhuma regra que pudesse reger o período da modulação da vibração combinada. Portanto, o Axioma (6.1) não é válido para o caso incomensurável.

Várias simulações especiais foram realizadas cujos resultados estão descritos na Tabela (5). Os casos apresentados nesta tabela são especiais pois trazem algumas razões interessantes entre Ψ e ω_n . Dentre estes casos, foram simulados casos do tipo um inteiro mais meio, um inteiro mais um terço, um inteiro mais um quarto, etc. Como resultado, foi observado que em todos os casos especiais existe modulação em amplitude na vibração combinada, mesmo para os casos nos quais não se acreditava que isto viesse a ocorrer.

Tabela 5: Resultados para várias simulações quando Ψ and ω_n são incomensuráveis e $\Theta = 2\omega_n$.

Simulações		
Razão $\Omega : \omega_n$	Período ^a T_r [s]	Frequência $1/T_r$ [Hz]
1.25:20	0.80	1.25
1.33:20	0.75	1.33
1.50:20	2.00	0.50
1.66:20	0.60	1.66
1.75:20	4.00	0.25
3.25:20	4.00	0.25
3.33:20	0.30	3.33
3.50:20	2.00	0.5
3.66:20	3.00	0.33
3.75:20	0.80	1.25

^aRelativo à resposta combinada.

De maneira conclusiva o caso abordado nesta seção ainda necessita ser explorado

mais profundamente. Trata-se de um problema complexo e interessante que merece ser pesquisado de maneira mais dedicada.

6.2 Experimentos

Nesta seção será investigado experimentalmente o comportamento dinâmico da estrutura sob a ação de excitações combinadas do tipo harmônica e, do meio viscoso. Os resultados experimentais serão confrontados com as predições teóricas obtidas na seção anterior. O objetivo é verificar a qualidade das predições teóricas, assim como, prover um entendimento ainda mais profundo sobre a vibração combinada principal e como o meio viscoso age sobre este tipo de vibração.

6.2.1 Desenvolvimento Experimental

6.2.1.1 Planejamento e Descrição dos Ensaios Experimentais

Durante a fase preliminar de planejamento dos ensaios experimentais, pareceu interessante e atrativo, tanto do ponto de vista científico quanto em termos das possibilidades do arranjo experimental, a realização de quatro ensaios não-lineares:

ENLC1 Excitar a estrutura com $\lambda = \Omega = 2\omega_n$, mantendo as excitações em fase e para três amplitudes da excitação externa.

ENLC2 Similar ao ensaio ENLC1, entretanto com as excitações fora de fase.

ENLC3 Excitar a estrutura com $\lambda = 2\omega_n$ e $\Omega = \omega_n$, mantendo as excitações em fase e para três amplitudes da excitação externa.

ENLC4 Similar ao ensaio ENLC3, entretanto com as excitações fora de fase.

A partir destes quatro ensaios, pode-se observar que a estratégia empregada é realizar variações nos parâmetros da excitação externa, enquanto a estrutura apresentasse vibração paramétrica principal. Desta maneira a influência da excitação externa, assim como, as interações decorrentes da resposta combinada poderiam ser capturadas e avaliadas. Em especial, o ensaio ENLC3 — no qual a excitação externa provoca uma condição de ressonância externa primária — é muito interessante pois provocaria altos níveis de resposta externa.

Entretanto, durante a caracterização das fontes de excitação², foi demonstrado experimentalmente que a fonte de excitação acústica não é apropriada para operar próxima à 18 Hz devido a existência de importantes distorções no sinal sonoro. Portanto, os ensaios ENLC3 e ENLC4 não poderão ser realizados de maneira adequada.

Exatamente neste ponto, vale apenas a realização de um comentário importante. Pode-se observar aqui de maneira absolutamente clara, a real importância da caracterização das fontes de excitação, especialmente quando estas são aplicadas em ensaios com grandes rigores em termos da qualidade da excitação. Ressalta-se ainda que, caso a fonte de excitação acústica não fosse caracterizada anteriormente, certamente os ensaios ENLC3 e ENLC4 seriam incluídos no plano final de ensaios e conseqüentemente, teriam sido realizados. Entretanto os resultados obtidos a partir destes ensaios seriam totalmente inadequados e provavelmente conclusões errôneas teriam sido obtidas sobre o comportamento dinâmico da estrutura sob excitação combinada. O pior de tudo isso é que, resultados experimentais são sempre encarados como verdadeiros. Realmente resultados experimentais aproximam-se muito do real comportamento, desde que sejam obtidos com seriedade e responsabilidade.

De volta ao planejamento dos ensaios, temos que devido as limitações da fonte de excitação acústica, o planejamento inicial dos ensaios foi reduzido de quatro ensaios para dois, o ENLC1 e o ENLC2. Mesmo frente a esta redução, espera-se que com a realização dos ensaios ENLC1 e ENLC2 seja possível observar experimentalmente como a estrutura se comporta dentro deste cenário complexo. Ainda, espera-se verificar a consistência das predições teóricas obtidas no Capítulo 5 e assim validar os resultados teóricos.

6.2.1.2 Aparato Experimental

A Figura (74) apresenta o arranjo experimental definido e empregado nas investigações sobre a vibração combinada do item de teste. Observando mais cuidadosamente esta figura, pode-se notar a complexidade e dificuldade intrínsecas deste tipo de ensaio vibratório.

A estrutura sob investigação foi montada sobre a base auxiliar e esta montagem fixada sobre a mesa do excitador B&K 4801, responsável em promover a excitação paramétrica. Um acelerômetro translacional B&K 4371 (9.84 pC/g) foi posicionado sobre a mesa do excitador para monitorar as características da excitação paramétrica. Em adição, também foi empregado um acelerômetro angular Kistler 8836M01 (34 μ V/rad/s²)

²O procedimento e os resultados estão no Apêndice (A)

Figura 74: Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração combinada.

para monitorar *on-line* os possíveis movimentos de rotação da mesa do excitador e garantir que o ensaio foi realizado dentro de níveis aceitáveis. Por fim um acelerômetro miniatura B&K 4370 (1.03 pC/g) foi empregado para capturar a resposta vibratória da estrutura.

A fonte de excitação externa proveniente da fonte acústica foi montada paralelamente à estrutura. Para isso, esta fonte foi suspensa por intermédio de uma suspensão flexível de borracha (latex)³, resultando em uma condição livre-livre. Um transdutor laser Polytec CLV 1000 (50.0 (mm/s)/V) foi empregado para monitorar a excitação externa. Este tipo de transdutor foi selecionado ao invés do microfone por ser mais robusto, ter operação mais simples e ser menos exigente em relação às condições do meio de operação. Vale ressaltar que o emprego do laser foi possível pois esta fonte de excitação foi caracterizada anteriormente, e portanto é conhecido a relação entre a voltagem de entrada, velocidade do cone e pressão.

A geração de sinais para ambos os mecanismos de excitação foi realizado por um hardware auxiliar Agilent E1432A DSP montado em conjunto com o hardware principal Agilent E8408A. Posteriormente, os sinais gerados foram amplificados, utilizando para a fonte acústica um amplificador comercial de 500W e para o excitador eletrodinâmico um amplificador de potência B&K 2707.

Finalmente, o sistema de aquisição empregado consiste de dois condicionadores B&K 2626, um para o sinal da excitação paramétrica e outro para a resposta vi-

³Esta suspensão foi confeccionada utilizando elementos flexíveis popularmente denominados de “tripa de mico” ou “sorinho”. Estes elementos são originalmente empregados em medicina.

bratória da estrutura, um controlador do transdutor laser e o módulo A/D Agilent VXI gerenciado pelo software MTS I-DEAS. Por fim, um osciloscópio Agilent 54621D foi empregado para monitorar e ajustar os níveis de excitação.

6.2.2 Resultados Experimentais e Comparação com os Simulados

Durante o planejamento final dos ensaios envolvendo vibração combinada, estipulou-se a execução de dois ensaios. O Primeiro (ENLC1) consiste em excitar a estrutura com $\lambda = \Omega = 2\omega_n$, mantendo as excitações em fase e para três amplitudes da excitação externa. Já o segundo, denominado de (ENLC2) é similar ao ensaio ENLC1, entretanto com as excitações fora de fase. Embora os ensaios descritos acima previssem excitar externamente a estrutura com três amplitudes distintas, ao se realizar alguns ensaios preliminares observou-se singelas modificações na magnitude da resposta. Assim decidiu-se reduzir o número de níveis de excitação externa, de três níveis 5.12 Pa, 6.34 Pa e 7.65 Pa para 6.34 Pa.

Em adição, os testes planejados anteriormente prevêm a mudança de fase entre os sinais de excitação. Garantir esta condição é fundamental para a correta realização dos ensaios. A Figura (75) apresenta os resultados experimentais — nos domínios do tempo e da frequência — relativos as características das excitações quando em fase. Nesta figura, pode-se notar claramente que as excitações estão em fase. Em adição, ambas as excitações possuem uma componente espectral dominante e não se observa nenhum harmônico com amplitude significativa. Portanto, as excitações estão em conformidade com os requerimentos do ensaio ENLC1.

Completando a verificação de conformidade das excitações, a Figura (76) apresenta as representações no domínio do tempo e da frequência para a condição na qual as excitações estão fora de fase. A partir desta figura pode-se observar claramente que as excitações estão realmente defasadas em noventa graus. Também neste caso, as excitações possuem uma componente espectral dominante e não existe a presença de harmônicos com amplitudes significativas.

Uma vez que os requerimentos em relação as condições experimentais de excitação foram alcançados, os ensaios podem ser realizados correntemente.

A Figura (77) apresenta os resultados quando as excitações estão em fase. Do ponto de vista global observa-se uma excelente correlação entre os resultados experimentais e as predições teóricas. Ao examinar o resultado experimental mais especificamente na região próxima ao início do desenvolvimento da vibração paramétrica (região detalhe)

Figura 75: Sinais experimentais das excitações paramétrica e externa representados nos domínios do tempo e da frequência. Caso em que as excitações estão em fase.

Figura 76: Sinais experimentais das excitações paramétrica e externa representados nos domínios do tempo e da frequência. Caso em que as excitações estão fora de fase.

pode-se observar que realmente a estrutura responde segundo sua primeira frequência natural ω_n juntamente com harmônicos desta. Simultaneamente, devido a presença da

excitação externa a estrutura também responde, entretanto em uma frequência igual à $2\omega_n$. Este comportamento é exatamente o predito pela teoria e descrito ao lado direito desta mesma figura.

Já a Figura (78) apresenta os resultados comparativos quando as excitações estão fora de fase. Também neste caso, observa-se de maneira geral uma excelente correlação entre os resultados experimentais e os preditos pela teoria. Os resultados experimentais confirmam que a variação da fase entre as excitações não provoca nenhuma alteração significativa na vibração combinada.

Em termos mais detalhados, existe uma alteração entre os resultados teóricos e experimentais relacionados com a maneira como ocorre a fusão entre as componentes vibratórias devido a excitação externa e as devido à excitação paramétrica. Teoricamente esta fusão deveria ocorrer na porção superior da resposta, entretanto o resultado experimental demonstrou exatamente o contrário. Neste caso, a predição teórica é mais coerente que o demonstrado experimentalmente. Acima de tudo, esta característica não representa fortes implicações sobre o comportamento dinâmico.

De maneira conclusiva, baseado na excelente correlação apresentada entre os resultados experimentais e teóricos pode-se afirmar que nos casos em que a razão entre a componente da vibração externa e a componente da vibração paramétrica é grande, existe uma clara separação destas componentes. Esta condição ocorre quando a componente da vibração externa apresenta grande magnitude, assim a resposta total é complexa. Por outro lado quando a razão é pequena – isto é, quando a componente da vibração paramétrica é muito maior do que a componente da vibração externa – após um tempo, as características da resposta total são regidas pelas características da vibração paramétrica e, portanto, a presença da excitação externa não provoca grandes alterações na magnitude da resposta. Em adição, o ângulo de fase entre as excitações não apresentou ser uma variável importante para o comportamento dinâmico.

Entretanto, nada pode-se afirmar em relação as características de estabilidade, uma vez que, a excitação externa mesmo que provoque pequenos níveis de resposta vibratória pode modificar as características de bifurcação entre as soluções triviais. Esta questão ainda precisa ser melhor investigada em futuros trabalhos.

6.3 Sumário do Capítulo

Neste capítulo, foram explorados as características do sistema estrutural com um grau de liberdade envolvido em uma condição de ressonância paramétrica principal

Figura 77: Resultados experimentais e teóricos da vibração combinada, considerando as excitações em fase. Resultados experimentais obtidos com: (i) excitação paramétrica com 36.132 Hz e 39.24 m/s² e; (ii) excitação externa com 36.132 Hz e 6.34 Pa. Resultados teóricos com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.177$ e $H_6 = 0.47$.

Figura 78: Resultados experimentais e teóricos da vibração combinada, considerando as excitações em fora de fase. Resultados experimentais obtidos com: (i) excitação paramétrica com 36.132 Hz e 39.24 m/s² e; (ii) excitação externa com $H_1 = 0.0077$, $H_2 = 0.1547$, $H_3 = 1.7132$, $H_4 = 2.7820$, $H_5 = 51.177$ e $H_6 = 0.47$.

e sob a ação simultânea de uma excitação forçada, configurando assim um caso de vibração combinada principal. Neste contexto, três casos de interesse foram analisados, numericamente e experimentalmente.

No primeiro caso, foram realizadas as primeiras observações sobre este tipo de vibração. Em adição, também foi avaliado os efeitos do ângulo de fase entre as excitações. Foram apresentados resultados numéricos para duas condições diferentes. A primeira situação visa simular a condição na qual as excitações (paramétrica e externa) estão em fase. A segunda visa simular a condição fora de fase. Entretanto, em ambos os casos o sistema apresenta uma ressonância paramétrica principal e ambas as excitações possuem a mesma frequência. Pôde-se observar que o ângulo de fase entre as excitações não provoca alterações importantes nas características da vibração combinada.

No segundo caso, foram discutidos as características da interação entre as excitações externa e paramétrica, assim como, suas conseqüências sobre o comportamento dinâmico da estrutura. Em especial foi abordado o caso geral caracterizado quando a frequência da excitação externa é comensurável com a frequência natural não-amortecida. Foram obtidos vários resultados significativos sobre o comportamento dinâmico. O principal resultado consiste na proposição de um axioma que pode ser empregado para prever qual será o período da modulação em amplitude da vibração combinada desenvolvida. Em adição, foi observado um comportamento dinâmico rico, complexo e desafiante no contexto de ser controlado.

No terceiro e último caso, foram discutidos as características da interação entre as excitações externa e paramétrica, assim como, suas conseqüências sobre o comportamento dinâmico da estrutura quando a frequência da excitação externa é incomensurável com a frequência natural não-amortecida. Foi observado um comportamento dinâmico rico e complexo. Assim este caso ainda necessita ser explorado mais profundamente. Trata-se de um problema complexo e interessante que merece ser mais amplamente pesquisado.

Finalizando o capítulo, foi investigado experimentalmente o comportamento dinâmico da estrutura sob a ação de excitações combinadas do tipo harmônica e, do meio viscoso. Os resultados experimentais foram confrontados com as predições numéricas.

Os resultados obtidos experimentalmente demonstraram excelente correlação com as predições teóricas. Decorrente disto, pode-se afirmar que nos casos em que a razão entre a resposta externa e a resposta paramétrica é grande, existe uma clara separação destas componentes. Esta condição ocorre quando a excitação externa apresenta grande magnitude, assim a resposta total é complexa. Por outro lado quando a razão é pequena

– isto é, quando a resposta paramétrica é muito maior do que a resposta externa – após um tempo, as características da resposta total são regidas pelas características da resposta paramétrica e, portanto, a presença da excitação externa não provoca grandes alterações na magnitude da resposta. Em adição, o ângulo de fase entre as excitações não apresentou ser uma variável importante para o comportamento dinâmico.

Decorrente da excelente correlação obtida – para uma condição específica – entre os resultados experimentais e as previsões teóricas envolvendo a vibração combinada, foi demonstrado a qualidade do modelo matemático proposto em descrever as características dinâmicas da estrutura. Portanto, os demais resultados teóricos podem ser considerados válidos.

Entretanto, nada pode-se afirmar em relação as características de estabilidade, uma vez que, a excitação externa mesmo que provoque pequenos níveis de resposta vibratória pode modificar as características de bifurcação entre as soluções triviais. Esta questão ainda precisa ser melhor investigada em futuros trabalhos.

CAPÍTULO

SETE

Vibração Autoparamétrica Não-Linear: Identificação e Experimentos

“Die schwierigkeiten wachsen, je näher man dem ziele kommt.”

— J. W. Goethe (1749-1832)

Sistemas estruturais com múltiplos graus de liberdade podem exibir comportamento dinâmico complexo. Quando em condições ressonantes, estes sistemas desenvolvem amplitude finita de movimento cuja conseqüência é tornar mais intenso o acoplamento não-linear entre os diferentes modos de vibrar da estrutura. Como resultado deste acoplamento não-linear, pode haver transmissão de energia vibratória de um modo diretamente excitado para outro modo, resultando em uma vibração multi-modal. Ressonâncias autoparamétricas constituem um dos mecanismos responsáveis pela transferência de energia entre modos.

Neste contexto, o presente capítulo é dedicado à busca por maiores conhecimentos sobre a vibração provocada e decorrente de ressonâncias autoparamétricas. Paralelamente, os resultados gerados irão promover avanços na compreensão dinâmica de

estruturas do tipo asa/pilone/turbina.

7.1 Identificação e Caracterização de Ressonâncias Autoparamétricas

Identificar a possibilidade de condições propícias¹ para a ocorrência de ressonâncias autoparamétricas é fundamental. Neste sentido, a identificação compreende o primeiro passo em direção à compreensão dos mecanismos que a provocam, assim como, na avaliação de suas características e conseqüências.

Quando o problema em questão permite a obtenção analítica de modelos não-lineares, a possibilidade de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas pode ser avaliada por intermédio do método da expansão direta ou pelo método das múltiplas escalas. Quando o método da expansão direta é empregado, ressonâncias autoparamétricas são identificadas devido presença de um pequeno divisor em alguma ordem de perturbação. No caso do emprego do método das múltiplas escalas, ressonâncias autoparamétricas podem ser identificadas pela observação de ocorrência de termos seculares.

Assim, a identificação da possibilidade de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas utilizando tanto o método da expansão direta quanto o método das múltiplas escalas depende diretamente do prévio conhecimento de um modelo não-linear. Entretanto, em muitas situações — em especial a encontrada neste capítulo — a complexidade topológica da estrutura impossibilita a obtenção analítica de um modelo matemático não-linear. Portanto a identificação utilizando uma das técnicas citadas não pode ser realizada.

Nesta seção é proposta uma metodologia simples e útil a qual possibilitará a identificação da possibilidade de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas mesmo na ausência de um modelo analítico não-linear. A metodologia proposta é especialmente indicada no caso de estruturas topologicamente complexas.

Atualmente sabe-se que uma estrutura flexível pode apresentar ressonâncias autoparamétricas (internas) quando suas frequências naturais ω_i são comensuráveis ou quase comensuráveis, isto é, quando existem inteiros positivos ou negativos k_i tal que (NAYFEH, 2000)

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i \approx 0, \quad n \geq 2 \quad (7.1)$$

¹Referente apenas às características físicas do sistema, independentemente da excitação.

ainda nesta equação, n descreve o número de modos naturais lineares envolvidos. Em adição, a proximidade de zero decorre da intensidade do acoplamento não-linear entre os modos envolvidos.

Para que a Equação (7.1) possa efetivamente indicar a possibilidade de ocorrência de uma ressonância autoparamétrica é necessário a especificação de três fatores: (i) número de modos n ; (ii) n frequências naturais ω distintas e; (iii) as constantes inteiras positivas ou negativas k . Com o conhecimento destes três itens a expressão pode ser resolvida e indicar ou não a existência de comensurabilidade envolvendo os modos em questão.

O caso mais simples que pode ser encontrado ocorre quando $n = 2$. Neste caso, busca-se identificar a ocorrência de comensurabilidade entre duas frequências naturais do sistema. Supondo que o sistema em questão possua apenas duas frequências naturais, ou seja, que a matriz $[\omega_r^2]$ é de ordem 2×2 . Neste caso, existe apenas uma expressão resultante da Equação (7.1) ou seja

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \approx 0 \quad (7.2)$$

Se o número de modos envolvidos for mantido, isto é $n = 2$, mas a ordem da matriz $[\omega_r^2]$ passar para 4×4 , ocorre um aumento significativo de possibilidades descritas pela Equação (7.1), neste caso

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \approx 0 \quad (7.3)$$

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_3 \approx 0 \quad (7.4)$$

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_4 \approx 0 \quad (7.5)$$

$$k_1\omega_2 + k_2\omega_3 \approx 0 \quad (7.6)$$

$$k_1\omega_2 + k_2\omega_4 \approx 0 \quad (7.7)$$

$$k_1\omega_3 + k_2\omega_4 \approx 0 \quad (7.8)$$

Ainda mantendo o mesmo número de modos envolvidos ($n = 2$), mas aumentando a ordem da matriz $[\omega_r^2]$ para 6×6 , são geradas quinze equações. Se a ordem de $[\omega_r^2]$ passar para 8×8 , são geradas vinte e oito equações. Já no caso da matriz $[\omega_r^2]$ ser 12×12 , são geradas sessenta e seis equações. Neste caso, o número de equações geradas é fornecida pela seguinte expressão

$${}_oC_n = \frac{o!}{(o-n)!n!} \quad (7.9)$$

na qual o representa a ordem da matriz $[\omega_r^2]$ e n é o número de modos envolvidos.

A partir da Equação (7.9) pode-se observar que o número de equações geradas aumenta consideravelmente com o aumento do número de modos envolvidos. Por exemplo, para $n = 2$ e $o = 12$, são geradas sessenta e seis equações. Esse número aumenta para duzentos e vinte equações, para $n = 3$ e $o = 12$.

A análise apresentada nos parágrafos anteriores descreveu o número de equações geradas variando-se o número de frequências naturais, assim como, o número de modos envolvidos. Neste caso, o parâmetro k foi mantido da mesma ordem de n . Em outras palavras, a ordem de k foi imposta como igual à ordem de $[\omega_r^2]$. Entretanto, na maioria dos casos práticos, não existe compatibilidade de ordem entre k e $[\omega_r^2]$.

Em sistemas estruturais, a maioria das observações de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas envolvem frequências naturais múltiplas de um, dois ou três. Embora deve-se ressaltar que isto não significa que não pode haver ocorrência de ordem superior. Fisicamente este fato é atribuído ao tipo e ordem das não-linearidades ativas no sistema. Nestes casos, k pode ser assumido como de ordem 6, ou seja, pode assumir seis valores distintos $k = -3, -2, -1, 1, 2, 3$.

Ao se considerar que k pode assumir seis valores distintos, tal como descrito anteriormente, o caso mais simples encontrado quando $n = 2$, torna-se

$$k_1\omega_1 - k_3\omega_2 \approx 0 \quad (7.10)$$

$$k_1\omega_1 - k_2\omega_2 \approx 0 \quad (7.11)$$

$$k_1\omega_1 - k_1\omega_2 \approx 0 \quad (7.12)$$

$$k_2\omega_1 - k_3\omega_2 \approx 0 \quad (7.13)$$

$$k_2\omega_1 - k_2\omega_2 \approx 0 \quad (7.14)$$

$$k_2\omega_1 - k_1\omega_2 \approx 0 \quad (7.15)$$

$$k_3\omega_1 - k_3\omega_2 \approx 0 \quad (7.16)$$

$$k_3\omega_1 - k_2\omega_2 \approx 0 \quad (7.17)$$

$$k_3\omega_1 - k_1\omega_2 \approx 0 \quad (7.18)$$

Apenas este caso já é suficiente para demonstrar o número de possibilidades de condições de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas em sistemas estruturais. Este

número aumenta consideravelmente com a ordem da matriz $[\omega_r^2]$, com o número de modos envolvidos n e com o número de coeficientes k_i .

A partir da discussão promovida nos parágrafos anteriores pode-se constatar que a complexidade envolvida na identificação das possíveis condições de ocorrência de ressonâncias autoparamétricas é decorrente do grande número de equações simples que precisam ser analisadas e não da complexidade intrínseca destas equações. Esta característica torna favorável o emprego de uma rotina computacional que, não só gere todas as possibilidades mas que também caracterize o tipo de ocorrência das ressonâncias.

7.1.1 Implementação Computacional e Aplicação

Com o objetivo de viabilizar e flexibilizar a identificação e caracterização de condições favoráveis ao surgimento de ressonâncias autoparamétricas, foi construída uma rotina computacional utilizando recursos de matemática simbólica.

Esta rotina — denominada **AutoRes** — possui uma arquitetura simples e bem definida. Em adição, permite ao usuário avaliar a ocorrência de ressonâncias envolvendo três modos² e qualquer extensão dos coeficientes k_i .

A rotina desenvolvida possui código aberto e pode ser amigavelmente empregada por outras pessoas. Devido a importância da identificação e caracterização das condições de ressonâncias autoparamétricas, acredita-se que esta rotina pode contribuir no estudo das vibrações autoparamétricas em estruturas de grande porte. A listagem completa da rotina AutoRes, assim como, sua sintaxe encontra-se no Apendice (F).

A rotina AutoRes foi empregada na presente pesquisa no sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Para isso, utilizou-se as características modais experimentalmente identificadas no Capítulo 4. Especificamente, os valores das sete frequências naturais foram empregados como dados de entrada.

Como resultado, a rotina AutoRes identificou a seguinte condição de comensurabilidade:

$$2\omega_2 - 1\omega_4 \approx 0 \quad (7.19)$$

Este resultado indica que existe uma ressonância autoparamétrica no sistema, envolvendo o modo de turbina lateral ($\omega_2 = 10.505 \text{ Hz}$) e o 1-n flexão asa y ($\omega_4 =$

²Devido à arquitetura da rotina, é plenamente possível que número de modos seja expandido em versões futuras.

20.972 Hz). Ainda, a rotina caracterizou esta condição de ressonância como da ordem 2:1.

Uma vez que uma possível condição de ressonância autoparamétrica foi identificada e caracterizada, as características vibratórias provenientes deste tipo de ressonância podem ser exploradas. As próximas seções deste capítulo são dedicadas à esta exploração.

7.2 Experimentos com o Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade

7.2.1 Aparato Experimental

A Figura (79) apresenta o arranjo experimental definido e empregado nas investigações sobre a vibração autoparamétrica no sistema de múltiplos graus de liberdade.

Figura 79: Arranjo experimental empregado nas investigações sobre vibração autoparamétrica.

O mecanismo de excitação consiste em um excitador eletrodinâmico MB Dynamics Modal 50. Este foi acoplado a estrutura por intermédio de uma *stinger*. A *stinger*, por sua vez, foi fixada em uma de suas extremidades à estrutura e na outra a uma cabeça de impedância B&K 8001 (340 pC/N). A cabeça de impedância, por sua vez, está fixa

à mesa do excitador. A primeira nervura foi escolhida como ponto de aplicação da força por estar mais próxima da raiz da asa, e conseqüentemente, tornando possível a aplicação de maiores magnitudes de força sem causar grandes deslocamentos desta posição³, e assim assegurando a qualidade da excitação.

A geração do sinal de excitação, assim como, o controle da magnitude foi realizado por um HP Agilent E8408A VXI Mainframe gerenciado pelo software MTS I-DEAS 10. Após a geração, o sinal de excitação é amplificado por um amplificador de potência MB Dynamics e posteriormente, enviado para o excitador eletrodinâmico.

A resposta foi capturada por oito acelerômetros PCB 333b (100 mV/g) e 5.6 g cada fixados sobre as nervuras da asa e dois PCB U353B16 (9.4 mV/g) e 2.6 g fixados na turbina, tal como apresenta a Figura (79).

O sistema de aquisição de sinais consiste em dois amplificadores de carga B&K 2626 utilizados para os sinais de força e aceleração provenientes da cabeça de impedância e um condicionador de sinais PCB series 481 para os demais acelerômetros. A conversão A/D e geração do sinal de excitação é realizado por um Agilent E1432 comandado pelo software MTS I-DEAS 10. Um osciloscópio HP Agilent 54621D é empregado como analisador espectral e tem como finalidade capturar a magnitude de cada componente espectral contida na vibração autoparamétrica.

É interessante observar que o aparato experimental empregado aqui é semelhante ao anteriormete empregado na identificação modal desta estrutura. As diferenças ficam por conta do osciloscópio e do controle de força. Vale ressaltar que esta semelhança – tanto na arquitetura, quanto nos elementos empregados na cadeia de medição – é altamente positiva e facilita fortemente a execução de ensaios não-lineares subseqüentes à identificação modal.

7.2.2 Planejamento e Descrição dos Ensaios Experimentais

Para investigar profundamente várias características da vibração autoparamétrica envolvendo os modos de turbina lateral e 1-n flexão asa y, foram planejados oito ensaios experimentais. Quatro destes são dedicados a investigar características em regime permanente e os outros quatro a investigar características em regime transitório.

Os ensaios em regime permanente são divididos em dois grupos, contendo dois tipos de ensaio cada. O primeiro grupo possui como variável de controle a frequência da excitação autoparamétrica e assim, descreve experimentalmente curvas resposta-

³Como anteriormente discutido, excitadores eletromagnéticos possuem não-linearidades que tornam-se mais ativas com maiores deslocamentos da armadura.

freqüência. O segundo grupo possui como variável de controle a magnitude da excitação e assim, descreve experimentalmente curvas resposta-amplitude.

As curvas resposta-freqüência foram obtidas para um nível de excitação de 5.0 N mantido constante pelo sistema de controle em malha fechada. No primeiro ensaio, foi realizado uma varredura senoidal ascendente durante todo o intervalo de freqüência requerido. Já no segundo, foi adotado o mesmo procedimento, mas na direção descendente. Desta maneira, estes ensaios também buscam investigar qual o efeito da direção – ascendente ou descendente – da variação da freqüência de excitação sobre as características da vibração autoparamétrica sob estudo.

Já as curvas resposta-amplitude foram obtidas para freqüência de excitação igual à 21.15 Hz. Esta condição de freqüência foi selecionada pois corresponde a sintonia praticamente exata da ressonância autoparamétrica em estudo ⁴. Então, a magnitude da excitação foi gradativamente aumentada até atingir o máximo valor fisicamente realizável dentro do arranjo experimental. Uma vez atingido este valor, a magnitude da excitação foi, então, gradativamente diminuída até um valor mínimo, totalizando dois ensaios. Estes ensaios buscam investigar qual o efeito do acréscimo ou decréscimo de força sobre as características da vibração autoparamétrica sob estudo.

Em termos práticos, as curvas resposta-freqüência e resposta-amplitude — mais especificamente os resultados da resposta em regime permanente para cada condição de excitação específica — são registrados com o auxílio do osciloscópio Agilent modelo 54621D, configurado com analisador espectral. Uma vez que a resposta em regime permanente é alcançada, a magnitude de cada componente espectral é anotada diretamente no osciloscópio. Este procedimento é repetido para cada freqüência, no caso das curvas resposta-freqüência, ou para cada amplitude de excitação no caso das curvas resposta-amplitude.

Os ensaios em regime transitório contemplam quatro ensaios e possuem como parâmetro de controle a amplitude da força de excitação. O primeiro ensaio empregou 0.2 N de força máxima, o segundo 3.0 N, o terceiro 6.0 N e o último 9.0 N. Em todos os quatro ensaios foram gravados sinais temporais contendo 256 s de informação, contemplando todos os acelerômetros, assim como, o sinal de força. Especificamente, a amplitude da força foi aplicada segundo uma data assinatura, a qual possibilite explorar tanto o surgimento da ressonância autoparamétrica quanto sua extinção. A Figura (80) apresenta idealmente as características desta assinatura.

⁴Nesta condição de excitação espera-se que mesmo para baixos níveis de força o fenômeno de ressonância autoparamétrica seja desencadeado.

Figura 80: Assinatura ideal da amplitude da força de excitação autoparamétrica para os quatro níveis utilizados.

A assinatura idealmente apresentada pela Figura (80) descreve que para $t = T_i$ ocorre um súbito aumento da amplitude da excitação, formando de $t = 0$ até $t = T_i$ a região I. Então a amplitude permanece constante até $t = T_f$ onde ocorre a súbita extinção da excitação. O tempo decorrido de $t = T_i$ até $t = T_f$ forma a região II e de $t = T_f$ em diante a região III.

Uma vez que o aparato e o procedimento experimental foram descritos, vamos aos resultados. A próxima seção apresenta os resultados transientes.

7.3 Resultados Experimentais

7.3.1 Resultados Transientes

Nesta primeira seção dos resultados experimentais, serão apresentados os resultados transitórios envolvendo o sistema com múltiplos graus de liberdade. Estes resultados foram divididos em três subseções contemplando vários aspectos. A primeira envolve ensaios transitórios lineares e tem como objetivos: (i) validar o aparato experimental assim como, o procedimento empregado nos ensaios transitórios e; (ii) obter resultados que possam servir como base comparativa para os ensaios não-lineares. A segunda envolve as investigações sobre a vibração ressonante autoparamétrica e a terceira se destina a avaliar o efeito do tempo na nucleação da vibração ressonante autoparamétrica.

7.3.1.1 Caso Linear: Vibração Ressonante Externa

Segundo a teoria linear Nayfeh & Pai (2004), quando um sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade é excitado periodicamente e desenvolve amplitude infinitesimal de vibração, a resposta deste sistema — segundo coordenadas físicas $\{x\}$ — pode ser matematicamente descrita como⁵,

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi\}_i A_i \sin(\Omega t - \varphi_i) + \sum_{i=1}^n \{\phi\}_i B_i e^{-\xi_i \omega_i t} \sin\left(\sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i t - \theta_i\right) \quad (7.20)$$

na qual

$$A_j = \frac{\{\phi\}_j^T \{F\}}{\sqrt{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \Omega^2 \omega_j^2}}, \quad \varphi_j = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi_j \omega_j \Omega}{\omega_j^2 - \Omega^2}\right) \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} B_j &= \sqrt{C_{j1}^2 + C_{j2}^2}, & \theta_j &= \tan^{-1}\left(\frac{C_{j1}}{C_{j2}}\right) \\ C_{j2} &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_j^2} \omega_j} (\dot{q}_j(0) + \xi_j \omega_j q_j(0) + \xi_j \omega_j A_j \sin \varphi_j - A_j \Omega \cos \varphi_j) \\ C_{j1} &\equiv -q_j(0) - A_j \sin \varphi_j \end{aligned} \quad (7.22)$$

A partir da Equações (7.21) e (7.22) pode-se observar que todos os modos com fator de participação do j -ésimo modo $p_j \equiv \{\phi\}_j^T \{F\} \neq 0$ contribuem para a resposta do sistema. Ainda, a máxima contribuição do j -ésimo modo ocorre quando a frequência de excitação Ω é igual a frequência natural amortecida $\sqrt{1 - \xi_j^2} \omega_j$. Neste caso, a resposta do sistema é praticamente composta pelo j -ésimo modo, entretanto todos os outros modos com $p_j \equiv \{\phi\}_j^T \{F\} \neq 0$ contribuem — ainda que timidamente — para a resposta do sistema.

Para que somente o j -ésimo modo seja excitado $\{\phi\}_i^T \{F\}$ deve ser zero para todo $i \neq j$. Especialmente, esta condição ocorre quando o vetor da excitação externa $\{f\}$ é proporcional ao j -ésimo autovetor $\{\phi\}_j$.

Assim, a Eq. (7.20) demonstra que uma vibração ressonante externa proveniente de uma excitação periódica mono-componete é composta por duas parcelas. Uma parcela transitória e descrita pelo segundo termo da equação, e uma permanente descrita pelo primeiro termo. Com o passar do tempo, o termo $e^{-\xi_i \omega_i t}$ aproxima-se de

⁵O desenvolvimento completo da Eq (7.20) encontra-se no Apêndice (J).

zero e a vibração a partir deste instante entra em regime permanente. Por fim, também demonstra que, no caso da frequência de excitação Ω ser igual a j -ésima frequência natural amortecida $\sqrt{1 - \xi_j^2} \omega_j$ ocorrerá a máxima contribuição do j -ésimo modo e conseqüentemente resposta do sistema é praticamente composta pelo j -ésimo modo. A Figura (81) apresenta graficamente estas características teóricas.

Figura 81: Vibração externa ressonante da coordenada x_1 provocada por uma excitação periódica monocomponente. Resultado teórico, obtido a partir da Eq (7.20). Região I demonstra o surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante, região II demonstra a condição de regime permanente e Região III a extinção quando a força de excitação torna-se nula.

Na Figura (81) pode-se observar três regiões distintas. A região I apresenta o surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante. Já a região II demonstra a condição em regime permanente e por fim, a região III demonstra a extinção da vibração provocada pela extinção da força de excitação.

As características das regiões I e II já foram discutidas e compreendidas. Focando apenas na região III, como o sistema encontra-se em uma condição de ressonância externa, um único modo domina a resposta e portanto o sistema oscila praticamente na forma topológica deste modo dominante. Se em um determinado instante de tempo t_{III} esta vibração for hipoteticamente “congelada”, e os deslocamentos de cada grau de liberdade — em relação ao ponto de equilíbrio — fossem anotados e por fim, a fonte de excitação retirada, o problema se tornaria de vibração livre amortecida. Então neste instante t_{III} existiria uma condição inicial de deslocamento ($\{x(t_{III})\}$) muito próxima de um autovetor deste problema, mais especificamente do autovetor correspondente ao modo natural envolvido na ressonância. Assim, ao se descongelar novamente a vibração, o resultado seria uma vibração livre amortecida, também envolvendo um único modo.

Este comportamento é típico dos casos em que a condição inicial de deslocamento do problema é imposta como um autovetor (MEIROVITCH, 1970).

Para se avaliar experimentalmente o que estabelece a teoria linear, o sistema com múltiplos graus de liberdade foi submetido à uma excitação periódica monocomponente à 21.15 Hz e com amplitude descrita pela Figura (82). Como apresenta esta figura, o nível de amplitude foi pequeno e com valores máximos em torno de 0.2 N. Este ensaio corresponde ao primeiro ensaio transitório planejado e descrito na Seção (7.2.2).

Figura 82: Assinatura experimental da amplitude da força de excitação externa para o nível H1. Excitação periódica monocomponente à 21.15 Hz

A Figura (83) apresenta um dos resultados deste ensaio linear. Especificamente, esta figura demonstra como a estrutura responde quando a excitação é rapidamente aplicada a uma frequência muito próxima do modo 1-n flexão asa y. Assim, estes resultados correspondem à região I da Figura (82).

Na porção esquerda desta figura, são apresentados três sinais temporais, descrevendo a força de excitação, aceleração no ponto P8⁶ e aceleração horizontal (lateral) da turbina. Pode-se observar claramente que tanto o ponto P8 quanto o ponto turbina H descrevem uma vibração forçada tal como predito pela teoria. Esta vibração ressonante é composta por duas parcelas, uma transitória e uma permanente. Com o passar do tempo, o transitório desaparece a vibração a partir deste tempo entra em regime permanente.

⁶O ponto P8 encontra-se na asa, mais especificamente na intersecção da longarina frontal com a terceira nervura.

ANÁLISE REGIÃO I

Figura 83: Resultados experimentais transitórios na região I. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Já a porção direita apresenta os sinais temporais descritos no domínio da frequência. Neste domínio pode-se observar que a força de excitação realmente é monocomponente à 21.15 Hz. Também pode-se observar que todo sistema estrutural responde linearmente a excitação, ou seja, com amplitude proporcional e única e exclusivamente na frequência de excitação. Também não existem modulações em fase ou em amplitude, assim como, outro tipo de comportamento discrepante do que estabelece a teoria linear.

Continuando a analisar o comportamento vibratório, a Figura (85) apresenta os resultados referentes à região II da assinatura de excitação — descrita pela Figura (82). Pode-se observar que a vibração encontra-se em regime permanente e o resultado é exatamente como prediz a teoria linear, tanto no domínio do tempo quanto da frequência.

Por fim, a Figura (85) apresenta os resultados referentes à região III da assinatura de excitação. Novamente os resultados experimentais demonstram excelente correlação com o que estabelece a teoria linear. Nos resultados temporais, observa-se a presença de um decaimento exponencial típico e conseqüentemente a cada ciclo de oscilação, a magnitude torna-se menor até completa extinção da oscilação. Este comportamento ocorre na estrutura como um todo, tanto na estrutura principal (asa) quanto na subestrutura composta pelo pilone e turbina. Devido ao excitador — mesmo inativo — permanecer conectado a estrutura, observou-se um amortecimento mais intenso da oscilação. Entretanto este fato não invalida de forma alguma os resultados.

Focando no sinal de excitação, observa-se que mesmo com o excitador eletrodinâmico inativo, o sinal apresenta-se como um decaimento exponencial. Na verdade, após corte de suprimento de energia para o excitador, o transdutor de força mede a força de reação do excitador contra o movimento da estrutura. Assim, não existe energia sendo introduzida na estrutura.

De maneira conclusiva, esta seção demonstrou experimentalmente que, quando a estrutura é excitada de tal forma que, a resposta mantém-se dentro de níveis pequenos de oscilação, a existência de uma condição de ressonância interna não produz qualquer efeito sobre o comportamento vibratório desta estrutura. Esta constatação decorre da excelente correlação entre o que estabelece a teoria linear e o que foi experimentalmente observado.

Em adição, foi demonstrado que o aparato experimental total — estrutura sob investigação, instrumentação e excitação — representa muito bem uma condição de ensaio vibratório ressonante. Também demonstrou que o procedimento planejado possibilita a extração das características envolvendo o surgimento e desenvolvimento de uma vibração ressonante forçada, assim como, a fase em regime permanente e por fim,

Figura 84: Resultados experimentais transitórios na região II. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Figura 85: Resultados experimentais transitórios na região III. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

sua extinção.

Por fim, os resultados obtidos nesta seção são importantes para as análises experimentais contempladas nas próximas duas seções.

7.3.1.2 Caso Não-Linear: Vibração Ressonante Autoparamétrica

A aplicação da rotina AutoRes demonstrou que existe uma condição de comensurabilidade do tipo $2\omega_2 - 1\omega_4 \approx 0$ envolvendo o modo de turbina lateral ($\omega_2 = 10.505$ Hz) e o 1-n flexão asa y ($\omega_4 = 20.972$ Hz). Na seção anterior, a estrutura sob investigação foi submetida a uma condição de excitação de baixa intensidade e neste cenário, foi demonstrado que a presença da referida condição de comensurabilidade não afeta o comportamento dinâmico da estrutura. Na presente seção, a estrutura será submetida a uma condição de excitação bem mais severa.

A Figura (86) apresenta a assinatura da nova excitação empregada, a qual corresponde ao terceiro ensaio transitório planejado e descrito na Seção (7.2.2). Esta excitação é periódica monocomponente à 21.15 Hz e com amplitude descrita pela Figura (86). Observa-se que o nível de amplitude é bem mais intenso e com valores em torno de 6 N. O ensaio que utiliza esta excitação é denominado *H3*.

Figura 86: Assinatura experimental da amplitude da força de excitação autoparamétrica para o nível H3. Excitação periódica monocomponente à 21.15 Hz

A Figura (87) apresenta um dos resultados do ensaio *H3*. Especificamente, esta figura demonstra como a estrutura responde quando a excitação é rapidamente aplicada

a uma frequência muito próxima do modo 1-n flexão asa y. Assim, estes resultados correspondem à região I da Figura (86).

Na porção esquerda desta figura, são apresentados três sinais temporais, descrevendo a força de excitação, aceleração no ponto P8 e turbina H. Pode-se observar claramente que o ponto P8 descreve uma vibração ressonante forçada tal como predito pela teoria linear. Esta vibração ressonante é composta por duas parcelas, uma transitória observada logo no início e uma permanente. Com o passar do tempo, o transitório desaparece e a vibração a partir deste tempo entra em regime permanente. Este resultado descreve o comportamento oscilatório da estrutura principal, composta apenas pela asa.

Entretanto, este mesmo comportamento oscilatório não ocorre com a subestrutura pilone/turbina, descrito pelo sinal medido na turbina (direção horizontal). Ao se avaliar mais cuidadosamente este sinal, observa-se que o ponto turbina H descreve nos instantes iniciais uma vibração ressonante forçada. Entretanto, tão logo a vibração ressonante entra em regime permanente, outro fenômeno acontece: uma ressonância autoparamétrica.

Já a porção direita da Figura (87) apresenta os sinais descritos no domínio da frequência. Neste domínio pode-se observar que a força de excitação realmente é monocomponente à 21.15 Hz. Também pode-se observar que a estrutura principal (asa) responde linearmente a excitação, ou seja, com amplitude proporcional e única e exclusivamente na frequência de excitação.

Diferentemente, o sinal vibratório proveniente da subestrutura pilone/turbina é composto por não uma, mas três componentes espectrais: 10.50 Hz, 21.15 Hz e 31.72 Hz. A componente de 21.15 Hz é proveniente da excitação externa, como se esperava. Já as componentes de 10.50 Hz e 31.72 Hz são absolutamente inesperadas segundo a teoria linear.

A componente de 10.50 Hz é decorrente do modo de turbina lateral, tal como predito pela análise de identificação das condições de ressonâncias internas (veja a Seção (7.1.1)). Por outro lado, a presença da componente de 31.72 Hz não foi identificada em nenhuma análise prévia e portanto, trata-se de um resultado — até aqui — inesperado.

A análise de identificação das condições de ressonâncias internas realizada na Seção (7.1.1) está absolutamente correta. Entretanto, esta análise empregou como dado de entrada as frequências naturais lineares obtidas anteriormente no Capítulo (4), e como apresenta a Tabela (4) não foi identificado nenhum modo linear com frequência natural associada de 31.72 Hz. Então, qual a origem desta componente?

Figura 87: Resultados experimentais transitórios na região I. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Para encontrar a resposta para esta questão, o sistema estrutural foi excitado periodicamente à 31.72 Hz. A partir de uma inspeção visual, pôde-se constatar que a frequência de 31.72 Hz está associada a um modo natural não identificado previamente: trata-se do modo de rolagem de turbina. Embora este modo seja clássico deste tipo de configuração estrutural — como confirma a Tabela (1) — sua identificação é mais difícil, principalmente por se tratar de uma modo que envolve um grau de liberdade de rotação. Desta maneira, devido à limitações de instrumentação, o modo de turbina rolagem aparece timidamente nas FRF's e assim não considerado durante a identificação modal. Assim, a partir de uma reinspeção das características modais da estrutura, foi determinado a origem da componente de 31.72 Hz.

Ao se realimentar a rotina AutoRes com mais o modo de rolagem de turbina ω_8 , obteve-se dois resultados. O primeiro demonstra uma condição de comensurabilidade do tipo 1:1:1 ou $1\omega_8 - 1\omega_2 - 1\omega_4 \approx 0$. Já a segunda indica a ocorrência de duas condições: (i) tipo 2:1 ou $2\omega_2 - 1\omega_4 \approx 0$ e (ii) tipo 3:1 ou $3\omega_2 - 1\omega_8 \approx 0$. Portanto existem duas possibilidades de ocorrência de ressonância interna no sistema estrutural sob investigação. No primeiro caso a ocorrência seria do tipo direta entre ω_8 , ω_2 e ω_4 . Já no segundo seria em cascata, inicialmente entre ω_2 e ω_4 e posteriormente ω_2 e ω_8 .

Com a correta compreensão dos modos envolvidos na vibração autoparamétrica sob investigação, nossa atenção irá se dirigir puramente para o o sinal vibratório proveniente da subestrutura pilone/turbina. A Figura (88) apresenta a decomposição temporal⁷ deste sinal. A partir desta decomposição, pode-se extrair informações valiosas sobre a vibração autoparamétrica decorrente.

Estão apresentados na porção esquerda da Figura (88) quatro sinais temporais: (i) o sinal total turbina; (ii) componente forçada; (iii) componente do modo de turbina lateral e (iv) componente horizontal do modo de rolagem de turbina. Note que o último sinal descreve apenas a componente horizontal do modo de rolagem e não o ângulo de rotação. Já na porção direita, os sinais temporais são descritos no domínio da frequência.

Ao se analisar o sinal referente à componente forçada, observa-se que esta possui características lineares clássicas. Seu surgimento praticamente coincide com o momento de aplicação da força, seguido por um breve transiente e, então atingido estado de regime permanente.

⁷Trata-se da submissão do sinal bruto a um conjunto de filtros digitais, projetados exclusivamente para promover a decomposição temporal do sinal bruto segundo as componentes que o compõe. Na presente pesquisa, utilizou-se filtros tipo elípticos Oppenheim & Schaffer (1999) projetados e utilizados no ambiente MatlabTM.

ANÁLISE RESPOSTA TURBINA REGIÃO I

Figura 88: Resultados experimentais transitórios na região I. Decomposição dos modos que compõe a vibração autoparamétrica do sistema pilone/turbina. Resultados apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Por outro lado, este comportamento linear clássico não ocorre nos sinais das componentes dos modos lateral e rolagem de turbina. Primeiramente, o tempo de surgimento destas componentes não coincide com o instante onde ocorre a aplicação da força ao sistema. Isso ocorre pois, o mecanismo que excita estes dois modos decorre de uma excitação paramétrica e não forçada. Segundo, a fase transiente é muito mais lenta e suave e por último, é necessário um tempo relativamente longo para que o estado de regime permanente seja alcançado.

Por fim, mesmo com a decomposição temporal do sinal não é possível se afirmar com absoluta certeza qual das duas condições — direta ou em cascata — de ressonância internas é a responsável pelo surgimento desta vibração ressonante autoparamétrica. Há indícios experimentais que trata-se de uma ocorrência em cascata, inicialmente entre ω_2 e ω_4 e posteriormente ω_2 e ω_8 . Entretanto, novas pesquisas precisam ser realizadas no futuro, sobretudo com desenvolvimentos analíticos para se realmente afirmar qual o mecanismo responsável. Por outro lado, a análise por decomposição temporal possibilitou avaliar — ainda que inicialmente — que o tempo de exposição à excitação é um parâmetro importante dentro do surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante autoparamétrica. Desta forma, esta técnica será novamente empregada na próxima seção para promover maiores informações sobre o efeito do tempo de exposição.

Continuando a analisar o comportamento vibratório do sistema estrutural como um todo, a Figura (89) apresenta os resultados referentes à região II da assinatura de excitação — descrita pela Figura (86).

Esta figura segue o mesmo padrão já estabelecido e apresenta na porção esquerda os sinais no domínio do tempo e na direita no domínio da frequência. No domínio do tempo, é interessante observar nos sinais de resposta que, mesmo com a região II possuindo cem segundos de duração, não existe nenhum tipo de troca contínua de energia entre os modos envolvidos. Deve ficar claro que esta constatação refere-se à uma única condição de excitação. Acredita-se que existam condições de excitação — próximas à 21 Hz — que levem a estrutura principal a trocar energia de forma contínua com a subestrutura.

No domínio da frequência chama a atenção a magnitude das componentes autoparametricamente excitadas. A componente em 10.50 Hz supera em quase 25% a magnitude da componente forçada. Já a componente em 31.72 Hz é quase da mesma magnitude da componente forçada. Já destas constatações fica claro quanto é perigoso para a integridade estrutural o surgimento e desenvolvimento de uma ressonância autoparamétrica, para não se dizer catastrófico.

Figura 89: Resultados experimentais transitórios na região II. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Por fim, a Figura (90) demonstra os resultados referentes à região III da assinatura de excitação e apresenta os sinais de excitação e resposta no ponto P8 e turbina horizontal, tanto no domínio do tempo quanto da frequência.

Ao se observar os sinais de força e aceleração no ponto P8, poder-se ver que não existem fortes diferenças do que prediz a teoria linear. No sinal de força, ocorre um decaimento exponencial resultante da força de reação do excitador ao movimento da estrutura, tal como observado na seção anterior. Também o sinal de aceleração do ponto P8 é semelhante ao obtido no ensaio linear descrito na seção anterior.

Por outro lado, são observadas diferenças significativas no sinal do ponto turbina H, quando comparado com os ensaios lineares. Inicialmente, o aspecto global do sinal é muito diferente do decaimento exponencial típico obtido quando a excitação é abruptamente retirada de um ensaio ressonante. Para melhor avaliar estas características, o sinal turbina H foi submetido ao processo de decomposição temporal e os resultados são apresentados na Figura (91).

Seguindo o padrão já estabelecido, estão apresentados na porção esquerda da Figura (91) quatro sinais temporais, respectivamente, o sinal total turbina, a componente forçada, a componente do modo de turbina lateral e a componente horizontal do modo de rolagem de turbina.

Quando as três componentes que formam o sinal total são comparadas, pode-se observar a existência de um forte amortecimento na componente forçada, provavelmente devido a presença inoperante do excitador. Pode-se observar ainda que o modo de turbina lateral é o que possui maior energia entre os três, seguido pelo modo de rolagem de turbina e por último pela componente forçada. Ainda, embora houvesse uma certa expectativa, não se observa troca contínua de energia entre estes três modos.

Ao avaliar isoladamente cada uma das três componentes isoladamente, observa-se um comportamento tipicamente de um sistema de um grau de liberdade livre amortecido. Uma suave diferença pode ser observada entre as componentes de turbina, lateral e de rolagem, especificamente no que se refere a forma do decaimento oscilatório. No caso da componente de turbina lateral, o decaimento é mais acentuado no início da oscilação livre, muito provavelmente decorrente da presença do amortecimento viscoso não-linear, tal como observado no caso do sistema estrutural de um grau de liberdade. A partir de um instante de tempo, o decaimento torna-se mais suave. Já no modo de rolagem de turbina, não se observa a mesma característica, o que reforça a tese de que existe o efeito do amortecimento não-linear no caso translacional.

De maneira conclusiva, esta seção foi dedicada a avaliação das características tran-

Figura 90: Resultados experimentais transitórios na região III. Sinal de excitação e de resposta medido no ponto 8 e na turbina posição horizontal, todos apresentados no domínio do tempo e da frequência.

Figura 91: Resultados experimentais transitórios na região III. Decomposição dos modos que compõe a vibração autoparamétrica do sistema pilone/turbina. Resultados apresentados no domínio do tempo e da frequência.

sitórias referentes à vibração ressonante autoparamétrica envolvendo o sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Os resultados contidos nesta seção foram valiosos para a completa compreensão das características físicas envolvendo, principalmente, o surgimento da vibração ressonante autoparamétrica. Neste sentido, pôde-se concluir que a estrutura principal (asa) age como oscilador principal, alimentado pela fonte de excitação externa. Este oscilador principal, por sua vez, age como um excitador paramétrico sobre a subestrutura composta pelo pilone/turbina, que por sua vez, compõem um oscilador secundário. O acoplamento entre o oscilador principal e o secundário é realizado por não-linearidades estruturais e a partir de todo este mecanismo, energia do oscilador principal é transferida para o oscilador secundário, que por sua vez, desenvolve uma vibração complexa e multi-modal.

Em adição, pôde-se sentir fisicamente a intensidade de uma vibração ressonante autoparamétrica. Por muitas vezes, temeu-se que a estrutura sob investigação não iria suportar oscilações tão intensas. Já destas constatações fica claro quanto é perigoso para a integridade de uma estrutura real o surgimento e desenvolvimento de uma ressonância autoparamétrica, para não se dizer catastrófico.

Ainda, tal como foi verificado com o sistema com um grau de liberdade, pôde-se verificar que, no caso da componente de turbina lateral, o decaimento oscilatório é mais acentuado no início da oscilação livre, muito provavelmente decorrente da presença do amortecimento viscoso não-linear quadrático.

Por fim, observou-se que o tempo em que a estrutura é exposta à excitação parece ser uma variável importante. Este assunto será o tema da próxima seção.

7.3.1.3 Efeito do Tempo na Nucleação da Vibração Ressonante Autoparamétrica

Em muitas condições reais, as estruturas flexíveis podem sofrer a ação de excitações durante um intervalo finito de tempo. Um bom exemplo ocorre quando uma aeronave passa por uma condição de turbulência. Em condições de ressonância externa, uma breve exposição à excitação pode ser suficiente para fazer, com que, uma vibração ressonante externa se desenvolva. Entretanto, como vem sendo observado desde as investigações com o sistema de um grau de liberdade e posteriormente com múltiplos graus de liberdade, no caso das oscilações ressonantes paramétricas, parece existir uma forte dependência temporal, sobretudo para o surgimento deste tipo de oscilação. Exatamente este é o assunto que será investigado na presente seção.

Conforme descrito na Seção (7.2.2) foram planejados e realizados quatro ensaios em

regime transitórios. Todos os quatro seguem a mesma filosofia e o mesmo procedimento, e assim, diferem-se apenas pela magnitude da excitação. Deste conjunto, os resultados de três ensaios foram empregados na presente investigação: (i) ensaio H2 com magnitude 3 N; (ii) ensaio H3 com magnitude de 6 N e; (iii) ensaio H4 com magnitude de 9 N.

A resposta oscilatória referente ao ponto turbina H, produzida a partir de cada um destes ensaios, foi então, submetida ao processo de decomposição temporal. O resultado final é apresentado na Figura (92) em três colunas. Neste caso, cada coluna representa um nível diferente de excitação.

Ao se avaliar a primeira coluna da Figura (92), observa-se que a componente forçada surge no mesmo instante que a excitação externa. Entretanto, o mesmo não acontece com as componentes do modo de turbina lateral e turbina rolagem. No caso da componente do modo de turbina lateral são necessários ≈ 15.5 s de exposição à excitação autoparamétrica para sua nucleação. Já no caso da componente do modo de turbina rolagem são necessários ≈ 14.5 s.

Com o aumento da magnitude da excitação externa de 3 N para 6 N, observa-se uma drástica redução do tempo necessário para a nucleação da vibração ressonante autoparamétrica. No caso da componente do modo de turbina lateral, o tempo de exposição foi reduzido de ≈ 15.5 s para ≈ 3 s. A mesma tendência ocorreu para componente do modo de turbina rolagem, que passou de ≈ 14.5 s para ≈ 1.2 s.

Aumentando ainda mais a magnitude da excitação externa de 6 N para 9 N, observa-se a mesma tendência de redução do tempo de exposição, entretanto à taxas mais amenas. No caso da componente do modo de turbina lateral, o tempo de exposição foi reduzido de ≈ 3 s para ≈ 2 s. A mesma tendência ocorreu para componente do modo de turbina rolagem, que passou de ≈ 1.2 s para ocorrer quase que instantaneamente com o surgimento da excitação autoparamétrica.

É amplamente conhecido na literatura — e também constatado na presente pesquisa — que é necessário uma amplitude mínima para a nucleação de uma vibração autoparamétrica. Os resultados obtidos nesta seção demonstram que, em adição à uma amplitude mínima de excitação, também é necessário um tempo de exposição mínimo para a nucleação. Em adição, os resultados experimentais demonstram que o tempo mínimo de exposição é inversamente proporcional à magnitude da excitação paramétrica. Assim, conclui-se que para a nucleação de uma vibração autoparamétrica é necessário existir uma condição de comensurabilidade, que a excitação possua uma amplitude mínima e ainda que a estrutura seja exposta a excitação durante um determinado intervalo de tempo. Estas constatações são válidas para excitações periódicas

Figura 92: Resultados experimentais transitórios do sistema com múltiplos graus de liberdade. Avaliação do efeito do tempo de exposição no surgimento e desenvolvimento da vibração ressonante autoparamétrica do sistema pilone/turbina.

monocomponentes. Destas conclusões é proposto o seguinte axioma:

Axioma 7.1 *Para a nucleação de uma vibração ressonante autoparamétrica em sistemas periodicamente excitados é necessário existir uma condição de comensurabilidade, que a excitação possua uma amplitude mínima e que o sistema seja exposto a excitação durante um determinado intervalo de tempo, que pode variar de zero à vários segundos.*

De maneira conclusiva, esta seção confirmou a importância do tempo de exposição da estrutura à excitação autoparamétrica. Nesta direção importantes conclusões foram realizadas e um segundo axioma proposto. Esta seção também marca o término das investigações transitórias, entretanto este regime é muito rico e importante e ainda pode ser muito explorado em futuras pesquisas. Na próxima seção, serão analisados as características da vibração ressonante autoparamétrica em regime permanente.

7.3.2 Resultados em Regime Permanente

Nesta seção serão apresentados os resultados em regime permanente decorrentes dos ensaios planejados e descritos na Seção (7.2.2). Inicialmente, serão apresentados e discutidos os resultados provenientes da variação da frequência de excitação autoparamétrica e posteriormente os resultados provenientes da variação da magnitude da excitação autoparamétrica.

7.3.2.1 Curva Resposta-Frequência

A Figura (93) apresenta a primeira curva resposta-frequência, obtida aumentando-se a frequência de excitação (direção ascendente) e mantendo-se a magnitude constante.

Aumentando o valor da frequência de excitação a partir do ponto P_i , a resposta de ambos os modos autoparametricamente excitados — turbina lateral e turbina rolagem — permanece trivial e estável até que a frequência crítica ≈ 21.0 Hz seja atingida. Este valor crítico corresponde ao ponto a .

Aumentando ainda mais o valor da frequência de excitação a partir do ponto a , a resposta trivial de cada um dos modos perde a estabilidade através de uma bifurcação e saltam subitamente para o ponto b no caso do modo lateral e para o ponto f no caso do modo de rolagem. O ponto b pertence a ramificação não-trivial estável bcd , enquanto o ponto f pertence a ramificação não-trivial estável fgh , relativa ao

Figura 93: Curva resposta-frequência experimental demonstrando o efeito da frequência da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção ascendente e força de excitação externa de 5.0 N.

modo de rolagem. Exatamente neste momento ocorre o surgimento da vibração ressonante autoparamétrica e a subestrutura pilone/turbina oscila periodicamente com alta intensidade.

Na ramificação *bcd*, observa-se que a partir do ponto *b*, a magnitude da resposta do modo de turbina lateral diminui continuamente, tem um breve aumento e continua a diminuir até que o ponto *c* seja atingido. A partir do ponto *c*, a magnitude volta a aumentar até atingir o máximo valor no ponto *d*. Com o aumento da frequência de excitação além do ponto *d* ocorre um súbito salto e uma resposta trivial estável é novamente atingida.

Já na ramificação *fgh*, observa-se que a partir do ponto *f*, a magnitude da resposta do modo turbina rolagem aumenta a taxas amenas até atingir um valor máximo e, começa a diminuir até que o ponto *g* seja atingido. Neste ponto ocorre a menor participação deste modo na resposta total. A partir do ponto *g*, a magnitude volta a aumentar novamente até atingir o máximo valor no ponto *h*. Com o aumento da frequência de excitação além do ponto *h* ocorre um súbito salto e uma resposta trivial estável é novamente atingida.

Ao se comparar o comportamento de ambos os modos autoparametricamente excitados pode-se fazer algumas observações. No caso de variação ascendente, a resposta trivial e estável de ambos os modos perdem sua estabilidade no mesmo ponto a . O mesmo comportamento ocorre quando a resposta não trivial estável de ambos os modos perde a estabilidade.

Outra observação interessante envolve a magnitude da excitação. Ainda na Figura (93) nota-se que o surgimento da vibração autoparamétrica ocorre para uma magnitude de excitação bem menor que o ponto de máxima magnitude (ponto de ressonância externa do modo de asa). Em adição, exatamente no ponto onde ocorre a máxima magnitude da excitação autoparamétrica, também ocorre o maior nível de vibração ressonante autoparamétrica, sendo que qualquer diminuição deste valor provoca a extinção da vibração autoparamétrica.

Por fim, observa-se que a região de instabilidade é bastante estreita. Inicia-se em ≈ 21.0 Hz e vai até ≈ 21.3 Hz, totalizando apenas ≈ 0.3 Hz. Entretanto o tamanho da região de instabilidade pode ser afetada pela intensidade da excitação autoparamétrica, tal com verificado no Capítulo (5) com o sistema de um grau de liberdade.

Já a Figura (94) apresenta a segunda curva resposta-freqüência, obtida diminuindo-se a freqüência de excitação (direção descendente) e mantendo-se a magnitude constante.

Diminuindo o valor da freqüência de excitação a partir do ponto P_i , a resposta de ambos os modos autoparametricamente excitados permanece trivial e estável até que a freqüência crítica ≈ 21.3 Hz seja atingida. Este valor crítico corresponde ao ponto a .

Diminuindo ainda mais o valor da freqüência de excitação a partir do ponto a , a resposta trivial de cada um dos modos perde a estabilidade através de uma bifurcação e saltam subitamente para o ponto b no caso do modo lateral e para o ponto g no caso do modo de rolagem. O ponto b pertence a ramificação não-trivial estável $bcde$, enquanto o ponto f pertence a ramificação não-trivial estável gh , relativa ao modo de rolagem. Exatamente neste momento ocorre o surgimento da vibração ressonante autoparamétrica.

Na ramificação $bcde$, observa-se que a partir do ponto b , a magnitude da resposta do modo de turbina lateral tem um sutil aumento antes de começar a diminuir continuamente até que o ponto c seja atingido. A partir do ponto c , a magnitude volta a aumentar de forma contínua até atingir seu máximo valor no ponto d . Com a diminuição da freqüência de excitação além do ponto d , ocorre uma forte redução na magnitude até atingir o ponto e . Diminuindo-se a freqüência além do ponto e , ocorre um subido

Figura 94: Curva resposta-frequência experimental demonstrando o efeito da frequência da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção descendente e força de excitação externa de 5.0 N.

salto e uma resposta trivial estável é novamente atingida.

Já na ramificação gh , observa-se que a partir do ponto g , a magnitude da resposta do modo turbina rolagem tem um sutil aumento antes de começar a diminuir continuamente até atingir o ponto h , onde reside a menor magnitude.

Com a diminuição da frequência de excitação além do ponto h , a resposta não-trivial estável perde sua estabilidade e, após uma suave passagem, uma resposta trivial estável é novamente atingida.

Ao se comparar o comportamento de ambos os modos autoparametricamente excitados, a primeira característica a chamar atenção é a existência de regiões de instabilidade distintas. Para o modo turbina lateral, a região de instabilidade inicia-se em ≈ 21.3 Hz e vai até ≈ 20.85 Hz, totalizando ≈ 0.45 Hz. Já para o modo turbina rolagem a região de instabilidade é bem mais estreita. Inicia-se em ≈ 21.3 Hz e vai até ≈ 21.05 Hz, totalizando ≈ 0.25 Hz. Esta diferença entre a extensão das regiões de instabilidade é causada pelo ponto de bifurcação da resposta não-trivial estável, já que para ambos os modos o ponto onde sua solução trivial estável perde sua estabilidade é o mesmo ponto a .

Uma vez que as curvas resposta-frequência ascendente e descendente foram apresentadas e que algumas características relevantes individualmente discutidas, é interessante compará-las. Neste sentido, três aspectos se destacam: (i) valores máximos e mínimos das componentes modais envolvidas; (ii) largura da região de instabilidade e; (iii) forma geométrica das ramificações não-triviais estáveis.

Em relação aos valores máximos das componentes modais envolvidas, a análise comparativa demonstra para ambos os modos que as maiores magnitudes relativas ocorrem com a variação descendente da frequência de excitação. No caso do modo turbina lateral, com a variação ascendente a máxima magnitude foi de ≈ 5.1 mm, enquanto com a variação descendente foi de ≈ 6.2 mm, ou seja, $\approx 22\%$ maior.

Já em relação aos valores mínimos das componentes modais, observa-se que os menores valores relativos ocorreram com a variação ascendente. No caso do modo turbina lateral, com a variação ascendente a mínima magnitude foi de ≈ 1.2 mm, enquanto com a variação descendente foi de ≈ 2.2 mm, ou seja, $\approx 90\%$ maior.

Em relação a largura da região de instabilidade, observa-se que com a variação descendente ocorre um aumento de $\approx 50\%$ na extensão da região de instabilidade relativa ao modo turbina lateral. Portanto, a variação descendente da frequência de excitação aumenta a extensão de instabilidade para o modo turbina lateral. Já em relação ao modo turbina rolagem, acontece o contrário: com a variação descendente da frequência de excitação ocorre uma diminuição da extensão de instabilidade em $\approx 15\%$.

Finalizando a análise comparativa entre as curvas resposta-frequência, observa-se que a forma das ramificações de resposta não-trivial estável são muito afetadas pela direção da variação da frequência de excitação. Estas diferenças podem ser facilmente visualizadas a partir das Figuras (93) e (94).

Como último comentário, para a construção das curvas resposta-frequência foi priorizado o modo de turbina lateral, uma vez que, é o modo mais significativo e intenso. Entretanto, a visualização do modo de rolagem ficou um pouco comprometida, pois a resposta medida foi a componente horizontal provocada pelo movimento de rolagem da turbina, que por sua vez, é relativamente pequeno. Certamente seria mais interessante a obtenção da resposta angular do modo de rolagem de turbina, entretanto existem grandes dificuldades relativas à instrumentação o que impossibilitou que a vibração angular pudesse ser obtida.

7.3.2.2 Curva Resposta-Amplitude

A Figura (95) apresenta a primeira curva resposta-amplitude, obtida aumentando-se a magnitude de excitação (direção ascendente) e mantendo-se a frequência constante. Na primeira observação desta figura já é possível notar que a dinâmica envolvida com a variação da magnitude de excitação é bem mais comportada do que foi com a variação de frequência, tal como visto na seção anterior.

Figura 95: Curva resposta-amplitude experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção ascendente e frequência de excitação de 21.15 Hz.

Aumentando o valor da magnitude a partir do ponto Pi a resposta de ambos os modos autoparametricamente excitados permanece trivial e estável até que o valor crítico descrito pelo ponto a/d (correspondem à mesma magnitude) seja atingido.

Em relação ao modo turbina lateral, observa-se que um pequeno acréscimo de magnitude além do ponto a faz com que a resposta trivial estável perca a estabilidade através de uma bifurcação — possivelmente do tipo transcítica — e a solução passa suavemente para a ramificação não-trivial estável abc . Exatamente neste ponto surge a vibração autoparamétrica da subestrutura pilone/turbina. A partir do ponto a , a magnitude do modo aumenta continuamente com o aumento da magnitude da excitação,

inicialmente a taxas suaves até o ponto b e, a partir deste ponto, a taxas mais severas até que o ponto c seja atingido.

Em relação ao modo turbina rolagem observa-se que a resposta permanece trivial estável até que o ponto d seja atingido⁸. Um pequeno acréscimo de magnitude além deste ponto faz com que a resposta trivial estável perca a estabilidade através de uma bifurcação — também possivelmente do tipo transcritical — e a solução passa suavemente para a ramificação não-trivial estável de . A partir do ponto d , a magnitude do modo turbina rolagem aumenta continuamente com o aumento da magnitude da excitação.

Ao se comparar as magnitudes dos modos autoparametricamente excitados, nota-se grande semelhança no comportamento dinâmico. Ambos perdem a estabilidade com a mesma magnitude de excitação e possuem ramificações com a mesma tendência de desenvolvimento. Estas afirmações se confirmam mais claramente observando os valores numéricos de cada ponto de análise.

Por fim a Figura (96) apresenta os resultados realizando o caminho inverso, ou seja, na direção descendente.

Diminuindo o valor da magnitude a partir do ponto Pf a resposta de ambos os modos autoparametricamente excitados permanece não-trivial e estável e diminuem continuamente, inicialmente a taxas mais severas e depois mais suaves até que a magnitude de excitação atinja o ponto a/d . Um pequeno decréscimo de magnitude além deste ponto faz com que, a resposta trivial estável, tanto do modo turbina lateral quanto modo turbina rolagem percam a estabilidade e novas respostas triviais estáveis são atingidas.

Ao se comparar os resultados descritos pelas Figuras (95) e (96) não se observa alterações dinâmicas significativas. Assim conclui-se que a direção de variação da magnitude da excitação não afeta de forma significativa o comportamento dinâmico da subestrutura pilone/turbina envolvida na referida condição de ressonância autoparamétrica. Entretanto, possivelmente com a frequência de excitação fixa em outros valores (maiores ou menores), o tipo de bifurcação entre as respostas trivial estável e não-trivial estável muda, o que pode aumentar a complexidade dinâmica. Este efeito foi verificado teoricamente no caso do sistema de um grau de liberdade.

⁸Embora a visualização gráfica esteja prejudicada devido a escala máxima do gráfico, os valores numéricos demonstram que realmente é no ponto d que a resposta trivial estável do modo turbina rolagem perde a estabilidade.

Figura 96: Curva resposta-amplitude experimental demonstrando o efeito da magnitude da excitação autoparamétrica no comportamento dinâmico do subsistema pilone/turbina. Direção descendente e frequência de excitação de 21.15 Hz.

7.4 Sumário do Capítulo

Este capítulo apresentou os resultados da investigação experimental envolvendo a vibração ressonante autoparamétrica. Estes resultados foram obtidos com base no sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Especificamente três assuntos foram abordados, dois envolvendo as características da vibração ressonante autoparamétrica e um envolvendo a identificação e caracterização das condições propícias para o desenvolvimento deste fenômeno vibratório.

Inicialmente foram discutidos os aspectos teóricos envolvendo o surgimento de condições de comensurabilidade entre os modos naturais. Desta discussão foi proposta uma metodologia simples e útil a qual possibilita a identificação de condições propícias para a ocorrência de ressonâncias internas mesmo na ausência de um modelo analítico não-linear. A metodologia proposta foi traduzida em uma rotina computacional a qual permite identificar e caracterizar as condições de comensurabilidade mais comumente encontradas em sistemas estruturais. Foi demonstrado — por intermédio da aplicação na estrutura com múltiplos graus de liberdade — a importância da inclusão de to-

das as frequências naturais lineares presentes dentro da faixa de interesse. Também a partir dos resultado experimentalmente obtidos, foi demonstrado a aplicabilidade e os interessantes resultados gerados pela metodologia desenvolvida.

Posteriormente foram analisadas experimentalmente as características transitórias referentes à vibração ressonante autoparamétrica envolvendo o sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. Nesta direção foi demonstrado que a mesmo sob excitação periódica monocomponente, partes de uma estrutura pode apresentar uma vibração composta por mais de uma componente. Na estrutura ensaiada neste capítulo, observou-se que subestrutura pilone/turbina é composto por não uma, mas três componentes espectrais. Este fato, como vai totalmente contra os princípios das vibrações lineares e, além de surpreendente, serve de alerta aos dinamiscistas. Por fim, foi demonstrado a intensidade vibratória decorrente da vibração autoparamétrica, o que imediatamente deixou claro o quanto é perigoso para a integridade estrutural o surgimento e desenvolvimento de uma vibração ressonante deste tipo.

Ainda dentro das análises transitórias envolvendo a vibração ressonante autoparamétrica, foi investigado o efeito do tempo de exposição à excitação. Neste contexto, foi experimentalmente demonstrado que o tempo de exposição é uma variável determinante na nucleação de uma vibração ressonante autoparamétrica.

Finalizando o capítulo, foram apresentados e discutidos os resultados em regime permanente provenientes de duas variáveis de controle: frequência e amplitude da excitação autoparamétrica. Neste contexto foi verificado a complexidade dinâmica induzida pela variação da frequência da excitação. Neste caso, demonstrou-se a existência de saltos, regiões de instabilidade e que a dinâmica é fortemente afetada pela direção da variação. Já em relação aos efeitos da variação de magnitude, demonstrou-se que esta variável provoca alterações dinâmicas mais simples, pelo menos, dentro dos parâmetros envolvidos.

Fisicamente, os resultados obtidos nesta capítulo demonstraram que estrutura principal — composta somente pela asa — age como oscilador principal, alimentado pela fonte de excitação externa. Este oscilador principal, por sua vez, age como um excitador paramétrico sobre a subestrutura composta pelo pilone/turbina, que por sua vez, compõem um oscilador secundário. O acoplamento entre o oscilador principal e o secundário é realizado por não-linearidades estruturais. A partir de todo este mecanismo, energia do oscilador principal é transferida para o oscilador secundário, que por sua vez, desenvolve uma vibração complexa e multi-modal, denominada de vibração autoparamétrica. Desta explicação física, fica muito claro a denominação autoparamé-

trica.

Por fim, os resultados gerados neste capítulo contribuíram na compreensão dinâmica não-clássica de estruturas do tipo asa/pilone/turbina e provavelmente num futuro próximo possam auxiliar o projeto e desenvolvimento de estruturas mais eficientes.

CAPÍTULOOITO

Conclusões Finais e Recomendações

“So little done, so much to do.”

— *C. Rhodes (1853-1902)*

Neste capítulo são realizadas algumas conclusões finais, assim como, varias recomendações para trabalhos futuros. A presente pesquisa investigou teórica e experimentalmente as características das vibrações ressonantes não-lineares provocadas por excitações do tipo paramétrica, autoparamétrica e combinada e desenvolvidas em estruturas tipo viga.

8.1 Conclusões Finais

Decorrente da excelente correlação entre os resultados teóricos e experimentais é possível delinear várias conclusões.

Referente a vibração paramétrica principal observou-se que é necessário um tempo relativamente longo para que a estrutura atingisse a condição de regime permanente.

Esta característica pode ser explorada em estratégias de controle do fenômeno.

Outra característica transiente interessante foi observada quando a estrutura sai da condição de ressonância paramétrica principal. Assim como no desenvolvimento do fenômeno, também são necessários vários segundos para que a magnitude de vibração reduza. O mais interessante é que esta redução é completamente diferente do que ocorre no caso de uma vibração livre. O decaimento (envelope) pode ser dividido em duas regiões distintas. Na primeira o envelope possui uma forma quadrática negativa, já na segunda região, o envelope possui um decaimento exponencial, muito próximo do que acontece na vibração livre.

Ainda referente as características transientes da vibração paramétrica principal, foi observado que a inclusão do amortecimento quadrático nas predições promove melhorias significativas na correlação entre os resultados. Assim de maneira conclusiva, foi demonstrado que o amortecimento quadrático afeta fortemente as características transientes da resposta paramétrica principal.

Quando em regime permanente, tanto as curvas resposta-amplitude apresentadas quanto as resposta-freqüência demonstram que a força de arrasto desempenha um importante papel no comportamento dinâmico quando o item sob investigação está envolvido em uma ressonância paramétrica principal. Em adição os resultados transientes, sugerem que a força de arrasto não é constante. Esta tendência também foi notada nas curvas resposta-amplitude. Uma investigação mais profunda das características da força de arrasto demonstram explicitamente que a vibração paramétrica principal provoca um escoamento turbulento. Desta maneira, está comprovado que realmente existe ação da força de arrasto não-linear sobre a estrutura. Em adição, também foi demonstrado que, quando em regime permanente o coeficiente de arrasto tende a tornar-se constante. Estas características concordam com as observações realizadas na resposta transiente e nas curvas resposta-amplitude.

Em relação às discrepâncias observadas entre os resultados teóricos e experimentais apresentadas nas curvas resposta-freqüência e resposta-amplitude, foram identificadas duas potenciais fontes. A primeira refere-se as pequenas, mas presentes, rotações da base do excitador. A penetração na região trivial-instável observada nos resultados experimentais foi provavelmente causada pela rotação da base. Esta fonte também afetou a amplitude da curva resposta-amplitude, principalmente na região próxima do ponto de bifurcação entre as soluções triviais/não-triviais. Outra fonte de discrepância que pode ter afetado estes resultados é atribuído à imperfeições na estrutura e ao desalinhamento residual da direção da excitação paramétrica em relação ao eixo principal

da estrutura. Por fim, é sempre esperado erros experimentais na ordem de 6 – 10% devido aos transdutores, amplificadores, cabos, sistema de aquisição e características do engaste.

Em relação à vibração combinada, os resultados obtidos experimentalmente demonstraram excelente correlação com as predições teóricas. Decorrente disto, pode-se afirmar que nos casos em que a razão entre a resposta externa e a resposta paramétrica é grande, existe uma clara separação destas componentes. Esta condição ocorre quando a excitação externa apresenta grande magnitude, assim a resposta total é complexa. Por outro lado quando a razão é pequena – isto é, quando a resposta paramétrica é muito maior do que a resposta externa – após um tempo, as características da resposta total são regidas pelas características da resposta paramétrica e, portanto, a presença da excitação externa não provoca grandes alterações na magnitude da resposta. Em adição, o ângulo de fase entre as excitações não apresentou ser uma variável importante para o comportamento dinâmico.

Quando a frequência da excitação externa é comensurável com a frequência natural não-amortecida é possível prever qual será o período da modulação em amplitude da vibração combinada desenvolvida. Entretanto para os demais casos, esta predição ainda não é possível. Por fim, não foi possível traçar conclusões relativas à estabilidade da vibração combinada.

Em relação a vibração autoparamétrica, foi surpreendente a constatação que a mesmo sob excitação periódica monocomponente, partes de uma estrutura pode apresentar uma vibração composta por mais de um modo natural. Na estrutura investigada observou-se que subestrutura pilone/turbina é composto por não uma, mas três componentes espectrais. Este fato, como vai totalmente contra os princípios das vibrações lineares e, além de surpreendente, serve de alerta aos dinamiscistas. Também ficou claro que a intensidade vibratória decorrente da vibração autoparamétrica é absolutamente destrutiva e portanto o surgimento e desenvolvimento de uma vibração ressonante deste tipo em uma estrutura real pode ter consequências desastrosas.

Ainda dentro das análises transitórias envolvendo a vibração autoparamétrica, demonstrou-se que o efeito do tempo de exposição é uma variável determinante na nucleação de uma vibração ressonante autoparamétrica.

Em relação às características em regime permanente foi demonstrado que a variação da frequência da excitação induz o surgimento de vários fenômenos, como por exemplo, saltos e regiões de instabilidade. Também foi verificou-se que a dinâmica é fortemente afetada pela direção da variação. Já em relação aos efeitos da variação de magnitude,

demonstrou-se que esta variável provoca alterações dinâmicas mais simples, pelo menos, dentro dos parâmetros envolvidos.

Fisicamente, conclui-se que estrutura principal — composta somente pela asa — age como oscilador principal, alimentado pela fonte de excitação externa. Este oscilador principal, por sua vez, age como um excitador paramétrico sobre a subestrutura composta pelo pilone/turbina, que por sua vez, compõem um oscilador secundário. O acoplamento entre o oscilador principal e o secundário é realizado por não-linearidades estruturais. A partir de todo este mecanismo, energia do oscilador principal é transferida para o oscilador secundário, que por sua vez, desenvolve uma vibração complexa e multi-modal, denominada de vibração autoparamétrica. Desta explicação física, fica muito claro a denominação autoparamétrica.

8.2 Contribuições

A presente pesquisa contribuiu cientificamente para dinâmica de estruturas flexíveis tanto no âmbito teórico quanto experimental. Tais contribuições foram publicadas na importante revista internacional **Shock and Vibration**, nos dois mais renomados congressos internacionais ¹, **ISMA** e **IMAC** e também em dois importantes congressos nacionais, **DINAME** e **CONEM**. As referências completas destes trabalhos são apresentadas a seguir:

- GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. Nonlinear dynamic behavior of a flexible structure to combined external acoustic and parametric excitation. **Shock and Vibration**, v. 13, n. 4-5, p. 233-254, 2006.
- GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. Identification and characterization of the nonlinear dynamic behavior of a laboratory aircraft structure. In: KULeuven. **Proceeding of International Conference on Noise and Vibration Engineering - ISMA**. Leuven, Bélgica. 2006. p. 13.
- GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. On the sufficiency of classical response models in predicting the dynamic behavior of flexible structures. In: SEM. **Proceeding of the Twenty Second International Modal Analysis Conference - IMAC**. Dearborn, EUA. 2004. p. 21.
- GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. Nonlinear dynamic behavior of a flexible structure to combined external acoustic and parametric excitations. In: ABCM.

¹No que se refere a presente área de conhecimento.

Proceedings of Eleven International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME. Ouro Preto, Brasil. 2005. p. 10.

- GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. Investigation on the nonlinear dynamic behavior using time-frequency distributions. In: UFPB. **Anais do Segundo Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM.** João Pessoa, Brasil. 2002. p. 10.

8.3 Recomendações

Na presente pesquisa foi considerado apenas um dos efeitos provocados pelo meio onde uma estrutura pode vir a operar: a viscosidade. Poderia ser interessante o desenvolvimento de estudos considerando também o efeito da temperatura. Seria especialmente interessante a investigação do efeito de baixas temperaturas sobre as características da vibração ressonante paramétrica, autoparamétrica e combinada. Tipicamente, estruturas aeronáuticas operam constantemente à baixas temperaturas.

Como complemento da presente pesquisa seria interessante o desenvolvimento de modelos matemáticos em que a viscosidade aparecesse de forma explícita. Assim poderia-se utilizá-la como variável de bifurcação e investigar o efeito da variação de viscosidade do meio de operação. Experimentos também poderiam ser projetados, nos quais a estrutura seria envolvida por meios com densidades diferentes, tais como, água ou óleo. Este estudo seria especialmente voltado a estruturas que operam na água, assim como, microestruturas.

A tópico envolvendo vibrações combinadas ainda merece ser muito explorado. Seria interessante o desenvolvimento de soluções analíticas tanto envolvendo o sistema com múltiplos graus de liberdade quanto o sistema com um grau de liberdade.

Existe uma grande carência no desenvolvimento de modelos não-lineares envolvendo estruturas topologicamente complexas. Na literatura existem iniciativas nesta direção, as quais empregam o conceito de modelos híbridos. Entretanto ainda são muito incipientes. Seria altamente positivo e importante avançar neste sentido.

Por fim, com a alteração das características da excitação um novo universo é aberto. O emprego de excitações do tipo aleatórias seria muito interessante. Também o emprego de excitações periódicas com multicomponentes parece ser muito atrativo e nobre.

Referências

- ANDERSON, T. J.; BALACHANDRAN, B.; NAYFEH, A. H. Nonlinear resonance in a flexible cantilever beam. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 116, p. 480–484, 1994.
- ANDERSON, T. J.; NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. Experimental verification of the importance of the nonlinear curvature in the response of a cantilever beam. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 118, p. 21–27, 1996.
- ASHWORTH, R. P.; BARR, A. D. S. The resonances of structures with quadratic inertial non-linearity under direct and parametric harmonic excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 118, p. 47–68, 1987.
- BALACHANDRAN, B. **A theoretical and experimental study of modal interactions in resonantly forced structures**. 297 p. Tese (Doutorado) — Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1990.
- Bathe, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982. 735 p.
- BEAL, T. R. Dynamic stability of flexible missile under constant and pulsating thrust. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 3, p. 486–494, 1965.
- BELLO, M.; SESTIERI, A.; D'AMBROGIO, W.; GALA, F. L. Development of a rotational transducer based on bimorph pzt's. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 17, n. 5, p. 1069–1081, 2003.
- B&K. **Instruction Manual: vibration exciter system v**. Copenhagen: [s.n.], 1974. 76 p.
- BOAS, M. L. **Mathematical methods in the physical sciences**. New York: Wiley & Sons, 1983. 793 p.
- BORESI, A. P.; SCHIMIDT, R. J.; SIDEBOTTOM, O. M. **Advanced mechanics of materials**. New York: Wiley & Sons, 1993. 810 p.
- BUX, S. L.; ROBERTS, J. W. Non-linear vibratory interactions in systems of coupled beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 104, n. 3, p. 497–520, 1986.

CARTMELL, M. **Introduction to linear, parametric and nonlinear vibration**. London: Chapman and Hall, 1990. 242 p.

CARTMELL, M. P. The equations of motion for a parametrically excited cantilever beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 143, n. 3, p. 395–406, 1990.

CARTMELL, M. P.; ZIEGLER, S. W.; KHANIN, R.; FOREHAND, D. Multiple scales analyses of the dynamics of weakly nonlinear mechanical systems. **Applied Mechanical Review**, v. 56, n. 5, p. 455–490, 2003.

CHUBAN, V. D.; IVANTEYEV, V. I.; CHUDAYEV, B. J.; AVDEYEV, E. P. Numerical simulation of flutter validated by flight-test data for tu-204 aircraft. **Computer and Structures**, v. 80, p. 2551–2563, 2002.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams, i: equations of motion. **Journal of Structural Mechanics**, v. 6, p. 437–448, 1978.

DALLY, J.; RILEY, W.; MCCONNELL, K. **Instrumentation for engineering measurements**. New York: Wiley & Sons, 1993. 608 p.

DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive laws for engineering materials**. London: Prentice-Hall, 1984. 468 p.

DUGUNDJI, J.; MUKHOPADHYAY, V. Lateral bending-torsion vibrations of a thin beam under parametric excitation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 3, n. 4, p. 693–698, 1973.

ESMAILZADEH, E.; JALILI, N. Parametric response of cantilever timoshenko beams with tip mass under harmonic support motion. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 33, n. 5, p. 765–781, 1998.

ESMAILZADEH, E.; NAKHAIE-JAZAR, G. Periodic behaviour of a cantilever beam with end mass subjected to harmonic base excitation. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 567–577, 1998.

EVAN-IWANOWSKI, R. M. On the parametric response of structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 18, n. 9, p. 699–702, 1965.

EVAN-IWANOWSKI, R. M. **Resonance oscillations in mechanical systems**. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1976. 292 p.

EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. London: Research Studies Press LTD, 2000. 562 p.

FAHY, F. **Sound and Structural Vibration**. London: Academic Press, 1987. 309 p.

FOREHAND, D. I. M.; CARTMELL, M. P. On the derivation of the equations of motion for a parametrically excited cantilever beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 245, n. 1, p. 165–177, 2001.

FUNG, R. F.; CHANG, H. C. Dynamic modelling of a non-linearly constrained flexible manipulator with a tip mass by hamilton's principle. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216, n. 5, p. 751–769, 1998.

GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. On the sufficiency of classical response models in predicting the dynamic behavior of flexible structures: The role of principal parametric resonance. **Nonlinear Dynamics**, **Article in Press**, 2004.

GOMES DA SILVA, D.; VAROTO, P. S. On the sufficiency of classical response models in predicting the dynamic behavior of flexible structures. In: SEM. **Proceeding of the Twenty Second International Modal Analysis Conference**. Dearborn, MI, USA: SEM, 2004. p. 21.

GÜRĞÖZE, M. Parametric vibration of a restrained beam with an end mass under displacement excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 108, n. 1, p. 73–84, 1986.

HADDOW, A. G.; BARR, A. D. S.; MOOK, D. T. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 97, n. 3, p. 451–473, 1984.

HAIGHT, E. C.; KING, W. W. Stability of nonlinear oscillations of an elastic rod. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 52, n. 3, p. 899–911, 1971.

HAQUANG, N.; MOOK, D. T. A non-linear analysis of the interactions between parametric and external excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 118, n. 3, p. 425–439, 1987.

HAQUANG, N.; MOOK, D. T. Non-linear structural vibration under combined parametric and external excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 118, n. 2, p. 291–306, 1987.

HAYKIN, S.; VEEN, B. V. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 1999. 668 p.

KAR, R. C.; SUJATA, T. Parametric instability of an elastically restrained cantilever beam. **Computer and Structures**, v. 34, p. 469–475, 1990.

KHANIN, R.; CARTMELL, M. P. Parallelization of perturbation analysis: application to large-scale engineering problems. **Journal of Symbolic Computation**, v. 31, p. 461–473, 2001.

KHANIN, R.; CARTMELL, M. P.; GILBERT, A. A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using mathematica. **Computer and Structures**, v. 76, p. 565–575, 2000.

KINSLER, L. E.; FREY, A. R. **Fundamentals of acoustics**. New York: Wiley & Sons, 1962. 524 p.

KIRKUP, S. M.; AMINI, S. Modal analysis of acoustically-loaded structures via integral equation methods. **Computer and Structures**, v. 40, p. 1279–1285, 1991.

LAUFFER, J. P.; CARNE, T. G.; NORD, A. R. Mini-modal testing of wind turbines using novel excitation. In: USA. **Proceeding of the 3rd International Modal Analysis Conference**. Orlando: SEM, 1985. p. 8.

LEE, H. P. Stability of a cantilever beam with tip mass subject to axial sinusoidal excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 183, n. 1, p. 91–98, 1995.

- LEE, S. I.; LEE, J. M.; CHANG, S. I. Nonlinear modal interactions of a cantilever beam with an internal resonance. In: EUA. **Proceeding of the International Modal Analysis Conference**. Kissimmee: SEM, 1997. p. 7.
- LINK, M.; FRISWELL, M. Working group 1: Generation of validated structural dynamic models - results of a benchmark study utilising the garteur sm-ag19 test-bed. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 17, p. 9–20, 2003.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. New York: Wiley & Sons, 1997. 468 p.
- MCCONNELL, K. G. **Vibration Testing: Theory and Practice**. New York: Wiley & Sons, 1995. 606 p.
- MCCONNELL, K. G.; SHERMAN, P. J. Frf estimation under non-zero initial conditions. In: USA. **Proceeding of the 11th International Modal Analysis Conference**. Kissimmee: SEM, 1993. p. 8.
- MEIROVITCH, L. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970. 524 p.
- MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. New York: McGraw-Hill, 1986. 560 p.
- MOOK, D. T.; HAQUANG, N.; PLAUT, R. H. The influence of an internal resonance on the nonlinear structural vibration under combination resonance conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 104, p. 229–241, 1986.
- MURPHY, K. D.; VIRGIN, L. N.; RIZZI, S. A. Characterizing the dynamic response of a thermally loaded, acoustically excited plate. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, n. 5, p. 635–658, 1996.
- NAYFEH, A. H. **Perturbation Methods**. New York: Wiley & Sons, 1973. 425 p.
- NAYFEH, A. H. **Introduction to Perturbation Techniques**. New York: Wiley & Sons, 1981. 519 p.
- NAYFEH, A. H. **Problems in Perturbation**. New York: Wiley & Sons, 1985. 556 p.
- NAYFEH, A. H. **Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods**. New York: Wiley & Sons, 2000. 760 p.
- NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B.; COLBERT, M. A.; NAYFEH, M. A. An experimental investigation of complicated responses of a two-degree-of-freedom structure. **Journal of Applied Mechanics**, v. 56, p. 960–967, 1989.
- NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear oscillations**. New York: Wiley & Sons, 1979. 704 p.
- NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 24, n. 2, p. 139–158, 1989.
- NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and Nonlinear Structural Mechanics**. New York: Wiley & Sons, 2004. 746 p.

- NAYFEH, A. H.; ZAVODNEY, L. D. Experimental observation of amplitude and phase modulated responses of two internally coupled oscillators to a harmonic excitation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 55, p. 706–710, 1988.
- NAYFEH, S. A.; NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. Nonlinear response of a taut string to longitudinal and transverse end excitation. **Journal of Vibration and Control**, v. 1, p. 307–334, 1995.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time signal processing**. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 870 p.
- PLATTEN, M. F.; WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. The use of a non-contact acoustic excitation array for the estimation of damping in aircraft panels. In: BELGIUM. **Proceeding of Internation Conference on Noise and Vibration Engineering**. Leuven: SEM, 2002. p. 10.
- RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. New York: Addison-Wesley, 1995. 912 p.
- RESTUCCIO, J. M.; KROUSGRILL, C. M.; BAJAJ, A. K. Nonlinear nonplanar dynamics of a parametrically excited inextensional elastic beam. **Nonlinear Dynamics**, v. 2, p. 263–289, 1991.
- ROBERTS, J. W.; CARTMELL, M. P. Forced vibration of a beam system with autoparametric coupling effects. **Strain**, August, p. 123–131, 1984.
- SAITO, H.; KOIZUMI, N. Parametric vibrations of a horizontal beam with a concentrated mass at one end. **International Journal of Mechanical Science**, v. 24, n. 12, p. 755–761, 1982.
- SANCHEZ, N. The method of multiples scales: asymptotic solutions and normal forms for nonlinear oscillatory problems. **Journal of Symbolic Computation**, v. 21, p. 245–252, 1996.
- SATO, K.; SAITO, H.; OTOMI, K. The parametric response of a horizontal beam carrying a concentrated mass under gravity. **Journal of Applied Mechanics**, v. 45, p. 643–648, 1978.
- SETHNA, P. R. Vibration of dynamical systems with quadratic nonlinearities. **Journal of Applied Mechanics**, v. 32, p. 576–582, 1965.
- SEYDEL, R. **Practical bifurcation and stability analysis**. London: Springer-Verlag, 1994. 407 p.
- SHAMES, I. H.; DYM, C. L. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1985.
- SHAMPINE, L. F.; GORDON, M. K. **Computer solution of ordinary differential equation: the initial value problem**. San Francisco: W. H. Freeman, 1975.
- SHYU, I. M. K.; MOOK, D. T.; PLAUT, R. H. Whirling of a forced cantilevered beam with static deflection i: Primary resonance. **Nonlinear Dynamics**, v. 4, p. 227–249, 1993.

SHYU, I. M. K.; MOOK, D. T.; PLAUT, R. H. Whirling of a forced cantilevered beam with static deflection ii: Superharmonic and subharmonic resonances. **Nonlinear Dynamics**, v. 4, p. 337–356, 1993.

TABADDOR, M. Influence of nonlinear boundary conditions on the single mode response of a cantilever beam. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p. 4915–4931, 2000.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. **Nonlinear dynamics and chaos**. New York: Wiley & Sons, 1986. 376 p.

TOMLINSON, G. R. Force distortion in resonance testing of structures with electro-dynamic vibration exciters. **Journal of Sound and Vibration**, v. 63, n. 3, p. 337–350, 1979.

VAROTO, P. S.; OLIVEIRA, L. P. R. On the force drop off phenomenon in shaker testing in experimental modal analysis. **Shock and Vibration**, v. 9, p. 165–175, 2002.

WHITE, F. M. **Viscous fluid flow**. New York: McGraw-Hill, 1974. 725 p.

WRIGHT, J. Encyclopedia of vibrations. In: _____. New York: Academic Press, 2002. p. 553–565.

WYLEN, G. J. V.; SOUNTAG, R. E.; BORGNAKKE, C. **Fundamentos da termodinâmica clássica**. São Paulo: Edgard Blücher, 1995. 589 p.

YABUNO, H. Nonlinear stability analysis for summed-type combination resonance under parametrical excitation (application of center manifold theory and grobner basis with computer algebra). **Transactions of JSME**, v. 60, p. 1151–1158, 1994.

YAMAMOTO, T.; YASUDA, K.; KATO, M. Internal resonance in a nonlinear multi-degree-of-freedom vibratory system when its natural frequencies satisfy the condition $p_1 + p_2 = p_3$ or $2p_1 + p_2 = p_3$. **Bulletin of JSME**, v. 29, p. 3468–3475, 1986.

YOO, J. H.; HONG, J. I.; CAO, W. Piezoelectric ceramic bimorph coupled to thin metal plate as cooling fan for electronic devices. **A Physical**, v. 79, p. 8–12, 2000.

ZARETZKY, C. L.; CRESPO DA SILVA, M. R. M. Experimental investigation of non-linear modal coupling in the response of cantilever beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 174, n. 2, p. 145–167, 1994.

ZAVODNEY, L. **A theoretical and experimental investigation of parametrically excited nonlinear mechanical systems**. 358 p. Tese (Doutorado) — Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1987.

ZAVODNEY, L. D.; NAYFEH, A. H. The non-linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment. **International Journal of Non-linear Mechanics**, v. 24, n. 2, p. 105–125, 1989.

APÊNDICE

A

*Caracterização das Fontes de
Excitação Acústica e Excitador
B&K 4812*

De maneira geral, todas as fontes de excitação controlada possuem suas próprias características e limitações. Comumente quando é requerido um ensaio mais específico — como é o caso dos ensaios não-lineares — é fundamental que as características e principalmente das limitações das fontes de excitação empregadas sejam conhecidas. Tal importância decorre da facilidade em excitar a estrutura de uma maneira não adequada ou não requerida. Portanto o presente apêndice é dedicado à caracterização de algumas fontes de excitação empregadas na presente pesquisa. Além da obtenção de resultados úteis, este apêndice tem como objetivo frisar a importância de se conhecer as características das fontes de excitação, assim como, exemplificar como estas características podem ser obtidas.

A.1 Fonte de Excitação Via Base

A excitação via base empregada como fonte de excitação nos ensaios envolvendo o sistema com um grau de liberdade foi definida como um excitador eletrodinâmico B&K com corpo tipo 4801 e cabeça para propósitos gerais tipo 4812. Segundo o fabricante, esta montagem pode promover acelerações até 1000 m/s^2 quando carregado

com 0.04535 Kg ou somente 20 m/s² quando carregado como 10 Kg. Em adição, quando não está carregado a frequência de ressonância da mesa ocorre em 7.2 KHz, desenvolve deslocamento máximo de 12.7 mm e velocidade máxima de 1.14 m/s (B&K, 1974).

Dentro dos requerimentos dos ensaios envolvendo o sistema com um grau de liberdade é importante avaliar três características relacionadas com esta fonte de excitação: (i) as ampliações e atenuações na resposta do excitador; (ii) se existe ou não harmônicos na resposta e; (iii) possíveis movimentos de rotação da mesa.

A.1.1 Identificação do Excitador

A Figura (97) apresenta a montagem experimental empregada para a extração da FRF do excitador B&K 4812. Inicialmente, a base auxiliar para fixação da estrutura foi fixada à mesa do excitador, e sua aceleração capturada por um acelerômetro miniatura B&K 4374 (1.06 pC/g). Além deste transdutor, a cadeia de medição é composta por um condicionador/ pré-amplificador B&K 2626 e um analisador espectral Tektronix 2630.

Figura 97: Configuração experimental utilizada durante a obtenção da FRF do excitador eletrodinâmico B&K 4812.

O Tektronix 2630 também foi utilizado para a geração do sinal de excitação. Utilizou-se para excitação um sinal aleatório cobrindo uma faixa de frequência até 10 kHz, com um total de 4096 linhas espectrais. Isto resultou em uma definição temporal $\Delta t = 3.91 \times 10^{-5}$ s e uma definição em frequência de $\Delta f = 6.25$ Hz. Por fim, este sinal foi amplificado por um amplificador de potência B&K 2707 e enviado para o excitador.

A Figura (98) apresenta via diagrama de Bode a magnitude da FRF obtida por intermédio do arranjo experimental descrito anteriormente.

Algumas características importantes podem ser observadas na figura anterior. Primeiro, a presença da base de aço auxiliar provocou um decréscimo na frequência de

Figura 98: Diagrama de Bode demonstrando a FRF experimental do excitador eletrodinâmico B&K 4812.

ressonância da mesa do excitador, do valor nominal de 7.2 KHz para 4.2 KHz. Entretanto esta região crítica ainda é um valor alto e não irá influenciar os ensaios não-lineares. Segundo, pode-se observar no detalhe da faixa entre 10 à 100 Hz, que existe uma zona de amplificação próxima à 22 Hz. Esta região está situada próxima da condição onde foram realizados os ensaios não-lineares com o sistema com um grau de liberdade, e assim é preocupante. Em especial, esta última região de amplificação é a responsável por requer que a obtenção experimental das curvas resposta-frequência seja realizada utilizando um sistema de controle de amplitude em malha fechada.

A.1.2 Avaliação da Forma de Onda

Tradicionalmente, a obtenção das curvas resposta-frequência, resposta-amplitude ou mesmo resposta-amortecimento quadrático requer que a excitação seja periódica e mono-componente. Embora existem casos específicos em que estas curvas são obtidas exatamente para se avaliar os efeitos dinâmicos provocados por excitações do tipo aleatória ou periódica com múltiplos componentes espectrais. Entretanto, como anteriormente mencionado, um excitador eletrodinâmico é um sistema dinâmico não-linear e assim, mesmo quando o sinal de excitação é periódico e monocomponente, a resposta pode conter outras componentes espectrais, que por sua vez, provocam distorções na forma da onda. Nestes casos, ao invés do item de teste ser excitado periodicamente em uma frequência específica, é na verdade excitado em mais de uma frequência e assim,

não preenchem os requisitos e hipóteses requeridas no ensaio.

A Figura (99) apresenta os resultados experimentais obtidos a partir de dois valores de amplitude do sinal de entrada $V(t)$. Em adição, ambos os sinais foram gerados como periódicos, mono-componentes e com frequência igual à 36.132 Hz.

Figura 99: Resultados experimentais demonstrando a presença de harmônicos na resposta do excitador eletrodinâmico B&K 4812, mesmo quando a excitação (volts) possui apenas uma componente espectral em 36.132 Hz. Note também a presença de uma frequência parasita em 60 Hz proveniente da rede elétrica.

Quando alimentado com $V(t) = 0.1 \text{ V}$ o excitador produziu uma aceleração em torno de 9.8 m/s^2 . Mantendo-se fixo o ganho no amplificador de potência, mas alimentando o excitador com $V(t) = 1.5 \text{ V}$ a aceleração medida foi em torno de 39 m/s^2 .

Em ambos os casos descritos, observou-se a presença do primeiro harmônico da frequência de entrada. Entretanto, para a amplitude de $V(t) = 0.1 \text{ V}$ este harmônico possui amplitude quatro ordens de grandeza menor do que a componente fundamental. Por outro lado, quando a amplitude de entrada foi elevada para $V(t) = 1.5 \text{ V}$, observou-se um aumento significativo da magnitude do primeiro harmônico. Este que para $V(t) = 0.1 \text{ V}$ era quatro ordens de grandeza menor, aumentou e passou a ser duas ordens de grandeza menor que a componente fundamental.

Tomlinson (1979) realizou uma investigação teórica e experimental sobre distorções na excitação durante ensaios ressonantes com excitadores eletrodinâmicos. Dentre os resultados obtidos, ele observou-se a presença de um primeiro harmônico na resposta do excitador. Esta distorção foi atribuída ao campo magnético do excitador, o qual é

basicamente regido por uma lei de segunda ordem ou quadrática. As observações feitas por TOMLINSON se repetem nos resultados apresentados pela Figura (99).

De maneira conclusiva, a presença significativa de um harmônico na resposta de um excitador eletrodinâmico viola os requerimentos de um ensaio que requer uma única componente espectral. Deve-se tomar muito cuidado neste aspecto, em especial conferir se a presença do primeiro harmônico na resposta do excitador — que é sentido pela estrutura como excitação — pode ser considerado desprezível, caso contrário os resultados obtidos podem ser comprometidos. Por fim, a Figura (99) ainda demonstra a presença de uma frequência parasita em 60 Hz, proveniente da rede elétrica. Embora esta componente seja, em muitos casos, difícil de ser eliminada por completo, deve-se buscar meios de minimizá-la.

A.1.3 Avaliação da Rotação da Mesa do Excitador

Tradicionalmente, os excitadores eletrodinâmicos são construídos de modo a privilegiar o movimento axial. Para isso, a armadura do excitador é suportada por elementos rígidos nas direções laterais e torcionais, mas relativamente flexíveis na direção axial. McConnell (1995) apresenta com detalhes os elementos construtivos típicos de um excitador eletrodinâmico. Embora sempre exista a preocupação dos fabricantes em evitar a geração de movimentos rotativos da mesa do excitador, sempre existe algum movimento residual.

Excitadores novos e que transmitem a excitação para a estrutura pelo emprego de *stinger* ou *piano-wire*, configuram uma condição de ensaio na qual os movimentos de rotação da mesa praticamente não afetam os resultados. Por outro lado, quando a estrutura é fixada diretamente sobre o excitador, caracterizando um ensaio sísmico, os movimentos de rotação podem ser importantes. Em especial quando não existe distribuição simétrica do peso da estrutura em relação a mesa do excitador e; quando durante o ensaio a estrutura é levada a altas magnitudes vibratórias, que por sua vez, geralmente induz momentos reativos na mesa do excitador.

Como previamente estabelecido, a realização dos ensaios não-lineares sobre o sistema de um grau de liberdade utiliza a configuração sísmica. Esta configuração é empregada para promover movimentos, a priori, somente axiais ao sistema. Entretanto, a configuração sísmica aliada com o tempo de uso do excitador eletrodinâmico B&K 4812 empregado, pode compor um condição preocupante em relação à rotação da mesa do excitador.

Assim, como o ensaio tem com requerimento fundamental que a estrutura seja ex-

citada unicamente na direção axial, torna-se importante avaliar se durante as condições de ensaio o movimento de rotação da mesa do excitador encontra-se dentro de níveis aceitáveis. Para isso, foi empregado uma configuração experimental semelhante a descrita anteriormente pela Figura (97). Entretanto, o acelerômetro translacional B&K 4374 foi substituído por um acelerômetro angular Kistler 8836M01 ($34 \mu\text{V}/\text{rad}/\text{s}^2$). Especificamente o acelerômetro angular foi posicionado sobre a base auxiliar (presa sobre a mesa do excitador) de maneira a medir a possível rotação na direção Y (vide Figura (5)).

Foram realizados quatro ensaios de varredura senoidal com controle de amplitude em uma estreita faixa de frequência na vizinhança de 36 Hz. É nesta faixa de frequência que a teoria juntamente com a identificação modal prediz que irá ocorrer o fenômeno de ressonância paramétrica principal e conseqüentemente se desenvolva a vibração paramétrica principal. Os dois primeiros, com amplitude fixa e controlada em 29.43 m/s^2 , mas em direções de variação diferentes, isto é, uma com variação de frequência ascendente e outra descendente. Os últimos dois foram realizados de maneira semelhante, mas com amplitude controlada de 39.24 m/s^2 . A Figura (100) apresenta os resultados.

Figura 100: Resultados experimentais demonstrando a rotação em torno do eixo Y da mesa do excitador eletrodinâmico B&K 4812.

Foram observados em todos os quatro ensaios algum movimento de rotação da mesa do excitador. O maior valor de aceleração angular ocorreu na direção descendente e para a magnitude da aceleração translacional em 39.24 m/s^2 . Por outro lado, o menor

valor observado foi também na direção descendente, mas para amplitude de aceleração translacional da base em 29.24 m/s^2 . Mesmo para a condição mais crítica, os valores de rotação da mesa do excitador foram considerados aceitáveis, assim espera-se que a rotação da base não irá influenciar os resultados provenientes dos futuros ensaios não-lineares.

A.1.4 Conclusões

De maneira conclusiva, esta seção apresentou experimentalmente características importantes da fonte de excitação empregada nos ensaios sísmicos. Os resultados demonstraram que existem regiões onde o sistema excitador/amplificador de potência amplificam a resposta do excitador. Em adição, dependendo da intensidade da entrada, pode haver distorções na forma de onda da resposta do excitador. Por fim, foi demonstrado que é inevitável a ocorrência de algum movimento rotacional da mesa do excitador.

De maneira geral, é evidente que todas estas constatações podem influenciar os resultados experimentais. Entretanto estes efeitos podem ser minimizados se o experimentalista buscar sempre melhores configurações experimentais, ter muito capricho na execução dos experimentos e acima de tudo ter consciência da existência destes potenciais problemas.

A.2 Fonte de Excitação Acústica

Dentre as várias fontes de excitação acústica existentes, auto-falantes constituem o tipo de mecanismo mais indicado para a produção de uma excitação controlada. Possuem a inerente característica de transformar energia elétrica em som com amplo espectro, é fácil de ser gerenciado e pode funcionar a contento durante muito tempo. Devido a estas características, torna-se muito atrativo como fonte de excitação acústica, especialmente em investigações de laboratório. Embora muito esforço tenha sido despendido no desenvolvimento dos auto-falantes atuais, é inevitável que existam algumas dificuldades relacionadas com seu uso. Dentre estas, duas merecem atenção especial: a frequência de ressonância do cone livre e os problemas com a radiação direta.

A.2.1 Definição das Características da Fonte Acústica

Quando um alto-falante tipo cone é utilizado livremente, tal como comprado, a frequência de ressonância do cone livre distorce o som e a resposta é mais intensa

nesta região. Esta resposta não uniforme altera o conteúdo espectral em termos da intensidade relativa entre harmônicos. Em adição, enquanto a superfície frontal do cone move-se para frente para criar uma onda sonora aumentando a pressão do ar, a superfície traseira do cone diminui a pressão do ar. Uma vez que o comprimento da onda sonora em baixas frequências é grande quando comparado com o tamanho do falante, e uma vez que estas baixas frequências rapidamente refratam em torno do cone, as ondas sonora originárias da parte de traz do cone tendem a cancelar aquelas originárias da parte frontal do cone.

Assim, para evitar os problemas relacionados com a operação livre de alto-falantes tipo cone, a solução usual consiste em colocá-lo em um volume delimitado. Apenas com a colocação de um alto-falante dentro de uma caixa fechada, a qualidade sonora aumenta substancialmente.

Após esta breve discussão, foi determinada como fonte de excitação externa uma caixa acústica selada. Esta caixa é composta por um auto-falante comercial com 12" de diâmetro montado em uma caixa de madeira com formato aproximadamente cúbico, resultando em um volume em torno de $49L$. Este volume está em conformidade com as especificações do fabricante para a obtenção da melhor qualidade sonora do auto-falante. A Figura (101) apresenta esquematicamente a fonte acústica, assim como, suas dimensões principais.

Figura 101: Desenho ilustrativo da fonte acústica projetada para desenvolver a melhor qualidade sonora do auto-falante: (a) vista frontal e; (b) vista lateral. Dimensões são: $W = 500mm$, $H = 460mm$ e $T = 290mm$.

A.2.2 Caracterização da Fonte Acústica

Caracterizar apropriadamente o mecanismo de excitação acústica apresentado anteriormente é fundamental para a qualidade dos resultados decorrentes do seu uso.

A partir dos resultados da análise modal realizada sobre o sistema estrutural de um grau de liberdade, foi identificado que a frequência natural associada com o primeiro modo em flexão é aproximadamente $18Hz$, que é um valor relativamente baixo. Esta informação juntamente com a definição de ressonância paramétrica principal descrevem que, este fenômeno poderá ocorrer quando a excitação paramétrica for próxima à $36Hz$. Estes dois valores numéricos — $18Hz$ e $36Hz$ — são muito atraentes e interessantes de serem utilizados como frequências para a excitação externa acústica.

O primeiro, $18Hz$ é aproximadamente igual a frequência de ressonância externa e assim, pode levar à vibração externa com maiores amplitudes. Já a segundo, $36Hz$ é interessante pois experimentalmente pode-se, a partir de um único sinal, excitar a estrutura em uma condição de ressonância paramétrica principal e ao mesmo tempo gerar uma excitação forçada. Ainda, desta maneira pode-se observar experimentalmente as previsões feitas teoricamente sobre vibração combinada, em especial o efeito do ângulo de fase entre as excitações.

Assim, definiu-se dois pontos de operação especiais: $Pt_1 \approx 18Hz$ e $Pt_2 \approx 36Hz$. Entretanto, antes que a fonte de excitação acústica empregada na geração de resultados experimentais sobre a vibração combinada, é indispensável o conhecimento da sua performance nestas condições. Para isso foram planejados dois ensaios distintos. O primeiro tem com principal objetivo avaliar se a fonte de excitação acústica é capaz de produzir uma excitação periódica com frequências em torno de 18 e $36Hz$, com pequena distorção na forma da onda acústica e sem a presença de harmônicos significantes. O segundo visa avaliar se a fonte produz energia acústica suficiente para excitar a contento a estrutura à 18 e $36Hz$.

A.2.2.1 Avaliação da Forma de Onda

Para a avaliação da forma de onda, foi planejado a realização de quatro ensaios. Todos utilizando como excitação da fonte um sinal elétrico, periódico e monocomponente. Os dois primeiros foram realizados com $18Hz$ e para duas amplitudes $0.5V$ e $0.75V$. Os dois últimos utilizaram $36Hz$ e duas amplitudes, $2.11V$ e $2.55V$. Estes valores de amplitude foram os maiores possíveis, limitados pelo amplificador e conseqüentemente os mais críticos nesta investigação. Para a realização destes quatro ensaios, foi organizado um arranjo experimental tal como apresenta a Figura (102).

A fonte acústica foi montada na condição livre-livre por intermédio de suspensões de borracha. Em adição todo arranjo experimental foi estrategicamente posicionado

Figura 102: Arranjo experimental para avaliar a qualidade da excitação acústica, no que diz respeito a forma de onda.

dentro do salão principal¹ do Laboratório de Dinâmica da EESC/USP para minimizar os efeitos de reverberação e reflexão sonora. O sinal de entrada da fonte acústica foi inicialmente gerado pelo Tektronix 2630, amplificado por um amplificador comercial de 500 watts e enviado para a fonte acústica. Um microfone dinâmico G.R.A.S modelo 40 AE 1/2" (49.49 mV/Pa) — posicionado à 150 mm do centro do auto-falante — foi utilizado para capturar a resposta acústica. Finalmente o sinal acústico foi amplificado por um amplificador PCB serie 481A e enviado ao Tektronix 2630. Como parâmetros de aquisição, foram utilizados 2048 pontos por bloco de sinal, definição temporal de $\Delta t = 7.8125e - 4$ s e definição em frequência de $\Delta f = 0.6250$ Hz.

A Figura (103) apresenta os resultados experimentais obtidos com sinal de excitação elétrica da fonte acustica em 18 Hz e para os dois níveis de amplitude, 0.5 V e 0.75 V. A partir desta figura, pode-se observar que a caixa acústica não responde adequadamente nestas condições. Existe em 54 Hz a forte presença de um harmônico no sinal da resposta acústica. Para amplitude de 0.5 V, a magnitude deste segundo harmônico é aproximadamente 40% da magnitude da componente fundamental. Já para amplitude de 0.75 V, a magnitude do segundo harmônico é ainda maior, e representa aproximadamente 46% da fundamental. Portanto, a verificação de fortes distorções na resposta da fonte acústica quando em operação próxima à 18 Hz torna completamente inadequado a geração de sinais acústicos nestas condições. Assim, este ponto de operação não poderá ser utilizado nos ensaios de vibração combinada e será abandonado.

Por outro lado, quando a fonte acústica é excitada em 36 Hz e mesmo para o nível máximo de amplitude disponível, observou-se uma excelente resposta, com forma ade-

¹Este salão possui uma área útil de 228 m² e aproximadamente 800 m³.

Figura 103: Medidas experimentais do nível de pressão sonora à 150 mm do centro do auto-falante: (a) sinal temporal da pressão sonora, obtida com 0.5 V de entrada; (b) espectro em amplitude da pressão sonora, obtida com 0.5 V de entrada; (c) sinal temporal da pressão sonora, obtida com 0.75 V de entrada e; (d) espectro em amplitude da pressão sonora, obtida com 0.75 V de entrada .

quada e sem a presença de harmônicos expressivos. A Figura (104) apresenta os resultados nos domínios do tempo e da frequência, os quais confirmam que nesta condição a fonte de excitação pode operar corretamente. Em adição, esta figura confirma a ausência de interferências acústicas importantes devido a reverberação e/ou reflexão sonora.

A.2.2.2 Avaliação da Energia Acústica Disponível

Na seção anterior, foi demonstrado que a fonte de excitação acústica quando excitada em 36 Hz, converte adequadamente energia elétrica em energia sonora, mesmo para a maior excitação (entrada Volts) experimentalmente disponível. O próximo passo na sua caracterização consiste na avaliação se nesta condição existe energia sonora suficiente para excitar transversalmente o sistema estrutural com um grau de liberdade. Esta avaliação é importante pois caso não haja energia suficiente, toda a investigação experimental sobre vibrações combinadas ficará comprometida.

Um auto-falante pode aplicar uma força a uma estrutura pela geração de uma

Figura 104: Medidas experimentais do nível de pressão sonora à 150 mm do centro do auto-falante: (a) sinal temporal da pressão sonora, obtida com 2.11 V de entrada; (b) espectro em amplitude da pressão sonora, obtida com 2.11 V de entrada; (c) sinal temporal da pressão sonora, obtida com 2.55 V de entrada e; (d) espectro em amplitude da pressão sonora, obtida com 2.55 V de entrada .

onda acústica, a qual colide contra a estrutura, produzindo alterações de pressão na superfície. A magnitude desta força depende da pressão acústica e da área sobre a qual inside esta pressão.

Segundo Fahy (1987) o modelo de um disco circular rígido oscilando transversalmente ao seu plano e em um tubo rígido constitui um modelo razoável para se analisar um auto-falante dentro de um gabinete. Para os casos em que o diâmetro do auto-falante é menor que um quarto do comprimento de onda, a pressão acústica a uma distância suficiente da fonte acústica pode ser escrita como

$$p(r, t) = j\omega\rho\frac{Q}{2\pi r}e^{j(\omega t - kr)} \quad (\text{A.1})$$

na qual p [Pa] é a pressão dinâmica a uma distância r [m], ω [rad/s] é a frequência, ρ [kg/m³] é a densidade do ar a uma certa temperatura, Q [m³/s] é a velocidade do volume deslocado e $k = 2\pi f/c$ [m] é o número de onda, no qual c [m/s] representa a velocidade do som no ar a uma dada temperatura. A velocidade do volume deslocado pode ainda ser escrita como,

$$Q = \pi a^2 v_n \quad (\text{A.2})$$

na qual v_n [m/s] representa a velocidade de translação normal.

A partir das Equações (A.1) e (A.2) pode-se observar que a pressão dinâmica a uma distancia r da fonte acústica pode ser encontrada a partir da velocidade normal v_n . Em adição, a partir do conhecimento da pressão agindo sobre a estrutura, mais o conhecimento da área na qual inside esta pressão, pode-se extrair qual é a força distribuída que age sobre a estrutura e conseqüentemente atingindo o objetivo principal desta seção.

Para que as equações descritas anteriormente pudessem ser empregadas, foi planejado a execução de um ensaio experimental para verificar experimentalmente se o cone do auto-falante se comporta como um disco rígido — isto é, se não existe comportamento flexível — quando excitado à 36 Hz.

Para isso foi utilizado o mesmo arranjo experimental descrito anteriormente pela Figura (102). Entretanto o microfone foi substituído por um transdutor laser Polytec CLV 1000 (50.0 (mm/s)/V). Este transdutor foi empregado para capturar a velocidade do cone em dezessete pontos diferentes ao longo do raio do cone e para quatro diferentes níveis de excitação. A Figura (105) apresenta os resultados obtidos.

Figura 105: Medidas experimentais da velocidade do cone da fonte acústica quando excitada à 36.132 [Hz].

A partir da figura anterior, pode-se notar que a velocidade varia timidamente ao longo do cone do auto-falante, mesmo para a máxima amplitude de excitação tecni-

camente disponível. A Tabela (6) confirma estatisticamente estas observações, uma vez que, foram encontrados pequenos valores de desvio padrão. Assim conclui-se que quando operando em torno de 36 Hz o cone comporta-se praticamente como corpo rígido.

Tabela 6: Parâmetros estatísticos para a velocidade do cone quando excitado à 36.132 Hz e vários níveis de amplitude.

Parâmetros Estatísticos				
Nível Entrada [V]	Max [mm/s]	Min [mm/s]	Media [mm/s]	STD [mm/s]
1.3	159.6	156.4	158.2	1.00
1.7	208.7	203.7	205.9	1.34
2.11	258.1	252.0	254.8	1.80
2.55	310.0	302.0	306.6	2.46

Do exposto, pôde-se chegar aos resultados finais, tal como apresenta a Tabela (7). Estes resultados foram obtidos para o ambiente de teste, cujos parâmetros foram: $T_a = 25.1^\circ\text{C}$ e $P_a = 690\text{ mmHg}$, $c = 340\text{ m/s}$, $r = 0.12\text{ m}$, $\omega = 226.1947\text{ rad/s}$. Ainda nesta tabela pode-se observar que embora os resultados da força sentida pela estrutura devido à ação da excitação seja pequena em termos absolutos, é relativamente grande quando se considera as dimensões da estrutura, assim como, sua rigidez em flexão.

Tabela 7: Resultados finais demonstrando a pressão teórica e conseqüentemente a força distribuída agindo sobre o sistema de um grau de liberdade.

Resultados Finais			
Entrada [V]	Vel. Cone [mm/s]	Pressão ^a Teórica [Pa]	Força [N/mm]
1.3	158.2	3.72	7.44E-5
1.7	205.9	4.84	9.68E-5
2.11	254.8	5.99	1.20E-4
2.55	306.6	7.21	1.44E-4

^aValor calculado a uma distância de 15 mm.

De maneira conclusiva, a fonte de excitação pode ser corretamente empregada como mecanismo de excitação em torno de 36 Hz, independente da magnitude fisicamente realizável com o aparato experimental. Em adição, o ambiente no qual realizou-se os ensaios não exerceu nenhuma influência importante durante os ensaios, no que se refere à reflexão das ondas sonoras ou à reverberação.

APÊNDICE

B

Perfil de Pressão Sobre o Sistema com 1 G.L: Determinação Experimental

Para que as predições do modelo matemático desenvolvido para o sistema como um grau de liberdade possam ser comparadas com os resultados experimentais é necessário o conhecimento do perfil de pressão incidente sobre a estrutura. Assim, este apêndice se destina à determinação experimental do perfil de pressão agindo sobre o referido sistema.

B.1 Experimento

Para atingir o objetivo proposto, foi determinado um arranjo experimental ilustrado na Figura (106). Em relação a esta figura, dois comentários são importantes: primeiro, a estrutura original foi substituída por uma idêntica, cuja única diferença é ser muito mais rígida em flexão, com isso espera-se diminuir o nível de resposta da estrutura e simplificar substancialmente o ensaio. Segundo, o microfone dinâmico empregado pode realizar medições sonoras mesmo estando perpendicular ao campo acústico.

O procedimento experimental consisti na determinação da pressão incidente sobre a estrutura em vinte e seis pontos diferentes, fixando a excitação acústica em 36 Hz e para três valores de excitação $V(t)$: 1.7 V, 2.11 V e 2.55 V.

Figura 106: Arranjo experimental para determinar o perfil da pressão incidindo sobre a estrutura de um grau de liberdade onda. O excitador eletrodinâmica permaneceu desligado durante todo o ensaio.

B.2 Resultados

A Figura (107) apresenta os resultados experimentais da distribuição de pressão acústica sobre a estrutura para três níveis de excitação. A partir destes resultados, pode-se observar que existe uma distribuição não uniforme ao longo do comprimento da viga. Esta característica se repete para os três níveis de excitação. Em adição, com o aumento da voltagem de entrada da fonte, nota-se que as intensidades de pressão também aumentam, entretanto a forma da distribuição é mantida.

Ao se comparar os itens (a), (b) e (c) da Figura (107), nota-se que a forma da distribuição de pressão ao longo do comprimento da viga é praticamente a mesma. Em adição, a intensidade aumenta coerentemente conforme a velocidade do volume promovido pela fonte acústica aumenta.

Por fim, em todos os casos a pressão máxima foi obtida sobre a massa concentrada, na extremidade da estrutura. Numericamente, estes valores foram de 5.12 Pa, 6.34 Pa e 7.65 Pa para as entradas de 1.7 V, 2.11 V e 2.55 V, respectivamente. Ao se comparar estes valores como os obtidos teoricamente e apresentados na Tabela (7), pode-se ver-

Figura 107: Distribuição de pressão obtida experimentalmente para a fonte acústica operando em 36.127 Hz e excitada por três intensidades diferentes: (a) 1.70 V; (b) 2.11 V; (c) 2.11 V e (d) pontos de medida.

ificar boa correlação entre eles, cuja variação é de apenas 5.4 %, 5.5 % and 6.1 % para entradas de 1.7 V, 2.11 V e 2.55 V, respectivamente. Estas variações estão dentro da margem de incerteza dos resultados experimentais, comumente de 6 – 10%. Assim, os resultados foram extremamente satisfatórios.

Como resultado conclusivo, para que a distribuição de pressão apresentada pela Figura (107) possa ser inserida no modelo matemático que representa o comportamento dinâmico da estrutura, é necessário a obtenção de uma expressão matemática. Assim, foi ajustado sobre os resultados uma curva linear, resultando nas seguintes expressões para a distribuição de pressão sobre a estrutura:

$$p_{170}(x) = 22.6x + 2.67 \quad (\text{B.1a})$$

$$p_{211}(x) = 27.4x + 3.37 \quad (\text{B.1b})$$

$$p_{255}(x) = 33.0x + 4.08 \quad (\text{B.1c})$$

Efeito do Campo Acústico Sobre o Sistema com 1 G.L

Neste apêndice, é demonstrado o desenvolvimento teórico empregado na avaliação aproximada dos efeitos do campo acústico sobre o sistema com um grau de liberdade. Também são apresentadas as conclusões que serviram de base para a modelagem do referido sistema.

C.1 Desenvolvimento

A avaliação dos efeitos do campo acústico sobre a estrutura pode ser realizado por intermédio do cálculo da impedância de radiação do fluído para uma condição de interesse. A impedância radiativa é uma quantidade complexa a qual relata a pressão e a velocidade. A parte real, denominada de resistência, está em fase com a velocidade e assim age como amortecimento. A parte imaginária, denominada de reatância, está 90° fora de fase com a velocidade, e age em baixas frequência e no caso incompreensível como uma massa adicional.

Para se realizar uma avaliação inicial sobre os efeitos provocados pela excitação acústica na estrutura, que culmine em um indicativo da necessidade de inclusão destes efeitos na modelagem futura, será seguido um procedimento simplificado, também adotado por Murphy, Virgin & Rizzi (1996).

Nesta análise básica, o sistema estrutural é considerado rígido e idealizado como

um pistão circular movendo-se em um fluido. Esta equivalência significa que a área do pistão é igual à área do sistema estrutural em contato com o fluido. Em termos numéricos isto equivale a um pistão com raio de $r = 2.763 \times 10^{-2}$ m. Esta equivalência simplifica fortemente a análise e ainda possibilita a obtenção das respostas necessárias.

Assumindo que a fonte acústica irá operar harmonicamente com frequência em torno de 36 Hz, este ponto de operação gera uma onda acústica com comprimento $\lambda = 9.62$ m (no ar à 25°C, então como a velocidade da luz é $c = 346.65$ m/s). Com esta informação, pode se obter o número de onda como $k = 2\pi/\lambda = 0.653$ m⁻¹.

A impedância de radiação de um pistão Z_r é definida como a razão entre a força exercida pelo pistão sobre o meio fluido e a velocidade do pistão. Quando o pistão está em tubo infinito, a impedância de radiação é expressa como (KINSLER; FREY, 1962),

$$Z_r = \frac{-f_r}{V_o e^{i\Omega t}} = \rho c \pi r^2 [R_1(2kr) + iX_1(2kr)] \quad (C.1)$$

na qual ρ é a densidade de volume e c a velocidade do som. Os termos R_1 e X_1 são denominados respectivamente como função de resistência do pistão e função de reatância do pistão. Ambas as quantidades são adimensionais e descritas como

$$R_1(\bar{\Omega}) = \frac{\bar{\Omega}^2}{2^2 \cdot 1! \cdot 2!} - \frac{\bar{\Omega}^4}{2^4 \cdot 2! \cdot 3!} + \dots \quad (C.2)$$

$$X_1(\bar{\Omega}) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{\Omega}}{3} - \frac{\bar{\Omega}^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{\bar{\Omega}^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \dots \right) \quad (C.3)$$

na qual $\bar{\Omega} = 2kr$ é denominada frequência reduzida e k é o número de onda.

Para o caso sob consideração, a frequência reduzida é $2kr = 3.609 \times 10^{-2}$. Nesta região de baixa frequência reduzida, as funções de resistência e reatância podem ser aproximadamente descritas pelo primeiro termo da série correspondente. Isto significa que a resistência é uma função quadrática da frequência reduzida, enquanto que a reatância é linear.

Usando a reatância de baixa frequência, pode ser encontrado uma massa equivalente m_r para o fluido. Na forma dimensional, a reatância de radiação pode ser agora escrita como $X_r = \rho c \pi r^2 X_1$. Neste caso, a reatância de radiação é sempre positiva, então seu efeito é equivalente a adicionar à massa do sistema uma massa adicional m_r . Também, a reatância mecânica de baixa frequência é definida $m_r \Omega$, como Ω em rad/s. Combinando as reatâncias de radiação e mecânica juntamente com $\Omega = ck$ leva a

$$m_r = \frac{\rho c \pi r^2 \frac{8kr}{3\pi}}{\Omega} = \frac{8}{3} \rho r^3 \quad (\text{C.4})$$

Antes de se computar os valores numéricos para m_r , é adotado as seguintes constantes para ar: $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ e $c = 343 \text{ m/s}$. Assim, a partir da Equação (C.4) a massa equivalente do fluido é $m_r = 0.06806 \text{ g}$, enquanto que a massa da estrutura é $m = 63.6 \text{ g}$. A massa efetiva do fluido é quase três ordens de grandeza menor que a massa da estrutura, e portanto pode ser negligenciada sem afetar de maneira significativa as propriedades modais da estrutura.

O amortecimento equivalente devido ao fluido pode ser computado usando a resistência dimensional $R_r = \rho c \pi r^2 R_1$. A resistência mecânica equivalente é o coeficiente de amortecimento viscoso c_1 . Equacionando a resistência do fluido (assumindo apenas o primeiro termo da série) com a resistência mecânica resulta no amortecimento equivalente devido ao fluido c_r ,

$$c_r = \rho c \pi r^2 \left[\frac{1}{8} (2kr)^2 \right] \quad (\text{C.5})$$

Utilizando as constantes para o ar definidas anteriormente, o amortecimento equivalente é $c_r = 1.620 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$ ou em termos de amortecimento modal, $\zeta = c_r / 2m\omega_n = 1.126169 \times 10^{-6}\%$. Este resultado quando comparado com o amortecimento modal obtido experimentalmente para esta estrutura é cinco ordens de magnitude menor que o amortecimento estrutural. Portanto, o amortecimento devido a excitação acústica pode também se negligenciado quando a fonte acústica operar em 36 Hz e para as constantes do ar $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ e $c = 343 \text{ m/s}$.

C.2 Conclusões

Os resultados finais sugerem que o acoplamento entre o sistema estrutural e o campo acústico (ar) tem efeitos mínimos sobre as características puramente estruturais. A pequena área superficial da estrutura e a baixa densidade do meio fluido quando comparado ao da estrutura foram os fatores determinantes. Portanto esta estrutura pode ser considerada acusticamente desacoplada, para a condição analisada. Em adição, fonte de excitação acústica age puramente como uma fonte de excitação, que é uma excelente característica.

Deve ficar claro que as conclusões aqui obtidos não podem ser utilizados em outras estruturas, uma vez que a área superficial, viscosidade do meio e frequência da excitação

acústica tem grande influência nos resultados. Cada estrutura e condição de operação deve ser investigada independentemente.

APÊNDICE

D

Implementação do Método das Múltiplas Escalas em Matemática Simbólica

Soluções analíticas via algum método de perturbação geralmente necessitam de grande esforço algébrico, especialmente quando o modelo possui muitos termos e/ou vários graus de liberdade. Este esforço algébrico pode ser reduzido consideravelmente com o auxílio de software de manipulação simbólica. Nesta direção, este apêndice se destina a apresentar uma rotina escrita em matemática simbólica e desenvolvida durante a presente pesquisa para a solução de problemas fracamente não-lineares. Esta rotina possui código aberto, com isso espera-se auxiliar o desenvolvimento no Brasil de futuras pesquisas na área de dinâmica não-linear.

D.1 Algoritmo Básico: Sistemas com Um Grau de Liberdade

Baseado em Sanchez (1996), o algoritmo a seguir descreve os principais passos no desenvolvimento da rotina simbólica para a aplicação do método das múltiplas escalas. Este algoritmo está restrito a problemas que envolvem um grau de liberdade e sejam fracamente não-lineares. Por outro lado, pode tratar de problemas com excitação externa (monocomponentes), excitação paramétrica (monocomponentes), problemas

auto-excitados e problemas livres. Este algoritmo pode ser modificado no futuro para tratar uma variedades de outros casos, incluindo sistemas com múltiplos graus de liberdade, excitações combinadas e excitações externas e/ou paramétricas com periódicas e multicomponentes.

Algoritmo 1: Método das Múltiplas Escalas: Sistemas 1GL

Entrada: Uma ODE do tipo: $\ddot{q} + \omega^2 q = \varepsilon^L (\mathcal{A} - \mathcal{B} - \mathcal{C} - \mathcal{D})$

Resultado: Equações de Modulação

início

Passo 1: A forma desejada do método é definido pela especificação: (i) J , o qual define a ordem da solução requerida $O(\varepsilon^J)$ e; (ii) forma polar ou cartesiana das equações de modulação ou da solução;

Passo 2: se $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{D} \neq 0$ então $\omega \leftarrow$ ressonância senão $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D} = 0$ e $\omega \leftarrow \omega_n$;

Passo 3: Os operadores derivada são substituídos para incluir as escalas T_J via $d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$. A variável principal é perturbada utilizando $q(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{J-1} \varepsilon^j q_j(T_0, T_1, \dots, T_J) + O(\varepsilon T_J)$;

Passo 4: A expressão é expandida mantendo somente os termos até ordem J e senoides são expressos na forma exponencial complexa.

Passo 5: Os termos na ODE são separados segundo potências de ε gerando $J + 1$ equações;

Passo 6: A equação de ordem $O(\varepsilon^0)$ é resolvida assumindo $q_0(T_0, T_1, \dots, T_J)$ em termos de uma amplitude complexa, isto é, $A(T_1, \dots, T_J)$ e seu complexo conjugado;

Passo 7: para $r=1$ até $r=J-1$ faça

(a) As soluções $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$ são substituídos na equação de ordem $O(\varepsilon^r)$. Termos seculares e não-seculares são separados. Os seculares são igualados a zero e armazenados na equação S_r ;

(b) Incluindo somente os termos não-seculares, uma solução é obtida na ordem $O(\varepsilon^r)$;

Passo 8: A solução do problema pode se escrita como $q = q_0 + \varepsilon q_1 + \dots + \varepsilon^{J-1} q_{J-1}$. Os parâmetros complexos A e $\bar{A}$ podem ser expressos na forma polar ou cartesiana. Estes parâmetros serão determinados a partir das equação de modulação.

Passo 9: para $p=1$ até $p=J$ faça

Resolva equação S_p para determinar $D_p A(T_1, \dots, T_J)$ utilizando $D_k A, k = 1, \dots, p-1$, encontrado nas interações anteriores e suas derivadas parciais $D_j D_k A$;

Passo 10: O método da reconstituição Nayfeh (1981) é empregado para definir as equações de modulação. O método assume $\frac{dA}{dt} = \varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A + \dots$, utilizando $D_i A(T_1, \dots, T_n)$ previamente definido.

Passo 11: A amplitude complexa $A(T_1, \dots, T_J)$ pode ser escrita na forma polar, $A = ae^{(i\beta)}$ ou cartesiana $A = \frac{1}{2}(p - iq)$;

Passo 12: As equações reconstituídas são separadas segundo as partes real e imaginária, gerando as equações de modulação.

fim

D.2 Implementação Computacional

O algoritmo descrito na seção anterior foi implementado em MapleTMV8.0. Entretanto algumas restrições foram impostas neste algoritmo. A primeira no que diz respeito a ordem da expansão e assim o programa resultante faz expansões de primeira ordem, ou seja, para $J = 1$. Vale ressaltar que na maioria dos problemas expansões desta ordem são suficientes. A segunda restrição diz respeito a forma (polar ou cartesiana) da solução, assim o programa assume sempre a forma polar.

O programa foi concebido de forma modular, composto por três módulos principais: (i) pré-processador; (ii) rotina principal e; (iii) pós-processador. A Figura (108) apresenta um diagrama esquemático da configuração final do programa.

Figura 108: Diagrama esquemático da estrutura do código simbólico desenvolvido para a implementação computacional do método das múltiplas escalas para problemas com um grau de liberdade.

No primeiro módulo o usuário descreve o problema a ser resolvido, segundo uma sintaxe definida. Para problemas excitados externamente ou parametricamente, o usuário também deverá descrever neste módulo a condição de ressonância de interesse. No caso de problemas livres, ocorre apenas uma mudança de variável.

O segundo módulo é composto por uma rotina principal e sete sub-rotinas. Na rotina principal são executados os principais passos do procedimento e as subrotinas executam tarefas secundárias. As rotinas que compõe este módulo são:

Rotina Principal *mme1GL*: É o cerne do programa. O Apêndice (E.1) descreve integralmente esta rotina.

Sub-Rotina *sort-var*: Desenvolvida para ordenar um resultado para ser resolvido.

Ordena um conjunto que contenha $\{resp1 = expr1, resp2 = expr2, \dots\}$ na forma

de uma lista $[resp1, resp2, \dots]$ contendo os membros do conjunto ordenados. O Apêndice (E.2) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *ggrau*: É uma rotina generalizada desenvolvida para extrair o grau de uma função. Por exemplo, $ggrau(a^5 + b^3, a) = 5$ isto significa que o grau da variável a na função $a^5 + b^3$ é 5. O Apêndice (E.3) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *trig-sim*: Desenvolvida para realizar simplificações trigonométricas auxiliares. O Apêndice (E.4) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *conjugado*: Rotina simples para a obtenção do complexo conjugado de uma expressão. O Apêndice (E.5) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *forma-polar*: Desenvolvida para descrever a variável complexa A na forma complexa e obter a solução em termos de $a(t)$ e $\beta(t)$. O Apêndice (E.6) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *Dt-operador*: Rotina que desenvolve o operador para derivadas em termos das escalas T_J . O Apêndice (E.7) descreve integralmente esta sub-rotina.

Sub-Rotina *perturba*: Descreve expansão perturbada. O Apêndice (E.8) descreve integralmente esta sub-rotina.

Embora o programa desenvolvido esteja restrito a sistemas com um grau de liberdade e para expansões de primeira ordem, sempre que possível as rotinas e sub-rotinas foram escritas da maneira mais geral possível. Por exemplo as sub-rotinas *Dt-operador* e *perturba* podem ser empregada para expansão de qualquer ordem. O objetivo é motivar o desenvolvimento e aprimoramento deste programa. O Apêndice (D) traz a sintaxe completa do programa, juntamente com um exemplo completo.

D.3 Validação da Rotina

Uma vez que qualquer programa está operacional é imprescindível que este seja validado antes de ser utilizado. O programa *mme1GL* foi submetido a este processo de validação. Para isso, foram empregados vários problemas cuja solução é conhecida. Todos os problemas foram obtidos a partir de Nayfeh (1985), que por sua vez é uma das bibliografias mais consagradas neste assunto. Assim a resposta obtida pelo programa *mme1GL* foi confrontada com a resposta previamente conhecida e desta maneira foi possível se avaliar se o programa produz respostas corretas.

Foram testados vários problemas que recaem na classe de aplicação do programa *mme1GL*. A Tabela (8) apresenta os problemas abordados, onde foram obtidos o resultado do teste.

Tabela 8: Problemas avaliados com o programa *mme1GL*.

Avaliação		
Problema	Fonte	Resultado ^a
$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$	(NAYFEH, 1985, p.110)	✓
$\ddot{u} + u + \varepsilon\dot{u}^5 = 0$	(NAYFEH, 1985, p.119)	✓
$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u}$	(NAYFEH, 1985, p.122)	✓
$\ddot{u} + u - \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} + \varepsilon u^3 = 0$	(NAYFEH, 1985, p.135)	✓
$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3) + \varepsilon k \cos \Omega t$	(NAYFEH, 1985, p.164)	✓
$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^2 \cos \Omega t$	(NAYFEH, 1985, p.245)	✓

^a✓ = convergiu; ⊗ = não convergiu

Nesta tabela pode-se observar que o programa *mme1GL* convergiu para os mesmos resultados descritos na literatura e assim foi validado para os seguintes casos:

- Problemas livres com um grau de liberdade.
- Problemas auto-excitados com um grau de liberdade.
- Problemas com um grau de liberdade excitado externamente com excitação harmônica monocomponente.
- Problemas com um grau de liberdade excitado parametricamente com excitação harmônica monocomponente.

De maneira conclusiva, o programa desenvolvido apresenta um passo inicial em direção a solução de problemas mais complexos. Embora sua concepção inicial resolva apenas problemas com um grau de liberdade e faça expansão de primeira ordem, uma grande classe de problemas podem ser rapidamente resolvidos. Em adição possui código fonte aberto e portanto possibilita que outros usuários criem no futuro versões aprimoradas. Por fim, seu emprego facilita muito o processo de documentação pois possibilita que as soluções sejam exportadas diretamente para LaTeX.

D.4 Sintaxe

Para tornar-se operacional foi estabelecido uma sintaxe para o módulo de pré-processamento. Esta sintaxe deve ser rigorosamente seguida para a correta execução do programa. A sintaxe é:

- Entre com a equação de movimento como: $EQN_o = 0$;
- Use o operador Dt() para representar as derivadas temporais;
- O tradicional parâmetro ε deve ser representado como w;

- Use K^2 para representar a frequência natural não-amortecida. Nos casos de vibração livre também use K^2 para representar a frequência natural, mesmo quando $K^2 = 1$;
- Para o caso de ressonância paramétrica principal, a introdução no problema desta condição de ressonância pode ser feita como: $EQN_o := \text{subs}(K^2 = (1/2 * OMG)^2 - w * SIG, EQN_o)$;
- Para o caso de ressonância paramétrica fundamental, a introdução no problema desta condição de ressonância pode ser feita como: $EQN_o := \text{subs}(K^2 = 1 * OMG^2 - w * SIG, EQN_o)$;
- Para o caso de ressonância externa primária, a introdução no problema desta condição de ressonância pode ser feita como: $EQN_o := \text{subs}(K^2 = 1 * OMG^2 - w * SIG, EQN_o)$;
- Para o caso de vibração livre ou auto-excitada use: $EQN_o := \text{subs}(K^2 = 1 * OMG^2, EQN_o)$;

D.5 Um Exemplo Completo

Para exemplificar o uso do programa *mme1GL* e assim facilitar que o programa possa ser utilizado por outros usuário, esta seção apresenta um exemplo completo. Em especial, será investigado uma ressonância externa fundamental para o seguinte problema (NAYFEH, 1985, p.164),

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + \varepsilon k \cos \Omega t \quad (\text{D.1})$$

o qual apresenta uma ressonância externa fundamental quando $\Omega \approx \omega_0$.

1. Módulo Pré-Processamento:

(a) Equação de Movimento:

```
> EQN_o:=(Dt)((Dt)(u))+K^2*u-w*(Dt)(u)+1/3*w*((Dt)(u))^3-w*k*cos(OMG*t)=0;
```

(b) Condição de Ressonância:

```
> EQN_o:=subs(K^2=1*OMG^2-w*SIG,EQN_o);
```

2. Roda Programa *mme1GL*:

```
> orden:=1
```

```
> Dt_operador(Dt,orden,w);
```

```
> u:=perturba(x,w,orden);
```


> mme1GL(EQN_o,orden,w,polar);

3.Módulo Pós-Processamento:

----- | ORDEM DA EXPANSAO = 1

$$u := x0(T0, T1) + w x1(T0, T1)$$

$$\begin{aligned} EQN_o := & \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} x1(T0, T1) \right) \\ & + w \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} x1(T0, T1) \right) \right) + w \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} x0(T0, T1) \right) \right. \\ & + w \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} x1(T0, T1) \right) + w \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} x1(T0, T1) \right) \right) \\ & + K^2 (x0(T0, T1) + w x1(T0, T1)) - w \left(\left(\frac{\partial}{\partial T0} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial}{\partial T0} x1(T0, T1) \right) \right) \\ & + w \left(\left(\frac{\partial}{\partial T1} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial}{\partial T1} x1(T0, T1) \right) \right) + \frac{1}{3} w \left(\left(\frac{\partial}{\partial T0} x0(T0, T1) \right) \right. \\ & + w \left(\frac{\partial}{\partial T0} x1(T0, T1) \right) + w \left(\left(\frac{\partial}{\partial T1} x0(T0, T1) \right) + w \left(\frac{\partial}{\partial T1} x1(T0, T1) \right) \right) \Big)^3 \\ & - w k \cos(OMG t) = 0 \end{aligned}$$

----- | SEPARACAO DAS EQUACOES POR ORDEM | -----

----- ORDEM 0 -----

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} x0(T0, T1) \right) + OMG^2 x0(T0, T1) = 0$$

----- ORDEM 1 -----

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{k}{e^{(OMG T0 I)}} - \frac{1}{2} k e^{(OMG T0 I)} - SIG x0(T0, T1) + \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} x1(T0, T1) \right) + OMG^2 x1(T0, T1) \\ - \left(\frac{\partial}{\partial T0} x0(T0, T1) \right) + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} x0(T0, T1) \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial T0} x0(T0, T1) \right)^3 = 0 \end{aligned}$$

----- | SOLUCAO DE ORDEM 0 | -----

$$A(T1) e^{(OMG T0 I)} + B(T1) e^{(-I OMG T0)}$$

----- | SUBSTITUICAO DA SOLUCAO DE ORDEM 0 NA EQ. ORDEM 1 | -----

$$\begin{aligned} (-SIG A(T1) - A(T1) OMG I + OMG^3 A(T1)^2 B(T1) I + 2 I \left(\frac{d}{dT1} A(T1) \right) OMG - \frac{k}{2}) \\ e^{(OMG T0 I)} + (\\ -SIG B(T1) - 2 I \left(\frac{d}{dT1} B(T1) \right) OMG + B(T1) OMG I - OMG^3 A(T1) B(T1)^2 I - \frac{k}{2}) \\ e^{(-I OMG T0)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} x1(T0, T1) \right) + OMG^2 x1(T0, T1) \\ - \frac{1}{3} I OMG^3 A(T1)^3 e^{(3 I OMG T0)} + \frac{1}{3} I OMG^3 B(T1)^3 e^{(-3 I OMG T0)} = 0 \end{aligned}$$

----- | TERMOS SECULARES DE ORDEM 1 | -----

$$SIG A(T1) + A(T1) OMG I - OMG^3 A(T1)^2 B(T1) I - 2 I (\frac{d}{dT1} A(T1)) OMG + \frac{k}{2} = 0$$

----- | EQUACAO RECONSTITUIDA | -----

$$(\frac{d}{dt} AA(t)) I - \frac{1}{2} \frac{w SIG A(T1)}{OMG} - \frac{1}{2} I w A(T1) + \frac{1}{2} I w OMG^2 A(T1)^2 B(T1) - \frac{w k}{4 OMG} - w^2 (\frac{d^2}{dT1^2} A(T1)) I = 0$$

----- | FUNCAO COMPLEXA - A - ASSUMIDA NA FORMA POLAR | -----

$$A(T1) =, \frac{1}{2} a(t) e^{(\beta(t) I)}$$

----- | EQUACOES DE MODULACAO | -----

$$\frac{d}{dT1} a(T1) = (-\frac{1}{8} OMG^2 a(T1)^3 + \frac{1}{2} a(T1) - \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta(T1)) k}{OMG}) w$$

$$a(T1) (\frac{d}{dT1} \beta(T1)) = (-\frac{1}{2} \frac{SIG a(T1)}{OMG} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\beta(T1)) k}{OMG}) w$$

 APÊNDICE

 E

Método das Múltiplas Escalas: Rotinas Computacionais

E.1 Rotina Principal: *mme1GL*

```

> mme1GL:=proc(EQUAT,orden,w,Form)
> EQN:=map(convert,subs(t=T0,EQUAT),exp); EQN:= expand(EQN); EQN :=
> expand( EQN ); EQN := collect(EQN,w); high:=ggrau( op(1,EQN) ,w);
> print('A ORDEM DE APROXIMAÇÃO SERÁ:',orden); for i from (orden+1)
> to high do
> EQN:=subs(w^i=0,EQN);
> end do; ORD||0:= subs(w=0,EQN); for k to orden do
> ORD||k := coeff( op(1,EQN),w,k)=0 ;
> end do; print('----| SEPARAÇÃO DAS EQUAÇÕES POR ORDEM |----');
> for i from 0 to orden do
> print('-----ORDEM '||i||'-----');print(ORD||i);
> end do; ORD||0:=collect(ORD||0,x0(T0,T1)); cuanto :=nops(ORD||0);
> L:=1;
> while L <= cuanto do
> term:=op(L,op(1,ORD||0));

```

```

> auxx:=ggrau(term,OMG);
> if auxx <> 0 then
> cw:=sqrt(coeff(coeff(term,x0(T0,T1)),OMG^2));
> cw:=convert(expand(cw),rational);
> L:=L+1;
> else
> L:=L+1;
> end if;
> end do;
> expand( expandoff() );# para ativar a funcao expandoff(exp);#
> para suprimir a expansao de exp solx0:= A(T1)*exp(I*cw*OMG*T0)
> + B(T1)*exp(-I*cw*OMG*T0);
> print('----| SOLUÇÃO DE ORDEM 0 |----'); print(solx0);
> #x0:=(T0,T1)-> A(T1)*exp(I*c_w*OMG*T0)
> + B(T1)*exp(-I*c_w*OMG*T0) ;
> :=subs(x0(T0,T1)=A(T1)*exp(I*cw*OMG*T0)
> + B(T1)*exp(-I*cw*OMG*T0),ORD||1);
> ORD||1 :=simplify(ORD||1); ORD||1 :=expand(ORD||1); ORD||1
> :=map(combine,ORD||1,exp); ORD||1 :=map(convert,ORD||1,exp);
> ORD||1 :=collect(ORD||1,[exp(I*cw*OMG*T0),exp(-I*cw*OMG*T0)] );
> print('----| SUBSTITUIÇÃO DA SOLUÇÃO DE ORDEM 0 NA EQ. ORDEM 1
> |----'); print(ORD||1); SEC1 :=
> coeff(op(1,ORD||1),exp(I*cw*OMG*T0)) = 0 : SEC1 :=
> -1*expand(SEC1); print('----| TERMOS SECULARES DE ORDEM 1
> |----'); print(SEC1);
> D1A:=solve(SEC1,diff(A(T1),T1)); D1A:=expand(D1A);
> D1B:=subs(I=-I,A(T1)=C(T1),D1A); D1B:=subs(B(T1)=A(T1),D1B);
> D1B:=subs(C(T1)=B(T1),D1B); D1B:=expand(D1B);
> D2A:=subs(diff(A(T1),T1)=D1A ,SEC1);

```

```

> D2A:=subs(diff(B(T1),T1)=D1B,D2A); D2A:=expand(D2A);
> D2A:=subs(diff(A(T1),T1,T1)=diff(D1A,T1),D2A);
> D2A:=subs(diff(A(T1),T1)=D1A,D2A);
> D2A:=subs(diff(B(T1),T1)=D1B,D2A);
> D2A:=solve(D2A,diff(A(T1),T1,T1)); D2A:=expand(D2A);
> RECONS:=I*diff(AA(t),t)=expand(I*(w*D1A+w^2*D2A));
> RECONS:=expand(lhs(RECONS)-rhs(RECONS))=0;
> RECONS:=collect(RECONS,exp(I*cw*OMG*T0)); print('----| EQUAÇÃO
> RECONSTITUIDA |----'); print(RECONS);
> if Form='polar' then
> eqnset:= forma_polar(RECONS);
> else
> ERROR ('Forma de solução deve ser polar')
> end if; sols:=subs(t=T1, {eqnset[1],eqnset[2] } );
> print('----| EQUAÇÕES DE MODULAÇÃO |----'); print(sols[1]);
> print(sols[2]);
> u:=sum('w^j * x||j ('T||q'$q=0..orden)',j=0..orden-1);
> u:=map(convert,u,trig); u:=subs(I=0,T0=t,u): u:=simplify(u,trig);
> u:=trig_sim(u); u:=combine(u,trig); if Form='polar' then
> u:=collect(u,[w,a(t)]):
> else
> u:=collect(u,[w,p(t),q(t)]):
> end if; print('----| SOLUÇÃO ENCONTADA |----'); print('u=',u);
> latex(u,'latex1.out'); u,sols[1],sols[2]; end proc:

```

E.2 Sub-Rotina: *sort-var*

```

> sort_var:=proc(s_set,r_lis) if not
> type(s_set,set) then ERROR('Primeiro argumento deve ser um
> conjunto') end if; if not type(r_lis,list) then ERROR('Segundo
> argumento deve ser uma lista') end if; s_lis:=convert(s_set,list);

```

```

> n_o_p:=nops(s_set); i:='i';j:='j';k:='k'; for i to n_o_p do
> k:=i;
> for j from k to n_o_p do
> if op(1,s_lis[j])=r_lis[i] then
> if i<>j then
> s_move:=s_lis[i];
> s_lis:=subsop(i=s_lis[j],s_lis);
> s_lis:=subsop(j=s_move,s_lis);
> break;
> end if;
> end if;
> end do;
> end do; s_lis;
> end proc:

```

E.3 Sub-Rotina: *ggrau*

```

> ggrau := proc(p) local t,v;
> v := args[2..nargs];
> if type(p,constant) then 0
> elif type(p,name) then
> if nargs=1 then 1 elif type(v,{set,list}) then if member(p,v)
> then 1 else 0 end if else if p=v then 1 else 0 end if end if
> elif type(p,'*') then convert([seq(ggrau(t,v), t=p)], '+')
> elif type(p,'^') then ggrau(op(1,p),v)*op(2,p)
> elif type(p,'+') then max(seq(ggrau(t,v),t=p))
> elif nargs=1 or has(p,v) then ERROR('impossibilitado de calcular o
grau')
> else 0
> end if;
> end proc:

```

E.4 Sub-Rotina: *trig-sim*

```

> trig_sim:=proc(q) q_n:=q; if not
> type(q,algebraic) then ERROR('argumento precisa ser uma formula')
> end if;
> if type(q,numeric) then RETURN(q) elif type(q,'+') then
> map(trig_sim,q) elif type(q,'*') then
> u:=op(1,q);v:=q/u;trig_sim(u)*trig_sim(v); elif
> type(q,anything^constant) then
> u:=op(1,q);v:=op(2,q); (trig_sim(u))^v;
> elif type(q,trig) then
> q_n:=subs(beta(t)=a,OMG=b,q);
> q_n:=combine(simplify(q_n,trig),trig);
> q_n:=subs(a=beta(t),b=OMG,combine(q_n,trig));
> else
> q_n;
> end if;
> end proc:

```

E.5 Sub-Rotina: *conjugado*

```

> conjugado:=proc(whatever)
> subs(I=-I,B(T1)=C(T1),A(T1)=B(T1),C(T1)=B(T1),whatever); sort(%);
> end proc:

```

E.6 Sub-Rotina: *forma-polar*

```

> forma_polar:=proc(RECONS_) local
> RECONS,eqn1,eqn2,Real,Imag,eqns,vars; global sols;
> A(T1):=1/2*a(t)*exp(I*beta(t)); B(T1):=1/2*a(t)*exp(-I*beta(t));
> AA(t):=1/2*a(t)*exp(I*beta(t)); print('----| FUNÇÃO COMPLEXA -A-
> ASSUMIDA NA FORMA POLAR |----'); print('A(T1)=',A(T1));
> RECONS:=expand(RECONS_); RECONS:=combine(RECONS,exp);
> RECONS:=map(convert,RECONS,exp); RECONS:=normal(RECONS); RECONS;

```

```

> RECONS:=expand(%); RECONS:=map(convert,RECONS,D);
> RECONS:=map(convert,RECONS,trig); RECONS:=expand(RECONS);
> RECONS:=map(convert,RECONS,diff,t); RECONS:=collect(RECONS,a(t));
> Imag:=normal(-I*RECONS); Imag:=eval(expand(Imag));
> Imag:=subs(I=0,Imag); Real:=subs(I=0,RECONS);
> Real:=combine(Real,trig); eqn1:=Real*cos( beta(t) ) + Imag*sin(
> beta(t) ); eqn2:=Real*sin( beta(t) ) - Imag*cos( beta(t) );
> eqn1:=expand(eqn1); eqn2:=expand(eqn2);
> eqn1:=collect(combine(eqn1,trig),[diff(a(t),t),diff(beta(t),t)]);
> eqn2:=collect(combine(eqn2,trig),[diff(a(t),t),diff(beta(t),t)]);
> eqns:={eqn1,eqn2}; vars:={diff(a(t),t),a(t)*diff(beta(t),t)};
> sols:=solve(eqns,vars); sols:=expand(sols);
> sols:=combine(sols,trig); sols:=collect(sols,a(t));
> sols:=collect(sols,w); sols[1],sols[2];
> end proc:

```

E.7 Sub-Rotina: *Dt-operador*

```

> Dt_operador:=proc(Dt,orden,w)# any name
> can be given to the operator local i;
> Dt:=funco->sum(w^i*'diff'(funco,'T||i'),i=0..orden);
> end proc:

```

E.8 Sub-Rotina: *perturba*

```

> perturba:=proc(x,w,orden) local j,i; sum(
> w^j * 'x||j(('T||i'$ i=0..orden))',j=0..orden);
> end proc:

```

 APÊNDICE

 F

Ressonâncias Autoparamétricas: Rotina Computacional

Este apêndice apresenta a rotina desenvolvida, durante a presente pesquisa, para a identificação de condições propícias ao surgimento de ressonâncias autoparamétricas, assim como, na caracterização destas condições de ressonância.

F.1 Sintaxe

Para a identificação e caracterização de ressonâncias autoparamétricas, foi implementado em MapleTMV8.0. uma rotina denominada AutoRes. Esta rotina utiliza a seguinte sintaxe:

AutoRes(wn,k,n,tol): wn representa vetor das frequências naturais; k valor máximo dos coeficientes; n é o número de modos envolvidos e tol a tolerância (proximidade de zero).

Esta rotina permite ao usuário avaliar a ocorrência de ressonâncias envolvendo três modos e qualquer extensão dos coeficientes k_i . Embora originalmente não tenha a capacidade de avaliar a ocorrência de ressonância envolvendo mais de três modos, sua arquitetura permite que – em futuros trabalhos – o número de modos seja expandido. A próxima seção apresenta o código fonte da rotina AutoRes.

F.2 Rotina: *AutoRes*

```
> ri:=proc(wa,wb,order_ri,nmodes,er)
```

```

> vkplus=[seq(i,i=1..order_ri)]; vkminus=[seq(-i,i=1..order_ri)];
> for i from 1 to order_ri do vkplus=[op(vkplus),vkminus[i]]; end
> do; vk:=vkplus; w:=wa; for i from 1 to nops(wb) do w:=
> [op(w),wb[i]]; end do; perw:=permute(w,nmodes);
> pervk:=permute(vk,nmodes);
> if (nmodes=2) then for i from 1 to nops(perw) do auxw:=perw[i];
> auxw1:=auxw[1]; auxw2:=auxw[2]; for j from 1 to nops(pervk) do
> auxk:=pervk[j];
> auxk1:=auxk[1];
> auxk2:=auxk[2];
> if
> (abs(auxk1*auxw1+auxk2*auxw2)<=abs(auxk1*auxw1*0.01*er)+abs(auxk2*auxw
> 2*0.01*er)) then printf("R.I na ordem de %d : %d entre Wa=%g e
> Wb=%g\n",auxk1,auxk2,auxw1,auxw2);
> end if;
> end do;
> end do;
> elif (nmodes=3) then for i from 1 to nops(perw) do
> auxw:=perw[i];
> auxw1:=auxw[1];
> auxw2:=auxw[2];
> auxw3:=auxw[3];
> for j from 1 to nops(pervk) do
> auxk:=pervk[j];
> auxk1:=auxk[1];
> auxk2:=auxk[2];
> auxk3:=auxk[3];
> if (auxk1*auxw1+auxk2*auxw2+auxk3*auxw3=0) then
> printf("R.I na ordem de %d : %d :%d entre Wa=%g, Wb=%g e

```

```
> Wc=%g\n",auxk1,auxk2,auxk3,auxw1,auxw2,auxw3);  
> end if;  
> end do;  
> end do;  
> elif (nmodes=4) then end if  
> end proc:
```


APÊNDICE

G

FRFs Experimentais e Sintetizadas: Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade

Figura 109: FRFs experimentais e sintetizadas do sistema com múltiplos graus de liberdade. Quatro primeiras.

Figura 110: FRFs experimentais e sintetizadas do sistema com múltiplos graus de liberdade. Seis últimas.

APÊNDICE

H

*Modos Normais: Sistema com
Múltiplos Graus de Liberdade*

Figura 111: Primeiro modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 112: Segundo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 113: Terceiro modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 114: Quarto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 115: Quinto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 116: Sexto modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

Figura 117: Sétimo modo de vibrar do sistema com múltiplos graus de liberdade. Resultado comparativo teórico/experimental.

APÊNDICE

I

Circuito Eletrônico Empregado no Ensaio do Fio de Fumaça

Figura 118: Diagrama do circuito eletrônico empregado durante o ensaio do fio de fumaça.

Vibração Ressonante Externa: Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

Este apêndice apresenta o desenvolvimento matemático completo da obtenção da resposta vibratória linear de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

J.1 Desenvolvimento Analítico

Seguindo Nayfeh & Pai (2004), para a obtenção da vibração ressonante forçada linear, é considerado o seguinte modelo matemático linear com n graus de liberdade:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f\} \quad (\text{J.1})$$

na qual $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ representa o vetor de coordenadas físicas. Em adição, é assumido que $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes reais e simétricas e que $[M]$ é positiva definida. Fazendo $\{x\} = \{\phi\} e^{i\omega t}$ e considerando $[C] = [0]$ e $\{f\} = [0]$, obtém-se um autop problema generalizado e cuja solução fornece os autovalores ω_j e autovetores $\{\phi\}_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Normalizando a matriz modal $[\Psi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n]$ tal que $[\Psi]^T [M] [\Psi] = [I]$ o que também resulta em $[\Psi]^T [K] [\Psi] = \text{diag}[\omega_j]$. Substituindo estas relações matriciais na Eq (J.1), o modelo original torna-se desacoplado e pode ser reescrito segundo coordenadas modais q_j como,

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \bar{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{J.2})$$

na qual

$$\xi_j \equiv \frac{\alpha + \beta\omega_j}{2\omega_j}, \quad \bar{f}_j = \{\phi\}_j^T \{f\} \quad (\text{J.3})$$

Nesta equação, ξ_j representa o fator de amortecimento modal do j -ésimo modo e α e β são constantes reais decorrentes da consideração que $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$, ou seja, proporcional as matrizes de massa e rigidez.

As condições iniciais do problema original descrito pela Eq (J.1), originalmente representado por $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$ são expressos segundo coordenadas modais como,

$$\{q(0)\} = [\Psi]^T [M] \{x(0)\}, \quad \{\dot{q}(0)\} = [\Psi]^T [M] \{\dot{x}(0)\} \quad (\text{J.4})$$

Em adição, se $\{f\}$ possuir a forma $\{f\} = \{F\} \sin(\Omega t)$, então

$$\bar{f}_j = p_j \sin(\Omega t), \quad p_j \equiv \{\phi\}_j^T \{F\} \quad (\text{J.5})$$

na qual p_j é o fator de participação do j -ésimo modo no movimento do sistema.

A solução da Eq (J.2) é amplamente conhecida e descrita como,

$$q_j = A_j \sin(\Omega t - \varphi_j) + B_j e^{-\xi_j\omega_j t} \sin\left(\sqrt{1 - \xi_j^2}\omega_j t - \theta_j\right) \quad (\text{J.6})$$

na qual

$$A_j = \frac{\{\phi\}_j^T \{F\}}{\sqrt{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_j^2\Omega^2\omega_j^2}}, \quad \varphi_j = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi_j\omega_j\Omega}{\omega_j^2 - \Omega^2}\right) \quad (\text{J.7})$$

$$\begin{aligned} B_j &= \sqrt{C_{j1}^2 + C_{j2}^2}, \quad \theta_j = \tan^{-1}\left(\frac{C_{j1}}{C_{j2}}\right) \\ C_{j2} &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_j^2}\omega_j} (\dot{q}_j(0) + \xi_j\omega_j q_j(0) + \xi_j\omega_j A_j \sin \varphi_j - A_j\Omega \cos \varphi_j) \\ C_{j1} &\equiv -q_j(0) - A_j \sin \varphi_j \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

Assim, a solução segundo coordenadas físicas $\{x\}$ é fornecida por,

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi\}_i A_i \sin(\Omega t - \varphi_i) + \sum_{i=1}^n \{\phi\}_i B_i e^{-\xi_i \omega_i t} \sin\left(\sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i t - \theta_i\right) \quad (\text{J.9})$$

A partir da Eq (J.7) e (J.8) é evidente que todos os modos com $p_j \equiv \{\phi\}_j^T \{F\} \neq 0$ contribuem para a resposta do sistema e a máxima contribuição do j -ésimo modo ocorre quando a frequência de excitação Ω é igual a frequência natural amortecida $\sqrt{1 - \xi_j^2} \omega_j$. Neste caso, a resposta do sistema é praticamente composta pelo j -ésimo modo, entretanto todos os outros modos com $p_j \equiv \{\phi\}_j^T \{F\} \neq 0$ contribuem - ainda que timidamente - para a resposta do sistema.

Para que somente o j -ésimo modo seja excitado $\{\phi\}_i^T \{F\}$ deve ser zero para todo $i \neq j$. Especialmente, esta condição ocorre quando o vetor da excitação externa $\{f\}$ é proporcional ao j -ésimo autovetor $\{\phi\}_j$, ou seja:

$$\{f\} = (a[M] + b[K]) \{\phi\}_j \sin(\Omega t) \quad (\text{J.10})$$

na qual a e b são constantes reais. Então,

$$p_j = a + b\omega_j \quad e \quad p_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (\text{J.11})$$

Conseqüentemente, $A_i = 0$ para todo $i \neq j$. Em adição, pode ser observado a partir da Eq (J.8) que, se $\{x(0)\} = c_1 \{\phi\}_j$ e $\{\dot{x}(0)\} = c_2 \{\phi\}_j$, na qual c_1 e c_2 são constantes, então $B_i = 0$ para todo $i \neq j$ e assim somente o j -ésimo modo participa do movimento do sistema. Em adição à estas características, a Eq (J.6) apresenta que o movimento em regime permanente, quanto $A_i = 0$ para todo $i \neq j$ é um único modo de vibrar e todas as coordenadas físicas alcançam a posição de equilíbrio descrita por $\{x\} = \{0\}$ ao mesmo tempo. Por fim, é importante notar que Ω não precisa ser próxima à ω_j para que o sistema vibre no j -ésimo modo. Entretanto, se Ω estiver distante de ω_j , então a amplitude de vibração será pequena.

Vita

Demian Gomes da Silva nasceu em São José do Rio Preto S.P em 28 de Junho de 1975. Viveu até os dezoito anos na pequena cidade de Neves Paulista S.P. Em 1994 mudou-se para Ilha Solteira S.P com o propósito de estudar engenharia mecânica na Universidade Estadual Paulista - UNESP. Recebeu diploma de engenheiro mecânico pleno em 1998 e teve uma breve experiência como projetista de sistemas de ar condicionado central. Em 1999 retornou a Ilha Solteira para desenvolver pesquisas voltadas à identificação de falhas em máquinas rotativas por intermédio de análise de vibrações. Recebeu o título de mestre em engenharia mecânica dois anos depois. No início de 2002 mudou-se para São Carlos com o objetivo de desenvolver pesquisas em dinâmica estrutural não-linear na Escola de Engenharia de São Carlos - USP. Quatro anos mais tarde recebeu o título de doutor em engenharia mecânica. Logo após, foi contratado pela EMBRAER para atuar como engenheiro de desenvolvimento de produto no campo da aeroelasticidade.