ANÁLISE NÃO-LINEAR DAS ESTRUTURAS DE CONTRAVENTAMENTO DE EDIFÍCIOS EM CONCRETO ARMADO

RIVELLI DA SILVA PINTO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte do dos requisitos para obtenção do título de ***Doutor em Engenharia de Estruturas.***

Orientador : Prof. Associado Marcio Antonio Ramalho

São Carlos

Maio 2002

‘Amarás ao Senhor teu Deus de todo o teu coração,
de toda a tua alma e de todo o teu entendimento.
...Amarás ao teu próximo como a ti mesmo.’
(Mt 22, 37.39)

À minha esposa Fabiana, minha filha Rebeca
e ao filho que vai chegar, com amor.

AGRADECIMENTOS

Ao único Deus, o Deus de Abrãao, Isaac e Jacó, Pai de Jesus Cristo e nosso Pai.

À minha esposa Fabiana, cuja ajuda e compreensão possibilitaram a realização deste trabalho.

Ao meu pai e à minha irmã pelo apoio sempre manifestados, e à minha mãe, "*in memoriam*", de quem o exemplo, a dedicação e o amor jamais esquecerei.

Ao Prof. Marcio Antonio Ramalho pelo trabalho de orientação.

À minha sócia Suzana Campana Peleteiro por "segurar as pontas" nos momentos em que precisei me ausentar do escritório para realizar este trabalho.

À Andréa e Luis Liserri pelo empréstimo do TQS.

Aos irmãos das Comunidades Neocatecumenais que me ajudaram nos momentos difíceis.

Aos meus sogros e cunhadas pela ajuda efetiva nos finais de semana em que precisei estudar.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP pelo apoio cordial sempre manifestados.

À CAPES pela de bolsa de estudos concedida nos dois primeiros anos deste trabalho.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS i
LISTA DE SÍMBOLOS ii
RESUMO viii
ABSTRACT ix

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO 1
1.1. ASPECTOS GERAIS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS 1
1.2. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS 2
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO 4

CAPÍTULO 2 –ANÁLISE NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA: PRESCRIÇÕES NORMATIVAS 5
2.1. INTRODUÇÃO 5
2.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 7
2.3 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS 22

CAPÍTULO 3 – ANÁLISE NÃO-LINEAR RIGOROSA: IMPLEMENTAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 24
3.1. INTRODUÇÃO 24
3.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 25
3.3. ANÁLISE NÃO-LINEAR VIA M.E.F. 27
3.3.1. Definições geométricas da formulação corrotacional 27
3.3.2. Campos de deformação e de deslocamento do elemento...31
3.3.3. Determinação dos esforços internos através do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) 34
3.3.4. Determinação da matriz de rigidez tangente 36
3.3.5. Modelos constitutivos dos materiais 42
3.3.6. Solução do problema estrutural 46
3.4. EXEMPLOS 50
3.4.1. Análise não-linear geométrica : viga em balanço 50

3.4.2. Pórtico de concreto armado com 1 lance 53
3.4.3. Pórtico de concreto armado com 2 lances 55
3.5. CONCLUSÕES 58

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE NÃO-LINEAR PARAMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS 59
4.1. INTRODUÇÃO 59
4.2. EXEMPLOS ANALISADOS 60
4.2.1. Pórticos com 1 lance de pilares 60
4.2.2. Pórticos com 6 lances de pilares 69
4.3. CONCLUSÕES 88

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS PERTENCENTES A ESTRUTURAS USUAIS 94
5.1. INTRODUÇÃO 94
5.2. EXEMPLOS ANALISADOS 95
5.2.1. Edifício com 6 pavimentos 95
5.2.2. Edifício com 8 pavimentos 104
5.2.3. Edifício com 13 pavimentos 115
5.3. CONCLUSÕES 127

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES 132
6.1. ASPECTOS GERAIS 132
6.2. ANÁLISE NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA DAS ESTRUTURAS DE CONTRAVENTAMENTO EM CONCRETO ARMADO 141
6.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES 143

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 145
APÊNDICE A - Detalhamento dos pórticos com seis lances de pilares 156
APÊNDICE B - Detalhamento dos pórticos com oito lances de pilares 169
APÊNDICE C - Detalhamento dos pórticos com treze lances de pilares 176
ANEXO A – Simplificações da literatura para obtenção das matrizes Q, H e D na formulação corrotacional 183

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

ACI - American Concrete Institute

CEB - Comité Europeén du Béton

FIP - Fédération Internationale de lo Précontrainte

MC - Model Code

NB - Norma Brasileira

NLF - Não-Linearidade Física

NLG - Não-Linearidade Geométrica

LISTA DE SÍMBOLOS

a – Flecha no topo da edificação

$\mathbf{a_d}$ - Flecha elástico-l;inear no topo da edificação obtida com valores de cálculo

$\mathbf{A_g}$- Área da seção bruta de concreto

$\mathbf{a_k}$ - Flecha em elástico-l;inear no topo da edificação obtida com valores característicos

$\mathbf{A_s}$ - Área de armadura da seção transversal

$\mathbf{A''_s}$ – Área da seção transversal do estribo

b - Largura da seção transversal

$\mathbf{b_f}$ - Largura da flange da seção T

B – Matriz instantânea de mudança de coordenadas

$\overline{\mathbf{B}}$ – Forma local de **B**

b" e **d"** – Largura e altura dos estribos b"< d"

$\mathbf{b_f}$ - Largura da flange tracionada

d - Altura útil da seção transversal

$\mathbf{d'}$ - Cobrimento da seção transversal

$\mathbf{ds_c}$ – Comprimento de uma fibra genérica situada a uma distância y_r do eixo do elemento diferencial na configuração deformada

$\mathbf{d\overline{s}_c}$ – Comprimento de uma fibra no eixo do elemento diferencial na configuração deformada

$\mathbf{ds_r}$ – Comprimento de uma fibra genérica situada a uma distância y_r do eixo do elemento diferencial na configuração de referência

$\mathbf{d\overline{s}_r}$ – Comprimento de uma fibra no eixo do elemento diferencial na configuração de referência

$\mathbf{dx_r}$ – Comprimento do elemento diferencial na configuração de referência

$\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ - Matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais

$\mathbf{e_a}$ – Excentricidade acidental nos pilares

$\mathbf{e_2}$ - Excentricidade de "2ª ordem" nos pilares

$\mathbf{e_i}$ - Excentricidade inicial nos pilares

E - Módulo de elasticidade longitudinal

$\mathbf{E'_s}$ - Módulo de elasticidade longitudinal do aço após o escoamento

E_c - Módulo de elasticidade longitudinal secante do concreto

E_cI_g - Produto de rigidez à flexão da seção bruta de concreto

E_{ctg} - Módulo de elasticidade longitudinal tangente do concreto

EI - Produto de rigidez à flexão

EI_{ef} - Produto de rigidez à flexão efetivo

EI_{eq} - Produto de rigidez equivalente a uma coluna prismática engastada na base ou relação entre a rigidez lateral não-linear e a rigidez lateral elástico-linear

E_s - Módulo de elasticidade do aço (E_s = 210000 MPa);

E_s - Módulo de elasticidade longitudinal do aço

E_s' - Módulo de elasticidade do aço após o escoamento

$(EI_{eq})_d$ - produto de rigidez equivalente no estado limite último,

$(EI_{eq})_k$ - produto de rigidez equivalente característico.

f_c' - Máxima tensão de compressão no concreto

f_c' - Tensão de compressão máxima do concreto

f_{cd} - Resistência a compressão de cálculo do concreto

f_{ck} - Resistência a compressão característica do concreto

f_{cm} - Resistência média à compressão do concreto

f_{ctm} - Resistência média à tração do concreto

F_{Hid} - Força horizontal de cálculo aplicada ao nível do pavimento i

f_t - Máxima tensão de tração no concreto

F_v - Carga vertical característica no pilar

f_{ys} - Tensão de escoamento do aço

G – Resultante do carregamento vertical na estrutura

G_j – Resultante do carregamento vertical no pavimento *i*

h - Altura da seção transversal

h_f - Altura da flange da seção T

H - Altura total do pilar ou carregamento horizontal aplicado ao nível do pav. Tipo

H_c - Carregamento horizontal aplicado ao nível da cobertura

H_i – Carregamento horizontal correspondente ao estágio de carregamento *i*

$H_{\alpha\beta}$ - Matriz de rigidez geométrica em coordenadas corrotacionais

I - Momento de inércia da seção transversal

I_{cr} - Momento de inércia da seção fissurada de concreto

I_g - Momento de inércia da seção bruta de concreto

$\mathbf{I_{se}}$ - Momento de inércia das barras de aço em relação ao centróide da seção transversal

$\mathbf{k_g}$ – Matriz de rigidez geométrica do elemento de coordenadas cartesianas

$\mathbf{k_{ij}}$ – Matriz de rigidez tangente no sistema de coordenadas cartesianas

$\mathbf{k_m}$ – Matriz de rigidez constitutiva do elemento de coordenadas cartesianas

$\mathbf{k}^*_{\alpha\beta}$ – Matriz de rigidez tangente no sistema de coordenadas corrotacionais

$\mathbf{l_c}$ – Comprimento da corda que une as extremidades do elemento na configuração atual

$\mathbf{l_r}$ – Comprimento da corda que une as extremidades do elemento na configuração de referência

M – Momento fletor na seção transversal

$\mathbf{M_{1d}}$ - momento atuante na estrutura indeslocada

$\mathbf{M_d}$ - Momento fletor de cálculo

$\mathbf{M_n}$ - Momento nominal resistido pela peça

N – Força normal na seção transversal

n - Número de pavimentos da edificação

$\mathbf{N_d}$ - Esforço normal de cálculo

P - Carga concentrada nos pilares do pavimento tipo ou estado de carregamento da estrutura

$\mathbf{P_c}$ - Carga concentrada nos pilares da cobertura

P - Estado de carregamento último da estrutura da estrutura

p - Carregamento gravitacional uniformemente distribuído ou deslocamentos nodais do elemento nas coordenadas locais

$\mathbf{p}^*$ - Deslocamentos nodais da estrutura nas coordenadas globais

$\mathbf{P_i}$ - Carga total característica do pavimento

$\mathbf{P_{id}}$ - Carga total de cálculo do pavimento

$\mathbf{p_{i=1...6}}$ = Coordenadas deslocamento no sistema global X,Y

$\mathbf{P_{i=1...6}}$ = Vetor dos esforços nodais internos do elemento no sistema global X,Y

$\mathbf{P_{id}}$ - Carga total de cálculo do pavimento

q - Ação horizontal devida ao vento uniformemente distribuída ao longo da edificação ou carregamento acidental

$\mathbf{q_d}$ - Ação horizontal uniformemente distribuída de cálculo

$\mathbf{q_{\alpha=1...3}}$ = Coordenadas deslocamento no sistema corrotacional x_c, y_c

$\mathbf{Q}_{\alpha=1...3}$ = Vetor dos esforços nodais internos do elemento no sistema corrotacional x_c, y_c

R – Vetor dos esforços nodais externos aplicados à estrutura

$\boldsymbol{RL_i}$ – Rigidez lateral equivalente ao estágio de carregamento *i*

s – Espaçamento entre os estribos

S – Vetor de forças internas da estrutura

T – Matriz de mudanças de coordenadas cartesianas

u, v – Deslocamentos no sistema cartesiano global

$\mathbf{u_c}$, $\mathbf{v_c}$ – Deslocamentos no sistema corrotacional

w – Carregamento uniformemente distribuído no pavimento tipo

$\mathbf{w_c}$ – Carregamento uniformemente distribuído na cobertura

x - Profundidade da linha neutra da seção transversal

$\mathbf{x_{id}}$ – Deslocamento horizontal correspondente ao pavimento *i*

X, Y – Sistema cartesiano global

$\mathbf{x_c}$, $\mathbf{y_c}$ – Sistema cartesiano corrotacional na configuração atual

$\mathbf{x_r}$, $\mathbf{y_r}$ – Sistema cartesiano corrotacional na configuração de referência

$\mathbf{y_{id}}$ - Altura correspondente ao pavimento *i*

Z – inclinação do trecho descendente do diagrama diagrama $\sigma x \varepsilon$ do concreto comprimido confinado por estribos

$\boldsymbol{\alpha}$ - Parâmetro de instabilidade global; fator de redução da tensão de tração no tension stiffening ou rotação das seções transversais

$\boldsymbol{\alpha'}$ – Curvatura da seção transversal do elemento

$\boldsymbol{\alpha_{lim}}$ - Valor limite do parâmetro de instabilidade global α

$\boldsymbol{\beta}$ - Matriz de incidência cinemática

$\boldsymbol{\beta_1}$ - Fator de equivalência de bloco retangular definido no ACI 318-89

$\boldsymbol{\beta_d}$ - quociente entre a parcela permanente do carregamento total e o carregamento total aplicado

$\boldsymbol{\delta_{1d}}$ - Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais com valor de cálculo

$\boldsymbol{\delta_{1k}}$ - Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais com valor característico

$\boldsymbol{\delta_G}$ - Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais

δ_{Gi} - Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais correspondente ao estágio de carregamento *i*

δ_j - Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais no pavimento j

ΔM_d - acréscimos de momentos devido ao deslocamento horizontal da estrutura

ε - Deformação de uma fibra genérica localizada a uma distância y_r do eixo

ε_0 - Deformação específica no concreto correspondente à máxima tensão de compressão

ε_{20c} - Deformação correspondente à 0,2 f_c' no trecho descendente do diagrama $\sigma x \varepsilon$ do concreto comprimido confinado por estribos

ε_{50h} - Deformação correspondente à 0,5 f_c' no trecho descendente do diagrama $\sigma x \varepsilon$ do concreto comprimido confinado por estribos

ε_{50u} - Deformação correspondente à 0,5 f_c' no trecho descendente do diagrama $\sigma x \varepsilon$ do concreto comprimido não confinado por estribos

ε_c - Deformação específica no concreto

ε_m - Deformação específica máxima no concreto tracionado

ε_t - Deformação específica no concreto correspondente à máxima tensão de tração

ε_{ys} - Deformação específica no aço correspondente à tensão de escoamento

ε_{yu} - Deformação específica última no aço (ε_{yu} = 0,010)

$\bar{\varepsilon}$ -Deformação de uma fibra genérica localizada no eixo

γ_f - Coeficiente de segurança para as ações

γ_{f1}, γ_{f2}, γ_{f3} - Coeficientes parciais de segurança

γ_{fh} - Coeficiente de segurança para o carregamento horizontal

γ_{fv} - Coeficiente de segurança para o carregamento vertical

γ_z - Parâmetro majorador de esforços

η - Relação entre o momento de engastamento e o momento nominal

φ_c – Ângulo formado pelo o sistema corrotacional na configuração atualizada e o sistema cartesiano global

φ_r – Ângulo formado pelo o sistema corrotacional na configuração de referência e o sistema cartesiano global

λ - Estiramento da fibra

μ - Relação entre o momento na extremidade e o momento nominal

μ_d - Momento fletor adimensional de cálculo

ν_d - Esforço normal adimensional de cálculo

$\boldsymbol{\theta}$ - Rotações no sistema cartesiano global

$\boldsymbol{\sigma}$ - Tensão no concreto correspondente à deformação ε

$\boldsymbol{\rho}$ - taxa de armadura da seção transversal

$\boldsymbol{\omega}$ - taxa de armadura adimensional

$\boldsymbol{\psi}$ - Parâmetro de forma da linha elástica e vetor dos resíduos

Resumo

PINTO, R, S. *Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado, 189p.* Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho são discutidos os aspectos inerentes à análise não-linear física (NLF) e geométrica (NLG) das estruturas de contraventamento em concreto armado. O estudo proposto tem como base a análise estrutural de pórticos planos de concreto armado, desenvolvendo-se uma ferramenta rigorosa capaz de analisar essas estruturas de forma elaborada e consistente. Com essa ferramenta serão avaliadas as reduções de inércia que ocorrem em pórticos planos de concreto armado, submetidos a diferentes condições de carregamento e a diferentes taxas de armadura, contribuindo para o estabelecimento de estimativas confiáveis dos efeitos da NLF nessas estruturas. Estes resultados, combinados com os parâmetros de estabilidade α e γ_z - capazes de estimar com bastante precisão os efeitos devidos à NLG – permitem o estabelecimento de métodos simplificados para a análise não-linear física e geométrica das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado, de grande utilidade para os projetistas.

Palavras-chave: Edifícios altos, não-linearidade física, não-linearidade geométrica, concreto armado, plasticidade.

Abstract

PINTO, R, S. *Non-linear analysis of reinforced concrete buildings bracing structures, 189p.* Thesis (Doctorate) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work the inherent aspects to the physical nonlinear analysis (PNL) and geometric nonlinear analysis (GNL) of reinforced concrete bracing structures are argued. The considered study is based in the structural analysis of in reinforced concrete plane frames, developing a rigorous tool capable to analyze these structures of elaborated and consistent form. Using this tool, inertia reductions that occurs in reinforced concrete plane frames, submitted the different loading conditions and the different levels of reinforcement will be evaluated, contributing for the establishment of trustworthy estimates to the effects of PNL in these structures. These results, matched with the stability parameters α e γ_z - capable to estimate with sufficient accuracy the effects of GNL - allow the establishment of simplified methods for physical and geometrical non-linear analysis of reinforced concrete buildings bracing structures, of great utility for the designers.

Key-words: Tall buildings, physical non-linearity, geometrical non-linearity, reinforced concrete, plasticity.

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1. ASPECTOS GERAIS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

A análise de edifícios de concreto armado, com o desenvolvimento dos microcomputadores, tem sofrido uma transformação sensível em sua metodologia. Os modelos de cálculo elásticos e lineares estão sendo substituídos por modelos mais completos, que contemplem de maneira mais fiel o comportamento da não-linear da estrutura e do material.

Apesar dos avanços alcançados na análise não-linear de estruturas, a maior parte dos profissionais da área acaba utilizando, como alternativa à realização de análises não-lineares rigorosas, métodos simplificados que forneçam resultados satisfatórios dentro dos seus respectivos campos de atuação. Para esses profissionais não é vantajosa a análise não-linear de estruturas com ferramentas muito elaboradas, pois implicaria em gasto excessivo de tempo sem grandes benefícios no resultado final. Desse modo, é importante o constante aprimoramento desses processos simplificados que, conhecidas suas limitações, possuem grande utilidade prática.

Além disso, o acesso dos profissionais de engenharia às ferramentas de análise não-linear, tanto às mais simplificadas quanto às mais rigorosas, deve ser cada vez mais facilitado, bem como para as instituições de ensino de engenharia, de forma que estas possam oferecer conceitos e métodos mais modernos para seus alunos.

No trabalho proposto, pretende-se contribuir de forma efetiva à análise não-linear das estruturas de contraventamento em concreto armado, estabelecendo-se

ferramentas e métodos para análise não-linear física e geométrica de forma rigorosa e consistente.

Pretende-se, ainda, contribuir com o aperfeiçoamento dos processos para a realização simplificada desse tipo de análise, estudando-se de modo sistemático as ferramentas utilizadas para a estimativa dos efeitos não-lineares em estruturas de contraventamento em concreto armado.

1.2. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

A resposta das estruturas de concreto armado, submetidas a carregamentos diversos, tem sido objeto de estudos desde que o concreto começou a ser amplamente utilizado como material na engenharia. No projeto estrutural dos edifícios altos é extremamente importante uma correta avaliação da resposta estrutural, considerando-se os efeitos não-lineares da geometria da estrutura e da reologia do material na análise estrutural. De fato, os deslocamentos e esforços da estrutura são determinados pelo carregamento, pelos os efeitos decorrentes da mudança de posição da estrutura no espaço – não-linearidade geométrica – e pelos comportamento não-linear do concreto armado – não-linearidade física.

No projeto de edifícios altos a rigidez lateral das estruturas exerce, de modo especial, grande importância estrutural e normativa. Desta dependem a determinação dos estados limites de utilização, a avaliação da estabilidade global das estruturas e ainda a determinação dos parâmetros para o projeto de estruturas submetidas à ações sísmicas e de vento.

Observa-se que a correta avaliação do comportamento estrutural implica na utilização de ferramentas de análise capazes de descrever os efeitos decorrentes da não-linearidade geométrica (NLG) e da não-linearidade física (NLF).

Nos últimos anos, com o avanço dos computadores pessoais, os conceitos não-lineares começam e ser introduzidos no meio técnico de forma gradativa. No entanto, o emprego da análise não-linear não requer apenas o desenvolvimento de ferramentas mas, principalmente, a formação de profissionais capazes de empregar com segurança esse tipo de análise. Esta não é a realidade atual do

meio técnico de modo geral, pois a maior parte das Escolas de Engenharia não apresenta os conceitos não-lineares durante os cursos de graduação.

Por isso, ainda nos dias de hoje, a forma mais freqüente de se analisar uma estrutura é através da análise elástica e linear, baseada na lei de Hooke e no equilíbrio da estrutura indeformada, estimando-se os efeitos não-lineares da estrutura através de procedimentos simplificados. Isso acontece porque os modelos lineares são de mais fácil compreensão, é válida a superposição de efeitos, além do fato de que os procedimentos para tratamento dos resultados, dimensionamento e verificação são amplamente conhecidos.

Nesse contexto, o presente trabalho apresenta como objetivos básicos o de contribuir para a análise não-linear rigorosa das estruturas de edifícios em concreto armado, considerando-se a não-linearidade física do material e a não-linearidade geométrica da estrutura, através da implementação uma formulação para análise não-linear de pórticos planos capaz de descrever o comportamento estrutural de forma eficiente e precisa.

Pretende-se, ainda, contribuir para o estabelecimento de procedimentos simplificados seguros para a avaliação dos efeitos não-lineares nas estruturas de concreto armado. De modo específico, contribuir para o estabelecimento do valores do produto de inércia (EI) que devem ser empregados na análise das estruturas de contraventamento para simular a perda de rigidez devida à NLF.

Para atingir os objetivos propostos será realizado um estudo baseado na análise estrutural de pórticos planos, desenvolvendo-se uma ferramenta rigorosa capaz de analisar as estruturas planas de concreto armado de forma elaborada e consistente. Com essa ferramenta serão obtidas informações acerca das rigidez lateral dos pórticos de concreto armado, o que possibilitará a aferição das reduções de inércia a serem utilizadas nos projetos usuais de edifícios.

Esse estudo das reduções de inércia é uma continuação do trabalho de mestrado do autor, PINTO 1997, onde foram observados muitos aspectos a serem esclarecidos neste assunto, que é de interesse tanto para os projetistas de concreto armado, quanto para o meio científico empenhado na normalização dos processos simplificados para análise não-linear.

De modo sistemático, os objetivos do trabalho proposto ficam estabelecidos do seguinte modo:

a) Desenvolvimento de uma ferramenta para análise não-linear de estruturas planas de contraventamento em concreto armado;

b) Estudo da inércia efetiva para vigas e pilares que devem ser utilizadas em procedimentos simplificados para a consideração da NLF nos pórticos planos em concreto armado;

c) Reunir os resultados referentes os procedimentos para consideração simplificada da NLG, conforme PINTO 1997, com aqueles referentes à NLF, obtidos no presente trabalho, em uma proposta concreta para a realização de uma análise estrutural simplificada.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 são apresentadas e comentadas as diferentes propostas existentes na literatura para a consideração simplificada da NLF e da NLG.

No capítulo 3 é apresentada uma formulação para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado. Esta formulação, implementada em um programa de computador, é aferida com resultados da literatura afim de ser utilizada no decorrer do trabalho.

No capítulo 4 realiza-se um estudo paramétrico analisando-se as estruturas de nove pórticos com um pavimento e nove pórticos com seis pavimentos. Os resultados obtidos com o processamento não-linear dos pórticos, considerando-se taxas de armaduras que vão desde o mínimo estabelecido em norma até o máximo, são comparados com os procedimentos simplificados propostos na literatura. Assim, pode-se avaliar as variáveis que mais influem na perda de rigidez lateral das estruturas, avaliando-se qualitativa e quantitativamente o fenômeno.

No capítulo 5 realiza-se um estudo de pórticos com dimensões e carregamentos mais próximos dos usualmente projetados. São analisados três pórticos com um seis pavimentos, três pórticos com oito pavimentos e três pórticos com treze pavimentos. Comparando-se os resultados obtidos do processamento não-linear destes pórticos, com aqueles obtidos através dos procedimentos simplificados da literatura, pode-se avaliar quais procedimentos melhor descrevem as estruturas usuais de edifícios.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões gerais e as sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA : PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

2.1. INTRODUÇÃO

No cálculo estrutural de edifícios altos em concreto armado deve-se estar atento ao comportamento não-linear da estrutura. Isso porque a mudança de posição da estrutura no espaço e o comportamento não-linear do concreto e do aço fazem com que as estruturas ofereçam uma resposta bem diferente daquela obtida segundo um processamento elástico-linear.

Os efeitos não-lineares se dividem, segundo a sua natureza, em efeitos devidos à mudança de posição da estrutura no espaço, conhecidos por não-linearidade geométrica (NLG), e aqueles referentes ao comportamento não-linear do material, conhecidos por não-linearidade física (NLF).

A determinação dos efeitos não-lineares nas estruturas de contraventamento requer o emprego de ferramentas mais elaboradas de análise estrutural que considerem os efeitos da NLG e da NLF. Esse tipo de análise, normalmente, implica em um gasto de tempo muito maior que aquele necessário para realização de uma análise elástico-linear, apesar do desenvolvimento dos microcomputadores. Além disso, para utilização dos programas e análise dos resultados não-lineares, deve-se contar com engenheiros familiarizados com a análise não-linear. Estes aspectos tornam a análise não-linear dispendiosa para ser utilizada pelos escritórios de projeto.

Apesar das estruturas de contraventamento em concreto armado sempre apresentarem uma resposta não-linear quando solicitadas, nem sempre é necessária a realização de análises que contemplem os efeitos da NLF e NLG. De

fato, para as estruturas muito rígidas os acréscimos nos esforços e nos deslocamentos devidos aos efeitos não-lineares geométricos, podem ser desprezados. Segundo o CEB-FIP/MC 90 (item 6.7.3.1.3) um edifício pode ser considerado de nós fixos se os efeitos devidos à deslocabilidade horizontal da estrutura resultam em acréscimos inferiores a 10% nos momentos fletores relevantes, obtidos de uma análise elástico-linear. Esse critério, conhecido como *condição de imobilidade dos nós,* é amplamente aceito no meio técnico em virtude das incertezas que existem quanto às ações de vento atuantes na estrutura e em relação a outros parâmetros importantes. Deve-se ressaltar que a deslocabilidade horizontal das estruturas de contraventamento em concreto armado está intimamente relacionada com os efeitos não-lineares devidos à NLF e NLG.

Para avaliar a sensibilidade da estrutura aos efeitos não-lineares geométricos, têm-se pesquisado parâmetros capazes de estabelecer a importância desses efeitos na modelagem das estruturas de edifícios, indicando a necessidade ou não de se realizar uma análise não-linear.

Alguns desses parâmetros, além de indicar a sensibilidade da estrutura aos efeitos não-lineares geométricos, podem até mesmo ser empregados, em conjunto com as devidas reduções na inércia da estrutura, para estimar, com boa precisão, os resultados obtidos em uma análise não-linear, a partir daqueles obtidos na análise elástico-linear.

Este tipo de análise, onde os efeitos não-lineares são estimados a partir dos resultados elástico-lineares, majorando-se os esforços e minorando-se a rigidez da estrutura, serão doravante denominados de Análise Não-linear Simplificada. Estes processos simplificados para análise não-linear, conhecendo-se seus respectivos campos de aplicação e sua precisão, são de extrema utilidade prática para o projeto de edifícios em concreto armado, uma vez que agilizam o desenvolvimento do projeto estrutural sem perda significativa na precisão dos resultados.

Neste capítulo serão abordados os métodos para avaliação da estabilidade global das estruturas, bem como os instrumentos disponíveis para a estimativa dos efeitos não-lineares físicos e geométricos das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado.

2.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A busca de se estabelecer ferramentas destinadas a realização de uma análise não-linear simplificada das estruturas de contraventamento em concreto armado tem sido objeto de estudo no mundo inteiro. Pode-se, conceitualmente, dividir estes estudos em dois ramos que se complementam: O estudo de parâmetros para estimativa dos efeitos devidos ao deslocamento horizontal da estrutura (NLG) e estudo para estimativa das inércias efetivas dos elementos estruturais (NLF).

No tocante às considerações simplificadas para a consideração da NLG, tem-se pesquisado critérios seguros e de fácil implementação prática que permitam classificá-las quando ao grau de mobilidade: estruturas de nós móveis ou de nós fixos. BECK & KÖNIG (1966) propõem o parâmetro α, como uma grandeza capaz de avaliar a sensibilidade da estrutura em relação aos efeitos da NLG. O modelo proposto considera um pilar engastado na base, com uma carga vertical distribuída ao longo de toda a sua altura, supondo-se para o mesmo um comportamento elástico-linear. O parâmetro fica, então, definido do seguinte modo:

$$\alpha = H \cdot \sqrt{\frac{F_v}{EI}} \qquad (2.1)$$

onde:

H = altura total do pilar

F_v = carga vertical característica no pilar

EI= produto de rigidez

Segundo a teoria desenvolvida por BECK, para α superior a 0,60 torna-se necessária a consideração dos efeitos devidos à NLG no pilar.

Posteriormente, este conceito foi estendido por FRANCO (1985a) para o caso de edifícios altos, uma vez que pode-se associar um edifício alto a uma coluna engastada na base, com os pavimentos tipo conferindo às cargas verticais o caráter de carregamento uniformemente distribuído (figura 2.1).

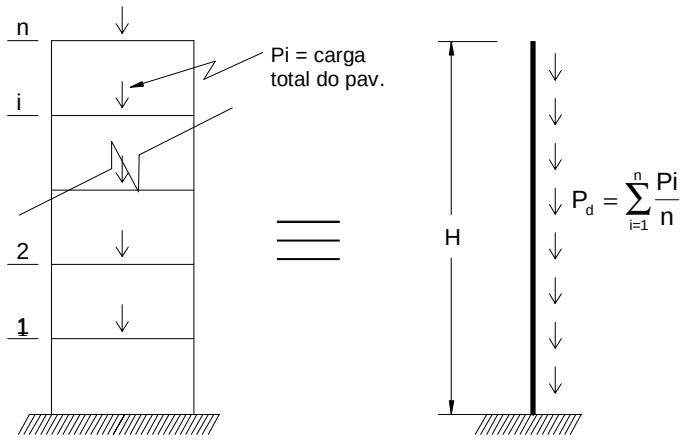


Figura 2.1 - Analogia entre um edifício alto e uma coluna engastada na base
Adaptada de CARMO (1995)

Para que se possa efetuar esta analogia, no entanto, deve-se estender às estruturas dos edifícios altos os conceitos de *produto de rigidez equivalente* (EI_{eq}) e *parâmetro de forma da linha elástica* (ψ).

Considere-se uma estrutura submetida a uma ação horizontal uniformemente distribuída q_d e seja a_d o deslocamento horizontal do topo (figura 2.2). O produto de rigidez EI_{eq} é aquele equivalente a uma estrutura prismática engastada na base, de módulo de rigidez E constante ao longo de sua altura H, que sob a ação de q_d apresenta o mesmo deslocamento a_d no topo.

Recorrendo-se então à expressão da linha elástica correspondente a um pilar engastado na base com uma ação lateral uniformemente distribuída, tem-se:

$$EI_{eq} = \frac{q_d \times H^4}{8 \times a_d} \tag{2.2}$$

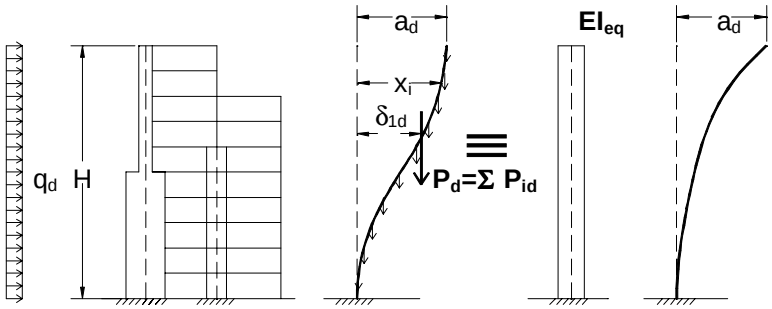


Figura 2.2 - Produto de rigidez equivalente para uma estrutura qualquer
Adaptada de FRANCO (1985a)

Na estimativa do EI_{eq} devem ser computados todos os elementos que contribuem para a estabilidade da estrutura. Portanto, além da consideração de elementos isolados, principalmente núcleos e pilares paredes, deve-se também considerar os pórticos planos constituintes da estrutura, pois estes contribuem para um contraventamento eficiente.

Seja δ_{1d} o deslocamento horizontal, referente à análise elástico-linear, do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais de intensidade P_d. Define-se o parâmetro de forma da linha elástica como sendo:

$$\psi = \frac{\delta_{1d}}{a_d} = \frac{\delta_{1k}}{a_k} \qquad (2.3)$$

Esse parâmetro pode ser facilmente calculado para estruturas regulares em casos particulares importantes (figura 2.3).

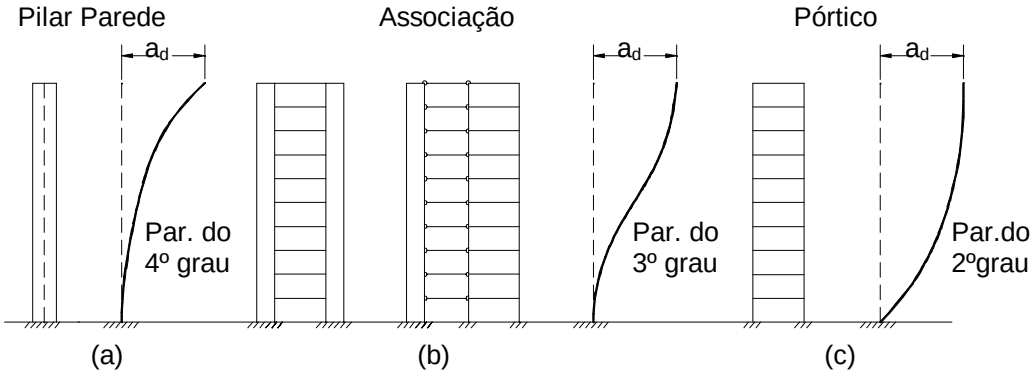


Figura 2.3 - Casos particulares importantes de ψ para estruturas regulares

Adaptada de FRANCO (1985a)

FRANCO (1985a) apresenta os seguintes resultados na avaliação do ψ: estruturas com contraventamento em pilar parede ψ=0,4 , estruturas com contraventamento misto ψ=0,5 e estruturas com contraventamento em pórtico ψ=0,67. O parâmetro de forma permite que se possa conhecer melhor o comportamento global da estrutura, indicando o modo como se desloca horizontalmente segundo o tipo de contraventamento predominante na mesma.

Alguns valores de α_{lim}, para edifícios de vários pavimentos, foram propostos por alguns pesquisadores de forma a viabilizar a sua utilização.

De acordo com o CEB (1977), para edifícios de vários pavimentos, tem-se:

$\alpha_{lim} \leq 0{,}2 + 0{,}1n$; para $n \leq 3$

$\alpha_{lim} \leq 0{,}6$ para $n \geq 4$

onde n é o número de pavimentos do edifício.

Esta definição de α_{lim} pressupõe que o contraventamento seja constituído exclusivamente por pilares-parede, visto que se despreza a influência das vigas, além disso, o valor α_{lim}=0,60 foi obtido considerando-se γ_f = 1,5. FRANCO (1985a) demonstra que para γ_f = 1,4 tem-se α_{lim} = 0,70, considerando-se a seguinte redução de inércia para a estrutura:

$$(EI_{eq})_d = 0{,}7(EI_{eq})_k \qquad (2.4)$$

onde:

$(EI_{eq})_d$ = produto de rigidez equivalente no estado limite último,

$(EI_{eq})_k$ = produto de rigidez equivalente característico.

Ainda no mesmo trabalho, apresenta valores limites do parâmetro α dependentes do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Esses valores limites são obtidos através da *condição generalizada de imobilidade dos nós*, definida por FRANCO (1985a) como:

$$\alpha_{lim} \leq \sqrt{\frac{2}{11\psi}} \qquad (2.5)$$

Partido-se do parâmetro de forma da linha elástica pode-se estabelecer valores limites de α em função do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Os resultados obtidos para estruturas regulares, são:

$\alpha_{lim} \leq$ 0,7; contraventamento em pilares-parede;

$\alpha_{lim} \leq$ 0,6; contraventamento misto (pilares-parede + pórticos ou associações de pilares parede).

$\alpha_{lim} \leq$ 0,5; contraventamento em pórtico;

Deve-se ressaltar que todos esses valores limites de α foram obtidos considerando-se, para simular o efeito da perda de rigidez da estrutura devida à NLF, como válida a relação (2.4).

VASCONCELOS (1987) sugere uma variação de α_{lim} em função do número de pavimentos n, dada por (para n $\geq$ 1):

$$\alpha_{\text{lim}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2}}\left(0{,}88 - 0{,}44 \times 10^{-0{,}144n}\right) \qquad (2.6)$$

Na análise de edifícios altos, o parâmetro α serve como um indicador da necessidade ou não de se levar em conta o efeito da NLG para o projeto da estrutura. Assim, pode-se desprezar o efeito da NLG quando o valor calculado de α for menor que α_{lim}. Isso equivale a dizer que os esforços totais não-lineares não ultrapassam em 10% aqueles referentes à análise elástico-linear (condição de imobilidade dos nós).

FRANCO & VASCONCELOS (1991) propõem, em substituição ao parâmetro α, o parâmetro γ_z como um coeficiente majorador dos esforços obtidos em uma análise elástico-linear para a obtenção dos esforços finais na estrutura. O parâmetro γ_z é definido como se segue:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \qquad (2.7)$$

onde:

ΔM_d = acréscimos de momentos devido ao deslocamento horizontal da estrutura

M_{1d} = momento atuante na estrutura indeslocada

CARMO (1995) estabeleceu a seguinte relação empírica entre os parâmetros α e γ_z, após a análise de 30 estruturas correntes:

$$\gamma_z = 0{,}90 + 0{,}52\alpha - 0{,}62\alpha^2 + 0{,}46\alpha^3 \qquad (2.8)$$

GRAZIANO (1998) encontrou uma expressão analítica relacionando α e γ_z:

$$\alpha^2 = \frac{\gamma_z - 1}{\gamma_z \cdot \gamma_{fv}} \quad \text{ou} \quad \gamma_z = \frac{1}{1 - \gamma_{fv} \cdot \alpha^2} \qquad (2.9)$$

onde γ_{fv} é o coeficiente de segurança aplicado ao carregamento vertical da estrutura, devidamente analisado por FRANCO & VASCONCELOS (1991) e PINTO (1997).

CARMO (1995) estudou, ainda, uma amostra contendo sete prédios, nos quais se comparou os resultados de análises com a consideração da NLG, com os obtidos pelo processo P-Δ e pelo método simplificado (utilizando-se o coeficiente γ_z). Essa comparação envolveu, principalmente, o deslocamento no topo do edifício e os esforços ao longo da estrutura. Como conclusão de seu trabalho, CARMO (1995) considera a utilização do coeficiente γ_z satisfatória dentro de certos limites, conforme indicam FRANCO & VASCONCELOS (1991). No entanto, para o universo das estruturas analisadas em seu trabalho, percebe-se uma tendência a se avançar na utilização desse processo para além do limite 1,2, proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991). Além disso, verificou-se que o valor do coeficiente γ_z pode, para os níveis superiores do edifício, indicar acréscimos de esforços superiores aos obtidos pelo processo rigoroso e pelo processo P-Δ.

PINTO (1997), analisou 25 edifícios de concreto armado através do *processo simplificado*, onde os esforços da análise elástico-linear são majorados pelo γ_z, e um *processo mais rigoroso*, no qual a NLG é considerada através de alterações incrementais na matriz de rigidez. Em ambos os procedimentos, a NLF foi considerada através de reduções na inércia dos elementos estruturais. Os esforços obtidos através desses dois procedimentos de análise não-linear geométrica foram comparados para a estrutura como um todo e para 5 faixas ao longo da altura, aferindo-se, assim, a acuidade do processo simplificado.

Os resultados obtidos indicam que:

1) Para os esforços normais, considerando-se a estrutura global, os acréscimos devidos aos efeitos não-lineares mostram-se próximos ao γ_z, mesmo para valores elevados desses acréscimos.

2) Os acréscimos de momentos fletores nos pilares se mostram, considerando-se a estrutura como um todo, próximos ao γ_z até para valores elevados do parâmetro. Para valores de γ_z entre 1,15 e 1,20 começam a aparecer diferenças da ordem de 3% contra a segurança. Acima de 1,20, as diferenças tendem aumentar para valores acima de 5%, sendo que a maioria destas se mostra contra a segurança.

3) Considerando-se o comportamento ao longo da altura, os acréscimos de momentos fletores se apresentam menores que o γ_z para trechos de pilares próximos à base. Para os trechos intermediários, os acréscimos são maiores que os previstos pelo γ_z, voltando a ser menores nos trechos próximos ao topo.

4) Os esforços nas vigas, esforços cortantes e momentos fletores, apresentam comportamentos semelhantes entre si. Analisando-se a estrutura globalmente, as diferenças são da ordem de apenas 3% contra a segurança, mesmo para valores de γ_z acima de 1,25.

5) Considerando-se o comportamento ao longo da altura, esses esforços apresentam-se ora a favor ora contra a segurança para as peças próximas à base. Sendo que somente para γ_z acima de 1,3 aparecem diferenças contra a segurança da ordem de 7% nessa região. Para as peças situadas nas regiões intermediárias, a estimativa do γ_z mostra-se contra a segurança, com diferenças acima de 5% para γ_z maior que 1,3. Finalmente, para peças próximas ao topo a estimativa através do γ_z volta a estar a favor da segurança.

De todos os resultados obtidos, pode-se concluir que a utilização do parâmetro γ_z é satisfatória dentro de certos limites, sendo que o valor de 1,2, estabelecido por FRANCO & VASCONCELOS (1991), parece ser realmente o mais adequado. O estabelecimento de um limite superior a 1,2 deve ser evitado, levando-se em conta o fato de que nas faixas intermediárias, onde os valores dos esforços devidos à ação horizontal são maiores, a estimativa se mostra contra a segurança. Nessas faixas, deve-se considerar ainda que os acréscimos de esforços apresentam maior dispersão em torno da média, o que concorre para a diminuição da segurança.

Deve-se ressaltar que a utilização dos parâmetros α e γ_z requer a aplicação de coeficientes que simulem a perda de rigidez da estrutura devida ao comportamento não-linear dos materiais (NLF).

As pesquisas referentes à consideração simplificada da NLF têm buscado encontrar valores mais realistas para o produto de inércia (EI) dos elementos constituintes da estrutura, no lugar de se considerar a seção bruta ou a seção fissurada para os elementos estruturais. MACGREGOR (1993) propõe a existência de dois conjuntos de valores para o produto de inércia efetivo (EI_{ef}): um para a realização de uma *análise global da estrutura* e outro para a *análise de membros isolados*. Isso é razoável, considerando-se que as deflexões laterais na análise de uma estrutura são afetadas pela rigidez de todos os seus membros, os valores de EI_{ef} devem se aproximar do valor médio representativo desses elementos estruturais. Por outro lado, quando se lida com a estabilidade de um membro individual, o valor de EI_{ef} utilizado deve ser um limite inferior seguro para o elemento.

Na tentativa de se estabelecer valores de EI_{ef} para a análise global da estrutura, KORDINA[1] e HAGE[2] *apud* MACGREGOR (1993) estudaram a variação de rigidez para vários membros de pórticos sujeitos a momentos devidos a carregamentos gravitacionais, carregamentos laterais e uma combinação dessas duas ações.

As figuras 2.4a, 2.4b e 2.4c, adaptadas de HAGE[2] *apud* MACGREGOR (1993), mostram a variação no valor de EI_{ef} para vigas T a medida que se incrementa o carregamento.

A figura 2.4a considera momentos devidos a carregamentos gravitacionais (p). O termo η é o quociente entre o momento de engastamento perfeito e o momento nominal resistido pela viga (M_n):

$$\eta = \frac{pl^2}{12} \cdot \frac{1}{M_n} \qquad (2.10)$$

Pode-se observar que, para pequenos carregamentos, o EI_{ef} excede um pouco o valor do produto de inércia da seção bruta de concreto ($E_c I_g$), devido à presença da armadura. À medida que o valor de η aumenta, devido ao aparecimento de fissuras, o EI_{ef} se aproxima de 0,4 $E_c I_g$. A figura 2.1a foi obtida

[1] KORDINA, Karl, "Cracking and Crack Control". Planning and Design of Tall Buildings, Proceedings of 1972 ASCE-IABSE International Conference, V. III, 1972, pp. 721-722.
[2] HAGE, Sven E., e MCGREGOR, James G., "Second order Analysis of Reinforced Concrete Frames", Structural Engineering Report No. 9, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Oct. 1974, 331 pp.

para uma seção transversal particular. No entanto, os autores afirmam que se mantém a mesma tendência para outros tipos de seções transversais, inclusive seções retangulares.

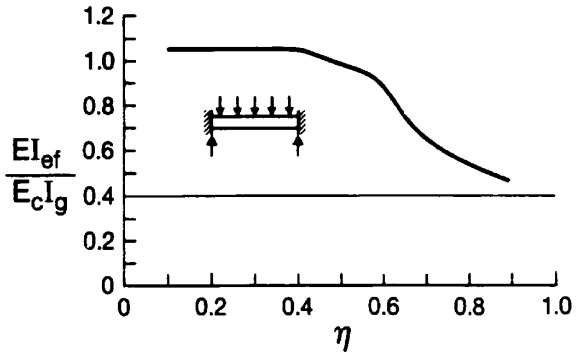


Figura 2.4a - Variação de rigidez para vigas T submetidas a momentos devidos a carregamentos gravitacionais. Adaptada de Hage *apud* MacGregor

A figura 2.4b ilustra o comportamento da viga quando submetida a momentos devidos a carregamentos laterais. O termo μ é o quociente entre o momento na extremidade devido ao carregamento lateral e o momento nominal resistido pela viga. Novamente o EI_{ef} se aproxima de 0,4 E_cI_g, à medida que μ se aproxima de 1,0 , A figura 2.4c mostra combinações de η e μ.

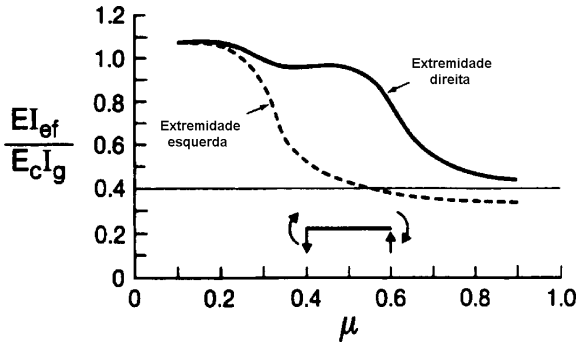


Figura 2.4b - Variação de rigidez para vigas T submetidas a momentos devidos a carregamentos laterais. Adaptada de Hage *apud* MacGregor

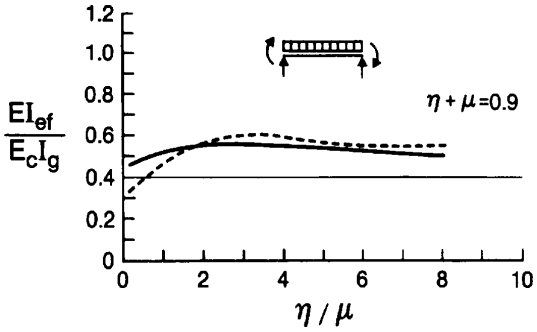


Figura 2.4c - Variação de rigidez para vigas T submetidas a momentos devidos a carregamentos gravitacionais em combinação com carregamentos laterais. Adaptada de Hage *apud* MacGregor

Gráficos semelhantes aos anteriores foram obtidos para outras seções transversais, incluindo seções retangulares.

Uma vez estabelecido o valor do EI_{ef} para vigas, HAGE[2] obteve o valor do EI_{ef} para colunas, recalculando pórticos de concreto armado cujas deflexões laterais haviam sido determinadas em ensaios de laboratório. Obteve como resultado um valor de EI_{ef} próximo de 0,8 E_cI_g.

Baseados nesses estudos MACGREGOR & HAGE[3] *apud* MACGREGOR (1993) propõem que se considere para as vigas EI_{ef} = 0,4 E_cI_g e para os pilares EI_{ef} = 0,8 E_cI_g.

FURLONG[4] *apud* MACGREGOR (1993) propôs que o EI_{ef} de vigas T seja tomado como o EI total da alma, mas não menos que metade da inércia correspondente à da seção T. Para colunas localizadas nos níveis inferiores, ele sugeriu EI_{ef} = 0,6 E_cI_g, enquanto que para colunas dos níveis superiores propôs EI_{ef} = 0,3 E_cI_g.

DIXON[5] *apud* MACGREGOR (1993) recalculou 13 pórticos que haviam sido testados experimentalmente, utilizando um programa que permitia uma análise não linear. Baseado nos resultados de HAGE[2] assumiu EI_{ef} = 0,5 E_cI_g para as vigas. Utilizando essa rigidez para as vigas, a rigidez das colunas que conduziu à melhor estimativa dos deslocamentos laterais medidos, de modo conservativo, foi EI_{ef} = 0,5 E_cI_g.

---

[3] MCGREGOR, James G., e HAGE, Seven E., "Stability and Design of Concrete Frames". Journal of Structural Division, ASCE, v. 103, No. ST10, Oct 1977, pp 1953-1970.
[4] FURLONG, Richard W., "Frames with Slender Colums-Lateral Loads Analysis". CRSI Professional members Structural Bulletin No. 6, Mar. 1980, 10pp.
[5] DIXON, D. G., "Second-Order Analysis of Reinforced Concrete Sway Frames". M.A.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Wateloo, Ontario, 1985, 230pp.

MCDONALD[6] *apud* MACGREGOR (1993) produziu relações momento nas extremidades x rotação para vigas T, lajes armadas em uma direção e colunas. Para vigas T, com 1,2 % de armadura, o coeficiente de redução do E_cI_g variou de 0,37 a 0,44. Para lajes armadas em uma única direção, com 0,5 % de armadura, esse coeficiente variou de 0,16 a 0,22. Para colunas, o coeficiente de redução variou de 0,66 a 0,89. Baseado nesses resultados, MCDONALD propôs valores de coeficientes de redução iguais a 0,42 , 0,2 e 0,7 para vigas T, lajes armadas em uma única direção e pilares, respectivamente.

Observa-se um certo grau de variabilidade nos valores de EI_{ef} indicados para projeto pelos autores anteriormente citados.

MACGREGOR (1993) propõe ainda a adoção de um fator de redução para os valores de EI_{ef} dado por φ = 0,875. Essa redução permite levar em conta a variabilidade nas deflexões laterais, resultante de simplificações na modelagem das estruturas e da incerteza quanto aos valores reais de E_c e da inércia efetiva (I_{ef}).

FRANCO (1995) considera que essa redução só faz sentido para a formulação geral do ACI 318/89 e indica os valores de I_{ef} considerados para a próxima edição da Norma Brasileira (NB-1). O texto provisório da NB-1 prescreve que para as vigas com armadura nas duas faces da seção transversal, deve-se adotar I_{ef} = 0,5 I_g; para vigas armadas em apenas uma face I_{ef} = 0,4 I_g; para os pilares I_{ef} = 0,8 I_g; e para as lajes I_{ef} = 0,3 I_g. FRANCO & VASCONCELOS (1991) propõem ainda, como alternativa, a adoção de um valor único de I_{ef} = 0,7 I_g para vigas e pilares.

PINTO (1997) estudou vigas com diferentes taxas de armadura, processadas no LUSAS[7] através de modelos planos. Para as vigas obteve-se uma variação nos valores de EI_{ef} entre 0,4 E_cI_g e 0,64 E_cI_g, sendo que os valores mais baixos correspondem a vigas com armaduras em uma única face, e os maiores às vigas com armadura nas duas faces. Em conformidade, portanto, com a indicação do texto base da NB-1. Foram estudados também, alguns pilares curtos, onde se pudesse desprezar os efeitos devidos à NLG. Para estes, obteve-se uma variação nos valores de EI_{ef} de 0,72 E_cI_g a 1,26 E_cI_g, conforme sejam maiores ou menores os valores momentos fletores a que estão submetidos.

---

[6] MCDONALD, Brian E., "Second Order effects in Reinforced Concrete Frames". M.A.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Wateloo, Ontario, 1986, 257pp.

[7] Software produzido na Inglaterra pela FEA (Finite Element Analysis Ltd), capaz de realizar análises não-lineares através do método dos elementos finitos.

Por fim, analisou-se um pórtico plano com o mesmo modelo plano utilizado na análise dos pilares e das vigas. O resultado indica que dentre os valores propostos na literatura, os que mais se aproximam dos resultados obtidos no modelo plano processado no LUSAS, são aqueles propostos no texto base da NB-1. Entretanto, trata-se de um único exemplo analisado considerando-se somente a NLF, devendo esse resultado ser avaliado com cautela.

SHURAIN (1997) avaliou a rigidez lateral de 9 pórticos compostos por três membros: dois pilares e uma viga. Neste trabalho é apresentada a grande variação que ocorre no EI_{ef} dos membros constituintes da estrutura. De fato, quando um pórtico atinge a ruptura, somente as seções críticas atingem o colapso. A maioria delas permanecem pouco fissuradas apresentando EI_{ef} maior que o E_cI_g.

Duas indicações para redução de inércia são analisadas:

1) $EI_{ef} = 0{,}5\ E_cI_g$ para as vigas e $EI_{ef} = E_cI_g$ para os pilares;
2) $EI_{ef} = E_cI_{cr}$ para as vigas e $EI_{ef} = 0{,}4\ E_cI_g$ para os pilares; sendo I_{cr} a inércia da seção fissurada.

SHURAIN (1997) indica que a utilização de $EI_{ef} = 0{,}5\ E_cI_g$ para as vigas e $EI_{ef} = E_cI_g$ para os pilares, resulta em bons resultados em serviço. A utilização de $EI_{ef} = E_cI_{cr}$ para as vigas e $EI_{ef} = 0{,}4\ E_cI_g$ apresenta bons resultados somente para o colapso de pórticos com baixas taxas de armadura.

No tocante à inércia efetiva para a análise de membros isolados, têm-se pesquisado expressões que permitam uma estimativa simples e segura do EI_{ef} desses elementos. Esses valores são utilizados, em geral, em métodos aproximados para o dimensionamento dos elementos. É o caso, por exemplo, da aproximação adotada pelo ACI Building Code para o dimensionamento de pilares esbeltos. Este método utiliza o carregamento axial obtido de uma análise elástico-linear e um momento majorado, que inclui os efeitos referentes à NLG devidos ao deslocamento horizontal da coluna. A eficácia do processo está diretamente ligada a uma correta previsão do EI_{ef} para o elemento.

Esta determinação pode ser feita segundo as expressões do ACI Building Code (ACI 318-89 eq. 10-10 e 10-11) :

$$EI_{ef} = \frac{\left(0.2E_cI_g + E_sI_{se}\right)}{1+\beta_d} \qquad \text{ACI 318-89 eq. (10-10)}$$

ou

$$EI_{ef} = \frac{0.4E_c I_g}{1+\beta_d}$$ ACI 318-89 eq. (10-11)

onde:

β_d = quociente entre a parcela permanente do carregamento total e o carregamento total aplicado; E_c = Módulo de elasticidade do concreto; I_g = momento de inércia da seção bruta de concreto armado em relação ao centróide da seção transversal, I_{se}= momento de inércia da s barras de aço em relação ao centróide da seção transversal; E_s = Módulo de elasticidade longitudinal do aço.

MIRZA (1990) analisou cerca de 9500 colunas retangulares modeladas teoricamente. Estes resultados forneceram dados que permitiram a determinação de expressões para cálculo de EI_{ef}. Ainda no mesmo trabalho, Mirza comparou os resultados teóricos com os obtidos através das expressões do ACI 318-89. Observa-se nesta comparação que, em média, os valores do ACI estão em acordo com os valores teóricos. Entretanto, para um número significativo de colunas estes valores divergiram substancialmente desses resultados. Conclui-se ainda que os valores dados pelo ACI estão, em geral, cerca de duas vezes maiores que os propostos por Mirza. MIRZA (1990) propõe as seguintes expressões :

$$EI_{ef} = \frac{\alpha_1 E_c I_g + E_s I_{se}}{1+\beta_d} \qquad (2.11)$$

onde

$$\alpha_1 = [0.27 + 0.003(L/h) - 0.3(e/h)] \geq 0 \qquad (2.12)$$

ou alternativamente

$$\alpha_1 = [0.3 - 0.3(e/h)] \geq 0 \qquad (2.13)$$

sendo L = altura não contraventada da coluna, h = altura da seção transversal, e = a maior excentricidade nas extremidades, β_d, E_c, I_g, E_s, I_{se} são os mesmos das equações 10-10 e 10-11.

Com o objetivo verificar a validade das expressões 10-10 e 10-11 do ACI 318-89 para colunas com seção circular, SIGMON & AHMAD (1990) desenvolveram um modelo para análise em computador deste tipo de coluna. O

resultado deste estudo forneceu expressões parametrizadas para determinação do EI_{ef} de colunas circulares na fissuração, e no estado limite último de deformação 0.003 no concreto. Observou-se ainda, que na maioria dos casos as expressões do ACI superestimam os valores teóricos de EI_{ef}.

As expressões determinadas para colunas circulares são :

Fissuração : $P/P_0 \leq 0.6$

$$EI_{ef}/E_c I_g = 0.61\sqrt{\omega} - 0.24(P/P_0) + 0.74 \qquad (2.14)$$

Deformação 0.003 no concreto : $P/P_0 < 0.6$

$$EI_{ef}/E_c I_g = 0.53\sqrt{\omega} - 0.54(1 - P/P_0)^3 + 0.50 \qquad (2.15)$$

onde: $\omega = \rho f_y/f'_c$, $\rho = A_{st}/A_g$, P/P_0 = quociente entre o carregamento aplicado e a máxima capacidade resistente, $P_0 = 0.8\ f'_c A_c + f_y A_{st}$, f'_c = resistência à compressão do concreto, f_y = tensão de escoamento do aço, A_g = área bruta da seção transversal, A_{st} = área de aço, $A_c = A_g - A_{st}$.

ZENG *at all* (1992) desenvolveram expressões para o cálculo do EI_{ef} de membros individuais, baseados nas relações *momento x curvatura*. Foram efetuadas comparações de resultados obtidos em testes de laboratório, com as expressões do ACI e com as desenvolvidas por MIRZA (1990). O resultado destas comparações mostra que as relações propostas neste trabalho, para colunas retangulares, se adaptam melhor aos resultados experimentais que as equações do ACI, tanto para carregamento último quanto para carregamento de serviço.

As equações desenvolvidas são :

$$EI_{ef} = (1 + 0.3\gamma_1)(P_n e')/(\alpha \Phi_y) \qquad (2.16)$$

sendo :

$$\Phi_y d = (0.7 + 2.8\xi) \times 10^{-3} + f_y/E_s \qquad (2.17)$$

$$\gamma_1 = (b_f - b)h_f/(bd) \qquad (2.18)$$

$$\alpha_1 = 0.75 + 1.25(P/P_n) + 0.2(e/h) \tag{2.19}$$

$$\xi = \beta_1 \, x/d \tag{2.20}$$

onde: e' = excentricidade da força aplicada em relação à armadura menos comprimida, e = excentricidade da força aplicada em relação ao CG da seção transversal, b = largura da seção, b_f = largura da flange tracionada, β_1 = fator de equivalência de bloco retangular definido no ACI 318-89, x = profundidade da zona comprimida da seção, d = distância entre a fibra mais comprimida e o centróide da armadura tracionada, P/P_n = quociente entre o carregamento aplicado e a máxima capacidade resistente, h_f = altura da flange tracionada, f_y = tensão de escoamento do aço, E_s = Módulo de elasticidade do aço.

Observa-se uma grande quantidade de trabalhos publicados referentes ao estudo de ferramentas simplificadas para a análise não-linear das estruturas de edifícios em concreto armado.

No entanto, ainda existe uma carência de trabalhos referentes à determinação dos valores de EI_{ef} para a *análise global da estrutura*. A maior parte dos trabalhos se refere ao estudo de membros isolados (vigas e pilares), havendo poucos trabalhos que considerem os pórticos planos constituintes da estrutura. A lacuna existente fica evidenciada pela grande variabilidade nos valores de EI_{ef} propostos na literatura.

2.3. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

A determinação de parâmetros para avaliação dos efeitos não lineares nas estruturas de edifícios em concreto armado tem sido objeto de vários estudos desde a década de 60. Estes estudos se dividem, segundo a natureza dos efeitos não-lineares, em: consideração simplificada da NLG e consideração simplificada da NLF.

Para consideração simplificada da NLG são propostos dois parâmetros: o parâmetro α e parâmetro γ_z. O parâmetro α é um parâmetro que indica a necessidade ou não da realização de uma análise não-linear, conforme supere ou não o valor limite estabelecido para cada tipo de estrutura, não apresentando informações sobre a magnitude dos acréscimos de esforços devidos aos efeitos não-lineares. O parâmetro γ_z apresenta uma grande vantagem sobre o parâmetro α, pois permite uma estimativa confiável dos acréscimos de esforços obtidos em função da NLG, dentro de determinados limites. PINTO (1997) analisou a eficiência do parâmetro γ_z, indicando sua utilização com segurança até o limite de 1,20, em conformidade com FRANCO & VASCONCELOS (1991).

A consideração da NLF no parâmetro α já está embutida na formulação, na qual se considera uma redução de 30% no produto de rigidez característico, estando essa redução já incorporada aos valores limites de α. Para o parâmetro γ_z a NLF não está incorporada ao valor do parâmetro, sendo considerada através de reduções na inércia das vigas e dos pilares da estrutura. Assim, os deslocamentos da estrutura, utilizados para a determinação dos acréscimos nos momentos fletores, serão obtidos considerando-se uma perda de rigidez devida à NLF.

Observa-se que os coeficientes de redução de inércia possuem estreita ligação com os parâmetros α e γ_z, dependendo dos coeficientes utilizados a correta avaliação dos efeitos não-lineares nas estruturas.

A consideração simplificada da NLF tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores em todo o mundo, buscando-se uma forma de se considerar a NLF de forma simplificada e correta. Estes estudos referentes à consideração simplificada da NLF também se dividem, basicamente, em dois ramos: o estabelecimento de EI_{ef} para a realização de uma *análise global da estrutura,* e o estabelecimento de EI_{ef} para a *análise de membros isolados*.

O presente trabalho trata especificamente do primeiro grupo: dos valores de EI_{ef} a serem empregados na *análise global da estrutura*, para os quais a literatura apresenta uma grande variabilidade de valores propostos. Esta falta de consenso, na verdade, espelha a natureza do problema. De fato, pode-se obter resultados muito diferentes dependendo do tipo de carregamento da estrutura, da sua geometria e da taxa de amadura dos seus membros. Deve-se tem em mente, ainda, que a análise global da estrutura é efetuada em uma fase do projeto onde as amaduras são desconhecidas, devendo-se estabelecer os coeficientes de redução de inércia considerando-se valores usuais das armaduras empregadas em projeto.

Objetivando contribuir com a determinação dos valores de EI_{ef} a serem empregados no projeto de edifícios de concreto armado, PINTO (1997) iniciou um estudo referente às reduções de inércia inerentes a vigas e pilares. Pretende-se agora dar continuidade a este trabalho, estudando-se desta vez não mais membros individuais, mas pórticos planos com diferentes condições de carregamento, geometria e taxas de armadura.

Para que se possa avaliar de modo sistemático o fenômeno, propõem-se no presente trabalho a realização de uma análise paramétrica do assunto. Nesta, as taxas de armadura e os carregamentos variarão entre os limites extremos adotados em projeto. Este estudo possibilitará uma melhor compreensão do fenômeno, indicando os parâmetros mais relevantes para a perda de rigidez das estruturas de contraventamento dos edifícios em concreto armado.

Depois, serão estudadas estruturas pertencentes a edifícios usuais, determinado-se quais as perdas de rigidez encontradas para diferentes taxas de armaduras e dimensões dos elementos da estrutura.

Através dessa uma análise sistemática dessas estruturas de contraventamento, pretende-se contribuir de maneira efetiva para o estabelecimento dos valores EI_{ef} das vigas e pilares a serem utilizados no projeto das estruturas de contraventamento em concreto armado.

CAPÍTULO 3 – ANÁLISE NÃO-LINEAR RIGOROSA: IMPLEMENTAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. INTRODUÇÃO

Os métodos para análise de estruturas têm sofrido um aperfeiçoamento constante nos últimos anos. Os métodos de cálculo em regime elástico e linear têm dado lugar a métodos mais modernos que consideram o comportamento não-linear da estrutura e do material.

No capítulo anterior pôde-se observar que os efeitos não-lineares na análise estrutural de edifícios, são oriundos da não-linearidade geométrica da estrutura (NLG) e da não-linearidade física do material (NLF). Para que esses efeitos possam ser corretamente avaliados devem ser utilizadas ferramentas adequadas.

Neste capítulo, será desenvolvida uma teoria que descreva o comportamento não-linear das estruturas de barras de material elástico de forma exata, ou seja, sem restrições quanto à grandeza dos deslocamentos e das deformações. A formulação escolhida para implementação computacional, , apresentada por PIMENTA (1996), refere-se à uma Teoria Geometricamente Exata baseada na hipótese de *Bernoulli-Euler* para pórticos planos. Esta teoria, conforme PIMENTA (1996), pode ser estendida para a materiais elasto-plásticos, visco-elásticos e visco-plásticos, uma vez que estes se deixam integrar no tempo como os materiais elásticos.

Desse modo, foram introduzidos modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento não-linear do concreto, o tension stiffening e a influência dos estribos. Também para o aço foram considerados modelos

constitutivos que descrevessem o seu comportamento não-linear através de uma curva *tensão x deformação* bi-linear.

A integração para obtenção dos esforços na seção transversal foi realizada pelo *método das "fatias"*, no qual seção transversal dos elementos é dividida em fatias de concreto e de aço. A integração ao longo do elemento para a obtenção das respectivas forças internas foi realizada numericamente, utilizando-se o Método de Gauss para integração numérica.

3.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A realização de análises estruturais para edifícios de concreto armado e especialmente estruturas de contraventamento, via processos numéricos, tem sido objeto de estudo há muito tempo, havendo grande quantidades de trabalhos publicados em relação ao assunto.

Os estudos referentes à implementação da NLG via Método dos Elementos Finitos (MEF) se iniciaram, conforme CORRÊA (1991), com TUNER *et all* (1960). GALLAGHER & PADLOG (1963) introduzem a NLF na análise por elementos finitos. Neste mesmo ano BRANSON (1963) publica uma das mais difundidas fórmulas empíricas para avaliação da inércia efetiva de vigas e de lajes armadas em uma direção. ARGYRIS (1965) também estuda os problemas não-lineares físicos e geométricos.

MALLETT & MARCAL (1968) apresentam um desenvolvimento sistemático para a implementação da NLG, em coordenadas Lagrangianas, desenvolvendo o formalismo das matrizes incrementais. Empregando coordenadas Eulerianas destacam-se os trabalhos de JENNINGS (1968) e POWELL (1969).

KENT & PARK (1971) apresentam um modelo para o concreto comprimido confinado, baseado em resultados experimentais de outros autores. SCANLON & MURRAY (1974) modelaram o efeito de "tension sttifening" pela inclusão de um trecho descendente na curava de tensão deformação do concreto tracionado.

BATHE *et all* (1975) utilizando uma formulação consistente capaz de descrever a NLF e A NLG, apresentam formulações Lagrangianas aplicadas à análise dinâmica e estática com grandes deformações via MEF.

ARGYRIS *et all* (1979a) introduzem a formulação corrotacional para pórticos planos, com o conceito de graus de liberdades naturais na formulação Lagrangiana atualizada. Posteriormente, este conceito é estendido para pórticos espaciais por ARGYRIS *et all* (1979b).

FIGUEIRAS (1983) discute os modelos constitutivos para o concreto, incluindo as diversas peculiaridades da modelagem do material como o “tension sttifening”, a transferência de cisalhamento, fissuração através de modelos discretos ou contínuos, sendo de grande contribuição para o entendimento do comportamento do material.

Nas décadas de 80 e 90 existe uma grande quantidade de publicações referentes ao tratamento de estruturas aporticadas com não-linearidade física e geométrica. Dentre essas publicações, foram tomadas como referência para desenvolvimento do presente trabalho: VECCHIO & EMARA (1992), KIM & LEE (1993), RASHEED & DINNO (1994), SHURAIM (1997), CHAN *et all* (2000).

No próprio Departamento de Estruturas da EESC-USP, existem trabalhos que contemplam o assunto de forma sistemática e acessível. O sistema LASER (1987), desenvolvido por CORRÊA & RAMALHO, permite a análise linear de estruturas planas. Posteriormente, RAMALHO (1990) estendeu o sistema para a análise linear de pórticos espaciais. CORRÊA (1991) deu continuidade ao aperfeiçoamento do sistema, implementando a análise não-linear geométrica, para pórticos planos e espaciais, e análises elasto-plásticas, para o tratamento de lajes.

O estudo de modelos apropriados para o concreto armado a serem empregados na análise estrutural de edifícios é abordado por CILONI (1993). Nesse trabalho são apresentados modelos usuais para modelagem de barras de concreto armado, para análises em serviço ou em regime de ruptura. SILVA (1996) aborda os problemas da não-linearidade física (NLF) e da não-linearidade geométrica (NLG) em pórticos planos, adotando uma formulação baseada na teoria de grandes deformações e grandes deslocamentos para a o tratamento da NLG e o processo das fatias, com a discretização da seção transversal do elemento, para o cômputo da NLF.

Também merecem destaque os seguintes trabalhos desenvolvidos na EESC-USP: VENTURINI (1987), RODRIGUES (1997), CADAMURO Jr (1997), PAULA (1997) e PAULA (2001). Deve-se ainda destacar trabalhos de pesquisadores de outras instituições como: PIMENTA (1986), MAZZILLI (1987),

PIMENTA & MAZZILLI (1986), PIMENTA & SOLER (1989), SOLER (1989), PIMENTA & YOJO (1992), SOLER (1995) e PIMENTA (1996).

Além dos trabalhos anteriores, deve-se também destacar aqueles relacionados ao estudo do comportamento das peças de concreto armado, importantes para o desenvolvimento deste trabalho: FUSCO (1981), FUSCO (1993), FUSCO (1996), SANTOS (1977), SANTOS (1981), CHEN (1982), CHEN & LUI (1988), RASHEED & DINO (1994), SCORDELIS & CHAN (1987), MARTINS (1995), ASSAN (1990).

São também de fundamental importância os trabalhos relativos aos procedimentos para tratamento de problemas não-lineares, nos quais são apresentadas estratégias de solução e algoritmos numéricos empregados no decorrer do trabalho: CRISFIELD (1982), BATHE & CIMENTO (1980), OWEN & HINTON (1980), HINTON *at all* (1982), PROENÇA (1989) e BATHE (1996).

3.3. ANÁLISE NÃO-LINEAR VIA M.E.F.

Será apresentada neste item a formulação corrotacional de uma Teoria Geometricamente Exata, apresentada por PIMENTA (1996), baseada na hipótese de *Bernoulli-Euler* para pórticos planos. Maiores detalhes podem ser encontrados em SOLER (1989), PIMENTA (1996) e SILVA (1996).

3.3.1. DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

Seja uma barra de pórtico plano em sua configuração inicial ou de referência, relacionada a um eixo de referência cartesiano global *X, Y*. Os graus de liberdade relacionado aos nós são os deslocamentos *u* e *v,* segundo os eixos cartesianos globais, e a rotação θ, positiva no sentido anti-horário.

Considere-se esta barra na configuração de referência com comprimento l_r e formando um ângulo φ_r com o eixo x, conforme a figura 3.1. Nesta configuração, o sistema local de coordenadas x_r, y_r está centrado no elemento. Em determinado

momento, esta barra se encontra em uma nova posição denominada de configuração deformada ou atual. Nesta nova configuração, o sistema local de coordenadas x_c, y_c centrado na corda de comprimento l_c que une as extremidades do elemento, formando um ângulo φ_c com o eixo x.

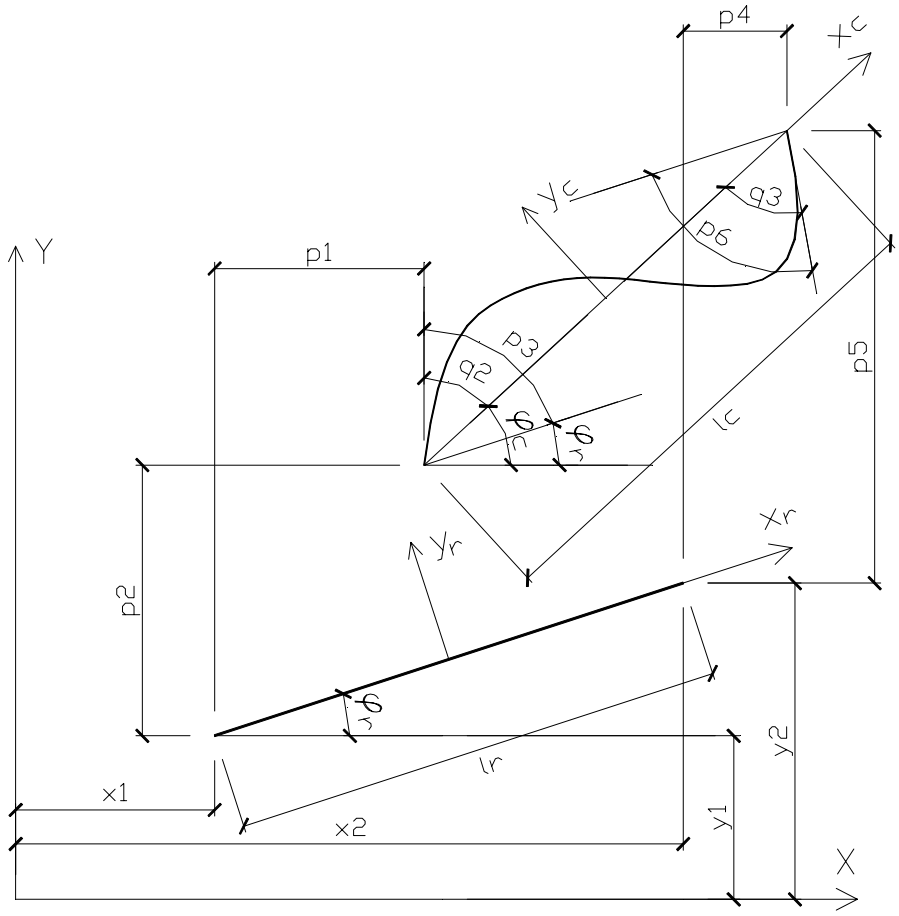


Figura 3.1 – Sistema de coordenadas corrotacionais

Os deslocamentos medidos no sistema global ficam definidos pelo vetor **p**:

$$\mathbf{p}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \\ \mathbf{p}_6 \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

No sistema local corrotacional, estes deslocamentos são dados por:

$$\mathbf{q}_\alpha = \begin{Bmatrix} \mathbf{q_1} \\ \mathbf{q_2} \\ \mathbf{q_3} \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

definidas do seguinte modo: $\mathbf{q_1} = l_c - l_r$, $\mathbf{q_2} = \mathbf{p}_3 - \theta_c$, $\mathbf{q}_3 = \mathbf{p}_6 - \theta_c$, sendo $\theta_c = \varphi_c - \varphi_r$.

Os graus de liberdade no sistema corrotacional local podem ser escritos em função dos graus de liberdade cartesianos globais, obtendo-se conforme a figura 3.1:

$$l_r = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

$$l_c = \left[(x_2 - x_1 + p_4 - p_1)^2 + (y_2 - y_1 + p_5 - p_2)^2\right]^{1/2} \tag{3.4}$$

$$\theta_c = \varphi_c - \varphi_r = \text{arcsen}\left[\frac{(y_2 + p_5 - y_1 - p_2)(x_2 - x_1)}{l_c l_r} - \frac{(x_2 + p_4 - x_1 - p_1)(y_2 - y_1)}{l_c l_r}\right] \tag{3.5}$$

Desse modo, pode-se definir a matriz instantânea de mudança de coordenadas **B**:

$$\delta\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{B} \quad \delta\mathbf{p_i} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{q}_{\alpha,\mathbf{i}} = \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p_i}} \tag{3.7}$$

Derivando-se as equações 3.3, 3.4 e 3.5, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \partial \mathbf{q}_1 \\ \partial \mathbf{q}_2 \\ \partial \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi_c & -\operatorname{sen}\varphi_c & 0 & \cos\varphi_c & \operatorname{sen}\varphi_c & 0 \\ -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi_c}{l_c} & \dfrac{\cos\varphi_c}{l_c} & 1 & \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_c}{l_c} & -\dfrac{\cos\varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi_c}{l_c} & \dfrac{\cos\varphi_c}{l_c} & 0 & \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_c}{l_c} & -\dfrac{\cos\varphi_c}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \mathbf{p}_1 \\ \partial \mathbf{p}_2 \\ \partial \mathbf{p}_3 \\ \partial \mathbf{p}_4 \\ \partial \mathbf{p}_5 \\ \partial \mathbf{p}_6 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

A matriz **B** pode ser escrita da como um produto entre duas matrizes:

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}\mathbf{T}\,, \tag{3.9}$$

sendo:

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\dfrac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

e **T** a tradicional matriz de mudança de coordenadas cartesianas, que relaciona os graus de liberdade cartesianos globais com os graus de liberdade locais.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_c & \operatorname{sen}\varphi_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi_c & \cos\varphi_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_c & \operatorname{sen}\varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\varphi_c & \cos\varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

3.3.2. CAMPOS DE DEFORMAÇÃO E DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO

Admitida a hipótese de Navier, pode-se obter o campo de deformações em função dos deslocamentos axiais ($\bar{\mathbf{u}}$) e transversais ($\bar{\mathbf{v}}$) dos pontos situados sobre o eixo da barra, bem como a rotação (α) das seções transversais (figura 3.2).

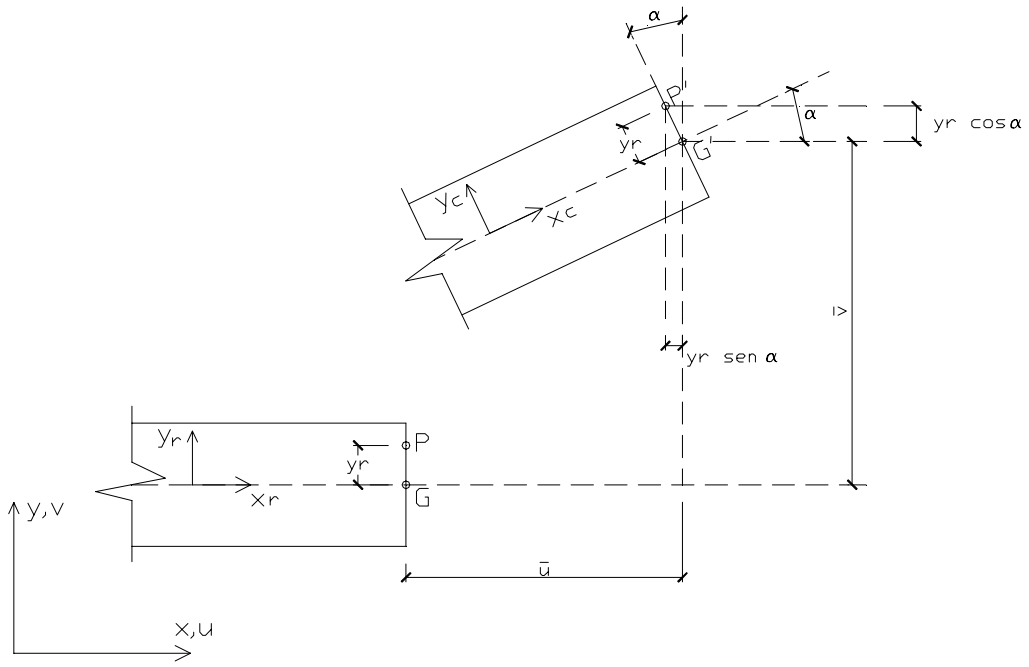


Figura 3.2 – Deslocamentos na barra

Os deslocamentos de um ponto genérico P, localizado a uma distância y_r do eixo da barra, são dados por:

$$u = \bar{u} - y_r \operatorname{sen}\alpha \tag{3.12}$$

$$v = \bar{v} - y_r (1 - \cos\alpha) \tag{3.13}$$

No sistema corrotacional pode-se escrever:

$$u_c = \bar{u}_c - y_r \operatorname{sen}\alpha \tag{3.14}$$

$$v_c = \bar{v}_c - y_r(1 - \cos\alpha) \tag{3.15}$$

Examinando-se um elemento diferencial do eixo da barra (figura 3.3) nas configurações de referência (AB) e deformada (A'B'), tem-se:

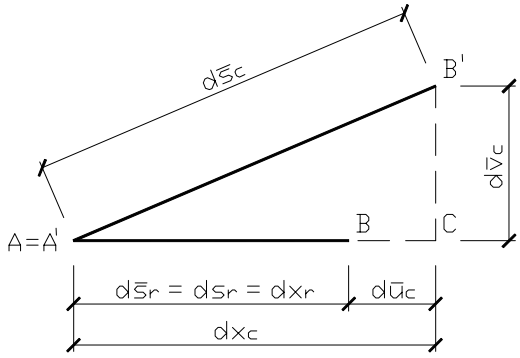


Figura 3.3 – Elemento diferencial do eixo da barra

$$d\bar{s}_c = \left[(dx_r + d\bar{u}_c)^2 + d\bar{v}_c^2\right]^{1/2} \tag{3.16}$$

$$tg\alpha = \frac{d\bar{v}_c}{dx_r + d\bar{u}_c} = \frac{\dfrac{d\bar{v}_c}{dx_r}}{\dfrac{dx_r}{dx_r} + \dfrac{d\bar{u}_c}{dx_r}} \tag{3.17}$$

$$tg\alpha = \frac{v_c'}{1 + \bar{u}_c'} \tag{3.18}$$

$$d\bar{x}_c = dx_r + d\bar{u}_c \tag{3.19}$$

Sabendo-se que o estiramento da fibra do eixo é dado por $\bar{\lambda} = d\bar{s}_c / d\bar{s}_r$ pode-se escrever:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{s}_c}{dx_r}\frac{dx_r}{ds_r} \tag{3.20}$$

sendo o estiramento da fibra distante y_r do eixo da barra dado por $\lambda = dx_c / dx_r$.

Assim, tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{dx_c}{d\bar{s}_c} = \frac{dx_c}{\lambda d\bar{s}_r} = \frac{dx_c}{\lambda dx_r} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \tag{3.21}$$

logo:

$$\bar{\lambda} = \lambda \sec\alpha \tag{3.22}$$

e

$$\lambda = \frac{dx_c}{dx_r} = \frac{dx_r + d\bar{u}_c}{dx_r} = 1 + \frac{d\bar{u}_c}{dx_r} = 1 + \bar{u}_c' \tag{3.23}$$

Adotando-se como medida de deformação a deformação linear $\varepsilon = \lambda - 1$ e sendo válida a hipótese de Navier, tem-se a seguinte expressão para o campo de deformação:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' \tag{3.24}$$

sendo α' a curvatura da seção transversal.

A expressão 3.24, com o auxílio de 3.22 e 3.23, resulta em:

$$\varepsilon = (1 + \bar{u}_c')\sec\alpha - 1 - y_r \alpha' \tag{3.25}$$

que é a expressão do campo de deformação em função dos deslocamentos axiais ($\bar{u}$) e transversais ($\bar{v}$) do eixos da barra, que podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais q_1, q_2 e q_3.

3.3.3. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS INTERNOS ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (PTV)

Sabendo-se que o campo de deformações ε pode ser expresso em função dos grau de liberdade naturais q_α (α=1,3), e que estes também podem ser expressos em função de dos graus de liberdade cartesianos p_i (i=1,6), pode-se escrever:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{p}_i)) \tag{3.26}$$

Seja $\mathbf{P}_i$ o vetor de esforços nodais internos do elemento, $\delta\varepsilon$ a deformação virtual de uma fibra genérica, σ a tensão normal na seção transversal e $\delta\mathbf{p}_i$ o vetor dos deslocamentos virtuais dos pontos nodais do elemento. Aplicando-se o PTV resulta:

$$\mathbf{P}_i \delta\mathbf{p}_i = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \delta\varepsilon dA_r dx_r \ . \tag{3.27}$$

Calculando-se a variação da equação 3.26

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{q}_\alpha} \frac{\partial\mathbf{q}_\alpha}{\partial\mathbf{p}_i} \delta\mathbf{p}_i \tag{3.28}$$

e substituindo-se em 3.27, resulta:

$$\mathbf{P}_i \delta\mathbf{p}_i = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{q}_\alpha} \frac{\partial\mathbf{q}_\alpha}{\partial\mathbf{p}_i} \delta\mathbf{p}_i dA_r dx_r \tag{3.29}$$

logo,

$$\mathbf{P}_i = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{q}_\alpha} \frac{\partial\mathbf{q}_\alpha}{\partial\mathbf{p}_i} dA_r dx_r \ . \tag{3.30}$$

A derivada $\partial \mathbf{q}_\alpha / \partial \mathbf{p}_i$, a já conhecida matriz **B**, independe de dA_r e dx_r podendo, assim, ser colocado fora da integral:

$$\mathbf{P}_i = \left(\int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} dA_r dx_r \right) \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \tag{3.31}$$

Considerando que $\mathbf{Q}_\alpha$ é o vetor de esforços internos em coordenadas naturais energeticamente conjugado com os deslocamentos nas coordenadas naturais $\mathbf{q}_\alpha$, o PTV pode ser escrito como:

$$\mathbf{Q}_\alpha \delta \mathbf{q}_\alpha = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \delta \varepsilon dA_r dx_r \, . \tag{3.32}$$

Utilizando-se a equação 3.6 obtém-se:

$$\mathbf{Q}_\alpha \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \delta \mathbf{p}_i = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \delta \mathbf{p}_i dA_r dx_r \tag{3.33}$$

logo,

$$\mathbf{Q}_\alpha = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} dA_r dx_r \, . \tag{3.34}$$

De 3.31 e 3.34 obtém-se a relação entre os esforços nodais naturais $\mathbf{Q}_\alpha$ e os esforços nodais cartesianos $\mathbf{P}_i$, dada por:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_\alpha \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \, . \tag{3.35}$$

Utilizando-se a notação matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^t \mathbf{Q} \tag{3.36}$$

3.3.4. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A matriz de rigidez tangente no sistema de coordenadas cartesiano é dada por:

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{p}_j} . \tag{3.37}$$

No sistema de coordenadas naturais , de forma análoga, é dada por:

$$\mathbf{k}^*_{ij} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial \mathbf{q}_\beta} . \tag{3.38}$$

Substituindo-se 3.35 em 3.37 e aplicando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{Q}_\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i \partial \mathbf{p}_j} + \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial \mathbf{q}_\beta} \frac{\partial \mathbf{q}_\beta}{\partial \mathbf{p}_j} \right) \tag{3.39}$$

Pode-se obter a matriz $\mathbf{k}^*$ a partir de 3.34 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^*_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial \mathbf{q}_\beta} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha \partial \mathbf{q}_\beta} dA_r dx_r \\ &+ \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\beta} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} dA_r dx_r \end{aligned} \tag{3.40}$$

Sabendo-se que o módulo de rigidez tangente do material é definido por

$$D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} , \tag{3.41}$$

resulta:

$$\mathbf{k}^*_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial \mathbf{q}_\beta} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha \partial \mathbf{q}_\beta} dA_r dx_r + \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} D \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} dA_r dx_r \tag{3.42}$$

Definindo-se :

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha \partial \mathbf{q}_\beta} dA_r dx_r \ , \tag{3.43}$$

e

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} D \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}_\alpha} dA_r dx_r \tag{3.44}$$

resulta:

$$\mathbf{k}^*_{\alpha\beta} = \mathbf{Q}_{\alpha\beta} = \mathbf{H}_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_{\alpha\beta} \tag{3.45}$$

A matriz de rigidez tangente em coordenadas cartesianas fica, conforme a equação 3.39, dada por:

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i} \left(\mathbf{H}_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial \mathbf{q}_\beta}{\partial \mathbf{p}_j} + \mathbf{Q}_\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i \partial \mathbf{p}_j} \tag{3.46}$$

sendo

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_i \partial \mathbf{p}_j} = \mathbf{G}_\alpha \tag{3.47}$$

Na forma matricial a equação 3.46 fica:

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} + \sum_1^3 \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{G}_\alpha \tag{3.48}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_g \tag{3.49}$$

onde $$\mathbf{k}_m = \mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B} \tag{3.50}$$

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{B}^t\mathbf{H}\mathbf{B} + \sum_1^3 \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{G}_\alpha \tag{3.51}$$

sendo $\mathbf{k}_m$ a matriz de rigidez constitutiva do elemento, que depende do material, e $\mathbf{k}_g$ a matriz de rigidez geométrica do elemento, que depende da geometria e do nível de tensão normal.

As matrizes $\mathbf{G}_\alpha$ podem de escritas como um triplo produto matricial:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^t\overline{\mathbf{G}}_\alpha\mathbf{T} \tag{3.52}$$

onde $\overline{\mathbf{G}}_\alpha$ é a forma local, em coordenadas naturais, de $\mathbf{G}_\alpha$ e $\mathbf{T}$ é matriz de rotação de eixos definida em 3.11. Em 3.52 tem-se:

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \textit{simétrica} & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$\overline{\mathbf{G}}_2 = \overline{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \textit{simétrica} & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

Para que 3.48 possa ser explicitada, são introduzidas interpolações de elementos finitos para $\overline{u}_c$ e α. Será utilizada uma interpolação linear para $\overline{u}_c$ e quadrática para α:

$$\bar{u}_c = q_1\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l_c}\right) \tag{3.55}$$

logo

$$\bar{u}_c' = \frac{q_1}{l_r}\,, \tag{3.56}$$

e

$$\alpha = q_2\psi_2' + q_3\psi_3' \tag{3.57}$$

onde

$$\psi_2' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \psi_3' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4}\,. \tag{3.58}$$

Logo tem-se:

$$\alpha' = q_2\psi_2'' + q_3\psi_3'' \tag{3.59}$$

onde

$$\psi_2'' = \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \quad \text{e} \quad \psi_3'' = \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r}\,. \tag{3.60}$$

As deformações obtidas de 3.25, levando-se em conta as equações 3.56 a 3.60, são dadas por:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(q_2\psi_2' + q_3\psi_3'\right)^2 - y_r\left(q_2\psi_2'' + q_3\psi_3''\right). \tag{3.61}$$

SOLER (1989), PIMENTA (1996) e SILVA (1996) utilizam para 3.61 uma simplificação que consiste em se calcular um valor médio para a deformação da fibra do eixo do elemento para a obtenção das matrizes **Q**, **H** e **D.** Essa simplificação facilita a implementação no regime elástico linear, no entanto, para o regime elasto-plástico requer simplificações adicionais (ANEXO A), indicadas por SILVA (1996), que no presente trabalho serão abandonadas, adotando-se um processo de integração no volume do elemento.

A formulação corrotacional da teoria exata fica, então, completamente definida, faltando somente o desenvolvimento algébrico das equações 3.34, 3.43, 3.44 e 3.47 para a obtenção do vetor **Q** e das matrizes **H**, **D** e **G**, respectivamente, necessárias para a obtenção da matriz de rigidez **k** do elemento.

A seguir são apresentadas as matrizes e vetores após os desenvolvimentos algébrico necessários

Vetor dos esforços nodais naturais **Q**:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)dx_r \\ \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left(N\lambda\alpha\psi_2' + M\psi_2''\right)dx_r \\ \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left(N\lambda\alpha\psi_3' + M\psi_3''\right)dx_r \end{Bmatrix} \tag{3.62}$$

onde N é a força normal e M o momento fletor nas seções transversais do elemento, definidos por:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma b dy_r \ ; \tag{3.63}$$

e

$$M = -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma b y_r dy_r \ . \tag{3.64}$$

Matriz de rigidez geométrica em coordenadas naturais **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \int_{-l_r/2}^{l_r/2} N\frac{1}{l_r}\alpha\psi_2' dx_r & \int_{-l_r/2}^{l_r/2} N\frac{1}{l_r}\alpha\psi_3' dx_r \\ & \int_{-l_r/2}^{l_r/2} N\lambda\psi_2'\psi_2' dx_r & \int_{-l_r/2}^{l_r/2} N\lambda\psi_2'\psi_3' dx_r \\ \textit{simétrica} & & \int_{-l_r/2}^{l_r/2} N\lambda\psi_3'\psi_3' dx_r \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Matriz de rigidez constitutiva em coordenadas naturais **D**:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ simétrica & & D_{33} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

sendo

$$\mathbf{D}_{11} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} C_1 \frac{1}{l_r^2}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)^2 dx_r \ ; \tag{3.67}$$

$$\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\frac{C_1\lambda\alpha\psi_2'}{l_r} - \frac{C_2\psi_2''}{l_r}\right)dx_r \ ; \tag{3.68}$$

$$\mathbf{D}_{13} = \mathbf{D}_{31} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\frac{C_1\lambda\alpha\psi_3'}{l_r} - \frac{C_2\psi_3''}{l_r}\right)dx_r \ ; \tag{3.69}$$

$$\mathbf{D}_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2}\left(C_1\lambda^2\alpha^2\psi_2'\psi_2' - 2C_2\lambda\alpha\psi_2'\psi_2'' + C_3\psi_2''\psi_2''\right)dx_r \ ; \tag{3.70}$$

$$\mathbf{D}_{23} = \mathbf{D}_{32} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2}\left(C_1\lambda^2\alpha^2\psi_2'\psi_3' - 2C_2\lambda\alpha\left(\psi_2'\psi_3'' + \psi_3'\psi_2''\right) + C_3\psi_2''\psi_3''\right)dx_r \ ; \tag{3.71}$$

$$\mathbf{D}_{33} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2}\left(C_1\lambda^2\alpha^2\psi_3'\psi_3' - 2C_2\lambda\alpha\psi_3'\psi_3'' + C_3\psi_3''\psi_3''\right)dx_r \ ; \tag{3.72}$$

com as constantes C_1, C_2 e C_3 definidas por:

$$C_1 = \int_{A_r} D dA_r = \int_{-h/2}^{h/2} D b dy_r \ ; \tag{3.73}$$

$$C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r = \int_{-h/2}^{h/2} D b y_r dy_r \ ; \tag{3.74}$$

$$C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r = \int_{-h/2}^{h/2} D b y_r^2 dy_r \ . \tag{3.75}$$

As integrações na seção transversal dos elementos foram calculadas utilizando-se o método das fatias, no qual a seção transversal é dividida em *n* camadas, sendo o valor final da integral o resultado do somatório das *n* camadas. Ao longo do elemento foi utilizado o Método de Gauss para integração numérica de funções.

3.3.5. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Os modelos constitutivos dos materiais foram adotados de forma que se pudesse considerar os parâmetros mais relevantes envolvidos no problema.

O concreto comprimido foi modelado utilizando-se a curva proposta por KENT & PARK (1971), permitindo considerar o efeito de confinamento produzido pela armadura transversal existente nas peças de concreto armado. A curva da figura 3.4 é dividida em três regiões:

Região AB: O ramo ascendente da curva é representado por uma parábola do segundo grau, cuja forma não é afetada pelo efeito de confinamento. A deformação correspondente à máxima tensão é adotada com ε_0=0,002.

$$\sigma = f_c' \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \tag{3.76}$$

onde:

f_c' = tensão de compressão máxima do concreto;

ε_0 = deformação específica no concreto correspondente à máxima tensão;

ε_c = deformação específica no concreto;

σ = tensão no concreto correspondente à deformação ε.

Região BC: O ramo descendente da curva corresponde a uma reta cuja inclinação é definida determinando-se a deformação quando a tensão do concreto se reduz à 50% da tensão de pico. Para o concreto sem efeito de confinamento essa deformação é dada por:

$$\varepsilon_{50u} = \frac{3 + 0{,}002 f_c'}{f_c' - 1000} \tag{3.77}$$

sendo a tensão f'_c expressa em libras por polegada quadrada.

Para o concreto confinado por estribos retangulares, a inclinação do ramo descendente é reduzida, sendo relevantes a seguintes variáveis:

A''_s – área da seção transversal do estribo;

s – espaçamento entre os estribos;

b” e d” – largura e altura dos estribos b”< d”.

Dessa forma pode-se definir a taxa volumétrica de confinamento por estribos retangulares:

$$p'' = \frac{2(b'' + d'')A_s''}{b''d''s} \tag{3.78}$$

A equação do ramo descendente da curva pode ser escrita como:

$$\sigma = f_c'\left[1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)\right] \tag{3.79}$$

sendo

$$Z = \frac{0{,}5}{\varepsilon_{50h} + \varepsilon_{50u} - \varepsilon_0} \tag{3.80}$$

e

$$\varepsilon_{50h} = \frac{3}{4} p'' \sqrt{\frac{b''}{s}} \tag{3.81}$$

Região CD: Admite-se que o concreto mantém uma tensão de 0,2 f'_c indefinidamente.

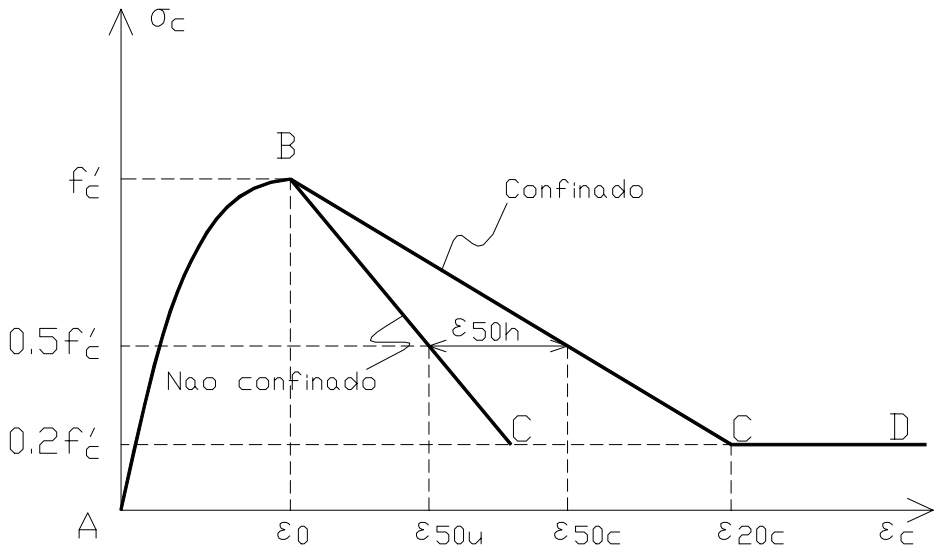


Figura 3.4 – Curva tensão x deformação para o concreto comprimido

Para o concreto tracionado, figura 3.5, adotou-se o modelo proposto por FIGUEIRAS (1983). Nesse modelo o concreto tracionado se comporta de forma elástico-linear até a abertura da fissura. Após atingida a tensão última de tração, em função dos efeitos de aderência, o concreto intacto entre fissuras contribui para o enrijecimento da estrutura como um todo. Este efeito, conhecido como tension stiffening, pode ser considerado de forma indireta pela hipótese de que o concreto, após a fissuração, apresenta uma diminuição gradual na resistência à tração até não ser mais capaz de absorver mais tensões de tração.

Desse modo, pode-se expressar o comportamento do concreto na tração por:

$$\sigma = \alpha f_t' \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m} \right) \qquad \text{para} \quad \varepsilon_t \le \varepsilon \le \varepsilon_m \qquad (3.82)$$

ou

$$\sigma = \frac{f_t}{\varepsilon_t} \varepsilon \qquad \text{para} \quad \varepsilon \le \varepsilon_t \qquad (3.83)$$

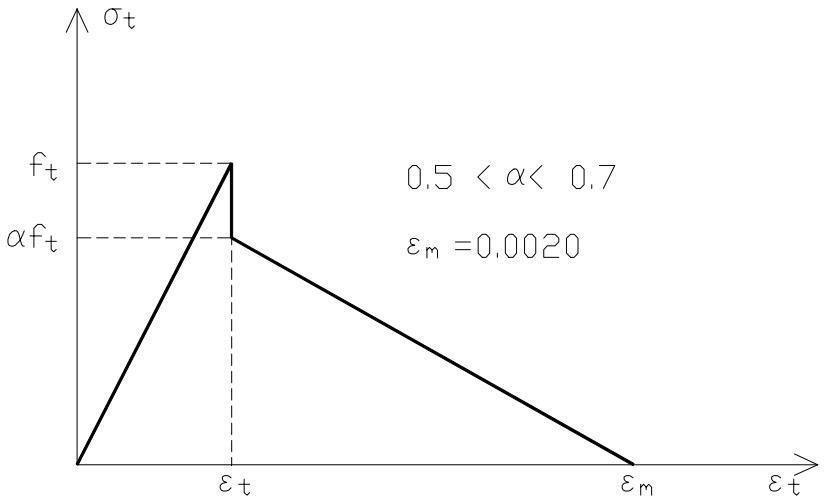


Figura 3.5 – Curva tensão x deformação para o concreto tracionado

Para o aço adotou-se um modelo elástico não-linear com a possibilidade de encruamento positivo, conforme diagrama da figura 3.6.

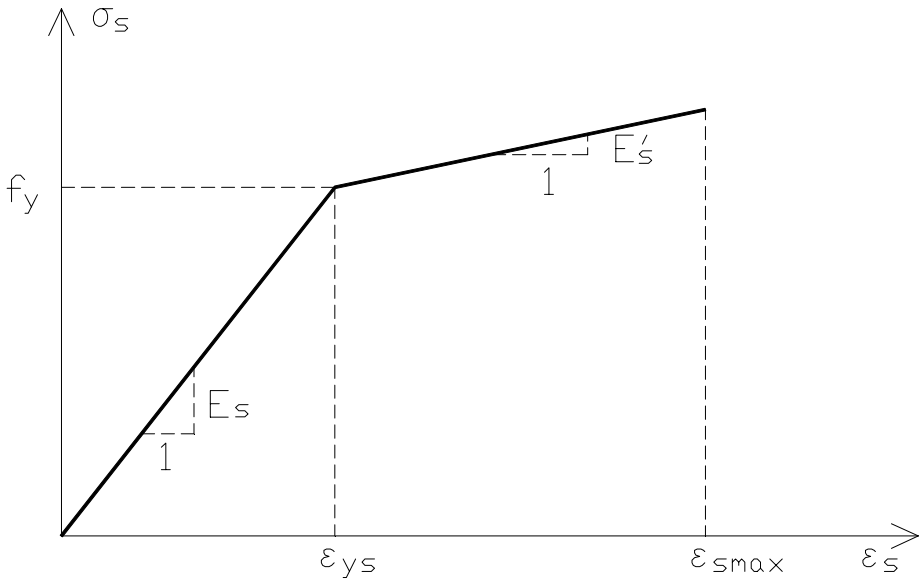


Figura 3.6 – Curva tensão x deformação para o aço

onde:

f_{ys} = tensão de escoamento do aço;

ε_{ys} = deformação específica no aço correspondente à tensão de escoamento;

ε_{smax} = deformação específica máxima permitida para o aço (ε_{yu} = 0,010);

E_s = Módulo de elasticidade do aço (E_s = 210000 MPa);

E_s' = Módulo de elasticidade do aço após o escoamento.

O modelo físico utilizado para o concreto considera os efeitos não-lineares do concreto comprimido, o confinamento do concreto devido aos estribos, o concreto tracionado e o tension stiffening, contribuindo para uma descrição mais precisa do comportamento do material.

A consideração do efeito de confinamento do concreto pelos estribos, particularmente, possibilita a extensão do programa para análise utilizando-se concreto de alta resistência, onde esse fenômeno é importante para a correta descrição do comportamento estrutural.

3.3.6. SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Para se resolver o problema estrutural é necessário definir a matriz de incidência cinemática, que relaciona os deslocamentos nodais da estrutura $\mathbf{p}^*$, referidos às coordenadas globais, e os deslocamentos nodais do elemento $\mathbf{p}$, referidos às coordenadas locais. Definida como:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\beta} \quad \mathbf{p}^* \tag{3.84}$$

a variação de 3.84 é, então, dada por:

$$\delta\mathbf{p} = \boldsymbol{\beta} \quad \delta\mathbf{p}^* \,. \tag{3.85}$$

O trabalho virtual interno para toa a estrutura é dado pela soma dos trabalhos virtuais de cada um de seus *n* elementos:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^t \delta\mathbf{p}_\mathbf{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^t \boldsymbol{\beta}_i \delta\mathbf{p}_i^* \tag{3.86}$$

O vetor de forças internas da estrutura **S**, determinado em função dos esforços internos no elemento, fica definido por:

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{P}_i \tag{3.87}$$

Substituindo-se 3.87 em 3.86 resulta:

$$\delta W_{\text{int}} = \mathbf{S}^{\mathbf{t}} \delta \mathbf{p}^* \tag{3.88}$$

O trabalho virtual externo da estrutura, supondo-se que o carregamento externo seja aplicado nos nós, é dado por:

$$\delta W_{ext} = \mathbf{R}^{\mathbf{t}} \delta \mathbf{p}^* \tag{3.89}$$

onde **R** é o vetor dos esforços nodais externos aplicados à estrutura.

Considerando-se um deslocamento virtual qualquer, pelo PTV, deve-se ter $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$, resultando:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} \tag{3.90}$$

A equação 3.90 é a equação do equilíbrio estrutural, na qual os esforços internos devem ser iguais aos esforços externos da estrutura.

Partindo-se desta equação, pode-se obter a equação do equilíbrio incremental:

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{R} \tag{3.91}$$

sendo

$$\Delta \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\beta}_i^t \Delta \mathbf{P}_i \tag{3.92}$$

onde $\Delta\mathbf{P}_i$ é o incremento de esforços nodais no elemento *i* expresso por:

$$\Delta\mathbf{P}_i = \mathbf{k}_i \Delta\mathbf{p}_i \tag{3.93}$$

onde $\Delta\mathbf{p}_i$ é o incremento dos esforços nodais do elemento *i* e $\mathbf{k}_i$ a matriz de rigidez tangente deste elemento.

Levando-se 3.93 em 3.92 resulta:

$$\Delta\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\beta}_i^t \mathbf{k}_i \Delta\mathbf{p}_i \tag{3.94}$$

e de 3.84 vem:

$$\Delta\mathbf{p}_i = \boldsymbol{\beta}_i \Delta\mathbf{p}^* . \tag{3.95}$$

De 3.95 e 3.94 resulta:

$$\Delta\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\beta}_i^t \mathbf{k}_i \boldsymbol{\beta}_i \Delta\mathbf{p}^* = \mathbf{K}\Delta\mathbf{p}^* \tag{3.96}$$

onde $\mathbf{K} = \boldsymbol{\beta}_i^t \mathbf{k}_i \boldsymbol{\beta}_i$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura.

Desse modo, a equação 3.91 fica dada por:

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{p}^* \tag{3.97}$$

sendo $\Delta\mathbf{p}^*$ o vetor de incremento de deslocamentos na estrutura, associado ao incremento de forças nodais externas $\Delta\mathbf{R}$.

A solução do problema estático, de 3.90, fica dada por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}^*) - \mathbf{R} = \mathbf{0} \tag{3.98}$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

Esta equação é na verdade um sistema de equações não-lineares em $\mathbf{p}^*$. De fato, os deslocamentos globais da estrutura dependem dos deslocamentos locais dos elementos **p**, que por sua vez depende do nível de tensão e deformação nos elementos.

Para resolução do sistema não-linear adotou-se o método de Newton-Raphson modificado, bastante conhecido na literatura: CRISFIELD (1980), PROENÇA (1989), CORRÊA (1991), CILONI (1993), BATHE (1996) e SILVA (1996).

De forma simplificada, o método desenvolve-se segundo um procedimento incremental e iterativo, sendo a matriz de rigidez tangente recalculada no início de cada incremento, o que torna o processo mais vantajoso computacionalmente. Em cada incremento, deve-se resolver uma equação semelhante à equação 3.97. A diferença é que o vetor dos esforços externos deve incluir o resíduo, dado por:

$$\mathbf{S} - \mathbf{R} = \boldsymbol{\psi} \tag{3.99}$$

sendo $\boldsymbol{\psi}$ o vetor dos resíduos.

No início do incremento $\boldsymbol{\psi}$ é nulo, e a solução corresponde aos deslocamentos $\mathbf{p}^*$ devidos ao carregamento externo **R**. Nas iterações subsequentes serão computados novos deslocamentos $\mathbf{p}^*$ devidos ao resíduo $\boldsymbol{\psi}$.

Ao final de cada iteração, verifica-se o equilíbrio entre o carregamento externo aplicado **R** e o vetor de forças internas **S**. Quando o valor do resíduo $\boldsymbol{\psi}$ torna-se inferior a um valor pré-determinado é obtida a convergência no incremento, passando-se ao próximo incremento de carga.

O algoritmo anterior foi implementado em um programa computacional, na linguagem FORTRAN Power-Station, denominado PPNL (Pórtico Plano Não-Linear).

3.4. EXEMPLOS

Neste item são apresentados alguns exemplos extraídos da literatura, cujos resultados serão utilizados para avaliação daqueles obtidos pelo programa PPNL.

3.4.1. ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA : VIGA EM BALANÇO

Para demonstrar a eficácia da formulação apresentada na solução de problemas referentes à NLG, foi analisada uma viga em balanço com um momento aplicado na extremidade, cuja solução teórica é conhecida (figura 3.7). A viga foi dividida em 10 elementos, sendo o momento aplicado de forma crescente.

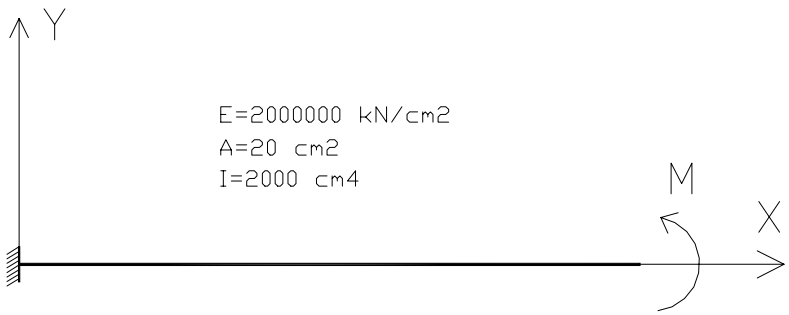


Figura 3.7 – Viga em balanço com momento na extremidade

Os resultados obtidos com o programa são apresentados na tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Resultados obtidos para a viga em balanço

Momento	Solução Exata			PPNL (10 Elementos)		
kgfxcm	Y (cm)	θ (rad)	X (cm)	Y (cm)	θ (rad)	X (cm)
0	0	0	500	0	0	500
50.000	1,562	0,00625	499,997	1,5625	0,00063	499,997
141.300	4,416	0,01766	499,974	4,4155	0,01766	499,974
307.950	9,622	0,03849	499,876	9,6222	0,03849	499,877
500.000	15,620	0,06250	499,675	15,6199	0,06250	499,675
5.026.548	151,979	0,62830	467,745	151,9799	0,62831	467,745
13.802.900	334,408	1,72500	286,340	334,5636	1,72469	286,648
29.098.686	258,379	3,63700	-65,388	259,7069	3,63545	-65,466
36.749.092	121,742	4,59400	-108,080	123,0608	4,58985	-108,835
44.394.471	23,194	5,54900	-60,346	23,8052	5,54362	-61,142
50.265.480	0,000	6,28300	0,000	-0,0280	6,27439	-0,705

A estrutura deformada, os gráficos referentes aos deslocamentos horizontal, vertical e rotação para os diversos estágios de carregamento são apresentados nas figuras 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11, respectivamente.

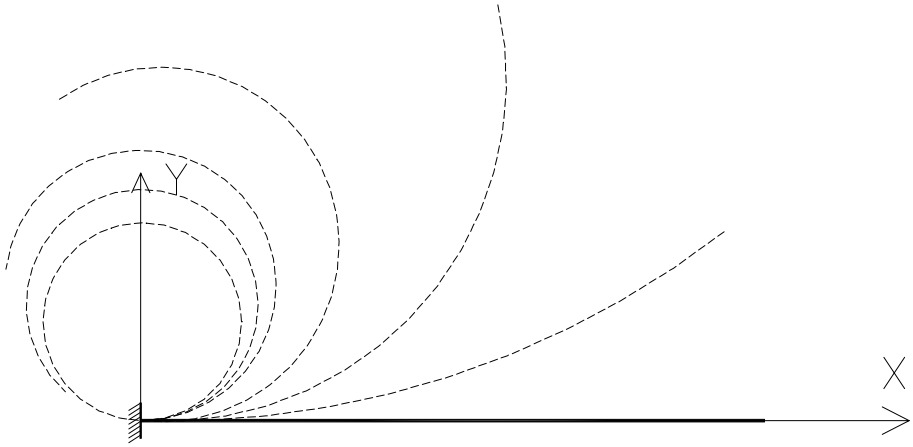


Figura 3.8 – Estrutura deformada

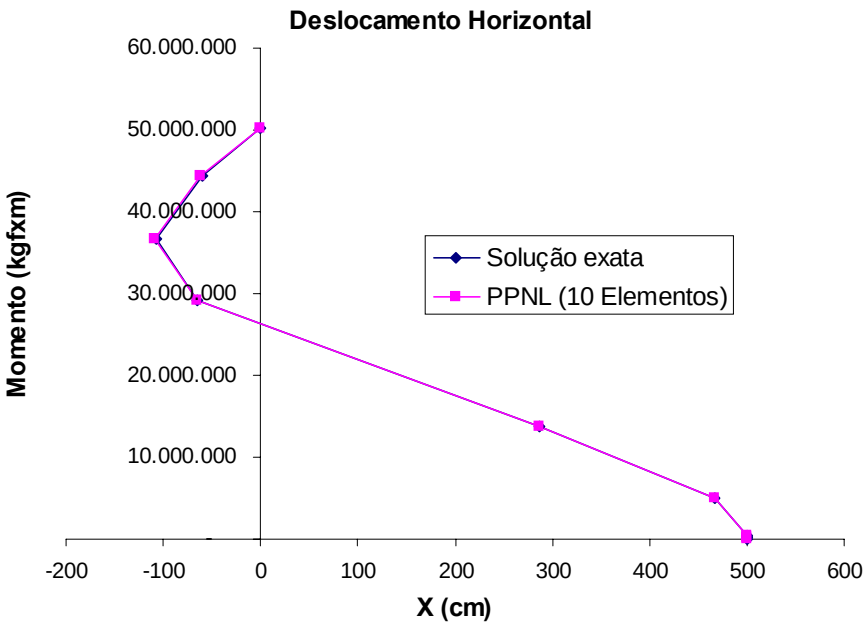


Figura 3.9 – Deslocamento horizontal x Momento

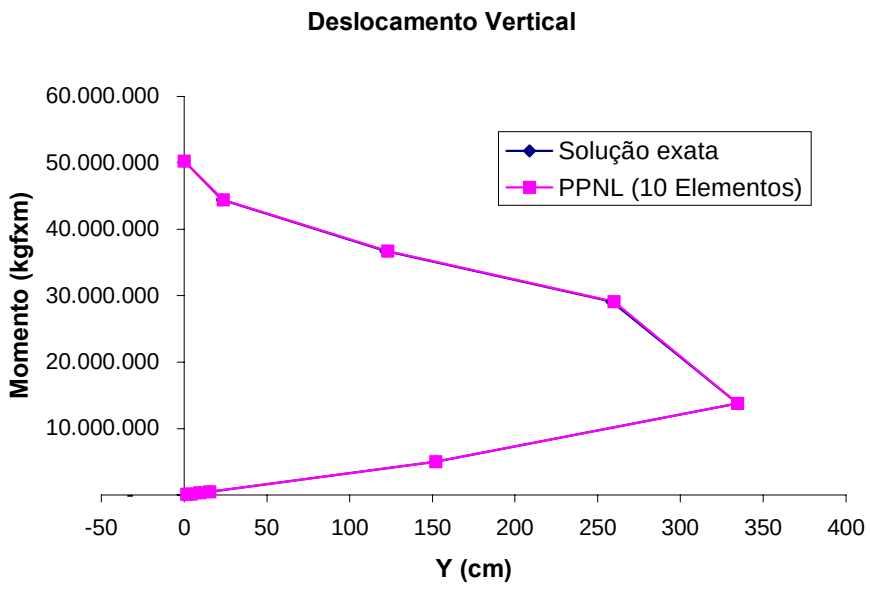


Figura 3.10 – Deslocamento vertical x Momento

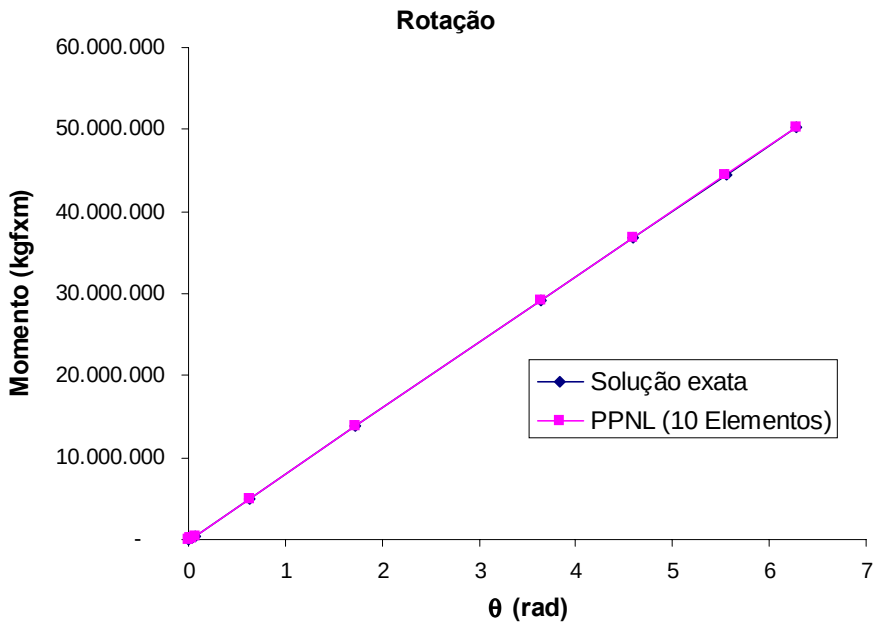


Figura 3.11 – Rotação horizontal x Momento

Observa-se que os resultados obtidos com o programa PPNL descrevem o comportamento não-linear de modo preciso, mesmo para grandes deslocamentos. Este é um aspecto da formulação apresentada: desde que os elementos sejam curtos, de forma a se garantir pequenas rotações das seções transversais, a formulação não apresenta limites quanto à magnitude dos deslocamentos.

3.4.2. PÓRTICO DE CONCRETO ARMADO COM 1 LANCE

Este exemplo demonstra a eficiência do programa na descrição do comportamento das estruturas de concreto armado. Trata-se de um pórtico engastado (figura 3.12) ensaiado por WILBY & PANDIT (1967) e apresentado por RASHEED & DINNO (1994).

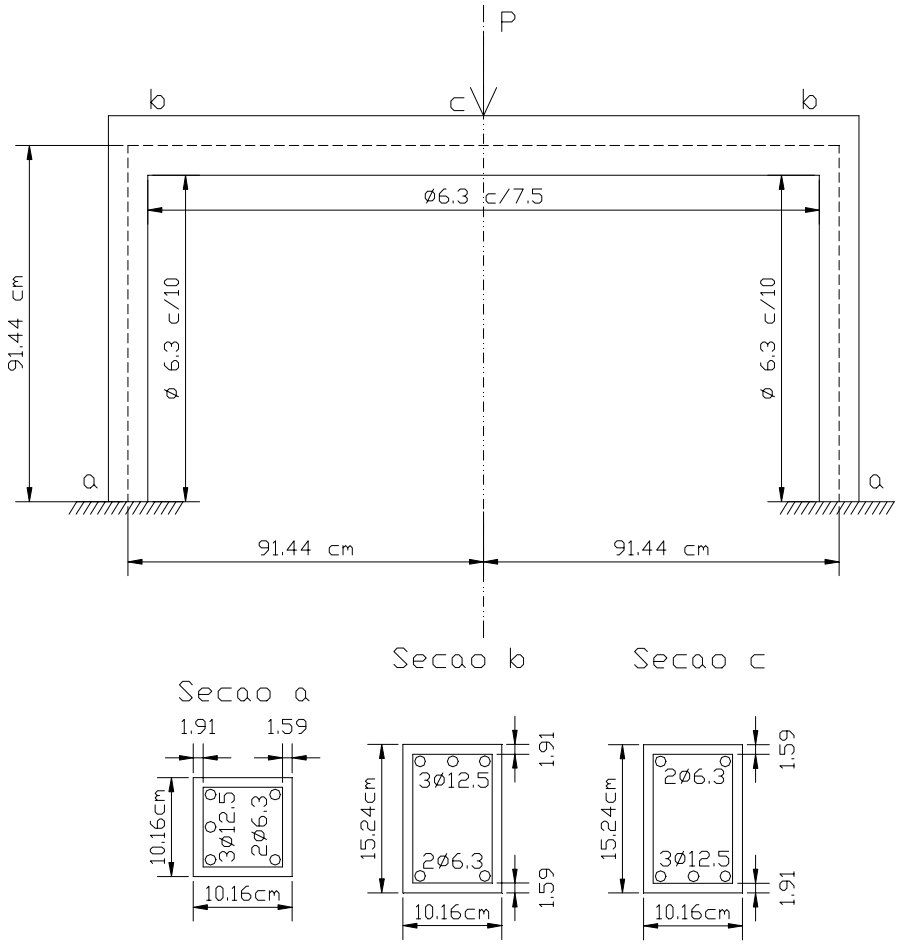


Figura 3.12– Pórtico ensaiado por Wilby e Pandit

Devido à simetria do problema analisou-se somente metade da estrutura, sendo adotadas duas malhas distintas com 12 elementos e com 15 elementos, conforme apresentado na figura 3.13. A seção transversal foi dividida em 10 fatias, conforme indica SILVA (1996).

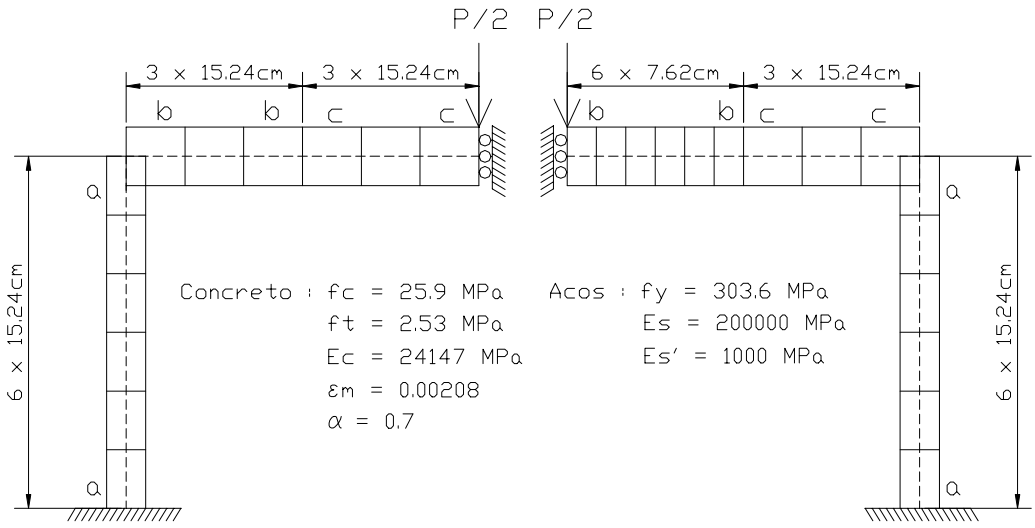


Figura 3.13 – Malha em elementos finitos adotadas: 12 e 15 elementos

São apresentadas, na figura 3.14, a curva *deslocamento x carregamento* experimental, a curva teórica apresentada por RASHEED E DINO (1994), e aquelas obtidas pelo PPNL com 12 e 15 elementos.

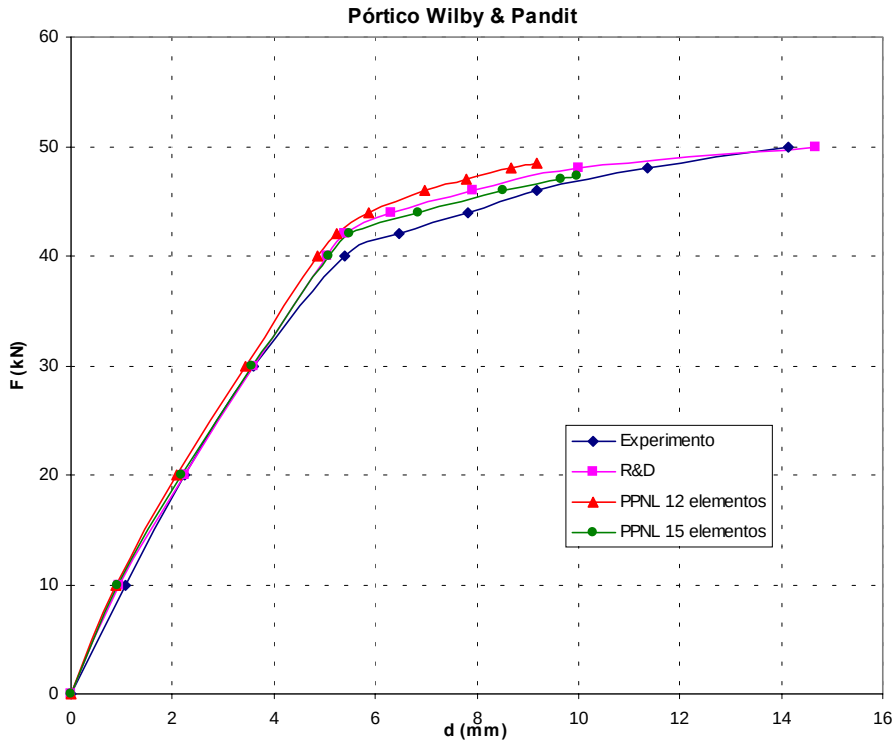


Figura 3.14 – Curvas deslocamento x carregamento

Observa-se que, mesmo utilizando-se uma malha pobre com 12 elementos, os resultados obtidos descrevem de modo satisfatório o comportamento da estrutura. Apenas o último trecho da curva *deslocamento x carregamento* não pôde ser descrito em função de problemas numéricos.

Isso acontece pelo fato de, nesse tipo de problema, se formar uma rótula plástica na região de apoio da carga concentrada P, ocasionando uma perda abrupta de rigidez dos elementos. Para descrever de forma satisfatória o problema, seria necessária adoção de uma malha mais refinada na região da rótula plástica.

De fato, na malha com 15 elementos, os resultados se aproximam mais dos experimentais. A utilização de malhas muito refinadas, para estruturas de grande porte, onera de forma apreciável o processamento, podendo até mesmo inviabilizar a análise.

ISHITANI (1990) *apud* SOLLER (1995) indica que na discretização das barras é aconselhável que o tamanho dos elementos muito solicitados seja da ordem da metade da altura da seção transversal até no máximo igual à altura. No presente trabalho serão adotadas malhas da ordem de grandeza da altura das seções transversais dos elementos, pois não existe interesse em descrever esses problemas localizados que ocorrem próximo ao colapso da estrutura, sendo suficiente uma descrição do comportamento global das estruturas de edifícios.

3.4.3. PÓRTICO DE CONCRETO ARMADO COM 2 LANCES

VECHIO & EMARA (1992) publicaram os resultados referentes a um estudo experimental realizado em um pórtico com dois lances (figura 3.15), no qual a carga vertical foi mantida constante e a ação horizontal foi aplicada monotonicamente até o colapso da estrutura. Estes resultados experimentais são utilizados, no mesmo trabalho, para aferir aqueles obtidos por um programa proposto pelos autores para análise não-linear de estruturas.

O pórtico da figura 3.15 foi discretizado conforme indicado na figura 3.16, sendo a seção transversal dividida em 10 fatias.

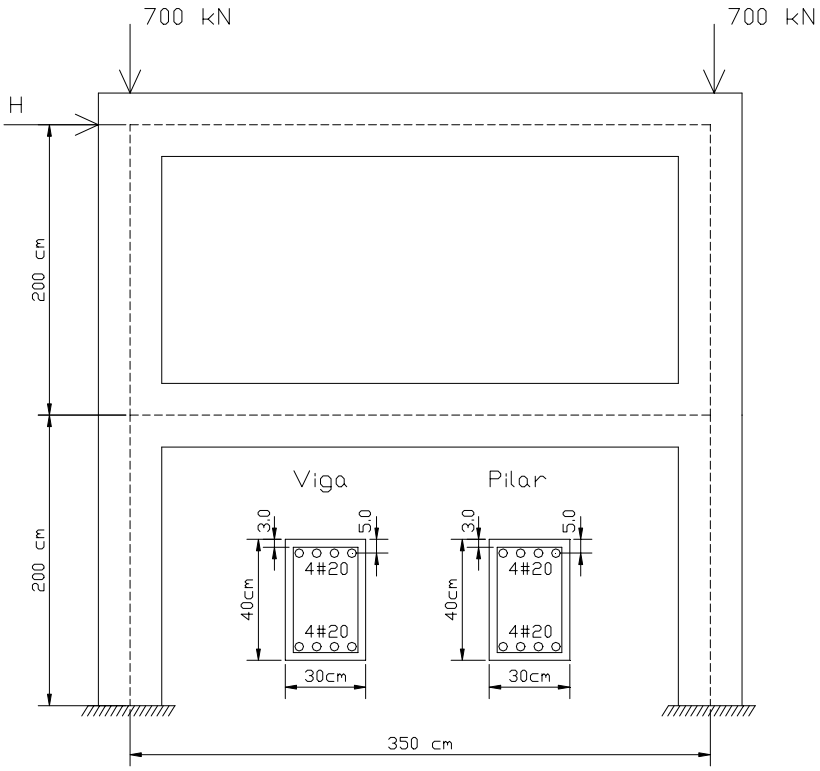


Figura 3.15 – Pórtico ensaiado por Vechio & Emara

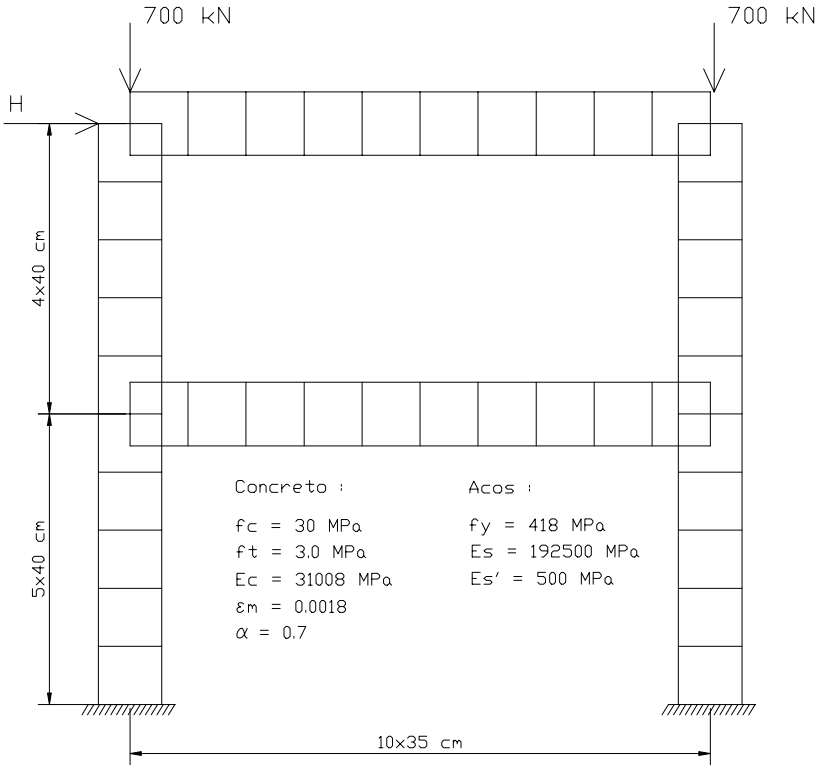


Figura 3.16 – Malha e características dos materiais do pórtico ensaiado por Vechio & Emara

Na figura 3.17 são apresentados os resultados experimentais e teóricos obtidos por VECCHIO & EMARA (1992), juntamente com os resultados teóricos fornecidos pelo PPNL.

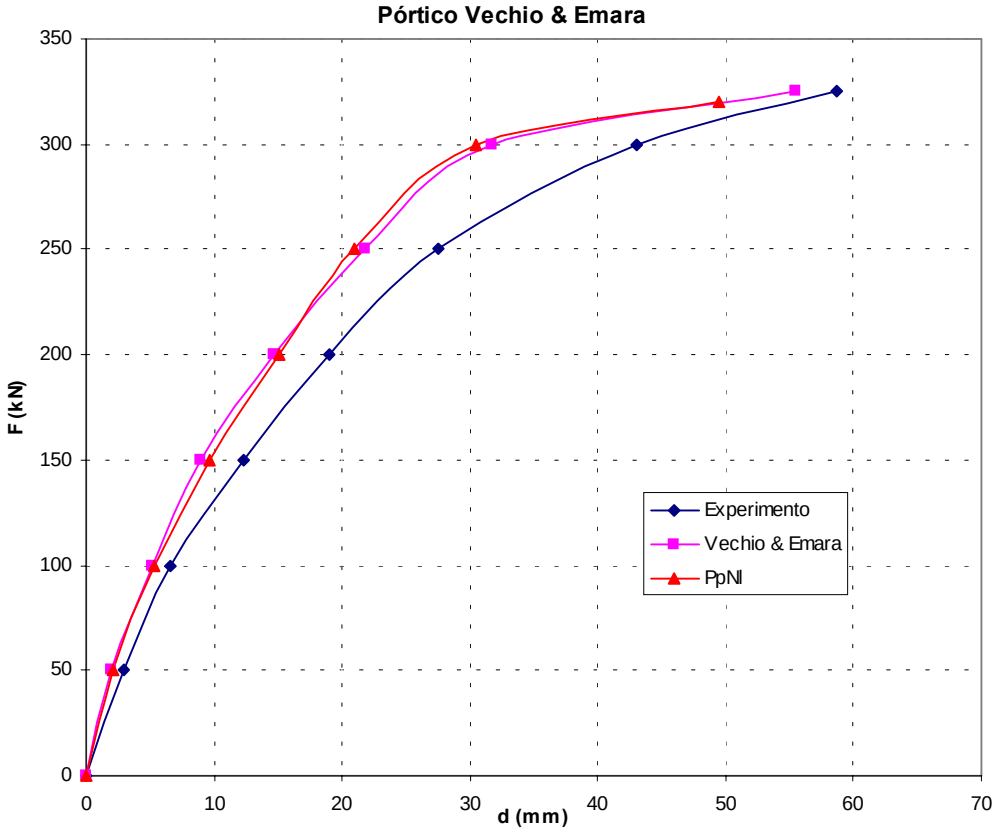


Figura 3.17 – Resultados para o pórtico ensaiado por Vechio & Emara

Observa-se um ótima correlação entre os resultados teóricos obtidos por VECHIO & EMARA (1992) e os obtidos através do programa PPNL. Ambos, no entanto, se apresentam mais rígidos que os resultados experimentais. VECHIO & EMARA (1992), que conduziram o experimento, apontam algumas razões para explicar este comportamento: a influência das tensões devidas à retração, deformações concentradas nos nós e pequenas rotações da base das colunas devido ao escorregamento das barras da armadura.

3.5. CONCLUSÕES

A formulação adotada para a elaboração do programa PPNL se mostra bastante eficiente para a descrição dos problemas referentes à NLG e à NLF.

Os problemas não-lineares com grandes deslocamentos podem ser corretamente descritos pelo programa, desde que o ângulo de rotação da seção transversal α seja pequeno. PIMENTA & SOLER (1989) *apud* SILVA (1996) observam que a hipótese anterior não impede a ocorrência de grandes curvaturas, desde que os elementos sejam suficientemente curtos.

Deve-se ressaltar que para os pórticos em concreto armado, devido às deformações máximas admitidas pelos materiais serem pequenas, as curvaturas serão sempre pequenas. Deste modo, o problema se enquadra perfeitamente nas hipóteses do programa.

Observa-se, nos exemplos estudados, que a adoção de malhas com as dimensões dos elementos da ordem de grandeza da altura das seções transversais, é suficiente para a descrição do comportamento dos pórticos planos, salvo em situações especiais que apresentem elementos bastante solicitados.

A divisão da seção transversal não apresenta maiores inconvenientes para a análise, desde que não se faça uma divisão muito grosseira. No presente trabalho será adotada um divisão em 10 fatias, como indicado por SOLER (1995) e SILVA (1996).

As contribuições referentes à implementação apresentada são:

1) a utilização da expressão dos deslocamentos ε sem a utilização de um valor médio para o deslocamento da fibra localizada no eixo do elemento, eliminado-se, assim, as simplificações adicionais indicadas por SILVA (1996) para o regime elasto-plástico.
2) O emprego de um modelo físico para o concreto que considera, além dos efeitos não-lineares do concreto comprimido, o concreto tracionado e o tension stiffening, o efeito de confinamento do concreto devido aos estribos, parâmetro relevante para a descrição do comportamento de concreto de alta resistência.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE NÃO-LINEAR PARAMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são analisados alguns pórticos planos, nos quais variou-se a taxa de armadura e o nível de carregamento de forma a se avaliar a influência dessas variáveis na perda de rigidez lateral da estrutura.

Foram estudados pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares, cada qual submetido a três níveis de carregamento diferentes: N1, N2 e N3. Para cada nível de carregamento correspondem três dimensionamentos, de forma a se obter três taxas de armadura diferentes: A, B e C - sendo A próxima à taxa mínima de norma, C próxima à taxa máxima de norma e B um valor intermediário. Assim foram obtidos nove pórticos com um lance e nove com seis lances de pilares, num total de dezoito exemplos.

Convencionou-se chamar este estudo de análise paramétrica uma vez que foram abrangidos desde níveis de carregamento muito abaixo, até níveis muito acima dos usuais, o mesmo acontecendo com as taxas de armadura. Desse modo, pôde-se avaliar qualitativa e quantitativamente a perda de rigidez lateral dos pórticos planos.

4.2. EXEMPLOS ANALISADOS

4.2.1. Pórticos com 1 lance de pilares

Na tentativa de se avaliar de modo sistemático o comportamento de pórticos planos submetidos a diferentes condições de carregamento, geometria e taxas de armadura, foram estudados alguns pórticos com 1 lance de pilares segundo a seguinte metodologia:

1) Foram analisados pórticos planos constituídos por dois pilares e uma viga, conforme a figura 4.1.
2) Adotou-se o concreto com resistência f_{ck}=25 MPa e aço CA-50A com f_{ys}=500 MPa. Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são : E_{ctg} = 35234 MPa, $f_c^{'}$ = 28,5 MPa, ε_0 = 0,002, f_t = 2,85 MPa, α = 0,70, ε_m = 20 ε_t, E_s = 210000 MPa, E'_s = 1000 MPa, $\varepsilon_{s\ máx}$ = 0,010.
3) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente, embora na maior parte dos casos práticos o carregamento vertical seja aplicado primeiro. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
4) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
5) As vigas foram dimensionadas segundo a NB-1/78 para momentos positivo e negativo. A mesma armadura negativa foi utilizada em ambos os lados da viga.
6) Os pilares foram dimensionados como peças submetidas à flexão composta *sem levar em consideração os efeitos devidos às excentricidades acidentais e esbeltez*. Os dois pilares possuem a mesma armadura.

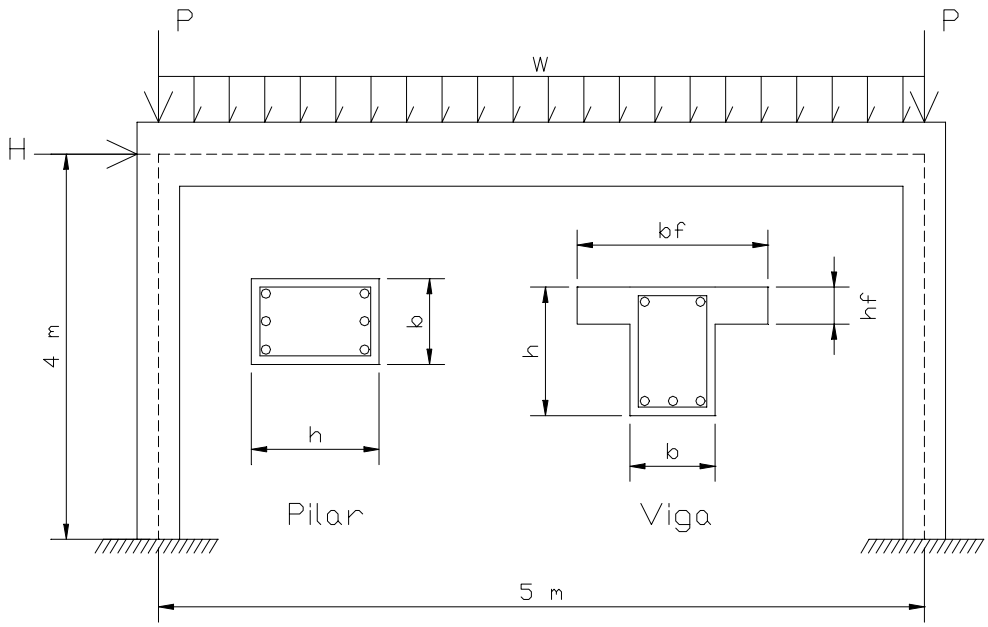


Figura 4.1 – Geometria dos pórticos analisados

7) As seções críticas foram dimensionadas para três taxas de armadura:
   - Tipo A : Taxas de armadura baixas, muito próximas da mínima permitida pela norma;
   - Tipo B : Taxas de armaduras médias, próximas da metade do máximo permitido pela norma;
   - Tipo C : Taxas de armadura altas, próximas ao máximo permito pela norma;
8) Os carregamentos também foram distribuídos em três níveis N1, N2 e N3, onde 1 indica valores baixos para o carregamento, 2 valores médios e 3 valores altos, conforme a tabela 4.1. H, W e P estão indicados na figura 4.1, enquanto G corresponde ao carregamento vertical total aplicado.

Tabela 4.1 – Níveis de carregamentos considerados

Nível de Carregamento	H (kN)	P (kN)	W (kN/m)	H/G
N1	50	0	45	0,222
N2	180	300	45	0,218
N3	540	900	45	0,267

9) Cada pórtico foi modelado com 15 elementos : cinco para cada pilar e cinco para a viga. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da vigas e do pilar foram discretizadas em 20 “fatias” de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).

Na tabela 4.2 são apresentadas as características geométricas referentes aos exemplos analisados:

Tabela 4.2 – Geometria dos pórticos com 1 lance de pilares

	Nível 1 de Carregamento			Nível 2 de Carregamento			Nível 3 de Carregamento		
	PN1A	PN1B	PN1C	PN2A	PN2B	PN2C	PN3A	PN3B	PN3C
PILAR									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00	40,00
h(cm)	52,00	34,00	24,00	65,50	45,00	37,00	95,00	67,00	55,00
d'	5,20	3,40	2,40	6,55	4,50	3,70	9,50	6,70	5,50
ω	0,12	0,36	0,74	0,12	0,38	0,75	0,12	0,36	0,75
As	7,69	15,08	21,88	9,68	21,06	34,18	18,72	39,61	67,74
ρ%	0,49	1,48	3,04	0,49	1,56	3,08	0,49	1,48	3,08
VIGA POS									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00
h(cm)	67,00	49,00	33,00	95,00	65,00	50,00	125,00	85,00	70,00
d'	5,36	3,92	2,64	7,60	5,20	4,00	10,00	6,80	5,60
As inf	5,36	8,00	11,94	5,94	9,00	12,00	13,00	19,50	24,00
ρ%	0,29	0,59	1,31	0,23	0,50	0,87	0,38	0,62	0,93
VIGA NEG									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00
h(cm)	67,00	49,00	33,00	95,00	65,00	50,00	125,00	85,00	70,00
d'	5,36	3,92	2,64	7,60	5,20	4,00	10,00	6,80	5,60
As sup	4,70	6,10	10,47	7,81	13,90	19,50	16,00	24,90	32,90
ρ%	0,25	0,45	1,15	0,30	0,77	1,41	0,46	0,80	1,28

Examinando-se as curvas *força x deslocamento*, figuras 4.2a, 4.2b e 4.2c, pode-se observar que todos os exemplos analisados suportam um carregamento maior do que aquele para o qual foram dimensionados. Para cada pórtico apresentam-se retas com inclinação constante, que indicam o comportamento elástico-linear de cada pórtico até o carregamento último teórico (multiplicado por 1,4), além das curvas correspondentes à análise não-linear. Observa-se que os pórticos com baixas taxas de armadura: PN1A, PN2A e PN3A (figura 4.2a), cujos elementos têm as maiores seções transversais, apresentam um grande acréscimo na carga última em relação ao valor teórico, maior rigidez e menores deslocamentos laterais. Já os pórticos com elevadas taxas de armadura : PN1C, PN2C e PN3C (figura 4.2b), cujos elementos têm as menores seções transversais,

apresentam menor rigidez, maior deslocamento lateral e menor acréscimo no carregamento último em relação ao valor teórico. Os pórticos tipo B : PN1B, PN2B e PN3B (figura 4.2c), apresentam valores intermediários entre os dois casos extremos, pórticos tipo A e tipo C.

Dentre os fatores que podemos destacar para explicar este acréscimo na caga última podemos enfatizar:

a) O efeito da força axial no dimensionamento da seção transversal das vigas foi desprezado;
b) O efeito da redistribuição dos momentos negativos após o escoamento das armaduras;
c) Diferença entre as hipóteses feitas acerca das tensões no concreto e no aço no estado limite último e aquelas utilizadas na elaboração do programa.

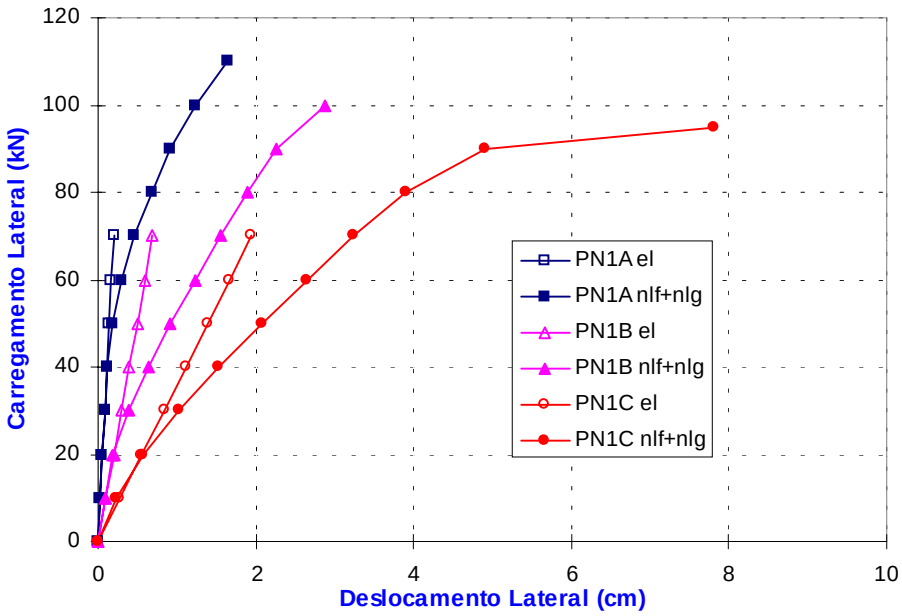


Figura 4.2a – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 1 de carregamento

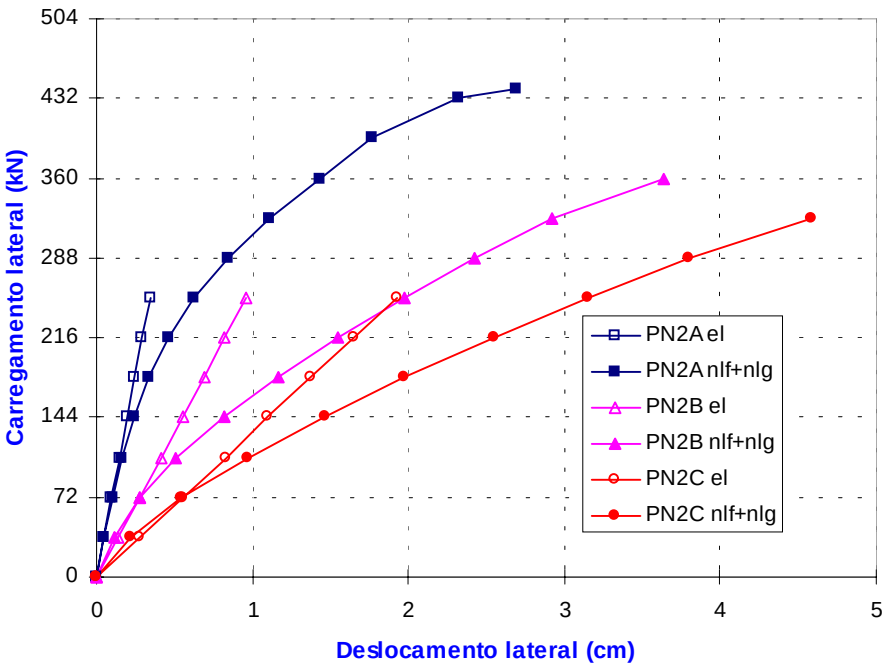


Figura 4.2b – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 2 de carregamento

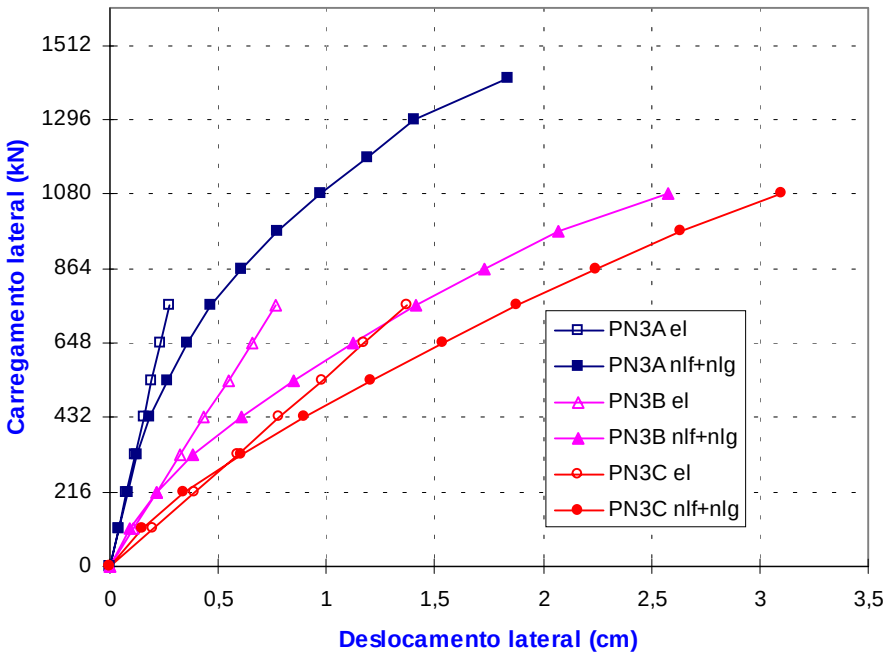


Figura 4.2c – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 3 de carregamento

Analisando-se os deslocamentos laterais, pode-se aferir a rigidez lateral equivalente de cada pórtico analisado:

$$RL_i = \frac{H_i}{\delta_i}; \qquad (4.1)$$

onde H_i é o carregamento lateral no estágio *i; RL_i* é a rigidez lateral no estágio *i* de carregamento e δ_i é o deslocamento lateral correspondente. Adotando-se os índices '*NL'* para os resultados da análise não-linear e '*EL'* para aqueles correspondentes à análise elástico-linear, vem:

$$RL_{iNL} \cdot \delta_{iNL} = RL_{iEL} \cdot \delta_{iEL}; \qquad (4.2)$$

logo, pode-se definir EI_{EQ} como a razão entre a rigidez lateral obtida da análise não-linear e aquela obtida da análise elástico-linear, :

$$EI_{EQ} = \frac{RL_{iNL}}{RL_{iEL}} = \frac{\delta_{iEL}}{\delta_{iNL}} \qquad (4.3)$$

O carregamento nas fases definidas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo valor do carregamento de último da estrutura (P_U). Desse modo, obteve-se um gráfico adimensional relacionando rigidez lateral equivalente e carregamento, traçando-se assim os gráficos das figuras 4.3a, 4.3b e 4.3c.

A figura 4.3a apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo A, com taxas de armadura próximas à mínima. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 73% e 75% da rigidez linear, correspondente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 43% e 58% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 19% e 28% da rigidez elástica.

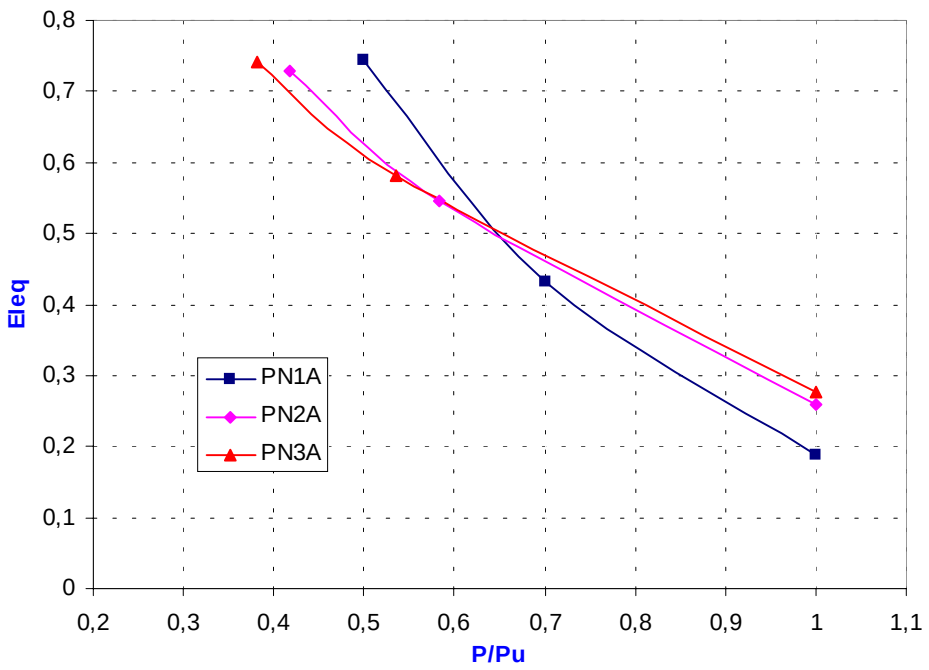


Figura 4.3a – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo A

A figura 4.3b apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo B, com taxas de armadura médias. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 54% e 64% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 44% e 54% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 34% e 42% da rigidez elástica. O pórtico PN3B possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo B e o PN1B a menor rigidez. Isso porque, a presença de tensões de compressão, nesse caso, é benéfico para o comportamento da estrutura, pois tende a suprimir a fissuração pelo fato da força normal ser bem inferior ao valor correspondente à máxima compressão centrada que pode ser aplicada no pilar.

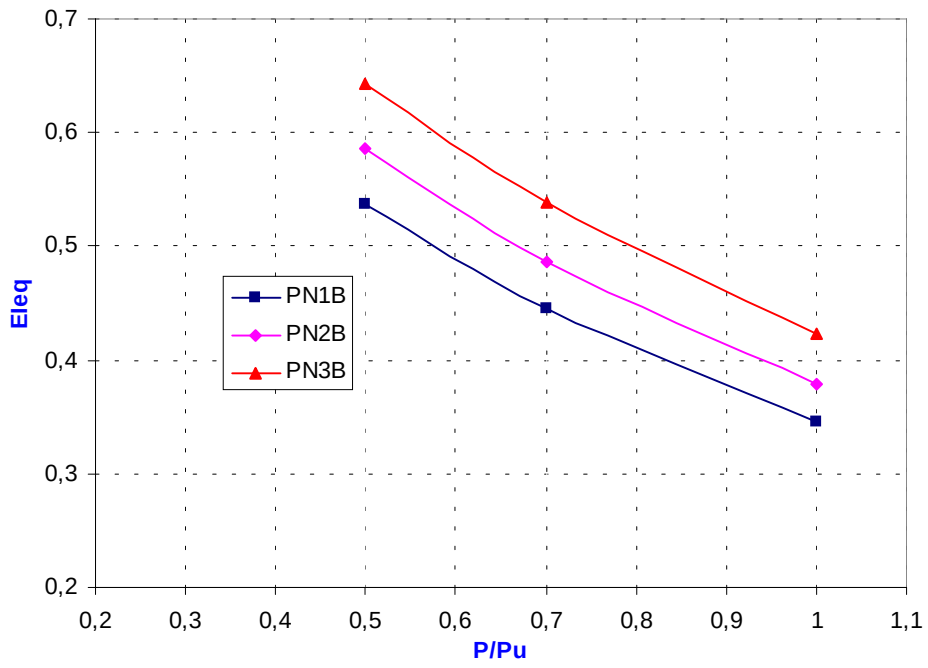


Figura 4.3b – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo B

A figura 4.3c apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo C, com altas taxas de armadura. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 67% e 81% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 60% e 72% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 50% e 63% da rigidez elástica. Em virtude da presença de tensões de compressão, que tendem a suprimir a fissuração, o pórtico PN3C possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo C e o PN1C a menor rigidez.

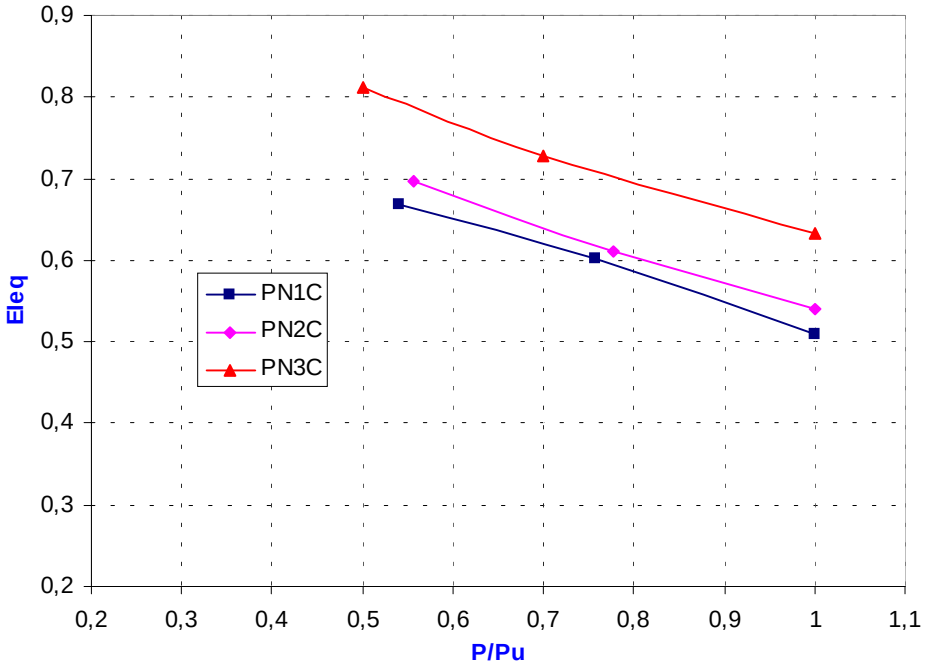


Figura 4.3c – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo C

Observa-se, nos exemplos analisados, que a rigidez lateral tende a um valor mínimo na ruptura. A redução de rigidez acontece naturalmente em virtude do comportamento não-linear do concreto à compressão, dos efeitos de fissuração do concreto tracionado e em função do comportamento elástico não-linear do aço. Esses efeitos crescem à medida que as deformações nos materiais também aumentam.

4.2.2. Pórticos com 6 lances de pilares

Prosseguiu-se com o estudo analisando-se pórticos com 6 lances de pilares, submetidos a diferentes taxas de armadura e diferentes níveis de carregamento. A metodologia empregada é basicamente a mesma dos exemplos anteriores, apresentando diferenças apenas no procedimento para dimensionamento dos pilares. De fato, nos exemplos de pórticos com 1 lance, os pilares foram dimensionados como peças submetidas à flexão composta sem levar em consideração os efeitos devidos às excentricidades acidentais e esbeltez. Nos exemplos com 6 lances, os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades acidentais (e_a) e de segunda ordem (e_2), além da excentricidade inicial (e_i) devida ao carregamento. Nestes exemplos, considerou-se uma e_a mínima de 1 cm e uma e_a máxima de 2cm, conforme procedimento usualmente adotado pelos escritórios de projeto. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência f_{ck}=20 MPa e aço CA-50A (f_{ys}=500 MPa). Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são : E_{ctg} = 32000 MPa, f'_c = 23,5 MPa, ε_0 = 0,002, f_t = 2,20 MPa, α = 0,70, ε_m = 20 ε_t, E_s = 210000 MPa, E'_s = 1000 MPa, $\varepsilon_{s\ máx}$ = 0,010.
2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
4) As vigas foram dimensionadas segundo a NB-1/78 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.
5) Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades e_a, e_2 e e_i.

6) Os pórticos foram dimensionados para três taxas de armadura:
   - Tipo A : Taxas de armadura baixas, muito próximas da mínima permitida pela norma;
   - Tipo B : Taxas de armaduras médias, próximas da metade do máximo permitido pela norma;
   - Tipo C : Taxas de armadura altas, próximas ao máximo permito pela norma;
7) Cada pórtico foi modelado com 108 elementos : cinco para cada pilar e oito para a viga, conforme figura 4.4. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da vigas e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).
8) Os carregamentos também foram distribuídos em três níveis N1, N2 e N3, onde 1 indica valores baixos para o carregamento, 2 valores médios e 3 valores altos, conforme tabela 4.3.

Foram analisados, inicialmente, nove pórticos com 6 lances, correspondentes aos três níveis de carregamento propostos, cada qual com três taxas de armadura diferentes. O detalhamento dos pórticos analisados é apresentado no apêndice A.

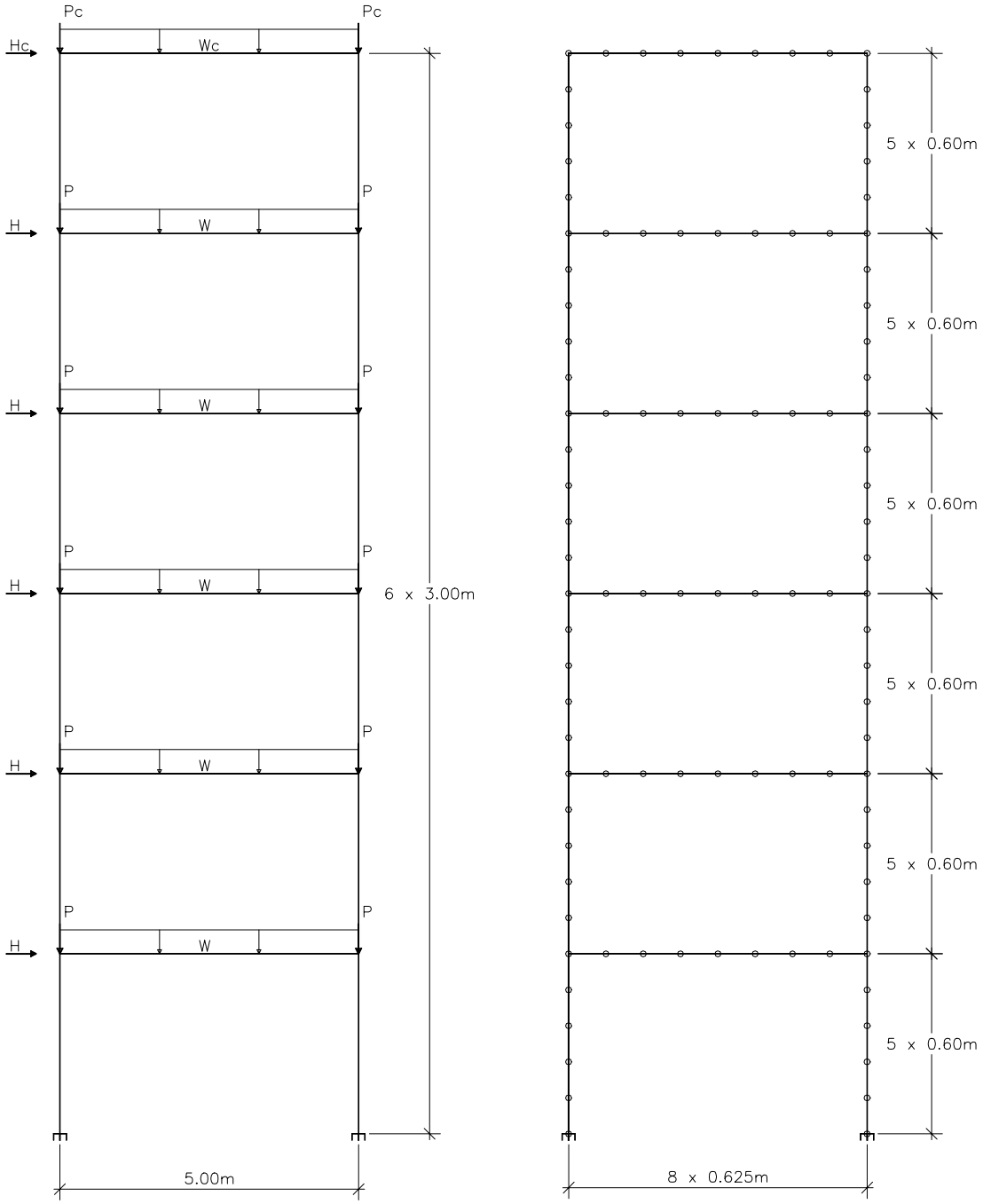


Figura 4.4 – Geometria dos pórticos com 6 lances

Tabela 4.3 – Níveis de carregamento para pórticos com 6 lances

Nível de Carregamento	H (kN)	Hc (kN)	P (kN)	Pc (kN)	W (kN/m)	Wc (kN/m)	H/G
N1	6	3	0	0	45	32	0.026
N2	16	8	100	70	45	32	0.036
N3	32	16	200	140	45	32	0.049

Examinando-se as curvas *força x deslocamento*, figuras 4.5a, 4.5b e 4.5c, pode-se observar que todos os pórticos analisados, do mesmo modo que os exemplos com 1 lance de pilares, suportam um carregamento maior do que aquele para o qual foram dimensionados. São apresentadas, para cada pórtico analisado, retas com inclinação constante, que indicam o comportamento elástico linear de cada pórtico até o carregamento último teórico (multiplicado por 1,4), além das curvas correspondentes à análise não-linear. Observa-se que os pórticos com baixas taxas de armadura : P6N1A, P6N2A e P6N3A, cujos elementos têm as maiores seções transversais, apresentam um grande acréscimo na carga última em relação ao valor teórico, maior rigidez e menores deslocamentos laterais. Já os pórticos com elevadas taxas de armadura: P6N1C, P6N2C e P6N3C, cujos elementos têm as menores seções transversais, apresentam menor rigidez, maior deslocamento lateral e menor acréscimo no carregamento último em relação ao valor teórico. Os pórticos tipo B : P6N1B, P6N2B e P6N3B, apresentam valores intermediários entre os dois casos extremos, pórticos tipo A e tipo C.

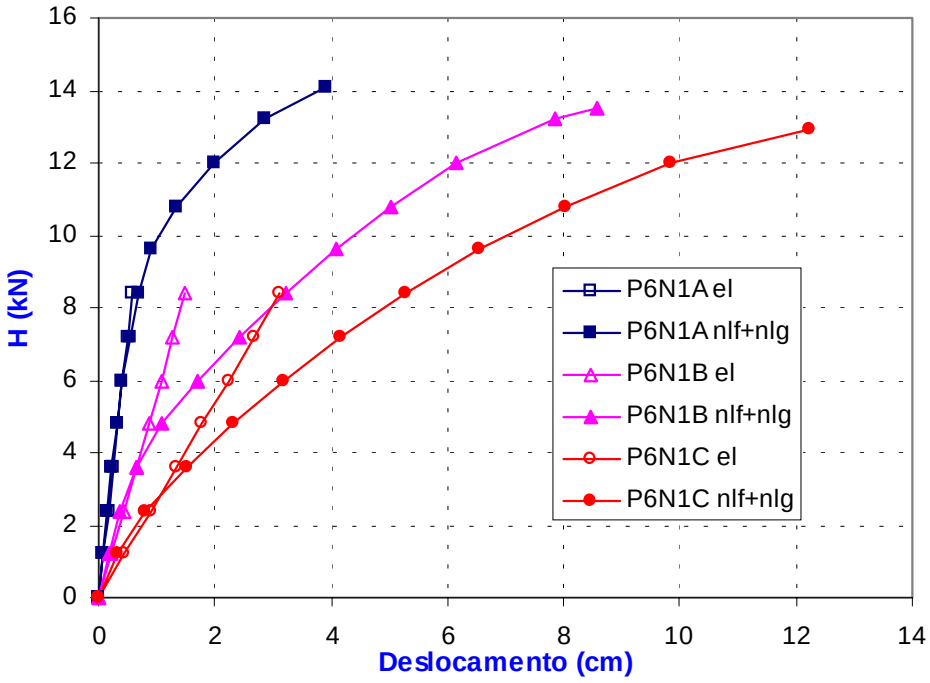


Figura 4.5a – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 1 de carregamento

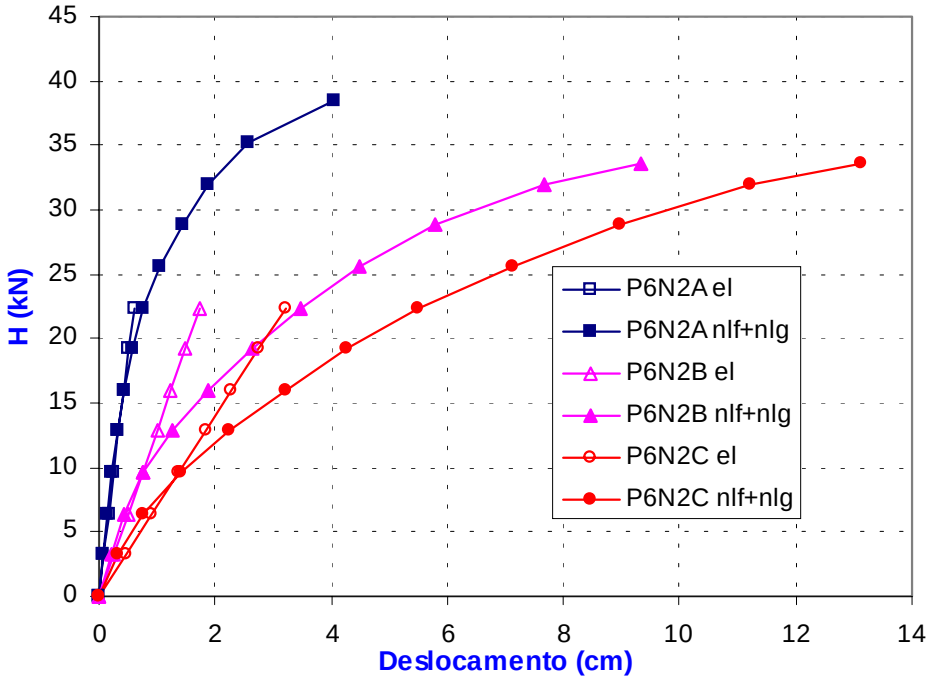


Figura 4.5b – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 2 de carregamento

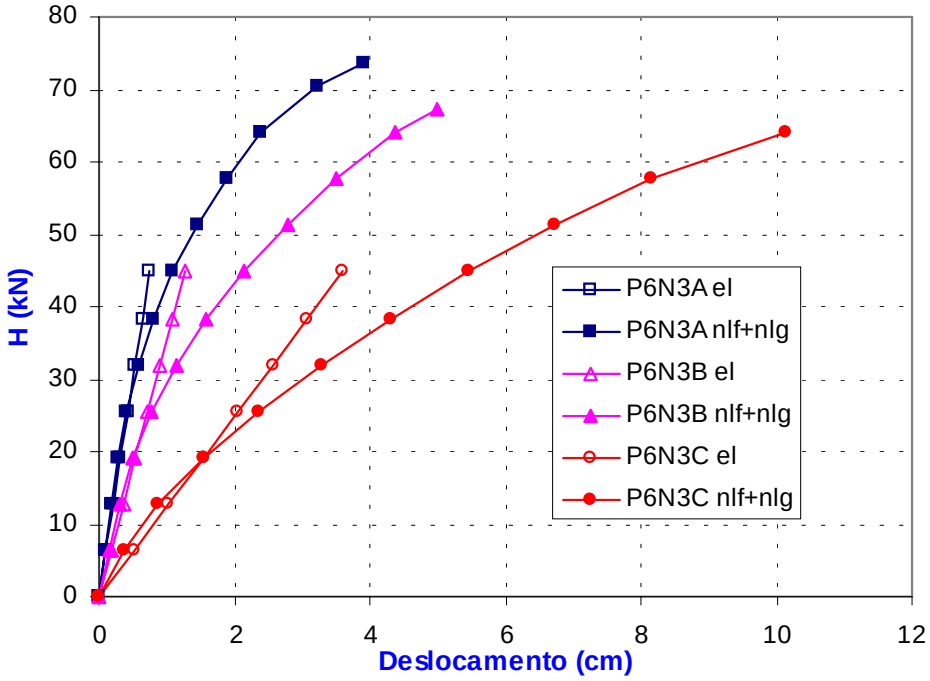


Figura 4.5c – Curvas deslocamento x carregamento pórticos nível 3 de carregamento

Afim de se avaliar a perda de rigidez lateral, as estruturas previamente analisadas foram comparadas à estruturas analisadas por procedimentos simplificados. Nestes, a NLG foi considerada através de uma formulação lagrangiana atualizada, apresentada por CORRÊA (1992), e a NLF através das reduções de inércia indicadas na literatura. Foram efetuadas diversas comparações para o carregamento em serviço e no estado limite último (multiplicado por 1,4). Para as estruturas em serviço, o resultado proveniente da análise não-linear física e geométrica rigorosa é comparado com aqueles obtidos segundo uma análise não-linear geométrica com duas considerações de inércia das seções: as seções de *vigas e pilares íntegras*, e seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras* (ACI 318-95). Para as estruturas no estado limite último, o resultado proveniente da análise não-linear física e geométrica rigorosa é comparado com aqueles obtidos segundo uma análise não-linear geométrica combinada com cinco considerações de inércia reduzida para os elementos: seções de *vigas e pilares íntegras*; seções de *vigas e pilares com 70% da inércia* da seção bruta (FRANCO & VASCONCELOS (1991)); seções de *vigas com 50% e pilares com 80% da inércia* da seção bruta (MACGREGOR (1993)); seções de *vigas com 40% e pilares com 80% da inércia* da seção bruta (MACGREGOR & HAGE (1970)); seções de *vigas com 35% e pilares com 70% da inércia* da seção bruta (ACI-318-95).

Nas figuras 4.6a a 4.6r pode-se observar as estruturas deformadas para os pórticos com 6 lances. Observa-se que para os pórticos tipo A as estruturas deformadas, em serviço, estão muito próximas dos resultados obtidos com as seções íntegras. Isso decorre do fato de que para se obter baixas taxas de armadura as seções são bastante robustas, apresentando um grande acréscimo na carga última em relação ao valor teórico, maior rigidez e menores deslocamentos laterais. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo A, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

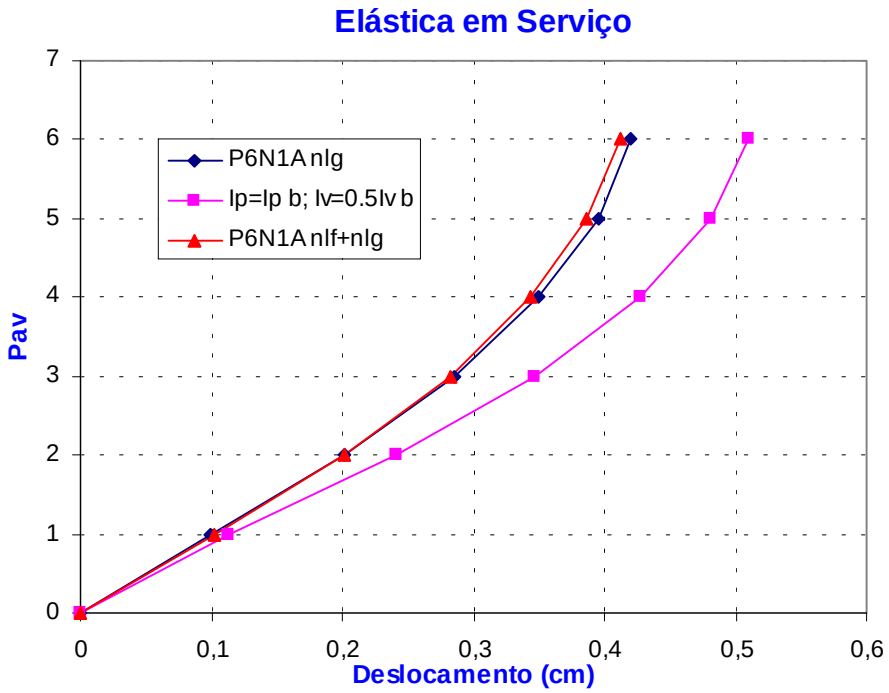


Figura 4.6a – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N1A

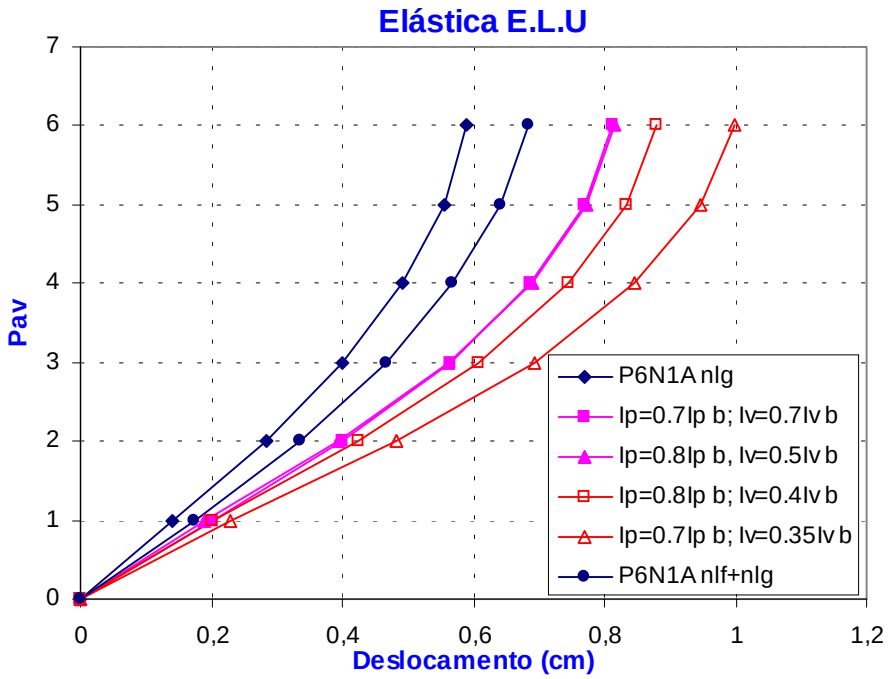


Figura 4.6b – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N1A

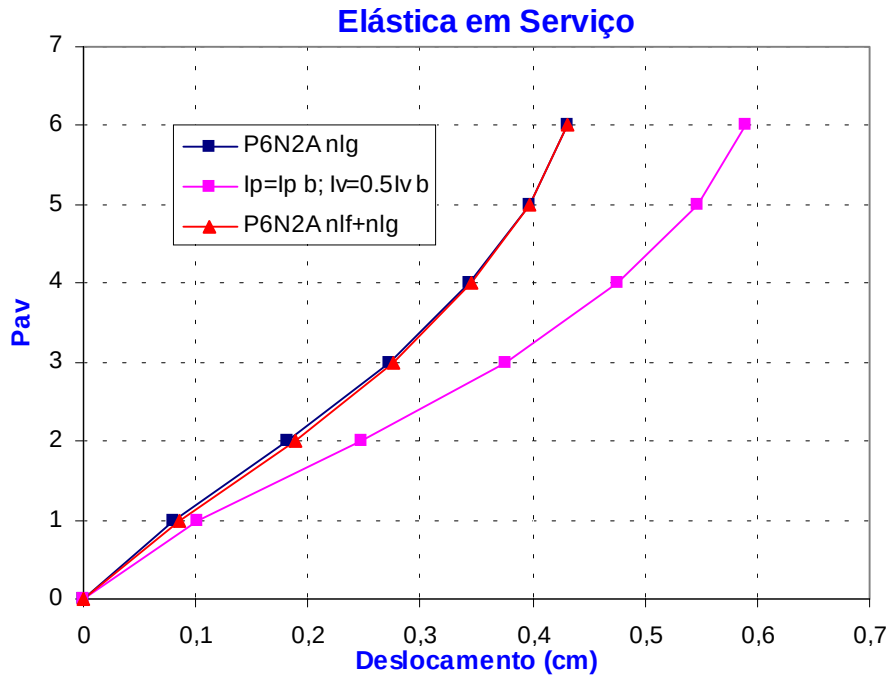


Figura 4.6c – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N2A

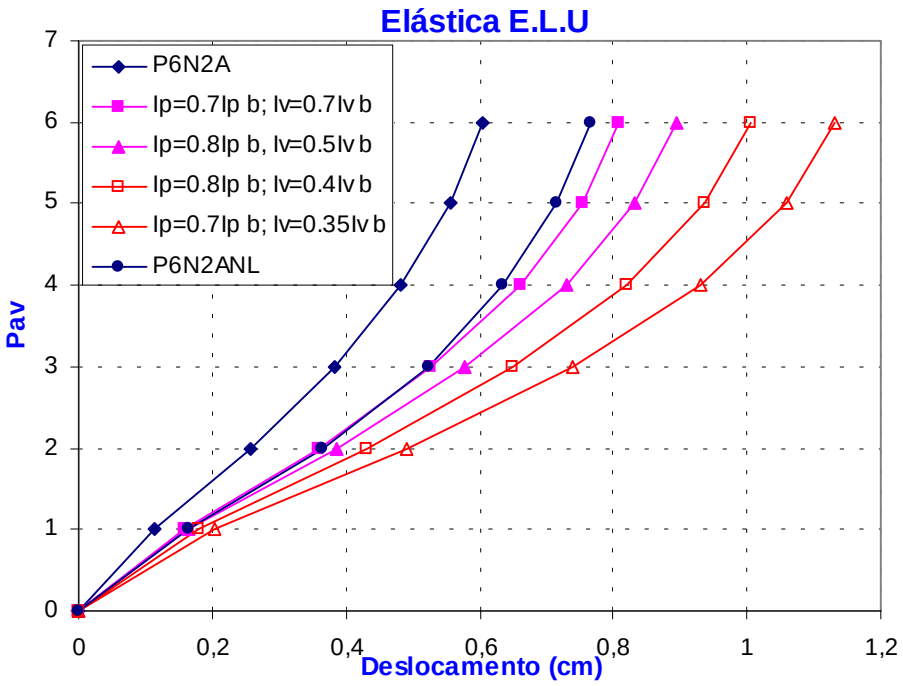


Figura 4.6d – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N2A

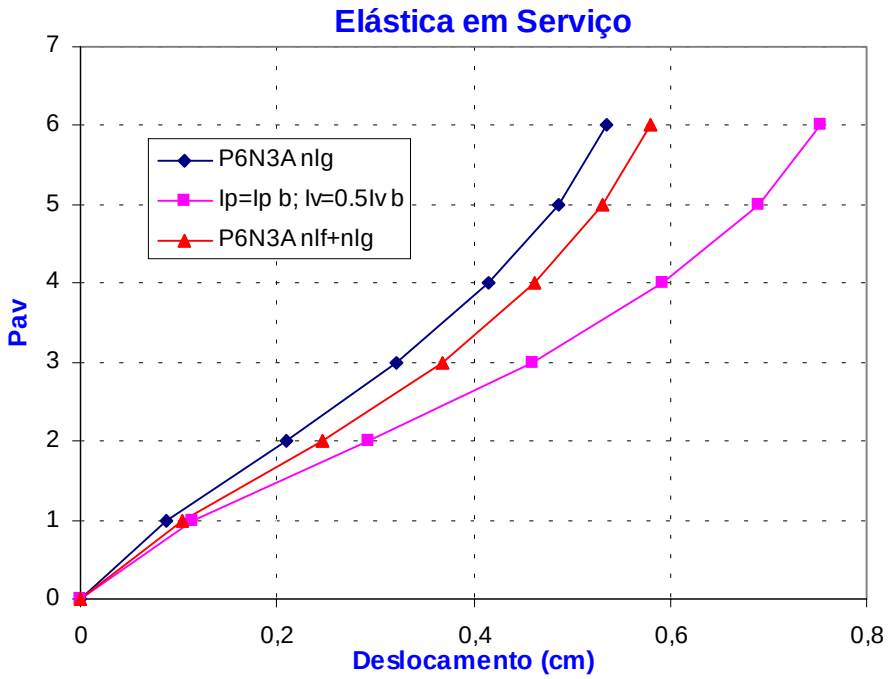


Figura 4.6e – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N3A

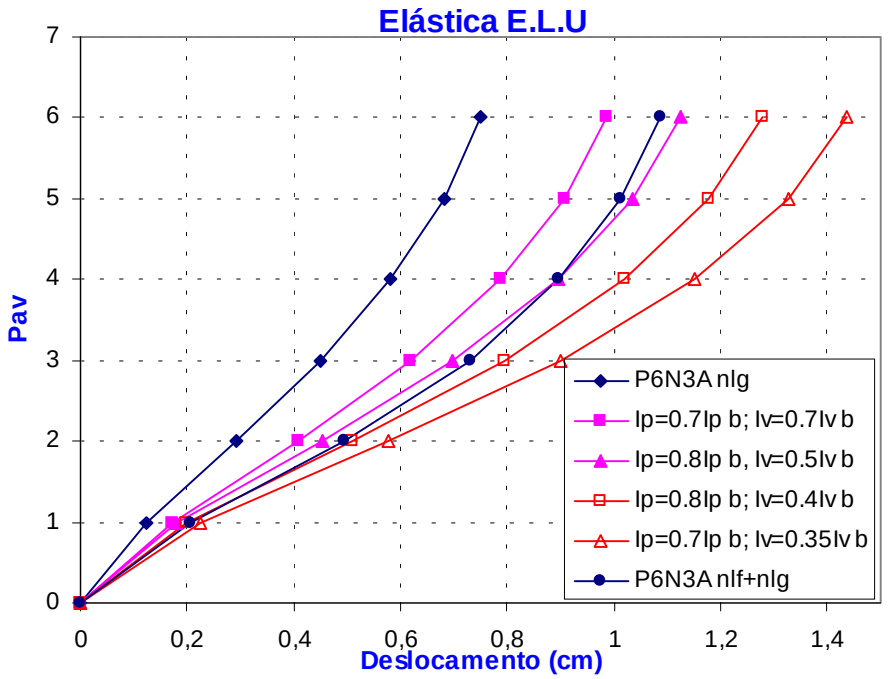


Figura 4.6f – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N3A

Para os pórticos tipo B as estruturas deformadas, em serviço, se aproximam da proposta do ACI que indica seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo B, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 35% e pilares com 70% da inércia da seção bruta. Deve-se observar particularmente o comportamento do pórtico P6N1B, que se apresenta bastante deslocável. Isso decorre do fato de não se contar com o efeito benéfico da compressão nos pilares que, para o nível 1, é muito baixa, bem como se trabalhar com taxas intermediárias de armaduras. Esses dois fatores em conjunto, determinaram o comportamento desfavorável da estrutura quando comparada com as demais.

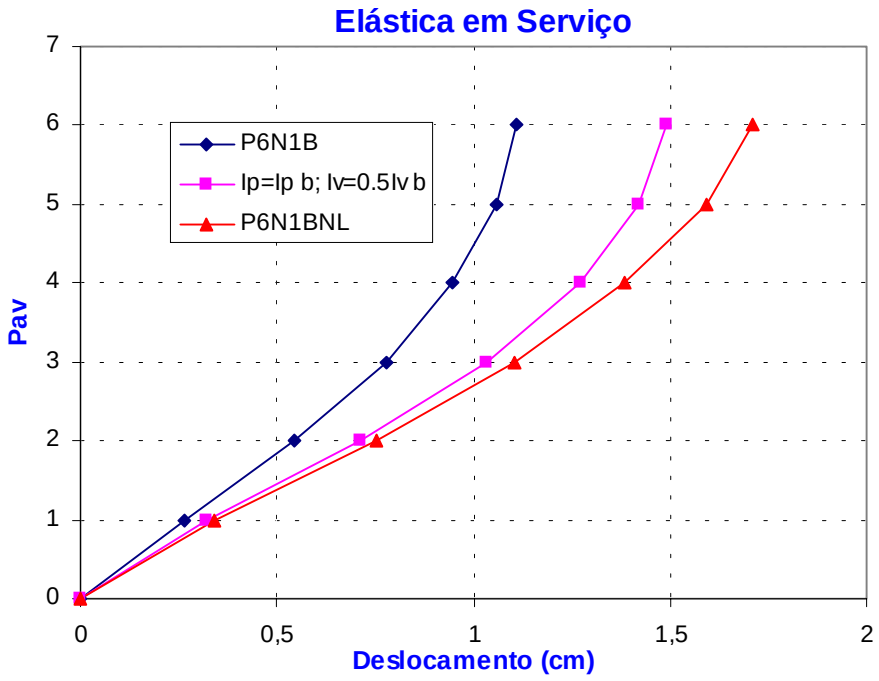


Figura 4.6g – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N1B

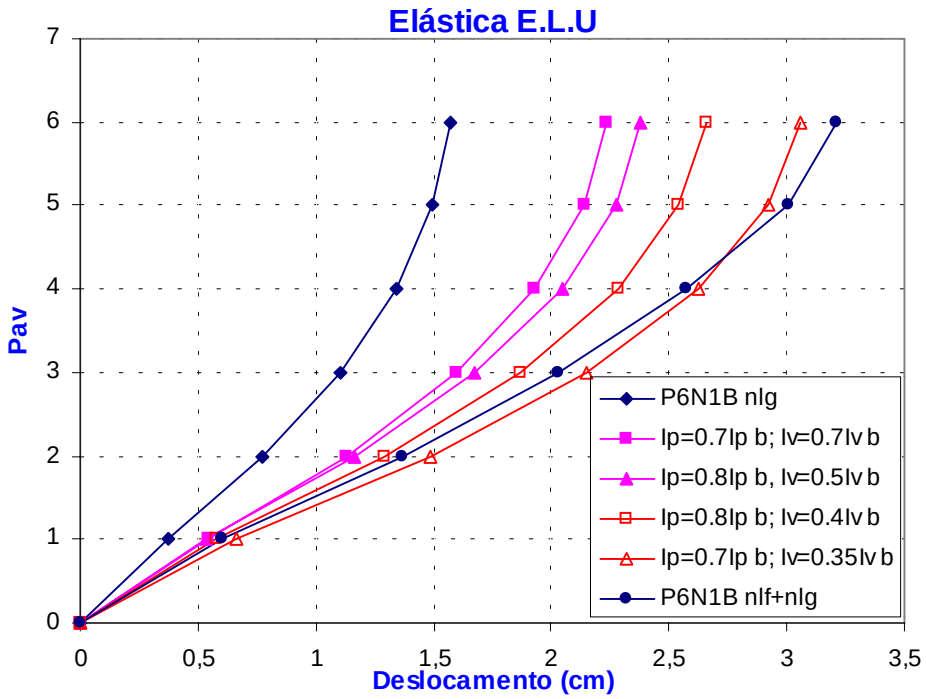


Figura 4.6h – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N1B

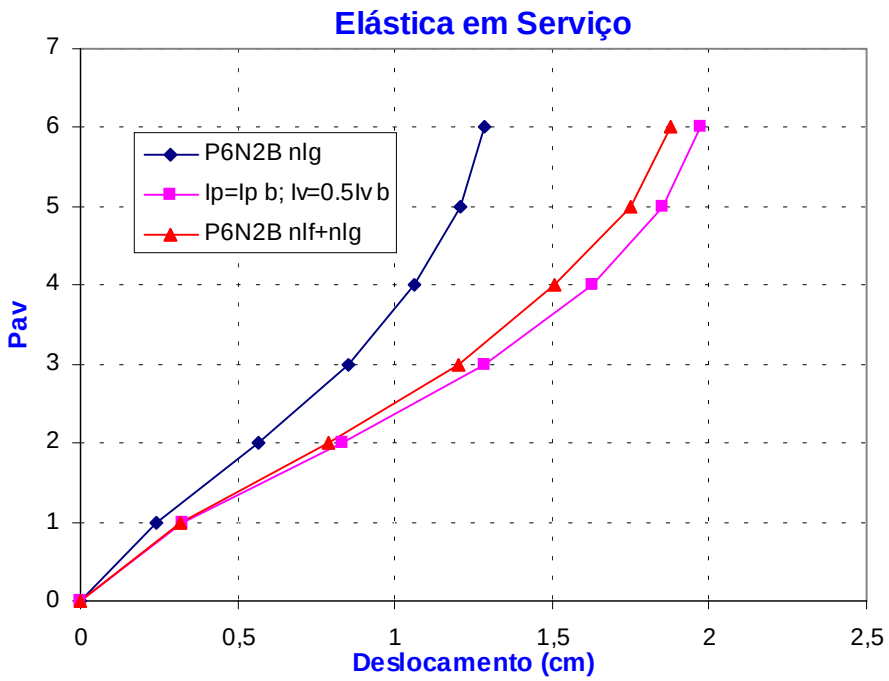


Figura 4.6i – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N2B

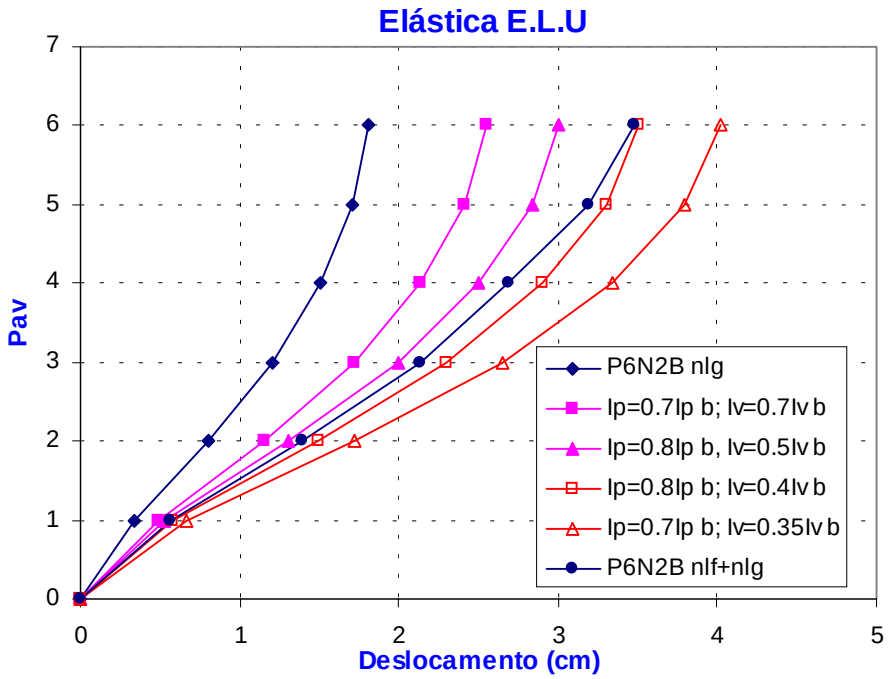


Figura 4.6j – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N2B

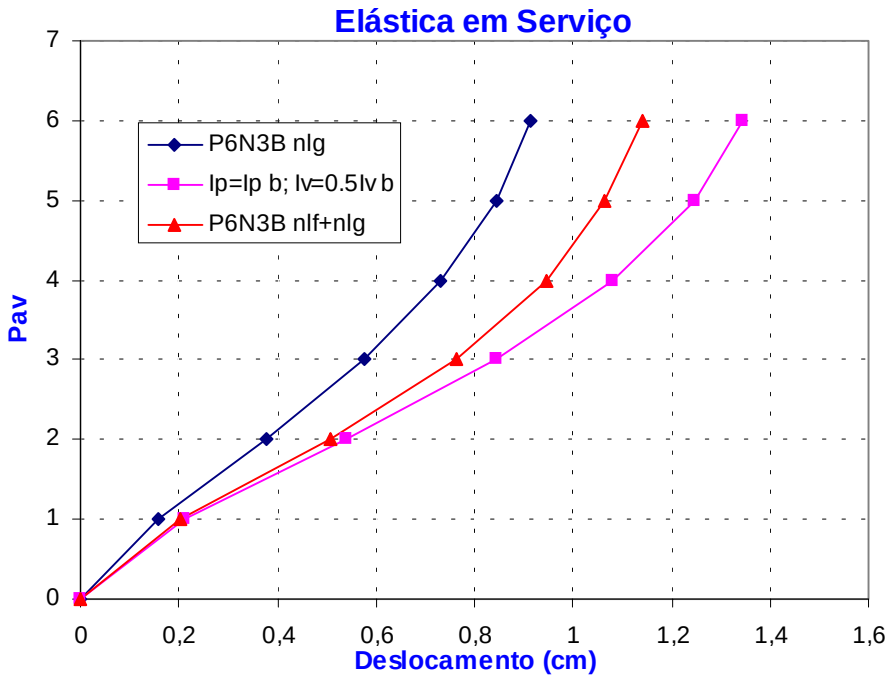


Figura 4.6k – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N3B

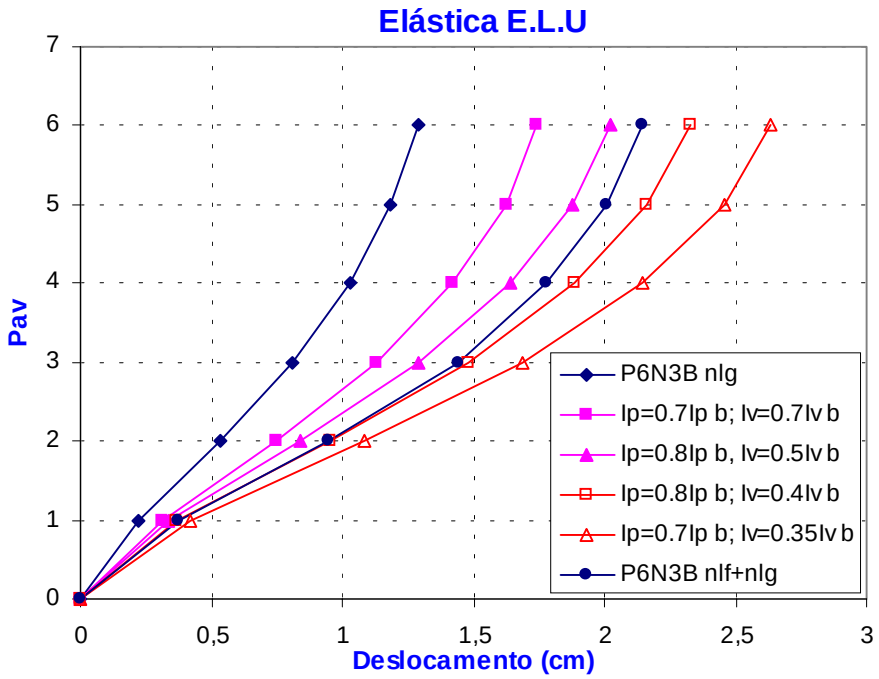


Figura 4.6l – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N3B

Para os pórticos tipo C as estruturas deformadas, em serviço, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares íntegras e entre os resultados obtidos para seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras* (ACI 318-95). No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo C, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

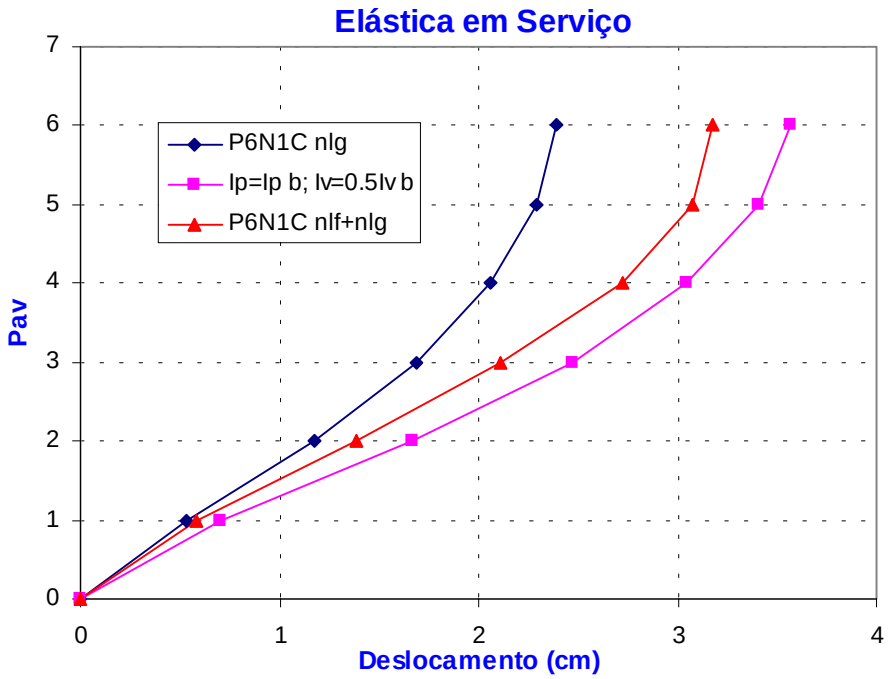


Figura 4.6m – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N1C

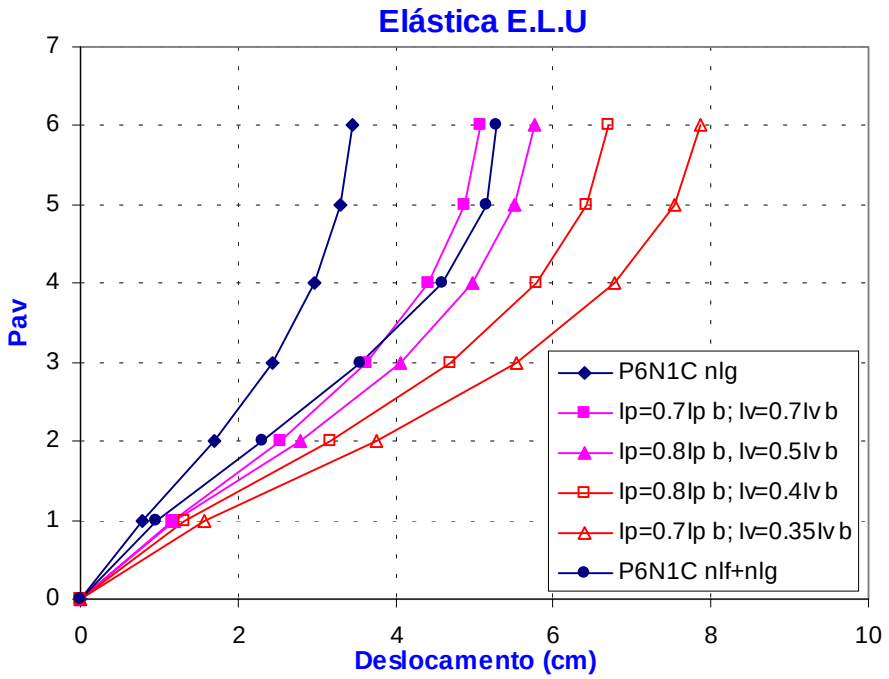


Figura 4.6n – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N1C

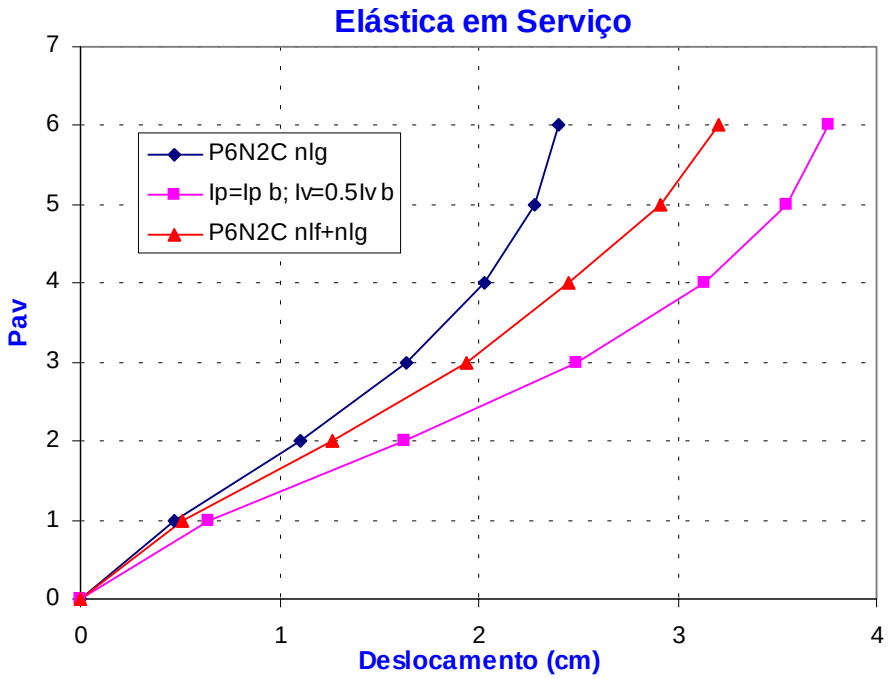


Figura 4.6o – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N2C

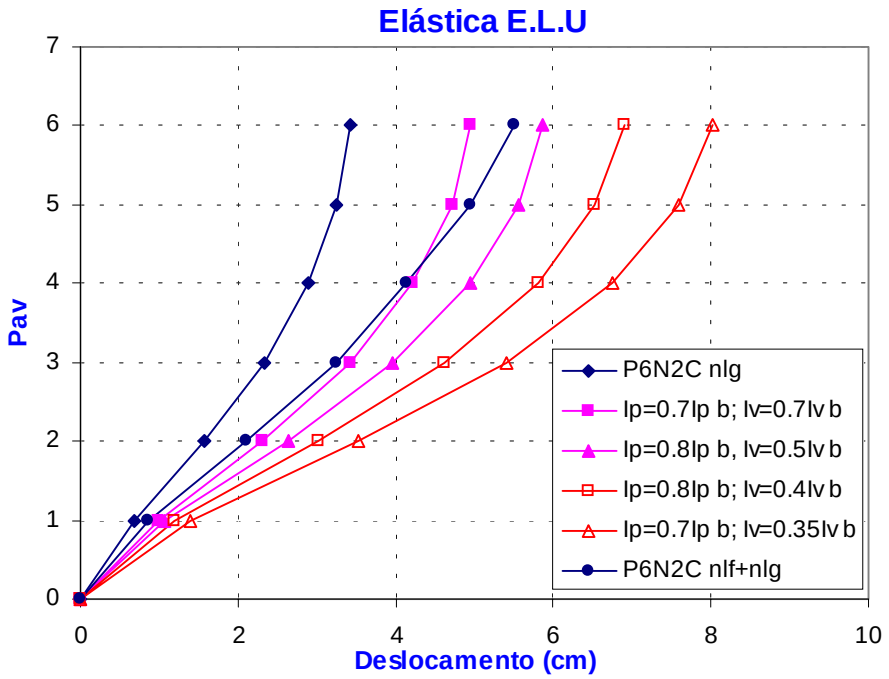


Figura 4.6p – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N2C

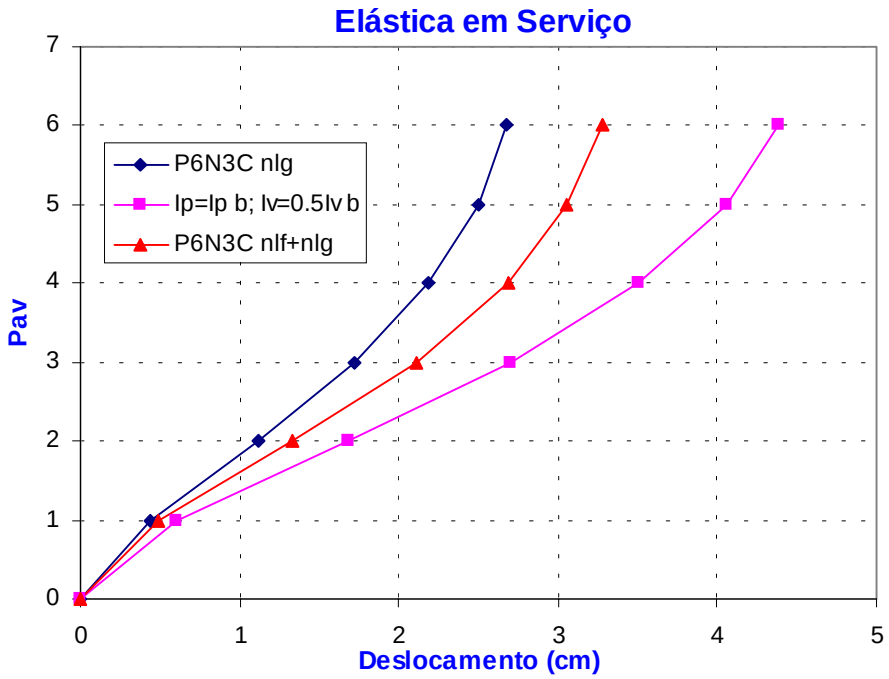


Figura 4.6q – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6N3C

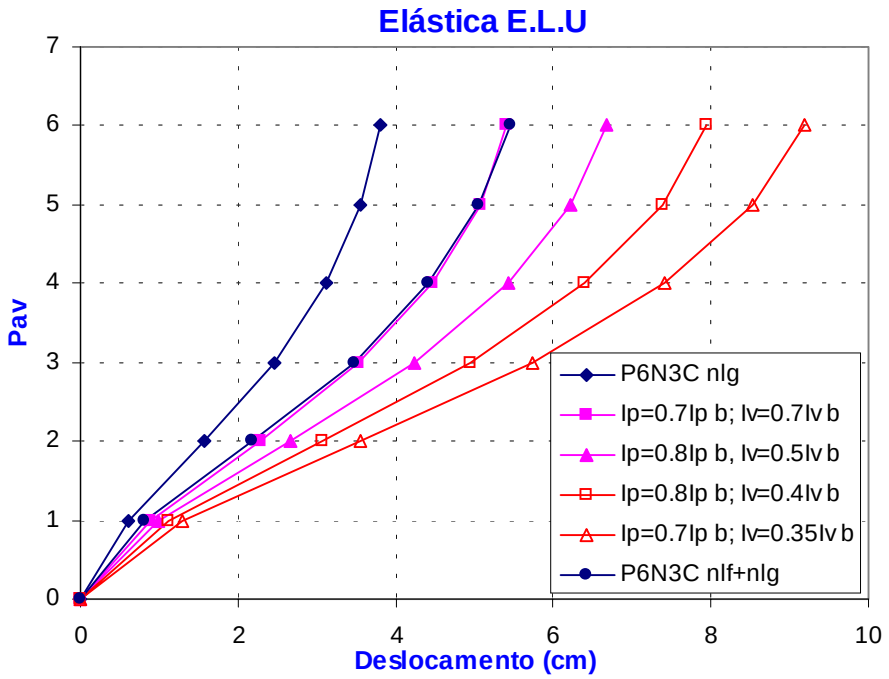


Figura 4.6r – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6N3C

Com o objetivo de aferir a rigidez lateral equivalente de cada pórtico analisado, utilizou-se a equação 4.1, adotando-se no lugar de δ_i o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais (δ_G) dado, conforme figura 4.7, por:

$$\delta_G = \frac{\sum G_j \delta_j}{G}; \qquad (4.4)$$

onde G_j é o carregamento vertical no pavimento *j;* δ_j é o deslocamento lateral do pavimento *j*, G é a resultante do carregamento vertical da estrutura e δ_P é o deslocamento lateral do ponto de aplicação da resultante G.

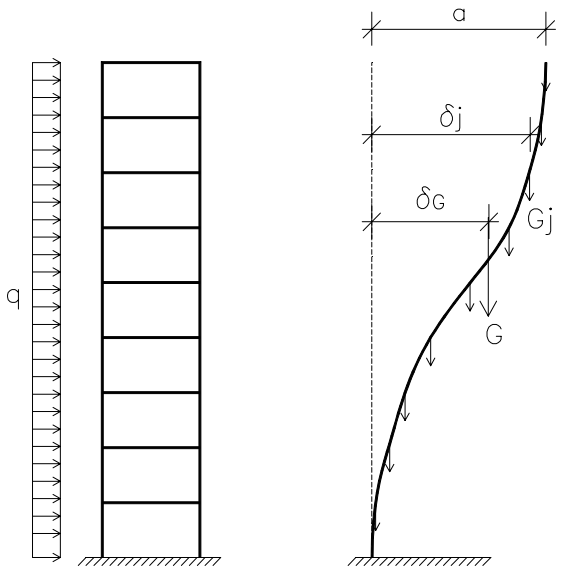


Figura 4.7 – Definição de δ_P

Desse modo, pode-se definir uma rigidez lateral para o pórtico dada por:

$$RL_i = \frac{H_i}{\delta_{Gi}}; \qquad (4.5)$$

onde H_i é o carregamento lateral no estágio *i; RL_i* é a rigidez lateral no estágio *i* de carregamento e δ_{Gi} é o deslocamento lateral correspondente do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais. Adotando-se os índices *NL* para os resultados da análise não-linear e *EL* para aqueles correspondentes à análise elástico-linear, vem:

$$RL_{iNL} \cdot \delta_{GiNL} = RL_{iEL} \cdot \delta_{GiEL}; \qquad (4.6)$$

logo, pode-se definir EI_{EQ} como a razão entre a rigidez lateral obtida da análise não-linear e aquela obtida da análise elástico-linear, :

$$EI_{EQ} = \frac{RL_{GiNL}}{RL_{GiEL}} = \frac{\delta_{GiEL}}{\delta_{GiNL}} \qquad (4.7)$$

O carregamento nas fases definidas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo valor do carregamento de último da estrutura (P_U). Desse modo, obteve-se um gráfico adimensional relacionando rigidez lateral equivalente e carregamento, traçando-se assim os gráficos das figuras 4.8a, 4.8b e 4.8c.

A figura 4.8a apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo A, com taxas de armadura próximas à mínima. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 101% e 89% da rigidez linear, correspondente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 86% e 65% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma grande redução, variando entre 25% e 28% da rigidez elástica.

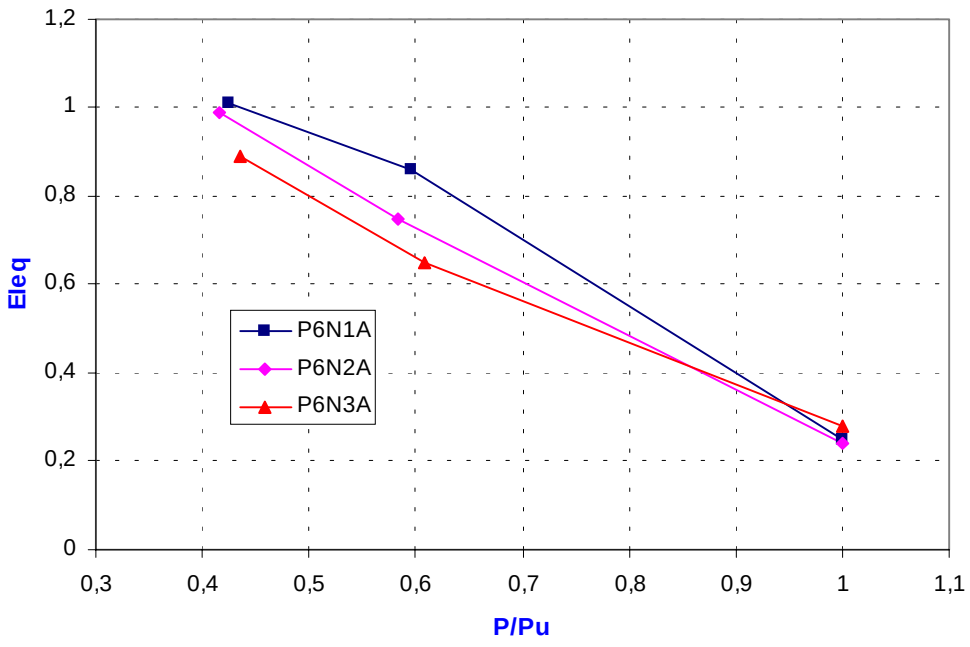


Figura 4.8a – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo A

A figura 4.8b apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo B, com taxas de armadura médias. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 68% e 78% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 52% e 58% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 32% e 38% da rigidez elástica. O pórtico P6N3B possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo B e o P6N1B a menor rigidez, em virtude dos efeitos benéficos da força de compressão nos pilares.

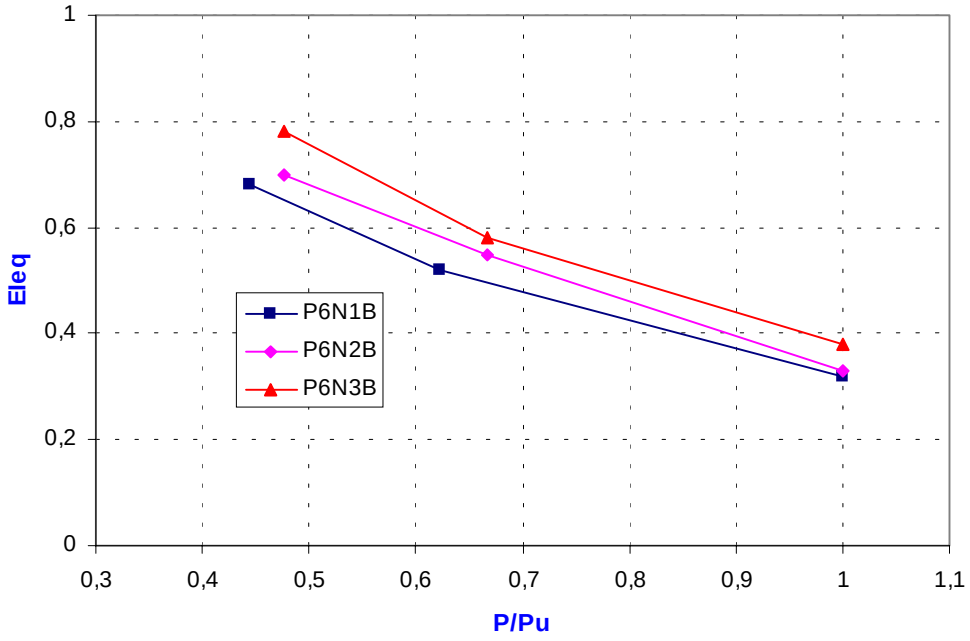


Figura 4.8b – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo B

A figura 4.8c apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo C, com altas taxas de armadura. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 77% e 82% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 67% e 71% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 47% e 55% da rigidez elástica. Em virtude da presença de tensões de compressão, que tendem a suprimir a fissuração, o pórtico P6N3C possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo C e o P6N1C a menor rigidez, de modo semelhante ao que acontece nos pórticos tipo B.

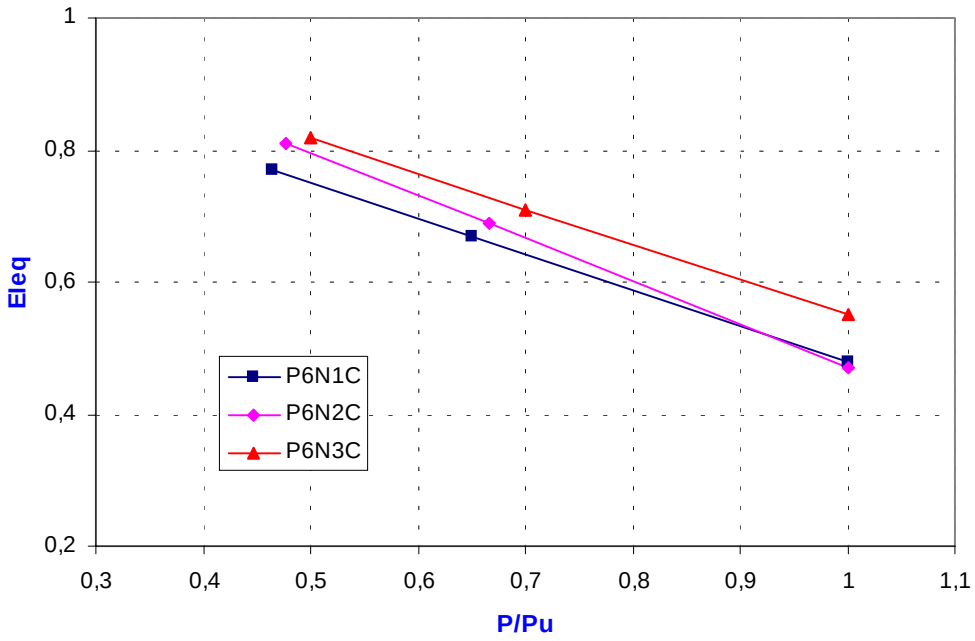


Figura 4.8c – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo C

4.3. CONCLUSÕES

Observa-se, nos exemplos analisados neste capítulo, que o comportamento dos pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares é, qualitativamente, bastante semelhante para níveis de carregamento e taxas de armadura equivalentes, levando às seguintes conclusões:

1) Em serviço, os pórticos tipo A apresentam rigidez próxima à elástica em virtude das seções transversais dos elementos serem robustas. Com o acréscimo de carregamento, em decorrência das baixas taxas de armaduras, os efeitos de fissuração são muito intensos, ocorrendo uma perda substancial de rigidez dos elementos próximo ao colapso da estrutura. Em virtude das grandes seções transversais, não se identifica o efeito benéfico das tensões de compressão, reduzindo a fissuração nos pilares.
2) Os pórticos tipo B, com taxas médias de armadura, apresentam na fase de serviço rigidez inferior aos pórticos tipo A. Isso decorre do fato das

seções transversais dos elementos serem menos robustas, resultando em um nível de fissuração superior. Não existe uma redução tão acentuada de rigidez nas proximidades do colapso da estrutura, como acontece com os pórticos tipo A, pois o aumento da quantidade de armadura limita os efeitos de fissuração. Observa-se, nos pórticos tipo B, que a rigidez equivalente é inversamente proporcional ao nível de carregamento da estrutura, diminuindo do nível 3 para o nível 1 de carregamento. Isso porque, a presença de tensões de compressão, nesse caso, é benéfico para o comportamento da estrutura, pois tende a suprimir a fissuração pelo fato da força normal ser bem inferior ao valor correspondente à máxima compressão centrada que pode ser aplicada no pilar.

3) Os pórticos tipo C, por apresentarem elevadas taxas de armadura, apresentam a menor variação de rigidez entre os extremos. Isso porque essas altas taxas de armadura reduzem os efeitos de fissuração. Os pórticos tipo C, de forma semelhante aos pórticos tipo B, apresentam rigidez equivalente decrescente do nível 3 para o nível 1 de carregamento, em virtude do efeito benéfico das tensões de compressão nos pilares.

A tabela 4.4 apresenta a rigidez lateral equivalente, referente aos exemplos analisados neste capítulo, nas diversas condições de carregamento e taxa de armadura. A análise destes resultados é particularmente útil para a determinação dos valores de EI_{ef} da estrutura correspondentes a um único coeficiente de redução na inércia das vigas e dos pilares, como proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991). De fato, a idéia de se adotar um coeficiente único de redução de inércia para a estrutura como um todo facilita a implementação do processo simplificado, uma vez que dispensa realização de um modelo estrutural, com as inércias reduzidas, exclusivamente para avaliação dos efeitos não-lineares da estrutura. Desse modo, pode-se analisar a estrutura e sua estabilidade global com um único modelo estrutural, agilizando o processo de análise estrutural.

Tabela 4.4 – Rigidez lateral equivalente para os exemplos paramétricos de pórticos

Pórtico	Eleq		
	Serviço	E.L.U.	Colapso
PN1A	0,74	0,43	0,19
PN2A	0,73	0,55	0,26
PN3A	0,74	0,58	0,28
PN1B	0,54	0,45	0,34
PN2B	0,57	0,49	0,38
PN3B	0,64	0,54	0,42
PN1C	0,66	0,60	0,51
PN2C	0,70	0,61	0,54
PN3C	0,81	0,73	0,63
MÉDIA	*0,68*	*0,55*	*0,39*
P6N1A	1,01	0,86	0,25
P6N2A	0,99	0,75	0,24
P6N3A	0,89	0,65	0,28
P6N1B	0,68	0,52	0,32
P6N2B	0,70	0,55	0,33
P6N3B	0,78	0,58	0,38
P6N1C	0,77	0,67	0,48
P6N2C	0,81	0,69	0,47
P6N3C	0,82	0,71	0,55
MÉDIA	*0,83*	*0,66*	*0,37*

Considerando-se a média dos valores obtidos para os pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares, conforme a tabela 4.4, obtém-se :

a) Pórticos com 1 lance de pilares

Em serviço um $EI_{ef} = 0,68\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

No estado limite último $EI_{ef} = 0,55\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0,55/0,68 = 0,81$.

b) Pórticos com 6 lances de pilares

Em serviço um $EI_{ef} = 0,83\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

No estado limite último $EI_{ef} = 0,66\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0,66/0,83 = 0,80$.

Em termos quantitativos os pórticos com 6 lances apresentam resultados mais favoráveis que aqueles referentes aos pórticos com 1 lance de pilares. Isso decorre do fato das estruturas com 6 lances serem mais hiperestáticas que aquelas com 1 lance de pilares, beneficiando-se de uma maior redistribuição dos esforços na estrutura. Além disso, para que se pudesse obter momentos fletores relevantes nos pilares dos pórticos com 1 lance de pilares, o carregamento lateral aplicado é bem maior que aqueles normalmente aplicados ao nível dos pavimentos nos

edifícios usuais. Desse modo, quantitativamente serão abandonados os resultados referentes aos pórticos com 1 lance, concentrando-se naqueles referentes aos pórticos com 6 lances de pilares.

Através da tabela 4.5, pode-se observar de modo mais detalhado os valores de EI_{ef} correspondentes aos diversos níveis de carregamento e armadura para os pórticos com 6 lances:

Tabela 4.5 – Rigidez lateral equivalente para os exemplos paramétricos de pórticos com 6 lances de pilares

Pórtico	Taxa de As (%)			Eleq		
	Pilar	Viga		Serviço	E.L.U.	Colapso
		sup	inf			
P6N1A	0,53	0,16	0,22	1,01	0,86	0,25
P6N2A	0,51	0,23	0,15	0,99	0,75	0,24
P6N3A	0,63	0,28	0,17	0,89	0,65	0,28
MÉDIA	*0,56*	*0,22*	*0,18*	*0,96*	*0,75*	*0,26*
P6N1B	1,40	0,57	0,57	0,68	0,52	0,32
P6N2B	1,67	0,77	0,39	0,70	0,55	0,33
P6N3B	1,50	0,52	0,26	0,78	0,58	0,38
MÉDIA	*1,52*	*0,62*	*0,41*	*0,72*	*0,55*	*0,34*
P6N1C	3,20	1,68	1,04	0,77	0,67	0,48
P6N2C	3,32	1,51	0,64	0,81	0,69	0,47
P6N3C	3,39	1,57	0,71	0,82	0,71	0,55
MÉDIA	*3,30*	*1,59*	*0,80*	*0,80*	*0,69*	*0,50*

Os resultados anteriores indicam que a rigidez lateral dos pórticos planos está intimamente ligada às taxas de armaduras empregadas no detalhamento e à magnitude do carregamento a que estão submetidos. De fato, observa-se que os pórticos com taxas de armadura semelhantes apresentam comportamentos muito parecidos, sendo a rigidez lateral determinada conforme sejam maiores ou menores os efeitos benéficos da compressão nos pilares proveniente do carregamento aplicado.

Considerando-se os valores obtidos para os pórticos com 6 lances de pilares, conforme as diferentes taxas de armadura, obtém-se (tabela 4.5):

a) Pórticos com 6 lances de pilares tipo A

Em serviço um $EI_{ef} = 0{,}96\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

No estado limite último $EI_{ef} = 0{,}75\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}75/0{,}96 = 0{,}78$.

b) Pórticos com 6 lances de pilares tipo B

Em serviço um $EI_{ef} = 0{,}72\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,55 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,55/0,72 = 0,76.

c) Pórticos com 6 lances de pilares tipo C

Em serviço um EI_{ef} = 0,80 E_cI_g para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,69 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,69/0,80 = 0,86.

Analisando-se, por fim, as estruturas deformadas obtidas dos pórticos com 6 lances de pilares, pode-se avaliar resultados quantitativos de redução de inércia. A tabela 4.6 apresenta as reduções na inércia de vigas pilares que melhor descrevem o comportamento não-linear para cada exemplo:

Tabela 4.6 – Inércias equivalentes para vigas e pilares nos os exemplos paramétricos de pórticos

Pórtico	**Serviço**		**E.L.U.**	
	EI vigas	**EI pilares**	**EI vigas**	**EI pilares**
P6N1A	1,0	1,0	0,7< Elef <1,0	0,7< Elef <1,0
P6N2A	1,0	1,0	0,7	0,7
P6N3A	Elef < 1,0	1,0	0,5	0,8
P6N1B	Elef < 0,5	Elef < 1,0	0,35	0,7
P6N2B	0,5	1,0	0,4	0,8
P6N3B	0,5< Elef <1,0	1,0	0,5	0,8
P6N1C	Elef > 0,5	1,0	0,7	0,7
P6N2C	0,5< Elef <1,0	1,0	0,5< Elef <0,7	0,7< Elef <0,8
P6N3C	0,5< Elef <1,0	1,0	0,7	0,7

Analisando-se os valores apresentados na tabela 4.6, observa-se que:

1) Para os pórticos tipo A, em serviço, as estruturas deformadas resultantes do processamento não-linear se encontram próximas aos resultados obtidos considerando-se as seções íntegras de vigas e pilares. No estado limite último, os resultados variam entre os obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta;
2) Para os pórticos tipo B as estruturas deformadas, em serviço, se aproximam dos resultados obtidos considerando-se seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, as estruturas deformadas se apresentam entre os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da

seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 35% e pilares com 70% da inércia da seção bruta;

3) Para os pórticos tipo C as estruturas deformadas, em serviço, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares íntegras e os resultados obtidos para seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras*. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo C, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

Das considerações anteriores, conclui-se que os pórticos tipo A e C são os mais rígidos e que os pórticos tipo B são os mais deslocáveis. De fato, em virtude das seções dos pórticos tipo A serem bastante robustas, pois foram dimensionadas com armadura igual à mínima, estes pórticos apresentam-se bastante rígidos em serviço, havendo uma perda brusca de rigidez próximo ao colapso. Os pórticos tipo C, com taxas de armadura próximas à máxima, apresentam rigidez próxima à elástica em serviço sem apresentar reduções drásticas próximo ao colapso, pois as altas taxas de armadura restringem a fissuração. Os pórticos tipo B são os mais deslocáveis em virtude de não apresentar seções demasiadamente robustas ou excessivamente armadas.

Deve-se observar, particularmente, o comportamento do pórtico P6N1B que se apresenta bastante deslocável. Isso decorre do fato de não se contar com o efeito benéfico da compressão nos pilares que, para o nível 1, é muito baixa, aliado ao fato de se trabalhar com taxas intermediárias de armaduras. Esses dois fatores, em conjunto, determinaram o comportamento desfavorável deste pórtico quando comparado aos demais.

Após essa análise paramétrica do fenômeno, onde procurou-se abranger casos extremos de carregamento e taxas de armaduras, realizar-se-á uma análise com pórticos pertencentes a estruturas usuais de edifícios com diferentes números de pavimentos, afim de se avaliar as prescrições para redução de inércia que melhor descrevem a perda de rigidez dessas estruturas.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS PERTENCENTES A ESTRUTURAS USUAIS

5.1. INTRODUÇÃO

Os pórticos analisados no capítulo anterior tiveram sua dimensões determinadas para atender desde taxas de armaduras muito baixas, até taxas próximas à máxima permitida por norma, em cada um dos três níveis de carregamento aos quais foram submetidos. Em virtude dessa situação, alguns exemplos apresentam dimensões e taxas de armadura muito diferentes daquelas que usualmente seriam empregadas em projeto.

Desse modo, serão analisados neste capítulo pórticos pertencentes à estruturas usuais, com nível de carregamento e geometria mais próximas das que normalmente seriam utilizadas em projeto. As diferentes taxas de armadura serão obtidas com mudanças menos expressivas nas seções transversais dos elementos, de forma que não será abrangido um espectro amplo de taxas de armadura quanto no capítulo anterior, mas que se aproxime dos valores normalmente adotados em projeto. Desse modo, pretende-se avaliar quais valores de redução de inércia devem ser esperados para estruturas usuais de edifícios.

5.2. EXEMPLOS ANALISADOS

5.2.1. Edifício com 6 pavimentos

Considerando-se a geometria referente ao edifício da figura 5.1, pode-se definir os seguintes carregamentos:

Carregamento permanente nas lajes :

peso próprio das lajes : 25 kN/m^3 x 0,12 m	= 3,0 kN/m^2
divisórias + revestimento :	= 1,5 kN/m^2
Total :	= 4,5 kN/m^2

Carregamento variável nas lajes :

sobrecarga pavimento tipo :	3,0 kN/m^2
sobrecarga cobertura :	1,5 kN/m^2

Carregamento distribuído nas vigas centrais do tipo:

sobrecarga : 3,0 kN/m^2 x 4,0 m	= 12,0 kN/m
reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 4,0 m	= 18,0 kN/m
peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m	= 2,85 kN/m
Total :	**≅ 33 kN/m**

Carregamento distribuído nas vigas centrais da cobertura :

sobrecarga : 1,5 kN/m^2 x 4,0 m	= 6,0 kN/m
reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 4,0 m	= 18,0 kN/m
peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m	= 2,85 kN/m
Total :	**≅ 27 kN/m**

Carregamento distribuído nas vigas de fechamento :

paredes : 15 kN/m^3 x 0,15m x (3,0-0,50)m	= 5,63 kN/m
peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m	= 2,85 kN/m
Total :	≅ 8,48 kN/m

Reações concentradas :

viga de fechamento : 8,48 kN/m x 4,0 m = 33,9 kN

pilar : 0,45 m x 0,45 m x 25 kN/m^3 x 3,0 m = 15,19 kN

Total : ≅ **49 kN**

Vento : 1 kN/m^2 x 4 m = 4 kN/m

Neste exemplo, os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades acidentais (e_a) e de segunda ordem (e_2), além da excentricidade inicial (e_i) devida ao carregamento. Nestes exemplos, considerou-se uma e_a mínima de 2 cm e uma e_a máxima de h/30, conforme prescreve a NB1/78. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência fck=20 MPa e aço CA-50A (fys=500 MPa). Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são : E_{ct} = 32000 MPa, f'_c = 23,5 MPa, ε_0 = 0,002, f_t = 2,20 MPa, α = 0,70, $\varepsilon_m = 20\ \varepsilon_t$, E_s = 210000 MPa, E'_s = 1000 MPa, $\varepsilon_{s\ máx}$ = 0,010.
2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
4) As vigas foram dimensionadas segundo a NB-1/78 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.
5) Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades e_a, e_2 e e_i.
6) As dimensões das vigas foram determinadas considerando-se a altura das vigas de cerca de 1/10 do vão, variando-se a largura para se obter vigas com maiores e menores taxas de armadura;

7) As dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seção quadrada com taxas de armadura próximas à mínima, à média e à máxima de norma;
8) As taxas de armadura A, B e C ficam definidas do seguinte modo:
   - Tipo A : Pilares com taxas de armaduras muito próximas da mínima permitida pela norma e vigas com a taxas correspondentes à largura de 30 cm e altura de 50 cm;
   - Tipo B : Pilares com taxas de armaduras médias e vigas com a taxas correspondentes à largura de 20 cm e altura de 50 cm;
   - Tipo C : Pilares com taxas de armaduras próximas da máxima permitida pela norma e vigas com a taxas correspondentes à largura de 15 cm e altura de 50 cm;
9) Cada pórtico foi modelado com 108 elementos : cinco para cada pilar e oito para a viga, conforme figura 5.1. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da vigas e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).
10) O carregamento aplicado corresponde ao previamente determinado para o edifício, estabelecendo-se a parcela referente ao pórtico analisado, sem a consideração de níveis diferentes de carregamento.

Empregando-se essa metodologia, não são obtidas armaduras de vigas tão próximas à mínima de 0,15% visto que, para conseguir tais taxas, são necessárias vigas com dimensões muito maiores que as usuais. Portanto, em função da metodologia empregada, os exemplos analisados neste capítulo não apresentam grandes variações nas seções transversais e nas taxas de armaduras das vigas, como ocorre nos exemplos paramétricos. O detalhamento dos pórticos analisados é apresentado no apêndice A.

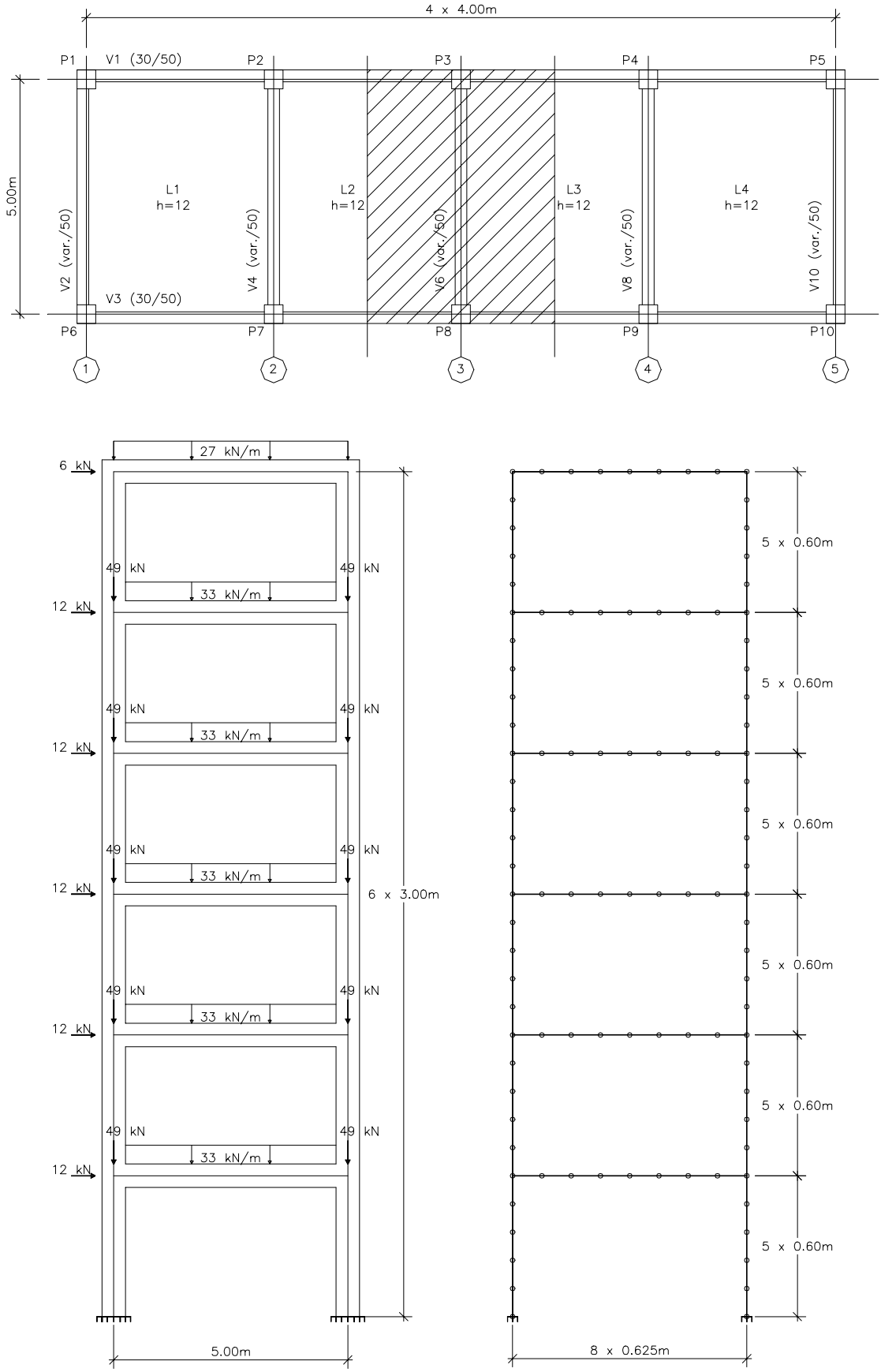


Figura 5.1 – Geometria do edifício de 6 pavimentos

Examinando-se as curvas *força x deslocamento*, figura 5.2, pode-se observar que o pórtico P6A, que apresenta as menores taxas de armadura, não se comporta de forma tão rígida quanto os pórticos tipo A analisados no capítulo anterior. Isso porque, apesar de possuir as menores taxas de armadura, suas dimensões não se encontram tão acima das usuais. Observa-se que os pórticos P6A, P6B e P6C não apresentam diferenças significativas entre si em relação aos valores obtidos para os deslocamentos laterais e para a carga última, no processamento não-linear.

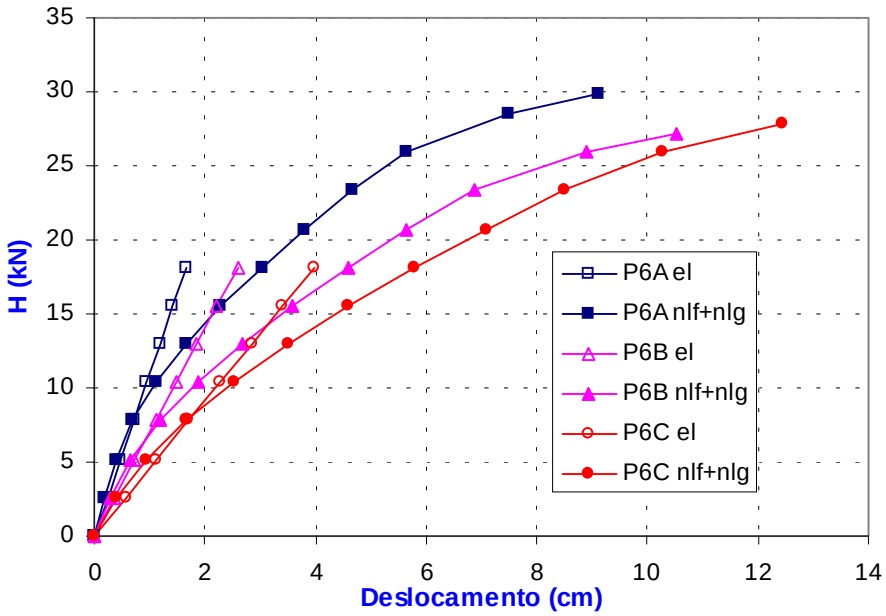


Figura 5.2 – Curvas deslocamento x carregamento pórticos usuais de 6 pavimentos

Nas figuras 5.3a a 5.3f pode-se observar as estruturas deformadas para os pórticos P6A, P6B e P6C. Observa-se que para o pórtico tipo A, a estrutura deformada, em serviço, se apresenta próximo à proposta do ACI que indica seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo A, se apresenta pouco mais deslocável que aquela analisada com as seções de vigas com 50% e dos pilares com 80% da inércia da seção bruta.

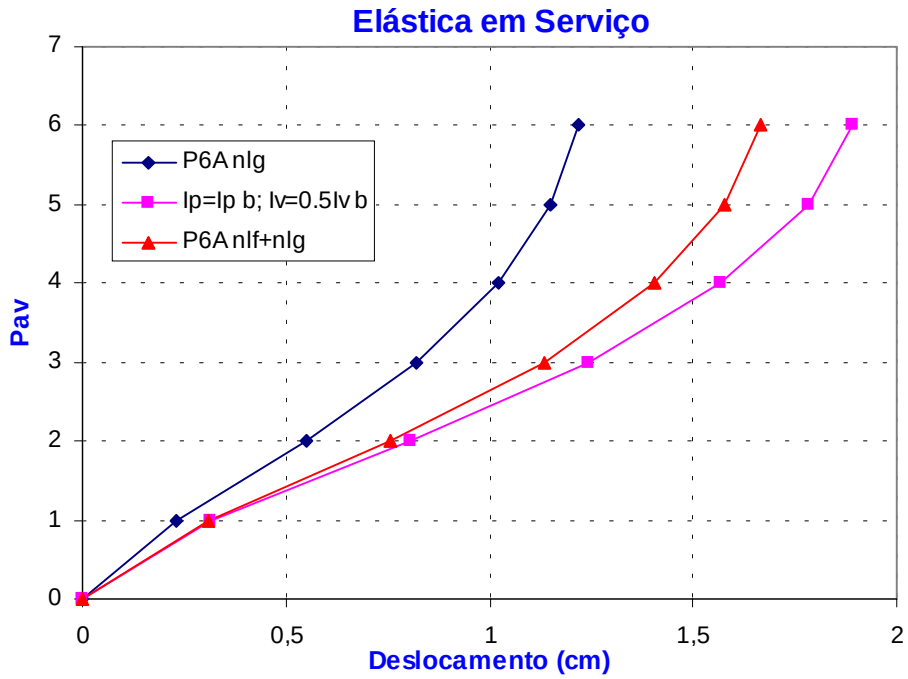


Figura 5.3a – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6A

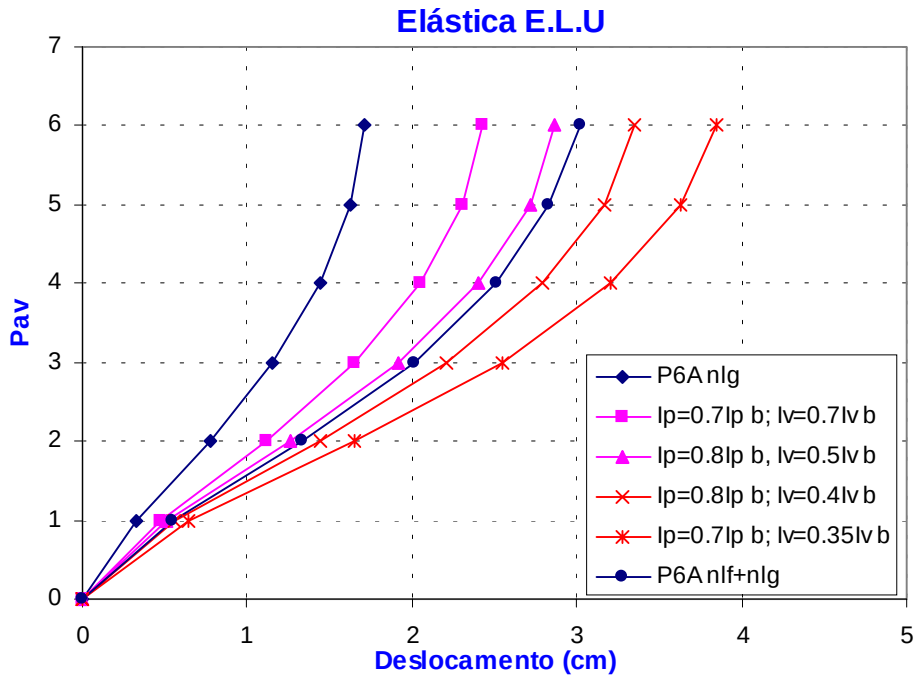


Figura 5.3b – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6A

Para o pórtico tipo B a estrutura deformada, em serviço, se apresenta menos deslocável em relação à proposta do ACI que indica seções de pilares

íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo B, se apresenta bastante próxima dos resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

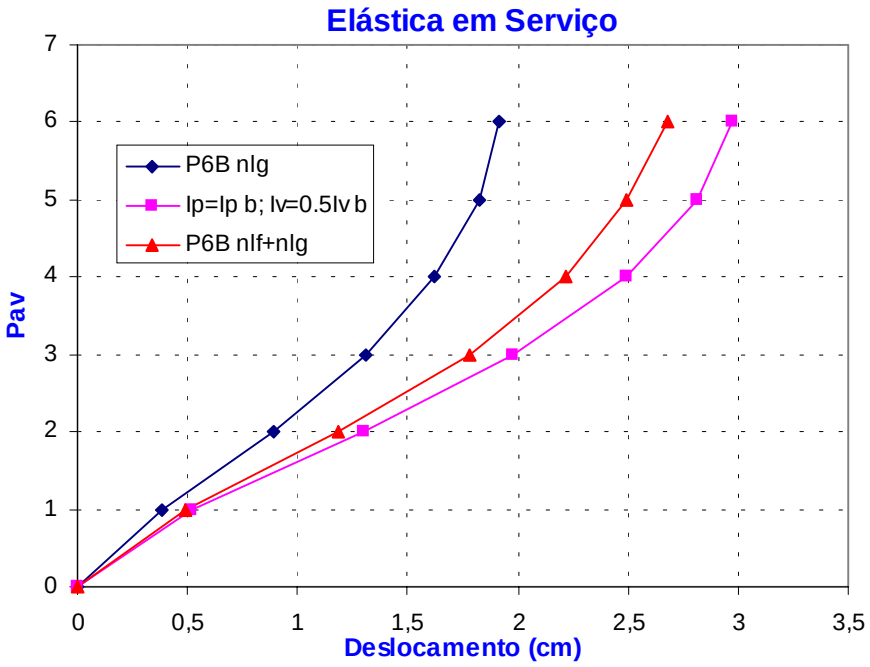


Figura 5.3c – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6B

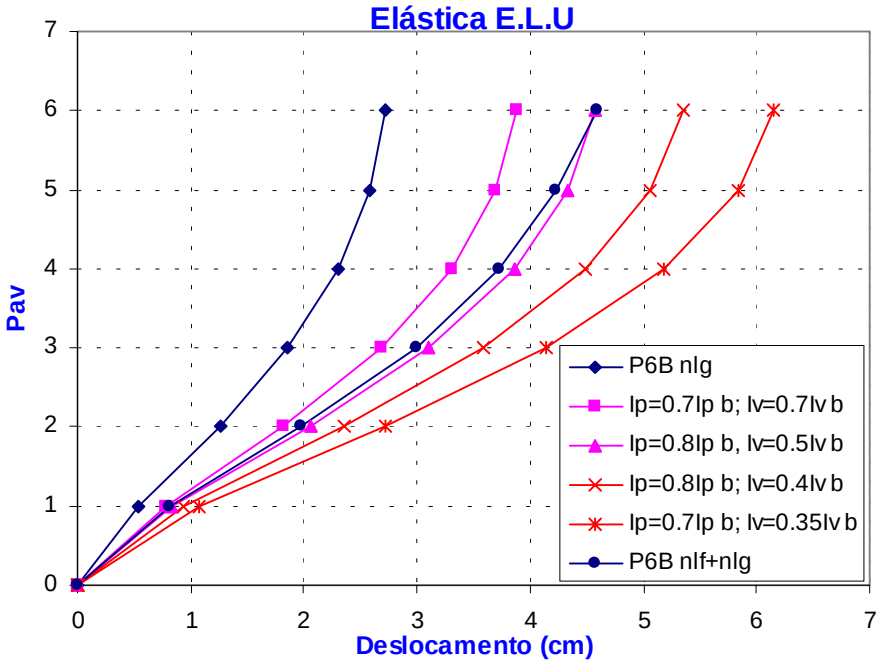


Figura 5.3d – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6B

Para o pórtico tipo C a estrutura deformada, em serviço, se mostra mais próxima do resultado obtido para as seções de vigas e pilares íntegras. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo C, se aproxima do resultado obtido para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta.

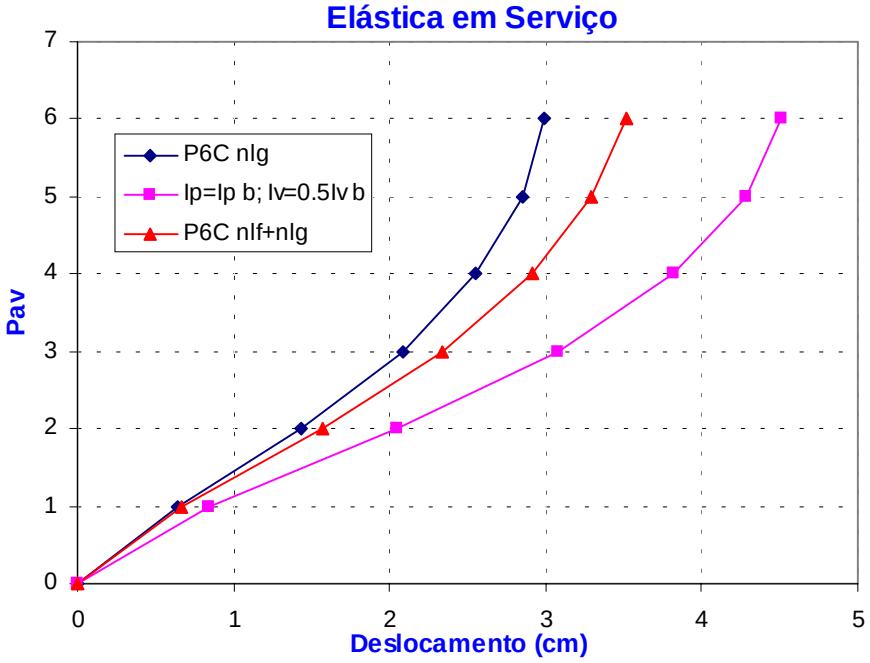


Figura 5.3e – Configuração deformada da estrutura em serviço: P6C

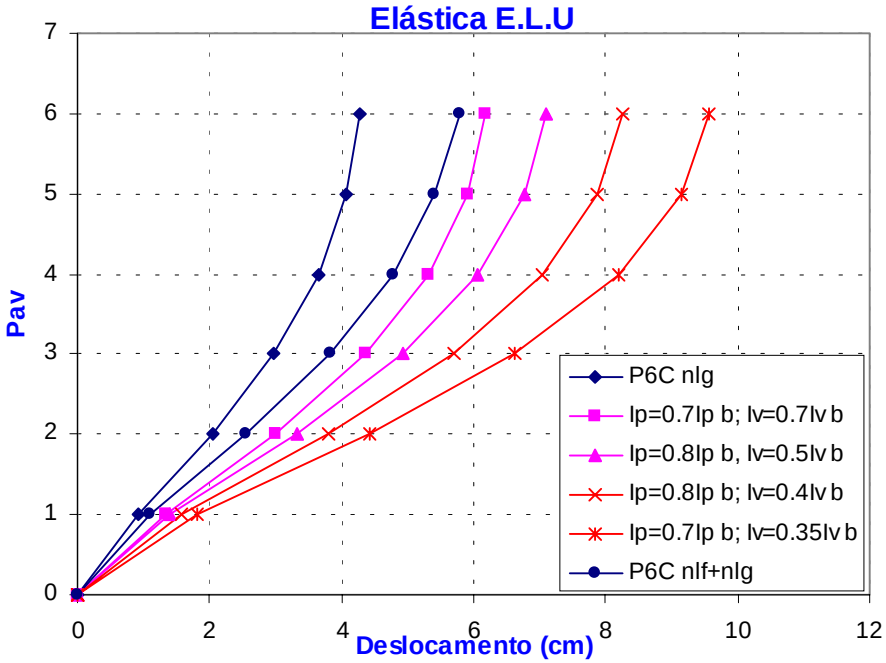


Figura 5.3f – Configuração deformada da estrutura no ELU: P6C

Estudou-se, então, a rigidez lateral equivalente da estrutura comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear e o obtido da análise não-linear. O carregamento nas fases denominadas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura (P_U). Assim, obteve-se o gráfico adimensional da figura 5.4, que relaciona a rigidez lateral com o carregamento da estrutura.

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 90% e 72% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 78% e 57% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 60% e 25% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P6C, seguido pelos pórticos P6B e P6A, respectivamente. Este resultado indica que, para pórticos com seções transversais semelhantes, aqueles com maiores taxas de armadura são mais rígidos em relação àqueles com menores taxas de armadura. Isso é razoável, pois as maiores taxas de armadura contribuem para a redução da fissuração, que influencia de forma significativa a rigidez das estruturas de concreto armado.

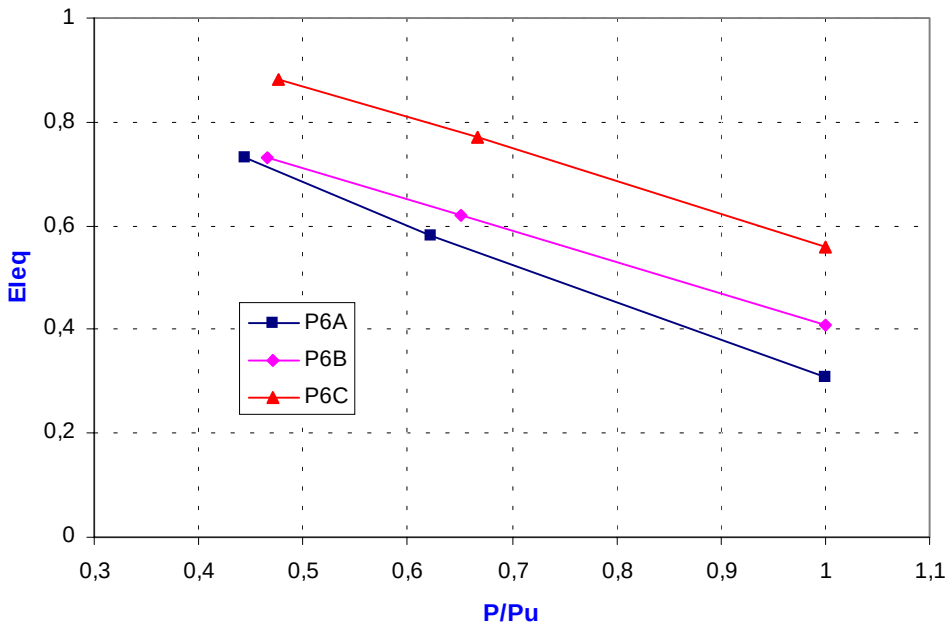


Figura 5.4 – Rigidez lateral x carregamento edifício de 6 pavimentos

5.2.2. Edifício com 8 pavimentos

Dando continuidade ao estudo de estruturas mais próximas daquelas usualmente projetadas, analisou-se um edifício com 8 pavimentos apresentado por CAUVIN (1979) e também analisado por outros autores como CILONI (1993) e SILVA (1996). As dimensões dos elementos foram determinadas de forma que não fossem obtidas seções muito maiores que as usualmente empregadas em projeto, do mesmo modo que nos pórticos P6A, P6B e P6C.

Considerando-se a geometria o edifício da figura 5.5, pode-se definir os seguintes carregamentos :

Carregamento permanente nas lajes :

peso próprio das lajes : 25 kN/m^3 x 0,12 m	= 3,0 kN/m^2
divisórias + revestimento :	= 1,5 kN/m^2
Total :	= 4,5 kN/m^2

Carregamento variável nas lajes :

sobrecarga pavimento tipo :	4,0 kN/m^2
sobrecarga cobertura :	1,5 kN/m^2

Carregamento distribuído nas vigas centrais do tipo:

sobrecarga : 4,0 kN/m^2 x 3,6 m	= 14,4 kN/m
reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 3,6 m	= 16,2 kN/m
peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m	= 2,85 kN/m
Total :	**≅ 33 kN/m**

Carregamento distribuído nas vigas centrais da cobertura :

sobrecarga : 1,5 kN/m^2 x 3,6 m	= 5,4 kN/m
reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 3,6 m	= 16,2 kN/m
peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m	= 2,85 kN/m
Total :	**≅ 25 kN/m**

Carregamento distribuído nas vigas de fechamento :

paredes : 15 kN/m^3 x 0,15m x (3,6-0,50)m	= 6,98 kN/m

peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,50-0,12) m = 2,85 kN/m

Total : ≅ 9,83 kN/m

Reações concentradas :

viga de fechamento : 9,83 kN/m x 3,6 m = 35,4 kN

pilar : 0,5 m x 0,5 m x 25 kN/m^3 x 3,6 m = 22,5 kN

Total : ≅ 58 kN

Vento : 1 kN/m^2 x 3,6 m = 3,6 kN/m

Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades acidentais (e_a) e de segunda ordem (e_2), além da excentricidade inicial (e_i) devida ao carregamento. Nestes exemplos, considerou-se uma e_a mínima de 2 cm e uma e_a máxima de h/30. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência fck=20 MPa e aço CA-50A (fys=500 MPa). Os seguintes parâmetros caracterizam os materiais para a análise não-linear : E_{ct} = 32000 MPa, f'_c = 23,5 MPa, ε_0 = 0,002, f_t = 2,20 MPa, α = 0,70, $\varepsilon_m = 20\ \varepsilon_t$, E_s = 210000 MPa, E'_s = 1000 MPa, $\varepsilon_{s\ máx}$ = 0,010.
2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
4) As vigas foram dimensionadas segundo a NB-1/78 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.
5) Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades e_a, e_2 e e_i.

6) Altura das vigas cerca de 1/10 do vão, variando-se a largura para se obter vigas com maiores e menores taxas de armadura;
7) As dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seção quadrada com taxas de armadura próximas à mínima (taxa A), à média (taxa B) e à máxima (taxa C).
8) Cada pórtico foi modelado com 320 elementos : quatro para cada pilar e vinte e quatro para a viga, conforme a figura 5.5c. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da vigas e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).

Foram analisados três pórticos com 8 lances de pilares, correspondentes ao nível de carregamento proposto com três taxas de armadura diferentes. O detalhamento dos pórticos analisados é apresentado no apêndice B.

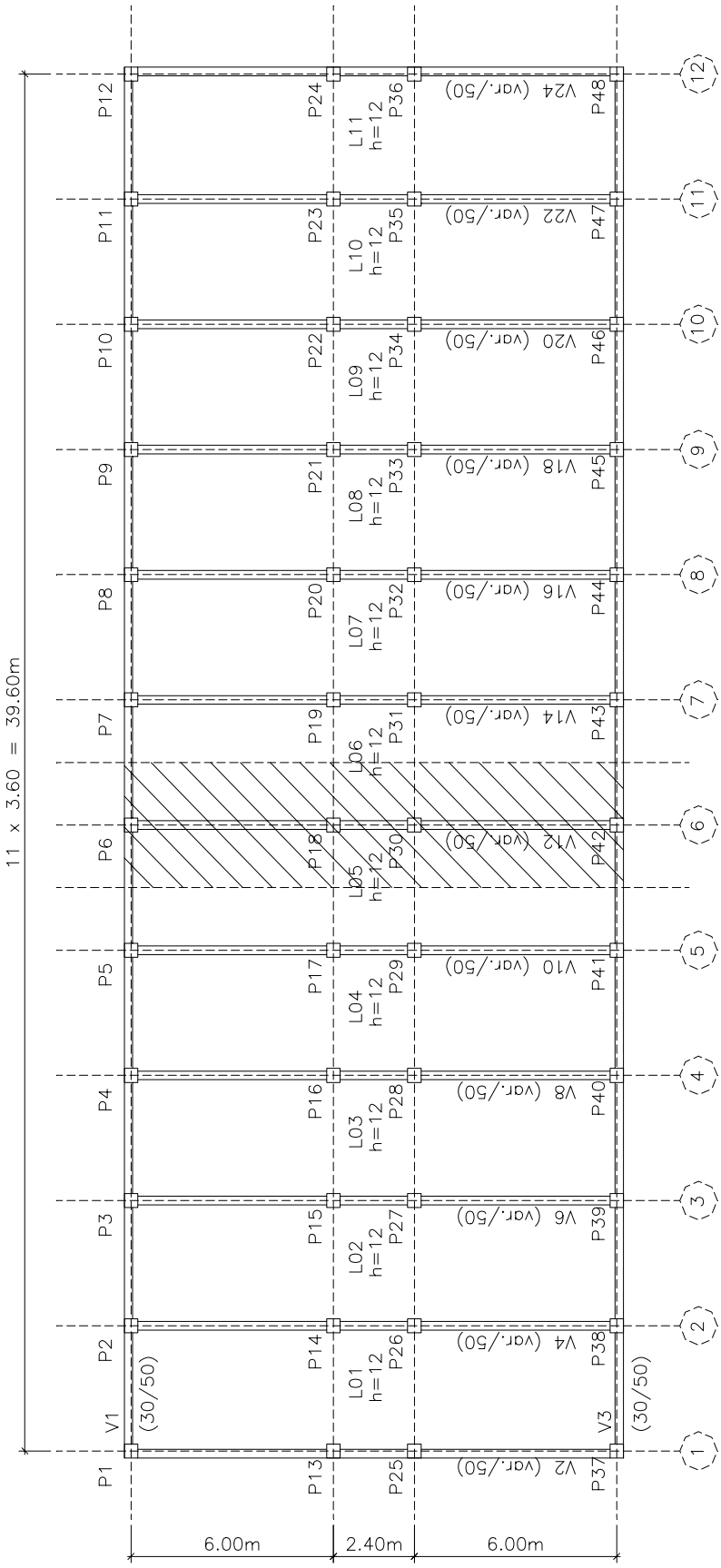


Figura 5.5a – Geometria do edifício de 8 pavimentos

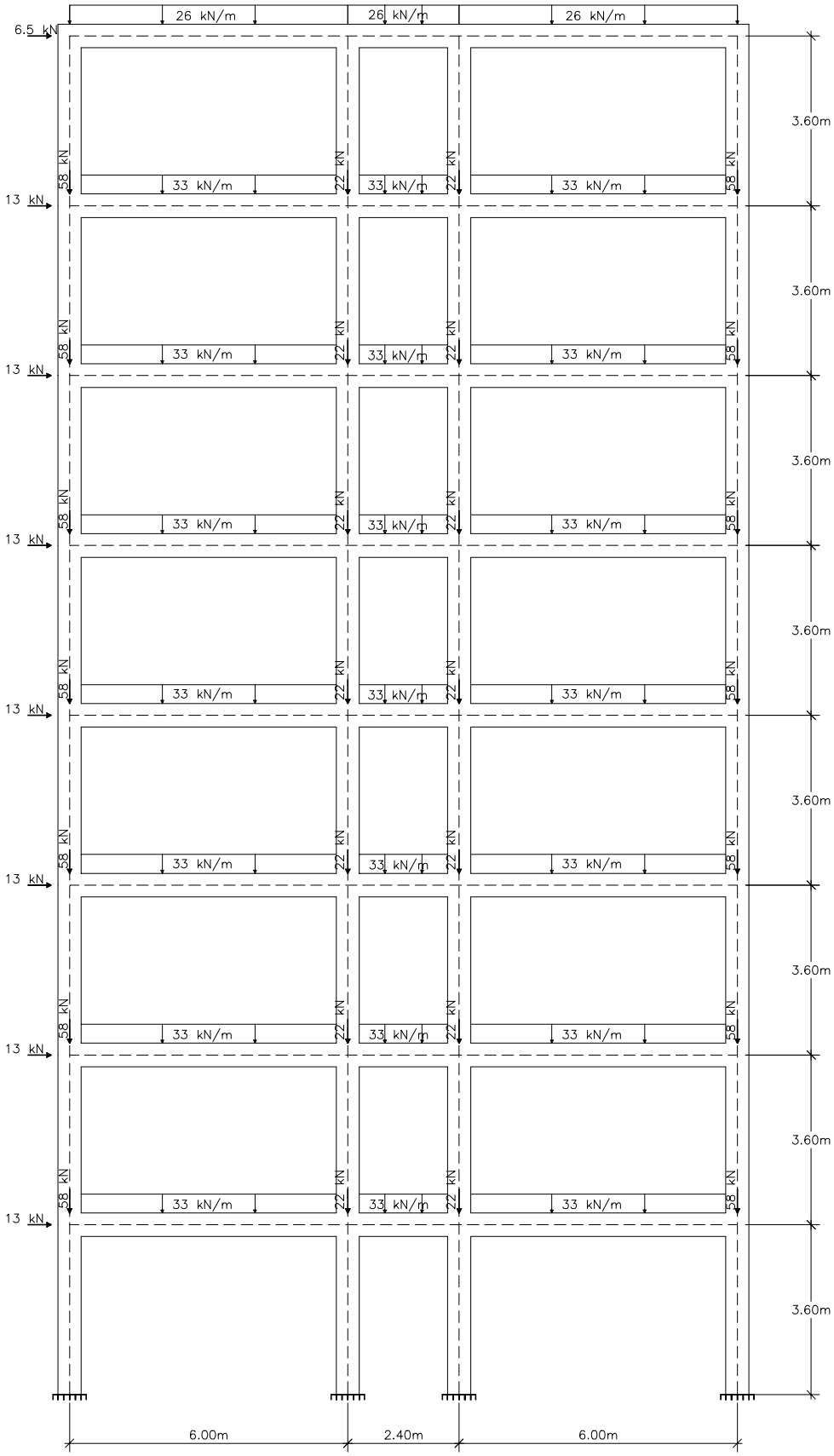


Figura 5.5b – Geometria do pórtico pertencente ao edifício de 8 pavimentos

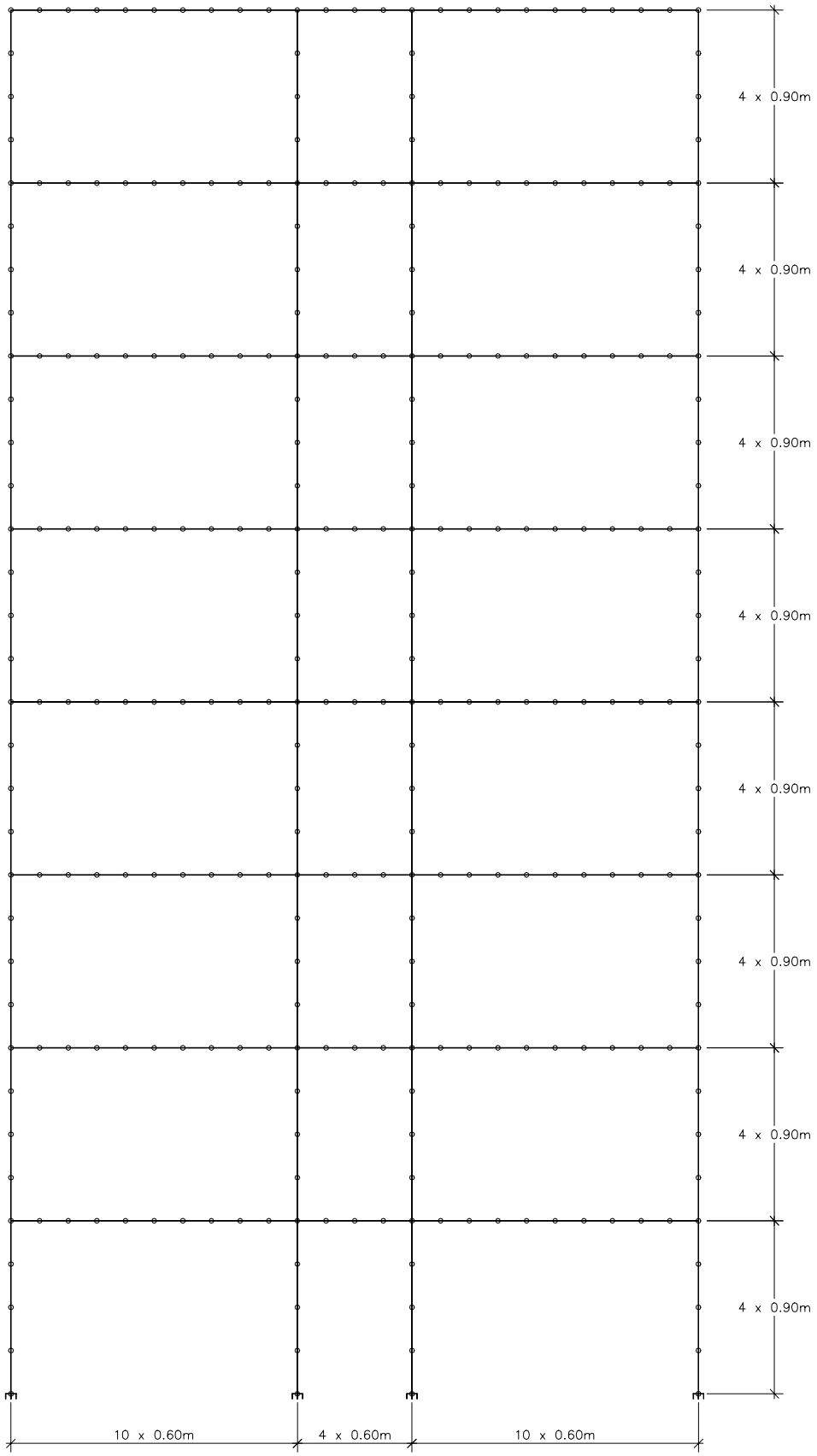


Figura 5.5c – Discretização adotada para o pórtico pertencente ao edifício de 8 pavimentos

As curvas *força x deslocamento* referentes aos exemplos analisados são apresentadas na figura 5.6.

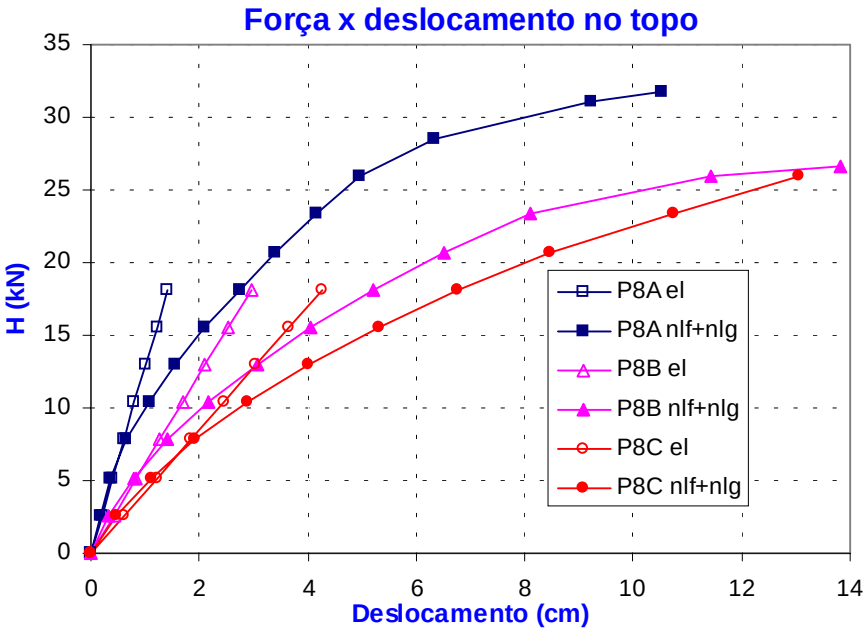


Figura 5.6 – Curvas deslocamento x carregamento pórticos usuais de 8 pavimentos

Nas figuras 5.7a a 5.7f, pode-se observar as estruturas deformadas para os pórticos P8A, P8B e P8C.

Observa-se que para o pórtico tipo A, a estrutura deformada, em serviço, se apresenta próxima à proposta do ACI que indica as seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo A, se apresenta em uma posição intermediária entre aquela obtida com as seções de vigas com 50% e dos pilares com 80% da inércia da seção bruta, e a obtida com as seções de vigas com 40% e dos pilares com 80% da inércia da seção bruta.

Para o pórtico tipo B a estrutura deformada, em serviço, se apresenta menos deslocável em relação à proposta do ACI que indica seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo B é praticamente coincidente com os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

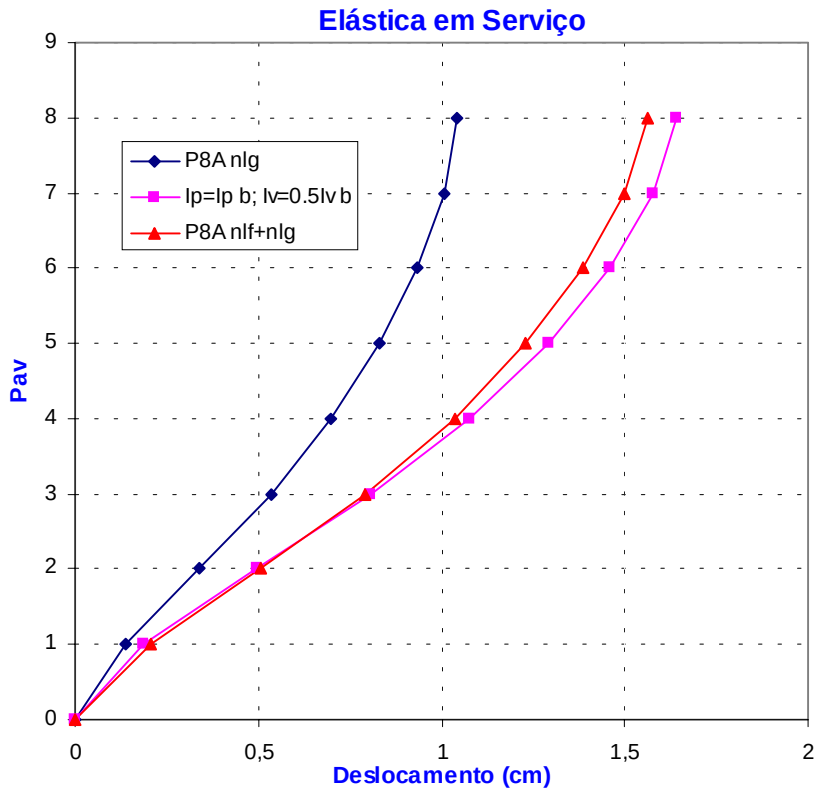


Figura 5.7a – Configuração deformada da estrutura em serviço: P8A

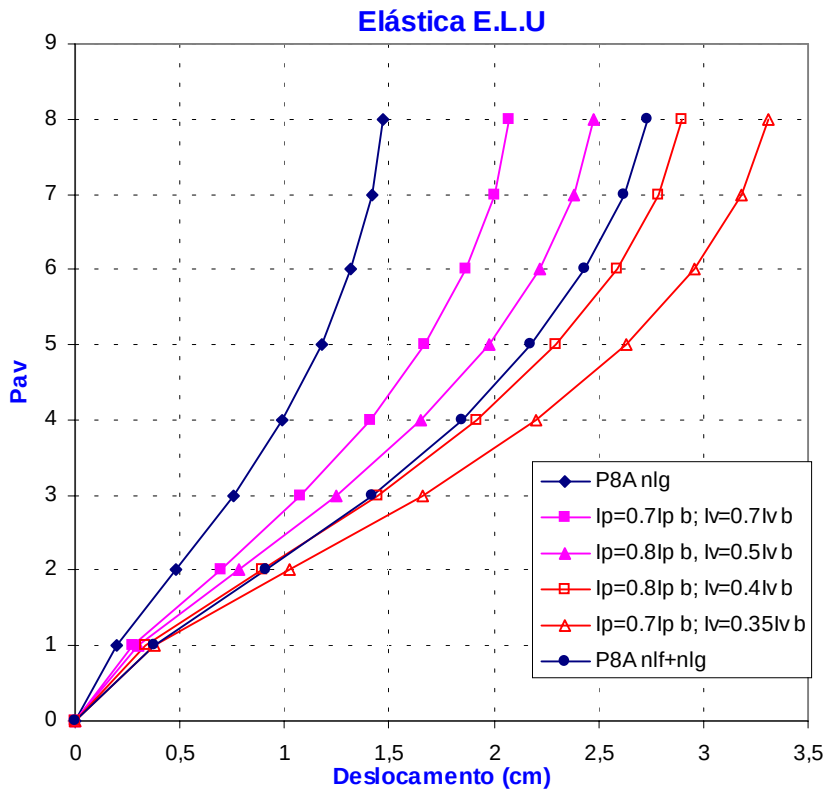


Figura 5.7b – Configuração deformada da estrutura no ELU: P8A

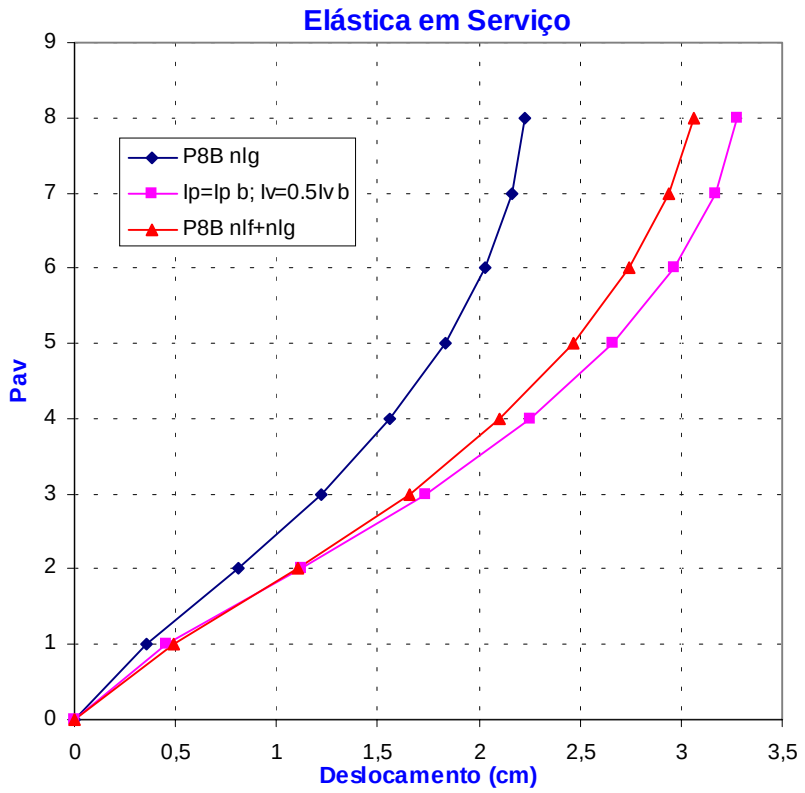


Figura 5.7c – Configuração deformada da estrutura em serviço: P8B

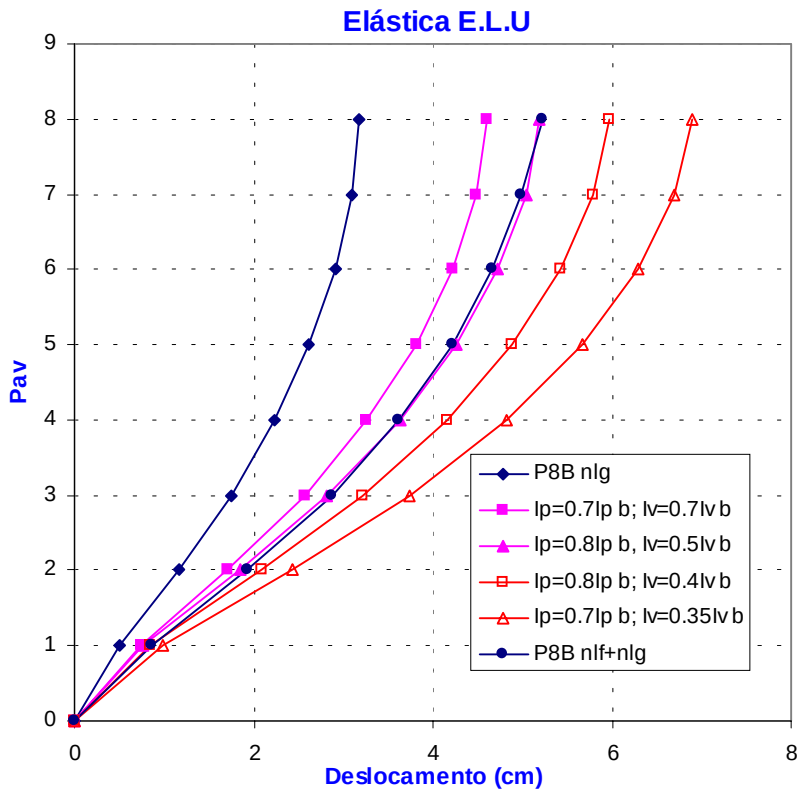


Figura 5.7d – Configuração deformada da estrutura no ELU: P8B

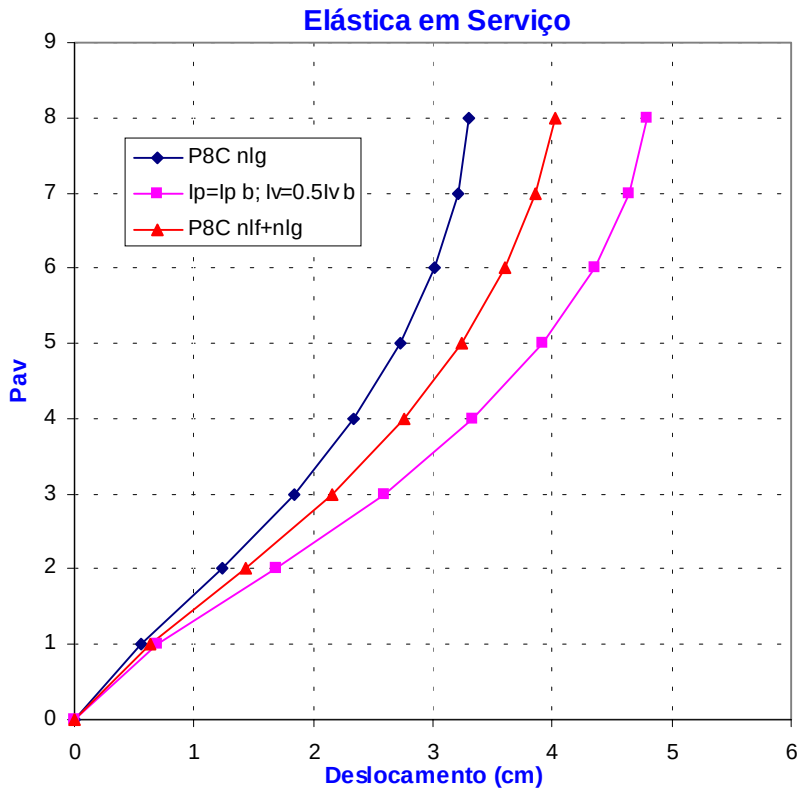


Figura 5.7e – Configuração deformada da estrutura em serviço: P8C

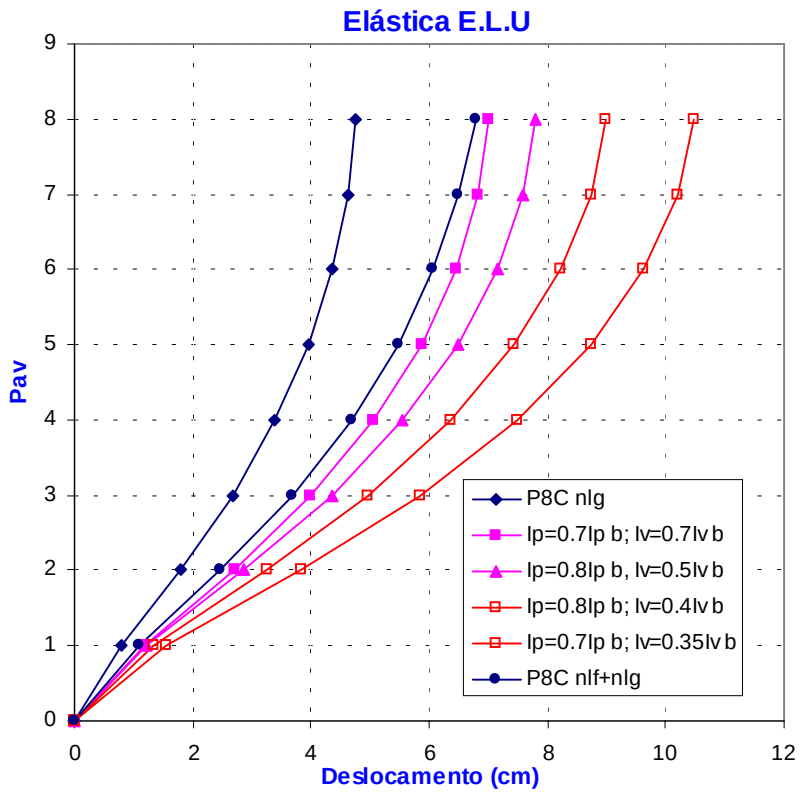


Figura 5.7f – Configuração deformada da estrutura no ELU: P8C

Para o pórtico tipo C a estrutura deformada, em serviço, se apresenta com valores intermediários entre o resultado obtido para as seções de vigas e pilares íntegras e aquele obtido com a proposta do ACI. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo C, se aproxima do resultado obtido para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta.

Estudou-se, então, a rigidez lateral equivalente da estrutura comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear e o obtido da análise não-linear.

Na figura 5.8 apresenta-se o gráfico adimensional que relaciona rigidez lateral e carregamento referente aos pórticos P8A, P8B e P8C. Este foi obtido comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear, com o obtido da análise não-linear. Do mesmo modo que para os pórticos de 6 pavimentos, o carregamento nas fases de serviço, estado limite último e ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura (P_U).

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 84% e 67% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 72% e 54% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 53% e 24% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P8C, seguido pelos pórticos P8B e P8A, respectivamente. Este resultado confirma as indicações obtidas nos exemplos de seis pavimentos, onde se observa que os pórticos com seções transversais semelhantes têm sua rigidez diminuída na ordem inversa da taxa de armadura, ou seja, aqueles com maiores taxas de armadura são mais rígidos em relação àqueles com menores taxas de armadura.

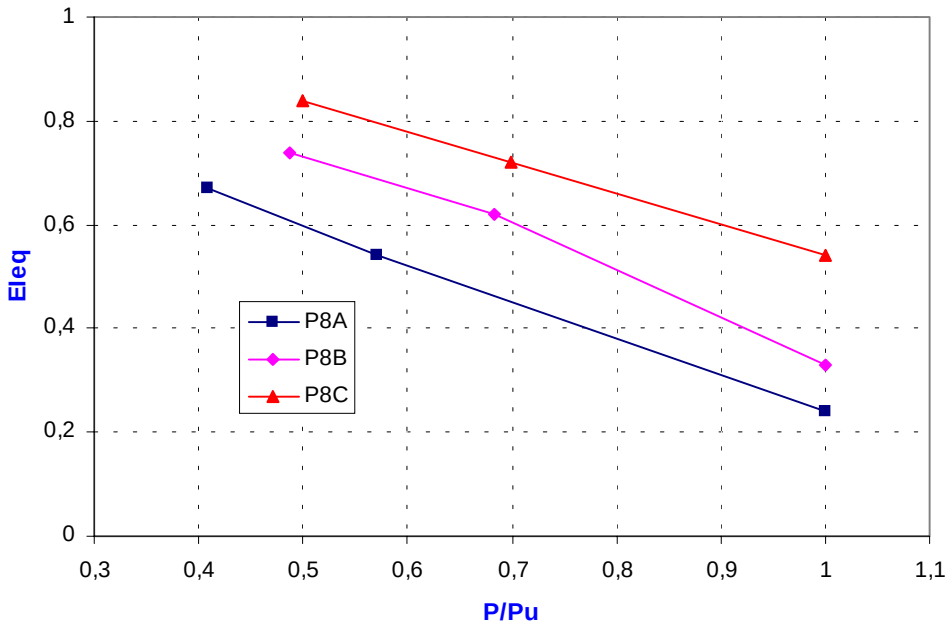


Figura 5.8 – Rigidez lateral x carregamento para pórticos de 8 pavimentos

5.2.3. Edifício com 13 pavimentos

Considere-se o edifício de 13 pavimentos apresentado por FRANÇA (1985). As dimensões e o carregamento foram redefinidos de forma a se poder adequar o exemplo à metodologia empregada neste trabalho. De modo análogo aos exemplos de 8 pavimentos, as dimensões dos elementos foram determinadas de forma que não fossem obtidas seções muito maiores que as usualmente empregadas em projeto.

Considerando-se a geometria o edifício da figura 5.9, foram definidos os seguintes carregamentos:

Carregamento permanente nas lajes :

peso próprio das lajes : 25 kN/m^3 x 0,10 m	= 2,5 kN/m^2
divisórias + revestimento :	= 2,0 kN/m^2
Total :	= 4,5 kN/m^2

Carregamento variável nas lajes :

sobrecarga pavimento tipo : 3,0 kN/m^2

sobrecarga cobertura : 1,5 kN/m^2

Carregamento distribuído nas vigas centrais do tipo:

sobrecarga : 3,0 kN/m^2 x 4,0 m = 12,0 kN/m

reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 4,0 m = 18,0 kN/m

peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,85-0,10) m = 5,63 kN/m

Total : ≅ 36 kN/m

Carregamento distribuído nas vigas centrais da cobertura :

sobrecarga : 1,5 kN/m^2 x 4,0 m = 6,0 kN/m

reação das lajes : 4,5 kN/m^2 x 4,0 m = 18,0 kN/m

peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,30 m x (0,85-0,10) m = 5,63 kN/m

Total : ≅ 30 kN/m

Carregamento distribuído nas vigas de fechamento :

paredes : 15 kN/m^3 x 0,15m x (2,90-0,50)m = 4,5 kN/m

peso próprio : 25 kN/m^3 x 0,15 m x (0,70-0,10) m = 2,25 kN/m

Total : ≅ 6,75 kN/m

Reações concentradas :

viga de fechamento : 6,75 kN/m x 4,0 m = 35,4 kN

pilar : 0,40 m x 0,95 m x 25 kN/m^3 x 2,9 m = 27,6 kN

Total : ≅ 63 kN

Vento : 1 kN/m^2 x 4,0 m = 4,0 kN/m

Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades acidentais (e_a) e de segunda ordem (e_2), além da excentricidade inicial (e_i) devida ao carregamento. Nestes exemplos, considerou-se uma e_a mínima de 2 cm e uma e_a máxima de h/30. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência fck=20 MPa e aço CA-50A (fys=500 MPa). Sendo definidos os seguintes parâmetros dos materiais a serem utilizados na análise não-linear : E_{ctg} = 32000 MPa, f'_c = 23,5 MPa, ε_0 = 0,002, f_t = 2,20 MPa, α = 0,70, ε_m = 20 ε_t, E_s = 210000 MPa, E'_s = 1000 MPa, $\varepsilon_{s\ máx}$ = 0,010.
2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
4) As vigas foram dimensionadas segundo a NB-1/78 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.
5) Os pilares foram dimensionados segundo a NB-1/78, considerando-se as excentricidades e_a, e_2 e e_i.
6) Altura das vigas cerca de 1/10 do vão, variando-se a largura para se obter vigas com maiores e menores taxas de armadura;
7) As dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seções retangulares com taxas de armadura próximas à mínima (taxa A), à média (taxa B) e à máxima (taxa C).
8) Cada pórtico foi modelado com 312 elementos: cinco para cada pilar e quatorze para a viga, conforme a figura 5.9b. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da vigas e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).

Foram analisados três pórticos com 13 pavimentos, correspondentes ao nível de carregamento proposto com três taxas de armadura diferentes. O detalhamento dos pórticos analisados é apresentado no apêndice C.

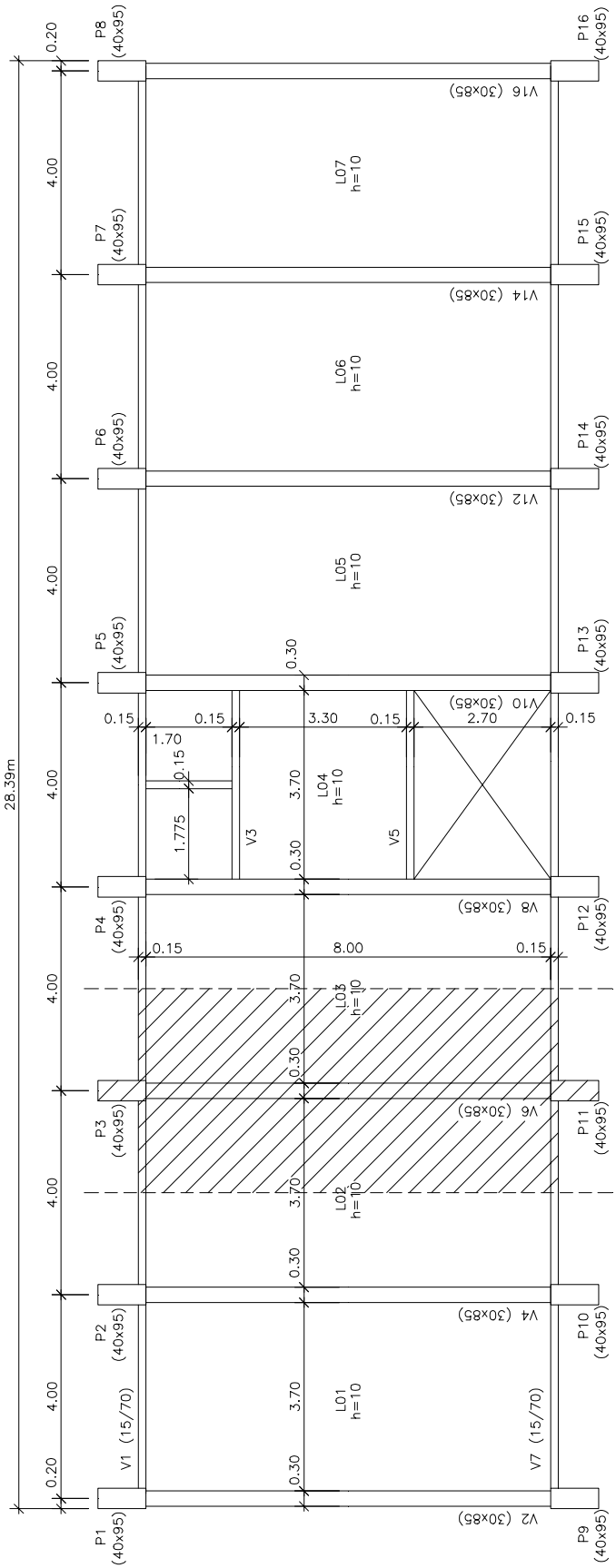


Figura 5.9a – Geometria do edifício 13 pavimentos

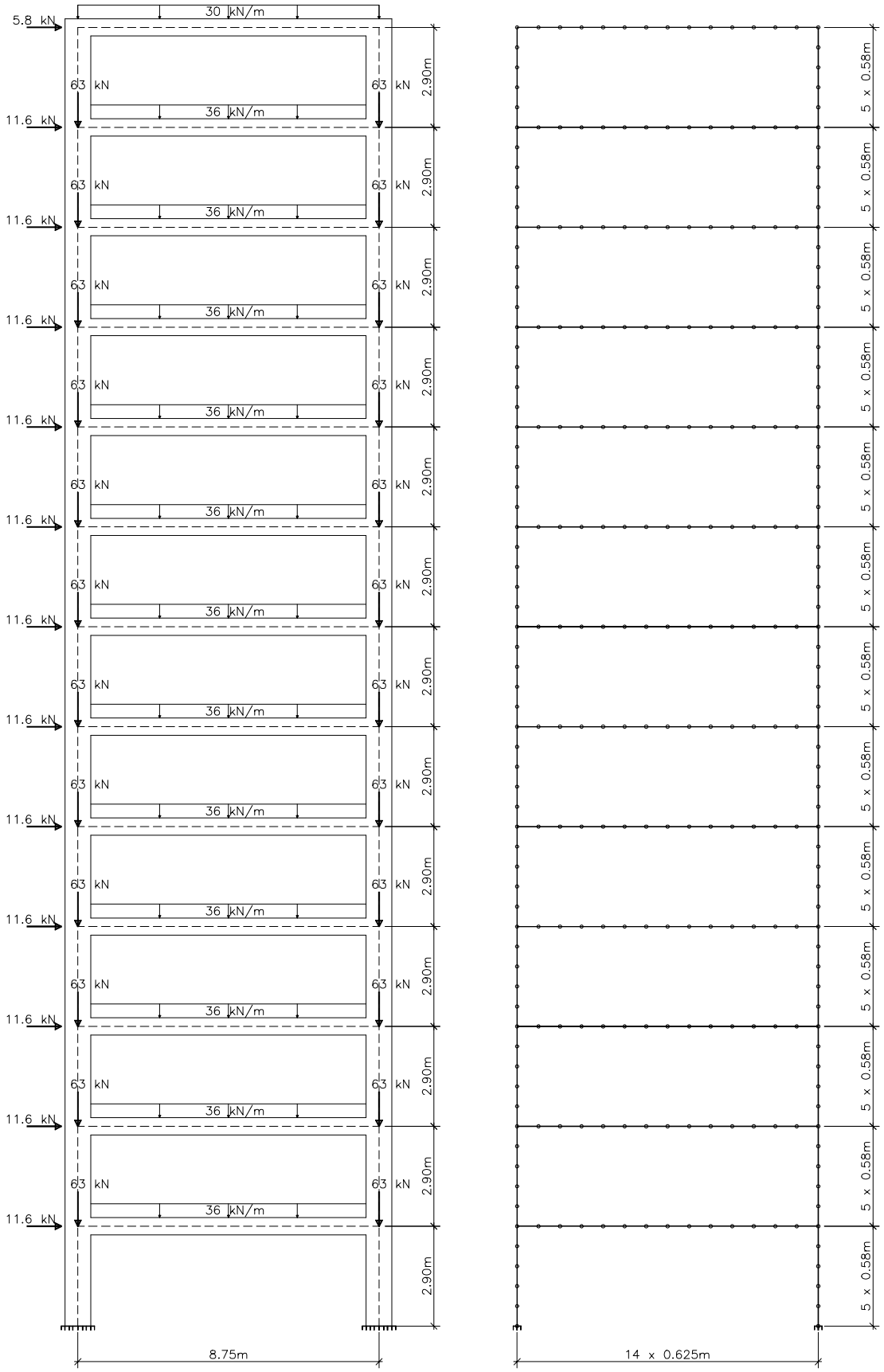


Figura 5.9b – Geometria e discretização do pórtico pertencente ao edifício 13 pavimentos

As curvas *força x deslocamento* referentes aos exemplos analisados são apresentadas na figura 5.10.

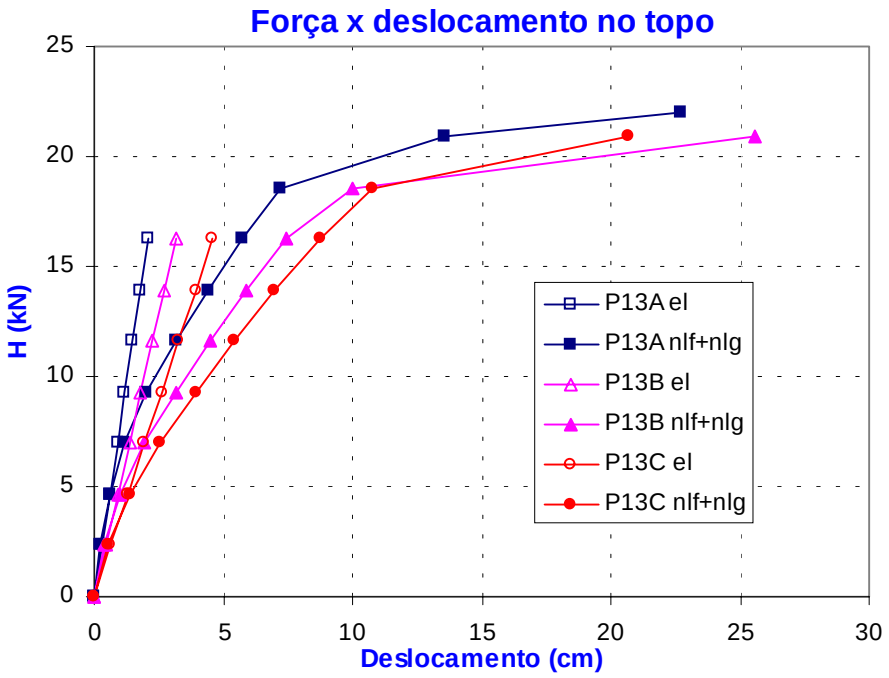


Figura 5.10 – Curvas deslocamento x carregamento pórticos usuais de 13 pavimentos

Nas figuras 5.11a a 5.11f, pode-se observar as estruturas deformadas para os pórticos P13A, P13B e P13C.

Observa-se que para o pórtico tipo A, a estrutura deformada em serviço se apresenta mais deslocável em relação à proposta do ACI, que indica as seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo A, se apresenta em uma próxima àquela obtida com as seções de vigas com 35% e dos pilares com 70% da inércia da seção bruta.

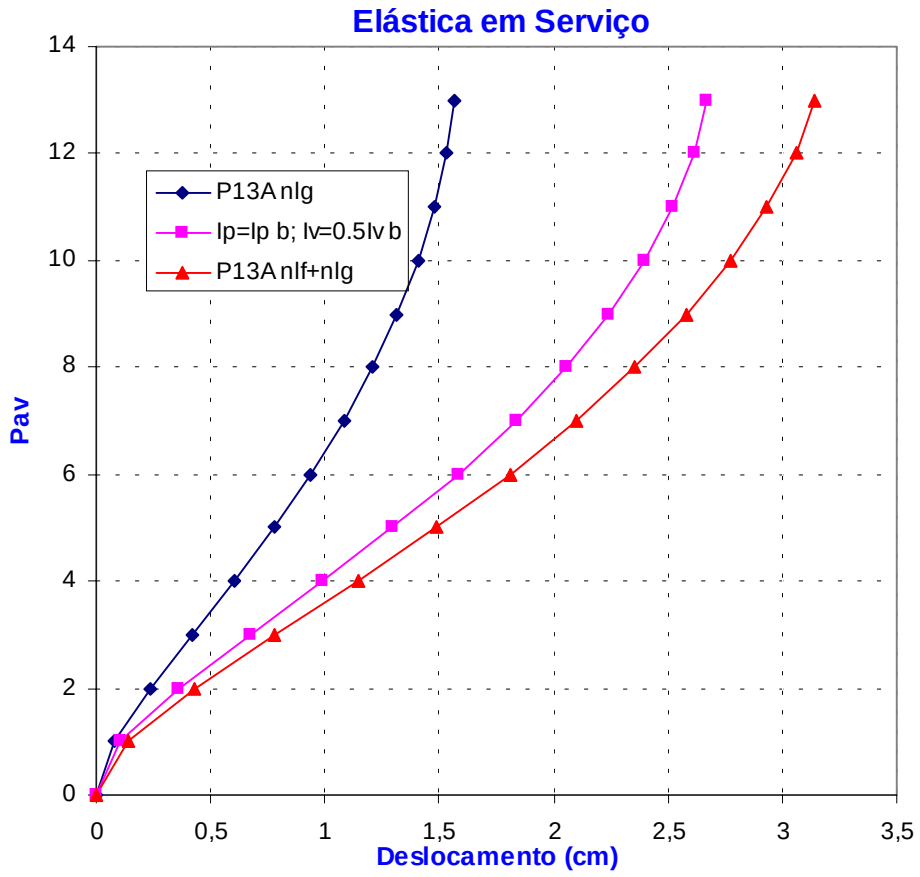


Figura 5.11a – Configuração deformada da estrutura em serviço: P13A

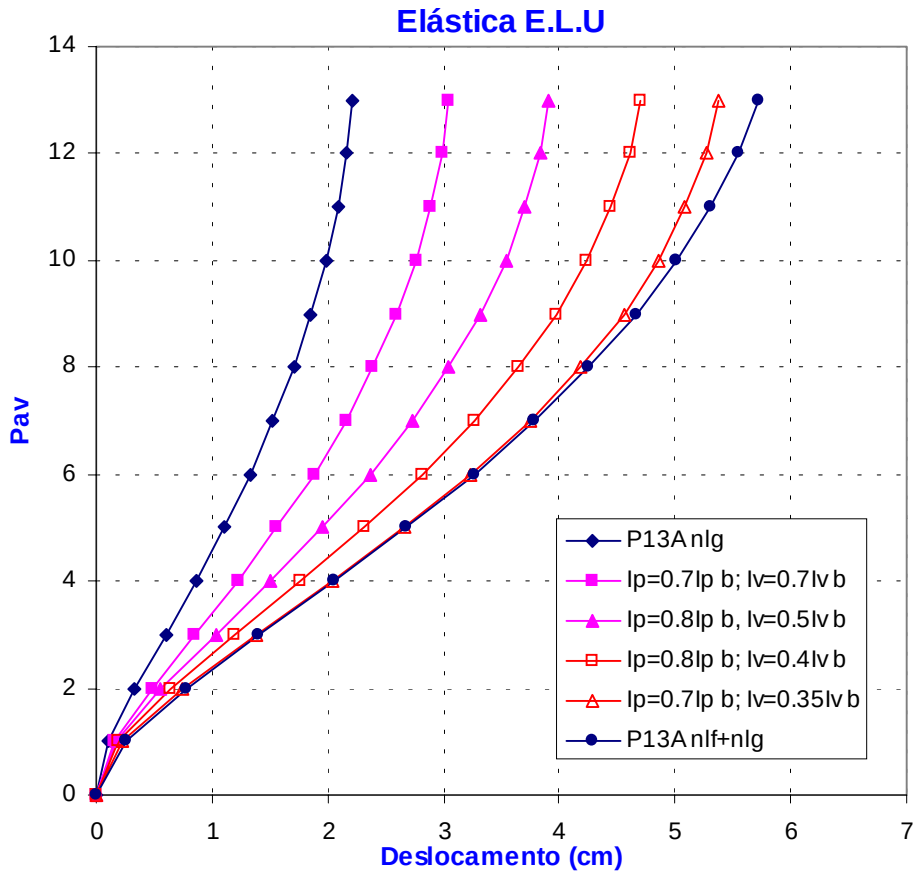


Figura 5.11b – Configuração deformada da estrutura no ELU: P13A

O pórtico tipo A mostrou-se bastante deslocável, tomando-se com referência os resultados previamente obtidos para os pórticos de 6 e 8 pavimentos. Isto se explica pelo fato de que, em função da altura do prédio, existe uma maior influência do momento fletor no dimensionamento dos pilares. Este fato fica particularmente acentuado neste exemplo, escolhido exatamente por se tratar de um caso bastante desfavorável, onde os pórticos apresentam apenas um tramo de viga, sem pilares internos. De fato, o pórtico de 8 pavimentos anteriormente analisado apresenta pilares internos que contribuem para a rigidez do conjunto como um todo, pois estão submetidos a maiores esforços normais e menores momentos fletores que os pilares de extremidade. Outro fator importante é que, para se obter armaduras mínimas, foram utilizadas seções transversais muito grandes para os pilares, o que torna desprezível a contribuição benéfica das tensões de normais de compressão para o aumento da rigidez dos pilares.

Para o pórtico tipo B, a estrutura deformada em serviço se apresenta próxima à obtida com a proposta do ACI que indica seções de pilares íntegras e

50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo B, se apresenta bastante próxima dos resultados obtidos para as seções de vigas com 40% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

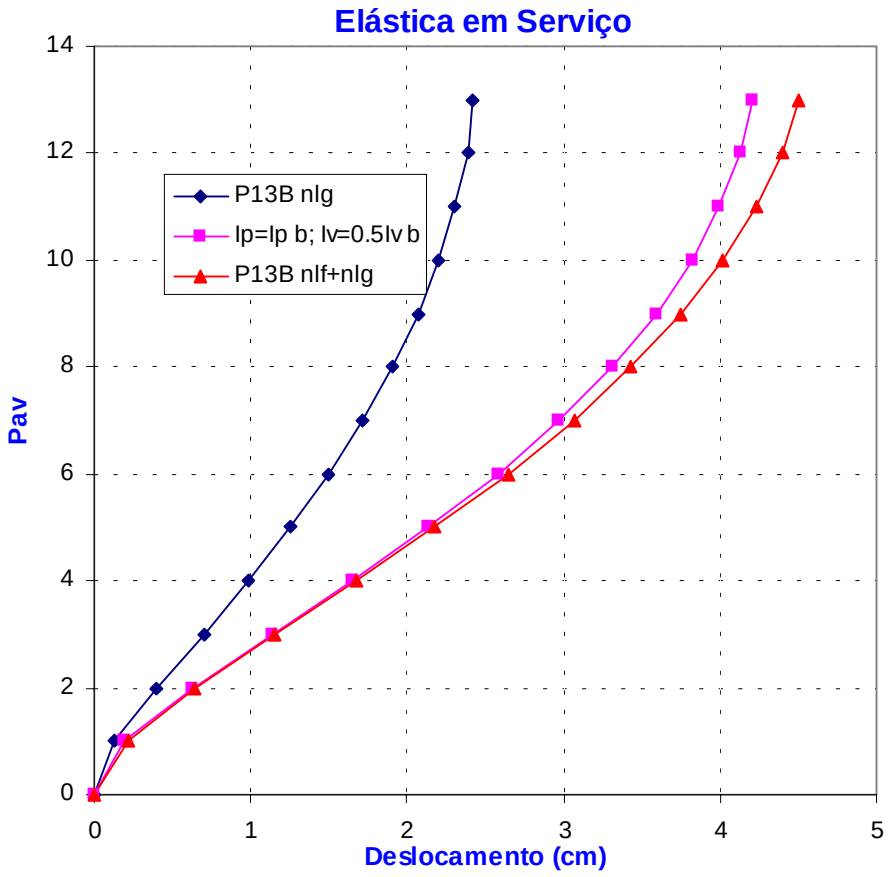


Figura 5.11c – Configuração deformada da estrutura em serviço: P13B

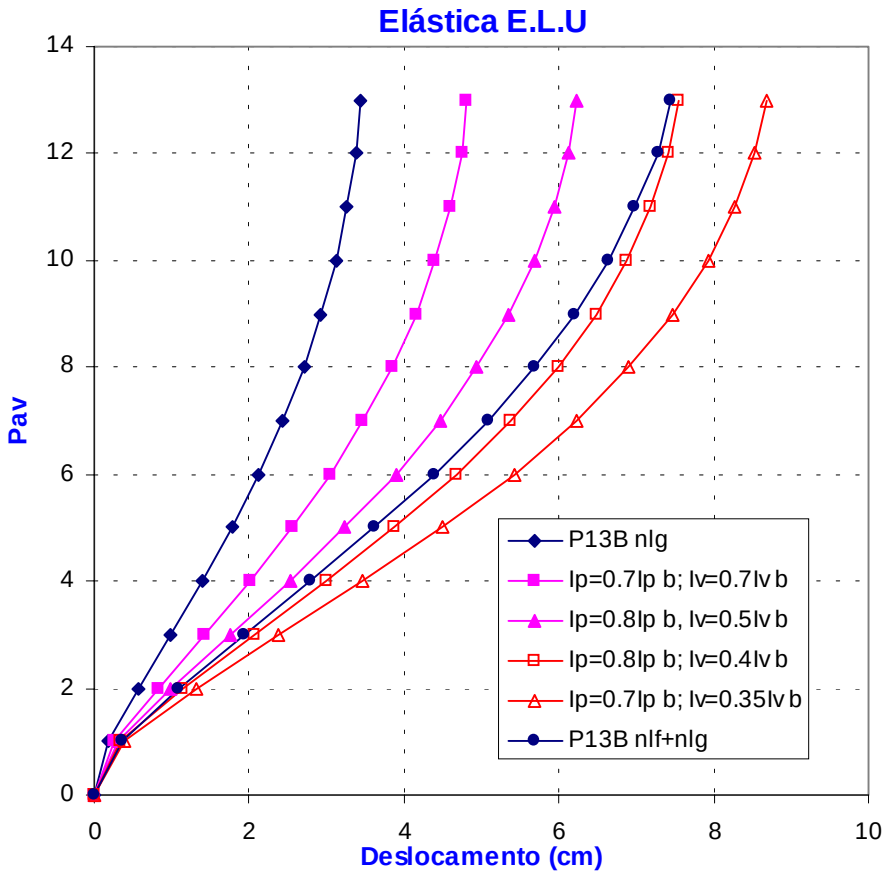


Figura 5.11d – Configuração deformada da estrutura no ELU: P13B

O pórtico tipo B mostrou-se menos deslocável em relação ao pórtico tipo A em virtude das seções transversais serem menores, o que aumenta a contribuição benéfica das tensões de normais de compressão para a rigidez dos pilares, e das taxas de armaduras serem maiores, reduzindo o efeito da fissuração.

Para o pórtico tipo C a estrutura deformada, em serviço, se apresenta menos deslocável em relação à proposta do ACI, que indica as seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, a estrutura deformada do pórtico tipo C, se apresenta em uma posição intermediária entre aquela obtida com as seções de vigas e dos pilares com 70% da inércia da seção bruta, e a obtida com as seções de vigas com 50% e dos pilares com 80% da inércia da seção bruta.

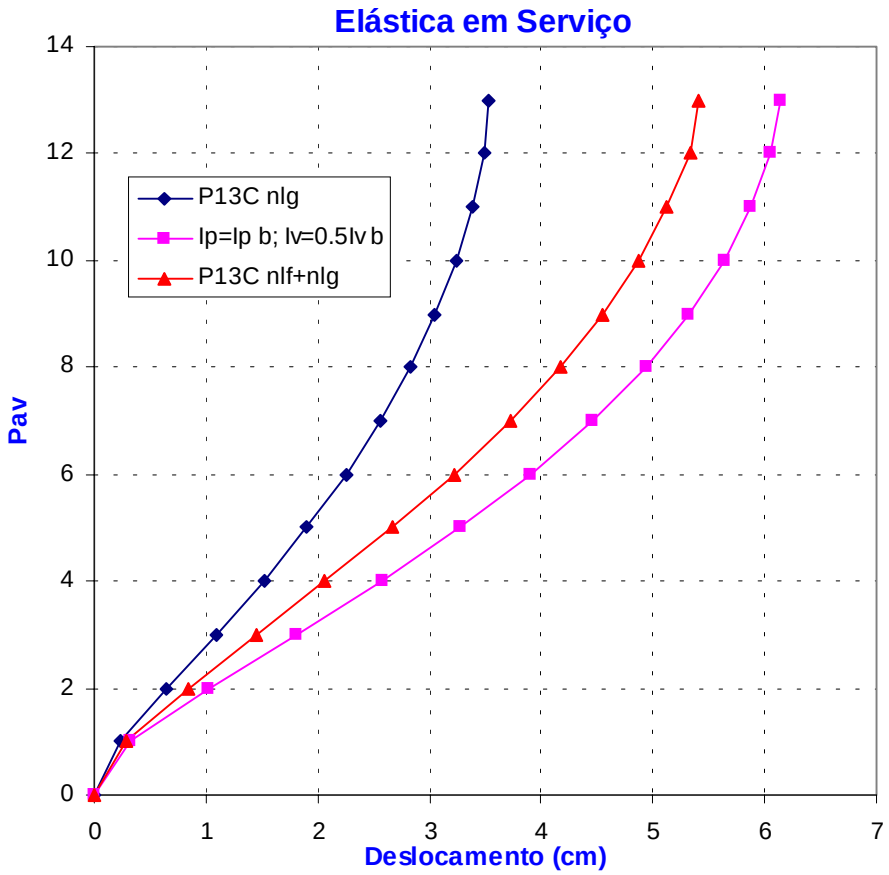


Figura 5.11e – Configuração deformada da estrutura em serviço: P13C

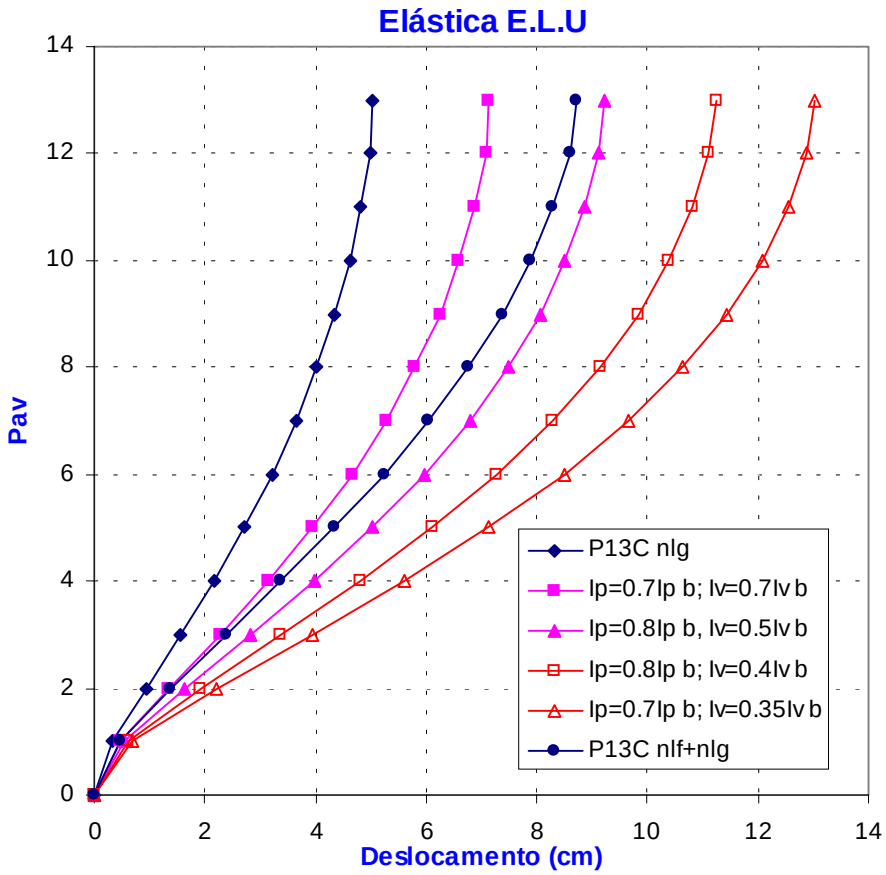


Figura 5.11f – Configuração deformada da estrutura no ELU: P13C

Novamente, observa-se o aumento da contribuição benéfica das tensões de normais de compressão para a rigidez dos pilares, em virtude das seções transversais serem menores, e uma redução do efeito da fissuração, pelo fato das taxas de armaduras serem maiores.

Na figura 5.12 apresenta-se o gráfico adimensional que relaciona rigidez lateral e carregamento referente aos pórticos P13A, P13B e P13C, obtido comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear, e aquele obtido da análise não-linear. Como nos exemplos anteriores, o carregamento nas fases de serviço, estado limite último e ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura (P_U).

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 64% e 51% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 60% e 40% da rigidez linear. No

colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 33% e 15% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P13C, seguido pelos pórticos P13B e P13A, respectivamente. Este resultado está em conformidade com aqueles obtidos nos exemplos anteriores, de seis e de oito pavimentos, confirmando que os pórticos com seções transversais semelhantes, submetidos ao mesmo carregamento, têm sua rigidez diminuída na ordem inversa da taxa de armadura dos seus elementos.

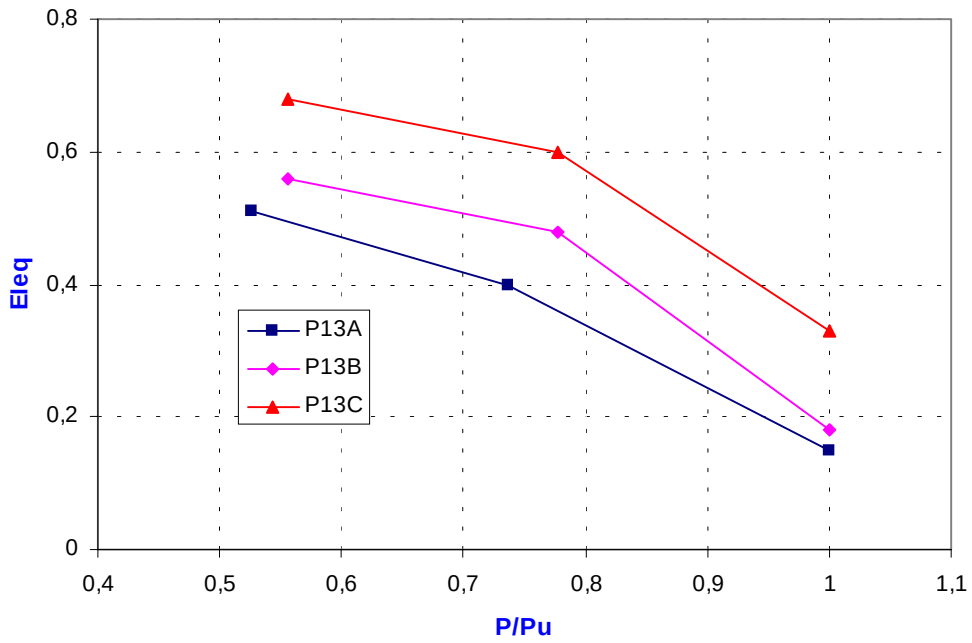


Figura 5.12 – Rigidez lateral x carregamento para pórticos de 13 pavimentos

5.3. CONCLUSÕES

Neste capítulo foram analisados pórticos pertencentes a estruturas de edifícios, nos quais as diferentes taxas de armadura foram definidas segundo um critério diverso do utilizado no capítulo 4: somente as dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seções com taxas de armadura próximas à mínima (taxa A), à média (taxa B) e à máxima (taxa C); as dimensões das vigas foram definidas adotando-se uma altura fixa, em torno de 1/10 do vão, e variando-se a largura, para se obter vigas com diferentes taxas de armadura. Deste critério

resulta, por exemplo, que os pórticos tipo A apresentam somente os pilares com taxa mínima de armadura, sendo a taxa de armadura das vigas inferior em relação ao pórticos tipo B e C, mas estando longe do mínimo permitido em norma. O mesmo se aplica aos pórticos B e C.

Este critério foi adotado na tentativa de simular o que acontece nos edifícios usuais, nos quais existem pilares com taxas de armadura diversas enquanto as vigas, normalmente, têm sua altura limitada pela arquitetura. Embora seja muito pouco comum a adoção de pilares, especialmente aqueles bastante solicitados, cuja taxa de armadura junto à base não esteja próxima da máxima, foram analisadas estruturas com pilares pouco armados junto à base (pórticos tipo A e B), para uma melhor avaliação do problema.

Em função destes aspectos, os resultados que melhor descrevem os casos usuais são, provavelmente, aqueles referentes aos pórticos tipo B e C: pilares com médias e altas taxas de armadura junto à base, e vigas com taxas de armadura médias e altas.

Os resultados de EI_{eq} obtidos para os exemplos analisados são apresentados na tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Rigidez lateral equivalente para pórticos com dimensões usuais

Pórtico	**Eleq**		
	Serviço	**E.L.U.**	**Colapso**
P6A	0,73	0,58	0,31
P6B	0,73	0,62	0,41
P6C	0,88	0,77	0,56
P8A	0,67	0,54	0,24
P8B	0,74	0,62	0,33
P8C	0,84	0,72	0,54
P13A	0,51	0,40	0,15
P13B	0,56	0,48	0,18
P13C	0,68	0,60	0,33
MÉDIA	*0,70*	*0,59*	*0,34*

Pode-se observar, pelos resultados obtidos, que no caso de pórticos com seções transversais semelhantes, submetidos ao mesmo carregamento, a rigidez lateral é proporcional à taxa de armadura utilizada no detalhamento.

Considerando-se a média dos valores de rigidez lateral equivalente, para todos os pórticos analisados neste capítulo, obtém-se (tabela 5.1):

Em serviço um $EI_{ef} = 0{,}70\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,59 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,59/0,70 = 0,84.

Em termos quantitativos, os pórticos de 6 e 8 pavimentos apresentam resultados mais favoráveis que aqueles obtidos para os de 13 pavimentos. Isso ocorre, especialmente, para os pórticos P13A e P13B. De fato, os exemplos com 13 pavimentos apresentam pilares extremamente solicitados que, para possibilitar armaduras próximas à mínima desde a base, necessitam de grandes seções transversais. Apesar disso, a estrutura não se torna rígida como a dos pórticos tipo A do capítulo 4, pelo fato das vigas terem dimensões e taxas de armaduras usuais. Os pórticos P13A e P13B apresentam pilares bastante solicitados a momento fletor, em virtude da altura do edifício, sendo o efeito benéfico da força normal pouco relevante, em virtude das grandes seções transversais, o que resulta em grande perda de rigidez lateral para estrutura.

Através da tabela 5.2, pode-se observar de modo mais detalhado os valores de EI_{ef} correspondentes aos diversos níveis de carregamento e armadura para os pórticos analisados:

Tabela 5.2 – Rigidez lateral equivalente para os exemplos de pórticos pertencentes a estruturas usuais

Pórtico	**Taxa de As (%)**			**Eleq**		
	Pilar	**Viga**		**Serviço**	**E.L.U.**	**Colapso**
		sup	**inf**			
P6A	0,75	0,28	0,17	0,73	0,58	0,31
P8A	0,48	0,71	0,42	0,67	0,54	0,24
P13A	0,50	0,57	0,33	0,51	0,40	0,15
MÉDIA	*0,58*	*0,52*	*0,31*	*0,64*	*0,51*	*0,23*
P6B	1,54	1,03	0,53	0,73	0,62	0,41
P8B	1,46	1,06	0,63	0,74	0,62	0,33
P13B	1,68	0,98	0,49	0,56	0,48	0,18
MÉDIA	*1,56*	*1,02*	*0,55*	*0,68*	*0,57*	*0,31*
P6C	3,33	1,76	0,85	0,88	0,77	0,56
P8C	2,89	1,45	1,16	0,84	0,72	0,54
P13C	3,02	1,60	0,83	0,68	0,60	0,33
MÉDIA	*3,08*	*1,60*	*0,95*	*0,80*	*0,70*	*0,48*

Considerando-se os valores obtidos para os pórticos analisados, segundo as diferentes taxas de armadura, obtém-se (tabela 5.2):

a) Pórticos tipo A

Em serviço um EI_{ef} = 0,64 E_cI_g para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,51 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,51/0,64 = 0,80.

b) Pórticos tipo B

Em serviço um EI_{ef} = 0,68 E_cI_g para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,57 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,57/0,68 = 0,84.

c) Pórticos tipo C

Em serviço um EI_{ef} = 0,80 E_cI_g para as vigas e pilares;

No estado limite último EI_{ef} = 0,70 E_cI_g para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ = 0,70/0,80 = 0,88.

A tabela 5.3 apresenta as reduções na inércia de vigas pilares, encontradas na literartura, que melhor descrevem o comportamento não-linear de cada pórtico:

Tabela 5.3 – Inércias equivalentes para vigas e pilares dos pórticos com dimensões usuais

Pórtico	**Serviço**		**E.L.U.**	
	EI vigas	**EI pilares**	**EI vigas**	**EI pilares**
P6A	Elef > 0,5	1,0	0,5	0,8
P8A	0,5	1,0	0,4 < Elef < 0,5	0,8
P13A	Elef > 0,5	1,0	0,35	0,7
P6B	Elef > 0,5	1,0	0,5	0,8
P8B	Elef > 0,5	1,0	0,5	0,8
P13B	0,5	1,0	0,4	0,8
P6C	Elef < 1,0	1,0	0,7	0,7
P8C	0,5 < Elef <1,0	1,0	0,7	0,7
P13C	0,5 < Elef <1,0	1,0	0,5	0,8

Analisando-se os valores apresentados na tabela 5.3, observa-se que:

1) Para os pórticos tipo A, em serviço, as estruturas deformadas resultantes do processamento não-linear se encontram próximas aos resultados obtidos considerando-se a proposta do ACI 318-95, que indica as seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, os resultados variam entre os obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta e aqueles obtidos com as seções de vigas com 35% e dos pilares com 70% da inércia da seção bruta (ACI 318-95);

2) Para os pórticos tipo B as estruturas deformadas, em serviço, se aproximam dos resultados obtidos considerando-se seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, as estruturas deformadas se apresentam entre os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 40% e pilares com 80% da inércia da seção bruta;
3) Para os pórticos tipo C as estruturas deformadas, em serviço, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares íntegras e os resultados obtidos para seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras*. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo C, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

Observa-se que os pórticos tipo A, especialmente o P13A, apresentam-se bem mais deslocáveis que os demais exemplos, em virtude dos fatores anteriormente discutidos. Desse modo, os resultados referentes aos pórticos tipo B e C serão considerados como os mais representativos do comportamento das estruturas usuais de contraventamento.

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

6.1. ASPECTOS GERAIS

Neste trabalho apresentam-se contribuições à análise não-linear física e geométrica das estruturas de contraventamento em concreto armado, abrangendo tanto as análises não-lineares rigorosas, quanto as simplificadas.

Inicialmente são discutidos os aspectos referentes à avaliação dos efeitos não lineares nas estruturas de edifícios em concreto armado de forma simplificada. Este assunto tem sido objeto de vários estudos que se dividem, segundo a natureza dos efeitos não-lineares, em: estudos dos parâmetros para a consideração simplificada da NLG e determinação das inércias efetivas para consideração simplificada da NLF.

No que se refere à consideração simplificada da NLG são discutidos os parâmetros α e γ_z. O parâmetro α é um parâmetro que indica a necessidade ou não da realização de uma análise não-linear, conforme supere ou não o valor limite estabelecido para cada tipo de estrutura, não apresentando informações sobre a magnitude dos acréscimos de esforços devidos aos efeitos não-lineares. O parâmetro γ_z apresenta uma grande vantagem sobre o parâmetro α, pois permite uma estimativa confiável dos acréscimos de esforços devidos à NLG, dentro de determinados limites.

A utilização de qualquer um desses parâmetros, para as estruturas de concreto armado, requer a adoção de uma redução na inércia da estrutura para simular os efeitos referentes à NLF. Quando se utiliza o parâmetro α a consideração da NLF já está embutida na formulação, na qual se considera uma redução de 30% no produto de rigidez característico $(EI)_k$ da estrutura. Já quando

se utiliza o parâmetro γ_z, a NLF não está incorporada ao valor do parâmetro, sendo considerada através de reduções na inércia das vigas e dos pilares da estrutura. Assim, os deslocamentos da estrutura, utilizados para a determinação dos acréscimos nos momentos fletores, serão obtidos considerando-se uma perda de rigidez devida à NLF.

Os estudos para a consideração simplificada da NLF se dividem, conforme MACGREGOR (1993), em duas linhas fundamentais de pesquisa: o estabelecimento de EI_{ef} para a realização de uma *análise global da estrutura,* e o estabelecimento de EI_{ef} para a *análise de membros isolados*. No presente trabalho, são abordados os valores referentes ao primeiro grupo: valores de EI_{ef} a serem empregados na *análise global da estrutura*, para os quais a literatura apresenta uma grande variabilidade de valores propostos.

Afim de se determinar de forma rigorosa o comportamento não-linear das estruturas de contraventamento em concreto armado, desenvolveu-se no capítulo 3 um programa para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos. A formulação adotada mostrou-se bastante eficiente para a descrição dos problemas referentes à NLG e à NLF em pórticos planos de concreto armado.

As contribuições referentes à implementação apresentada são:

1) a utilização da expressão das deformações 'ε' sem a consideração de um valor médio para a deformação da fibra localizada no eixo do elemento, conforme implementado por SOLER (1989) e SILVA (1996). Desse modo, algumas simplificações indicadas por SILVA (1996) para o regime elástico não-linear são eliminadas.
2) emprego de um modelo físico para o concreto que considera - além dos efeitos não-lineares do concreto comprimido, o concreto tracionado e o tension stiffening - o efeito de confinamento do concreto devido aos estribos, relevante para a descrição do comportamento de concreto de alta resistência.

Com o programa desenvolvido realizou-se, no capítulo 4, uma análise paramétrica de pórticos planos com 1 lance e com 6 lances de pilares, submetidos a três níveis de carregamento diferentes. Para cada nível de carregamento corresponderam três dimensionamentos, de forma a se obter três taxas de armadura diferentes: A, B e C - sendo A próxima à taxa mínima de norma, C próxima à taxa máxima de norma e B um valor intermediário.

Observa-se, nestes exemplos paramétricos, que o comportamento dos pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares é, qualitativamente, bastante semelhante para níveis de carregamento e taxas de armadura equivalentes, levando às seguintes conclusões:

- Em serviço, os pórticos tipo A apresentam rigidez próxima à elástica em virtude das seções transversais dos elementos serem robustas. Com o acréscimo de carregamento, em decorrência das baixas taxas de armaduras, os efeitos de fissuração são muito intensos, ocorrendo uma perda substancial de rigidez dos elementos próximo ao colapso da estrutura. Em virtude das grandes seções transversais, não se identifica o efeito benéfico das tensões de compressão reduzindo a fissuração nos pilares.
- Os pórticos tipo B, com taxas médias de armadura, apresentam na fase de serviço rigidez inferior aos pórticos tipo A. Isso decorre do fato das seções transversais dos elementos serem menos robustas, resultando em um maior nível de fissuração. Não existe uma redução tão acentuada de rigidez nas proximidades do colapso da estrutura, como acontece com os pórticos tipo A, pois o aumento da quantidade de armadura limita os efeitos de fissuração. Observa-se, nos pórticos tipo B, que a rigidez equivalente é inversamente proporcional ao nível de carregamento da estrutura. Isso porque a presença de tensões de compressão, nesse caso, é benéfico para o comportamento da estrutura, pois tende a suprimir a fissuração pelo fato da força normal ser bem inferior ao valor correspondente à máxima compressão centrada que pode ser aplicada no pilar.
- Os pórticos tipo C, por apresentarem elevadas taxas de armadura, apresentam a menor variação de rigidez entre os extremos. Isso porque essas altas taxas de armadura reduzem os efeitos de fissuração. Os pórticos tipo C, de forma semelhante aos pórticos tipo B, apresentam rigidez equivalente decrescente do maior para o menor nível de carregamento, em virtude do efeito benéfico das tensões de compressão nos pilares.

Comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear, com aquele obtido da análise não-linear, obtém-se informações referentes às reduções

de inércia para a estrutura como um todo. Considerando-se os valores de rigidez lateral equivalente para os pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares, obtém-se :

- **Pórticos com 1 lance de pilares**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}68\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}55\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}55/0{,}68 = 0{,}81$.

- **Pórticos com 6 lances de pilares**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}83\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}66\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}66/0{,}83 = 0{,}80$.

Os resultados obtidos para os pórticos com 6 lances foram considerados como mais representativos que aqueles referentes aos pórticos com 1 lance de pilares. Analisando-se de forma mais detalhada os resultados referentes aos pórticos com 6 lances, para as diferentes taxas de armadura, obtém-se:

- **Pórticos com 6 lances de pilares tipo A**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}96\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}75\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}75/0{,}96 = 0{,}78$.

- **Pórticos com 6 lances de pilares tipo B**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}72\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}55\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}55/0{,}72 = 0{,}76$.

- **Pórticos com 6 lances de pilares tipo C**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}69\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}69/0{,}80 = 0{,}86$.

As estruturas deformadas referentes aos pórticos com 6 lances de pilares, foram comparadas com aquelas obtidas considerando-se a NLG, segundo uma descrição lagrangiana atualizada, combinada com diferentes reduções de inércia da literatura. Os resultados obtidos indicam que:

- Para os pórticos tipo A, em serviço, as estruturas deformadas resultantes do processamento não-linear se encontram próximas aos resultados obtidos considerando-se as seções íntegras de vigas e pilares. No estado limite último, os resultados variam entre os obtidos

para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta;

- Para os pórticos tipo B as estruturas deformadas, em serviço, se aproximam dos resultados obtidos considerando-se seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, as estruturas deformadas se apresentam entre os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 35% e pilares com 70% da inércia da seção bruta;
- Para os pórticos tipo C as estruturas deformadas, em serviço, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares íntegras e os resultados obtidos para seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras*. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo C, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

Após essa análise paramétrica do fenômeno, onde procurou-se abranger casos extremos de carregamento e taxas de armaduras, realizou-se no capítulo 5 uma análise com exemplares de pórticos pertencentes a estruturas usuais de edifícios com 6, 8 e 13 pavimentos. Nestes exemplos, as diferentes taxas de armadura foram definidas segundo um critério diverso do utilizado no capítulo 4: somente as dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seções com taxas de armadura próximas à mínima (taxa A), à média (taxa B) e à máxima (taxa C); as dimensões das vigas foram definidas adotando-se uma altura fixa, em torno de 1/10 do vão, e variando-se a largura, para se obter vigas com diferentes taxas de armadura.

Esse critério foi adotado na tentativa de simular o que acontece nos edifícios usuais, nos quais existem pilares com taxas de armadura diversas enquanto as vigas, normalmente, têm sua altura limitada pela arquitetura.

Os resultados de EI_{eq} obtidos para os exemplos analisados indicam que no caso de pórticos com seções transversais semelhantes, submetidos ao mesmo carregamento, a rigidez lateral é proporcional à taxa de armadura utilizada no detalhamento.

Considerando-se os valores de rigidez lateral equivalente para os pórticos usuais analisados, obtém-se os seguintes valores de inércia equivalente referentes à estrutura como um todo:

- **Pórticos usuais**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}70\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}59\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}59/0{,}70 = 0{,}84$.

Em termos quantitativos, os pórticos de 6 e 8 pavimentos apresentam resultados mais favoráveis que aqueles obtidos para os de 13 pavimentos. Isso ocorre, especialmente, para o exempos P13A e P13B. De fato, pórticos com 13 pavimentos apresentam pilares extremamente solicitados que, para possibilitar armaduras próximas à mínima desde a base, necessitam de grandes seções transversais. Apesar disso, a estrutura não se torna rígida como os pórticos tipo A do capítulo 4, pelo fato das vigas terem dimensões e taxas de armaduras usuais. Estes exemplares, referentes a edifícios com 13 pavimentos, apresentam pilares bastante solicitados a momento fletor, em virtude da altura do edifício, sendo o efeito benéfico da força normal diminuído, em virtude das grandes seções transversais, o que resulta em grande perda de rigidez lateral para estrutura.

Agrupando-se os valores de rigidez lateral equivalente, para os pórticos usuais analisados, segundo as diferentes taxas de armadura, obtém-se:

- **Pórticos tipo A**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}64\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}51\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}51/0{,}64 = 0{,}80$.

- **Pórticos tipo B**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}68\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}57\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}57/0{,}68 = 0{,}84$.

- **Pórticos tipo C**

  Em serviço um $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

  No estado limite último $(EI_{ef})_d = 0{,}70\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0,70/0,80 = 0,88.$

As estruturas deformadas referentes aos pórticos usuais, foram comparadas com aquelas obtidas considerando-se a NLG de forma rigorosa, combinada com diferentes reduções de inércia da literatura. Os resultados obtidos indicam que:

- Para os pórticos tipo A, em serviço, as estruturas deformadas resultantes do processamento não-linear se encontram próximas aos resultados obtidos considerando-se a proposta do ACI 318-95, que indica as seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, os resultados variam entre os obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta e aqueles obtidos com as seções de vigas com 35% e dos pilares com 70% da inércia da seção bruta (ACI 318-95);
- Para os pórticos tipo B as estruturas deformadas, em serviço, se aproximam dos resultados obtidos considerando-se seções de pilares íntegras e 50% de redução na inércia das vigas. No estado limite último, as estruturas deformadas se apresentam entre os resultados obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta, e aqueles obtidos para as seções de vigas com 40% e pilares com 80% da inércia da seção bruta;
- Para os pórticos tipo C as estruturas deformadas, em serviço, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares íntegras e os resultados obtidos para seções de vigas *com 50% da inércia da seção bruta* e seções de *pilares íntegras*. No estado limite último, as estruturas deformadas dos pórticos tipo C, variam entre os resultados obtidos para as seções de vigas e pilares com 70% da inércia da seção bruta e aqueles obtidos para as seções de vigas com 50% e pilares com 80% da inércia da seção bruta.

Os resultados referentes às reduções de inércia, para os exemplos paramétricos e para os exemplos usuais, apresentam resultados semelhantes para os pórticos tipos B e C. Os pórticos tipo A apresentam maiores diferenças pois, nos exemplos paramétricos, tanto as vigas quanto os pilares foram dimensionados com armadura mínima. Este tipo de consideração conduziu a estruturas com elementos muito robustos e, portanto, pouco deslocáveis, o que conduziu a valores muito conservadores para as inércias efetivas.

A tabela 6.1 resume os valores de redução indicados na literatura que mais se aproximam dos valores obtidos através da análise rigorosa, juntamente com os valores médios obtidos considerando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante do carregamento vertical.

Tabela 6.1 – Resumo das reduções de inércia obtidas para os exemplos analisados no trabalho

Pórtico	ítem	Serviço			E.L.U		
		EI vigas	EI pilares	EI global médio	EI vigas	EI pilares	EI global médio
P6N1A	(a)	1,0	1,0	0,96	0,7< Elef <1,0	0,7< Elef <1,0	0,75
P6N2A		1,0	1,0		0,7	0,7	
P6N3A		Elef < 1,0	1,0		0,5	0,8	
P6A	(b)	Elef > 0,5	1,0	0,64	0,5	0,8	0,51
P8A		0,5	1,0		0,4< Elef <0,5	0,80	
P13A*		Elef > 0,5	1,0		0,35	0,70	
P6N1B*	(c)	Elef < 0,5	Elef < 1,0	0,72	0,35	0,70	0,55
P6N2B		0,5	1,0		0,4	0,8	
P6N3B		0,5< Elef <1,0	1,0		0,5	0,8	
P6B		Elef > 0,5	1,0	0,68	0,5	0,8	0,57
P8B		Elef > 0,5	1,0		0,5	0,8	
P13B		0,5	1,0		0,4	0,8	
P6N1C	(d)	Elef > 0,5	1,0	0,80	0,7	0,7	0,69
P6N2C		0,5< Elef <1,0	1,0		0,5< Elef <0,7	0,7< Elef <0,8	
P6N3C		0,5< Elef <1,0	1,0		0,7	0,7	
P6C		Elef < 1.0	1,0	0,80	0,7	0,7	0,70
P8C		0,5 < Elef <1,0	1,0		0,7	0,7	
P13C		0,5 < Elef <1,0	1,0		0,5	0,8	

* resultados muito desfavoráveis devidos à circunstâncias especiais

Pode-se, com base nestes resultados, indicar as seguintes reduções de inércia para as estruturas de contraventamento dos edifícios em concreto armado:

a) Pórticos onde pilares e vigas possuem taxas de armadura próximas à mínima (NB1-78):

Serviço: $(EI_{ef})_k = 0{,}95\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

E.L.U.: $(EI_{ef})_d = 0{,}75\ E_cI_g$ para as vigas e pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}79$.

b) Pórticos onde os pilares possuem taxas de armadura próximas à mínima (0,5%) e as vigas possuem baixas taxas armadura (entre 0,3% e 0,5%):

Serviço: $(EI_{ef})_k = 0{,}65\ E_cI_g$ para as vigas e pilares; ou

$(EI_{ef})_k = 0{,}50\ E_cI_g$ para as vigas e $(EI_{ef})_k = 1{,}00\ E_cI_g$ os pilares;

E.L.U.: $(EI_{ef})_d = 0{,}50\ E_cI_g$ para as vigas e pilares; ou

$(EI_{ef})_k = 0{,}40\ E_cI_g$ para as vigas e $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_cI_g$ os pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}77$.

c) Pórticos onde os pilares possuem taxas de armadura próximas à média (1,5%) e as vigas possuem taxas armadura médias (entre 0,4% e 1,0%):

Serviço: $(EI_{ef})_k = 0{,}70\ E_c I_g$ para as vigas e pilares; ou

$(EI_{ef})_k = 0{,}50\ E_c I_g$ para as vigas e $(EI_{ef})_k = 1{,}00\ E_c I_g$ os pilares;

E.L.U.: $(EI_{ef})_d = 0{,}55\ E_c I_g$ para as vigas e pilares; ou

$(EI_{ef})_k = 0{,}40\ E_c I_g$ para as vigas e $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_c I_g$ os pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}79$.

d) Pórticos onde os pilares possuem taxas de armadura próximas à máxima (3,0%) e as vigas possuem altas taxas armadura (entre 0,8% e 1,6%):

Serviço: $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_c I_g$ para as vigas e pilares;

E.L.U.: $(EI_{ef})_d = 0{,}70\ E_c I_g$ para as vigas e pilares; ou

$(EI_{ef})_k = 0{,}50\ E_c I_g$ para as vigas e $(EI_{ef})_k = 0{,}80\ E_c I_g$ os pilares;

$(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}87$.

A relação $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k$ é particularmente importante na determinação do parâmetro α, cujos valores limite foram estabelecidos por FRANCO (1985a), para diferentes tipos de estruturas de contraventamento, considerando $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}70$. Examinando-se os resultados obtidos, observa-se que o valor $(EI_{ef})_d/(EI_{ef})_k = 0{,}80$ parece ser mais adequado. Com essa nova consideração, a *condição generalizada de imobilidade dos nós*, definida por FRANCO (1985a) como:

$$\alpha_{lim} \leq \sqrt{\frac{2}{11\psi}}\ , \qquad (6.1)$$

ficaria sendo:

$$\alpha_{lim} \leq \sqrt{\frac{2.29}{11\psi}}\ , \qquad (6.2)$$

onde ψ é o parâmetro de forma da linha elástica.

Com a expressão (6.2) podem ser recalculados os valores limites de α em função do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Os resultados obtidos para estruturas regulares, são:

Tabela 6.2 – Novos valores limites propostos para o parâmetro α

Tipo de contraventamento	ψ	**αlim**	
		FRANCO (1985a)	**Novo Valor**
Pilar parede	0,4	0,7	0,7
Misto (pórtico + pilar parede)	0,5	0,6	0,65
Pórtico	0,67	0,5	0,55

Obviamente os valores inicialmente propostos não sofrem grandes alterações, mas pequenos ajustes em função dos valores obtidos neste trabalho.

6.2. ANÁLISE NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA DAS ESTRUTURAS DE CONTRAVENTAMENTO EM CONCRETO ARMADO

Considerando-se os resultados obtidos em PINTO (1997) e as reduções de inércia obtidas segundo a, b, c e d, no item anterior, pode-se definir, baseando-se no parâmetro γ_z, uma maneira sistemática para realização de uma análise não-linear simplificada para as estruturas de contraventamento em concreto armado.

Após o pré-dimensionamento da estrutura - estando as dimensões dos elementos estruturais, bem como o carregamento da estrutura definidos - deve-se realizar o estudo da estabilidade global da estrutura através de uma análise não-linear (simplificada ou rigorosa). Apresenta-se, a seguir, os critérios para realização de uma análise não-linear simplificada, incluindo-se os limites para os quais esta análise é válida.

Inicialmente serão discutidos os coeficientes de segurança a serem aplicados, conforme FRANCO & VASCONCELOS (1991) e PINTO (1997). O coeficiente de segurança das ações γ_f pode ser desdobrado, segundo a NBR 8681/84, nos coeficientes parciais γ_{f1}, γ_{f2} e γ_{f3}. Ainda segundo a NBR 8681/84,

quando se considera a NLG, γ_{f3} deve ser superior a 1,10, podendo ser aplicado aos esforços resultantes da análise.

PINTO (1997), adotando γ_{f3} = 1,15 obtém os seguintes coeficientes a serem aplicados ao carregamento vertical (γ_{fv}):

γ_{fv} = 1,00, para casos gerais; (6.3)

γ_{fv} = 1,07, para elevadas concentrações de pessoas; (6.4)

γ_{fv} = 1,10, para livrarias, garagens, etc. (6.5)

e às ações horizontais (γ_{fh}):

γ_{fh} = 1,22, vento como ação variável principal. (6.6)

Para a análise não-linear simplificada, as inércias devem ser consideradas conforme as indicações a, b, c e d, previamente apresentadas. Como, *a priori*, as armaduras não são conhecidas, o projetista deverá adotar estes coeficientes segundo as taxas de armadura que pretende utilizar. Nos casos usuais, são esperadas estruturas com taxas segundo as indicações c e d previamente apresentadas.

Após essas definições calcula-se o coeficiente γ_z, segundo a equação (6.7), para avaliação dos efeitos não-lineares da estrutura:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \dfrac{\sum P_{id} \cdot x_{id}}{\sum F_{Hid} \cdot y_{id}}}; \qquad (6.7)$$

onde: P_{id} = Carga total de cálculo do pavimento *i*;

F_{Hid} = Ação horizontal de cálculo do pavimento *i*;

x_{id} = Deslocamento horizontal do pavimento *i*;

y_{id} = Altura do correspondente ao pavimento *i*;

sendo consideradas as seguintes possibilidades de resultados:

a1) $\gamma_z \leq 1{,}10$; acréscimos inferiores a 10%: não há necessidade de consideração dos efeitos da NLG, conforme FRANCO & VASCONCELOS (1991).

a2) $1,10 < \gamma_z < 1,20$; acréscimos entre 10% e 20%: deve-se majorar os resultados obtidos da análise pelo γ_z, conforme FRANCO & VASCONCELOS (1991) e PINTO (1997);

a3) $\gamma_z \geq 1,20$; acréscimos superiores a 20%: deve-se avaliar melhor os efeitos da NLG na estrutura ou torná-la mais rígida.

O valor limite de 1,20 para o parâmetro γ_z foi adotado baseando-se em FRANCO & VASCONCELOS (1991) e PINTO (1997), havendo a possibilidade de se adotar valores limites superiores a este. De fato, os resultados apresentados por PINTO (1997) apontam erros na estimativa dos esforços inferiores a 5% para valores do parâmetro γ_z até o limite de 1,20. Ainda nesse trabalho, observa-se que para valores do parâmetro γ_z entre 1,20 e 1,30, os erros na estimativa dos esforços passam a ser da ordem de 5% a 10%. Desse modo, pode-se assumir valores limites para o parâmetro γ_z entre 1,20 e 1,30, sabendo-se que o erro na estimativa dos esforços será maior em relação ao obtido para valores do parâmetro γ_z inferiores a 1,20. Valores acima de 1,30 devem ser evitados pois, além de apresentarem erro acima de 10% na estimativa dos esforços inerentes à NLG, indicam estruturas muito deslocáveis e, portanto, desconfortáveis sob o ponto de vista de sua utilização.

Deve-se, ainda, aplicar sobre os esforços, majorados ou não pelo γ_z, a parcela $\gamma_{f3} = 1,15$ do coeficiente de segurança.

6.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES

Como sugestão para trabalhos posteriores referentes à análise não-linear rigorosa das estruturas de contraventamento em concreto armado, recomenda-se a avaliação da eficácia do programa desenvolvido para análise de estruturas onde o efeito de confinamento dos estribos seja particularmente importante, como no caso de estruturas em concreto de alta resistência. Sugere-se, ainda, a extensão da formulação para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado, apresentada neste trabalho, para a análise pórticos espaciais em concreto armado.

No que se refere aos parâmetros de instabilidade α e γ_z, bem como à análise não-linear simplificada de estruturas em concreto armado, sugere-se o estudo de exemplos adicionais de pórticos planos, com relações entre as taxas de armaduras das vigas e dos pilares diferentes daquelas utilizadas neste trabalho. Deve-se, também, avaliar a validade dos parâmetros α e γ_z para estruturas que apresentem irregularidades na geometria: pés-direitos duplos, núcleos rígidos, vigas de transição, etc.

Por fim, recomenda-se um estudo de inércias efetivas considerando-se pórticos espaciais em concreto armado, onde se possa avaliar outros parâmetros importantes que não podem ser estudados em estruturas planas: a influência da rotação dos pavimentos nos seus respectivos planos, a maior possibilidade de redistribuição dos esforços, a influência dos pórticos fora do plano de atuação do carregamento, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 318 (1986). *Building code requirements for reinforced concrete.* Detroit. (ACI 318-83, revised 1986).

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 318 (1995). *Building code requirements for reinforced concrete.* Detroit. (ACI 318-95).

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Manual of concrete practice (1994). *Use of concrete in buildings - Design, Specifications, and Related Topics.* Detroit. (ACI 318/318R-111).

ARGYRIS, J. H. (1965). *Continua and discontinua.* Pro. Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanicis Wright-Patterson ªF.B., Ohio, p.11-185, October.

ARGYRIS, J. H; DUNNE, P. C., MALEJANNAKIS, G. A.; SCHARPF, D. W. (1979a). Finite element methods – the natural aproach. *Computer Methos in Applied Mechanics and Engineering,* v. 17/18, p.1-106.

ARGYRIS, J. H; HILPERT, O., MALEJANNAKIS, G. A.; SCHARPF, D. W. (1979b). On the geometrical stiffiness of a beam in space – A consistent V.W. Aprroach. *Computer Methos in Applied Mechanics and Engineering,* v. 20, p.105-131.

ASSAN, A. E. (1990). Vigas de concreto armado com linearidade física. XI CONGRESSO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA. Rio de Janeiro – RJ. *Anais.* COPPE-UFRJ/AMC, 1990, v.2, p.741-749.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). *NB-1: Projeto e execução de obras de concreto aramado.* Rio de Janeiro, ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). *NB-5: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações.* ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1984). *NBR-8681: Ações e segurança nas estruturas.* Rio de Janeiro, ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1988). *NBR-6123: Forças devidas ao vento em edificações.* ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2000). *NB-1:* Texto base para revisão.

BATHE, K. J. ; RAMM, E.; WILSON, E. L. (1975). Finite element formulation for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* v.9, p. 353-386.

BATHE, K. J.; CIMENTO, A. P. (1980). Some pratical procedures for the nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* v.22, n.1, 59-85.

BATHE, K.J. (1996). *Finte element procedures, (Revision of : Finit element procedures in engineering analysis*, 1982); New Jersey, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs.

BECK, H; KÖNIG, G (1966). Restraining forces in the analysis of tall Buildings. Symposium on Tall Buildings, Proceedings, Pergamon Press, Oxford, 1966.

BRANSON, D. E. (1963). Instantaneous and time dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. *Ala. Hwy. Res. Rep. nº 7, Bureau of Public Roads.*

BRANSON, D. E. (1968). Design procedures for computing deflections. ACI journal, 65(9): 730-742.

CADAMURO Jr., I. W. (1997). *Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado com seção qualquer solicitados por flexão composta oblíqua*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CAMPOS Fº, A. (1986). Estudo de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos. VII Congresso latino americano sobre métodos computacionais para engenharia. São Carlos- SP, 4-7 Nov. *Anais vIII.* p.1413-1426.

CARMO, R.M.S. (1995). *Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado.* São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CAUVIN, A. (1979). Non linear analisys of a multistorey sway frame according to CEB model code. *CEB: Bulletin D'Information,* n.134, p83-107.

CHAN, C. M.; MICLEBOROUGH N. C.; NING, F. (2000). Analisys of cracking effects on tall reinforced concrete building. *Journal of Structural Engineering (ASCE),* v.126, n. 9, p995-1003, Sept.

CHAN, C. M.; NING, F.; MICLEBOROUGH N. C. (2000). Laterel stiffness characteristics of tall reinforced concrete buildings under service loads. *The structural design of tall buildings,* n. 9, p365-383.

CHEN, W.F. and LUI, E.M. (1988). *Plasticity for structural engineers*. New York, McGraw-Hill.

CHEN,W.F. (1982). Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill, New York.

CILONI, A. D. (1993). *Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado.* São Carlos. Tese (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1977). *Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton.* CEB Bulletin D'Information, n.124/125. Paris.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1978). *CEB-FIP: Manual of buckling and instability.* Lancaster, England. The Construction Prees. (Bulletin D'Information, n.123).

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1990). *Final Draft.* Bulletin D'Information, n.203/204/205. Lausanne, Switzerland, 1991.

CORRÊA, M.R.S.(1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios.* São Carlos. 331p. Tese(Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

CRISFIELD, M. A. (1982). Solution procedures for nonlinear structural analysis. In: HINTON, E.; OWEN, D. R. J.;TAYLOR, C. ed. Recent advances in nonlinear computational mechanics. Swnsea, UK: Pineridge Press, p. 1-39.

DUARTE, H; PRADO, J.F.M.A. (1992). Análise da estabilidade global de edifícios. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

FIGUEIRAS, J.A. (1983). *Ultimate Load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells.* Swansea. Ph.D. Thesis, - Department of Civil Engeneering, University College of Swansea.

FRANÇA, R.L.S. (1985). Exemplo de cálculo do esforço de segunda ordem em um edifício de concreto armado. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON : Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais.*

FRANÇA, R.L.S. (1991). *Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado*. São Paulo. Tese (Doutorado) - ESCOLA POLITÉCNICA - USP.

FRANCO, M. (1985a). O parâmetro de instabilidade dos edifícios de altos. *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas,* Lisboa, n.23, p.69-72.

FRANCO, M. (1985b). Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto. In : REUNIÃO ANUAL DO IBRACON : Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais.* 26p.

FRANCO, M.(1995). Global and local instability of concret tall buildings. In : SYMPOSIUM ON SPACE STRUCTURES, Milan, May. *Procedings.*

FRANCO, M; VASCONCELOS, A.C. (1991). Pratical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro. *Procedings.* p.307-324.

FUSCO, P. B. (1993). Resistência do concreto comprimido. 35a. Reunião do Instituto Brasileiro do Concreto, Brasília.

FUSCO, P. B. (1996). Técnica de Armar as estruturas de concreto. Editora PINI Ltda.

FUSCO, P.B. (1981). *Estruturas de concreto armado : solicitações normais*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.

GALLAGHER, r. h.; PADLOG, j.; BIJLAARD, P. P. (1963). Stress analysis of heated complex shapes. *Amarican Rocket Society Journal,* v. 32, p. 700-707, May.

GRAZIANO, F. (1998). Estudo comparativo entre os coeficientes α e γ_z. *Revista Abece,* 1998.

HAGE, S.E.; MACGREGOR, J.G. (1974). *Second order analysis of reinforced concrete frames.* Edmonton, University of Alberta, Department of Civil Engineering. 331p. (Structural Engineering Report n.9).

HINTON, E.; OWEN, D. R. J. (1979). *An introduction to finite element computations.* Swansea, U. K., Pineridge Press Ltd.

HINTON, E.; OWEN, D. R. J.; TAYLOR, C. (1982). *Recent advances in nonlinear computational mechanics.* Swansea, U. K., Pineridge Press Ltd.

ISHITANI, H. (1990) – Análise não-linear do revestimento definitivo de túneis de concreto. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

JENNINGS, A. (1968). Frame analysis including change of geometry. *Journal of the Structural Division (ASCE),* v. 94, c. St 3, p. 627-694, March.

KENT, D. C.; PARK, R. (1971). Flexural members with confined concrete. Journal of Structural Division (ASCE)*,* v.97, n. ST7, p1969-1990, July.

KIM, J. K.; LEE, T. G. (1993). Failure behevior of reinforced concrete frames by the combined layered and nonlayered method. Computers and Strutures, v. 48, n. 5, p. 819-825.

LAVALL, A. C. C. (1989). *Análise elástica em Segunda ordem de pórticos planos metálicos.* São Carlos. 198p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

MACGREGOR, J.G. (1993). Design of slender concrete columns: Revisited. *ACI Estructural Journal*, v.90, n.3,p.302-309, May-Jun.

MACGREGOR, J.G.; HAGE, A.M.(1977). Stability analysis and design of concrete frames. *Journal of Structural Division (ASCE),* v.103, n. ST10, p1953-1970, Oct.

MALLETT, R. H.; MARCAL, P. V. (1968). Finite element analysis of nonlinear structures. Journal of Structural Division (ASCE), v. 94, n St9, p.2081-2105, September.

MARTINS, P. C. R. (1995). A não-linearidade nas estruturas de concreto armado e protendido nima análise até a ruptura. In: SEMINÁRIO SOBRE NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO, IBRACON, São Paulo, 1995.

MAZZILLI, C. E. N. (1987). Considerações sobre não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas. São Paulo, EPUSP, (Boletim Técnico de Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8701).

MENEGOTTO, M; VIA, G. (1979). Check of the proposed design rules of the CEB-FPI draft “Model Code for concrete structures”: trials and comparison calculations. *CEB: Bulletin D’Information,* n.134, p141-171.

MIRZA,S.A. (1990). Flexural stiffness of rectangular reinforced concrete columns. Aci *Structural Journal,* v.87, No. 4, July-August 1990.

MÜLLER, H.S.; HILSDORF, H.K..(1991). Constitutive relations for concrete. IN: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90. Rio de Janeiro. Proceedings p.1-46.

NING, F; MICKLEBOROUGHT, N. C.; CHAN, C. H. A. (1999). The effective stiffness of reinforced concrete flexural members under service load condictions. *Australian Journal of Structural Engineering,* v.2, No. 2&3, 1999.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. (1980). *Finite elements in plasticity : Theory and practice.* Swansea, U. K., Pineridge Press Ltd.

PAULA, C. F. (1997). *Estudo das descrições lagrangiana e euleriana na análise não-linear geométrica com o emprego do método dos elementos finitos*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PAULA, C. F. (2001). *Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas*. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PIMENTA, P. M. (1986). *Análise não-linear de pórticos planos.* São Paulo, EPUSP. Boletim técnico do departamento de engenharia de estruturas e Fundações, 8611.

PIMENTA, P. M. (1996). *Análise não-linear de pórticos planos : teoria exata vs. teoria de segunda ordem.* São Paulo, EPUSP. Boletim técnico do departamento de engenharia de estruturas e Fundações, 9618.

PIMENTA, P. M. e MAZZILLI, C. E. N. (1986). *Minima correctio methodi inveniendi lineas curvas elasticii*. Boletim Técnico do Departamento de Estruturas e Fundações da EPUSP, 8613.

PIMENTA, P. M. e SOLER J. G. M. (1989). Estabilidade de pórticos de concreto armado. In: Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, 1, são Paulo, Anais, v.2, p.501-527.

PIMENTA, P. M.; YOJO, T. (1986). *Análise não-linear de pórticos espaciais.* São Paulo, EPUSP. (Boletim técnico do departamento de engenharia de estruturas e Fundações, 9104).

PIMENTA, P. M.; YOJO, T. (1992). *Análise geometricamente exata de pórticos através do método dos elementos finitos*. In: XIII CILAMCE. V.1, Anais, p.191-199.

PINTO, R. S. (1997). *Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. 108p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

POWELL, G. H. (1969). Theory of nonlinear elastic structures. *Journal of the Structural Division (ASCE), v. 95, n. t. 12, p. 2687-2701, December.*

PROENCA, S. P. B. (1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. Tese de doutorado, EESC-USP.

RAMALHO, M.A. (1990). *Sistemas para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico.* São Carlos. 389p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. (1994). An efficient nonlinear analisys of RC sections. Computers and Strutures, v. 53, n. 3, p. 613-623.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. (1994). An improved nonlinear analisys of reinforced concrete frames. Computers and Strutures, v. 53, n. 3, p. 625-636.

RODRIGUES, R. O. (19976). *Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

SANTOS, L.M. (1981). Cálculo de concreto armado. vol.2, ed. LMS, São Paulo.

SANTOS, L.M.; FRANCO, M. (1993). *Instabilidade e efeitos de segunda ordem nas estruturas de concreto.* In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO, 3., São Paulo, 1-3 dec. *Anais*.

SANTOS, P.B. (1977) Cálculo de concreto armado. vol.1, ed. Edgard Blucher Ltda., São Paulo, SP.

SCANLON, A.; MURRAY, D. W. (1974). Time dependent reinforced concrete slab deflection. *Journal of Structural Division (ASCE),* v.100(9), p. 1911-1924.

SCORDELIS, A . C. and CHAN E. C. (1987). Nonlinear analysis of reinforced concrete shells. American Concrete Institute, SP-98.

SHURAIM, A. B. (1997) Lateral Stifness of plane reinforced concrete frames. Computers and Strutures, v. 64, n. 1-4, pp. 771-782.

SIGMON, G.R ; AHMAD,S.H. (1990). Flexural rigidity of circular reinforced concrete sections. Aci *Structural Journal,* v.87, No. 5, September-October 1990.

SILVA, R. M. (1996) *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado : modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados.* São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

SOLER, J. G. M. (1989) *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado.* São Paulo. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SOLER, J. G. M. (1995) *Análise não-linear de pórticos espaciais de concreto armado.* São Paulo. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SUN, C. H.; BRADFORD M. A.; GILBERT, R. I. (1993). Nonlinear analisys for concrete frame structures using the finite element method. Computers and Strutures, v. 48, n. 1, p. 73-79.

TUNER, M. J.; DILL, E. H.; MARGIN, H. C.; MELOSH, R. J. (1960). Large deflection analysis of complex structures subjecte to heating and external load. *Journal of Aerospace Sciences,* v.27, Feb.

VASCONCELOS, A.C. (1985). Critérios para dispensa de consideração do efeito de segunda ordem. In REUNIÃO ANUAL DO IBRACON : Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais.*

VASCONCELOS, A.C. (1986). Como enrijecer edifícios muito flexíveis. In: LA INGENIARÍA ESTRUCTURAL SUDAMERICANA EN LA DÉCADA DEL 80: Homenaje al Ingeniero Julio Ricaldoni, Montevidéo, Uruguai, 17-19 dic. p237-269.

VASCONCELOS, A.C. (1987). Como especificar a segurança quando há efeitos de segunda ordem a considerar. In REUNIÃO ANUAL DO IBRACON : Seminário Sobre os Aspectos Conflitantes em Normas Brasileiras, São Paulo, 20-24 de jul.*Anais.*

VASCONCELOS, A.C. (1998). A origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z. *Revista Ibracon*, ano VI, v.20, Janeiro/Março 1998, p16-25.

VECHIO, F.J ; EMARA, M. B. (1992). Shear deformations in reiforced concrete frames. Aci *Structural Journal,* v.89, No. 1, January-February 1992.

VENTURINI, W.S. (1987). Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta. Publicação no. 043/87. EESC-USP. São Carlos.

WILBY, C. B.; PANDIT, T. (1967). Inelastic behavior of reinforced concrete sigle-bay potal frames. *Civil Engineering Pub. Works Rev.* 62, 331-336.

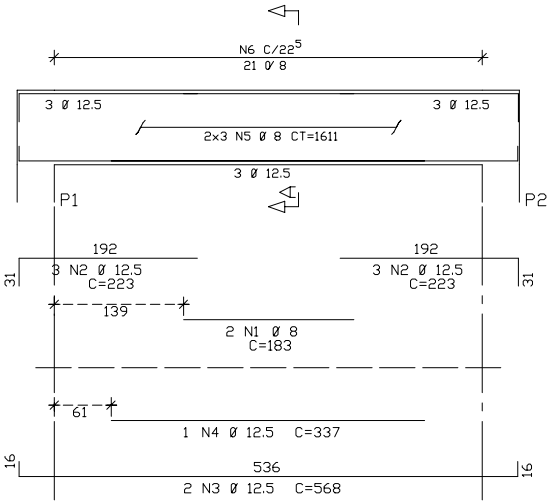
ZENG, J.M.; DUAN, L; WANG, F.M.; CHEN, W.F. (1992). Flexural rigidity of reinforced concrete columns. Aci *Structural Journal,* v.89 No. 2, March-April 1992.

APÊNDICE A - Detalhamento dos pórticos com seis lances de pilares

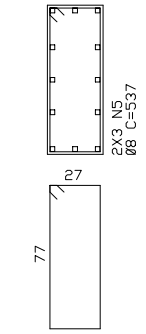
P6N1A

V1 cobertura

30/80

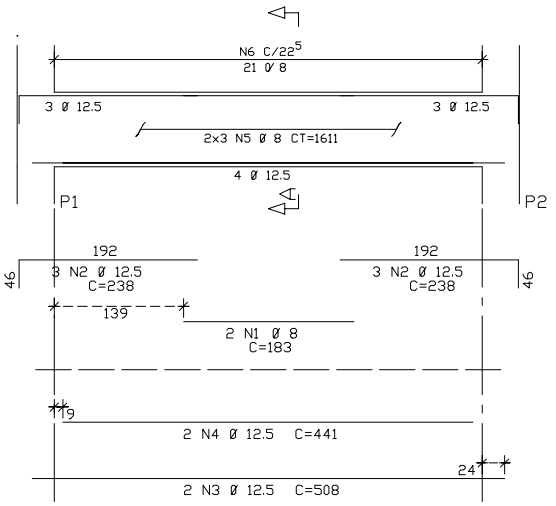


Corte A

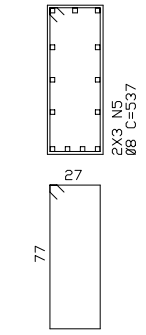


V1 tipo (x5)

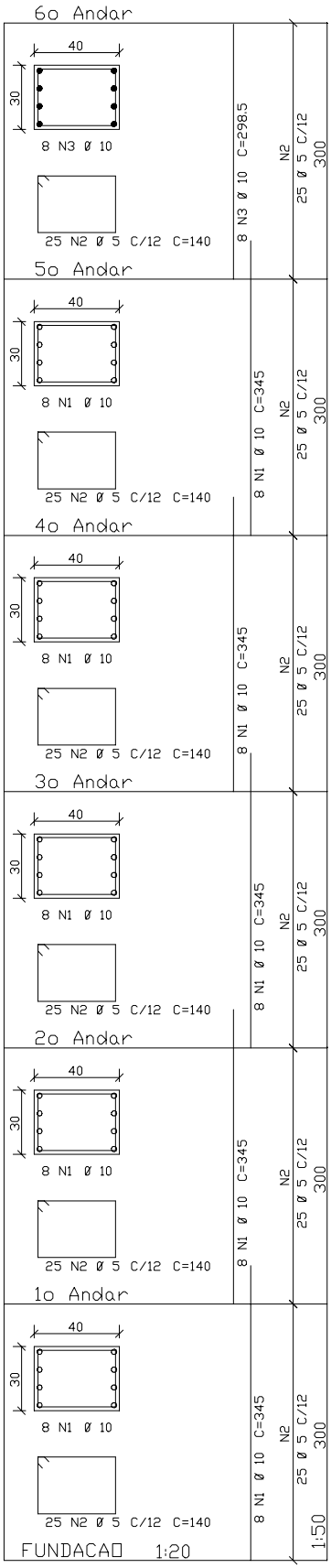
30/80



Corte A



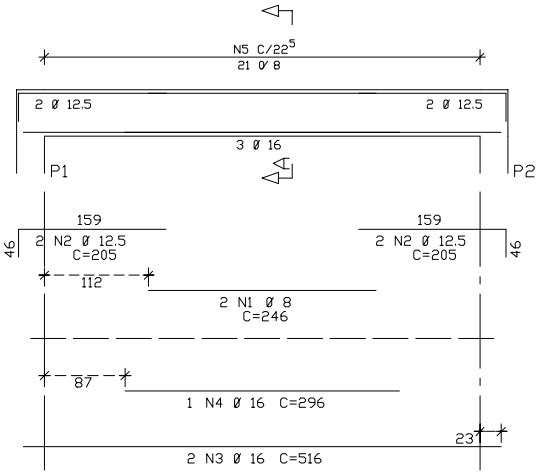
P1=P2



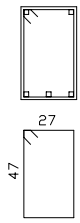
P6N1B

V1 cobertura

30/50



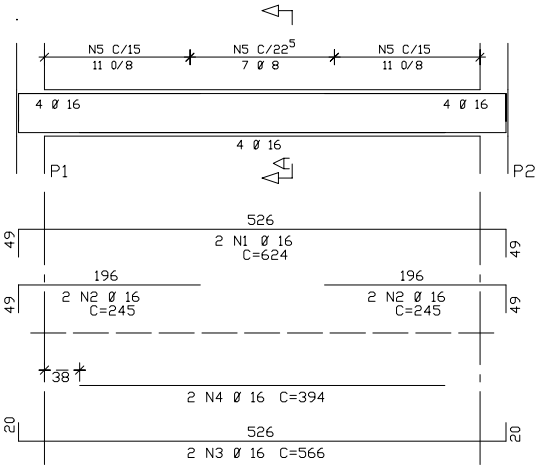
Corte A



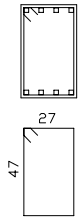
21 N5 Ø 8 C=164

V1 tipo (X5)

30/50

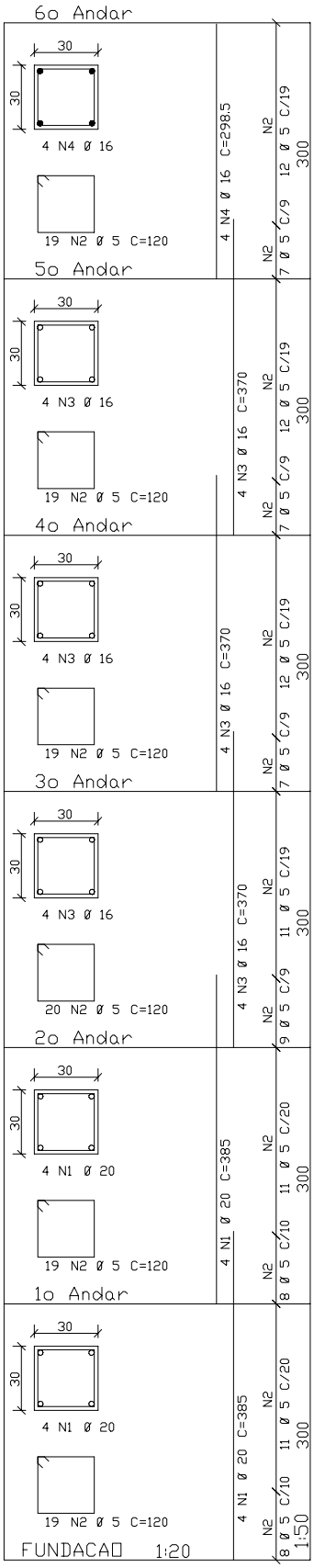


Corte A



29 N5 Ø 8 C=164

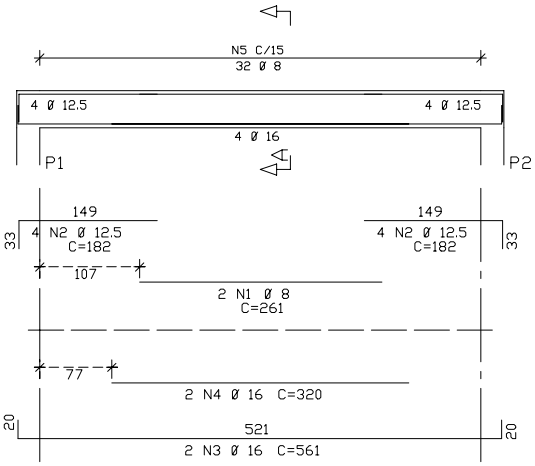
P1=P2



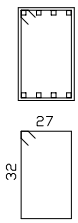
P6N1C

V1 cobertura

30/35



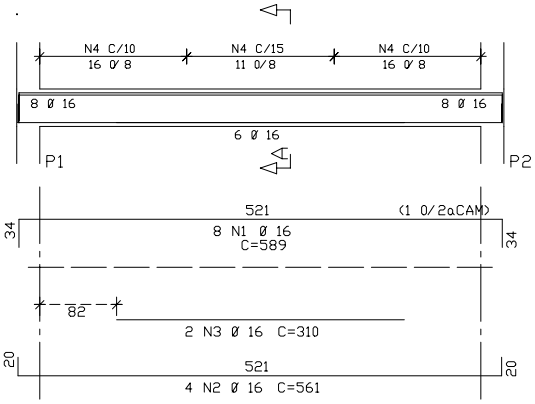
Corte A



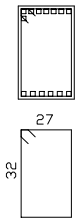
32 N5 Ø 8 C=134

V1 tipo (x5)

30/35

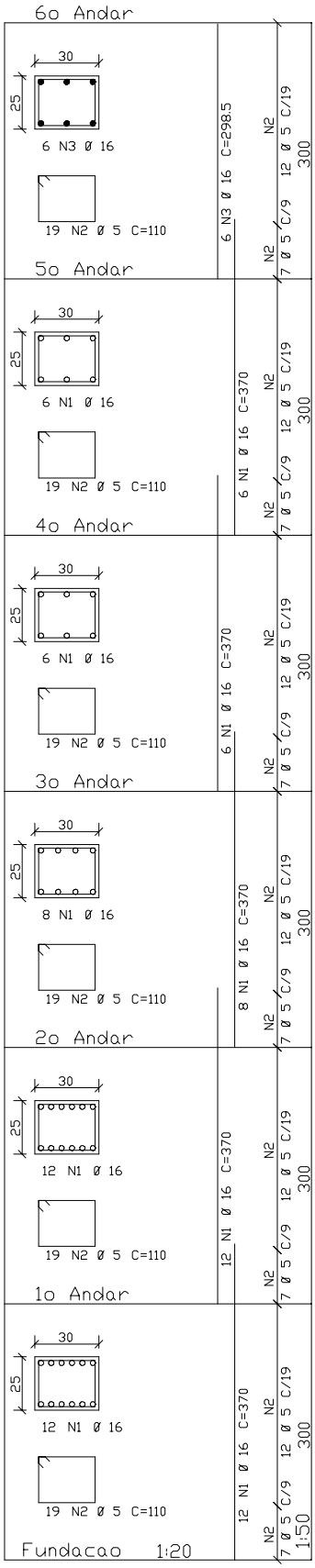


Corte A



43 N4 Ø 8 C=134

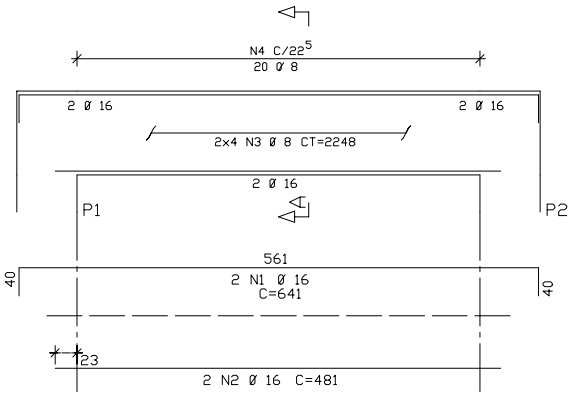
P1=P2



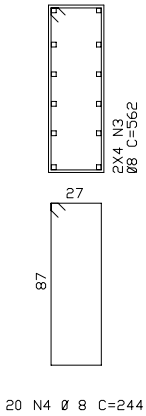
P6N2A

V1 cobertura

30/90

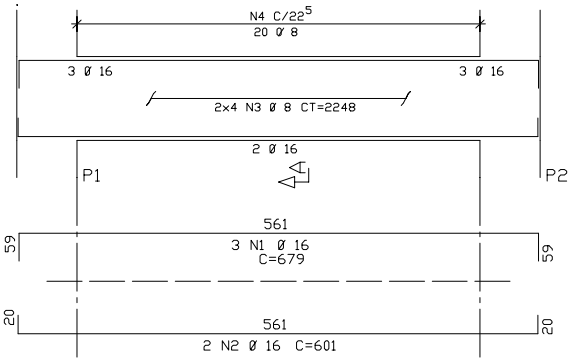


Corte A

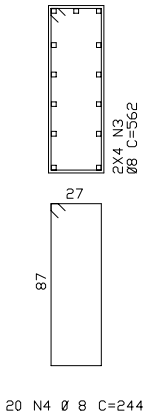


V1 tipo (x5)

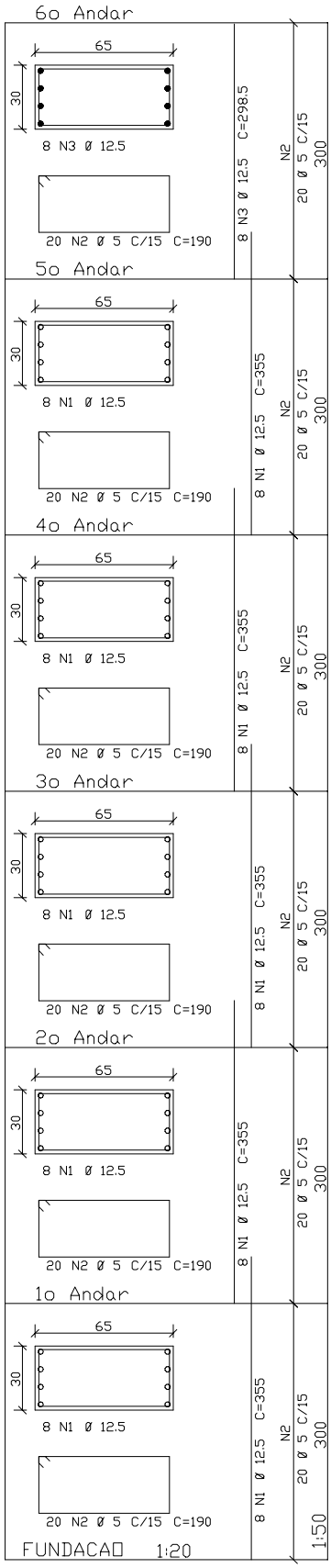
30/90



Corte A



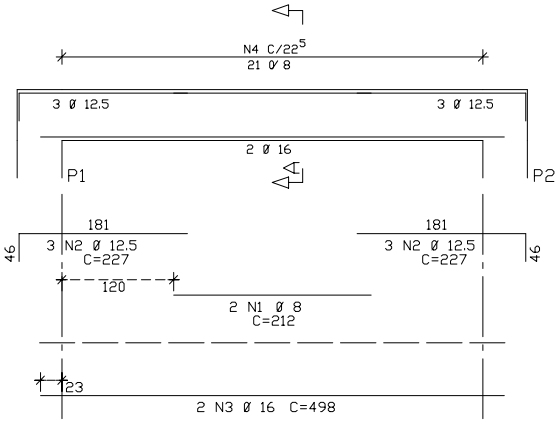
P1=P2



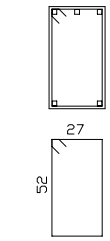
P6N2B

V1 cobertura

30/55



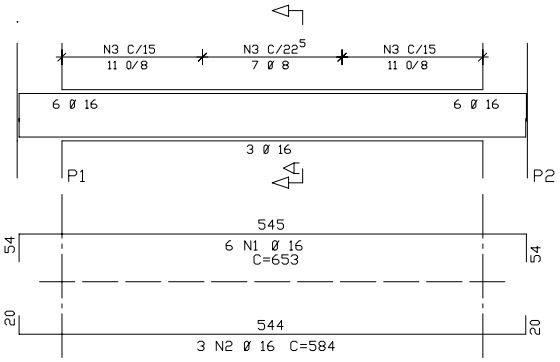
Corte A



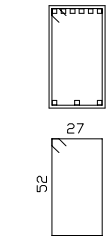
21 N4 Ø 8 C=174

V1 tipo (x5)

30/55

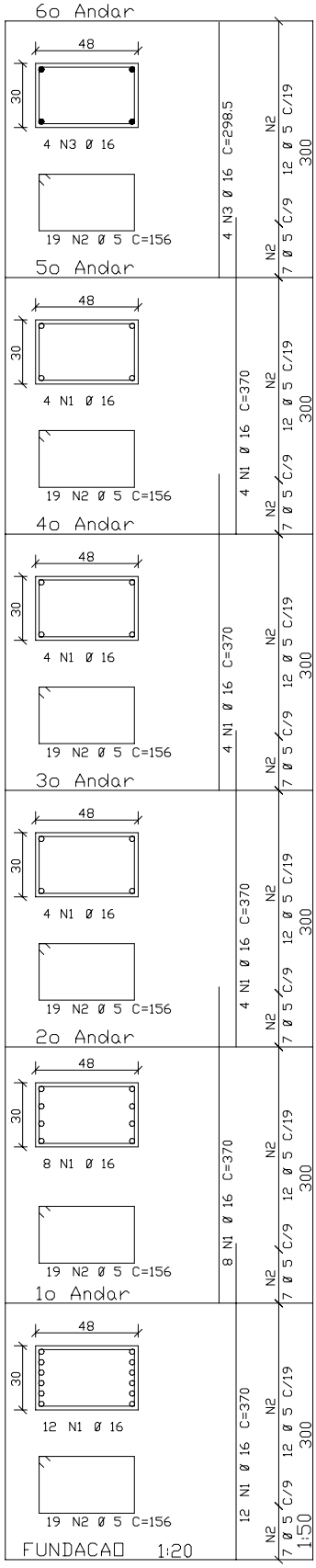


Corte A



29 N3 Ø 8 C=174

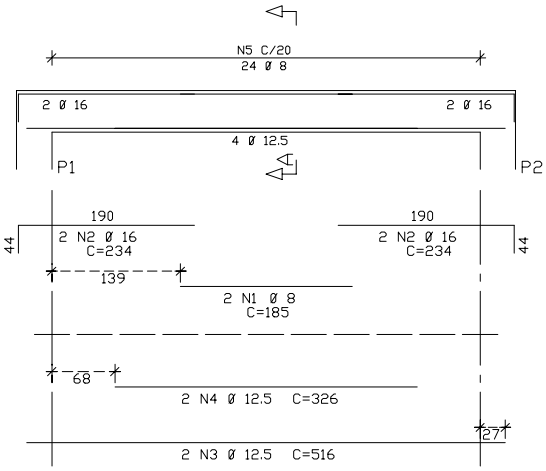
P1=P2



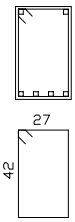
P6N2C

V1 cobertura

30/45



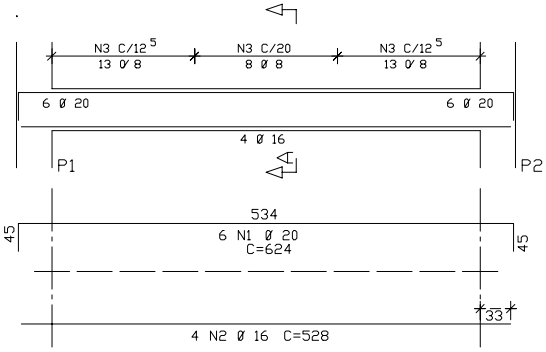
Corte A



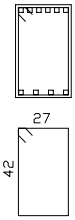
24 N5 Ø 8 C=154

V1 tipo (x5)

30/45

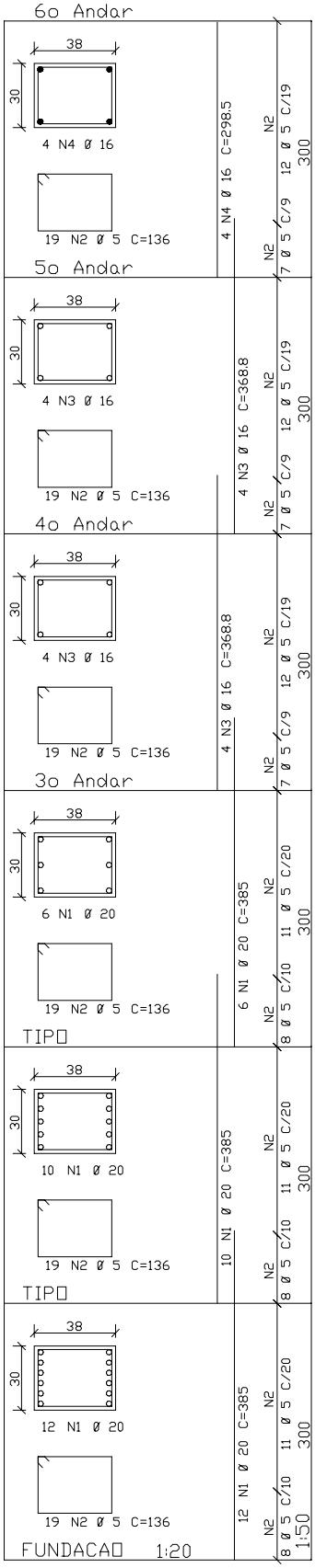


Corte A



34 N3 Ø 8 C=154

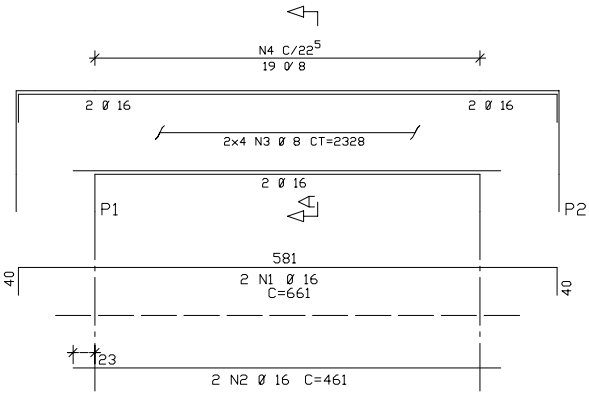
P1=P2



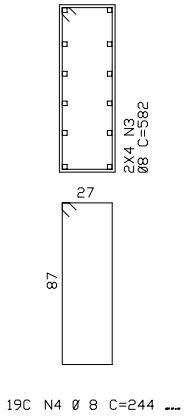
P6N3A

V1 cobertura

30/90

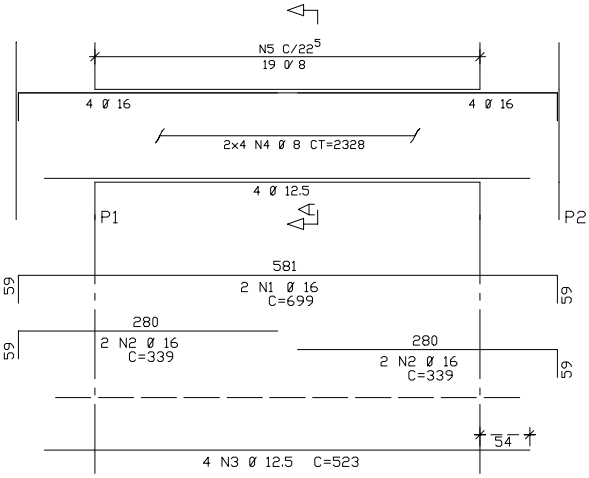


Corte A

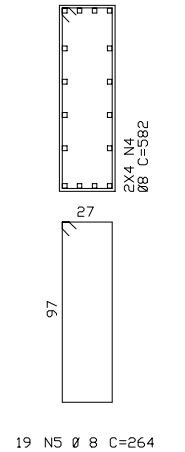


V1 tipo (x5)

30/100

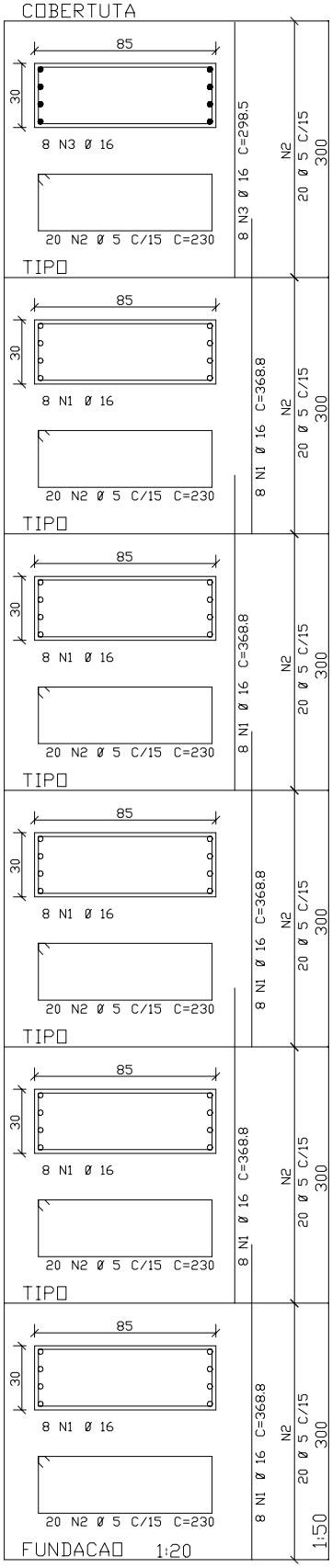


Corte A



P1=P2

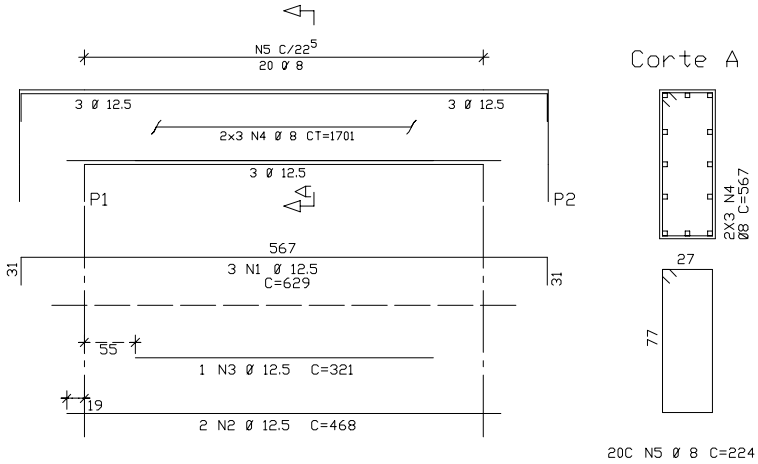
COBERTUTA



P6N3B

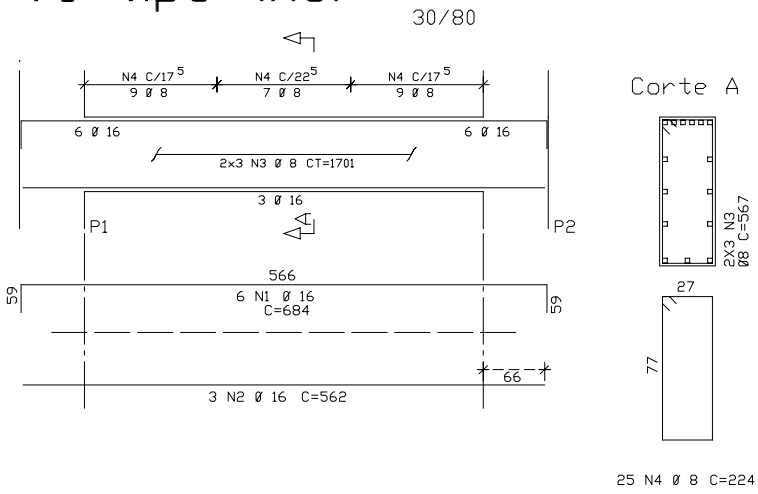
V1 cobertura

30/80

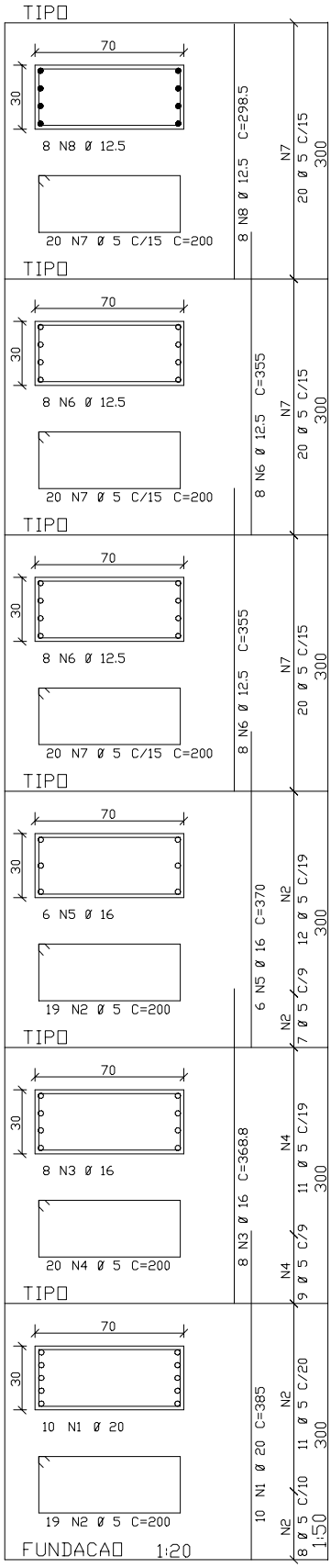


V1 tipo (x5)

30/80



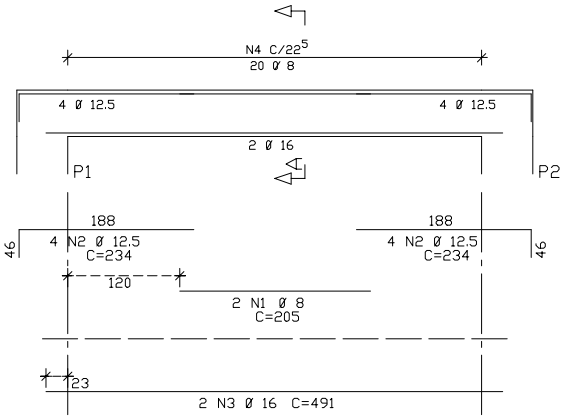
P1=P2



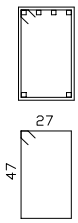
P6N3C

V1 cobertura

30/50



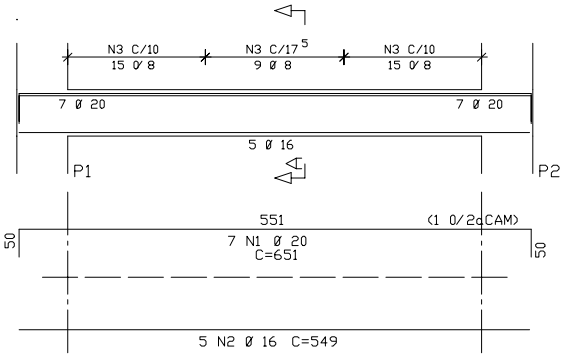
Corte A



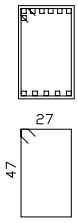
20C N4 Ø 8 C=164

V1 tipo (x5)

30/50

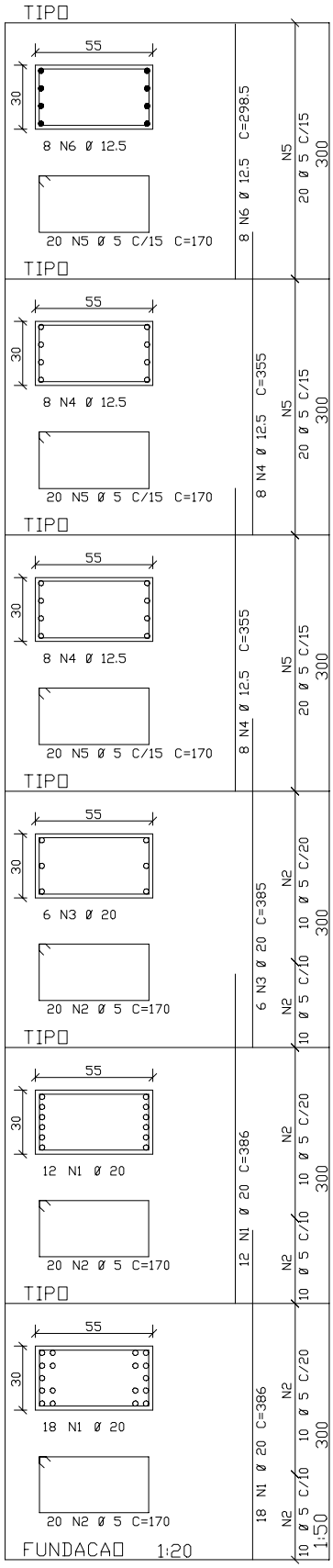


Corte A



39 N3 Ø 8 C=164

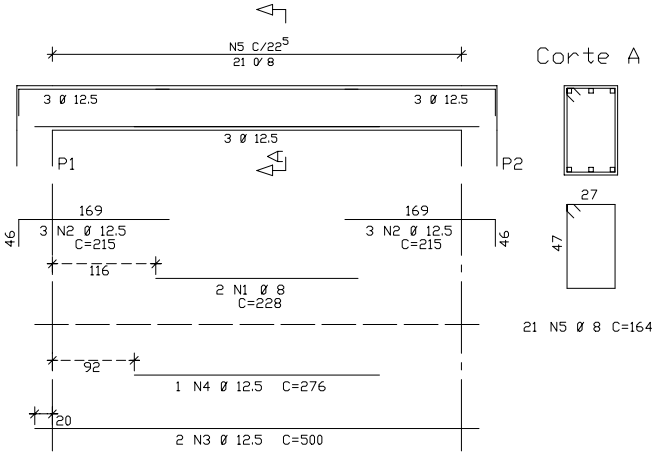
P1=P2



P6A

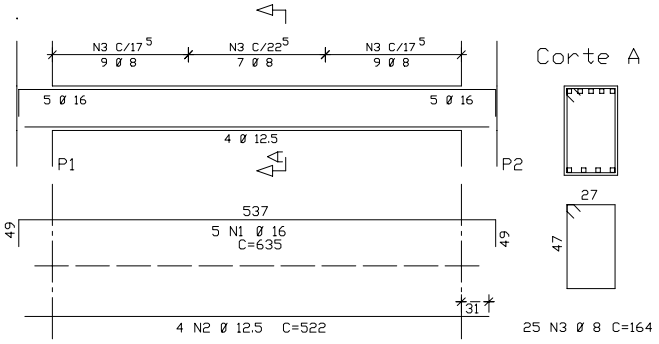
V1 cobertura

30/50

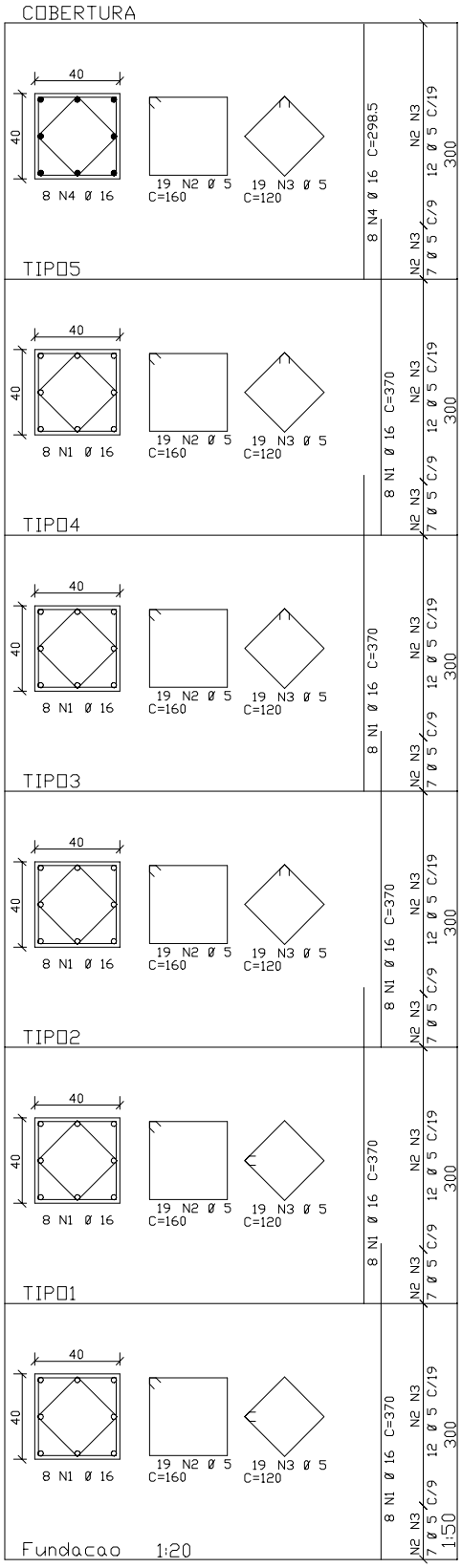


V1 tipo (x5)

30/50



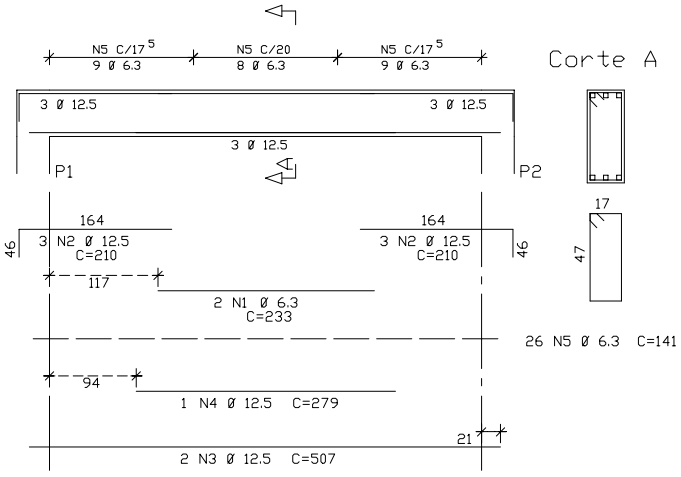
P1=P2



P6B

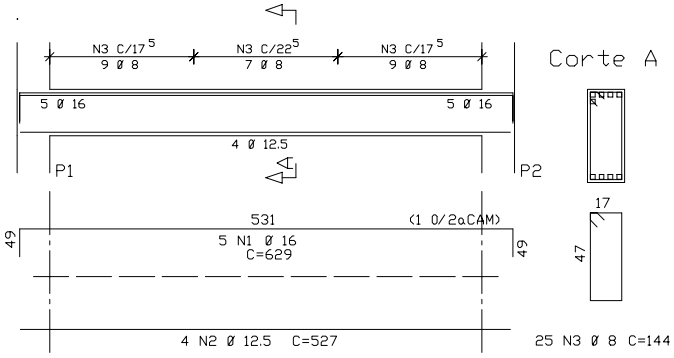
V1 cobertura

20/50



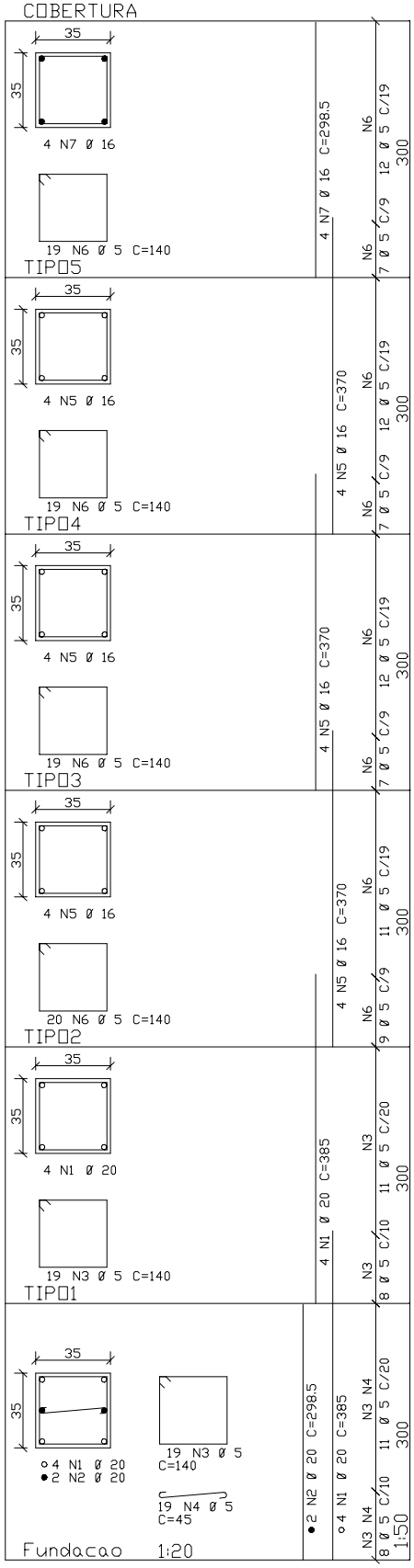
V1 tipo (x5)

20/50



P1=P2

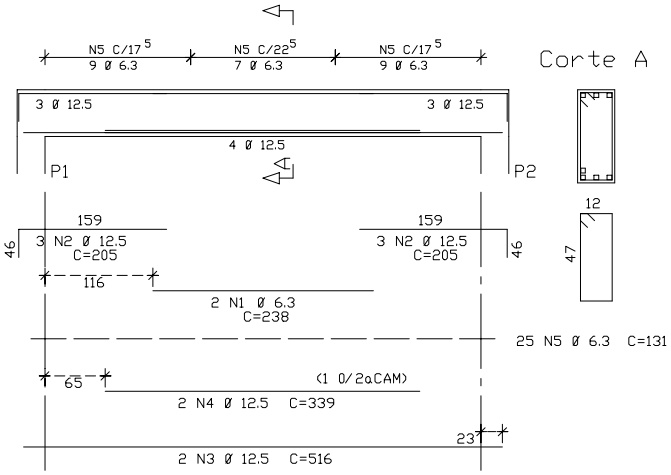
COBERTURA



P6C

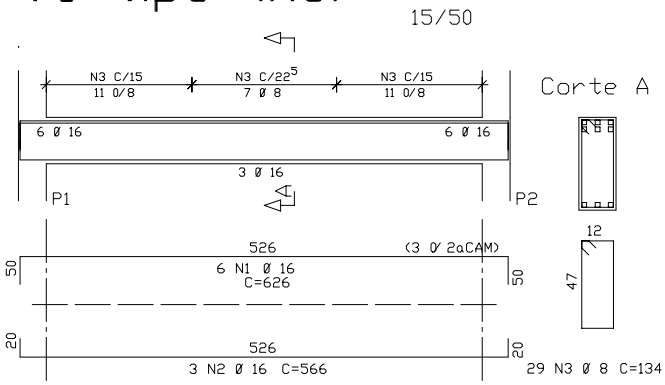
V1 cobertura

15/50



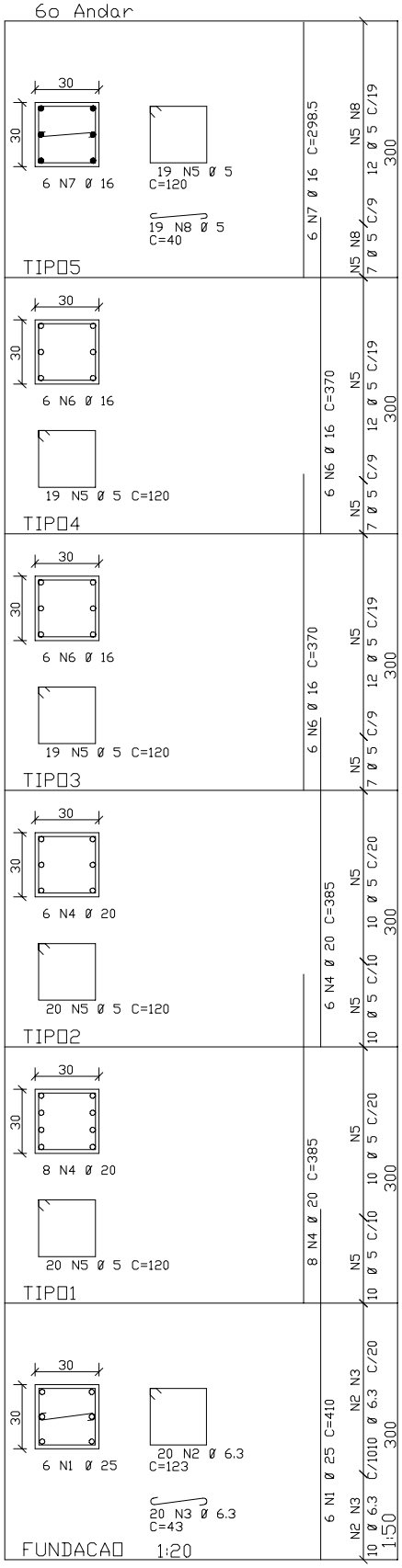
V1 tipo (x5)

15/50



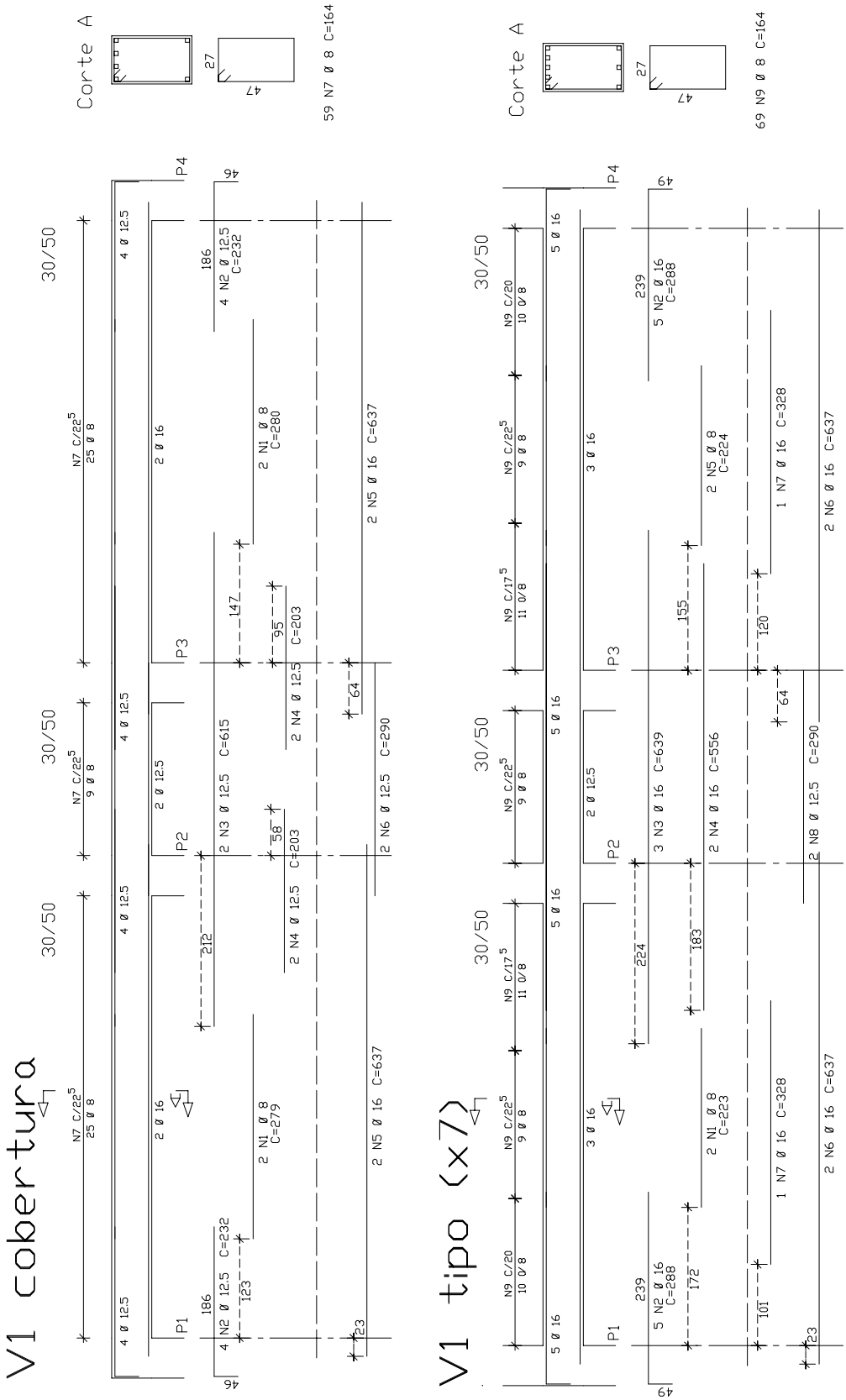
P1=P2

6o Andar

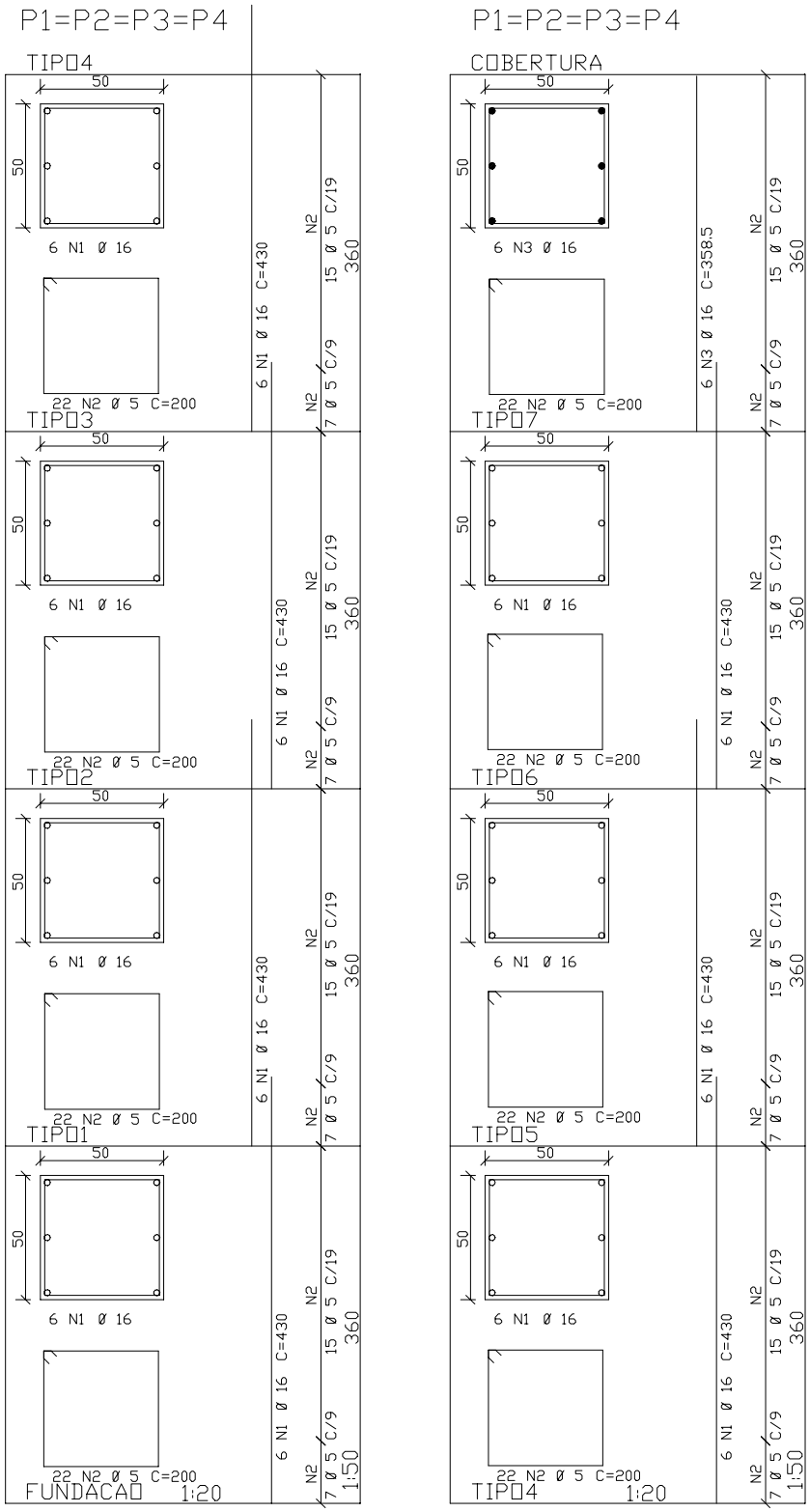


APÊNDICE B - Detalhamento dos pórticos com oito lances de pilares

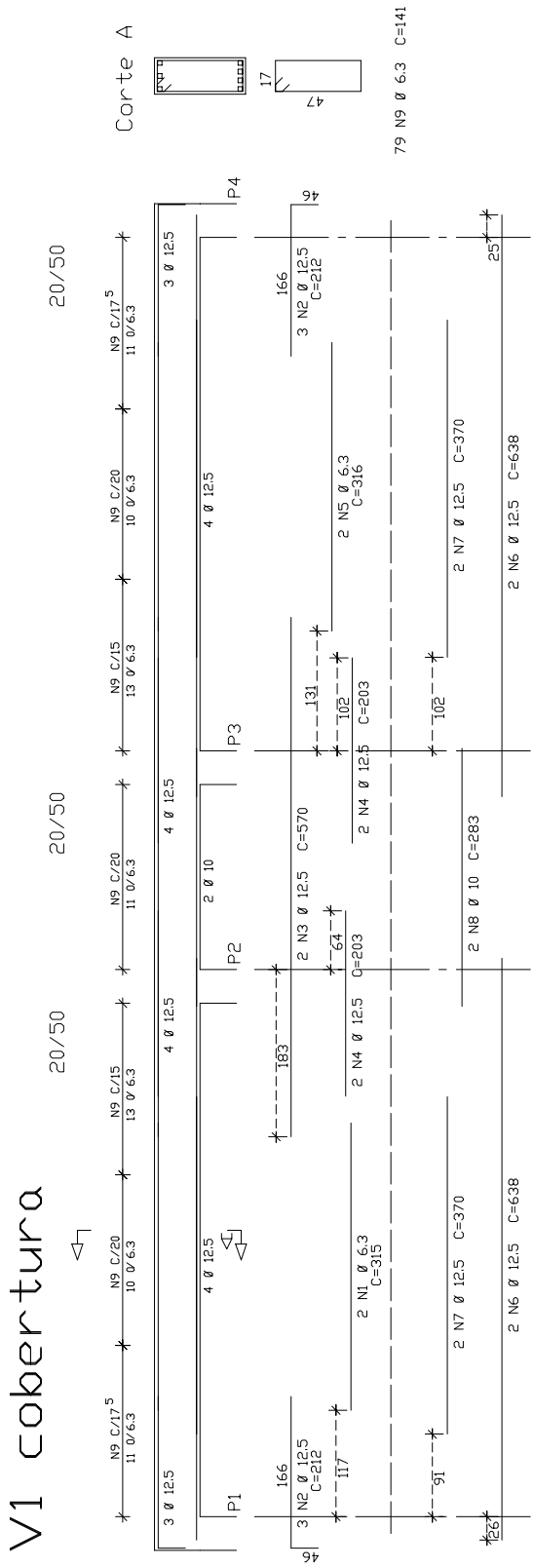
P8A - Vigas

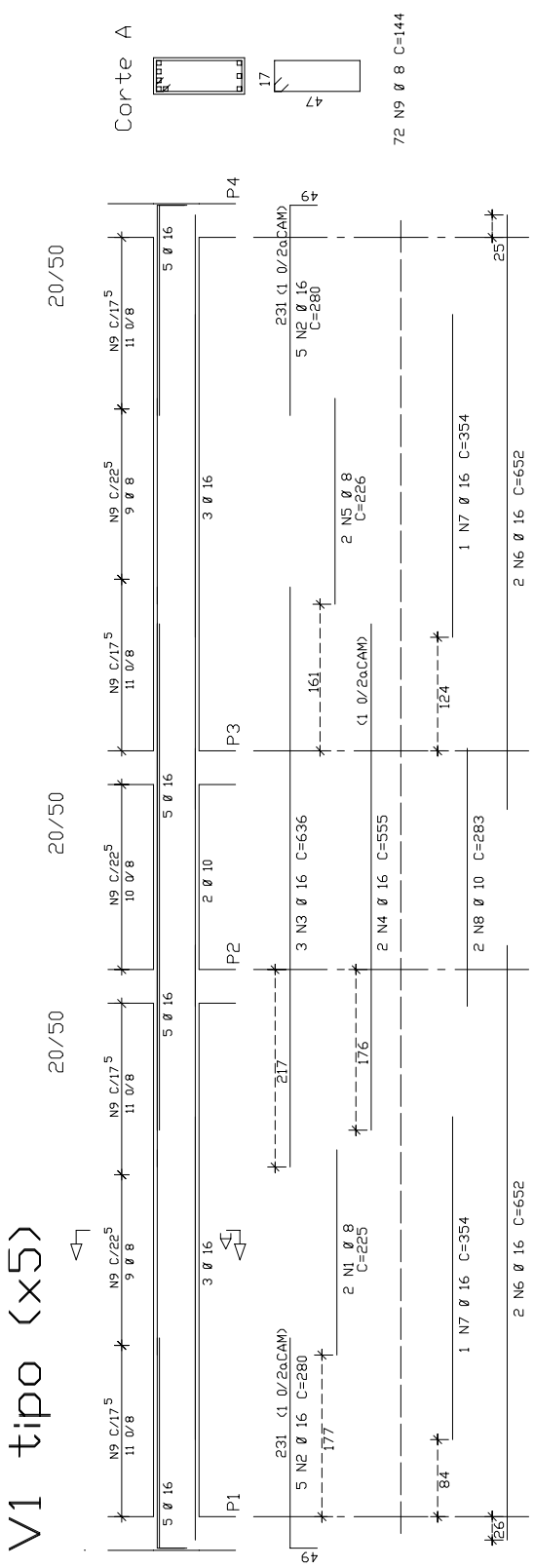

V1 cobertura
V1 tipo (x7)
Corte A
Corte A
30/50
P1
P2
P3
P4
N7 C/22 5
25 Ø 8
N7 C/22 5
9 Ø 8
4 Ø 12.5
2 Ø 16
2 Ø 12.5
4 N2 Ø 12.5 C=232
2 N1 Ø 8 C=279
2 N1 Ø 8 C=280
2 N3 Ø 12.5 C=615
2 N4 Ø 12.5 C=203
2 N5 Ø 16 C=637
2 N6 Ø 12.5 C=290
59 N7 Ø 8 C=164
N9 C/20
10 Ø 8
N9 C/22 5
9 Ø 8
N9 C/17 5
11 Ø 8
5 Ø 16
3 Ø 16
5 N2 Ø 16 C=288
2 N1 Ø 8 C=223
2 N3 Ø 16 C=639
2 N4 Ø 16 C=556
2 N5 Ø 8 C=224
1 N7 Ø 16 C=328
2 N6 Ø 16 C=637
2 N8 Ø 12.5 C=290
69 N9 Ø 8 C=164

P8A - Pilares

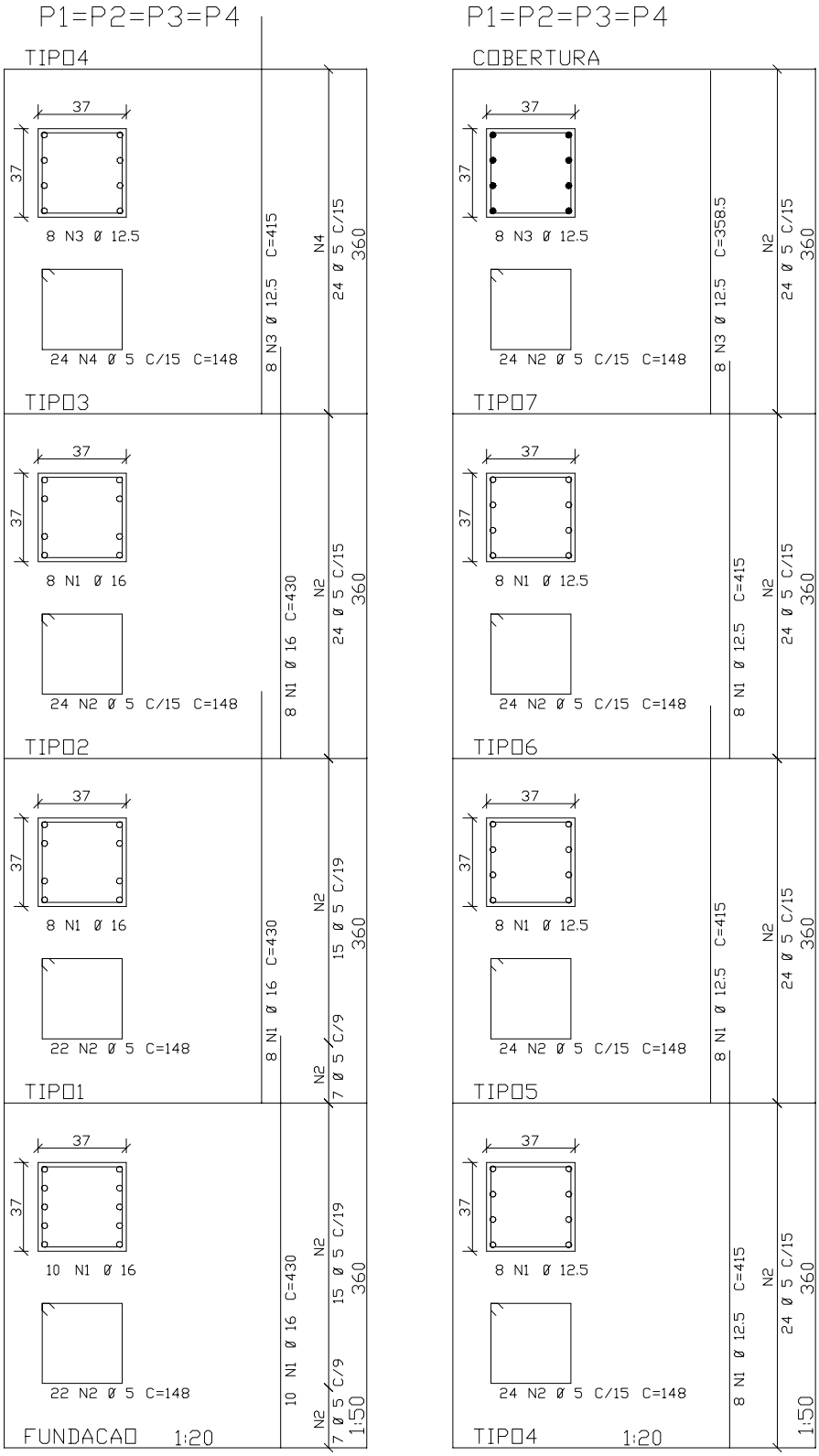

P1=P2=P3=P4
TIPO4
50
50
6 N1 Ø 16
22 N2 Ø 5 C=200
6 N1 Ø 16 C=430
N2
15 Ø 5 C/19
360
N2
7 Ø 5 C/9
TIPO3
TIPO2
TIPO1
FUNDACAO 1:20
1:50
P1=P2=P3=P4
COBERTURA
6 N3 Ø 16
6 N3 Ø 16 C=358.5
TIPO7
TIPO6
TIPO5
TIPO4 1:20

P8B - Vigas

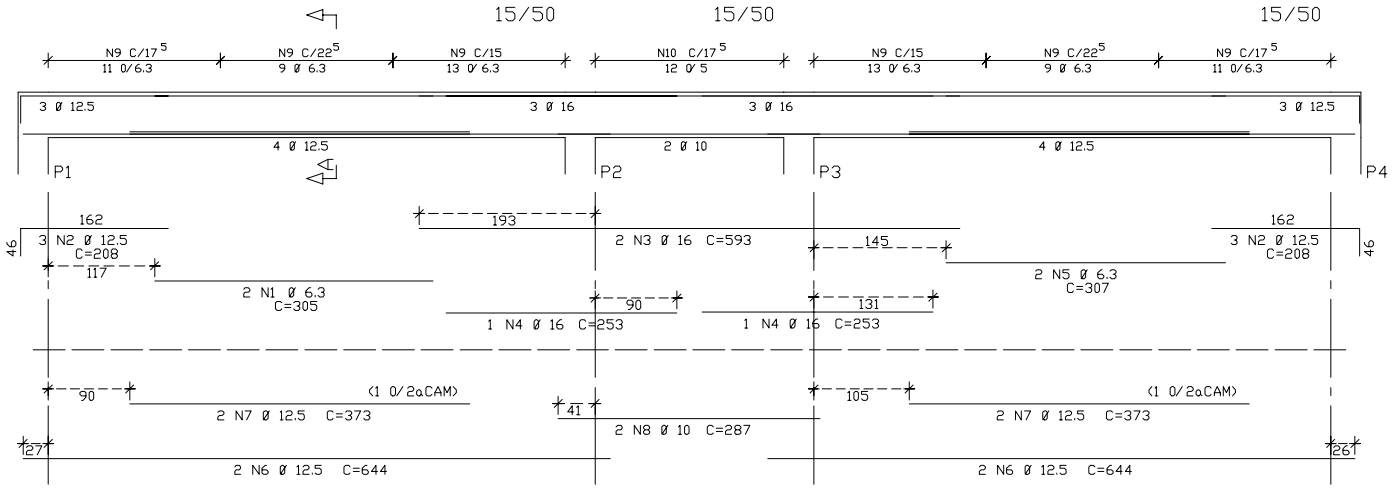

V1 cobertura
Corte A
79 N9 Ø 6.3 C=141
20/50
P1
P2
P3
P4
3 Ø 12.5
4 Ø 12.5
2 Ø 10
N9 C/17 5 11 0/6.3
N9 C/15 13 0/6.3
N9 C/20 10 0/6.3
N9 C/20 11 0/6.3
3 N2 Ø 12.5 C=212
2 N5 Ø 6.3 C=316
2 N7 Ø 12.5 C=370
2 N6 Ø 12.5 C=638
2 N3 Ø 12.5 C=570
2 N4 Ø 12.5 C=203
2 N8 Ø 10 C=283
2 N1 Ø 6.3 C=315


V1 tipo (x5)
Corte A
72 N9 Ø 8 C=144
20/50
P1
P2
P3
P4
5 Ø 16
3 Ø 16
2 Ø 10
N9 C/17 5 11 0/8
N9 C/22 5 9 0/8
N9 C/22 5 10 0/8
231 (1 0/2aCAM)
5 N2 Ø 16 C=280
2 N5 Ø 8 C=226
3 N3 Ø 16 C=636
2 N4 Ø 16 C=555
2 N8 Ø 10 C=283
1 N7 Ø 16 C=354
2 N6 Ø 16 C=652
2 N1 Ø 8 C=225

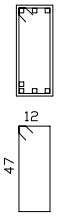
P8B - Pilares


P1=P2=P3=P4
TIPO4
37
37
8 N3 Ø 12.5
24 N4 Ø 5 C/15 C=148
8 N3 Ø 12.5 C=415
N4
24 Ø 5 C/15
360
TIPO3
8 N1 Ø 16
24 N2 Ø 5 C/15 C=148
8 N1 Ø 16 C=430
N2
24 Ø 5 C/15
360
TIPO2
8 N1 Ø 16
22 N2 Ø 5 C=148
8 N1 Ø 16 C=430
N2
15 Ø 5 C/19
360
7 Ø 5 C/9
TIPO1
10 N1 Ø 16
22 N2 Ø 5 C=148
10 N1 Ø 16 C=430
N2
15 Ø 5 C/19
360
7 Ø 5 C/9
FUNDACAO 1:20
1:50
P1=P2=P3=P4
COBERTURA
8 N3 Ø 12.5
24 N2 Ø 5 C/15 C=148
8 N3 Ø 12.5 C=358.5
N2
24 Ø 5 C/15
360
TIPO7
8 N1 Ø 12.5
24 N2 Ø 5 C/15 C=148
8 N1 Ø 12.5 C=415
N2
24 Ø 5 C/15
360
TIPO6
8 N1 Ø 12.5
24 N2 Ø 5 C/15 C=148
8 N1 Ø 12.5 C=415
N2
24 Ø 5 C/15
360
TIPO5
8 N1 Ø 12.5
24 N2 Ø 5 C/15 C=148
8 N1 Ø 12.5 C=415
N2
24 Ø 5 C/15
360
TIPO4 1:20
1:50

V1 cobertura

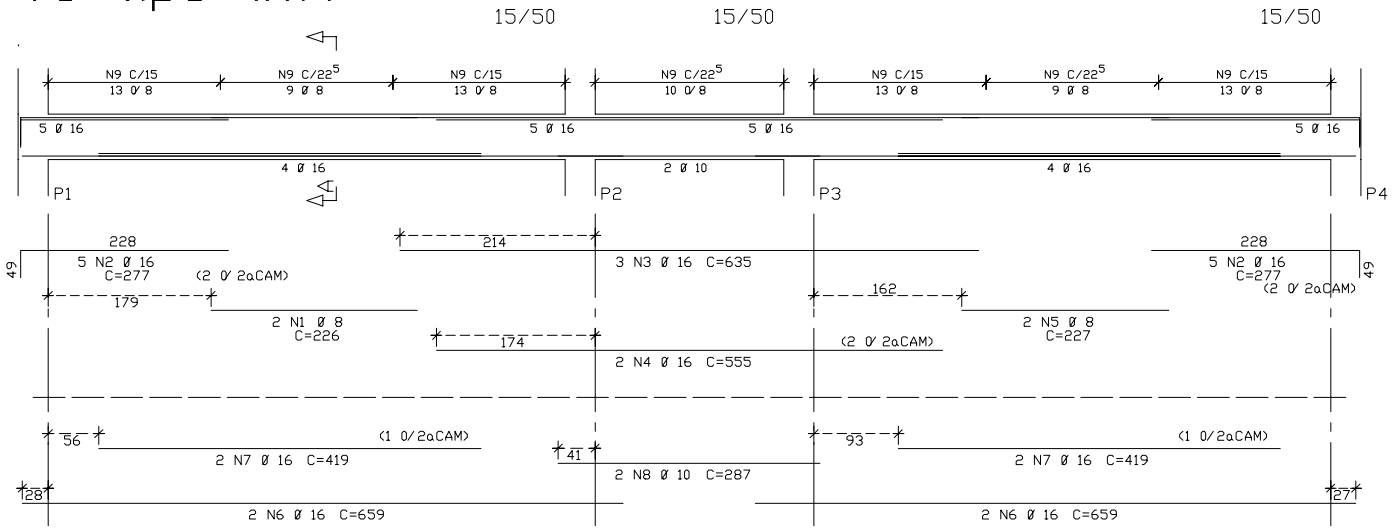


Corte A

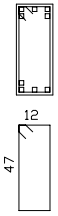


66 N9 Ø 6.3 C=131
12 N10 Ø 5 C=128

V1 tipo (x7)

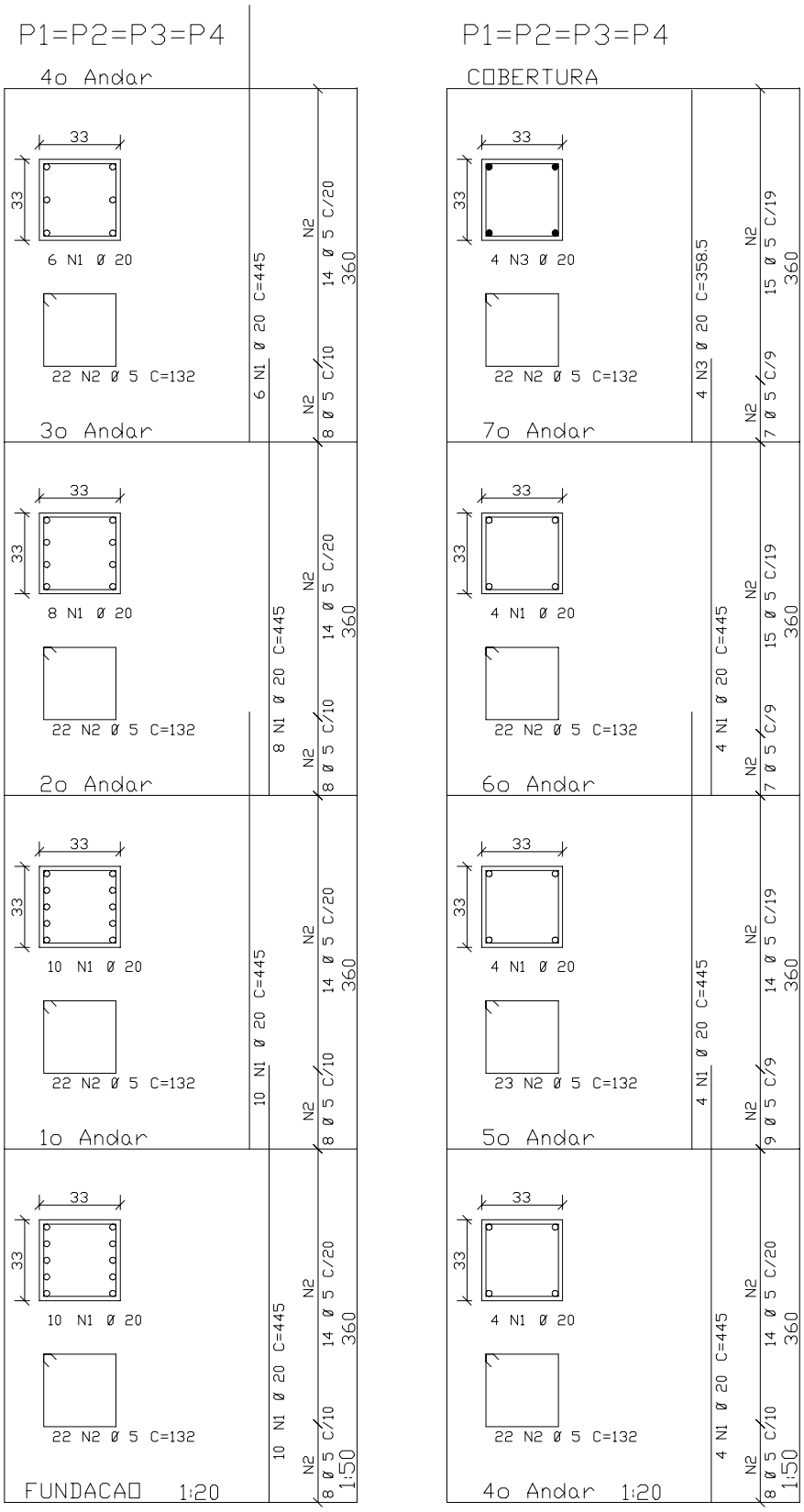


Corte A



80 N9 Ø 8 C=134

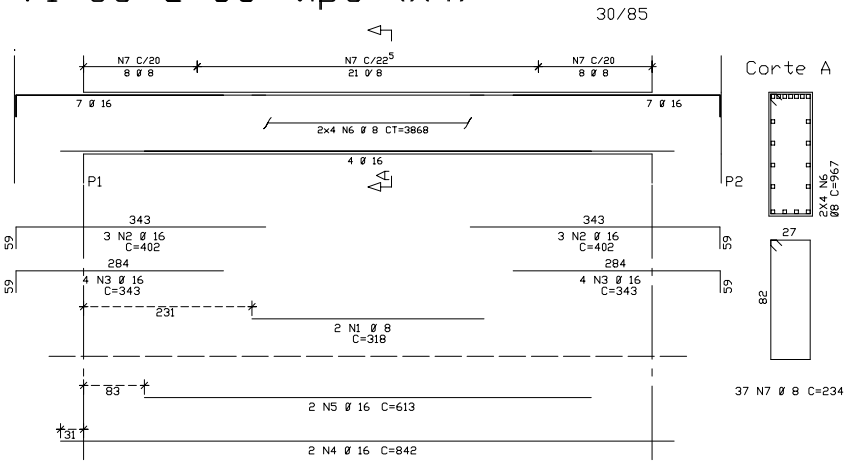
P8C - Pilares


P1=P2=P3=P4
4o Andar
33
33
6 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
6 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/20
360
N2
8 Ø 5 C/10
3o Andar
33
33
8 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
8 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/20
360
N2
8 Ø 5 C/10
2o Andar
33
33
10 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
10 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/20
360
N2
8 Ø 5 C/10
1o Andar
33
33
10 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
10 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/20
360
N2
8 Ø 5 C/10
FUNDACAO 1:20
1:50
P1=P2=P3=P4
COBERTURA
33
33
4 N3 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
4 N3 Ø 20 C=358.5
N2
15 Ø 5 C/19
360
N2
7 Ø 5 C/9
7o Andar
33
33
4 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
4 N1 Ø 20 C=445
N2
15 Ø 5 C/19
360
N2
7 Ø 5 C/9
6o Andar
33
33
4 N1 Ø 20
23 N2 Ø 5 C=132
4 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/19
360
N2
9 Ø 5 C/9
5o Andar
33
33
4 N1 Ø 20
22 N2 Ø 5 C=132
4 N1 Ø 20 C=445
N2
14 Ø 5 C/20
360
N2
8 Ø 5 C/10
4o Andar 1:20
1:50

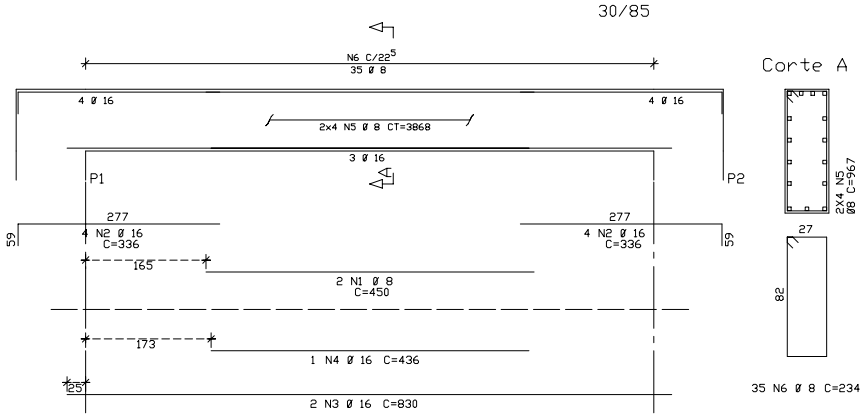
APÊNDICE C - Detalhamento dos pórticos com treze lances de pilares

P13A - Vigas

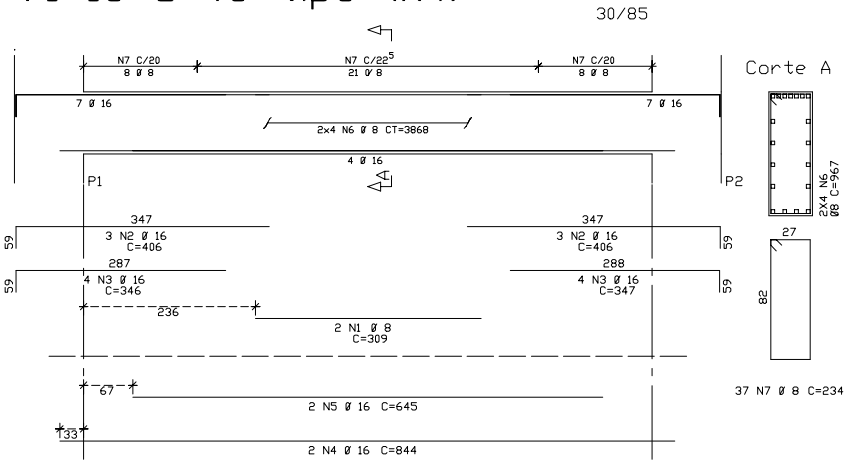
V1 5o @ 8o tipo (x4)



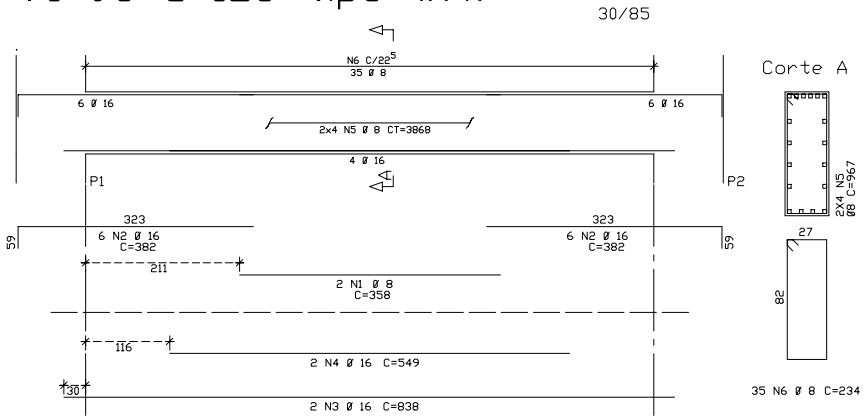
V1 cobertura



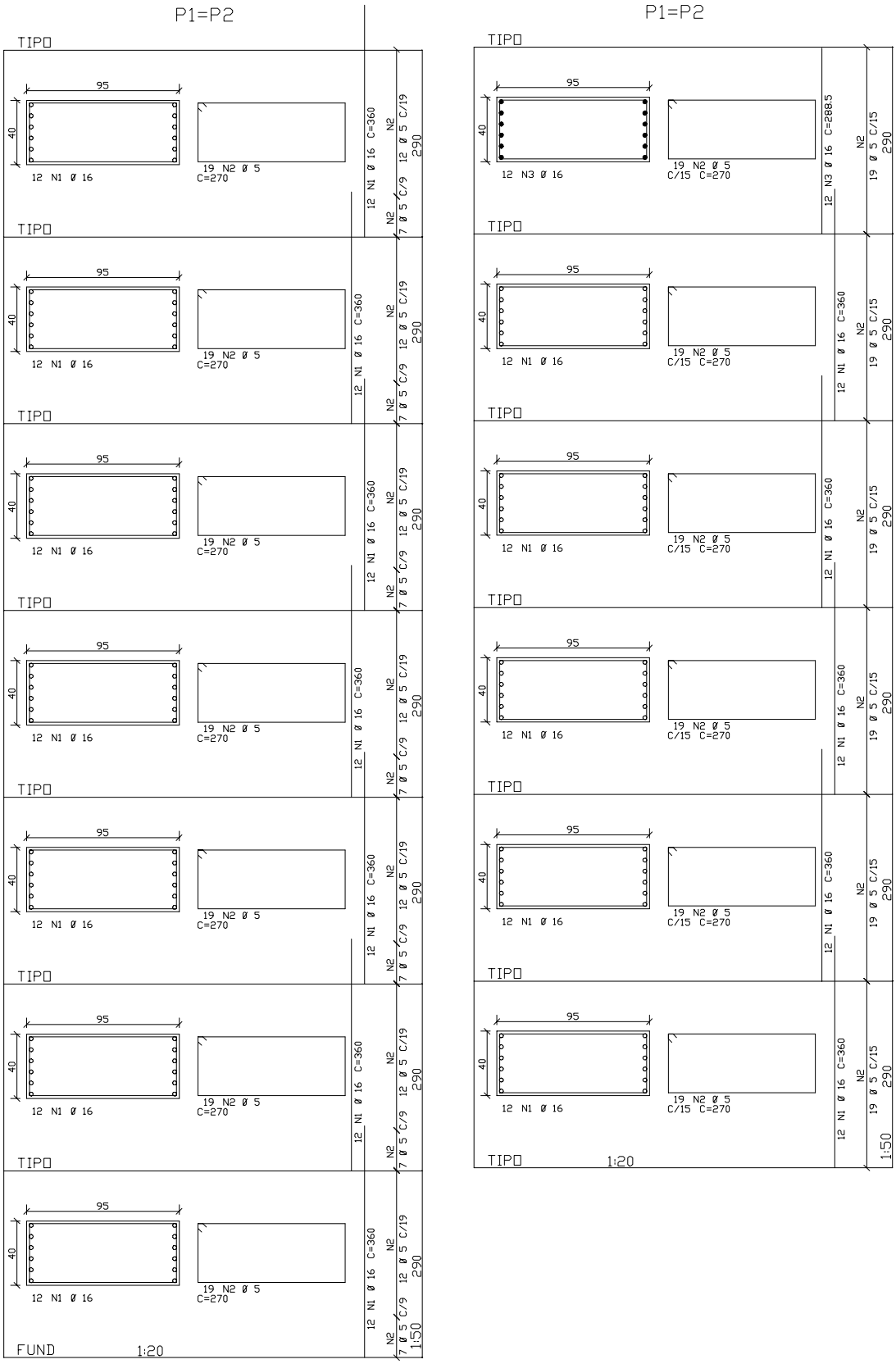
V1 1o @ 4o tipo (x4)



V1 9o @ 12o tipo (x4)

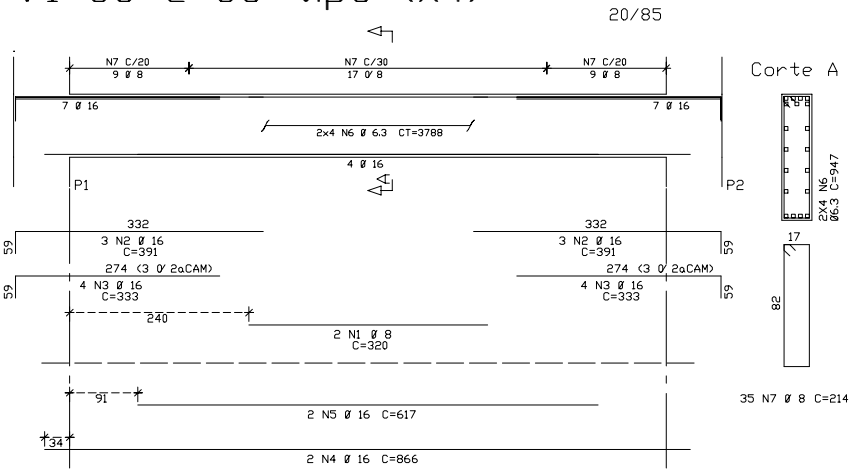


P13A - Pilares

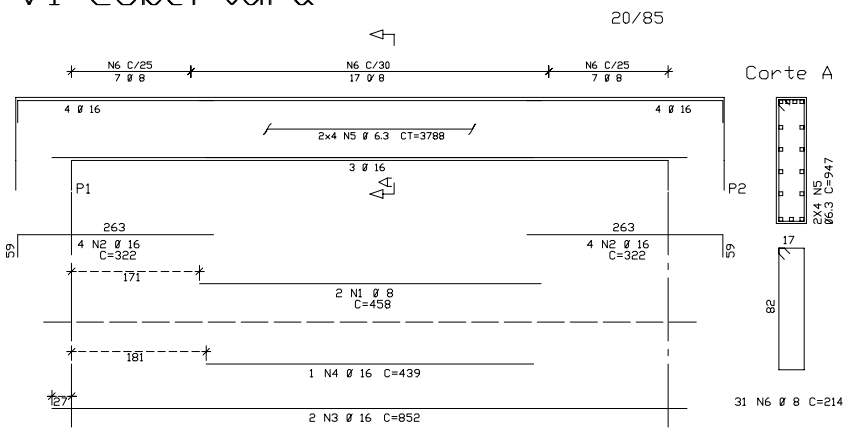


P13B - Vigas

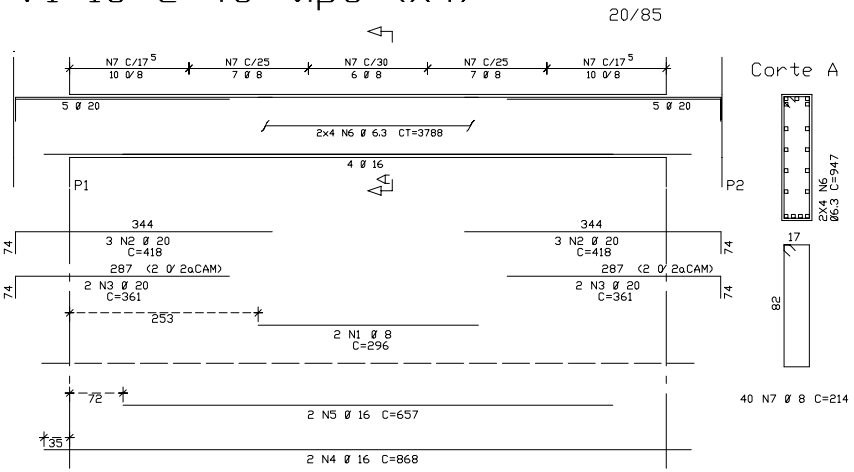
V1 5o @ 8o tipo (x4)



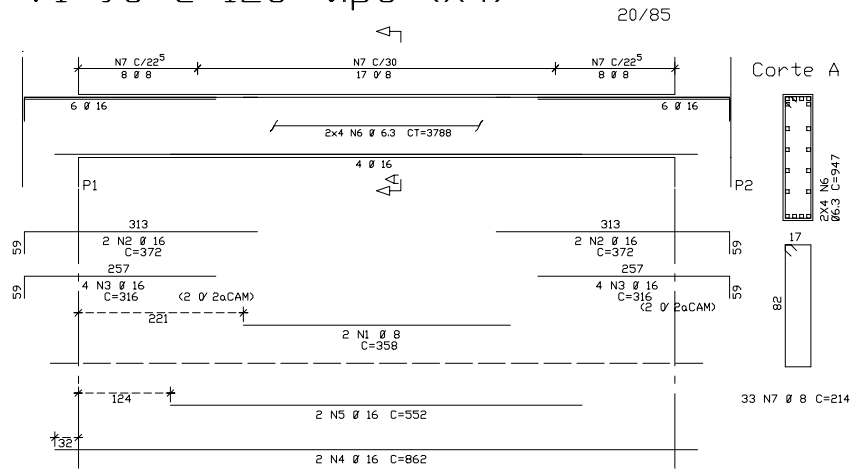
V1 cobertura



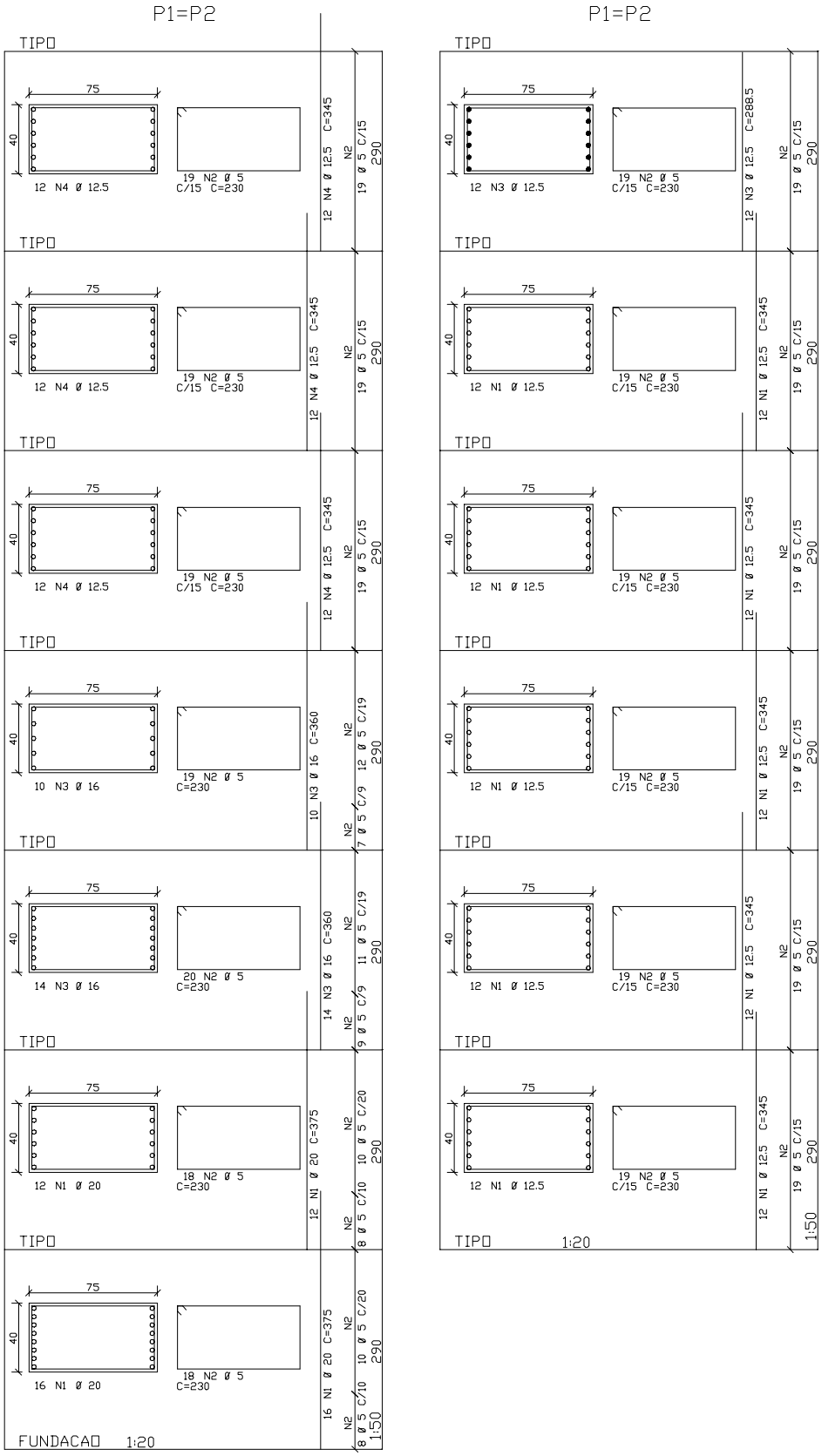
V1 1o @ 4o tipo (x4)



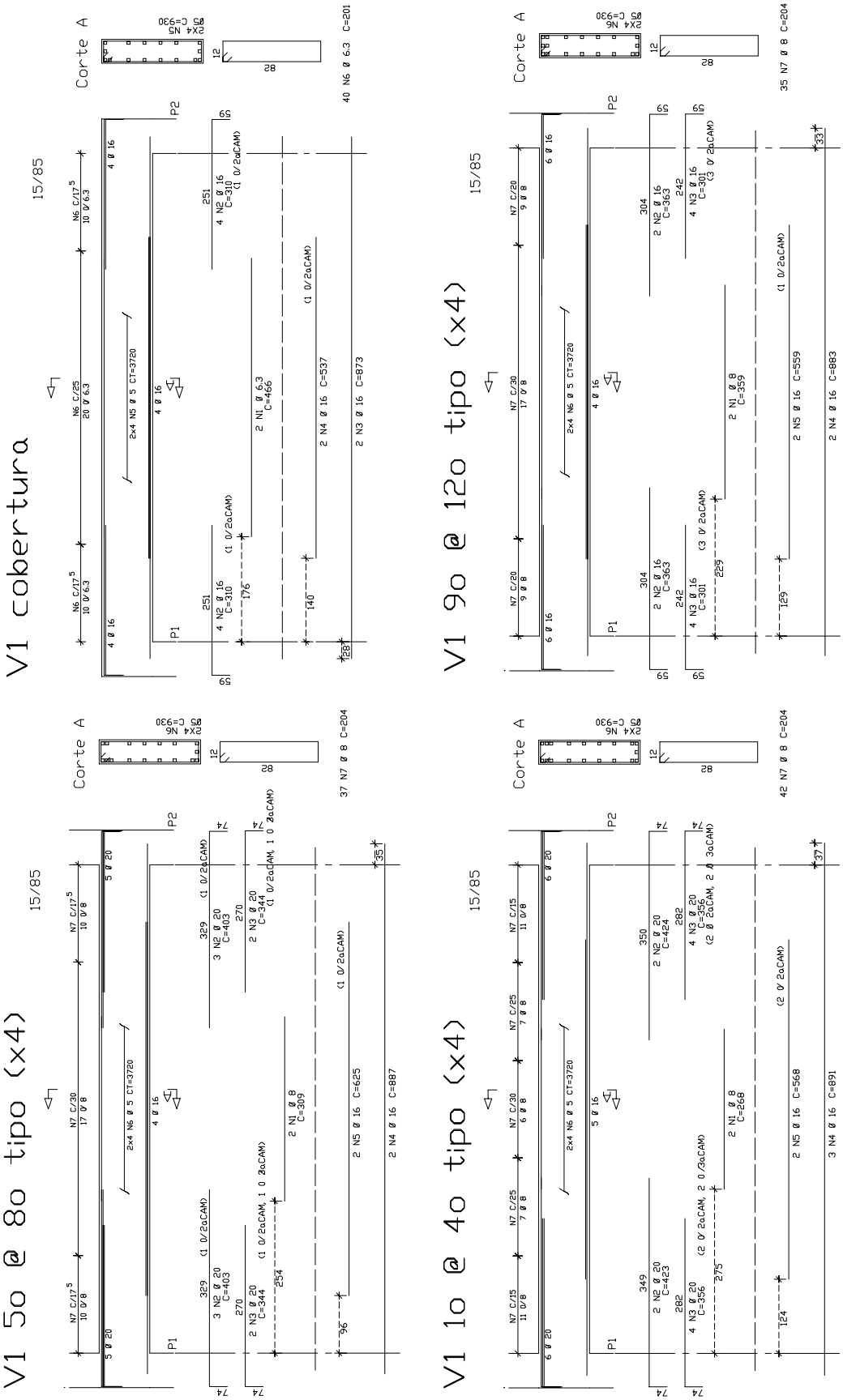
V1 9o @ 12o tipo (x4)



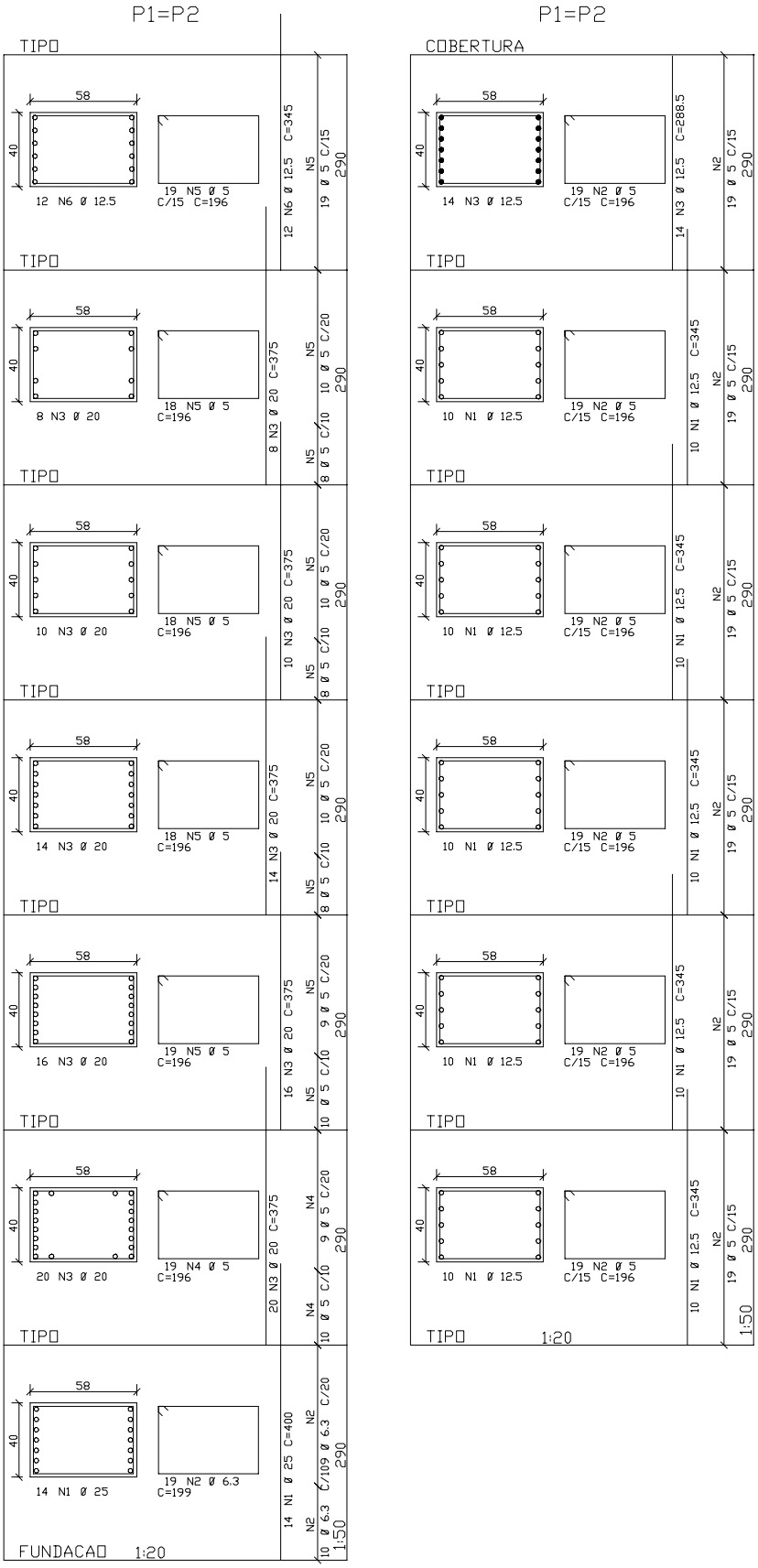
P13B - Pilares



P13C - Vigas


V1 cobertura
V1 9o @ 12o tipo (x4)
V1 5o @ 8o tipo (x4)
V1 1o @ 4o tipo (x4)
Corte A
15/85
P1
P2

P13C - Pilares



ANEXO A - Simplificações da literatura para obtenção das matrizes Q, H e D na formulação corrotacional

1. INTRODUÇÃO

Neste anexo são apresentadas algumas simplificações para implementação da formulação corrotacional adotadas na literatura: SOLER (1989), PIMENTA (1996) e SILVA (1996). Estas simplificações, descritas conforme SILVA (1996), foram abandonadas no presente trabalho mediante um processo de integração numérica.

1. CAMPO DE DEFORMAÇÃO

Da expressão do campo de deformação (3.61), pode-se obter a deformação da fibra média $\bar{\varepsilon}$, variável ao longo do elemento, fazendo-se $y_r = 0$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{q_1}{l_r} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(q_2\psi_2' + q_3\psi_3'\right)^2 \qquad \text{(D.1)}$$

O valor variável de $\bar{\varepsilon}$ é substituído pelo seu valor médio constante, dado por:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r}\int_{-l_r/2}^{l_r/2} \bar{\varepsilon} \quad dx_r$$

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r}\int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[\frac{q_1}{l_r} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(q_2\psi_2' + q_3\psi_3'\right)^2\right] dx_r \qquad \text{(D.2)}$$

substituindo-se ψ_2' e ψ_3' pelas expressões 3.58, e resolvendo-se analiticamente a integral, tem-se:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30}\right) \qquad \text{(D.3)}$$

sendo o campo de deformação ($\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r\alpha'$):

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30}\right) - y_r\left(q_2\psi_2'' + q_3\psi_3''\right) \qquad \text{(D.4)}$$

2. ESFORÇOS SOLICITANTES E MATRIZES Q, H e D EM REGIME ELÁSTICO LINEAR

Considerando-se as expressões 3.63 e 3.64 juntamente com e expressão D.4, tem-se:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} E\varepsilon dA_r = \int_{A_r} E\left(\bar{\varepsilon}_m - y_r\alpha'\right)dA_r$$

$$N = \int_{A_r} E\bar{\varepsilon}_m dA_r - \int_{A_r} E y_r \alpha' dA_r = EA_r\bar{\varepsilon}_m \qquad \text{(D.5)}$$

$$M = -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{A_r} E\varepsilon y_r dA_r = -\int_{A_r} E\varepsilon y_r dA_r$$

$$M = -\int_{A_r} E\left(\bar{\varepsilon}_m - y_r\alpha'\right)y_r dA_r = -\int_{A_r} E\bar{\varepsilon}_m y_r dA_r + \int_{A_r} E\alpha' y_r^2 dA_r$$

$$M = EI\alpha' = EI\left(q_2\psi_2'' + q_3\psi_3''\right)$$

$$M = EI\left[q_2\left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r}\right) + q_3\left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r}\right)\right] \qquad \text{(D.6)}$$

$$x_r = -\frac{l_r}{2} \Rightarrow M_A = -\frac{EI}{l_r}\left(4q_2 + 2q_3\right) \qquad \text{(D.7)}$$

$$x_r = \frac{l_r}{2} \Rightarrow M_B = \frac{EI}{l_r}\left(2q_2 + 4q_3\right) \qquad \text{(D.8)}$$

Considerando-se a expressão 3.34 juntamente com e expressão D.4, tem-se o vetor de esforços nodais naturais **Q**, dado por:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} N\left(1+\dfrac{q_2^2}{15}+\dfrac{q_3^2}{15}-\dfrac{q_2 q_3}{30}\right) \\ Nl_c\left(\dfrac{2q_2}{15}-\dfrac{q_3}{30}\right)-M_A \\ Nl_c\left(\dfrac{2q_3}{15}-\dfrac{q_2}{30}\right)+M_B \end{Bmatrix} \tag{D.9}$$

Tomando-se a expressão 3.43 e a expressão D.4, tem-se a matriz **H**, dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & N\left(\dfrac{2q_2}{15}-\dfrac{q_3}{30}\right) & N\left(\dfrac{2q_3}{15}-\dfrac{q_2}{30}\right) \\ & \dfrac{2Nl_c}{15} & -\dfrac{Nl_c}{30} \\ \textit{simétrica} & & \dfrac{2Nl_c}{15} \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

A matriz **D** pode ser obtida tomando-se as expressões 3.44 e D.4, obtendo-se:

$$D_{11} = \frac{EA_r}{l_r}\left(1+\frac{q_2^2}{15}+\frac{q_3^2}{15}-\frac{q_2 q_3}{30}\right)^2 \tag{D.11}$$

$$D_{12} = D_{21} = EA_r\left(1+\frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{2q_2}{15}-\frac{q_3}{30}\right)\left(1+\frac{q_2^2}{15}+\frac{q_3^2}{15}-\frac{q_2 q_3}{30}\right) \tag{D.12}$$

$$D_{13} = D_{31} = EA_r\left(1+\frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{2q_3}{15}-\frac{q_2}{30}\right)\left(1+\frac{q_2^2}{15}+\frac{q_3^2}{15}-\frac{q_2 q_3}{30}\right) \tag{D.13}$$

$$D_{22} = EA_r l_c\left(1+\frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{2q_2}{15}-\frac{q_3}{30}\right)+\frac{4EI}{l_r} \tag{D.14}$$

$$D_{23} = D_{32} = EA_r l_c \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30}\right)\left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30}\right) + \frac{2EI}{l_r} \qquad \text{(D.15)}$$

$$D_{33} = EA_r l_c \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)\left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30}\right)^2 + \frac{4EI}{l_r} \qquad \text{(D.16)}$$

Desprezando-se os termos multiplicados por q_2 e q_3, por serem suficientemente pequenos, a matriz **D** fica:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{l_r} & \frac{2EI}{l_r} \\ \textit{simétrica} & & \frac{4EI}{l_r} \end{bmatrix} \qquad \text{(D.17)}$$

3. ESFORÇOS SOLICITANTES E MATRIZES Q, H e D EM REGIME ELÁSTICO NÃO-LINEAR

Seja D o módulo de rigidez tangente elástico não-linear do material. Os esforços solicitantes na seção do elemento serão:

$$N = \int_{A_r} D\varepsilon dA_r = \int_{A_r} D(\bar{\varepsilon}_m - y_r\alpha')dA_r = \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} DdA_r - \alpha' \int_{A_r} Dy_r dA_r$$

$$N = C_1\bar{\varepsilon}_m - C_2\alpha' \qquad \text{(D.18)}$$

onde C_1 e C_2 são dadas pelas equações 3.73 e 3.74.

Observa-se que N não é mais constante, passando a ser função de x_r:

$$N = C_1\bar{\varepsilon}_m - C_2\left[q_2\left(\frac{6x_r}{l_r} - \frac{1}{l_r}\right) + q_3\left(\frac{6x_r}{l_r} + \frac{1}{l_r}\right)\right] \qquad \text{(D.19)}$$

sendo os valores nas extremidades dados por:

$$x_r = -\frac{l_r}{2} \Rightarrow N_A = C_{1A}\bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{2A}}{l_r}\left(4q_2 + 2q_3\right) \tag{D.20}$$

$$x_r = -\frac{l_r}{2} \Rightarrow N_B = C_{1B}\bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{2B}}{l_r}\left(2q_2 + 4q_3\right) \tag{D.21}$$

$$M = -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{A_r} D\varepsilon y_r dA_r = -\int_{A_r} D\varepsilon y_r dA_r$$

$$M = -\int_{A_r} D\left(\bar{\varepsilon}_m - y_r\alpha'\right) y_r dA_r = -\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} D y_r dA_r + \alpha' \int_{A_r} D y_r^2 dA_r$$

$$M = -C_2\bar{\varepsilon}_m + C_3\alpha' \tag{D.22}$$

onde C_2 e C_3 são dadas pelas equações 3.74 e 3.75.

$$M = -C_2\bar{\varepsilon}_m + C_3\left[q_2\left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r}\right) + q_3\left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r}\right)\right] \tag{D.23}$$

$$x_r = -\frac{l_r}{2} \Rightarrow M_A = -C_{2A}\bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3A}}{l_r}\left(4q_2 + 2q_3\right) \tag{D.24}$$

$$x_r = \frac{l_r}{2} \Rightarrow M_B = -C_{2B}\bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3B}}{l_r}\left(2q_2 + 4q_3\right) \tag{D.25}$$

Deve-se observar que C_1, C_2 e C_3 variam ao longo do elemento em função da variação de D. Portanto, para que as equações para o regime elástico não-linear possam ser empregadas, admite-se a hipótese de que os elementos sejam curtos, de forma que N, C_1, C_2 e C_3 sejam constantes no elemento:

$$C_{1m} = \frac{C_{1A} + C_{1B}}{2} \tag{D.26}$$

$$C_{2m} = \frac{C_{2A} + C_{2B}}{2} \tag{D.27}$$

$$C_{3m} = \frac{C_{3A} + C_{3B}}{2} \tag{D.28}$$

Admitindo-se, ainda, que os momento fletores tenham uma distribuição linear, como no regime elástico-linear e desprezando-se os valores multiplicados por q_2 e q_3 obtém-se, a partir da matriz D.9, a matriz **Q**:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N_A + N_B}{2} = N_m \\ -M_A \\ M_B \end{Bmatrix} \tag{D.29}$$

A matriz **H** fica análoga à matriz D.10, apenas substituindo-se N po N_m:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & N_m\left(\dfrac{2q_2}{15} - \dfrac{q_3}{30}\right) & N_m\left(\dfrac{2q_3}{15} - \dfrac{q_2}{30}\right) \\ & \dfrac{2N_m l_c}{15} & -\dfrac{N_m l_c}{30} \\ simétrica & & \dfrac{2N_m l_c}{15} \end{bmatrix} \tag{D.30}$$

Utilizando-se as mesmas simplificações adotadas para o elemento no regime elástico linear, ou seja, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_m$ e desprezando-se os termos multiplicados por q_1 e q_2, obtém-se para a matriz **D**:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{1m}}{l_r} & \dfrac{C_{2m}}{l_r} & -\dfrac{C_{2m}}{l_r} \\ & \dfrac{4C_{3m}}{l_r} & \dfrac{2C_{3m}}{l_r} \\ simétrica & & \dfrac{4C_{3m}}{l_r} \end{bmatrix} \tag{D.31}$$