

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS MECÂNICOS, DE CONFIABILIDADE E DE  
OTIMIZAÇÃO PARA APLICAÇÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

*Caio Gorla Nogueira*

*Tese apresentada ao Departamento de  
Engenharia de Estruturas da EESC-USP como  
parte dos requisitos necessários à obtenção do  
título de Doutor em Engenharia de Estruturas.*

***Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini***

São Carlos

2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

N778d Nogueira, Caio Gorla  
Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado / Caio Gorla Nogueira ; orientador Wilson Sergio Venturini. -- São Carlos, 2010.

Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2010.

1. Método dos elementos finitos. 2. Análise não-linear. 3. Efeito de pino. 4. Engrenamento de agregados. 5. Concreto armado. 6. Confiabilidade. 7. Otimização. 8. Acoplamento RBDO. 9. Título.


**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro CAIO GORLA NOGUEIRA.

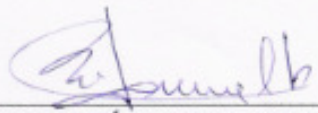
Tese defendida e julgada em 12/05/2010 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **ANDRÉ TEÓFILO BECK** – (Orientador designado)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

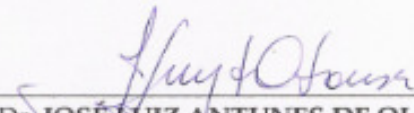
Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

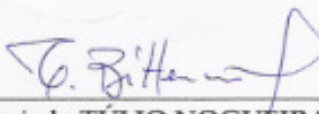
Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **JOSÉ SAMUEL GIONGO**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

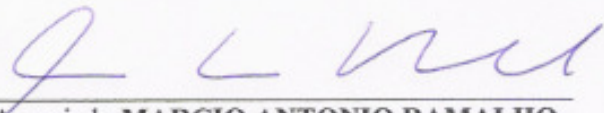
Aprovado

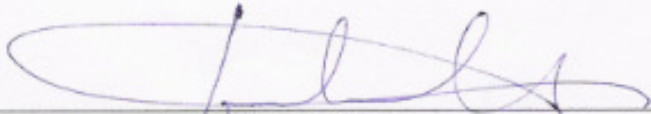
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **JOSÉ LUIZ ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUSA**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **TÚLIO NOGUEIRA BITTENCOURT**  
(Escola Politécnica/USP)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho à minha amada esposa Camila  
por estar presente o tempo todo e aos meus pais  
João Roberto e Angela Maria por tudo...*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por seu incrível amor de Pai, ao Senhor Jesus Cristo pelo sacrifício de vida eterna que me rendeu a salvação e ao Espírito Santo por ser mestre na arte de ensinar e consolar. Sem sua presença Senhor, jamais eu teria chegado até aqui.

Ao professor e orientador Wilson Sergio Venturini que foi sempre solícito na orientação, acreditou em mim e me ajudou demais em todos os sentidos. Obrigado por tudo “chefe”.

Agradeço à minha querida esposa Camila pelo seu apoio sempre enérgico, sincero e por se dispor a largar toda sua vida aqui para me acompanhar até a França. Tudo em prol da ciência. Amo você.

Aos meus pais João Roberto e Angela Maria que sempre me ensinaram o caminho certo, com amor, carinho e dedicação. Sua ajuda e presença foram indispensáveis. Amo vocês.

Também aos meus irmãos Leonardo e Camila pelas conversas, incentivos, preocupações e momentos maravilhosos. Estarei sempre perto. Amo vocês.

Ao meu primo Rafael pelo grande auxílio na elaboração dos textos em inglês dos artigos e da tese. Valeu!

Não posso deixar de lembrar de minhas queridas avós Ivone e Maria da Glória. Sempre me incentivaram a continuar firme na pesquisa, pelos cafés com bolo de fubá, tortas e carinhos e mimos de vovós. Também amo vocês.

Aos meus sogros Carlos Camilo e Eva Aparecida pelo interesse e acolhida em sua casa nos vários dias de trabalho. Também os amo.

À minha comunidade Leão de Judá por orar por mim e estar sempre presente. Sei que a amizade em Cristo será para sempre. Em especial ao Fabiano e Mateus pela grande amizade, orações, grupos e churrascos.

Aos professores Alaa Chateaneuf e Philippe Bressolette por me receberem na França durante o estágio de 1 ano e por serem sempre muito atenciosos e dispostos a compartilhar seu conhecimento e experiência para o bom desenvolvimento do trabalho e pela estada em terras européias.

Ao professor André Teófilo Beck pelo exame de qualificação, pelas diversas conversas enriquecedoras sobre confiabilidade estrutural e pela amizade conquistada.

Ao professor José Luiz Antunes de Oliveira e Souza por participar do exame de qualificação e por suas considerações que melhoraram a pesquisa.

Aos professores Humberto Breves Coda e José Samuel Giongo pelos “papos” sobre pesquisa e pelo grande incentivo.

Agradeço aos companheiros de departamento pelo convívio sempre agradável e tranquilo. Em especial, aos amigos Edson Leonel, Walter Oliveira, Eduardo Toledo, Fernando Menezes e Edmar Borges pelas conversas, risadas e idéias compartilhadas.

Aos colegas do Polytech’Clermont Ferrand na França e em especial à Priscila, Wallace, Edson, Tânia e Regina (todos Brasil) pela grande força que nos deram, Jinane (Líbano), Hassan e Omar (Tunísia), Miguel (Chile), Kien (Vietnã), Emílio (Colômbia), Facundo e Eduardo (“hermanos” argentinos) e Badaoui (Argélia).

Aos professores e demais funcionários do SET na EESC-USP pela dedicação e auxílio durante minha formação.

À FAPESP pela bolsa de estudos e apoio financeiro no Brasil e à CAPES pela bolsa durante o estágio no exterior.



*E disse Jesus: “...não tenham medo, pois eu estarei convosco todos os dias até os confins do mundo.” (Mt 28,20)*



## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS.....	xi
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT .....	xiv
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	15
1.2 OBJETIVOS.....	15
1.3 MÉTODOS UTILIZADOS .....	16
1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE .....	19
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>21</b>
2.1 GENERALIDADES .....	21
2.2 MODELAGEM MECÂNICA DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO .....	21
2.2.1 <i>Comportamento do concreto à tração</i> .....	22
2.2.1.1 O conceito dos estádios do concreto.....	22
2.2.1.2 O modelo da ABNT NBR 6118:2003 .....	24
2.2.1.3 O modelo do CEB – Bulletin 158 (1985).....	26
2.2.1.4 Modelos com leis constitutivas modificadas .....	30
2.2.2 <i>Comportamento do concreto ao cisalhamento</i> .....	35
2.2.2.1 A analogia da treliça clássica.....	36
2.2.2.2 A analogia da treliça generalizada.....	37
2.2.2.3 Mecanismos complementares: introdução.....	39
2.2.2.4 Mecanismos complementares: engrenamento dos agregados .....	42
2.2.2.5 Mecanismos complementares: efeito de pino.....	46
2.2.3 <i>Considerações sobre a revisão bibliográfica</i> .....	54
2.3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL E OTIMIZAÇÃO .....	58
2.3.1 <i>Aspectos gerais</i> .....	58
2.3.2 <i>Alguns dos trabalhos pioneiros sobre confiabilidade</i> .....	58
2.3.3 <i>Métodos aproximados, confiabilidade de componentes e de sistemas</i> .....	61
2.3.4 <i>Métodos de otimização e suas aplicações na engenharia</i> .....	66
2.3.5 <i>Acoplamento confiabilidade-otimização</i> .....	70
2.3.6 <i>Considerações sobre a revisão bibliográfica</i> .....	75
<b>3. O MODELO MECÂNICO .....</b>	<b>79</b>
3.1 GENERALIDADES .....	79
3.2 TEORIA DE TIMOSHENKO: ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO .....	79
3.2.1 <i>Dedução da matriz de rigidez do elemento de viga</i> .....	81
3.2.2 <i>Extensão para a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano</i> .....	88
3.3 NÃO-LINEARIDADE DOS MATERIAIS.....	91
3.3.1 <i>Concreto</i> .....	91
3.3.2 <i>Aço</i> .....	99
3.4 NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA .....	102
3.4.1 <i>Cinemática adotada</i> .....	103
3.4.2 <i>Campo de deformações</i> .....	104
3.4.3 <i>Relação entre deformação e tensão</i> .....	105

3.4.4	<i>Matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas</i> .....	106
3.4.5	<i>Forma lagrangeana atualizada</i> .....	109
3.5	MODELOS DE RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO.....	110
3.5.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	110
3.5.2	<i>Contribuição do concreto e o engrenamento dos agregados</i> .....	112
3.5.3	<i>Contribuição da armadura transversal</i> .....	113
3.5.4	<i>Contribuição da armadura longitudinal</i> .....	117
3.5.5	<i>A parcela corretora de força cortante</i> .....	121
3.6	ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS.....	122
3.6.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	122
3.6.2	<i>Combinação entre os modelos de não-linearidades</i> .....	124
3.6.3	<i>Integração numérica</i> .....	126
3.6.4	<i>Estratégia de solução do problema não-linear</i> .....	129
3.7	DETERMINAÇÃO DA CARGA ÚLTIMA OU CARGA DE VIOLAÇÃO DE ESTADO LIMITE.....	130
3.7.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	130
3.7.2	<i>ELU – esgotamento da capacidade resistente da seção</i> .....	131
3.7.3	<i>ELU – perda de estabilidade global</i> .....	133
3.7.4	<i>ELS – deformações excessivas</i> .....	133
3.7.5	<i>Algoritmo de busca</i> .....	135
3.8	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	137
3.8.1	<i>Exemplo 1</i> .....	137
3.8.2	<i>Exemplo 2</i> .....	138
3.8.3	<i>Exemplo 3</i> .....	140
3.8.4	<i>Exemplo 4</i> .....	142
3.8.5	<i>Exemplo 5</i> .....	143
3.8.6	<i>Exemplo 6</i> .....	145
3.8.7	<i>Exemplo 7</i> .....	149
3.8.8	<i>Exemplo 8</i> .....	154
3.8.9	<i>Exemplo 9</i> .....	156
3.8.10	<i>Exemplo 10</i> .....	159
3.8.11	<i>Exemplo 11</i> .....	163
<b>4.</b>	<b>MODELOS DE CONFIABILIDADE.....</b>	<b>167</b>
4.1	GENERALIDADES.....	167
4.2	ESTATÍSTICA APLICADA.....	167
4.2.1	<i>Variáveis aleatórias</i> .....	168
4.2.2	<i>Funções de densidade de probabilidades (FDP)</i> .....	168
4.2.3	<i>Funções de distribuição acumulada de probabilidades (FDA)</i> .....	169
4.2.4	<i>Média, variância e desvio-padrão de uma variável aleatória</i> .....	170
4.3	ESTADOS LIMITES.....	171
4.4	PROBABILIDADE DE FALHA.....	173
4.5	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	175
4.6	COMPONENTES E SISTEMAS.....	176
4.6.1	<i>Idealização em série</i> .....	177
4.6.2	<i>Idealização em paralelo</i> .....	177
4.6.3	<i>Limites de primeira e segunda ordem</i> .....	179
4.7	MÉTODOS DE CÁLCULO.....	182
4.7.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	182
4.7.2	<i>Métodos de simulação</i> .....	182
4.7.3	<i>Métodos aproximados</i> .....	186

4.7.4	<i>FORM e SORM</i> .....	188
4.7.5	<i>Técnica dos gradientes numéricos</i> .....	189
4.7.6	<i>Algoritmo de busca HLRF</i> .....	190
4.7.7	<i>Método da superfície de resposta</i> .....	191
4.7.7.1	Polinômio aproximador .....	193
4.7.7.2	Regressão por mínimos quadrados .....	195
4.7.7.3	Evolução das superfícies de respostas .....	197
4.8	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	199
4.8.1	<i>Exemplo 1</i> .....	199
4.8.2	<i>Exemplo 2</i> .....	202
4.8.3	<i>Exemplo 3</i> .....	206
4.8.4	<i>Exemplo 4</i> .....	209
4.8.5	<i>Exemplo 5</i> .....	214
4.8.6	<i>Exemplo 6</i> .....	220
4.8.7	<i>Exemplo 7</i> .....	230
<b>5.</b>	<b>MODELOS DE OTIMIZAÇÃO</b> .....	<b>239</b>
5.1	GENERALIDADES .....	239
5.2	CONCEITOS IMPORTANTES.....	240
5.2.1	<i>Formulação de um problema de otimização</i> .....	240
5.2.2	<i>Propriedades dos pontos de mínimo</i> .....	241
5.2.3	<i>Ponto de mínimo global</i> .....	242
5.2.4	<i>Ponto de mínimo local</i> .....	242
5.2.5	<i>Condições necessárias e suficiente</i> .....	243
5.2.6	<i>Restrições ativas e inativas</i> .....	243
5.3	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TIPO SQP .....	244
5.4	OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM ELEMENTO DE BARRA .....	245
5.4.1	<i>Hipóteses do modelo</i> .....	245
5.4.2	<i>Compatibilidade de deformações</i> .....	246
5.4.3	<i>Intervalo de variação de <math>\beta_x</math></i> .....	249
5.4.4	<i>Equações de equilíbrio</i> .....	252
5.4.5	<i>Formulação do problema de otimização</i> .....	255
5.4.5.1	Elementos horizontais .....	256
5.4.5.2	Elementos verticais ou inclinados .....	257
5.5	OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS .....	260
5.5.1	<i>Tipo de abordagem</i> .....	260
5.5.2	<i>Considerações sobre a implementação computacional</i> .....	262
5.6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	266
5.6.1	<i>Exemplo 1</i> .....	266
5.6.2	<i>Exemplo 2</i> .....	270
5.6.3	<i>Exemplo 3</i> .....	273
5.6.4	<i>Exemplo 4</i> .....	279
<b>6.</b>	<b>OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE</b> .....	<b>287</b>
6.1	GENERALIDADES .....	287
6.2	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE-ALVO, $\beta_A$ .....	289
6.3	FORMULAÇÃO CLÁSSICA DOS MODELOS TIPO RBDO .....	291
6.3.1	<i>Formulação RBDO para componentes</i> .....	291
6.3.2	<i>Formulação RBDO para sistemas</i> .....	292
6.3.3	<i>Formulação RBDO mista: componentes e sistema</i> .....	294

6.3.4	<i>Fluxograma Geral da Formulação RBDO</i> .....	295
6.4	MODELO SF-RBDO (SAFETY FACTORS).....	296
6.4.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	296
6.4.2	<i>Fluxograma do modelo SF-RBDO</i> .....	297
6.4.3	<i>Calibração dos coeficientes parciais de segurança</i> .....	299
6.4.4	<i>Considerações especiais sobre o modelo</i> .....	301
6.5	MODELO BS-RBDO (BETA SURFACE).....	303
6.5.1	<i>Aspectos gerais</i> .....	303
6.5.2	<i>Fluxograma do modelo BS-RBDO</i> .....	305
6.5.3	<i>Construção das superfícies de confiabilidade</i> .....	306
6.5.4	<i>Considerações especiais sobre o modelo</i> .....	307
6.6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	308
6.6.1	<i>Exemplo 1</i> .....	308
6.6.2	<i>Exemplo 2</i> .....	313
6.6.3	<i>Exemplo 3</i> .....	317
6.6.4	<i>Exemplo 4</i> .....	322
<b>7.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>325</b>
7.1	CONCLUSÕES.....	325
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	333
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>335</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2-1 – ESTÁDIOS DE COMPORTAMENTO DO CONCRETO .....	23
FIGURA 2-2 – DIAGRAMA TENSÃO × DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À TRAÇÃO (ABNT NBR 6118:2003) .....	24
FIGURA 2-3 – TENSÕES NORMAIS $\sigma$ E DE CISALHAMENTO $\tau$ EM UM ELEMENTO FLETIDO DE CONCRETO ARMADO ..	27
FIGURA 2-4 – DEFORMAÇÕES MÉDIAS AO LONGO DA SEÇÃO.....	28
FIGURA 2-5 – DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA PARA FLEXÃO SIMPLES (CEB-158, 1985).....	29
FIGURA 2-6 – LEI CONSTITUTIVA À TRAÇÃO ADOTADA PARA O CONCRETO (TORRES ET AL. 2004) .....	31
FIGURA 2-7 – ANALOGIA DA TRELIÇA CLÁSSICA DE RITTER-MÖRSCH.....	37
FIGURA 2-8 – VARIACÃO DA TENSÃO NA ARMADURA TRANSVERSAL DE UMA VIGA EM CONCRETO ARMADO .....	39
FIGURA 2-9 – MECANISMOS COMPLEMENTARES NA TRANSFERÊNCIA DO CISALHAMENTO (HE & KWAN 2001).....	41
FIGURA 2-10 – MODELO FÍSICO PARA O ESTUDO DO ENGRENAMENTO DOS AGREGADOS (WALRAVEN 1981).....	43
FIGURA 2-11 – ÁREA DE CONTATO MATRIZ-AGREGADO E AS CONDIÇÕES DE TENSÃO (WALRAVEN 1981).....	43
FIGURA 2-12 – DESLOCAMENTOS E TENSÕES NAS FACES DA FISSURA (DEI POLI ET AL. 1987) .....	44
FIGURA 2-13 – EFEITO DE PINO DA ARMADURA NAS FACES DAS FISSURAS (HE & KWAN 2001).....	46
FIGURA 2-14 – HIPÓTESE PARA O CÁLCULO DO DESLOCAMENTO DE PINO (HE & KWAN 2001).....	53
FIGURA 3-1 – CINEMÁTICA DO ELEMENTO DE VIGA DE TIMOSHENKO .....	81
FIGURA 3-2 – CONVENÇÕES DE SINAIS DO ELEMENTO FINITO DE VIGA.....	82
FIGURA 3-3 – I: COMPORTAMENTO EXPERIMENTAL DO CONCRETO, II: MODELO DE DANO DE MAZARS (1984).....	93
FIGURA 3-4 – DIAGRAMA TENSÃO DE COMPRESSÃO × DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO (20MPa).....	98
FIGURA 3-5 – DIAGRAMA TENSÃO DE TRAÇÃO × DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO (20MPa).....	98
FIGURA 3-6 – MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PARA O AÇO: ENCRUAMENTO ISÓTROPICO (A) E CINEMÁTICO (B).....	100
FIGURA 3-7 – REPRESENTAÇÃO DA CINEMÁTICA ADOTADA .....	104
FIGURA 3-8 – ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO COM SISTEMA LOCAL E GLOBAL DE COORDENADAS .....	107
FIGURA 3-9 – RELAÇÃO TENSÃO × DEFORMAÇÃO UNIDIMENSIONAL PARA O MODELO DE DANO.....	115
FIGURA 3-10 – ESTADO DE DEFORMAÇÃO PARA AS BIELAS DE CONCRETO E ARMADURA TRANSVERSAL .....	116
FIGURA 3-11 – DISTRIBUIÇÃO DE FORÇAS PARA UM ELEMENTO FISSURADO EM CONCRETO ARMADO.....	117
FIGURA 3-12 – ESQUEMA DE AÇÃO DO EFEITO DE PINO .....	118
FIGURA 3-13 – HIPÓTESE DE VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA E O EFEITO DE PINO.....	119
FIGURA 3-14 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO: (A) CONCRETO E (B) AÇO .....	127
FIGURA 3-15 – ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA 1 INCREMENTO DE CARGA.....	130
FIGURA 3-16 – IDEALIZAÇÕES ADOTADAS PARA O CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS RELATIVOS .....	134
FIGURA 3-17 – FLUXOGRAMA DO MODELO MECÂNICO E BUSCA DA CARGA ÚLTIMA DE UMA ESTRUTURA .....	136
FIGURA 3-18 – VIGA BIAPOIADA COM FORÇA CONCENTRADA NO MEIO DO VÃO.....	137
FIGURA 3-19 – VIGA ENGASTADA COM CARGA CONCENTRADA A 1 METRO DO BALANÇO .....	139
FIGURA 3-20 – VIGA HIPERESTÁTICA COM MOMENTO FLETOR APLICADO NO APOIO .....	140
FIGURA 3-21 – VIGA EM BALANÇO COM FORÇA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE LIVRE .....	142
FIGURA 3-22 – VIGA BIAPOIADA COM MOMENTO CONCENTRADO NO MEIO DO VÃO.....	144
FIGURA 3-23 – DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS DA VIGA .....	144
FIGURA 3-24 – VIGA ANALISADA: DIMENSÕES REAIS (EM CM) E APROXIMAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO .....	145

FIGURA 3-25 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DA VIGA ANALISADA.....	147
FIGURA 3-26 – DEFORMAÇÕES NA ARMADURA TRANSVERSAL NA SEÇÃO AA .....	148
FIGURA 3-27 – VIGA BIPOIADA ANALISADA: GEOMETRIA (MEDIDAS EM CM) E CARREGAMENTOS .....	149
FIGURA 3-28 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO PARA VIGA COM 3 $\phi$ 10MM.....	150
FIGURA 3-29 – DIAGRAMA MOMENTO $\times$ CURVATURA PARA VIGA COM 3 $\phi$ 10MM.....	151
FIGURA 3-30 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO PARA VIGA COM 5 $\phi$ 10MM.....	152
FIGURA 3-31 – DIAGRAMA MOMENTO $\times$ CURVATURA PARA A VIGA COM 5 $\phi$ 10MM .....	152
FIGURA 3-32 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO PARA VIGA COM 7 $\phi$ 10MM.....	153
FIGURA 3-33 – DIAGRAMA MOMENTO $\times$ CURVATURA PARA VIGA COM 7 $\phi$ 10MM.....	153
FIGURA 3-34 – COLUNA BIPOIADA ANALISADA POR EL-METWALLY ET AL (1990).....	154
FIGURA 3-35 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DA COLUNA ANALISADA .....	155
FIGURA 3-36 – PÓRTICO ANALISADO.....	157
FIGURA 3-37 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DO NÓ 11 DO PÓRTICO .....	158
FIGURA 3-38 – DETALHES DAS VIGAS ANALISADAS V1 E V2 (UNIDADES EM MILÍMETROS) .....	160
FIGURA 3-39 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DA VIGA V1 .....	161
FIGURA 3-40 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DA VIGA V2 .....	161
FIGURA 3-41 – GEOMETRIA E CARREGAMENTOS DO PÓRTICO ANALISADO.....	164
FIGURA 3-42 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO HORIZONTAL DO PONTO DE APLICAÇÃO DA FORÇA .....	165
FIGURA 4-1 – FDA E FDP DE VA DISCRETAS E CONTÍNUAS.....	170
FIGURA 4-2 – REGIÃO SEGURA E DE FALHA NO ESPAÇO FÍSICO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	173
FIGURA 4-3 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA PROBABILIDADE DE FALHA.....	174
FIGURA 4-4 – DEFINIÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE NO ESPAÇO NORMAL-PADRÃO .....	176
FIGURA 4-5 – IDEALIZAÇÃO DE SISTEMAS EM SÉRIE E PARALELO.....	178
FIGURA 4-6 – LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE DE DOIS MODOS DE FALHA .....	181
FIGURA 4-7 – SIMULAÇÃO DE MC SIMPLES E MC COM AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA.....	185
FIGURA 4-8 – APROXIMAÇÕES DO TIPO FORM E SORM .....	189
FIGURA 4-9 – PLANOS DE EXPERIÊNCIA UTILIZADOS.....	192
FIGURA 4-10 – BUSCA DO PONTO DE PROJETO: ABORDAGEM CLÁSSICA .....	198
FIGURA 4-11 – BUSCA DO PONTO DE PROJETO: ABORDAGEM ADAPTATIVA COM REDIVISÃO DO PLANO .....	199
FIGURA 4-12 – CURVAS DA FUNÇÃO ANALÍTICA E DAS SUPERFÍCIES DE FALHA PARA SR1 E WR1.....	203
FIGURA 4-13 – CONVERGÊNCIA DAS ANÁLISES DE CONFIABILIDADE .....	205
FIGURA 4-14 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE OBTIDOS POR TODOS OS MÉTODOS CONSIDERADOS .....	205
FIGURA 4-15 – CURVAS DA FUNÇÃO ANALÍTICA E DAS SUPERFÍCIES DE FALHA PARA SR1, WR1 E SR2 .....	207
FIGURA 4-16 – CONVERGÊNCIA DAS ANÁLISES DE CONFIABILIDADE .....	208
FIGURA 4-17 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE OBTIDOS POR TODOS OS MÉTODOS CONSIDERADOS .....	208
FIGURA 4-18 – VIGA CONSIDERADA NA ANÁLISE .....	209
FIGURA 4-19 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DAS VIGAS.....	210
FIGURA 4-20 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS DETERMINÍSTICAS ENTRE OS MODELOS .....	211
FIGURA 4-21 – CONVERGÊNCIA DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	212
FIGURA 4-22 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS PROBABILÍSTICAS ENTRE OS MODELOS .....	213



FIGURA 4-23 – PÓRTICO ANALISADO, CARREGAMENTOS E GEOMETRIA .....	214
FIGURA 4-24 – RESULTADOS DOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE PARA O MODO DA FALHA 1 .....	216
FIGURA 4-25 – RESULTADOS DOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE PARA O MODO DA FALHA 2 .....	216
FIGURA 4-26 – DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE OS RESULTADOS.....	217
FIGURA 4-27 – NÚMERO DE CHAMADAS DO MODELO MECÂNICO EM ELEMENTOS FINITOS PARA CADA MÉTODO .	218
FIGURA 4-28 – GEOMETRIA, CARREGAMENTO E DISCRETIZAÇÃO DO PÓRTICO CONSIDERADO .....	220
FIGURA 4-29 – MODOS DE FALHA POSSÍVEIS DO PÓRTICO .....	221
FIGURA 4-30 – CONFIGURAÇÃO DEFORMADA DA ESTRUTURA .....	222
FIGURA 4-31 – DIAGRAMA DE FORÇA NORMAL.....	223
FIGURA 4-32 – DIAGRAMA DE FORÇA CORTANTE.....	223
FIGURA 4-33 – DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.....	224
FIGURA 4-34 – DIMENSÕES E DETALHAMENTO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS .....	225
FIGURA 4-35 – DIAGRAMA FORÇA × DESLOCAMENTO VERTICAL DO NÓ 21.....	226
FIGURA 4-36 – DIAGRAMA FORÇA × DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 11 .....	226
FIGURA 4-37 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO LG.....	227
FIGURA 4-38 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO NLG.....	227
FIGURA 4-39 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO TSD-NLG.....	228
FIGURA 4-40 – COMPARAÇÃO ENTRE OS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE .....	229
FIGURA 4-41 – GEOMETRIA E DIMENSÕES DA ESTRUTURA ANALISADA.....	230
FIGURA 4-42 – POSICÃO DOS 14 MODOS DE FALHA DO PÓRTICO.....	231
FIGURA 4-43 – VALORES DE CARGA ÚLTIMA DE CADA MODO DE FALHA.....	232
FIGURA 4-44 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DO MEIO DO VÃO DA VIGA INFERIOR .....	233
FIGURA 4-45 – COMPARAÇÃO ENTRE OS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE DE CADA MODO DE FALHA .....	233
FIGURA 4-46 – CONVERGÊNCIA DA RESISTÊNCIA DO CONCRETO PARA CADA MODO DE FALHA.....	234
FIGURA 4-47 – CONVERGÊNCIA DA RESISTÊNCIA DO AÇO PARA CADA MODO DE FALHA .....	235
FIGURA 4-48 – CONVERGÊNCIA DA FORÇA APLICADA PARA CADA MODO DE FALHA.....	235
FIGURA 4-49 – SENSIBILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PARA CADA MODO DE FALHA .....	236
FIGURA 4-50 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO MODELO LG .....	237
FIGURA 4-51 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO MODELO NLG .....	237
FIGURA 4-52 – EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE CONSIDERANDO MODELO TSD-NLG.....	237
FIGURA 5-1 – MÍNIMOS LOCAIS E GLOBAL DE UMA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL .....	242
FIGURA 5-2 – SEÇÃO TRANSVERSAL GENÉRICA DE UM ELEMENTO DE BARRA EM CONCRETO ARMADO.....	246
FIGURA 5-3 – DIAGRAMA GENÉRICO DE DEFORMAÇÕES .....	247
FIGURA 5-4 – REGIÕES POSSÍVEIS DE DEFORMAÇÃO DA SEÇÃO.....	249
FIGURA 5-5 – TENSÕES, DEFORMAÇÕES E FORÇAS RESULTANTES .....	252
FIGURA 5-6 – CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS DE ARMADURA PARA ELEMENTOS VERTICAIS OU INCLINADOS .....	259
FIGURA 5-7 – CONVENÇÃO PARA AS DIMENSÕES DA SEÇÃO TRANSVERSAL DOS ELEMENTOS .....	259
FIGURA 5-8 – DIVISÃO DA ESTRUTURA EM TRECHOS PARA OTIMIZAÇÃO .....	261
FIGURA 5-9 – FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA .....	263
FIGURA 5-10 – GEOMETRIA DA VIGA OTIMIZADA.....	267

FIGURA 5-11 – VARIAÇÃO DO CUSTO EM FUNÇÃO DA ALTURA DA VIGA .....	268
FIGURA 5-12 – COMPARAÇÃO GRÁFICA ENTRE AS RESPOSTAS ÓTIMAS .....	270
FIGURA 5-13 – RELAÇÃO ENTRE ALTURA DA SEÇÃO E CUSTO POR METRO DE PILAR .....	272
FIGURA 5-14 – RELAÇÃO ENTRE ALTURA DA SEÇÃO E POSIÇÃO RELATIVA DA LINHA NEUTRA.....	273
FIGURA 5-15 – RELAÇÃO ENTRE ALTURA DA SEÇÃO E ÁREA DE ARMADURA TOTAL .....	273
FIGURA 5-16 – ESTRUTURA CONSIDERADA NESTE EXEMPLO.....	274
FIGURA 5-17 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE OTIMIZAÇÃO .....	276
FIGURA 5-18 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DO PONTO DE APLICAÇÃO DA FORÇA.....	277
FIGURA 5-19 – CONVERGÊNCIA DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	278
FIGURA 5-20 – COORDENADAS DO PONTO DE PROJETO NO ESPAÇO FÍSICO .....	279
FIGURA 5-21 – ESTRUTURA ANALISADA, DISCRETIZAÇÃO E MODO DE FALHA CONSIDERADO .....	280
FIGURA 5-22 – DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES DO PÓRTICO NA PRIMEIRA ITERAÇÃO .....	282
FIGURA 5-23 – HISTÓRIA DE CONVERGÊNCIA DA FUNÇÃO CUSTO TOTAL DO PÓRTICO .....	283
FIGURA 5-24 – CONFIGURAÇÕES ESTRUTURAIS ÓTIMAS DO PÓRTICO.....	283
FIGURA 5-25 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE PARA OS DOIS MODOS DE FALHA .....	285
FIGURA 6-1 – FLUXOGRAMA PARA ANÁLISES DO TIPO RBDO.....	295
FIGURA 6-2 – FLUXOGRAMA DO MODELO SF-RBDO.....	298
FIGURA 6-3 – APROXIMAÇÃO PARA O ÍNDICE DE CONFIABILIDADE-ALVO .....	300
FIGURA 6-4 – VETOR EXATO DOS CO-SENOS DIRETORES PARA DOIS MODOS DE FALHA .....	302
FIGURA 6-5 – FLUXOGRAMA DO MODELO BS-RBDO .....	305
FIGURA 6-6 – EVOLUÇÃO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO COM SUPERFÍCIE DE CONFIABILIDADE .....	308
FIGURA 6-7 – ESQUEMA ESTRUTURAL, DISCRETIZAÇÃO E VARIÁVEIS DE OTIMIZAÇÃO .....	310
FIGURA 6-8 – HISTÓRICO DE CONVERGÊNCIA E COEFICIENTES PARCIAIS DE SEGURANÇA .....	311
FIGURA 6-9 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DA VIGA DO PONTO LOCALIZADO NO MEIO DO VÃO.....	312
FIGURA 6-10 – ESQUEMA ESTRUTURAL, DISCRETIZAÇÃO E VARIÁVEIS DE OTIMIZAÇÃO .....	313
FIGURA 6-11 – HISTÓRICO DE CONVERGÊNCIA E COEFICIENTES PARCIAIS DE SEGURANÇA .....	314
FIGURA 6-12 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DO PONTO LOCALIZADO NO MEIO DO PRIMEIRO VÃO .....	315
FIGURA 6-13 – CONVERGÊNCIA DOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE PARA DOIS MODOS DE FALHA .....	316
FIGURA 6-14 – ESTRUTURA ANALISADA, DISCRETIZAÇÃO E MODOS DE FALHA .....	318
FIGURA 6-15 – CONVERGÊNCIA DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE E CUSTO TOTAL DO PÓRTICO.....	319
FIGURA 6-16 – COEFICIENTES PARCIAIS CALIBRADOS PARA BETA ALVO DE 4,2.....	321
FIGURA 6-17 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO PARA O PONTO CENTRAL NO MEIO DO VÃO DA VIGA.....	321
FIGURA 6-18 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE PARA DOIS MODOS DE FALHA DO PÓRTICO.....	322
FIGURA 6-19 – ÁBACO PARA DIMENSÕES DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	324
FIGURA 6-20 – ÁBACOS PARA POSIÇÃO RELATIVA DA LINHA NEUTRA E COEFICIENTES PARCIAIS .....	324

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3-1 – DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E ROTAÇÕES DOS NÓS .....	138
TABELA 3-2 – DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E ROTAÇÕES DOS NÓS .....	139
TABELA 3-3 – TEORIA EXATA DE TIMOSHENKO <i>VERSUS</i> VALORES NUMÉRICOS .....	140
TABELA 3-4 – DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E ROTAÇÕES DOS NÓS .....	141
TABELA 3-5 – TEORIA EXATA DE TIMOSHENKO <i>VERSUS</i> VALORES NUMÉRICOS .....	141
TABELA 3-6 – COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS PARA A VIGA EM BALANÇO .....	143
TABELA 3-7 – DIMENSÕES DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS E CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS .....	146
TABELA 3-8 – PROPRIEDADES E PARÂMETROS DA ANÁLISE .....	146
TABELA 3-9 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E PARÂMETROS DA ANÁLISE .....	150
TABELA 3-10 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E PARÂMETROS DA ANÁLISE .....	155
TABELA 3-11 – VALORES DE CARGA ÚLTIMA PARA O PILAR ANALISADA .....	156
TABELA 3-12 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E PARÂMETROS DA ANÁLISE .....	157
TABELA 3-13 – RESULTADOS DA ANÁLISE EM TERMOS DE CARGA ÚLTIMA DA ESTRUTURA .....	158
TABELA 3-14 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E PARÂMETROS DA ANÁLISE PARA AMBAS AS VIGAS .....	160
TABELA 3-15 – VALORES DAS CARGAS ÚLTIMAS PARA AS VIGAS V1 E V2.....	163
TABELA 4-1 – POLINÔMIOS DE PRIMEIRO GRAU .....	193
TABELA 4-2 – POLINÔMIOS DE SEGUNDO GRAU SEM TERMOS CRUZADOS .....	194
TABELA 4-3 – POLINÔMIOS DE SEGUNDO GRAU COM TERMOS CRUZADOS .....	194
TABELA 4-4 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	201
TABELA 4-5 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	204
TABELA 4-6 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	207
TABELA 4-7 – PARÂMETROS ADOTADOS NA ANÁLISE .....	210
TABELA 4-8 – EFICIÊNCIA NUMÉRICA DOS MÉTODOS DE CONFIABILIDADE .....	213
TABELA 4-9 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ADOTADAS .....	215
TABELA 4-10 – SENSIBILIDADES DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	219
TABELA 4-11 – VALORES DE FORÇA ÚLTIMA (EM kN) PARA CADA MODO DE FALHA .....	226
TABELA 4-12 – PONTOS DE PROJETO, SENSIBILIDADES DAS VARIÁVEIS E PROBABILIDADES DE FALHA .....	228
TABELA 4-13 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA ANÁLISE.....	231
TABELA 5-1 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA ANÁLISE MECÂNICA E DE OTIMIZAÇÃO.....	268
TABELA 5-2 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS ÓTIMAS DO PROBLEMA .....	269
TABELA 5-3 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA ANÁLISE DE OTIMIZAÇÃO .....	271
TABELA 5-4 – RESULTADOS PARA N = 1000kN E M = 1000kN.CM .....	272
TABELA 5-5 – RESULTADOS PARA N = 1500kN E M = 4500kN.CM .....	272
TABELA 5-6 – PARÂMETROS MECÂNICOS E DE OTIMIZAÇÃO DA ANÁLISE .....	275
TABELA 5-7 – RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO E DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DA VIGA .....	275
TABELA 5-8 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UTILIZADAS NA ANÁLISE .....	277
TABELA 5-9 – PARÂMETROS MECÂNICOS E DE OTIMIZAÇÃO DA ANÁLISE .....	281
TABELA 5-10 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UTILIZADAS NA ANÁLISE .....	282
TABELA 6-1 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE-ALVO E PROBABILIDADES DE FALHA PARA ELU.....	289

TABELA 6-2 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE-ALVO E PROBABILIDADES DE FALHA PARA ELS .....	290
TABELA 6-3 – PROPRIEDADES E PARÂMETROS UTILIZADOS NA ANÁLISE MECÂNICA .....	309
TABELA 6-4 – RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	310
TABELA 6-5 – RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO PARA O MODO MAIS PROVÁVEL DE FALHA .....	314
TABELA 6-6 – PARÂMETROS MECÂNICOS E DE OTIMIZAÇÃO DA ANÁLISE .....	319
TABELA 6-7 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UTILIZADAS NA ANÁLISE .....	319
TABELA 6-8 – RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO PARA O MODO DE FALHA CONSIDERADO .....	320

## RESUMO

NOGUEIRA, C.G. *Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

Este trabalho apresenta desenvolvimentos na modelagem mecânica de estruturas de barras em concreto armado, bem como no acoplamento entre modelos de confiabilidade e otimização do tipo RBDO para obtenção de dimensões ótimas, respeitando os requisitos de segurança especificados em projeto. Quanto à modelagem mecânica via Método dos Elementos Finitos (MEF), além do comportamento não-linear geométrico e dos materiais, foi considerada a contribuição dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, dados pelo engrenamento de agregados e efeito de pino das armaduras longitudinais. Além disso, um modelo simplificado que avalia a contribuição da armadura transversal também foi proposto. Foi desenvolvida uma formulação de otimização que deixa a posição da linha neutra livre, ao contrário de formulações existentes. Esta formulação resultou em projetos mais econômicos dos que aqueles encontrados na literatura. Na questão do acoplamento de confiabilidade e otimização, foram exploradas melhorias no Método de Superfície de Resposta e no acoplamento direto via Método de Confiabilidade de Primeira Ordem e Técnica dos Gradientes Numéricos. Estas resultaram em maior precisão dos resultados e aumento na velocidade de convergência. Os modelos mecânicos, incluindo análise não-linear e mecanismos complementares, a formulação de otimização e as técnicas de confiabilidade foram implementados em um programa computacional para dimensionamento ótimo de elementos em concreto armado. O programa foi utilizado na resolução de vários problemas-exemplo. Verificou-se que a consideração dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento produziram acréscimo na carga última, quando comparadas com as respostas sem tais efeitos. Verificou-se também que os mesmos mecanismos produziram um aumento, até mais significativo, nos índices de confiabilidade obtidos. As dimensões ótimas de elementos estruturais também foram comparadas, considerando-se modelos lineares e não-lineares dos materiais. O estudo mostrou que os custos da estrutura otimizada são menores, quando se considera os efeitos de comportamento não-linear dos materiais.

**Palavras-chave:** método dos elementos finitos; análise não-linear; efeito de pino; engrenamento de agregados; concreto armado; confiabilidade; otimização; acoplamento RBDO.

## ABSTRACT

NOGUEIRA, C.G. *Development of mechanical, reliability and optimization models for application in reinforced concrete structures.* Ph.D Thesis, School of Engineering São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2010.

This work presents some developments in the mechanical modeling of reinforced concrete bar structures, as well in the coupling of reliability and RBDO optimization models, with the purpose of obtaining optimal dimensions considering the safety requirements specified in design. As for the mechanical modeling via Finite Element Method (FEM), in addition to geometrical and material nonlinear behaviors, the contribution of shear resistance complementary mechanisms (aggregate interlock and dowel action of longitudinal reinforcement) was taken into account. Moreover, a simplified model that evaluates the contribution of shear reinforcement was also proposed. In an improvement of existing formulations, an optimization scheme was developed which leaves the position of the neutral axis free. This improvement resulted in more economical cross-sections, than those found in the literature. With respect to the coupling of reliability and optimization methods, improvements were sought in the Response Surface Method and in the direct coupling via First Order Reliability and Numerical Gradients methods. These improvements resulted in greater precision and in increased convergence speed. The mechanical models, including non linear effects and complementary mechanisms, the optimization and reliability formulations were implemented in a computational code for the optimum design of reinforced concrete structures. The program was used to solve a number of example problems. It was found that the complementary mechanisms resulted in an increase of ultimate loads, when compared to the response obtained without these effects. These mechanisms also resulted in an even greater increase of the elements reliability. Optimal dimensions of the structural elements were also compared, considering linear and non-linear material models. The cost of the optimum structure was found to be smaller when non linear effects are taken into account.

**Keywords:** finite element method; non-linear analysis; dowel action; aggregate interlock; reinforced concrete; reliability; optimization; RBDO coupling.

## **1. Introdução**

---

---

### **1.1 Considerações Iniciais**

Neste trabalho é desenvolvido um programa computacional para a análise de estruturas de vigas, pilares e pórticos planos em concreto armado, com a possibilidade de determinar as dimensões ótimas dos elementos estruturais impondo-se a segurança desejada. A linha de pesquisa é a mesma adotada no trabalho de Nogueira (2005), dando continuidade com novos desenvolvimentos tanto no modelo mecânico, quanto nos modelos de confiabilidade e otimização.

A economia e a segurança são objetivos que competem entre si na concepção de novas construções. O balanço entre esses objetivos é feito através de procedimentos semi-probabilísticos, conforme as diversas recomendações de normas e códigos de projeto de estruturas. Dessa forma, admite-se que a estrutura possa ser concebida a partir da obtenção das dimensões de seus componentes que resulte no menor custo inicial, respeitando os requisitos de segurança, dados por índices de confiabilidade-alvo para cada estado limite. Na literatura, esse tipo de abordagem é chamado de RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*) ou Otimização baseada em Confiabilidade.

### **1.2 Objetivos**

O principal objetivo deste trabalho é obter a configuração econômica de estruturas em concreto armado, aliada aos requisitos de segurança a partir de modelos que levem em conta as incertezas dos parâmetros de projeto de maneira mais adequada. Dessa forma, o que se faz é minimizar do custo inicial do projeto através de algoritmos apropriados de otimização, combinados com modelos de confiabilidade estrutural para garantir a segurança

das novas configurações, dando um passo na direção da consolidação de métodos probabilísticos no projeto de estruturas.

Para isso, um série de outros objetivos menores são necessários, no sentido de compor uma ferramenta computacional eficiente capaz de realizar essas análises de otimização baseada em confiabilidade. Dentre esses objetivos estão: desenvolvimento de um modelo mecânico mais preciso do ponto de vista da obtenção de forças últimas para estados limites últimos e de serviço; desenvolvimento de modelos de confiabilidade mais eficientes do ponto de vista de tempo de processamento, para diminuir o tempo gasto nas análises de confiabilidade estrutural; desenvolvimento de um modelo geral de otimização de seções transversais em concreto armado que leve em consideração a posição da linha neutra e a curvatura da seção como variáveis do próprio processo de otimização; acoplamento de todos esses modelos para construção da ferramenta computacional baseada na abordagem de RBDO, necessária para atingir o objetivo principal deste trabalho.

O trabalho, visa, portanto, avançar na concepção de modelos mecânicos para atingir uma situação de projeto que consiste na obtenção da estrutura, a partir de um custo mínimo para a segurança desejada. Essa situação é bastante relevante hoje para a prática da engenharia de estruturas, pois pode proporcionar projetos com mais qualidade e competitivos, uma vez que a segurança estrutural, aliada à economia, será atingida com maior precisão. Esse procedimento poderá também ser adaptado para utilização em escritórios de projeto, aproximando a engenharia de um método de dimensionamento mais racional, seguro e econômico.

### **1.3 Métodos Utilizados**

Para o modelo mecânico, foi adotado o Método dos Elementos Finitos (MEF) com a utilização de um elemento de pórtico plano convencional. O comportamento não-linear dos materiais aço e concreto foi considerado a partir de modelos de plasticidade e de dano, respectivamente. Da mesma forma, os efeitos de segunda ordem oriundos das excentricidades geradas pelos deslocamentos dos nós da estrutura e das cargas externas atuantes foram considerados pela utilização da não-linearidade geométrica com a forma lagrangeana atualizada de acordo com o trabalho de Paula (2001).

Em conjunto com essa formulação não-linear inicial do MEF, foram incorporados os efeitos do cisalhamento considerando as parcelas resistentes do concreto íntegro,



engrenamento dos agregados, efeito de pino das armaduras longitudinais e da armadura transversal na composição final da resistência à força cortante. Uma das contribuições deste trabalho consiste justamente na utilização desses efeitos combinados e adaptados à formulação de dano. Como o comportamento de estruturas de concreto é determinado pela evolução das fissuras, cada um desses efeitos está ligado a esse fenômeno de evolução e, portanto, pode ser definido em função da variável de dano, uma vez que esta é quem penaliza a rigidez do material em função do panorama de fissuração.

Na sequência, um algoritmo de busca da condição limite da estrutura foi incorporado ao modelo mecânico, com o objetivo de determinar com grande precisão numérica as cargas últimas para determinados estados limites (ELU e ELS). Com isso, foi possível obter as respostas para as análises de confiabilidade.

Neste contexto, o módulo de confiabilidade do programa foi desenvolvido considerando-se o Método de Superfície de Resposta (RSM), o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM – *First Order Reliability Method*) e o Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (SORM – *Second Order Reliability Method*). Na abordagem via RSM, superfícies polinômicas de primeiro e segundo grau foram utilizadas, juntamente com técnicas de melhoramento de precisão (técnica adaptativa com redivisão do plano de experiência) e velocidade de convergência (regressão com fatores-peso). O FORM e o SORM são métodos de busca do ponto de projeto sendo que a equação de estado limite é aproximada por um hiperplano ou um hiperparabolóide, respectivamente. Para esses métodos, foi adotada uma estratégia de cálculo dos gradientes da equação de estado limite a partir do Método das Diferenças Finitas, que neste trabalho foi chamada de Técnica dos Gradientes Numéricos (TGN). A resolução do problema da confiabilidade utilizando essa técnica mostrou-se bem mais rápida e estável, mesmo para equações de estado limite não-lineares, do que com o uso do RSM, sendo, portanto, bastante interessante sua utilização. Uma pequena contribuição para o avanço dos métodos baseados em superfícies de resposta foi dada ao melhorar a busca do ponto de projeto com técnicas de redivisão do plano e de regressão com fatores-peso adaptadas para polinômios de primeiro e segundo graus com a consideração ou não de termos cruzados. Kaymaz & MacMahon (2005) mostraram o uso da técnica de regressão com fatores-peso, porém somente para polinômios de primeiro grau. A avaliação da segurança de sistemas também foi considerada no trabalho a partir de associações em série e paralelo. O cálculo da probabilidade de falha dos sistemas baseou-se na teoria dos limites de primeira e segunda ordem propostos por Ditlevsen (1979).

A economia no projeto foi tratada a partir da minimização do custo inicial da estrutura, considerando restrições mecânicas de projeto tanto para momento fletor quanto para força normal, além de restrições construtivas e de caráter limitante das variáveis. Foram criadas rotinas para otimização de elementos horizontais, verticais e inclinados em concreto armado, com posterior acoplamento dessas rotinas para formar a rotina de otimização dos pórticos planos. A técnica de otimização empregada foi o SQP (*Sequential Quadratic Programming*) ou Programação Sequencial Quadrática. Com isso foi possível generalizar uma formulação para otimização de elementos de barras em concreto armado, podendo inclusive incorporar ao dimensionamento ótimo parâmetros decisivos como a posição relativa da linha neutra da seção e a curvatura da seção, resultando, de fato, em configurações otimizadas. Dessa forma, não foi fixado nenhum parâmetro ao processo de otimização, o que permitiu ao algoritmo liberdade para buscar as melhores soluções.

Finalmente, o acoplamento entre os modelos de otimização e de confiabilidade se deu com o objetivo de obter soluções com menor custo inicial, mas ao mesmo tempo com a segurança garantida. Dois modelos foram propostos para alcançar esse objetivo: SF-RBDO (*Safety Factor*) e o BS-RBDO (*Beta Surface*). No primeiro, a união entre a confiabilidade e a otimização ocorre por meio da calibração adequada para a segurança-alvo dos coeficientes parciais de segurança, definidos para cada variável aleatória considerada, de acordo com a proposta de Castillo et al. (2003). Já no segundo modelo, a restrição de confiabilidade é obtida a partir das informações do ponto ótimo da iteração anterior. Uma superfície quadrática ou linear em função das variáveis de otimização e do índice de confiabilidade-alvo é definida no ponto ótimo e utilizada para a determinação do próximo ponto candidato a ótimo, repetindo-se esse processo até a convergência. A grande contribuição da tese se encontra neste contexto, pois estende a formulação desses modelos para o campo não-linear. O SF-RBDO foi muito bem formulado no trabalho de Castillo et al. (2003) para comportamento elástico-linear dos materiais e da estrutura. Neste trabalho, sua formulação foi ampliada para a consideração das não-linearidades tanto dos materiais quanto geométrica, o que generalizou o modelo. Quanto à abordagem via BS-RBDO, esta foi proposta no trabalho de Nogueira (2005), porém adotando-se resolução analítica do problema de otimização via técnica dos Multiplicadores de Lagrange, o que proporcionou grandes simplificações ao modelo. A contribuição para este modelo foi justamente sua generalização para um número qualquer de variáveis de otimização, possibilidade de construção da restrição de confiabilidade com polinômios de primeiro grau, ao invés de somente com funções quadráticas e resolução via SQP.

Para demonstrar a capacidade do programa desenvolvido, diversos exemplos de estruturas foram analisados e comparados, na medida do possível, com outros autores.

## **1.4 Organização da Tese**

Esta tese está dividida em sete capítulos e aborda os seguintes assuntos: mecânica das estruturas, modelagem numérica de estruturas em concreto armado e aspectos econômicos e de segurança das estruturas através das teorias de confiabilidade, otimização estrutural e o acoplamento de ambas.

Neste primeiro capítulo encontram-se os objetivos e as motivações que conduziram este trabalho.

O segundo capítulo apresenta alguns dos diversos trabalhos encontrados na literatura sobre os temas enunciados, bem como comentários do autor sobre cada um dos temas.

No terceiro capítulo estão descritos com detalhes todos os conceitos envolvidos no desenvolvimento do modelo mecânico, as formulações para o comportamento do concreto ao cisalhamento, não-linearidades dos materiais e geométrica e a resolução do problema não-linear. O algoritmo desenvolvido para busca de cargas últimas de estruturas considerando estados limites últimos e de serviço também é apresentado. Diversos exemplos de aplicação são apresentados para mostrar a capacidade do modelo.

O quarto capítulo apresenta os conceitos importantes sobre teoria da confiabilidade estrutural, bem como os modelos desenvolvidos para busca das probabilidades de falha das estruturas em concreto armado, tanto para componentes quanto para sistemas. Exemplos também são apresentados com o objetivo de evidenciar o comportamento dos modelos.

No quinto capítulo a otimização matemática é apresentada. Os conceitos necessários para o trabalho são apresentados, bem como todas as formulações para a otimização de seções transversais de elementos de barra quaisquer em concreto armado. O acoplamento desses modelos para gerar a rotina de otimização de pórticos planos também é apresentado. Exemplos de validação dessas rotinas completam o capítulo.

Os dois modelos de acoplamento entre confiabilidade e otimização são, por fim, apresentados no capítulo seis. Os detalhes das formulações dos modelos SF (*Safety Factor*) e BS (*Beta Surface*), bem como exemplos de aplicação são mostrados para finalizar o trabalho.

Finalmente, o capítulo sete traz as conclusões sobre a pesquisa e as sugestões para os próximos trabalhos. As referências bibliográficas citadas ao longo de toda a pesquisa são apresentadas no final da tese.

## **2. Revisão Bibliográfica**

---

---

### **2.1 Generalidades**

Neste capítulo são apresentados alguns trabalhos relacionados aos temas abordados na tese, com o objetivo de mostrar o seu desenvolvimento desde o surgimento até o estado atual no contexto científico mundial, além de alguns conceitos fundamentais sobre comportamento de estruturas em concreto armado, teoria de otimização e confiabilidade estrutural. Algumas considerações sobre os assuntos serão feitas no final de cada seção.

### **2.2 Modelagem Mecânica de Estruturas em Concreto Armado**

Atualmente, existem diversos modelos desenvolvidos para representar o comportamento das estruturas em concreto armado. O desenvolvimento desses modelos parte de diversas observações experimentais, sendo que elementos estruturais são analisados de modo a proporcionar informações que servem como subsídios para a criação dos modelos. Assim, as hipóteses são adotadas de acordo com a complexidade que se deseja imprimir ao modelo, permitindo ou não análises mais precisas dos problemas de engenharia. Em geral, modelos mais precisos são também mais complexos, acarretando maiores custos computacionais, fato esse que pode inviabilizar a utilização desses modelos por conta dos recursos atuais de informática.

Dois aspectos muito importantes na modelagem de elementos estruturais em concreto armado são: comportamento à tração e o comportamento ao cisalhamento. É claro que em serviço, todos esses mecanismos atuam simultaneamente, caracterizando a grande complexidade do material concreto armado. A seguir, esses aspectos são discutidos com detalhes.

## 2.2.1 Comportamento do concreto à tração

De uma maneira geral, os códigos normativos atuais responsáveis pelas diretrizes do projeto de estruturas de concreto assumem que, após ser atingida a resistência à tração do concreto, inicia-se um processo de fissuração que “elimina” a parte resistente de todo o concreto abaixo da linha neutra, ou seja, considera-se que o concreto tracionado não mais contribui na resposta do elemento estrutural. Dessa forma, o diagrama tensão-deformação do concreto à tração sofre uma descontinuidade abrupta a partir do ponto que caracteriza o seu limite de resistência, indicando o início da fissuração do material. Entretanto, diversos ensaios experimentais mostraram que o concreto não é um material perfeitamente frágil, mas que possui certa resistência à tração. Por conta dessas observações experimentais, tem se tornado possível, no contexto das modelagens numéricas, a substituição dos modelos totalmente frágeis por modelos que levam em conta a perda gradual de rigidez à tração a partir da fissuração, bem como a contribuição do concreto íntegro entre fissuras. Esses modelos são mais representativos da realidade, já que existe material concreto em serviço abaixo da linha neutra e em seções localizadas entre as fissuras.

### 2.2.1.1 O conceito dos estádios do concreto

Tradicionalmente, a análise em serviço das estruturas em concreto armado é baseada nas hipóteses clássicas de estádios de comportamento, nas quais se considera a seção íntegra ou fissurada dependendo da intensidade de solicitação.

Os estádios de comportamento são definidos como configurações específicas de tensões ao longo de uma seção transversal de concreto armado, provenientes da solicitação provocada pelas ações externas (Figura 2-1).

No *estádio I-a*, a seção de concreto armado é submetida a pequenas solicitações, de modo que o concreto resiste às tensões de tração sem a necessidade da armadura. Dessa forma, não há fissuração na estrutura e com isso, a proporcionalidade entre tensão e deformação é mantida. Com o aumento da solicitação, as tensões de tração crescem até que o módulo da tensão na fibra mais tracionada atinge a resistência à tração do concreto. Nessa situação, surge a primeira fissura que caracteriza o *estádio I-b*. É importante salientar que no *estádio I-b*, o concreto começa a danificar na região tracionada (as fibras atingem a resistência à tração), mas ainda assim, o concreto tracionado contribui na resistência da estrutura.

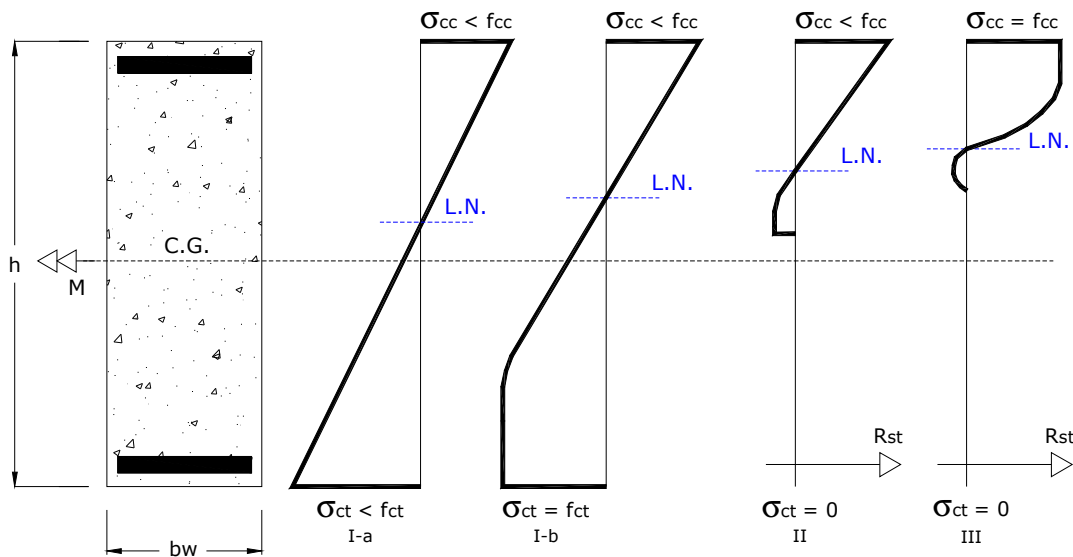


Figura 2-1 – Estádios de comportamento do concreto

O *estádio II* é caracterizado como sendo aquele em que o concreto abaixo da linha neutra encontra-se totalmente fissurado e, portanto, não resiste mais à tração. Assim, no *estádio II*, toda a região tracionada de concreto é desprezada, não contribuindo no desempenho global da estrutura. A consideração dessa hipótese faz com que “não exista” mais material concreto abaixo da linha neutra, o que não corresponde à realidade. Finalmente, para intensidades elevadas de solicitação, a seção atinge o *estádio III*, que é definido como o estado de ruptura do concreto comprimido, ou seja, o módulo da tensão na fibra mais comprimida de concreto atinge o valor da resistência à compressão. Diante desse contexto, vale comentar que a ruína da estrutura não é caracterizada somente pela ruptura do concreto comprimido. Em vários casos, a armadura pode vir a apresentar um alongamento excessivo antes mesmo de que o concreto comprimido atinja a ruptura. Essa consideração se tornou importante, a partir do instante em que foi constatada uma fissuração exagerada proveniente do alongamento excessivo da armadura de tração em peças submetidas a solicitações normais. O elevado grau de fissuração provoca um estado último, sem que necessariamente tenha ocorrido a ruptura do concreto no banzo comprimido da peça. Portanto, atualmente, a verificação da segurança é feita admitindo-se que o esgotamento da capacidade resistente possa ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido, quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada.

### 2.2.1.2 O modelo da ABNT NBR 6118:2003

A norma brasileira de projeto de estruturas de concreto ABNT NBR 6118:2003 define as propriedades dos materiais estruturais para utilização na prática da engenharia. Isso é de extrema importância, pois assim, é possível conhecer os limites e propriedades mecânicas desses materiais para o adequado projeto e verificação das estruturas em concreto armado e protendido. Para o concreto não fissurado, solicitado à tração, a NBR 6118:2003 adota um diagrama tensão-deformação bi-linear. O primeiro trecho do diagrama é descrito por uma relação linear entre tensões e deformações até o limite de 90% da resistência característica do concreto à tração. O segundo trecho se estende até o alongamento máximo de 0,5‰, que corresponde a uma tensão igual à própria resistência característica do concreto à tração (Figura 2-2).

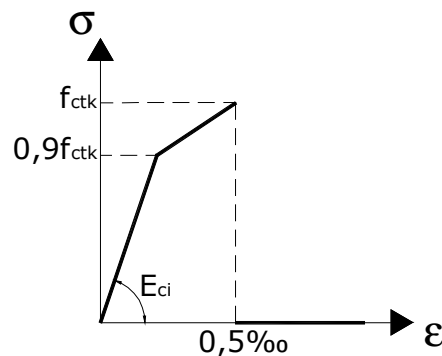


Figura 2-2 – Diagrama tensão × deformação do concreto à tração (ABNT NBR 6118:2003)

A partir do limite à tração ( $f_{ctk}$ ), o concreto tracionado é admitido como totalmente fissurado, de modo que deixa de contribuir na resistência global da estrutura. Entretanto, no capítulo 17, item 17.3, a norma brasileira afirma que nos estados limites de serviço, as estruturas trabalham parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II. O parâmetro responsável pela separação entre esses dois limites é definido pelo momento de fissuração, calculado da seguinte forma:

$$M_R = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (2-1)$$

sendo que:  $\alpha$  é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta (1,2 para seções T ou duplo T e 1,5 para seções retangulares);  $f_{ct}$  é a resistência à tração direta do concreto com o quantil apropriado a cada verificação



particular (para determinação do momento de fissuração no estado limite de formação de fissura deve ser usado o  $f_{ctk,inf}$  e para o estado limite de deformação excessiva deve ser usado o  $f_{ctm}$ );  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;  $y_i$  é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

Na falta de ensaios para obtenção da resistência à tração do concreto, a ABNT NBR 6118:2003 permite a sua avaliação a partir da resistência característica do concreto à compressão (expressa em megapascal):

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (2-2)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (2-3)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (2-4)$$

Diante disso, em uma peça em concreto armado existem seções que estão trabalhando no estágio I e também no estágio II, em função da intensidade da solicitação comparada com o respectivo momento de fissuração. É por conta desse panorama que a norma brasileira permite no cálculo dos deslocamentos imediatos, a consideração de uma rigidez equivalente ponderada a partir das rigidezes dos estádios I e II (Branson<sup>1</sup>, 1966), dada a seguir:

$$EI_{eq} = 0,85 \cdot E_{ci} \left\{ \left( \frac{M_R}{M_k} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_R}{M_k} \right)^3 \right] \cdot I_2 \right\} \leq 0,85 \cdot E_{ci} \cdot I_c \quad (2-5)$$

sendo que:  $E_{ci}$  corresponde ao módulo de elasticidade tangente do concreto dado por  $5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ ;  $M_k$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado;  $I_2$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II.

Apesar de ser um modelo bastante simples, é possível incorporá-lo nos códigos computacionais em elementos finitos. Para isso, basta atualizar a rigidez de cada elemento finito antes de iniciar o próximo passo de carga, com o valor dado pela Equação 2-5. Desse modo, é possível até mesmo verificar o grau de deterioração que o elemento se encontra a partir da relação  $M_R/M_K$ .

<sup>1</sup> Branson, D.E. (1966). Deflections of reinforced concrete flexural members. *ACI Journal*, June.

### 2.2.1.3 O modelo do CEB – Bulletin 158 (1985)

O CEB, no Bulletin 158 - *Design Manual on Cracking and Deformations* (1985), adota um modelo que utiliza uma configuração intermediária de comportamento em relação aos estádios I e II. A justificativa do modelo está ligada ao fato de que não são todas as seções de uma peça estrutural que estão fissuradas, pois ainda existem seções que trabalham segundo as hipóteses do estádio I, uma vez que não atingiram o momento de fissuração. Além disso, na região entre duas fissuras consecutivas, existe uma porção de concreto que se encontra íntegro e, portanto, contribui na resistência global da estrutura. Isso ocorre por conta da transferência de tensões de tração entre a armadura e esse concreto íntegro por meio da aderência entre os materiais, fazendo com que a armadura desempenhe um papel fundamental nesse processo. Esse efeito é conhecido na literatura como *tension stiffening* que corresponde a uma contribuição à tração do concreto íntegro entre fissuras. Vários autores têm estudado esse assunto, propondo modelos para sua consideração em modelagens numéricas de estruturas de concreto armado e protendido.

Sanches Jr (1998) fez um estudo sobre procedimentos de cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pavimentos considerando modelos específicos para o concreto armado. Dentre os modelos adotados estão as propostas de Debernardi<sup>2</sup> (1983) e Ghali & Favre<sup>3</sup> (1986). Ambos os modelos propõem um método para o cálculo de uma configuração média com a diferença de que, o primeiro faz um equacionamento relativo à configuração média deformada, enquanto que no segundo é feita uma interpolação apropriada direta entre os estádios I e II.

Quando uma seção atinge o momento de fissuração, surge a primeira fissura e o concreto passa a apresentar um comportamento não-elástico. Com isso, a tensão na seção da fissura, que antes era resistida pelo concreto e pelo aço, agora é transferida totalmente para o aço da armadura nas fibras onde ocorreram as fissuras. Dessa forma, há uma “migração” das tensões de tração para a armadura, que por sua vez, sofre um acréscimo de deformação. Porém, na seção imediatamente adjacente à seção fissurada, o concreto encontra-se íntegro, de modo que a armadura transfere por aderência, parte das tensões, produzindo assim, um acréscimo de tensão de tração no concreto íntegro e, conseqüentemente, uma diminuição nas tensões da armadura. Assim, a compatibilidade de deformações entre o aço e o concreto é restabelecida e a seção passa a trabalhar novamente como uma seção homogênea (Figura 2-3).

---

<sup>2</sup> DEBERNARDI, P.G. (1983). La deformazione differita in C.A. sogette a fessurazione: considerazione sui metodi approssimati di calcolo. *L'Industria Italiana del Cemento*. Roma, v. 7/8, p. 499-510.

<sup>3</sup> GHALI, A.; FAVRE, R. (1986). *Concrete structures: stress and deformations*. Chapman and Hall, 1ª edição.

Apenas para ilustrar, os índices “2” apresentados na Figura 2-3 significam que as grandezas são referentes ao estágio II.

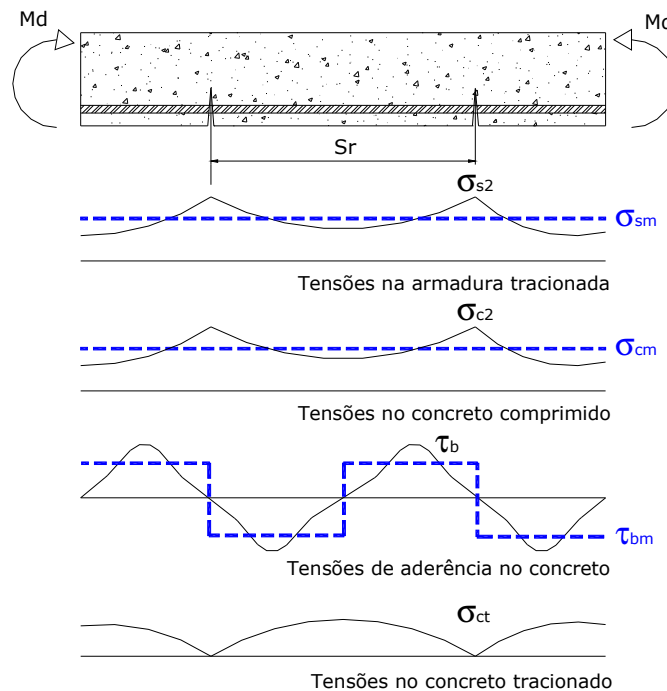


Figura 2-3 – Tensões normais  $\sigma$  e de cisalhamento  $\tau$  em um elemento fletido de concreto armado

Para levar em conta a contribuição do concreto entre fissuras, deve-se calcular uma deformação média para a armadura tracionada. Essa deformação assume um valor intermediário entre o valor máximo na seção fissurada e o valor mínimo no ponto médio entre fissuras, dada por:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{s1} + \zeta \cdot \varepsilon_{s2} \quad (2-6)$$

sendo que:  $\varepsilon_{s1}$  e  $\varepsilon_{s2}$  correspondem às deformações da armadura tracionada nos estádios I e II, respectivamente;  $\zeta$  é o coeficiente que leva em conta a distribuição de tensões via aderência entre o aço e o concreto. O coeficiente  $\zeta$  é definido, para o caso de flexão pura, pelas seguintes expressões:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_R}{M_k} \right)^2 \rightarrow \text{para o caso de } M_k > M_R;$$

$$\zeta = 0 \rightarrow \text{para o caso de } M_k < M_R.$$

Os coeficientes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são responsáveis por considerar, respectivamente, a influência das condições de aderência e o tipo de carregamento sobre a estrutura. Assim:

a) condições de aderência

$\beta_1 = 1,0 \rightarrow$  para barras de alta aderência ( $\eta_b \geq 1,5$ );

$\beta_1 = 0,5 \rightarrow$  para barras lisas ( $\eta_b = 1,0$ ).

b) condições de carregamento

$\beta_2 = 1,0 \rightarrow$  para o primeiro carregamento ou para cargas pouco repetitivas não permanentes;

$\beta_2 = 0,5 \rightarrow$  para cargas permanentes ou com grande número de ciclos.

O concreto também assume uma configuração média de deformações a partir dos valores definidos nos estádios I e II, dada por:

$$\varepsilon_{cm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{c1} + \zeta \cdot \varepsilon_{c2} \quad (2-7)$$

Diante disso, é possível definir uma expressão para a curvatura média que representa a configuração intermediária entre os estádios I e II (Figura 2-4), a partir das deformações médias nos materiais:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}}{d} = (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{r_1} + \zeta \cdot \frac{1}{r_2} \quad (2-8)$$

sendo que:  $\frac{1}{r_m}$  é a curvatura média;  $d$  é a altura útil da seção transversal considerada;  $\frac{1}{r_1}$  e  $\frac{1}{r_2}$  correspondem, respectivamente, às curvaturas no estádio I e II.

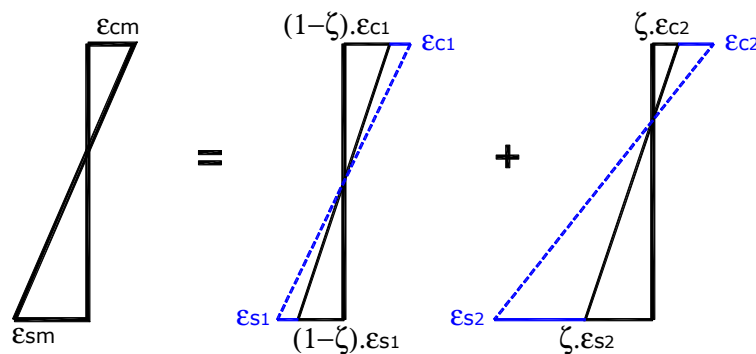


Figura 2-4 – Deformações médias ao longo da seção

Com o cálculo da curvatura média, determina-se a nova rigidez da seção transversal, que representa a contribuição do concreto entre fissuras. Isso produz um acréscimo à rigidez global da estrutura (Figura 2-5), uma vez que a rigidez média é maior que o valor da rigidez obtida considerando-se a seção totalmente fissurada na região tracionada.

$$EI_m = \frac{M_k}{1/r_m} \quad (2-9)$$

Em termos computacionais, o *tension stiffening*, segundo o modelo do CEB-158 (1985), é incorporado ao modelo de elementos finitos, a partir da consideração desse valor de rigidez média,  $EI_m$ , na montagem da matriz de rigidez global da estrutura.

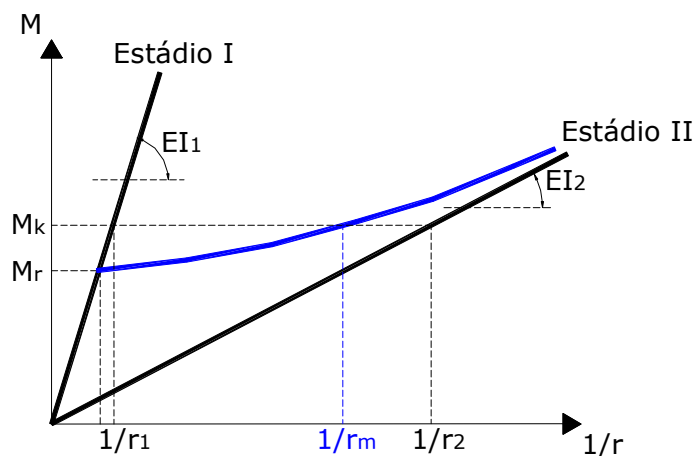


Figura 2-5 – Diagrama momento-curvatura para flexão simples (CEB-158, 1985)

Nos casos de elementos estruturais em que a força normal é nula (flexão simples), a formulação descrita acima pode ser aplicada sem restrições. Porém, quando se tratar de elementos em concreto armado sujeitos à flexão composta (flexo-tração ou flexo-compressão), o modelo empregado deve sofrer algumas modificações para levar em conta a influência da força normal. Quando esta for uma força de compressão, que é o caso mais comum, a deformação média diminui, fazendo com que a fissuração da seção também diminua. Com isso, a porção íntegra do concreto será um pouco maior, aproximando o elemento mais próximo do estágio I. O modelo para a consideração adequada do concreto íntegro entre fissuras para elementos submetidos à flexão composta está descrito com maiores detalhes no manual do CEB-158 (1985).

#### 2.2.1.4 Modelos com leis constitutivas modificadas

Uma das formas de considerar a contribuição do concreto fissurado é a utilização de leis constitutivas que possuem um trecho descendente no diagrama tensão  $\times$  deformação do concreto à tração. Essa metodologia foi proposta, pela primeira vez, por Scanlon (1971) e depois estudada por diversos autores (Lin & Scordelis<sup>4</sup>, (1975); Bazant & Oh<sup>5</sup>, (1984); Prakhia & Morley<sup>6</sup>, (1990) entre outros). Porém, aqui, faz-se necessário distinguir dois conceitos importantes. Na literatura, o efeito do *tension stiffening* é geralmente definido como sendo a capacidade de redistribuição gradual de tensões do concreto para a armadura em função da formação da primeira e demais fissuras. Essas tensões, em parte, regressam ao concreto íntegro na região entre duas fissuras consecutivas, o que caracteriza uma contribuição desse concreto à tração na rigidez global da estrutura. O segundo conceito importante consiste no chamado modelo de *tension softening* do concreto, onde a perda de rigidez ocorre gradualmente a partir da resistência à tração até um valor pré-determinado de deformação, que caracteriza o fim total da capacidade resistente do concreto tracionado. Isso é feito, atualmente, com a consideração de um ramo descendente no diagrama tensão-deformação do concreto à tração após o pico de tensão, definido pela resistência do concreto à tração.

A semelhança entre esses dois modelos está ligada ao fato de que ambos introduzem uma perda gradual de resistência à tração. Assim, o *tension softening* apenas traduz o comportamento real de materiais quase-frágeis como o concreto, que mesmo em condições de fissuração, ainda apresentam certa resistência à tração, ao passo que o *tension stiffening* evidencia que o concreto íntegro entre fissuras colabora com a rigidez da estrutura.

Durante a década de 80, abordagens alternativas desse problema foram realizadas. Uma delas foi a utilização dos conceitos da mecânica do dano, primeiramente introduzidos por pesquisadores franceses na tentativa de modelar a fissuração e seus efeitos no concreto armado. Paralelamente, outro grupo de pesquisadores tentou adaptar os conceitos de plasticidade de metais para simular fraturas no concreto a partir de modelos microscópicos. Todas essas abordagens contribuíram para que o comportamento do concreto à tração fosse

---

<sup>4</sup> Lin, C.S.; Scordelis, A.C. (1975). Nonlinear analysis of RC shells of general form. *Journal of Structural Division, ASCE*, 101(3), p. 523-538.

<sup>5</sup> Bazant, Z.P.; Oh, B.H. (1984). Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. *ACI Journal*, 81(3), p. 268-278.

<sup>6</sup> Prakhia, G.K.W.; Morley, C.T. (1990). Tension stiffening and moment-curvature relations of reinforced concrete elements. *ACI Structural Journal*, 87(5), p. 597-605.

mais bem entendido e representado por modelos teóricos para uso em simulações computacionais.

O modelo da Figura 2-6 foi utilizado por Torres et al. (2004) que propuseram uma estratégia para determinar uma lei constitutiva equivalente para o concreto à tração com o objetivo de simular estruturas em concreto armado e protendido em condições iniciais de serviço, bem como seu comportamento à flexão ao longo do tempo.

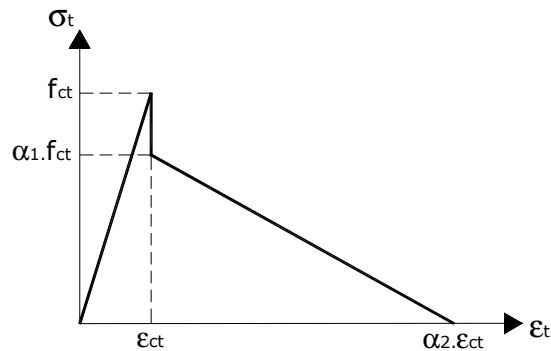


Figura 2-6 – Lei constitutiva à tração adotada para o concreto (Torres et al. 2004)

De acordo com os autores, essa metodologia é baseada na seleção adequada de dois parâmetros ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) definindo uma lei constitutiva equivalente para o concreto tracionado, permitindo, assim, considerar o efeito do *tension stiffening* no comportamento global dessas estruturas. Os valores desses coeficientes foram determinados a partir de um algoritmo que minimiza os quadrados das distâncias entre as relações momento  $\times$  curvatura do modelo proposto e as mesmas relações obtidas a partir dos modelos do CEB e do Eurocode 2. As grandes vantagens do modelo proposto, segundo os autores, são as determinações independentes de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , o que facilita o processamento, bem como a versatilidade de utilização, no sentido de que o modelo pode ser facilmente incorporado em qualquer procedimento computacional de análise de estruturas de concreto. Os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são dados por:

$$\alpha_1 = 0,4 \cdot \left( 1 - \frac{N}{A \cdot f_{ct}} \right) \geq 0 \quad (2-10)$$

$$\alpha_2 = 20,3 - 15,1 \cdot \frac{d}{h} + \frac{1,31}{n \cdot \rho} - 1,06 \cdot \frac{d/h}{n \cdot \rho} \quad (2-11)$$

sendo que:  $N$  é a força normal atuante na seção;  $A$  é a área da seção transversal do elemento de concreto;  $d/h$  é a relação entre altura útil e altura total da seção;  $n$  corresponde à razão entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto;  $\rho$  é a taxa de armadura longitudinal de tração.

Hsu & Zhang (1996) fizeram um estudo teórico-experimental em chapas de concreto armado para avaliar a influência do concreto entre fissuras (*tension stiffening*) no comportamento global do sistema. Foram realizados ensaios em elementos de chapa com duas configurações distintas de armadura, sendo que na primeira, as barras foram colocadas paralelamente aos lados dos elementos e na segunda, a mesma armadura foi rotacionada de  $45^\circ$  com a horizontal no plano dos elementos. A modelagem numérica foi realizada considerando-se três conjuntos de leis constitutivas para o aço e para o concreto. As diferenças entre essas leis foram estabelecidas justamente para incorporar ou não a contribuição do concreto íntegro entre fissuras. Os autores concluíram que o efeito do *tension stiffening* é significativo e deve ser considerado, pois melhora a resposta da estrutura na fase pós-fissuração, uma vez que as leis constitutivas tanto à tração quanto à compressão do concreto e tração do aço são modificadas, adotando-se para isso as respectivas médias de tensões e deformações nesses materiais.

Abrishami & Mitchell (1996) fizeram um estudo da influência da fissuração longitudinal sobre o efeito do *tension stiffening* em elementos tracionados em concreto armado. Foram ensaiados diversos corpos-de-prova (tirantes em concreto armado) variando a relação  $c/d_b$ , isto é, cobrimento por diâmetro da barra, bem como a resistência à compressão do concreto. Concluíram que o aumento do diâmetro das barras da armadura, ou seja, uma redução na relação  $c/d_b$  provoca maior fissuração longitudinal e, conseqüentemente, uma redução significativa no efeito do *tension stiffening*. Além disso, concretos de alta resistência combinados com diâmetros maiores de barras, após a fissuração longitudinal, assumem um comportamento pós-fissuração praticamente igual aos concretos de resistência convencional. Para levar em conta o efeito da fissuração longitudinal sobre o comportamento pós-fissurado do concreto armado, os autores propuseram uma relação constitutiva modificada por um parâmetro que depende diretamente da relação  $c/d_b$ , dada por:

$$\sigma_t = \frac{\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot f_{ct}}{1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_t}} \rightarrow \text{para } \varepsilon_t > \varepsilon_{ct} \quad (2-12)$$



sendo que:  $\psi_1$  leva em conta as características de aderência da armadura longitudinal, de modo que assume 1,0 para barras de alta aderência, 0,7 para barras de média aderência e 0,0 para barras com pequena aderência;  $\psi_2$  leva em conta a natureza do carregamento atuante, assumindo 1,0 para carregamentos monotônicos de curta duração e 0,7 para carregamentos de longa duração e/ou cargas cíclicas;  $\psi_3$  é o fator que considera a fissuração longitudinal na peça, que depende da relação entre o cobrimento de concreto e o diâmetro das barras da armadura longitudinal, ou seja, da relação  $c/d_b$  da peça estrutural. Assim, o coeficiente  $\psi_3$  é calculado por:

$$\psi_3 = 1,0 \rightarrow \text{para } c/d_b > 2,5$$

$$\psi_3 = 0,8 \cdot (c/d_b) - 1 \rightarrow \text{para } 1,25 < c/d_b \leq 2,5$$

$$\psi_3 = 0 \rightarrow \text{para } c/d_b < 1,25$$

Kaklauskas & Ghaboussi (2001) propuseram um método para obtenção de leis constitutivas à tração e à compressão para o concreto a partir de resultados de ensaios de flexão de vigas em concreto armado. Com o conhecimento prévio de resultados experimentais como os diagramas entre momento fletor  $\times$  deformação na fibra mais comprimida e mais tracionada de concreto, bem como as relações entre momento  $\times$  curvatura da seção e momento  $\times$  deformação da armadura, o método é desenvolvido calculando-se, a partir das equações de equilíbrio da seção, as tensões médias no concreto comprimido e no concreto tracionado. Esse procedimento é repetido para todos os passos de carga, obtendo-se assim, as leis constitutivas médias para o concreto comprimido e tracionado. De acordo com essa metodologia, os autores afirmaram que é possível levar em conta o efeito do *tension stiffening*, da retração, não-linearidade do material e da aderência aço-concreto na determinação das respectivas leis constitutivas para o concreto, uma vez que todo o procedimento é baseado em resultados experimentais.

Wang & Hsu (2001) adotaram um novo conjunto de leis constitutivas para análise não-linear de estruturas em concreto armado, a partir do modelo FA-STM (*Fixed-Angle Softened-Truss Model*). A premissa básica do FA-STM é assumir que as fissuras se desenvolvam na direção das tensões principais de compressão, porém com um ângulo fixo, ou seja, ao determinar-se a direção da primeira fissura no ponto, esta é mantida até o final da análise. As leis constitutivas foram escritas em função das tensões e deformações principais caracterizando o trecho pós-pico do concreto à compressão e à tração com *tension stiffening*. O aço foi tratado com uma lei elastoplástica modificada e o comportamento do concreto ao

cisalhamento também foi descrito a partir das tensões e deformações principais, obtendo, segundo os autores, um módulo de deformação  $G$  consistente. Para a determinação da falha, foi adotado o critério de Kupfer & Gerstle<sup>7</sup> (1973). O modelo apresentou bons resultados na análise de vigas e painéis de cisalhamento. É interessante destacar que na lei constitutiva do concreto à compressão adotada, no trecho pós-pico, existe um coeficiente que leva em conta as taxas de armadura nas duas direções, o que possibilita a verificação da influência tanto da armadura longitudinal, quanto da armadura transversal no comportamento pós-pico do concreto comprimido.

De Borst (2002) elaborou uma revisão dos chamados “*smearred-crack models*” e sua adequação ao contexto dos modelos de dano no contínuo para simulação do comportamento mecânico de materiais “*quase-frágeis*”, como o concreto e as rochas. Na verdade, esses materiais recebem essa denominação porque ainda apresentam alguma resistência após atingirem o pico no diagrama tensão  $\times$  deformação à tração. Diante disso, o autor discutiu as possíveis melhorias que podem ser incorporadas a esses modelos, tais como o fator de retenção de cisalhamento e os conceitos de *tension softening* e *tension stiffening*. Concluiu que além de reduzir dificuldades numéricas que podem surgir nesses modelos, o fator de retenção de cisalhamento pode ser entendido fisicamente como uma representação do engrenamento dos agregados do concreto.

Bischoff (2003) fez um estudo sobre a influência de fibras metálicas no efeito do *tension stiffening* e na fissuração de estruturas em concreto armado. A análise foi realizada a partir de comparações entre tirantes em concreto armado com e sem fibras e barras isoladas de aço. O autor concluiu que a presença de fibras altera significativamente o comportamento do concreto à tração após a fissuração, promovendo um aumento no *tension stiffening*, pois considera agora, além do concreto entre fissuras, a contribuição da fibra que atravessa a fissura. Além disso, o uso de fibras também proporciona uma diminuição do espaçamento entre fissuras. Conseqüentemente, com a maior contribuição do concreto à tração, a estrutura ganha rigidez, o que se traduz em menores deslocamentos, melhorando o comportamento em serviço. A incorporação dos efeitos das fibras na modelagem numérica de estruturas em concreto armado pode ser realizada, segundo o autor, pela consideração de um fator de aderência modificado que depende da relação entre a tensão de tração após a fissuração do concreto e a própria tensão de fissuração.

---

<sup>7</sup> Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H. (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 99(4), p. 853-866.

Bentz (2005) fez um estudo sobre os principais modelos de *tension stiffening* existentes na literatura, comparando seu desempenho em painéis de cisalhamento. Foram estudados três modelos consagrados da literatura, com o intuito de propor um modelo que levasse em conta, diretamente, a aderência entre o aço e o concreto. O autor explicou que o *tension stiffening* é função direta da aderência, o que justifica a inclusão de um termo que quantifique, mesmo que simplificada, sua influência no modelo. Assim, foi proposta uma nova expressão (lei constitutiva para o concreto à tração em termos da deformação principal) para considerar o *tension stiffening*, que depende de um parâmetro de aderência calculado a partir da relação entre a área de concreto tracionada na peça e o somatório dos perímetros das barras de armadura contidas nessa área. Os resultados do modelo foram bastante satisfatórios quando comparados com testes de painéis de cisalhamento em concreto armado. Segundo o autor, um modelo mais adequado para o efeito do *tension stiffening*, certamente garantirá melhores previsões de aberturas de fissuras para situações em serviço de estruturas em concreto armado.

### 2.2.2 Comportamento do concreto ao cisalhamento

O comportamento à flexão das estruturas em concreto armado já foi tema de diversas investigações experimentais e teóricas, de modo que é possível, atualmente, prevê-lo de forma bastante satisfatória e consistente. Entretanto, não é o que ocorre quando se trata do comportamento do concreto armado ao cisalhamento. O mecanismo de resistência ao cisalhamento observado nos elementos em concreto armado é muito complexo, por conta dos vários componentes que atuam na transferência das tensões cisalhantes. Dessa forma, torna-se difícil incluir todos esses componentes em uma teoria simples e prática. Apesar de várias teorias já terem sido propostas, ainda na prática, nenhuma delas pode ser considerada plenamente satisfatória.

Do ponto de vista de distribuição de tensões ao longo de um elemento estrutural, a força cortante produz inclinações nas tensões principais em relação ao eixo do elemento. Isso faz com que as fissuras também sofram rotações acompanhando a direção principal de compressão. Como as fissuras resultam inclinadas em relação ao eixo da peça, naturalmente surgem regiões delimitadas pelas próprias fissuras denominadas bielas ou diagonais comprimidas. Essas bielas são responsáveis por transferir as tensões de compressão dos pontos de aplicação das forças externas até os apoios.

A configuração das fissuras e o modo como se comportam os componentes resistentes nas peças em concreto armado, obviamente depois da fissuração do concreto, fizeram com que Wilhelm RITTER<sup>8</sup>, em Zurique e Emil MÖRSCH<sup>9</sup>, em Stuttgart, no final do século XIX e início do século XX, formulassem a analogia de treliça clássica.

### *2.2.2.1 A analogia da treliça clássica*

A analogia da treliça clássica de Ritter-Mörsch considera que um elemento estrutural em concreto armado fissurado, quando solicitado por momento fletor e força cortante, apresente comportamento semelhante a uma treliça. Para que isso ocorra, evidentemente, são admitidas algumas hipóteses. Em primeiro lugar, admite-se que a treliça seja isostática com banzos paralelos. Assim, o banzo comprimido corresponde à zona comprimida de concreto e o banzo tracionado corresponde à armadura de tração. As diagonais comprimidas são inclinadas de 45° com os banzos, representando as bielas de concreto entre as fissuras e, finalmente, as diagonais tracionadas ou os pendurais representam os estribos verticais ou as barras inclinadas da armadura transversal, conforme ilustrado na Figura 2-7.

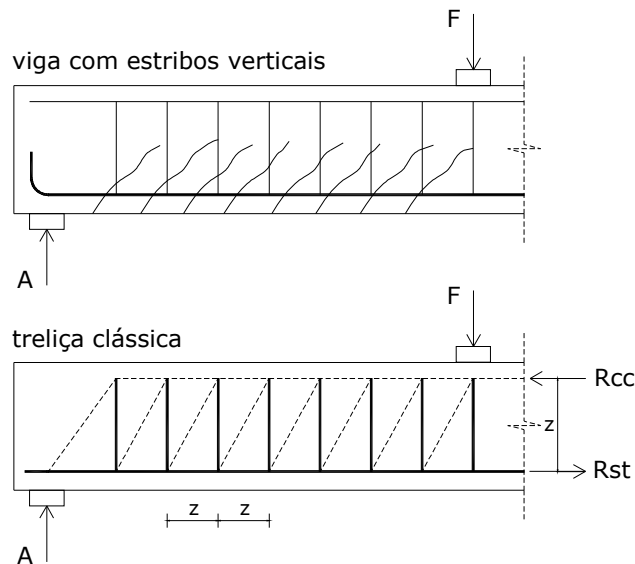
Posteriormente, a teoria da treliça clássica foi submetida à prova a partir de ensaios experimentais de vigas em concreto armado. O objetivo desses ensaios era obter a distribuição de esforços resistentes mediante a consideração das deformações do concreto e das armaduras, de modo a verificar a qualidade do modelo. Os resultados experimentais comprovaram que a treliça clássica conduz a uma configuração de armadura transversal superior à necessária na prática. Além disso, os ensaios permitiram o conhecimento de novas evidências que violavam as hipóteses básicas assumidas pelo modelo da treliça clássica. A tensão na armadura transversal observada nos ensaios mostrou-se menor que a prevista pela treliça clássica. Isso significa que vigas armadas a partir da analogia de treliça atingem a ruína com carga superior à teórica. A tensão de compressão nas bielas de concreto foi cerca de 10% maior do que a tensão prevista pela treliça clássica, o que aumenta o risco de ruptura por compressão das bielas de concreto antes do escoamento dos estribos, resultando em peças superarmadas ao cisalhamento. Esse fato ocorreu porque a inclinação das fissuras variou entre 30° e 45°, ao passo que na treliça clássica era fixa em 45° em relação ao eixo da peça. As medidas de deformação do concreto na borda comprimida e dos estribos mostraram que a região de concreto comprimido pela flexão é curva, inclinando-se na direção dos apoios e,

---

<sup>8</sup> Ritter, W. (1899). Die bauweise hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*, 33(7), p. 59-61.

<sup>9</sup> Mörsch, E. (1909). *Concrete-steel construction*. McGraw-Hill, New York.

conseqüentemente, equilibrando uma parcela da força cortante que atua na seção. Isso permite concluir que o banzo comprimido da treliça é inclinado e não paralelo ao banzo tracionado como considera a analogia da treliça clássica.



**Figura 2-7 – Analogia da treliça clássica de Ritter-Mörsch**

Observaram-se ainda nos ensaios que uma parcela da força cortante não é absorvida pelo banzo comprimido e nem pela armadura transversal. Concluiu-se que essa parcela é resistida por mecanismos secundários complementares à treliça. Esses mecanismos são definidos pelo campo de tensões de tração oriundo da aderência entre o aço e o concreto, pela resistência residual à tração do concreto fissurado (*tension stiffening*), pelo efeito de pino proveniente da flexão da armadura longitudinal que cruza as fissuras inclinadas e pelo engrenamento dos agregados. Diante desses fatos, algumas modificações foram introduzidas no modelo da treliça clássica de Ritter-Mörsch, dando origem à analogia de treliça generalizada.

#### 2.2.2.2 A analogia da treliça generalizada

O modelo de treliça generalizada distingue-se da treliça clássica pelas seguintes características: a treliça é internamente hiperestática, o banzo comprimido apresenta inclinação variável e as diagonais comprimidas possuem ângulo de inclinação entre 30° e 45° com o banzo tracionado.

Para efeitos de dimensionamento das armaduras transversais, o modelo de treliça generalizada torna-se, na prática, um procedimento de difícil utilização. Assim, para

aplicações práticas, foi desenvolvido um artifício que contorna essa dificuldade, permitindo obter armaduras transversais de modo mais simples e mais econômicas do que as armaduras previstas pela analogia da treliça clássica.

Para que a segurança contra ruína por força cortante seja garantida, a força cortante resistente deve ser maior ou igual à força cortante solicitante na seção. Além disso, a condição de ruptura das bielas comprimidas também deve ser sempre verificada. Essas exigências são traduzidas matematicamente pelas seguintes expressões:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (2-13)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} \quad (2-14)$$

sendo que:  $V_{Sd}$  é a força cortante solicitante de cálculo na seção;  $V_{Rd2}$  é a força cortante resistente de cálculo correspondente à ruptura por compressão das bielas diagonais de concreto;  $V_{Rd3}$  é a força cortante resistente de cálculo que corresponde à ruptura por tração diagonal nos elementos com armadura transversal.

O artifício consiste em admitir que a força cortante resistente dos elementos em concreto armado,  $V_{Rd3}$ , seja a soma de duas parcelas. A primeira parcela se refere à contribuição do concreto,  $V_c$ , representando o somatório das contribuições do banzo comprimido, do efeito de pino da armadura longitudinal e do engrenamento dos agregados. A segunda parcela,  $V_{sw}$ , corresponde à contribuição da armadura transversal. No dimensionamento faz-se  $V_{Sd} = V_{Rd3}$ , o que resulta em:

$$V_{Sd} = V_c + V_{sw} \quad (2-15)$$

Desse modo conclui-se que a armadura transversal deve resistir não à força cortante total, mas sim a apenas uma parcela definida por:

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c \quad (2-16)$$

Com o emprego desse artifício, é possível manter formalmente a analogia da treliça clássica para o cálculo da armadura transversal, beneficiando-se de sua simplicidade, porém compensando as imperfeições de sua teoria original, obtendo-se assim áreas de armaduras transversais mais econômicas. A Figura 2-8 sugere que esse artifício é semelhante a

considerar uma translação da curva real das tensões na armadura transversal, fazendo-a superpor-se à reta teórica das tensões previstas pelo modelo da treliça clássica.

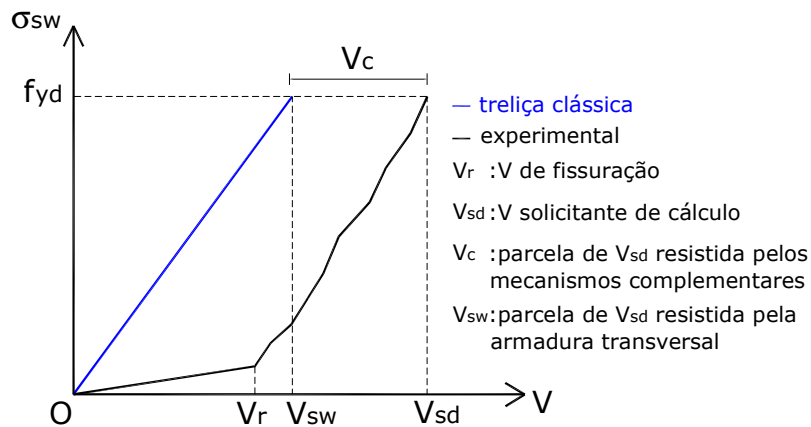


Figura 2-8 – Variação da tensão na armadura transversal de uma viga em concreto armado

Collins et al. (1996) apresentaram um resumo dos diversos modelos de previsão de resistência ao cisalhamento, adotados pelo ACI Code (1989), para o projeto de estruturas de concreto à força cortante. Com base em resultados experimentais de vigas em concreto armado, os autores propuseram uma nova metodologia para projeto. O método tem como hipótese principal que a resistência ao cisalhamento em vigas é dada pela soma das parcelas resistentes do concreto, dos estribos e da protensão, se houver. A formulação é extremamente dependente do ângulo que as fissuras formam com a horizontal e de um parâmetro que traduz a capacidade do concreto em transferir tensões de cisalhamento. Nesse parâmetro, está incluída diretamente a influência da dimensão dos agregados e a abertura das fissuras. Segundo os autores, o método é mais preciso que os modelos propostos pelo ACI Code (1989), pois considera diretamente a existência das tensões de tração no concreto fissurado e também a influência que a deformação da armadura longitudinal de tração exerce sobre a resistência do concreto ao cisalhamento.

### 2.2.2.3 Mecanismos complementares: introdução

Com os diversos ensaios experimentais realizados, a treliça clássica proposta por Ritter-Mörsch mostrou-se conservadora, uma vez que a resistência ao cisalhamento da seção era atribuída somente à armadura transversal. Em decorrência desses ensaios, as normas internacionais nos dias de hoje adotam um termo empírico adicional correspondente à contribuição do concreto, ou também chamado de contribuição dos mecanismos

complementares de resistência ao cisalhamento, que leva em conta outras fontes de resistência. Dentre essas fontes estão: o engrenamento dos agregados, o efeito de pino da armadura longitudinal que cruza as fissuras e a resistência residual à tração do concreto fissurado. Conseqüentemente, por conta desse empirismo, cada código de projeto adota uma expressão diferente para o cálculo dessa parcela de contribuição. A ABNT NBR 6118:2003, em particular, adota essa parcela como sendo função apenas da resistência do concreto à tração e das dimensões da seção transversal. A Figura 2-9 ilustra as parcelas que resistem ao cisalhamento para uma seção fissurada de concreto armado, sendo caracterizadas pelo concreto íntegro,  $V_c$ , armadura transversal,  $V_{sv}$ , engrenamento dos agregados,  $V_a$  e efeito de pino da armadura longitudinal,  $V_d$ . No entanto, a grande dificuldade de se quantificar de maneira fechada os efeitos complementares, segundo He & Kwan (2001), está ligada ao fato de que seus componentes não são constantes, mas variam por conta das redistribuições de tensões provenientes do aumento da abertura das fissuras, do grau de danificação do concreto e do escoamento da armadura, o que torna difícil a tarefa de incorporar alguns desses efeitos adequadamente às formulações de projeto.

Em uma tentativa de resolver o problema, Hoang & Nielsen (1998) aplicaram a teoria da plasticidade para analisar o comportamento último ao cisalhamento de vigas em concreto armado. Os autores desenvolveram expressões para o cálculo da força última e da força de fissuração admitindo que a estrutura atinja a ruína por força cortante. A hipótese principal do modelo foi considerar que as fissuras diagonais são linhas de escoamento com dissipação de energia, fato esse que possibilitou, a partir do PTV, desenvolver o modelo. Foram definidas expressões para os casos de vigas simplesmente apoiadas e contínuas sem armadura transversal, assim como para vigas simplesmente apoiadas com armadura transversal. É interessante destacar que a formulação apresentada depende fortemente de um fator de eficiência, que engloba o comportamento pós-pico do concreto à compressão, o deslizamento das faces das fissuras e o estado de danificação local do concreto. Os resultados obtidos com a formulação aplicada foram satisfatórios quando comparados com ensaios experimentais. Os autores concluíram que a abordagem plástica é bastante interessante para o projeto de estruturas de concreto, pois proporciona uma visão clara a respeito dos mecanismos de ruína da estrutura considerada.



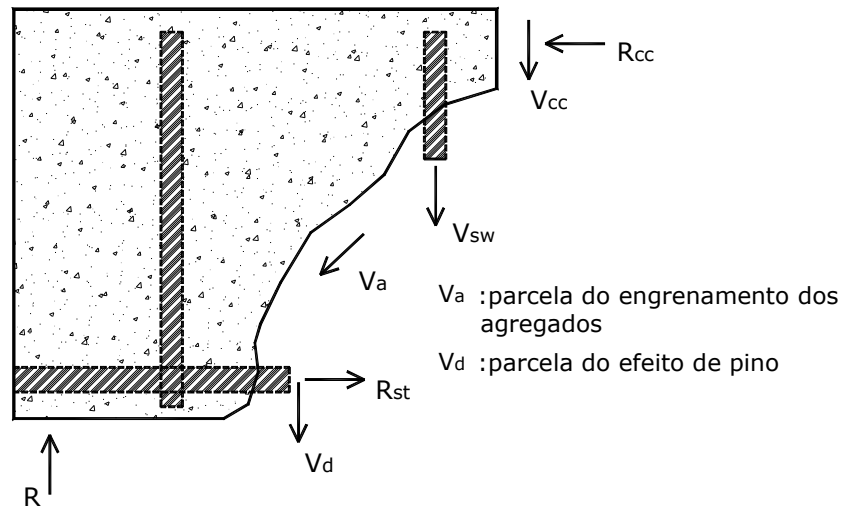


Figura 2-9 – Mecanismos complementares na transferência do cisalhamento (He & Kwan 2001)

Bhatt & Kader (1998) mostraram resultados de análises não-lineares com o método dos elementos finitos (elementos 2-D) para a obtenção de valores de resistência à força cortante de vigas retangulares em concreto armado, a partir de um modelo mecânico para o concreto. Os autores reuniram diversos resultados de ensaios realizados com vigas em concreto armado e compararam com os testes numéricos variando os parâmetros importantes no comportamento ao cisalhamento, com o objetivo de calibrar um modelo prático para a predição de cargas últimas referentes ao modo de ruína por força cortante. Para a modelagem do concreto à tração, foi considerado o fenômeno do *tension stiffening*. Já na compressão, os autores adotaram uma lei constitutiva que, após o pico de tensão, considera um trecho descendente somente se houver armadura transversal. O critério de ruptura foi estabelecido em função das tensões octaédricas no material. Segundo os autores, o modelo apresentou resultados melhores para vigas com menor espaçamento entre estribos, o que lhes garantiu um comportamento mais dúctil.

Neves et al. (2000) apresentaram um modelo simplificado de resistência ao cisalhamento para vigas em concreto armado a partir de um modelo de dano. O método dos elementos finitos foi empregado considerando na formulação o elemento de viga de Timoshenko para o cálculo das distorções e curvaturas consistentes. O modelo de cisalhamento desenvolvido assume que a resistência à força cortante é a soma de uma parcela referente ao concreto e outra correspondente à armadura transversal. Além disso, os autores consideraram com base em resultados experimentais, que a armadura transversal só começa a contribuir a partir do surgimento de fissuras no concreto, o que numericamente significa que as tensões residuais da fase não-linear, decorrentes à danificação do concreto são absorvidas

integralmente pela armadura transversal. Segundo os autores, apesar de ainda ser um modelo simplificado, é possível representar melhor os casos de vigas subarmadas transversalmente, pois se torna possível representar o estado limite último por escoamento da armadura transversal.

A seguir, será apresentada uma descrição particular para cada mecanismo complementar de resistência ao cisalhamento, isto é, efeito de pino e engrenamento dos agregados, com descrição de cada comportamento, aspectos de modelagem computacional e os principais trabalhos publicados.

#### *2.2.2.4 Mecanismos complementares: engrenamento dos agregados*

Vários modelos foram propostos na tentativa de explicar e prever o comportamento do engrenamento dos agregados. Laible et al.<sup>10</sup> (1977) apud Millard & Johnson (1984) desenvolveram um modelo a partir da consideração de que o engrenamento é proveniente de um atrito local e um atrito global, ambos nas faces da fissura. Esse atrito local provoca o engrenamento dos agregados miúdos, ao passo que o atrito global causa o engrenamento dos agregados graúdos. Um modelo alternativo foi proposto por Fardis & Buyukozturk<sup>11</sup> (1979) apud Millard & Johnson (1984) no qual o engrenamento dos agregados ocorre somente em função do deslizamento friccional de duas superfícies rígidas, representadas por uma série de segmentos de parábola. Walraven (1981) sugeriu posteriormente que o concreto pode ser representado por um sistema de duas fases, ou seja, os agregados e a matriz de cimento, de modo que possa ser modelado como uma distribuição de esferas rígidas de vários tamanhos, distribuídas em profundidades diferentes em uma matriz de cimento de comportamento rígido-plástico (Figura 2-10). O modelo considera que tensões de cisalhamento e tensões de compressão locais surjam na interface dessas esferas, à medida que ocorre a abertura de fissuras e o deslizamento de suas faces. Assim, a força cortante, nesse modelo, é resistida por uma combinação entre esmagamento e deslizamento dessas esferas rígidas sobre a matriz de cimento (Figura 2-11).

---

<sup>10</sup> Laible, J.P.; White, R.N.; Gergely, P. (1977). Experimental investigation of seismic shear transfer across cracks in concrete nuclear containment vessels. *Reinforced concrete structures in seismic zones*. Detroit, American Concrete Institute, 1977. ACI Special Publication SP-53, p. 203-206.

<sup>11</sup> Fardis, M.N.; Buyukozturk, O. (1979). Shear transfer model for reinforced concrete. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. v. 105, n. EM2, April, p. 255-275.

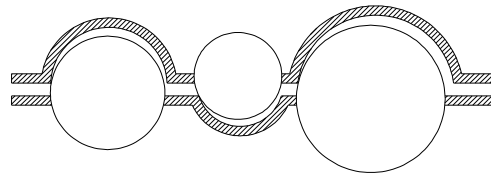


Figura 2-10 – Modelo físico para o estudo do engrenamento dos agregados (Walraven 1981)

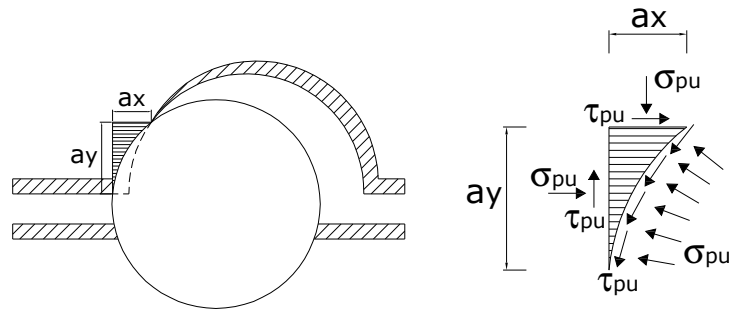


Figura 2-11 – Área de contato matriz-agregado e as condições de tensão (Walraven 1981)

Millard & Johnson (1984) fizeram ensaios experimentais com o objetivo de analisar o mecanismo de transferência de tensões de cisalhamento ao longo das fissuras em estruturas de concreto armado. Os autores compararam os resultados com os modelos teóricos citados no parágrafo anterior e verificaram que o modelo de Walraven (1981) apresentou a melhor previsão. Os ensaios foram realizados de modo a eliminar a aderência entre o aço e o concreto para que as espessuras das fissuras permanecessem constantes. Entretanto, os autores concluíram que em estruturas de concreto armado, a aderência provoca uma variação nas espessuras das fissuras, influenciando no engrenamento dos agregados.

Dei Poli et al. (1987) procuraram quantificar a magnitude da contribuição do engrenamento dos agregados na resistência à força cortante em vigas de seção I em concreto armado, assim como a extensão da influência desse mecanismo complementar no dimensionamento da armadura transversal. Para isso, os autores utilizaram o modelo de Bazant & Gambarova<sup>12</sup> (1980) (*rough crack model*) e o modelo de Walraven (1981), ambos com algumas adaptações, comparando-os com os resultados das formulações do CEB e do ACI. A contribuição do engrenamento dos agregados depende, basicamente, dos deslocamentos relativos  $\delta_t$  e  $\delta_n$  entre as faces das fissuras, uma vez que as tensões na interface são funções, essencialmente, desses deslocamentos (Figura 2-12). Vale ressaltar

<sup>12</sup> Bazant, Z.P.; Gambarova, P.G. (1980). Rough cracks in reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 106, n. 4, April, p. 819-842.

também que a contribuição do engrenamento dos agregados deve ser limitada à resistência das bielas comprimidas de concreto formadas no interior da peça de modo que, a partir disso, fica claro que esse mecanismo complementar depende fortemente da própria resistência à compressão do concreto. Finalmente, os autores concluíram que as previsões dos códigos normativos para dimensionamento de elementos estruturais em concreto armado, embora um pouco conservadores, se aproximam do comportamento real em vigas de seção I para valores pequenos e médios de tensão última de cisalhamento.

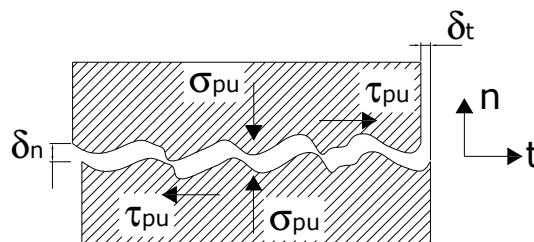


Figura 2-12 – Deslocamentos e tensões nas faces da fissura (Dei Poli et al. 1987)

Dei Poli et al (1990) propuseram um modelo que incorpora o escorregamento entre os estribos e o concreto, e a rigidez à flexão das bielas comprimidas como sendo um componente do engrenamento dos agregados. O efeito de pino foi desconsiderado. De acordo com os autores, os estribos encontram-se na iminência do escoamento na interface das fissuras de cisalhamento. Porém, em função da aderência estribo-concreto entre fissuras, as deformações e tensões no estribo são menores que o limite de escoamento. Assim, a deformação no estribo na interface com a fissura foi dada pela deformação de escoamento do aço ponderada por um coeficiente alfa que leva em conta o efeito do *tension stiffening* local. Com esse modelo, tornou-se possível, segundo os autores, determinar a taxa ótima de armadura transversal para melhorar a ductilidade da seção transversal ao cisalhamento.

Zararis (1997) estudou os mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento em elementos de membrana em concreto armado e verificou que a primeira parcela mobilizada corresponde às forças desenvolvidas nas armaduras. O engrenamento dos agregados somente surge nas fissuras desses elementos, em substituição à perda de parte das tensões de cisalhamento nas armaduras. Além disso, segundo o autor, a natureza do fenômeno não é de caráter friccional, mas sim de reação em virtude da mudança do estado de tensão, originado pela perda de capacidade das armaduras. A perda da capacidade resistente ao cisalhamento das barras da armadura pode ocorrer por duas razões: escorregamento das barras entre as faces das fissuras ou pelo escoamento da armadura na seção da fissura. Assim, as

forças de engrenamento se desenvolvem para substituir essas forças perdidas e equilibrar novamente o carregamento externo. A justificativa para a desconsideração da hipótese de comportamento friccional do engrenamento dos agregados se apóia na distribuição de tensões nas faces das fissuras. Essas tensões apresentam componentes de cisalhamento e de tração, de modo que esse estado não pode ser representado por um estado com tensões de compressão, o que descarta a possibilidade de uma representação friccional para o comportamento do engrenamento dos agregados nas faces da fissura.

Martín-Pérez & Pantazopoulou (2001) estudaram o comportamento dos diversos mecanismos complementares na degradação da resistência ao cisalhamento de elementos em concreto armado. Nas superfícies das fissuras, a transferência de tensões de cisalhamento, segundo os autores, se dá pelo engrenamento dos agregados e efeito de pino da armadura tracionada. A partir de resultados experimentais, foi verificado que a rigidez ao cisalhamento desses mecanismos diminui rapidamente à medida que a abertura das fissuras aumenta. Isso significa que esses mecanismos de resistência dependem fortemente dos estados de deformações dos materiais. Com isso, a contribuição do engrenamento dos agregados foi obtida como sendo função direta da deformação principal de tração no concreto,  $\varepsilon_1$ , que pode ser entendida como um indicador da largura das fissuras. A expressão foi calibrada em testes com painéis de cisalhamento, de modo a explicitar uma parcela de tensão de cisalhamento relacionada ao engrenamento dos agregados. Para essa parcela, os autores obtiveram a seguinte expressão:

$$\tau_{ag} = \frac{0,0001342 \cdot E_c}{1 + \varepsilon_1 / 0,0018} \quad (2-17)$$

sendo que:  $E_c$  é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto em MPa.

He & Kwan (2001) também estudaram o assunto e consideraram que as tensões de cisalhamento que surgem a partir do deslizamento relativo entre as faces de uma fissura, devem ser absorvidas pelo engrenamento dos agregados e pelo efeito de pino da armadura longitudinal. Assim, o módulo de elasticidade transversal do concreto, segundo os autores, deve ser a soma de uma parcela referente ao engrenamento dos agregados,  $G_a$ , e outra referente ao efeito de pino,  $G_d$ . Essa proposta na verdade, baseia-se na idéia do fator de retenção de cisalhamento,  $\mu$ , que consiste em uma simples redução imposta ao módulo de elasticidade transversal do concreto para levar em conta o efeito da fissuração. Os autores

utilizaram esse modelo e adaptaram-no em função da necessidade de levar em conta, de alguma forma, as aberturas das fissuras. A seguinte expressão foi adotada:

$$G_a = \mu \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{1c}}{0,004} \right)^2 \cdot G_o \geq 0 \quad (2-18)$$

sendo que:  $\varepsilon_{1c}$  é a deformação correspondente à tensão de tração máxima da direção principal 1;  $G_o$  é o módulo de elasticidade transversal do concreto íntegro. A parcela  $\varepsilon_1 - \varepsilon_{1c}$  pode, segundo os autores, ser considerada como uma medida da abertura das fissuras. O complemento do módulo transversal correspondente ao efeito de pino será mostrado no item 2.2.2.5.

#### 2.2.2.5 Mecanismos complementares: efeito de pino

Conceitualmente, o efeito de pino ocorre em virtude do surgimento de uma força de reação decorrente da tentativa de corte e flexão local das barras da armadura, quando estas atravessam uma fissura. As faces da fissura tendem a sofrer um deslizamento proveniente de tensões de cisalhamento nessas faces, causando nas barras da armadura um deslocamento transversal relativo, mobilizando essa força de reação (Figura 2-13). Essa força é responsável pelo efeito de pino da armadura e confere, juntamente com o engrenamento dos agregados, uma resistência adicional ao cisalhamento em elementos de concreto armado.

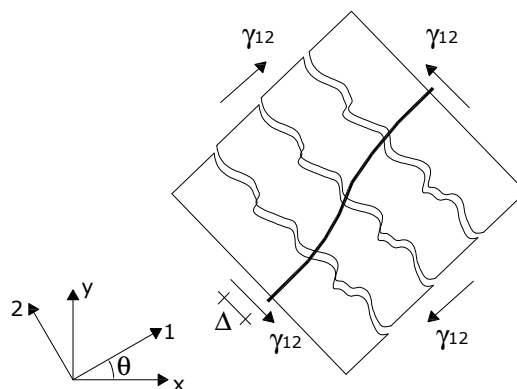


Figura 2-13 – Efeito de pino da armadura nas faces das fissuras (He & Kwan 2001)

Vários pesquisadores já estudaram esse fenômeno através de ensaios experimentais e puderam identificar alguns parâmetros que exercem influência direta sobre o efeito de pino. Krefeld & Thurston (1966) concluíram que quanto maior o cobrimento de concreto e maior

for a largura da viga, maior será a força mobilizada pelo efeito de pino. Entretanto, Baumann<sup>13</sup> (1968) apud Jimenez et al. (1979) não observou nenhuma variação no efeito de pino quando o cobrimento de concreto foi aumentado. Com relação à presença de armadura transversal, Gergely<sup>14</sup> (1969) e Houde<sup>15</sup> (1973) apud Jimenez et al. (1979) afirmaram que o efeito de pino em vigas de concreto sem armadura transversal é limitado a cerca de 20% a 25% da força cortante última. Jimenez et al (1979) estudaram posteriormente o efeito de pino em elementos em concreto armado e concluíram que existe uma leve interação desse mecanismo com a aderência entre o aço e o concreto. Isso ocorre por conta da fissuração longitudinal proveniente da perda de aderência entre os materiais, afetando diretamente o efeito de pino. A presença de estribos ajuda a diminuir essa fissuração longitudinal e, conseqüentemente, melhora a contribuição do efeito de pino na resistência ao cisalhamento dos elementos desde que o estribo esteja a menos de 25mm da fissura.

Millard & Johnson (1984) fizeram ensaios em vigas em concreto armado para investigar o comportamento do efeito de pino da armadura longitudinal e sua contribuição na resistência ao cisalhamento. Os parâmetros analisados foram: diâmetro das barras da armadura longitudinal, resistência à compressão do concreto e a força de tração na armadura. Os resultados experimentais foram comparados com um modelo teórico baseado na teoria de vigas sobre base elástica. Para diâmetros maiores da armadura longitudinal, foi observado um aumento na rigidez ao cisalhamento e também na tensão cisalhante última. O aumento da resistência do concreto apresentou variações quase que insignificantes na força de pino. Com relação às tensões normais da armadura longitudinal, o aumento dessas tensões provocou uma perda na rigidez e na tensão última de cisalhamento. Nesse caso, a ruína ocorreu não por fendilhamento, mas sim pelo esmagamento do concreto ao redor da armadura longitudinal. De acordo com os autores, esse fato ocorreu, pois a tensão axial da armadura causou danificação no concreto logo abaixo das barras e, conseqüentemente, reduziu a capacidade resistente desse concreto, diminuindo a resistência de pino. O modelo teórico baseado na teoria de vigas sobre base elástica apresentou bons resultados na previsão da rigidez inicial de cisalhamento e também na estimativa da força de pino última, sendo recomendado pelos autores. Além disso, vale ressaltar que o efeito de pino tem comportamento não-linear, uma vez que a rigidez ao

---

<sup>13</sup> Baumann, T. (1968). Versuche zum studium der verdubelungswirkung der biegezugbewehrung eines stahlbetonbalken. *Material Prüfungsamt Fur Das Bauwesen Der Technischen Hochschule*, Munchen, Bericht N° 77.

<sup>14</sup> Gergely, P. (1969). Splitting cracks along the main reinforcement in concrete members. *Dept. of Strucutral Enguneering*, Report, Cornell University.

<sup>15</sup> Houde, J. (1973). Study of force-displacement relationships for the finite element analysis of reinforced concrete. *Structural Concrete Series*, n. 73-2, McGill University, Montreal, Dec.

cisalhamento pode ser afetada pelo esmagamento e/ou fendilhamento do concreto abaixo das barras, isto é, do cobrimento, bem como pelo escoamento da armadura longitudinal de tração. Assim, os autores concluíram que o efeito de pino das barras da armadura consiste, basicamente, na composição de três mecanismos de transferência de tensões: cisalhamento direto, uma espécie de enroscamento das barras no concreto e a flexão localizada dessas barras quando estas cruzam as fissuras. Concluíram também que o mecanismo de flexão local das barras será predominante sobre os outros se o cobrimento de concreto for pequeno, garantindo pouca rigidez ao apoio das barras. Caso contrário, os dois primeiros mecanismos serão preponderantes no comportamento do efeito de pino. Portanto, fica claro que o cobrimento de concreto exerce papel fundamental no mecanismo de pino e, assim, na resistência ao cisalhamento de elementos em concreto armado.

Desde que o efeito de pino foi reconhecido na década de 30 como um mecanismo eficiente de transferência de tensões de cisalhamento em situação de serviço, a analogia com uma viga sobre base elástica foi introduzida. Assim, as barras da armadura funcionam como vigas apoiadas sobre uma base elástica representada por molas. Essa base que serve de apoio para as barras de aço é definida, no caso da armadura tracionada ser positiva, pelo próprio cobrimento inferior de concreto. A representação adequada do comportamento do efeito de pino é afetada por disposições geométricas das armaduras na seção transversal, tais como, cobrimento de concreto, espaçamento entre as barras na seção e armadura transversal, de modo que isso acarreta grande complexidade ao fenômeno. Aliado a isso, existe também o fato de que o comportamento dos materiais, no caso o aço e o concreto, é não-linear, influenciando também no processo. Por conta disso, apesar de vários ensaios realizados desde a década de 50, existem poucos modelos matemáticos para a modelagem do efeito de pino. Em função de sua simplicidade e coerência, a hipótese de viga sobre base elástica é aceita e utilizada até hoje como fundamento de todos esses métodos de predição do efeito de pino em elementos de concreto armado. A grande vantagem dessa abordagem é que todas as particularidades do fenômeno são incorporadas em um único parâmetro definido como sendo o coeficiente de rigidez,  $k$ , da porção de concreto abaixo das barras, ou seja, o cobrimento. De maneira geral, esse coeficiente de mola pode assumir valores constantes, em casos de abordagem puramente linear, ou pode variar em função do deslocamento transversal da barra da armadura, bem como também em função de parâmetros que levem em conta o grau de danificação do concreto na região que interfere no comportamento de pino.



Dulacska<sup>16</sup> (1972) e Soroushian et al.<sup>17</sup> (1986) apud Dei Poli et al. (1992) utilizaram os conceitos de análise limite para determinar um modelo de previsão da força última de pino,  $V_{du}$ . Em ambos os trabalhos, a hipótese de comportamento rígido-plástico foi assumida tanto para o concreto do cobrimento, quanto para as barras da armadura. As expressões propostas são respectivamente:

$$V_{du} = 1,267 \cdot d_b^2 \cdot \sqrt{f_y \cdot f_c} \quad (2-19)$$

$$V_{du} = 2,574 \cdot d_b^2 \cdot \sqrt{f_c} \cdot \left( \frac{\gamma^2}{d_b^{0,33}} + 0,175 \cdot \frac{f_y}{\gamma \cdot \sqrt{f_c}} \right) \quad (2-20)$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{E_y}{k \cdot d_b}} \quad (2-21)$$

sendo que:  $d_b$  é o diâmetro da barra;  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa;  $f_y$  é a resistência de escoamento das barras da armadura;  $E_y$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;  $k$  corresponde ao coeficiente de mola do cobrimento de concreto. Na segunda expressão, foi assumido para o coeficiente  $k$  o valor de 271,7MPa/mm.

Posteriormente, Dei Poli et al. (1992) fizeram ensaios para a verificação da resistência de pino em concretos de média (30MPa) e alta resistência (75MPa). Os resultados foram comparados com os modelos de base elástica, Dulacska (1972) e Soroushian et al. (1986). Os autores apresentaram duas alternativas para o cálculo do coeficiente  $k$ , considerando-se o comportamento não-linear dos materiais e o grau de deterioração do concreto que envolve as barras. Na primeira alternativa, o coeficiente  $k$  foi formulado como sendo função da intensidade de carregamento,  $V/V_u$ , que pode ser considerado como uma danificação da estrutura, e também do coeficiente de rigidez do cobrimento de concreto,  $k_c$ , proposto por Soroushian et al.<sup>18</sup> (1987), que é dado por:

<sup>16</sup> Dulacska, H. (1972). Dowel action of reinforcement crossing cracks in concrete. *ACI Journal, Proceedings*, v. 69, n. 12, December, p. 754-757.

<sup>17</sup> Soroushian, P.; Obaseki, K.; Rojas, M.C.; Sim, J. (1986). Analysis of dowel action bars acting against concrete core. *ACI Journal, Proceedings*, v. 83, n. 4, July-August, p. 642-649.

<sup>18</sup> Soroushian, P.; Obaseki, K.; Rojas, M.C. (1987). Bearing strength and stiffness of concrete under reinforcing bars. *ACI Materials Journal*, v. 84, n. 3, May-June, p. 179-184.

$$k_c = 127 \cdot \frac{\sqrt{f_c}}{\sqrt[3]{d_b^2}} \quad (2-22)$$

Para o cálculo de  $V_u$  foi utilizada a Equação 2-19. Assim, tem-se para a primeira alternativa:

$$k = \omega \cdot k_c \quad (2-23)$$

sendo que:  $\omega$  é um parâmetro dado em função da intensidade do carregamento, de acordo com as seguintes expressões:

$$\omega = 2,12 \rightarrow \text{para } V/V_u \leq 0,4$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt[3]{\left\{ 0,544 + 0,026 \cdot \cosh \left[ 8 \cdot \left( \frac{V}{V_u} - 0,4 \right) \right] \right\}^4}} \rightarrow \text{para } V/V_u > 0,4$$

A segunda alternativa de cálculo do coeficiente  $k$  foi proposta por Brenna et al.<sup>19</sup> (1990) apud Dei Poli et al. (1992) e é baseada no deslocamento normalizado,  $W_1/d_b$ , também considerado aqui como uma medida da danificação da estrutura.

$$k = \omega \cdot k_0 \quad (2-24)$$

$$\text{sendo que: } k_0 = 600 \cdot \frac{f_c^{0,7}}{d_b}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt[3]{\left\{ 1,5 \cdot \left[ a + \sqrt{d^2 \cdot \left( 40 \cdot \frac{W_1}{d_b} - b \right)^2 + c^2} \right] \right\}^4}}$$

$$a = 0,59 - 0,011 \cdot f_c; \quad b = 0,0075 \cdot f_c - 0,23; \quad c = 0,0038 \cdot f_c + 0,44; \quad d = 0,0025 \cdot f_c + 0,58$$

O parâmetro  $W_1$  corresponde ao deslocamento transversal teórico das barras da armadura longitudinal, obtido pela teoria de vigas sobre base elástica segundo a seguinte expressão:

<sup>19</sup> Brenna, A.; Dei Poli, S.; Di Prisco, M. (1990). Dowel action: some experimental and theoretical results regarding special concretes. *Studi & Ricerche*, School for the Design of RC Structures, Milan University of Technology, v. 11-89, pp. 321-380.

$$W_1 = \frac{V}{2 \cdot \alpha^3 \cdot E_y \cdot J_b} \quad (2-25)$$

sendo que:  $\alpha$  corresponde à rigidez relativa da fundação, isto é, do cobrimento de concreto;  $J_b$  é o momento de inércia de uma barra da armadura. Os respectivos valores são dados pelas expressões abaixo:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_c \cdot d_b}{4 \cdot E_y \cdot J_b}} \quad (2-26)$$

$$J_b = \frac{\pi \cdot d_b^4}{64} \quad (2-27)$$

Dei Poli et al. (1992) concluíram que os modelos teóricos forneceram bons resultados para concretos de resistência normal (30MPa), podendo ser utilizados para a previsão do efeito de pino de elementos estruturais em concreto armado. Para o caso de concretos de alta resistência (75MPa), os modelos não representaram muito bem o comportamento do efeito de pino, necessitando de um número maior de testes. A hipótese de viga sobre base elástica pode ser bem utilizada na prática para a previsão do efeito de pino, desde que sejam incluídos índices de danificação no cálculo do coeficiente  $k$  de rigidez do concreto.

Jélic et al. (1999) fizeram um estudo com o objetivo de verificar qual a real importância do efeito de pino e sua dependência do diâmetro das barras em vigas em concreto armado. Para isso, os autores ensaiaram quatro vigas idênticas, variando-se somente os diâmetros das barras da armadura tracionada, porém mantendo-se a área de armadura constante para todos os casos. Os resultados experimentais apontaram que uma vez que a área de armadura é constante, a capacidade última das vigas ao cisalhamento foi praticamente a mesma, não importando o diâmetro das barras ou a sua tensão de escoamento. Além disso, os autores realizaram a modelagem numérica dos ensaios desconsiderando o efeito de pino. Após as modelagens, foi verificado que o efeito de pino não apresentou nenhuma influência significativa sobre o comportamento das vigas, podendo ser desconsiderado em casos práticos.

Martín-Pérez & Pantazopoulou (2001) estudaram o comportamento de estruturas em concreto armado submetidas à tensões de cisalhamento, modelando cada parcela que exerce

influência no processo. O estudo teve como objetivo a modelagem das diferentes fontes que contribuem na resistência ao cisalhamento. Segundo os autores, o primeiro mecanismo que atua contra o deslizamento das faces das fissuras é o engrenamento dos agregados. À medida que as solicitações e, conseqüentemente, a abertura das fissuras aumenta, o engrenamento dos agregados deixa de colaborar significativamente. A partir daí, o efeito de pino passa a ser o principal mecanismo de resistência ao cisalhamento. Esse tipo de modelagem é bastante interessante, pois permite considerar os efeitos das deformações e, conseqüentemente, de sua degradação ao longo da atuação do carregamento, fato esse que não é possível verificar através da utilização das expressões de resistência ao cisalhamento, fornecidas pelos códigos de projeto.

He & Kwan (2001) desenvolveram um modelo numérico para simular o comportamento de elementos em concreto armado fortemente influenciados pelo cisalhamento. O efeito de pino foi amplamente discutido e implementado seguindo uma abordagem coerente para incorporação em um código computacional de análise estrutural via método dos elementos finitos. Os autores enfatizaram a dificuldade de modelar o efeito de pino, pois consiste em um mecanismo bastante complexo e de difícil observação em ensaios experimentais. O modelo incorpora a contribuição do efeito de pino, a partir da modificação da parcela da matriz constitutiva de cada elemento finito referente à contribuição ao cisalhamento. Assim, conforme descrito na seção anterior, o módulo de elasticidade transversal recebe, além da contribuição do engrenamento dos agregados, a parcela correspondente ao efeito de pino, dada por:

$$G_d = \frac{\tau_{12}^d}{\gamma_{12}} \quad (2-28)$$

sendo que:  $\gamma_{12}$  é a distorção que ocorre nas faces de um elemento fissurado (Figura 2-13);  $\tau_{12}^d$  corresponde à tensão de cisalhamento nas faces de um elemento fissurado devido à força de pino proveniente da armadura longitudinal. Essa tensão pode ser calculada por:

$$\tau_{12}^d = \frac{\rho_s}{A_s} \cdot K_d \cdot L \cdot \gamma_{12} \quad (2-29)$$

sendo que:  $\rho_s$  é a taxa de armadura na direção da fissura;  $A_s$  é a área da seção transversal da barra que cruza a fissura;  $L$  é o comprimento efetivo submetido ao efeito de pino;  $K_d$  corresponde à rigidez de pino da armadura longitudinal.

A parcela  $L \cdot \gamma_{12}$  fornece o deslocamento transversal,  $\Delta$ , sofrido pela barra da armadura longitudinal submetida ao efeito de pino. Esse deslocamento pode ser calculado a partir da hipótese de viga sobre base elástica, na qual cada barra corresponde a uma viga apoiada sobre uma base de molas, representando no caso, o cobrimento de concreto (Figura 2-14).

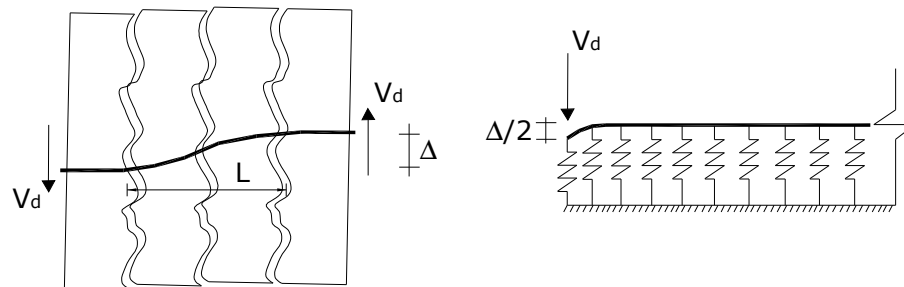


Figura 2-14 – Hipótese para o cálculo do deslocamento de pino (He & Kwan 2001)

O comprimento efetivo  $L$ , na verdade, trata da região da barra onde a deformação decorrente do efeito de pino é significativa. Assim, tem-se:

$$L = \frac{\pi}{\alpha} \quad (2-30)$$

Com relação à rigidez de pino da armadura longitudinal,  $K_d$ , Vintzeleou & Tassios (1987) a partir de ensaios experimentais mostraram que a curva força de pino  $\times$  deslocamento assume comportamento aproximadamente elastoplástico-perfeito. Dessa forma, enquanto a força de pino for menor que a capacidade última,  $V_{du}$ , a rigidez  $K_d$  assume o valor de  $E_y \cdot J_b \cdot \alpha^3$ . Após atingir a capacidade última de pino, a rigidez passa a ser calculada por  $V_{du}/\Delta$ . O valor de  $V_{du}$  é obtido pela Equação 2-19.

He & Kwan (2001) concluíram que o efeito de pino é mais significativo quando a força aplicada se aproxima da capacidade última do elemento. Além disso, em peças com menor taxa de armadura transversal, o efeito de pino também aumenta, já que uma maior porção de força cortante, em função da falta de estribos, deve ser absorvida pela armadura longitudinal.

El-Ariss (2007) fez um estudo sobre o efeito de pino da armadura longitudinal e o acréscimo de resistência ao cisalhamento que este provoca em vigas em concreto armado. O autor propôs um modelo simplificado para incorporar o efeito de pino a partir da teoria de

vigas sobre base elástica. É interessante destacar que juntamente com a força cortante na barra, que corresponde ao efeito de pino, surge também um momento fletor contrário ao momento atuante. Esse fato faz com que surja um estado de deformações proveniente desse momento que deve ser descontado do estado inicial, garantindo assim mais rigidez à seção. O estudo concluiu que a importância do efeito de pino aumenta à medida que a taxa de armadura transversal diminui.

### 2.2.3 Considerações sobre a revisão bibliográfica

O comportamento estrutural do concreto armado é, sem dúvida, bastante complexo. Tal fato tem levado muitos pesquisadores a estudar esse material com o objetivo de estabelecer critérios consistentes para sua utilização no projeto de estruturas. As iniciativas dos pesquisadores e profissionais de engenharia civil têm sido direcionadas à determinação de um modelo ou um conjunto de modelos que permitam representar, de maneira confiável e realista, o comportamento das estruturas em concreto armado. Nesse aspecto, o objetivo seria alcançado a partir da situação em que as pesquisas científicas propusessem uma maneira única e fechada que fosse capaz de representar o material. Vale lembrar que no caso das estruturas de aço, os modelos existentes hoje, baseados na teoria da plasticidade, proporcionam ótimo entendimento dos fenômenos que regem o desempenho do aço, garantindo mais segurança e conhecimento do comportamento dessas estruturas. Isso ocorre em função, evidentemente, das características do material aço, que pode ser considerado como um material homogêneo. Entretanto, essa realidade não se aplica ao concreto, já que se trata de um material heterogêneo e de comportamento bastante peculiar por conta da fissuração que ocorre ao longo da pasta de cimento.

Neste trabalho, a proposta de desenvolvimento de modelos mecânicos-probabilísticos consistentes depende, em sua essência, da boa representação do comportamento estrutural, bem como dos materiais que compõem essas estruturas.

Com base em diversos ensaios realizados encontrados na literatura, foi constatado que o concreto tracionado, mesmo depois do surgimento das fissuras, contribui com a resistência global da estrutura, pois garante um acréscimo de rigidez à tração que anteriormente era desprezado. Esse fato, atualmente, já é considerado de maneira aproximada nos códigos de projeto através do cálculo de valores intermediários de rigidez, visando incorporar essa contribuição do concreto à tração. O CEB-FIP MC 90 considera esse modelo

a partir do cálculo de uma curvatura média definida entre os estádios I e II. Aqui, vale comentar que existem duas definições importantes que serão abordadas a seguir.

O *tension stiffening* consiste no acréscimo de rigidez que o concreto íntegro entre fissuras proporciona à estrutura, em função da interação entre o aço e o concreto nessa região. Alguns autores consideram que o *tension stiffening* é incorporado ao modelo, quando se adota um trecho descendente após ser atingida a resistência à tração do concreto. É evidente que essa consideração proporciona um acréscimo de rigidez à estrutura, pois agrega ao modelo um material que realmente existe na estrutura, porém era desconsiderado. No entanto, esse trecho pós-pico do diagrama tensão  $\times$  deformação à tração do concreto é definido por muitos pesquisadores como *tension softening* e representa a perda gradual de resistência à tração do concreto fissurado. Na região entre fissuras, a tensão de tração da armadura diminui, uma vez que uma parcela desta é transmitida ao concreto íntegro adjacente por meio da tensão de aderência que existe na interface desses materiais. Essa parcela passa então a ser resistida pelo concreto, o que garante um acréscimo de rigidez à estrutura.

De maneira geral, o comportamento dos elementos em concreto armado à flexão é bastante consolidado, uma vez que já são bem conhecidos os mecanismos de transferência de tensões normais ao longo do material, bem como a contribuição das armaduras longitudinais. As melhorias nesse campo podem ainda ser direcionadas aos modelos de materiais, na tentativa de desenvolver critérios melhores para o seu comportamento. No entanto, esse panorama ainda não pode ser observado atualmente com relação ao cisalhamento.

O que se pôde perceber ao longo da revisão bibliográfica é que as pesquisas atuais ainda estão em franco desenvolvimento, no tocante ao comportamento dos elementos em concreto armado ao cisalhamento. É evidente que muito já se conhece sobre esse comportamento, porém ainda não existem definições claras e fechadas que abranjam todos os fenômenos envolvidos no processo. A treliça de Ritter-Mörsch é, sem dúvida, a base para os modelos de cisalhamento, inclusive para o projeto de elementos estruturais submetidos à força cortante. Porém, foi a partir dos ensaios de verificação do modelo de treliça que se percebeu a existência de uma parcela que contribuía na resistência do elemento e que, inicialmente, não era computada pela teoria. A partir dessa época, acreditou-se na existência de uma contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento desses elementos. É justamente sobre essa parcela do concreto que se concentram a grande maioria das pesquisas ainda nos dias de hoje.

Os pesquisadores concordam com a existência de mecanismos que compõem essa contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento. Dentre esses mecanismos complementares de resistência estão o engrenamento dos agregados e o efeito de pino. Para cada um desses fenômenos, já foram propostos diversos modelos para sua consideração direta ou indireta no comportamento dos elementos em concreto armado, inclusive abrangendo também sua implementação em códigos computacionais para análise numérica de estruturas.

A grande maioria dos trabalhos analisados mostrou que esses efeitos são significativos e que sua consideração é importante para uma representação mais adequada do comportamento estrutural do concreto armado. A seguir serão feitos alguns comentários específicos sobre cada um desses mecanismos de transferência do cisalhamento e sua relação com este trabalho.

O engrenamento dos agregados se traduz em uma contribuição na resistência ao cisalhamento a partir do instante em que as fissuras atingem os agregados. Nesse instante, as partículas de agregados se opõem à propagação das fissuras, proporcionando um acréscimo de resistência. No entanto, os modelos observados nos trabalhos apresentam parâmetros relativos à geometria dos agregados e até às propriedades mecânicas dos mesmos. Tais parâmetros tornam bastante complexa a consideração do engrenamento em códigos computacionais e, no caso de elementos finitos unidimensionais, sua implementação torna-se praticamente impossível. Existem outras maneiras de considerar esse mecanismo, nas quais se reduz o módulo de elasticidade transversal do concreto. É importante destacar que os pesquisadores concordam que o engrenamento dos agregados está diretamente associado à abertura das fissuras. Quanto maior a fissuração, menor será a contribuição dos agregados. Por conta disso, uma maneira de se tentar reduzir o módulo elástico transversal do concreto seria a partir de um parâmetro que levasse em conta a deformação principal de tração, uma vez que esta pode ser relacionada diretamente com a abertura das fissuras no concreto. Por conta disso, o autor deste trabalho acredita que os modelos de dano podem já incorporar o fenômeno do engrenamento dos agregados. A evolução do dano, em especial no modelo de Mazars adotado neste trabalho, se dá através das deformações de tração. Dessa forma, quando a deformação principal de tração aumenta, a variável de dano também aumenta, penalizando a rigidez transversal dos elementos. Juntamente com isso, os parâmetros do modelo de dano quando são devidamente calibrados através de ensaios experimentais, já são capazes também de levar em conta esse fenômeno que é intrinsecamente relacionado à massa de concreto. Assim, neste



trabalho, o engrenamento dos agregados será considerado a partir do modelo de dano do concreto.

O efeito de pino também é considerado como um dos mecanismos de resistência ao cisalhamento que é atribuído ao concreto. Na verdade, esse efeito ocorre na armadura longitudinal quando uma fissura a intercepta. Os pesquisadores concordam que o efeito de pino é uma soma de três fenômenos: momento fletor local da armadura, força cortante local da armadura e o “*kinking*”, que consiste em uma espécie de enroscamento da barra no concreto adjacente. Porém, a avaliação adequada de cada um desses efeitos de maneira isolada em laboratório é uma tarefa praticamente impossível, o que impossibilita conhecer qual a sua importância individual na resistência de pino global. Um outro fator importante que representa mais incertezas ainda sobre o efeito de pino é o conhecimento de quais as variáveis que realmente influem em seu comportamento. Existem pesquisadores que afirmam que o diâmetro das barras é de extrema importância no efeito de pino, o que de fato faz sentido, pois a flexão local da barra depende diretamente da inércia de cada barra. Entretanto, existem outros pesquisadores que não acreditam que o diâmetro seja importante, mas sim a área total da camada de armadura. Jélic et al. (1999) afirmaram que o efeito de pino não depende do diâmetro, mas sim da área de armadura. Além disso, por conta dessas incertezas e divergências sobre o comportamento de pino, esses autores sugeriram que esse mecanismo não deve ser levado em conta nas análises numéricas de elementos em concreto armado.

Os modelos existentes para a consideração do efeito de pino em modelagens numéricas são baseados no conceito de viga sobre base elástica aliada a um processo que limita a contribuição de pino quando a armadura longitudinal atinge seu limite. Porém, segundo recomendações de alguns autores, a utilização da teoria de base elástica deve ser acompanhada com alguma maneira de levar em conta a deterioração do concreto adjacente, uma vez que em situações próximas ao estado limite último da estrutura, essas regiões de contato entre as barras e o concreto podem estar bastante danificadas.

É importante salientar que a grande maioria dos modelos observados que consideram esses mecanismos complementares na transferência do cisalhamento se aplica a modelagens 2D e 3D de estruturas em concreto armado. Dessa forma, a proposta deste trabalho de considerar esses mecanismos de resistência em elementos finitos unidimensionais, juntamente com o acoplamento aos modelos de dano é, por conta disso, uma forma de contribuição.

## 2.3 Confiabilidade Estrutural e Otimização

### 2.3.1 Aspectos gerais

Nesta etapa são apresentados os principais trabalhos sobre confiabilidade estrutural e otimização que se referem a esta pesquisa, enfocando os métodos existentes para a avaliação da confiabilidade de elementos estruturais e de sistemas. Também serão abordados os trabalhos que se referem ao acoplamento confiabilidade-otimização, juntamente com as várias possibilidades de aplicações.

A preocupação em se garantir a segurança das construções já vem de muitos séculos atrás. O código “normativo” mais antigo que se tem conhecimento e que aborda essa questão estrutural é o código de Hamurabi, rei da Babilônia, há cerca de 4000 anos atrás. Neste código, previa-se que as responsabilidades eram definidas em termos das conseqüências de uma eventual ruína, segundo a afirmação: “Olho por olho, dente por dente”.

### 2.3.2 Alguns dos trabalhos pioneiros sobre confiabilidade

As primeiras formulações matemáticas do problema da segurança estrutural podem ser atribuídas a Mayer<sup>20</sup> (1926), Wierzbicki<sup>21</sup> (1936) e Streletskii<sup>22</sup> (1947) apud Nowak & Collins (2000). Eles concluíram que as forças externas assim como as resistências dos materiais são variáveis aleatórias e que, para cada estrutura ou elemento estrutural, existe uma possibilidade de ruína. Com esses trabalhos, o conceito de segurança absoluta das estruturas foi abandonado, pois sempre há, por menor que seja, uma probabilidade de ocorrer a ruína.

Freudenthal (1947), a partir dos conceitos anteriores, compilou e discutiu o uso de teorias estatísticas para avaliação da segurança estrutural. Ele propôs, baseado no método das tensões admissíveis, que a probabilidade de falha deve ser calculada pela integração de uma região caracterizada pelas distribuições de probabilidade das variáveis, chamada de domínio de falha. O autor ainda publicou outros trabalhos dentre os quais investigou essa probabilidade envolvendo o estado limite último e de serviço; apresentou as equações de

---

<sup>20</sup> Mayer, M. (1926). *Die sicherheit der bauwerke und ihre berechnung nac grenzkraften statt nach zulassigen spannungen*. Berlin: Springer Verlag.

<sup>21</sup> Wierzbicki, W. (1936). *Safety of structures as a probabilistic problem*. (Technical Review) Przegląd Techniczny (in Polish), Warsaw, Poland.

<sup>22</sup> Streletskii, N.S. (1947). *statistical basis of evaluation of the structural safety factor*. Stroizdat, Moscow: State Publishing House for Buildings. (in Russian).

probabilidade de falha na forma em que são utilizadas até hoje; tratou de otimização estrutural com restrições de risco, sendo um dos primeiros autores a abordar o acoplamento confiabilidade e otimização (Freudenthal<sup>23</sup> 1956; Freudenthal et al.<sup>24</sup> 1966 e Kupfer & Freudenthal<sup>25</sup> 1977) apud Neves (2004). Trata-se, portanto, de um dos autores que foram pioneiros no tema e que merece destaque no cenário mundial de desenvolvimento de pesquisas em confiabilidade estrutural.

A seguir, são descritos dois trabalhos importantes no desenvolvimento da teoria de confiabilidade estrutural:

Primeiramente, Cornell (1969) foi quem propôs o índice de confiabilidade em segundo momento, isto é, dependente somente dos valores de média e desvio-padrão das variáveis aleatórias, como sendo a razão entre a média e o desvio-padrão da função de estado limite. Esta definição é utilizada até os dias de hoje.

Hasofer & Lind (1974) introduziram o conceito do formato invariante do índice de confiabilidade que também perdura até hoje, sendo provavelmente um dos trabalhos mais importantes e citados sobre confiabilidade estrutural. Estabeleceram um critério de segurança estrutural definido por: “Para que haja segurança, a distância da origem do espaço normal-padrão até a superfície de falha deve ser maior que  $\beta$  (índice de confiabilidade) desde que todas as variáveis sejam medidas em unidades de desvio-padrão”. Dessa maneira, os autores definiram que o índice de confiabilidade representa a menor distância entre a média das variáveis aleatórias, definida pela origem do sistema, e a superfície de falha no espaço normal padrão. Esses conceitos ainda são utilizados até hoje e estabelecem as bases para o estudo moderno de confiabilidade.

Ang & Cornell (1974) afirmaram em seu trabalho que o caráter aleatório de uma variável pode ser bem representado por uma média e uma medida de dispersão, que pode ser dada pelo coeficiente de variação ou desvio-padrão.

Rackwitz & Fiessler (1978) apresentaram um algoritmo consistente para o cálculo do índice de confiabilidade. Diferentemente dos métodos anteriores, a idéia básica do método é levar em conta, além da média e desvio-padrão, as funções marginais de probabilidades das variáveis. Além disso, os autores propuseram que as variáveis que não fossem normalmente

---

<sup>23</sup> Freudenthal, A.M. (1956). Safety and probability of structural failure. *Transactions of ASCE*, v. 121, p. 1337-1397.

<sup>24</sup> Freudenthal, A.M.; Garrelts, J.M.; Shinozuka, M. (1966). The analysis of structural safety. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 92, n. ST1, February, p. 267-325.

<sup>25</sup> Kupfer, H.; Freudenthal, A.M. (1977). Structural optimization and risk control. In: *Proceedings of the Second International Conference on Structural safety and Reliability*, Warner Verlag, p. 627-639.

distribuídas fossem transformadas em normais equivalentes. Consideraram as cargas como seqüências aleatórias dependentes do tempo. É interessante destacar o tratamento utilizado pelos autores para os processos dependentes do tempo. Esses processos foram transformados em variáveis aleatórias a partir de seus valores extremos. Segundo os autores, o procedimento desenvolvido pode ser usado diretamente em cálculos de probabilidade ou para verificar outras abordagens que tratam de combinações de cargas.

Fiessler et al. (1979) fizeram uma revisão sobre os métodos aproximados de confiabilidade, em especial o FORM (*First Order Reliability Method*), enfocando a obtenção de novas aproximações do tipo SORM (*Second Order Reliability Method*). De acordo com os autores, a probabilidade de falha depende do índice de confiabilidade, da curvatura da equação de estado limite no ponto de projeto e do tamanho do vetor de variáveis aleatórias. Em casos em que as variáveis se distanciam muito da distribuição normal e/ou quando o número de variáveis aleatórias é grande, as chances de grandes curvaturas nas equações de estado limite aumentam. Nesses casos, a curvatura pode introduzir erros consideráveis na aproximação FORM, sendo mais indicado o uso do SORM. No entanto, os autores concluíram que de um modo geral, a estimativa de primeira ordem para a probabilidade de falha é suficientemente precisa para os problemas práticos em engenharia. É importante ressaltar que podem existir casos em que a curvatura da superfície de falha é tão acentuada que mesmo o SORM pode ainda apresentar erros no cálculo da probabilidade de falha.

Com relação aos métodos aproximados, de acordo com Gupta & Manohar (2004), os pesquisadores Box e Wilson<sup>26</sup> em 1954 foram originalmente os primeiros a propor o Método de Superfícies de Resposta (RSM) como procedimento estatístico para encontrar condições operacionais de um processo químico cujas respostas foram otimizadas.

No contexto da confiabilidade estrutural, Bucher e Bourgund em 1990 foram os pioneiros a utilizar o RSM como forma de produzir uma aproximação explícita da equação de estado limite do problema. Segundo os autores, duas únicas iterações eram suficientes para representar a equação de estado limite e, conseqüentemente, resolver o problema. Porém, Rajashekhar & Ellingwood (1993) ponderaram que em alguns casos apenas duas iterações poderiam não ser suficientes. O critério por eles proposto foi então estabelecer que a convergência aconteceria quando a distância entre os pontos de projetos sucessivos fosse

---

<sup>26</sup> Box, G.E.P.; Wilson, K.B. (1954). The exploration and exploitation of response surfaces: some general considerations and examples. *Biometrics* 1954; 10: 16-60.

menor que uma tolerância pré-estabelecida. Com esses trabalhos, a aplicação do RSM em análise de confiabilidade estrutural tornou-se bastante utilizada.

### 2.3.3 Métodos aproximados, confiabilidade de componentes e de sistemas

Melchers (1983) fez uma associação em paralelo para avaliar a confiabilidade de sistemas estruturais. O autor verificou que as resistências individuais dos componentes refletem fortemente na confiabilidade do sistema.

Ditlevsen & Bjerager (1984) estudaram a confiabilidade de sistemas estruturais de alta redundância. Segundo os autores, essa determinação é difícil, pois os sistemas apresentam diversas possibilidades de falha. Por conta disso, na tentativa de simplificar as análises fazendo-se a escolha de apenas alguns modos de falha, a probabilidade de falha do sistema pode se tornar um falso estimador de sua segurança. Para contornar esse problema, os autores sugeriram o cálculo de limites inferiores e superiores para a probabilidade de falha do sistema.

Enevoldsen et al. (1994) propuseram um algoritmo adaptativo baseado no método de superfície de resposta (RSM) para a estimativa do índice de confiabilidade em casos de funções de estados limite especiais. O método foi empregado para funções de estados limites que envolvem ruídos, problemas com mínimos locais e descontinuidades na primeira derivada. A técnica foi formulada empregando-se apenas o plano de experiência composto e foi dividida em duas etapas. Na primeira etapa, o domínio que contém o ponto mais provável de falha é determinado em um processo de busca global. Na segunda etapa, uma superfície de resposta mais precisa é encontrada em torno do mesmo ponto de falha definido na etapa anterior, caracterizando um processo de busca local. A chave do algoritmo, segundo os autores, consiste no fato de que após o cálculo do ponto de projeto da próxima iteração do RSM, verifica-se se o ponto encontrado está no domínio definido por uma distância máxima entre o centro do plano composto e o ponto de canto que constitui o plano. Se o ponto encontrado estiver fora dos limites definidos por essa distância máxima, reinicia-se o processo com uma nova distância máxima. Procedendo dessa forma, os autores afirmam que se obtém estabilidade numérica no processo de busca do ponto mais provável de falha e, conseqüentemente, na estimativa do índice de confiabilidade.

Val et al. (1996) propuseram um método de busca direcional para solução do processo de otimização necessário para a determinação do índice de confiabilidade e posterior probabilidade de falha. O método proposto foi testado na análise de confiabilidade de

estruturas em concreto armado e comparado com outros procedimentos já existentes de otimização. Segundo os autores, a convergência foi estável, porém mais lenta do que a dos métodos baseados em gradientes.

Na seqüência, Val et al. (1997) analisaram estruturas de pórticos planos em concreto armado acoplando o modelo mecânico diretamente com o FORM. Com isso, os gradientes para a avaliação da confiabilidade foram obtidos diretamente por diferenças finitas. Além disso, os autores, seguindo as orientações de Reitman<sup>27</sup> (1990) e Taerwe<sup>28</sup> (1993), introduziram uma variável aleatória sobre a incerteza do modelo, sendo definida pela razão entre os resultados experimentais e do modelo numérico. No entanto, os autores comentaram que o forte caráter não-linear do comportamento dessas estruturas pode, em muitas vezes, proporcionar dificuldades de convergência na busca direta dos gradientes exigida pelo método. Para evitar esse tipo de inconveniente, foi proposta uma transformação de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema polar. Dessa forma, o ponto de projeto passou a ser definido por uma distância  $r$  e por um vetor de ângulos (um ângulo para cada variável aleatória). O problema de otimização, segundo os autores, tornou-se um problema de minimização sem restrições, com a avaliação da equação de estado limite,  $G(r, \phi)$  feita agora com apenas uma iteração. Concluíram que a grande vantagem dessa formulação é que ela mostrou-se mais estável no instante do cálculo do índice de confiabilidade, pois a avaliação dos gradientes da equação de estado limite foi feita de maneira mais precisa, com melhor convergência e com menos esforço computacional.

Kim & Na (1997) apontaram os dois principais fatores responsáveis pela qualidade da aproximação gerada pelo RSM: os pontos de amostragem escolhidos e a forma da superfície. Por conta disso, os autores propuseram uma abordagem seqüencial para o método de superfícies de resposta, na qual é utilizado o método da projeção do gradiente para garantir que os novos pontos de amostragem do plano de experiência estejam localizados bem próximos da superfície de falha. Inicialmente, assumem um polinômio de primeiro grau para representar o estado limite e calculam o índice de confiabilidade com o algoritmo de Rackwitz & Fiessler (1978). O procedimento é repetido até a convergência em termos do índice de confiabilidade.

---

<sup>27</sup> Reitman, M.A. (1990). *Analysis of statically indeterminate reinforced concrete bar structures, considering nonlinear properties of the materials and histories of short-term loadings*. D.Sc. thesis, Reinforced Concrete Institute, Moscow, (in Russian).

<sup>28</sup> Taerwe, L.R. (1993). *Towards a consistent treatment of model uncertainties in reliability formats for concrete structures. Safety and Performance Concepts. CEB Bulletin d'Information N° 219*, Lausanne, Switzerland.

Melchers & Ahammed (2001) apresentaram duas técnicas iterativas para busca do ponto de intersecção de funções de estado limite não-lineares e determinação da probabilidade conjunta. Trata-se de uma tentativa de se considerar múltiplos pontos de projeto na determinação da probabilidade de falha global de um sistema em paralelo. Uma das técnicas, a mais interessante, é chamada técnica de aproximações seqüenciais sucessivas que consiste em buscar o novo ponto de projeto a partir do ponto de projeto anterior, que é convertido na origem do sistema. Portanto, a cada iteração do método, a origem do espaço normal padrão é modificada para o último ponto de projeto encontrado, com determinação do novo ponto a partir dos métodos tradicionais de confiabilidade. Segundo os autores, as técnicas obtêm uma boa precisão com pequeno custo computacional.

Guan & Melchers (2001) fizeram um estudo bastante interessante e importante para o entendimento e avanço dos métodos aproximados baseados na construção de superfícies de respostas. Os autores estudaram a variação existente nos resultados em função da escolha dos pontos do plano de experiência, definidos pelo coeficiente  $m$ . Esse coeficiente determina o valor da variável aleatória, a partir de uma soma ou subtração de  $m$  vezes o seu desvio-padrão de um valor específico, que normalmente na primeira iteração é a média da variável, e nas demais iterações, a respectiva coordenada do ponto de projeto. É justamente a escolha desses pontos do plano que consiste na grande dificuldade das aproximações via superfícies de respostas, pois uma escolha inadequada pode conduzir o algoritmo de busca do ponto de projeto para pontos distantes do ponto de projeto, não obtendo assim a convergência para a solução do problema. Os autores também ponderam que não existem orientações bem definidas ou teorias que permitam determinar os pontos mais adequados para composição dos planos de experiência. Concluíram que para valores de  $m$  crescentes entre 2 e 3, de maneira geral, a superfície de resposta permanece estável, porém superestima o valor da probabilidade de falha, isto é, ocorre uma diminuição no índice de confiabilidade em relação aos valores obtidos nas simulações de Monte Carlo e FORM. No entanto, para valores de  $m$  maiores do que 3, mesma com pequenas variações, os autores verificaram grandes oscilações dos resultados. Os autores recomendaram  $m = 3$  como valor ótimo para o coeficiente.

Soares et al. (2001) criticaram o uso dos coeficientes parciais de segurança de maneira generalizada para todos os tipos de estruturas. Essa prática, de acordo com os autores, gera confiabilidade não-uniforme para as estruturas projetadas e, em alguns casos, pode conduzi-las a situações contra a segurança. Dessa forma, os autores sugeriram uma maneira de calibrar os coeficientes parciais de minoração das resistências do concreto e do aço, a partir

de índices de confiabilidade-alvo, tentando garantir assim, maior uniformidade na segurança das estruturas. A idéia proposta é utilizar esse método de calibração para o maior número possível de configurações geométricas e carregamentos, para que com isso, possa ser gerado um conjunto de coeficientes parciais que proporcione maior uniformidade de segurança para as estruturas projetadas.

Soares et al. (2002) apresentaram um método probabilístico para avaliação da confiabilidade de pórticos em concreto armado em regime não-linear físico e geométrico. A análise de confiabilidade foi realizada por meio do acoplamento do modelo mecânico em elementos finitos e do método de superfícies de resposta. Foram apresentadas relações entre os coeficientes parciais de segurança e os índices de confiabilidade para pilares e pórticos em concreto armado. Os autores concluíram, através de uma análise paramétrica de colunas em concreto armado, que o forte comportamento não-linear é muito importante na estimativa da confiabilidade, o que pode ocasionar oscilações em torno do ponto de projeto, dificultando bastante a obtenção dos referidos coeficientes parciais de segurança.

Gayton et al. (2003) apresentaram um novo método de superfícies de resposta para análise de confiabilidade estrutural. O objetivo do método, chamado de CQ2RS (*Complete Quadratic Response Surface with Resampling*), é proporcionar menor tempo computacional, a partir de intervenções do engenheiro e informações anteriores de outros projetos. Assim, o conhecimento do profissional é utilizado para reduzir o domínio de busca do primeiro ponto de projeto, definindo um plano de experiência mais próximo do ponto de projeto, bem como limitando a quantidade de pontos necessários do plano. Trata-se de um método complexo, porém segundo os autores, econômico, pois a partir da segunda etapa do método não há mais necessidade de fazer chamadas ao modelo mecânico.

Roos & Bucher (2003) estudaram uma nova abordagem para a determinação de superfícies de respostas para problemas fortemente não-lineares. Esta nova estratégia de aproximação é baseada em técnicas de busca aleatória de pontos amostrais com refinamento determinístico desses pontos combinadas com esquemas de interpolação local e global. A grande vantagem dessa nova estratégia é a possibilidade de calcular probabilidades de falha em problemas com equação de estado limite fortemente não-linear de maneira robusta e eficaz. Além disso, de acordo com os autores, o uso da técnica permitiu que as dificuldades para a análise de confiabilidade em regiões próximas a descontinuidades fossem resolvidas quando comparadas com as antigas funções polinomiais.



Gupta & Manohar (2004) discutiram casos em que existem múltiplos pontos de projeto e sua importância no cálculo da probabilidade de falha global. Para isto, propuseram um método baseado nas técnicas de superfícies de resposta capaz de identificar pontos ou regiões sobre a superfície limite que contribuem, significativamente, no valor da probabilidade de falha. Definiu-se, portanto, uma superfície de resposta global unindo-se os diversos pontos de projeto. A probabilidade de falha foi estimada a partir de simulações de Monte Carlo sobre a superfície delimitada. O estudo também propôs um conjunto de medidas de importância, que servem para classificar as variáveis aleatórias de projeto de acordo com sua influência sobre a probabilidade de falha global. Essas medidas podem auxiliar na escolha de quais variáveis serão determinísticas e probabilísticas na análise de segurança estrutural.

Kaymaz & McMahon (2005) propuseram uma nova maneira de construir as superfícies de resposta considerando polinômios de primeiro grau, a partir de uma regressão ponderada, em que os pontos mais próximos da equação de estado limite ganham maior peso na regressão. O objetivo dessa abordagem é melhorar a aproximação da equação de estado limite real do problema na primeira iteração do RSM e com isso diminuir a quantidade de iterações adicionais para resolver o problema. Os autores fizeram alguns testes e concluíram que a técnica produz de fato uma melhora significativa tanto na precisão das respostas em termos de índice de confiabilidade, quanto no tempo de processamento.

Wong et al. (2005) fizeram um estudo sobre os possíveis problemas que ocorrem nas análises de confiabilidade quando se utiliza o método de superfícies de respostas. Essas falhas são oriundas muitas vezes da própria natureza dos problemas não-lineares ou até mesmo pela má representação da equação de estado limite pelo RSM. Em diversos casos, os autores constataram a dificuldade do método em encontrar a convergência pelo fato de não conseguir representar bem a equação de estado limite do problema. Para solucionar isso, foram propostas três melhorias: maior precisão na busca das cargas últimas da estrutura, onde o próximo incremento de carga é determinado por um método de comprimento de arco; definição do coeficiente que multiplica o desvio-padrão das variáveis no cálculo dos pontos do plano de experiência, a partir dos coeficientes de variação de cada variável e finalmente, uma técnica que corrige os pontos do plano quando algum desses cai fora do domínio físico factível. De acordo com os autores, essas técnicas melhoram bastante o desempenho do RSM na análise de confiabilidade de estruturas.

Neves et al. (2006) desenvolveram um procedimento para análise de confiabilidade de grelhas em concreto armado com múltiplos modos de falha com reduzido custo

computacional. O método é composto pelo acoplamento de um modelo não-linear de grelhas com um pacote computacional de confiabilidade, definido pelo método de superfícies de resposta (RSM) e simulação de Monte Carlo. Primeiramente, o método determina as respostas mecânicas em termos de força última para cada modo de falha, de acordo com as variações das variáveis aleatórias definidas a partir do RSM. Após isso, são encontradas as superfícies de falha e, conseqüentemente, definido o domínio seguro composto. Ao final dessa etapa são realizadas diversas simulações de Monte Carlo para obtenção da probabilidade de falha do sistema definido pelo domínio composto, independentemente, de novas chamadas do modelo mecânico, o que certamente reduz o tempo de processamento. Segundo os autores, o procedimento mostrou-se estável e com possibilidade de análise de sistemas complexos de grelhas em concreto armado.

No ano seguinte, Neves et al. (2007) continuaram o estudo sobre a influência dos demais modos de falha individuais na probabilidade final do sistema formado por uma grelha em concreto armado. A grande diferença deste trabalho para o anterior consiste na estratégia de seleção dos modos mais importantes de falha para a confiabilidade do sistema. Para capturá-los, o modelo mecânico não-linear continua a busca pela carga última mesmo quando um determinado modo computado já foi atingido. Assim, para cada modo secundário, isto é, que ocorre depois do modo principal de falha, a sua probabilidade já estará condicionada, visto que pela redistribuição de esforços já ocorreu a formação de rótula plástica nos modos anteriores. Dessa forma, segundo os autores, é possível verificar a probabilidade de um sistema em paralelo através da montagem de um domínio composto via superfícies de resposta para o sistema em grelhas.

#### 2.3.4 Métodos de otimização e suas aplicações na engenharia

A teoria da otimização matemática aplicada à engenharia de estruturas teve um avanço considerável durante os últimos quarenta anos, especialmente após o trabalho pioneiro de Schmidt (1960). Diversos livros e artigos foram publicados comprovando o grande desenvolvimento desse campo. Porém, sua aplicação prática ainda não é muito expressiva sendo acessível somente a grandes especialistas da área.

Um trabalho bastante interessante foi publicado por Cohn & Dinovitzer (1994). Nesse trabalho, os autores apresentaram uma coletânea com aproximadamente 500 aplicações da otimização, ainda determinística, em problemas de engenharia estrutural, contemplando

diversos tipos de estruturas, desde treliças planas até chapas, tanto em concreto armado quanto em aço. Na mesma linha, Sarma & Adeli (1998) posteriormente publicaram um estudo sobre as aplicações da otimização de custos de estruturas em concreto armado, restringindo-se às vigas, pilares, lajes, pórticos, pontes e tanques de água.

Um alvo muito comum entre os pesquisadores da área de otimização matemática é o desenvolvimento de métodos de busca da solução ótima. Existem hoje diversos métodos de resolução, mas ainda nenhum deles pode receber o título de método universal, isto é, viável e eficaz para todo o tipo de problema. De acordo com Camp et al.<sup>29</sup> (1998) apud Nina (2006) as técnicas de otimização usadas no projeto de estruturas podem ser divididas em três tipos: programação matemática, método dos critérios de otimização e algoritmos heurísticos (como é o caso dos algoritmos genéticos, por exemplo). Em particular, a programação matemática pode ser dividida em linear e não-linear. A diferença entre elas é que a primeira aproxima a função-objetivo e as restrições a partir de uma combinação linear das variáveis de projeto, ao passo que a programação não-linear trabalha diretamente com as restrições como funções não-lineares das variáveis de projeto.

A programação matemática não-linear foi desenvolvida inicialmente para resolver problemas de otimização não-linear sem restrições. As condições necessárias para alcançar a solução ótima desses problemas provém das condições de Kuhn-Tucker<sup>30</sup> (1951). A otimização de elementos estruturais em concreto armado é um problema não-linear com restrições, portanto, bastante complexo de se resolver. No entanto, a aplicação direta das condições de Kuhn-Tucker é muito complexa para a maior parte dos problemas, de modo que outras alternativas foram criadas para suprir tal necessidade. O método dos critérios de otimização juntamente com o método dos multiplicadores de Lagrange foi uma alternativa interessante e vem sendo utilizada com frequência em boa parte dos problemas atuais de engenharia de estruturas. Exemplos de aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange podem ser encontrados em Chou (1977), Moharrami & Grierson (1993), Al-Salloum & Siddiqi (1994), Soares (1997) e Nogueira (2005).

O método dos algoritmos genéticos difere dos demais porque não necessita de uma relação explícita entre a função-objetivo e as restrições do problema. O método gera diversas

---

<sup>29</sup> Camp, C.; Pezeshk, S.; Cao, G. (1998). Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 124, n. 5, Mai, p. 551-559.

<sup>30</sup> Kuhn, H.W.; Tucker, A.W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2<sup>nd</sup> Berkeley Symp. on Mathematics, Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley, California, p. 481-492.

populações de variáveis, de modo que cada uma dessas populações é considerada como uma solução em potencial (Jenkins 1992 e Rath & Ahlawat 1999).

Spirees & Arora (1990) utilizaram um método de programação sequencial quadrática (SQP) para a otimização de estruturas em concreto armado de acordo com o ACI. Para a função-objetivo foi considerado o custo inicial total, computando os custos do concreto, do aço e das fôrmas de madeira. A grande contribuição do trabalho foi a consideração de restrições em termos de frequência de vibração estrutural com o objetivo de controlar melhor os deslocamentos provocados pelo vento e terremotos.

Kanagasundaram & Karihaloo (1991) propuseram um procedimento para otimização de vigas isostáticas, contínuas e pilares em concreto armado que considera como variáveis, além das dimensões da seção transversal, a resistência do concreto. O problema foi resolvido através de técnicas de programação linear. Os autores concluíram que a consideração da resistência à compressão como variável a ser otimizada resultou em seções mais esbeltas, pois o algoritmo sempre conduziu a solução com valores mais elevados de resistência do concreto.

O trabalho de Kocer & Arora (1996) traz a comparação de várias técnicas de otimização aplicadas à minimização dos custos de uma torre de transmissão em concreto protendido. Concluíram que o método dos algoritmos genéticos foi o mais eficaz, apresentando uma redução de custo de cerca de 25% em relação ao projeto original.

Soares (1997) desenvolveu um algoritmo para pré-dimensionamento ótimo do conjunto de vigas de um pavimento através de um método de aproximações combinadas e multiplicadores de Lagrange. A otimização foi feita para as seções mais solicitadas das vigas considerando como variáveis de otimização as alturas das vigas e as áreas de aço. O autor admitiu que o somatório dos mínimos locais interagidos representam o mínimo global da estrutura, pois sua formulação abrange somente vigas, não sendo estendida para as grelhas.

Rath & Ahlawat (1999) desenvolveram uma técnica de otimização para as dimensões da seção transversal, com variação da altura e largura ao longo do comprimento de elementos isolados em concreto armado submetidos à flexão. A função-objetivo considerada foi o custo total, com o material, fabricação e montagem da estrutura. O processo é iniciado admitindo-se seção retangular. As dimensões ótimas, bem como a área de aço são obtidas via SQP, resultando em uma seção transversal tipo I com altura e largura variáveis ao longo do comprimento. Na segunda etapa do processo, otimiza-se o diâmetro e o número de barras da armadura longitudinal via algoritmos genéticos. Os autores concluíram que as reduções de materiais e custos das vigas variaram entre 40 e 56% comparadas com o projeto padrão desses

elementos. Este tipo de otimização leva a economias consideráveis especialmente nos casos de peças pré-moldadas produzidas em grande escala.

Ferreira et al. (2003) apresentaram um modelo de otimização para as áreas de aço à tração e compressão para vigas T em concreto armado sujeitas à flexão simples. As restrições foram elaboradas para a seção mais solicitada, pois esta é quem define as dimensões transversais das vigas, bem como a quantidade de armadura. O comportamento não-linear dos materiais foi considerado na formulação através do diagrama parábola-retângulo para o concreto comprimido e de uma lei elastoplástica perfeita para o aço das armaduras. A resistência residual à tração, ou *tension softening*, do concreto não foi considerada na formulação. As vantagens desse tipo de abordagem em relação à prática corrente de projeto de vigas são soluções mais econômicas, bem como o uso de comportamento não-linear para os materiais, o que confere mais qualidade ao modelo.

Continuando na mesma linha, Barros (2004) obteve uma solução analítica para a otimização de seções retangulares de vigas em concreto armado, considerando armadura dupla, com restrições de equilíbrio baseadas no Eurocode 2. A diferença nesta formulação é a presença da força normal na seção, além do momento fletor. Assim, a solução ótima obtida apresentou caráter geral e dependente da posição da linha neutra e da altura útil da seção.

Vianna (2003) desenvolveu um modelo de otimização aplicado a pórticos planos em concreto armado. A rotina de pórtico foi montada a partir das rotinas individuais de otimização de vigas e pilares, com o objetivo de melhorar as soluções na fase de pré-dimensionamento das estruturas e, com isso, ganhar em termos de tempo de entrega dos projetos. O método utilizado na busca do ponto ótimo das vigas foi o método dos multiplicadores de Lagrange, juntamente com um procedimento de tentativas sucessivas para a otimização dos pilares. Assim, segundo o autor, a maior vantagem da formulação foi que o resultado ótimo não dependeu do valor inicial das variáveis, pois mesmo para valores muito diferentes da configuração ótima, o modelo foi capaz de buscá-lo, sendo prejudicado somente nas primeiras iterações por permitir grandes redistribuições de esforços na estrutura.

Nina (2006) seguiu a mesma linha de pesquisa de Vianna (2003), mas com maior abrangência. Foi apresentada a mesma concepção de otimização de pórticos planos em concreto armado, porém com a diferença de consideração de domínios de deformações para os pilares. Ao invés de otimizar os pilares somente restritos ao domínio 5, como fez Vianna (2003), a autora estendeu a formulação dos pilares para todos os domínios. Dessa forma,

obteve-se uma variação muito maior na seção dos pilares, permitindo sua aplicação para diversos tipos de construção e diferentes casos de carregamento.

Nie (2006) apresentou uma abordagem baseada em programação sequencial quadrática (SQP) para resolver o sistema de equações não-lineares gerado em um problema de otimização não-linear, com a utilização da técnica numérica de busca *line search*. Neste método, o sistema de equações não-lineares é transformado em um problema de programação não-linear restrita a cada iteração de busca, no qual algumas equações satisfeitas no ponto atual são tratadas como restrições e outras atuam como funções-objetivo. Na verdade, a contribuição do método é que os sistemas de equações não-lineares é resolvido com o uso de estratégias de otimização restrita.

Wei et al. (2008) propuseram uma nova variação para os métodos quasi-Newton-SQP para problemas de otimização restrita. Os autores apresentaram somente as hipóteses assumidas para garantir e demonstrar a convergência superlinear do método.

### 2.3.5 Acoplamento confiabilidade-otimização

A literatura nomeia esse acoplamento como RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*) ou em português, Projeto Ótimo baseado em Confiabilidade. Muitos trabalhos já foram propostos nesta linha ao longo dos anos, no entanto Frangopol (1985a) mostrou dois motivos pelos quais a otimização baseada em confiabilidade é bem menos popular do que a otimização determinística. Em primeiro lugar, a falta de um método definitivo de incorporação de incertezas, resultando em índices de confiabilidade não uniformes mesmo em situações semelhantes de projeto. E em segundo lugar, a própria definição de otimização baseada em confiabilidade é ainda muito divergente entre os diversos pesquisadores da área. Isso faz com que o RBDO seja ainda menos utilizado e menos aceito do que a otimização determinística em casos práticos de engenharia. Porém, pondera também que o projeto baseado na otimização determinística obtido sem a consideração das incertezas pode condizir a resultados não confiáveis.

Frangopol (1985b) abordou o problema da otimização com restrições em confiabilidade enfatizando a sensibilidade do ponto ótimo em relação às variáveis de projeto. Para isso, o autor utilizou o método das direções factíveis. Afirmou ainda que estudos nessa linha podem ser aplicados aos casos com várias restrições em confiabilidade e outros parâmetros.

A partir dos anos 90, as pesquisas tornaram-se mais intensas gerando diversos trabalhos sobre o acoplamento confiabilidade e otimização. SriVidya & Ranganathan (1995) apresentaram um procedimento de otimização de pórticos planos em concreto armado, com restrições dadas em índices de confiabilidade e probabilidades de falha, tanto para componentes isolados quanto para o sistema como um todo. A probabilidade de falha do sistema foi obtida fazendo-se a média entre os limites bi-modais. Os processos de otimização e confiabilidade foram realizados de maneira independente. Os índices de confiabilidade foram determinados a partir de análises de primeira ordem e o processo de otimização restrita baseou-se em uma série de processos de otimização irrestrita combinado com o método da função de penalidade interna. Esse procedimento é conhecido hoje como Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade (*RBDO – Reliability-Based Design Optimization*).

Al-Hartly & Frangopol (1997) apresentaram um procedimento de otimização de vigas em concreto protendido considerando os métodos de confiabilidade em segundo momento tanto para componentes quanto para sistemas. Os autores consideraram as distribuições de tensões no estágio inicial e final, juntamente com a resistência à flexão das vigas como funções de estado limite para o projeto baseado em confiabilidade. Concluíram que esse campo de protensão é bastante vasto e propício para a aplicação dos modelos de RBDO.

Kaymaz et al. (1998) desenvolveram um método de otimização de estruturas baseado em confiabilidade, combinando superfície de respostas com a simulação de Monte Carlo. A aproximação da equação de estado limite é obtida a partir da superfície de resposta e, em seguida, a probabilidade de falha é calculada realizando a simulação de Monte Carlo sobre o polinômio aproximado. O problema de otimização foi resolvido pelo método Simplex.

Barakat et al. (1999) fizeram a otimização do peso de pilares de aço submetidos a forças laterais com restrições impostas no índice de confiabilidade considerando múltiplos modos de falha. Os autores destacaram que o peso mínimo encontrado nesse caso foi maior do que o peso mínimo obtido com a consideração de um único modo de falha. Concluíram que ao considerar somente o primeiro modo de falha, a estimativa da probabilidade de falha resultou contra a segurança.

Royset et al. (2001a) desenvolveram um procedimento para resolver aproximadamente problemas de otimização baseados em confiabilidade para sistemas estruturais em série. O sistema, do ponto de vista de confiabilidade, é definido como sendo um conjunto de equações de estado limite independentes do tempo, nas quais se encontram as

variáveis aleatórias e os parâmetros de projeto. Segundo os autores é impossível resolver esses problemas de maneira exata, pois na grande maioria dos casos, a confiabilidade estrutural pode somente ser estimada. Neste trabalho, o problema de natureza probabilística foi transformado num problema determinístico de otimização semi-infinita, que foi resolvido independentemente do problema de confiabilidade, o que torna essa abordagem totalmente desacoplada. Neste trabalho os autores focaram a análise na resolução de dois tipos de problema de otimização baseado em confiabilidade: minimização do custo do projeto sujeita a restrições mecânicas e de confiabilidade; maximização da confiabilidade do projeto sujeita a restrições mecânicas e de custo.

Royset et al. (2001b) apresentaram uma extensão do procedimento desenvolvido em Royset et al. (2001a), onde consideraram os custos de falha somados à função de custo inicial. A grande vantagem da técnica consiste em que os processos de confiabilidade e otimização são totalmente independentes, o que permite a escolha de quaisquer métodos consagrados para a resolução de cada etapa da técnica. Os autores concluíram que o procedimento desenvolvido levou a resultados idênticos aos da análise tradicional quando as funções de estado limite eram lineares. Para o caso de funções não-lineares, os resultados sugeriam uma boa aproximação da resposta real do problema de otimização.

Melchers (2001) realizou uma discussão sobre otimização de estruturas baseada em confiabilidade, separando esta última em duas partes distintas e independentes: confiabilidade técnica e confiabilidade subjetiva. A confiabilidade técnica representa a chance de sobrevivência da estrutura baseada somente nas informações sobre os carregamentos atuantes sobre ela, a resistência dos materiais que a compõem e a eficácia dos métodos construtivos. Já a confiabilidade subjetiva engloba todos os efeitos humanos, erros de organização e uso abusivo em serviço da estrutura. O autor com isso propôs que a otimização deve ser realizada para cada uma dessas considerações sobre a confiabilidade de maneira independente e respeitando esses critérios técnicos e não-técnicos na segurança da estrutura.

Frangopol & Maute (2003) fizeram um levantamento do estado da arte dos métodos de otimização estrutural baseados em confiabilidade (RBDO). Apresentaram a evolução desses métodos, desde sua criação com o uso restrito aos problemas determinísticos até o emprego na resolução de problemas de otimização baseados em confiabilidade com a consideração da variação da confiabilidade no tempo e previsão de tempo de vida útil da estrutura. Os autores enfatizaram a utilização do RBDO em aplicações para resolução de estruturas civis e aeroespaciais. Concluíram que os custos de inspeção, manutenção e até



eventuais reparos devem ser adicionados aos problemas de otimização baseados em confiabilidade para que as estruturas sejam projetadas para um tempo máximo de vida útil.

Barakat et al. (2003) propuseram uma abordagem de otimização multi-objetiva baseada em confiabilidade para verificação e projeto de vigas em concreto protendido com o objetivo de produzir margens uniformes de segurança, levando em consideração todos os possíveis estados limites e restrições existentes no ACI. Os autores concluíram que melhores decisões no projeto podem ser tomadas quando o projetista conhece melhor as relações existentes entre os objetivos do projeto dados pela confiabilidade dos componentes e do sistema e suas implicações econômicas.

Streicher & Rackwitz (2004) propuseram um modelo para otimização estrutural baseado em confiabilidade com variação no tempo. O algoritmo maximiza uma função-objetivo considerando o benefício da obra, os custos de construção e manutenção e, também, uma parcela de custos referentes a uma possível falha da estrutura. Além da obtenção da estrutura ótima, o modelo permitiu a previsão dos intervalos de manutenção para que a estrutura atinja um determinado índice de confiabilidade. O problema foi formulado no espaço reduzido com utilização do FORM para o cálculo da probabilidade de falha em sistemas em série. O problema de otimização foi resolvido com a aplicação de um novo algoritmo baseado em gradientes chamado JOINT-5. O algoritmo necessita das segundas derivadas da função de estado limite, isto é, a matriz hessiana. Entretanto, determina-se a matriz hessiana somente na segunda iteração, pois na primeira iteração esta é nula. A partir da segunda iteração, a hessiana é mantida constante até a convergência, não impondo assim, aumento exagerado ao custo computacional empregado.

Nogueira (2005) apresentou um modelo de otimização e confiabilidade para estruturas de vigas em concreto armado. O método de otimização utilizado foi a dos multiplicadores de Lagrange juntamente com o método de superfície de respostas para a análise de confiabilidade. No processo de RBDO, uma restrição dada em termos de uma superfície de confiabilidade foi acrescentada ao problema de otimização juntamente com as demais restrições mecânicas. O processo funcionou bem para exemplos simples de vigas, atingindo a solução ótima com a segurança requerida, mas ainda com simplificações, pois a superfície de confiabilidade de segundo grau implementada considerou somente a altura da seção e a armadura tracionada.

Cheng et al. (2006) apresentaram uma nova abordagem para resolver o problema de RBDO, na qual o projeto ótimo é obtido pela resolução de uma sequência de sub-problemas

definidos por uma aproximação sobre a função-objetivo e também sobre as restrições. Em cada um desses sub-problemas, uma nova formulação foi introduzida para aproximar as restrições de confiabilidade no ponto candidato, ao invés de uma expansão em série de Taylor. Dessa forma, o índice de confiabilidade aproximado e suas sensibilidades são obtidas a partir de uma fórmula baseada nas condições de otimalidade do ponto mais provável de falha. Os autores demonstraram que através dessa nova técnica, a aproximação para o ponto mais provável de falha foi melhorando em cada sub-problema, o que garantiu menor tempo de processamento e ao mesmo tempo maior eficácia na busca da solução ótima.

Aoues & Chateauneuf (2008) fizeram um estudo comparando as abordagens existentes para RBDO e propuseram uma nova técnica para resolver o problema. Segundo os autores, o uso de uma única condição para a segurança de todo o sistema não é suficiente para controlar as confiabilidades dos componentes individuais, ou seja, vários elementos com altas taxas de armadura longitudinal podem ser obtidos com frequência. Por outro lado, a introdução somente de restrições baseadas na confiabilidade dos componentes não é suficiente para garantir o requisito de confiabilidade do sistema e nem conduzir ao mínimo custo global. Assim, o método proposto é baseado na atualização da confiabilidade alvo dos componentes estruturais, tal que a segurança alvo do sistema seja garantida. Como existem infinitas soluções possíveis para a segurança de um mesmo sistema, o método proposto busca a solução correspondente à maior redução do custo esperado. Dessa maneira, segundo os autores, tanto para os componentes quanto para o sistema, as restrições de confiabilidade são respeitadas e o mínimo global é alcançado.

Verzenhassi (2008) realizou um estudo de busca do coeficiente de segurança parcial ótimo que minimiza o custo esperado total de sistemas estruturais, o que chamou de otimização de risco baseada em confiabilidade. O objetivo do algoritmo de otimização desenvolvido é procurar o coeficiente de segurança ótimo, atrelado à confiabilidade ótima para cada projeto diferente. Uma das conclusões do trabalho foi que a confiabilidade ótima é fortemente dependente das consequências e dos custos esperados de falhas.

Shan & Wang (2008) apresentaram uma nova técnica para resolver problemas de otimização baseada em confiabilidade (RBDO). Fundamentalmente, a proposta transforma o problema de RBDO em um problema de otimização determinística, no qual se elimina totalmente a análise de confiabilidade. A técnica transforma as restrições de confiabilidade em novas restrições determinísticas, a partir de uma aproximação via média para o ponto de projeto de cada restrição, definindo assim, o Espaço de Projeto Confiável. O processo clássico

de RBDO dividido em duas partes independentes entre si, ou seja, “loop” de otimização e loop de confiabilidade, passa a ser definido em duas etapas também independentes entre si: construção do espaço de projeto confiável e resolução do processo de otimização determinística. Segundo os autores, essa nova técnica é eficaz com praticamente a mesma velocidade de processamento de uma análise de otimização puramente determinística, pois elimina totalmente o “loop” de confiabilidade.

Beck & Verzenhassi (2008) fizeram um estudo sobre o projeto ótimo de estruturas de torres submetidas a ventos de tornado, com o intuito de encontrar a melhor relação entre segurança e economia na presença de incertezas. Os autores propuseram uma metodologia de otimização do risco baseada em confiabilidade para encontrar o coeficiente de segurança ótimo minimizador do custo total esperado da estrutura. Para isso foram considerados os custos esperados de falha na função-objetivo do problema. Concluíram que em projetos de estruturas submetidas a carregamentos dependentes do tempo como os tornados, a confiabilidade ótima é fortemente dependente do período de vida útil considerado no projeto da estrutura.

### 2.3.6 Considerações sobre a revisão bibliográfica

As pesquisas sobre confiabilidade estrutural, otimização e modelos acoplados do tipo RBDO estão em franco desenvolvimento nos dias atuais. Mais especificamente, os avanços começaram a aparecer a partir da década de 50 no caso da confiabilidade e da otimização, ao passo que os modelos acoplados começaram a receber mais atenção cerca de 10 anos depois.

Com relação à teoria da confiabilidade, verificou-se que os métodos utilizados para avaliação do índice de confiabilidade e das probabilidades de falha estão bastante consolidados no meio científico. Além disso, aceita-se hoje que o índice de confiabilidade é uma medida de segurança de uma estrutura, o que fornece à teoria forte respaldo para uma consolidação cada vez maior na análise de segurança estrutural. Isso se aplica não somente a elementos estruturais isolados, mas ao sistema estrutural como um todo. Com relação aos métodos utilizados na análise de confiabilidade, verificou-se ao longo da pesquisa bibliográfica grande popularidade por parte do método de superfície de resposta. Diversos estudos foram realizados sobre esse método, com apresentação de diversas melhorias para convergência e estabilidade numérica. O uso do FORM diretamente com cálculo dos gradientes numéricos das equações de estado limite também foi constatado para resolução do

problema de confiabilidade. Para verificar o desempenho de ambos os métodos de confiabilidade aplicados a problemas não-lineares, decidiu-se implementar a busca dos gradientes numéricos neste trabalho para comparação com o cálculo via superfície de resposta. Portanto, entende-se que hoje os métodos de confiabilidade estão consolidados e cada vez mais aplicados à análise da segurança estrutural.

A otimização matemática possui uma gama enorme de métodos e variações para a busca do ponto ótimo. Isso se dá devido ao fato da grande dificuldade de se obter um método universal capaz de resolver qualquer problema. Verificou-se ainda o uso de multiplicadores de Lagrange e um crescente desenvolvimento de métodos de programação não-linear sequencial quadrática, ou também chamados de SQP. Ainda, a utilização da otimização matemática aplicada ao dimensionamento de elementos estruturais em concreto armado ganhou destaque nos últimos anos, porém já é reconhecido que somente a otimização determinística não é suficiente para o projeto de estruturas. Os pesquisadores já concordam que uma abordagem combinada com a teoria da confiabilidade, para com isso aliar o fator econômico com o aspecto de segurança torna-se totalmente necessário nos dias atuais.

Diante disso, existe hoje um forte investimento dos centros de pesquisa no desenvolvimento de modelos acoplados de otimização baseada em confiabilidade. Diversos trabalhos já foram publicados sobre esse acoplamento de RBDO com aplicação a estruturas em concreto armado, considerando não mais somente a confiabilidade de componentes, mas também a confiabilidade de sistemas. Portanto, a dinâmica básica do problema é otimizar o custo de uma estrutura submetida às restrições de confiabilidade para componentes e para o sistema como um todo. Uma outra linha de pesquisa que está se desenvolvendo bem é a otimização onde se busca os níveis de confiabilidade ótimos para a estrutura, considerando-se para isso os custos de falha e manutenção na função-objetivo. Assim, procura-se otimizar o risco da estrutura atingir determinadas falhas em função do investimento no projeto e na construção da mesma.

Observou-se, portanto, ao longo de toda essa revisão bibliográfica que o projeto de estruturas tende a evoluir para a resolução de um problema de otimização, impondo-se restrições de segurança a partir da análise de confiabilidade, tanto para a construção inicial da estrutura quanto para toda a sua vida útil. Dessa forma, este trabalho está inserido nesta linha de evolução, porém ainda no desenvolvimento de modelos para o projeto considerando a construção inicial, sem levar em conta esses custos de falha. Acredita-se que a partir deste trabalho, os modelos desenvolvidos e apresentados nesta tese possam ser consolidados para

então passar para a etapa seguinte, que é a consideração dos custos de falha e obtenção de índices de confiabilidade ótimos para o projeto de estruturas.



## **3. O Modelo Mecânico**

---

---

### **3.1 Generalidades**

Neste capítulo são apresentados todos os conceitos envolvidos na construção do modelo mecânico em elementos finitos utilizado neste trabalho. Inicialmente, apresenta-se a formulação para obtenção da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano considerando as hipóteses de Timoshenko, com o objetivo de incorporar as deformações de cisalhamento nas análises estruturais. Em seguida, são discutidos os modelos de não-linearidades material e geométrica empregados no programa. Atenção especial é dada ao modelo de resistência ao cisalhamento, pois é uma das contribuições relevantes desta pesquisa. Os conceitos para análise não-linear de pórticos planos, o módulo de busca de cargas últimas, bem como alguns exemplos numéricos para validação do programa são ainda apresentados, finalmente, neste capítulo.

### **3.2 Teoria de Timoshenko: Elemento Finito de Pórtico Plano**

A hipótese de Euler-Bernoulli para flexão de vigas considera que as deformações causadas por tensões de cisalhamento são sempre nulas em toda a seção transversal. Tal consideração pode ser adotada em vigas cujo comprimento é bem superior à sua altura. No entanto, em vigas curtas ou com pequeno módulo de elasticidade transversal o efeito das deformações por cisalhamento, ou distorções, não pode mais ser desprezado. Nesses casos, a consideração da distorção torna-se essencial para a adequada representação do campo de deslocamentos da viga. A teoria de Timoshenko, por conta disso, deve então ser empregada para a formulação adequada do comportamento à flexão de vigas.

A hipótese fundamental da teoria de Timoshenko considera que as seções planas permanecem planas após a deformação, porém não mais ortogonais ao eixo da barra. Tal fato, evidentemente, constitui-se em uma melhor aproximação do comportamento real das vigas à flexão. Basicamente, a consideração da distorção provoca um acréscimo na curvatura das seções, somando-se a parcela de energia proveniente da força cortante à energia interna de flexão pura. Com isso, a rigidez da peça sofre uma pequena redução definida por um fator específico, provocando um aumento dos deslocamentos nodais da estrutura.

Diversos autores propuseram elementos finitos para a viga de Timoshenko (Nickel & Secor<sup>31</sup> 1972, Prathap & Bhashyam<sup>32</sup> 1982, Heyliger & Reddy<sup>33</sup> 1988) apud Neves (2000). As formulações diferem entre si apenas na escolha da função interpoladora para aproximar o campo de deslocamentos transversais e as rotações, baseando-se no método dos deslocamentos ou em métodos mistos. O modelo mais simples para a formulação em elementos finitos é aquele que considera funções lineares de interpolação tanto para os deslocamentos transversais quanto para as rotações. Entretanto, essa aproximação se mostra muito rígida para vigas pouco deformáveis à força cortante, provocando uma espécie de bloqueio da solução, ou como é conhecido na literatura, travamento por cortante (*shear locking*).

O travamento ocorre em virtude da inconsistência da ordem das funções de aproximação para os deslocamentos transversais e rotações. Para evitar esse tipo de problema, as funções empregadas para este fim devem ser definidas por polinômios de ordem compatível com as grandezas aproximadas, no caso deslocamentos, rotações e distorções. Através dessa técnica, determina-se uma nova matriz de rigidez, em que a parcela da força cortante tem sua contribuição diminuída, aliviando o travamento da solução. Neves (2000) ponderou que a necessidade de continuidade das funções aproximadoras consiste em outro fator importante nesse tipo de análise. Dessa forma, a escolha dos graus de liberdade deve considerar essa questão da continuidade das funções, já que em um procedimento baseado em elementos finitos, as funções aproximadoras escritas em função dos parâmetros nodais devem representar grandezas contínuas.

---

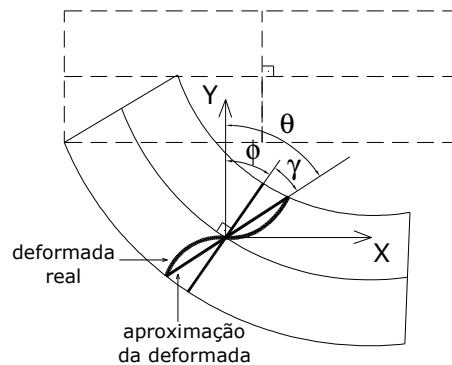
<sup>31</sup> Nickel, R.E.; Secor, G.A. (1972). Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 5, p. 243-253.

<sup>32</sup> Prathap, G.; Bhashyam, G.R. (1982). Reduced integration and the shear-flexible beam element. *J. Num. Meth. Eng.*, 18, p. 195-210.

<sup>33</sup> Heyliger, P.R.; Reddy, J.N. (1988). A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of sound and vibration*, 126(2), p. 309-326.



Com relação à escolha dos parâmetros nodais em formulações que consideram a deformação por cisalhamento, vale comentar que o diagrama de forças cortantes apresenta descontinuidades frente a forças concentradas, fazendo com que a distorção não seja contínua nesses pontos. Assim, ela não pode ser utilizada como parâmetro nodal. Da mesma forma, a rotação total da seção, dada pela soma da rotação de flexão com a distorção, também não é contínua (Figura 3-1). Logo, a rotação total não serve para ser utilizada como parâmetro nodal dos elementos.



**Figura 3-1 – Cinemática do elemento de viga de Timoshenko**

Neste trabalho, em função dessas peculiaridades do comportamento do problema, foram adotados como parâmetros nodais, o deslocamento total correspondente aos momentos fletores e forças cortantes, bem como a rotação provocada somente pela parcela de flexão, já que são grandezas contínuas em todos os pontos dos elementos.

### 3.2.1 Dedução da matriz de rigidez do elemento de viga

A dedução da matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko baseia-se, neste trabalho, nas formulações apresentadas por Neves (2000) e Branco (2002).

Para garantir a continuidade das funções aproximadoras foram adotados como parâmetros nodais, os deslocamentos transversais provenientes do momento fletor e força cortante,  $v_1$  e  $v_2$ , e as rotações provenientes somente do momento fletor,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Para a convenção de sinais, adotou-se a convenção compatível com o método dos elementos finitos, de modo que ao final de todo o processo, os ajustes de sinais necessários para a convenção clássica da Resistência dos Materiais foram realizados, conforme Figura 3-2.

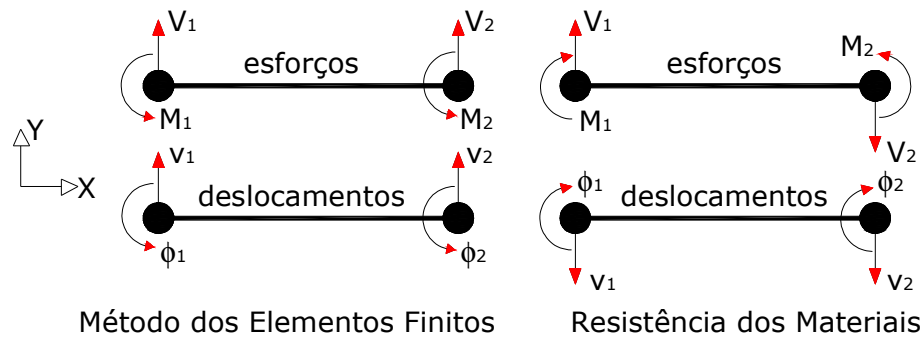


Figura 3-2 – Convenções de sinais do elemento finito de viga

Admitindo-se que o deslocamento total dos nós seja dado pela soma das parcelas de flexão,  $v_f$  e de cisalhamento,  $v_c$ , conforme já mencionado, tem-se a seguinte relação:

$$v_t = v_f + v_c \quad (3-1)$$

Da mesma forma, a relação é mantida em termos da primeira e segunda derivada, resultando em:

$$\frac{dv_t}{dx} = \frac{dv_f}{dx} + \frac{dv_c}{dx} \quad (3-2)$$

$$\frac{d^2v_t}{dx^2} = \frac{d^2v_f}{dx^2} + \frac{d^2v_c}{dx^2} \quad (3-3)$$

Por questões de facilidade de nomenclatura, a Equação 3-2 pode ser escrita como:

$$\theta = \phi + \gamma \quad (3-4)$$

Isolando-se um elemento infinitesimal, é possível escrever as equações de equilíbrio do problema:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (3-5)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (3-6)$$

sendo que:  $M$  é o momento fletor;  $V$  é a força cortante;  $q$  corresponde à carga distribuída ao longo do elemento.

A Resistência dos Materiais fornece ainda as seguintes expressões:

$$M = -EI \frac{d^2 v_f}{dx^2} \quad (3-7)$$

$$V = -EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} \quad (3-8)$$

$$V = kGA \gamma = kGA(\theta - \phi) \quad (3-9)$$

sendo que:  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material;  $I$  é o momento de inércia da seção transversal do elemento;  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material;  $A$  é área da seção transversal do elemento;  $k$  é o fator de forma da seção transversal, dado por: 1/1,2 para seções retangulares e 1/0,9 para seções circulares;  $\gamma$  é a distorção da seção transversal.

No método dos elementos finitos, a força distribuída ao longo do elemento é transformada em um vetor de forças nodais equivalentes, facilitando a automação do processo sem causar perda de precisão da solução. Assim, admite-se que a distorção  $\gamma$  é constante ao longo do elemento finito, o que permite escrever:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad (3-10)$$

Substituindo-se a Equação 3-9 na 3-10 resulta:

$$\frac{d}{dx} kGA \cdot (\theta - \phi) = 0 \quad (3-11)$$

$$\frac{d}{dx} (\theta - \phi) = 0 \quad (3-12)$$

A Equação 3-12 significa que a derivada da distorção deve ser nula. Assim, substituindo-se as Equações 3-7, 3-8 e 3-9 em 3-5 têm-se:

$$\frac{d}{dx} \left( -EI \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) = kGA \cdot (\theta - \phi) \quad (3-13)$$

O que resulta em:

$$EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} + kGA \cdot (\theta - \phi) = 0 \quad (3-14)$$

Considerando-se as Equações 3-8 e 3-10 é possível escrever:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} \right) = 0 \quad (3-15)$$

E, portanto, tem-se que:

$$-EI \frac{d^4 v_f}{dx^4} = -EI \frac{d^3 \phi}{dx^3} = 0 \quad (3-16)$$

A Equação 3-16 mostra que a terceira derivada da rotação de flexão deve ser nula. Com isso, escolhe-se uma função interpoladora de segundo grau para as rotações, dada por:

$$\phi = c + bx + ax^2 \quad (3-17)$$

Convém lembrar da Equação 3-4 que:

$$\gamma = \theta - \phi = \frac{dv_t}{dx} - \frac{dv_f}{dx} \quad (3-18)$$

A Equação 3-14 está escrita em função da terceira derivada dos deslocamentos de flexão. Porém, da Equação 3-2 sabe-se que a primeira derivada dos deslocamentos de flexão é a própria rotação de flexão. Isso significa que a Equação 3-14 pode ser reescrita como:

$$EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} + kGA \cdot (\theta - \phi) = 0 \quad (3-19)$$

Agora, o próximo passo é substituir na Equação 3-19, as expressões dadas em 3-17 e 3-18, resultando em:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} (c + bx + ax^2) + kGA \gamma = 0 \quad (3-20)$$

$$EI \cdot (2a) + kGA \gamma = 0 \quad (3-21)$$

Da Equação 3-21 resulta uma expressão para a distorção em função dos parâmetros gerais, das características geométricas da seção e das propriedades mecânicas dos materiais.

$$\gamma = -\frac{2aEI}{kGA} \quad (3-22)$$

O objetivo agora é definir uma aproximação para o campo de deslocamentos transversais do elemento, a partir das expressões já obtidas. Substituindo as Equações 3-17 e 3-22 na 3-4 resulta em:

$$\theta = \frac{dv_t}{dx} = c + bx + ax^2 - \frac{2aEI}{kGA} \quad (3-23)$$

A Equação 3-23 fornece a função aproximadora para as rotações totais do elemento. Assim, integrando-se essa expressão é possível obter o polinômio interpolador dos deslocamentos transversais do elemento finito de viga de Timoshenko.

$$v_t = d + cx + \frac{bx^2}{2} + a \cdot \left( \frac{x^3}{3} - \frac{2EI}{kGA} x \right) \quad (3-24)$$

Admitindo-se a seguinte constante:

$$g = \frac{6EI}{kGAL^2} \quad (3-25)$$

É possível reescrever a Equação 3-24 da seguinte forma:

$$v_t = d + cx + \frac{bx^2}{2} + \frac{a}{3} \cdot (x^3 - gL^2 x) \quad (3-26)$$

A Equação 3-26 representa o polinômio aproximador do campo de deslocamentos transversais, contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento. Da mesma forma, a Equação 3-17 fornece o polinômio aproximador das rotações, que nesse caso, é definido somente contendo a parcela de flexão. No entanto, esses polinômios estão expressos em função dos parâmetros gerais e devem ser definidos em termos dos parâmetros nodais dos elementos, com os devidos ajustes de sinais para a convenção conveniente. Assim, nos nós do elemento têm-se as seguintes condições de contorno:

$$x = 0 \rightarrow v_t = v_1, \phi = \phi_1$$

$$x = L \rightarrow v_i = v_2, \phi = \phi_2$$

Em termos matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^3}{3}(1-g) & \frac{L^2}{2} & L & 1 \\ L^2 & L & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

A Equação 3-27 representa um sistema cujas incógnitas são as constantes  $a, b, c, d$  em função dos parâmetros nodais do elemento. A resolução do sistema resulta em:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot (2v_1 + L\phi_1 - 2v_2 + L\phi_2)}{L^3 \cdot (2g + 1)} \\ -2 \cdot \frac{[3v_1 + L\phi_1 \cdot (2 + g) - 3v_2 + L\phi_2 \cdot (1 - g)]}{L^2 \cdot (2g + 1)} \\ \phi_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

A rotação total em termos dos parâmetros gerais é obtida derivando-se a Equação 3-26:

$$\theta = \frac{-gL^2a}{3} + c + bx + ax^2 \quad (3-29)$$

A primeira derivada da rotação total representa a curvatura  $1/r$  da seção ao longo do elemento finito. Derivando-se a Equação 3-29 em função de  $x$  tem-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = b + 2ax \quad (3-30)$$

Substituindo-se as constantes  $a$  e  $b$  pelos respectivos valores da Equação 3-28 resulta na expressão da curvatura ao longo do elemento finito em função dos parâmetros nodais, dada por:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{L^2} \cdot \left[ \frac{3v_1 - 3v_2 + L\phi_1 \cdot (2 + g) + L\phi_2 \cdot (1 - g)}{1 + 2g} \right] - \frac{6x}{L^3} \cdot \left[ \frac{2v_1 + L\phi_1 - 2v_2 + L\phi_2}{1 + 2g} \right] \quad (3-31)$$

O desenvolvimento segue com a determinação da distorção da seção transversal em função dos parâmetros nodais, a partir da substituição na Equação 3-22 do valor da constante  $a$ , obtido na Equação 3-28, resultando em:

$$\gamma = \frac{g}{L \cdot (1 + 2g)} \cdot (-2v_1 + 2v_2 - L\phi_1 - L\phi_2) \quad (3-32)$$

A próxima etapa consiste na determinação da matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko, a partir da minimização do funcional de energia de deformação contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento. Para isso, tem-se o funcional de energia:

$$U = \frac{EI}{2} \cdot \int_0^L \left( \frac{1}{r} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \cdot \int_0^L \gamma^2 dx \quad (3-33)$$

Substituindo-se no funcional de energia, as Equações 3-31 e 3-32 têm-se a expressão final da energia de deformação do elemento:

$$U = \frac{EI}{(1 + 2g)L^3} \cdot \left[ L^2\phi_2^2 \cdot (2 + g) + L^2\phi_1^2 \cdot (2 + g) + 6v_1^2 + 6v_2^2 + 2L^2\phi_1\phi_2 \cdot (1 - g) + 6L\phi_2 \cdot (v_1 - v_2) + 6v_1\phi_1L - 6v_2\phi_1L - 12v_1v_2 \right] \quad (3-34)$$

Para explicitar a matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko, basta minimizar a energia de deformação definida pela Equação 3-34, o que significa derivá-la em relação aos parâmetros nodais e igualar cada uma das parcelas a zero. Esse procedimento determina a condição de mínima energia potencial total do elemento, definindo sua posição de equilíbrio.

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = \frac{6EI}{L^3 \cdot (1 + 2g)} \cdot (2v_1 + L\phi_1 - 2v_2 + L\phi_2) \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_1} = \frac{-2EI}{L^2 \cdot (1 + 2g)} \cdot [-3v_1 - L\phi_1 \cdot (2 + g) + 3v_2 - L\phi_2 \cdot (1 - g)] \quad (3-36)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_2} = \frac{-6EI}{L^3 \cdot (1 + 2g)} \cdot (2v_1 + L\phi_1 - 2v_2 + L\phi_2) \quad (3-37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_2} = \frac{-2EI}{L^2 \cdot (1 + 2g)} \cdot [3v_1 + L\phi_1 \cdot (1 - g) - 3v_2 + L\phi_2 \cdot (2 + g)] \quad (3-38)$$

As Equações 3-35 a 3-38 podem ser organizadas convenientemente na forma matricial, resultando na matriz de rigidez do elemento com a parcela de flexão e de cisalhamento. O resultado de todo esse processo determina a montagem do sistema clássico de equações  $[K] \cdot \{u\} = \{F\}$ , onde  $[K]$  é a matriz de rigidez do elemento finito;  $\{u\}$  é o vetor de parâmetros nodais com dois deslocamentos transversais e duas rotações;  $\{F\}$  é o vetor de esforços solicitantes em cada elemento com duas forças cortantes e dois momentos fletores.

$$\frac{EI}{1+2g} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \cdot (2+g) & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \cdot (2-g) \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \cdot (2-g) & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \cdot (2+g) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3-39)$$

É interessante agora definir as expressões da curvatura nas extremidades de cada elemento finito em função dos parâmetros nodais, obtidos com a resolução do sistema definido pela Equação 3-39. Vale ressaltar que as curvaturas das extremidades dos elementos serão muito importantes para o cálculo das deformações dos pontos ao longo das seções transversais dos elementos e, conseqüentemente, dos modelos de materiais utilizados para a análise das estruturas.

A Equação 3-31 corresponde à curvatura ao longo do comprimento de um elemento. As curvaturas dos extremos de cada elemento (nó inicial e nó final) são obtidas substituindo-se na Equação 3-31 os valores convenientes de  $x$ , ou seja,  $x=0$  e  $x=L$ . Assim, já colocando as curvaturas na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{r_{x=0}} \\ \frac{1}{r_{x=L}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+2g} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \cdot \left(1 + \frac{g}{2}\right) & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \cdot (1-g) \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{-2}{L} \cdot (1-g) & \frac{6}{L^2} & \frac{-4}{L} \cdot \left(1 + \frac{g}{2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3-40)$$

### 3.2.2 Extensão para a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional que permita a análise de pórticos planos em concreto armado. Por conta disso, é preciso desenvolver a formulação da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano considerando as deformações



de cisalhamento. Para isso, deve-se acrescentar ao elemento de viga, a contribuição da força normal.

O desenvolvimento é análogo ao anterior. Adota-se uma aproximação para o campo de deslocamentos axiais ao longo do elemento como sendo um polinômio de ordem 1, isto é:

$$u = ax + b \quad (3-41)$$

Aplicando-se as condições de contorno do elemento finito obtêm-se os seguintes valores para as constantes  $a$  e  $b$ :

$$x = 0 \rightarrow u_1 = b$$

$$x = L \rightarrow u_2 = aL + b \rightarrow a = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Com isso, tem-se a expressão que define o campo de deslocamentos axiais ao longo do elemento finito e, conseqüentemente, sua primeira derivada:

$$u = \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x + u_1 \quad (3-42)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3-43)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano deve-se escrever a energia de deformação axial do elemento, dada por:

$$U = \frac{EA}{L} \cdot \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (3-44)$$

A integral anterior resulta na energia de deformação final:

$$U = \frac{EA}{2L} \cdot (u_2^2 - 2u_1u_2 + u_1^2) \quad (3-45)$$

Da mesma forma, aplica-se agora sobre a energia de deformação, o princípio da mínima energia potencial total, o que resulta na matriz de rigidez referente à contribuição da força normal:

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{EA}{L} \cdot (u_1 - u_2) \quad (3-46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_2} = \frac{EA}{L} \cdot (u_2 - u_1) \quad (3-47)$$

Considerando-se somente a parcela referente à força normal, o sistema de equações  $[K] \times \{u\} = \{F\}$  fica definido como:

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (3-48)$$

A seguir, finalmente, tem-se a matriz de rigidez completa do elemento finito de pórtico plano de Timoshenko, isto é, considerando as parcelas de flexão, cisalhamento e força normal. Essa matriz foi obtida através da superposição da matriz referente à força normal, definida pela Equação 3-48, com a matriz do elemento de viga, definida na seção anterior.

Vale ressaltar que se o valor da constante  $g$ , dada pela Equação 3-25, for nulo, a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano de Timoshenko resultará na matriz de rigidez de Euler-Bernoulli para o mesmo elemento, que levará em conta somente as parcelas de flexão e de força normal.

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1+2g)} & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3 \cdot (1+2g)} & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & \frac{(4+2g) \cdot EI}{L \cdot (1+2g)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & \frac{(2-2g) \cdot EI}{L \cdot (1+2g)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3 \cdot (1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & \frac{(2-2g) \cdot EI}{L \cdot (1+2g)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+2g)} & \frac{(4+2g) \cdot EI}{L \cdot (1+2g)} \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

### 3.3 Não-Linearidade dos Materiais

#### 3.3.1 Concreto

Para representar o comportamento não-linear do concreto neste trabalho, foi escolhido o modelo de dano de Mazars (1984), que é baseado na chamada Mecânica do Dano no Contínuo. Modelos de dano são interessantes, pois tentam representar, através de penalizações definidas pelos estados de danificação dos pontos ao longo da seção transversal, as perdas de rigidez que ocorrem no concreto provenientes da fissuração.

De acordo com Álvares (1993), o conceito de dano foi proposto por Kachanov<sup>34</sup> (1958) na tentativa de modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil em metais após um período de deformação lenta. Posteriormente, a denominada Mecânica do Dano no Contínuo foi formalizada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis por Lemaitre & Chaboche<sup>35</sup> (1985). Assim, a mecânica do dano tem como objetivo considerar o efeito da deterioração do material com relação às propriedades elásticas em sólidos solicitados por ações mecânicas ou térmicas. Em função disso, a teoria de dano é capaz de formular modelos interessantes para representar o concreto, uma vez que este material apresenta um comportamento não-linear oriundo de sua danificação, à medida que as ações externas atuam sobre a estrutura. Basicamente, os dois efeitos provocados pela danificação no comportamento mecânico macroscópico do material são: a redução da rigidez (módulo de elasticidade) e da resistência (*softening*).

Driemeier (1995) afirmou que o desenvolvimento do dano no concreto, associado à microfissuração pode ser considerado contínuo e se inicia com pequenas tensões ou deformações. Além disso, as deformações permanentes são também devidas ao processo de evolução de microfissuras, podendo-se acoplar os efeitos da plastificação e danificação em um único modelo.

Para maiores detalhes sobre a evolução dos modelos de dano ao longo do tempo, bem como sobre os conceitos gerais da mecânica do dano, os trabalhos de Perego (1990), Driemeier (1995), Botta (1998), Pituba (1998), Neves (2000), Paula (2001) e Branco (2002) trazem um bom histórico sobre a mecânica do dano e suas aplicações na análise do comportamento de estruturas de concreto.

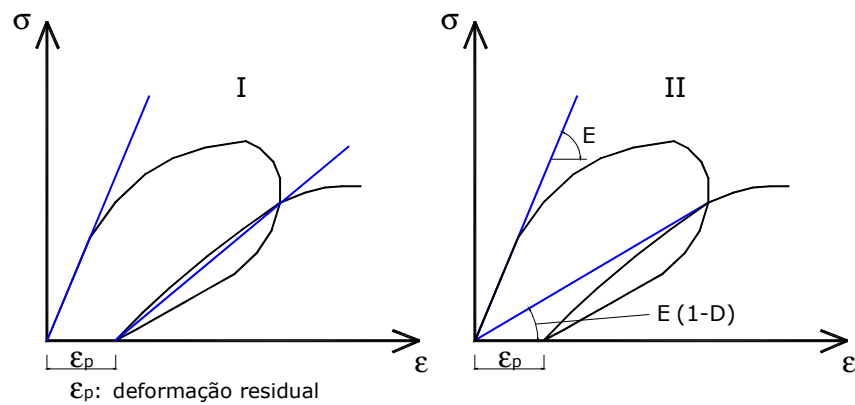
---

<sup>34</sup> Kachanov, L.M. (1958). On the time to failure under creep conditions. *IZV. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn.* n. 8, p. 26-31.

<sup>35</sup> Lemaitre, J.; Chaboche, J.C. (1985). *Mechanique des materiaux solides*. Paris, Dunod-Bordas.

Dentre os modelos de dano encontrados na literatura, o modelo de Mazars (1984) pode ser considerado como sendo um dos mais simples, porém com boa adequação à modelagem de estruturas de barras em concreto armado. As hipóteses do modelo são as seguintes:

- a) O concreto, na evolução do dano, apresenta comportamento elástico. Isso significa que as deformações permanentes, observadas em ensaios experimentais, em situação de descarregamento são desprezadas. A Figura 3-3 ilustra esse comportamento, onde as curvas em preto representam as situações de carregamento e descarregamento no ensaio e a curva em azul ilustram as hipóteses adotadas. O modelo de dano considera que no descarregamento, a curva retorna para a origem, o que significa ausência de deformação plástica residual e somente perda de rigidez do material;
- b) O dano é causado somente pela existência de alongamentos. Para que haja evolução do dano, é preciso que pelo menos uma das componentes do tensor de deformações principais seja de tração;
- c) Análises experimentais evidenciam que a danificação conduz de um modo geral, a um estado de anisotropia induzida do concreto. Para reduzir o número de variáveis internas, o modelo é simplificado considerando-se o dano isótropo, ou seja, o estado de danificação em um ponto é definido por uma única grandeza escalar e é o mesmo para todas as direções;
- d) O dano é representado localmente por uma variável escalar  $D$  que pode variar de zero a um. Quando  $D = 0$  tem-se material totalmente íntegro isento de qualquer defeito, ao passo que quando  $D = 1$  significa que o material se encontra totalmente deteriorado. A evolução da variável de dano ocorre quando um determinado valor de referência para o alongamento é superado pela deformação equivalente, que é função do estado de deformações da estrutura.



**Figura 3-3 – I: Comportamento experimental do concreto, II: Modelo de dano de Mazars (1984)**

Para representar o estado de alongamento em um determinado ponto da estrutura, define-se a grandeza deformação equivalente a partir de:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{(\varepsilon_1)_+^2 + (\varepsilon_2)_+^2 + (\varepsilon_3)_+^2} \quad (3-50)$$

sendo que:  $(\varepsilon_i)_+$  representa as componentes positivas do tensor de deformações principais, dadas por:

$$(\varepsilon_i)_+ = \frac{1}{2} [\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (3-51)$$

$$\text{com } (\varepsilon_i)_+ = \begin{cases} \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i > 0 \\ 0 \rightarrow \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

O modelo admite que o início da danificação aconteça quando o valor da deformação equivalente atinge o valor de deformação correspondente ao pico de tensão do ensaio uniaxial de tração, representado neste trabalho por  $\varepsilon_{d0}$ .

A ABNT NBR 6118:2003 prescreve que na falta de resultados experimentais de resistência à tração para o concreto, pode-se considerar um valor médio, um valor característico inferior e outro superior, definidos, respectivamente, por:

$$f_{ct,m} = 0,33 \sqrt{f_{ck}^2} \quad (3-52)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} \quad (3-53)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \quad (3-54)$$

Assim, a favor da segurança, considera-se neste trabalho que a resistência à tração do concreto seja dada pela Equação 3-53. Todos os valores são expressos em megapascals.

Da mesma maneira, o módulo de elasticidade longitudinal inicial pode ser calculado como sendo  $5600\sqrt{f_{ck}}$ , dado também em megapascal. Assim, o valor inicial da deformação para que o concreto comece a danificar é dado por:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{5600\sqrt{f_{ck}}} \quad (3-55)$$

Partindo-se da hipótese de que a degradação do concreto inicia-se a partir de  $\varepsilon_{d0}$ , foi estabelecido o seguinte critério de danificação:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \hat{S}(D) \leq 0 \quad (3-56)$$

sendo que:  $\hat{S}(D)$  representa a deformação equivalente em função do dano.

Portanto, a danificação terá início somente quando  $f(\tilde{\varepsilon}, D) = 0$ . Na primeira iteração do processo incremental, a variável  $\hat{S}(D)$  recebe o valor da deformação inicial  $\varepsilon_{d0}$ .

A variável escalar de dano apresenta lei de evolução definida em termos de taxas de variação no tempo e atende ao princípio da irreversibilidade do processo de danificação, proveniente da segunda lei da termodinâmica, sendo expressa pelas relações dadas a seguir:

$$\dot{D} = 0 \rightarrow \begin{cases} f < 0 \\ \text{ou} \\ f = 0; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3-57)$$

$$\dot{D} = F(\tilde{\varepsilon})(\dot{\tilde{\varepsilon}})_+ \rightarrow \begin{cases} f = 0 \\ e \\ \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (3-58)$$

sendo que:  $F(\tilde{\varepsilon})$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente. Essa função é escrita em termos de parâmetros numéricos internos do modelo de dano. Esses parâmetros são calibrados a partir das curvas de tensão  $\times$  deformação à tração e à compressão obtidas em

ensaios uniaxiais de corpos de prova em concreto, tendo como objetivo representar da melhor maneira possível o comportamento experimental. Dessa forma, estabelece-se uma correspondência entre a variação de deformação equivalente e a variação do dano na estrutura, dada por:

$$\dot{\tilde{\epsilon}} \geq 0 \leftrightarrow \dot{D} \geq 0 \quad (3-59)$$

O modelo de dano de Mazars (1984) é definido por duas variáveis independentes de dano,  $D_T$  e  $D_C$  com o objetivo de se considerar a não simetria do comportamento do concreto à tração e à compressão. O procedimento é perfeitamente justificável até mesmo porque o próprio processo de fissuração acontece de maneira diferente para cada comportamento. Na tração, as fissuras se desenvolvem numa direção perpendicular à direção da carga, ao passo que na compressão, as fissuras surgem paralelas à direção da carga.

Além disso, uma das características desse modelo de Mazars é a formulação para carregamento crescente, de modo que em problemas nos quais descarregamentos possuem influência significativa, há a necessidade de se considerar o comportamento unilateral do concreto, isto é, o fenômeno de recuperação da rigidez provocado pelo fechamento das fissuras quando uma peça de concreto é tracionada e posteriormente comprimida. O comportamento unilateral do concreto não é considerado nesta formulação.

Assim, as leis de evolução das variáveis de dano são definidas por:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\epsilon})(\dot{\tilde{\epsilon}})_+ \quad (3-60)$$

$$\dot{D}_C = F_C(\tilde{\epsilon})(\dot{\tilde{\epsilon}})_+ \quad (3-61)$$

sendo que: as funções  $F_T$  e  $F_C$  são escritas da seguinte forma:

$$F_T(\tilde{\epsilon}) = \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{A_T B_T}{e^{[B_T(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]}} \quad (3-62)$$

$$F_C(\tilde{\epsilon}) = \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{A_C B_C}{e^{[B_C(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]}} \quad (3-63)$$

Integrando-se as Equações 3-60 e 3-61 para casos de carregamento radial, obtêm-se os valores de  $D_T$  e  $D_C$ :

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad (3-64)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad (3-65)$$

sendo que:  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  são parâmetros internos do modelo calibrados experimentalmente, conforme comentado anteriormente. Mazars (1984) propôs limites de variação para esses parâmetros internos do modelo baseado nas análises experimentais, de tal forma que:

$$\begin{aligned} 0,7 &\leq A_T \leq 1,0 \\ 1,0 &\leq A_C \leq 1,5 \\ 10^4 &\leq B_T \leq 10^5 \\ 10^3 &\leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \\ 10^{-5} &\leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \end{aligned} \quad (3-66)$$

A variável de dano é então composta pela combinação linear das parcelas de dano à tração e à compressão, conforme a expressão abaixo:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (3-67)$$

Os valores de  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são dados em função do tipo de solicitação, ou seja, para casos de tração uniaxial tem-se  $\alpha_T = 1$ , compressão uniaxial tem-se  $\alpha_C = 1$  e para estados multiaxiais, deve-se respeitar a condição  $\alpha_T + \alpha_C = 1$ .

Perego (1990) propôs uma maneira de calcular os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  para os casos gerais de estados multiaxiais. Esta abordagem foi adotada neste trabalho. Assim, tem-se:

$$\alpha_T = \frac{\sum (\varepsilon_{Ti})_+}{\varepsilon_V^+} \quad (3-68)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum (\varepsilon_{Ci})_+}{\varepsilon_V^+} \quad (3-69)$$



sendo que:  $\underline{\varepsilon}_V^+$  é uma variável cinemática que representa o estado local de extensão, sendo definida por:

$$\underline{\varepsilon}_V^+ = \sum_i (\underline{\varepsilon}_{Ti})_+ + \sum_i (\underline{\varepsilon}_{Ci})_+ \quad (3-70)$$

Vale ressaltar que são consideradas somente as parcelas positivas dos tensores de deformação  $\underline{\varepsilon}_T$  e  $\underline{\varepsilon}_C$ , o que condiz com a hipótese deste modelo de dano, no qual a danificação só acontece para alongamentos, isto é, quando  $\varepsilon_i > 0$ . Mazars (1984) propõe as seguintes expressões para o cálculo dessas parcelas positivas dos tensores de deformação:

$$\underline{\varepsilon}_T = \frac{1+\nu}{E} (\underline{\sigma})_+ - \frac{\nu}{E} (\sum \sigma_i)_+ \underline{\underline{I}} \quad (3-71)$$

$$\underline{\varepsilon}_C = \frac{1+\nu}{E} (\underline{\sigma})_- - \frac{\nu}{E} (\sum \sigma_i)_- \underline{\underline{I}} \quad (3-72)$$

sendo que:  $\underline{\underline{I}}$  é o tensor identidade de quarta ordem;  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material;  $(\underline{\sigma})_+$  e  $(\underline{\sigma})_-$  são as partes positiva e negativa do tensor de tensões de um estado de tensão principal fictício, obtido a partir do estado de deformações atual e a relação elástica isótropa inicial ( $\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{D}}_0 \underline{\varepsilon}$ ).

Diante disso, o tensor de tensões desse estado de tensão principal fictício e suas componentes positiva e negativa ficam escritos da seguinte forma:

$$\underline{\tilde{\sigma}}_i = (\underline{\sigma}_i)_+ + (\underline{\sigma}_i)_- \quad (3-73)$$

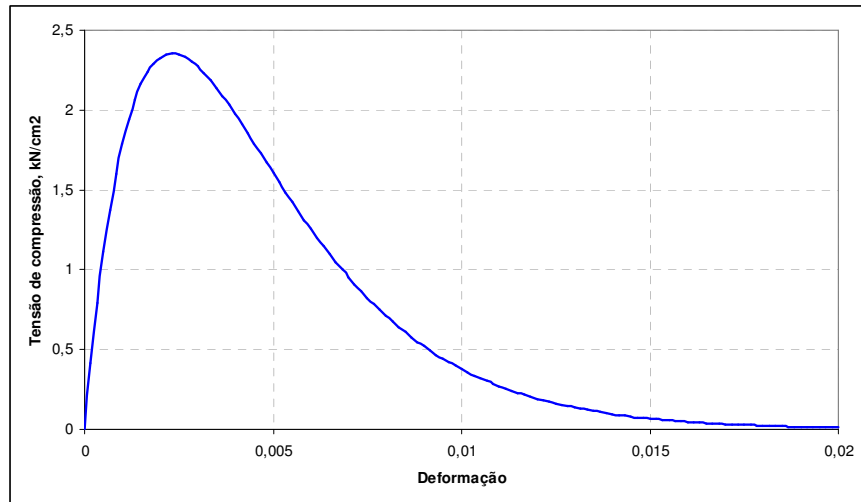
$$(\underline{\sigma}_i)_+ = \frac{1}{2} (\sigma_i + |\sigma_i|) \quad (3-74)$$

$$(\underline{\sigma}_i)_- = \frac{1}{2} (\sigma_i - |\sigma_i|) \quad (3-75)$$

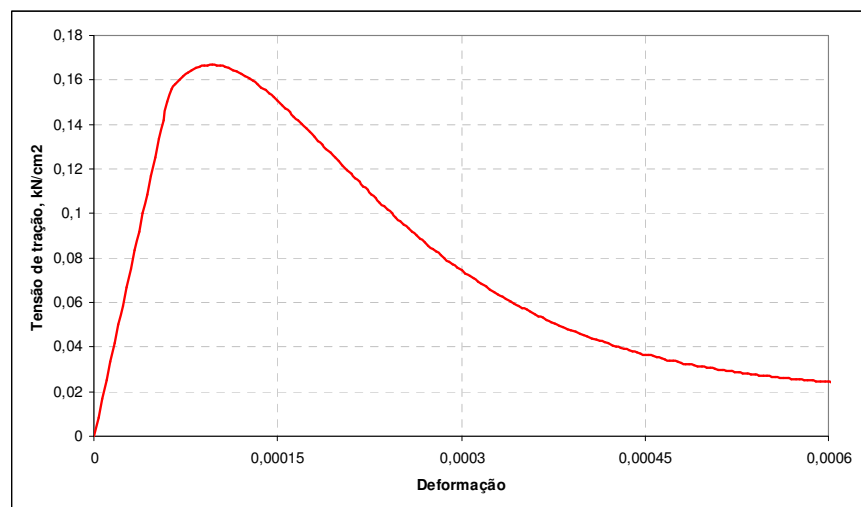
Finalmente, pode-se escrever o tensor de tensões reais na forma tangente em função do estado de deformações, do tensor de propriedades elásticas e da variável de dano, que penaliza igualmente todas as componentes elásticas do material.

$$\underline{\sigma} = (1 - D) \underline{\underline{D}}_0 \underline{\varepsilon} \quad (3-76)$$

As Figuras 3-4 e 3-5 mostram o comportamento do concreto utilizando o modelo de dano para ensaios de compressão e tração uniaxial, respectivamente. Esses resultados foram obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho, simulando os ensaios de tração e compressão em corpos-de-prova de concreto com seção transversal quadrada.



**Figura 3-4 – Diagrama tensão de compressão × deformação para o concreto (20MPa)**



**Figura 3-5 – Diagrama tensão de tração × deformação para o concreto (20MPa)**

Verifica-se que à medida que a danificação do material aumenta, o módulo de elasticidade diminui provocando a perda de rigidez do elemento, bem como sua capacidade resistente. Com a utilização desse modelo de dano é possível considerar o trecho pós-pico de resistência à tração do concreto nas regiões tracionadas, garantindo assim, maior rigidez aos elementos estruturais. Trata-se, portanto, da consideração dos efeitos de *tension softening* nas

seções. Dessa forma, a modelagem de barras em concreto armado se torna mais parecida com a realidade observada nos ensaios.

### 3.3.2 Aço

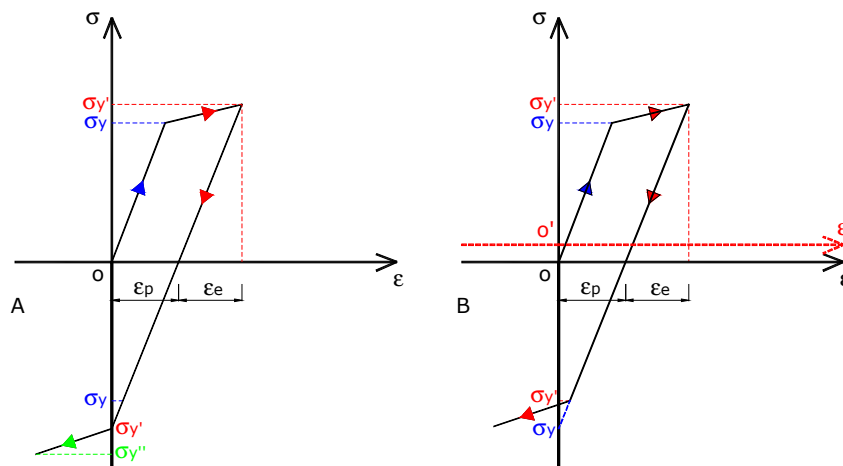
Diferentemente do concreto, a resposta mecânica do aço frente às solicitações normais é bastante previsível. Isso ocorre por conta do melhor controle de produção dos aços, com garantia de homogeneidade do material, conduzindo assim a pequena variabilidade em suas propriedades mecânicas. Os estudos da microestrutura dos metais indicam que função de determinados estados de tensão ocorrem discordâncias, isto é, movimentos entre os cristais do metal, sem que haja perda de coesão ou ruptura interna. Esse fenômeno pode ser observado após ser atingido o limite de escoamento do material, a partir do qual a relação de proporcionalidade entre tensões e deformações não coincide mais com a inicial. Ocorre um rearranjo na estrutura interna do material conferindo-lhe novo comportamento quando solicitado novamente.

Por conta desse tipo de comportamento, a Teoria da Plasticidade revela-se apropriada para descrever o comportamento dos metais, uma vez que a plastificação após o escoamento e a ductilidade são características marcantes desse tipo de material. Os modelos propostos pela teoria da plasticidade para representar o aço baseiam-se no surgimento e acúmulo de deformações residuais ou plásticas permanentes. Além disso, em virtude do bom comportamento do aço, os modelos elastoplásticos uniaxiais são muito interessantes para simular o material.

A modelagem do comportamento uniaxial do aço define alguns aspectos da relação constitutiva elastoplástica que devem ser citados. Primeiramente, a deformação correspondente a uma certa intensidade de tensão é dependente da “história” do carregamento, que é registrada pela deformação plástica acumulada,  $\varepsilon_p$ . Dessa forma, o comportamento elastoplástico é dissipativo, uma vez que a energia de deformação é parcialmente recuperada num ciclo de carga-descarga. Significa que no descarregamento, a parcela de deformação elástica do material é totalmente recuperada permanecendo somente a deformação plástica acumulada. Finalmente, o material pode assumir um comportamento chamado de encruamento positivo ou *hardening*, que consiste em uma nova fase após o escoamento, onde o material por conta dos rearranjos internos de sua estrutura apresenta perda de rigidez, porém ainda mantém a capacidade de suportar as tensões até a ruptura.

Como na plasticidade trabalha-se com histórias de carregamentos, é conveniente que os modelos sejam formulados em taxas de variação. As grandezas são apresentadas em taxas porque são definidas em função de sua derivada em relação ao tempo. No aspecto computacional, os modelos não são descritos em taxas, mas sim em passo finito com as deformações aplicadas em incrementos discretos. Nesse contexto, vale a pena citar os trabalhos de Owen & Hinton (1980), Proença (1988) e Driemeier (1995). O primeiro aborda a teoria da plasticidade no âmbito do método dos elementos finitos, o segundo apresenta grande revisão bibliográfica sobre o assunto e formulações de modelos elastoplásticos inclusive com aplicações para o concreto e, o terceiro trabalho trata do comportamento de metais frente a situações que provocam fadiga, com ênfase na propagação de trincas.

Para representar o comportamento do aço das armaduras, podem ser utilizados modelos do tipo elastoplástico perfeito, elastoplástico com encruamento isótropo linear positivo e com encruamento cinemático (Figura 3-6). A associação dos dois modelos de encruamento (isótropo e cinemático) caracteriza o modelo elastoplástico com encruamento misto e a degeneração dos mesmos modelos (anulando-se os módulos de encruamento isótropo e cinemático do material) caracteriza o modelo elastoplástico perfeito.



**Figura 3-6 – Modelos elastoplásticos para o aço: encruamento isótropo (A) e cinemático (B)**

A seguir, apresenta-se a formulação do modelo elastoplástico com encruamento isótropo linear positivo adotado para o desenvolvimento do programa computacional deste trabalho. Basicamente, a diferença fundamental entre ambos os modelos ilustrados na Figura 3-6 é que no modelo do tipo A quando a deformação de escoamento é atingida, a superfície de plastificação é aumentada, de modo que a próxima tensão de escoamento, isto é, o próximo limite para o critério de plastificação passa a ser a tensão corrigida anterior. Já no modelo do

tipo B, que é o modelo com encruamento cinemático, quando a deformação de escoamento é atingida o que ocorre é uma translação do sistema definindo uma nova origem para o mesmo, de modo que a superfície de plastificação definida pelo critério permaneça constante e sem mudança de seus limites.

O algoritmo do modelo elastoplástico adotado pode ser escrito da seguinte forma:

1. Previsão elástica da tensão:

$$\sigma^{i+1} = E(\varepsilon^{i+1} - \varepsilon_p^{i+1}) \quad (3-77)$$

sendo que:  $\sigma^{i+1}$  é a tensão no aço;  $E$  é o módulo de elasticidade do aço;  $\varepsilon^{i+1}$  é a deformação total;  $\varepsilon_p^{i+1}$  é a deformação plástica ou residual;  $i$  é o incremento atual.

2. Deformação no passo atual:

$$\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i + \Delta\varepsilon^i \quad (3-78)$$

sendo que:  $\Delta\varepsilon^i$  é o incremento de deformação total obtido pelas relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações.

3. Critério de plastificação:

$$f^{i+1} = \sigma^{i+1} - (\sigma_y + K\alpha^{i+1}) \leq 0 \quad (3-79)$$

sendo que:  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do aço;  $K$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico positivo do aço;  $\alpha^{i+1}$  é uma medida da deformação plástica no estado de tensão  $i+1$ .

4. Condição de consistência:

$$\Delta\lambda^f{}^{i+1} = 0 \quad (3-80)$$

sendo que:  $\Delta\lambda$  é a variação da deformação plástica.

5. Deformação plástica atual:

$$\varepsilon_p^{i+1} = \varepsilon_p^i + \Delta\lambda \cdot \text{sign}(\sigma^{i+1}) \quad (3-81)$$

$$\text{com } \text{sign} = \begin{cases} +1 \Leftrightarrow \sigma > 0 \\ -1 \Leftrightarrow \sigma < 0 \end{cases}$$

6. Lei de encruamento isotrópico:

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + \Delta\lambda \quad (3-82)$$

7. Variação da deformação plástica:

$$\Delta\lambda = \frac{E \cdot \Delta\varepsilon^i \text{sign}(\sigma^i)}{(E + K)} \quad (3-83)$$

8. Módulo elastoplástico corrigido:

$$E_s = \frac{EK}{E + K} \quad (3-84)$$

9. Tensão corrigida:

$$\sigma^{i+1} = E_s \varepsilon^{i+1} \Rightarrow \Delta\lambda > 0 \quad (3-85)$$

Para levar em conta a plastificação dos elementos na análise incremental, basta substituir o módulo de elasticidade pelo seu valor corrigido na montagem da contribuição das armaduras na matriz de rigidez dos elementos finitos.

### 3.4 Não-Linearidade Geométrica

Além das ações verticais provenientes dos pesos próprios dos materiais e das ações variáveis normais, os edifícios também são solicitados por ações horizontais. Dentre elas, as forças do vento constituem a principal forma de ação horizontal sobre as estruturas. Como no caso das cargas verticais, as forças horizontais provocam deslocamentos na estrutura que, para o bom funcionamento da mesma, precisam estar dentro dos limites estabelecidos pelos códigos normativos de projeto. Os deslocamentos horizontais associados às cargas verticais do edifício provocam momentos fletores de segunda ordem sobre os elementos estruturais que devem ser levados em consideração na análise de edifícios altos. Assim, para o estudo dos pórticos planos é essencial a consideração desse comportamento que, na literatura, é conhecido como não-linearidade geométrica, pois significa realizar o equilíbrio da estrutura na posição deslocada. A ABNT NBR 6118:2003 traz uma série de recomendações e considerações sobre quando e como computar esses esforços.

Nos métodos mais elaborados, a consideração da não-linearidade geométrica se faz através de formulações que levam em conta a modificação de posição da estrutura, combinada

ao comportamento não-linear dos materiais. Esses efeitos são incorporados na matriz de rigidez e no vetor de esforços solicitantes da estrutura, de modo a contemplar de maneira consistente os efeitos do comportamento dos materiais e deslocamentos da estrutura na análise do equilíbrio global.

É importante esclarecer que devido à natureza não-linear do problema, o princípio da superposição de efeitos não é mais válido, uma vez que não existem mais relações lineares entre esforços e deslocamentos na estrutura. Assim, se faz necessário a divisão do carregamento aplicado em um número finito de passos de carga, tornando o processo não-linear em uma sucessão de cálculos lineares realizados em cada um desses passos. Assim, no decorrer de cada passo de carga, as variáveis não-lineares são mantidas constantes e atualizadas no início do próximo passo, quando o processo iterativo encontra sua convergência.

Neste trabalho, os efeitos da não-linearidade geométrica nas estruturas de pórticos planos em concreto armado foram considerados utilizando a descrição lagrangeana atualizada na análise do equilíbrio com hipótese de pequenos deslocamentos. Considerou-se, incorporada à lei constitutiva, a deformação de Green com forma quadrática no lugar da deformação linear. Do mesmo modo, para que a formulação ficasse consistente, foi empregado o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. A seguir, estão descritos os passos da formulação até as expressões da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas dos elementos.

### 3.4.1 Cinemática adotada

Seja um ponto  $P$  em uma barra qualquer definida no plano  $XY$ . Um deslocamento arbitrário em função das componentes horizontal e vertical pode ser escrito por:

$$u_p(x, y) = u(x) - y \cdot \sin(\theta) \quad (3-86)$$

$$v_p(x, y) = v(x) - y + y \cdot \cos(\theta) \quad (3-87)$$

$$v(x) = v_f + v_c \quad (3-88)$$

sendo que:  $v_f$  e  $v_c$  são, respectivamente, as parcelas de deslocamento à flexão e ao cisalhamento que compõem o valor de referência  $v(x)$ .

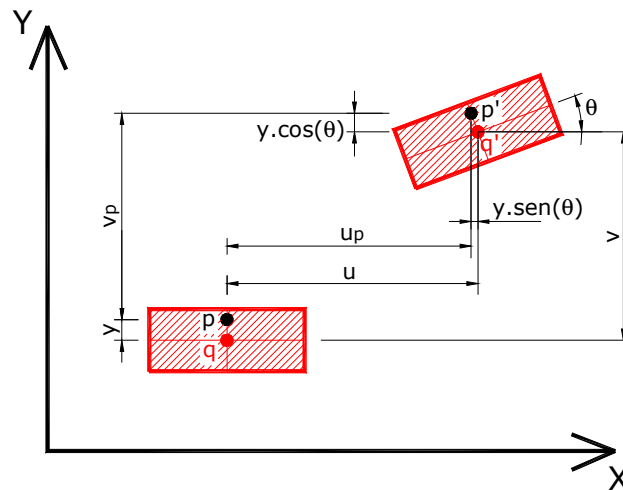


Figura 3-7 – Representação da cinemática adotada

Considerando a aproximação em segunda ordem pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \theta = v'(x) \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{v'(x)^2}{2}\end{aligned}\quad (3-89)$$

Portanto, o campo de deslocamentos do ponto  $P$  pode ser reescrito como:

$$u_p(x, y) = u(x) - y \cdot v'(x) \quad (3-90)$$

$$v_p(x, y) = v(x) - y \cdot \frac{v'(x)^2}{2} \quad (3-91)$$

### 3.4.2 Campo de deformações

A partir daqui, por simplicidade de notação, os termos  $(x, y)$  e  $(x)$  serão omitidos na formulação.

Por se tratar da análise de estruturas de barras, o tensor de deformações é composto somente por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & \gamma_{XY} \\ \gamma_{XY} & \varepsilon_Y \end{bmatrix} \quad (3-92)$$



sendo que:  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  são, respectivamente, as deformações longitudinal e tangencial com termos de segunda ordem justamente para considerar a não-linearidade geométrica;  $\varepsilon_y$  é a deformação na direção perpendicular ao eixo longitudinal. Essas parcelas são calculadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_p}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3-93)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_p}{\partial x} \frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) \quad (3-94)$$

Combinando as Equações 3-94 e 3-93 com as Equações 3-91 e 3-90 e desprezando-se os termos com produtos de ordem superior (Branco, 2002), obtêm-se os campos de deformações longitudinal e tangencial para o elemento finito de pórtico plano, conforme segue:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(v')^2 - y \cdot v''(1 + u') \quad (3-95)$$

$$\gamma_{xy} = v' - \phi - u'v' - \frac{v'^3}{2} \quad (3-96)$$

sendo que:  $\phi$  é a rotação da seção transversal do elemento finito proveniente somente da parcela de flexão.

### 3.4.3 Relação entre deformação e tensão

Uma outra forma de calcular as deformações é a partir do conceito de estiramento, chamado aqui de  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{(du + dx)^2}{dx} + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2} \quad (3-97)$$

sendo que:  $ds$  é o comprimento infinitesimal de uma fibra qualquer do corpo na posição deslocada;  $dx$  é o comprimento inicial da mesma fibra;  $du$  e  $dv$  são as componentes infinitesimais dos deslocamentos axial e transversal, respectivamente, da fibra.

Com isso, as deformações linear e de Green podem ser representadas por:

$$\varepsilon_L = \sqrt{1 + 2 \frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 \quad (3-98)$$

$$\varepsilon_G = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] \quad (3-99)$$

Para que a formulação fique consistente, o tensor de deformação de Green deve ser conjugado com um tensor de tensão compatível, que no caso, é o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, dado por:

$$\underline{S} = \begin{Bmatrix} S_{XX} \\ S_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x / \lambda \\ \tau_{xy} / \lambda \end{Bmatrix} \quad (3-100)$$

Em regime de pequenas deformações, como é o caso deste trabalho, o estiramento assume um valor unitário, de modo que o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie seja igual ao tensor de tensão convencional. Dessa forma, a matriz de propriedades elásticas,  $\underline{D}_0$ , que relaciona tensão e deformação é a mesma para as deformações linear e de Green, o que significa escrever a seguinte relação consistente:

$$\underline{S} = \underline{D}_0 \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (3-101)$$

sendo que:  $\underline{D}_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$  e  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

#### 3.4.4 Matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas

O elemento finito utilizado neste trabalho, conforme já apresentado, é um elemento de pórtico plano com dois nós e três graus de liberdade por nó (Figura 3-8). A matriz de rigidez básica do elemento foi obtida considerando as hipóteses de Timoshenko, que permite levar em conta as deformações por cisalhamento na análise não-linear. É evidente que a

formulação é facilmente degenerada para as hipóteses de Euler-Bernoulli, bastando anular a constante de Weaver,  $g$ .

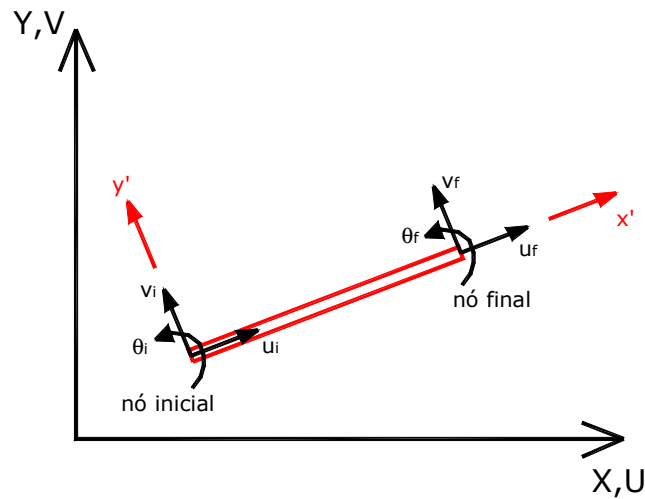


Figura 3-8 – Elemento finito de pórtico plano com sistema local e global de coordenadas

O vetor de forças internas que considera a não-linearidade geométrica na formulação é obtido levando-se em consideração as parcelas das forças longitudinais e tangenciais, conforma segue:

$$F_{\text{int}} = \int_{V_0} \underline{\underline{B}}_{XX} \underline{S}_{XX} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\underline{B}}_{XY} \underline{S}_{XY} dV_0 \quad (3-102)$$

sendo que:  $V_0$  corresponde ao volume do elemento na posição inicial indeslocada;  $\underline{\underline{B}}_{XX}$  e  $\underline{\underline{B}}_{XY}$  são as matrizes de incidência que contém as derivadas das funções de forma do problema. Essas matrizes podem ser obtidos por:

$$\underline{\underline{B}}_{XX} = A^T + (A^T u)A^T + (B^T u)B^T - yC^T - y(C^T u)A^T - y(A^T u)C^T \quad (3-103)$$

$$\underline{\underline{B}}_{XY} = D^T - (B^T u)A^T - (A^T u)B^T - \frac{3}{2}(B^T u)B^T(B^T u) \quad (3-104)$$

Os vetores  $A^T$ ,  $B^T$ ,  $C^T$  e  $D^T$  relacionam as deformações dadas pelas Equações 3-95 e 3-96 com os deslocamentos nodais dos elementos como segue:

$$u' = [N1' \ 0 \ 0 \ N2' \ 0 \ 0]u = A^T u \quad (3-105)$$

$$v' = [0 \ N3' \ N4' \ 0 \ N5' \ N6']u = B^T u \quad (3-106)$$

$$v'' = [0 \quad N3'' \quad N4'' \quad 0 \quad N5'' \quad N6'']u = C^T u \quad (3-107)$$

$$\gamma = \left[ 0 \quad \frac{-2g}{(1+2g)L_0} \quad \frac{-g}{(1+2g)} \quad 0 \quad \frac{2g}{(1+2g)L_0} \quad \frac{-g}{(1+2g)} \right] u = D^T u \quad (3-108)$$

sendo que:  $Ni'$  e  $Ni''$  com  $i = 1$  a 6 são as derivadas primeira e segunda das funções de forma adotadas para o problema;  $g$  é a constante de Weaver para a viga de Timoshenko que está inserida no termo correspondente à parcela do cisalhamento no polinômio interpolador para o campo de deslocamentos transversais do elemento finito. Seu valor já foi definido anteriormente, mas será repetido aqui por comodidade. Portanto, tem-se  $g = 6EI/kGAL_0^2$ .

Com os deslocamentos nodais e as funções de forma é possível interpolar o campo de deslocamentos ao longo do eixo de cada elemento finito. Tem-se, portanto, o vetor de deslocamentos do eixo e a matriz com as funções de forma para cada grau de liberdade de cada elemento finito:

$$\underline{d}_0(x) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{\phi}(x)u \quad (3-109)$$

$$\underline{\phi}(x) = \begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 \\ 0 & N3 & N4 & 0 & N5 & N6 \end{bmatrix} \quad (3-110)$$

$$N1 = \left( 1 - \frac{x}{L_0} \right)$$

$$N2 = \left( \frac{x}{L_0} \right)$$

$$N3 = \frac{1}{1+2g} \left[ (1+2g) - 2g \left( \frac{x}{L_0} \right) - 3 \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{L_0} \right)^3 \right] \quad (3-111)$$

$$N4 = \frac{L_0}{1+2g} \left[ (1+2g) \left( \frac{x}{L_0} \right) - (2+g) \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 + \left( \frac{x}{L_0} \right)^3 \right]$$

$$N5 = \frac{1}{1+2g} \left[ 2g \left( \frac{x}{L_0} \right) + 3 \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{L_0} \right)^3 \right]$$

$$N6 = \frac{L_0}{1+2g} \left[ -g \left( \frac{x}{L_0} \right) - (1-g) \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 + \left( \frac{x}{L_0} \right)^3 \right]$$

Finalmente, de posse de todas essas informações, a matriz de rigidez tangente, composta por uma parcela de flexão,  $K_{Tf}$  e por uma parcela de cisalhamento,  $K_{Tc}$  é obtida a partir de:

$$\underline{K}_T = \underline{K}_{Tf} + \underline{K}_{Tc} \quad (3-112)$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_{Tf} &= \int_{V_0} \underline{B}_{XX}^T E \underline{B}_{XX} dV_0 + \int_{V_0} \underline{G}_{XX} \underline{S}_{XX} dV_0 \\ \underline{K}_{Tc} &= \int_{V_0} \underline{B}_{XY}^T G \underline{B}_{XY} dV_0 + \int_{V_0} \underline{G}_{XY} \underline{S}_{XY} dV_0 \end{aligned} \quad (3-113)$$

sendo que:  $\underline{G}$  são as matrizes de incidência da não-linearidade geométrica dadas por:

$$\begin{aligned} \underline{G}_{XX} &= AA^T + BB^T - yAC^T - yCA^T \\ \underline{G}_{XY} &= -BA^T - AB^T - 3(B^T u)BB^T \end{aligned} \quad (3-114)$$

### 3.4.5 Forma lagrangeana atualizada

A formulação lagrangeana atualizada é caracterizada por descrever a situação da estrutura em relação à última configuração equilibrada, isto é, todas as informações necessárias para o próximo passo de carga são retiradas do passo anterior convergido. Para que a implementação computacional seja adequada, são necessárias duas atualizações.

A primeira consiste em atualizar continuamente as coordenadas cartesianas nodais, acrescentando o vetor de deslocamentos incrementais à última configuração de equilíbrio. Assim, no início do próximo incremento de carga, a estrutura estará com novas coordenadas nodais e, portanto, na posição deslocada. Essa passagem é definida por:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{\Delta u} \quad (3-115)$$

sendo que:  $\underline{X}$  é o vetor com as coordenadas nodais do passo atual;  $\underline{X}_0$  é o vetor que contém as coordenadas cartesianas nodais do passo anterior convergido;  $\underline{\Delta u}$  é o vetor com os incrementos de deslocamento da última iteração do passo atual.

A segunda atualização é feita sobre o tensor de tensão, pois na descrição lagrangeana atualizada, a mudança contínua de referencial requer a transformação do tensor de tensão para a nova configuração. A maneira adequada de realizar essa transformação é utilizar o tensor de

Cauchy, relacionando-o com o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. No entanto, para pequenas deformações, o tensor de Cauchy coincide, na configuração atual, com o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie da configuração anterior. Desse modo, a cada passo do processo incremental, basta adicionar o incremento de tensão do passo,  $\underline{\Delta S}$ , ao tensor do passo anterior,  $\underline{S}_0$ , conforme segue:

$$\underline{S} = \underline{S}_0 + \underline{\Delta S} \quad (3-116)$$

Com isso, tem-se a matriz de rigidez e o vetor de forças internas da análise não-linear geométrica para o elemento finito de pórtico plano com a consideração das deformações por cisalhamento. Resta ainda combinar essa formulação com a não-linearidade dos materiais para obter a forma completa da matriz de rigidez e do vetor de força internas.

### **3.5 Modelos de Resistência ao Cisalhamento**

#### **3.5.1 Aspectos gerais**

Nesta seção é apresentado um modelo aproximado de resistência ao cisalhamento aplicado às vigas em concreto armado. Este modelo foi incorporado ao modelo mecânico desenvolvido com o objetivo de representar melhor o comportamento das vigas e, com isso, melhorar também a determinação da trajetória de equilíbrio e das forças últimas das mesmas, proporcionando dessa forma maior precisão para as análises de confiabilidade e otimização.

Fazem parte do modelo de resistência ao cisalhamento os mecanismos complementares de transferência de tensões cisalhantes, isto é, engrenamento dos agregados e efeito de pino, bem como a contribuição da armadura transversal.

De maneira geral, o efeito de pino foi considerado através da teoria de vigas sobre base elástica. O engrenamento dos agregados foi incorporado de maneira indireta pelo próprio modelo de dano e a armadura transversal foi levada em consideração a partir das deformações principais de tração ponderadas pelo dano no concreto combinado com a analogia de treliça para determinação da força nos estribos.

Quando se considera o comportamento não-linear dos materiais e da estrutura, a interação entre as tensões normais e de cisalhamento fazem com que os planos principais de tração e compressão assumam valores diferentes de 45°. He & Kwan (2001) afirmam ainda

que as contribuições de mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, como é o caso do efeito de pino, bem como a transferência direta das tensões para os estribos, não podem ser obtidas diretamente em modelos de elementos finitos. Tais contribuições necessitam de um tratamento especial que deve ser combinado ao modelo computacional de elementos finitos.

A seguir, são apresentadas as hipóteses adotadas para a formulação do modelo e sua incorporação ao modelo de elementos finitos:

- A força cortante resistente na seção é obtida pela soma das contribuições do concreto (íntegro e engrenamento dos agregados), do efeito de pino da longitudinal e da armadura transversal;
- As contribuições da armadura transversal e do efeito de pino só começam a ser contabilizadas quando a variável de dano for diferente de zero, ou seja, quando se inicia o processo de evolução da microfissuração diagonal. Desse modo, o efeito de pino já é levado em conta a partir do início da danificação e não somente quando há uma fissura discreta. Essa hipótese foi adotada, pois o modelo de dano não considera a fissura discreta, mas sim o crescimento dos microdefeitos até a localização da fratura;
- A armadura transversal é definida em termos de taxa ao longo dos elementos finitos e as tensões são calculadas através do modelo elastoplástico do aço;
- A parcela resistida pelo concreto sofre interferência do momento fletor na seção, pois a variável de dano leva em conta esse efeito. Assim, em função da forte danificação por conta das tensões normais, a parcela do concreto pode ser reduzida rapidamente;
- A integridade das bielas comprimidas do concreto é feita impondo-se a condição limite de 2‰ sobre a deformação principal de compressão.

Na sequência, são apresentadas as contribuições consideradas no modelo de resistência ao cisalhamento, juntamente com suas formulações para o cálculo de cada parcela resistente. Os detalhes de cada mecanismo de transferência de tensões de cisalhamento já foram discutidos anteriormente na revisão bibliográfica.

### 3.5.2 Contribuição do concreto e o engrenamento dos agregados

No início do processo de carregamento, o comportamento do concreto é elástico-linear, de modo que toda a força cortante na seção é absorvida pelo concreto. Portanto, uma vez que ainda não houve danificação, tem-se  $V = V_c$  e nenhuma parcela é transferida para a armadura transversal.

Após a resolução do sistema de equações algébricas na análise em elementos finitos, são obtidas as componentes de deformação longitudinal,  $\varepsilon_x$  e deformação transversal,  $\gamma_{xy}$  segundo as Equações 3-95 e 3-96. Uma vez iniciada a danificação, essas componentes são utilizadas juntamente com os critérios de dano para avaliar a distribuição real das tensões sobre os elementos, conforme segue:

$$\underline{\sigma} = (1 - D)\underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \tau_c \end{Bmatrix} = (1 - D) \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-117)$$

É interessante notar que a tensão  $\sigma_y$  é nula e não a deformação  $\varepsilon_y$ , sendo esta dada por uma relação entre a deformação  $\varepsilon_x$  e o coeficiente de Poisson do material. Os esforços resistentes são então obtidos pela integração das tensões normais e tangenciais ao longo de uma seção transversal, já modificadas pela danificação conforme segue:

$$\begin{aligned} N_c &= b_w \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c dy \\ V_c &= b_w \int_{-h/2}^{h/2} \tau_c dy \\ M_c &= b_w \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c y dy \end{aligned} \quad (3-118)$$

Para as tensões normais, ainda existe a parcela explícita da armadura longitudinal que será mostrada posteriormente. É importante salientar quanto à força cortante que o valor mostrado na Equação 3-118 não expressa a capacidade total de resistência ao cisalhamento de uma viga em concreto armado, pois ainda precisam ser contabilizadas as parcelas da armadura transversal e do efeito de pino.

De acordo com essa abordagem, o engrenamento dos agregados é considerado automaticamente pelo modelo de dano, pois este expressa uma redução gradual do módulo de elasticidade transversal à medida que a danificação aumenta com o carregamento.



Fisicamente, o dano vai aumentando conforme a deformação principal de tração aumenta, o que caracteriza uma evolução das microfissuras no interior da massa de concreto. Com isso, considera-se que o atrito existente entre as superfícies dos agregados e as paredes das microfissuras diminui, provocando, dessa forma, uma diminuição da parcela resistente do concreto pelo engrenamento dos agregados. Essa hipótese é perfeitamente compatível com a formulação do modelo de dano por conta da diminuição de  $G$  pelo fator  $(1-D)$ . Portanto, considera-se neste trabalho que a parcela do engrenamento dos agregados está presente no valor de  $V_c$  dado pela Equação 3-118. Além disso, tem-se ainda todo o processo de calibração dos parâmetros internos do modelo de dano, que é feito para cada resistência diferente do concreto. Assim, ao se calibrar esses parâmetros através de um processo de minimização do erro entre a resposta mecânica com dano e a resposta de uma determinada lei constitutiva, o engrenamento dos agregados é automaticamente levado em conta, pois os parâmetros do modelo vão refletir tal contribuição. Trata-se de um procedimento simples de minimização de erro entre duas respostas, que pode ser observado com mais detalhes em Nogueira (2005).

À medida que o carregamento aumenta, a danificação dos elementos também aumenta. Se não houver nenhum mecanismo extra de resistência, quando o dano atingir a unidade na seção transversal, a resistência à força cortante da seção vai a zero. Esse comportamento é perfeitamente normal, uma vez que toda a porção de concreto encontra-se danificada com rigidez nula, limitando a resistência ao cisalhamento somente ao concreto. Tal comportamento é típico, por exemplo, em vigas sem armadura transversal e pequena taxa de armadura longitudinal.

### 3.5.3 Contribuição da armadura transversal

Com o objetivo de verificar a distribuição de tensões na armadura transversal das vigas em concreto armado, Belarbi & Hsu (1990) fizeram uma série de ensaios experimentais em vigas de seção T, comparando os resultados dos ensaios com modelagens numéricas. Os autores concluíram que, de um modo geral, as tensões nos estribos aumentam do banzo comprimido para o banzo tracionado, porém diminuem quando se aproximam das regiões com armadura longitudinal, aliviando assim os estribos. Também observaram que as respostas numéricas dependem do ângulo de inclinação das bielas comprimidas, o que proporciona certa dificuldade para a modelagem adequada da contribuição da armadura transversal.

De acordo com as observações experimentais, o critério para determinar o início da contribuição da armadura transversal formada por estribos na resistência ao cisalhamento de elementos em concreto armado consiste no próprio critério de dano. Em um ponto ocorre danificação se, neste ponto, segundo o critério de dano de Mazars, a deformação equivalente ultrapassar o limite de deformação do material, que para o concreto corresponde à deformação máxima de tração. A deformação equivalente é definida pelo somatório das componentes positivas do tensor de deformações. Isso significa que somente deformações de alongamento podem causar danificação no concreto. Mais ainda, admite-se que no concreto, a abertura de fissuras diagonais está diretamente associada à deformação principal de tração  $\varepsilon_1$ . Portanto, a deformação dos estribos será associada também à deformação principal  $\varepsilon_1$ .

Após o início da danificação, admite-se que o tensor de deformações seja decomposto em duas parcelas:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^d \quad (3-119)$$

sendo que: o símbolo  $e$  corresponde à parcela de deformação que é elástica e, portanto, recuperável; o símbolo  $d$  corresponde à parcela de deformação de dano, que é dissipada ao longo do processo.

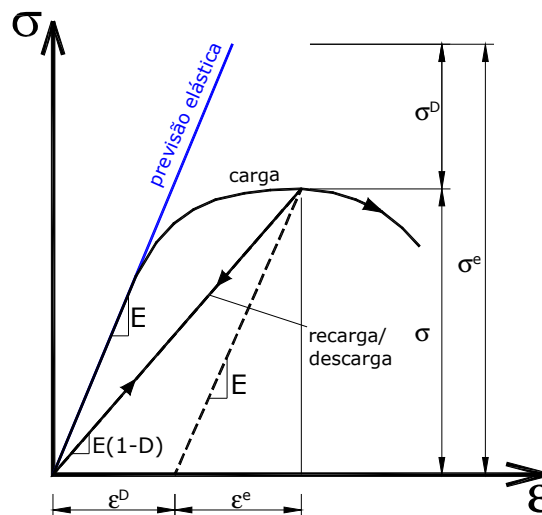
Aplicando-se o tensor de propriedades elásticas do material e o modelo de dano, tem-se o tensor de tensão elástico corrigido, dado por:

$$\underline{\sigma} = (1 - D)\underline{D}_0\underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\sigma} = \underline{D}_0\underline{\varepsilon} - D\underline{D}_0\underline{\varepsilon} \quad (3-120)$$

A Equação 3-120 fornece a parcela efetiva resistida pelo concreto, isto é, previsão elástica menos a parcela dissipada pela danificação. Com isso, pode-se escrever a parcela de deformação de dano em função da parcela de tensão dissipada:

$$\underline{\sigma}^d = D\underline{D}_0\underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\varepsilon}^d = D\underline{\varepsilon} \quad (3-121)$$

Esse comportamento pode ser visto de maneira detalhada na Figura 3-9.



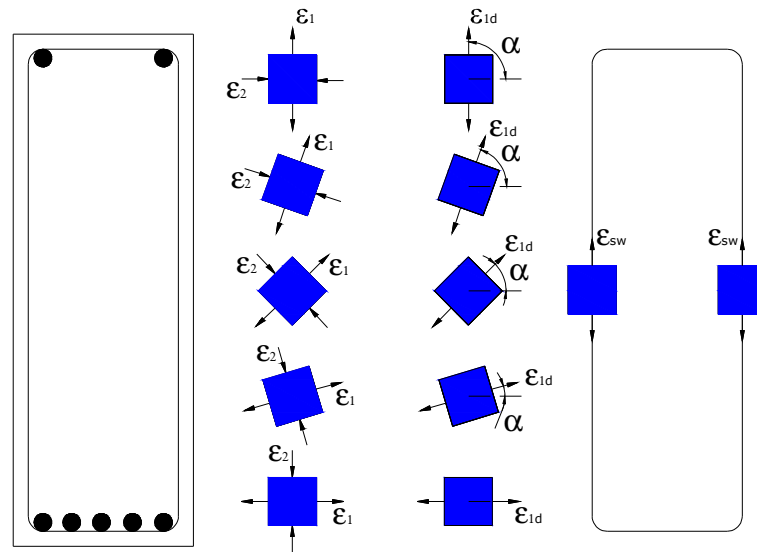
**Figura 3-9 – Relação tensão × deformação unidimensional para o modelo de dano**

Adotando esse raciocínio, a deformação da armadura transversal será dada, portanto, pela parcela dissipada da deformação principal de tração rotacionada para a direção da armadura transversal, que em geral, é vertical. Da mesma forma, a deformação da biela comprimida no ponto será dada pela deformação principal de compressão, conforme ilustra a Figura 3-10. Assim, tem-se:

$$\varepsilon_{sw} = \max[\varepsilon_1 D \sin(\alpha)] \quad (3-122)$$

sendo que:  $D$  é a variável de dano calculada em cada ponto de Gauss ao longo da altura da seção de cada elemento finito;  $\alpha$  é a direção principal do estado de deformação no ponto de Gauss.

Sanches Jr. & Venturini (2007) desenvolveram um modelo semelhante a esse, porém adotaram o estado de deformação do ponto médio da seção como sendo o alongamento dos estribos. No entanto, em regime não-linear, o ponto médio pode não representar a máxima tensão de cisalhamento na seção de concreto, conforme ponderado por Belarbi & Hsu (1990). Desse modo, neste trabalho adota-se o máximo valor do produto dado pela Equação 3-122 como sendo a deformação da armadura transversal.

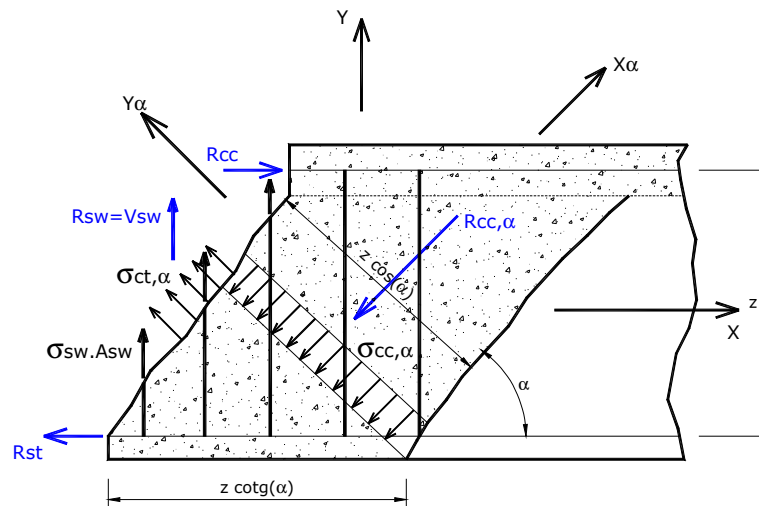


**Figura 3-10 – Estado de deformação para as bielas de concreto e armadura transversal**

É importante notar que nas fibras mais tracionadas da seção, isto é, aproximadamente nas posições das camadas da armadura longitudinal de tração, o ângulo que reflete a direção principal de tração,  $\alpha$ , é muito próximo de zero, o que implica em seno igual a zero. Assim, a deformação nos estribos não será dada por esses pontos próximos à armadura longitudinal, refletindo o comportamento observado em ensaios, nos quais nas proximidades da armadura longitudinal de tração, as tensões de cisalhamentos nos estribos são muito pequenas por conta de sua transferência para as próprias barras da armadura longitudinal. Por outro lado, nos pontos próximos à borda mais comprimida da seção, embora o seno de  $\alpha$  esteja próximo da unidade, o dano, bem como a deformação principal de tração são pequenos, de modo que dificilmente a deformação dos estribos será dada por esses pontos. Diante disso, os maiores valores de deformação da armadura longitudinal estarão contidos na região central da seção, porém não necessariamente no seu ponto médio.

Após o cálculo da deformação, a tensão na armadura transversal é dada pelo modelo elastoplástico adotado para o aço, conforme descrito anteriormente.

O próximo passo é avaliar a parcela de força transferida para a armadura transversal. Isso é feito a partir da analogia da treliça de Ritter-Mörsch, conforme ilustrada no trecho de viga da Figura 3-11.



**Figura 3-11 – Distribuição de forças para um elemento fissurado em concreto armado**

A tensão de tração do concreto na direção principal,  $\sigma_{ct,\alpha}$ , já é levada em consideração pela contribuição do concreto,  $V_c$ . As forças  $R_{cc}$  e  $R_{st}$  são, respectivamente, as resultantes de compressão no concreto do banço superior e de tração na armadura longitudinal. A força em cada estribo é dada pelo produto  $\sigma_{sw} A_{sw}$  que, segundo a analogia de treliça, pode ser considerada para uma faixa de largura igual à altura útil da seção,  $d$ . Assim, finalmente, define-se a parcela de força cortante transferida para a armadura transversal em termos de sua taxa, da largura e altura útil da seção:

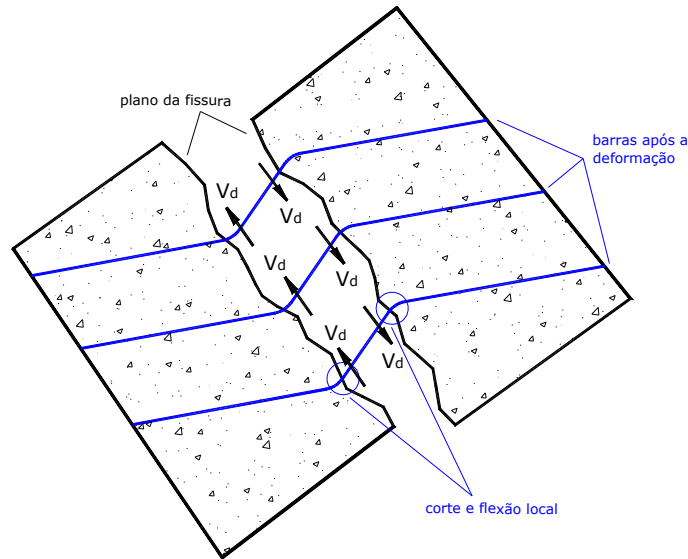
$$V_{sw} = \sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d \quad (3-123)$$

sendo que:  $\rho_{sw}$  é a taxa de armadura transversal da seção do elemento definida por  $\frac{A_{sw}}{s \cdot b_w}$ ;  $s$  é o espaçamento entre os estribos;  $b_w$  é a largura da seção transversal do elemento.

### 3.5.4 Contribuição da armadura longitudinal

As barras que compõem a armadura longitudinal contribuem na resistência à força cortante através do mecanismo complementar conhecido como efeito de pino (*dowel action*). As normas de projeto de estruturas em concreto armado consideram esse mecanismo na própria parcela de contribuição do concreto. Neste trabalho, o efeito de pino será considerado como uma parcela independente que, somadas às outras parcelas, compõem a resistência total à força cortante.

Conceitualmente, o efeito de pino é uma força de reação proveniente da tentativa de corte e flexão local das barras da armadura, quando estas são interceptadas por uma fissura. As faces da fissura tendem a sofrer um deslizamento em função das tensões de cisalhamento nessas faces, causando nas barras um deslocamento transversal relativo, mobilizando essa força de reação,  $V_d$  (Figura 3-12).



**Figura 3-12 – Esquema de ação do efeito de pino**

Desde que o efeito de pino foi reconhecido na década de 30 como um mecanismo eficiente de transferência de tensões de cisalhamento em situações de serviço, a analogia com uma viga sobre base elástica foi introduzida. Assim, as barras da armadura funcionam como vigas apoiadas sobre uma base elástica, que no caso da armadura longitudinal, é definida pelo próprio cobrimento de concreto. A representação adequada do efeito de pino é afetada por disposições geométricas das armaduras na seção transversal, tais como, a espessura do cobrimento de concreto, o espaçamento entre as barras longitudinais e quantidade de armadura transversal, acarretando, desse modo, grande complexidade ao fenômeno. Além disso, deve-se considerar o comportamento não-linear do concreto, que introduz ainda mais complexidade ao estudo. Por conta disso, apesar de vários ensaios realizados a partir da década de 50, conforme comentados na revisão bibliográfica, existem poucos modelos matemáticos para modelagem do efeito de pino. Em função de sua simplicidade e coerência, a hipótese de viga sobre base elástica é aceita e utilizada até hoje como fundamento de todos esses métodos de predição do efeito de pino em elementos de concreto armado. A grande vantagem dessa abordagem é que todas as particularidades do fenômeno são incorporadas em um único parâmetro definido como sendo a rigidez da base elástica definida pelo concreto. De

maneira geral, esse coeficiente de rigidez pode assumir valores constantes, em casos de abordagem puramente linear, ou pode variar em função do deslocamento transversal da barra da armadura, bem como também em função dos parâmetros que levam em conta o grau de danificação do concreto na região que interfere no comportamento de pino.

Diante disso, He & Kwan (2001) apresentaram um modelo interessante para calcular o valor dessa rigidez, levando-se em conta as propriedades do concreto do cobrimento, da armadura e da geometria do local. Eles propuseram o cálculo da parcela do efeito de pino a partir do uso da relação linear entre força e deslocamento de uma viga semi-infinita. Esse modelo foi escolhido e adaptado para a consideração do efeito de pino neste trabalho.

A Figura 3-13 mostra a hipótese de viga sobre base elástica e uma barra isolada solicitada pelo deslocamento relativo de pino.

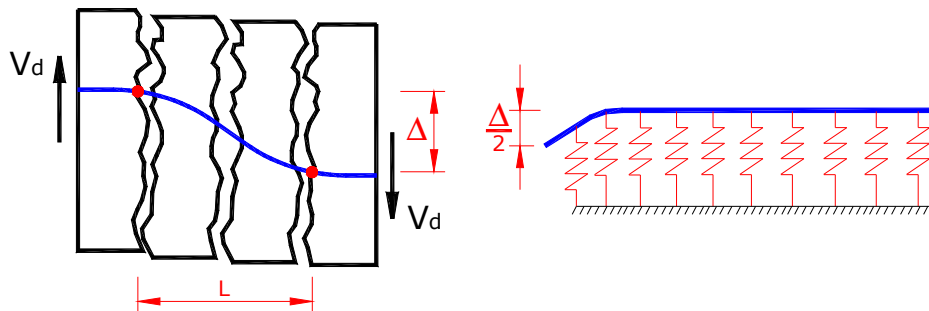


Figura 3-13 – Hipótese de viga sobre base elástica e o efeito de pino

Desse modo, pode-se escrever a força de pino como sendo:

$$V_d = K_d \Delta \quad (3-124)$$

sendo que:  $K_d$  é a rigidez da base;  $\Delta$  é o deslocamento de pino sofrido pela barra da armadura.

O comprimento  $L$  ilustrado na Figura 3-13 representa o quanto da barra está sujeita ao deslocamento de pino  $\Delta$ . De acordo com He & Kwan (2002), esse comprimento pode ser calculado pela razão  $\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é um parâmetro que representa a rigidez relativa da fundação, isto é, do cobrimento de concreto, sendo dado por:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_c \phi_s}{4E_s I_s}} \quad (3-125)$$

sendo que:  $k_c$  é o módulo de fundação para o cobrimento de concreto;  $\phi_s$  é o diâmetro da barra da armadura;  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço;  $I_s$  corresponde ao momento de inércia da barra, que no caso de barras circulares é dado por  $\pi\phi_s^4/64$ .

Soroushian et al. (1987) propuseram, a partir de ensaios experimentais, uma expressão para o valor do módulo de fundação do cobrimento de concreto:

$$k_c = \frac{127c_1\sqrt{f_c}}{\sqrt[3]{\phi_s^2}} \quad (3-126)$$

sendo que:  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto dada em N/mm<sup>2</sup>;  $c_1$  é um coeficiente que varia de 0,6 no caso de espaçamento horizontal entre barras de até 25mm a 1,0 para os casos de espaçamento acima de 25mm.

Assim, o deslocamento de pino pode ser calculado como:

$$\Delta = DL[\varepsilon_1 \cos(\alpha)\text{sen}(\alpha) + \gamma_{XY} \cos^2(\alpha)] \quad (3-127)$$

sendo que:  $\alpha$  é a direção principal de tração definida com a horizontal;  $D$  é o valor da variável de dano em cada ponto de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos.

Finalmente, é possível obter o valor da rigidez de pino para um número  $n_b$  de barras ou ainda em função da área da camada de armadura:

$$K_d = n_b E_s I_s \lambda^3 = \frac{4A_s}{\pi\phi_s^2} E_s I_s \lambda^3 \quad (3-128)$$

He & Kwan (2001) assumem que a força última de pino é função direta do diâmetro da barra e das resistências do concreto e do aço de acordo com a seguinte expressão:

$$V_{du} = 1,27\phi_s^2 \sqrt{f_c f_s} \quad (3-129)$$

É importante destacar que em todas essas expressões apresentadas para o modelo de pino, as variáveis devem ser utilizadas segundo as seguintes unidades:  $N$  (Newton) e  $mm$  (milímetro).

Assim, tem-se a seguinte relação para o cálculo da tensão proveniente do efeito de pino da armadura longitudinal:



$$\tau_d = \begin{cases} \frac{n_b \rho_s E_s I_s \lambda^3 \Delta}{A_s} \rightarrow f_c \leq f_{ck} \text{ e } f_s \leq f_{sk} \\ \frac{1,27 \rho_s \phi_s^2 \sqrt{f_c f_s}}{A_s} \rightarrow f_c > f_{ck} \text{ ou } f_s > f_{sk} \end{cases} \quad (3-130)$$

sendo que:  $\rho_s$  e  $A_s$  são, respectivamente, a taxa de armadura longitudinal e a área total da armadura longitudinal ao longo da seção transversal de cada elemento finito.

É importante notar que a Equação 3-130 fornece o valor da tensão de pino em cada ponto de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos, uma vez que o deslocamento de pino dado pela Equação 3-127 depende dos valores de deformação e de dano que são, por sua vez, calculados em cada ponto de Gauss da altura.

Como as tensões de pino se desenvolvem através das faces das fissuras, torna-se necessário rotacionar a tensão dada pela Equação 3-130 para a direção principal de tração, aqui assumida como sendo a direção de inclinação das fissuras. Essa rotação é feita da seguinte forma:

$$\tau_{d,\alpha} = \tau_d \cos^2(\alpha) \quad (3-131)$$

Conhecendo-se os valores da tensão de pino,  $\tau_{d,\alpha}$ , para cada ponto de Gauss de altura, integra-se ao longo do comprimento do elemento finito e obtém-se o valor da força resultante correspondente à contribuição do efeito de pino para cada elemento finito.

É importante notar que toda essa formulação está diretamente relacionada com a danificação em cada ponto de Gauss. Assim, as tensões de pino se desenvolvem proporcionalmente à quantidade de dano que existe em cada ponto. Dessa forma, à medida que a danificação vai aumentando sobre os pontos de Gauss, estes vão aumentando sua contribuição no efeito de pino, de modo que ao final do processo de carregamento, toda a força de pino compatível com aquele estado de deformação final da estrutura é mobilizada ao longo dos elementos finitos.

### 3.5.5 A parcela corretora de força cortante

O modelo para o cálculo da força cortante em elementos de concreto armado, conforme apresentado até aqui, está inserido no problema não-linear global de análise de estruturas tratado neste trabalho. Por simplicidade, a matriz de rigidez tangente não sofre

nenhuma modificação por conta desses efeitos de cisalhamento considerados. A correção ocorre somente no vetor de forças nodais, a partir dos valores de força cortante calculados pelo modelo.

Por se tratar de um modelo aproximado, é possível que ao final de uma iteração, a força cortante dada pela soma de todas as parcelas, isto é,  $V_c + V_{sw} + V_d$  seja maior que a força cortante elástica possível para aquela configuração deslocada. Nesse caso, a correção da força cortante ocorre sobre a parcela que é transferida para a armadura transversal, de modo que resulta  $V_{sw} = V - V_c - V_d$ . Dessa forma, não há força cortante residual para ser aplicada na iteração seguinte.

No entanto, a situação inversa também pode ocorrer, na qual a soma das contribuições resulte menor que a força cortante máxima possível na seção. Quando isso acontecer, surgirá uma parcela residual dada por  $V_R = V - V_c - V_{sw} - V_d$  que deverá ser aplicada na iteração seguinte em forma de carregamento residual da mesma forma que no processo não-linear clássico de correção.

## **3.6 Análise Não-Linear de Pórticos Planos**

### **3.6.1 Aspectos gerais**

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é um procedimento eficiente para formular o problema não-linear de estruturas, pois permite, através de uma única equação escalar escrever o equilíbrio para o corpo inteiro em estudo. Existem outras maneiras de formular o problema, como é o caso do Método dos Resíduos Ponderados, porém a abordagem escolhida neste trabalho foi o PTV.

Em uma abordagem não-linear, além das deformações elásticas, existem parcelas de deformações residuais e perda de rigidez dos elementos. Isso significa que, por conta do comportamento não-linear da estrutura, as forças internas não resultam iguais às forças externas após um incremento de carga direto. Surgem com isso, resíduos de força que “sobram” na estrutura, fazendo com que o equilíbrio não seja verificado diretamente. A solução para esse problema consiste em formular uma função-resíduo e reaplicá-la sobre a estrutura, tantas vezes quanto forem necessárias até atingir o equilíbrio. A função-resíduo é formulada a cada iteração do processo incremental-iterativo mediante a diferença entre as

forças internas e as forças externas, de modo que seja reaplicada sobre a estrutura assumindo o papel de uma variação de força externa. Este processo é encerrado quando se atinge o equilíbrio em termos da tolerância pré-estabelecida.

Pelo PTV, o trabalho virtual é dado pela soma da variação da energia de deformação interna  $\Delta U$ , com a variação do trabalho virtual das forças externas  $\Delta W$ . A variação do trabalho total  $\Delta T$  pode então ser escrita como segue:

$$\Delta T = \Delta U + \Delta W \quad (3-132)$$

Por outro lado, também é possível pelo PTV, definir o trabalho virtual de um campo de deslocamentos virtuais  $\delta u$ , que seja compatível e homogêneo nas condições de contorno sobre uma função-resíduo  $r$ , descrita em unidades de força, ao longo de um elemento infinitesimal na posição atual, conforme segue:

$$\Delta T = \int_V r \cdot \delta u dV \quad (3-133)$$

Combinando-se as Equações 3-132 e 3-133 tem-se:

$$\int_V r \cdot \delta u dV = \Delta U + \Delta W \quad (3-134)$$

A parcela referente à energia interna da estrutura na Equação 3-134 é escrita em termos do trabalho das componentes de tensão sobre as respectivas componentes de deformação, dada por:

$$\Delta U = \int_V \sigma \cdot \delta \epsilon dV \quad (3-135)$$

A outra parcela refere-se à energia desenvolvida sobre a estrutura proveniente das forças externas, que podem atuar sobre o volume  $V$  ou sobre uma determinada área  $A$  da estrutura:

$$\Delta W = \int_V b \cdot \delta u dV + \int_A t \cdot \delta u dA \quad (3-136)$$

sendo que:  $b$  é o vetor de forças por unidade de volume;  $t$  é o vetor de forças por unidade de área atuando sobre a estrutura ou parte dela.

Portanto, a Equação 3-134 passa a ser escrita como:

$$\int_V r \cdot \delta u dV = \int_V \sigma \cdot \delta \epsilon dV - \int_V b \cdot \delta u dV - \int_A t \cdot \delta u dA \quad (3-137)$$

Os parâmetros de volume e área estão definidos em todas essas equações para a posição atual deslocada. No entanto, esses parâmetros são desconhecidos na posição deslocada, o que torna inviável o uso do PTV. Por conta disso, a expressão anterior deve ser reescrita em termos dos parâmetros de volume e área na posição atual indesejada, como segue:

$$\int_{V_0} r \cdot \delta u dV_0 = \int_{V_0} S \cdot \delta \epsilon dV_0 - \int_{V_0} b_0 \cdot \delta u dV_0 - \int_{A_0} t_0 \cdot \delta u dA_0 \quad (3-138)$$

É importante destacar que na forma do PTV dada pela Equação 3-138, as tensões na parcela da energia interna são dadas pelo tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie,  $S$ , caracterizando de forma consistente a forma lagrangeana. Além disso, vale lembrar que, na descrição lagrangeana, o estado do corpo é formulado em termos das coordenadas iniciais conhecidas de cada ponto. Ainda dentro desse contexto, a forma lagrangeana atualizada permite que uma configuração conhecida seja tomada como um estado inicial sendo continuamente atualizada no decorrer da análise. Portanto, a Equação 3-138 prescreve de maneira consistente a forma lagrangeana atualizada do PTV.

### 3.6.2 Combinação entre os modelos de não-linearidades

Para considerar os efeitos das não-linearidades geométrica e dos materiais na análise de estruturas de pórticos planos em concreto armado, deve-se combinar adequadamente os modelos de dano e elastoplástico com a forma lagrangeana atualizada. Assim, o problema consiste em montar a matriz de rigidez tangente combinada e o vetor de forças internas considerando ao mesmo tempo os efeitos da NLM e da NLG.

Quando se considera também a influência das deformações por cisalhamento, o elemento de pórtico plano é solicitado por um estado bidimensional de tensões. Dessa forma, o cálculo da deformação equivalente do modelo de dano de Mazars, dada pela Equação 3-50, necessita das deformações principais para que seja possível obter o valor da variável escalar de dano. Calculadas as deformações principais, obtém-se o tensor de tensão corrigido pelo dano. Entretanto, por conta da distorção considerada, o tensor de tensão é dividido em uma parcela longitudinal e outra parcela transversal não-nula. Esse fato permite escrever de outra

forma a equação que define o PTV (Equação 3-138), de modo que se considere a taxa de variação da tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. Essa taxa de variação da tensão, por sua vez, é calculada em função da taxa de variação do dano, combinando desse modo no tensor de tensões, os efeitos da NLG e do modelo de dano. Mais detalhes sobre essas transformações podem ser encontrados em Paula (2001).

Após essas considerações, obtêm-se a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas para o elemento de pórtico plano com modelo de dano, influência do cisalhamento e não-linearidade geométrica:

$$\underline{\underline{K}}_T = \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T (1-D) \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T \eta \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{B}} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{S}} dV_0 \quad (3-139)$$

$$\underline{\underline{F}}^{\text{int}} = \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{S}} dV_0 \quad (3-140)$$

sendo que:  $\eta$  é uma função que considera as derivadas da deformação equivalente em relação às componentes de deformações, dada por:

$$\eta = F(\tilde{\epsilon}) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon} \quad (3-141)$$

$$F(\tilde{\epsilon}) = \alpha_T F_T(\tilde{\epsilon}) + \alpha_C F_C(\tilde{\epsilon}) \quad (3-142)$$

As funções  $F_T(\tilde{\epsilon})$  e  $F_C(\tilde{\epsilon})$  são as mesmas dadas pelas Equações 3-62 e 3-63 e repetidas aqui apenas por conveniência.

$$F_T(\tilde{\epsilon}) = \frac{\epsilon_{d0}(1-A_T)}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{A_T B_T}{e^{[B_T(\tilde{\epsilon}-\epsilon_{d0})]}}$$

$$F_C(\tilde{\epsilon}) = \frac{\epsilon_{d0}(1-A_C)}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{A_C B_C}{e^{[B_C(\tilde{\epsilon}-\epsilon_{d0})]}}$$

A derivada da deformação equivalente em relação à parte longitudinal do tensor de deformação depende do sentido da deformação das fibras, isto é:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_x} = 1 \rightarrow \text{tração} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_x} = -\nu\sqrt{2} \rightarrow \text{compressão}$$

Como se trata de estruturas de pórticos planos, ou seja, os elementos finitos são elementos de barra, as integrais no volume podem ser escritas em função apenas do comprimento e da altura de cada elemento, admitindo a base como constante. Assim, tem-se as equações da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas reescritas da seguinte forma:

$$\underline{K}_T = b_w \int_L \int_h \underline{B}^T (1-D) \underline{D}_0 \underline{B} dh dL + b_w \int_L \int_h \underline{B}^T \eta \underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \underline{B} dh dL + b_w \int_L \int_h \underline{G} \underline{S} dh dL \quad (3-143)$$

$$\underline{F}^{\text{int}} = b_w \int_L \int_h \underline{B}^T \underline{S} dh dL \quad (3-144)$$

### 3.6.3 Integração numérica

A integração numérica é utilizada neste trabalho para obter os esforços resistentes ao longo dos elementos finitos, bem como a parcela da matriz de rigidez do concreto. Com a utilização dos modelos não-lineares para os materiais, a distribuição de tensões ao longo das seções transversais é também não-linear, o que praticamente impossibilita a integração analítica. Assim, a integração numérica permite generalizar os procedimentos.

As técnicas adotadas neste trabalho são as quadraturas de Gauss e Gauss-Lobatto. A diferença entre elas é que no método de Gauss-Lobatto consideram-se os pontos extremos e o ponto médio do intervalo de integração, ao passo que no método de Gauss são considerados somente os pontos internos do domínio. O princípio desses métodos é a substituição das integrais analíticas por somatórios, cuja precisão depende do número de pontos colocados. Dessa forma, a quantidade de pontos deve ser suficiente para aproximar a função a ser integrada, de modo que o erro tenda a zero. Em análises com linearidade do material, para a integração das tensões ao longo da altura da seção transversal, 2 pontos são suficientes, pois a distribuição de tensões é linear. Quando se considera o comportamento não-linear do material, como o modelo de dano para o concreto, a distribuição de tensões assume uma forma qualquer na seção transversal impossibilitando o cálculo analítico. Branco (2002) recomenda que devem ser adotados pelo menos 10 pontos de Gauss na altura para o modelo de dano de Mazars do concreto. Da mesma forma, para a formulação lagrangeana atualizada, Paula (2001) sugere pelo menos 6 pontos ao longo do comprimento do elemento. Com isso, a matriz de rigidez da estrutura também é montada a partir da contribuição dos pontos de Gauss do

comprimento e da altura dos elementos, nos quais são calculadas as deformações, tensões, bem como todas as variáveis internas dos modelos dos materiais.

A Figura 3-14 ilustra o processo da integração numérica das tensões ao longo da altura de um elemento finito, bem como a contribuição da armadura longitudinal.

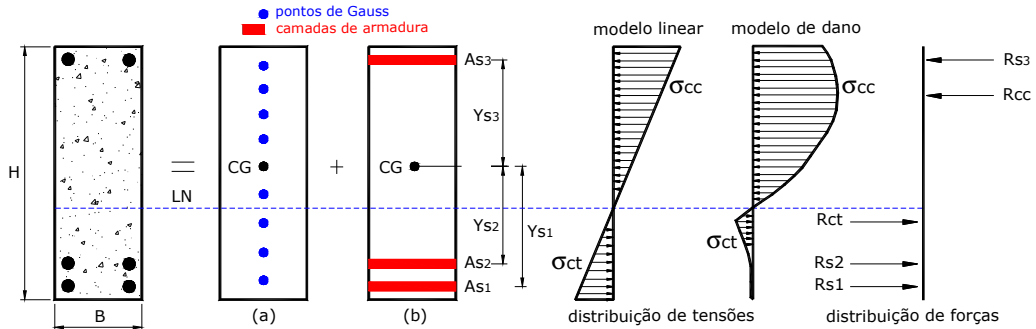


Figura 3-14 – Distribuição de tensões e discretização da seção: (a) concreto e (b) aço

A parcela que representa a contribuição do concreto na matriz de rigidez da estrutura pode então ser dada por:

$$\underline{\underline{K}}_C = \sum_{i=1}^{pgl} \left\{ \sum_{j=1}^{pgh} \left[ \underline{\underline{B}}_{ij}^T (1 - D_{ij}) \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}}_{ij} + \underline{\underline{B}}_{ij}^T \eta_{ij} \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}}_{ij} + \underline{\underline{G}}_{ij} \underline{\underline{S}}_{ij} \right] \frac{b_w h}{2} w y_j \right\} \frac{L}{2} w x_i \quad (3-145)$$

sendo que:  $wy$  e  $wx$  são, respectivamente, os pesos ponderadores da integração numérica ao longo da altura e do comprimento dos elementos;  $pgl$  e  $pgh$  são, respectivamente, o número de pontos de Gauss ao longo do comprimento e da altura dos elementos.

Da mesma forma, pode-se escrever a contribuição do concreto no vetor de forças internas como sendo:

$$\underline{\underline{F}}_C^{int} = \sum_{i=1}^{pgl} \left[ \sum_{j=1}^{pgh} \left( \underline{\underline{B}}_{ij}^T \underline{\underline{S}}_{ij} \right) \frac{b_w h}{2} w y_j \right] \frac{L}{2} w x_i \quad (3-146)$$

A contribuição das camadas de armadura longitudinal também é baseada na quadraturas de Gauss e Gauss-Lobatto com integração numérica ao longo do comprimento. Na altura, a contribuição é feita da mesma forma, porém para um número de camadas. Assim, para a contribuição na matriz de rigidez e no vetor de forças internas tem-se:

$$\underline{\underline{K}}_S = \sum_{i=1}^{pgl} \left\{ \sum_{j=1}^{cam} \left[ \underline{\underline{B}}_{ij}^T E_s \underline{\underline{B}}_{ij} + \underline{\underline{G}}_{ij} \underline{\underline{\sigma}}_{ij} \right] A_{s_j} \right\} \frac{L}{2} w x_i \quad (3-147)$$

$$\underline{F}_S^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{pgl} \left[ \sum_{j=1}^{cam} (\underline{B}_{ij}^T \underline{\sigma}_{ij}) A s_j \right] \frac{L}{2} w x_i \quad (3-148)$$

sendo que: *cam* é o número de camadas de armadura longitudinal ao longo da altura dos elementos finitos.

A matriz de rigidez tangente global, bem como o vetor de forças internas da estrutura toda são obtidas pela soma algébrica sobreposta das contribuições do concreto e da armadura longitudinal de todos os elementos finitos.

As Equações 3-146 e 3-148 calculam o vetor de forças internas, tanto para o concreto quanto para o aço das armaduras longitudinais, que, por sua vez, devem ser somados para equilibrar o vetor de forças externas aplicado sobre a estrutura. O que é interessante mostrar aqui é que esses vetores são compostos pelos esforços resistentes calculados segundo os modelos já apresentados e devidamente rotacionados para o sistema global, de modo a ficar coerente com as forças externas, que também estão relacionadas no sistema global. Assim, as expressões em forma de integrais são convertidas para forma de somatórios exatamente como mostrados nas Equações 3-146 e 3-148 chegando-se, portanto, à forma final das forças internas resistentes da estrutura. Apenas para ilustração, as expressões dos esforços nas formas integrais são dadas por:

$$N = \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=1}^{cam} (\sigma_s A_s)_i \quad (3-149)$$

$$V = \int_A \tau_c dA + \int_A \tau_{d,\alpha} dA + \sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d \quad (3-150)$$

$$M = \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^{cam} (\sigma_s A_s y)_i \quad (3-151)$$

sendo que:  $\int_A \tau_{d,\alpha} dA$  e  $\sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d$  são, respectivamente, as parcelas resistentes do efeito de pino e da armadura transversal já definidas anteriormente; *y* é a distância do ponto de Gauss ou da camada de armadura longitudinal até o centro de gravidade da seção transversal dos elementos finitos.



### 3.6.4 Estratégia de solução do problema não-linear

O problema não-linear é caracterizado quando o trabalho dado pela Equação 3-132, resulta diferente de zero. Isso significa que o trabalho das forças internas não é igual ao trabalho das forças externas, gerando um vetor de resíduos. Em termos de energia, o vetor de resíduos pode ser entendido como a parcela de energia de deformação não absorvida pela estrutura para um determinado nível de deslocamentos. Para que o equilíbrio seja atingido, o vetor de resíduos deve ser reaplicado sobre a estrutura na forma de carregamentos nodais. Esta etapa gera modificações na matriz de rigidez global da estrutura, provenientes da não verificação dos critérios de plastificação das armaduras e danificação do concreto que, por sua vez, são função dos deslocamentos residuais oriundos da aplicação do vetor de resíduos. Por conta disso, esse processo tem caráter não-linear podendo ser representado por:

$$[\underline{K} + \underline{K}(u)] \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad (3-152)$$

sendo que:  $\underline{K}$  é a parte linear da matriz de rigidez global;  $\underline{K}(u)$  é a parte não-linear da matriz de rigidez dependente dos deslocamentos residuais;  $\underline{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais;  $\underline{F}$  é o vetor de forças externas aplicadas sobre a estrutura.

Como o comportamento dos materiais é diferente para cada intensidade de carregamento aplicado, o que se faz é dividi-lo em incrementos que podem ser iguais ou diferentes, ao invés de aplica-lo de uma só vez. Assim, a resolução do problema não-linear consiste em linearizar o processo em um conjunto de iterações lineares sucessivas para cada incremento de carga, até que se atinja o estado estrutural equilibrado no incremento. Para isso, utiliza-se a técnica incremental-iterativa de Newton-Raphson com atualização da matriz de rigidez a cada iteração.

A matriz de rigidez é atualizada a cada iteração sofrendo a influência dos modelos constitutivos do aço e do concreto, bem como da não-linearidade geométrica. Esses efeitos não-lineares provocam o desequilíbrio entre as forças internas e externas gerando o vetor de resíduos. O vetor de resíduos,  $\Delta r_i$ , é reaplicado sobre a estrutura, conforme já citado, até que o equilíbrio seja atingido, isto é, quando a norma do vetor de resíduos resultar menor ou igual a uma tolerância pré-estabelecida,  $\xi$ . Quando isso ocorre, diz-se que a resultante de forças sobre a estrutura é nula e que o processo atingiu a convergência. Aplica-se um novo incremento de carga e repete-se todo o procedimento até completar todo o carregamento externo atuante sobre a estrutura. A Figura 3-15 retrata o procedimento iterativo de Newton-

Raphson para 1 incremento genérico de carga salientando a atualização da matriz de rigidez a cada iteração, o que garante maior velocidade de convergência. O equilíbrio ocorre, no caso, quando a norma do resíduo verifica a relação:

$$|\Delta r_i| = |\underline{F}_i^{\text{int}} - \underline{F}^{\text{ext}}| \leq \xi \quad (3-153)$$

sendo que:  $\underline{F}_i^{\text{int}}$  é o vetor de forças internas da estrutura na iteração  $i$ ;  $\underline{F}^{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas aplicadas sobre a estrutura.

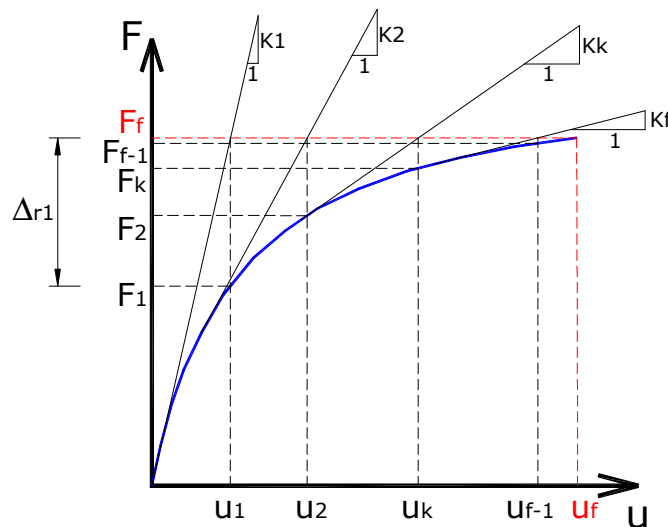


Figura 3-15 – Esquema de solução para 1 incremento de carga

### 3.7 Determinação da Carga Última ou Carga de Violação de Estado Limite

#### 3.7.1 Aspectos gerais

Nesta etapa do trabalho são mostradas as estratégias computacionais para obtenção de cargas últimas referentes aos estados limites últimos de esgotamento da capacidade resistente da seção transversal, perda de estabilidade global da estrutura e ao estado limite de serviço de deformação excessiva.

A ABNT NBR 8681:2003 define estado limite como sendo um estado a partir do qual a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção. No contexto da confiabilidade, um estado limite corresponde à fronteira entre o desempenho desejado e indesejado da estrutura, isto é, uma função matemática que define se a estrutura apresenta

uma falha ou está segura. Vale ressaltar que, na análise de segurança estrutural, a falha pode ser definida de várias maneiras, sendo que, para cada modo de falha, pode-se associar uma função de estado limite. Portanto, falha não significa necessariamente a ruína de uma estrutura. Esse conceito é extremamente importante para este trabalho, visto que se pretende considerar nas análises de confiabilidade, a influência de múltiplos modos de falha do sistema, de modo que é interessante falar em cargas de violação de estado limite. Assim, ao se atingir um estado limite, a carga obtida pelo modelo mecânico fica definida como uma carga de violação de estado limite.

### 3.7.2 ELU – esgotamento da capacidade resistente da seção

A falha por esgotamento da capacidade resistente de uma seção transversal em concreto armado é definida neste trabalho quando os materiais atingirem os valores limites de deformação pré-estabelecidos para uma dada intensidade de carregamento. Para o concreto, foram adotados os seguintes limites de deformação: 2,0‰ para compressão nos casos de seções úteis inteiramente comprimidas e ruptura das bielas comprimidas no cisalhamento; 3,5‰ para flexão nos casos de seções úteis não inteiramente comprimidas; 10‰ para as armaduras de flexão e de cisalhamento.

De acordo com essa definição, quando em uma dada seção transversal da estrutura, as deformações nos materiais atingirem algum desses valores, admite-se que houve violação da condição de estado limite, que pode não implicar na ruína do sistema. Isso significa que apenas o primeiro modo de falha foi atingido. Dessa forma, se a análise numérica continuar, será possível, à medida que o sistema estrutural permitir, a determinação de outros modos de falha pelo surgimento de mais violações de estado limite até a falha total da estrutura. Essa é, portanto, a estratégia adotada para determinação de cargas últimas de um ou mais modos de falha.

A verificação das deformações procede da seguinte forma:

Ao final de cada iteração do processo incremental são verificadas as deformações dos materiais em cada ponto de Gauss de comprimento e de altura ao longo de todos os elementos finitos. Portanto, são feitas  $NE \times NPGL \times NPGH$  verificações para o concreto e  $NE \times NPGL \times NCAM$  para o aço. Se em algum ponto houver a violação de um ou mais dos limites de deformação impostos, admite-se que a carga última foi atingida. Após ser atingida essa deformação limite, o programa armazena todos os valores importantes do passo anterior

convergiu e volta para este passo, reaplicando um incremento de carga menor do que o incremento normal definido no início da análise. Esse procedimento é repetido até uma tolerância pré-estabelecida para a busca da carga última.

Em termos matemáticos, é possível definir funções locais de estado limite para o concreto e para o aço, conforme segue:

$$\begin{aligned} G_{C_{ijk}} &= \varepsilon_{C_{lim}} - \varepsilon_{C_{ijk}} \\ G_{S_{ijl}} &= \varepsilon_{S_{lim}} - \varepsilon_{S_{ijl}} \end{aligned} \quad (3-154)$$

sendo que:  $NE$  é o número de elementos finitos ( $i$ );  $NPGL$ ,  $NPGH$  e  $NCAM$  são, respectivamente, o número de pontos de Gauss no comprimento ( $j$ ), na altura ( $k$ ) e o número de camadas de armadura longitudinal ( $l$ );  $\varepsilon_{C_{lim}}$  e  $\varepsilon_{S_{lim}}$  são, respectivamente, os limites de deformação para o concreto e para o aço.

Com isso, a carga última da estrutura ou carga de violação de estado limite fica definida como:

$$P_{ult} = P\{\min[(G_C \leq 0) \cup (G_S \leq 0)]\} \quad (3-155)$$

Diante disso, verifica-se que a carga última da estrutura é obtida quando pelo menos uma das duas condições da Equação 3-154 é desrespeitada, ou seja,  $G < 0$ , o que caracteriza um ponto no domínio de falha do concreto ou do aço. Cada busca de carga última no contexto de deste trabalho caracteriza uma chamada completa do modelo mecânico de elementos finitos.

Apenas reforçando o que já foi dito, para a consideração de múltiplos modos de falha, após ser identificado o primeiro modo com a formação da primeira rótula plástica, basta permitir que o programa continue a análise até que a condição do estado limite definida na Equação 3-154 seja atingida para as demais seções consideradas. Assim, ao final do processo, serão obtidas as cargas últimas correspondentes aos modos de falha (ELU) desejados, desde que a estrutura ainda seja estável, o que permitirá o desenvolvimento da análise de confiabilidade de sistemas na etapa posterior deste trabalho.

### 3.7.3 ELU – perda de estabilidade global

A falha por perda de estabilidade global da estrutura é considerada neste trabalho quando a matriz de rigidez global do sistema torna-se singular, ou seja, o determinante da matriz é nulo. Nesse caso não é definida nenhuma função de estado limite como no caso do esgotamento da seção, pois a carga última é encontrada quando o processo incremental-iterativo não apresentar convergência. Em termos computacionais, a cada iteração verifica-se a singularidade da matriz de rigidez global, que traduz sua capacidade de resolver o sistema de equações algébricas. Quando a matriz se torna singular, automaticamente o processo iterativo é interrompido, pois a tangente ao ponto procurado é nula. É conveniente ressaltar que este estado limite de perda de estabilidade, em função da maneira como é considerado, pode ser aplicado a qualquer tipo de estrutura, seja uma viga, pilar ou pórtico, caracterizando sempre ruína da estrutura.

### 3.7.4 ELS – deformações excessivas

O estado limite de serviço de deformações excessivas é atingido quando em um determinado vão de uma estrutura, o deslocamento relativo ultrapassa o valor limite estabelecido por norma. Para verificar esta condição no programa desenvolvido foram adotadas duas considerações: deslocamento relativo em vãos com extremidades apoiadas ou engastadas e deslocamento relativo em vãos com uma das extremidades em balanço. A Figura 3-16 ilustra essas considerações.

Assim, os deslocamentos são dados por:

a) vãos apoiados:

$$f = U_3 - U_1 - \frac{L_3}{L} (|U_2 - U_1|) \quad (3-156)$$

b) balanço à direita:

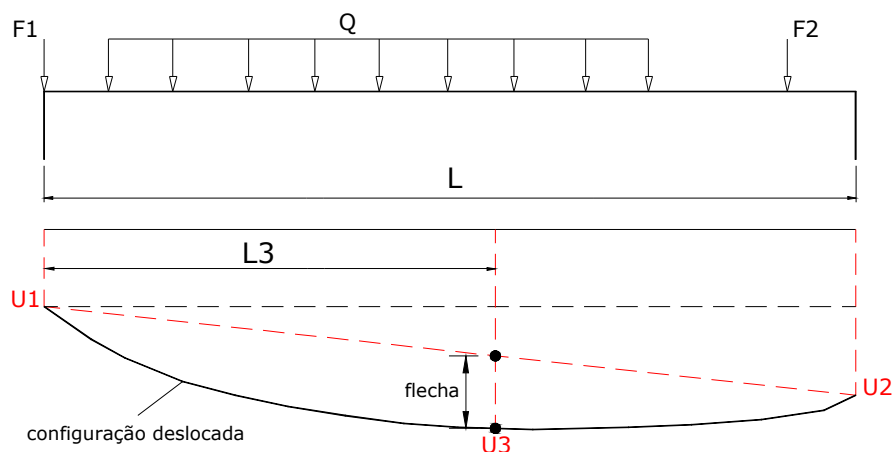
$$f = U_3 - U_1 \quad (3-157)$$

c) balanço à esquerda:

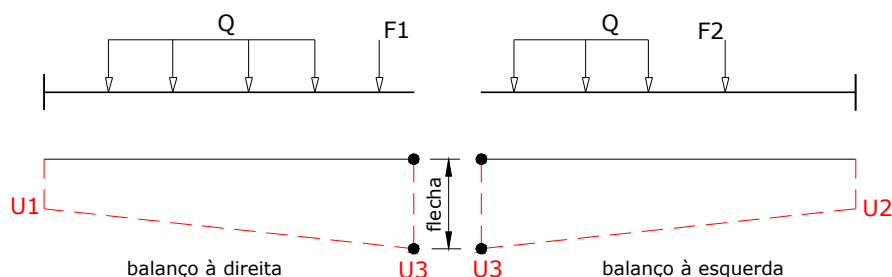
$$f = U_3 - U_2 \quad (3-158)$$

sendo que:  $f$  é a flecha ou o deslocamento máximo relativo;  $L$  é o comprimento do vão onde será determinada a flecha;  $L_3$  distância da seção onde será determinada a flecha até a extremidade esquerda do vão;  $U_1$  é o deslocamento do nó da extremidade esquerda do vão;  $U_2$  é o deslocamento do nó da extremidade direita do vão;  $U_3$  é o deslocamento do nó onde será determinada a flecha.

A) Idealização para vãos apoiados



B) Idealização para vãos em balanços



**Figura 3-16 – Idealizações adotadas para o cálculo de deslocamentos relativos**

A formulação apresentada acima é geral, pois pode ser utilizada tanto para vigas quanto para pilares e, conseqüentemente, para pórticos planos. No caso dos pórticos, os deslocamentos nas vigas são analisados para o caso de vãos apoiados ou balanços conforme o padrão, os deslocamentos relativos entre pavimentos são considerados como casos verticais de vãos apoiados e para a verificação do deslocamento máximo horizontal do pórtico, este é considerado como um tramo em balanço, cujo comprimento é a altura total do pórtico. A única diferença é que quando os elementos estiverem na vertical, o deslocamento global utilizado na análise será o deslocamento na direção horizontal, ao invés do deslocamento na direção vertical como no caso das vigas.

Assim, a verificação do estado limite de serviço em deformações excessivas pode ser representado por:

$$G = f_{\text{lim}} - f \quad (3-159)$$

sendo que:  $f_{\text{lim}}$  é a flecha máxima permitida por normas.

Para valores de  $G < 0$  caracteriza-se uma configuração de falha da estrutura quanto ao estado limite de serviço.

### 3.7.5 Algoritmo de busca

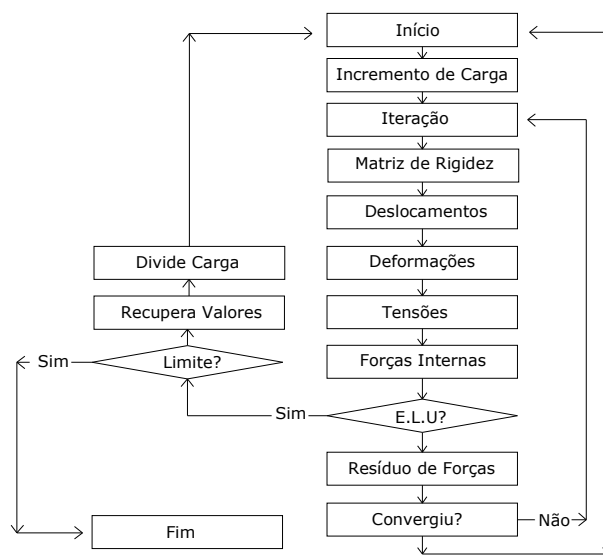
O modelo mecânico desenvolvido permite considerar carregamentos externos fixos, que são aplicados de uma única vez, bem como carregamentos variáveis, que são divididos e aplicados por incrementos. O modelo ainda considera os efeitos não-lineares geométricos e dos materiais em um procedimento incremental-iterativo. A cada iteração, atualiza-se a matriz de rigidez da estrutura, obtida mediante a contribuição de todos os pontos de Gauss dos elementos finitos e resolve-se o sistema de equações algébricas  $\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F}$ .

Assim, o modelo permite obter os deslocamentos nodais e os esforços internos nos elementos finitos ao final de cada incremento equilibrado. Dessa forma, toda a trajetória de equilíbrio da estrutura em caráter não-linear pode ser obtida, refinando-se os resultados do processo à medida que se aumenta o número de passos de carga. Isso ocorre porque com incrementos de ordem menor, as previsões elásticas sempre resultam mais próximas da resposta real, fazendo com que as correções não-lineares sejam menores e mais rápidas.

Para a obtenção de cargas últimas em pórticos em concreto armado, adapta-se o referido modelo mecânico, de modo que, a cada iteração, seja verificado o estado limite último ou de serviço conforme requerido. Uma vez violada a condição definida pelo estado limite, considera-se que, nesse momento, ocorreu uma falha. Caso não seja verificada a condição de violação, as variáveis do modelo são atualizadas sempre após a convergência do processo iterativo.

Quando se atinge o estado limite, o processo é interrompido e reiniciado com um incremento de carga menor. Uma das maneiras de realizar esse processo consiste em dividir o passo de carga atual por um escalar pré-definido, por exemplo, 2. Dessa forma, o incremento de carga aplicado sempre é dado pela metade do incremento anterior convergido. Todas as

variáveis da última iteração do passo anterior convergido são armazenadas e reutilizadas no início do novo passo de carga, repetindo a análise via elementos finitos para o novo incremento de carga. Todo esse processo é repetido até que o novo incremento aplicado seja desprezível quando comparado com o passo de carga inicial da estrutura. Esta condição de parada do algoritmo ocorre quando a norma dos novos incrementos for menor que uma tolerância pré-estabelecida. A carga última fica então definida pela soma de todos os incrementos de carga aplicados até a tolerância atingida. A Figura 3-17 mostra o fluxograma do modelo mecânico e do módulo de busca de cargas últimas.



**Figura 3-17 – Fluxograma do modelo mecânico e busca da carga última de uma estrutura**

Esse procedimento de busca das cargas últimas foi desenvolvido para melhorar a precisão das respostas mecânicas nas análises de confiabilidade, garantindo maior eficácia na resolução de problemas. Além disso, o procedimento garante eficiência também, uma vez que os incrementos de carga não precisam necessariamente ser muito pequenos para fornecer a precisão desejada, pois o algoritmo de busca, mesmo para incrementos iniciais grandes é capaz de encontrar a carga resistente com um reduzido número de passos. Assim, o processo pode ser tão refinado quanto se queira, bastando especificar a tolerância de parada.



### 3.8 Exemplos de Aplicação

Nesta seção são apresentados diversos exemplos numéricos de estruturas, desde a consideração de situações bem simples com comportamento elástico-linear até os casos onde são considerados todos os desenvolvimentos mecânicos desta pesquisa.

#### 3.8.1 Exemplo 1

Este exemplo trata de uma viga biapoiada submetida a uma força concentrada no meio do vão. O objetivo do exemplo é apenas comparar os resultados obtidos pelo programa desenvolvido com a teoria técnica de flexão e a formulação de Soares (2001), dada em termos do sistema corrotacional, em uma análise puramente linear.

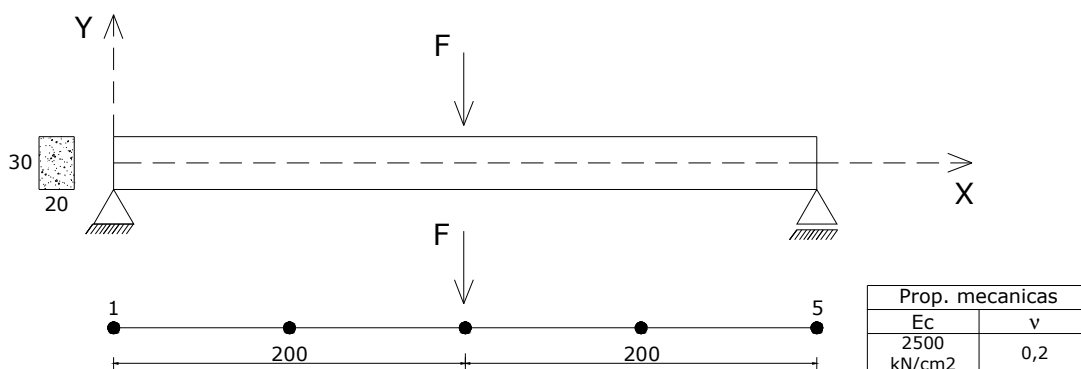


Figura 3-18 – Viga biapoiada com força concentrada no meio do vão

A estrutura foi discretizada em 4 elementos finitos de mesmo comprimento. A técnica de quadratura de Gauss-Lobatto com 3 pontos no comprimento de cada elemento e também 3 pontos na altura foi utilizada para a integração numérica. Os resultados da análise estão apresentados na Tabela 3-1.

É interessante destacar que essa análise foi realizada considerando o equilíbrio da estrutura na posição indeformada (linearidade geométrica) e o material em regime elástico-linear. Dessa forma, verifica-se a hipótese de proporcionalidade entre força e deslocamento, o que permitiu a aplicação do carregamento de 1000kN em um único passo de carga. Apenas para orientação, esses resultados referem-se ao eixo médio da estrutura e o tempo de processamento resultante foi insignificante.

**Tabela 3-1 – Deslocamentos transversais e rotações dos nós**

Nó	T.Técnica/Bernoulli	Soares (2001)	Programa/Bernoulli
<b>Deslocamentos</b>			
1	0,0	0,0	0,0
2	-8,1481	-8,0875	-8,1481
3	-11,8519	-11,7640	-11,8518
4	-8,1481	-8,0875	-8,1481
5	0,0	0,0	0,0
<b>Rotações</b>			
1	-0,088889	-0,088227	-0,088888
2	-0,066667	-0,066170	-0,066666
3	0,0	0,0	0,0
4	0,066667	0,066170	0,066666
5	0,088889	0,088227	0,088888

Concluiu-se que os resultados foram praticamente os mesmos quando comparados com os valores exatos para esse caso estudado.

### 3.8.2 Exemplo 2

Neste exemplo, foi analisada uma viga engastada submetida a uma força concentrada, comparando os resultados fornecidos pelo programa com as teorias exatas de Bernoulli e Timoshenko. O objetivo do exemplo foi verificar a capacidade da formulação em determinar a influência da deformação por cisalhamento em peças com relação altura/vão de 1/5. Novamente, trata-se de uma análise elástico-linear material e geométrica, com carregamento de 1000kN aplicado em um único passo. Foram utilizados 3 pontos de Gauss no comprimento e na altura das seções transversais para a integração numérica. A estrutura foi discretizada em 4 elementos finitos de mesmo comprimento.

Com relação à teoria de Euler-Bernoulli, os resultados obtidos com o programa desenvolvido no presente trabalho foram excelentes, tanto em deslocamentos quanto em rotações dos nós. Já na segunda situação, com a consideração da deformação por cisalhamento, os valores dos deslocamentos diferem um pouco dos valores exatos obtidos com a teoria técnica.

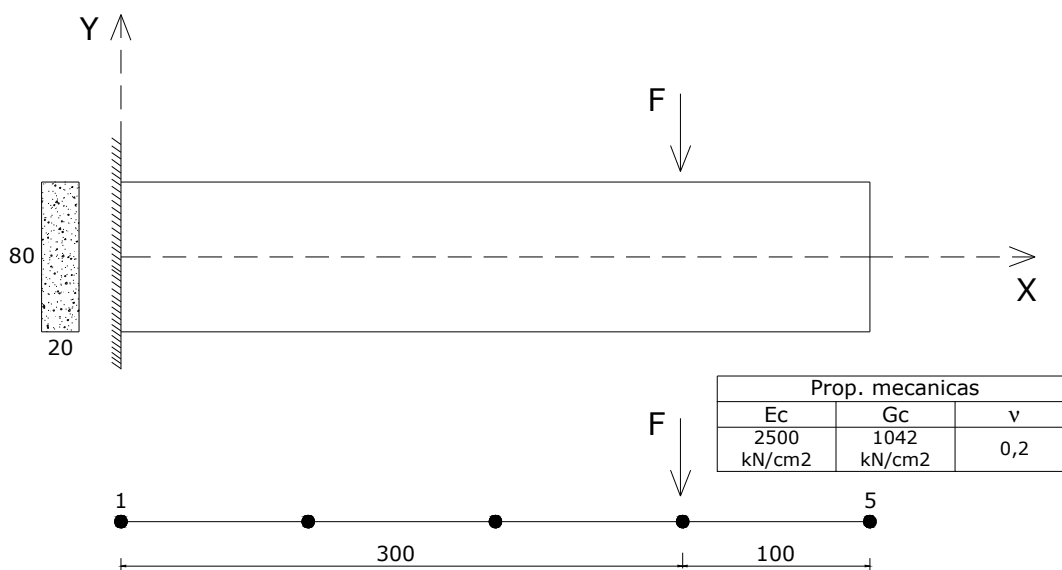


Figura 3-19 – Viga engastada com carga concentrada a 1 metro do balanço

A Tabela 3-2 apresenta os valores obtidos na análise, destacando-se em *itálico* os resultados do programa desenvolvido neste trabalho.

Tabela 3-2 – Deslocamentos transversais e rotações dos nós

NÓ	T.Técnica/Bernoulli	<i>Programa/Bernoulli</i>	T.Técnica/Timoshenko	<i>Programa/Timoshenko</i>
<b>Deslocamentos</b>				
1	0,0	<i>0,0</i>	0,0	<i>0,0</i>
2	-0,6250	<i>-0,6250</i>	-0,6970	<i>-0,6842</i>
3	-2,1875	<i>-2,1875</i>	-2,3315	<i>-2,3059</i>
4	-4,2188	<i>-4,2187</i>	-4,4348	<i>-4,3964</i>
5	-6,3281	<i>-6,3281</i>	-6,5441	<i>-6,5058</i>
<b>Rotações</b>				
1	0,0	<i>0,0</i>	0,0	<i>0,0</i>
2	-0,011719	<i>-0,011718</i>	-0,011719	<i>-0,011718</i>
3	-0,018750	<i>-0,018750</i>	-0,018750	<i>-0,018750</i>
4	-0,021094	<i>-0,021093</i>	-0,021094	<i>-0,021093</i>
5	-0,021094	<i>-0,021093</i>	-0,021094	<i>-0,021093</i>

A Tabela 3-3 mostra as diferenças percentuais entre os deslocamentos obtidos com a teoria técnica (teoria de Timoshenko) e numéricos.

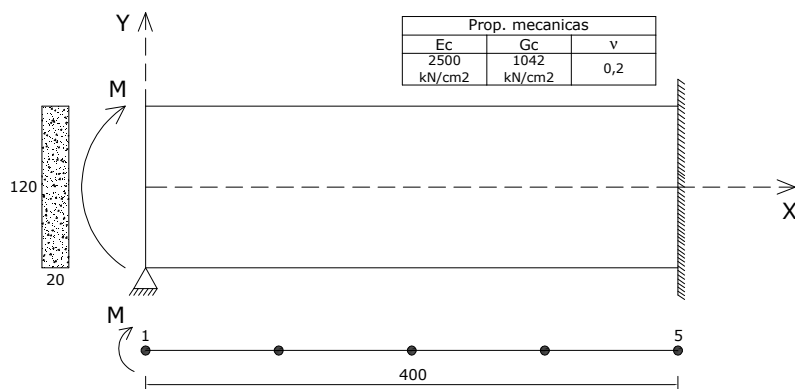
**Tabela 3-3 – Teoria exata de Timoshenko versus valores numéricos**

NÓ	1	2	3	4	5
Deslocamentos	0%	1,83%	1,09%	0,86%	0,58%
Rotações	0%	0%	0%	0%	0%

Diante disso, verificou-se o bom desempenho da formulação implementada em situações onde a deformação proveniente do cisalhamento é importante.

### 3.8.3 Exemplo 3

Este exemplo trata da análise linear material e geométrica de uma viga de concreto hiperestática, submetida a um momento fletor concentrado de  $10^7$  kN.cm sobre o apoio. A estrutura foi discretizada em 4 elementos finitos de mesmo comprimento, com 3 pontos de Gauss na altura e no comprimento. O objetivo do exemplo foi avaliar novamente o comportamento da formulação, no tocante ao cisalhamento, no estudo de estruturas com grande relação altura/vão ( $H/L=1/3,33$ ). Para esse tipo de estrutura, espera-se que a deformação por cisalhamento influencie significativamente o campo de deslocamentos. A Figura 3-20 ilustra a estrutura e as propriedades mecânicas empregadas na análise.

**Figura 3-20 – Viga hiperestática com momento fletor aplicado no apoio**

Foram realizadas análises com a teoria de Euler-Bernoulli, isto é, sem considerar a deformação por cisalhamento e, na seqüência, com a teoria de vigas de Timoshenko para avaliar as diferenças nos deslocamentos decorrentes da influência das distorções. A Tabela 3-4 mostra os resultados.

Com relação à teoria de Euler-Bernoulli, os resultados obtidos pelo programa foram excelentes. Ao se considerar a deformação por cisalhamento na análise da estrutura, verificou-

se um pequeno desvio dos resultados tanto de deslocamentos quanto de rotações dos nós em relação aos valores exatos. A Tabela 3-5 ilustra as diferenças percentuais entre os valores exatos e numéricos para o caso da teoria de Timoshenko.

É interessante destacar que para essa estrutura com relação  $H/L = 1/3,33$ , já existe uma diferença considerável entre os deslocamentos obtidos com e sem a consideração da deformação de cisalhamento. A maior diferença percentual foi encontrada para o deslocamento do nó 4, da ordem de 29,86% (entre teoria técnica de Bernoulli e Timoshenko), indicando que a consideração da teoria de Timoshenko, nesse caso, é absolutamente necessária na análise.

**Tabela 3-4 – Deslocamentos transversais e rotações dos nós**

NÓ	T.Técnica/Bernoulli	Programa/Bernoulli	T.Técnica/Timoshenko	Programa/Timoshenko
<b>Deslocamentos</b>				
1	0,0	0,0	0,0	0,0
2	-7,8125	-7,8125	-8,6047	-8,4751
3	-6,9444	-6,9444	-8,2119	-8,0047
4	-2,6042	-2,6041	-3,7132	-3,5318
5	0,0	0,0	0,0	0,0
<b>Rotações</b>				
1	-0,138889	-0,138888	-0,164238	-0,160094
2	-0,026042	-0,026041	-0,049807	-0,045921
3	0,034722	0,034722	0,015710	0,018818
4	0,043403	0,043402	0,032312	0,034125
5	0,0	0,0	0,0	0,0

**Tabela 3-5 – Teoria exata de Timoshenko versus valores numéricos**

NÓ	1	2	3	4	5
<b>Deslocamentos</b>	0%	1,51%	2,52%	4,88%	0%
<b>Rotações</b>	2,52%	7,80%	16,51%	5,31%	0%

Diante disso, considerou-se que os resultados da formulação implementada foram, mais uma vez, satisfatórios.

### 3.8.4 Exemplo 4

Este exemplo trata da simulação do comportamento de uma viga em balanço submetida a carregamento vertical concentrado na extremidade livre. O objetivo do exemplo é verificar a influência da deformação de cisalhamento no campo de deslocamentos transversais da viga, bem como o comportamento do elemento finito utilizado, com relação ao travamento da solução por cortante.

A estrutura foi discretizada em 10 elementos finitos de mesmo comprimento. A seção transversal foi adotada com largura constante e igual a 1,0m, ao passo que a altura apresentou-se variável justamente para verificar a influência da deformação de cisalhamento, mediante comprimento constante de 2,0m. Aplicou-se o carregamento de 10kN em um único passo de carga. A Figura 3-21 mostra o esquema da estrutura.

A análise foi realizada em regime elástico-linear empregando-se a teoria de Timoshenko para levar em conta o efeito da deformação por cisalhamento. A teoria técnica de flexão (hipóteses de Euler-Bernoulli) e a formulação desenvolvida por Paccola (2004) foram utilizadas para efeito de comparação. Para as propriedades mecânicas, foram adotados os seguintes valores: módulo de elasticidade longitudinal de  $10^{10}$  kN/m<sup>2</sup>, módulo de elasticidade transversal de  $5 \cdot 10^9$  kN/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson de 0,2.

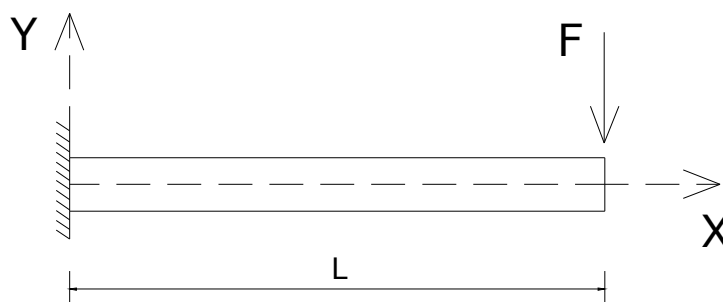


Figura 3-21 – Viga em balanço com força concentrada na extremidade livre

A coluna “Influência do cisalhamento” foi obtida calculando-se a diferença percentual entre os valores contidos nas colunas “Teoria Técnica” e “Este Trabalho”. Assim, verificou-se que a teoria técnica pode ser aplicada nos casos onde a relação  $H/L$  é menor que 0,2, isto é,  $1/5$ . Já nos casos onde  $H/L$  é maior que  $1/5$ , a teoria técnica passa a não representar bem o campo de deslocamentos em estruturas lineares, pois o efeito da deformação por cortante torna-se significativo. Nesses casos, a teoria de Timoshenko deve ser empregada para a análise estrutural.

**Tabela 3-6 – Comparação dos resultados para a viga em balanço**

<b>H</b>	<b>H/L</b>	<b>Deslocamento vertical</b>			<b>Influência do cisalhamento</b>
		<b>T.Técnica</b>	<b>Este Trabalho</b>	<b>Paccola (2004)</b>	
0,00002	0,00001	4,00E+6	4,00E+6	3,99E+6	0%
0,0002	0,0001	4,00E+3	4,00E+3	3,99E+3	0%
0,002	0,001	4,00	4,00	3,99	0%
0,02	0,01	4,00E-3	4,00E-3	3,99E-3	-0,0048%
0,2	0,1	4,00E-6	4,01E-6	4,02E-6	-0,49%
0,3	0,15	1,19E-6	1,19E-6	1,20E-6	-0,71%
0,4	0,2	5,00E-7	5,09E-7	5,12E-7	-1,99%
0,5	0,25	2,56E-7	2,63E-7	2,65E-7	-3,12%
1,0	0,5	3,20E-8	3,59E-8	3,68E-8	-12,49%

Vale ressaltar que os deslocamentos aqui apresentados para alturas menores que 0,02 não possuem sentido real, sendo utilizados somente para efeito de comparação com os valores fornecidos pela teoria técnica de flexão e pela teoria de Timoshenko. Com relação à formulação de Paccola (2004), verificou-se que a partir de H/L maior que 0,2, as diferenças entre os deslocamentos começaram a ser mais pronunciadas, de modo que os valores obtidos foram sempre maiores que os valores encontrados no presente trabalho. Isso ocorreu porque em sua formulação, Paccola (2004) utilizou um elemento finito de pórtico plano com 3 nós (9 graus de liberdade) e aproximação quadrática em deslocamentos, que permitiu maior flexibilidade à estrutura. Isso significa que, para esse caso, o elemento finito convencional de 2 nós (6 graus de liberdade) e aproximação cúbica em deslocamentos, utilizado neste trabalho, é mais rígido que o elemento finito de 3 nós (9 graus de liberdade) e aproximação quadrática em deslocamentos utilizada por Paccola (2004).

Finalmente, salienta-se que mesmo para o caso de altura tendendo a zero ( $H = 0,00002$ ), não houve travamento da solução por cortante.

### 3.8.5 Exemplo 5

Neste exemplo analisa-se uma viga biapoiada submetida a um momento fletor no sentido anti-horário concentrado no meio do vão, conforme Figura 3-22.

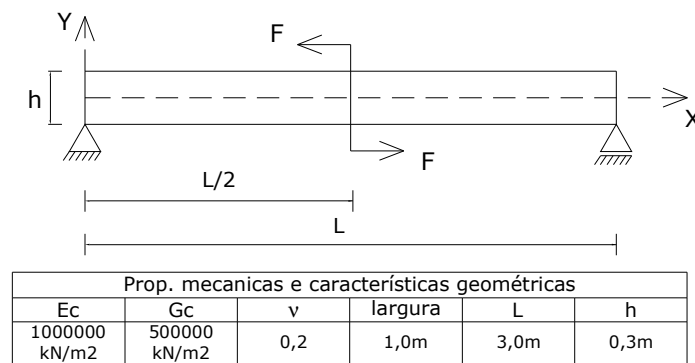


Figura 3-22 – Viga biapoiada com momento concentrado no meio do vão

Tem-se como objetivo, verificar a influência direta da discretização da estrutura na solução do problema. Nesse caso, foi considerada somente a teoria de Euler-Bernoulli, uma vez que a relação  $H/L$  é de  $1/10$ , o que significa que a parcela de deslocamento correspondente à força cortante pode ser desprezada sem comprometer os resultados. O momento fletor aplicado foi de  $-1000\text{kN}\cdot\text{m}$ . A análise ainda está no regime elástico-linear com equilíbrio na posição indeslocada, portanto trata-se de linearidade geométrica. Foram utilizadas redes contendo 2, 4, 6 e 8 elementos finitos, comparando os resultados com a solução exata do problema. Os resultados estão apresentados na Figura 3-23.

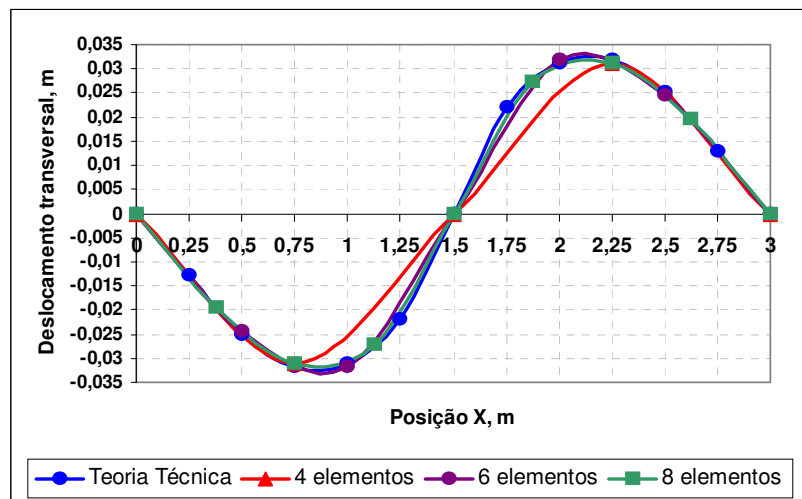


Figura 3-23 – Deslocamentos transversais da viga

Como pôde ser observado no gráfico abaixo, o emprego de somente 2 elementos finitos não conseguiu determinar a deformada da estrutura. Esse comportamento ocorreu, pois o nó livre do meio do vão apresentou deslocamento nulo já que o momento foi aplicado sobre ele com resposta anti-simétrica. Além disso, o fato de não existirem nós intermediários ao longo dos elementos impossibilita a quantificação dos deslocamentos entre o ponto de



aplicação do momento e os apoios. Para as demais discretizações, verificou-se que a deformada da estrutura foi determinada com precisão a partir de uma rede de 6 elementos finitos, aproximando-se da solução exata do problema.

Com este exemplo, apesar de simples, foi possível observar que as análises em elementos finitos são claramente dependentes da discretização da rede, o que deve ficar ainda mais evidente quando se considera o comportamento não-linear das estruturas.

### 3.8.6 Exemplo 6

Neste exemplo pretende-se mostrar o desempenho do modelo que considera a contribuição da armadura transversal na resistência total de vigas em concreto armado, a partir da comparação entre as deformações dos estribos medidas no ensaio experimental e as obtidas pelo modelo aproximado desenvolvido neste trabalho.

Para isso, a estrutura considerada na análise foi uma viga em concreto armado com 3,80m de vão, seção transversal “I” e submetida a duas forças concentradas de 60kN cada, aplicadas conforme o esquema mostrado na Figura 3-24. De acordo com Neves (2000) esta estrutura foi ensaiada no laboratório da EESC-USP na disciplina de Análise Experimental de Estruturas e instrumentada para obter as deformações do ponto médio do estribo na seção AA.

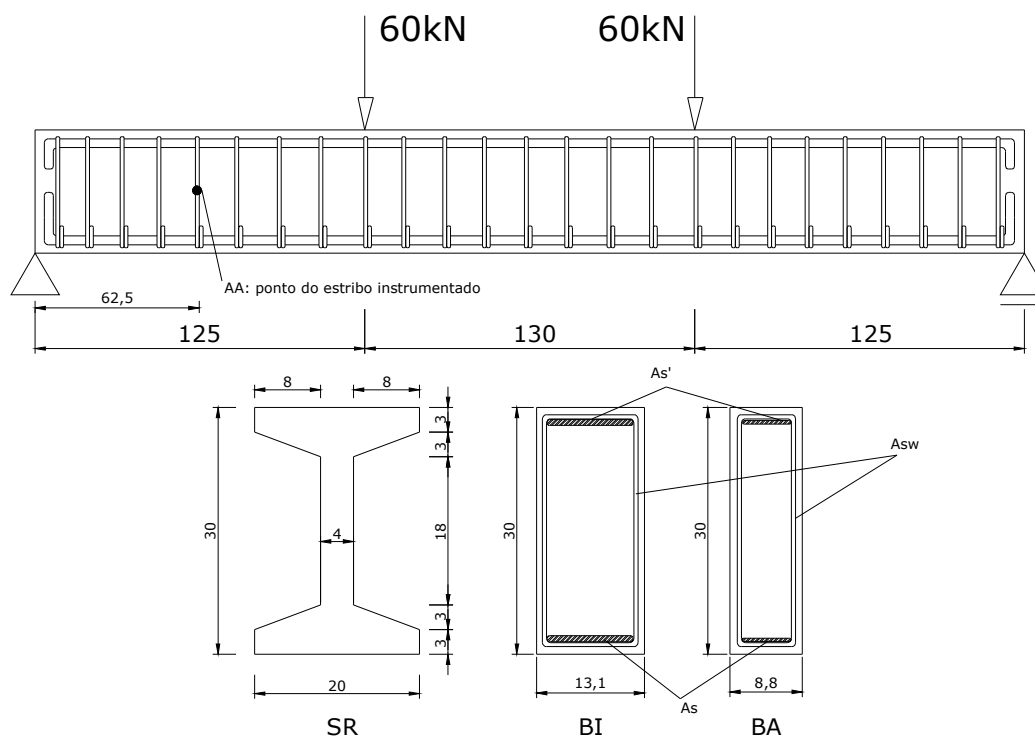


Figura 3-24 – Viga analisada: dimensões reais (em cm) e aproximações do modelo numérico

Como o programa desenvolvido neste trabalho não permite considerar diretamente peças com seção “ I “, foram feitas adaptações na seção transversal. Assim, fixou-se a altura em 30cm como na seção real (SR) e calculou-se a base mantendo-se, no primeiro caso, a inércia da seção constante (BI) e, no segundo caso, a área constante (BA). Os valores dessas adaptações são mostrados na Tabela 3-7.

**Tabela 3-7 – Dimensões das seções transversais e características geométricas**

Seção	Base (cm)	Altura (cm)	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Área (cm <sup>2</sup> )
Real	20	30	29484	264
BI – ‘Base pela Inércia’	13,1	30	29484	393
BA – ‘Base pela Área’	8,8	30	19800	264

O carregamento de 60kN foi aplicado em 12 incrementos iguais de 5kN cada conforme feito no ensaio. Os parâmetros com o “ \* “ referentes às propriedades elásticas, resistências dos materiais, cobrimento da armadura e discretização utilizada na Tabela 3-8 foram adotados para o modelo numérico, pois não havia referência sobre seus valores em Neves (2000). Foram adotadas as hipóteses de Timoshenko juntamente com o modelo aproximado para computar a contribuição da armadura transversal.

A seguir são apresentadas as propriedades dos materiais, quantidades de armadura e parâmetros utilizados na construção do modelo numérico.

**Tabela 3-8 – Propriedades e parâmetros da análise**

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência do aço *	$f_s$	500MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	177890MPa
Módulo plástico do aço *	$K_Y$	17789MPa
Parâmetros de dano	$\epsilon_{d0}$	0,000065
	$A_T$	0,995
	$B_T$	8000
	$A_C$	0,85
	$B_C$	1620
Cobrimento da armadura longitudinal *	$C$	1cm
Incrementos de carga	$\lambda$	12
Número máximo de iterações	$It_{max}$	1000
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	$PGL, PGH$	6, 20
Discretização da estrutura (10 elementos em cada trecho) *	Número de nós	31
	Número de elementos finitos	30
Armadura longitudinal de tração	$A_S$	5 $\phi$ 12,5mm
Armadura longitudinal “porta-estribos”	$A_S'$	3 $\phi$ 6,3mm
Armadura transversal	$A_{sw}$	$\phi$ 6,3mm c/ 15cm
Resistência à compressão do concreto *	$f_C$	28MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_C$	29632MPa
Coefficiente de Poisson do concreto *	$\nu$	0,2

Os resultados analisados correspondem aos diagramas Força × Deslocamento do meio do vão e Força × Deformação do estribo na seção AA, conforme as Figuras 3-25 e 3-26, respectivamente.

As curvas em azul e amarelo foram obtidas pelo modelo mecânico desenvolvido neste trabalho. Apenas para facilitar a visualização, as deformações do estribo estão multiplicadas por  $10^7$ . Observou-se que as duas maneiras de contornar o problema da seção “I”, isto é, aproximação por seção retangular mantendo-se ora a inércia, ora a área como sendo as mesmas, apresentaram diferenças consideráveis. Na trajetória de equilíbrio da viga, ficou evidente que a seção com maior base, dada pela inércia da seção original, representou melhor o comportamento experimental observado. Um comentário importante a ser feito é que não houve referência em Neves (2000) sobre a discretização em elementos finitos utilizada, de modo que adotou-se, portanto, neste trabalho uma rede de 30 elementos finitos.

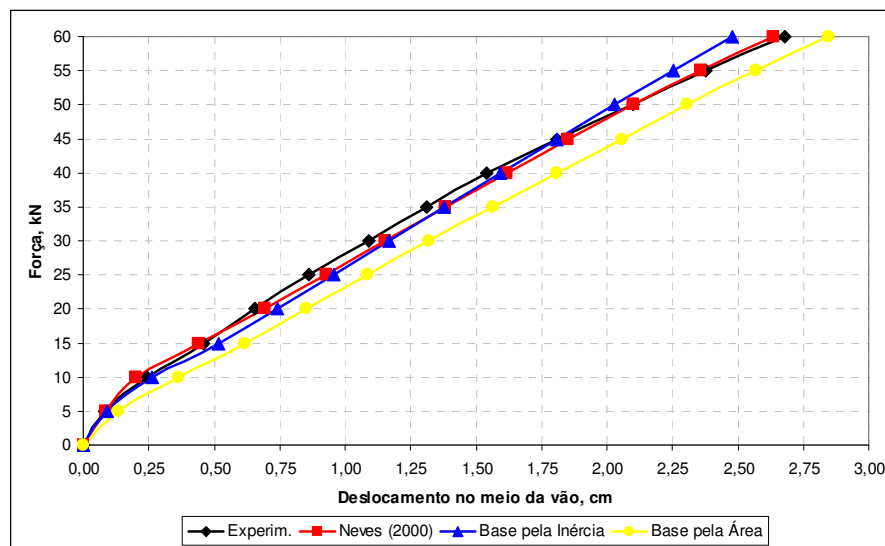


Figura 3-25 – Trajetória de equilíbrio da viga analisada

Com relação às deformações no estribo AA obtidas com o modelo desenvolvido, constatou-se que a aproximação com seção retangular “Base pela Área” apresentou resultados melhores que a abordagem com “Base pela Inércia”. Esse fato ocorreu porque na aproximação do tipo BI, obteve-se maior área de seção transversal do que na aproximação do tipo BA. Isso fez com que a rigidez do primeiro caso fosse maior do que no segundo caso, de modo que menos deformação principal de dano,  $\epsilon_{1d}$ , que é a deformação que vai para a armadura transversal de acordo com o modelo deste trabalho fosse transferida para os estribos. Consequentemente, houve maior contribuição do concreto íntegro no mecanismo de absorção das tensões de cisalhamento. Daí, entende-se porque houve melhor desempenho com

a aproximação do tipo BA, pois neste caso, ocorreu menor contribuição do concreto e, por conseguinte, maior contribuição da armadura transversal na absorção das tensões, o que fez com a curva de sollicitação dos estribos no ponto escolhido se aproximasse mais da curva experimental.

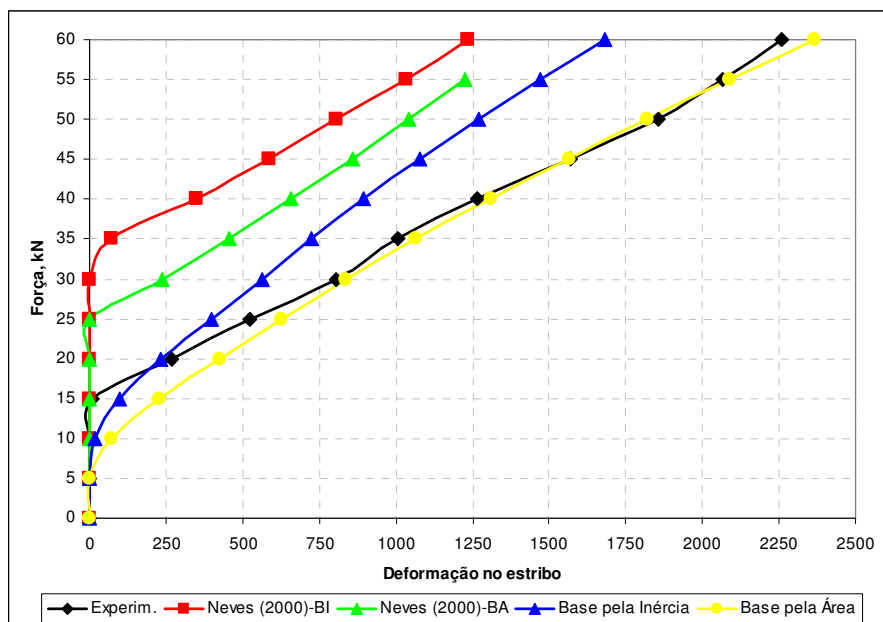


Figura 3-26 – Deformações na armadura transversal na seção AA

O modelo aproximado para considerar a contribuição da armadura transversal na resistência de vigas em concreto armado apresentou resultados bastante satisfatórios neste exemplo. Observou-se que o critério de início para a contribuição dos estribos dado pelo modelo de dano representou com boa precisão o resultado experimental. No ensaio, a armadura transversal começou a ser solicitada efetivamente a partir da carga de 15kN, ao passo que nos modelos numéricos BI e BA o início da sollicitação se deu a partir da carga de 10kN. Assim, considera-se que o modelo aproximado para contribuição das armaduras transversais na resposta de vigas em concreto armado está coerente com os resultados experimentais observados e, portanto, apto para utilização juntamente com modelos de dano, nas modelagens numéricas de estruturas de barras em concreto armado.

### 3.8.7 Exemplo 7

Este exemplo consiste em uma viga biapoiada em concreto armado com três taxas distintas de armadura longitudinal submetida a duas forças concentradas nos terços do vão, conforme Figura 3-27.

Esta estrutura foi ensaiada por Álvares (1993) no Laboratório de Estruturas da EESC-USP. O comportamento experimental de cada viga foi obtido mediante ensaios com controle de força, onde os deslocamentos transversais foram medidos com o auxílio de relógios comparadores posicionados nos apoios e no ponto central do vão. Em função dessas particularidades, a experimentação numérica aqui realizada seguiu exatamente as mesmas condições dos ensaios experimentais.

O objetivo deste exemplo é verificar o comportamento do modelo mecânico desenvolvido, comparando os resultados de uma análise numérica não-linear material com as respostas das vigas ensaiadas.

O carregamento foi aplicado em incrementos iguais de 2kN, com esquema de integração numérica de Gauss-Lobatto ao longo do comprimento e da altura dos elementos finitos. A armadura transversal foi composta por  $\phi$  5mm a cada 12cm. É interessante notar que os parâmetros de dano apresentados na Tabela 3-9 foram obtidos pela calibração numérica de acordo com os modelos constitutivos propostos por Popovics (1973) e Figueiras (1983) para compressão e tração, respectivamente.

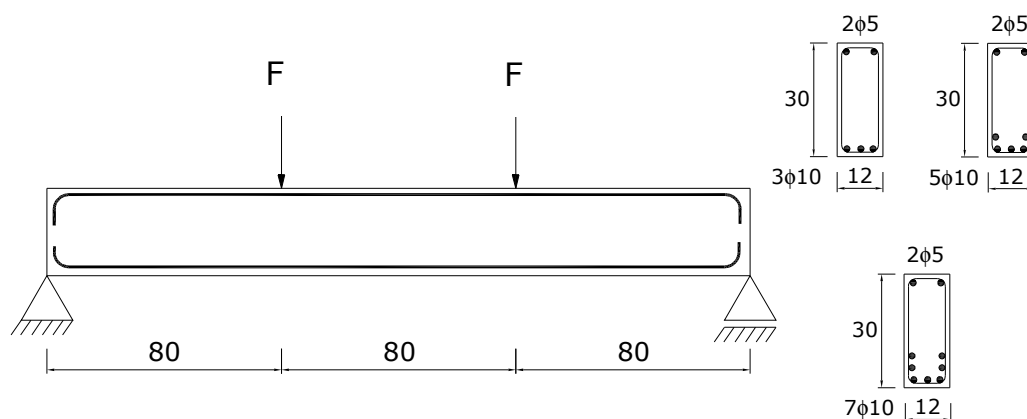


Figura 3-27 – Viga biapoiada analisada: geometria (medidas em cm) e carregamentos

Os demais parâmetros e propriedades dos materiais utilizados na análise também estão escritos na Tabela 3-9.

Tabela 3-9 – Propriedades dos materiais e parâmetros da análise

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência do aço	$f_Y$	500MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	196000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	19600MPa
Parâmetros de dano	$\epsilon_{d0}$	0,000065
	$A_T$	0,9097
	$B_T$	10398,7
	$A_C$	0,9781
	$B_C$	1276,4
Resistência à compressão do concreto	$f_C$	27MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_C$	29100MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Número máximo de iterações	$It_{max}$	500
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL , PGH	6 , 20
Discretização da estrutura (elementos de igual comprimento)	Número de nós	7
	Número de elementos finitos	6

Para cada taxa de armadura, a viga foi analisada segundo os modelos de Bernoulli e Timoshenko com consideração dos efeitos de pino e contribuição da armadura transversal.

As Figuras 3-28 e 3-29 mostram as respostas da viga com pequena taxa de armadura longitudinal.

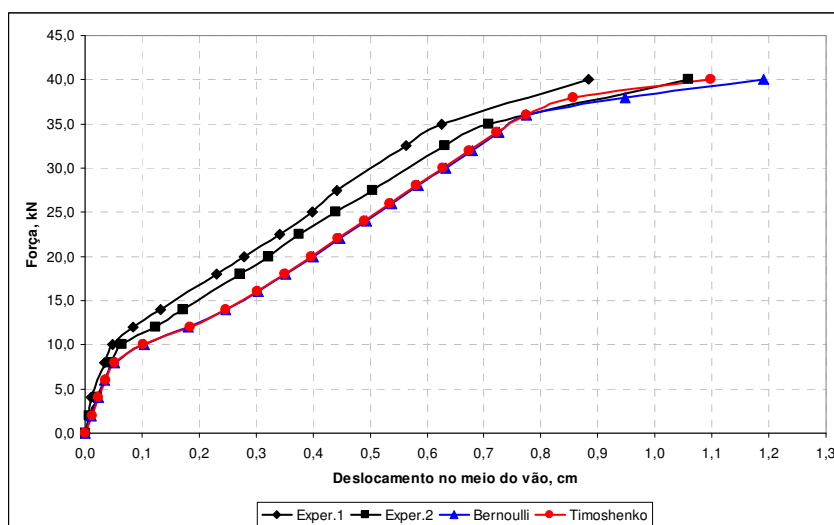
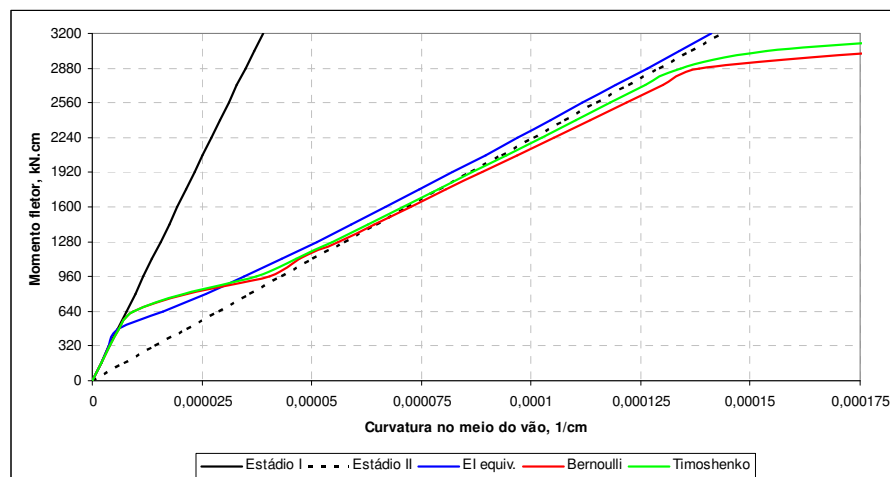


Figura 3-28 – Trajetória de equilíbrio para viga com 3φ10mm



**Figura 3-29 – Diagrama momento × curvatura para viga com 3φ10mm**

A diferença de comportamento estrutural entre os modelos de Bernoulli e Timoshenko foi muito pequena até o escoamento da armadura longitudinal, visto que esta viga possui relação  $H/L = 1/8$ , o que faz com que a influência das deformações de cisalhamento seja praticamente nula. Após o escoamento da armadura, foi possível verificar uma diferença mais significativa entre os dois modelos, pois nessa região ocorre maior contribuição da armadura transversal e do efeito de pino. É interessante notar a partir do diagrama momento × curvatura da seção do meio do vão comparado com os estádios I e II e o modelo do CEB-FIP com rigidez equivalente, que houve grande perda de rigidez da estrutura. Isso ocorreu porque o modelo de dano de Mazars (1984) utiliza uma única variável de dano aplicada em todas as direções para penalizar as propriedades elásticas do material, fato que não ocorre na realidade em estruturas de concreto. Por conta desse comportamento justifica-se a maior flexibilidade da estrutura produzida pelos modelos numéricos, quando comparadas com as respostas experimentais.

As Figuras 3-30 e 3-31 trazem as respostas da viga com taxa média de armadura longitudinal. Verificou-se diferença significativa entre os deslocamentos obtidos com ambos os modelos para a carga última de 58kN, evidenciando assim a influência do efeito de pino e armadura transversal nas regiões de pico da trajetória de equilíbrio da estrutura.

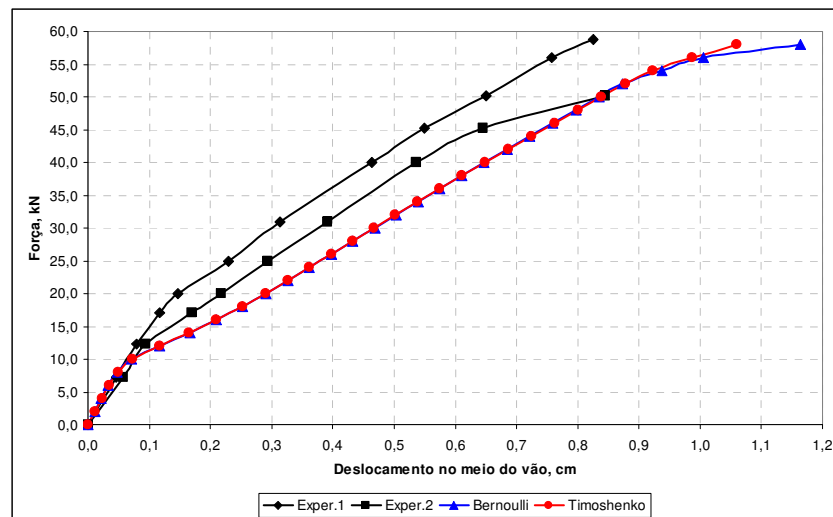


Figura 3-30 – Trajetória de equilíbrio para viga com 5φ10mm

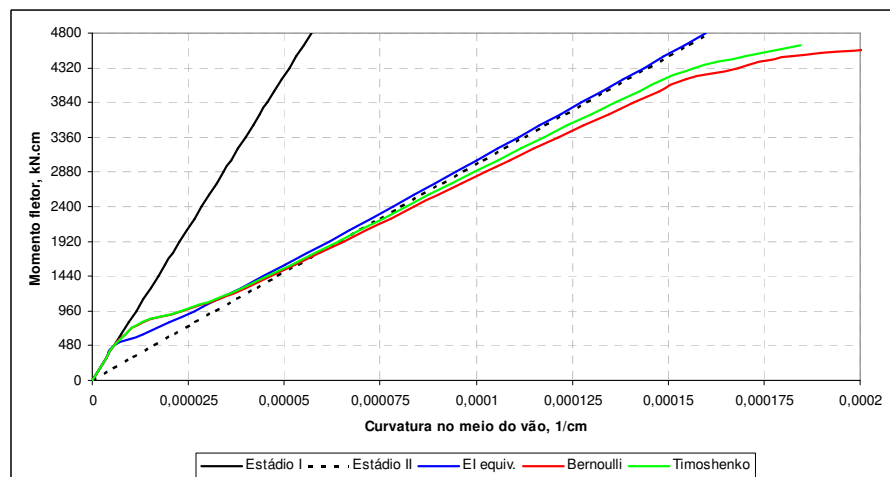


Figura 3-31 – Diagrama momento × curvatura para a viga com 5φ10mm

As Figuras 3-32 e 3-33 mostram as respostas da viga com alta taxa de armadura longitudinal. Notou-se que para esta situação, a diferença entre as duas respostas foi mais gradual, chegando à máxima diferença na carga final. Isso ocorreu graças à contribuição do efeito de pino da armadura longitudinal, que se tornou mais evidente por conta da maior taxa de armadura longitudinal. Essa característica também pôde ser observada no diagrama momento × curvatura, onde no final do processo de carregamento, o modelo completo de Timoshenko garantiu uma rigidez um pouco maior. Além disso, verificou-se que as curvas numéricas se aproximaram um pouco mais das curvas experimentais, em função do melhor comportamento do modelo de dano para vigas armadas com altas taxas de armadura. Em casos como este, a danificação acaba ficando mais espalhada ao longo do comprimento da



estrutura e, com isso, aproxima-se mais das hipóteses do próprio modelo, que não considera localização do dano e nem formação de fissura discreta. Nas vigas com pequena e média taxa de armadura longitudinal, o cenário de danificação se aproxima mais da formação de fissura discreta, se distanciando um pouco das hipóteses do modelo e dos resultados experimentais.

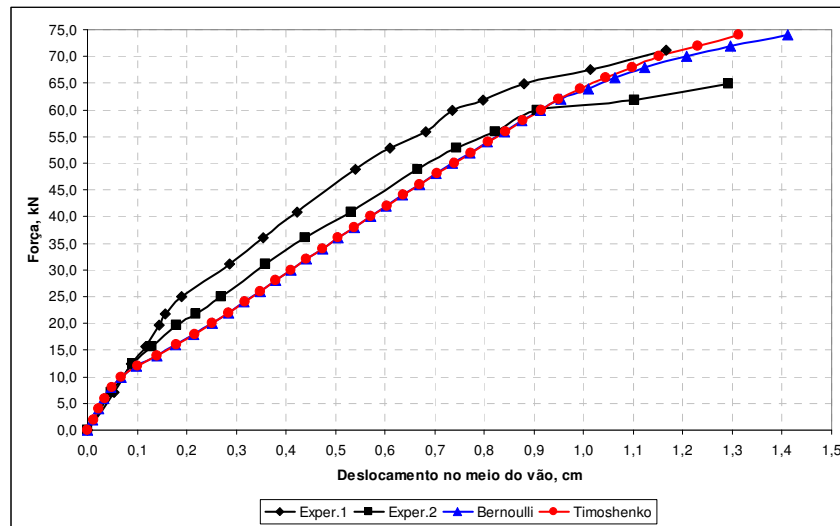


Figura 3-32 – Trajetória de equilíbrio para viga com 7φ10mm

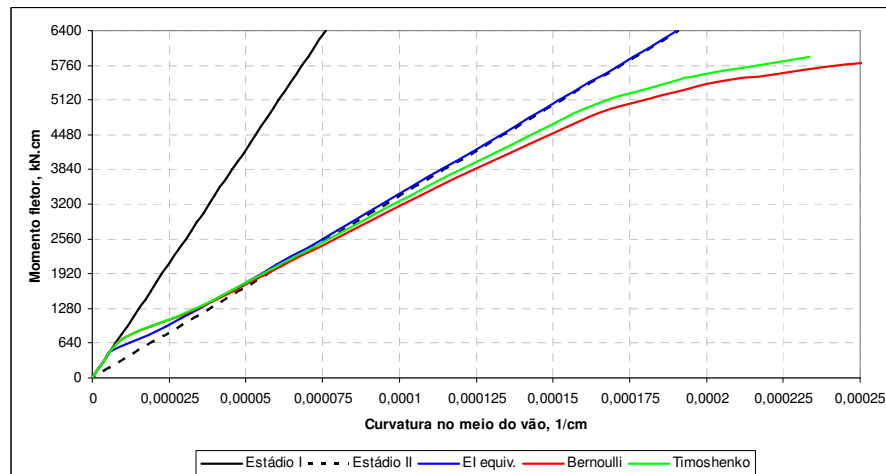


Figura 3-33 – Diagrama momento × curvatura para viga com 7φ10mm

Diante disso, os resultados foram considerados satisfatórios, principalmente para vigas com alta taxa de armadura longitudinal. A contribuição dos estribos e do efeito de pino mostrou-se atuante principalmente nos passos finais de carregamento, onde os deslocamentos obtidos com o modelo de Timoshenko, bem como a curvatura foram significativamente menores que os obtidos com o modelo de Bernoulli. Esse fato evidenciou a contribuição dos mecanismos considerados em conjunto com o modelo de dano, o que torna o modelo em

elementos finitos desenvolvido um procedimento interessante na análise de estruturas em concreto armado.

### 3.8.8 Exemplo 8

Este exemplo apresenta uma comparação entre os resultados obtidos por El-Metwally et al. (1990) extraídos do trabalho de Paula (2001) e os resultados do modelo mecânico desenvolvido neste trabalho. As análises foram realizadas considerando as não-linearidades dos materiais aço e concreto, bem como a não-linearidade geométrica. A estrutura analisada consiste de um pilar em concreto armado biapojada submetido a uma força vertical excêntrica, com comprimento de 340,3cm, seção transversal quadrada de 15cm e armadura longitudinal total de  $4\phi 10\text{mm}$ , conforme Figura 3-34.

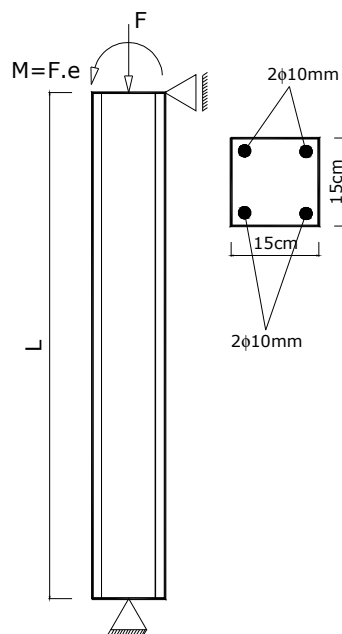


Figura 3-34 – Coluna biapojada analisada por El-Metwally et al (1990)

Os dados da estrutura, propriedades mecânicas e parâmetros importantes utilizados na análise estão mostrados na Tabela 3-10.

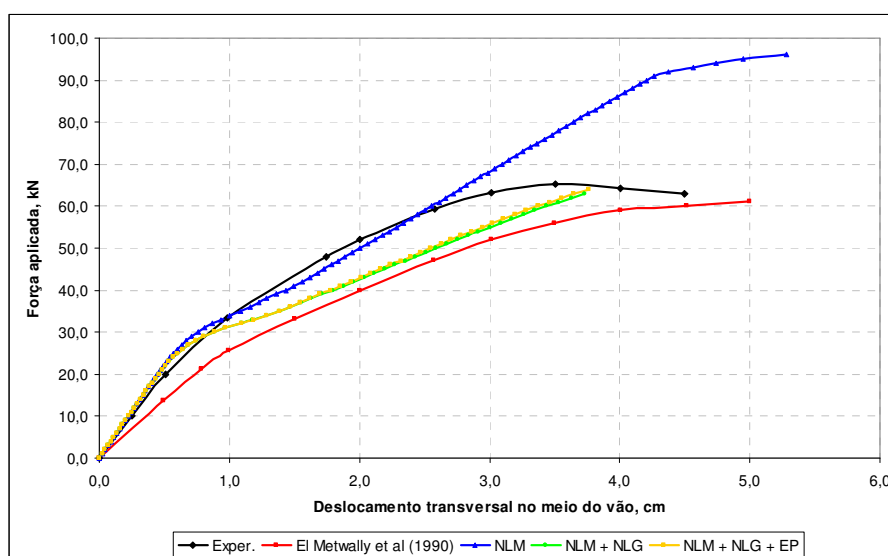
Adotou-se para o módulo de elasticidade do concreto o valor de 15000MPa. Esse valor permitiu representar a rigidez inicial observada nos resultados de El-Metwally et al. (1990), embora não tenha sido encontrada nenhuma referência sobre o valor real utilizado.

Para representar a não-linearidade geométrica foi utilizada a descrição lagrangeana atualizada, com método de integração numérica de Gauss-Lobatto para o comprimento e para a altura dos elementos finitos.

**Tabela 3-10 – Propriedades dos materiais e parâmetros da análise**

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência do aço	$f_Y$	400MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	21000MPa
Parâmetros do modelo de dano	$\epsilon_{d0}$	0,00018
	$A_T$	0,995
	$B_T$	8000
	$A_C$	0,85
	$B_C$	1050
Resistência à compressão do concreto	$f_C$	26,5MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_C$	15000MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Número máximo de iterações	$It_{max}$	300
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20
Discretização da estrutura (elementos de igual comprimento)	Número de nós	21
	Número de elementos finitos	20
Cobrimento de concreto	$c$	1,5cm
Excentricidade da força	$e$	12,7cm

A Figura 3-35 mostra os resultados obtidos com o modelo mecânico desenvolvido considerando três situações: apenas não-linearidade dos materiais (NLM), não-linearidades dos materiais e geométrica (NLM + NLG) e ambas as não-linearidades com modelo de cisalhamento e efeito de pino da armadura longitudinal (NLM + NLG + EP).



**Figura 3-35 – Trajetória de equilíbrio da coluna analisada**

As curvas em azul, verde e amarelo representam os resultados obtidos com o modelo mecânico desenvolvido. Verificou-se que estes foram melhores que os resultados apresentados por El-Metwally et al. (1990) apud Paula (2001), pois se aproximaram mais da resposta experimental da estrutura marcada em preto.

A carga última obtida no ensaio foi da ordem de 65,18kN, ao passo que nos modelos numéricos foram obtidos os seguintes valores:

**Tabela 3-11 – Valores de carga última para o pilar analisada**

<b>Modelo</b>	<b>F<sub>última</sub> (kN)</b>
El-Metwally et al (1990)	61,06
NLM	96,00
NLM + NLG	63,00
NLM + NLG + EP	64,00

El-Metwally et al. (1990) considera as não-linearidades geométrica e do concreto através de um modelo hipelástico, o que difere do modelo de dano considerado neste trabalho. É interessante destacar a importância de se considerar o comportamento não-linear geométrico em estruturas submetidas à forças axiais excêntricas, conforme pode ser observado pela diferença entre as curvas azul, verde e amarelo e os respectivos valores de cargas últimas mostrados na Tabela 3-11.

Todos os resultados foram obtidos considerando as hipóteses de Bernoulli, com exceção da resposta marcada pela cor amarela, que foi obtida considerando a hipótese de Timoshenko e efeito de pino da armadura longitudinal. Verificou-se que com a contribuição do efeito de pino, a carga última da coluna ficou mais próxima da carga experimental, mostrando a boa capacidade do modelo.

Os resultados obtidos constituem um bom indicativo da eficácia do modelo desenvolvido para determinar cargas últimas como representar a trajetória dos deslocamentos ao longo de um processo de carregamento.

### 3.8.9 Exemplo 9

Este exemplo apresenta as respostas mecânicas de um pórtico em concreto armado quando se consideram os efeitos das não-linearidades dos materiais combinadas à não-linearidade geométrica da estrutura. Foram, portanto, realizadas quatro análises: Bernoulli e

Timoshenko com não-linearidade dos materiais (B-NLM, T-NLM); Bernoulli e Timoshenko com não-linearidades dos materiais e geométrica (B-NLMG, T-NLMG). O pórtico analisado, bem como sua geometria e armaduras está representado na Figura 3-36.

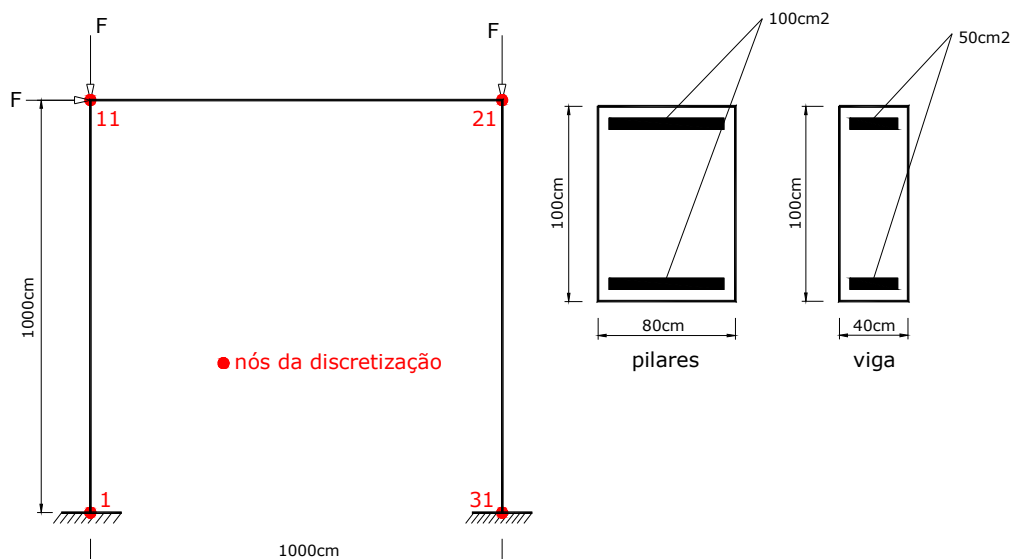


Figura 3-36 – Pórtico analisado

O pórtico foi discretizado em 30 elementos finitos de mesmo comprimento, sendo 10 elementos por barra. O carregamento foi aplicado com incrementos de 100kN, variando-se tanto as forças verticais sobre os pilares quanto a força horizontal. Na Tabela 3-12 estão representados os parâmetros utilizados no exemplo. Esta estrutura foi analisada por Silva (1996) empregando-se um modelo elastoplástico para o concreto considerando ou não resistência à tração do concreto. Paula (2001) também estudou essa estrutura, considerando comportamento não-linear dos materiais e geométrico.

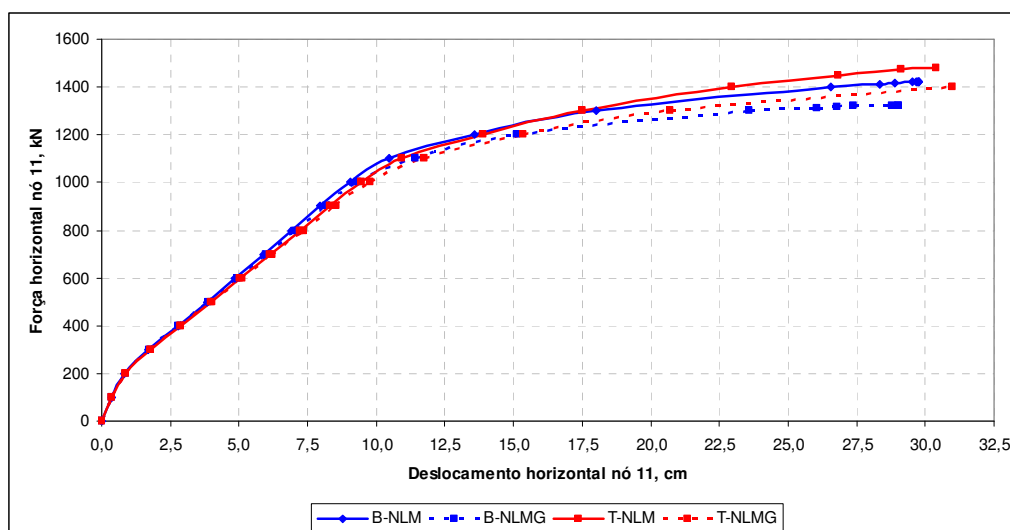
Tabela 3-12 – Propriedades dos materiais e parâmetros da análise

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência do aço	$f_Y$	420MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	21000MPa
Parâmetros do modelo de dano	$\epsilon_{d0}$	0,00007
	$A_T$	0,995
	$B_T$	8000
	$A_C$	0,85
	$B_C$	1050
Resistência à compressão do concreto	$f_C$	17,5MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_C$	23430MPa
Coeficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Número máximo de iterações	$It_{max}$	100
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20

A Tabela 3-13 traz os resultados de carga última obtidos pelos autores e por este trabalho.

**Tabela 3-13 – Resultados da análise em termos de carga última da estrutura**

Modelo	$F_{ULT}$ (kN)
B-NLM sem tração (Silva)	1300,00
<i>B-NLM com tração (Silva)</i>	<i>1400,00</i>
B-NLM (Paula)	1460,00
B-NLM (este trabalho)	1423,01
T-NLM (este trabalho)	1481,25
<i>B-NLMG (Paula)</i>	<i>1400,00</i>
B-NLMG (este trabalho)	1323,85
<i>T-NLMG (este trabalho)</i>	<i>1400,00</i>



**Figura 3-37 – Trajetória de equilíbrio do nó 11 do pórtico**

Verificou-se que o modelo de Timoshenko conduziu a valores maiores de carga última da estrutura quando comparado com as mesmas análises realizadas com modelo de Bernoulli. Isso ocorreu por conta da definição do próprio carregamento, pois as forças verticais agindo diretamente sobre os pilares, garantiram um estado de compressão intenso aos mesmos que, além de diminuir a danificação na estrutura, proporcionou ainda mais resistência ao cisalhamento quando solicitada pela força horizontal. É interessante destacar que ao se considerar os efeitos da não-linearidade geométrica e o modelo de Timoshenko completo, os resultados marcados em *itálico* na tabela foram os mesmos. Isso indica boa

representatividade do modelo mecânico na obtenção da resistência de estruturas em concreto armado. O critério adotado para a obtenção das cargas últimas foi a perda de estabilidade global da estrutura, definida pela impossibilidade de equilíbrio no processo iterativo.

Os resultados também foram importantes para mostrar a influência do comportamento não-linear geométrico em estruturas de edifícios, sendo, portanto, essencial a sua consideração nas análises mecânicas atuais.

### 3.8.10 Exemplo 10

Este exemplo tem como objetivo verificar a resposta do modelo mecânico na análise de vigas altas quando são considerados ou não os modelos aproximados para armadura transversal e efeito de pino. As vigas escolhidas aqui foram analisadas experimentalmente por Ashour (1997) e numericamente por He & Kwan (2001) e Wang & Hoogenboom (2004). A Figura 3-38 ilustra a geometria das vigas, bem como armaduras e carregamento aplicado.

As vigas V1 e V2 correspondem às vigas CDB1 e CDB3 analisadas pelos demais autores. A seguir são apresentados os parâmetros adotados na análise para cada uma das vigas. A tolerância para o equilíbrio em forças e deslocamentos adotada foi de  $10^{-3}$ . O carregamento total foi aplicado em incrementos iguais de 10kN cada, com máximo de 1000 iterações por passo. A carga última foi definida pela singularidade da matriz de rigidez, isto é, quando o número máximo de iterações foi atingido, o que significa que o equilíbrio não pode ser mais atingido. A integração numérica foi definida com 6 pontos de Gauss para o comprimento de cada elemento e 20 pontos para a altura.

A viga V1 possui alta taxa de armadura transversal com estribos de 8mm de diâmetro espaçados a cada 100mm, além de 8 barras longitudinais de 8mm cada ao longo de sua altura. A viga V2 não possui armadura transversal e conta somente com 4 barras longitudinais de 8mm cada. A armadura longitudinal positiva e negativa é padrão para ambas vigas. As estruturas foram discretizadas com 18 elementos finitos com comprimentos diferentes em função de sua própria geometria, conforme a Figura 3-38.

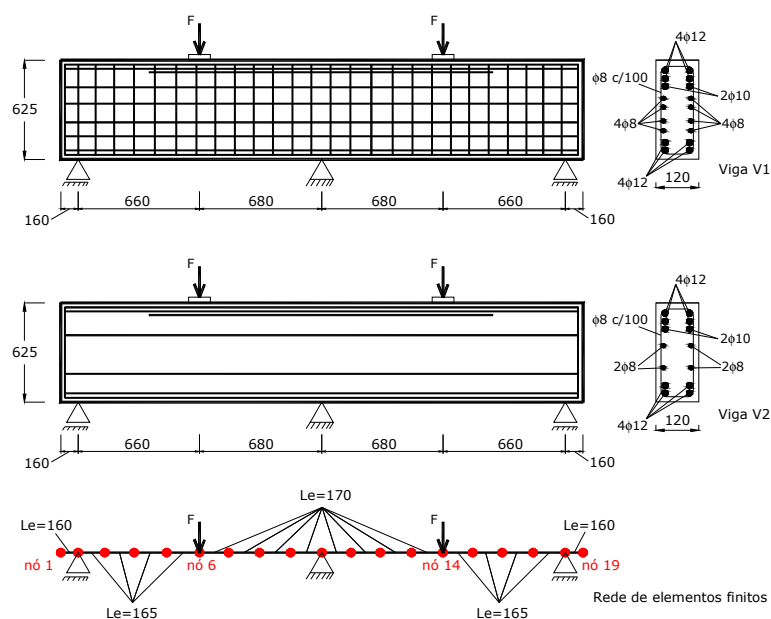


Figura 3-38 – Detalhes das vigas analisadas V1 e V2 (unidades em milímetros)

Tabela 3-14 – Propriedades dos materiais e parâmetros da análise para ambas as vigas

Descrição	Parâmetro	Valor
<b>Viga V1</b>		
Resistência à compressão do concreto	$f_c$	30MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_c$	30672MPa
Parâmetros do modelo de dano	$\epsilon_{d0}$	0,0000661
	$A_T$	0,8525
	$B_T$	7998,0
	$A_C$	0,9613
	$B_C$	915,4
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,26
Resistência do aço	$f_Y$	500Mpa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	205000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	20500MPa
<b>Viga V2</b>		
Resistência à compressão do concreto	$f_c$	22MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_c$	22200MPa
Parâmetros do modelo de dano	$\epsilon_{d0}$	0,0000742
	$A_T$	0,9285
	$B_T$	7978,0
	$A_C$	1,075
	$B_C$	1109,0
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,26
Resistência do aço	$f_Y$	500Mpa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	205000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	20500MPa

Para cada viga foram feitas duas análises: elemento de Timoshenko, não-linear material e com (SPOD-TSD) e sem (SPOD-T) as contribuições da armadura longitudinal e do efeito de pino. A viga V2 obviamente foi analisada somente com e sem a contribuição do



efeito de pino, já que não possui armadura transversal, porém respeita a mesma legenda da viga V1. Os resultados das curvas força total (2P) × deslocamento vertical do nó 14 foram comparadas com as respostas obtidas por He & Kwan (2001). Foi escolhido o nó 14, pois foi o ponto de ruptura observado nos ensaios de Ashour (1997). Os autores Wang & Hoogenboom (2004) não apresentaram as respostas em forma de curvas, mas somente os valores das cargas últimas obtidas com sua modelagem. A legenda das figuras é definido por: Exper. = experimental; HK-T e HK-TSD = He & Kwan sem e com armadura transversal e efeito de pino.

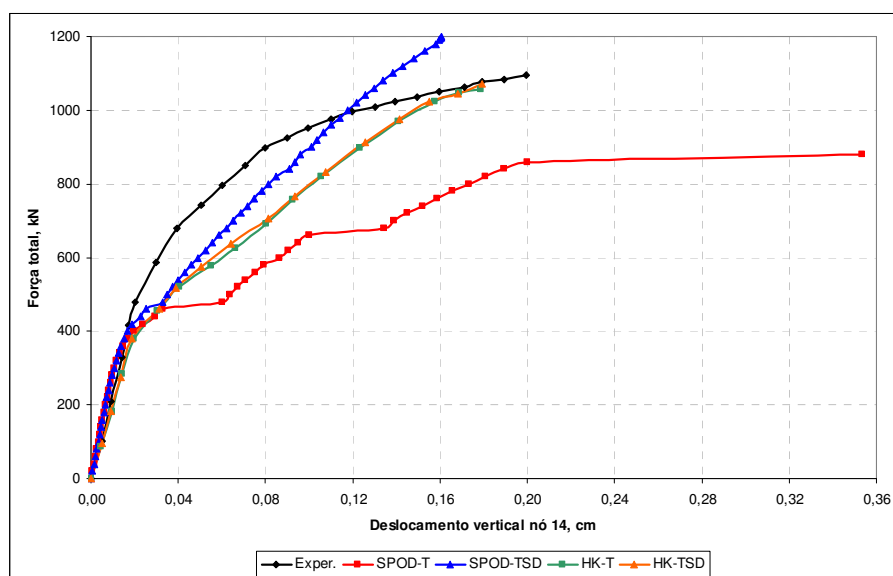


Figura 3-39 – Trajetória de equilíbrio da viga V1

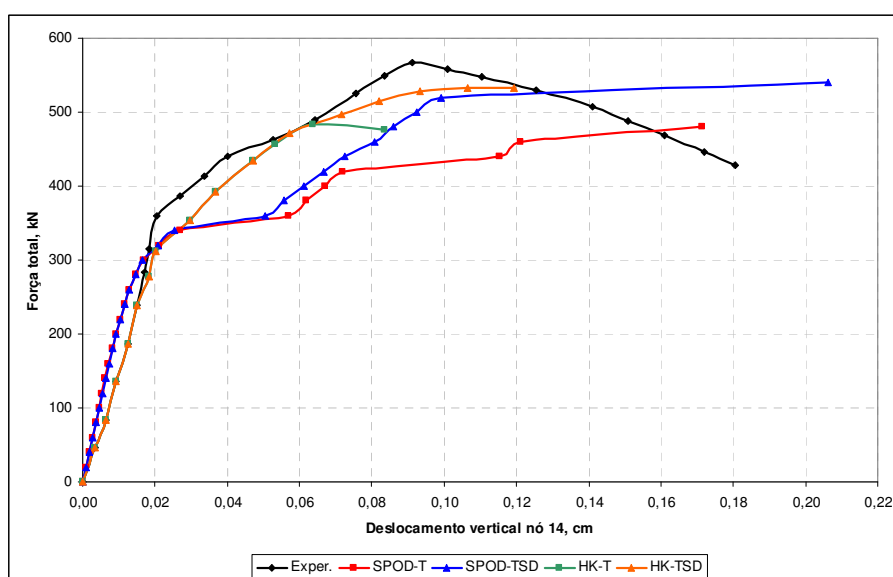


Figura 3-40 – Trajetória de equilíbrio da viga V2

Em ambas as vigas foi possível verificar que ao se considerar a contribuição da armadura transversal e do efeito de pino, tanto os deslocamentos quanto a carga última foram modificados quando comparados com as respostas obtidas somente com a hipótese de Timoshenko para vigas. É interessante destacar que as respostas da análise de He & Kwan (2001) foram encontradas com o uso de elementos finitos planos para o concreto ao invés de elementos de barra utilizados neste trabalho. Já Wang & Hoogenboom (2004) utilizaram uma composição de elementos de chapa para a parte central da seção transversal incorporando as barras de 8mm e a armadura transversal e elementos de barra para a armadura longitudinal principal.

Acredita-se que a armadura transversal proporcionou forte contribuição na resistência da viga V1, por conta da alta taxa empregada. Essa foi a grande diferença entre as respostas, pois o efeito de pino contribuiu menos significativamente que a armadura transversal na resistência de vigas em concreto armado, conforme pode ser observado nas curvas acima, já que a diferença entre os valores de carga última é bem mais acentuada na viga V1 do que na viga V2.

Dois fatores importantes que devem ser comentados a respeito das análises: o primeiro é que em nenhum dos trabalhos citados neste exemplo, o coeficiente de Poisson e a posição das camadas de armadura longitudinal foram fornecidos. Dessa forma, estes foram estimados aproximadamente em função dos desenhos e do esquema de ensaio observado em Ashour (1997). Foi adotado cobrimento superior e inferior para o concreto de 3cm e espaçamento entre camadas da armadura longitudinal principal de 1,5cm. As barras de 8mm foram espaçadas igualmente a partir da altura que sobrou após o posicionamento da armadura principal na seção. O segundo fator diz respeito à não-linearidade do concreto, pois somente neste trabalho foi utilizado modelo de dano, com calibração própria dos parâmetros internos. Em função disso e pela própria natureza do modelo de Mazars (1984), as respostas apresentaram maior dispersão, uma vez que a perda de rigidez é a mesma para todas as direções no modelo considerado, o que torna a estrutura mais flexível.

A Tabela 3-15 traz os valores das cargas últimas obtidas nas diversas análises comentadas neste exemplo e a relação entre os valores obtidos numericamente e experimentalmente. Analisando a resposta em termos de carga última, o modelo TSD de He & Kwan (2001) foi mais eficiente para a viga V1. Já para a viga V2, o modelo TSD deste trabalho apresentou melhor resultado.

Conclui-se, portanto, que o modelo mecânico desenvolvido apresentou comportamento satisfatório para a busca de cargas últimas em estruturas em concreto armado, principalmente com o uso dos modelos aproximados de resistência ao cisalhamento propostos. Dessa forma, o modelo fica apto para o uso em análises de confiabilidade de estruturas de barras em concreto armado.

**Tabela 3-15 – Valores das cargas últimas para as vigas V1 e V2**

Modelo	$F_{ULT}$ (kN)	$F_{ULT} / F_{EXP}$
Experimental	V1 = 1079,2	1,000
	V2 = 559,2	1,000
Wang & Hoogenboom (2004)	V1 = 1060,0	0,982
	V2 = 456,0	0,815
He & Kwan (2001)	V1-T = 1055,0	0,977
	V1-TSD = 1071,2	0,992
	V2-T = 438,4	0,783
	V2-TSD = 532,2	0,951
Este Trabalho (SPOD)	V1-T = 880,0	0,815
	V1-TSD = 1198,7	1,110
	V2-T = 480,0	0,858
	V2-TSD = 540,0	0,965

### 3.8.11 Exemplo 11

A estrutura analisada neste exemplo é um pórtico de dois andares com um vão entre pilares de 3,50m e altura total de 4,20m. As ações verticais foram consideradas constantes no valor de 700kN aplicadas sobre os pilares. Essas forças foram modeladas como cargas fixas. Aplicou-se um processo de deslocamento controlado, de modo que a força horizontal no topo do pórtico foi medida em cada passo do processo. Esse pórtico foi ensaiado por Vecchio & Emara<sup>36</sup> (1992) apud Pituba (2003). A Figura 3-41 mostra a estrutura analisada e seus detalhes de geometria.

Foram utilizados 10 elementos finitos por pilar e 5 elementos por viga, totalizando 30 nós e 30 elementos finitos. A integração numérica foi definida com 6 pontos de Gauss no

<sup>36</sup> Vecchio, F.J.; Emara, M.B. (1992). Shear deformations in reinforced concrete frames. *ACI Structural Journal*, v. 89, n. 01, p. 46-56.

comprimento de cada elemento finito e 20 pontos ao longo da altura das seções. O carregamento foi aplicado na forma de controle de deslocamentos horizontais no ponto de aplicação da força  $F$ . A armadura transversal adotada foi de  $\phi 10\text{mm}$  a cada 18cm para as vigas e pilares. O equilíbrio foi considerado satisfeito a partir da tolerância em deslocamentos de 0,001%.

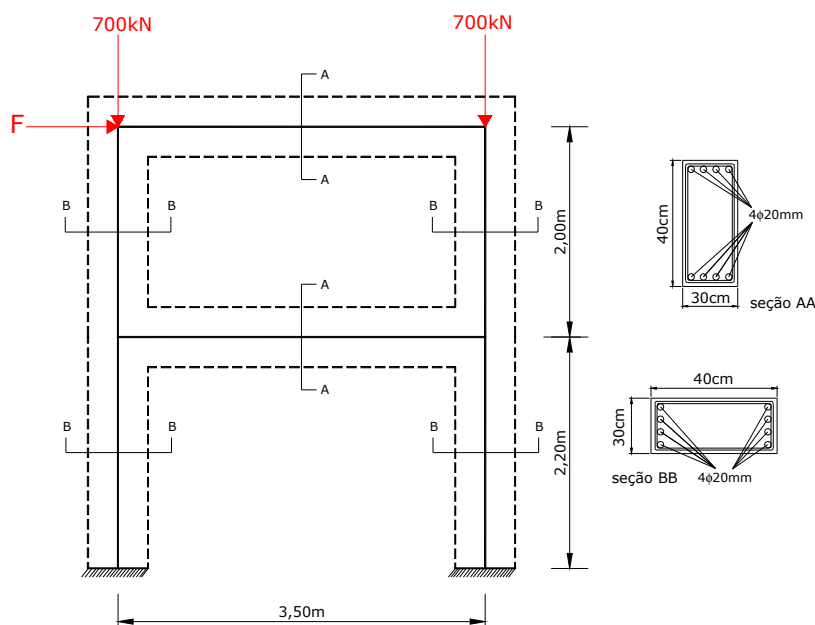


Figura 3-41 – Geometria e carregamentos do pórtico analisado

As propriedades dos materiais foram listadas abaixo:

- Resistência à compressão do concreto: 29,5MPa;
- Módulo de elasticidade longitudinal do concreto: 30400MPa;
- Coeficiente de Poisson do concreto: 0,2;
- Resistência de escoamento do aço: 418MPa;
- Resistência última do aço: 596MPa;
- Módulo de elasticidade longitudinal do aço: 192500MPa;
- Módulo plástico do aço: 1925MPa.

A estrutura foi analisada considerando-se os modelos de dano para o concreto e elastoplástico com encruamento isótropo positivo para o aço das armaduras. Foi considerado também os efeitos não-lineares geométricos. Os parâmetros de dano foram calibrados à compressão e à tração, respectivamente, a partir dos modelos de Popovics (1973) e Figueiras (1983), assumindo os seguintes valores:

$$\varepsilon_{d0} = 0,000065; A_T = 0,9205; B_T = 10390,0; A_C = 0,9717; B_C = 1204,0$$

Com o objetivo de verificar o desempenho dos modelos mecânicos desenvolvidos neste trabalho, a estrutura foi verificada com os modelos de Bernoulli (B) e de Timoshenko com contribuição da armadura transversal e do efeito de pino (TSD). A Figura 3-42 ilustra os resultados da análise.

Ambas as respostas numéricas obtidas com o modelo mecânico desenvolvido neste trabalho retratam comportamento não-linear dos materiais e geométrico. Verificou-se que a carga última horizontal com o modelo de Bernoulli foi de 367,6kN e com o modelo de Timoshenko completo foi de 375,7kN. O comportamento diferenciado ficou evidente somente nos estágios finais de carregamento, pois a grande perda de rigidez do concreto faz com que a armadura transversal e o efeito de pino sejam mobilizados, garantindo um pouco mais de resistência à estrutura. Esse comportamento está de acordo com as hipóteses assumidas para o desenvolvimento desses modelos. A carga última obtida por La Borderie et al. (1991) foi de 306,9kN, resultando um valor menor que o resultado experimental de 332,3kN.

Um outro dado interessante de comparação é a carga horizontal que provocou o primeiro estágio de fissuração do pórtico. Para o resultado experimental, essa carga foi de 52,5kN. O modelo de La Borderie et al. (1991) registrou um valor de 91,0kN, enquanto que os modelos B e TSD resultaram praticamente o mesmo valor de 74,5kN.

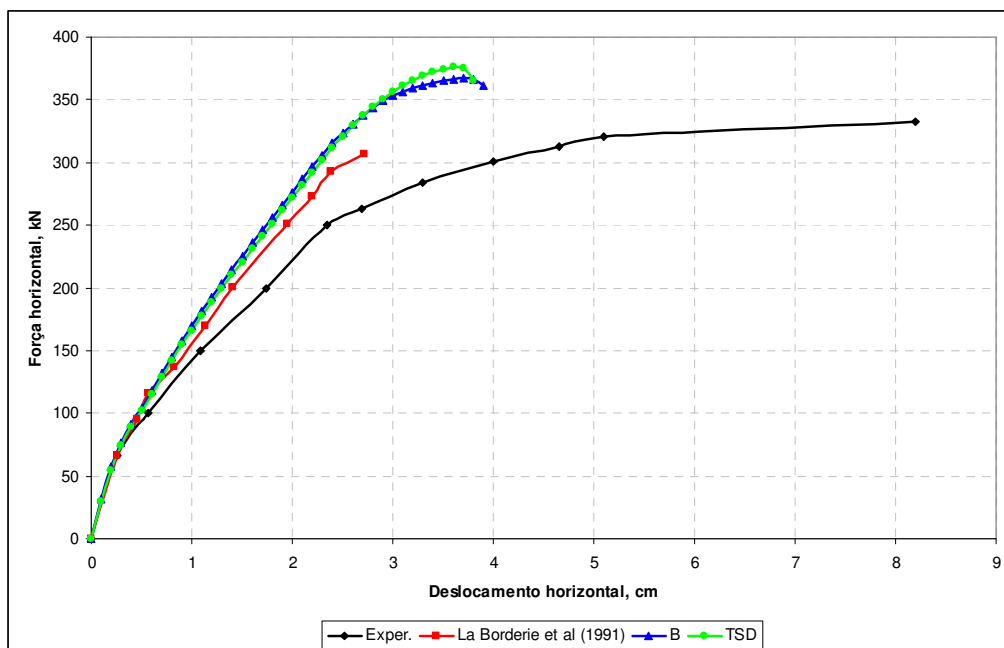


Figura 3-42 – Trajetória de equilíbrio horizontal do ponto de aplicação da força

As diferenças percentuais em termos de carga última sempre comparadas com o resultado experimental foram: +9,6% (B); +11,6% (TSD) e -7,6% (La Borderie et al). Acredita-se que a maior rigidez dos modelos B e TSD, para esse caso, ocorreu por conta das forças de compressão de 700kN em cada pilar, provocando o enrijecimento das colunas contra a danificação do concreto. Vale lembrar que o dano com o modelo de Mazars só ocorre a partir de deformações de tração no concreto.

## **4. Modelos de Confiabilidade**

---

---

### **4.1 Generalidades**

A avaliação da segurança é algo imprescindível em qualquer projeto de uma estrutura. Com o avanço das técnicas e sistemas construtivos, bem como dos modelos teóricos, a análise da segurança estrutural pode ser feita com mais precisão nos dias atuais. A metodologia de projeto é baseada na abordagem semi-probabilística que, apesar de representar satisfatoriamente o comportamento estrutural, não leva em conta de maneira explícita, o grau de incerteza presente nas variáveis, o que pode causar situações indesejáveis. Essas incertezas são inerentes às variáveis, uma vez que não existe certeza absoluta sobre as ações e a capacidade resistente dos elementos estruturais. É neste contexto que a teoria da confiabilidade entra em cena, pois permite calcular probabilidades de ocorrência de falhas nas estruturas, considerando de maneira adequada as incertezas das variáveis de projeto, a partir de distribuições de probabilidades. A seguir, são apresentados os conceitos importantes empregados, juntamente com os modelos de confiabilidade utilizados e desenvolvidos nesta pesquisa.

### **4.2 Estatística Aplicada**

A análise de confiabilidade tem como premissa considerar as incertezas dos parâmetros ou variáveis de projeto a partir de suas informações estatísticas. Assim, as variáveis consideradas passam a ser definidas não mais por um único valor fixo, mas por um conjunto de informações tais como, uma medida central, uma medida de dispersão e uma distribuição de probabilidades. A vantagem de se trabalhar dessa forma é que as incertezas inerentes às variáveis de projeto na engenharia são consideradas de uma maneira consistente.

#### 4.2.1 Variáveis aleatórias

Montgomery & Runger<sup>37</sup> (1999) apud Verzenhassi (2008) dizem que uma variável aleatória pode ser definida como uma função que fornece um número real para cada resultado de um experimento aleatório dentro de um determinado espaço amostral. Neste trabalho, as variáveis aleatórias serão representadas por letras maiúsculas e as suas realizações por letras minúsculas. O evento  $\{X \leq x\}$  significa que a variável aleatória  $X$  deve assumir qualquer valor menor ou igual a  $x$ .

As variáveis aleatórias podem ser do tipo discretas ou contínuas. As variáveis discretas possuem um domínio finito ou infinito contável de valores possíveis. Têm como propriedade principal funções de distribuição acumulada de probabilidades,  $F_X(x)$ , descontínuas. Um exemplo de variável discreta pode ser observado a seguir, onde a variável pode assumir somente quatro valores discretos possíveis.

$$X(f_c) = \begin{cases} 1 \rightarrow se \rightarrow 0 \leq f_c < 10MPa \\ 2 \rightarrow se \rightarrow 10 \leq f_c < 20MPa \\ 3 \rightarrow se \rightarrow 20 \leq f_c < 30MPa \\ 4 \rightarrow se \rightarrow 30 \leq f_c < 40MPa \end{cases} \quad (4-1)$$

As variáveis aleatórias contínuas possuem a função  $F_X(x)$  contínua no intervalo considerado. São definidas, na realidade, por um número infinito de pontos no seu domínio. Um exemplo de variável aleatória contínua pode ser dado a partir da seguinte relação:

$$X(f_c) = \frac{f_c(MPa)}{10} - 2 \quad (4-2)$$

para  $f_c = 25MPa$ , por exemplo, a variável aleatória contínua assume o valor de  $X(25) = 0,5MPa$ .

#### 4.2.2 Funções de densidade de probabilidades (FDP)

Uma vez que o valor de uma variável aleatória representa o resultado de um experimento, pode-se associar a esse resultado uma probabilidade de ocorrência. A regra que

<sup>37</sup> Montgomery, D.C.; Ruger, G.C. (1999). *Estatística aplicada e probabilidades para engenheiros*. Tradução de Verônica Calado. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC.



descreve todas as medidas de probabilidades associadas a todos os valores possíveis da variável aleatória é chamada de distribuição de probabilidades.

Assim, a função de densidade de probabilidades de uma variável aleatória expressa a probabilidade de ocorrência de um determinado valor da variável considerada. Matematicamente, expressa-se essa lei como sendo  $P(X = x)$  para todo valor de  $x$ .

Para uma variável aleatória discreta, a distribuição de probabilidades é, de maneira geral, definida por apenas um conjunto de valores possíveis, acompanhada da probabilidade de ocorrência de cada um desses valores. Já no caso de variáveis aleatórias contínuas, tem-se uma função de densidade de probabilidades,  $f_X(x)$ , que fornece a distribuição de “massa” de probabilidades da variável. Logo, a probabilidade de  $x$  estar dentro de um intervalo  $a$  e  $b$  é calculada pela integral de  $f_X(x)$  de  $a$  até  $b$ .

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4-3)$$

Melchers (1999) e o Probabilistic Model Code (2001) trazem tabelas com várias distribuições contínuas de probabilidades, seus parâmetros e suas respectivas FDPs.

#### 4.2.3 Funções de distribuição acumulada de probabilidades (FDA)

A função de distribuição acumulada de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  é definida para qualquer número  $x$  no intervalo  $(-\infty \leq x \leq +\infty)$ , sendo dada por:

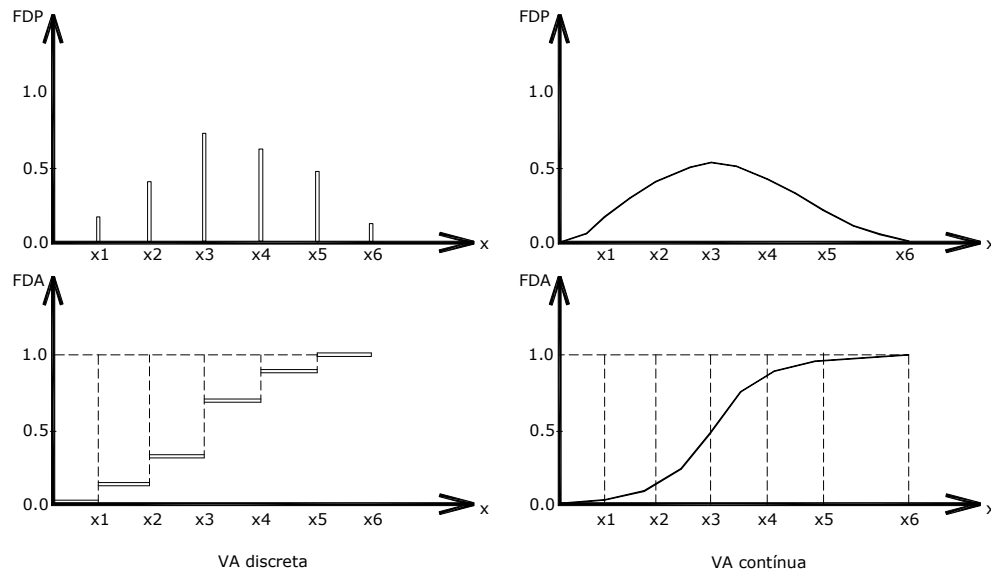
$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (4-4)$$

A expressão acima quer dizer que o número  $F_X(x)$  corresponde à probabilidade de que a variável aleatória  $X$  assumira qualquer valor menor que  $x$ . Essa definição é aplicável tanto para as variáveis aleatórias discretas quanto para as contínuas.

É interessante destacar que a FDP de uma variável aleatória é a derivada em relação à  $x$  da FDA. É por isso que se faz a distinção entre variáveis contínuas e discretas, pois é possível que a FDA não tenha derivadas em todo o domínio de  $x$ , sendo neste caso definida como variável discreta.

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad (4-5)$$

A Figura 4-1 ilustra um exemplo de possíveis FDA e FDP de variáveis aleatórias discretas e contínuas.



**Figura 4-1 – FDA e FDP de VA discretas e contínuas**

Mais detalhes sobre esses assuntos podem ser encontrados em Ang & Tang (1975), Nowak & Collins (2000) e Beck (2006).

#### 4.2.4 Média, variância e desvio-padrão de uma variável aleatória

Uma variável aleatória é descrita completamente na forma de sua distribuição de probabilidades e de seus parâmetros associados. Na prática, a forma dessas distribuições podem ser desconhecidas para determinadas variáveis aleatórias. Nesses casos, essas variáveis podem ser descritas de maneira aproximada a partir de algumas quantidades especiais. São elas:

- Média ou valor esperado: representa o centro de gravidade da “massa” de distribuição de probabilidades da variável. Pode ser calculada por:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)dx \quad (4-6)$$

- Variância: é uma medida de dispersão dos valores da variável aleatória em torno da média. É definida por:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \quad (4-7)$$

- Desvio-padrão: é dado pela raiz quadrada da variância.

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (4-8)$$

Existe ainda o coeficiente de variação,  $CV(X)$ , que é uma medida adimensional da dispersão da variável aleatória em torno da média. Valores baixos de  $CV$  indicam que os valores da variável estão distribuídos próximos à média, ao passo que valores altos do coeficiente de variação, indicam forte dispersão dos resultados em torno da média. O  $CV$  pode ser calculado por:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (4-9)$$

As expressões integrais apresentadas acima referem-se ao caso de variáveis aleatórias contínuas. Para o caso de variáveis discretas, essas integrais são transformadas em somatórias discretas para os pontos onde a variável for definida. Essas expressões podem ser encontradas em Beck (2006).

### **4.3 Estados Limites**

Um estado limite pode ser definido como a fronteira entre o estado desejado e o indesejado de uma estrutura. Existem diversos estados limites a serem considerados em um projeto estrutural. Segundo a ABNT NBR 8681:2003, os estados limites últimos se referem a situações que determinam a paralisação total ou parcial de uma construção. Dentre eles podem-se citar: ruptura dos materiais (ruptura do concreto comprimido, deformação excessiva da armadura), instabilidade global, ruína das ligações e colapsos progressivos. Já os estados limites de serviço são aqueles que causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou ainda que são indícios de comprometimento da durabilidade da mesma. Dentre eles estão os estados limites de

deformações excessivas, vibração excessiva, deformações permanentes, formação e abertura de fissuras.

Para cada estado limite especificado, as variáveis importantes devem ser identificadas em termos de esforços solicitantes, propriedades dos materiais e dimensões geométricas da estrutura. Essas variáveis podem ser então classificadas como aleatórias ou não dependendo da sua relevância para o comportamento da estrutura frente ao estado limite considerado. Assim, cada estado limite é então escrito como função dessas variáveis aleatórias e/ou determinísticas, conforme segue:

$$G(X) = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{nva}) \quad (4-10)$$

sendo que: *nva* é o número de variáveis aleatórias do problema.

Uma particularidade dessa função é exatamente quando  $G(X) = 0$ , que significa a realização das variáveis que determina o contorno que separa a região segura da região de falha. Nesse caso, tem-se a equação de estado limite, sendo um conceito bastante importante na confiabilidade estrutural. Cada modo de falha estabelecido é descrito por uma equação de estado limite específica. Para a análise de confiabilidade de um único componente, uma única equação de estado limite é necessária, ao passo que na análise de um sistema com 5 modos de falha, por exemplo, serão necessárias 5 equações de estado limite. Quando  $G(X) > 0$  tem-se uma realização segura da estrutura para o estado limite considerado. Para  $G(X) < 0$  tem-se uma situação de falha. A Figura 4-2 ilustra as curvas de nível da função de distribuição conjunta de probabilidades,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , a equação de estado limite, bem como onde estão as regiões de segurança e de falha da estrutura. Neste caso, a figura foi definida apenas para o caso de duas variáveis aleatórias e uma equação de estado limite, porém o conceito é válido para  $n$  variáveis aleatórias e  $k$  equações de estado limite.

Neste trabalho, conforme já mencionado anteriormente, os estados limites considerados em conjunto com o modelo mecânico são os estados limites últimos de ruptura dos materiais e de perda de estabilidade da estrutura, bem como o estado limite de serviço para o caso de deformações excessivas.

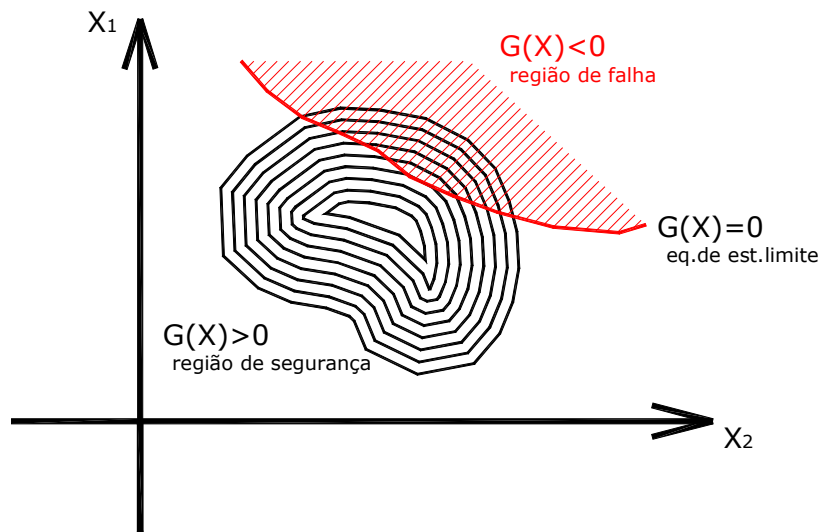


Figura 4-2 – Região segura e de falha no espaço físico das variáveis aleatórias

#### 4.4 Probabilidade de Falha

A probabilidade de falha é uma medida da violação de um estado limite. Seja  $R$  a variável aleatória de resistência,  $S$  a variável aleatória de solicitação de um elemento estrutural e a equação de estado limite definida por  $G = R - S$ . Chama-se de o problema fundamental da confiabilidade, a avaliação da probabilidade de falha que verifica a situação em que:

$$P_f = P[R - S \leq 0] \quad (4-11)$$

O conjunto de todas as realizações de  $R$  e  $S$  que resultam na condição dada pela Equação 4-11 constituem a região ou também chamado domínio de falha. Portanto, a probabilidade de falha é o somatório de todas essas realizações possíveis dentro do domínio de falha, sendo definida por:

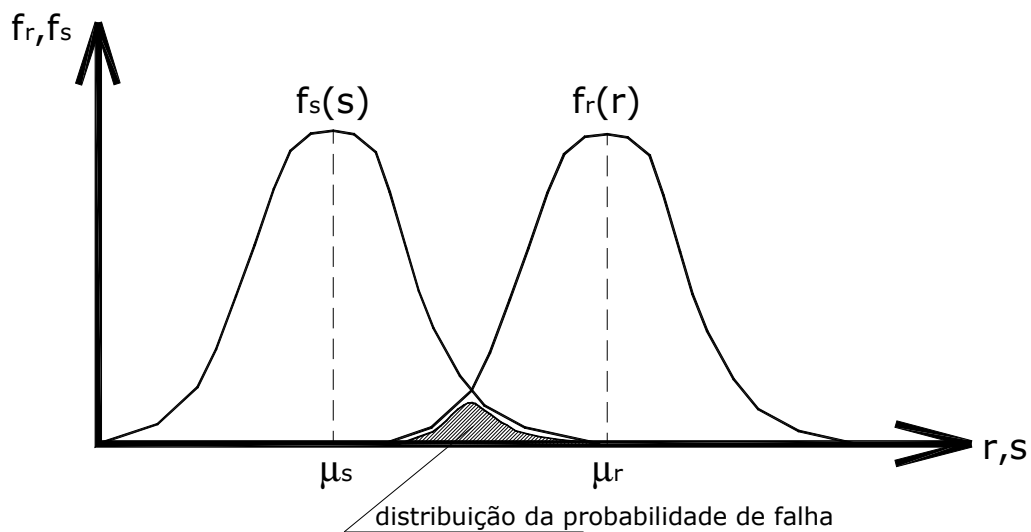
$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_{R,S}(r,s) dr ds \quad (4-12)$$

sendo que:  $f_{R,S}(r,s)$  é a função conjunta de densidade de probabilidades de  $R$  e  $S$ ;  $r$  e  $s$  são os valores assumidos pelas variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ . Quando as variáveis aleatórias forem independentes entre si, a função conjunta de densidade de probabilidades pode ser substituída

pelo produto direto das funções marginais de cada variável. Assim, o cálculo da probabilidade de falha é dado por:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (4-13)$$

A probabilidade de falha pode ser associada à área de interferência entre as distribuições de probabilidades de  $R$  e  $S$ , conforme a Figura 4-3. Portanto, quanto maior for essa área de interferência entre as curvas, maior será a probabilidade de falha.



**Figura 4-3 – Interpretação geométrica da probabilidade de falha**

Assim, uma maneira de diminuir essa probabilidade é afastar as médias de ambas as distribuições, através da imposição, por exemplo, de coeficientes de segurança. Um outro modo de aumentar a segurança é diminuir a variabilidade das variáveis, definida pelo seu desvio-padrão. Com relação às propriedades dos materiais, a diminuição dessa variabilidade pode ser conseguida por meio de processos de produção melhores e mais controlados, onde a dispersão dos resultados seja cada vez menor. As incertezas referentes à geometria dos elementos também podem ser diminuídas com processos de execução melhores, restando somente a variabilidade das ações externas, que é mais difícil de controlar.

O cálculo direto da probabilidade de falha através da integral da Equação 4-12 pode ser bastante complexo de se fazer. Isso porque na prática não se conhece a distribuição conjunta das variáveis aleatórias, tendo-se somente as informações individuais de cada variável. Por conta disso, diversos métodos foram desenvolvidos com o objetivo de contornar esse problema e, com isso, avaliar a probabilidade de falha. São eles: métodos de simulação e

métodos aproximados. Os métodos utilizados neste trabalho serão descritos com detalhes nas seções posteriores.

## 4.5 Índice de Confiabilidade

O conceito de índice de confiabilidade foi proposto por Hasofer & Lind (1974) e é extremamente importante, pois permite calcular a probabilidade de falha para cada estado limite. É definido em termos geométricos como sendo a menor distância entre a origem do espaço normal-padrão das variáveis aleatórias e a equação de estado limite. O ponto sobre a equação de estado limite que define essa menor distância é chamado de ponto de projeto,  $P^*$  (Figura 4-4).

Um caso particular do problema fundamental da confiabilidade é quando tem-se as duas variáveis aleatórias independentes entre si e com distribuição normal de probabilidades. Nesse caso, o índice de confiabilidade pode ser obtido por:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4-14)$$

sendo que:  $\mu_R$  e  $\mu_S$  são as respectivas médias da resistência e da solicitação;  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$  são os respectivos desvios-padrão.

De maneira geral, a equação de estado limite é definida por várias variáveis aleatórias, inclusive com distribuições marginais de probabilidades diferentes da normal. Assim, genericamente, o cálculo do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto é feito através da resolução do seguinte problema de otimização:

$$\beta = \min_u \sqrt{\sum_{i=1}^{mva} u_i^2} \quad (4-15)$$

*sujeito* :  $G(u_i) = 0$

sendo que:  $u_i$  são as variáveis aleatórias no espaço normal-padrão.

Inicialmente, as variáveis aleatórias estão definidas no espaço físico, pois se tratam de quantidades físicas como propriedades de resistência dos materiais, medidas geométricas dos elementos e carregamentos aplicados sobre a estrutura. No entanto, o índice de confiabilidade é definido no espaço adimensional das variáveis aleatórias conhecido com

espaço normal-padrão. Assim, deve-se preceder uma transformação sobre as variáveis do espaço físico para o espaço normal-padrão. Essa transformação recebe o nome de transformação isoprobabilística, pois tem como objetivo preservar o mesmo conteúdo de probabilidades em ambos os espaços. A transformação depende do tipo de distribuição de probabilidades de cada variável e das correlações existentes entre elas. Soares (2001) e Beck (2006) descrevem os procedimentos para efetuar adequadamente essa transformação. Para variáveis aleatórias normais e independentes, essa transformação pode ser feita simplificadamente da seguinte maneira:

$$u_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (4-16)$$

sendo que:  $x_i$  corresponde ao valor da variável no espaço físico.

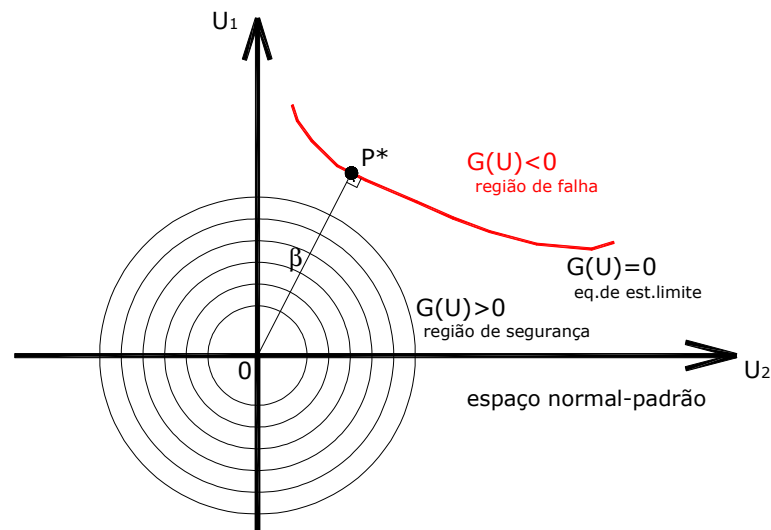


Figura 4-4 – Definição do índice de confiabilidade no espaço normal-padrão

Uma vez obtido o índice de confiabilidade, a probabilidade de falha pode ser estimada por aproximações de primeira ou segunda ordem.

## 4.6 Componentes e Sistemas

Os conceitos de componentes e sistemas, do ponto de vista da confiabilidade, tem a ver com o número de modos de falha importantes de uma estrutura. Basicamente, a confiabilidade de componente corresponde à análise com a consideração de um modo de falha



apenas, ao passo que a confiabilidade de sistema remete ao cálculo da segurança considerando vários modos de falha.

De maneira geral, as estruturas são formadas por diversos elementos estruturais. É interessante notar que em muitos casos, a falha de um elemento não significa necessariamente a falha de estrutura. Isso ocorre em função das possíveis reservas de resistência que a estrutura possui, conferindo-lhe capacidade extra após a ocorrência de uma determinada falha. Essas reservas recebem o nome de redundância. Dessa forma, a verificação da falha de uma estrutura mais complexa requer a consideração das sequências de falha possíveis em que esta pode acontecer.

Estruturas isostáticas são exemplos de componentes, pois a falha de uma única seção transversal conduz a estrutura ao colapso. Já as estruturas hiperestáticas constituem exemplos de sistema com redundâncias, uma vez que a falha em uma única seção transversal não conduz a estrutura à ruína. Nesses casos, é necessário que a falha aconteça em mais de um modo para que o colapso total ou interrupção de seu funcionamento ocorra. Por conta disso, os sistemas são idealizados por meio da interação dos modos de falha importantes e de como eles determinam o comportamento da estrutura.

#### 4.6.1 Idealização em série

No sistema em série, a falha de um componente conduz o sistema à falha. Dessa forma, a confiabilidade de um sistema em série é medida pela confiabilidade do seu componente mais frágil. Por isso, sistemas em série são conhecidos como sistemas de correntes (Figura 4-5), para os quais a falha acontece no elo mais fraco (*weakest link system*). A probabilidade de falha do sistema é então definida pelo evento união das probabilidades de falha individuais de todos os componentes,  $E_i$ , conforme segue:

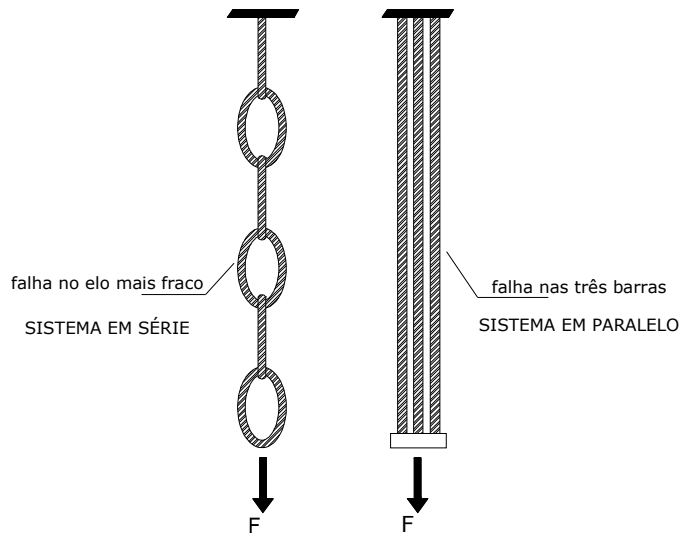
$$P_f = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n) \quad (4-17)$$

sendo que:  $n$  corresponde ao número de modos de falha do sistema.

#### 4.6.2 Idealização em paralelo

No sistema em paralelo, para que o sistema falhe é necessário que todos ou muitos dos seus componentes falhem. Portanto, a resistência de uma estrutura idealizada como um

sistema em paralelo é definida pela resistência de todos os seus componentes. A analogia dos sistemas em paralelo é a de uma estrutura de barras tracionadas por uma placa muito rígida, conforme Figura 4-5.



**Figura 4-5 – Idealização de sistemas em série e paralelo**

A probabilidade de falha do sistema em paralelo é definida pela intersecção entre os eventos de falha individuais dos componentes, conforme segue:

$$P_f = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n) \quad (4-18)$$

Sistemas em paralelo são também chamados de redundantes. Essa redundância pode ser do tipo ativa ou passiva. Na redundância ativa todos os elementos contribuem simultaneamente para o desempenho da estrutura, mesmo em pequenas intensidades de carregamento. Na redundância passiva, um determinado elemento só passa a contribuir depois que outro falhe, ficando dessa forma em caráter de espera até que sua presença seja necessária para o funcionamento da estrutura. Esse tipo de redundância passiva é interessante, pois permite visualizar a idéia de reserva de resistência de uma estrutura. A influência da redundância ativa depende do comportamento mecânico dos materiais que constituem os elementos estruturais. Em sistemas de materiais dúcteis com comportamento elastoplástico perfeito por exemplo, a falha ocorre quando todos os elementos falham, isto é, atingem o escoamento. Já em sistemas com materiais frágeis, por exemplo, a falha de um único elemento pode conduzir rapidamente todo o sistema à falha, a menos que esse elemento contribua pouco para a redundância do sistema.

Quando a redundância é do tipo ativa, os limites para a probabilidade de falha dos sistema em paralelo podem ser calculados por:

$$\prod_{i=1}^n P(E_i) \leq P_f \leq \min_i P(E_i) \quad (4-19)$$

Nesses casos, o limite inferior representa a situação de independência entre os modos de falha individuais, ao passo que o limite superior corresponde à dependência perfeita entre os modos.

Beck (2006) afirmou que, na redundância passiva, a avaliação da probabilidade de falha do sistema requer o cálculo de probabilidade condicionais através de uma árvore de falhas. Essa árvore de falha é construída verificando-se a ocorrência de cada uma das sequências de falha possíveis, que são determinadas por eventos condicionais.

#### 4.6.3 Limites de primeira e segunda ordem

Um sistema é definido pela existência de vários modos de falha, sendo que cada modo de falha é descrito por uma equação de estado limite. Os diversos métodos de confiabilidade permitem avaliar a probabilidade de falha individual de cada modo, de forma que é necessário fazer uma combinação dessas probabilidades individuais para se obter a probabilidade de falha do sistema. Assim, o domínio de falha total é definido pela união dos domínios de falha de todos modos. Da mesma forma, esse raciocínio pode ser estendido para a confiabilidade de componentes, pois a falha destes pode ser caracterizada pela falha por qualquer um de seus modos potenciais. Com isso, o domínio de falha de um componente também pode ser escrito como sendo a união de seus modos potenciais e, com isso, ser representado por um sistema em série.

Em termos matemáticos, a probabilidade de falha do sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_f = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_i \sum_{j>i} P(E_i \cap E_j) + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \dots \quad (4-20)$$

Esta expressão pode ser, entretanto, bastante difícil de se calcular, pois depende das intersecções de dois ou mais eventos de falha. O que se faz então é estabelecer limites para a probabilidade de falha, a partir da desconsideração de alguns dos termos da Equação 4-20.

Assim, esses limites ficam cada vez mais estreitos à medida que se consideram mais termos na aproximação. Considerando os termos de primeira ordem  $P(E_i)$  obtém-se um limite superior para a probabilidade de falha do sistema. Ao se considerar também os termos de segunda ordem  $P(E_i \cap E_j)$  obtém-se um limite inferior e assim por diante. Em função disso, são estabelecidos os chamados limites uni e bi-modais da probabilidade de falha de um sistema.

Os limites de primeira ordem são dados por:

$$\max_i^n [P(E_i)] \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(E_i)] \quad (4-21)$$

O limite inferior representa a condição na qual os modos de falha são totalmente dependentes, de forma que a falha acontecerá sempre no modo mais fraco. Já o limite superior corresponde à situação na qual todos os modos são independentes. Assim, a segurança da estrutura é dada pela sobrevivência de todos os seus membros. Esses limites podem ser bastante amplos em casos onde não há um modo de falha dominante.

Os limites de segunda ordem, por outro lado, são dados por:

$$P(E_1) + \sum_{i=2}^n \max \left[ P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i \cap E_j); 0 \right] \leq P_f \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i=2}^n \max_{i>j} [P(E_i \cap E_j)] \quad (4-22)$$

Algumas considerações sobre esses limites são oportunas neste momento. Primeiro, o uso do operador  $\max[\bullet]$  garante que não haja nenhuma contribuição negativa na probabilidade de falha por conta da desconsideração dos termos de terceira ordem. Segundo, o limite inferior depende da ordenação dos modos de falha, sendo adotada como regra geral, a ordenação dos modos em grau de importância, ou seja, em ordem decrescente de probabilidade de falha individual. Assim, na primeira posição está o modo com a maior probabilidade de falha e em último lugar está o modo com a menor probabilidade de falha, ou seja, o modo menos importante.

Geralmente, as probabilidade de intersecção entre os modos de falha são difíceis de se avaliar. O que se faz então para calcular os limites bi-modais do sistema é linearizar as equações de estado limite de cada modo em seu respectivo ponto de projeto (Figura 4-6). Com isso, torna-se possível estimar os termos de segunda ordem  $P(E_i \cap E_j)$  a partir dos coeficientes de correlação entre os modos de falha obtidos em função da área da intersecção aproximada.

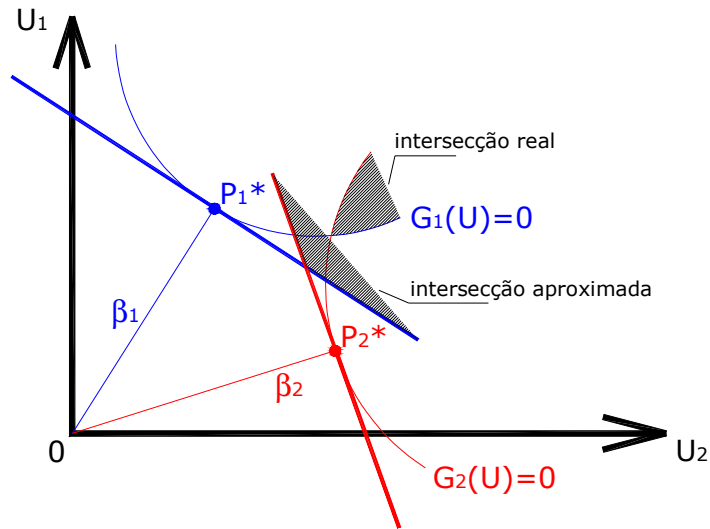


Figura 4-6 – Linearização das equações de estado limite de dois modos de falha

Os coeficientes de correlação entre pares de modos de falha podem ser obtidos por:

$$\rho_{ij} = \frac{\nabla G_i \cdot \nabla G_j}{|\nabla G_i| \cdot |\nabla G_j|} \quad (4-23)$$

sendo que: o numerador representa o produto escalar entre os gradientes dos modos de falha  $i$  e  $j$ ; o denominador corresponde ao produto simples dos módulos desses gradientes (Ang & Tang 1975).

Com isso, calcula-se as probabilidades de ocorrência dos eventos A e B, para cada combinação de pares de modos  $ij$ :

$$P(A_{ij}) = \Phi(-\beta_i) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij}\beta_i}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\right) \quad (4-24)$$

$$P(B_{ij}) = \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij}\beta_j}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\right)$$

Finalmente, obtêm-se as probabilidades das intersecções entre pares de modos de falha, a partir da Equação 4-24. Assim, para o limite inferior tem-se:

$$P(E_i \cap E_j) = P(A_{ij}) + P(B_{ij}) \quad (4-25)$$

E para o limite superior, a probabilidade da intersecção é dada por:

$$P(E_i \cap E_j) = \max[P(A_{ij}), P(B_{ij})] \quad (4-26)$$

Os limites dados pela Equação 4-22 são assintóticos, isto é, se estreitam à medida que as probabilidades de falha individuais diminuem. Vale comentar que esses limites podem ser bastante largos quando não houver um modo de falha dominante sobre os demais.

Mais informações sobre confiabilidade de sistemas e redundâncias podem ser encontradas nos trabalhos de Ditlevsen & Bjerager (1984), Shiraishil & Furuta (1998), Nowak & Collins (2000) e Ghali et al (2009).

## **4.7 Métodos de Cálculo**

### **4.7.1 Aspectos gerais**

O objetivo de toda a análise de confiabilidade estrutural é avaliar a probabilidade de ocorrência de uma falha específica de uma estrutura. Isso pode ser feito, conforme já descrito na seção 4.4, através da integral da função densidade conjunta das variáveis aleatórias sobre o domínio de falha considerado. Entretanto, essa integral pode ser bastante difícil de se calcular na prática, justamente pela dificuldade de conhecimento da função densidade conjunta. Em função disso, diversos métodos foram criados com o objetivo de contornar essa dificuldade e avaliar a probabilidade de falha das estruturas. Nesta seção, esses métodos serão brevemente descritos, juntamente com os métodos que foram empregados neste trabalho.

### **4.7.2 Métodos de simulação**

Simulação é uma técnica que visa representar o comportamento de acontecimentos reais, a partir de hipóteses, leis e modelos matemáticos condizentes com a realidade estudada. Na engenharia, a simulação numérica (experimentação feita por meio de programas computacionais) é realizada para prever o desempenho de sistemas reais. Com relação às estruturas, simulações são vistas como uma forma de realizar numericamente um experimento impossível de ser realizado na prática. Ensaios para avaliação de probabilidades de falha de estruturas são praticamente impossíveis de serem realizados, pois essas probabilidades são geralmente muito pequenas, o que requereria um grande número de estruturas ensaiadas. Isso é impossível de ser feito por conta do altíssimo custo gerado nesses ensaios, além do fato de

que para estruturas como grandes pontes, por exemplo, não seria possível reproduzir pontes iguais apenas para ensaios de probabilidades de falha. É exatamente por esses motivos que a simulação é uma técnica bastante atrativa e eficiente para o cálculo de probabilidades de falha de estruturas.

Os métodos de simulação são conhecidos como exatos, pois o seu resultado se aproxima cada vez mais do valor exato, à medida que o número de simulações tende ao infinito. No entanto, a palavra exato é um pouco forte demais, visto que esses resultados são obtidos para conjuntos amostrais finitos e através de modelos de comportamento aproximados. Além disso, a simulação depende fortemente dos números aleatórios gerados por computador, o que confere a elas um certo caráter de previsibilidade, pois esses números obedecem a funções determinísticas internas dos computadores, conferindo-lhes, portanto, um caráter pseudo-aleatório.

O método de Monte Carlo é um dos métodos de simulação mais conhecidos pela comunidade científica mundial. Aliado às técnicas de redução de variância, isto é, menor número de simulações, sua aplicação tem crescido nos dias atuais, graças à sua simplicidade e grande eficácia. O método foi utilizado neste trabalho através do programa computacional StRAnD (*Structural Reliability Analysis and Design*) desenvolvido por Beck (2007). O programa permite avaliar a probabilidade de falha das estruturas via simulação de Monte Carlo simples (MCS) e simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância (MCAI) entre outros métodos.

O método de Monte Carlo requer o conhecimento das distribuições de probabilidades das variáveis aleatórias envolvidas no problema. O seu princípio consiste em realizar diversas repetições do modelo estrutural considerado, onde em cada uma delas é gerado um conjunto de valores aleatórios para as variáveis aleatórias mediante suas distribuições de probabilidades. Esse conjunto de valores aleatórios é gerado de acordo com algumas regras especiais, de modo a resultar em valores confiáveis. O processo de geração aleatória pode ser encontrado com detalhes em Nowak & Collins (2000), Neves (2004) e Beck (2006).

Para cada conjunto de amostras das variáveis do problema determina-se a resposta mecânica da estrutura e, conseqüentemente, obtém-se uma avaliação das equações de estado limite. A probabilidade de falha é então estimada pela quantidade de realizações que representaram falha sobre a quantidade total de realizações da estrutura. Matematicamente, tem-se:

$$I(X_r) = \begin{cases} 1 \rightarrow G < 0 \\ 0 \rightarrow G \geq 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

sendo que:  $I(X_r)$  é o estimador da realização, marcando 1 em caso de falha e 0 em caso de segurança para o modo considerado.

A probabilidade de falha pode então ser estimada por:

$$P_f = \frac{\sum_{r=1}^{n_s} I(X_r)}{n_s} \quad (4-28)$$

sendo que:  $n_s$  é o número total de realizações da estrutura.

Juntamente com a estimativa da probabilidade de falha, avalia-se também a variância dessa estimativa, que corresponde ao erro relacionado com a simulação realizada.

$$\sigma_{P_f}^2 = \frac{\sum_{r=1}^{n_s} [I(X_r) - P_f]^2}{n_s^2 - n_s} \quad (4-29)$$

Quanto maior o número de simulações, menor é o erro associado ao processo. A quantidade de simulações está diretamente ligada ao valor da probabilidade de falha. Quanto menor a probabilidade de falha, maior deve ser o número de simulações necessárias para se obter a mesma variância. Uma boa aproximação para a quantidade de simulações pode ser dada fazendo-se  $100/P_f$ . Essa é a grande dificuldade do uso do método de Monte Carlo simples na engenharia de estruturas, pois os problemas estruturais são caracterizados, de um modo geral, por probabilidades muito pequenas. Isso significa um número muito grande de simulações para que se atinja uma estimativa aceitável (baixa variância) da probabilidade de falha. Modelos mecânicos mais refinados em elementos finitos ou elementos de contorno conduzem a elevados tempos de processamento para a obtenção de uma resposta mecânica, o que torna o seu uso combinado à simulação de Monte Carlo praticamente inviável. Nesses casos, uma alternativa que pode ser viável é a redução do número de simulações através do uso de técnicas de amostragem por importância (redução de variância).

A amostragem por importância procura deslocar os pontos de amostragem, isto é, as realizações aleatórias das variáveis, para regiões importantes do domínio de falha. Assim, ao



invés de simular uma grande quantidade de pontos afastados do domínio de falha, desloca-se a função de amostragem para as suas proximidades e faz-se uma simulação reduzida.

A probabilidade de falha é então dada por:

$$P_f = \frac{\sum_{r=1}^{n_s} I'(X_r)}{n_s} \cdot \frac{f_X(X_r)}{h_X(X_r)} \quad (4-30)$$

sendo que:  $f_X$  é a função densidade conjunta das variáveis aleatórias;  $h_X$  é a nova função de amostragem;  $I'(X_r)$  é o novo estimador da realização  $r$ .

A grande dificuldade da amostragem por importância reside na escolha da função  $h_X$ . Uma técnica interessante e bastante utilizada hoje foi proposta por Borgund & Bucher (1986). A proposta é centrar a nova função de amostragem no ponto de projeto do modo de falha considerado e realizar as simulações. Encontra-se o ponto de projeto através de algum algoritmo de otimização, aplica-se a técnica e em seguida são as feitas as simulações. De acordo com Beck (2006), o número de simulações necessárias torna-se praticamente independente da ordem de grandeza da probabilidade de falha quando se usa a amostragem por importância. Sugere ainda que 3000 simulações por modo de falha são suficientes para se obter boa aproximação da probabilidade de falha do respectivo modo, com dispersão de aproximadamente 5%. A Figura 4-7 ilustra os métodos de MCS e MCAI e suas respectivas diferenças.

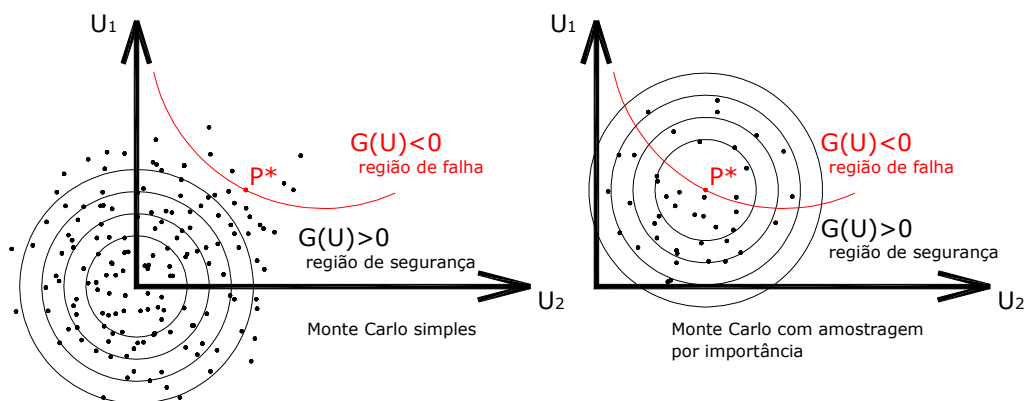


Figura 4-7 – Simulação de MC simples e MC com amostragem por importância

### 4.7.3 Métodos aproximados

Os métodos aproximados são uma alternativa para a resolução do problema da confiabilidade, pois estimam a probabilidade de falha a partir do índice de confiabilidade. Conforme já mencionado anteriormente, o índice de confiabilidade pode ser definido como uma medida geométrica da probabilidade de falha e é aceito hoje em dia como uma medida da segurança estrutural. Assim, o problema consiste em determinar qual é o ponto sobre a equação de estado limite que possui a menor distância até a origem do espaço normal-padrão. Esse ponto recebe o nome de ponto de projeto e possui grande importância no processo.

O índice de confiabilidade é obtido, conforme já descrito na seção 4.5, pela resolução do problema de otimização dado pela Equação 4-15 e repetido aqui apenas por conveniência:

$$\beta = \min_u \sqrt{\sum_{i=1}^{nva} u_i^2}$$

sujeito :  $G(u_i) = 0$

O ponto de projeto é automaticamente determinado, pois corresponde às coordenadas  $u_i$ , ou seja, às variáveis otimizadas que fornecem a menor distância da equação de estado limite e a origem do espaço normal-padrão. Trata-se, portanto, de um processo geral que pode envolver um número qualquer de variáveis aleatórias.

A seguir, apresenta-se um passo-a-passo para o cálculo do ponto de projeto, bem como os detalhes de cada passo.

1. *Escolher um ponto de partida para iniciar o processo de busca.* Esse ponto não precisa necessariamente estar sobre a equação de estado limite. Normalmente, escolhe-se as médias das variáveis aleatórias no espaço físico;

2. *Avaliação da equação de estado limite no espaço físico, que pode ser explícita ou implícita.* As equações explícitas são definidas dessa forma porque apresentam diretamente as variáveis aleatórias que participam do modo de falha. No caso das equações implícitas, são relacionadas grandezas que são função das variáveis aleatórias, sendo necessário obtê-las numericamente. Por exemplo, é o caso de uma equação de estado limite escrita em termos do momento fletor de uma viga. O momento resistente é função das resistências do aço e do concreto, que são variáveis aleatórias do problema. Define-se então os valores dessas resistências e faz-se a análise numérica da estrutura para se obter o momento fletor resistente. Isso ocorre principalmente quando se considera o caráter não-linear dos materiais;

3. *Cálculo da matriz Jacobiana ( $J$ ) e da inversa da Jacobiana ( $J^{-1}$ ).* O índice de confiabilidade é definido no espaço normal-padrão das variáveis não-correlacionadas. Por conta disso, é necessário realizar uma transformação isoprobabilística do espaço físico para o espaço normal-padrão ( $X$  para  $U$ ). Essa transformação é gerida pela matriz Jacobiana. Assim, a matriz Jacobiana e a sua inversa são dadas por:

$$J = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{x_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n} \end{bmatrix}$$

As matrizes apresentadas acima se referem ao caso onde as variáveis aleatórias são independentes entre si e possuem distribuição normal de probabilidades. Caso haja correlação entre as variáveis e distribuições diferentes, o processo de obtenção das matrizes Jacobianas muda um pouco, pois primeiro é necessário transformar as variáveis do espaço físico correlacionado para o espaço normal-padrão correlacionado e só depois passar para o espaço normal-padrão não-correlacionado. Esse processo está bem explicado em Beck (2006);

4. *Transformação do ponto de  $X$  para  $U$  através da seguinte relação:*  $U = J \cdot \{X - M\}$ , onde  $M$  é o vetor com todas as médias das variáveis aleatórias;

5. *Cálculo dos gradientes da equação de estado limite.* Deve-se avaliar primeiramente os gradientes da equação de estado limite no espaço físico ( $\nabla G_x$ ) e depois transformá-los para o espaço normal-padrão ( $\nabla G_U$ ). Novamente, essa etapa depende da forma da equação de estado limite. Caso esta esteja na forma explícita, as derivadas com relação a cada uma das variáveis aleatórias são diretas. Porém, caso a equação de estado limite seja implícita, as derivadas devem ser avaliadas por diferenças finitas. Esse procedimento será explicado logo adiante. Assim, a transformação dos gradientes fica definida por:

$$\nabla G_U = (J^{-1})^T \cdot \nabla G_x \quad (4-32)$$

6. *Cálculo dos fatores de sensibilidade ( $\alpha$ )*. A principal função dos fatores de sensibilidade é mostrar quais variáveis aleatórias tem de fato importância na determinação da probabilidade de falha da estrutura, sendo utilizados, portanto, para eliminar variáveis com pouca importância. Respeitam a seguinte relação:  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ ;

7. *Cálculo do novo ponto pelo algoritmo HLRF*;

8. *Transformação do novo ponto de  $U$  para  $X$  através da seguinte relação:*  
 $X = J^{-1} \cdot U + M$ ;

9. *Cálculo do índice de confiabilidade no novo ponto calculado*;

10. *Verificação do critério de convergência*. Caso este seja satisfeito, finaliza-se o processo, caso contrário retorna-se ao passo 3 até que a convergência seja atingida.

Uma vez encontrado o índice de confiabilidade da estrutura, determina-se a probabilidade de falha através de uma aproximação do tipo FORM ou SORM.

A seguir, são descritos o algoritmo HLRF, a técnica dos gradientes por diferenças finitas e o Método das Superfícies de Resposta. Todos esses procedimentos fazem parte desse algoritmo de busca do ponto de projeto apresentado nesta seção.

#### 4.7.4 FORM e SORM

Uma vez determinado o índice de confiabilidade, a probabilidade de falha pode ser estimada utilizando uma aproximação de primeira ordem (FORM) ou até mesmo para uma maior precisão, uma aproximação de segunda ordem (SORM).

No FORM, a equação de estado limite é aproximada por um hiperplano tangente ao ponto de projeto, de modo que a probabilidade de falha é avaliada por:

$$P_{f,FORM} = \Phi(-\beta) \quad (4-33)$$

sendo que:  $\Phi()$  é a distribuição acumulada de probabilidades no espaço normal-padrão (onde a média é zero e o desvio-padrão é unitário).

Já o SORM pode ser utilizado quando a equação de estado limite apresenta forte não-linearidade na região próxima ao ponto de projeto. Nesses casos, a aproximação de primeira ordem pode produzir erros excessivos. O que se faz é centrar no ponto de projeto uma superfície quadrática e corrigir a probabilidade de falha a partir de um fator dependente dessa superfície. Breitung (1984) propôs a utilização de um hiper-parabolóide ajustado através das

curvaturas principais da equação de estado limite no espaço normal-padrão. Assim, o processo consiste em escolher uma base adequada para a construção do parabolóide e depois avaliar o conteúdo de probabilidades definido pelo parabolóide. As curvaturas do parabolóide são obtidas a partir das curvaturas da equação de estado limite e da matriz hessiana no ponto de projeto. Assim, a probabilidade de falha corrigida é dada pela seguinte expressão:

$$P_{f,SORM} = \Phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{nva-1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta a_i}} \quad (4-34)$$

sendo que:  $a_i$  são as curvaturas do parabolóide.

A Figura 4-8 ilustra as aproximações de primeira e segunda ordem e suas diferenças em termos do erro em relação à aproximação da equação de estado limite.

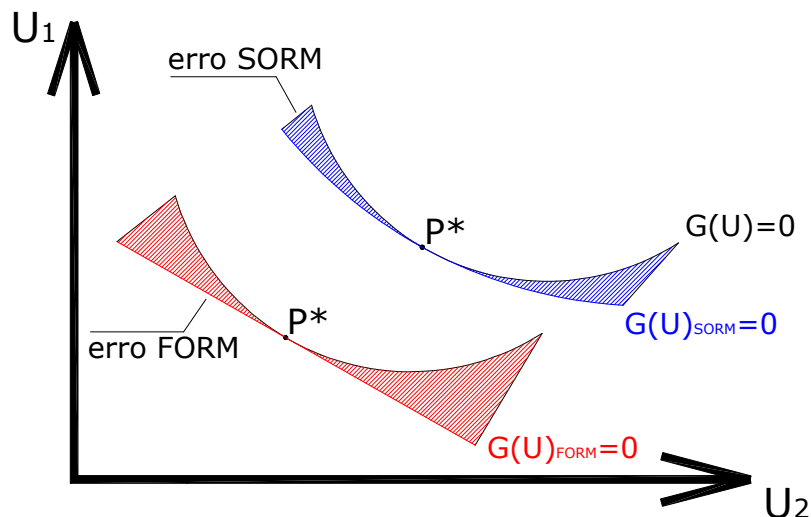


Figura 4-8 – Aproximações do tipo FORM e SORM

#### 4.7.5 Técnica dos gradientes numéricos

A busca do ponto de projeto requer a avaliação das derivadas parciais da equação de estado limite no ponto candidato. Na Técnica dos Gradientes Numéricos (TGN), essas derivadas são obtidas via diferenças finitas no espaço físico, a partir das respostas diretas do modelo mecânico de elementos finitos. Em seguida, faz-se a transformação dos gradientes do espaço físico para o espaço normal-padrão, conforme descrito no algoritmo da seção 4.7.3.

Basicamente, para se determinar a derivada em relação à variável aleatória  $x_i$ , fixa-se as demais variáveis no ponto candidato e faz-se uma pequena variação na variável  $x_i$ . Em

seguida, a resposta mecânica da estrutura é obtida pelo modelo de elementos finitos. Assim a derivada parcial é avaliada da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial G_X}{\partial x_i} \right|_{X=x} = \frac{R(x_i + \Delta x_i, \dots, x_n + \Delta x_n) - R(x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (4-35)$$

sendo que:  $R$  é a resposta mecânica da estrutura;  $\Delta x_i$  corresponde ao incremento dado somente na variável aleatória  $x_i$ . Com relação ao incremento,  $\Delta x_i$ , dado a cada variável, pode-se adotar um valor da ordem de 1% do respectivo desvio-padrão.

Esse tipo de procedimento, de um modo geral, conduz a uma redução considerável no número de avaliações da equação de estado limite comparado a outros métodos como as superfícies de resposta. No entanto, problemas de convergência podem surgir em caso de forte comportamento não-linear dos materiais da estrutura. A convergência também pode ser afetada quando as variáveis aleatórias apresentarem distribuições de probabilidades diferentes da normal e/ou em casos de correlação.

#### 4.7.6 Algoritmo de busca HLRF

Esse algoritmo de busca foi desenvolvido especificamente para resolver o problema de otimização na busca do índice de confiabilidade. O crédito pelo algoritmo é de Hasofer & Lind (1974) e Rackwitz & Fiessler (1978). O algoritmo procura aproximar de maneira perpendicular o ponto  $u$  à superfície dada pela equação de estado limite.

A formulação do algoritmo segue exatamente o procedimento descrito na seção 4.7.3. Serão mostrados, a seguir, os cálculos dos fatores de sensibilidade  $\alpha$ , do índice de confiabilidade  $\beta$  e do novo ponto candidato à ponto de projeto  $u$ , respectivamente nesta ordem.

$$\{\alpha_i\}_k = \frac{\{\nabla G_{U_i}\}_k}{\|\nabla G_U\|_k} \quad (4-36)$$

$$\beta_k = \frac{G_{U_k} - \{\nabla G_{U_i}\}_k^T \cdot \{u_i\}_k}{\|\nabla G_U\|_k} \quad (4-37)$$

$$\{u_i\}_{k+1} = -\beta_k \{\alpha_i\}_k \quad (4-38)$$

sendo que:  $\{\nabla G_U\}$  é o vetor gradiente com as derivadas parciais de equação de estado limite;  $\|\nabla G_U\|$  é a norma do vetor gradiente. Essa norma é dada por  $\|\nabla G_U\| = \partial G_U / \partial u_i$ .

O processo é repetido até a convergência em termos do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto. É interessante comentar que não existe garantia de convergência do algoritmo, nem de que o ponto encontrado seja de fato o ponto de mínimo do problema. Uma alternativa para contornar esse problema é arbitrar diferentes valores para o ponto inicial na primeira iteração do algoritmo.

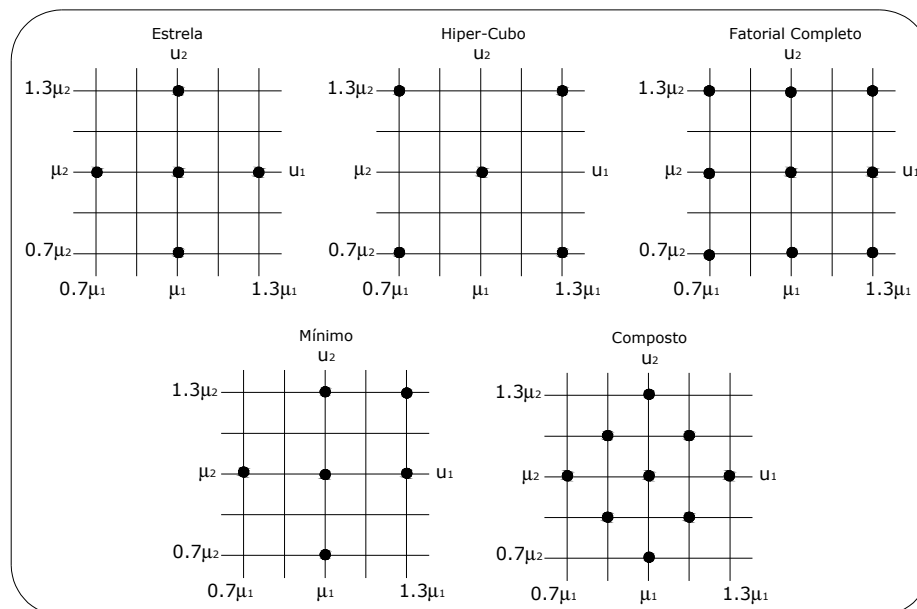
#### 4.7.7 Método da superfície de resposta

Um dos grandes problemas enfrentados até hoje nas análises de confiabilidade é o tempo de processamento gasto pra encontrar a probabilidade de falha. Os métodos de simulação, embora bastante simples, requerem geralmente um número muito grande de avaliações das equações de estado limite do problema, até mesmo considerando técnicas de amostragem por importância. Aliado a esse fato, os modelos não-lineares utilizados hoje, como é o caso deste trabalho, tornam ainda mais demoradas as avaliações das respostas da estrutura, o que inviabiliza o uso direto dos métodos de simulação. Por outro lado, o uso direto do algoritmo HLRF juntamente com a técnica dos gradientes numéricos para a busca do ponto de projeto pode apresentar problemas de convergência para estruturas com forte comportamento não-linear. Assim, uma outra alternativa para a resolução do problema de confiabilidade é a utilização do Método da Superfície de Resposta (*RSM – Response Surface Method*). A proposta inicial do uso desse método para confiabilidade estrutural foi dada por Bucher & Borgund (1990), onde o ponto de projeto é encontrado mediante construções sucessivas de superfícies de resposta.

A idéia do método é construir uma aproximação da equação de estado limite em torno do ponto candidato a ponto de projeto. Sobre essa aproximação, o algoritmo HLRF é utilizado para buscar o ponto de projeto até a sua convergência. Vale ressaltar que com a utilização da superfície de resposta para aproximar a equação de estado limite, sua avaliação e suas derivadas no ponto atual se tornam analíticas e sem esforço computacional extra, deixando o processo bem mais simples e estável. Esse procedimento é perfeitamente compatível com o algoritmo de solução apresentado na seção 4.7.3.

A construção da aproximação para a equação de estado limite é feita com base em valores determinísticos das variáveis aleatórias dados por planos de experiência. Esses planos

impõem variações fixas para cada variável de acordo com um critério pré-estabelecido. A Figura 4-9 mostra os planos de experiência mais comuns encontrados na literatura e utilizados neste trabalho.



**Figura 4-9 – Planos de experiência utilizados**

Infelizmente, não é possível generalizar qual plano de experiência é o melhor. A melhor alternativa de plano varia de problema para problema, sendo necessário um estudo prévio sobre qual será a melhor escolha. Os pontos são determinados impondo-se sobre as médias uma variação positiva ou negativa em função do desvio-padrão de cada variável. Assim, para cada variável aleatória tem-se:

$$x_i = \mu_{x_i} \pm m\sigma_{x_i} \quad (4-39)$$

O coeficiente  $m$  é utilizado para determinar a amplitude de variação sobre a média que o ponto terá. Existem alguns trabalhos sobre a melhor escolha desse coeficiente, porém ainda assim não existe um consenso sobre o assunto. De um modo geral, valores entre 1,0 e 3,0 fornecem certa estabilidade de convergência para os planos, sendo, portanto, boas alternativas para esse coeficiente. Outros valores também podem ser utilizados de acordo com a natureza do problema em estudo.

Os pontos são gerados no espaço físico e depois transformados para o espaço normal-padrão segundo a transformação isoprobabilística conveniente. Para cada ponto do plano, uma chamada ao modelo mecânico é feita e uma resposta da estrutura é obtida. De



posse do vetor de respostas mecânicas e dos valores das variáveis aleatórias definidos em cada ponto do plano, faz-se uma regressão por mínimos quadrados e determina-se os coeficientes da função aproximadora do estado limite considerado.

As funções mais comuns e que apresentam melhor desempenho para essa aproximação são os polinômios (Lemaire, 1998). Soares et al. (2002) concluíram ainda que polinômios de ordem menor são melhores que polinômios de ordem mais alta. Por conta disso, foram adotados neste trabalho polinômios de primeiro e segundo graus, sendo que estes últimos podem ou não conter os termos cruzados. Quanto maior o número de variáveis aleatórias envolvidas na análise, maior será o número de coeficientes desses polinômios. Consequentemente, maior será o número de chamadas ao modelo mecânico e maior será o tempo de processamento. Além da abordagem tradicional para a construção das superfícies de resposta, foi introduzida também uma abordagem baseada em fatores-peso, priorizando os pontos que resultaram mais próximos à equação de estado limite. Desenvolveu-se também uma técnica adaptativa, na qual o plano de experiência é reestruturado no ponto de projeto, diminuindo a distância entre os pontos e o centro do plano, com o objetivo de obter maior precisão em torno do ponto de projeto.

#### 4.7.7.1 Polinômio aproximador

O primeiro passo consiste em adotar o grau do polinômio aproximador da equação de estado limite na vizinhança do ponto candidato à ponto de projeto. As expressões a seguir representam as opções de polinômios de primeiro e segundo graus em função do número de variáveis aleatórias, bem como a presença ou não de termos cruzados para o polinômio de segundo grau.

**Tabela 4-1 – Polinômios de primeiro grau**

NVA	Forma do polinômio
1	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1$
2	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_2$
3	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$
4	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$
5	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 + a_5u_5$

**Tabela 4-2 – Polinômios de segundo grau sem termos cruzados**

NVA	Forma do polinômio
1	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2$
2	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2$
3	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2$
4	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2 + a_7u_4 + a_8u_4^2$
5	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2 + a_7u_4 + a_8u_4^2 + a_9u_5 + a_{10}u_5^2$

**Tabela 4-3 – Polinômios de segundo grau com termos cruzados**

NVA	Forma do polinômio
1	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2$
2	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_1u_2$
3	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2 + a_7u_1u_2 + a_8u_1u_3 + a_9u_2u_3$
4	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2 + a_7u_4 + a_8u_4^2 + a_9u_1u_2 + a_{10}u_1u_3 + a_{11}u_1u_4 + a_{12}u_2u_3 + a_{13}u_2u_4 + a_{14}u_3u_4$
5	$\bar{G}(U) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_2 + a_4u_2^2 + a_5u_3 + a_6u_3^2 + a_7u_4 + a_8u_4^2 + a_9u_5 + a_{10}u_5^2 + a_{11}u_1u_2 + a_{12}u_1u_3 + a_{13}u_1u_4 + a_{14}u_1u_5 + a_{15}u_2u_3 + a_{16}u_2u_4 + a_{17}u_2u_5 + a_{18}u_3u_4 + a_{19}u_3u_5 + a_{20}u_4u_5$

Diante disso, pode-se generalizar a quantidade de coeficientes para cada tipo de polinômio, e com isso, conhecer o número mínimo de pontos que o plano precisa ter para que a regressão seja feita com sucesso. Em alguns tipos de planos de experiência a quantidade de pontos supera o mínimo necessário. Isso é irrelevante, pois no processo de regressão por mínimos quadrados, essa quantidade excedente é incorporada às matrizes e a regressão é feita normalmente. Assim, o número de coeficientes pode ser calculado por:

Polinômio de primeiro grau:  $NCOEF = NVA + 1$

Polinômio de segundo grau sem termos cruzados:  $NCOEF = 2 \cdot NVA + 1$

Polinômio de segundo grau com termos cruzados:  $NCOEF = \frac{(GP + NVA)!}{GP! \cdot NVA!}$

sendo que:  $GP$  e  $NVA$  são, respectivamente, o grau do polinômio e o número de variáveis aleatórias.

#### 4.7.7.2 Regressão por mínimos quadrados

Uma vez escolhida a forma da superfície de resposta e tendo já o vetor de respostas mecânicas, o próximo passo é fazer a regressão via método dos mínimos quadrados para obter os coeficientes do polinômio aproximador. O vetor de respostas é composto por uma resposta mecânica para cada ponto do plano de experiência.

A regressão consiste em minimizar a distância entre as respostas dadas pelo polinômio e as repostas obtidas com o modelo mecânico. Trata-se de um problema de otimização descrito da seguinte forma:

$$d = \min \sum_{i=1}^{np} (Q(U)_i - R_i)^2 \quad (4-40)$$

sendo que:  $Q(U)$  é o polinômio aproximador;  $R$  é o vetor de respostas mecânicas da estrutura;  $np$  é o número de pontos do plano de experiência.

O polinômio  $Q(U)$  também pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q(U) = \{A\}^T \{U\} \quad (4-41)$$

sendo que:  $\{A\}$  é o vetor de coeficientes do polinômio a ser determinado;  $\{U\}$  é o vetor com os termos do polinômio. Esses vetores podem ser escritos da seguinte forma:

$$\{A\}^T = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (4-42)$$

$$\{U\}_{GP1}^T = \{1, u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (4-43)$$

$$\{U\}_{GP2, s/ t.c.}^T = \{1, u_1, u_1^2, u_2, u_2^2, \dots, u_n, u_n^2\} \quad (4-44)$$

$$\{U\}_{GP2, c/ t.c.}^T = \{1, u_1, u_1^2, u_2, u_2^2, \dots, u_n, u_n^2, u_1 u_2, \dots, u_{n-1} u_n\} \quad (4-45)$$

sendo que: as legendas  $s/ t.c.$  e  $c/ t.c.$  representam, respectivamente, sem e com termos cruzados.

Diante disso, a função de minimização passa a ser escrita como:

$$d = \min \sum_{i=1}^{np} \left[ \left( \{A\}^T \{U\}_i - R_i \right) \left( \{U\}_i^T \{A\} - R_i \right) \right] \quad (4-46)$$

O ponto de mínimo é obtido anulando-se o gradiente de  $d$  em relação aos coeficientes  $a_i$  do vetor  $\{A\}$ , ou seja:

$$\nabla d = \frac{\partial d \{A\}}{\partial \{A\}^T} = 0 \quad (4-47)$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior, tem-se:

$$\nabla d = \sum_{i=1}^{np} \left( \{U\}_i \{U\}_i^T \{A\} - R_i \{U\}_i \right) = 0 \quad (4-48)$$

A partir da Equação 4-48 pode-se escrever as seguintes relações:

$$[P] = \sum_{i=1}^{np} \left( \{U\}_i \{U\}_i^T \right) \quad (4-49)$$

$$\{V\} = \sum_{i=1}^{np} \left( R_i \{U\}_i \right) \quad (4-50)$$

Assim, o vetor com os coeficientes do polinômio aproximador são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações algébricas:

$$[P]\{A\} = \{V\} \quad (4-51)$$

O processo apresentado até aqui permite determinar os coeficientes do polinômio da forma tradicional, isto é, considerando a mesma importância para cada ponto do plano. Nesse caso, não aparece na formulação, mas o fator-peso que pondera cada ponto é unitário, para que dessa forma, a importância dos pontos seja sempre a mesma. Kaymaz & McMahon (2005) propuseram uma maneira de incorporar a importância de cada ponto do plano de experiência na regressão, de modo a construir uma aproximação melhor da equação de estado limite em torno do ponto de projeto. Esse processo foi adaptado neste trabalho para a utilização com polinômios de primeiro e segundo graus.

O primeiro passo é selecionar entre os pontos do plano, qual deles fornece a melhor aproximação para a equação de estado limite, isto é,  $G(U) \approx 0$ . Assim, tem-se:

$$Y = \min |G(U)| \quad (4-52)$$

O próximo passo é calcular o vetor com os fatores-peso de cada ponto:

$$w_i = e^{\left(\frac{-G(U)_i - Y}{Y}\right)} \quad (4-53)$$

Em seguida, os fatores-peso são usados na regressão, de modo que cada ponto do plano de experiência é ponderado pelo seu respectivo peso, refletindo sua importância na montagem da superfície de resposta. Assim, pontos muito distantes fornecem pouca influência, pois  $w_i$  é próximo de zero, ao passo que pontos mais próximos influenciam mais, uma vez que  $w_i$  é mais próximo de 1. A matriz  $P$  e o vetor  $V$  ficam então da seguinte forma:

$$[P] = \sum_{i=1}^{np} (w_i \{U\}_i \{U\}_i^T) \quad (4-54)$$

$$\{V\} = \sum_{i=1}^{np} (w_i R_i \{U\}_i) \quad (4-55)$$

Os coeficientes da nova superfície são então obtidos pela Equação 4-51.

#### 4.7.7.3 Evolução das superfícies de respostas

Após a montagem da superfície de resposta, aplica-se o algoritmo HLRP e determina-se o ponto de projeto e o índice de confiabilidade. Esse processo é repetido até que a distância relativa entre dois pontos de projeto consecutivos seja menor do que uma tolerância pré-estabelecida de, por exemplo, 0,1%.

A estratégia de evolução do processo consiste em centrar o plano de experiência no ponto de projeto obtido na iteração anterior e construir a nova superfície de resposta a partir desse ponto, de modo que a aproximação da equação de estado limite vai sendo construída em conjunto com a busca do ponto de projeto (Figura 4-10).

Uma técnica alternativa foi desenvolvida para melhorar a precisão da aproximação em torno do ponto de projeto. Trata-se de diminuir a distância entre os pontos, aproximando-

os do centro do plano. No entanto, isso é feito somente depois que o ponto de projeto é encontrado. Dessa forma, primeiro deve ser feita a busca do ponto de projeto conforme explicado até agora e, após a convergência, o processo continua com a distância entre os pontos diminuída até nova convergência. A redução da distância entre os pontos é imposta pelo coeficiente  $m$ , que diminui de um valor fixo. Por exemplo, adota-se  $m = 3,0$  para a primeira busca do ponto de projeto. Após a convergência, adota-se  $m = 2,5$  e assim por diante. A Figura 4-11 ilustra esse processo.

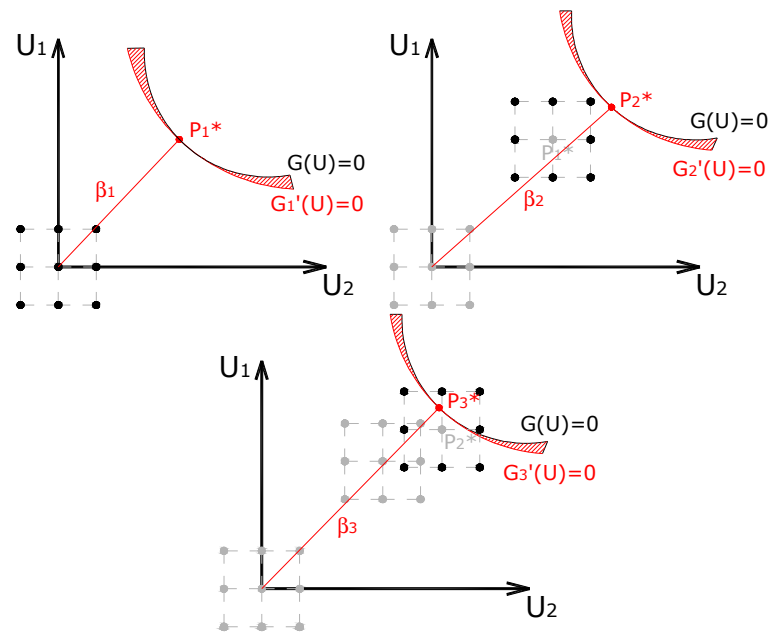


Figura 4-10 – Busca do ponto de projeto: abordagem clássica

O número de redivisões do plano é controlado de acordo com o erro desejado, de modo que podem, a princípio, ser feitas quantas redivisões forem necessárias. No entanto, existem duas desvantagens desse procedimento. A primeira delas consiste no aumento do custo computacional, visto que cada nova divisão do plano de experiência requer novas chamadas ao modelo de elementos finitos. A segunda desvantagem ocorre por conta da alta sensibilidade dos modelos não-lineares, pois para uma pequena perturbação imposta aos valores das variáveis aleatórias, é possível a alteração completa do cenário de falha anterior. Essa característica se torna mais evidente quando ocorrem, simultaneamente, modos de falha variados, ou seja, não há predominância de um determinado modo de falha sobre outro.

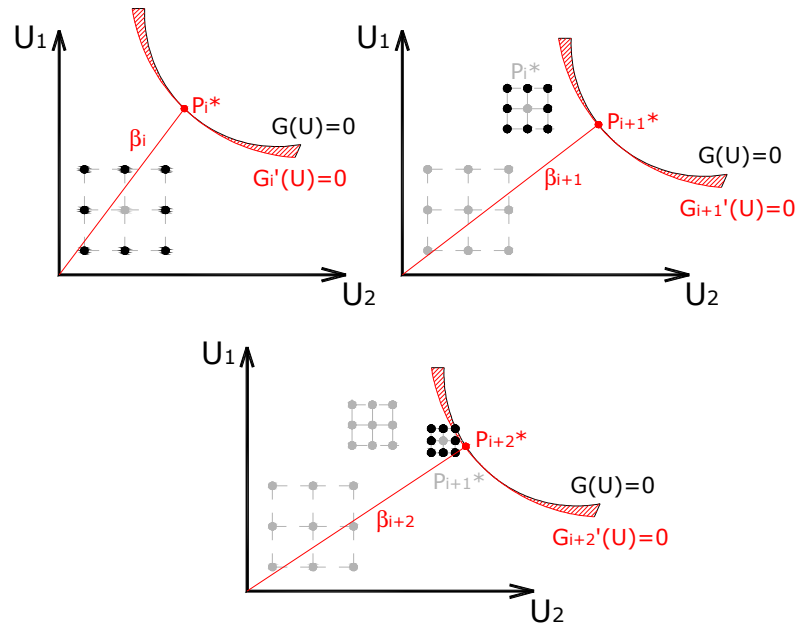


Figura 4-11 – Busca do ponto de projeto: abordagem adaptativa com redivisão do plano

## 4.8 Exemplos de Aplicação

A seguir, são apresentados alguns exemplos numéricos com o objetivo de mostrar a utilização dos modelos de confiabilidade implementados no programa computacional desenvolvido neste trabalho. Parte-se de situações simples, onde a equação de estado limite é analítica e explícita até os casos que mostram o acoplamento dos modelos de confiabilidade com o modelo mecânico desenvolvido.

### 4.8.1 Exemplo 1

Trata-se de um exemplo bastante simples definido por uma única equação de estado limite linear.

$$G(X) = X_1 - 0,496X_2 \quad (4-56)$$

As variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  são independentes e com distribuição normal de probabilidades. As estatísticas utilizadas, definidas pelas médias e os coeficientes de variação, são dadas por:

$$\mu_{x1} = 800; CV_{x1} = 5\%$$

$$\mu_{x_2} = 1000; CV_{x_2} = 20\%$$

Antes de apresentar os resultados, os métodos de superfícies de respostas foram divididos e nomeados de acordo com a seguinte legenda:

- SR1: superfície de resposta tradicional com função de primeiro grau;
- WR1: superfície de resposta definida com pesos na regressão numérica e com função de primeiro grau;
- SR2: superfície de resposta tradicional com função de segundo grau;
- WR2: superfície de resposta definida com pesos na regressão numérica e com função de segundo grau;

Os métodos utilizados para calcular a probabilidade de falha e o ponto de projeto foram: simulação de Monte Carlo (MC), *First Order Reliability Method* (FORM), *Second Order Reliability Method* (SORM), ambos com a técnica dos gradientes numéricos e as superfícies de respostas classificadas em SR1, WR1, SR2 e WR2. Os métodos que utilizaram polinômios de segundo grau foram, neste caso, considerados sempre sem o termo cruzado. O critério de parada das análises foi estabelecido por uma tolerância de 0,0001 em termos do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto obtidas entre duas iterações sucessivas.

É evidente a falta de necessidade em representar o problema com uma superfície de resposta, pois se trata de uma equação de estado limite explícita. Além disso, as funções de segundo grau também não significam, neste exemplo, nenhum tipo de melhoria nas respostas, visto que a equação de estado limite é linear. Porém, decidiu-se aplicar esses métodos também na resolução do problema, para verificar se os modelos eram capazes de chegar a uma superfície de resposta que representasse exatamente a equação de estado limite do problema e se, com isso, no caso das funções de segundo grau, os termos quadráticos eram anulados diretamente pelo método.

A Tabela 4-4 traz os resultados da análise de confiabilidade do problema, comparando as respostas para todos os métodos programados. A comparação é feita admitindo que a resposta da simulação de Monte Carlo pura é a exata, obtida a partir de 100.000 chamadas da equação de estado limite no programa StRAnD. As demais respostas foram obtidas com os modelos desenvolvidos. A coluna “NAEEL” representa o número de avaliações da equação de estado limite para se obter o ponto de projeto e indica a eficiência de cada método.



Verificou-se, para este exemplo, ótima aproximação de todos os métodos quando comparados com a resposta da simulação de Monte Carlo. O erro obtido para o índice de confiabilidade entre a resposta exata e as demais repostas foi da ordem de 0,19%. Quanto à eficiência dos métodos, verificou-se que a análise via FORM foi a mais rápida, com 6 avaliações da equação de estado limite. O SORM, para este caso, apresentou exatamente o mesmo resultado, porém um pouco mais caro do ponto de vista computacional, por conta da construção das curvaturas da equação de estado limite dadas em função das derivadas de segunda ordem da equação de estado limite. Fica claro, portanto, que por se tratar de uma função linear, não há a necessidade de se resolver o problema via SORM.

Todos os métodos baseados em superfícies de respostas utilizaram para esta análise o plano de experiência estrela, definido com 5 pontos no caso de duas variáveis aleatórias, que ao final de duas iterações completas resolveu o problema. O tempo de processamento gasto para cada método foi considerado desprezível.

**Tabela 4-4 – Resultados da análise de confiabilidade**

	$\beta$	$P_f$	$X_1^*$	$X_2^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	NAEEL
<b>MC</b>	2,83657	0,22800e <sup>-2</sup>	-	-	-	-	100.000
<b>FORM</b>	2,84215	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18729	0,37397	-0,92744	6
<b>SORM</b>	2,84215	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18559	0,37397	-0,92744	19
<b>SR1</b>	2,84216	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18729	0,37397	-0,92744	10
<b>WR1</b>	2,84216	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18729	0,37397	-0,92744	10
<b>SR2</b>	2,84216	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18729	0,37397	-0,92744	10
<b>WR2</b>	2,84216	0,22405e <sup>-2</sup>	757,48490	1527,18729	0,37397	-0,92744	10

Para mostrar a capacidade dos modelos de superfícies de resposta em representar adequadamente a equação de estado limite do problema, foram escritas logo abaixo as funções aproximadoras obtidas para o ponto de projeto com os métodos SR1, WR1, SR2 e WR2.

$$G_{SR1} = 1,0000000000000033X_1 - 0,496000000000003X_2 - 0,000000000021828 \quad (4-57)$$

$$G_{WR1} = 1,000000065333818X_1 - 0,495999986959216X_2 - 0,000069405100240 \quad (4-58)$$

$$G_{SR2} = 0,999999999998670X_1 - 0,496000000000103X_2 + 0,000000000000001X_1^2 + 0,000000000000001X_2^2 + 0,000000000586094 \quad (4-59)$$

$$G_{WR2} = 0,999996761127850X_1 - 0,495999573851816X_2 + \\ + 0,000000002152599X_1^2 - 0,00000000137642X_2^2 + 0,000888486946729 \quad (4-60)$$

Embora o método WR2 tenha apresentado algum valor para os termos quadráticos da equação de estado limite, estes ainda são insignificantes na avaliação da superfície de falha aproximada, retratando adequadamente a equação explícita. Apenas para verificação, no ponto de projeto, a equação de estado limite assume os seguintes valores:

$$G_{EXPLÍCITA} = 0,00000416$$

$$G_{WR2} = 0,00000416088$$

Com base nos valores apresentados, verifica-se que as respostas são praticamente as mesmas, evidenciando a qualidade final do método WR2 e, conseqüentemente, dos demais métodos apresentados.

#### 4.8.2 Exemplo 2

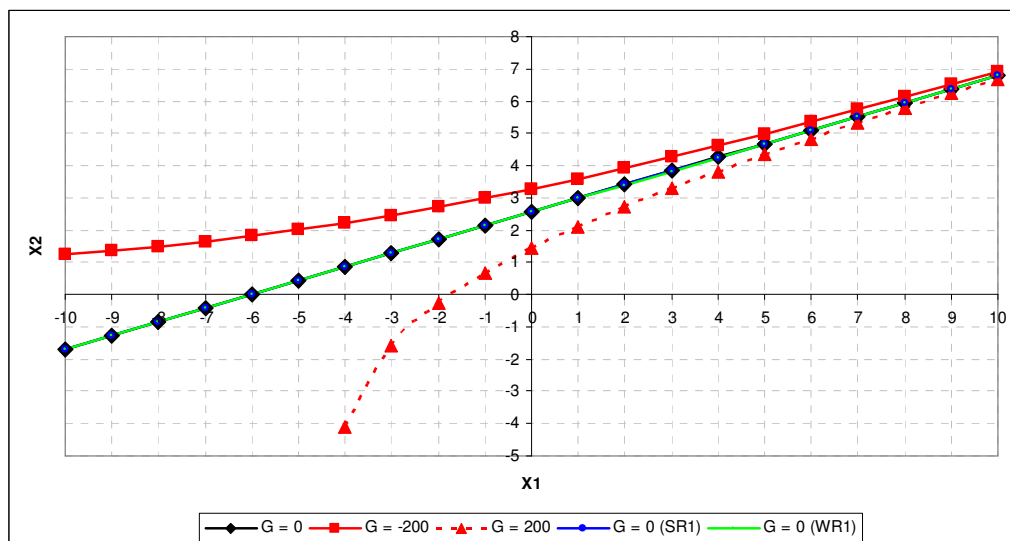
Neste exemplo, foi adotada uma equação de estado limite não-linear conforme empregada em Kim & Na (1997), com o objetivo de mostrar a capacidade dos métodos desenvolvidos.

$$G(X) = e^{(0,2X_1+6,2)} - e^{(0,47X_2+5)} \quad (4-61)$$

Novamente as variáveis aleatórias foram consideradas como sendo normalmente distribuídas e independentes, com médias zero e desvios-padrão unitários.

A legenda para os métodos de superfícies de respostas segue o mesmo padrão mostrado no exemplo anterior. O critério de parada da análise foi estabelecido por uma tolerância de 0,00001 em termos do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto obtidas entre duas iterações sucessivas.

A Figura 4-12 ilustra o traçado de algumas curvas para a função considerada quando  $G = 0$ ,  $G = -200$  e  $G = 200$  e para as superfícies de resposta obtidas com os métodos SR1 e WR1 quando  $G = 0$ .



**Figura 4-12 – Curvas da função analítica e das superfícies de falha para SR1 e WR1**

No estado limite, isto é, quando  $G = 0$  verifica-se que a função escolhida é linear. Porém, esse comportamento só é observado quando se chega à solução do problema, de modo que a não-linearidade da função é considerada no processo de busca pelo ponto de projeto. Conforme pode ser observado na Figura 4-12, as superfícies de resposta plotadas representam exatamente a equação de estado limite no ponto de projeto, mostrando assim a eficácia dos métodos.

A Tabela 4-5 mostra os resultados da análise de confiabilidade do problema para os métodos: simulação de Monte Carlo pura, FORM, SORM, SR1 e WR1, sendo adotados, portanto, somente polinômios lineares neste exemplo. Isso foi feito para verificar se as funções lineares seriam capazes de resolver o problema adequadamente, já que no estado limite, a função é linear. Além disso, é importante destacar que a técnica adaptativa de redivisão dos planos de experiência foi utilizada com o objetivo de verificar se há ou não a perda de qualidade da resposta para valores fixos do parâmetro  $m$ . O plano de experiência do tipo estrela foi utilizado aqui, conforme no exemplo anterior.

De maneira geral, os métodos apresentaram bom desempenho quando comparados com os resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo via programa StRAnD, conforme pode ser observado na coluna “Erro” da Tabela 4-5. Neste exemplo, alguns dos métodos de superfícies de resposta apresentaram maior precisão que o FORM e o SORM, mostrando sua qualidade.

**Tabela 4-5 – Resultados da análise de confiabilidade**

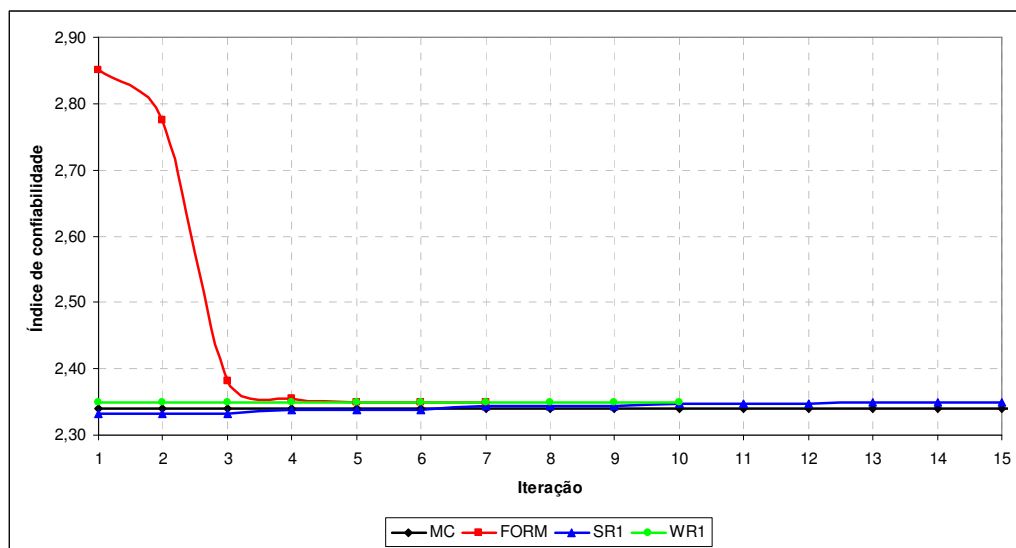
	$\beta$	$P_f$	$X_1^*$	$X_2^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Erro	NAEEL
<b>MC</b>	2,33891	$0,96700e^{-2}$	-	-	-	-	0%	100.000
<b>FORM</b>	2,34933	$0,94036e^{-2}$	-0,91979	2,16179	0,39151	-0,92017	0,443%	21
<b>SORM</b>	2,34933	$0,94036e^{-2}$	-0,91697	2,16697	0,38970	-0,92094	0,443%	34
<b>SR1</b>	2,34862	$0,94214e^{-2}$	-0,91966	2,16108	0,39158	-0,92015	0,413%	645 / 15*
<b>WR1</b>	2,34933	$0,94036e^{-2}$	-0,91966	2,16185	0,39146	-0,92020	0,443%	590 / 10*

A coluna “NAEEL” da Tabela 4-5 traz o número total de avaliações da equação de estado limite para a convergência das respostas, ou seja, mostra a eficiência de cada método. Para os métodos de superfícies de resposta, a eficiência na busca do ponto de projeto está diretamente relacionada à escolha dos pontos determinísticos do plano de experiência e ao parâmetro  $m$ . Inicialmente, adotou-se  $m = 3,0$  (Guan & Melchers 2001) juntamente com a técnica adaptativa de redivisão dos planos de experiência. Essa técnica, conforme já explicado, reduz o parâmetro  $m$  de certo valor para cada análise convergida. Neste exemplo, adotou-se a redução de  $0,1$  para  $m$ , até um limite de  $0,1$ . Assim, as análises foram iniciadas com  $m = 3,0$  e prosseguiram com  $m = 2,9$ ,  $m = 2,8$  e assim por diante até o limite de  $m = 0,1$ .

Os métodos SR1 e WR1 apresentaram ótima estabilidade numérica, convergindo para todos os valores de  $m$ . Portanto, no total, foram necessárias 645 e 590 avaliações da equação de estado limite, respectivamente, para a resolução do problema. Os valores marcados com “\*” representam também o número de avaliações da equação de estado limite, porém adotando  $m = 0,1$ , isto é, se a análise começasse de antemão com esse valor de  $m$  seriam necessárias apenas 15 e 10 avaliações, respectivamente, para encontrar a solução final.

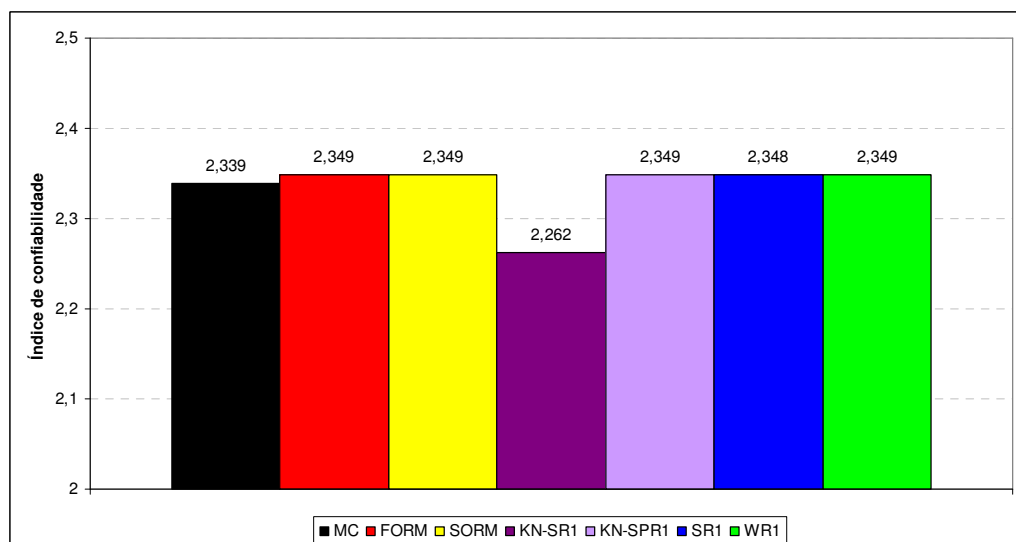
Grande destaque deve ser dado ao FORM e ao SORM que resolveram o problema diretamente através da técnica dos gradientes numéricos, com grande eficiência e precisão.

A Figura 4-13 mostra o processo de convergência dos métodos de superfície de resposta a partir de  $m = 0,5$  até  $0,1$ . É importante destacar a importância da técnica de redivisão dos planos desenvolvida, pois através do seu emprego foi possível observar a evolução das respostas à medida que a construção do plano mudava. Verificou-se que é importante fazer essa varredura para que se possa identificar realmente a melhor construção dos planos de experiência. Isso pode ser observado pela curva em azul (SR1), mostrando que, para este exemplo, os melhores valores para  $m$  seriam 0,4 e 0,3 respectivamente. Já para o método plotado em verde (WR1), a redivisão do plano não apresentou grandes mudanças.



**Figura 4-13 – Convergência das análises de confiabilidade**

Para efeito de comparação, a Figura 4-14 ilustra os valores finais do índice de confiabilidade do problema, onde também são apresentados os resultados obtidos por Kim & Na (1997). As novidades na legenda são: KN-SR1 e KN-SPR1 correspondem, respectivamente, aos resultados de Kim & Na (1997) com os métodos de superfície de resposta tradicional e com uma técnica desenvolvida pelos autores, chamada de pontos de técnica dos pontos projetados, ambos também com funções lineares para a montagem da superfície.



**Figura 4-14 – Índices de confiabilidade obtidos por todos os métodos considerados**

De acordo com os resultados obtidos, verificou-se que os métodos desenvolvidos apresentaram bom desempenho e que a técnica adaptativa de redivisão dos planos de experiência é importante para observar a variação das respostas em função do parâmetro  $m$ .

### 4.8.3 Exemplo 3

Este exemplo traz novamente uma função não-linear como equação de estado limite, porém com uma pequena modificação. Esta função foi analisada por Kim & Na (1997) e será utilizada aqui para verificar também o desempenho dos métodos desenvolvidos.

$$G(X) = e^{[0,4(X_1+2)+6,2]} - e^{(0,3X_2+5)} - 200 \quad (4-62)$$

As variáveis aleatórias foram consideradas com distribuição normal de probabilidades e independentes, com média nula e desvio-padrão unitário. A legenda para os métodos de superfície de resposta é a mesma dos exemplos anteriores. A tolerância adotada para o critério de convergência foi de 0,00001 em termos do índice de confiabilidade e coordenadas do ponto de projeto.

As curvas em preto e em vermelho da Figura 4-15 representam a função adotada, enquanto que as demais ilustram o comportamento das superfícies de falha obtidas com alguns métodos desenvolvidos. Neste caso, observa-se que a função escolhida é não-linear mesmo no estado limite ( $G = 0$ ) e que as aproximações lineares (SR1 e WR1) permitem boa representação somente na região do ponto de projeto, localizada onde as curvas se sobrepõem. Por outro lado, observa-se que, para este caso, o polinômio de segundo grau já permite uma melhor aproximação da equação de estado limite não só na vizinhança do ponto de projeto, mas também ao longo da função.

A Tabela 4-6 apresenta os resultados da análise de confiabilidade considerando todos os métodos do exemplo anterior e mais os métodos com superfícies de segundo grau, dados por SR2 e WR2. A comparação em termos do índice de confiabilidade foi feita considerando a simulação de Monte Carlo pura, obtida pelo StRAnD, como resposta exata. O número máximo de iterações permitido nas análises via métodos de superfície de resposta foi considerado igual a 100 e o plano de experiência adotado foi o estrela (5 pontos por construção de superfície).

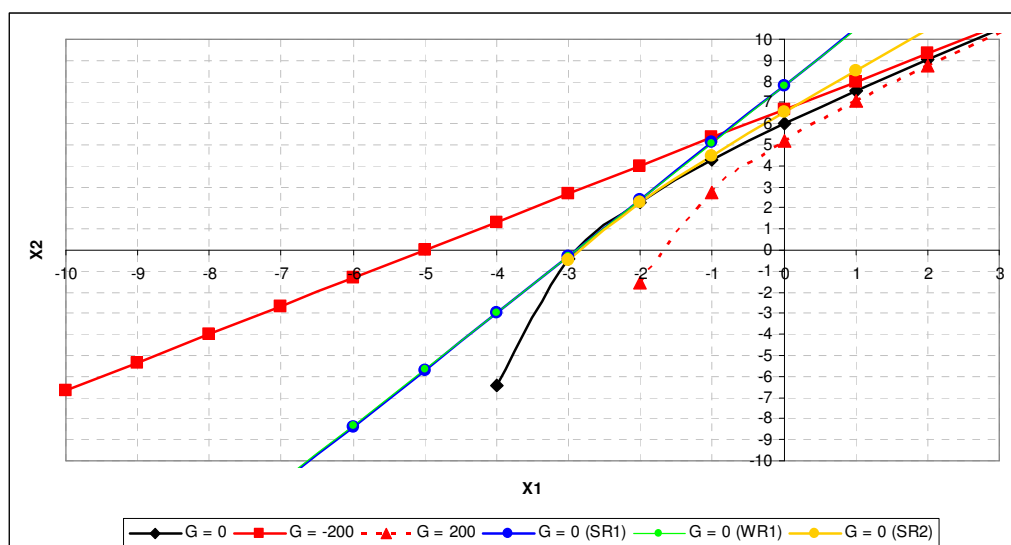


Figura 4-15 – Curvas da função analítica e das superfícies de falha para SR1, WR1 e SR2

Os resultados apresentaram desta vez um pouco mais de discrepâncias em relação à resposta exata, porém ainda assim foram considerados bons. Do ponto de vista da precisão, verificou-se que o SORM foi o melhor método, apresentando um erro de 0,446% e ainda com ótima eficiência. Isso ocorreu por conta da aproximação de segunda ordem que o método faz da equação de estado limite na vizinhança do ponto de projeto.

Tabela 4-6 – Resultados da análise de confiabilidade

	$\beta$	$P_f$	$X_1^*$	$X_2^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Erro	NAEEL
MC	2,67558	$0,37300e^{-2}$	-	-	-	-	0%	100.000
FORM	2,70990	$0,33652e^{-2}$	-2,53967	0,94532	0,93718	-0,34884	1,266%	21
SORM	2,68758	$0,35985e^{-2}$	-2,51876	0,93754	0,93718	-0,34884	0,446%	34
SR1	2,71044	$0,33597e^{-2}$	-2,54011	0,94569	0,93716	-0,34891	1,286%	775 / 20*
WR1	2,70990	$0,33652e^{-2}$	-2,53970	0,94526	0,93719	-0,34882	1,266%	585 / 15*
SR2	2,70990	$0,33652e^{-2}$	-2,53969	0,94530	0,93718	-0,34883	1,266%	410 / 10*
WR2	2,70990	$0,33652e^{-2}$	-2,53969	0,94530	0,93718	-0,34883	1,266%	410 / 10*

Os mesmos comentários feitos no exemplo anterior com relação ao número de iterações em função do parâmetro  $m$  são aplicados aqui. Da mesma forma,  $m$  variou de 3,0 até 0,1. Verificou-se que se fosse adotado diretamente  $m = 0,1$ , a convergência ocorreria com poucas avaliações da equação de estado limite, conforme mostram os números com “\*” na coluna NAEEL, sendo até mesmo em alguns casos bem mais rápido que o FORM e o SORM. Neste exemplo, destacaram-se os métodos SR2 e WR2 que utilizaram polinômios de segundo

grau na sua aproximação, mostrando grande eficiência na análise, porém menor precisão que o SORM.

A Figura 4-16 apresenta a convergência dos métodos. Aqui, é possível observar que o melhor valor para o parâmetro  $m$  é 0,1, pois se aproximou mais da resposta considerada exata, mostrando a relevância da técnica adaptativa de redivisão dos planos de experiência.

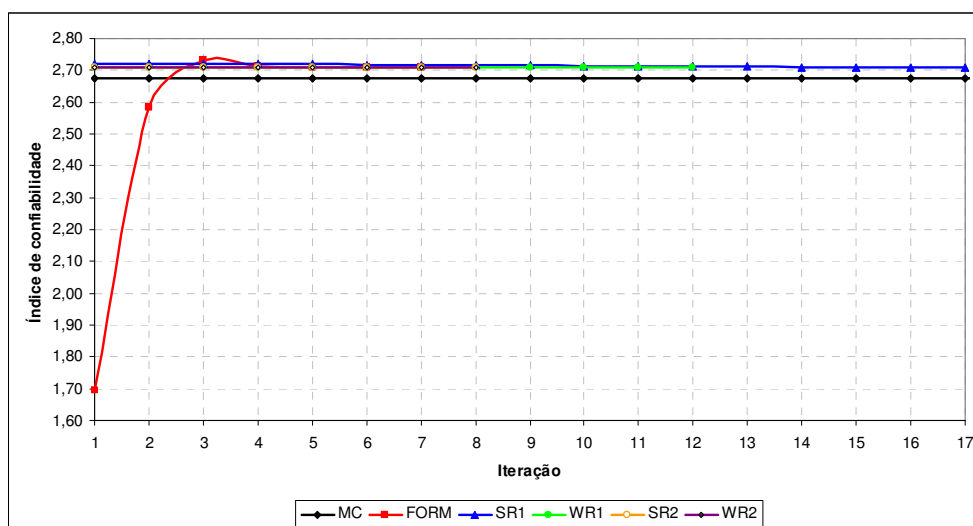


Figura 4-16 – Convergência das análises de confiabilidade

A Figura 4-17 mostra a comparação entre os índices de confiabilidade obtidos por todos os métodos e os resultados de Kim & Na (1997), dados por KN-SR1 e KN-SR2. O primeiro considera função linear e o segundo uma função de segundo grau tradicional para as superfícies de respostas.

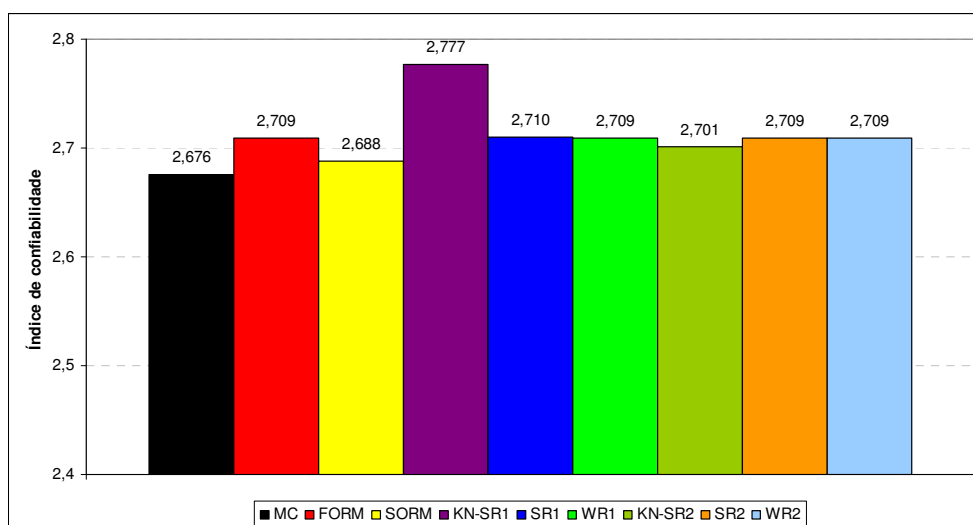


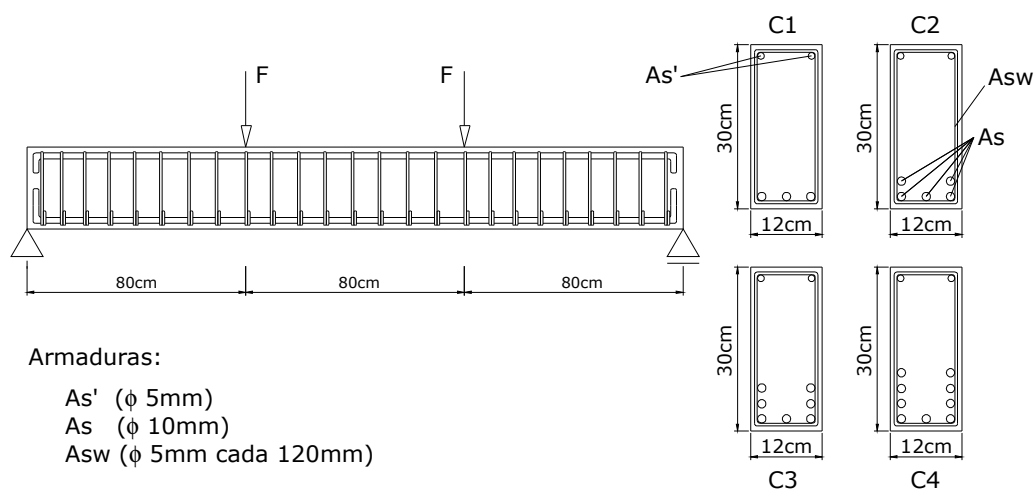
Figura 4-17 – Índices de confiabilidade obtidos por todos os métodos considerados



Com base nos resultados apresentados, mesmo para problemas com equações de estado limite não-lineares, os métodos apresentaram bom comportamento, podendo, portanto, ser utilizados em conjunto com o modelo mecânico em elementos finitos desenvolvido neste trabalho para análises de confiabilidade de estruturas, bem como com o acoplamento com os modelos de otimização.

#### 4.8.4 Exemplo 4

Este exemplo tem como objetivo utilizar a teoria da confiabilidade estrutural para verificar qual é o grau de influência da armadura transversal e do efeito de pino da armadura longitudinal em uma viga isostática (Figura 4-18). Para isso, a estrutura foi analisada considerando-se o modelo mecânico desenvolvido neste trabalho, com utilização das hipóteses de Euler-Bernoulli (B), Timoshenko puro (T) e Timoshenko com armadura transversal e efeito de pino (TSD), para quatro configurações diferentes de armadura longitudinal. A armadura transversal foi mantida constante.



**Figura 4-18 – Viga considerada na análise**

Primeiramente, foi realizada uma análise puramente mecânica considerando os três modelos para cada uma das quatro configurações de armadura. Os resultados foram apresentados em forma de curvas de força última  $\times$  deslocamento do meio do vão.

Os resultados mecânicos (Figura 4-19) mostraram que a consideração do modelo completo, TSD, proporcionou melhores resultados em termos de força última. Além disso, verificou-se que a contribuição da armadura transversal e do efeito de pino ficou mais evidenciada à medida que a danificação da estrutura aumentou com o carregamento, conforme

o esperado. Além disso, a maior contribuição ocorreu justamente após o escoamento das camadas mais inferiores de armadura longitudinal, evidenciando assim a capacidade dos modelos, fornecendo tanto aumento na resistência final da estrutura, quanto diminuição nos deslocamentos transversais.

Tabela 4-7 – Parâmetros adotados na análise

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência do aço	$f_Y$	500MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	196000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	19600MPa
Parâmetros de dano	$\epsilon_{d0}$	0,000065
	$A_T$	0,9097
	$B_T$	10398,7
	$A_C$	0,9781
	$B_C$	1276,4
Resistência à compressão do concreto	$f_C$	27MPa
Módulo de elasticidade do concreto	$E_C$	29100MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Número máximo de iterações	$It_{max}$	150
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20
Discretização da estrutura (elementos de igual comprimento)	Número de nós	7
	Número de elementos finitos	6

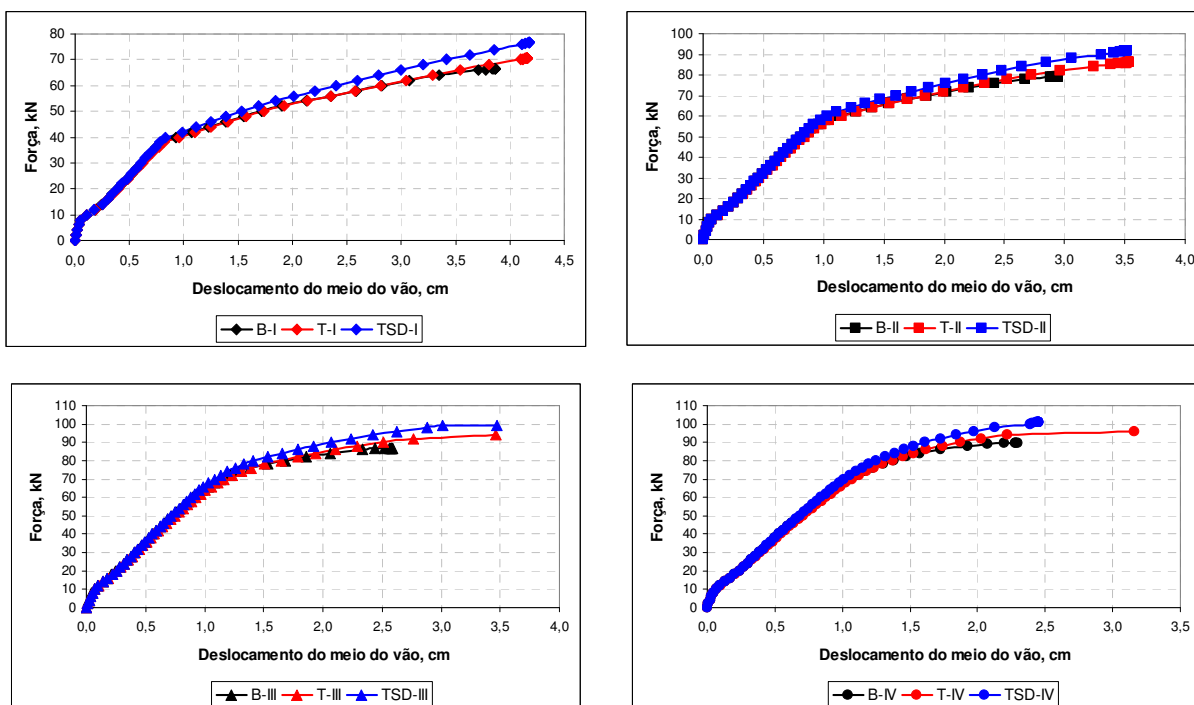


Figura 4-19 – Trajetória de equilíbrio das vigas

A Figura 4-20 mostra as diferenças percentuais em termos da força última obtida com cada modelo. Trata-se de uma medida determinística da influência da armadura

transversal e do efeito de pino sobre o comportamento global da estrutura. A curva em azul mostra a diferença percentual entre os modelos completo e de Bernoulli e a curva vermelha, as diferenças entre os modelos completo e de Timoshenko. Verificou-se que o modelo completo (TSD) foi, em média, 12,8% melhor em termos de força última que o modelo de Bernoulli e 6,2% que o modelo de Timoshenko.

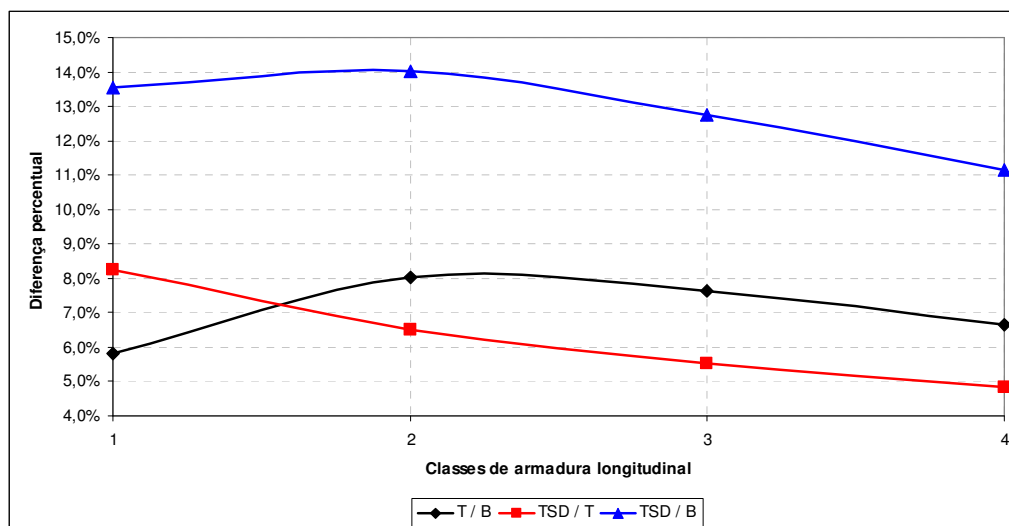


Figura 4-20 – Diferenças percentuais determinísticas entre os modelos

Para verificar essa influência levando-se em conta as incertezas nas resistências do concreto e do aço, foi realizada uma análise de confiabilidade para essa estrutura. Os métodos utilizados foram o FORM com a técnica dos gradientes numéricos e o método de superfície de resposta tradicional com polinômio de segundo grau sem termos cruzados. O plano de experiência adotado foi o estrela (5 pontos). A associação estatística utilizada foi: resistência do concreto com média 27MPa e desvio-padrão de 4,05 MPa; resistência do aço com média 500MPa e desvio-padrão de 40MPa. Ambas as variáveis aleatórias foram consideradas com distribuição normal de probabilidades e independentes. Neste caso, a técnica adaptativa de reestruturação do plano de experiência não foi utilizada, sendo adotado  $m = 3,0$ . A tolerância para a convergência em termos do índice de confiabilidade e do ponto de projeto foi de 0,5%. A equação de estado limite foi dada em termos da margem de segurança, de modo que a força aplicada foi considerada como uma variável determinística, com os seguintes valores: classe C1,  $P = 53kN$ ; classe C2,  $P = 63kN$ ; classe C3,  $P = 69kN$ ; classe C4,  $P = 72kN$ .

$$G(f_c, f_y) = P_{\text{último}} - P_{\text{aplicado}} \quad (4-63)$$

Os resultados da análise de confiabilidade foram mostrados em forma de gráficos de convergência do índice de confiabilidade para cada modelo mecânico considerado, conforme Figura 4-21. Verificou-se boa concordância entre o FORM e o método de superfície de resposta (RSM), atingindo praticamente o mesmo índice de confiabilidade em todos os casos. A exceção foi observada apenas para a classe C1 com o modelo completo, na qual foi encontrado um índice de confiabilidade de 3,91 e 3,42 para o FORM e o RSM, respectivamente. Isso ocorreu provavelmente por conta da maior dificuldade do modelo de dano em representar casos com baixa taxa de armadura longitudinal. Nesses casos, a fissuração tende a ser menos espalhada, porém com maior localização, o que vai contra a hipótese do modelo de dano. Já para maiores taxas de armadura, as fissuras são mais espalhadas, mas com menor abertura, o que se aproxima melhor da hipótese do modelo de dano considerado.

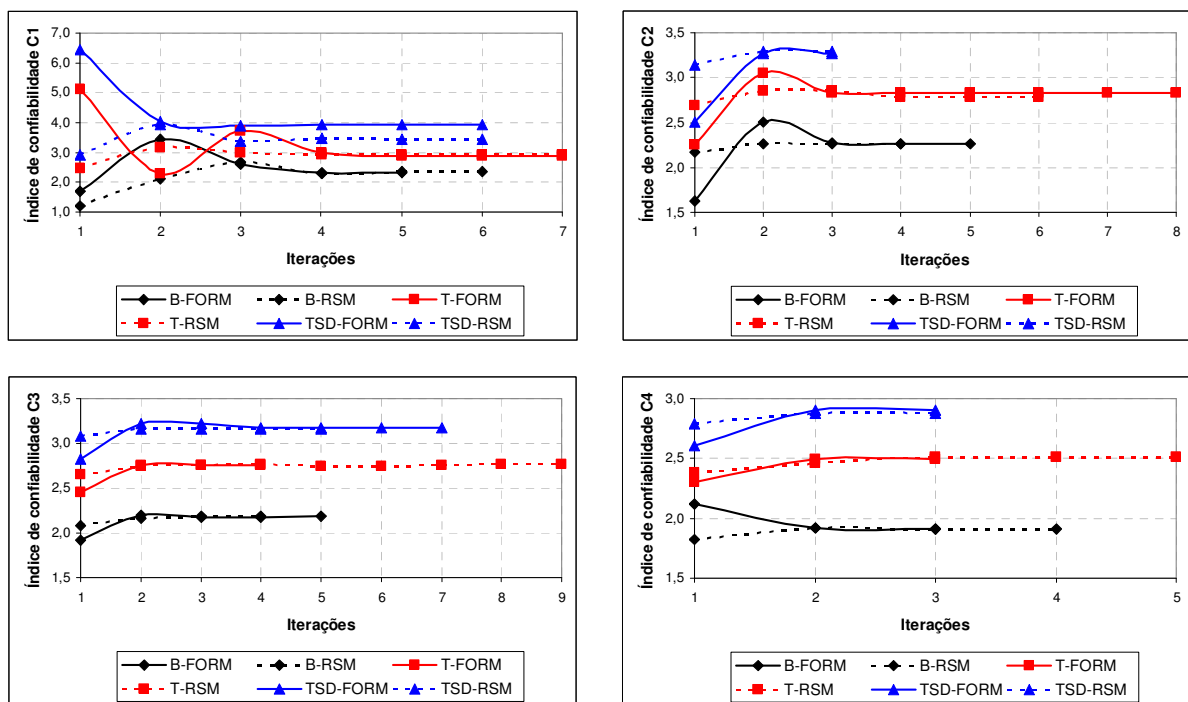


Figura 4-21 – Convergência do índice de confiabilidade

Além disso, foi possível verificar que o modelo completo apresentou sensivelmente maiores valores para o índice de confiabilidade que os modelos de Bernoulli e Timoshenko puro. Isso significa que para um mesmo valor de carga aplicada, a contribuição da armadura transversal e do efeito de pino foi visível para esta estrutura, evidenciando assim, sua importância no comportamento global de vigas em concreto armado.

Para efeito de comparação, foram plotadas as diferenças percentuais entre os modelos, do mesmo modo apresentado para a análise determinística. Verificou-se que a influência da armadura transversal e do efeito de pino, quando se consideram as incertezas nas resistências do concreto e do aço é ainda maior. Em média, observou-se com o modelo completo uma segurança cerca de 31,8% maior que a obtida com o modelo de Bernoulli e 14% maior que a obtida com o modelo de Timoshenko. Esses resultados foram praticamente o dobro dos resultados observados somente com a análise determinística. Dessa forma, conclui-se que a influência da armadura transversal e do efeito de pino é significativa no comportamento de vigas em concreto armado, devendo ser levadas em conta nas análises estruturais correntes.

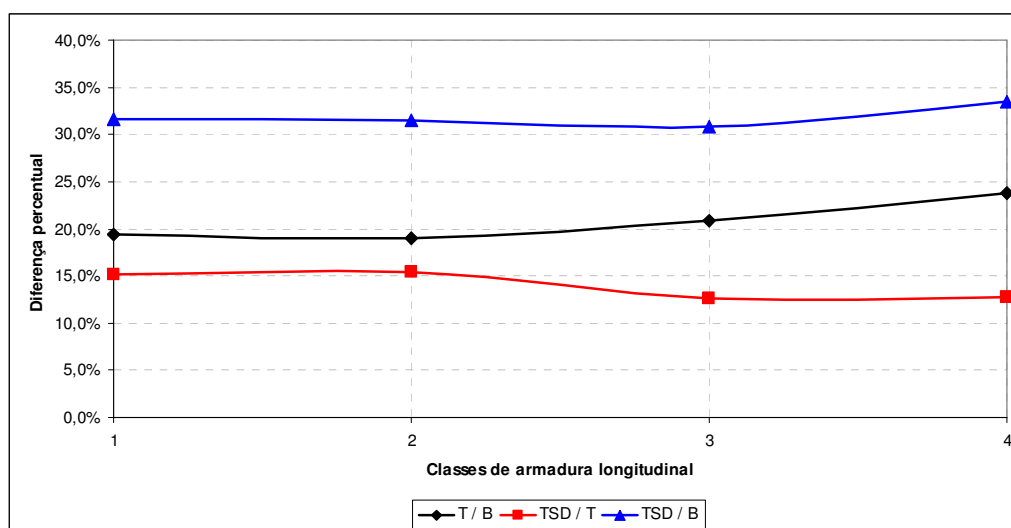


Figura 4-22 – Diferenças percentuais probabilísticas entre os modelos

Tabela 4-8 – Eficiência numérica dos métodos de confiabilidade

C1	B	T	TSD		C2	B	T	TSD
FORM	15	21	18		FORM	15	24	9
RSM	30	35	30		RSM	20	30	15
C3	B	T	TSD		C4	B	T	TSD
FORM	15	12	21		FORM	9	9	9
RSM	15	45	25		RSM	20	25	15

Um último resultado a ser discutido é a eficiência dos métodos de confiabilidade utilizados. A comparação foi feita em termos do número de chamadas do modelo de elementos finitos (NMEF) para a obtenção do ponto de projeto. Conforme esperado, a técnica

dos gradientes numéricos foi mais rápida que o método de superfície resposta, pois foram necessárias menos avaliações da equação de estado limite que no método de superfície de resposta. Problemas de perda de estabilidade da técnica em função do comportamento não-linear da estrutura não foram observados neste exemplo.

#### 4.8.5 Exemplo 5

O objetivo deste exemplo é mostrar o desempenho dos métodos de confiabilidade quanto a sua eficiência em atingir o ponto de projeto, bem como a influência da não-linearidade geométrica no cálculo da confiabilidade de sistemas. Para isso, a estrutura analisada é um pórtico simples submetido a uma carga horizontal de topo e uma carga vertical no centro da viga, conforme Figura 4-23.

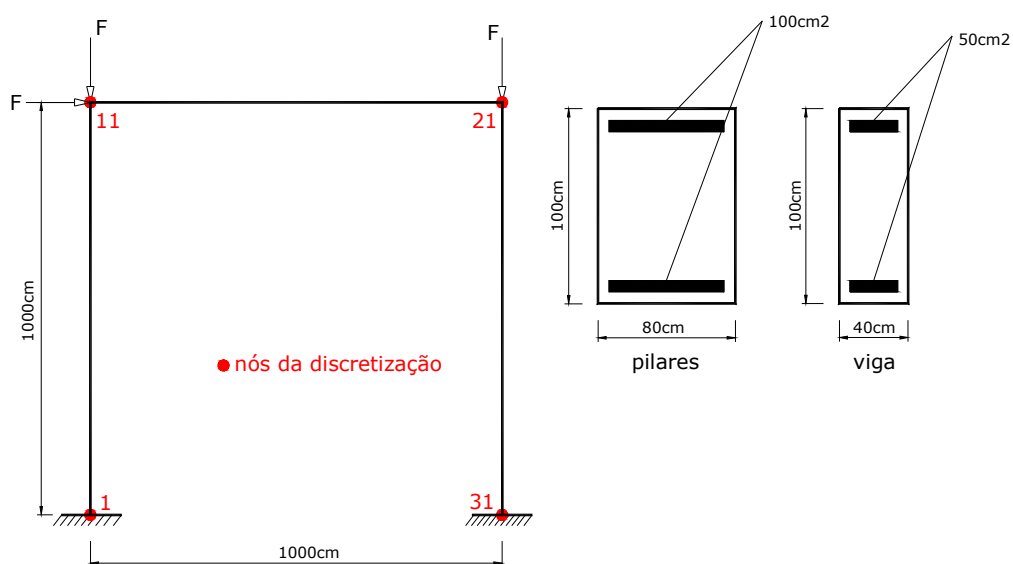


Figura 4-23 – Pórtico analisado, carregamentos e geometria

O pórtico foi discretizado em 30 elementos finitos, sendo 10 elementos para cada barra. A integração numérica foi realizada com 6 pontos de Gauss de comprimento e 20 pontos de altura para cada elemento finito da estrutura. O concreto e o aço foram representados pelos modelos de dano e elastoplástico respectivamente.

Foram adotadas 5 variáveis aleatórias nesta análise, todas com distribuição normal de probabilidades e independentes entre si. As cargas foram consideradas determinísticas com os valores de 750kN para carga horizontal e 1500kN para carga vertical.

Uma das variáveis aleatórias adotadas foi o módulo plástico do aço, que determina o quanto de encruamento positivo após o escoamento o aço terá. Isso significa que quanto maior for o módulo plástico, maior será a capacidade do aço de absorver tensões após o escoamento. Os coeficientes de variação foram considerados todos constantes e iguais a 10% para verificar, para esta estrutura e nas mesmas condições, quais são as variáveis mais importantes no estado limite de serviço em deslocamentos excessivos.

**Tabela 4-9 – Variáveis aleatórias adotadas**

Variável	Média	COV(%)
X <sub>1</sub> : resistência à compressão do concreto	30MPa	10
X <sub>2</sub> : resistência à tração do aço	500MPa	10
X <sub>3</sub> : cobrimento da armadura	5cm	10
X <sub>4</sub> : módulo elástico do aço	210000MPa	10
X <sub>5</sub> : módulo plástico do aço	21000MPa	10

Foram considerados dois modos de falha, dados pelo estado limite de serviço em deslocamento excessivo no topo do pórtico (modo 1) e no meio do vão da viga (modo 2). Em seguida, a confiabilidade do sistema, isto é, a falha ocorrendo no modo 1 ou no modo 2 foi obtida pelos limites de primeira e segunda ordem da probabilidade de falha. As equações de estado limite foram definidas como segue:

$$\begin{aligned} G_1(X) &= P_{d\lim,1} - 750 \\ G_2(X) &= P_{d\lim,2} - 1500 \end{aligned} \quad (4-64)$$

sendo que:  $P_{d\lim,i}$  corresponde à carga que leva a estrutura ao deslocamento limite permitido para o respectivo modo de falha 1 ou 2. Para este exemplo, foi adotado o valor de 5cm para ambos os deslocamentos limites.

O primeiro resultado apresentado a seguir corresponde à diferença entre os índices de confiabilidade de cada modo de falha individual para LG (linearidade geométrica) e NLG (não-linearidade geométrica), considerando os diversos métodos de confiabilidade.

As siglas adotadas para os métodos de confiabilidade tem o seguinte significado:

*SRi*: superfície de resposta convencional; *WRi*: superfície de resposta com pesos na regressão; *FORM*: método de primeira ordem com técnica dos gradientes numéricos; *i* é o grau do polinômio utilizado, isto é, 1 ou 2; *e* e *m* representam os planos de experiência estrela e mínimo, respectivamente.

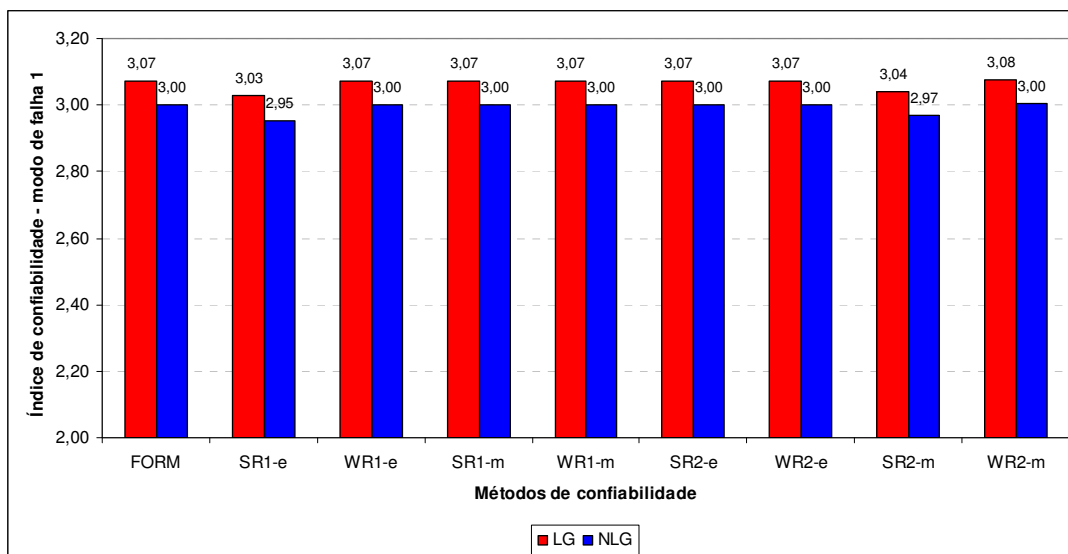


Figura 4-24 – Resultados dos índices de confiabilidade para o modo da falha 1

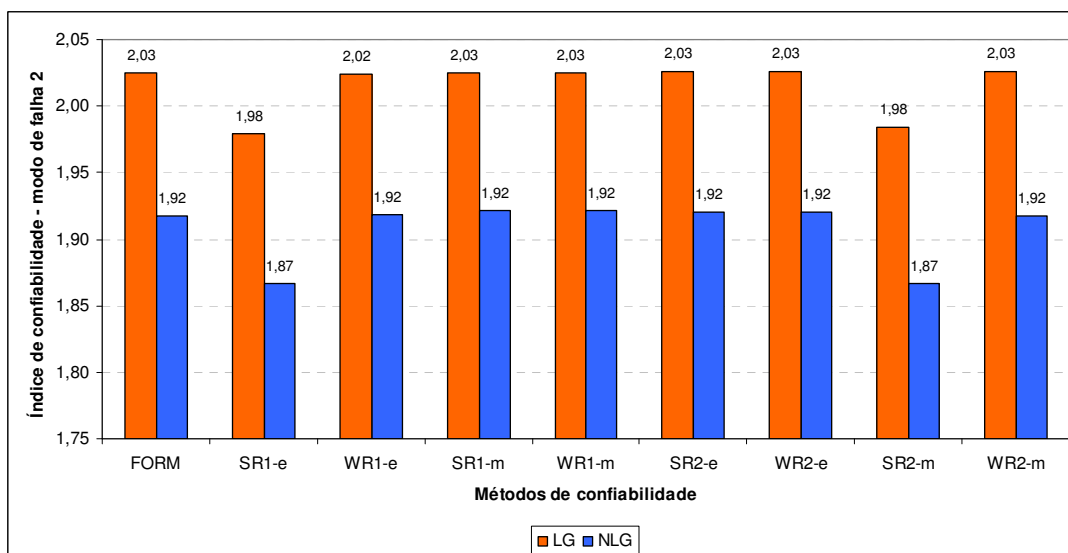


Figura 4-25 – Resultados dos índices de confiabilidade para o modo da falha 2

Verificou-se com esses resultados que o modo mais provável de falha ocorreu para o deslocamento excessivo da viga (modo 2). Em termos de probabilidade de falha, o problema ficou definido da seguinte forma:

*Linearidade geométrica:*

$$\text{Modo 1: } \beta = 3,07 \rightarrow P_f = 1,06 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Modo 2: } \beta = 2,03 \rightarrow P_f = 2,14 \cdot 10^{-2}$$



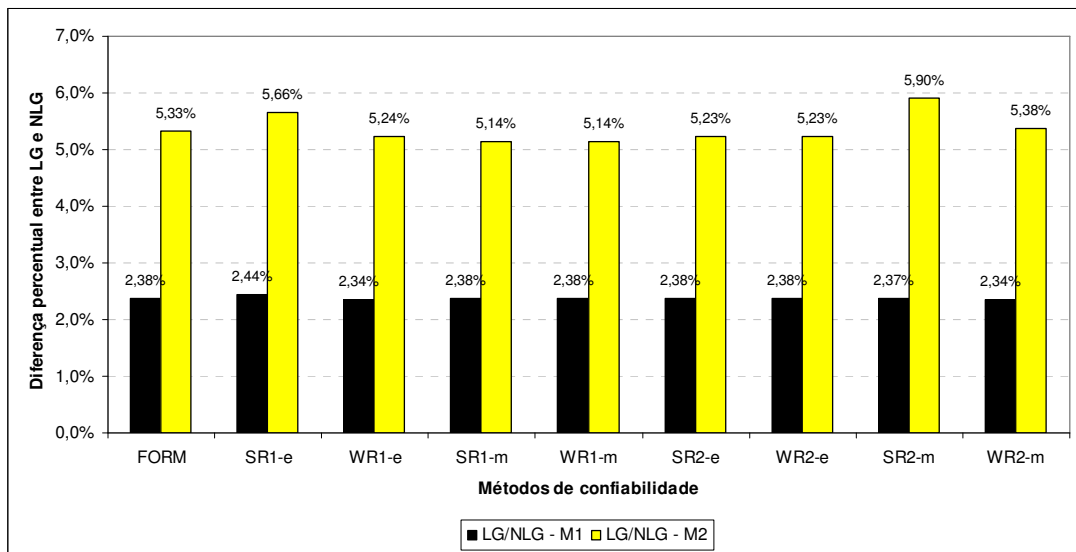
*Não-linearidade geométrica:*

Modo 1:  $\beta = 3,00 \rightarrow P_f = 1,35 \cdot 10^{-3}$

Modo 2:  $\beta = 1,92 \rightarrow P_f = 2,76 \cdot 10^{-2}$

Com isso, foi possível perceber que, para este caso, a não-linearidade geométrica exerceu maior influência sobre o segundo modo, ou seja, o deslocamento vertical da viga. É interessante fazer a seguinte comparação sobre a segurança do pórtico considerado: os pilares apresentaram o dobro do momento de inércia em relação à viga, bem como o dobro de armadura longitudinal; a viga recebeu o dobro de carregamento que o pilar. Nessas condições, a diferença entre as probabilidades de falha dos modos foi da ordem de 20 vezes. Com isso, fica claro a grande necessidade de se tratar o problema da segurança estrutural via probabilidades de falha.

A Figura 4-26 mostra a diferença percentual entre a LG e a NLG para cada modo de falha, evidenciando assim a maior sensibilidade do segundo modo quando utilizado o comportamento não-linear geométrico.



**Figura 4-26 – Diferença percentual entre os resultados**

Com relação aos métodos de confiabilidade, observou-se que foram capazes de atingir o ponto de projeto com boa precisão e pouca variação entre si. No entanto, a característica mais interessante sobre eles foi o tempo de processamento gasto para atingir a convergência (tolerância em beta e nas coordenadas do ponto de projeto de 0,5%), conforme ilustra a Figura 4-27.

O FORM aplicado com a técnica direta dos gradientes numéricos foi a mais eficiente, pois gastou no total (modo 1 + modo 2) 36 chamadas do modelo mecânico, ao passo que o WR2-m mostrou-se o menos eficiente com um total de 168 avaliações do MEF. Destaque deve ser dado aos métodos SR1-m e WR1-m, dados por superfícies de falha de primeiro grau, que além da precisão alcançada, mostraram também a melhor eficiência entre os modelos com superfícies de resposta. Em alguns casos verificou-se também a superioridade do método com fatores-peso na regressão, mostrando assim maior capacidade de precisão que o método convencional com pesos todos iguais a 1.

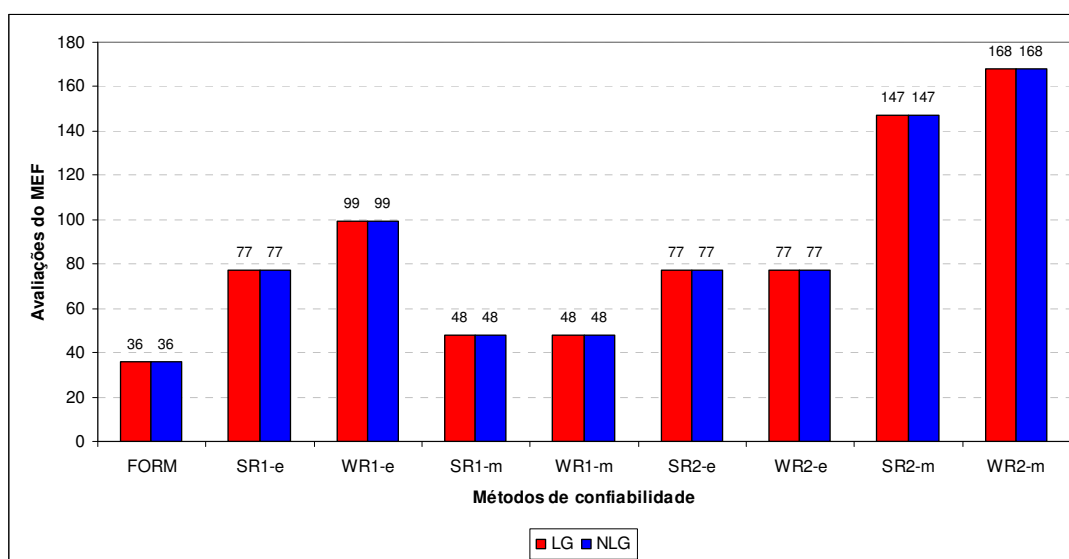


Figura 4-27 – Número de chamadas do modelo mecânico em elementos finitos para cada método

Em termos de tempo de processamento, o FORM gastou no total cerca de 5,5 minutos de processamento, ao passo que o WR2-m precisou de 27 minutos para obter a convergência na análise. Dessa forma, observa-se a grande vantagem do método com gradientes numéricos sobre os métodos de superfície de resposta em termos de velocidade de processamento. Tal característica é muito importante para a análise de exemplos mais complexos.

A sensibilidade das variáveis aleatórias foi obtida na análise e mostrou-se praticamente a mesma para LG e NLG, variando um pouco entre os modos. A Tabela 4-10 mostra os valores dessa sensibilidade de cada variável na probabilidade de falha.

Para o modo de falha 1 a variável que mais influenciou a probabilidade de falha foi o módulo de elasticidade do aço ( $X_4$ ), ao passo que para o modo 2, a variável mais importante foi a resistência do aço ( $X_2$ ).

**Tabela 4-10 – Sensibilidades das variáveis aleatórias**

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
<b>LG – modo 1</b>	2,57%	0,24%	1,65%	95,49%	0,05%
<b>NLG – modo 1</b>	2,59%	0,26%	1,70%	95,39%	0,05%
<b>LG – modo 2</b>	1,40%	97,00%	0,47%	0,08%	1,03%
<b>NLG – modo 2</b>	1,50%	96,92%	0,53%	0,09%	0,95%

Todas as variáveis apresentaram sensibilidade positiva, com exceção de  $X_3$  e  $X_5$ , ou seja, cobertura da armadura e módulo plástico do aço, revelando, portanto, que acréscimos em seus valores provocam acréscimo também na probabilidade de falha. Esse resultado é interessante, pois de fato o aumento do cobrimento da armadura diminui a seção útil da peça, resultando em menor capacidade resistente da mesma. Com relação ao módulo plástico do aço, quanto menor seu valor, mais próximo o aço fica de um comportamento elásto-plástico perfeito após o escoamento, garantindo assim maior ductilidade à estrutura. A pequena sensibilidade das demais variáveis mostram que estas poderiam ser substituídas por seus valores determinísticos sem causar perdas consideráveis na análise da confiabilidade dessa estrutura.

Finalmente, a confiabilidade do sistema foi dada pela condição de união entre os dois eventos de falha (modo 1 ou modo 2). Dessa forma tem-se os valores dos limites de primeira e segunda ordem da probabilidade de falha do sistema, dados pelo FORM:

*Linearidade geométrica:*

$$2,1402 \cdot 10^{-2} \leq P_f \leq 2,2442 \cdot 10^{-2} \quad (\text{limites de primeira ordem})$$

$$\beta_{\text{médio, sistema}} = 2,015$$

$$2,2393 \cdot 10^{-2} \leq P_f \leq 2,2428 \cdot 10^{-2} \quad (\text{limites de segunda ordem})$$

$$\beta_{\text{médio, sistema}} = 2,006$$

*Não-linearidade geométrica:*

$$2,7608 \cdot 10^{-2} \leq P_f \leq 2,8922 \cdot 10^{-2} \quad (\text{limites de primeira ordem})$$

$$\beta_{\text{médio, sistema}} = 1,907$$

$$2,8842 \cdot 10^{-2} \leq P_f \leq 2,8899 \cdot 10^{-2} \quad (\text{limites de segunda ordem})$$

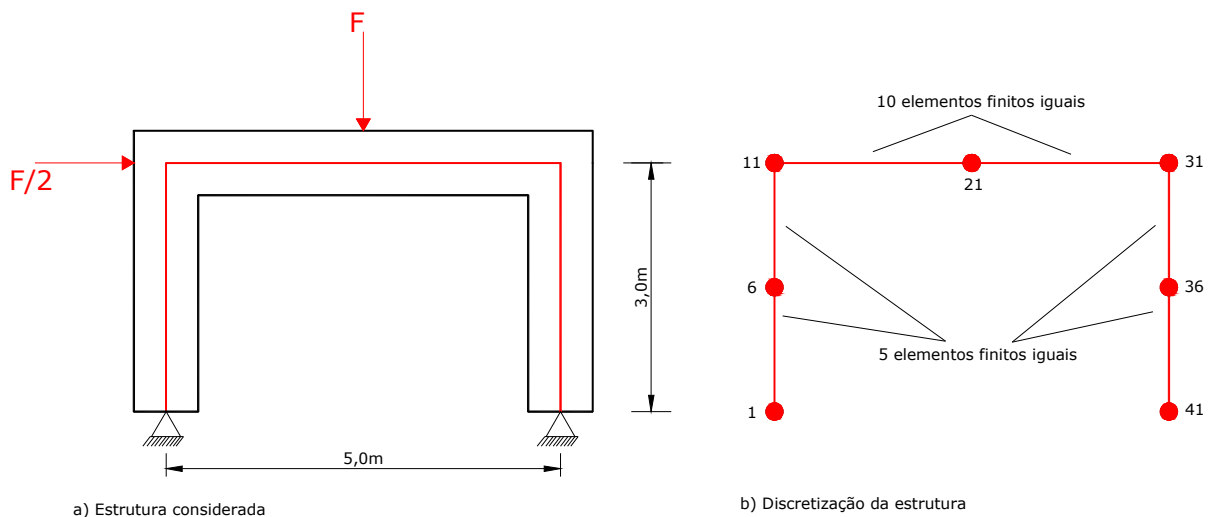
$$\beta_{\text{médio, sistema}} = 1,897$$

Os resultados mostraram a grande importância de se considerar a não-linearidade geométrica na análise da segurança de pórticos em concreto armado, bem como a grande

vantagem do FORM com a técnica dos gradientes numéricos. Concluiu-se, portanto, que os modelos foram capazes de representar adequadamente a confiabilidade do sistema e que estão aptos a serem empregados em análises de otimização.

#### 4.8.6 Exemplo 6

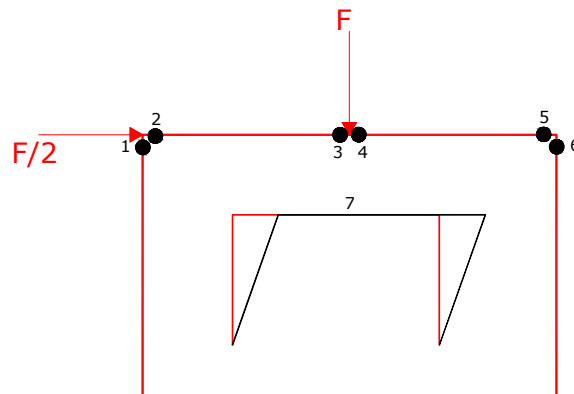
A estrutura analisada neste exemplo consiste em um pórtico simples em concreto armado, submetido a uma força vertical concentrada no meio do vão e uma força horizontal concentrada no topo do pilar esquerdo. Esse pórtico constituído de dois pilares e uma viga foi discretizado em um total de 40 elementos finitos, sendo que para cada pilar foram adotados 10 elementos e para a viga um total de 20 elementos. Os detalhes de geometria, carregamento e discretização da estrutura estão mostrados na Figura 4-28.



**Figura 4-28 – Geometria, carregamento e discretização do pórtico considerado**

O objetivo do exemplo é obter as probabilidades de ocorrência para todos os modos de falha possíveis desse pórtico, construindo as curvas de estado limite individuais e, em seguida, obter a probabilidade de falha do sistema, levando em conta as possíveis combinações dos modos que levam a estrutura ao colapso. Além disso, essa verificação é feita a partir de três possibilidades diferentes de modelagem mecânica: Euler-Bernoulli linear geométrico (LG), Euler-Bernoulli não-linear geométrico (NLG) e Timoshenko com contribuição da armadura transversal e efeito de pino não-linear geométrico (TSD-NLG).

A Figura 4-29 ilustra os possíveis modos de falha considerados nesta análise.



d) Modos de falha possíveis

**Figura 4-29 – Modos de falha possíveis do pórtico**

Os critérios de falha foram definidos em função das deformações limites de  $-3,5\%$  para o concreto à compressão e  $10\%$  para o aço tracionado das armaduras longitudinais em todos os modos de 1 a 6. O sétimo modo de falha corresponde à perda de estabilidade do pórtico, sendo dado pela singularidade da matriz de rigidez global montada a cada iteração do processo incremental.

O comportamento não-linear do concreto e do aço foram levados em conta pelos respectivos modelo de dano de Mazars (1984) e modelo elastoplástico com encruamento isótropo.

O pórtico em concreto armado foi dimensionado para valores nominais de força de 200kN na vertical (F) e 100kN na horizontal (F/2). Souza (2009) apresentou uma relação entre valores nominais e média para solicitações permanentes, na qual:

$$\begin{aligned}\mu_p &= 1,05 \cdot F_N \\ COV_p &= 10\%\end{aligned}\tag{4-65}$$

sendo que:  $\mu_p$  é a média da solicitação;  $F_N$  é o valor nominal da solicitação, isto é, aquele valor encontrado pelo projetista na contagem das cargas atuantes sobre a estrutura;  $COV$  é o coeficiente de variação.

Foram consideradas 3 variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas:

- Resistência do concreto: média 30,0MPa e coeficiente de variação de 15%;
- Resistência do aço: média 565,8MPa e coeficiente de variação de 8%;
- Força aplicada P: média 210kN e coeficiente de variação de 10%.

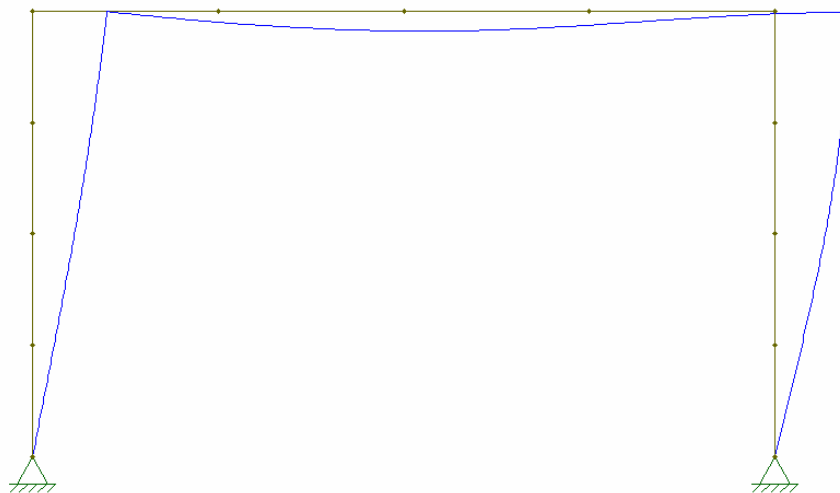
Para obtenção das curvas de estado limite individuais, o modelo mecânico-probabilístico via elementos finitos e método das superfícies de resposta com polinômio de primeiro grau foi utilizado. A probabilidade de falha de cada modo foi determinada forçando a condição de falha na posição desejada. Mesmo que a falha fosse atingida em outra posição, a análise mecânica não era interrompida, de modo a atingir a condição de falha para o modo desejado. Com isso, as curvas individuais foram construídas em função das variáveis aleatórias do problema.

As equações de estado limite utilizadas para construção das curvas de falha foram dadas em função da força máxima resistente do pórtico referente ao modo considerado e da força aplicada, conforme segue:

$$G_{i=1,7}(f_c, f_y, P) = P_{ULT_{i=1,7}}(f_c, f_y) - P_{i=1,7} \quad (4-66)$$

Na determinação das curvas individuais dos modos de falha, para cada obtenção de um candidato ao ponto de projeto de um determinado modo, 4 chamadas do modelo mecânico foram feitas ( $NVA + 1$ ), o que é equivalente ao método direto FORM com uso da técnica dos gradientes numéricos. Dessa forma, o custo computacional na análise via superfície de respostas foi o mesmo comparado ao FORM.

A seguir, são apresentadas as distribuições dos esforços internos solicitantes, bem como a forma deformada da estrutura para  $F = 200\text{kN}$  e  $F/2 = 100\text{kN}$ . As unidades do diagrama de momentos fletores é kN e metro.



**Figura 4-30 – Configuração deformada da estrutura**

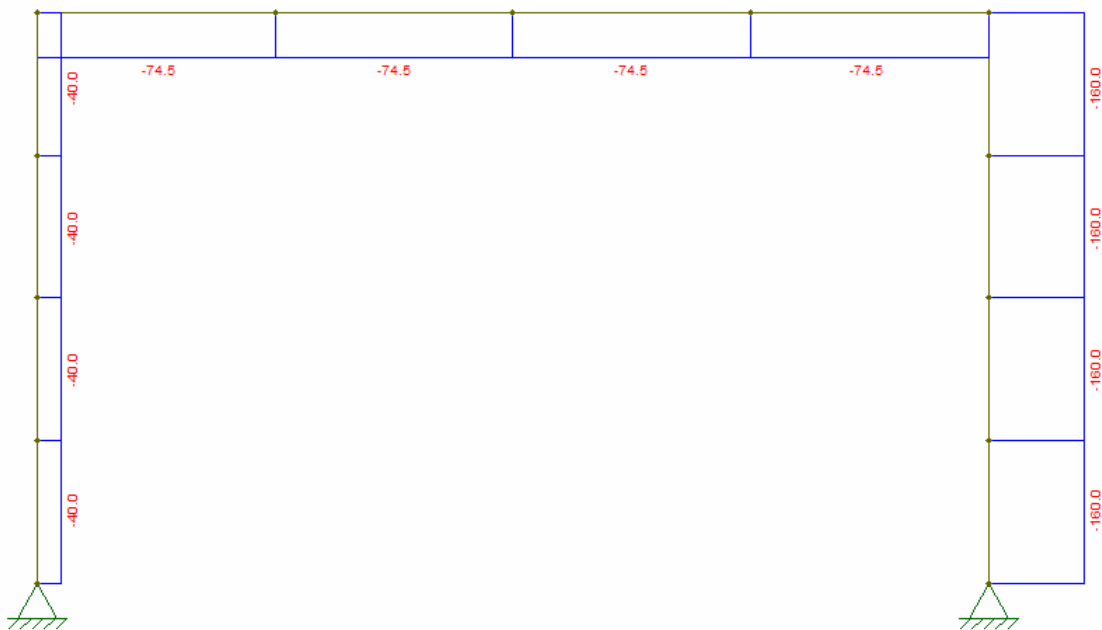


Figura 4-31 – Diagrama de força normal

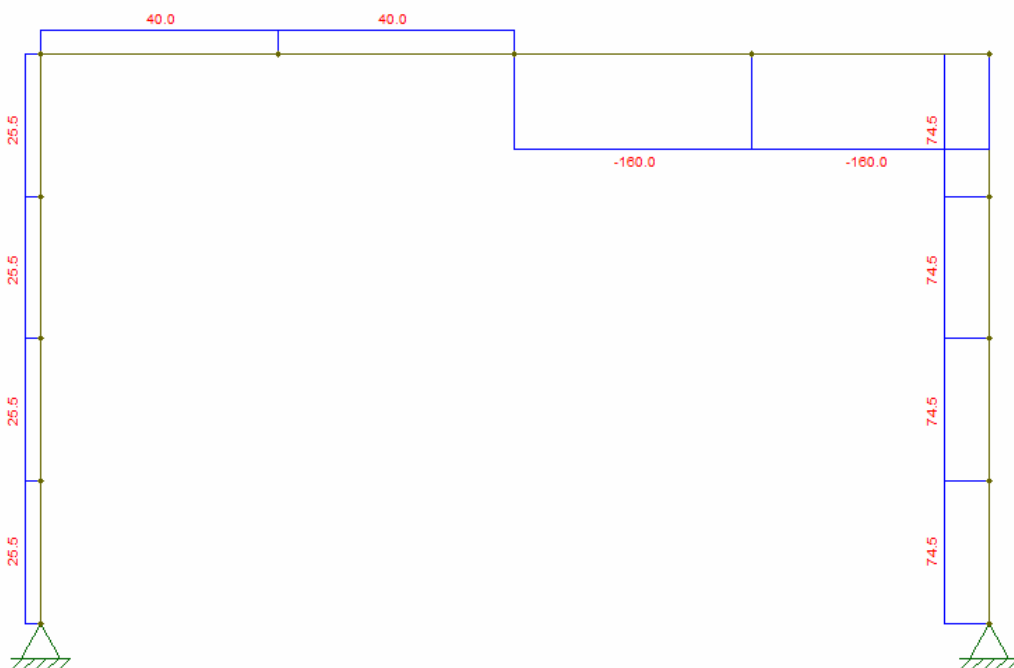


Figura 4-32 – Diagrama de força cortante

A Figura 4-34 traz o detalhamento das armaduras e as dimensões dos elementos estruturais obtidas para este exemplo. O dimensionamento foi realizado segundo os métodos semi-probabilísticos atuais, considerando, portanto, minoração das resistências do concreto e

do aço pelos coeficientes parciais com valores de 1,4 e 1,15 respectivamente, e também a majoração das ações pelo coeficiente parcial de 1,4.

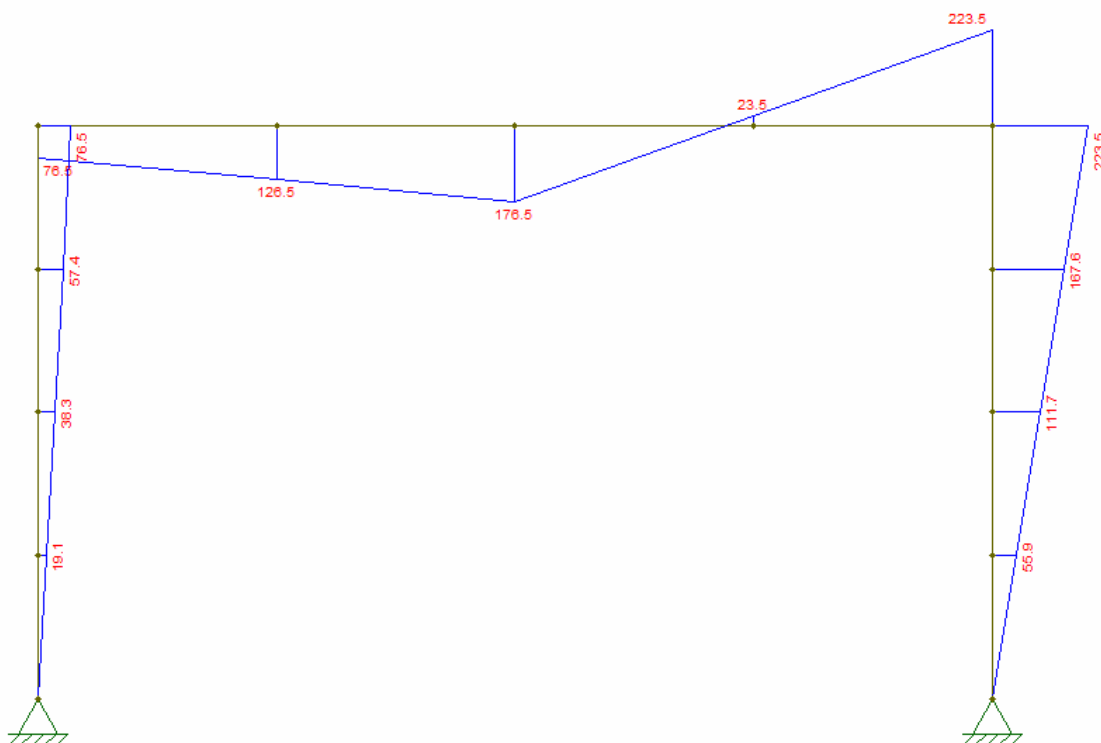
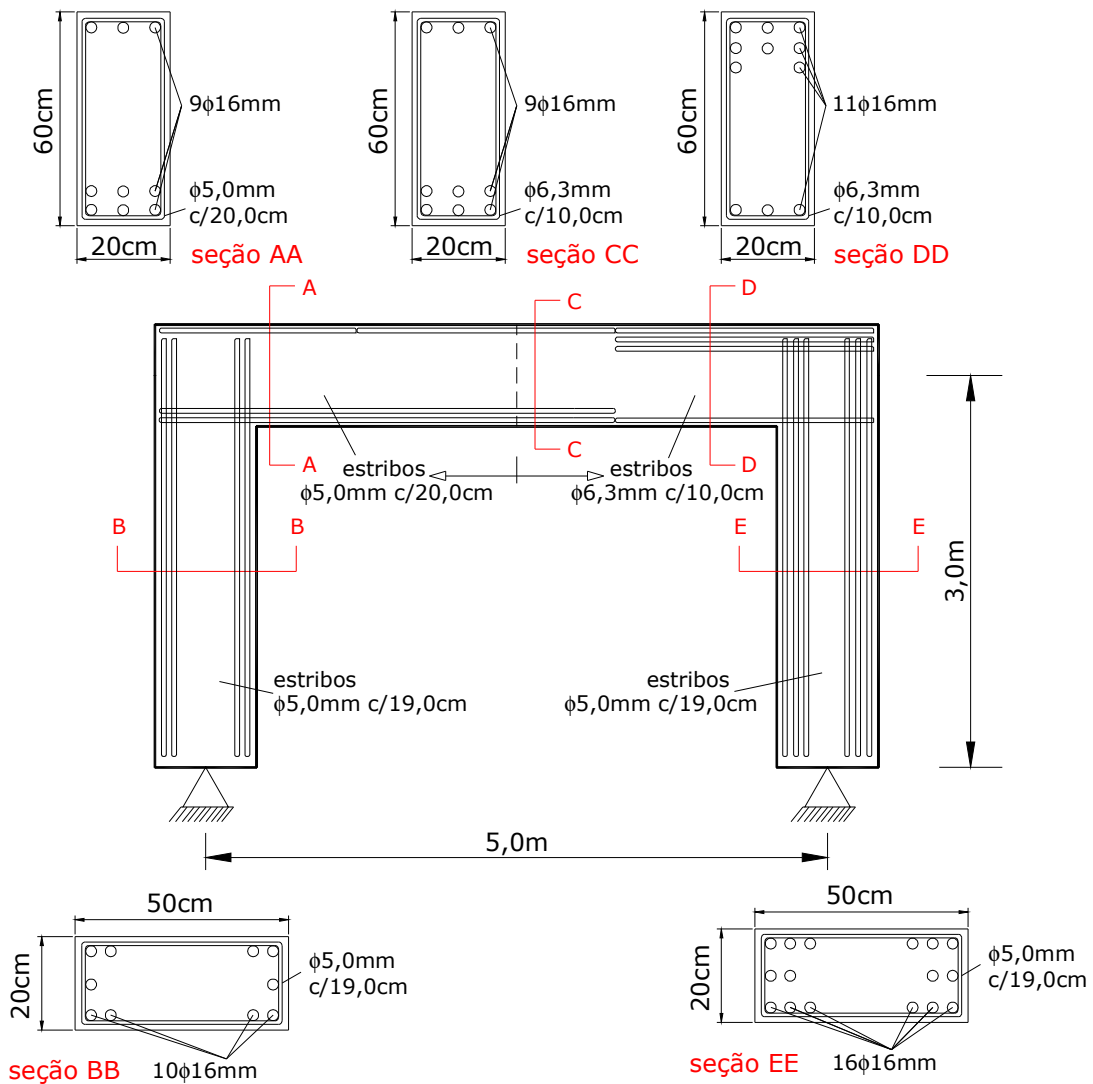


Figura 4-33 – Diagrama de momento fletor

É importante comentar que o detalhamento apresentado na Figura 4-34 é suficiente para alimentar o programa de elementos finitos desenvolvido neste trabalho, não contemplando, portanto, detalhes como ancoragens nos apoios, ganchos e emendas por traspasse conforme requer o bom projeto.

Primeiramente, foi realizada uma análise mecânica da estrutura, com o objetivo de obter os valores de força última para cada modo de falha, fixando-se as variáveis aleatórias com seu valor médio. Para a integração numérica, foram adotados 6 pontos de Gauss no comprimento de cada elemento finito e 20 pontos na altura de cada elemento. As forças foram aplicadas em incremento iguais de 10kN para vertical e 5kN para horizontal, respeitando dessa forma, a proporcionalidade entre elas. Os parâmetros de dano foram calibrados para cada valor de resistência do concreto de maneira automática ao longo da análise. Para o comportamento elastoplástico do aço, adotou-se módulo plástico igual a 1% do valor do seu módulo de elasticidade dado por 196000MPa. O módulo de elasticidade do concreto foi calculado através da expressão da ABNT NBR 6118:2003, dada por  $5600\sqrt{f_c}$ .





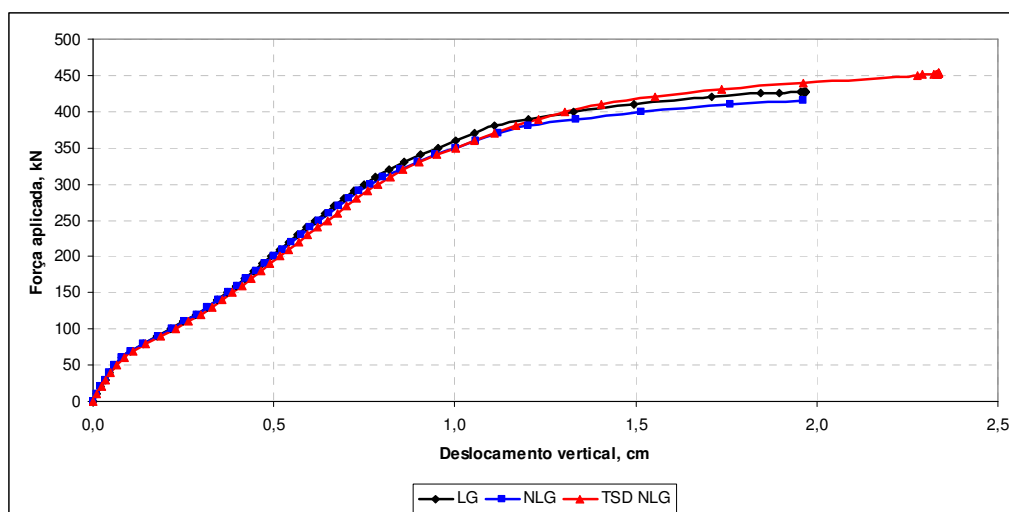
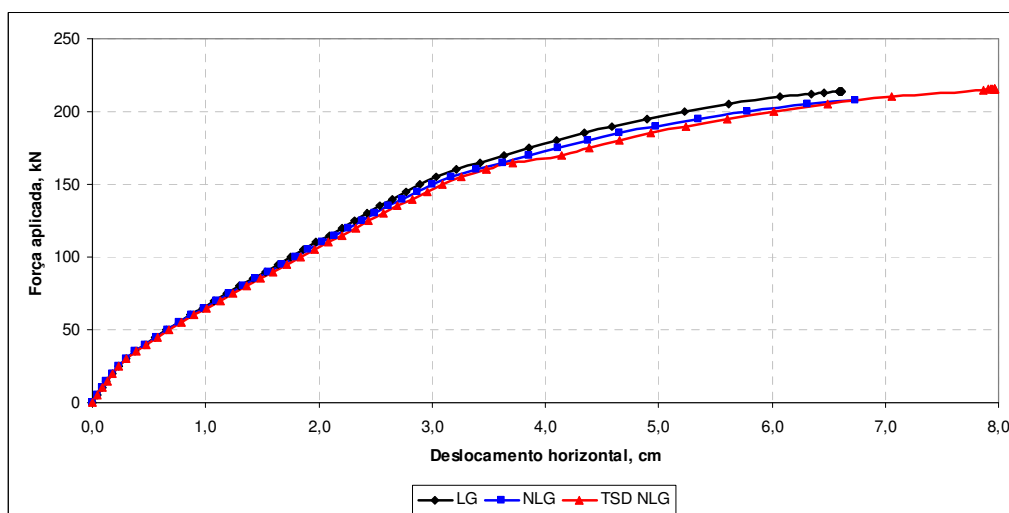
**Figura 4-34 – Dimensões e detalhamento dos elementos estruturais**

Observou-se que para todos os modos de falha, com exceção do modo 6 (ruptura do topo do pilar direito), a força última foi igual à força de perda de estabilidade do pórtico dada pelo modo 7. Isso significa que antes mesmo de ocorrer falha em qualquer uma das seções especificadas, o pórtico perde estabilidade e entra em colapso. Dessa forma, não foi possível determinar as probabilidades de falha para os modos 1, 2, 3, 4 e 5, pois estes requerem um estado de carregamento maior do que o estado que desestabiliza o pórtico, impossibilitando ao programa obtê-los, pois a matriz de rigidez se torna singular. Esse comportamento foi observado para os três tipos de modelagem mecânica (LG, NLG e TSD-NLG). A seguir, são apresentados os valores de força última obtidos na análise mecânica:

**Tabela 4-11 – Valores de força última (em kN) para cada modo de falha**

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
<b>LG</b>	427,48	427,48	427,48	427,48	427,48	357,76	427,48
<b>NLG</b>	415,00	415,00	415,00	415,00	415,00	350,21	415,00
<b>TSD-NLG</b>	452,49	452,49	452,49	452,49	452,49	367,02	452,49

As Figuras 4-35 e 4-36 mostram a trajetória de equilíbrio dos pontos de aplicação das forças para o modo de falha 7.

**Figura 4-35 – Diagrama força × deslocamento vertical do nó 21****Figura 4-36 – Diagrama força × deslocamento horizontal do nó 11**

Esse resultado permitiu definir que os modos importantes para esta estrutura foram somente os modos 6 e 7. É interessante comentar que o pórtico apresentado possui um grau de

redundância somente, de modo que a ocorrência da falha somente no modo 6, não conduz a estrutura ao colapso, mas apenas a torna isostática. Por conta disso, um estado de carregamento um pouco maior, conforme observado na Tabela 4-11 foi suficiente para garantir a perda de estabilidade global da estrutura, levando-a ao colapso.

A análise de confiabilidade foi, portanto, realizada somente considerando 2 modos de falha, de forma que a falha do sistema foi dada diretamente pelo modo 7, em função do colapso para este caso antes da falha nos outros modos. As figuras a seguir ilustram a configuração das curvas de estado limite individuais dos modos 6 e 7 no espaço normal-padrão. Para plotá-las, fixou-se a resistência do concreto no ponto de projeto, variando-se as demais variáveis aleatórias.

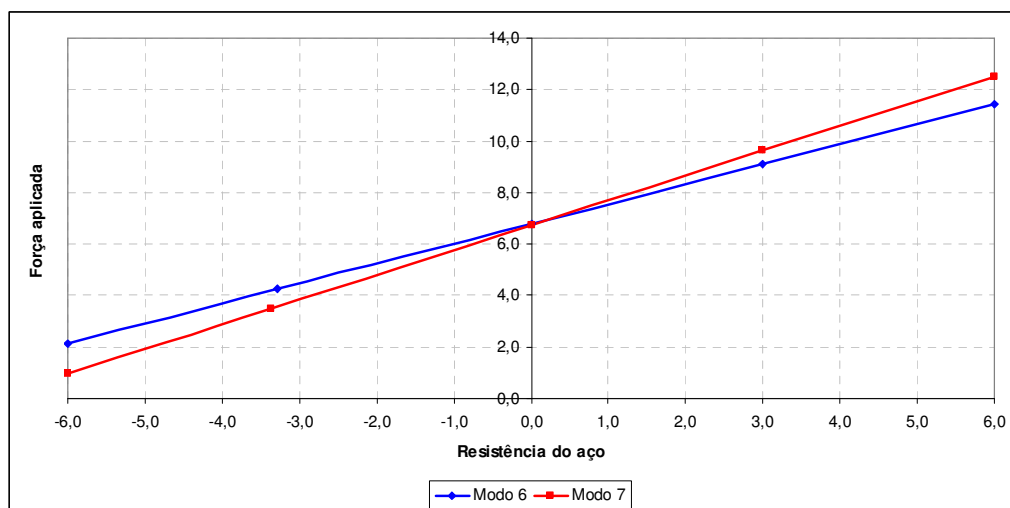


Figura 4-37 – Equações de estado limite considerando LG

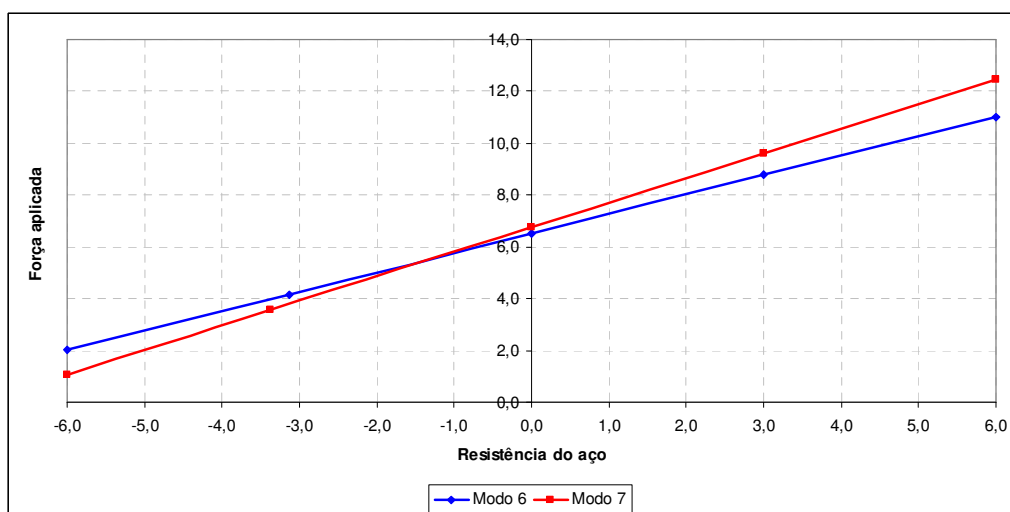


Figura 4-38 – Equações de estado limite considerando NLG

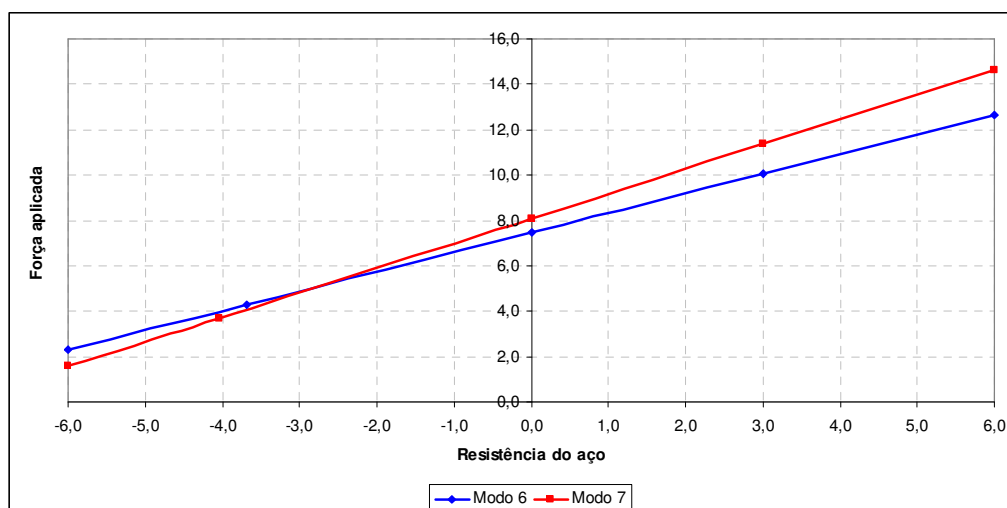


Figura 4-39 – Equações de estado limite considerando TSD-NLG

Os resultados da análise de confiabilidade estão mostrados na Tabela 4-12. Observou-se que em todos os modos e para todas as modelagens diferentes, a sensibilidade das variáveis aleatórias apresentou mesma ordem de grandeza, sendo estas consideradas, portanto, importantes na determinação da probabilidade de falha do sistema. Conforme era esperado, o modo 7 determinou a probabilidade de falha da estrutura, pois quando este ocorre, a falha por esmagamento do concreto comprimido no topo do pilar esquerdo (modo 6) já ocorreu.

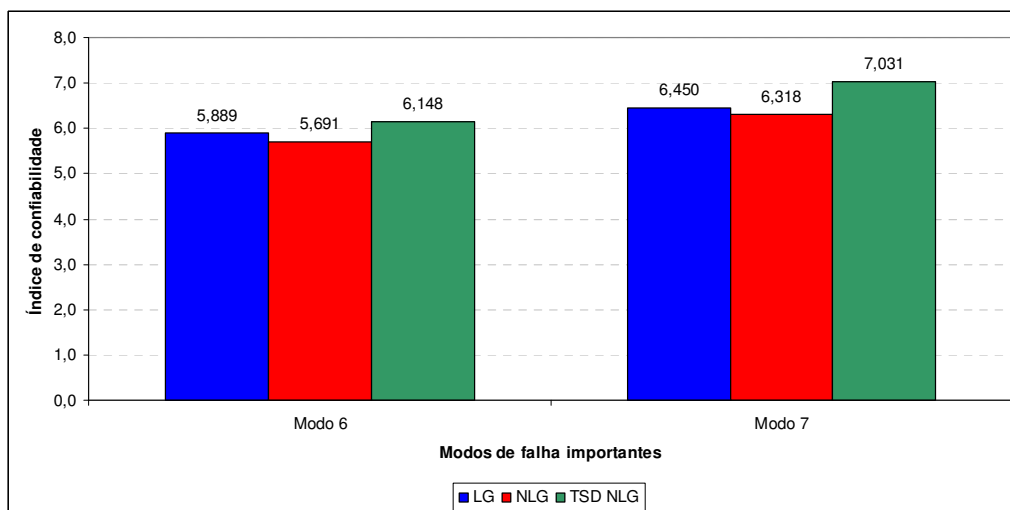
Tabela 4-12 – Pontos de projeto, sensibilidades das variáveis e probabilidades de falha

		$f_c$ (MPa)	$f_s$ (MPa)	P (kN)	$\alpha_c$ (%)	$\alpha_s$ (%)	$\alpha_p$ (%)	$P_f$
LG	Modo 1	19,09	417,11	299,06	16,93	31,19	51,88	$1,94e^{-9}$
	Modo 2	10,95	413,48	283,74	43,06	27,29	29,65	$5,61e^{-11}$
NLG	Modo 1	19,66	424,46	297,44	16,27	30,18	53,55	$6,33e^{-9}$
	Modo 2	12,04	413,26	284,56	39,89	28,52	31,59	$1,32e^{-10}$
TSD-NLG	Modo 1	19,08	398,94	299,81	15,57	36,04	48,39	$3,91e^{-10}$
	Modo 2	10,17	383,31	287,84	39,24	32,97	27,79	$1,02e^{-12}$

Apenas para efeito de comparação, a Figura 4-40 traz os valores dos índices de confiabilidade de cada modo considerado para as três modelagens utilizadas.

Os resultados apresentaram-se coerentes com os valores obtidos para as forças últimas na análise mecânica, apontando o modelo de Timoshenko com consideração dos efeitos de pino, armadura transversal e não-linearidade geométrica como sendo o mais

“seguro”. A consideração do equilíbrio da estrutura na posição deslocada, premissa da não-linearidade geométrica, provocou uma pequena redução na segurança do pórtico, mostrando ser necessário sua consideração na análise de estruturas aperticadas. Vale lembrar que este exemplo tratou de um pórtico simples com apenas 3 metros de altura, onde já foi possível verificar o efeito da não-linearidade geométrica.



**Figura 4-40 – Comparação entre os índices de confiabilidade**

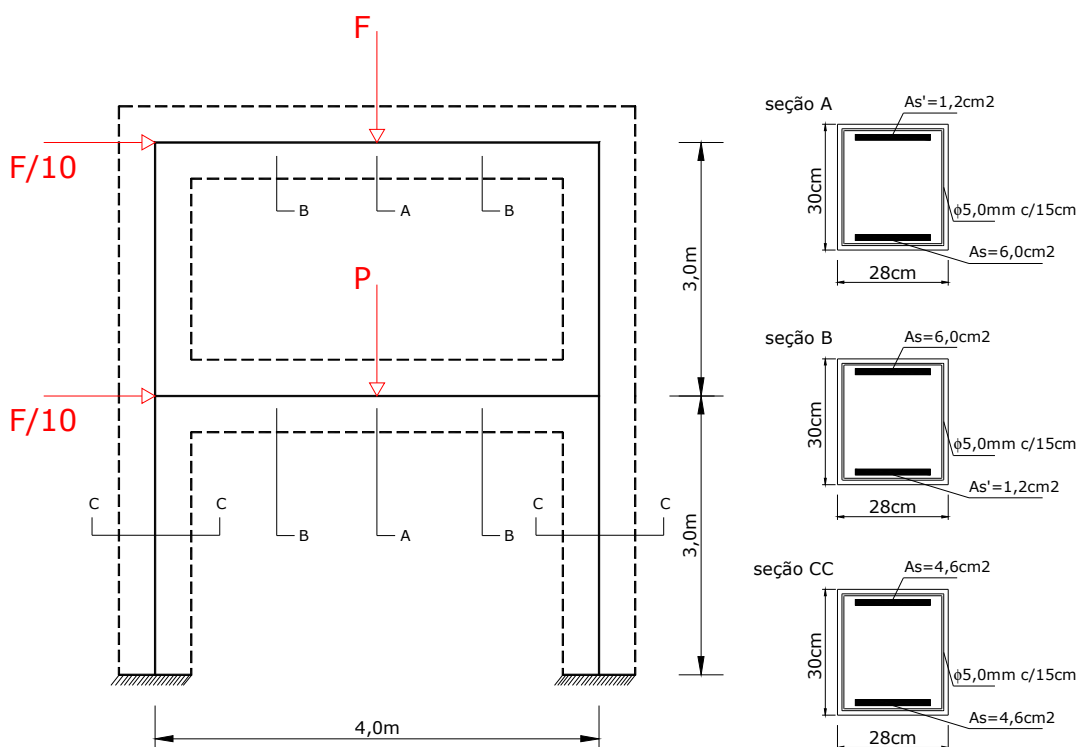
Um outro fato importante é que nesse tipo de estrutura bi-apoiada, os nós do pórtico acabam sendo os elementos responsáveis pela estabilidade estrutural. Como os nós estavam com grande quantidade de armadura longitudinal justamente para garantir essa ligação, o efeito de pino provocado pelas armaduras combinado à presença de estribos principalmente no tramo após a aplicação da força concentrada, foram responsáveis por fornecer esse acréscimo significativo à segurança do pórtico, com ênfase ao modo 7. Desse forma, fica clara a importância de se considerar esses efeitos na modelagem de estruturas maiores.

Concluiu-se que os modelos foram capazes de obter as probabilidades de falha dos modos importantes, sendo considerados aptos para boa utilização. A única ressalva que se faz é com relação ao tempo de processamento das análises, onde mais uma vez o modelo completo de Timoshenko mostrou-se bem mais caro do que os outros. A título de informação, os tempos gastos para processamento foram: LG (41 minutos), NLG (62 minutos) e TSD-NLG (135 minutos). Isso pode se tornar ser um problema sério especialmente para estruturas maiores ou quando o modelo for combinado aos processos de otimização, inviabilizando sua utilização em programação sequencial.

#### 4.8.7 Exemplo 7

Neste exemplo trata-se de uma estrutura de pórtico de 2 andares em concreto armado, submetida a carregamentos concentrados verticais nas vigas e horizontais no topo de cada pilar. A estrutura foi estudada por Silva (1996), que analisou um pórtico de 6 andares, mas somente sob o aspecto mecânico, comparando deslocamentos e momentos fletores com outros trabalhos. Neste caso, foram considerados somente os dois primeiros andares do pórtico para a realização do estudo da confiabilidade, somente por questões de tempo de processamento. As armaduras também foram levemente alteradas, de modo a obter mais realizações de falha, conforme será descrito a seguir.

A Figura 4-41 ilustra a geometria, os carregamentos e as dimensões das seções transversais dos elementos, bem como suas armaduras.

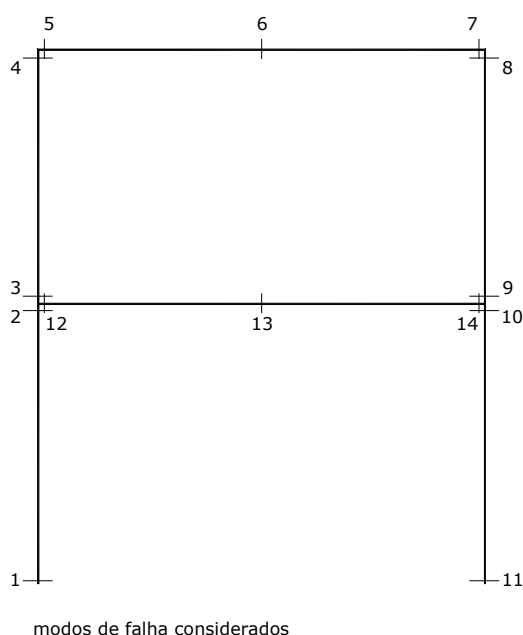


**Figura 4-41 – Geometria e dimensões da estrutura analisada**

O objetivo da análise é empregar os modelos mecânicos desenvolvidos neste trabalho para o cálculo das probabilidades dos 15 modos de falha que caracterizam esse pórtico, comparando as respostas entre si. A Figura 4-42 apresenta a marcação de cada modo de falha da estrutura. Os primeiros 14 modos são dados pela condição limite dos materiais, ou seja, ao se atingir a deformação limite do concreto ( $-3,5\%$ ) e/ou do aço ( $10\%$ ) caracteriza-se a falha.

O décimo quinto modo de falha corresponde à perda de estabilidade global do pórtico, definido numericamente pela singularidade da matriz de rigidez global.

A análise de confiabilidade foi desenvolvida considerando os modelos não-lineares dos materiais, ou seja, dano e plasticidade para o concreto e o aço, respectivamente, em conjunto com os seguintes modelos: Euler-Bernoulli linear geométrico (LG), Euler-Bernoulli não-linear geométrico (NLG) e Timoshenko com armadura transversal e efeito de pino não-linear geométrico (TSD-NLG).



**Figura 4-42 – Posição dos 14 modos de falha do pórtico**

O pórtico foi discretizado em 32 elementos finitos, sendo 4 elementos por pilar e 8 elementos por viga.

**Tabela 4-13 – Parâmetros utilizados na análise**

Descrição	Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	200000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	20000MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Número máximo de iterações	$It_{max}$	150
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20

Apenas três variáveis aleatórias foram consideradas nesta análise. Todas elas independentes e com distribuição normal de probabilidades. Os valores da associação estatística estão definidos a seguir:

- Resistência do concreto: média = 20MPa e COV = 15%;

- Resistência do aço: média = 500MPa e COV = 8%;
- Força aplicada: média = 140kN e COV = 15%.

O método de confiabilidade utilizado foi o FORM com a técnica dos gradientes numéricos, pois conforme pôde ser observado nas aplicações anteriores, mostrou-se mais eficientes que os métodos de superfície de respostas. A tolerância considerada na análise de confiabilidade foi um erro menor que 1% em termos do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto.

Inicialmente, foi realizada uma análise puramente mecânica da estrutura considerando os três diferentes modelos mecânicos, com as resistências do concreto e do aço assumindo seus valores médios, com objetivo de determinar quais seriam os modos de falha mais importantes. Essa avaliação foi feita em termos da carga última observada para cada modo, conforme ilustra a Figura 4-43.

De acordo com os resultados, observou-se que todos os modos de falha, com exceção dos modos 6, 13 e 14 apresentaram carga última maior do que a carga que leva a estrutura ao colapso por perda de estabilidade global. Dessa forma, não foi possível capturar esses valores, pois antes de atingí-los o pórtico entrava em colapso. Por conta disso, os valores das cargas últimas dos demais modos são todos iguais à carga de colapso por perda de estabilidade global.

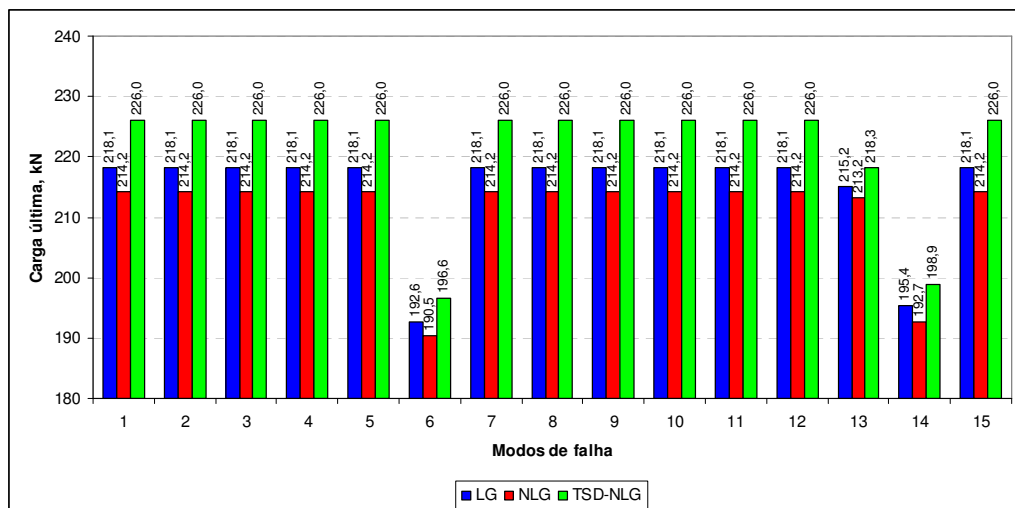


Figura 4-43 – Valores de carga última de cada modo de falha

A Figura 4-44 apresenta a curva força vertical  $\times$  deslocamento vertical do meio do vão da viga inferior para o modo 15. É interessante destacar a contribuição significativa da armadura transversal e do efeito de pino na avaliação da carga última em relação aos modelos



que não consideram os efeitos do cisalhamento. Na região pré-pico, o efeito do cisalhamento aumenta os deslocamentos da estrutura, tornando-a mais flexível. Porém, na região de pico da estrutura, em função da grande fissuração do concreto que ali existe, as contribuições dos estribos e do efeito de pina se tornam mais evidentes, conferindo desse modo, um acréscimo de resistência para a estrutura.

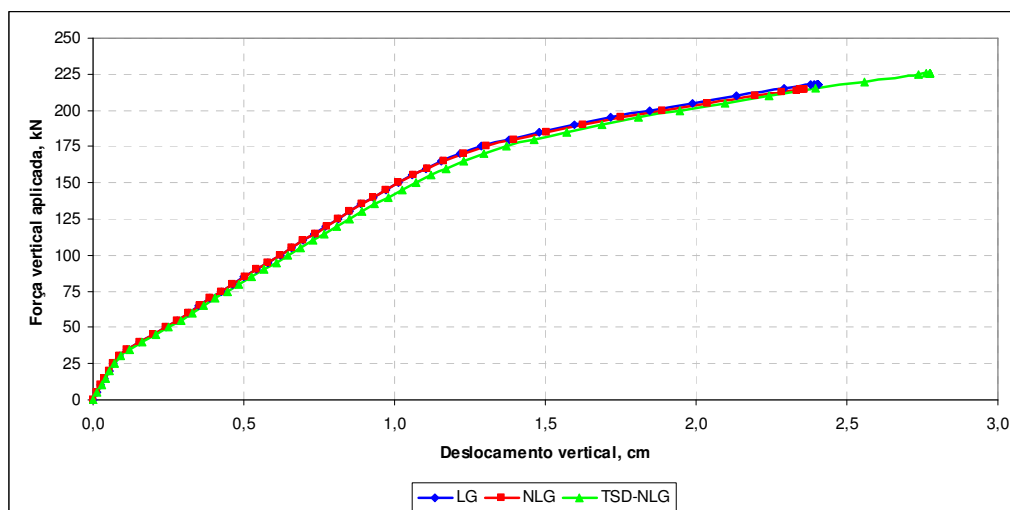


Figura 4-44 – Trajetória de equilíbrio do meio do vão da viga inferior

Em função desses resultados, a análise de confiabilidade foi realizada considerando somente os modos de falha mais importantes, que são os modos 6, 13, 14 e 15.

A seguir, são apresentados os resultados da análise de confiabilidade considerando para cada modo importante, os três modelos mecânicos citados.

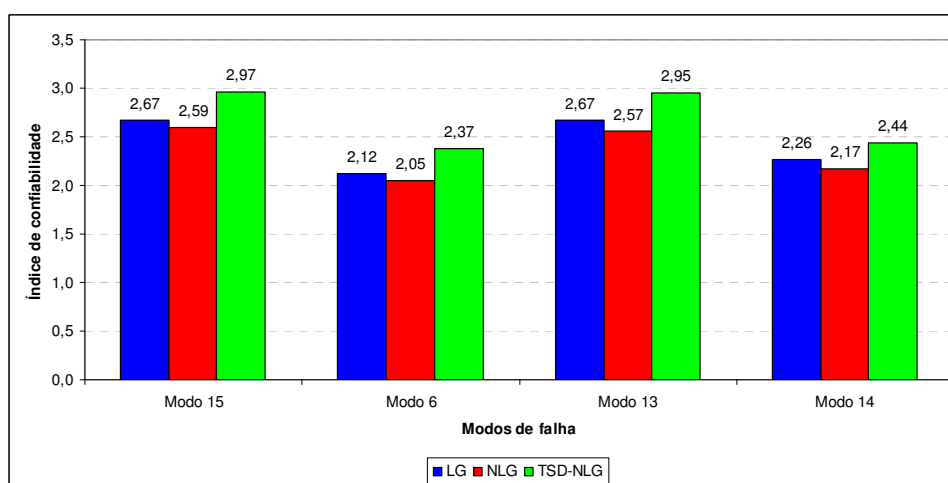


Figura 4-45 – Comparação entre os índices de confiabilidade de cada modo de falha

Conforme o esperado, observou-se uma pequena diferença entre os índices de confiabilidade obtidos com os modelos de Euler-Bernoulli LG e NLG, uma vez que para um pórtico de apenas dois andares como este, os efeitos da não-linearidade geométrica ainda não são tão significativos. Essa diferença, em média, foi de 3,5% para os modos considerados. Ao passo que, ao se utilizar o modelo com contribuição da armadura transversal e do efeito de pino, observou-se um aumento significativo da segurança do pórtico para os mesmos modos considerados. A comparação foi feita em relação aos resultados de Euler-Bernoulli NLG, resultando, em média, em uma diferença percentual de 12,5%. Isso mostra que esses efeitos são importantes e devem ser considerados nas análises de estruturas em concreto armado.

As Figuras 4-46, 4-47 e 4-48 mostram a história de convergência das análises de confiabilidade para cada variável aleatória e em cada modo de falha para os três modelos mecânicos utilizados.

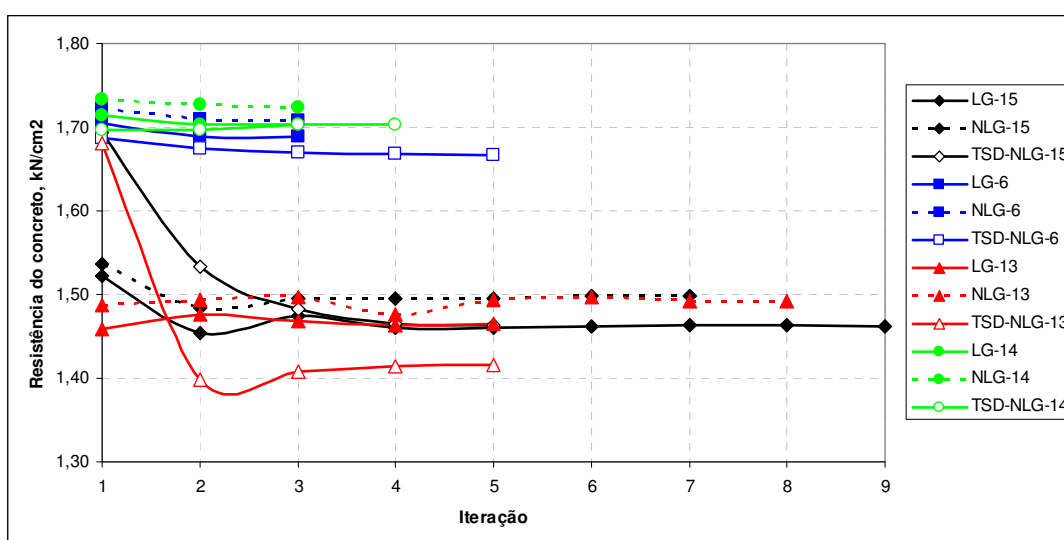


Figura 4-46 – Convergência da resistência do concreto para cada modo de falha

Atenção especial deve ser dada para a variável aleatória que representa a força externa aplicada, na qual verificou-se que o maior valor observado foi para o modo 15 com o modelo de Timoshenko completo na Figura 4-48 (curva em preto TSD-NLG-15). Isso ocorreu por conta da maior confiabilidade observada com esse modelo nesse modo, visto que para atingir o colapso da estrutura é necessário um valor maior da força aplicada. Esses valores de força aplicada correspondem à força vertical  $P$ , sendo que as forças horizontais de projeto são obtidas fazendo-se cada um desses valores dividido por 10.

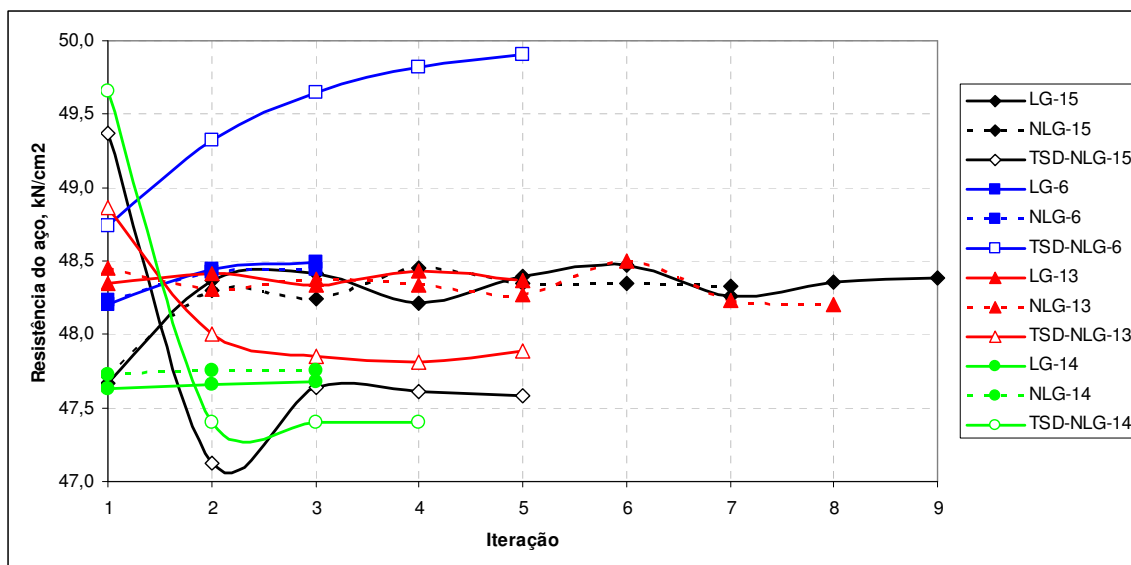


Figura 4-47 – Convergência da resistência do aço para cada modo de falha

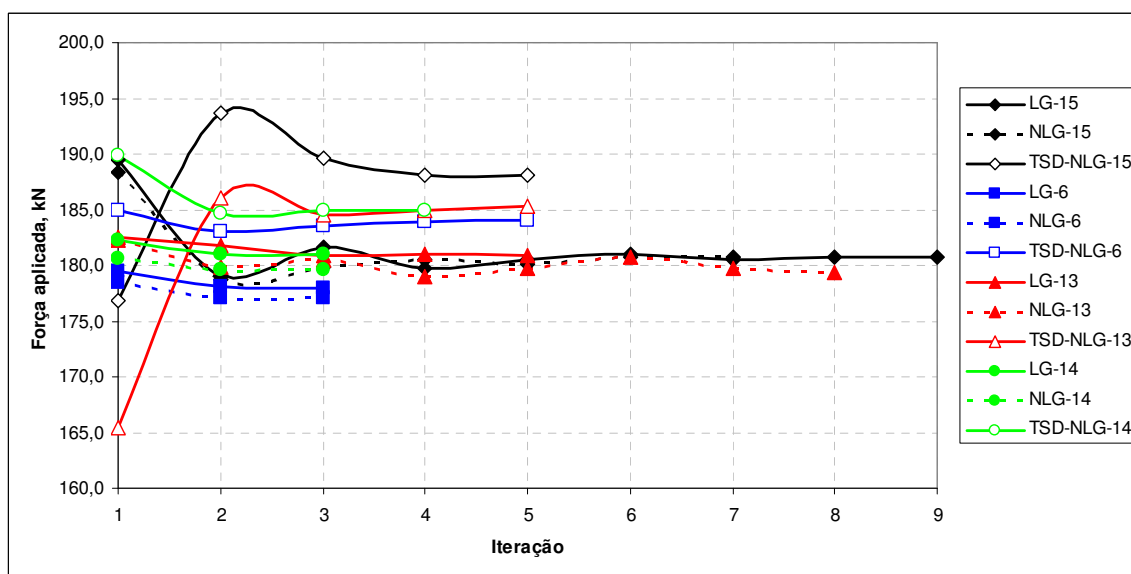
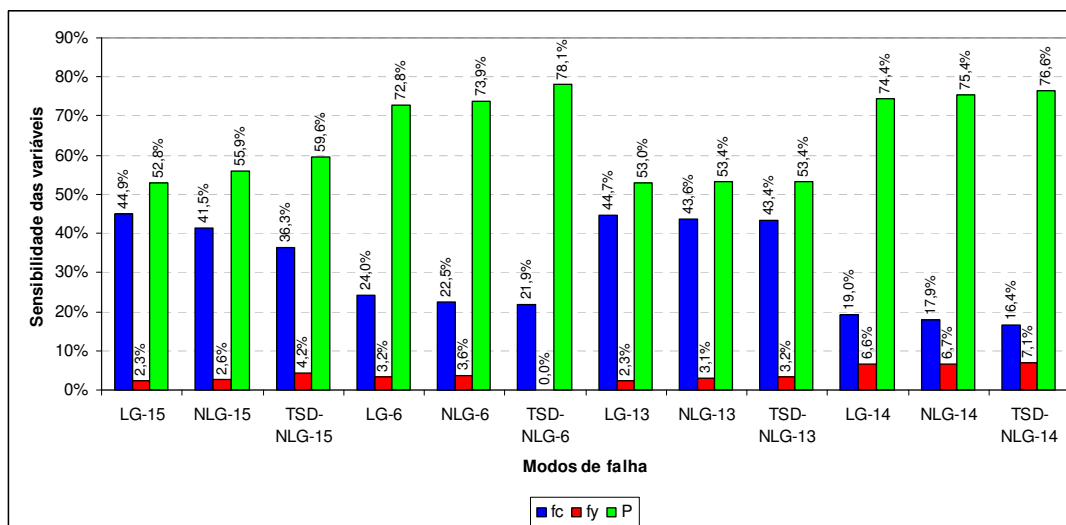


Figura 4-48 – Convergência da força aplicada para cada modo de falha

A sensibilidade das variáveis aleatórias pode ser observada na Figura 4-49, onde verificou-se que a força aplicada apresentou a maior influência na determinação da probabilidade de falha de cada modo. A resistência do concreto foi a variável mais importante para a resistência do pórtico em todos os modos. Isso ocorreu porque na grande maioria das vezes, a ruína ocorria por ruptura do concreto comprimido, sendo observado poucas vezes em que a falha do modo se dava por deformação excessiva da armadura tracionada.



**Figura 4-49 – Sensibilidade das variáveis aleatórias para cada modo de falha**

Para completar a análise de confiabilidade, foram traçadas as curvas de estado limite para cada modo de falha, fixando-se a resistência do aço em seu valor de projeto e variando-se a resistência do concreto e a força aplicada. Todas as curvas correspondem a  $G(X) = 0$  no espaço normal padrão.

É interessante notar nessas curvas que há praticamente uma sobreposição entre os modos 13 e 15 e depois entre os modos 6 e 14. Esse comportamento também pode ser observado através dos índices de confiabilidade que são muito próximos para esses pares de modos considerados. Um outro aspecto importante é que existe uma região onde todos os modos se interceptam de maneira aproximada. O valor da resistência do concreto é aproximadamente -3,0 unidades de desvio-padrão, que no espaço físico, assume o valor de 11MPa. Considerando esse valor para a resistência do concreto e o valor médio, isto é, 500MPa para o aço foi realizada uma análise de elementos finitos considerando o modelo do tipo NLG. As respostas em termos de carga última obtidas foram praticamente as mesmas para os quatro modos de falha, indicando que em uma situação como essa, todos os modos ocorreriam simultaneamente. Os valores de carga última observados foram os seguintes: 157,3kN para os modos 13 e 15; 150,2kN para o modo 6 e 155,0kN para o modo 14. Esses valores estão muito próximos do valor de 161kN obtido no gráfico (1,0 em unidades de desvio-padrão) que, conduziria a estrutura ao colapso com todos os modos acontecendo ao mesmo tempo. Esse resultados indicam a boa precisão do modelo mecânico para representar o comportamento de estruturas em concreto armado no estado limite último.

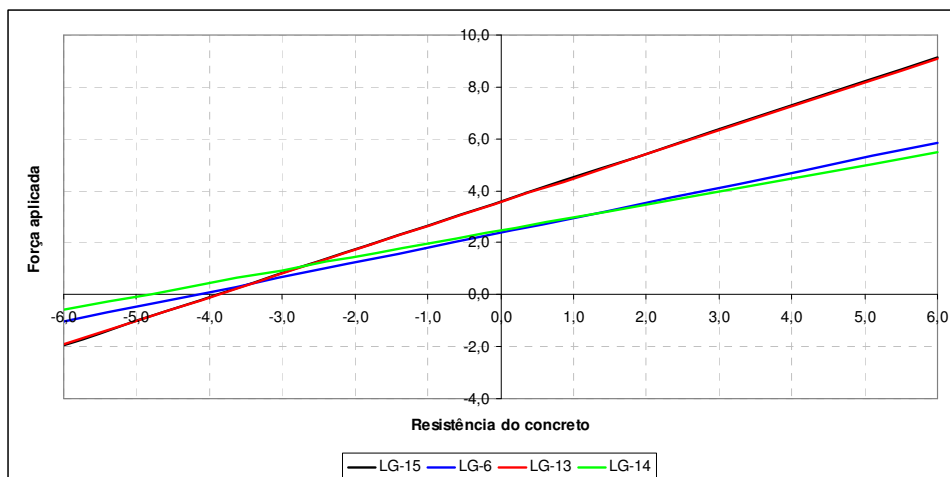


Figura 4-50 – Equações de estado limite considerando modelo LG

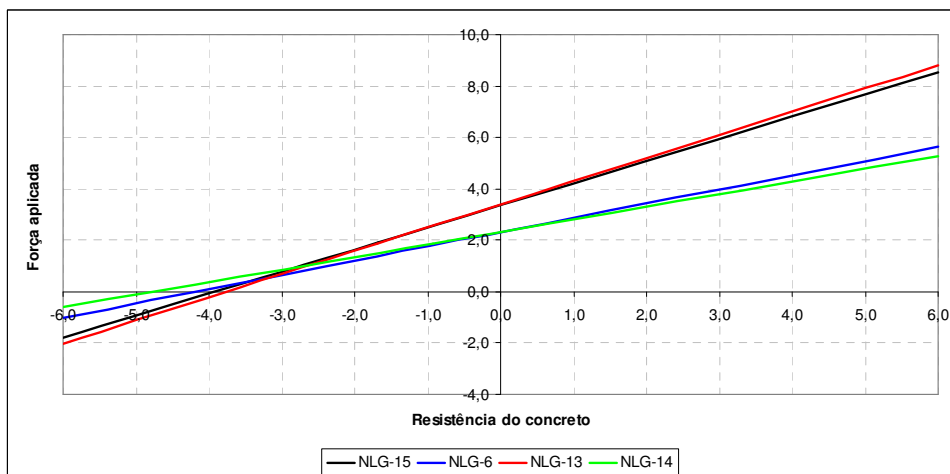


Figura 4-51 – Equações de estado limite considerando modelo NLG

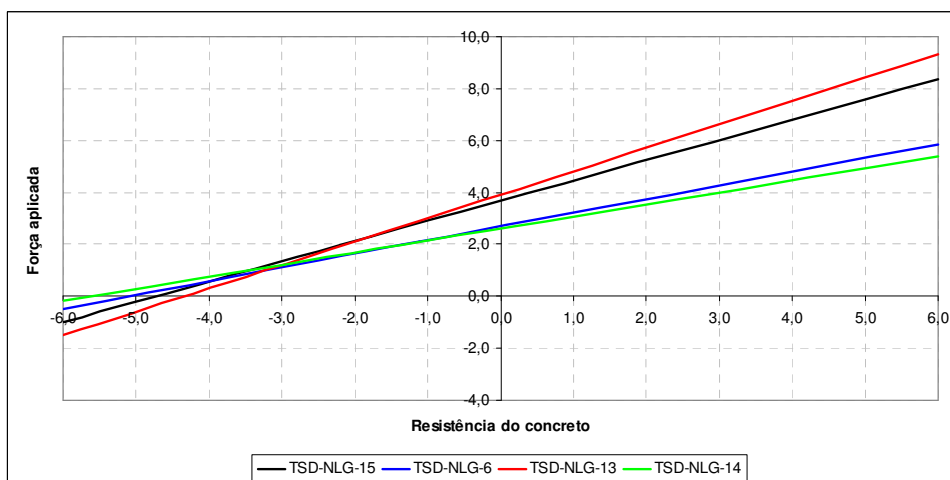


Figura 4-52 – Equações de estado limite considerando modelo TSD-NLG

O tempo computacional gasto nas análises de confiabilidade, considerando os quatro modos de falha foi de: 55 minutos para LG, 34 minutos para NLG; 4h e 28 minutos para o modelo TSD-NLG. Conforme observado, o modelo completo consumiu muito mais tempo de processamento que os demais, sendo inviável sua utilização em estruturas maiores. Nesses casos, a solução é paralelizar o código para diminuir o tempo de processamento.

A probabilidade de falha do sistema, neste caso, fica definida pela probabilidade do modo 15, ou seja, perda de estabilidade global do pórtico. Isso ocorreu porque para todos os modelos mecânicos considerados, a estrutura atingiu o colapso antes da formação explícita das 7 rótulas necessárias para a definição de um mecanismo.

## **5. Modelos de Otimização**

---

---

### **5.1 Generalidades**

Um projeto estrutural é uma atividade bastante complexa, pois envolve diversas etapas, desde a concepção da estrutura, arranjo estrutural até o dimensionamento dos elementos e seu detalhamento. Portanto, o projeto estrutural pode ser entendido como um processo iterativo, no qual as variáveis de projeto são determinadas através de inúmeras aproximações sucessivas até atingirem valores aceitáveis dentro dos intervalos viáveis recomendados pelas normas pertinentes.

Diante de todas essas dificuldades, existe ainda a preocupação com os custos das obras, ou seja, os projetos estruturais devem, além de garantir a segurança satisfatória, proporcionarem os menores custos. A redução de custos está ligada diretamente a uma série de medidas que podem ser tomadas, tais como: melhores modelos de comportamento dos materiais, graus de redundância, posicionamento dos elementos e suas dimensões. Por conta disso, a otimização constitui-se em um procedimento valioso para elaboração de projetos estruturais. Esse tratamento é perfeitamente possível, uma vez que o comportamento físico de uma estrutura pode ser escrito em termos de um conjunto de funções matemáticas. Assim, as técnicas de otimização podem ser empregadas para buscar valores extremos dessas funções. Vale ressaltar que à medida que se busca representar melhor a realidade, o problema de otimização também aumenta em complexidade e tamanho, dificultando a obtenção de uma solução.

Atualmente, por conta desse par segurança  $\times$  economia, os modelos de otimização tem sido empregados em conjunto com modelos de confiabilidade, com o objetivo de obter soluções econômicas e ao mesmo tempo suficientemente seguras. Assim, o projeto estrutural pode perfeitamente ser encarado como um problema de minimização do custo total da

estrutura, por exemplo, sujeito a uma série de restrições mecânicas e de segurança para os mais variados estados limites possíveis.

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, bem como a formulação desenvolvida para a otimização das seções transversais de elementos de barras em concreto armado e seu acoplamento com o modelo de elementos finitos, para otimização de vigas, pilares, elementos inclinados e pórticos planos de edifícios. Para maiores informações e detalhes sobre as técnicas de otimização, suas aplicações e restrições, a bibliografia recomendada deve ser consultada.

## **5.2 Conceitos Importantes**

### **5.2.1 Formulação de um problema de otimização**

Todo o problema de otimização precisa ser tratado mediante um conjunto de etapas específicas. O primeiro passo é definir qual é o objetivo para o qual deseja-se atingir um máximo ou um mínimo. No caso do projeto estrutural e deste trabalho, o objetivo é minimizar o custo inicial de elementos de barras em concreto armado. Dessa forma, define-se uma função-objetivo que descreve o custo dos elementos estruturais em função das variáveis ou parâmetros de projeto que serão calculados. Essas variáveis de projeto são exatamente as quantidades que devem ser determinadas para que o custo atinja um valor mínimo dentro das especificações requeridas. Assim, o segundo passo é definir quais são essas variáveis que serão otimizadas.

A etapa seguinte é definir quais serão as restrições impostas ao problema. Isso deve ser feito, para que as soluções apresentadas sejam viáveis, de modo a não produzir algo que não faça sentido do ponto de vista físico do problema estudado. Para projetos estruturais, por exemplo, as restrições podem ser dadas em termos de equações de equilíbrio, de compatibilidade, situações construtivas e limites máximos e mínimos para as variáveis de otimização.

De posse dessas informações, parte-se para a busca de um algoritmo ou método que seja capaz de encontrar a solução do sistema. Nesse âmbito existem diversos tipos de algoritmos com particularidades e determinados campos de aplicações, o que dificulta muito a escolha de um único algoritmo universal de otimização. Cada problema possui características próprias que devem ser analisadas para uma boa escolha do método. Uma boa discussão sobre



esses temas pode ser encontrada nos trabalhos de Fox (1973), Vanderplaats (1984), Luenberger (1984), Rigo (1999) e Nocedal & Wright (1999).

O problema de minimização pode ser escrito, portanto, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x) \\ & \text{sujeito à: } \begin{cases} h_i(x) = 0 & i = 1 \dots n \\ g_j(x) \leq 0 & j = 1 \dots m \end{cases} \end{aligned} \quad (5-1)$$

sendo que:  $f(x)$  é a função-objetivo a ser minimizada;  $h_i(x)$  são as restrições de igualdade;  $g_j(x)$  são as restrições de desigualdade;  $x$  é o vetor de variáveis a serem otimizadas;  $n$  e  $m$  são, respectivamente, o número de restrições de igualdade e desigualdade do problema.

É interessante lembrar que as funções  $f$ ,  $h$  e  $g$  são todas funções escalares com valor real nas variáveis  $x$ .

### 5.2.2 Propriedades dos pontos de mínimo

Nesta seção, duas propriedades dos pontos de mínimo são apresentadas. A partir delas é possível garantir que um ponto candidato é definido como mínimo relativo da função-objetivo analisada.

A primeira propriedade afirma que para uma função qualquer,  $f(x)$ , com  $n$  variáveis a serem otimizadas e com derivadas contínuas, o ponto de mínimo possui gradientes da função nulos, ou seja:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{i=1, \dots, n} = 0 \quad (5-2)$$

Além disso, para que o ponto encontrado a partir da Equação 5-2 seja de fato um ponto de mínimo relativo é necessário que a matriz Hessiana de  $f(x)$  seja positiva definida. Trata-se da segunda propriedade importante dos pontos de mínimo. Uma matriz é positiva definida quando todos os seus autovalores são positivos e positiva semi-definida quando todos os seus autovalores são não-negativos. Assim, tem-se a matriz Hessiana avaliada no ponto ótimo encontrado pela Equação 5-2:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

### 5.2.3 Ponto de mínimo global

O ponto de mínimo global é definido como sendo o ponto no qual a função-objetivo alcança seu menor valor em todo o domínio considerado. Assim,  $x_m$  é o mínimo global de  $f$  se  $f(x_m) \leq f(x)$  para todo e qualquer valor de  $x$  no domínio  $\mathfrak{R}^n$ .

### 5.2.4 Ponto de mínimo local

Um ponto de mínimo local é encontrado quando se atinge o menor valor de  $f$  na sua vizinhança  $N$ . Os pontos de mínimo podem ser classificados em frágil e estrito. Um ponto de mínimo local frágil é obtido quando  $f(x_m) \leq f(x)$  para todo  $x \in N$ , onde a vizinhança de  $x_m$  é um conjunto aberto que contém  $x_m$ . O ponto de mínimo estrito ou também conhecido como forte é definido em uma vizinhança  $N$  quando  $f(x_m) < f(x)$  para todo  $x \in N$  e  $x \neq x_m$ . A Figura 5-1 mostra uma função de uma variável que possui mínimos locais e um mínimo global.

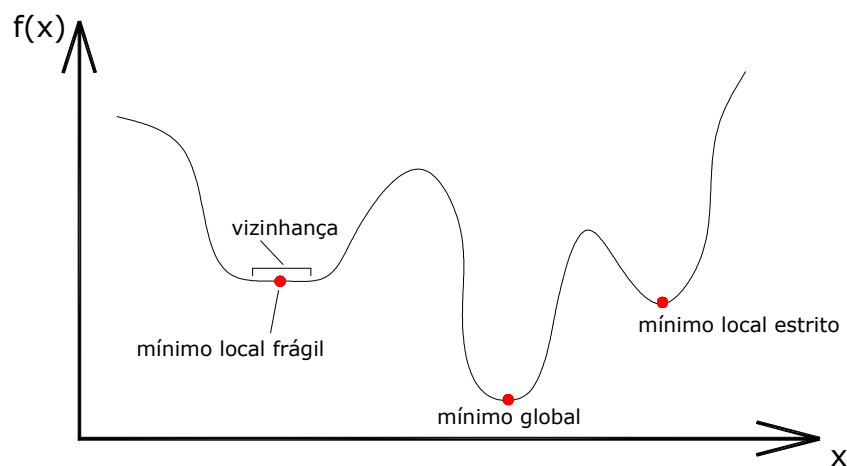


Figura 5-1 – Mínimos locais e global de uma função de uma variável

### 5.2.5 Condições necessárias e suficiente

O ponto chave para a verificação se um ponto  $x_m$  é de fato um mínimo local é a análise do gradiente,  $\nabla f(x_m)$  e da matriz Hessiana,  $\nabla^2 f(x_m)$  da função-objetivo,  $f$ . Para isso, é necessário que  $f$  seja contínua e duas vezes diferenciáveis no ponto considerado. Portanto, escrevem-se as seguintes condições:

Condição necessária de 1ª ordem:

Se  $x_m$  é um mínimo local de  $f$  e  $f$  é contínua e diferenciável em uma vizinhança aberta de  $x_m$ , então  $\nabla f(x_m) = 0$ .

Condição necessária de 2ª ordem:

Se  $x_m$  é um mínimo local de  $f$  e  $\nabla^2 f$  é contínua em uma vizinhança aberta de  $x_m$ , então  $\nabla f(x_m) = 0$  e  $\nabla^2 f(x_m)$  é positiva semi-definida.

Condição suficiente de 2ª ordem:

Seja  $\nabla^2 f$  contínua em uma vizinhança aberta de  $x_m$ , com  $\nabla f(x_m) = 0$  e  $\nabla^2 f(x_m)$  positiva definida. Então,  $x_m$  é um mínimo local estrito de  $f$ .

É interessante perceber que a condição suficiente de segunda ordem garante uma realidade mais forte do que as condições necessárias, pois permite afirmar que o ponto é um mínimo local estrito e não frágil.

### 5.2.6 Restrições ativas e inativas

Restrições de igualdade do tipo  $h(x) = 0$  são consideradas sempre como ativas em qualquer ponto possível dentro do domínio do problema. No entanto, as restrições de desigualdade do tipo,  $g(x) \leq 0$  se tornam ativas no ponto quando  $g(x) = 0$  e inativas quando  $g(x) < 0$ .

As restrições inativas não exercem influência sobre o domínio de soluções possíveis do problema de otimização, sendo somente uma espécie de fronteira desse domínio. Já as restrições ativas limitam o domínio, de modo que o ponto candidato a um mínimo ou máximo deve, necessariamente, satisfazer essas restrições. Dessa forma, as restrições de igualdade estarão ativas sempre, ao passo que as restrições de desigualdade poderão ou não estar ativas.

### 5.3 Método de Otimização tipo SQP

Os problemas de otimização foram formulados de acordo com os conceitos apresentados neste capítulo em linguagem de programação Compaq Visual FORTRAN 6.6 da Microsoft e resolvidos pelo algoritmo DNCONF, pertencente à biblioteca matemática IMSL do próprio Fortran. Esse algoritmo foi desenvolvido por Schittkowski (1986) e utiliza um Método de Programação Sequencial Quadrática – SQP (*Sequential Quadratic Programming*).

Assim, o problema de otimização fica definido como:

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x)$$

$$\text{sujeito à: } g_i(x) = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_e$$

$$g_i(x) \geq 0, \text{ para } i = n_e + 1, \dots, m$$

$$x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}}$$

Todas as funções são consideradas contínuas e diferenciáveis. Para utilizar esse recurso, devem ser fornecidos como dados de entrada a função-objetivo, cada restrição de igualdade e desigualdade, os limites inferior e superior de cada variável, bem como uma estimativa inicial das variáveis a serem otimizadas. Essa rotina DNCONF não requer a entrada das derivadas parciais da função-objetivo e das restrições, pois estas são calculadas por diferenças finitas automaticamente pelo programa.

O método SQP, utilizado na rotina, baseia-se na formulação e solução iterativa de subproblemas usando uma aproximação quadrática para o lagrangeano, linearizando-se as restrições no ponto considerado. Assim, de maneira resumida, o problema de otimização pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_{d \in \mathfrak{R}^n} \left[ \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f(x_k)^T d \right]$$

$$\text{sujeito à: } \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_e$$

$$\nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) \geq 0, \text{ para } i = n_e + 1, \dots, m$$

$$x_{\text{inf}} - x_k \leq d \leq x_{\text{sup}} - x_k$$

sendo que:  $B_k$  é uma aproximação positiva definida para a Hessiana;  $k$  corresponde à iteração atual.

É interessante destacar que nesse subproblema, a variável de otimização deixa de ser  $x$  e passa a ser a direção de busca  $d$ . Uma vez encontrado um valor para a direção de busca, esta é usada para encontrar um novo ponto  $x$ , ou seja:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k, \text{ com } \lambda \in (0,1] \quad (5-4)$$

À medida que o algoritmo se aproxima do ponto de mínimo, a direção de busca vai recebendo valores cada vez menores, até atingir a tolerância pré-estabelecida. Quando o ponto de mínimo não é alcançado, atualiza-se  $B_k$  a partir do algoritmo BFGS. Mais detalhes sobre os métodos de otimização podem ser encontrados em Stoer (1985) e Gill et al. (1985).

## 5.4 Otimização da Seção Transversal de um Elemento de Barra

### 5.4.1 Hipóteses do modelo

Ao se projetar elementos de barras em concreto armado, estes devem satisfazer as equações de equilíbrio da estática clássica em todas as suas seções transversais, bem como apresentar deformações compatíveis com seu estado de solitação. A formulação apresentada a seguir foi baseada no trabalho de Paula (1988) e adaptada para os fins desta pesquisa.

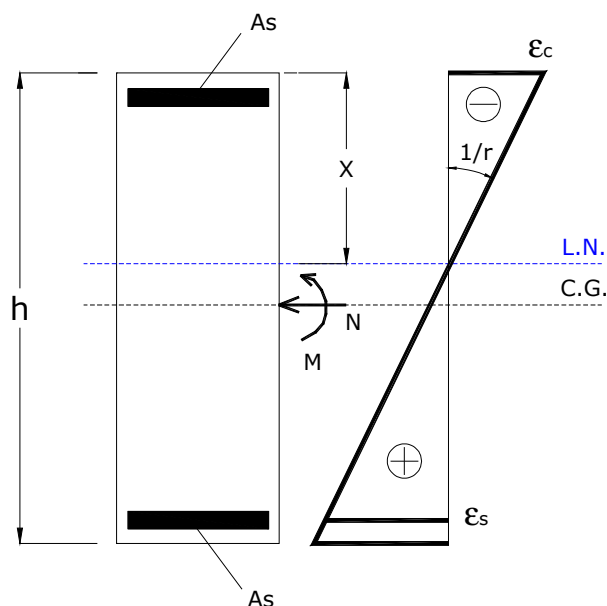
Para se caracterizar uma posição genérica no diagrama de deformação de uma seção é necessário assumir três hipóteses:

- Admitir distribuição linear de deformações ao longo da seção;
- Adotar um valor para a curvatura da seção, de modo que o limite máximo para curvatura no valor de  $(0,0035 + 0,01)/d$  não seja ultrapassado. Esses valores são provenientes dos limites de formação de 10‰ para o aço e 3,5‰ para o concreto;
- Adotar uma profundidade da linha neutra, que é definida pela escolha de um valor para o parâmetro adimensional  $\beta_x$ , de acordo com:

$$\beta_x = \frac{x}{h} \quad (5-5)$$

sendo que:  $x$  é a distância da fibra mais comprimida da seção até a linha neutra;  $h$  é a altura da seção transversal;  $d$  é a distância da fibra mais comprimida até o centro de gravidade da

armadura tracionada. A Figura 5-2 ilustra a seção genérica considerada para o desenvolvimento da formulação.



**Figura 5-2 – Seção transversal genérica de um elemento de barra em concreto armado**

É necessário, portanto, adotar inicialmente a profundidade da linha neutra e a curvatura da seção, de modo que possam ser determinadas as condições de compatibilidade de deformações e, com isso, as tensões nas armaduras e no concreto. A partir dessas tensões pode-se chegar via equilíbrio da seção aos esforços resistentes que suportam a força normal e o momento fletor atuante. Por conta disso, o modelo de otimização considera como variáveis a serem otimizadas a profundidade da linha neutra e a curvatura da seção, além das dimensões dos elementos. Dessa forma, garante-se total liberdade para o procedimento de busca da solução ótima, pois nenhum parâmetro importante é fixado.

#### 5.4.2 Compatibilidade de deformações

A Figura 5-3 mostra o sistema de coordenadas adotado, bem como as grandezas relacionadas ao estado de deformação de uma seção genérica em concreto armado.

Por compatibilidade geométrica de deformações pode-se escrever a deformação na fibra genérica da seção,  $\varepsilon$ , em função da deformação do concreto,  $\varepsilon_c$ , da deformação da armadura,  $\varepsilon_s$  ou da deformação da fibra distante  $3h/7$  da fibra mais comprimida,  $\varepsilon_{3h/7}$ , conforme:

$$\varepsilon = \frac{-\varepsilon_{c2}(y - y_o)}{x} \quad (5-6)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_s(y - y_o)}{h - d' - x} \quad (5-7)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{3h/7}(y - y_o)}{\frac{3}{7}h - x} \quad (5-8)$$

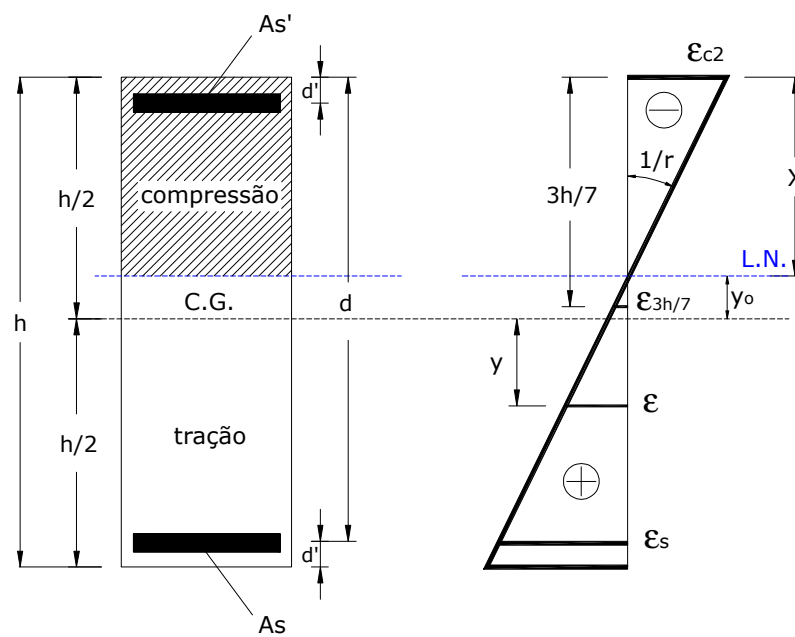


Figura 5-3 – Diagrama genérico de deformações

Ainda baseado na Figura 5-3, é possível escrever as deformações  $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_{3h/7}$  em função da curvatura da seção:

$$\varepsilon_{c2} = -\frac{1}{r}x \quad (5-9)$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{r}(h - d' - x) \quad (5-10)$$

$$\varepsilon_{3h/7} = \frac{1}{r}\left(\frac{3}{7}h - x\right) \quad (5-11)$$

A deformação na fibra genérica em função da curvatura da seção pode ser obtida substituindo-se qualquer uma das Equações 5-9, 5-10 ou 5-11 em uma das Equações 5-6, 5-7 ou 5-8:

$$\varepsilon = \frac{1}{r}(y - y_o) \quad (5-12)$$

A distância entre a linha do centro geométrico da seção e a linha neutra,  $y_o$ , pode ser dada por:

$$y_o = x - \frac{h}{2} \quad (5-13)$$

Escrevendo-se a posição da fibra genérica,  $y$ , em termos adimensionais tem-se:

$$\beta_y = \frac{y}{h} \quad (5-14)$$

Substituindo-se a Equação 5-13 em 5-12 e levando-se em conta os parâmetros adimensionais  $\beta_x$  e  $\beta_y$  tem-se:

$$\varepsilon = \frac{h}{r} \left( \beta_y + \frac{1}{2} - \beta_x \right) \quad (5-15)$$

Fazendo-se  $\beta_y + 1/2 = \beta_o$  e substituindo-se na Equação 5-15 tem-se a expressão geral que define a deformação de uma fibra genérica da seção transversal em concreto armado, para uma determinada curvatura e posição relativa da linha neutra:

$$\varepsilon = \frac{h}{r} (\beta_o - \beta_x) \quad (5-16)$$

Em função dessa expressão pode-se calcular a deformação de camadas de armadura dispostas em qualquer linha da seção transversal, para posterior cálculo das respectivas tensões.



### 5.4.3 Intervalo de variação de $\beta_x$

Embora teoricamente a profundidade da linha neutra não tenha limites, podendo variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , se faz necessário estabelecer alguns limites para que a curvatura máxima, dada pelos limites de deformações dos materiais não seja ultrapassada. Assim, esta parte do texto destina-se a definir valores limites para a posição relativa da linha neutra, considerando a curvatura da seção. A Figura 5-4 ilustra as possíveis regiões de deformação da seção, para as quais serão estabelecidos os limites da linha neutra.

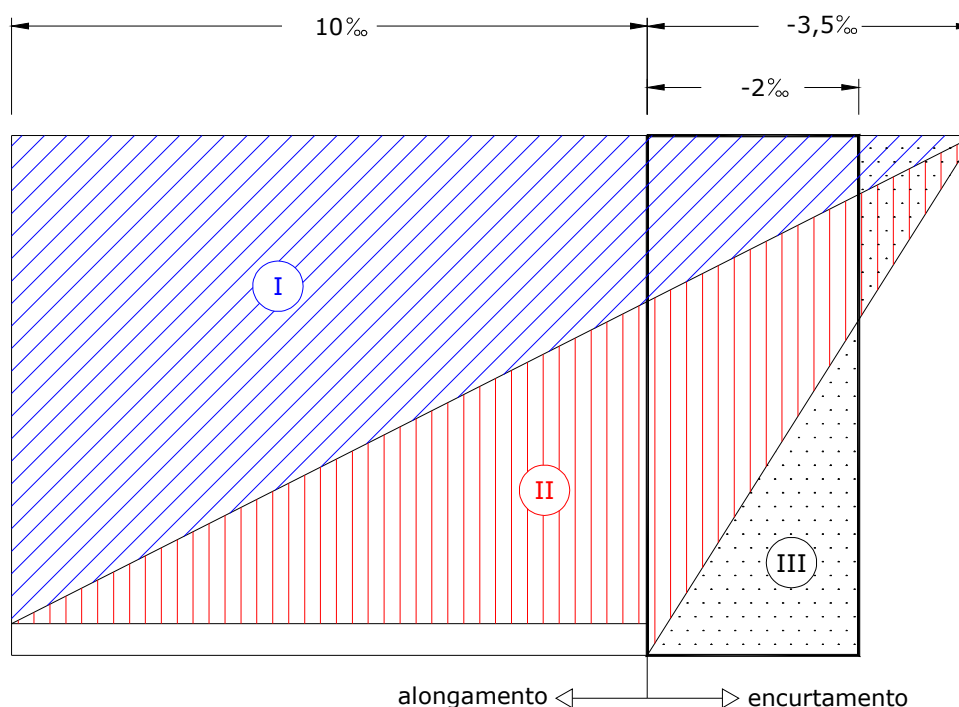


Figura 5-4 – Regiões possíveis de deformação da seção

A região I é definida pelo limite de deformação de 10‰ da armadura mais tracionada, com a fibra de concreto menos tracionada variar entre deformações de -3,5‰ a 10‰, englobando dessa forma os domínios 1 e 2 de deformação. A região II do diagrama é caracterizada pela deformação máxima de encurtamento de -3,5‰ da fibra mais comprimida da seção transversal, com as deformações na armadura mais tracionada variando entre 10‰ e zero, definindo os domínios 3, 4 e 4a. Já a região III caracteriza-se pelo encurtamento máximo de -2‰ para a fibra distante 3/7 de  $h$  da borda mais comprimida da seção, fixando, portanto, o domínio 5, onde toda a seção encontra-se comprimida.

Portanto, serão consideradas as seguintes situações:

- a)  $\beta_x \leq 0$  para região I;
- b)  $0 < \beta_x \leq 1$  para região II;
- c)  $\beta_x > 1$  para região III.

Para  $\beta_x \leq 0$ , o estado de deformação da seção é caracterizado pela região I do diagrama da Figura 5-4, fixando, portanto, o limite inferior de  $\beta_x$  determinado pela deformação última de tração do aço, 10‰, pois a seção transversal encontra-se totalmente tracionada. A posição da fibra que fornece essa condição pode ser dada por:

$$\beta_y = \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \quad (5-17)$$

Para que o limite último de deformação de tração do aço não seja ultrapassado, a deformação da fibra genérica deve obedecer à seguinte inequação:

$$\varepsilon = \frac{h}{r} (\beta_o - \beta_x) \leq 0,01 \quad (5-18)$$

Como  $\beta_y + 1/2 = \beta_o$ , pode-se escrever a expressão que fornece o limite inferior do intervalo de variação de  $\beta_x$ , que é denotado por:

$$\beta_{xi} \geq -\frac{0,01}{h/r} + 1 - \delta \quad (5-19)$$

com  $\delta = d'/h$ .

Para  $0 < \beta_x \leq 1$ , o estado de deformação da seção transversal é caracterizado pela região II do diagrama da Figura 5-4, fixando, portanto, um limite superior de  $\beta_x$  determinado pela deformação última de compressão na fibra de concreto da borda mais comprimida, -3,5‰, pois a seção transversal encontra-se parcialmente comprimida. A posição da fibra que garante essa condição limite é dada por:

$$\beta_y = -\frac{1}{2} \quad (5-20)$$

Para evitar que o limite último de deformação de compressão na fibra de concreto da borda mais comprimida seja ultrapassado, a seguinte inequação deve ser obedecida:

$$\varepsilon = \frac{h}{r}(\beta_o - \beta_x) \geq -0,0035 \quad (5-21)$$

Como para esse caso,  $\beta_o = 0$ , tem-se a expressão que fornece um limite superior do intervalo de variação de  $\beta_x$ , dada por:

$$\beta_{xs1} \leq \frac{0,0035}{h/r} \quad (5-22)$$

Finalmente, para  $\beta_x > 1$ , o estado de deformação da seção transversal é caracterizado pela região III do diagrama da Figura 5-4, sendo, nesse caso, um segundo limite superior de  $\beta_x$  determinado pela deformação última de compressão na fibra de concreto, distante  $3h/7$  a partir da borda mais comprimida,  $-2,0\%$ . A posição da fibra, a partir da linha do centro geométrico da seção pode ser dada por:

$$\beta_y = -\frac{1}{14} \quad (5-23)$$

Para atender a condição de deformação definida por esta situação, a deformação na fibra genérica deve respeitar a seguinte inequação:

$$\varepsilon = \frac{h}{r}(\beta_o - \beta_x) \geq -0,002 \quad (5-24)$$

Como para esse caso,  $\beta_o = 3/7$ , tem-se a expressão que fornece um segundo limite superior do intervalo de variação de  $\beta_x$ , dada por:

$$\beta_{xs2} \leq \frac{0,002}{h/r} + \frac{3}{7} \quad (5-25)$$

Diante disso, o processo de otimização, que terá como uma das variáveis a posição relativa da linha neutra,  $\beta_x$ , buscará a solução ótima dentro do intervalo definido por:

$$\beta_{xi} \leq \beta_x \leq \begin{cases} \beta_{xs1} \\ \beta_{xs2} \end{cases} \quad (5-26)$$

A escolha de um dos limites superior de  $\beta_x$  dependerá de qual das duas condições de deformação será atingida primeiro. É interessante destacar que ao se definir em qual dos casos

a seção se encontra, a curvatura é automaticamente determinada pelo processo através das Equações 5-9, 5-10 e 5-11.

#### 5.4.4 Equações de equilíbrio

A partir do cálculo das deformações em fibras genéricas, conforme discutido nas seções anteriores, torna-se possível determinar as tensões em qualquer fibra da seção transversal, a partir das relações constitutivas dos materiais. O próximo passo é, portanto, o cálculo dos esforços resistentes da seção, dados aqui pela força normal e momento fletor resistente. A Figura 5-5 mostra, para o caso de seção transversal retangular e linha neutra perpendicular ao eixo de simetria da seção, as forças resistentes utilizadas para garantir o equilíbrio da seção. O concreto é representado pelo diagrama parábola-retângulo de tensão  $\times$  deformação.

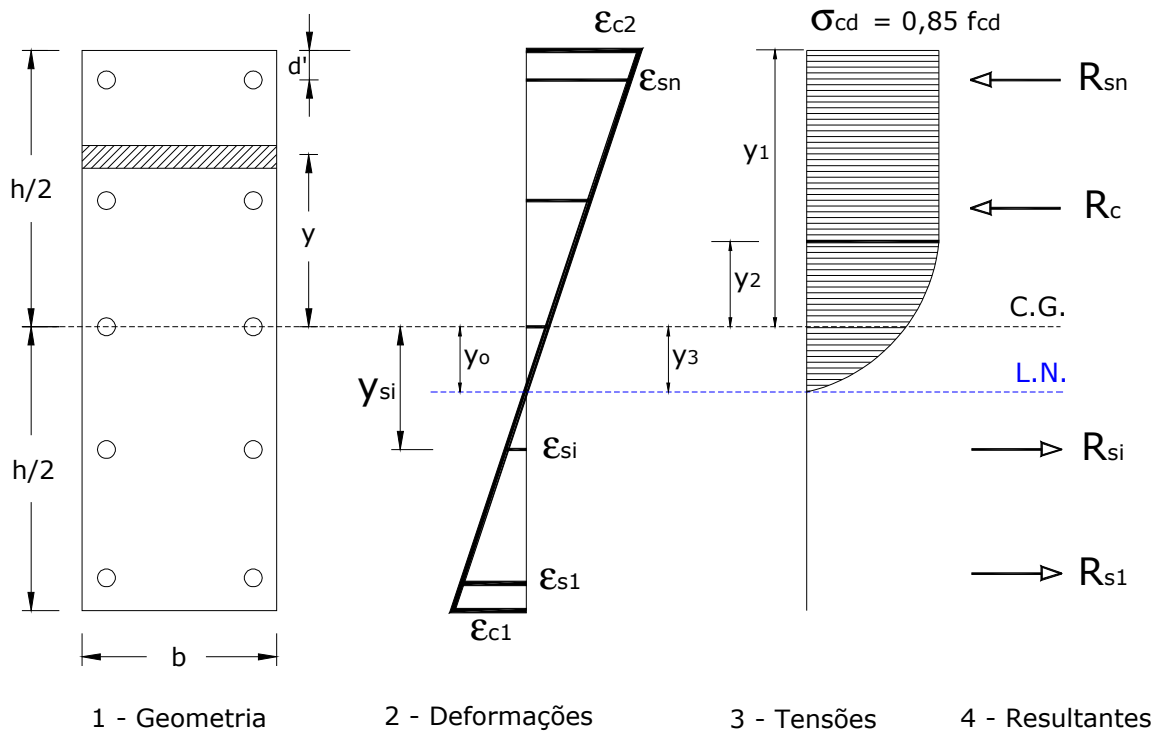


Figura 5-5 – Tensões, deformações e forças resultantes

A força normal e o momento fletor resistente podem ser dados por:

$$N_R = R_C + \sum_{i=1}^n R_{Si} \quad (5-27)$$

$$M_R = M_C + \sum_{i=1}^n R_{Si} y_{Si} \quad (5-28)$$

sendo que:  $n$  é o número de camadas de armadura na seção;  $R_C$  e  $M_C$  são, respectivamente, as resultantes de força normal e momento fletor do concreto.

Assim, abrindo as expressões tem-se:

$$N_R = \int_{-h/2}^{y_0} b \cdot \sigma_c dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-29)$$

$$M_R = \int_{-h/2}^{y_0} b \cdot y \cdot \sigma_c dy + \sum_{i=1}^n y_{Si} \cdot \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-30)$$

As Equações 5-29 e 5-30 permitem calcular a força normal e o momento fletor resistente para uma dada curvatura e posição relativa da linha neutra na seção de um elemento em concreto armado. É interessante destacar que essas expressões refletem o equilíbrio de elementos de barras em concreto armado de maneira geral, independentemente de o elemento ser uma viga, pilar ou estar inclinado., sendo, portanto, de caráter geral.

As integrais utilizadas para calcular a parcela resistente do concreto comprimido, em virtude do diagrama parábola-retângulo, foram separadas em duas parcelas. Em cada uma das integrais, a primeira parcela refere-se ao trecho retangular do diagrama de tensões, que é obtida usando-se para  $\sigma_c$  o valor de  $-0,85f_{cd}$  e os limites de integração  $y_1$  e  $y_2$  referentes ao trecho retangular do diagrama. Já a segunda parcela corresponde ao trecho parabólico, sendo obtida usando-se para  $\sigma_c$  a expressão  $850f_{cd} (1+250\epsilon_c)\epsilon_c$  e os limites de integração  $y_2$  e  $y_3$ . Assim, as expressões dos esforços resistentes assumem a seguinte forma:

$$N_R = \int_{y_1}^{y_2} -0,85f_{cd} \cdot b \cdot dy + 850f_{cd} \cdot b \int_{y_2}^{y_3} (1+250\epsilon_c)\epsilon_c \cdot dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-31)$$

$$M_R = \int_{y_1}^{y_2} -0,85f_{cd} \cdot b \cdot y \cdot dy + 850f_{cd} \cdot b \int_{y_2}^{y_3} (1+250\epsilon_c)\epsilon_c \cdot y \cdot dy + \sum_{i=1}^n y_{Si} \cdot \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-32)$$

Efetuada-se as operações aritméticas, integrando-se e utilizando-se os limites, obtém-se as expressões finais para a força normal e o momento fletor resistente de uma seção em concreto armado, dadas por:

$$N_R = b \cdot h \cdot f_{cd} \left\{ -0,85(\beta_2 - \beta_1) + 850 \cdot \frac{h}{r} \left[ \frac{k_2}{2} + k_1 \cdot k_3 + 250 \cdot \frac{h}{r} \left( \frac{k_4}{3} + k_1 \cdot k_2 + k_1^2 \cdot k_3 \right) \right] \right\} + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-33)$$

$$M_R = b \cdot h^2 \cdot f_{cd} \left\{ -0,425 \cdot k_6 + 850 \cdot \frac{h}{r} \left[ \frac{k_4}{2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{2} + 250 \cdot \frac{h}{r} \left( \frac{k_5}{4} + 2k_1 \cdot \frac{k_4}{3} + \frac{k_1^2 \cdot k_2}{2} \right) \right] \right\} + \sum_{i=1}^n y_{Si} \cdot \sigma_{Si} \cdot A_{Si} \quad (5-34)$$

com  $\beta_1 = y_1/h$ ;  $\beta_2 = y_2/h$ ;  $\beta_3 = y_3/h$ ;  $k_1 = 1/2 - \beta_x$ ;  $k_2 = \beta_3^2 - \beta_2^2$ ;  $k_3 = \beta_3 - \beta_2$ ;  $k_4 = \beta_3^3 - \beta_2^3$ ;  $k_5 = \beta_3^4 - \beta_2^4$ ;  $k_6 = \beta_2^2 - \beta_1^2$ .

Para finalizar, deve-se agora definir os limites adimensionais para integração do diagrama de tensões de compressão no concreto,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , a partir dos intervalos de variação de  $\beta_x$ .

Para o caso de  $0 < \beta_x \leq 1$ , a seção está parcialmente comprimida, o que significa que tanto o concreto quanto o aço contribuem para os esforços resistentes. O objetivo é definir os limites de integração do diagrama parábola-retângulo do concreto submetido à compressão. Para o início do diagrama define-se  $\beta_1 = -1/2$ .

As tensões de compressão no concreto se distribuem uniformemente até que a fibra, distante  $3/7$  em valor adimensional a partir da borda comprimida, atinja a deformação de  $-2\%$ . Portanto, pode-se concluir que o máximo valor permitido para a ordenada adimensional  $\beta_2$ , que é o valor que limita o fim da distribuição retangular de tensões de compressão no concreto, é dado por  $\beta_2 = \beta_1 + 3/7 = -1/14$ . O valor mínimo para  $\beta_2$ , por sua vez pode ser dado por  $-1/2$ , pois só interessa a integral que está dentro da seção. Assim, tem-se a seguinte expressão válida para o cálculo da ordenada adimensional  $\beta_2$ :

$$\beta_2 = \frac{-0,002}{h/r} + \beta_x - \frac{1}{2} \quad (5-35)$$

com limites dados por:  $-1/2 \leq \beta_2 \leq -1/14$ .

Para o terceiro limite de integração,  $\beta_3$ , dado pela ordenada adimensional que determina o final do diagrama parabólico, este deve coincidir com a posição da fibra com deformação nula. Portanto, tem-se  $\beta_3 = \beta_x - 1/2$ , com valor mínimo igual a  $-1/2$ .

As seções inteiramente comprimidas, isto é, para  $\beta_x > 1$  seguem exatamente o mesmo descrito para  $0 < \beta_x \leq 1$ . Os valores de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são os mesmos, ressaltando apenas que deve-se respeitar o limite máximo de  $1/2$  para  $\beta_3$ , pois novamente considera-se somente a integral dentro da seção transversal de concreto.

Com relação a  $\beta_x \leq 0$ , seção inteiramente tracionada, os limites adimensionais de integração devem anular a integral de tensão de compressão na seção de concreto. Isso pode ser conseguido ao adotar os valores mínimos para os limites de integração. Com isso, a força normal resistente será fornecida somente pela armadura longitudinal da seção transversal do elemento estrutural. Assim, tem-se:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = -1/2$ .

#### 5.4.5 Formulação do problema de otimização

Após discutir as hipóteses adotadas, compatibilidade e equações de equilíbrio que descrevem os elementos de barra em concreto armado, o próximo passo é formular o problema de otimização.

A função-objetivo utilizada é o custo inicial total de projeto de uma seção transversal de um elemento de barra em concreto armado. Para considerar o custo de toda a estrutura, esta é dividida em trechos que mantêm o mesmo sinal de momento fletor, de modo que a seção escolhida para ser otimizada é aquela, dentro de cada trecho, que apresentar maior solicitação. Após a definição da seção ótima, esta é estendida para todo o trecho.

As restrições do problema são dadas pelas equações de equilíbrio, tanto para força normal quanto para momento fletor, bem como outras restrições que definem os limites das variáveis. Embora a formulação seja geral, faz-se apenas uma pequena distinção entre a otimização de elementos horizontais, ou vigas e elementos verticais e inclinados, como é o caso de pilares e outros elementos estruturais. Essa distinção existe na função-objetivo e no acréscimo de uma restrição ao problema, conforme será discutido na sequência.

### 5.4.5.1 Elementos horizontais

O problema de otimização é escrito para elementos horizontais da seguinte forma:

$$\text{Minimizar: } f = b \cdot h \cdot C_C + (A_{S1} + A_{S2}) \cdot \rho_S \cdot C_S + (b + 2 \cdot h) \cdot C_F \quad (5-36)$$

$$\text{Sujeito à: } \begin{cases} N_R - N_d = 0 \\ M_R - M_d = 0 \\ \beta_x - \beta_{xi} \geq 0 \\ \beta_{xs} - \beta_x \geq 0 \\ \% \max \cdot b \cdot h - A_{S1} - A_{S2} \geq 0 \end{cases} \quad (5-37)$$

As variáveis a serem otimizadas são: altura da seção ( $h$ ), área de aço tracionada ( $A_{S1}$ ), área de aço comprimida ( $A_{S2}$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ).

É interessante destacar que mesmo em casos onde a força normal atuante seja nula, a formulação apresentada acima continua sendo válida, bastando igualar  $N_R$  a zero. Um outro aspecto importante é que para elementos horizontais são consideradas duas variáveis distintas para área de armadura, pois representam exatamente as áreas de tração e compressão existentes nesses elementos, podendo ser diferentes entre si. O algoritmo parte de valores iniciais para cada uma das variáveis até, em sucessivas iterações, atingir o ponto ótimo.

Os parâmetros utilizados no problema são:  $b$  é a largura da seção mantida constante ao longo do processo;  $\rho_S$  é a massa específica do aço igual a  $7850 \text{ kg/m}^3$ ;  $C_C$ ,  $C_S$  e  $C_F$  são, respectivamente, os custos do concreto por metro cúbico, do aço por quilograma e das fôrmas de madeira por metro quadrado;  $N_R$  e  $M_R$  são, respectivamente, a força normal e o momento fletor resistente, dados pelas Equações 5-33 e 5-34;  $N_d$  e  $M_d$  são, respectivamente, a força normal e o momento fletor atuantes de cálculo;  $\beta_{xi}$  e  $\beta_{xs}$  são os limites inferior e superior para a posição relativa da linha neutra na seção, dados pelas Equações 5-19, 5-22 e 5-25;  $\% \max$  é a porcentagem máxima de armadura que a seção pode suportar.

Quando a área de armadura ultrapassa a capacidade de alojamento de uma camada, em função da própria geometria da seção, esta é distribuída em outras camadas. O centro de gravidade da armadura é então calculado para a obtenção do novo valor de  $d'$ . Reinicia-se o processo na próxima iteração com o novo valor de  $d'$  até a convergência do algoritmo. Essa distribuição é feita dessa maneira, pois do ponto de vista da otimização pura, a formulação direta de um problema com mais camadas de armadura não é interessante, pois a seção ótima sempre será aquela com maior área de armadura mais afastada do centro da seção. Com isso,



o próprio algoritmo anula as áreas de aço que não estiverem na primeira camada, pois estas contribuem menos na resistência da seção, comparadas àquelas alojadas na camada com maior braço de alavanca. O que ocorre é que após obtida a área total de armadura, caso esta não possa ser alojada em uma única camada, o programa distribui automaticamente essa área total de acordo com a capacidade de alojamento de cada camada na seção. Após isso, a estrutura é analisada novamente considerando as áreas posicionadas adequadamente nas diversas camadas até a convergência do algoritmo para o ponto ótimo com redistribuição de esforços insignificante entre uma iteração e a seguinte. Ou ainda o que pode acontecer é aumentar a altura da seção para compensar a perda de resistência ao momento fletor, por exemplo, por conta da menor área de aço nas camadas mais externas. A conclusão é que o custo sempre resultará maior não demonstrando, portanto, a solução de mínimo custo para o problema.

#### 5.4.5.2 Elementos verticais ou inclinados

O problema de otimização é escrito para elementos verticais ou inclinados da seguinte forma:

$$\text{Minimizar: } f = b \cdot h \cdot C_C + A_S \cdot \rho_S \cdot C_S + 2 \cdot (b + h) \cdot C_F \quad (5-38)$$

$$\text{Sujeito à: } \begin{cases} N_R - N_d = 0 \\ M_R - M_d = 0 \\ \beta_x - \beta_{xi} \geq 0 \\ \beta_{xs} - \beta_x \geq 0 \\ \% \max \cdot b \cdot h - A_S \geq 0 \\ A_S - \% \min \cdot b \cdot h \geq 0 \end{cases} \quad (5-39)$$

As variáveis a serem otimizadas são: largura da seção ( $b$ ), altura da seção ( $h$ ), área de aço total ( $A_S$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ).

Conforme pode ser observado, o problema de otimização é formulado praticamente da mesma maneira, com uma pequena distinção apenas na função-objetivo, pois otimiza-se apenas a área de aço total do elemento, ao invés das áreas separadas de armadura e também no custo das fôrmas que é dado agora por todas as faces do elementos.

As restrições são as mesmas, com o acréscimo de uma restrição extra que define a quantidade mínima de armadura necessária para o elemento estrutural, dada pela taxa mínima de aço na seção,  $\rho_{\min}$ .

A área de armadura para os elementos verticais ou inclinados é considerada como uma variável de otimização única, ou seja, não há distinção entre armadura positiva ou negativa. Em projetos estruturais é convencional se adotar armaduras simétricas para pilares e elementos inclinados, justamente para evitar problemas de posicionamento das barras na obra. Assim, nesta formulação a área de armadura será otimizada em sua totalidade. Para distribuir as barras dentro da seção transversal, sempre de maneira simétrica, o critério utilizado é a recomendação da ABNT NBR 6118:2003 com relação ao espaçamento horizontal máximo entre duas camadas de armadura que não deve ultrapassar 40cm. Isso se dá para evitar problemas com flambagem das barras comprimidas dentro dos elementos estruturais.

O procedimento é iniciado considerando apenas duas camadas de armadura no elemento, ambas com metade da área total de aço. Após a otimização, verifica-se se a altura da seção resultou maior que 40cm. Em caso afirmativo, coloca-se uma camada extra de armadura no meio da seção, porém com menos área comparada às camadas mais externas. Várias proporções podem ser adotadas nesses casos. Uma delas, por exemplo, é admitir que cada camada mais externa tenha 40% da área total de aço e a camada do meio contribua com apenas 20% da área total. Desse modo, o requisito do espaçamento máximo de 40cm é atendido e o equilíbrio da seção é mantido. É interessante destacar que após obtenção da solução ótima, esta é introduzida nos elementos finitos e a estrutura é reprocessada para verificar a redistribuição de esforços até que esta seja desprezível de uma iteração para outra.

Esse procedimento pode ser utilizado sempre que o espaçamento entre duas camadas consecutivas resulte maior que 40cm, dividindo a área total em 3, 4, 5 até  $n$  camadas extras de armadura na seção. A Figura 5-6 ilustra esse processo para o caso de até 4 camadas de armadura alojadas na seção, porém podem ser consideradas quantas forem necessárias.

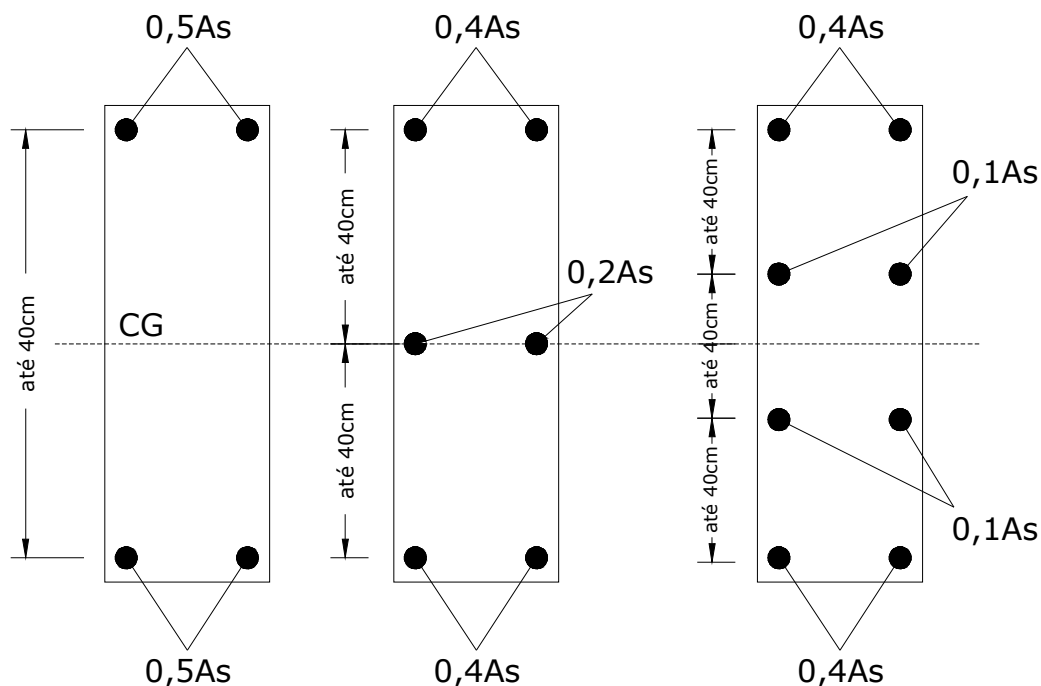


Figura 5-6 – Configurações possíveis de armadura para elementos verticais ou inclinados

A Figura 5-7 apresenta a convenção utilizada neste trabalho para diferenciar a largura e a altura da seção transversal dos elementos verticais e inclinados.

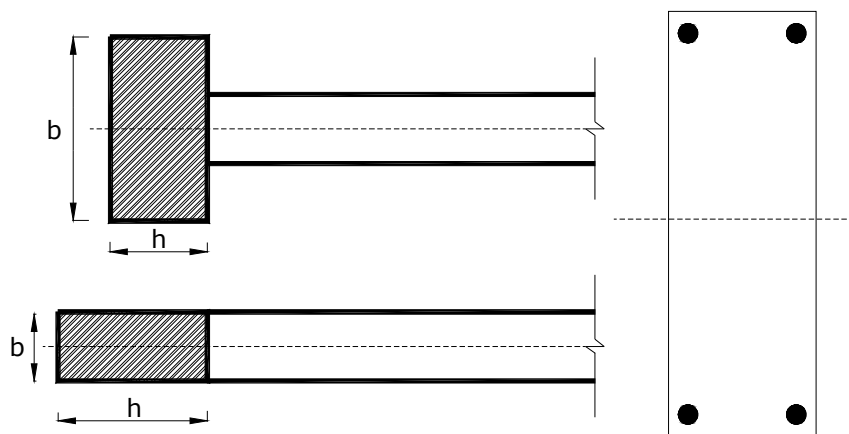


Figura 5-7 – Convenção para as dimensões da seção transversal dos elementos

Assim, a largura da seção,  $b$ , corresponde à dimensão perpendicular ao eixo do pórtico, ao passo que a altura da seção,  $h$ , é dada pela dimensão paralela ao eixo pórtico.

## **5.5 Otimização de Pórticos Planos**

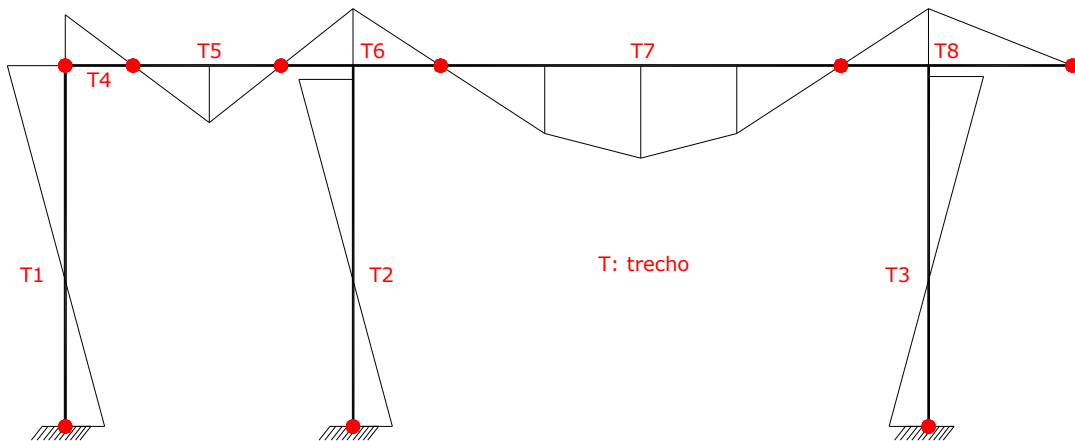
### **5.5.1 Tipo de abordagem**

Kirsch<sup>38</sup> (1993) apud Nina (2006) divide a otimização estrutural em três classes de aproximação. A primeira classe é a aproximação global, na qual a função-objetivo é formulada para todos os pontos da estrutura, analisando dessa maneira a estrutura por completo. O problema dessa abordagem consiste no grande trabalho computacional gerado, pois o problema de otimização precisa ser resolvido para todos os pontos da estrutura. Aliado a esse fato, para as estruturas em concreto armado tem-se um agravante ainda maior, por conta de sua complexidade e do forte caráter não-linear presente nos materiais, sobretudo no concreto. Na segunda classe tem-se a aproximação local, onde a função-objetivo e as restrições são verificadas para alguns trechos isolados da estrutura. Por um lado, o problema de otimização se torna mais simples, pois é resolvido apenas para alguns trechos da estrutura, como por exemplo, para seções de máximos esforços. Por outro lado, esse processo pode levar a resultados não satisfatórios para a estrutura como um todo. Já a terceira classe de aproximação considera uma combinação das duas primeiras classes, extrapolando os resultados obtidos com a aproximação local para toda a estrutura.

Este trabalho considera, portanto, essa aproximação combinada para a otimização dos elementos estruturais isolados e, conseqüentemente, para os pórticos planos em concreto armado. A estratégia utilizada para obter resultados com qualidade para a estrutura como um todo consiste, primeiramente, na divisão da estrutura em alguns trechos com características particulares. Essa divisão é governada principalmente pelo diagrama de momentos fletores, que distribui os trechos em função do sinal do momento fletor até o ponto onde este é nulo, conforme a Figura 5-8.

---

<sup>38</sup> Kirsch, U. (1993). Effective approximations for topological optimization. *The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro. Anais. COPPE/Federal University of Rio de Janeiro, v. 1, p. 3-10.



**Figura 5-8 – Divisão da estrutura em trechos para otimização**

Nos trechos como T5 e T7, o momento fletor é sempre positivo, caracterizando, portanto, somente um trecho de otimização. O mesmo raciocínio vale para os trechos de momento negativo. Para os pilares e elementos inclinados, não é necessário realizar essa divisão, exceto quando há mudança de pavimento, pois o que interessa é o máximo momento fletor e a máxima força normal, independentemente dos sinais, já que a armadura será sempre simétrica. A estrutura é então otimizada separadamente para cada um dos trechos. Ao final desse processo, para os elementos horizontais, como é o caso das vigas, adota-se a máxima altura obtida em todos os trechos de viga e dimensiona-se normalmente os demais trechos onde a altura foi regularizada, aproveitando, entretanto, o mesmo valor da posição da linha neutra obtido no processo de otimização daquele trecho. Fazendo-se isso é possível considerar no dimensionamento clássico de elementos horizontais, somente o momento fletor, pois a influência da força normal está embutida na posição da linha neutra da seção, que é mantida igual ao valor otimizado antes da regularização.

Com esse procedimento tem-se a aproximação local definida a partir da seção de máximo esforço no trecho, estendendo-se os resultados para todo o trecho. Após esse procedimento, as dimensões ótimas e as armaduras são distribuídas adequadamente ao longo dos elementos finitos da estrutura e esta é processada novamente. O objetivo de reprocessar a estrutura ótima é observar a redistribuição de esforços que ocorre em função das novas dimensões e áreas de armadura. Assim, a convergência é atingida quando a redistribuição dos esforços da iteração atual seja praticamente a mesma da iteração anterior. Dessa forma, atinge-se de maneira indireta a aproximação global a partir da abordagem local, garantindo bons resultados para toda a estrutura.

### 5.5.2 Considerações sobre a implementação computacional

Nesta seção são descritas as principais partes do módulo de otimização determinística do programa computacional desenvolvido, conforme ilustra o fluxograma da Figura 5-9. Os números acima das figuras geométricas do fluxograma indicam a legenda dos comentários sobre aquele item.

1. Leitura dos arquivos de entrada de dados. Foram criados arquivos separados para cada módulo do programa. Para a realização de análises de otimização determinística são necessários os dados referentes à discretização da estrutura, dimensões iniciais, armaduras, carregamentos, vinculação, não-linearidades e valores de convergência. Todos esses dados estão no arquivo de entrada da parte mecânica (estrutura) do programa. Um arquivo de impressão especial pode ou não ser requisitado pelo usuário. Nesse arquivo contém informações específicas para impressão, como por exemplo, dados somente de um determinado elemento finito ou nó interessante. E finalmente, no arquivo de otimização estão todos os dados referentes à divisão da estrutura em trechos, bem como os diâmetros de armadura adotados, espaçamentos, elementos finitos iniciais e finais que compõem cada trecho, custos de cada material, número de restrições e valores de convergência;

2. Resolução do sistema de equações via MEF. O sistema gerado a partir dos dados dos elementos é resolvido, calculando-se todos os deslocamentos dos nós, reações de apoio, tensões, deformações em todos os pontos de Gauss e esforços internos solicitantes em cada elemento finito. A estrutura pode ser tratada com modelos lineares ou não-lineares conforme escolha do usuário para a análise;

3. Busca pelos esforços máximos. Após a resolução do sistema de equações inicia-se um *loop* para todos os trechos da estrutura que serão otimizados. Para cada trecho faz-se uma seleção dos máximos valores para o momento fletor, força cortante e força normal, armazenando-os em vetores apropriados. A otimização considera somente a força normal e o momento fletor. A força cortante é usada depois que as dimensões ótimas foram encontradas para dimensionar a armadura necessária para combater as tensões de cisalhamento do trecho;

4. Decisão do tipo de elemento a ser otimizado. Verifica-se se o trecho em questão é um trecho com elemento horizontal ou vertical/inclinado. Essa distinção é feita através de um vetor informativo definido no próprio arquivo de entrada de dados de otimização;

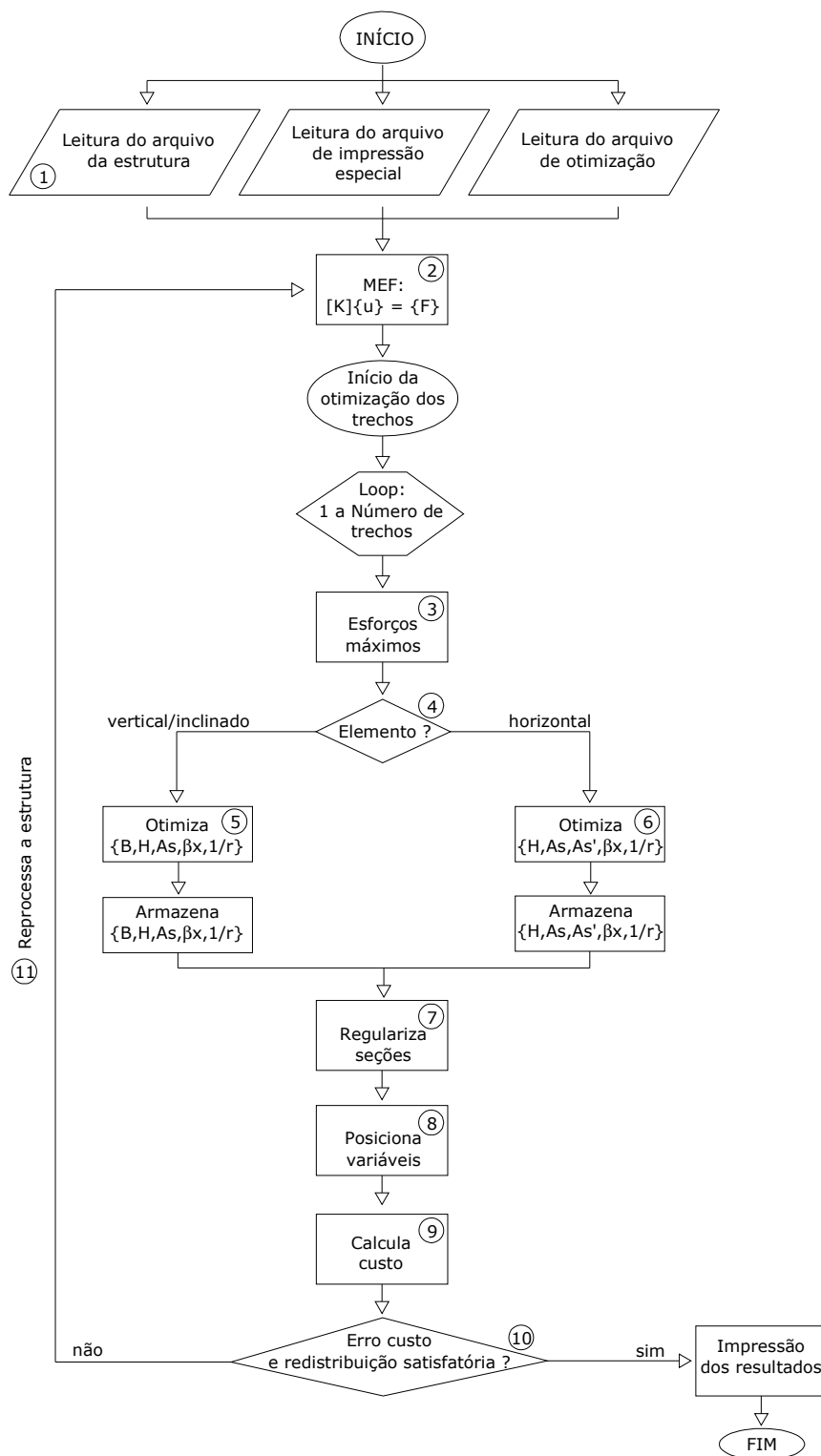


Figura 5-9 – Fluxograma do processo de otimização determinística

5. Otimização de elementos verticais ou inclinados. A rotina de minimização do custo utilizada neste caso é aquela definida pelas Equações 5-38 e 5-39, com posterior armazenamento dos resultados;

6. Otimização de elementos horizontais. A rotina de minimização do custo utilizada neste caso é aquela definida pelas Equações 5-36 e 5-37, com posterior armazenamento dos resultados. É interessante notar que uma única chamada à rotina de otimização é feita para cada trecho, não havendo necessidade de outras chamadas. Os resultados são então extrapolados para todos os elementos finitos que compõem o trecho;

7. Regularização das alturas dos elementos horizontais. Após a otimização de todos os trechos que constituem um determinado elemento horizontal da estrutura, faz-se a regularização das alturas obtidas. O que ocorre é que em cada trecho o problema de otimização é resolvido gerando valores ótimos apropriados para aquele trecho. A maior altura encontrada é então adotada para todo o elemento horizontal, mantendo-se os demais valores ótimos de armaduras para o trecho que resultou na maior altura. Os demais trechos são então dimensionados para o novo valor de altura adotado, mantendo-se a posição relativa da linha neutra obtida pela otimização desses trechos, regularizando, assim, todo o elementos horizontal da estrutura. Esse procedimento pode ser estendido para os elementos verticais caso queira-se a mesma altura em um lance inteiro de pilar, por exemplo, ao invés de obter alturas diferentes para cada pavimento;

8. Posicionamento das variáveis ótimas. As larguras e alturas otimizadas são colocadas nos elementos finitos de cada tipo, juntamente com as armaduras. Foi implementado um artifício no programa de modo que armaduras nulas obtidas no processo de otimização ou inferiores aos valores mínimos são substituídos por armaduras construtivas ou pelos respectivos valores mínimos, caso o usuário queira considerar sua influência. Assim, armaduras de compressão nulas nas vigas são substituídas por duas barras representando a armadura construtiva ou porta-estribo. O diâmetro das barras da armadura construtiva devem ser igual ou superior ao diâmetro dos estribos. Os critérios para cálculo de armaduras mínimas são os mesmos dados pela ABNT NBR 6118:2003. As armaduras calculadas são posicionadas ao longo da seção transversal em função da capacidade máxima de aço que cada camada pode alojar. A expressão que calcula o número de barras possíveis em uma única camada pode ser dada por:

$$n_{bar} = \frac{b - 2c - 2\phi_t + e_h}{\phi_l + e_h} \quad (5-40)$$

Porém, como o programa trabalha com área de armadura e não diretamente com quantidade de barras, essa expressão foi transformada para calcular a área máxima alojável



em uma única camada. A área de aço possível pode ser dada por  $A_{s,\max} = n_{bar} \cdot (\pi\phi_l^2/4)$ , resultando, portanto, na seguinte expressão direta:

$$A_{s,\max} = \frac{\pi\phi_l^4}{4} \left( \frac{b - 2c - 2\phi_t + e_h}{\phi_l + e_h} \right) \quad (5-41)$$

sendo que:  $n_{bar}$  é o número de barras alojáveis em uma camada da seção transversal;  $b$  é a largura da seção;  $c$  é o cobrimento de concreto;  $\phi_t$  e  $\phi_l$  são, respectivamente, os diâmetros adotados para as armaduras transversal e longitudinal;  $e_h$  corresponde ao espaçamento horizontal máximo entre duas barras consecutivas na camada da seção.

Dessa forma, a armadura total obtida no processo de otimização é disposta ao longo de camadas representando a realidade do detalhamento padrão. O mesmo ocorre com as armaduras transversais. A partir do valor dimensionado, após a otimização, para a área de estribos,  $A_{sw}$ , e do seu espaçamento horizontal,  $s$ , transforma-se essa informação em termos de taxa de armadura transversal, variável esta utilizada pelo programa, e posiciona-se ao longo de cada elemento finito pertencente ao trecho em questão. Admitindo estribos verticais, a taxa de armadura transversal é dada por:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b} \quad (5-42)$$

9. Cálculo do custo inicial total. Após o posicionamento final das grandezas ótimas na estrutura, calcula-se o custo total de cada trecho otimizado. Os resultados são somados uns aos outros resultando assim, no custo inicial total da estrutura. Inicial porque trata-se apenas do custo de projeto e construção da estrutura, não contemplando, portanto, os eventuais custos de falha que podem surgir ao longo da vida útil da mesma;

10. Cálculo do erro em termos de custo. O erro do processo de otimização global é definido pela diferença entre o custo total obtido em duas iterações sucessivas, bem como o erro em termos de redistribuição de esforços. A redistribuição é considerada encerrada quando na iteração seguinte não existe variação significativa de momentos fletores nas mesmas seções críticas dos trechos, resultando dessa maneira, em valores iguais das grandezas otimizadas. Com isso, considera-se que o algoritmo de otimização atinge a convergência. Fim do processo;

11. Caso o erro ainda seja superior à uma tolerância pré-estabelecida e ainda haja redistribuição significativa, retorna-se ao passo 2 calculando novamente a estrutura. Esse processo é então repetido até a convergência.

Os resultados são impressos em arquivos especiais de saída, novamente um arquivo para cada parte do programa.

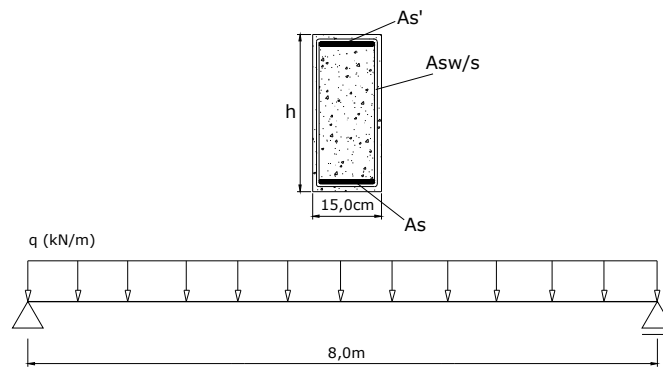
Destaca-se que este procedimento permite analisar diversos tipos de configurações estruturais de pórticos planos ou até mesmo de vigas ou pilares individuais de uma maneira bastante interessante, pois sempre considera a redistribuição de esforços na estrutura, chegando de fato a uma configuração final se não ótima global, mas muito próxima desta. Deve-se lembrar que o programa desenvolvido ainda não permite considerar de maneira plena todos os critérios para o projeto definitivo dessas estruturas, pois não leva em conta ancoragens de armaduras, perdas de aderência aço-concreto, decalagem de diagramas, cortes de barras ao longo do seu comprimento e grampos em pilares.

## **5.6 Exemplos de Aplicação**

A seguir, são apresentados dois exemplos de aplicação com o objetivo de analisar as rotinas desenvolvidas para a otimização de vigas e pilares em concreto armado.

### **5.6.1 Exemplo 1**

Este exemplo tem como objetivo verificar o modelo de otimização geral de barras em concreto armado desenvolvido neste trabalho. A estrutura escolhida consiste em uma viga biapoiada com 8 metros de vão, submetida a carregamento uniformemente distribuído ao longo de seu comprimento, conforme Figura 5-10, para gerar no meio do vão momentos fletores máximos variando entre 60.000,00 e 120.000,00 com incrementos de 10.000,00kN.cm.



**Figura 5-10 – Geometria da viga otimizada**

As variáveis de projeto otimizadas foram: altura da seção transversal ( $h$ ), áreas de armadura de tração ( $A_s$ ), de compressão ( $A_s'$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ). Não foi considerada a armadura de cisalhamento ( $A_{sw/s}$ ) no processo de otimização. A largura da seção foi adotada igual a  $15\text{cm}$  e mantida constante durante o processo de otimização.

Para analisar os resultados, foi realizado o dimensionamento clássico da viga, variando-se a altura da seção transversal para os dois primeiros casos de momento acima, fixando-se a posição relativa da linha neutra igual ao valor obtido no processo de otimização. Dessa forma, torna-se possível a comparação entre ambos os processos. A formulação desenvolvida também foi comparada com os resultados de Nina (2006).

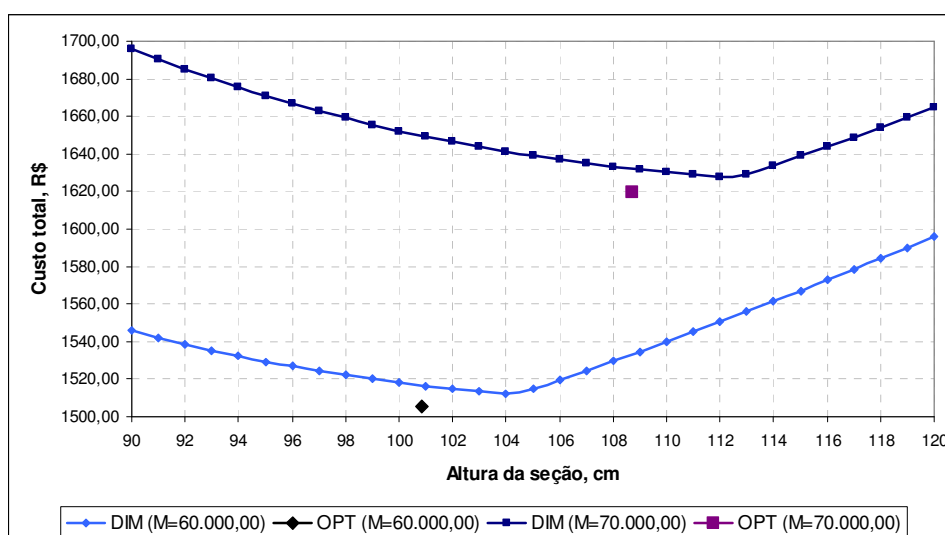
A Tabela 5-1 traz os parâmetros utilizados nas análises mecânica e de otimização da estrutura. O modelo mecânico em elementos finitos foi utilizado para computar os máximos esforços internos fornecendo-os ao modelo de otimização. É evidente que, para este caso, os esforços máximos poderiam ser fornecidos diretamente ao modelo de otimização por se tratar de uma estrutura simples e isostática. Porém, esse procedimento foi adotado para verificar o programa completo, que acopla em um modelo único as partes mecânica e de otimização, possibilitando assim, a resolução direta de problemas mais complexos em engenharia, inclusive com a consideração do comportamento não-linear dos materiais.

Os custos dos materiais, bem como todos os demais parâmetros de otimização foram extraídos de Nina (2006). Os custos incluem a mão-de-obra específica referente a cada etapa construtiva, isto é, lançamento e adensamento do concreto, corte, dobra e montagem das armaduras, bem como travamento e escoramento das fôrmas de madeira.

**Tabela 5-1 – Parâmetros utilizados na análise mecânica e de otimização**

Descrição (parte mecânica)	Parâmetro	Valor
Resistência característica do concreto	$f_{CK}$	20MPa
Módulo de elasticidade tangente do concreto	$E_{Ci}$	21300MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Resistência característica do aço	$f_{YK}$	500MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	21000MPa
Massa específica do aço	$\rho_Y$	7850kg/m <sup>3</sup>
Número máximo de iterações	$It_{max}$	3000
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	10 <sup>-3</sup>
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20
Discretização da estrutura (elementos de igual comprimento)	Número de nós	9
	Número de elementos finitos	8
Descrição (parte de otimização)	Parâmetro	Valor
Taxa máxima de armadura de flexão	$t_{max}$	4%
Distância do CG da armadura à face tracionada da seção	$d'$	3cm
Coefficiente parcial de segurança para o concreto	$\gamma_C$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para o aço	$\gamma_Y$	1,15
Custo do concreto	$C_C$	R\$ 226,58/m <sup>3</sup>
Custo do aço	$C_A$	R\$ 4,36/kg
Custo da madeira	$C_M$	R\$ 42,10/m <sup>2</sup>

O dimensionamento foi feito variando-se a altura com incrementos de 1cm e calculando-se as áreas de aço correspondentes. Nas figuras, a seguinte legenda foi utilizada: “DIM” à solução encontrada no dimensionamento, enquanto que “OPT” representa a solução ótima.

**Figura 5-11 – Variação do custo em função da altura da viga**

Verificou-se que o modelo de otimização conseguiu buscar nos dois casos estudados o ponto ótimo, ou seja, o ponto de menor custo. Isso foi possível graças à formulação geral

desenvolvida, sem imposição de restrições para os valores da posição da linha neutra e da curvatura da seção. Na verdade, o algoritmo de otimização busca a melhor configuração que resiste aos esforços solicitantes, considerando essas duas grandezas, ao passo que no dimensionamento, normalmente, fixa-se a posição da linha neutra e obtém-se as armaduras e altura dos elementos.

**Tabela 5-2 – Comparação entre as respostas ótimas do problema**

$M_K$ (kN.cm)	Este trabalho					Nina (2006)		
	$h$ (cm)	$A_S$ (cm <sup>2</sup> )	$\beta_x$	$1/r$ (cm <sup>-1</sup> )	<i>Custo</i> (R\$)	$h$ (cm)	$A_S$ (cm <sup>2</sup> )	<i>Custo</i> (R\$)
60.000,00	100,87	18,30	0,535	6,49 E-5	1505,18	113,70	23,31	1763,84
70.000,00	108,71	19,76	0,536	6,01 E-5	1619,46	122,57	25,18	1898,88
80.000,00	116,71	21,13	0,537	5,62 E-5	1725,83	130,83	26,92	2024,48
90.000,00	122,86	22,41	0,538	5,30 E-5	1825,73	138,58	28,55	2142,56
100.000,00	129,35	23,62	0,538	5,03 E-5	1906,73	145,91	30,09	2254,16
110.000,00	135,51	24,77	0,539	4,79 E-5	1965,04	152,89	31,56	2360,32
120.000,00	141,40	25,87	0,540	4,59 E-5	2020,75	159,55	32,97	2461,76

As colunas com altura da seção, armadura de tração e custo total da viga foram plotadas contra o momento fletor aplicado, comparando graficamente ambos os resultados. Verificou-se que tanto os custos finais e dimensões da seção obtidos com a formulação geral foram sensivelmente menores que os valores encontrados em Nina (2006). Isso ocorreu justamente pela liberdade dada ao algoritmo em termos da posição da linha neutra e curvatura da seção, que por serem variáveis de otimização, permitem que a melhor configuração equilibrada seja encontrada de fato. A formulação de Nina (2006) restringe a posição da linha neutra nas proximidades do limite entre os domínios 3 e 4, assim, como utiliza nas restrições de equilíbrio, a tensão de escoamento da armadura, ao invés de um valor qualquer de tensão, restringindo novamente a seção. É interessante notar que os valores de  $\beta_x$  encontrados no processo encontram-se no domínio 3, com deformação do concreto em -3,5‰ e deformação do aço variando. Com isso, quanto maior o valor  $\beta_x$ , menor é a curvatura, pois à medida que a linha neutra avança na seção, a deformação da armadura de tração diminui.

A redução no custo da viga foi, dessa forma, consideravelmente menor, o que sugere uma possível economia na construção da estrutura. Vale comentar que em um processo produtivo industrial ou até mesmo na construção de edifícios de múltiplos andares, esse tipo de abordagem permitiria grande economia, com redução de cerca de 15,4% para o caso de

momento fletor de 100.000,00kN.cm, por exemplo. Em todos os casos considerados, a armadura de compressão resultou nula, já que as configurações ótimas ficaram sempre no domínio 3 de deformação.

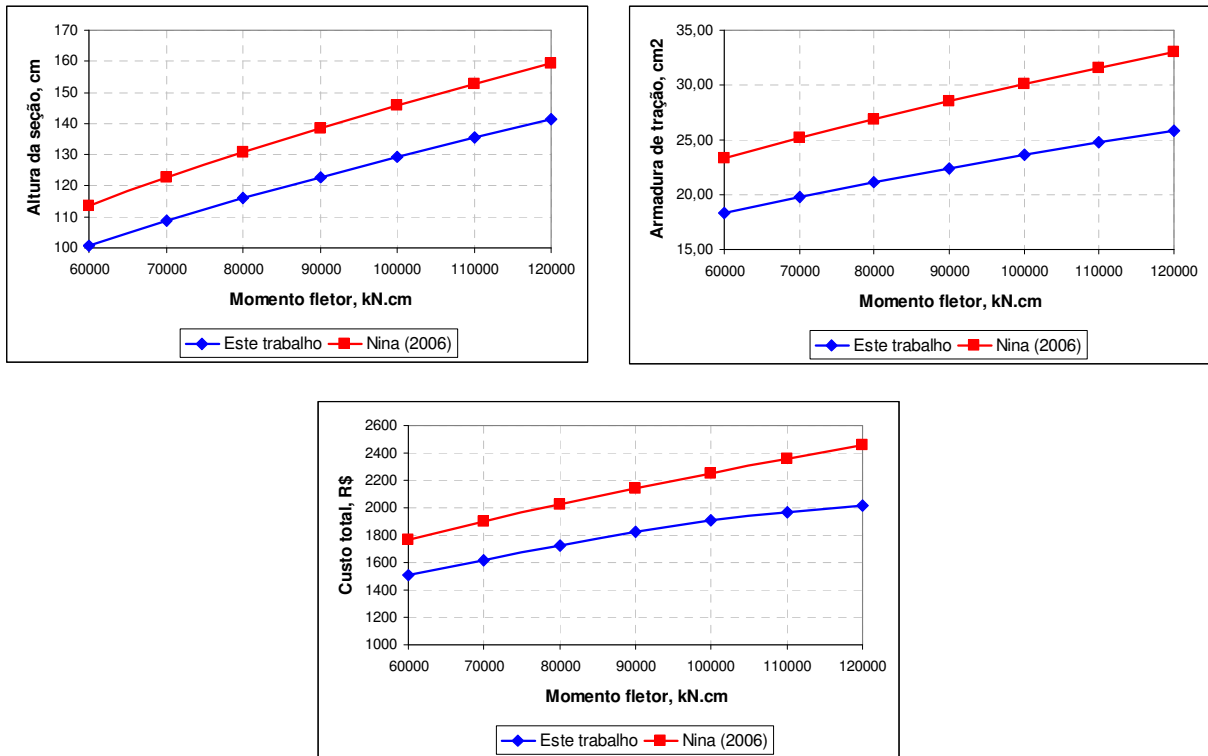


Figura 5-12 – Comparação gráfica entre as respostas ótimas

Conclui-se, portanto, que o modelo apresentou bons resultados diante das comparações feitas neste exemplo, podendo ser utilizado em conjunto com os modelos mecânico e de confiabilidade.

### 5.6.2 Exemplo 2

Neste exemplo, pretende-se validar o modelo de otimização de barras em concreto armado, aplicando-o para o caso de pilares. Foram consideradas duas combinações de carregamento, dadas por:

- Situação 1:  $N = 1000\text{kN}$  e  $M = 1000\text{kN.cm}$  (excentricidade = 1cm);
- Situação 2:  $N = 1500\text{kN}$  e  $M = 45000\text{kN.cm}$  (excentricidade = 30cm).

As respostas foram comparadas também com o trabalho de Nina (2006), que apresentou uma formulação para otimização de pilares. Os parâmetros utilizados foram

exatamente os mesmos encontrados em Nina (2006), permitindo assim a comparação adequada entre as duas formulações.

**Tabela 5-3 – Parâmetros utilizados na análise de otimização**

Descrição	Parâmetro	Valor
Resistência característica do concreto	$f_{CK}$	20MPa
Resistência característica do aço	$f_{YK}$	500MPa
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	210000MPa
Massa específica do aço	$\rho_Y$	7850kg/m <sup>3</sup>
Taxa máxima de armadura	$t_{max}$	4%
Taxa mínima de armadura	$t_{min}$	0,4%
Distância do CG da armadura à face tracionada da seção	$d'$	3cm
Coefficiente parcial de segurança para o concreto	$\gamma_C$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para o aço	$\gamma_Y$	1,15
Custo do concreto	$C_C$	R\$ 226,58/m <sup>3</sup>
Custo do aço	$C_A$	R\$ 4,36/kg
Custo da madeira	$C_M$	R\$ 42,10/m <sup>2</sup>

As estruturas reais submetidas a esse tipo de situação de carregamento são várias, desde pilares em concreto armado até mesmo elementos inclinados, cada vez mais comuns hoje em dia nas construções civis. Seu acoplamento com o modelo mecânico em elementos finitos desenvolvido neste trabalho é imediato, podendo ser utilizado no projeto de pórticos planos em concreto armado.

Foram otimizadas a altura da seção transversal do pilar ( $h$ ), área de armadura total ( $A_S$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ). A largura da seção foi adotada igual a 19 e 24cm, respectivamente, e mantida constante durante o processo de otimização.

Para excentricidade igual a 1cm, observou-se grande proximidade entre ambos os resultados, conforme pode ser observado na Tabela 5-4. Porém, ainda assim, o custo total obtido pela formulação proposta neste trabalho resultou menor, pois ao se considerar a curvatura e a posição relativa da linha neutra como variáveis de otimização é possível equilibrar melhor a seção resistente. A seção ótima foi dimensionada, portanto, no domínio 5, visto que não houve preponderância do momento fletor sobre a força normal atuante. A diferença percentual entre os valores ótimos (linha em negrito) para este caso foi de 9,8%.

Para o caso de excentricidade igual a 30cm, as observações foram as mesmas (Tabela 5-5). Como o momento fletor é preponderante sobre a força normal, o comportamento desse pilar já se aproxima mais de comportamento de viga. Dessa forma, os pilares resultantes caíram no domínio 4 de deformação. A diferença percentual entre os valores ótimos (linha em negrito) para este foi de 6,5%.

Tabela 5-4 – Resultados para N = 1000kN e M = 1000kN.cm

Este trabalho						Nina (2006)			
b (cm)	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	1/r (cm <sup>-1</sup> )	Custo (R\$/m)	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	Custo (R\$/m)
19,00	38,00	4,38	1,77	3,92 E-5	71,34	38,00	4,25	1,35	78,91
19,00	39,00	3,82	1,73	3,92 E-5	70,68	39,00	3,66	1,34	78,16
<b>19,00</b>	<b>40,34</b>	<b>3,07</b>	<b>1,68</b>	<b>3,93 E-5</b>	<b>69,83</b>	<b>40,00</b>	<b>3,07</b>	<b>1,33</b>	<b>77,42</b>
19,00	41,00	3,12	2,29	2,19 E-5	70,83	41,00	3,12	1,28	78,83
19,00	42,00	3,19	2,53	1,77 E-5	72,37	42,00	3,19	1,25	80,37

Tabela 5-5 – Resultados para N = 1500kN e M = 4500kN.cm

Este trabalho						Nina (2006)			
b (cm)	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	1/r (cm <sup>-1</sup> )	Custo (R\$/m)	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	Custo (R\$/m)
24,00	90,00	10,63	0,68	5,75 E-5	178,48	95,00	11,50	0,65	191,23
24,00	91,00	9,99	0,67	5,72 E-5	177,23	96,00	10,66	0,65	189,75
<b>24,00</b>	<b>92,75</b>	<b>8,90</b>	<b>0,66</b>	<b>5,67 E-5</b>	<b>175,21</b>	<b>97,59</b>	<b>9,37</b>	<b>0,64</b>	<b>187,51</b>
24,00	93,00	8,93	0,67	5,49 E-5	175,65	98,00	9,41	0,64	188,22
24,00	94,00	9,02	0,67	4,82 E-5	177,43	99,00	9,50	0,64	189,93

Para ilustrar o comportamento dos resultados, foram plotados gráficos de altura da seção contra custo, posição relativa da linha neutra e armadura total, sempre considerando excentricidade de 1cm e de 30cm, da esquerda para direita. A Figura 5-13 mostra o ponto ótimo encontrado pelas formulações. Mesmo diminuindo ou aumentando a altura da seção transversal do pilar, a configuração resistente resultou mais cara do que a solução ótima, evidenciando assim a potencialidade do modelo desenvolvido.

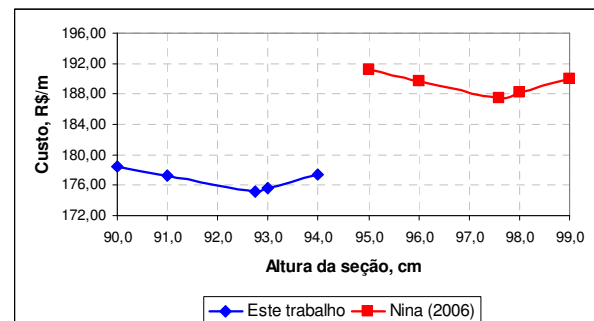
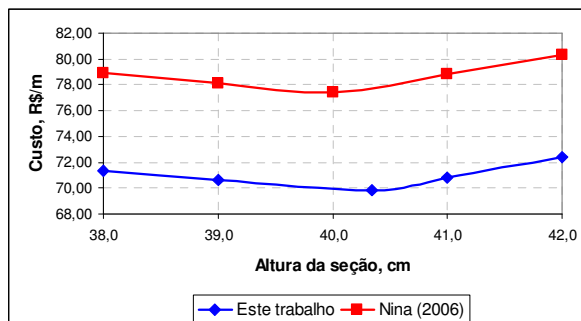


Figura 5-13 – Relação entre altura da seção e custo por metro de pilar



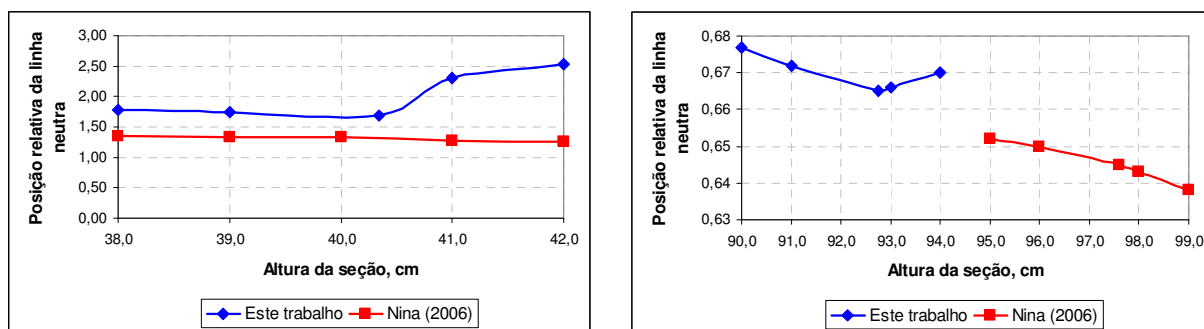


Figura 5-14 – Relação entre altura da seção e posição relativa da linha neutra

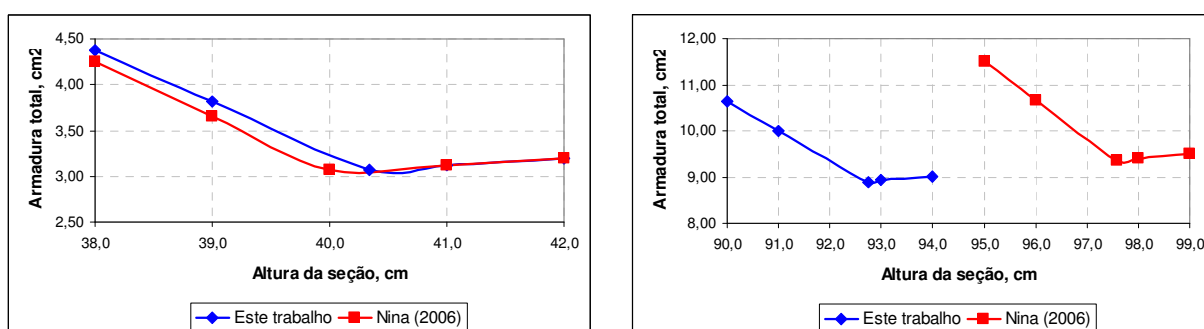
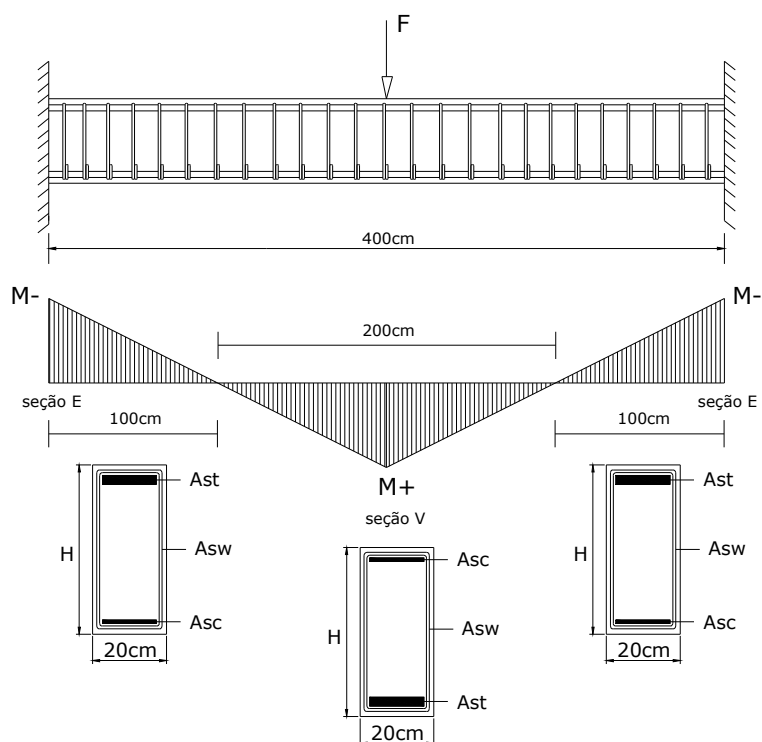


Figura 5-15 – Relação entre altura da seção e área de armadura total

Com base nesses resultados, concluiu-se que a formulação desenvolvida para otimização de elementos de barra em concreto armado apresentou caráter geral, com possibilidade de emprego para qualquer tipo de elemento estrutural, não importante se o elemento é uma viga, pilar ou inclinado.

### 5.6.3 Exemplo 3

Este exemplo apresenta a comparação entre uma solução obtida via dimensionamento convencional de vigas em concreto armado e a solução otimizada a partir do modelo desenvolvido neste trabalho. Após a obtenção da estrutura ótima, uma análise de confiabilidade foi realizada para comparar as duas soluções. A estrutura escolhida foi uma viga em concreto armado bi-engastada, submetida a uma força concentrada no meio do vão. A Figura 5-16 traz as dimensões da viga, geometria, carregamento e diagrama de momentos fletores considerado na análise.



**Figura 5-16 – Estrutura considerada neste exemplo**

A força  $F$  aplicada foi definida pelas grandezas  $G + Q = 73 + 16 = 89\text{kN}$ . Assim, considerou-se carga permanente,  $G$  e ação variável,  $Q$  sobre a estrutura. As seções  $E$  representam os engastes, cuja armadura de tração,  $A_{ST}$  é negativa e armadura de compressão ou porta-estribos,  $A_{SC}$  é positiva. A seção  $V$  corresponde ao meio do vão e possui a situação oposta à dos engastes, conforme pode ser observado na figura acima. Um outro dado importante da análise é que a configuração do engaste ilustrada pela seção  $E$  foi considerada somente nos trechos de 100cm da viga, ao passo que a configuração do vão, dada pela seção  $V$ , foi usada também somente ao longo dos 200cm entre o fim das seções dos engastes. Essa característica é importante para a otimização, pois o programa posiciona automaticamente as seções armadas ao longo dos elementos finitos de cada trecho da viga.

A viga foi discretizada em 8 elementos finitos com 50cm de comprimento cada para que as regiões de inversão de momento fletor ficassem bem definidas. Com isso, a viga foi dividida em três trechos para o processo de otimização, onde os trechos 1 e 3, com 100cm cada correspondem às seções  $E$  e o trecho 2, com 200cm é definido pela seção  $V$ .

**Tabela 5-6 – Parâmetros mecânicos e de otimização da análise**

Descrição	Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade do aço	$E_s$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$k_s$	21000MPa
Massa específica do aço	$\rho_s$	7850kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Taxa máxima de armadura longitudinal	$t_{max}$	4%
Taxa mínima de armadura longitudinal	$t_{min}$	0,4%
Distância do CG da armadura à face tracionada da seção	$d'$	4cm
Cobrimento do concreto	$c$	3cm
Coefficiente parcial de segurança para o concreto	$\gamma_c$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para o aço	$\gamma_s$	1,15
Coefficiente parcial de segurança para G	$\gamma_G$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para Q	$\gamma_Q$	1,4
Diâmetro da armadura longitudinal	$\phi_L$	12,5mm
Diâmetro da armadura transversal	$\phi_T$	5,0mm
Espaçamento horizontal entre barras longitudinais	$e_h$	2,0cm
Tolerância em custo no processo de otimização	$Tol_{ot}$	10 <sup>-3</sup>
Incremento de carga aplicado	$\lambda$	5kN
Número máximo de iterações mecânicas	$It_{max}$	300
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	10 <sup>-3</sup>
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20
Discretização da estrutura (elementos de igual comprimento)	Número de nós	9
	Número de elementos finitos	8
Custo do concreto	$C_c$	R\$ 226,58/m <sup>3</sup>
Custo do aço	$C_s$	R\$ 4,36/kg
Custo da madeira	$C_f$	R\$ 42,10/m <sup>2</sup>

As variáveis otimizadas foram a altura da seção transversal da viga ( $h$ ), área de armadura de tração ( $A_{ST}$ ), área de armadura de compressão ( $A_{SC}$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ). A armadura de cisalhamento não foi considerada na análise. A largura da seção foi adotada igual a 20cm e mantida constante durante o processo de otimização.

**Tabela 5-7 – Resultados do dimensionamento e do processo de otimização da viga**

Método	Trecho	$h$ (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$C_c$ (R\$)	$C_s$ (R\$)	$C_f$ (R\$)	$C_{TOTAL}$ (R\$)
DIM	1	40,00	4,35	18,13	14,91	42,10	300,54
	2	40,00	4,35	36,24	29,82	84,20	
	3	40,00	4,35	18,13	14,91	42,10	
OPT	1	33,77	4,09	15,30	14,00	36,85	264,61
	2	33,77	4,09	30,61	27,99	73,71	
	3	33,77	4,09	15,30	14,00	36,85	

Os resultados do processo também foram apresentados na forma de curvas de convergência tanto para o custo total da viga, quanto para as variáveis de projeto, conforme a

Figura 5-17. Como a solicitação devido ao momento fletor é a mesma nos engastes e no meio do vão, a armadura de tração obtida ora foi negativa, seções dos engastes, ora positiva, seção do meio do vão.

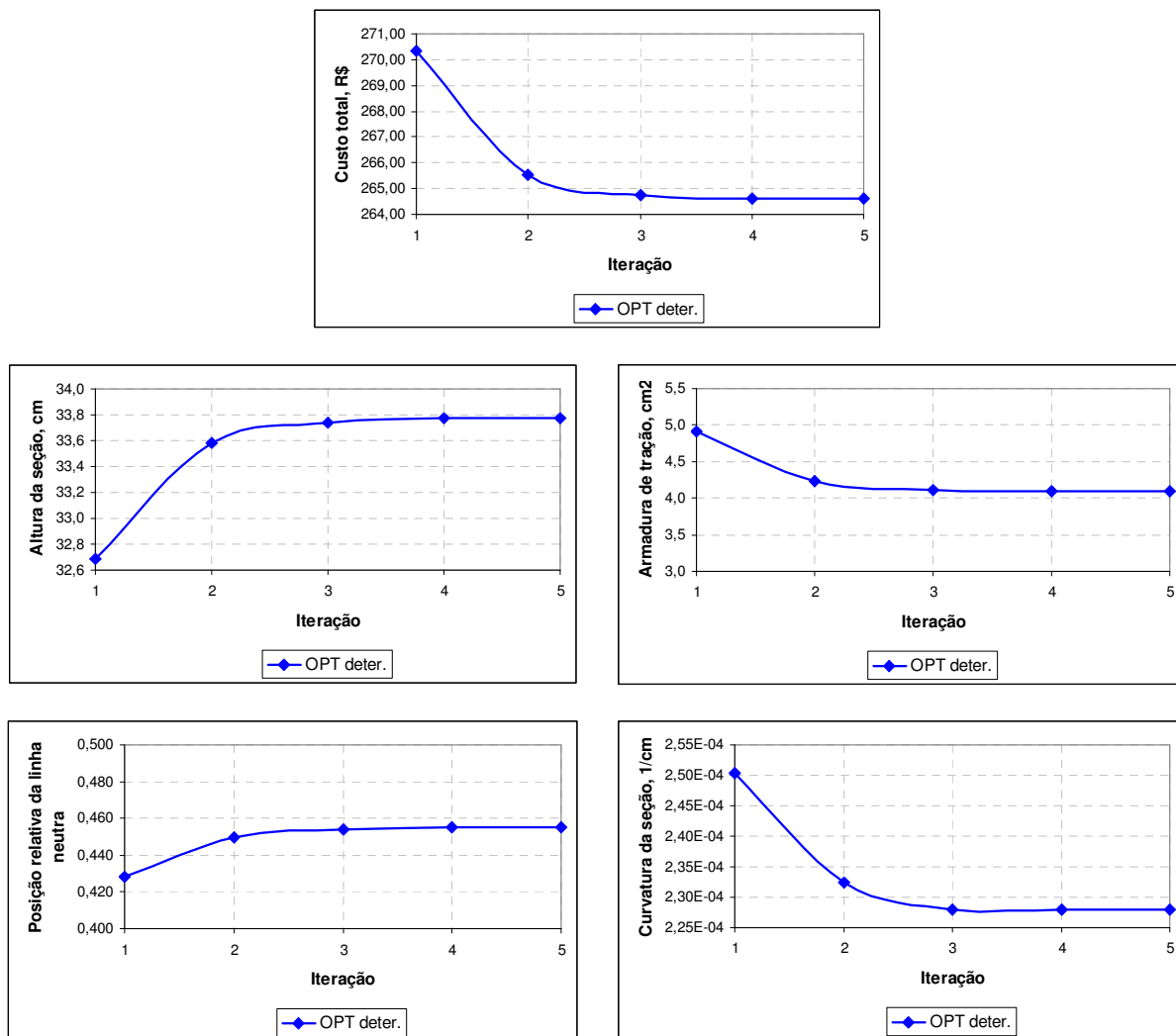


Figura 5-17 – Resultados da análise de otimização

A viga resultou no domínio 3 de deformação, com  $\beta_x$  igual 0,455. A consideração da posição relativa da linha neutra e da curvatura da seção permite que o algoritmo obtenha a configuração estrutural das seções da maneira mais balanceada, diminuindo o custo total da estrutura. A altura de 40cm para o dimensionamento foi escolhida segundo o critério clássico de 10% do vão, o que, para esse caso, resultou em uma estrutura cerca de 12% mais cara.

Para comparar as duas soluções, primeiramente foi realizada uma análise puramente mecânica, com carregamento aplicado de 89kN e, em seguida, uma análise de confiabilidade estrutural. Na análise mecânica, adotou-se resistência do concreto igual a 25MPa e resistência do aço no valor de 500MPa.

Como era esperado, a configuração ótima apresentou menos rigidez que a estrutura dimensionada. Para a carga total aplicada, o deslocamento vertical do meio do vão da solução ótima foi aproximadamente o dobro do valor observado com a configuração inicial. Isso ocorreu por conta da menor altura e menor área de armadura, ambas provenientes do processo de otimização.

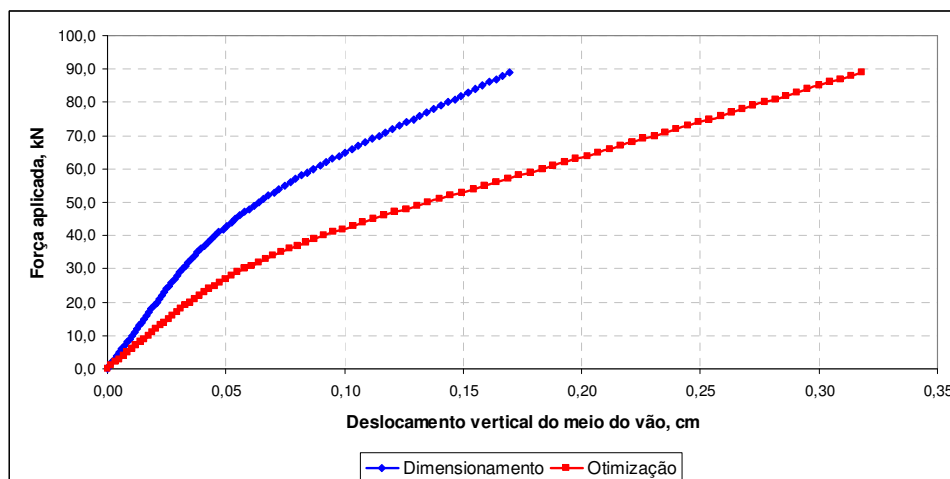


Figura 5-18 – Trajetória de equilíbrio do ponto de aplicação da força

A análise de confiabilidade foi realizada considerando-se o método FORM, com técnica dos gradientes numéricos. A Tabela 5-8 apresenta a associação estatística empregada na análise.

Tabela 5-8 – Variáveis aleatórias utilizadas na análise

Variável	Símbolo	Média	C.O.V.	Distribuição
Resistência do concreto	$X_1 = f_c$	33MPa	15%	Normal
Resistência do aço	$X_2 = f_s$	576MPa	8%	Normal
Ação permanente	$X_3 = G$	76,65kN	10%	Normal
Ação variável	$X_4 = Q$	16,0kN	25%	Normal

As médias do concreto e do aço foram escolhidas para que os valores característicos resultassem, respectivamente, em 25 e 500MPa. Para a ação permanente, o valor médio adotado foi 1,05 vezes o valor nominal de G, dado por 73kN. Já para a ação variável adotou-se média igual ao valor nominal de 16kN.

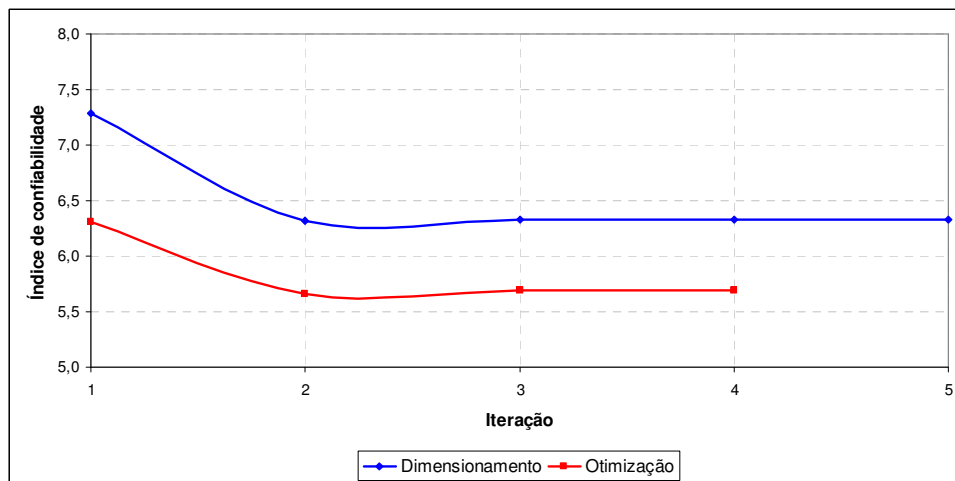
Foi considerado somente um modo de falha, definido pela equação de estado limite correspondente à ruptura dos materiais no meio do vão ( $\epsilon_{c,lim} = -3,5\%$  e  $\epsilon_{s,lim} = 10\%$ ). Assim, a equação de estado limite foi dada por:  $G(X) = P_{ULT}(X_1, X_2) - X_3 - X_4$ .

Após a otimização da viga, o índice de confiabilidade referente ao estado limite último da seção do meio do vão foi reduzido de 6,33 para 5,69. Em termos de probabilidade

de falha, o valor de dimensionamento foi de  $1,21 \times 10^{-10}$ , ao passo que para otimização foi de  $6,25 \times 10^{-9}$ .

Segundo o JCSS (2001) para consequências de falha moderadas com custo relativo da medida de segurança considerado como sendo normal, o índice de confiabilidade requerido para ELU deve ser de 4,2. Desse forma, ambas as soluções apresentaram requisitos mais do que satisfatórios para a segurança a esse estado limite último.

O que é interessante discutir é que ao se otimizar uma estrutura, esta trabalhará mais próxima de seus limites, reduzindo, portanto, sua margem de segurança. Em função disso, a análise de confiabilidade estrutural torna-se muito importante em situações como essa, pois permite avaliar mais precisamente, através de probabilidades de falha a segurança das estruturas.



**Figura 5-19 – Convergência do índice de confiabilidade**

Em termos de sensibilidade, a resistência do concreto foi a variável que mais apresentou influência sobre a probabilidade de falha da estrutura, conforme pode ser observado na Figura 5-20, onde estão indicados os valores das variáveis aleatórias no ponto de projeto e na média.

Diante dos resultados observados, concluiu-se que o algoritmo de otimização foi capaz de encontrar a configuração ótima para a viga em estudo e, combinado à análise de confiabilidade, mostrou-se um procedimento bastante interessante para o projeto de estruturas de barras em concreto armado.

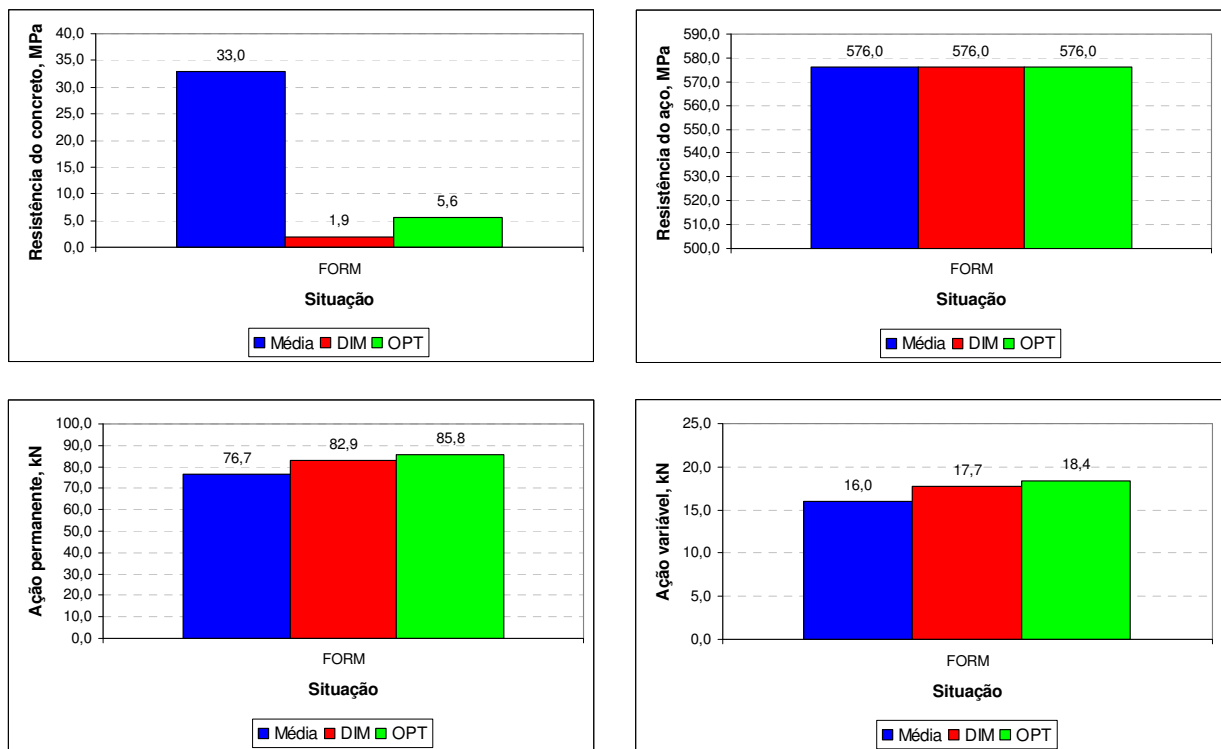


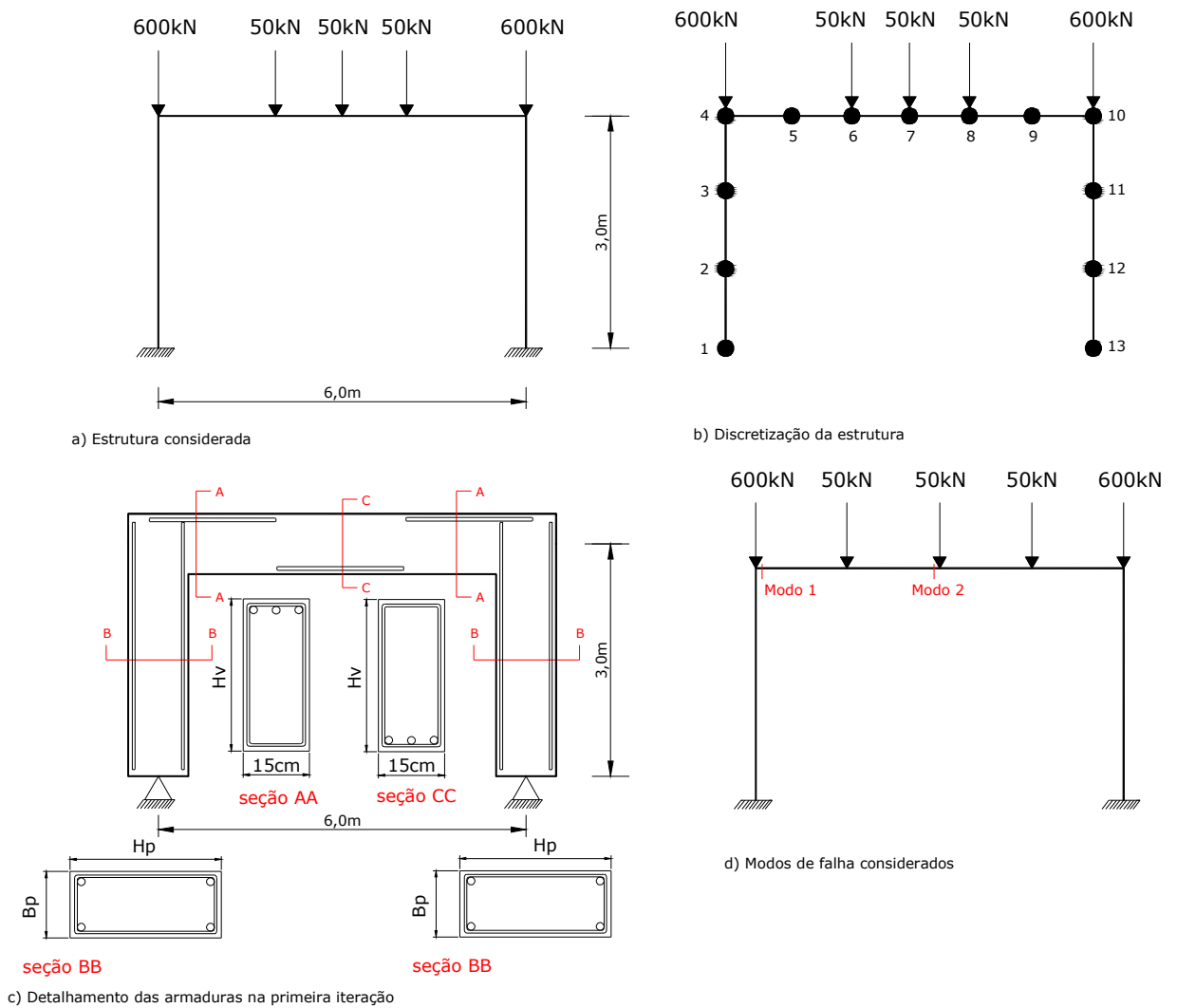
Figura 5-20 – Coordenadas do ponto de projeto no espaço físico

#### 5.6.4 Exemplo 4

Este exemplo tem como objetivo mostrar o desempenho do algoritmo de otimização de barras em concreto armado, acoplado ao programa principal, formando um procedimento computacional para otimização de pórticos planos. Inicialmente, são mostrados os resultados do processo de otimização determinística considerando modelo elástico-linear e não-linear dos materiais. Em seguida, realiza-se uma análise de confiabilidade para as configurações ótimas obtidas com cada modelo, comparando-as entre si.

O pórtico foi discretizado em 12 elementos finitos de 1,0m de comprimento cada, com 6 pontos de Gauss ao longo de cada elemento e 20 pontos distribuídos ao longo da altura para a integração numérica. A viga foi submetida a três forças de 50kN e os pilares foram carregados com forças de 600kN cada, representando a existência de outros 8 pavimentos.

Para o concreto, na análise de otimização determinística, foram adotados  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  e  $E_c = 21300\text{MPa}$ , para a resistência à compressão e o módulo de elasticidade longitudinal, respectivamente. A largura da seção transversal da viga foi mantida constante e igual a 15cm.



**Figura 5-21 – Estrutura analisada, discretização e modo de falha considerado**

Primeiramente, foi realizada a minimização do custo inicial total do pórtico, considerando o concreto com comportamento elástico-linear e as armaduras com o modelo elastoplástico com encruamento isótropo positivo. As dimensões dos pilares e da viga foram obtidas no processo, bem como suas armaduras longitudinais. A armadura transversal não foi considerada no processo. Em seguida, para comparação, o mesmo procedimento foi repetido, porém desta vez considerando o modelo de dano para o concreto, tornando a análise totalmente não-linear. As funções de custo total da viga e dos pilares são exatamente as mesmas já definidas neste capítulo.

Em termos da otimização, o pórtico foi dividido em 5 trechos, conforme o diagrama de momentos fletores ilustrado na Figura 5-22. Foi considerado cada pilar como sendo um trecho, pois os esforços escolhidos são os máximos valores do momento fletor e da força normal, com armadura simétrica. Já a viga foi dividida em três trechos de otimização,



justamente por apresentar regiões de momento máximo positivo e negativo. Por conta disso, cada uma dessas regiões foi otimizada separadamente. Ao final do processo, fez-se uma regularização da altura da viga, adotando o maior valor obtido na otimização dos três trechos com posterior dimensionamento à flexão para os trechos que tiveram a altura modificada. Após isso, o custo total foi então avaliado para a estrutura regularizada. As dimensões ótimas por sua vez foram distribuídas ao longo dos elementos finitos e a estrutura foi processada novamente para verificar a redistribuição de esforços. Esse processo foi repetido até a convergência em termos do custo total obtido e quando a redistribuição não mais foi significativa. É interessante destacar que esse tipo de processo é automático em ferramentas como esta, pois a estrutura é reprocessada quantas vezes forem necessárias até de fato atingir a configuração ótima em termos também de redistribuição de esforços. Esse comportamento é melhor observado ao se considerar os modelos não-lineares de comportamento dos materiais, pois a danificação do concreto à medida que o carregamento é aplicado torna-se o principal agente responsável por essa redistribuição.

**Tabela 5-9 – Parâmetros mecânicos e de otimização da análise**

Descrição	Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade do aço	$E_S$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$k_S$	21000MPa
Massa específica do aço	$\rho_S$	7850kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,25
Taxa máxima de armadura longitudinal	$t_{max}$	4%
Taxa mínima de armadura longitudinal	$t_{min}$	0,4%
Distância do CG da armadura à face tracionada da seção	$d'$	4,3cm
Cobrimento do concreto	$c$	3cm
Coefficiente parcial de segurança para o concreto	$\gamma_C$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para o aço	$\gamma_S$	1,15
Coefficiente parcial de segurança para G	$\gamma_G$	1,4
Diâmetro da armadura longitudinal	$\phi_L$	16,0mm
Diâmetro da armadura transversal	$\phi_T$	5,0mm
Espaçamento horizontal entre barras longitudinais	$e_h$	2,0cm
Tolerância em custo no processo de otimização	$Tol_{ot}$	10 <sup>-5</sup>
Incrementos de carga aplicados	$\lambda_{50}/\lambda_{600}$	1kN/12kN
Número máximo de iterações mecânicas	$It_{max}$	300
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	10 <sup>-3</sup>
Custo do concreto	$C_C$	R\$ 226,58/m <sup>3</sup>
Custo do aço	$C_S$	R\$ 4,36/kg
Custo da madeira	$C_F$	R\$ 42,10/m <sup>2</sup>

Com os resultados de ambos os procedimentos, foi realizada uma análise de confiabilidade via FORM com a técnica dos gradientes numéricos para os modos de falha mostrados na Figura 5-21, onde a falha foi definida pela ruptura dos materiais aço e concreto, quando estes atingirem seus limites de deformação, dados por -3,5‰ para o concreto e 10‰ para o aço. A análise de confiabilidade foi feita através do FORM para os dois modos.

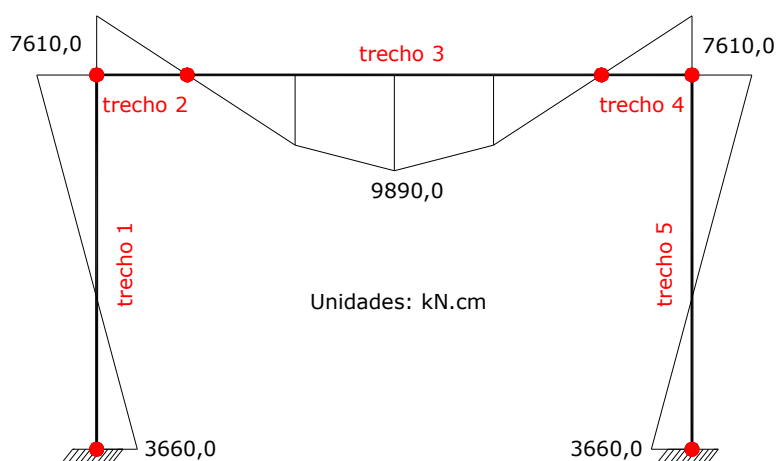


Figura 5-22 – Diagrama de momentos fletores do pórtico na primeira iteração

Foram consideradas três variáveis aleatórias na análise de confiabilidade, sendo todas independentes entre si e com distribuição normal de probabilidades, com associação estatística dada pela Tabela 5-10. As forças de 600kN foram consideradas como determinísticas, entrando somente as forças verticais aplicadas diretamente sobre a viga como variáveis aleatórias.

Tabela 5-10 – Variáveis aleatórias utilizadas na análise

Variável	Símbolo	Média	C.O.V.	Distribuição
Resistência do concreto	$X_1 = f_c$	26,58MPa	15%	Normal
Resistência do aço	$X_2 = f_s$	576MPa	8%	Normal
Ação permanente	$X_3 = G$	52,5kN	10%	Normal

Conforme pode ser observado na Figura 5-23, o custo obtido com o modelo não-linear foi maior quando comparado à resposta do modelo linear. Isso ocorreu porque as dimensões das seções transversais e as áreas de armadura resultaram um pouco maior no caso não-linear. Porém, o que se verificou é que em situações de serviço, os esforços obtidos considerando-se comportamento elástico-linear ou não-linear dos materiais são praticamente os mesmos, variando muito pouco. Isso foi observado na pequena diferença nos valores de armaduras e alturas dos elementos. É por conta disso, que as análises estruturais e o dimensionamento, necessários ao se projetar estruturas em concreto armado, podem ser feitos considerando comportamento elástico-linear dos materiais sem perda de precisão.

As soluções ótimas obtidas para ambos os comportamentos de materiais foram ilustradas na Figura 5-24 em forma de detalhamento das regiões do pórtico.

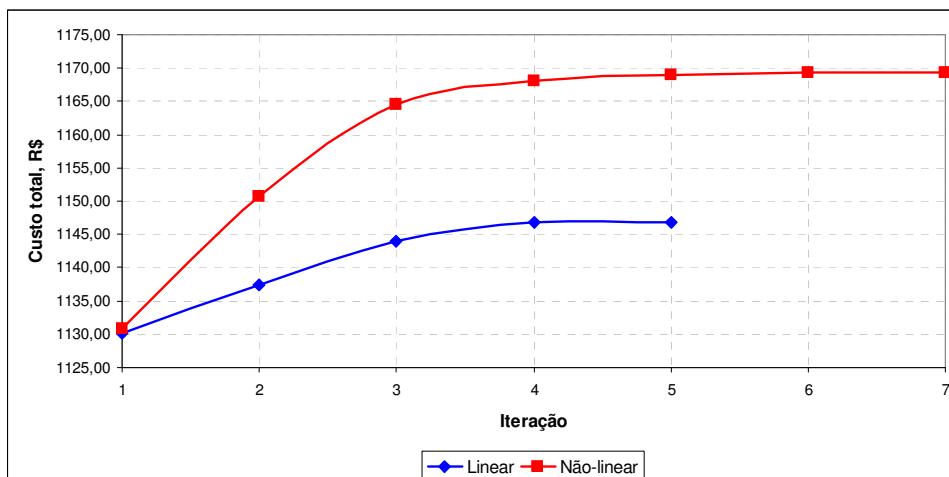


Figura 5-23 – História de convergência da função custo total do pórtico

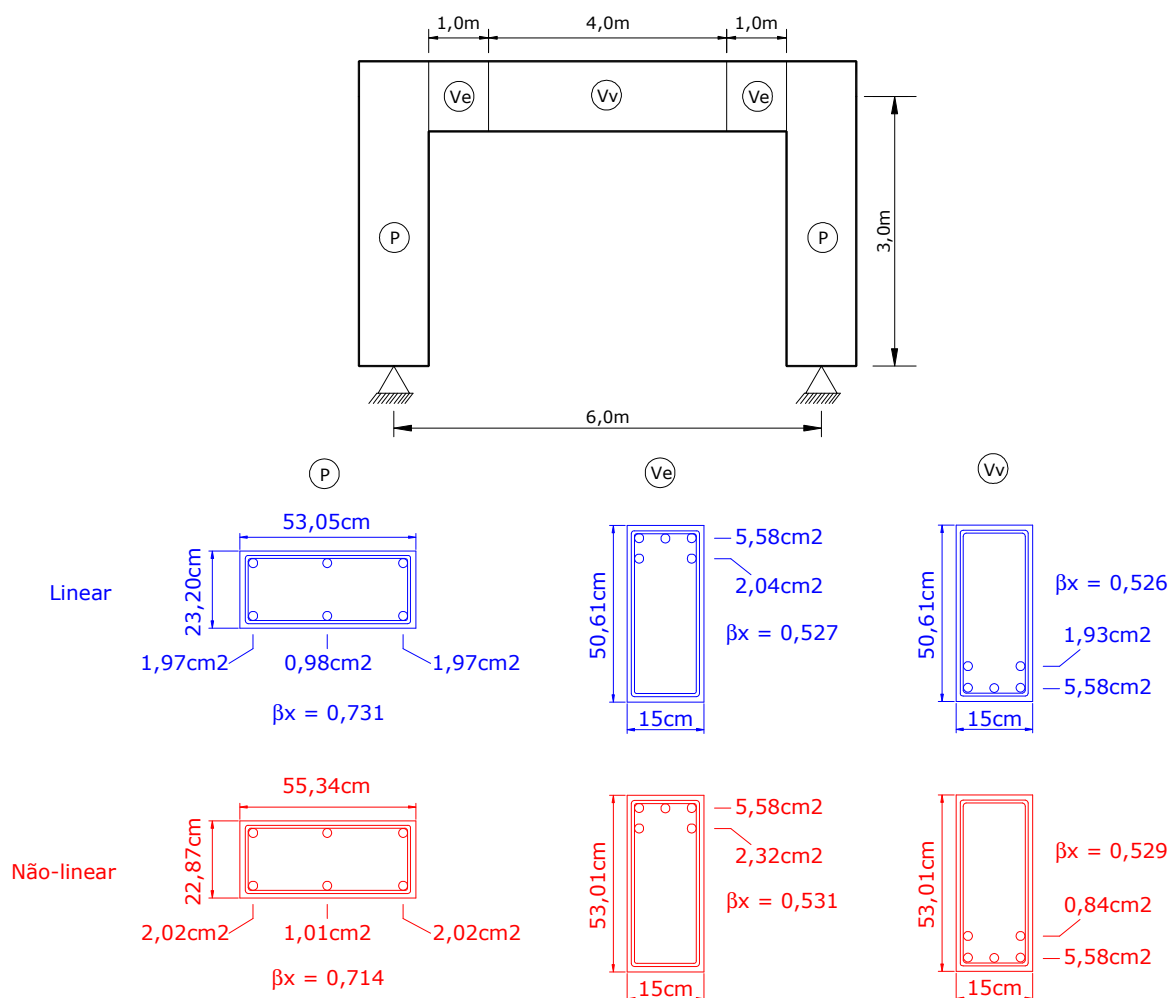


Figura 5-24 – Configurações estruturais ótimas do pórtico

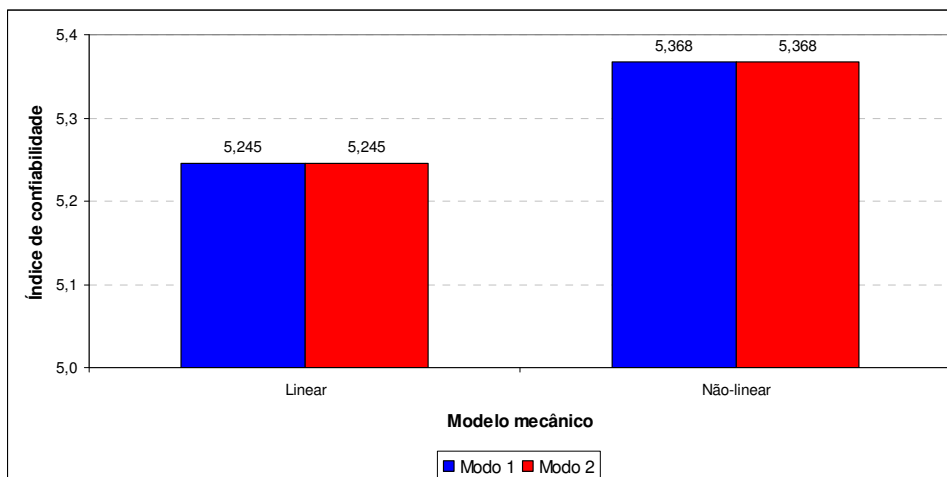
As variáveis otimizadas nas análises foram: largura e altura da seção transversal dos pilares, altura da seção transversal da viga, áreas de armadura dos pilares e da viga, posição

relativa da linha neutra e curvatura das seções dos pilares e da viga. Para fins de processamento numérico da estrutura, todas as variáveis foram repetidas ao longo de todos os elementos finitos pertencentes aos respectivos trechos, conforme ilustra a Figura 5-24 pelas letras P (pilar), Ve (viga – seção do engaste) e Vv (viga – seção do meio do vão).

Como a altura dos pilares resultou maior que 40cm, foram consideradas barras extras no meio da seção, conforme recomendações de ABNT NBR 6118:2003 sobre detalhamento de elementos verticais em concreto armado. As respostas não foram dadas em termos de quantidade de barras de aço nas camadas, mas sim pelas áreas de aço necessárias em cada camada para resistir aos esforços solicitantes. Os pilares, devido ao momento fletor atuante em conjunto com a força normal, resultaram no domínio 4, ao passo que as vigas apresentaram domínio 3 em todas as seções. Esse tipo de informação, juntamente com a curvatura de cada seção é bastante importante em processos de otimização, pois permite que o processo de procura do ponto de mínimo fique livre, sem forçar situações específicas. Assim, acredita-se que esse tipo de solução se não o for, está provavelmente muito próxima do mínimo global da função custo definida na análise.

Apenas para comparação da segurança alcançada em cada uma das configurações ótimas, foi realizada uma análise de confiabilidade para os modos de falha definidos na seções dos engastes e do meio do vão da viga. Com isso foi possível observar qual o nível de segurança atingido em um procedimento de otimização, que simula o projeto da estrutura ainda no formato semi-probabilístico.

O índice de segurança observado para ambas as configurações ótimas (linear e não-linear) resultou muito próximo. Isso ocorreu porque as seções resultantes do processo de otimização foram muito parecidas entre si, com pouca diferença entre os momentos fletores finais obtidos com os modelos linear e não-linear. Em função do processo iterativo resultante da combinação entre a otimização e a análise mecânica da estrutura, as seções ficaram bastante próximas entre si, apresentando, portanto, praticamente o mesmo índice de confiabilidade para os dois modos de falha. Além disso, o fato de ambas as seções do vão e do engaste ficarem detalhadas com a mesma área de armadura na camada mais próxima da borda tracionada fez com que o comportamento na ruptura fosse mais próximo ainda, contribuindo para o ocorrido.



**Figura 5-25 – Índices de confiabilidade para os dois modos de falha**

Esses resultados mostraram a grande importância de se considerar a redistribuição dos esforços durante o processo de otimização de pórticos planos em concreto armado. Concluiu-se que a rotina de otimização de pórticos planos funcionou de maneira bastante satisfatória em conjunto ao modelo mecânico de elementos finitos, resultando em uma ferramenta interessante e viável para o projeto ótimo de elementos em concreto armado baseado em confiabilidade.



## **6. Otimização baseada em Confiabilidade**

---

---

### **6.1 Generalidades**

Um projeto estrutural pode ser definido como um conjunto de dimensões e geometria dos elementos, associado às propriedades dos materiais que compõem esses elementos com o objetivo de suportar adequadamente os efeitos das ações externas. Para que isso aconteça, a estrutura deve respeitar determinadas regras especiais que garantem esse bom funcionamento frente às ações externas. Essas regras são traduzidas em forma de limites impostos para os deslocamentos e tensões atuantes nos elementos. Uma vez que tais regras podem ser escritas através de funções matemáticas, mesmo que simples, também podem proporcionar valores especiais que definam extremos para as dimensões dos elementos estruturais. Com base nisso, a otimização matemática torna-se um procedimento valioso para o projeto estrutural na engenharia, recebendo o nome na literatura de Otimização Determinística ou DDO (*Deterministic Design Optimization*).

Neste trabalho, ao otimizar uma estrutura em concreto armado fala-se em determinar quais são as dimensões de uma seção transversal que produzem o menor custo de construção. Assim, a partir de uma função que define o custo da estrutura por metro linear e um conjunto de restrições que traduzem exatamente essas regras de bom funcionamento, um método especial de otimização é empregado para chegar aos valores que proporcionam o extremo da função de custo, atendendo sempre às regras dadas pelas restrições. Toda essa formulação de um processo de otimização já foi descrita no capítulo 5 desta tese.

No entanto, esse tipo de abordagem não impõe nenhum tipo de condição sobre a segurança estrutural daquela configuração ótima encontrada. Na verdade, espera-se que os coeficientes de segurança utilizados nas restrições sejam capazes de fornecer esse tipo de margem de segurança para a estrutura. O que se verifica é que esses coeficientes não

forneem uniformidade nas probabilidades de falha dos projetos otimizados podendo gerar diversas situações de segurança, com excesso ou até falta em alguns casos. Isso acontece por conta da variabilidade das propriedades dos materiais, flutuações nos carregamentos e aproximações adotadas nos modelos mecânicos contribuindo, dessa forma, para as estruturas não se comportem como o previsto na otimização. Assim, um processo de otimização determinística tem um forte efeito sobre a segurança estrutural. Esse tipo de abordagem é, portanto, arriscada sem a consideração de um critério adequado para a previsão da segurança da configuração estrutural obtida.

Para solucionar esse problema, a teoria da confiabilidade pode ser aplicada para avaliar de maneira mais consistente a segurança estrutural, a partir do cálculo de probabilidades de violação daquelas regras de projeto utilizadas no processo de otimização. Com isso, o processo final fica mais interessante e completo, pois permite obter a configuração que gera o menor custo de construção, aliada ao grau de segurança desejado no projeto para os estados limites considerados. Essa abordagem na literatura recebe o nome de Projeto Ótimo baseado em Confiabilidade ou RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*). Uma vez que a segurança e a economia são os principais objetivos de um projeto estrutural, análises do tipo RBDO permitem alcançar as configurações equilibradas do ponto de vista desses dois requisitos do projeto.

Uma maneira de se fazer o projeto ótimo com base em confiabilidade é definir previamente, para cada estado limite considerado ou para o sistema todo, um valor específico para o índice de confiabilidade que deve ser respeitado ao final do processo de otimização. Esse valor recebe o nome de índice de confiabilidade-alvo do modo de falha ou do sistema. É interessante notar que, o real benefício desse tipo de abordagem é justamente fazer a escolha certa para os valores dos índices de confiabilidade-alvo para os modos de falha considerados, pois dessa forma o modelo será capaz de encontrar as melhores soluções para a estrutura, inclusive com aumento de lucro. Com isso, cada empresa, por exemplo, poderia estabelecer sua margem de lucro sobre a construção de estruturas, a partir da escolha adequada dos índices de confiabilidade-alvo e dos modelos mecânicos utilizados.

Por outro lado, abordagens como essa encarecem bastante o tempo de processamento das estruturas até atingir a configuração ótima. Outro aspecto importante consiste na grande possibilidade de instabilidades numéricas que esses processos podem gerar, pois a cada determinação de um conjunto ótimo das variáveis de projeto, mudanças significativas nos cenários de falha podem ocorrer, inviabilizando o cálculo dos índices de confiabilidade. Esses



são, sem dúvida, os principais motivos pelos quais abordagens de RBDO não foram ainda incorporados nas rotinas dos escritórios de projeto de estruturas. Investimentos nessas duas linhas devem ser feitos para que um dia o emprego desses procedimentos seja possível com frequência na prática comum da engenharia estrutural. Diversos trabalhos já existem e continuam sendo desenvolvidos neste âmbito, obtendo-se várias maneiras de resolver o problema, porém ainda sem chegar a um consenso sobre os métodos e modelos utilizados. Alguns desses trabalhos são Nikolaidis & Burdisso (1988), Enevoldsen & Sørensen (1994), Wang & Grandhi (1994), Moses (1997), Tu et al. (2000), Levitin & Lisnianski (2001), Melchers (2001), Frangopol & Maute (2003), Kharmanda (2003), Barakat et al. (2004), Cheng et al (2006), Verzenhassi (2008) e Aoues & Chateaufneuf (2008).

## 6.2 Índice de Confiabilidade-Alvo, $\beta_a$

O índice de confiabilidade-alvo expressa os requisitos de segurança de uma estrutura para garantir valores aceitáveis de risco estrutural para uma determinada situação. Pode ser usado, portanto, como um parâmetro de controle da segurança no processo de otimização. Uma discussão interessante sobre a escolha desses valores alvo encontra-se no JCSS (2001), onde são abordados casos que envolvem vidas humanas e o custo desse tipo de perda.

O JCSS (2001) também apresenta um conjunto de valores para o índice de confiabilidade-alvo tanto para o estado limite último quanto para o estado limite de serviço. Esses valores dependem basicamente das consequências da falha e do custo relativo da medida de segurança, admitindo que a falha ocasiona somente reconstrução ou reparo das estruturas. As Tabela 6-1 e Tabela 6-2 ilustram esses valores para o ELU e o ELS.

**Tabela 6-1 – Índices de confiabilidade-alvo e probabilidades de falha para ELU**

Custo relativo da medida de segurança	Consequências de falha					
	Mínimas		Moderadas		Elevadas	
	$\beta_a$	$P_f$	$\beta_a$	$P_f$	$\beta_a$	$P_f$
Alta	3,1	$10^{-3}$	3,3	$5 \times 10^{-4}$	3,7	$10^{-4}$
Normal	3,7	$10^{-4}$	4,2	$10^{-5}$	4,4	$5 \times 10^{-6}$
Pequena	4,2	$10^{-5}$	4,4	$5 \times 10^{-6}$	4,7	$10^{-6}$

Os valores hachurados em cinza na tabela acima devem ser adotados nas situações mais comuns de projeto na engenharia, correspondendo a uma consequência de falha

moderada com custo normal da medida de segurança. Essa situação corresponde, segundo o JCSS (2001), a riscos medianos de morte, provenientes da falha, com consequências econômicas consideráveis. Exemplos de estruturas que se enquadram nessa situação são edifícios comerciais, industriais e residenciais. Nas classes de consequências mínimas de falha podem ser consideradas as estruturas agrícolas, silos e postes, ao passo que nas classes elevadas estão as pontes, teatros, hospitais e edifícios muito altos.

Uma outra maneira de escolher as consequências de falha está relacionada ao tipo de falha do elemento, podendo ser classificada em três situações:

- a) Falha dúctil com reserva de resistência resultante de endurecimento de deformação;
- b) Falha dúctil sem reserva de resistência;
- c) Falha frágil.

Assim, elementos estruturais que atingem a ruína repentinamente, sem aviso como é o caso de rupturas frágeis devem ser projetados para índices de confiabilidade mais elevados do que aqueles que entram em colapso, porém precedido de algum tipo de aviso, de modo que medidas possam ser adotadas para se evitar consequências mais graves.

Outro aspecto interessante ocorre para os casos onde a falha é definida por múltiplos modos, como é o caso de sistemas em paralelo. Nesses casos, quando os modos de falha apresentam índices de confiabilidade muito próximos entre si, o sistema deve ser projetado para altos índices de confiabilidade.

**Tabela 6-2 – Índices de confiabilidade-alvo e probabilidades de falha para ELS**

<b>Custo relativo da medida de segurança</b>	<b>Índice de Confiabilidade</b>	<b>Probabilidade de Falha</b>
Alta	1,3	$10^{-1}$
Normal	1,7	$5 \times 10^{-2}$
Pequena	2,3	$10^{-2}$

A Tabela 6-2 apresenta os valores dos índices de confiabilidade-alvo para estados limites de serviço, sendo que o JCSS (2001) afirma que esses valores são utilizados para ELS irreversíveis, como é o caso do estado limite de abertura de fissuras no concreto. Para ELS reversíveis, nenhum valor é recomendado.

### **6.3 Formulação Clássica dos Modelos tipo RBDO**

O projeto ótimo de estruturas baseado em confiabilidade (RBDO) consiste em formular o problema de otimização convencional, incluindo restrições de segurança definidas por índices de confiabilidade ou probabilidades de falha. Nesse âmbito, são três as possibilidades de formulação: RBDO para componentes, para sistemas e misto, ou seja, considerando tanto as restrições de componentes quanto a do sistema.

Esse tipo de abordagem, conforme já foi discutido anteriormente, eleva consideravelmente o tempo computacional gasto, pois necessita de várias resoluções do problema de confiabilidade dentro dos “loops” de otimização. Isso se torna ainda mais crítico quando se considera restrições sobre a segurança do sistema como um todo, aumentando em muito esse tempo de processamento. Por esta razão, provavelmente, a otimização baseada em confiabilidade para componentes é mais popular do que as outras na prática desse tipo de estudo. Um outro aspecto importante é que a busca de outros modos de falha da estrutura, que, em muitos casos, não são dominantes é uma tarefa muito complicada, pois as equações de estado limite são muito sensíveis ao modo de falha dominante. Com isso, a influência de outros modos de falha não pode ser avaliada porque estes estão escondidos atrás dos modos dominantes. Esse é o caso típico de estruturas de pórticos em concreto armado, nas quais existem modos de falha que são impossíveis de serem determinados, pois ocorrem após a falha por perda de estabilidade do pórtico. Assim, surgem problemas de ordem mecânica na determinação dos modos de falha da estrutura e, conseqüentemente, na otimização do tipo RBDO para sistemas. Neste trabalho, por conta disso, serão apresentados exemplos somente considerando a otimização de componentes.

#### **6.3.1 Formulação RBDO para componentes**

Na confiabilidade de componentes somente um único modo de falha é considerado como restrição no processo de otimização. Em geral, quando existe um modo predominante sobre os outros, essa formulação torna-se ideal, evitando-se processamentos desnecessários na avaliação da confiabilidade de outros modos de falha. Em estruturas isostáticas e sistemas associados em série, por exemplo, essa abordagem deve ser utilizada, pois a falha de um único modo ou estado limite caracteriza a falha de toda a estrutura.

Em termos matemáticos, a formulação pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min_{x_k \in \mathfrak{R}^n} f(x_k) \\ & \text{sujeito à: } \begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ g_j(x_k) \geq 0 \\ \beta(x_k, u_l) \geq \beta_a \end{cases} \end{aligned} \quad (6-1)$$

sendo que:  $f(x_k)$  é a função-objetivo a ser minimizada, que nesse caso é dada pelo custo inicial total da estrutura;  $h_i(x_k)$  são as restrições de igualdade;  $g_j(x_k)$  são as restrições de desigualdade;  $x$  é o vetor de variáveis a serem otimizadas com  $k$  elementos;  $i$  e  $j$  correspondem, respectivamente, ao número de restrições de igualdade e desigualdade do problema;  $u$  é o vetor de variáveis aleatórias envolvidas na análise de confiabilidade com  $l$  elementos;  $\beta(x, u)$  é o índice de confiabilidade do componente que depende das variáveis de otimização e aleatórias;  $\beta_a$  é o índice de confiabilidade-alvo.

A formulação descrita pela Equação 6-1 descreve dois loops distintos. No primeiro “loop”, o mais externo, são encontrados os valores ótimos das variáveis de projeto e no segundo “loop”, o mais interno, avalia-se a confiabilidade da configuração atual encontrada para o componente considerado.

### 6.3.2 Formulação RBDO para sistemas

De um modo geral, o processo de otimização produz elementos estruturais cujos comportamentos se aproximam de seus estados limites. Além disso, os diversos modos de falha de uma estrutura tendem a se aproximarem entre si, fazendo com que sua importância cresça diante do modo mais provável de falha. Assim, diversos componentes podem atingir sua falha antes mesmo da estrutura falhar como um todo, o que requer a análise adequada da confiabilidade do sistema no processo de otimização.

Diversos são os fatores que influenciam a capacidade resistente de estruturas, principalmente quando estas são otimizadas. Entre eles podem ser citados o comportamento dos materiais, a variabilidade das ações externas, correlação estatística, tipo de modelo mecânico e grau de redundância da estrutura. Este último tem ainda uma participação maior nesse processo, pois devido à otimização, seções que inicialmente apresentavam maior capacidade resistente podem vir a se tornar menos resistentes do que outras seções. Nesse

contexto, a otimização baseada em confiabilidade para sistemas torna-se bastante diferente daquela baseada somente em um modo de falha.

Embora a abordagem de RBDO para sistemas seja altamente recomendada em vários casos, existem problemas que precisam ser levados em conta nessa avaliação. Uma das limitações consiste em fazer certas simplificações como a adoção de limites inferiores e superiores para a probabilidade do sistema, bem como eliminar alguns caminhos de falha da estrutura para que a solução seja ao menos exequível na prática. Além disso, existe a grande possibilidade de alguns modos de falha estarem muito escondidos atrás do modo dominante ou quando a estrutura vem ao colapso antes mesmo de ser capaz de avaliar a confiabilidade desses modos. Uma alternativa possível é fixar quais serão os modos considerados no processo de otimização para o cálculo da confiabilidade do sistema, mantendo-os fixos durante todo o processo. Porém, em função dos novos valores definidos a cada iteração do processo de otimização, esses modos podem se tornar menos importantes do que outros modos que não estão sendo considerados, fazendo com que a estrutura não atinja de fato sua configuração verdadeiramente ótima. Esse tipo de comportamento pode ainda ocasionar dificuldades de convergência do processo de otimização. Uma alternativa viável para contornar esse problema é, portanto, fazer uma avaliação prévia de quais modos são realmente importantes antes do processo de otimização através de uma análise mecânica e, depois da estrutura otimizada, reavaliar se esses modos continuam sendo os mais importantes. Fazendo esse tipo de estudo prévio consegue-se minimizar bastante essas mudanças bruscas dos cenários de falha, pois os modos mais importantes tendem a se estabilizar com poucas iterações do processo de otimização.

A formulação para otimização baseada em confiabilidade para sistemas pode ser dada por:

$$\begin{aligned} & \min_{x_k \in \mathfrak{R}^n} f(x_k) \\ & \text{sujeito à: } \begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ g_j(x_k) \geq 0 \\ \beta_{sis}(x_k, u_l) \geq \beta_{a\_sis} \end{cases} \end{aligned} \quad (6-2)$$

sendo que:  $\beta_{sis}(x, u)$  é o índice de confiabilidade do sistema;  $\beta_{a\_sis}$  corresponde ao índice de confiabilidade-alvo do sistema.

Um dos problemas que podem surgir ao considerar somente a restrição de confiabilidade para o sistema é que a confiabilidade de alguns dos componentes pode não atingir os requisitos mínimos de segurança, resultando em uma configuração perigosa para determinados modos. Como forma de evitar esse comportamento, Al-Harthy & Frangopol (1997) propuseram uma variante da formulação descrita pela Equação 6-2, na qual a restrição de sistema é substituída pelas restrições de todos os modos de falha importantes para a segurança do sistema. Assim, o sistema fica definido somente pela existência desses modos importantes, bem como suas correlações.

### 6.3.3 Formulação RBDO mista: componentes e sistema

De maneira geral, a formulação mista conduz a configurações mais balanceadas das variáveis de otimização do que as abordagens individuais de componentes e sistemas, pois elimina a possibilidade de alguns componentes resultarem com segurança inadequada. Isso se faz pelo limite mínimo de confiabilidade garantida aos componentes na própria formulação. Ainda assim existem desvantagens. Uma delas é que o processo pode conduzir a modos superdimensionados ao invés de mantê-los próximos ao seu valor alvo. Não há garantia de que essa situação seja evitada durante o processo com esse tipo de formulação. Uma outra desvantagem diz respeito à condição de atividade ou inatividade das restrições dos modos individuais de falha. Em casos onde várias dessas restrições se tornem ativas ( $\beta_i = \beta_{a_i}$ ), a restrição do sistema pode se tornar inútil e impossível de ser respeitada.

A formulação mista pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min_{x_k \in \mathfrak{R}^n} f(x_k) \\ & \text{sujeito à: } \begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ g_j(x_k) \geq 0 \\ \beta_m(x_k, u_l) \geq \beta_{a_m} \\ \beta_{sis}(x_k, u_l) \geq \beta_{a_sis} \end{cases} \end{aligned} \quad (6-3)$$

sendo que:  $m$  corresponde ao modo de falha do componente considerado;  $\beta_{a_m}$  é o índice de confiabilidade-alvo para o componente  $m$ .

Aoues & Chateaneuf (2008) propuseram uma alternativa de contornar o problema da obtenção de segurança exagerada para alguns modos atualizando os índices de

confiabilidade-alvo a cada iteração do processo de otimização, respeitando sempre a restrição do sistema. Com isso, a solução ótima é encontrada para a configuração de confiabilidade-alvo que resulte na maior redução de custo possível. Essa alternativa é interessante, pois permite se livrar de certa maneira da dificuldade de escolher valores adequados para os índices de confiabilidade-alvo, pois estes vão sendo adaptados a cada iteração. O processo de determinação dos valores atualizados dos índices de confiabilidade-alvo é também um processo de otimização inserido no processo geral, onde a função a ser minimizada é a somatória dos quadrados das diferenças entre os valores atualizados e os valores obtidos na iteração anterior, mediante a restrição da confiabilidade do sistema.

### 6.3.4 Fluxograma Geral da Formulação RBDO

Nesta seção apresenta-se um fluxograma geral para resolver problemas de otimização baseada em confiabilidade, onde são explicadas as etapas mais importantes.

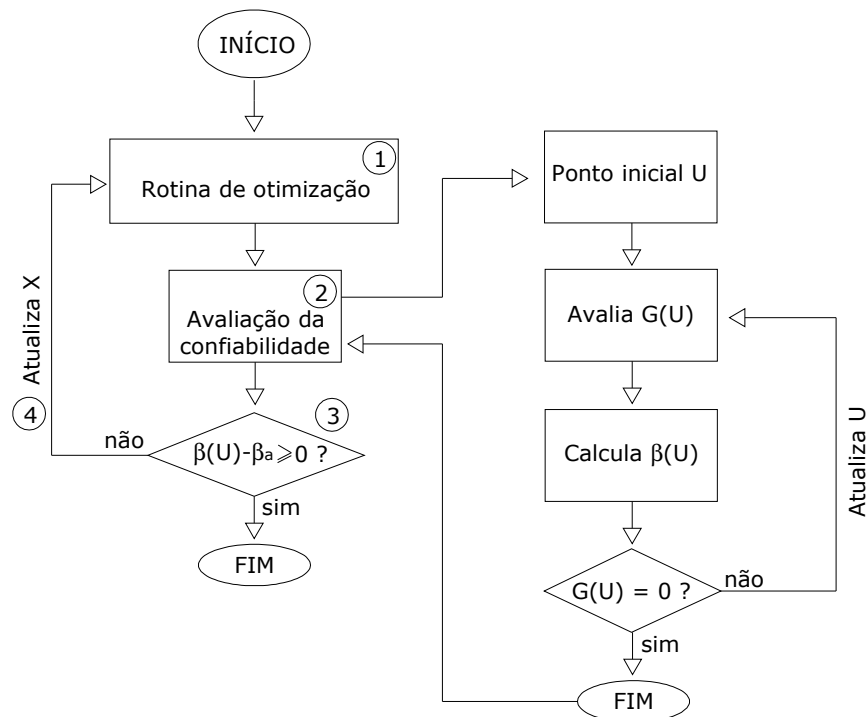


Figura 6-1 – Fluxograma para análises do tipo RBDO

1. Rotina de otimização. Esta etapa corresponde a todo o processo de otimização determinística descrita no capítulo 5 e representada pela Figura 5-9. Ao final do processo tem-se a configuração ótima para a estrutura analisada;

2. Avaliação da confiabilidade. A partir da estrutura otimizada avalia-se a confiabilidade considerando os modos de falhas e/ou sistema. O algoritmo para o cálculo do índice de confiabilidade e do ponto de projeto encontra-se ao lado na Figura 6-1. Trata-se do mesmo processo descrito pelo algoritmo de busca HLRP;

3. Critério de parada. Após a avaliação dos índices de confiabilidade dos modos e/ou sistema verifica-se se estes satisfazem as restrições em confiabilidade. Se resultarem maior ou igual aos índices de confiabilidade-alvo, o processo de encerra, caso contrário continua até que essa condição seja satisfeita;

4. Atualização das variáveis de otimização. Caso a condição descrita em 3 não seja satisfeita, reinicia-se o processo de otimização voltando à etapa 1 até a convergência em termos dos índices de confiabilidade.

Os modelos de RBDO desenvolvidos neste trabalho são apresentados a seguir. Eles respeitam exatamente este fluxograma, distinguindo-se um do outro pela maneira de atualização das variáveis de otimização,  $X$ .

## **6.4 Modelo SF-RBDO (Safety Factors)**

### **6.4.1 Aspectos gerais**

Wu & Wang<sup>39</sup> (1998) e Wu et al.<sup>40</sup> (2001) apud Qu (2004) desenvolveram um método baseado em fatores parciais de segurança com o objetivo de substituir a abordagem clássica de RBDO por um conjunto de iterações de otimização determinística, transformando as restrições de confiabilidade em restrições determinísticas equivalentes. Esses fatores parciais de segurança foram definidos sobre os valores do ponto de projeto das variáveis aleatórias para o modo de falha dominante.

Seguindo o mesmo raciocínio, Qu & Haftka (2003) propuseram o conceito de fator de segurança probabilístico para ligar as restrições de confiabilidade ao processo de otimização determinística. O fator de segurança probabilístico foi avaliado através de simulações de Monte Carlo combinadas com aproximações via superfícies de respostas.

---

<sup>39</sup> Wu, Y-T.; Wang, W. (1998). Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints. *Journal of Integrated Design and Process Sciences (JIDPS)*, v. 2, n. 4, p. 13-21

<sup>40</sup> Wu, Y-T.; Shin, Y.; Sues, R.; Cesare, M. (2001). Safety-factor based approach for probability-based design optimization. *Proceedings of 42<sup>nd</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures Dynamics and Materials Conference*, Seattle, WA, AIAA 2001-1522.



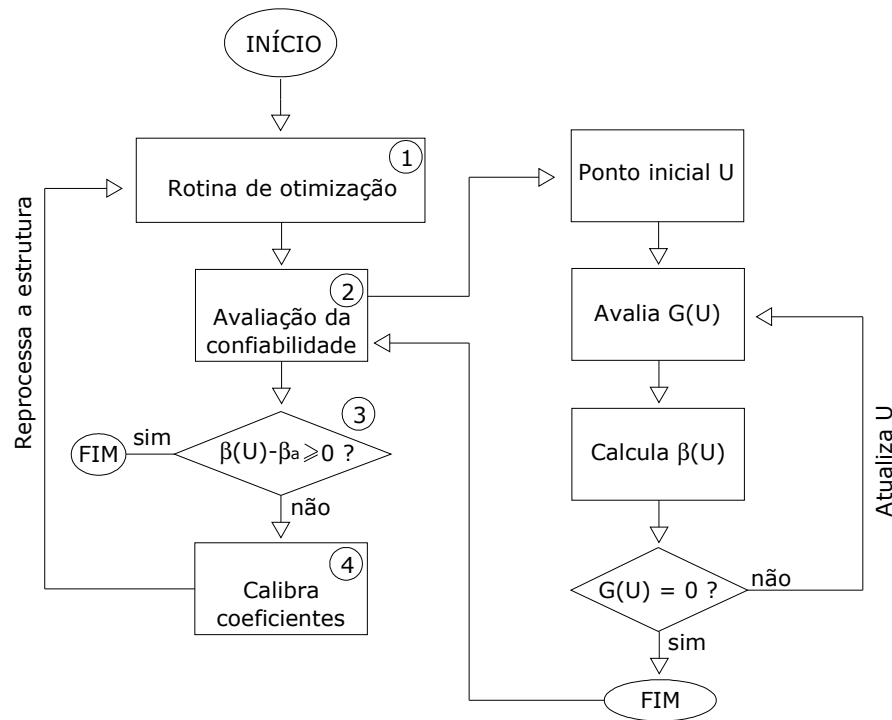
Com relação aos trabalhos de Wu, os fatores de segurança são definidos com base apenas no modo de falha dominante da estrutura, não levando em conta a contribuição de outros modos que podem ser importantes no comportamento global do sistema. Da mesma forma, o fator de segurança proposto por Qu e Haftka é definido para o sistema todo, o que pode conduzir a configurações estimadas para mais ou até estimadas para menos para determinados modos de falha da estrutura, pois tal fator é aplicado igualmente para todos os estados limites. Com isso, o ponto ótimo não pode ser garantido.

Para resolver esse problema, Castillo et al. (2003) apresentaram uma abordagem muito parecida à de Qu e Haftka. A diferença consistiu na determinação de um fator de segurança para cada modo de falha do problema ao invés de um único fator global. Os autores utilizaram o FORM para calcular os índices de confiabilidade e os fatores de segurança. Porém, nenhuma recomendação foi feita para a confiabilidade do sistema e nem para os índices de confiabilidade-alvo utilizados.

Todas as pesquisas analisadas apresentaram algo em comum: as técnicas de RBDO foram sempre utilizadas considerando-se modelos analíticos clássicos para cálculo de esforços e deslocamentos, bem como comportamento elástico-linear dos materiais. Um dos modelos de RBDO desenvolvido neste trabalho, baseado em coeficientes parciais de segurança (*Safety Factors, SF-RBDO*) considera apenas um modo de falha como restrição direta de confiabilidade, porém avança no quesito de modelagem mecânica e de materiais, pois permite empregar o modelo não-linear desenvolvido em elementos finitos para estruturas em concreto armado. Esta é uma contribuição relevante do trabalho, pois permitirá realizar esse tipo de análise para estruturas de edifício, por exemplo, levando-se em conta de maneira consistente as perdas de rigidez dos elementos estruturais. Optou-se em trabalhar com apenas um modo de falha, justamente para evitar problemas de convergência e instabilidade numérica na análise de sistemas provenientes da utilização de modelos não-lineares.

#### 6.4.2 Fluxograma do modelo SF-RBDO

A Figura 6-2 mostra o fluxograma que representa o modelo SF-RBDO com todas as etapas do programa.



**Figura 6-2 – Fluxograma do modelo SF-RBDO**

1. Rotina de otimização. Esta etapa é idêntica ao processo de otimização descrito no capítulo 5. Vale a pena comentar que o processo de otimização determinística inicia-se com os coeficientes parciais de segurança fornecidos pelos códigos de projeto atuais, ponderando as variáveis aleatórias. Nesse tipo de análise existem dois tipos de variáveis: as de projeto, que são aquelas otimizadas e as aleatórias, que são utilizadas para a análise de confiabilidade. Portanto, o modelo SF-RBDO assume que existe um coeficiente parcial para cada variável aleatória e para cada modo de falha. Por exemplo: ao otimizar uma estrutura que possua 2 modos de falha e 3 variáveis aleatórias, ao todo serão 6 coeficientes parciais divididos em dois grupos. No primeiro grupo estarão os coeficientes parciais das 3 variáveis aleatórias para o modo de falha 1. No segundo grupo, estarão os coeficientes parciais das 3 variáveis aleatórias para o modo de falha 2;

2. Avaliação da confiabilidade. Nesta etapa, a partir da configuração ótima obtida anteriormente calculam-se os índices de confiabilidade para todos os modos de falha e para o sistema;

3. Critério de parada. Verifica-se se os índices de confiabilidade satisfazem aos valores alvo estabelecidos no início da análise e se não há mais diferença significativa no custo inicial total da estrutura. Se essas condições forem satisfeitas, fim do processo, caso contrário, recalibra-se os coeficientes parciais;

4. Calibração dos coeficientes parciais. Os coeficientes parciais de cada variável aleatória são calibrados em função dos índices de confiabilidade-alvo de cada modo de falha, a partir de seus co-senos diretores, pois refletem a sensibilidade de cada variável no processo. Assim, variáveis mais influentes recebem um peso maior na calibração, fazendo com que o processo de otimização seja mais sensível àquela variável. Após isso, retorna-se ao passo de otimização determinística com os coeficientes parciais calibrados para a confiabilidade requerida. Note que são esses coeficientes que fazem a ponte de ligação entre as restrições de confiabilidade e o processo de otimização. Repete-se esse algoritmo até a convergência definida na etapa 3.

#### 6.4.3 Calibração dos coeficientes parciais de segurança

Os coeficientes parciais para análise de otimização baseada em confiabilidade são definidos para cada variável aleatória  $i$ , para cada modo de falha  $j$ . Assim, os coeficientes parciais podem ser obtidos diretamente a partir do índice de confiabilidade-alvo e dos co-senos diretores das variáveis aleatórias em cada ponto de projeto. Por definição, os co-senos diretores representam as derivadas da função de estado limite em relação à cada variável aleatória, ou seja:

$$\alpha_{ji} = \left. \frac{\partial G_j(u)}{\partial u_i} \right|_{u=u^*} \quad (6-4)$$

sendo que:  $\alpha_{ji}$  é o co-seno diretor da variável aleatória  $i$  referente ao modo de falha  $j$ ;  $G_j$  é a função de estado limite;  $u$  é o vetor de variáveis aleatórias;  $u^*$  corresponde às coordenadas do ponto de projeto referente ao modo  $j$ .

A principal hipótese adotada no modelo consiste no fato de que o vetor dos co-senos diretores permanece sempre o mesmo para qualquer curva do índice de confiabilidade, conforme ilustra a Figura 6-3. Assim, obtidos os valores dos co-senos diretores na iteração do processo de otimização para a configuração atual, estes são considerados constantes para a configuração ótima que terá o índice de confiabilidade-alvo.

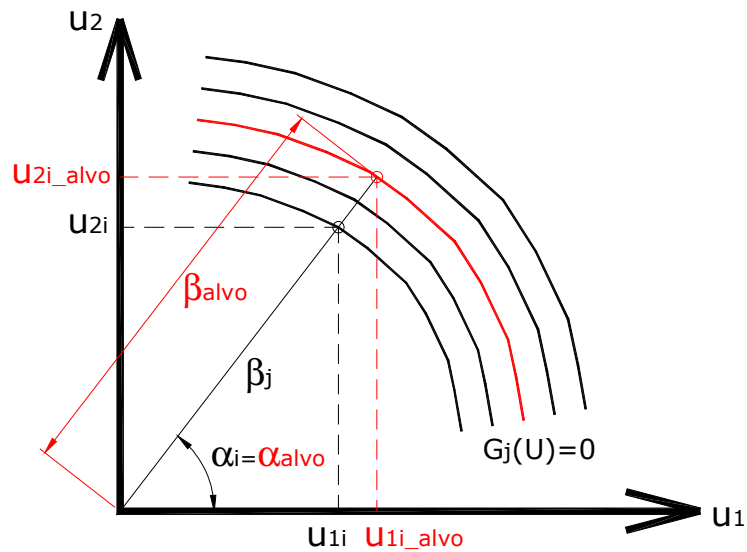


Figura 6-3 – Aproximação para o índice de confiabilidade-alvo

A partir daí, a regra de calibração pode ser dada por:

$$\gamma_{S_i} = \frac{F_{x_i}^{-1}[\Phi(\beta_a \alpha_i)]}{x_{S_i}} = \frac{x_{d_i}}{x_{S_i}} \quad (6-5)$$

$$\gamma_{R_i} = \frac{x_{R_i}}{F_{x_i}^{-1}[\Phi(\beta_a \alpha_i)]} = \frac{x_{R_i}}{x_{d_i}}$$

sendo que:  $\gamma_{S_i}$  e  $\gamma_{R_i}$  são, respectivamente, os coeficientes parciais calibrados para variáveis aleatórias de solicitação e resistência;  $F_{x_i}^{-1}[\bullet]$  e  $\Phi(\bullet)$  são, respectivamente, as funções acumuladas inversas da variável aleatória  $i$  no espaço físico e no espaço normal-padrão;  $\beta_a$  é o índice de confiabilidade-alvo do modo de falha  $j$ ;  $\alpha_i$  é o co-seno diretor da variável aleatória  $i$ ;  $x_{d_i}$  corresponde ao valor de projeto da variável aleatória  $i$  que representa o índice de confiabilidade-alvo;  $x_{S_i}$  e  $x_{R_i}$  são, respectivamente, os valores de referência utilizados para as variáveis de solicitação e de resistência. Esses valores de referência podem ser os valores característicos ou médias das variáveis aleatórias.

Ditlevsen & Madsen (2005) deduziram expressões diretas para os valores de projeto,  $x_d$  dados na Equação 6-5 para algumas distribuições de probabilidades conhecidas. Entre elas está a distribuição normal, resultando no cálculo direto dessas grandezas de acordo com a expressão abaixo:

$$\begin{aligned}x_{dS_i} &= \mu_i(1 + \alpha_i V_i \beta_a) \\x_{dR_i} &= \mu_i(1 - \alpha_i V_i \beta_a)\end{aligned}\tag{6-6}$$

sendo que:  $x_{dS_i}$  e  $x_{dR_i}$  são, respectivamente, aos valores de projeto das variáveis de solicitação e resistência que representa o índice de confiabilidade-alvo;  $\mu_i$  é a média da variável aleatória  $i$ ;  $V_i$  corresponde ao coeficiente de variação da variável aleatória  $i$ .

A definição se uma variável aleatória é de solicitação ou resistência é feita diretamente pelo programa, a partir do sinal do seu co-seno diretor. Valores positivos representam variáveis de resistência e valores negativos definem variáveis de solicitação.

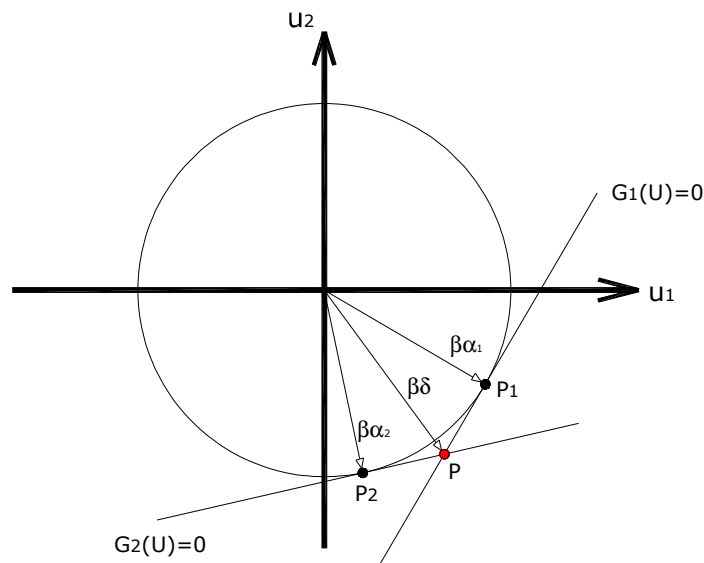
Após a calibração dos coeficientes, esses valores são utilizados diretamente no processo de otimização determinística da iteração seguinte até a convergência da análise.

#### 6.4.4 Considerações especiais sobre o modelo

A primeira consideração sobre esse tipo de abordagem consiste no fato de que ao se otimizar uma estrutura com vários modos de falha, um conjunto de coeficientes parciais de segurança será gerado para cada modo de falha. Isso torna o método não muito útil do ponto de vista prático da utilização desses coeficientes parciais em situação de projeto para atingir o grau de segurança especificado. Esse problema obviamente deixa de existir para o caso de apenas um modo de falha.

A Figura 6-4 ilustra uma solução possível para o caso de dois modos de falha com intersecção entre eles bem definida. Ao adotar o ponto de intersecção entre as duas equações de estado limite, os coeficientes parciais de segurança serão comuns para ambos os modos de falha. Assim, o vetor  $\delta$  corresponde ao novo vetor de co-senos diretores, com o qual será feito o processo de calibração. Porém, para casos onde haja mais modos de falha para a classe de problemas estudada não existe vetor  $\delta$  que seja capaz de reproduzir adequadamente todos os modos. O que Ditlevsen & Madsen (2005) recomendam é nesses casos escolher um ponto de projeto dado pelo produto  $\beta\delta$  para toda a classe de estruturas e ajustar todas as equações de estado limite dos modos para que contenham o novo ponto. Isso se faz minimizando uma função penalidade dada em termos dos índices de confiabilidade dos  $n$  modos de falha, índice de confiabilidade-alvo, co-senos diretores de cada variável aleatória e do vetor  $\delta$ . Mais

detalhes sobre esse procedimento podem ser consultados no trabalho de Ditlevsen & Madsen (2005).



**Figura 6-4 – Vetor exato dos co-senos diretores para dois modos de falha**

A segunda consideração diz respeito à própria natureza do processo de otimização baseada em confiabilidade. A restrição a ser atendida no algoritmo de busca da solução ótima é a princípio inativa, ou seja, valores do índice de confiabilidade do modo de falha superiores ao valor especificado satisfazem a restrição de segurança. Esse tipo de calibração de coeficientes parciais, principalmente quando se utilizam os modelos não lineares de materiais, resulta em configurações ótimas com grau de segurança até mesmo maior do que o requerido. Porém, pode-se em determinadas situações exigir de fato que a estrutura tenha exatamente o valor de confiabilidade especificado. Isso pode ser justificado, por exemplo, por questões financeiras e margens de lucros das empresas, onde é necessário atingir exatamente o valor alvo. Nesse caso, admite-se que a restrição em termos do índice de confiabilidade esteja ativa desde o início do processo de otimização.

Problemas na busca da direção ótima dos algoritmos de otimização podem surgir em casos desse tipo, resultando em falta de convergência, uma vez que a direção de busca pode apontar para alguma região não factível do domínio da função-objetivo. Para contornar esse problema, foi desenvolvido um esquema onde define-se um índice de confiabilidade-alvo fictício, com o objetivo de transladar a região de busca do algoritmo, permitindo assim, que este consiga encontrar o ponto que corresponde exatamente ao índice de confiabilidade-alvo adotado. O que se faz, na verdade, é resolver um outro problema de otimização com outro

valor para o índice de confiabilidade-alvo, dado pelo índice fictício. Assim, os coeficientes parciais são calibrados para o valor fictício ao invés do valor verdadeiro. Desse modo, a configuração ótima converge para o valor real do índice de confiabilidade-alvo.

Esse procedimento pode ser introduzido no fluxograma da Figura 6-2 entre as etapas 3 e 4. Na primeira iteração do processo de otimização, após o cálculo do índice de confiabilidade para a configuração ótima, calcula-se o índice de confiabilidade-fictício de acordo com a comparação abaixo:

$$\begin{aligned} \beta_j < \beta_a &\rightarrow \beta_a^f = \beta_a + \Delta\beta_j \\ \beta_j > \beta_a &\rightarrow \beta_a^f = \beta_a - \Delta\beta_j \end{aligned} \quad (6-7)$$

sendo que:  $\beta$  é o índice de confiabilidade;  $j$  refere-se ao modo de falha;  $a$  significa valor alvo;  $f$  corresponde ao valor fictício;  $\Delta\beta$  é o incremento no índice de confiabilidade-alvo. Esse incremento pode ser calculado através da função modular dada por:

$$\Delta\beta_j = |\beta_a - \beta_j| = \begin{cases} \beta_a - \beta_j \rightarrow \beta_a > \beta_j \\ \beta_j - \beta_a \rightarrow \beta_j > \beta_a \end{cases} \quad (6-8)$$

Após a segunda iteração do processo de otimização, o índice de confiabilidade-alvo fictício pode ser obtido por interpolação simples a partir do valor da iteração anterior, ou seja:

$$\beta_{a,k+1}^f = \frac{\beta_{a,k}^f \cdot \beta_a}{\beta_{j,k}} \quad (6-9)$$

onde:  $k$  corresponde à  $k$ -ésima iteração do processo de otimização.

## 6.5 Modelo BS-RBDO (Beta Surface)

### 6.5.1 Aspectos gerais

Soares (2001), em sua tese de doutorado, apresentou a primeira idéia sobre o modelo de otimização baseada em confiabilidade considerando como restrição adicional uma superfície de confiabilidade, porém sem aplicação alguma. Nogueira (2005) desenvolveu a idéia e propôs um modelo ainda que simples para sua utilização na otimização de vigas em concreto armado. O problema de otimização foi resolvido analiticamente através do método

dos multiplicadores de Lagrange. Inicialmente, a otimização era realizada sem a restrição de confiabilidade e, após a segunda iteração do método, substituía-se o problema inicial de otimização por um outro definido somente com a restrição dada pela superfície de confiabilidade. Porém, a solução ficou restrita para casos simples de vigas com possibilidade apenas de considerar na superfície de confiabilidade as variáveis referentes à altura da seção transversal da viga e sua armadura de tração. Outros trabalhos como Nogueira & Venturini (2006) e Nogueira et al. (2009) contém aplicações desse tipo de modelo.

Neste trabalho o modelo foi estendido tanto em número de variáveis de projeto consideradas, quanto no tipo de algoritmo utilizado e natureza da superfície de confiabilidade, generalizando-se o processo.

Além das alturas dos elementos e suas armaduras de tração, a superfície de confiabilidade pode conter todas as variáveis de otimização, desde que estas sejam significativas para o comportamento mecânico da estrutura. Dessa forma, armaduras de compressão, de cisalhamento, espaçamento entre estribos, largura de seções e outras podem ser incorporadas na superfície de confiabilidade. Um cuidado importante que deve ser tomado diz respeito às variáveis de otimização que resultam em valores insignificantes para a resposta mecânica ou até mesmo valores nulos, como ocorre em alguns casos, por exemplo, com a armadura de compressão nas vigas. Nessas situações, pode-se extrair a variável da superfície ou dar-lhe valores mínimos para que o sistema não resulte singular, travando a resolução do algoritmo. Para as armaduras de compressão, por exemplo, pode-se dar-lhes o valor da mínima área de aço correspondente a 2 barras de 5mm cada funcionando como armadura construtiva. Desse modo, o processo prossegue sem interrupções, podendo inclusive resultar em uma configuração onde a armadura de compressão é importante.

A superfície de confiabilidade pode ser construída para cada modo de falha e também para o sistema, pois esta depende somente dos valores de seus respectivos betas, obtidos na etapa da análise de confiabilidade. Após isso, constrói-se cada superfície utilizando-se o método das superfícies de respostas convencional ou com fatores-peso conforme já explicados no capítulo 4. A grande vantagem é que as superfícies podem ser construídas agora com polinômios de primeiro e segundo graus, diferentemente do processo realizado por Nogueira & Venturini (2006) que utilizava somente superfícies quadráticas. Com isso, ganha-se em tempo de processamento, pois menos chamadas do modelo de confiabilidade são necessárias para a construção das superfícies.



### 6.5.2 Fluxograma do modelo BS-RBDO

A Figura 6-5 mostra o fluxograma que representa o modelo BS-RBDO com todas as etapas do programa.

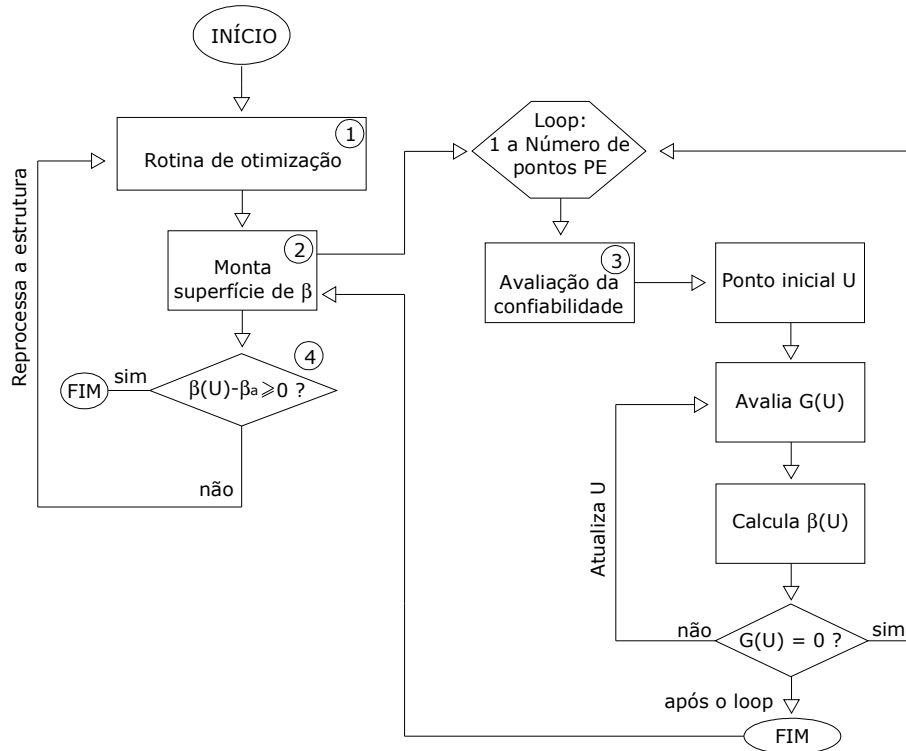


Figura 6-5 – Fluxograma do modelo BS-RBDO

1. Rotina de otimização. Esta etapa é idêntica ao processo de otimização descrito no capítulo 5. Trata-se de otimização determinística com restrição em superfície de confiabilidade;

2. Montagem da superfície de confiabilidade. Com o ponto ótimo obtido na etapa anterior constrói-se a superfície de confiabilidade. O procedimento é exatamente o mesmo descrito no capítulo 4, no tópico sobre superfícies de respostas. Define-se um plano de experiência (PE) qualquer, centrado-o no ponto ótimo. São dadas variações fixas quaisquer para as variáveis de otimização, configurando o plano de experiência. Na análise de confiabilidade, os pontos do PE são definidos em função da média, desvio-padrão e um coeficiente de afastamento em relação ao centro. Aqui nesta etapa, como não existe desvio-padrão para as variáveis de otimização, pode-se admitir uma variação qualquer, desde que não seja muito grande. Por exemplo, neste trabalho adotou-se uma variação de 10% para cada variável de otimização a partir do ponto ótimo. Após isso, faz-se uma análise de

confiabilidade completa para cada ponto do plano de experiência. É interessante notar que para cada ponto do PE, será associado um valor de índice de confiabilidade e que, para isso, todo o modelo mecânico é mobilizado várias vezes, dependendo do método de confiabilidade, para produzir a resposta de apenas um ponto do PE. Portanto, trata-se de um modelo com alto custo computacional. Definido o vetor com os índices de confiabilidade de todos os pontos do PE, faz-se a regressão por mínimos quadrados e obtém-se os coeficientes da superfície de resposta que define a restrição de confiabilidade;

3. Avaliação da confiabilidade. Esta etapa corresponde ao cálculo do índice de confiabilidade para cada ponto do plano de experiência de otimização. É função do método escolhido, conforme já descrito no capítulo 4;

4. Critério de parada. Uma vez construída a superfície de confiabilidade, verifica-se se o centro do PE, que corresponde ao ponto ótimo, satisfaz o valor de segurança requerido dado pelo índice de confiabilidade-alvo. Caso contrário, volta-se ao passo 2 para otimização determinística, porém levando-se em conta agora a restrição de confiabilidade obtida na iteração anterior. Esse procedimento é repetido até a convergência em termos do índice de confiabilidade e custo da estrutura.

### 6.5.3 Construção das superfícies de confiabilidade

O primeiro passo é escolher o grau do polinômio para a superfície de confiabilidade. Todas as possibilidades de polinômios descritos nas Tabela 4-1, Tabela 4-2 e Tabela 4-3 podem ser utilizadas naturalmente nessa etapa. Apenas para ilustração, as expressões abaixo mostram as superfícies de confiabilidade de primeiro e segundo grau para o caso de duas variáveis já na forma de restrição do processo de otimização:

$$\begin{aligned} g_2(X) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_2 + a_4x_2^2 - \beta_a \geq 0 \\ g_1(X) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 - \beta_a \geq 0 \end{aligned} \tag{6-10}$$

sendo que:  $x_i$  são as variáveis de otimização que entram na restrição de confiabilidade;  $\beta_a$  é o índice de confiabilidade-alvo do modo de falha considerado;  $a_j$  são os coeficientes que definem a superfície de confiabilidade.

Com o vetor de índices de confiabilidade determinado, a regressão por mínimos quadrados é realizada, determinando-se o vetor com os coeficientes  $a_j$  da superfície. Assim,

define-se a matriz  $P$  e o vetor  $V$  calculados pelo somatório dos produtos entre os vetores  $X$  e  $\beta$  com  $X$  para todos os pontos do plano de experiência de otimização, ou seja:

$$[P]_{ot} = \sum_{i=1}^{np} (\{X\}_i \{X\}_i^T) \quad (6-11)$$

$$\{V\}_{ot} = \sum_{i=1}^{np} (\beta_i \{X\}_i) \quad (6-12)$$

E finalmente, o vetor com os coeficientes da superfície de confiabilidade resulta da resolução do sistema dado por:

$$[P]_{ot} \{A\}_{ot} = \{V\}_{ot} \quad (6-13)$$

sendo que: o vetor  $A$  contém os coeficientes da superfície de confiabilidade; o vetor  $X$  é dado pela realização das variáveis de otimização conforme a expressão do polinômio aproximador para cada ponto do PE, segundo o mesmo procedimento descrito na seção 4.7.7;  $np$  é o número de pontos do plano de experiência.

#### 6.5.4 Considerações especiais sobre o modelo

A Figura 6-6 ilustra de maneira simples a construção das superfícies de confiabilidade e a evolução do processo de otimização.

Um fato interessante a ser discutido é quando a restrição de confiabilidade dada pela superfície de betas está ativa ou inativa. Se o índice de confiabilidade resultante da configuração ótima for maior que o valor alvo especificado, a restrição ficará inativa, não interferindo diretamente no processo de otimização. Assim, o ponto ótimo não estará sobre a restrição de confiabilidade, porém esta será satisfeita. Por outro lado, a restrição de confiabilidade passa a trabalhar como ativa no processo quando o índice de confiabilidade da configuração ótima resultar menor que o valor alvo. Dessa forma, na próxima iteração, a restrição em termos de betas estará ativa e determinará de maneira direta o novo ponto ótimo. É por esse motivo que em muitos casos, a solução ótima apresenta índice de confiabilidade maior do que o alvo.

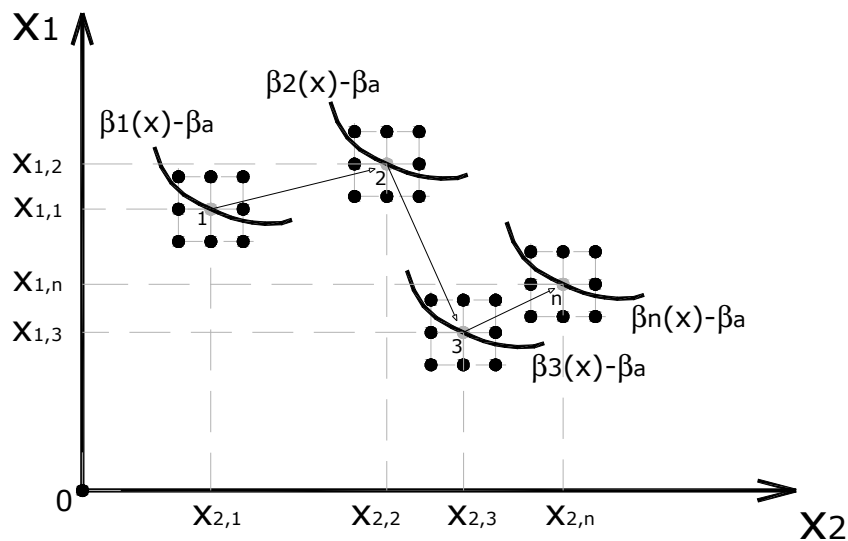


Figura 6-6 – Evolução do processo de otimização com superfície de confiabilidade

Esse modelo é interessante justamente em situações como a discutida anteriormente, pois nesses casos produz uma solução ótima que de fato possui a segurança requerida com menor custo.

## 6.6 Exemplos de Aplicação

### 6.6.1 Exemplo 1

O objetivo deste exemplo é mostrar o desempenho dos modelos de otimização baseada em confiabilidade no projeto de uma viga em concreto armado bi-apoiada, submetida a carregamento uniformemente distribuído e com segurança especificada por um índice de confiabilidade-alvo de 4,2 para o estado limite último de ruptura dos materiais na seção do meio do vão.

As variáveis de otimização consideradas foram a altura da seção ( $h$ ), áreas de armadura de tração e compressão ( $A_S$  e  $A_{S'}$ ), posição relativa da linha neutra ( $\beta_x$ ) e curvatura da seção ( $1/r$ ), no total de 5 variáveis de projeto. As variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade foram as seguintes:

- Resistência do concreto: média = 26,58MPa, COV = 15%, distribuição normal;
- Resistência do aço: média = 576,0MPa, COV = 8%, distribuição normal;
- Carga permanente: média = 36,75kN, COV = 10%, distribuição normal;

- Carga variável: média = 15,0MPa, COV = 20%, distribuição normal.

Essas estatísticas foram escolhidas para valores característicos de 20MPa e 500MPa, respectivamente, para o concreto e o aço, bem como um carregamento total de 50kN/m distribuído uniformemente sobre a viga, com  $g + q = 35\text{kN} + 15\text{kN}$ . A média escolhida para a carga permanente é dada por 1,05 vez o valor nominal de 35kN, ao passo que para a ação variável, a média foi adotada como sendo o próprio valor nominal de projeto.

Cada um dos modelos de RBDO foi utilizado para esse projeto, obtendo-se, portanto, uma configuração ótima para a estrutura, minimizando seu custo inicial total, mas ao mesmo tempo respeitando a demanda de segurança ao ELU.

**Tabela 6-3 – Propriedades e parâmetros utilizados na análise mecânica**

Descrição	Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade do aço	$E_Y$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$K_Y$	21000MPa
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,2
Deformação última do concreto	$\epsilon_{C,lim}$	-0,0035
Deformação última do aço	$\epsilon_{Y,lim}$	0,01
Incrementos de carga	$\lambda$	5kN
Número máximo de iterações	$It_{max}$	3000
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	$10^{-3}$
Pontos de Gauss no comprimento e na altura da seção	PGL, PGH	6, 20

O problema de otimização foi definido conforme as Equações 5-36 e 5-37 para elementos horizontais, com a consideração de uma restrição extra de confiabilidade, dada por uma superfície de primeiro grau, para o modelo BS-RBDO. Essa restrição extra foi escrita levando-se em conta somente a altura da seção que fornece o índice de confiabilidade-alvo. Isso foi feito para proporcionar economia de processamento na construção das superfícies de confiabilidade e também porque as demais variáveis de projeto, a partir da altura da seção, são obtidas pelas equações de equilíbrio descritas no problema.

O custo inicial total da viga, considerando custos do volume de concreto, peso total de aço para armaduras, quantidade de madeira para as fôrmas e mão-de-obra (lançamento e adensamento do concreto, corte e dobra da armadura, travamento e escoramento das fôrmas), foi calculado com os seguintes valores:  $\rho_s$  é o peso específico do aço igual a 7850kg/m<sup>3</sup>;  $C_C$  é o custo do concreto igual a 226,58R\$/m<sup>3</sup>;  $C_S$  é o custo do aço igual a 4,36R\$/kg;  $C_F$  é o custo da madeira igual a 42,10R\$/m<sup>2</sup>.

O modelo mecânico utilizado é não-linear com o concreto representado pelo modelo de dano de Mazars e o aço pelos modelos elastoplásticos descritos neste trabalho. Por se tratar de uma estrutura isostática, para o processo de otimização a viga foi dividida em um único

trecho, de modo que os valores ótimos encontrados para a seção otimizada foram estendidos para toda a estrutura.

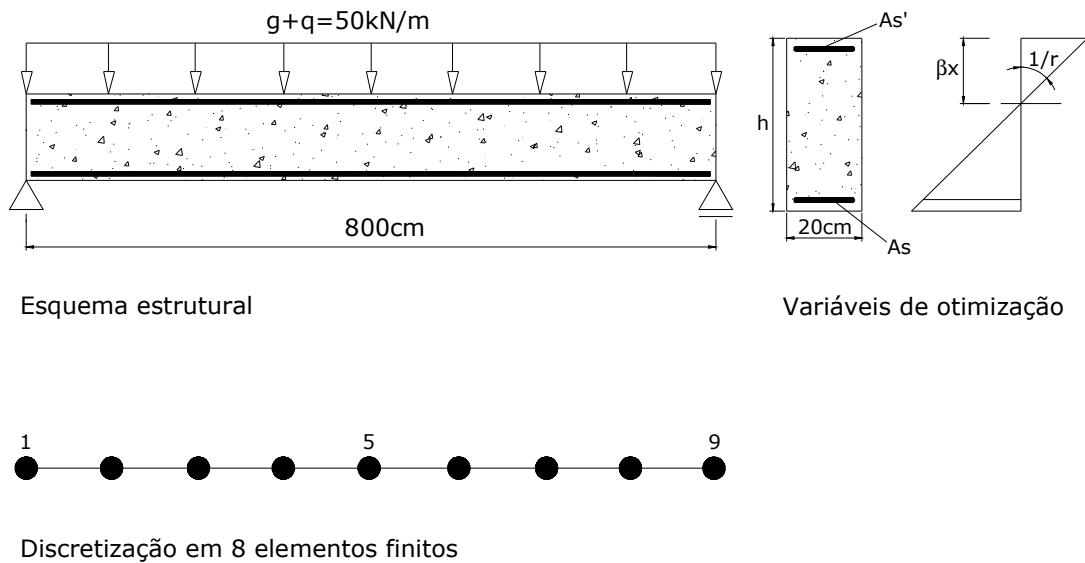


Figura 6-7 – Esquema estrutural, discretização e variáveis de otimização

A Tabela 6-4 mostra os resultados obtidos com ambos os modelos de otimização, bem como o tempo de processamento gasto em cada análise.

Tabela 6-4 – Resultados do processo de otimização

Modelo	h (cm)	$A_S$ (cm <sup>2</sup> )	$A_S'$ (cm <sup>2</sup> )	$\beta_x$	1/r	$\beta$	Custo (R\$)	CPU (min)
SF-RBDO	74,57	15,79	0,0	0,481	$9,75 \times 10^{-5}$	4,2	1272,40	8
BS-RBDO	80,48	10,24	2,53	0,250	$1,74 \times 10^{-4}$	4,2	1251,16	49

Conforme pode ser observado na Figura 6-8, cada modelo através de suas particularidades, busca uma solução candidata à solução ótima do problema. O modelo SF com calibração dos coeficientes parciais, para este caso estudado, mostrou-se mais rápido em termos de consumo de tempo de processamento do que o modelo BS, embora o custo total da viga resultou cerca de 1,7% maior que o valor encontrado pelo modelo BS.

Já o modelo BS apresentou melhores resultados, do ponto de vista de custo da estrutura, porém gastou muito mais tempo de processamento. Isso se deve ao fato de que em cada construção da superfície de confiabilidade, duas análises completas de busca do ponto de projeto foram necessárias, uma vez que a superfície considerou somente a altura da seção como variável de otimização. O comportamento oscilante da solução é resultado da qualidade das superfícies de confiabilidade, pois estas em algumas iterações podem não conter o índice de confiabilidade requerido, provocando nesses casos extrapolação das variáveis envolvidas

na superfície ao invés de interpolação. Para exemplificar o exposto acima, na primeira iteração os índices de confiabilidade obtidos para os dois pontos do plano de experiência adotado para a construção da superfície de betas foram 1,126 e 2,407. Como o índice de confiabilidade-alvo foi de 4,2, acredita-se que isso tenha inserido no algoritmo de busca algum tipo de perturbação, que resultou na oscilação observada nos gráficos da Figura 6-8. É interessante destacar ainda que o modelo com superfícies de confiabilidade resultou em uma configuração que não é muito habitual, com armadura de compressão e posição da linha neutra no valor de 0,250. Porém, ao se considerar restrições de confiabilidade, a seção que melhor atende aos requisitos de custo e segurança pode não ser obtida da maneira convencional, mas sim por exemplo, adicionando-se um pouco de área de aço na parte comprimida da seção, ao invés de aumentar ainda mais a altura desta para evitar a armadura adicional. Vale, portanto, minimizar o custo atingindo a segurança especificada.

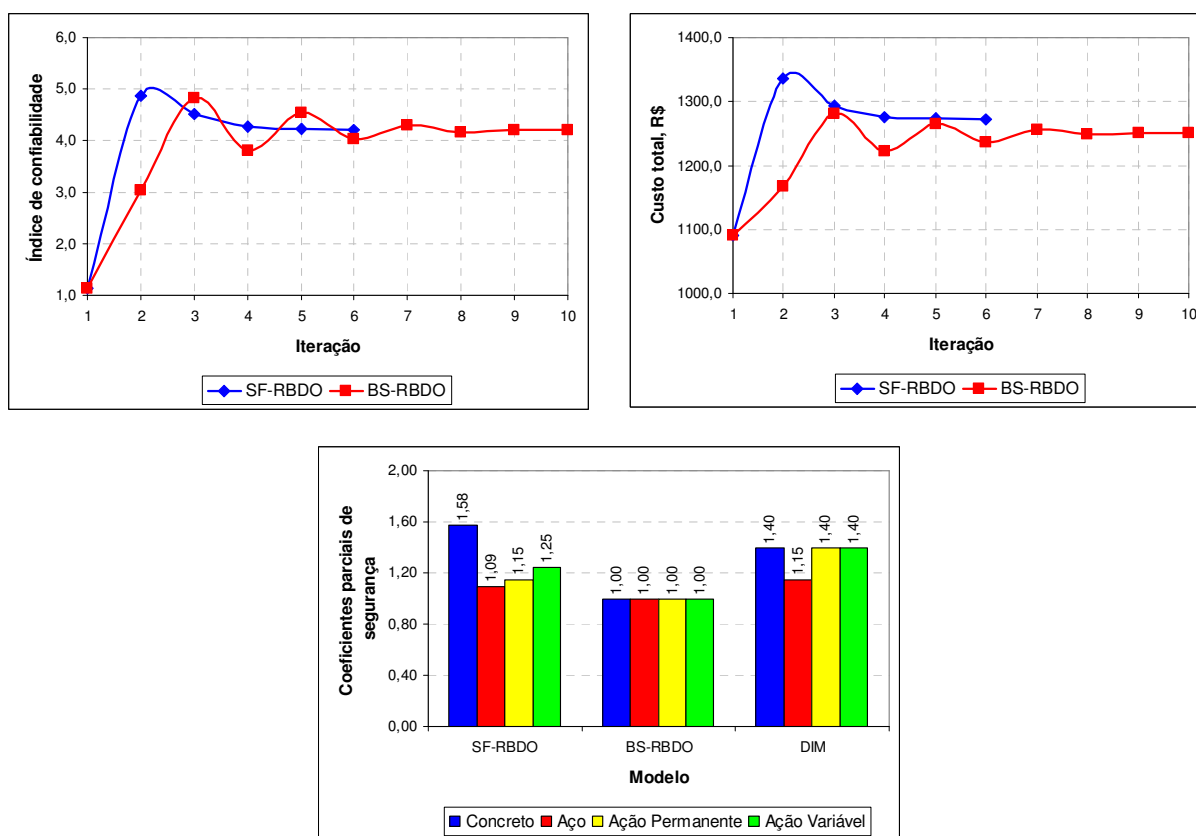


Figura 6-8 – Histórico de convergência e coeficientes parciais de segurança

A Figura 6-8 também mostra um diagrama de barras no qual podem ser vistos os coeficientes parciais de segurança para cada variável aleatória considerada. O modelo SF-RBDO, em sua essência, calibra esses coeficientes para atingir a configuração ótima da estrutura em função da segurança desejada. Assim, para este caso simples, a viga seria

projetada com tais valores para que atingisse índice de confiabilidade igual a 4,2. Já o modelo BS-RBDO, que utiliza uma superfície de confiabilidade como restrição, não faz uso de coeficientes parciais de segurança, pois toda a incerteza já está incorporada nas informações estatísticas das variáveis. Dessa forma, esse tipo de abordagem pode eliminar o uso de coeficientes de segurança e tratar o problema de uma maneira totalmente probabilística. As colunas marcadas com DIM se referem aos valores dos coeficientes parciais adotados pela NBR 6118:2003.

Para verificar o desempenho estrutural de ambas as configurações ótimas obtidas para a viga em estudo foi realizada uma análise mecânica não-linear, onde a carga foi aplicada em incrementos de 2,5kN até atingir o valor total de 50kN/m.

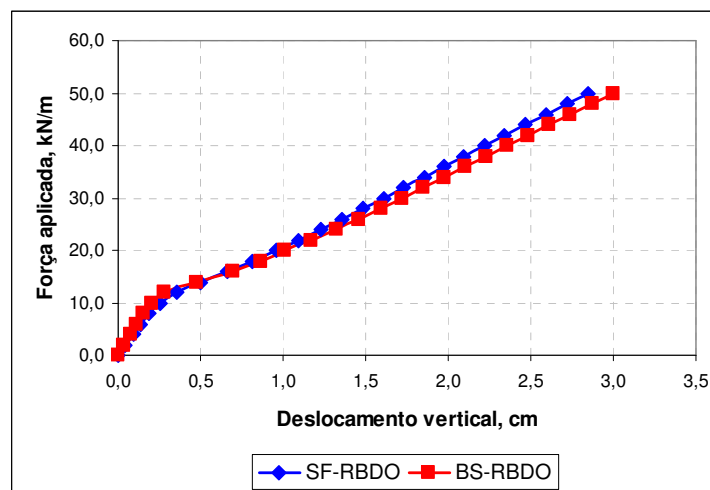


Figura 6-9 – Trajetória de equilíbrio da viga do ponto localizado no meio do vão

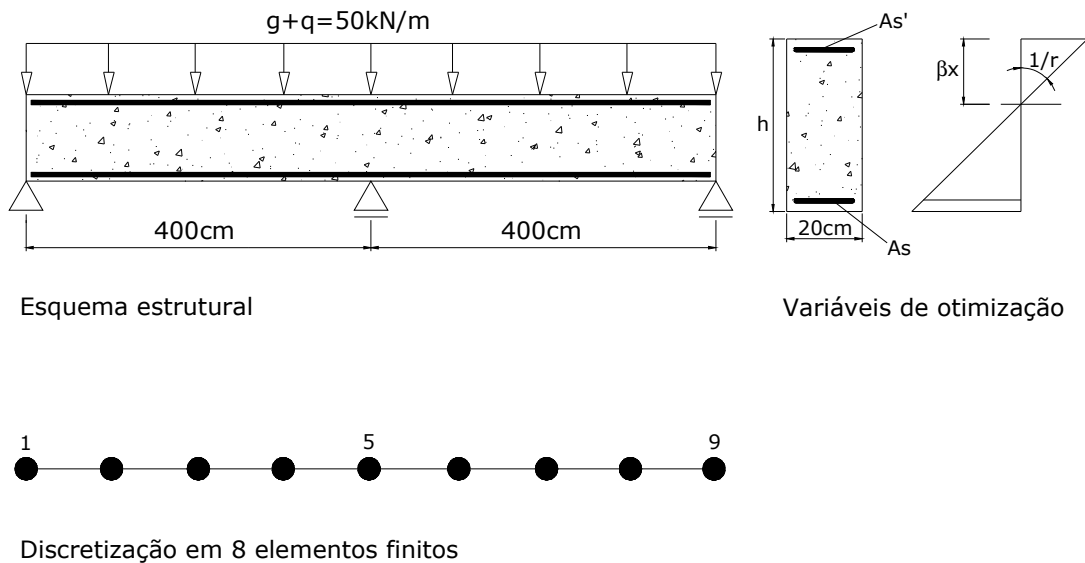
Verificou-se que a configuração obtida com o modelo BS-RBDO apresentou maior deslocamento vertical do ponto localizado no meio do vão da viga do que a seção alcançada com o modelo SF-RBDO. Mesmo mostrando maior rigidez na fase elástica, por conta da maior altura da seção, a menor quantidade de armadura tracionada obtida com o modelo BS provocou maior perda de rigidez após a danificação do concreto, resultando, assim, no maior deslocamento observado. Ambos os modelos, para o carregamento aplicado, não apresentaram escoamento da armadura de tração.

Concluiu-se que ambos os modelos foram capazes de atingir uma configuração estrutural com índice de confiabilidade de 4,2. O melhor resultado do ponto de vista de menor custo foi obtido com o modelo BS-RBDO, mas do ponto de vista de comportamento estrutural, o melhor resultado foi observado com o modelo SF-RBDO.



## 6.6.2 Exemplo 2

O objetivo deste exemplo foi exatamente o mesmo do exemplo anterior, isto é, obter as configurações que minimizam o custo inicial total de uma estrutura em concreto armado, considerando a segurança dada por um índice de confiabilidade-alvo de 4,2 para o estado limite último de ruptura dos materiais nas seções mais solicitadas. Todos os parâmetros do modelo mecânico, de materiais, bem como dos modelos de confiabilidade e de otimização foram adotados os mesmos para que fosse possível realizar uma comparação entre as soluções ótimas do exemplo anterior e deste. No exemplo anterior a estrutura analisada foi uma viga isostática em concreto armado com 8,0 metros de vão e solicitada por um carregamento uniformemente distribuído de 50kN/m. Neste exemplo, a mesma estrutura foi verificada, porém introduzindo-se um apoio central, dividindo a viga em 2 tramos de 4,0 metros cada um, solicitada pelo mesmo carregamento de 50kN/m. A viga, do ponto de vista da otimização, foi dividida em 3 trechos em função do momento fletor, sendo que o trecho 1 foi composto pelos elementos finitos de 1 a 3, o trecho 2 pelos elementos finitos 4 e 5 e o trecho 3 pelos elementos finitos de 6 a 8.



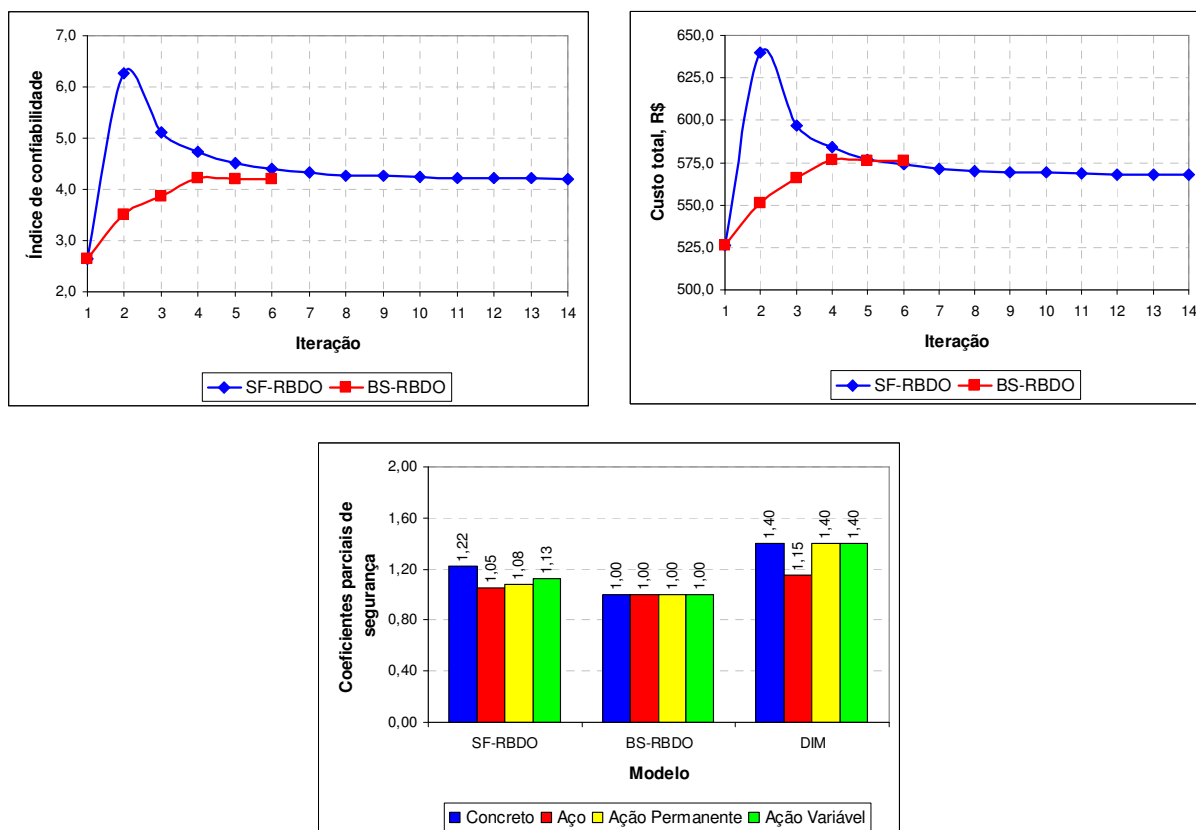
**Figura 6-10 – Esquema estrutural, discretização e variáveis de otimização**

A Tabela 6-5 mostra os resultados obtidos com ambos os modelos de otimização, bem como o tempo de processamento gasto em cada análise para o menor modo de falha da estrutura, que foi dado pela falha na seção sobre o apoio central. A coluna com as áreas de armadura de tração, denotada por  $A_s$ , refere-se nos trechos 1 e 3 à armadura positiva e no trecho 2, por ser a seção sobre o apoio central, à armadura negativa.

**Tabela 6-5 – Resultados do processo de otimização para o modo mais provável de falha**

Modelo	Trecho	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>S</sub> ' (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	1/r	β	Custo (R\$)	CPU (min)
SF-RBDO	1 e 3	36,33	3,37	0,0	0,386	2,49×10 <sup>-4</sup>	4,2	567,87	28
	2	36,33	8,01	0,0	0,402	2,39×10 <sup>-4</sup>			
BS-RBDO	1 e 3	39,91	2,60	0,0	0,348	2,52×10 <sup>-4</sup>	4,2	576,13	16
	2	39,91	5,80	0,33	0,240	3,65×10 <sup>-4</sup>			

Os resultados observados para a mesma viga, porém considerando-a hiperestática neste caso, apresentaram configurações com custo igual a aproximadamente metade do custo para viga isostática. A mesma segurança foi obtida para a seção mais solicitada, porém com menor consumo de materiais e melhor comportamento estrutural em serviço. Esse resultado mostra a grande vantagem de se considerar estruturas hiperestáticas em concreto armado no caso de grandes vãos.

**Figura 6-11 – Histórico de convergência e coeficientes parciais de segurança**

Neste exemplo é possível perceber com mais clareza como os modelos, em função de sua formulação, buscam a configuração ótima. O modelo BS encontrou uma altura um pouco maior que o modelo SF, porém com armadura menor. No entanto, desta vez foi o modelo SF com calibração dos coeficientes parciais que resultou na solução de menor custo. O que se

pode constatar é que existem diferentes possibilidades de dimensionamento que resultam na confiabilidade requerida mas que, certamente, existe uma configuração que produz o menor custo com a segurança desejada.

É interessante destacar que os coeficientes parciais obtidos para a viga hiperestática foram menores que os valores obtidos para a viga isostática, pois a própria configuração estrutural de uma viga hiperestática, naturalmente já fornece maior resistência e, conseqüentemente, maior segurança. O coeficiente parcial de minoração da resistência do concreto resultou o maior deles, pois foi justamente a variável aleatória resistência do concreto que apresentou maior sensibilidade no cálculo da probabilidade de falha do modo considerado.

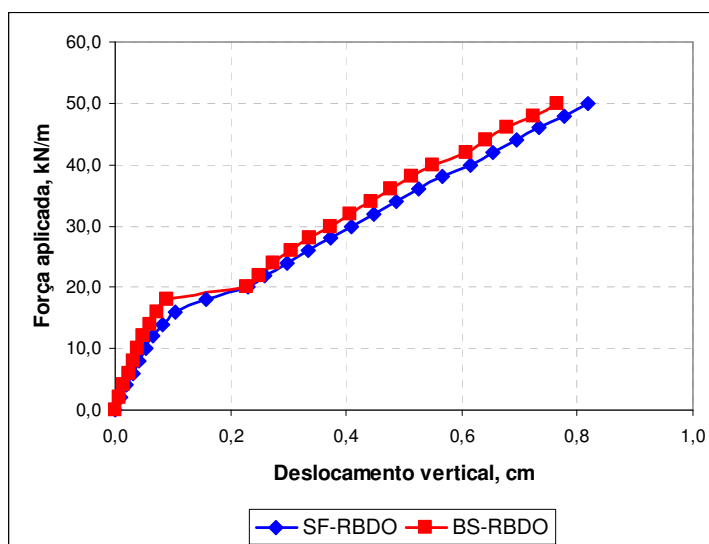
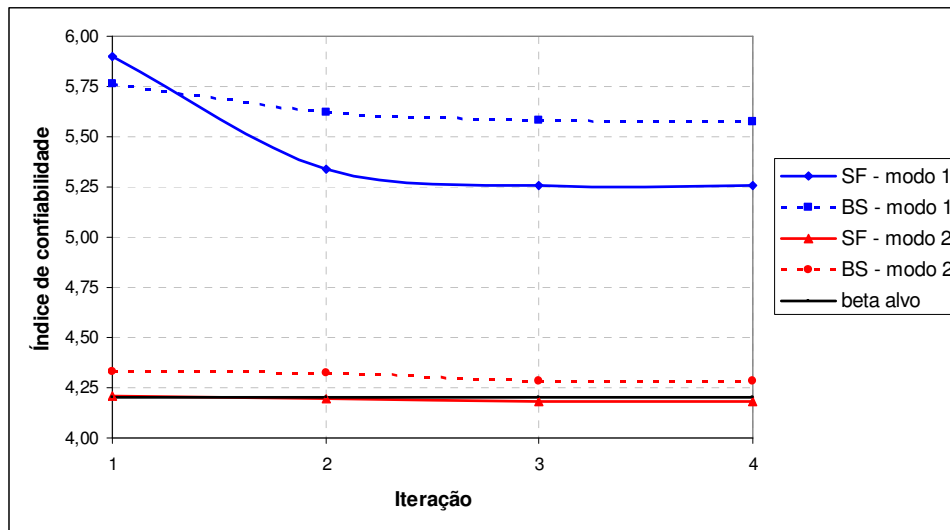


Figura 6-12 – Trajetória de equilíbrio do ponto localizado no meio do primeiro vão

A configuração obtida com o modelo BS mostrou-se mais rígida tanto antes da fissuração na fase elástica quanto após a fissuração, resultando em um deslocamento vertical do ponto médio do primeiro vão menor que o valor obtido com o modelo SF. Embora isso tenha ocorrido, vale ressaltar que ambas as configurações apresentaram praticamente o mesmo comportamento mecânico, sendo, portanto, coerente com as soluções encontradas para o mesmo índice de confiabilidade.

O gráfico a seguir apresenta a convergência do índice de confiabilidade de dois modos de falha para ambas as soluções ótimas encontradas. Os modos são: falha na seção do meio do vão de cada tramo (momento fletor positivo) e falha na seção do apoio central (momento fletor negativo). Esses valores foram obtidos após a determinação da solução ótima

para cada modelo, sendo, portanto, a análise de segurança de toda a viga construída com as seções ótimas obtidas no processo de otimização baseada em confiabilidade.



**Figura 6-13 – Convergência dos índices de confiabilidade para dois modos de falha**

O modo de falha 2 representa a ruptura dos materiais aço ou concreto na seção sobre o apoio central, que foi a seção utilizada para a otimização baseada em confiabilidade, por se tratar da seção mais crítica da estrutura. A falha nesta seção não representa o colapso da viga, pois pela redistribuição de esforços, em caso de falha do apoio central, as seções do meio de cada vão recebem parte dos esforços excedentes para reequilibrar a estrutura. Em estruturas de concreto armado, a associação dos modos de falha considerada é a chamada associação em série, pois em projeto não se deseja que nenhuma das seções de toda a estrutura atinja o estado limite último. Por conta disso, a falha em qualquer uma das seções resistentes significa falha da estrutura. A Figura 6-13 mostra que existe de fato reserva de resistência nas seções do meio de cada vão, dados os valores elevados dos índices de confiabilidade. Mais ainda, a configuração obtida com o modelo BS fornece mais resistência do que a configuração dada pelo modelo SF para essas seções. Já na seção sobre o apoio central, foi atingido praticamente o valor do índice de confiabilidade-alvo com ambos os modelos. Essa pequena diferença que existe entre os valores obtidos para o segundo modo e o valor de 4,2 se deu pelo fato de que durante o processo de otimização baseado em confiabilidade, as armaduras e dimensões das seções, pela precisão do programa, apresentavam muitas casas decimais, ao passo que a análise de confiabilidade realizada em seguida não contou com todas essas casas decimais de precisão, resultando nessa pequena diferença entre os valores.

Concluiu-se que os modelos apresentaram bom desempenho para obter a resposta ótima baseada no índice de confiabilidade-alvo e que o arranjo estrutural com peças hiperestáticas é sem, dúvida, extremamente benéfico para a segurança estrutural e também economia do projeto.

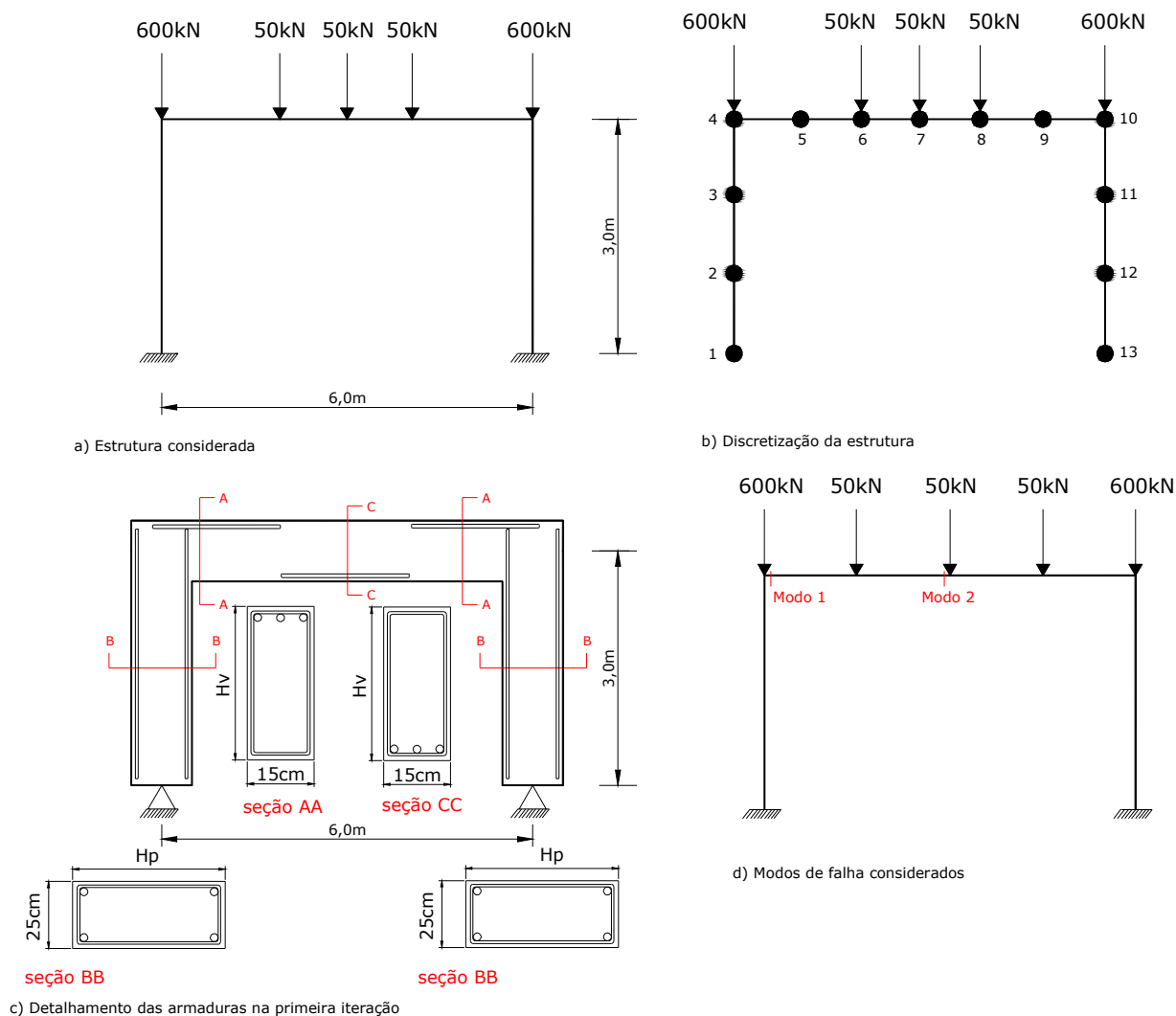
### 6.6.3 Exemplo 3

Este exemplo considera a mesma estrutura analisada no exemplo 4 do capítulo 5, onde foi realizada somente a otimização determinística do pórtico, com o cálculo dos índices de confiabilidade dos modos de falha referentes à ruptura dos materiais nas seções dos engastes e do meio do vão da viga. Naquele exemplo verificou-se que a seção do meio do vão apresentou maior índice de confiabilidade do que as seções dos engastes. Por essa razão, para que a viga venha a falhar por completo é necessário que haja a falha nos nós e depois no meio do vão, definindo assim o mecanismo de colapso de viga do pórtico em questão. O índice de confiabilidade desse mecanismo é, portanto, igual ao índice de confiabilidade da seção do meio do vão, pois este ocorre depois que os nós falham. Dessa forma, a análise de otimização baseada em confiabilidade deste exemplo será realizada considerando-se apenas a seção do meio do vão, pois esta representa a falha da viga como um todo. O objetivo é, portanto, otimizar o pórtico considerando os modelos SF-RBDO e BS-RBDO, bem como a otimização determinística, respeitando a condição de segurança dada pelo índice de confiabilidade-alvo igual a 4,2 para a seção do meio do vão.

Por comodidade, o pórtico considerado, as geometrias e os carregamentos, bem como as propriedades dos materiais e parâmetros de otimização foram repetidos na Figura 6-14 e Tabela 6-6, respectivamente. O pórtico foi discretizado em 12 elementos finitos de 1,0m de comprimento cada, com 6 pontos de Gauss ao longo de cada elemento e 20 pontos distribuídos ao longo da altura para a integração numérica.

Para o concreto, na análise de otimização determinística, foram adotados  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  e  $E_c = 21300\text{MPa}$ , para a resistência característica à compressão e o módulo de elasticidade longitudinal, respectivamente. As larguras das seções transversais dos pilares e da viga foram mantidas constantes nos valores de 25cm e 15cm, respectivamente. Ambos os materiais aço e concreto foram considerados com comportamento não-linear. A função-objetivo utilizada foi o custo inicial total do pórtico, dado pelas parcelas de custo dos pilares e da viga. As variáveis de otimização consideradas foram a altura da seção transversal de ambos

os elementos, áreas de armadura de tração e compressão para a viga e área de armadura total dos pilares, posição relativa da linha neutra e curvatura para cada elemento estrutural. O modelo mecânico utilizou, neste exemplo, as hipóteses de Euler-Bernoulli. Para a otimização, o pórtico foi dividido segundo os mesmos critérios adotados no exemplo 4 do capítulo 5, em conjunto com o uso da regularização da altura da viga após a determinação das dimensões ótimas dos três trechos de viga.



**Figura 6-14 – Estrutura analisada, discretização e modos de falha**

Na otimização determinística, foram utilizados os coeficientes parciais usuais para minoração de resistências e majoração de carregamentos. Já na otimização baseada em confiabilidade, esses coeficientes recebem o valor unitário, pois as incertezas são consideradas nas medidas estatísticas associadas às variáveis aleatórias do problema. No modelo SF-RBDO, os coeficientes são calibrados e utilizados para incorporar as restrições de confiabilidade no processo de otimização, tornando-o determinístico.

Tabela 6-6 – Parâmetros mecânicos e de otimização da análise

Descrição	Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade do aço	$E_S$	210000MPa
Módulo plástico do aço	$k_S$	21000MPa
Massa específica do aço	$\rho_S$	7850kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson do concreto	$\nu$	0,25
Taxa máxima de armadura longitudinal	$t_{max}$	4%
Taxa mínima de armadura longitudinal	$t_{min}$	0,4%
Distância do CG da armadura à face tracionada da seção	$d'$	4,3cm
Cobrimento do concreto	$c$	3cm
Coefficiente parcial de segurança para o concreto	$\gamma_C$	1,4
Coefficiente parcial de segurança para o aço	$\gamma_S$	1,15
Coefficiente parcial de segurança para G	$\gamma_G$	1,4
Diâmetro da armadura longitudinal	$\phi_L$	12,5mm
Diâmetro da armadura transversal	$\phi_T$	5,0mm
Espaçamento horizontal entre barras longitudinais	$e_h$	2,0cm
Tolerância em custo no processo de otimização	$Tol_{ot}$	10 <sup>-5</sup>
Incrementos de carga aplicados	$\lambda_{50}/\lambda_{600}$	1kN/12kN
Número máximo de iterações mecânicas	$It_{max}$	300
Tolerância em força e deslocamento	$Tol_f, Tol_d$	10 <sup>-3</sup>
Custo do concreto	$C_C$	R\$ 226,58/m <sup>3</sup>
Custo do aço	$C_S$	R\$ 4,36/kg
Custo da madeira	$C_F$	R\$ 42,10/m <sup>2</sup>

A análise de confiabilidade foi feita através do FORM. A Tabela 6-7 traz a associação estatística para as variáveis consideradas como aleatórias no exemplo.

Tabela 6-7 – Variáveis aleatórias utilizadas na análise

Variável	Símbolo	Média	C.O.V.	Distribuição
Resistência do concreto	$X_1 = f_C$	26,58MPa	15%	Normal
Resistência do aço	$X_2 = f_S$	576MPa	8%	Normal
Ação permanente	$X_3 = G$	52,5kN	10%	Normal

A Figura 6-15 mostra a convergência do índice de confiabilidade do modo de falha 2, dado pela ruptura dos materiais na seção do meio do vão, e do custo inicial total do pórtico ao longo do processo iterativo.

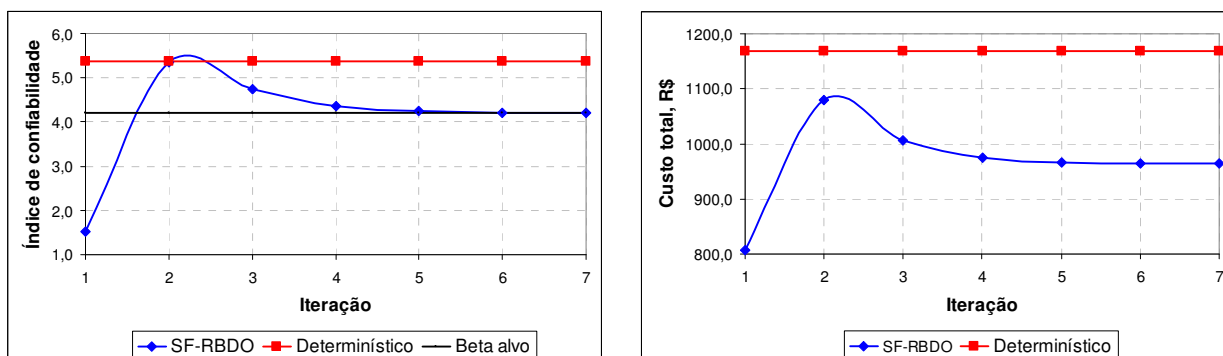


Figura 6-15 – Convergência do índice de confiabilidade e custo total do pórtico

O índice de confiabilidade do modo de falha 2 (seção do meio do vão) no processo de otimização determinística foi da ordem de 5,368 ao passo que no processo de RBDO, este valor caiu para 4,200. Isso provocou uma redução bastante sensível no custo do pórtico, caindo de R\$ 1169,32 para R\$ 964,51, o que significa um ganho de 17,5% na economia do projeto da estrutura. A segurança sofreu uma diminuição evidentemente, porém a estrutura ainda assim apresenta comportamento adequado ao estado limite último de ruptura dos materiais. Esse tipo de abordagem permite um projeto estrutural mais econômico e sempre respeitando a segurança desejada.

O modelo BS-RBDO, para este exemplo, não conseguiu atingir a convergência no processo de otimização. Acredita-se que a montagem da superfície de confiabilidade somente para o trecho de viga que contém o modo de falha considerado não seja suficiente para garantir a estabilidade dos resultados. Uma das propostas para trabalhos futuros pode ser a adaptação desse modelo para a estrutura como um todo, adequando também o problema de otimização, de forma que este seja escrito para toda a estrutura e não para partes dela.

**Tabela 6-8 – Resultados do processo de otimização para o modo de falha considerado**

Modelo	Trecho	h (cm)	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s</sub> ' (cm <sup>2</sup> )	β <sub>x</sub>	1/r	β	Custo (R\$)	CPU (min)
SF-RBDO	1 e 5	41,72	2,15	2,15	0,595	1,41×10 <sup>-4</sup>	4,2	964,51	20
	2 e 4	43,90	6,12	0,0	0,515	1,55×10 <sup>-4</sup>			
	5	43,90	5,07	0,0	0,509	1,57×10 <sup>-4</sup>			

Os trechos 1 e 5 correspondem aos pilares, com duas camadas de armadura iguais de 2,15cm<sup>2</sup>; os trechos 2 e 4 são as regiões de momento negativo na viga, ou seja, os trechos que formam os nós de pórtico, com armadura negativa de 6,12cm<sup>2</sup>; o trecho 5 é a região do meio do vão com momento fletor positivo e armadura positiva de 5,07cm<sup>2</sup>. É interessante destacar que nesse tipo de modelo de otimização baseada em confiabilidade, as dimensões dos elementos tendem a ser próximas, pois os coeficientes parciais calibrados são utilizados para o projeto de todos os demais elementos, garantindo assim maior uniformidade nas dimensões da estrutura e também nos índices de confiabilidade dos outros possíveis modos de falha.

Com relação aos coeficientes parciais, verificou-se aumento no valor do concreto e diminuição nos valores do aço e da carga aplicada, quando comparados com os valores usuais adotados em projetos (DIM). Com isso, concluiu-se que a variável mais influente no dimensionamento da estrutura foi a resistência do concreto, apresentando maior sensibilidade no cálculo da probabilidade de falha.



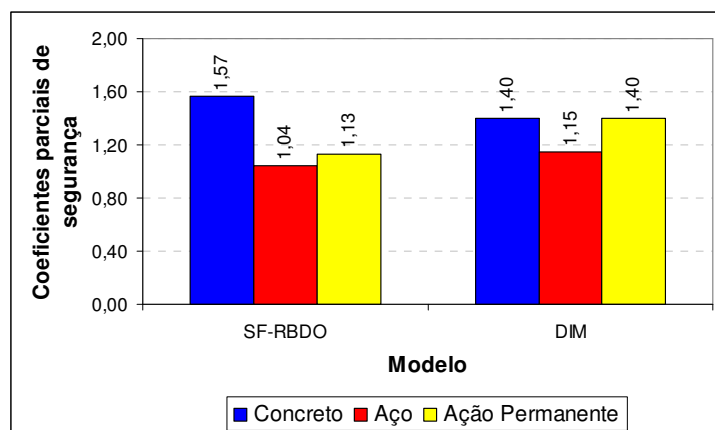


Figura 6-16 – Coeficientes parciais calibrados para beta alvo de 4,2

Para comparar as respostas obtidas pela otimização determinística e o modelo de RBDO, foi construída a curva força  $\times$  deslocamento vertical no meio do vão da viga. Verificou-se menor rigidez na estrutura dada pelo SF-RBDO, o que era esperado, pois o pórtico foi projetado para um índice de confiabilidade menor do que o valor obtido no processo de otimização determinística. Porém, mesmo apresentando maiores deslocamentos verticais, é interessante destacar que a segurança da estrutura contra o estado limite último de ruptura dos materiais está garantida com o valor do índice de confiabilidade desejado.

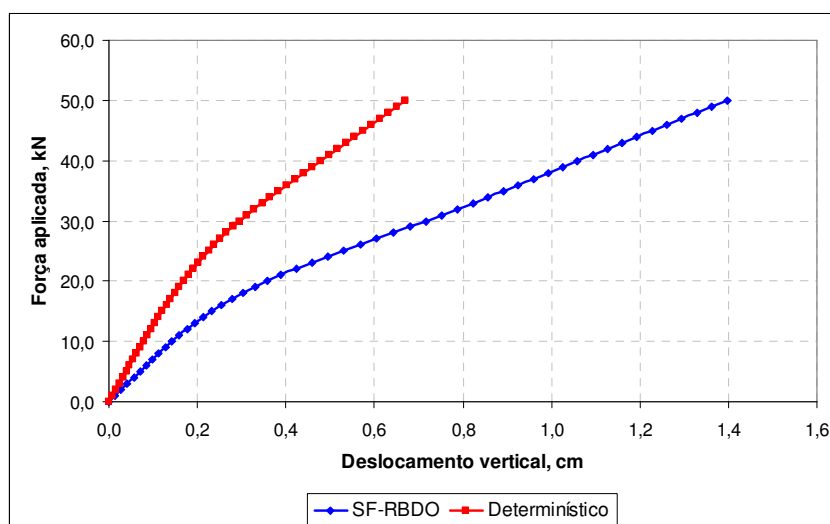


Figura 6-17 – Trajetória de equilíbrio para o ponto central no meio do vão da viga

Para observar o comportamento de outros modos de falha do pórtico, foi realizada uma análise de confiabilidade com as dimensões ótimas encontradas pelo modelo SF-RBDO, considerando, além do modo de falha na seção do meio do vão, a falha nas seções da viga que constituem os nós de pórtico com os pilares.

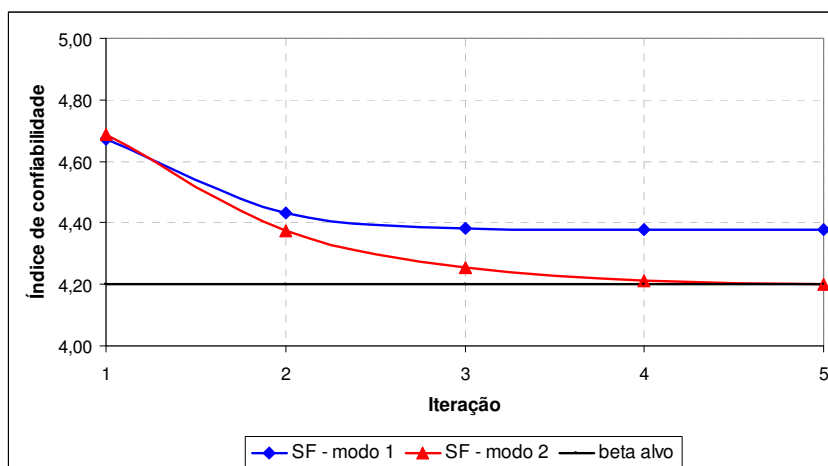


Figura 6-18 – Índices de confiabilidade para dois modos de falha do pórtico

O modo 1 corresponde à falha nas seções dos nós de pórtico e o modo 2 representa a falha na seção do meio do vão, utilizada para o projeto. Ao final do processo verificou-se que as seções dos nós de pórtico apresentaram segurança próxima àquela obtida para o meio do vão. Isso ocorreu por conta do próprio processo de otimização dado pela calibração dos coeficientes parciais, que utiliza os mesmo coeficientes parciais para o projeto de todos os elementos estruturais do pórtico. Assim, esses coeficientes são calibrados para asseguram a confiabilidade requerida para a seção do meio do vão, porém também influenciam na confiabilidade das outras seções, aproximando-as entre si. Esse tipo de abordagem permite diminuir o custo final da estrutura, pois impede que outras seções fiquem superdimensionadas.

#### 6.6.4 Exemplo 4

Este exemplo tem como objetivo propor a construção de ábacos para dimensionamento de vigas em concreto armado solicitadas à flexão simples, a partir da escolha do índice de confiabilidade. A idéia é obter a altura da seção resistente, bem como as áreas de armadura de tração e compressão, a partir do momento fletor solicitante e do grau de segurança, dado pelo índice de confiabilidade.

Para isso, o processo de otimização baseado em confiabilidade dado pelo modelo SF-RBDO foi utilizado, fixando-se para o índice de confiabilidade os valores de 3,0, 3,5 e 4,0. A configuração estrutural, nesse tipo de análise não é necessária, bastando somente o momento fletor atuante na seção. A análise de confiabilidade foi realizada através do FORM, com

equação de estado limite única, definida pela margem de segurança entre o momento fletor resistente e o momento fletor solicitante, conforme segue:

$$G(X, f_c, f_y) = M_R(X, f_c, f_y) - M_S \quad (6-14)$$

sendo que:  $X$  é o vetor de variáveis de otimização, ou seja, altura da seção transversal, áreas de armadura tracionada e comprimida e posição relativa da linha neutra;  $f_c$  e  $f_y$  são os valores das resistências do concreto e do aço, respectivamente;  $M_R$  é o momento fletor resistente;  $M_S$  é o momento fletor solicitante.

O momento fletor resistente foi obtido pela sua respectiva expressão analítica, para simplificação do problema, permitindo assim, sua utilização em procedimentos de projeto. O equilíbrio da seção transversal ao momento fletor foi realizado adotando como pólo o centro de gravidade da seção, resultando em:

$$M_R = 0,408b_w d^2 \beta_x^2 f_c + A_s' f_y (d\beta_x - d') + A_s f_y d(1 - \beta_x) \quad (6-15)$$

sendo que:  $b_w$  é a largura da seção fixada em 15cm;  $d$  é a altura útil da seção, obtida a partir da altura da seção;  $\beta_x$  é a posição relativa da linha neutra na seção;  $d'$  corresponde à distância entre a borda mais tracionada da seção e o centro geométrico da armadura de tração;  $A_s$  e  $A_s'$  são as áreas de armadura tracionada e comprimida, respectivamente da seção.

O ábaco foi construído para valores de índice de confiabilidade-alvo fixados iguais a 3,0, 3,5 e 4,0. O procedimento de construção pode ser resumido pelo seguinte:

- Escolha da solicitação. Momento fletor solicitante determinístico no valor de 10.000,0kN.cm;
- Escolha das propriedades dos materiais. O ábaco foi idealizado para  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  e  $f_{yk} = 500\text{MPa}$ . Para isso, ambas as variáveis foram consideradas aleatórias na análise de confiabilidade com as seguintes estatísticas:  $f_{cm} = 26,58\text{MPa}$  e  $\text{COV} = 15\%$  (concreto);  $f_{ym} = 576\text{MPa}$  e  $\text{COV} = 8\%$  (aço) e ambas com distribuição normal de probabilidade;
- Demais parâmetros. O valor de  $\beta_x$  foi otimizado, buscando dessa forma a seção mais econômica para os níveis de segurança especificados. O cobrimento de concreto foi considerado igual a 2cm e  $d' = 3\text{cm}$ ;

- d) Modelo de materiais. Os materiais foram considerados em seu regime elástico-linear sem, portanto, utilização do modelo não-linear de elementos finitos desenvolvido neste trabalho.

Para cada valor do índice de confiabilidade-alvo, otimizou-se a seção e obteve-se e demais parâmetros importantes.

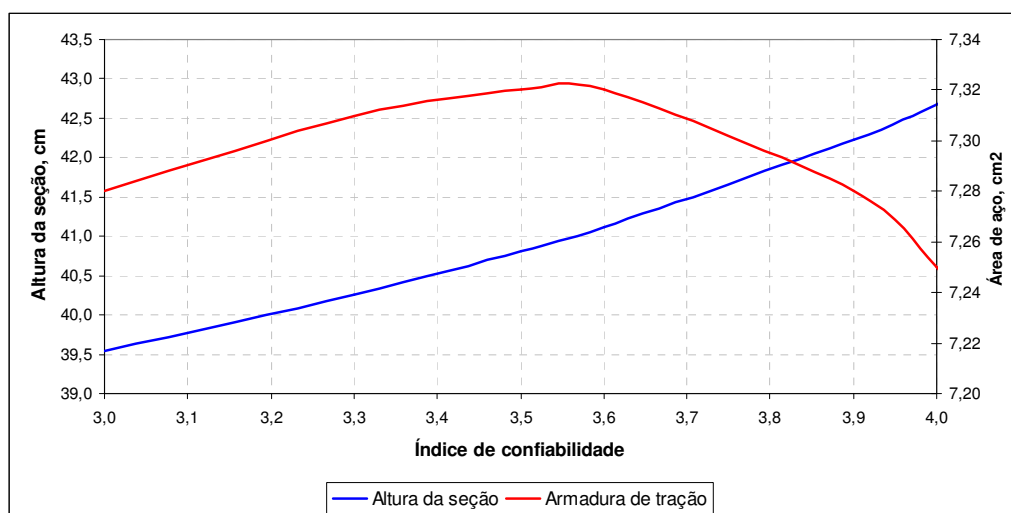


Figura 6-19 – Ábaco para dimensões da seção transversal

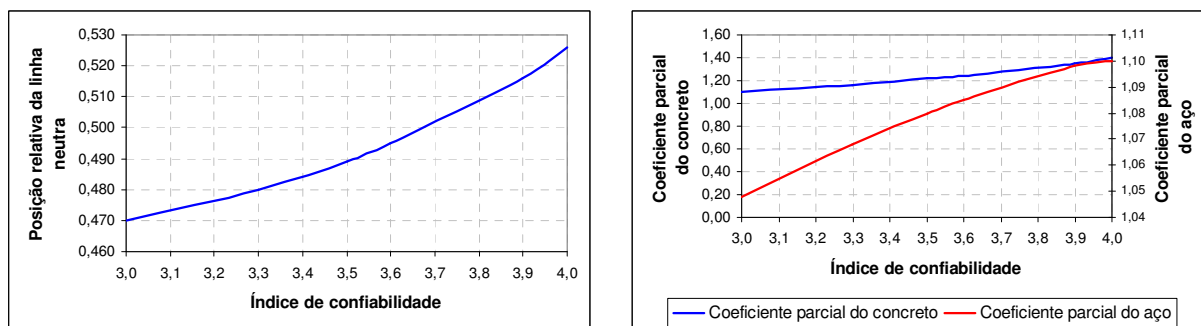


Figura 6-20 – Ábacos para posição relativa da linha neutra e coeficientes parciais

Com esse tipo de ábaco, basta escolher a confiabilidade desejada e obter os valores da altura da seção e da armadura tracionada, visto que a armadura comprimida resultou nula, sendo, portanto, de caráter construtiva.

Esse tipo de ábaco pode ser obtido para qualquer valor de momento fletor, de resistências do concreto e do aço e valores de confiabilidade-alvo, resultando ao final, em uma coletânea para dimensionamento à flexão simples de seções transversais em concreto armado.

## **7. Considerações Finais**

---

---

### **7.1 Conclusões**

O trabalho abrangeu áreas do conhecimento como mecânica dos materiais e das estruturas, segurança estrutural via teoria da confiabilidade, otimização de estruturas em concreto armado, bem como seu acoplamento com os modelos de confiabilidade para gerar procedimentos interessantes e atuais de projeto. Para isso foi desenvolvido um programa computacional com elementos finitos de barra, incorporando-se diversos efeitos com o objetivo de melhorar a resposta mecânica das estruturas, para sua utilização em conjunto com os modelos de confiabilidade e otimização. Cada uma dessas áreas recebeu pequenas contribuições, porém significativas para o avanço da ciência no âmbito da produção de projetos estruturais de elementos em concreto armado mais seguros e econômicos, características tão importantes no contexto do mercado atual.

Quanto ao modelo mecânico foram apresentadas propostas para melhorar a obtenção numérica do comportamento de elementos em concreto armado, sobretudo ao cisalhamento. Tais propostas se basearam na integração de um modelo de elementos finitos de barra, isto é, unidimensional, com mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, dados pelo engrenamento dos agregados e efeito de pino. Em conjunto, foi imprescindível a consideração também da contribuição da armadura transversal no comportamento global dessas peças, visto que em análises convencionais via elementos finitos, não é possível levar em conta essa contribuição. Todas essas melhorias foram perfeitamente adaptadas aos modelos de dano para o concreto e elastoplástico para o aço, de modo que o procedimento mecânico final resultou bastante interessante e simples. Tentativas de outros autores encontrados na literatura para considerar o efeito de pino foram sempre propostas a partir de modelos bidimensionais de elementos finitos, ao passo que neste trabalho buscou-se a sua integração com modelos

unidimensionais, contribuindo para o desenvolvimento da área. O engrenamento dos agregados, embora não considerado a partir de um modelo próprio, está integrado ao programa, pois verificou-se que ao se calibrar os parâmetros do modelo de dano para uma dada resistência à compressão, esse mecanismo fica automaticamente contemplado pelo modelo. O procedimento de calibração dos parâmetros  $A_C$ ,  $B_C$ ,  $A_T$  e  $B_T$  do modelo de dano de Mazars (1984) foi realizado através da minimização da função erro entre a resposta fornecida pelo modelo de dano e a resposta dada por uma lei constitutiva conhecida. Assim, para os parâmetros de tração,  $A_T$  e  $B_T$ , foi utilizada a lei de Figueiras (1983), ao passo que para os parâmetros de compressão,  $A_C$  e  $B_C$ , foi utilizada a lei de Popovics (1973). Com isso, o conjunto de parâmetros que minimiza esse erro relativo é adotado para simular o concreto utilizado na estrutura com a sua respectiva resistência. Vale lembrar que esse procedimento de calibração dos parâmetros de dano é necessário para as análises de confiabilidade, pois ao se considerar a resistência do concreto como variável aleatória, esta recebe diversos valores ao longo do processo iterativo de busca do ponto ótimo, necessitando, dessa forma, de parâmetros que sejam compatíveis com seu novo valor de resistência. Mais detalhes sobre essa calibração podem ser encontrados em Nogueira (2005).

A contribuição, portanto, do engrenamento dos agregados foi considerada através da calibração adequada do próprio modelo de dano para o concreto, fazendo parte da porção de concreto resistente da seção transversal dos elementos.

O efeito de pino foi tratado a partir do modelo de He & Kwan (2001) que considerou sua aplicação através de leis constitutivas para o concreto baseadas em critérios de plasticidade e com elementos finitos bidimensionais. A contribuição se deu na adaptação dessa formulação ao modelo de dano para o concreto com elementos finitos unidimensionais. O modelo de dano se mostrou apropriado para essa combinação, pois permitiu considerar a evolução de microdefeitos na perda de rigidez da estrutura em conjunto com o acréscimo de rigidez da armadura quando esses microdefeitos tocavam os pontos de Gauss que continham as barras de armadura. Vale comentar que o efeito de pino ficaria perfeitamente modelado se fosse associado a um modelo baseado na mecânica do fraturamento, pois ao se formar a fissura discreta, esta toca a armadura longitudinal mobilizando de fato esse efeito de cortante e flexão localizado nas barras, dando origem ao efeito de pino. Portanto, trata-se de um modelo aproximado, mas que fornece resultados satisfatórios.

O modelo para contribuição da armadura transversal em elementos de concreto armado também foi totalmente baseado na mecânica do dano, partindo do princípio que a

deformação que vai para os estribos é aquela que não é absorvida pelo concreto, decorrente da fissuração que evolui à medida que o carregamento vai sendo aplicado. Esse modelo foi baseado na formulação de Sanches Jr & Venturini (2007), que considerava que a parcela que seria transferida para os estribos estava localizada no ponto médio da seção, onde a tensão de cisalhamento é maior. Porém, verificou-se que ao se considerar a distribuição de tensões via modelo de dano, essa fibra de máxima tensão de cisalhamento pode estar um pouco deslocada do ponto médio da seção, tendendo a se aproximar mais da área comprimida da seção. Por conta disso, o modelo proposto neste trabalho considerou que a transferência de tensão de cisalhamento do concreto para os estribos pode ocorrer em qualquer fibra da seção, desde que esta apresente a maior parcela de deformação danificada rotacionada para a vertical, conforme ilustrado no capítulo 3. Com isso, o modelo ficou mais preciso e geral. Os resultados apresentados mostraram, de um modo geral, bom comportamento do modelo mecânico proposto. Pouca influência se percebeu em vigas com pequena relação altura/comprimento, pois nesses casos o acréscimo de deformações provocado pela parcela de cisalhamento é pequena. Porém, em vigas onde essa relação foi maior, verificou-se forte contribuição desses mecanismos, sobretudo quando comparados ao modelo de Timoshenko puro. Com isso, concluiu-se que o modelo mecânico desenvolvido constitui-se em um procedimento interessante para análise de barras em concreto armado. O ponto negativo do modelo é o seu tempo de processamento, que comparado às mesmas condições de análise com as hipóteses somente de flexão, mostrou-se bem maior.

Com relação ao módulo de busca de cargas últimas desenvolvido, concluiu-se que as condições adotadas para atingir um estado limite último ou de serviço foram bastante adequadas. É evidente que as cargas encontradas para o estado de ruptura dos materiais são, na verdade, cargas de violação do estado limite naquela seção e não cargas que caracterizam um rótula plástica. Quando uma determinada fibra da seção transversal atinge a deformação última especificada no início da análise, o programa “entende” que uma carga de violação foi atingida. É evidente que a seção apresenta um pouco mais de resistência, porém em situações de projeto não se deseja que nenhuma condição limite seja atingida. Portanto, para fins de análise de confiabilidade, essa condição é suficiente e até a favor da segurança. O mesmo não ocorre para o estado limite de perda de estabilidade também considerado pela singularidade da matriz de rigidez global. Nesse caso, quando essa condição é atingida, admite-se que a falha da estrutura seja o colapso global, pois não há mais equilíbrio estável da estrutura. Já a condição de busca da carga que leva a estrutura ao máximo deslocamento vertical ou

horizontal mostrou-se bastante confiável, sendo possível obter com grande precisão esses deslocamentos e, conseqüentemente, as cargas que os representam.

A confiabilidade estrutural também foi um dos temas abordados neste trabalho. O estudo foi direcionado, na verdade, para buscar os melhores métodos para cálculo de probabilidades de falha com o objetivo de acoplá-los com as técnicas de otimização criando ferramentas de projeto ótimo baseado em confiabilidade. Para isso, foram estudados os métodos de superfície de resposta, métodos diretos como é o caso do FORM e SORM e melhorias interessantes para acelerar a convergência e precisão dos resultados. O método de superfície de resposta (RSM) foi amplamente explorado na pesquisa. Foram implementadas funções polinomiais de primeiro e segundo grau, estes com termos cruzados ou não, uma técnica de reestruturação do plano de experiência após a convergência e também uma técnica de melhoria na obtenção das superfícies de resposta, chamada de regressão com fatores-peso. O que se constatou é que na grande maioria dos casos estudados nos exemplos, os métodos apresentaram convergência e foram estáveis, principalmente as funções de primeiro grau, porém o grande ponto contra esses métodos ainda é o número de chamadas do modelo mecânico da estrutura. É evidente que ao se estudar problemas que podem ser formulados de maneira analítica, o número de chamadas do modelo mecânico pode não vir a ser algo impeditivo, pois ainda assim, a obtenção das respostas é rápida. No entanto, ao se considerar modelos não-lineares de materiais, como foi o caso deste trabalho, à medida que se aumenta o número de variáveis aleatórias, esses métodos começam a ficar pesados do ponto de vista computacional. Frequentemente requerem muitas chamadas do modelo de elementos finitos para construir um único plano de experiência em cada iteração. Isso se repete a cada iteração de busca do ponto de projeto, inviabilizando muitas vezes o seu uso. Aliado a isso, o modelo não-linear com a contribuição dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento e armadura transversal desenvolvido neste trabalho por vezes resultava em processamentos muito demorados, quando comparado com o mesmo modelo considerando somente a deformação por flexão. Isso impediu de realizar análises de estruturas maiores com esses modelos de comportamento.

A técnica de regressão com fatores-peso apresentou bons resultados, mas sem grandes ganhos em relação à técnica convencional de regressão utilizada no RSM. Da mesma forma, a reestruturação dos planos de experiência também se mostrou interessante em alguns casos, porém o custo computacional acrescentado foi muito elevado, inviabilizando o uso dessas técnicas em problemas maiores. O que se verificou também é que métodos de



resolução baseados em superfícies de respostas são altamente sensíveis à forma do plano de experiência, ou seja, a disposição dos pontos na região de interesse, bem como à distância desses pontos até o centro do plano, dada pelo coeficiente  $m$ . Isso fez com em vários casos, houvesse melhor desempenho de um plano de experiência em relação ao outro e até mesmo, em casos mais extremos, de perda de convergência. De um modo geral, os modelos baseados no RSM funcionam bem, porém podem se tornar caros do ponto de vista computacional. Isso é um fator agravante para análises de RBDO, pois a cada iteração do processo de otimização, as restrições de confiabilidade precisam ser avaliadas aumentando ainda mais o custo computacional.

Uma boa alternativa encontrada para resolver esse problema foi a utilização do FORM e SORM diretamente. Mais especificamente foi adotado o FORM, pois sua aproximação linear no ponto de projeto é suficientemente precisa para a grande maioria dos problemas de engenharia. O que se fez foi obter os gradientes da função de estado limite a partir de diferenças finitas da própria condição limite definida na análise da estrutura. Essa técnica foi chamada de gradientes numéricos. Assim, o número de chamadas do modelo de elementos finitos é dado sempre pelo número de variáveis + 1, o que diminui bastante o custo computacional. Com isso, foi possível analisar problemas com mais variáveis aleatórias e realizar de maneira menos onerosa as análises de otimização baseada em confiabilidade. O método se mostrou estável, mesmo quando considerados os comportamentos não-lineares dos materiais e da estrutura, apresentando bons resultados. Dessa forma, concluiu-se que esse tipo de abordagem deve ser adotada em todas as análises de confiabilidade a partir de agora, pois é preciso, é mais eficiente e fácil de implementação nos códigos computacionais.

Para análise da confiabilidade de estruturas em concreto armado com mais de um modo de falha possível, a associação considerada foi sempre em série, pois mesmo que a estrutura não venha a atingir o colapso, em serviço, não se deseja que nenhum estado limite seja atingido. Isso caracteriza um comportamento em série do ponto de vista da análise de sistemas de confiabilidade, de modo que o projeto deve garantir a segurança contra o modo mais provável de falha. Os limites bi-modais utilizados foram suficientes para a pesquisa realizada.

Com relação à economia das estruturas em concreto armado, foi desenvolvido um modelo de otimização de seções transversais dos elementos, com o objetivo de obter as dimensões das peças a partir da minimização do custo inicial total das mesmas. A abordagem escolhida foi a divisão da estrutura em diversos trechos conforme o diagrama de momentos

fletores da estrutura, onde em cada um desses trechos foi adotada a seção submetida à máximos esforços de momento e de força normal para a otimização. Assim, a seção otimizada foi estendida para todo o restante do trecho no qual ela se insere. Esse processo se repete até que a redistribuição de esforços seja insignificante de uma iteração para outra consecutiva, chegando com isso, à solução considerada ótima para a estrutura. A grande vantagem da formulação desenvolvida é que ela pode ser utilizada tanto para vigas, como para pilares, tirantes e elementos inclinados, sem necessidade de alteração do seu formato. Isso garantiu generalidade ao modelo de otimização, podendo ser utilizado em qualquer situação de projeto. Além disso, a inclusão da posição relativa da linha neutra e da curvatura da seção no conjunto de variáveis de otimização fez com que a seção obtida fosse, de fato, a seção ótima, pois não houve nenhum tipo de restrição quanto aos domínios de deformação ou níveis de tensão no concreto ou em qualquer camada de armadura que pudesse limitar a formulação.

Os resultados foram comparados com outra formulação e mostraram-se melhores justamente por essa característica de liberdade de projeto da seção. Qualquer domínio pode ser atingido dessa forma, sem restringir pilares a domínio 5 ou vigas ao valor limite 0,628 entre domínio 3 e 4, por exemplo.

A utilização dessa formulação para pórticos em concreto armado também foi bem sucedida, bastando dividir a estrutura toda em trechos governados pelo diagrama de momentos fletores. Vale lembrar que existem outras maneiras de resolver o problema, como por exemplo construir uma função-objetivo única para toda a estrutura e considerar todas as áreas de aço e dimensões dos elementos em uma única formulação, obtendo assim, o modelo global de otimização, sem a divisão em trechos. Essa é inclusive uma das próximas etapas da pesquisa que continuará após a conclusão deste trabalho.

O modelo de otimização, portanto, ficou geral para barras em concreto armado, podendo ser utilizado no projeto de qualquer tipo de estruturas de barras. O fato de se considerar a redistribuição de esforços através de iterações sucessivas do modelo fez com que o caráter global fosse de certa forma atingido, pois a cada solução ótima proposta, a estrutura era analisada mecanicamente e verificada do ponto de vista dos novos esforços. Esses esforços por sua vez eram escolhidos para a próxima iteração, levando, portanto, a redistribuição até o fim de todo o processo, garantindo a qualidade das soluções.

Os modelos de confiabilidade e de otimização foram acoplados para obter uma ferramenta de projeto que minimiza o custo de produção da estrutura, baseado em restrições de confiabilidade. Esse tipo de abordagem, conhecida na literatura como RBDO (*Reliability-*

*Based Design Optimization*) ou Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade, é interessante para aplicação em projetos de estruturas, pois permite obter a melhor configuração estrutural em termos de custo, que respeita a segurança pré-estabelecida pelo contratante do serviço. Além disso, essa metodologia pode ser utilizada para projetar uma estrutura ou sistema a partir de condições probabilísticas, visto que os coeficientes de segurança são abolidos neste caso, pois a análise de confiabilidade supre sua função no projeto. É, portanto, uma interessante ferramenta para melhorar a qualidade dos projetos.

Os modelos propostos neste trabalho basearam-se na mesma premissa de RBDO, porém com maneiras de busca da solução ótima um pouco diferentes entre si. No primeiro modelo, o SF-RBDO, a análise de confiabilidade foi utilizada para fazer o elo de ligação entre a otimização e a segurança da estrutura, através da calibração dos coeficientes parciais de cada variável aleatória. Assim, o algoritmo de otimização busca a solução ótima, governado pelos coeficientes parciais, que são devidamente calibrados para atingir o índice de confiabilidade-alvo especificado. A restrição de confiabilidade deixa de ser explícita e passa a ser implícita nos coeficientes parciais calibrados. Esse modelo representa uma contribuição no assunto, principalmente por estender o conceito empregado ao campo da análise não-linear de estruturas. Tentativas de uso desse modelo de calibração foram feitas considerando apenas modelos elásticos e lineares dos materiais, o que se encaixa adequadamente à hipótese principal do modelo. Essa hipótese consiste em adotar os co-senos diretores do ponto de projeto atual como sendo os mesmos para o ponto de projeto que caracteriza o índice de confiabilidade-alvo. Quando se utiliza os modelos não-lineares de comportamento dos materiais, o problema se torna altamente não-linear, sendo necessária, portanto, a utilização da técnica desenvolvida neste trabalho, que calcula índice de confiabilidade-alvo fictícios para atingir o valor real especificado da segurança. Os exemplos mostraram que a técnica funcionou de maneira bastante satisfatória, atingindo de fato a configuração ótima para os valores especificados de confiabilidade. O modelo também se mostrou bastante estável mesmo no caso do pórtico estudado, atestando sua capacidade de convergência.

O segundo modelo, chamado de BS-RBDO, já considera de maneira explícita a restrição de confiabilidade no processo de otimização. Essa restrição é obtida para cada modo de falha da estrutura e a partir do ponto ótimo calculado na primeira iteração do processo. Esse ponto é então admitido como o centro de um plano de experiência e variado para a definição dos demais pontos do plano. Para cada ponto desse plano, uma análise de confiabilidade inteira é realizada, obtendo-se o seu respectivo valor do índice de

confiabilidade. A restrição é então determinada a partir do vetor dos índices de confiabilidade de todos os pontos do plano de experiência por um processo de regressão simples. Com isso, na iteração seguinte a restrição de confiabilidade é incorporada ao processo, de modo que o próximo ponto ótimo é obtido levando-se em conta a nova restrição.

Esse modelo apresentou resultados razoáveis para as vigas estudadas, embora tenha encontrado configurações distintas daquelas obtidas com o SF-RBDO. Já no caso do pórtico, o modelo não conseguiu atingir a convergência, sendo, portanto, ineficaz para o caso considerado. Uma das causas desse tipo de comportamento pode estar relacionada ao fato da divisão da estrutura em trechos, sendo que a nova restrição de confiabilidade é obtida somente para o trecho ou trechos que contenham modos de falha considerados na análise. Isso faz com que apenas determinadas partes da estrutura fiquem sensíveis à restrição de segurança, deixando de certa forma com que as demais partes que compõem a estrutura fiquem soltas com relação ao requisito de segurança. Além disso, a obtenção do plano de experiência fazendo uma variação de 10% para cada variável de otimização, pode ter sido muito grande, o que comprometeu a convergência do modelo. Um outro fator que pode ter levado o modelo BS-RBDO à não convergência para o pórtico foi a utilização apenas da altura da seção transversal como variável de projeto na superfície de confiabilidade. Isso foi feito para poupar tempo de processamento e também porque as áreas de armadura podem ser obtidas diretamente das restrições mecânicas do processo de otimização. No entanto, esse procedimento não resultou na convergência da análise do pórtico estudado. Em virtude disso, sua utilização ficou restrita a casos mais simples de configuração estrutural, onde essas variações e simplificações na superfície de confiabilidade foram suficientes. Em termos de generalidade, o modelo SF apresentou melhor comportamento do que o modelo BS, pois foi capaz de obter soluções estáveis e com a segurança desejada para todos os sistemas estruturais considerados.

Um produto que pode vir a ser muito interessante no âmbito das aplicações deste trabalho é a produção de ábacos de dimensionamento para valores de índice de confiabilidade pré-fixados. A altura da seção, bem como as áreas de armadura necessárias para um dado valor de momento fletor podem ser obtidas diretamente de gráficos de confiabilidade. Assim para uma solicitação atuante e uma confiabilidade desejada, os ábacos fornecem as dimensões da seção para resistir ao esforço, com a segurança necessária. Esse assunto ainda requer estudos mais aprofundados, mas pode se tornar um produto com aplicação quase que imediata na engenharia técnica.

Um outro aspecto importante necessário para ampliar o campo de atuação dos modelos desenvolvidos é a consideração dos custos esperados de falha, que não foram incluídos neste trabalho. Com isso, a durabilidade das estruturas pode ser verificada nos projetos ótimos baseados em confiabilidade, pois para cada estado limite último ou de serviço, associa-se uma probabilidade de ocorrência, garantindo um projeto mais amplo e preciso. Aspectos importantes como o tratamento sistemático do cobrimento de armaduras dado em função da classe de agressividade podem com isso ser incluídos, não somente em termos de variáveis aleatórias, mas também como um requisito extra a ser considerado na própria função-objetivo.

Acredita-se que os objetivos da tese foram alcançados e que esses modelos podem ser adaptados com um pouco mais de trabalho para uso em projetos de engenharia de estruturas no Brasil.

## **7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros**

As pesquisas nestas áreas do conhecimento estão em franco desenvolvimento nos grandes centros acadêmicos mundiais. As continuações da pesquisa são diversas tanto para a parte de modelagem mecânica, quanto para o acoplamento dos modelos de otimização e confiabilidade. A seguir, estão listadas algumas das sequências naturais deste trabalho:

- Desenvolvimento de um modelo de perda de aderência entre as armaduras longitudinais e o concreto adjacente, com posterior acoplamento ao código computacional aqui apresentado. Dessa forma, a análise das perdas de rigidez se torna mais completa e, conseqüentemente, a obtenção da resistência dos elementos estruturais fica mais precisa;
- Extensão dos modelos mecânicos e mecanismos complementares desenvolvidos para aplicação em pórticos 3D, obtendo assim, a modelagem completa do esqueleto estrutural de edifícios em concreto armado;
- Consideração do efeito de torção considerando a contribuição da armadura transversal em elementos em concreto armado para pórticos 3D;
- Consideração dos custos de falha para os vários estados limites no processo de otimização da estrutura. Esses custos são proporcionais ao custo inicial de

construção e multiplicados pela respectiva probabilidade de ocorrência, somando-se na função-objetivo ao custo inicial;

- Otimização estrutural baseada no risco, ou seja, os parâmetros otimizados passam a ser as probabilidades de falha dos estados limites, podendo introduzir assim as manutenções e inspeções da estrutura ao longo de sua vida útil;
- Estender os modelos de RBDO desenvolvidos neste trabalho considerando confiabilidade dependente do tempo;
- Construção de ábacos para dimensionamento a partir dos modelos de RBDO, variando-se os diversos parâmetros envolvidos, bem como a utilização do comportamento não-linear dos materiais.

## **Referências Bibliográficas**

---

---

- ABRISHAMI, H.H.; MITCHELL, D. (1996). Influence of splitting cracks on tension stiffening. *ACI Structural Journal*, v. 93, n. 6, November-December, p. 703-710, 1996.
- AL-HARTHY, A.S.; FRANGOPOL, D.M. (1997). Integrating system reliability and optimization in prestressed concrete design. *Computers & Structures*, v. 64, n. 1-4, p. 729-735, 1997.
- AL-SALLOUM, Y.A.; SIDDIQI, G.H. (1994). Cost-optimum design of reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, v. 91, n. 6, Nov/Dez, p. 647-655.
- ÁLVARES, M.S. (1993). *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- AMERICAM CONCRETE INSTITUTE (1989). *ACI-ASCE Joint Committee 318 – Building code requirements for reinforced concrete*. Detroit, USA.
- ANG, A.H.-S.; CORNELL, C.A. (1974). Reliability bases of structural safety and design. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 100, n. ST9, September, p. 1755-1769.
- ANG, A.H.-S.; TANG, W.H. (1975). *Probability concepts in engineering planning and design*. v. 2 – decision, risk and reliability, New York: John Wiley & Sons.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. (2008). Reliability-based optimization of structural systems by adaptative target safety – application to RC frames. *Structural Safety*, v. 30, p. 144-161.
- ASHOUR, A.F. (1997). Tests of reinforced concrete continuous deep beams. *ACI Struct J*, v. 97, n. 1, p. 3-12.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). *NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.
- BARAKAT, S.A., KALLAS, N.; TAHA, M.Q. (2003). Single objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams. *Computers & Structures*, v. 81, issues 26-27, p. 2501-2512.

BARAKAT, S.A.; MALKAWI, A.I.H.; TAHAT, R.H. (1999). Reliability-based optimization of laterally loaded piles. *Structural Safety*, v. 21, issue 1, March, p. 45-64.

BARROS, M.H.F.M. (2004). Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections. *Engineering Computations*, v. 21, n. 7, p. 761-776.

BHATT, P.; KADER, M.A. (1998). Prediction of shear strength of reinforced concrete beams by nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, v. 68, p. 139-155.

BECK, A.T. (2006). *Curso de confiabilidade estrutural: notas de aula*. São Carlos, EESC-USP.

BECK, A.T. (2007). *StRAnD: manual do usuário*. São Carlos, EESC-USP.

BECK, A.T., VERZENHASSI, C.C. (2008). Risk optimization of a steel frame communications tower subject to tornado winds. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 187-203.

BELARBI, A.; HSU, T.T.C. (1990). Stirrup stresses in reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, September-October, p. 530-538.

BENTZ, E.C. (2005). Explaining the riddle of tension stiffening models for shear panel experiments. *Journal of Structural Engineering*, v. 131, n. 9, September 1, p. 1422-1425.

BISCHOFF, P.H. (2003). Tension stiffening and cracking of steel fiber-reinforced concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, v.15, n. 02, April 1, p. 174-182.

BORGOUND, U.; BUCHER, C.G. (1986). *Importance sampling procedure using design point – ISPUD – user’s manual*. Institute fur Mechanik, Universitat Innsbruck, Innsbruck.

BOTTA, A.S. (1998). *Calculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando a mecânica do dano no contínuo para a modelagem do concreto armado*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

BRANCO, A.L.L.V. (2002). *Análise não-linear de pórticos planos considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

BREITUNG, K. (1984). Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v. 110, n. 3, p. 357-366.

BUCHER, C.G.; BOURGUND, U. (1990). A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7(1), p. 57-66.

CASTILLO, E.; CONEJO, A.J.; MÍNGUEZ, R.; CASTILLO, C. (2003). An alternative approach for addressing the failure probability-safety factor method with sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 82, p. 207-216.

CHENG, G.; XU, L.; JIANG, L. (2006). A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization. *Computers & Structures*, v. 84, p. 1353-1367.



CHOU, T. (1977). Optimum reinforced concrete T-beam sections. *Journal of Structural Division*, ASCE, v. 103, n. 8. p. 1605-1617.

COHN, M.Z.; DINOVIETZ, A.S. (1994). Application of structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 120, n. 2, February, p. 617-650.

COLLINS, M.P.; MITCHELL, D.; ADEBAR, P.; VECCHIO, F.J. (1996). A general shear design method. *ACI Structural Journal*, v. 93, n. 1, January-February, p. 36-45.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1991). *CEB-FIP Model Code 1990: final draft*. *Bulletin D'Information*, Paris, n. 203-205, July.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1985). *Manual on cracking and deformations*. *Bulletin n° 158*.

CORNELL, C.A. (1967). Bounds on the reliability of structural systems. *J. Struct. Div.*, ASCE, v. 93, p. 171-200.

CORNELL, C.A. (1969). A probability-based structural code. *ACI Journal*, v. 66, p. 974-985.

DE BORST, R. (2002). Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, p. 95-112.

DEI POLI, S.; DI PRISCO, M.; GAMBAROVA, P.G. (1992). Shear response, deformations and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete. *ACI Structural Journal*, v.89, n. 6, November-December, p. 665-675.

DEI POLI, S.; DI PRISCO, M.; GAMBAROVA, P.G. (1990). Stress field in web of RC thin-webbed beams failing in shear. *Journal of Structural Engineering*, v. 116, n. 9, September, pp. 2496-2515.

DEI POLI S.; GAMBAROVA P.G.; KARAKOÇ, C. (1987). Aggregate interlock role in RC thin-webbed beams in shear. *Journal of Structural Engineering*, v. 113, n. 1, p. 1-19.

DITLEVSEN, O. (1979). Narrow reliability bounds for structural systems. *J. Struct. Mech.* 7, p. 453-472.

DITLEVSEN, O.; BJERAGER, P. (1984). Reliability of highly redundant plastic structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v. 110, n. 5, May, p. 671-693.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H.O. (2005). *Structural reliability methods*. Coastal, Maritime and Structural Engineering Department of Mechanical Engineering Technical. University of Denmark, January.

DRIEMEIER, L. (1995). *Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

DRIEMEIER, L. (1999). *Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade*. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

- EL-ARISS, B. (2007). Behavior of beams with dowel action. *Engineering Structures*, v.29, p. 899-903.
- EL-METWALLY, S.E.; EL-SHAHHAT, A.M.; CHEN, W.F. (1990). 3-D nonlinear analysis of RC slender columns. *Computers and Structures*, v. 37, n. 5, p. 863-872.
- ENEVOLDSEN, I.; FABER, M.H.; SØRENSEN, J.D. (1994). Adaptive response surface techniques in reliability estimation. *Structural Safety & Reliability*. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p. 1257-1264.
- ENEVOLDSEN, I.; SØRENSEN, J.D. (1994). Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural Safety*, v. 15, n. 3, p. 169-196.
- EUROCODE 2 (1989). *Design of concrete structures*. Part 1: general rules and rules for buildings. Brussels: CEN.
- FERREIRA, C.C.; BARROS, M.H.F.M.; BARROS, A.F.M. (2003). Optimal design of reinforced concrete T-sections in bending. *Engineering Structures*, n. 25, p. 951-964.
- FISSLER, B.; NEUMANN, H.J.; RACKWITZ, R. (1979). Quadratic limit states in structural reliability. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 105, n. EM4, August, p. 661-676.
- FIGUEIRAS, J.A. (1983). *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. Tese de doutorado, University of Wales.
- FOX, R. (1973). *Optimization methods for engineering design*. Reading Addison-Wesley.
- FRANGOPOL, D.M. (1985a). Structural optimization using reliability concepts. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 111, n. 11, November, p. 2288-2301.
- FRANGOPOL, D.M. (1985b). Sensitivity of reliability-based optimum design. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 111, n. 8, August, p. 1703-1721.
- FRANGOPOL, D.M.; MAUTE, K. (2003). Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. *Computers & Structures*. 81 (7), p. 397-410.
- FREUDENTHAL, A.M. (1947). The safety of structures. *Transactions of ASCE*, v. 112, p. 125-180.
- GAYTON, N.; BOURINET, J.M.; LEMAIRE, M. (2003). CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, v. 25, issue 1, January, p. 99-121.
- GHALI, A.; NEVILLE, A.M.; BROWN, T.G. (2009). *Structural analysis: a unified classical and matrix approach*. 6<sup>th</sup> edition, Spon Press.
- GILL, P.E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M.A.; WRIGHT, M.H. (1985). Model building and practical aspects of nonlinear programming. In: *Computational Mathematical Programming*, NATO ASI Series, 15, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

- GUAN, X.L.; MELCHERS, R.E. (2001). Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural Safety*, v. 23, issue 4, p. 429-444.
- GUPTA, S.; MANOHAR, C.S. (2004). An improved response surface method for the determination of failure probability and importance measures. *Structural Safety*, v. 26, p.123-139.
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C. (1974). Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 100, n. EM1, February, p. 111-121.
- HE, X.G.; KWAN, K.H. (2001). Modelling dowel action of reinforcement bars for finite element analysis of concrete structures. *Computers & Structures*, v. 79, p. 595-604.
- HOANG, L.C.; NIELSEN, M.P. (1998). Plasticity approach to shear design. *Cement and Concrete Composites*, v. 20, p. 437-453.
- HSU, T.T.C.; ZHANG, L.X. (1996). Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements. *ACI Structural Journal*, v. 93, n. 1, January-February, p.108-115.
- JCSS – PROBABILISTIC MODEL CODE (2001). *Joint Committee on Structural Safety*, 12<sup>th</sup> draft.
- JELIC, I.; PAVLOVIC, M.N.; KOTSOVOS, M.D. (1999). A study of dowel action in reinforced concrete beams. *Magazine of Concrete Research*, v. 51, n. 2, April, p. 131-141.
- JIMENEZ, R.; WHITE, R.N.; GERGELY, P. (1979). Bond and dowel capacities of reinforced concrete. *ACI Journal*, January, p. 73-91.
- JENKINS, W.M. (1992). Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 118, n. 11, November, p. 3103-3112.
- KAKLAUSKAS, G.; GHABOUSSI, J. (2001). Stress-strain relations for cracked tensile concrete from RC beam tests. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 1, January, p. 64-73.
- KANAGASUNDARAN, S.; KARIHALOO, B.L. (1991). Minimum-cost reinforced concrete beams and columns. *Computers & Structures*, v. 41, n. 3, p. 509-518.
- KAYMAZ, I.; MCMAHON, C.A. (2005). A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 20, p. 11-17.
- KAYMAZ, I.; MCMAHON, C.A.; MENG, X. (1998). Reliability based structural optimization using the response surface method and Monte Carlo simulation. *In: 8<sup>th</sup> International Machine Design and Production Conference*, September 9-11, Ankara, Turkey.
- KHARMANDA, M.G. (2003). *Optimization et CAO des structures fiables*. Thèse de doctorát, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- KIM, S.; NA, S. (1997). Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*, v. 19, n. 1, p. 3-19.

- KOCER, F.Y.; ARORA, J.S. (1996). Design of prestressed concrete transmission poles: optimization approach. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 122, n. 7, July, p. 804-814.
- KREFELD, W.J.; THURSTON, C.W. (1966). Studies of the shear and diagonal tension strength of simply supported reinforced concrete beams. *ACI Journal*, v. 63, n. 4, p. 451-476.
- LA BORDERIE, C.; MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. (1991). *Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings*. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Rapport Interne, n. 123.
- LEMAIRE, M. (1998). Finite element and reliability: combined methods by response surface. G.N. Frantziskonis (ed.), *PROBAMAT – 21<sup>st</sup> Century: Probability and Materials*, p. 317-331.
- LEVITIN, G.; LISNIANSKI, A. (2001). Structure optimization of multi-state system with two failure modes. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 72, p. 75-89.
- LUENBERGER, D. (1984). *Linear and nonlinear programming*. Second edition, Reading: Addison-Wesley.
- MARTÍN-PEREZ, B.; PANTAZOPOULOU, S.J. (2001). Effect of bond, aggregate interlock, and dowel action on the shear strength degradation of reinforced concrete. *Engineering Structures*, v.23, p. 214-227.
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris.
- MELCHERS, R.E. (2001). Rational optimization of reliability and safety policies. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 73, p. 263-268.
- MELCHERS, R.E. (1983). Reliability of parallel structural systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 109, n. 11, November, p. 2651-2665.
- MELCHERS, R.E. (1999). *Structural reliability analysis and prediction*. 2<sup>nd</sup> Ed. Wiley.
- MELCHERS, R.E.; AHAMMED, M. (2001). Estimation of failure probabilities for intersections of non-linear limit states. *Structural Safety*, v. 23, p. 123-135.
- MILLARD, S.G.; JOHNSON, R.P. (1984). Shear transfer across cracks in reinforced concrete due to aggregate interlock and to dowel action. *Magazine of Concrete Research*, v. 36, n. 126, p. 9-21.
- MOHARRAMI, H.; GRIERSON, D.E. (1993). Computer-automated design of reinforced concrete frameworks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 119, n. 7, July, p. 2036-2058.
- MOSES, F. (1997). Problems and prospects of reliability based optimization. *Engineering Structures*, v. 19, n. 4, p. 293-301.

NEVES, R.A. (2000). *Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios considerando-se a influência das tensões cisalhantes*. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

NEVES, R.A. (2004). *Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos para estruturas de pavimentos de edifícios*. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

NEVES, R.A.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W.S. (2006). Reliability analysis of reinforced concrete grids with nonlinear material behavior. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 91, p. 735-744.

NEVES, R.A.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W.S. (2007). Component and system reliability analysis of nonlinear reinforced concrete grids with multiple failure modes. *Structural Safety*, Article in Press.

NEVES, R.A.; SANCHES JR, F.; VENTURINI, W.S. (2000). Aplicação de modelo de dano à análise de deslocamentos e dos mecanismos de resistência ao cisalhamento em vigas de concreto armado. *IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*, in CDROM, São Paulo (SP), Brasil.

NIE, P.Y. (2006). Na SQP approach with line search for a system of nonlinear equations. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 43, p. 368-373.

NIKOLAIDIS, E.; BURDISSO, R. (1988). Reliability-based optimization: a safety index approach. *Computers and Structures*, v. 28, n. 6, p. 781-788.

NINA, T.C. (2006). *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação à pórticos planos*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S.J. (1999). *Numerical optimization*. In: Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag New York.

NOGUEIRA, C.G. (2005). *Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

NOGUEIRA, C.G.; LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S.; CHATEAUNEUF, A. (2009). Dimensionamento de vigas em concreto armado a partir de modelos acoplados de confiabilidade e otimização. In: *CILAMCE*, Armação dos Búzios, Rio de Janeiro, Brasil.

NOGUEIRA, C.G.; VENTURINI, W.S. (2006). Dimensionamento ótimo de barras de concreto armado com restrições dadas em índices de confiabilidade. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, Passo Fundo, v. 3, n. 2, p. 69-83.

NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R. (2000). *Reliability of structures*. Michigan: MacGraw Hill.

OWEN, D.R.J.; HINTON, H. (1980). *Finite elements in plasticity*. Swansea, U.K, Pineridge Press.

- PACCOLA, R.R. (2004). *Análise não-linear física de placas e cascas anisotrópicas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF*. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PAULA, C.F. (2001). *Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas*. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PAULA, J.A. (1988). *Algoritmos para o estudo de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexão normal composta*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PEREGO, M. (1990). *Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni*. Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, Anno Accademico.
- PITUBA, J.J.C. (1998). *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto, fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PITUBA, J.J.C. (2003). *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- POPOVICS, S. (1973). A numerical approach to the complete stress strain curve for concrete. *Cement and concrete research*, v. 3, n. 5, p. 583-599.
- PROENÇA, S.P.B. (1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- QU, X. (2004). *Reliability-based structural optimization using response surface approximations and probabilistic sufficiency factor*. Tese de doutorado, University of Florida.
- QU, X.; HAFTKA, R.T. (2003). Design under uncertainty using Monte Carlo simulation and probabilistic factor. *Proceedings of ASME DETC'03 Conference*, Chicago, IL.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. (1978). Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & Structures*, v. 9, p. 489-494.
- RAJASHEKHAR, M.R.; ELLINGWOOD, B.R. (1993). A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 12(3), p. 205-220.
- RATH, D.P.; AHLAWAT, A.S. (1999). Shape optimization of RC flexural members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 125, n. 12, p. 1439-1446.
- RIGO, E. (1999). *Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROOS, D.; BUCHER, C. (2003). Adaptive response surfaces for structural reliability of nonlinear finite element structures. *NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analysis*, May 7-8, Wiesbaden, Germany.

ROYSET, J.O.; Der KIUREGHIAN, A.; POLAK, E. (2001a). Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 73, p. 213-221.

ROYSET, J.O.; Der KIUREGHIAN, A.; POLAK, E. (2001b). Reliability-based optimal design of series structural systems. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 127, n. 6, June, p. 607-614.

SANCHES JR, F. (1998). *Cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios considerando-se modelos próprios para o concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SANCHES JR, F. (2003). *Desenvolvimento de modelos numéricos para análise de estruturas de pavimentos de edifícios*. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SANCHES JUNIOR, F.; VENTURINI, W.S. (2007). Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, v. 38, p. 538-546.

SARMA, K.C.; ADELI, H. (1998). Cost optimization of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 124, n. 5, May, p. 570-578.

SCANLON, A. (1971). *Time dependent deflections of reinforced concrete slabs*. PhD Thesis, University of Alberta, Edmonton, Alta, Canada.

SCHMIDT, L.A. (1960). Structural design by systematic synthesis. *Proceedings, ASCE, 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa, p. 105-132.

SCHITTKOWSKI, K. (1986). NLPQL: a FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, 5.

SILVA, R.M. (1996). *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados*. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SHAN, S.; WANG, G.G. (2008). Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 93, p. 1218-1230.

SHIRAIISHIL, N.; FURUTA, H. (1998). Reliability assessment and assurance of infrastructure systems. *Computers & Systems*, v. 67, issues 1-3, p. 147-155.

SOARES, R.C. (1997). *Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação à pavimentos*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SOARES, R.C. (2001). *Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado*. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SOARES, R.C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W.S. (2001). Partial safety factors for homogeneous reliability of nonlinear reinforced concrete columns. *Structural Safety*, 23, p. 137-156.

- SOARES, R.C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W.S.; LEMAIRE, M. (2002). Reliability Analysis of Non-Linear Reinforced Concrete Frames using the Response Surface Method. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 75, p. 1-16.
- SOROUSHIAN, P.; OBASEKI, K.; ROJAS, M.C. (1987). Bearing strength and stiffness of concrete under reinforcing bars. *ACI Materials Journal*, v. 84, n. 3, p. 179-184.
- SOUZA, A.C. (2009). *Aplicação de confiabilidade na calibração de coeficientes parciais de segurança de normas brasileiras de projeto estrutural*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SPIRES, D.; ARORA, J.S. (1990). Optimal design of tall RC-framed tube buildings. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 116, n. 4, April, p. 877-897.
- SRIVIDYA, A.; RANGANATHAN, R. (1995). Reliability based optimal design of reinforced concrete frames. *Computers & Structures*, v. 57, issue 4, p. 651-661.
- STOER, J. (1985). Principles of sequential quadratic programming methods for solving nonlinear problems. In: *Computational Mathematical Programming, NATO ASI Series*, 15, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- STREICHER, H.; RACKWITZ, R. (2004). Time-variant reliability-oriented structural optimization and a renewal model for life-cycle costing. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 19, p. 171-183.
- TORRES, L.; LÓPEZ-ALMANSA, F.; BOZZO, L.M. (2004). Tension stiffening model for cracked flexural concrete members. *Journal of Structural Engineering*, v. 130, n. 8, August 1, p. 1242-1251.
- TU, J.; CHOI, K.K.; PARK, Y.H. (2000). Design potential method for robust system parameter design. *AIAA Journal*, v. 39, n. 4, p. 667-677.
- VAL, D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D. (1996). Optimization problem solution in reliability analysis of reinforced concrete structures. *Computers & Structures*, v. 60, issue 3, p. 351-355.
- VAL, D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D. (1997). Reliability evaluation in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Structural Safety*, v. 19, issue 2, p. 203-217.
- VANDERPLAATS, G.N. (1984). *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*. New York: McGraw-Hill.
- VERZENHASSI, C. (2008). *Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- VIANNA, L.C.C. (2003). *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- VINTZELEOU, E.N.; TASSIOS, T.P. (1987). Behavior of dowels under cyclic deformations. *ACI Structural Journal*, v. 84, n. 1, p. 18-30.



WALRAVEN, J.C. (1981). Fundamental analysis of aggregate interlock. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 107, n. ST11, November, p. 2245-2270.

WANG, L.; GRANDHI, R.V. (1994). Structural reliability optimization using an efficient safety index calculation procedure. *Proceedings of 35<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Hilton Head, SC, AIAA 94-1416.

WANG, Q.; HOOGENBOOM, (2004). Nonlinear analysis of reinforced concrete continuous deep beams using stringer-panel model. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, v. 5, n. 1-2, p. 25-40.

WANG, T.; HSU, T.T.C. (2001). Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models. *Computers & Structures*, v. 79, p. 2781-2791.

WEI, Z.; LIU, L.; YAO, S. (2008). The superlinear convergence of a new quasi-Newton-SQP method for constrained optimization. *Applied Mathematics and Computation*, v. 196, p. 791-801.

WONG, S.M.; HOBBS, R.E.; ONOF, C. (2005). An adaptative response surface method for reliability analysis of structures with multiple loading sequences. *Structural Safety*, v. 27, p. 287-308.

ZARARIS, P.D. (1997). Aggregate interlock and steel shear forces in the analysis of RC membrane elements. *ACI Structural Journal*, v. 94, n. 2, March-April, p. 159-170.