

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Análise não linear de estruturas tensionadas em membrana utilizando o método dos elementos finitos posicional

Christian Luiz Perlin

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

Christian Luiz Perlin

**Análise não linear de estruturas tensionadas em membrana
utilizando o método dos elementos finitos posicional**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

P426a Perlin, Christian Luiz
Análise não linear de estruturas tensionadas em
membrana utilizando o método dos elementos finitos
posicional / Christian Luiz Perlin; orientador Humberto
Breves Coda. São Carlos, 2023.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

1. Estruturas tensionadas em membrana. 2. não
linearidade geométrica. 3. método dos elementos finitos
posicional. 4. problemas de contato dinâmico. I.
Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CHRISTIAN LUIZ PERLIN**.

Título da tese: "Análise não linear de estruturas tensionadas em membrana utilizando o método dos elementos finitos posicional".

Data da defesa: 03/04/2023.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Renato Pavanello**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por todo o suporte e paciência durante estes 4 anos: aos meus pais, Rosa e Luiz, ao meu irmão Carlos, e, especialmente, à minha irmã Caroline pelo auxílio no período (abreviado) que passei em São Carlos e à minha avó Ernesta e minha tia Arlene pelo cuidado dispensado a mim por toda a vida.

Agradeço aos amigos feitos no mestrado/doutorado, principalmente aos da sala ME-08 (Wanderson, Welington, Lucas Rocha, Éverton e Miguel), pelo companheirismo e pela descontração; a Danilo Barbosa, Anne e Letícia, pelas conversas sobre teologia e auxílio mútuo na fé; ao Danilo Pereira, pelas conversas sobre vida acadêmica e pesquisa.

Aos irmãos da Igreja Presbiteriana Filadélfia de São Carlos, agradeço pela acolhida e pelo carinho. As reuniões de oração de sexta à noite eram uma grande alegria, mesmo quando eram somente online. Como disse o presbítero Baltazar, “os cristãos têm uma família em qualquer lugar do mundo”.

À Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) e aos colegas do Departamento de Engenharia Civil, agradeço pela oportunidade de realizar o afastamento para poder cursar o doutorado.

Aos técnicos e funcionários do SET, em especial ao Dorival, pelos cursos sobre programação e discussões sobre a implementação do contato. Aos professores Rodrigo Paccola e José Benaque, pelas contribuições nas duas qualificações, e aos professores do SET com quem pude aprender durante estes anos.

Ao professor Humberto Coda, agradeço muito por ter aceitado a orientação e por toda o auxílio durante esse período. Agradeço também pelas aulas da disciplina do MEF Posicional, pelas contribuições valiosas na pesquisa (principalmente nos exemplos), e por toda a disponibilidade em ajudar mesmo à distância.

E, por fim, agradeço com todo o meu coração ao meu Senhor Jesus Cristo. Cursar uma pós-graduação no nível do Programa de Engenharia de Estruturas do SET é uma tarefa extremamente exigente tanto do ponto de vista intelectual quanto do psicológico. Foram inúmeras dificuldades e frustrações enfrentadas com as disciplinas e a própria pesquisa (que não estava muito disposta a ser terminada). Some-se a isso a necessidade de cursar tanto os créditos do mestrado quanto do doutorado nestes quatro anos, o período de afastamento da pandemia e finalizar a pesquisa à distância em Cuiabá para cuidar da minha família. Em tudo isso, Jesus não me deixou desistir e me fez chegar até o final, e usou todo e qualquer sofrimento para me fazer amá-Lo mais e ser mais parecido com Ele. Vejo este fruto do (bem pouco) penoso trabalho que tive e fico satisfeito, não porque consegui fazer tudo a que me propus, mas porque Jesus fez em mim exatamente tudo o que Ele desejou. A Ele toda a glória.

*Ele verá o fruto do penoso trabalho de sua alma e ficará satisfeito;
o meu Servo, o Justo, com o seu conhecimento, justificará a muitos,
porque as iniquidades deles levará sobre si.*

RESUMO

PERLIN, C. L. **Análise não linear de estruturas tensionadas em membrana utilizando o método dos elementos finitos posicional**. 2023. 218p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação matemática computacional para a análise dinâmica não linear geométrica de estruturas tensionadas em membrana utilizando o método dos elementos finitos posicional. As estruturas de membrana são utilizadas em várias aplicações na construção e na indústria, como coberturas e fachadas de edificações, tecidos, elementos pneumáticos e outros. Essas estruturas, por possuírem rigidez à flexão e à compressão desprezíveis, ficam sujeitas preponderantemente a esforços de tração e desenvolvem grandes deslocamentos para suportarem as cargas em equilíbrio. Desse modo, o problema de análise dessas estruturas é não linear geométrico. A formulação desenvolvida aqui utiliza o método dos elementos finitos posicional, uma abordagem lagrangiana total que, por ser baseada em posições, considera a não linearidade geométrica de maneira intrínseca e é adequada ao problema em questão. O sistema não linear de equações é resolvido pelo método de Newton-Raphson. Elementos finitos posicionais de membrana e de sólido são empregados na modelagem. O modelo numérico inclui elementos de cabo e considera ainda o caso de cargas não conservativas para a simulação de estruturas pneumáticas e efeitos de vento. Foi desenvolvida uma estratégia simples para impor o estado de pré-tensionamento nos elementos estruturais. A integração temporal para o caso dinâmico foi realizada pelos métodos de Newmark e α -generalizado e situações de contato são avaliadas com as estratégias de penalização e multiplicadores de Lagrange, com discretização nó-a-superfície. Foi adotado o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico para os materiais. Exemplos numéricos são apresentados para validação do código computacional desenvolvido e para explorar as potencialidades da formulação em diversas aplicações.

Palavras-chave: Estruturas tensionadas em membrana; não linearidade geométrica; método dos elementos finitos posicional; problemas de contato dinâmico.

ABSTRACT

PERLIN, C. L. **Nonlinear analysis of membrane tensioned structures using the positional finite element method.** 2023. 218p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The objective of this work is the development of a computational mathematical formulation for the geometric nonlinear dynamic analysis of membrane tensioned structures using the positional finite element method. Membrane structures are used in many applications in construction and industry, such as buildings covering and facades, fabrics, pneumatic elements and others. These structures, due to their negligible flexural and compressive rigidity, are predominantly subjected to tensile forces and develop large displacements to support loads in equilibrium. Thus, the problem of analysis of these structures is geometric nonlinear. The formulation developed herein employs the positional finite element method, a total Lagrangian approach which, because of its position-based feature, intrinsically considers geometric nonlinearity and is well suited to this problem. The nonlinear system of equations is solved by the Newton-Raphson method. Membrane and solid positional finite elements are used. The numerical model includes cable elements and considers non-conservative loads for the simulation of pneumatic structures and wind effects. A simple strategy was developed for the imposition of the prestress state in structural elements. Time integration in the dynamic case was performed by the Newmark and generalized- α methods and contact situations were evaluated using the penalty and Lagrange multipliers strategies, with node-to-surface discretization. The Saint-Venant-Kirchhoff isotropic constitutive model was adopted to characterize the materials. Numerical examples are presented for computational code validation and to explore the potentialities of the formulation in various applications.

Keywords: Membrane tensioned structures; geometric nonlinearity; positional finite element method; dynamic contact problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Formas usuais de estruturas em membrana pré-tensionada mecanicamente: (a) parabolóide hiperbólico; (b) catenoide; (c) e (d) superfícies modificadas pela introdução de picos e/ou cristas.	40
Figura 2 – Membrana suportada pelo ar com pressão interna maior que a atmosférica (esquerda) ou menor (direita).	40
Figura 3 – Membrana inflável.	40
Figura 4 – Alguns tipos de tendas: (a) tenda cônica; (b) tenda de paredes cilíndricas; (c) tenda negra.	41
Figura 5 – Tenda de circo (Chapiteau).	42
Figura 6 – J. S. Dorton Arena em Raleigh, Estados Unidos, 1952.	42
Figura 7 – Pavilhão de música em Kassel, Alemanha, 1955.	42
Figura 8 – Estádio Olímpico de Munique, Alemanha, construído em 1971.	43
Figura 9 – Terminal Hajj no Aeroporto Internacional Rei Abdullaziz, Jeddah, Arábia Saudita, 1981.	43
Figura 10 – Aeroporto Internacional de Denver, Denver, Estados Unidos, 1994.	44
Figura 11 – Domo do Milênio, Londres, Reino Unido, 1999.	44
Figura 12 – Detalhes da patente da estrutura pneumática de Lanchester.	45
Figura 13 – Primeiro protótipo do radome (1948).	45
Figura 14 – Pavilhão dos Estados Unidos na Exposição Mundial de 1970, Osaka, Japão.	46
Figura 15 – Estádio BC Place, Vancouver, Canadá. Cobertura original (esq.) e após a reformulação (dir.).	46
Figura 16 – Esquema de membrana estrutural com a malha de fios imersa na matriz de revestimento.	47
Figura 17 – Arranjos dos fios na membrana estrutural: (a) sobrepostos; (b) tecidos.	48
Figura 18 – Troca de ondulações (<i>crimp interchange</i>) – ondulação dos fios de uma direção devido às tensões aplicadas na direção perpendicular.	49
Figura 19 – Curvas típicas tensão-deformação para membranas de: (a) fibra de vidro revestida com PTFE; (b) poliéster revestido com PVC.	49
Figura 20 – Cabo formado por 7 fios.	52
Figura 21 – Alguns tipos de cabos estruturais. (a) Composição simples com 7, 19 e 37 fios. (b) Composições com fios de diâmetros diferentes. (c) Composições formadas por vários cabos.	52
Figura 22 – Cabo do tipo <i>locked coil</i>	52

Figura 23 – Relação entre forma do cabo e carregamento atuante.	54
Figura 24 – Famílias de formas funiculares.	55
Figura 25 – Cabo sujeito a força aplicada nas configurações inicial (linha tracejada) e atual (linha cheia).	55
Figura 26 – Estruturas em membrana em forma de: a) tenda, b) superfície de dupla curvatura.	62
Figura 27 – Energia cinética em função do tempo no processo de amortecimento cinético.	64
Figura 28 – Consideração do elemento triangular de membrana como três forças atuando segundo os lados do triângulo.	65
Figura 29 – Divisão de elementos de membrana de alta ordem em subelementos lineares.	66
Figura 30 – Variação quadrática da energia cinética KE com o tempo e determinação do pico.	67
Figura 31 – Catenoide obtido pela revolução da catenária (curva azul) ao redor do eixo z .	69
Figura 32 – Malha utilizada para a busca da forma do catenoide.	69
Figura 33 – Perfil do catenoide no plano xz obtido com a rotina de relaxação dinâmica e valores analíticos.	69
Figura 34 – Projeção horizontal da rede de cabos analisada.	70
Figura 35 – Configurações no processo de busca da forma: inicial (cinza) e final (preta).	71
Figura 36 – Mudança de configuração.	73
Figura 37 – Mudança de volume na mudança de configuração.	75
Figura 38 – Mudança de área na mudança de configuração.	76
Figura 39 – Componentes de tensão.	78
Figura 40 – Mapeamento posicional de um elemento finito triangular no plano.	90
Figura 41 – Exemplos de elementos finitos utilizados: elemento unidimensional de aproximação linear, elemento plano triangular de aproximação cúbica e elemento prismático de sólido com aproximação quadrática na base e linear na espessura.	106
Figura 42 – Plano de atuação das tensões em superfícies no plano e no espaço.	107
Figura 43 – Vetores tangentes e normal ao elemento finito em um ponto de integração P .	108
Figura 44 – Direções dos eixos ξ_1 e ξ_2 em elementos adjacentes de uma malha genérica.	109
Figura 45 – Superfícies com vetores tangentes conhecidos.	109
Figura 46 – Determinação de um eixo local como projeção de um eixo global no plano tangente. Os vetores \vec{v}^1 e \vec{v}^2 (em azul) tem a mesma direção que os vetores tangentes segundo ξ_1 e ξ_2 . Os vetores \vec{p}^1 e \vec{p}^2 (em vermelho) são as projeções no plano dos eixos x_1 e x_2	109
Figura 47 – Mapeamentos inicial e atual e função mudança de configuração.	111
Figura 48 – Configuração sem tensões e gradiente de pré-tensionamento.	114
Figura 49 – Passos para a determinação das tensões com significado físico prático.	117
Figura 50 – Mapeamentos inicial e atual e função mudança de configuração para o sólido.	118
Figura 51 – Função mudança de configuração para o cabo.	120

Figura 52 – Configurações sem tensões, inicial e atual para o elemento de cabo com pré-tensionamento.	122
Figura 53 – Malha utilizada para o vaso de pressão.	124
Figura 54 – Vaso de pressão utilizando elemento linear. (a) Deslocamento na direção 3 (em m). (b) Perfis em planos transversais. Os deslocamentos foram amplificados para melhor visualização.	125
Figura 55 – Vaso de pressão utilizando elemento quadrático. (a) Deslocamento radial δ (mm). Valor analítico: $\delta = 0,125$ mm. (b) Tensão circunferencial σ_θ (MPa). Valor analítico: $\sigma_\theta = 50$ MPa.	125
Figura 56 – Tensão normal circunferencial σ_θ e tensão de cisalhamento $\sigma_{\theta x}$ no plano $y_3 = 0$ para os modelos analisados.	126
Figura 57 – Malha utilizada para o exemplo.	126
Figura 58 – Deslocamentos verticais no plano médio da membrana.	127
Figura 59 – Tensões principais (em ksi): primeira (esq.) e segunda (dir.).	127
Figura 60 – Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga para as malhas e elementos avaliados.	128
Figura 61 – Membrana sujeita a flexão no plano e malha de elementos finitos adotada.	129
Figura 62 – Relação entre: (a) momento M e curvatura κ ; (b) tensão longitudinal σ_x e momento M	130
Figura 63 – Malhas não estruturadas utilizadas, com 42 e 566 elementos finitos.	131
Figura 64 – Modos de vibração obtidos com o elemento cúbico e malha de 42 elementos.	131
Figura 65 – (a) Membrana circular sob pressão de ar. (b) Um quadrante da malha utilizada.	132
Figura 66 – Deslocamentos da membrana circular para a primeira etapa do carregamento (inflação).	133
Figura 67 – Deslocamentos da membrana circular para a segunda etapa do carregamento (pressão externa com acoplamento pressão-volume).	133
Figura 68 – Malha utilizada para o exemplo (em preto) e deslocamentos verticais para a carga conservativa.	134
Figura 69 – Deslocamentos vertical w e longitudinal $-u$ na extremidade do eixo da viga para os casos de carga conservativa (C) ou não conservativa (NC).	135
Figura 70 – Quantidade de iterações para a convergência de acordo com a Hessiana do carregamento H^L	135
Figura 71 – Geometria e condições de contorno da casca cilíndrica.	136
Figura 72 – Configuração final da face curva da casca que contém o ponto de aplicação da carga (esq.) e detalhe do apoio (dir.).	137
Figura 73 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força em análise estática.	138
Figura 74 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força antes da instabilidade.	138
Figura 75 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força em análise dinâmica.	139

Figura 76 – Cabo sujeito a força aplicada nas configurações inicial (linha tracejada) e atual (linha cheia).	139
Figura 77 – Deslocamentos no cabo em função da força aplicada.	140
Figura 78 – Rede de cabos analisada no exemplo.	141
Figura 79 – Modos de vibração para a rede de cabos.	142
Figura 80 – Problema mecânico de um corpo isolado.	143
Figura 81 – Problema mecânico de contato de dois corpos.	144
Figura 82 – Processo de contato entre um corpo projétil e um corpo alvo.	145
Figura 83 – Componentes normal e tangente da força de contato.	145
Figura 84 – Contato pelas partes superior e inferior do elemento finito de membrana. O elemento destacado é a superfície alvo.	146
Figura 85 – Gráfico do funcional de energia total Π com penalização para um problema genérico em que o equilíbrio com contato ocorre para $y = 1$	150
Figura 86 – Membrana circular sujeita à pressão em contato com anteparo rígido.	156
Figura 87 – Um quadrante da malha utilizada.	157
Figura 88 – Raio de contato da membrana em função da pressão p aplicada.	157
Figura 89 – Blocos em contato.	158
Figura 90 – Vista superior das malhas utilizadas para os blocos superior (esq.) e inferior (dir.).	158
Figura 91 – Relação entre força aplicada e deslocamento do nó carregado. As linhas tracejadas indicam os resultados obtidos impondo-se os pares de contato.	159
Figura 92 – Relação entre força de contato e deslocamento do nó carregado. As linhas tracejadas indicam os resultados obtidos impondo-se os pares de contato.	160
Figura 93 – Deslocamentos verticais (em m) para a membrana com pré-tensionamento de 10 MPa (esq.) e sem pré-tensionamento (dir.).	161
Figura 94 – Tensões principais (em MPa) na membrana com pré-tensionamento de 10 MPa: (σ_{p1}) (esq.) e (σ_{p2}) (dir.).	162
Figura 95 – Perfil na metade do vão: deslocamentos verticais (esq.) e σ_{p1} (dir.).	162
Figura 96 – Malhas do catenoide: plana inicial (esq.) e após a busca da forma (dir.).	163
Figura 97 – Catenoide com elevação do anel interno: tensões principais (em MPa).	164
Figura 98 – Catenoide sob carga horizontal: deslocamentos na direção x_1 (em m) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.	165
Figura 99 – Catenoide sob carga horizontal: deslocamentos na direção x_3 (em m) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.	165
Figura 100 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p1} (em MPa) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.	166
Figura 101 – Catenoide sob carga horizontal: detalhe de σ_{p1} (em MPa) para o elemento M2.	166
Figura 102 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p2} (em MPa) com o elemento S2.	167
Figura 103 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p2} (em MPa).	167

Figura 104–Malha utilizada para o airbag (esq.) e posição de equilíbrio (dir.).	168
Figura 105–Configuração final do airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.	169
Figura 106–Tensão σ_{p1} (em MPa) no airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2. Os intervalos da escala de cores do elemento M2 foram ajustados para melhor visualização dos resultados.	170
Figura 107–Tensão σ_{p2} (em MPa) no airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2.	170
Figura 108–Geometria inicial do paraquedas. Dimensões em metros.	171
Figura 109–Configuração final do paraquedas.	172
Figura 110–Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento M1.	172
Figura 111–Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento M1.	173
Figura 112–Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento M2.	173
Figura 113–Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento M2. Os intervalos da escala de cores foram ajustados para melhor visualização dos resultados.	174
Figura 114–Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento S2.	174
Figura 115–Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento S2. Os intervalos da escala de cores foram ajustados para melhor visualização dos resultados.	175
Figura 116–Perfis do paraquedas no plano y_1y_3	176
Figura 117–Malha do exemplo em vistas superior e lateral. Os pontos azuis indicam os cantos da base.	177
Figura 118–Posição vertical do nó central do tecido com penalização e multiplicadores de Lagrange, utilizando elemento M1.	178
Figura 119–Posição vertical do nó central do tecido para os elementos M1, M2 e S2, utilizando penalização.	178
Figura 120–Configuração do tecido ao final da análise para os elementos M1, M2 e S2, utilizando penalização e o método NAN.	179
Figura 121–Perfil do tecido no plano y_1y_3 no centro da base, utilizando penalização e o método NAN com elemento S2.	180
Figura 122–Configuração do tecido no passo de tempo 340 ($t = 0,1330$ s) para $\nu = 0,3$ (esq.) e $\nu = 0$ (dir.), utilizando penalização e o método NAN com elemento S2.	181
Figura 123–Malha da bola em vista superior e vista lateral do conjunto.	182
Figura 124–Posição do nó central do tecido e do nó do topo da bola.	182
Figura 125–Variação da pressão manométrica e do volume da bola.	183
Figura 126–Configuração do tecido ao final da análise.	183
Figura 127–Aviário Edward Youde, Hong Kong.	184
Figura 128–Malha do modelo simplificado do Aviário (vista superior e lateral e perspectiva).	184

Figura 129–Malhas obtidas com a busca da forma: sem restrição de movimento horizontal (esq.) e com restrição (dir.) para o Caso 1.	185
Figura 130–Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 1.	186
Figura 131–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 1.	186
Figura 132–Malhas obtidas com a busca da forma: sem rigidez elástica da membrana (esq.) e com rigidez elástica (dir.) para o Caso 2.	187
Figura 133–Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 2.	188
Figura 134–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 2.	188
Figura 135–Malha obtida com a busca da forma para o Caso 3.	189
Figura 136–Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 3.	189
Figura 137–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 3.	189
Figura 138–Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em serviço para os Casos 1 e 3.	190
Figura 139–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em serviço para os três casos.	191
Figura 140–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em PT (Caso 1).	192
Figura 141–Tensões σ_{p1} (Pa) da estrutura em PT com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.) para o Caso 1.	193
Figura 142–Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em PT para o Caso 2.	193
Figura 143–Tensões principais da estrutura no plano $y_1 = 20$ m junto à borda. Os resultados de σ_{p1} estão em linha contínua e os de σ_{p2} estão em tracejado.	194
Figura 144–Tensões σ_{p1} (Pa) da estrutura em PT com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.) para o Caso 2.	194
Figura 145–Malhas obtidas na busca da forma na região próxima aos cabos com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.).	195

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Posições nodais calculadas na busca da forma da rede de cabos.	70
Tabela 2 – Limites do espaço adimensional e quadraturas utilizadas na integração numérica para os elementos finitos utilizados.	106
Tabela 3 – Dados das malhas utilizadas no estudo de convergência.	127
Tabela 4 – Frequências naturais de vibração ω (rad/s) para a membrana retangular. . . .	131
Tabela 5 – Resultados da análise do airbag. Os índices superescritos denotam os nós e os deslocamentos u e w se referem às direções 1 e 3, respectivamente. . . .	169
Tabela 6 – Resultados da análise do paraquedas. Os deslocamentos u e w se referem às direções 1 e 3, respectivamente.	175
Tabela 7 – Parâmetros considerados na integração temporal do exemplo.	177

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Objetivos	28
1.2	Justificativa	29
1.3	Metodologia	29
1.4	Organização da tese e notação utilizada	30
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
2.1	Estruturas tensionadas em membrana	33
2.2	Método dos elementos finitos posicional	34
2.3	Mecânica do contato	36
3	ESTRUTURAS TENSIONADAS EM MEMBRANA	39
3.1	Classificação das estruturas tensionadas em membrana	39
3.2	Breve histórico de utilização	41
3.2.1	Estruturas em membrana pré-tensionada mecanicamente	41
3.2.2	Membranas pneumáticas	44
3.3	Materiais utilizados	46
3.3.1	Membranas estruturais	47
3.3.2	Comportamento estrutural do tecido	48
3.3.3	Enrugamento da membrana	50
3.3.4	Cabos estruturais	51
3.4	Métodos de análise e busca da forma	53
3.4.1	Formas funiculares	54
3.4.2	Rigidez elástica e rigidez geométrica	55
3.4.3	O problema de busca da forma	56
3.4.4	Modelos numéricos de busca da forma	58
3.4.5	Métodos com rigidez geométrica inicial	59
3.4.5.1	Método da densidade de forças	59
3.4.5.2	Métodos com prescrição de rigidez geométrica inicial	61
3.4.6	Métodos de análise dinâmica	62
3.4.6.1	Método da relaxação dinâmica	63
3.4.6.2	Análise iterativa com matriz de massa decrescente	67
3.5	Exemplos de validação: busca da forma	68

3.5.1	Catenoide	68
3.5.2	Rede de cabos tridimensional	70
4	ASPECTOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS NÃO LINEAR	73
4.1	Cinemática dos corpos deformáveis	73
4.1.1	Deformação de Green-Lagrange	74
4.1.2	Mudança de volume na mudança de configuração	75
4.1.3	Mudança de área na mudança de configuração	76
4.1.4	Conservação da massa na mudança de configuração	77
4.2	Equilíbrio e energia do sistema mecânico	78
4.2.1	Equilíbrio no referencial euleriano	78
4.2.2	Equilíbrio no referencial lagrangiano	79
4.2.3	Equilíbrio no referencial lagrangiano por meio da variação da energia mecânica	80
4.2.3.1	Variação da energia cinética	81
4.2.3.2	Variação da energia potencial das forças externas	82
4.2.3.3	Variação da energia de deformação	82
4.3	Modelo constitutivo hiperelástico adotado	83
4.3.1	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico	84
4.3.1.1	Estados planos e material transversalmente isotrópico	86
5	CÁLCULO NUMÉRICO POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMEN-	
	TOS FINITOS POSICIONAL	89
5.1	Formulação numérica	89
5.1.1	Mudança de configuração a partir das funções de mapeamento	90
5.1.2	Equação de equilíbrio do MEF posicional	91
5.1.3	Consideração de forças externas não conservativas	92
5.1.4	Solução do problema dinâmico: métodos de integração temporal	94
5.1.5	Solução do sistema não linear: método de Newton-Raphson	97
5.2	Cálculo das variáveis do sistema de equações	98
5.2.1	Forças inerciais e de amortecimento	98
5.2.2	Forças internas	99
5.2.3	Forças externas conservativas	100
5.2.4	Forças externas não conservativas	100
5.2.5	Matriz hessiana	101
5.2.5.1	Problema estático	102
5.2.5.2	Problema dinâmico	103
5.2.5.3	Caso com forças externas não conservativas	103
5.2.5.4	Condições de simetria da Hessiana do carregamento	104
5.3	Elementos finitos utilizados e funções de forma	105
5.4	Cinemática do elemento de membrana	106

5.4.1	Determinação dos eixos locais em um ponto de integração	108
5.4.2	Mapeamento posicional do elemento de membrana	110
5.4.3	Cálculo da força interna e da matriz Hessiana para o elemento de membrana	112
5.4.4	Consideração de pré-tensionamento na membrana	114
5.4.5	Cálculo das tensões na configuração atual	116
5.5	Cinemática do elemento de sólido	118
5.6	Formulação posicional e cinemática do elemento de cabo	119
5.6.1	Deformações, tensões e modelo constitutivo para o elemento de cabo	120
5.6.2	Forças internas e matriz Hessiana estática do elemento de cabo	120
5.6.3	Matriz de massa do elemento de cabo	121
5.6.4	Consideração de pré-tensionamento no cabo	122
5.7	Exemplos de validação	123
5.7.1	Vaso de pressão cilíndrico	123
5.7.2	Membrana plana com carga transversal	125
5.7.3	Enrugamento de membrana retangular sujeita a flexão no plano	129
5.7.4	Vibração livre de membrana retangular	130
5.7.5	Membrana circular inflada com acoplamento pressão-volume	132
5.7.6	Viga engastada com carga transversal conservativa e não conservativa	134
5.7.7	Casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico	136
5.7.8	Cabo sob carga concentrada	138
5.7.9	Vibração livre de rede de cabos	141
6	ASPECTOS DA MECÂNICA DO CONTATO	143
6.1	Descrição do problema do contato	143
6.2	Discretização e detecção do contato	146
6.3	Equação de equilíbrio do problema do contato	148
6.4	Imposição das condições de contato utilizando penalização	149
6.4.1	Força de contato utilizando penalização	150
6.4.2	Matriz Hessiana do contato utilizando penalização	152
6.5	Imposição das condições de contato utilizando multiplicadores de Lagrange	153
6.5.1	Força de contato utilizando multiplicadores de Lagrange	154
6.5.2	Matriz Hessiana do contato utilizando multiplicadores de Lagrange	154
6.6	Estabilidade numérica de problemas dinâmicos com restrições	155
6.7	Exemplos de validação	156
6.7.1	Membrana em contato com anteparo rígido	156
6.7.2	Blocos em contato	158
7	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	161
7.1	Membrana horizontal pré-tensionada	161
7.2	Catenoide	163

7.3	Airbag inflado	168
7.4	Paraquedas	171
7.5	Membrana caindo sobre base rígida	176
7.6	Membrana caindo sobre bola flexível	181
7.7	Estrutura em membrana pré-tensionada: Aviário Edward Youde	183
7.7.1	Caso 1: vigas rígidas na base	185
7.7.2	Caso 2: cabos na base	187
7.7.3	Caso 3: cabo de reforço	188
7.7.4	Comparação dos 3 casos na situação em serviço	190
7.8	Busca da forma com elementos de membrana de alta ordem	191
8	CONCLUSÕES	197
8.1	Continuidade da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros	199
	REFERÊNCIAS	201
	APÊNDICE A – DERIVADAS DOS VETORES NORMAIS EM RELA-	
	ÇÃO ÀS POSIÇÕES NODAIS	213
A.1	Derivadas do vetor normal	214
A.2	Derivadas do vetor normal unitário	215

1 INTRODUÇÃO

Estruturas tensionadas (também referidas na literatura como tensoestruturas ou estruturas retesadas) são caracterizadas como aquelas cujos elementos estruturais principais ou mesmo de fechamento possuem rigidez à flexão e à compressão desprezíveis, estando predominantemente sob esforços de tração. Estes elementos podem ser lineares, sendo chamados de cabos, ou bidimensionais, denominados membranas, nas quais também podem atuar tensões de cisalhamento no plano tangente à superfície.

As membranas estruturais possuem sua principal aplicação em coberturas, podendo funcionar tanto como elementos estruturais quanto de vedação. Por serem muito leves, podem vencer grandes vãos com baixo consumo de material e possuem vantagens construtivas como a pré-fabricação dos elementos e o aproveitamento da iluminação natural. Além disso, possibilitam o uso de formas espaciais atraentes e singulares, permitindo a adoção de ideias arrojadas e únicas no projeto arquitetônico.

Devido à reduzida rigidez à flexão e à compressão, as estruturas tensionadas sofrem mudanças na sua forma geométrica para suportar as cargas aplicadas desenvolvendo somente os esforços de tração. A estrutura estará sujeita, portanto, a grandes deslocamentos e grandes rotações, apresentando um comportamento não linear geométrico que os métodos de cálculo devem considerar de maneira coerente. Além disso, é comum o uso de materiais anisotrópicos, de modo que relações constitutivas adequadas devem ser consideradas na análise.

A tecnologia das estruturas tensionadas em suas feições atuais tem desenvolvimento relativamente recente, com grande importância dos estudos estruturais e científicos realizados pelo arquiteto alemão Frei Otto a partir da década de 1950 (PAULETTI, 2003). Inicialmente, a análise das estruturas projetadas por Otto era realizada a partir de modelos físicos, de modo que a precisão era reduzida e havia complicações em caso de alterações de projeto. Uma vez que os métodos de cálculo analíticos tem aplicação bastante limitada para as estruturas tensionadas devido à não linearidade, houve espaço para o desenvolvimento dos modelos numéricos, sendo o primeiro método computacional proposto por Argyris, Angelopoulos e Bichat em 1974.

A partir de então, diversos outros métodos tem sido desenvolvidos e propostos para a análise desse tipo de estrutura. No âmbito do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (SET/EESC/USP), uma formulação do método dos elementos finitos baseada em posições, denominada método dos elementos finitos posicional, ou MEF posicional (CODA 2003, 2018), vem sendo utilizada há vários anos na análise de uma

ampla variedade de problemas de engenharia. A formulação é lagrangiana total e estabelece como incógnitas as posições, de maneira que a não linearidade geométrica é intrinsecamente considerada. Tendo em vista a versatilidade do método e sua adequação à problemática da análise não linear geométrica, a aplicação na análise das estruturas tensionadas se apresenta como uma extensão natural no desenvolvimento das linhas de pesquisas do SET/EESC/USP acerca do tema.

Assim sendo, o escopo deste trabalho é a análise das estruturas tensionadas em membrana utilizando o MEF posicional por meio da implementação de código computacional em linguagem Fortran. Foram considerados elementos bidimensionais de membrana e elementos tridimensionais de sólido na modelagem. O sistema não linear de equações é resolvido pelo procedimento de Newton-Raphson e, para os casos de análise dinâmica, a integração temporal é realizada pelos métodos de Newmark e α -generalizado. Considerou-se ainda a possibilidade de contato entre os elementos da estrutura, imposto por meio das técnicas de penalização e multiplicadores de Lagrange.

Embora o enfoque da pesquisa sejam os elementos de membrana, o modelo numérico também incluiu elementos de cabo, haja vista a associação comumente verificada na prática entre ambos. A formulação desenvolvida também considera o caso de cargas não conservativas, possibilitando a análise de efeitos devido ao vento e de estruturas pneumáticas (tracionamento por meio da pressão de gases).

1.1 Objetivos

O objetivo principal da pesquisa é o desenvolvimento de uma formulação matemática computacional para a análise dinâmica não linear geométrica de estruturas tensionadas em membrana considerando contato, por meio de implementação em linguagem Fortran. A formulação é baseada em uma versão lagrangiana total do método dos elementos finitos com uma abordagem em posições, denominada método dos elementos finitos posicional.

Os objetivos específicos para a consecução do objetivo principal são os seguintes:

- a) desenvolvimento de código computacional para a análise não linear geométrica e dinâmica de elementos de membrana;
- b) implementação computacional do contato entre os elementos da estrutura;
- c) consideração de elementos de cabos associados à membrana no modelo computacional;
- d) consideração de carregamentos não conservativos na estrutura para a modelagem de estruturas pneumáticas;
- e) implementação do elemento de sólido tridimensional e sua aplicação na simulação de estruturas de membrana;
- f) análise de exemplos de aplicação da formulação desenvolvida.

1.2 Justificativa

As estruturas tensionadas em membrana permitem vencer grandes vãos com facilidade, sendo competitivas economicamente quando comparadas com os sistemas estruturais convencionais. Também apresentam características desejáveis do ponto de vista da sustentabilidade: aproveitam a iluminação natural que atravessa a membrana, ao mesmo tempo em que refletem parte da radiação solar incidente; são compostas de materiais leves e de baixo impacto ambiental; podem ser desmontadas e realocadas conforme a necessidade (RIVERA, 2012). Ademais, possibilitam o emprego de formas curvas diferenciadas e atraentes, gerando valor agregado à edificação pela beleza arquitetônica.

Entretanto, o uso deste sistema ainda é pouco difundido no Brasil, possivelmente devido ao pouco conhecimento técnico disponível, à escassez de normas técnicas específicas e a questões culturais (BORGES FILHO, 2006). O projeto de uma estrutura tensionada em membrana requer do profissional uma série de conhecimentos de nível avançado, como análise não linear geométrica e o uso de material sem rigidez à flexão e compressão. Assim, justifica-se este trabalho, primeiramente, pela disseminação dos conhecimentos sobre a análise das estruturas tensionadas nos meios técnico e científico, incentivando o desenvolvimento da indústria e a utilização do sistema construtivo e ainda fomentando o estudo e as pesquisas sobre o tema.

Outro fator importante para a realização da pesquisa são as contribuições ao campo dos métodos numéricos. A principal delas é explorar, de maneira inovadora, as potencialidades do método dos elementos finitos posicional na análise de estruturas de membrana. Embora o artigo de Bonet et al. (2000) tenha utilizado uma abordagem posicional para a análise de membranas pneumáticas, a presente tese suplanta o escopo daquele artigo em vários aspectos. Primeiramente, por inserir a abordagem posicional no contexto maior do MEF posicional na forma sistematizada por Coda (2018), sistematização que é relevante por permitir a extensão da formulação para outras aplicações de maneira simples. Além disso, a formulação aqui apresentada é bem mais ampla, considerando fatores como pré-tensionamento da membrana, análise dinâmica, contato, uso de elementos de alta ordem e inclusão de elementos de cabo, além dos carregamentos não conservativos. Adicionalmente, foram estudadas membranas em situações de contato dinâmico em relação a formas de imposição do contato e algoritmos de integração no tempo.

1.3 Metodologia

Conceitualmente, a pesquisa pode ser dividida em 3 tópicos principais: estruturas tensionadas em membrana, análise dinâmica não linear geométrica e mecânica do contato. Foi realizada

revisão bibliográfica acerca destes tópicos ao longo de todo o trabalho, visando consolidar os conhecimentos e analisar o panorama atualizado dos avanços na área.

A análise dinâmica não linear geométrica foi realizada por meio da implementação de código computacional em linguagem Fortran com formulação baseada no método dos elementos finitos posicional. O sistema de equações não lineares resultante foi resolvido pelo método de Newton-Raphson, empregando-se as rotinas HSL MA86 e HSL MA87 (HSL, 2016) para resolver o sistema linear em cada iteração. Para a integração temporal utilizou-se os métodos de Newmark e α -generalizado e, quando necessário solucionar o problema de autovalor e autovetor para calcular frequências naturais e modos de vibração, foi utilizada a rotina HSL EA19 (HSL, 2016). Visando otimizar o desempenho computacional, a ferramenta OpenMP (DAGUM; MENON, 1998) foi utilizada na paralelização de trechos do código.

As membranas analisadas foram discretizadas como elementos finitos bidimensionais no espaço e também como elementos de sólido de pequena espessura, buscando-se, quando possível, comparar essas estratégias de modelagem. O processo de busca da forma foi realizado por meio da técnica de relaxação dinâmica. O estudo de modelos constitutivos complexos não se encontra no escopo deste trabalho, sendo utilizado apenas o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico.

Para a discretização do contato entre os elementos, foi empregada a estratégia nó-a-superfície e a imposição das condições de contato na matriz Hessiana (rigidez tangente) e no vetor de forças da estrutura foi feita por meio das técnicas de penalização e dos multiplicadores de Lagrange.

Para a geração das malhas de elementos finitos, utilizou-se o programa Gmsh (GEUZAIN; REMACLE, 2009) e o pós-processamento foi realizado com o programa AcadView (PACCOLA; CODA, 2005).

1.4 Organização da tese e notação utilizada

A organização deste texto é aqui brevemente descrita. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica dos três principais temas abordados no trabalho: as estruturas tensionadas em membrana, a formulação numérica segundo o MEF posicional e a mecânica do contato. Estes temas são expandidos e discutidos nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 é apresentado o sistema construtivo em membrana estrutural, com a classificação, desenvolvimento histórico e materiais empregados. A ênfase recai nos métodos de cálculo, sobretudo sobre o problema de busca da forma e estratégias numéricas de solução. As bases teóricas referentes à mecânica dos sólidos não linear são descritas no Capítulo 4 e, no Capítulo 5, detalha-se a formulação do MEF posicional e as cinemáticas dos elementos finitos utilizados na pesquisa. Os métodos de integração no tempo para o problema dinâmico e de

solução do sistema de equações não lineares também são indicados. No Capítulo 6 é mostrada a formulação do contato, incluindo a detecção e imposição das condições nas variáveis do problema.

Finalmente, alguns exemplos numéricos avaliados pelo código computacional são discutidos no Capítulo 7 e o Capítulo 8 trata das conclusões e possibilidades de desenvolvimentos futuros desta pesquisa. O Apêndice A traz algumas deduções numéricas relativas às derivadas dos vetores normais.

No texto, a notação empregada para se referir às variáveis segue a seguinte convenção básica:

- a) uma variável em negrito (p. ex., \mathbf{A}) é uma matriz ou tensor;
- b) uma variável com uma seta superior (p. ex., \vec{F}) é um vetor;
- c) um ponto acima da variável (p. ex., \dot{y}) indica uma ordem de derivação no tempo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre as estruturas objeto do estudo, sobre o método numérico que será utilizado e sobre a mecânica do contato, contemplando alguns aspectos históricos e principais avanços e referências em cada área.

2.1 Estruturas tensionadas em membrana

Os primeiros estudos teóricos sobre estruturas tensionadas de membrana foram realizados pelo alemão Frei Otto na década de 1950, a partir de modelos físicos com bolhas de sabão e outros materiais (OTTO; TROSTEL, 1967). Contudo, o sistema construtivo já tinha sido utilizado com sucesso alguns anos antes por Walter Bird em coberturas para antenas de radar (OLIVEIRA, 2001). Robbin (1996) também menciona a importância das contribuições de David Geiger e Horst Berger no uso das estruturas tensionadas em membrana, enfatizando o trabalho deste último na construção de várias das maiores e mais belas construções daquele período.

As coberturas de Otto eram, inicialmente, em redes de cabos, com a membrana tendo apenas função de vedação devido à baixa resistência dos materiais disponíveis (ROBBIN, 1996). O desenvolvimento de materiais de maior resistência mecânica e dos métodos de cálculo ampliaram as possibilidades do sistema construtivo.

Sendo uma estrutura em que a forma não é conhecida a princípio, porém obtida no processo de cálculo, um dos problemas é a determinação da forma em equilíbrio sob a ação das forças, normalmente referido na literatura como *form finding* ou *shape finding* (OLIVEIRA, 2001; LEWIS, 2018; VEENENDAAL; BLOCK, 2012). Esse problema pode ser tratado por meio de modelos físicos, feitos de tecidos ou membranas de PVC, ou por modelos numéricos, com vários métodos diferentes sendo desenvolvidos nas últimas décadas devido aos avanços na área computacional.

Além da etapa de busca da forma, o projeto de uma estrutura tensionada em membrana também envolve o projeto dos cortes, definindo os recortes e planificações da superfície espacial para a construção com os materiais e dimensões disponíveis no mercado, e a análise estrutural da membrana sob os carregamentos de serviço (PAULETTI, 2003; BORGES FILHO, 2006). Deve ser considerada a não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos e ainda a

utilização de relações constitutivas que descrevam de maneira adequada o comportamento do material da membrana.

2.2 Método dos elementos finitos posicional

O método dos elementos finitos (MEF) tem sido a principal ferramenta numérica utilizada nos últimos anos na análise de ampla variedade de problemas físicos, embora tenha surgido no âmbito da análise de estruturas.

A ideia principal do MEF é a de resolver, de forma numérica, as equações diferenciais parciais que representam um problema físico transformando-as em sua forma fraca e realizando-se a divisão do domínio em subdomínios menores, denominados elementos finitos. Os elementos são compostos por pontos denominados nós para os quais são calculadas as incógnitas do problema; dessa forma, substitui-se a análise de um meio contínuo, com infinitas incógnitas, pela análise de um meio discretizado com um número finito de incógnitas.

Nas posições do contínuo entre os nós dos elementos as grandezas do problema são calculadas por meio de funções interpoladoras. Essas funções são definidas de tal maneira que os parâmetros incógnitos sejam certas grandezas com significado físico, como as posições, avaliadas nos nós. Assim, os campos das variáveis são representados pela combinação dos respectivos valores nodais por meio de funções interpoladoras (também chamadas de funções de forma), que estão associadas à geometria e ao grau de aproximação das variáveis representadas no elemento.

De acordo com Soriano (2003), a formulação foi apresentada, pioneiramente, em 1955 e republicada em 1960 por Argyris e Kelsey (1960) e também em 1956 por Turner et al. (1956), ambos na área da engenharia aeronáutica.

Nos anos que se seguiram, o método foi utilizado em problemas de análise não linear geométrica de vigas e placas (GALLAGHER; PADLOG, 1963), análise dinâmica (ARCHER, 1963), interação solo-estrutura (CHEUNG; ZINKIEWICZ, 1965), transferência de calor (WILSON; NICKELL, 1966) e outros. As bases matemáticas do método foram desenvolvidas de maneira compatível, sendo alguns dos avanços iniciais o emprego de novos tipos de elementos, como o de placa (ADINI; CLOUGH, 1961), a criação de critérios de convergência (IRONS; BARLOW, 1964) e o uso de multiplicadores de Lagrange (JONES, 1964).

A formulação tradicional do método tem os deslocamentos nodais como incógnitas primárias a serem determinadas, sendo muito grande a quantidade de referências bibliográficas sobre o assunto. Também é possível considerar diretamente as posições como incógnitas, medidas a partir de um sistema de coordenadas fixo. Essa abordagem, intitulada método dos elementos finitos posicional, pode ser considerada como uma variante operacional do MEF clássico e foi utilizada primeiramente por Bonet et al. (2000) exclusivamente em estruturas pneumáticas. A

aplicação em problemas diversos começou no trabalho de Coda (2003). A técnica é lagrangiana total, ou seja, a configuração indeformada da estrutura é tomada como referencial em todas as etapas da análise. Por se utilizar de uma descrição geometricamente exata, a não linearidade é intrinsecamente considerada, sendo um método ideal para análise de problemas com grandes deslocamentos.

Diversos trabalhos têm explorado esta abordagem posicional do método dos elementos finitos no contexto do grupo de pesquisa do SET/EESC/USP. Dentre os primeiros, estão a aplicação em estruturas bidimensionais em regime de grandes deslocamentos utilizando a cinemática de Euler-Bernoulli (CODA; GRECO, 2004), a análise de treliças tridimensionais com modelo constitutivo elastoplástico (GRECO et al., 2006) e a análise dinâmica de sistemas multi-corpos flexíveis (GRECO; CODA, 2006).

Estudos sobre elementos de casca foram realizados por Coda e Paccola (2007), considerando 6 graus de liberdade por nó. Posteriormente, a formulação de casca foi melhorada utilizando modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff tridimensional e considerando a taxa de variação linear da espessura como sétimo parâmetro nodal para o elemento (CODA; PACCOLA, 2008) e ainda estendida para a análise dinâmica (CODA; PACCOLA, 2009). Neste último trabalho é demonstrada a conservação da quantidade de movimento para a descrição lagrangiana total, resultando em uma matriz de massa constante para o problema e permitindo o uso do algoritmo de Newmark para a integração no tempo.

Estudos abordando não linearidade física incluem Pascon e Coda (2015), que desenvolveram formulação matemática para materiais elastoplásticos com gradação funcional sujeitos a grandes deformações, Pascon e Coda (2017), que propuseram formulação para materiais viscoelásticos considerando lei hiperelástica neo-Hookeana associada ao modelo viscoelástico de Zener, e Coda, Paccola e Sampaio (2013), com a aplicação do método para cascas laminadas ortotrópicas sujeitas a grandes deformações.

Situações de impacto foram consideradas por Greco (2004), que apresenta desenvolvimento de formulação para a análise de impacto entre estruturas reticuladas planas e entre estas estruturas com anteparos rígidos. O trabalho de Marques (2006) verificou a análise dinâmica de sólidos bidimensionais em situações com e sem impacto. Maciel (2008) considerou problemas de impacto em pórticos planos e sólidos.

Alguns trabalhos do grupo de pesquisa envolvendo estruturas tensionadas incluem o de Coda (2009), que empregou o método na análise de estruturas infláveis em duas dimensões, e os de Silva (2020), Silva e Coda (2019) e Coda, Silva e Paccola (2020), que apresentaram formulação para análise de estruturas de cabos.

2.3 Mecânica do contato

Pode-se dizer que o contato entre os corpos é uma das formas mais básicas de transferência de forças nos sistemas mecânicos. Entretanto, a consideração desse fenômeno envolve uma série de dificuldades de ordem teórica e numérica, haja vista a forte não linearidade do problema e o desconhecimento das condições de contorno na região de contato.

Trazendo uma breve descrição histórica sobre a mecânica do contato, Kikuchi e Oden (1988) apontam o estudo do problema de atrito entre superfícies como anterior ao do próprio contato. Entre os trabalhos pioneiros estão os de Leonardo da Vinci, no século XV, o de Amontons em 1699 e o de Coulomb em 1781, todos sob a ótica dos corpos rígidos. Estudos mais específicos sobre o contato entre corpos elásticos começaram a ser realizados apenas a partir do século XIX com o desenvolvimento da Mecânica dos Sólidos.

Após os trabalhos de Poisson, Saint-Venant e Voigt, cuja descrição do fenômeno continha erros ou imprecisões, Hertz apresentou o primeiro trabalho bem-sucedido sobre o problema de contato estático em corpos deformáveis em 1822, a partir de estudos sobre a deformação de lentes. Trabalhos seguintes buscaram avanços no sentido de remover as restrições da teoria de Hertz, como a consideração de atrito entre as superfícies e materiais com não linearidade física, resultado do desenvolvimento das teorias da plasticidade e da viscoelasticidade.

Em um contexto mais recente, as soluções numéricas tem sido utilizadas de forma eficaz há muitos anos, principalmente com o método dos elementos finitos. Um dos trabalhos pioneiros nesse sentido foi o de Hughes et al. (1976). Outras contribuições importantes incluem Chaudhary e Bathe (1986), Bathe e Chaudhary (1985) e Hallquist, Goudreau e Benson (1985).

Na modelagem numérica do contato, é possível distinguir três tópicos importantes: a discretização do contato, a detecção e a imposição das restrições. Por discretização entende-se a forma de considerar a interação entre os corpos nas interfaces em contato. A detecção envolve determinar, utilizando a geometria, se houve a penetração de um corpo em outro em certa etapa intermediária de cálculo, caso em que se deve impor matematicamente a restrição de impenetrabilidade para que o modelo possa ter significado físico.

Relativamente à discretização, a metodologia mais simples é a nó-a-nó, que pode ser utilizada quando as interfaces em contato tem malhas de nós alinhados. Nesse caso, assume-se que a transferência de forças ocorre diretamente nos nós. Uma estratégia mais comum para o caso geral em duas dimensões é a nó-a-segmeneto, em que se discretiza uma interface em nós projéteis e a outra em elementos alvo, composta por segmentos de curva. Trabalhos com essa abordagem incluem Hughes et al. (1976), Bathe e Chaudhary (1985) e Hallquist, Goudreau e Benson (1985). Para o caso em três dimensões, a estratégia correspondente é a nó-a-superfície, utilizada por Parisch (1989), Laursen e Simo (1993a) e Saracibar (1997).

Outro método para a discretização do contato é o *mortar*, originalmente apresentado em Bernardi, Debit e Maday (1990) como uma técnica de compatibilização de malhas não coincidentes, e utilizado por Belgacem, Hild e Laborde (1998) em problemas de contato. Nesse método, as duas interfaces são consideradas como segmentos (em duas dimensões) ou superfícies (três dimensões) e a detecção e imposição de restrições são feitas nos pontos de integração numérica. A técnica é descrita com detalhes em Piedade Neto (2009, 2013). Outros trabalhos são os de Fischer e Wriggers (2005) e Puso e Laursen (2004).

Sobre os métodos de imposição das restrições, os mais tradicionais são o uso de multiplicadores de Lagrange (HUGHES et al., 1976; CHAUDHARY; BATHE, 1986), no qual a restrição é imposta de forma exata com o aumento do número de incógnitas do problema, e o método da penalização (HALLQUIST; GOUDREAU; BENSON, 1985), que impõe o contato de forma aproximada, mas mantendo o número de incógnitas. Uma técnica que combina estas duas é a do Lagrangiano aumentado, utilizada por Wriggers, Simo e Taylor (1985), Laursen e Simo (1993b) e Pietrzak e Curnier (1999). Alguns outros métodos são discutidos em Wriggers (2006).

Na análise dinâmica de problemas de contato, a escolha apropriada dos métodos de integração no tempo é importante para garantir a estabilidade numérica da resposta. No trabalho de Chaudhary e Bathe (1986) já se reconhece que o uso do tradicional método de Newmark com os parâmetros usuais $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ não produz resultados adequados, empregando $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1/2$ para melhorar a estabilidade. Outras estratégias foram propostas por Carpenter, Taylor e Katona (1991) e Taylor e Papadopoulos (1993). Hu (1997) apresentou um algoritmo que utiliza uma modificação na equação de movimento para que as forças de contato no passo atual influenciem as acelerações no passo seguinte, equivalendo a considerar $\beta = 1$ e $\gamma = 3/2$ no algoritmo de Newmark. Embora haja a necessidade de se utilizar passos de tempo menores devido ao amortecimento numérico inserido, essa técnica é bastante eficiente pela sua simplicidade, tendo sido utilizada por Greco (2004), Maciel (2008) e Carvalho (2019).

Outros métodos de integração foram desenvolvidos com o objetivo de inserir o amortecimento numérico de forma mais eficiente, filtrando as frequências altas com pouco efeito sobre as baixas. Um destes métodos é o α -generalizado, proposto por Chung e Hulbert (1993) e que permite controlar a dissipação numérica das frequências altas por meio de um parâmetro ρ_∞ . Siqueira (2019) utilizou o método na análise de estruturas com restrições cinemáticas e o trabalho de Moreira (2021) emprega o método em problemas de interação fluido-estrutura com contato.

3 ESTRUTURAS TENSIONADAS EM MEMBRANA

Neste capítulo é apresentado um panorama dos principais aspectos das estruturas tensionadas em membrana, abordando os tipos, histórico, materiais utilizados e principais métodos de cálculo.

3.1 Classificação das estruturas tensionadas em membrana

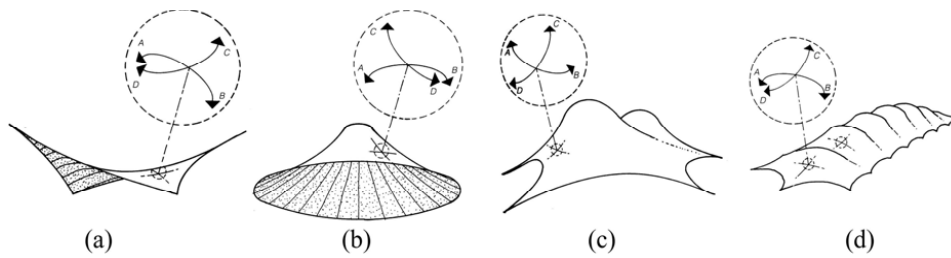
Existe uma divisão natural das estruturas tensionadas em dois grandes grupos, de acordo com os elementos construtivos: as estruturas de cabos e as estruturas de membranas. Entretanto, o comportamento estrutural de ambos é semelhante, podendo-se entender uma membrana como uma rede de cabos de malha muito fina. Além disso, é comum a associação dos dois elementos, gerando estruturas de tipo misto (PAULETTI, 2003).

Pelo fato de os elementos não possuírem rigidez à compressão, é comum a aplicação de um estado de tração prévio na estrutura para impedir o surgimento de forças de compressão devido aos carregamentos observados durante a vida útil. Para as membranas, essa tração pode ser aplicada de duas formas principais, classificando as estruturas em membranas pré-tensionadas mecanicamente e membranas pneumáticas.

Nas membranas pré-tensionadas mecanicamente, o estado de tração inicial é aplicado por meio de outros elementos estruturais. A situação mais comum é o uso de cabos conectados à membrana, geralmente em bainhas situadas no contorno, porém outros elementos podem ser utilizados, como barras e anéis rígidos (com comportamento de treliça ou pórtico) ou ainda sistemas mecânicos com elementos telescópicos. Um caso especial é o dos sistemas retráteis ou conversíveis, nos quais a membrana pode ser “aberta” ou “fechada” sobre uma região conforme a necessidade, empregando dispositivos como atuadores e polias em conjunto com cabos.

Busca-se que os valores de tensão na membrana na etapa de pré-tensionamento sejam de, aproximadamente, 5% da resistência à ruptura do material (LEWIS, 2018). A estabilidade da membrana nesse caso é assegurada quando esta possui uma superfície anticlástica, ou seja, os raios de curvatura em um ponto têm sinais opostos. Duas formas comuns são o parabolóide hiperbólico e o catenoide, mostrados na Figura 1 (a) e (b). Pode-se modificar essas formas com a introdução de picos e cristas, como na Figura 1 (c) e (d), onde a existência de elementos estruturais de outro tipo (cabo, treliça ou pórtico) são necessários.

Figura 1 – Formas usuais de estruturas em membrana pré-tensionada mecanicamente: (a) parabolóide hiperbólico; (b) catenoide; (c) e (d) superfícies modificadas pela introdução de picos e/ou cristas.

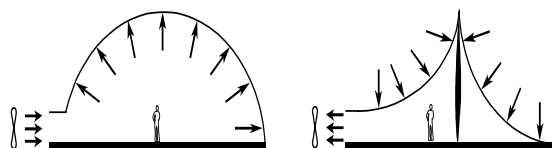


Fonte: Borges Filho (2006).

No caso das membranas pneumáticas, o pré-tensionamento é obtido por meio de uma diferença na pressão de ar interna. A forma da membrana é influenciada por essa diferença de pressão, mas também pela atuação de vento e mudanças de temperatura ambiente. Os valores de pressão usuais se encontram na faixa de $0,20 \text{ kN/m}^2$ a $0,55 \text{ kN/m}^2$ (LEWIS, 2018).

As membranas pneumáticas podem ainda ser subdivididas em dois tipos. No primeiro, as membranas suportadas pelo ar, tem-se uma estrutura delimitando uma área útil sujeita a uma pressão ligeiramente diferente da atmosférica. Assim, é necessário que o acesso à construção seja feito por meio de “eclusas” de ar e haja bombeamento contínuo de ar para a membrana ou do interior da membrana (OLIVEIRA, 2001). Um esquema é mostrado na Figura 2. Quando o ar é bombeado para fora da membrana, há a necessidade de elemento resistente à compressão para garantir a estabilidade estrutural. As membranas podem ser elevadas ou erguidas a partir do próprio piso.

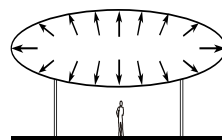
Figura 2 – Membrana suportada pelo ar com pressão interna maior que a atmosférica (esquerda) ou menor (direita).



Fonte: Pauletti (2003).

O segundo tipo são as membranas infláveis, nas quais o compartimento pressurizado é totalmente fechado e não faz parte do espaço útil da construção. Surgem, assim, elementos estruturais pressurizados como vigas, arcos e cascas. O conceito é ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Membrana inflável.



Fonte: Pauletti (2003).

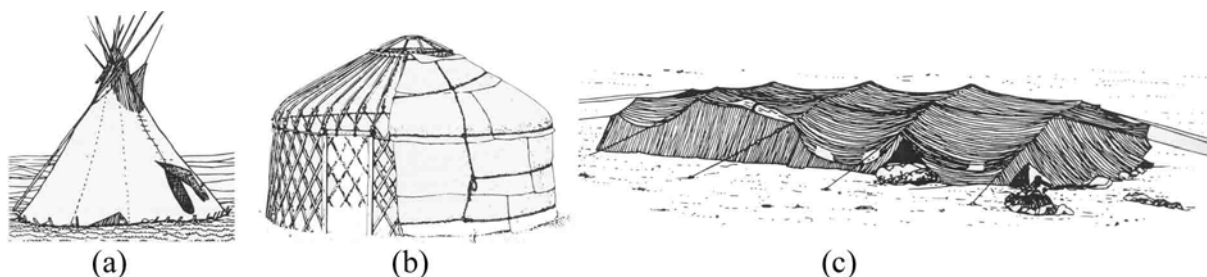
3.2 Breve histórico de utilização

Nesta seção são descritos, brevemente, os principais desenvolvimentos históricos do uso das estruturas em membrana.

3.2.1 Estruturas em membrana pré-tensionada mecanicamente

Os primeiros usos de estruturas de membrana remontam às tendas feitas pelo homem desde a Pré-História. A Figura 4 mostra alguns tipos. A vedação era de peles de animais e, posteriormente, passou a se utilizar também materiais tecidos, como a lã (HUNTINGTON, 2013). Há registro de uso de tendas por várias civilizações antigas, como os assírios, egípcios, persas, gregos e romanos (PAULETTI, 2003). A própria Bíblia Sagrada relata, no livro de Êxodo, que o Tabernáculo hebreu construído nos tempos de Moisés (c. 1450 a.C.) era coberto por várias camadas de tecidos e peles de animais.

Figura 4 – Alguns tipos de tendas: (a) tenda cônica; (b) tenda de paredes cilíndricas; (c) tenda negra.



Fonte: Borges Filho (2006).

Em culturas urbanas, as tendas eram preferencialmente utilizadas em atividades temporárias ou móveis, como as campanhas militares dos exércitos. Já os povos nômades usam tendas como moradia até os dias atuais. Há destaque na literatura para a tenda negra utilizada pelos nômades em regiões do Oriente Médio e norte da África, feita de pelo negro de cabra. O sistema construtivo envolvendo o tracionamento do tecido por meio de mastros se assemelha ao funcionamento das estruturas em membrana atuais (PAULETTI, 2003).

Após o fim do Império Romano, as tendas voltaram a ser utilizadas na Europa a partir do século XII, principalmente em campanhas militares. Alguns séculos mais tarde, a Revolução Industrial possibilitou a melhoria da qualidade dos materiais das estruturas, com a mecanização da produção dos tecidos e a invenção dos cabos de aço. A expansão da malha ferroviária nos Estados Unidos permitiu o surgimento das companhias de circo itinerante por volta de 1860, que faziam suas apresentações em grandes tendas de lona apoiadas em mastros. A Figura 5 mostra a tenda de formato clássico denominada *Chapiteau*.

Figura 5 – Tenda de circo (Chapiteau).



Fonte: Forster (1994 apud OLIVEIRA, 2001).

Na década de 1950, foi construída a J. S. Dorton Arena na cidade de Raleigh, nos Estados Unidos. Esta foi a primeira das obras modernas em que se aplicou o princípio de protensão de superfícies anticlásticas. A cobertura do estádio esportivo constituía-se em uma rede de cabos protendidos em formato de parabolóide hiperbólico ancorados em arcos de concreto, como mostrado na Figura 6.

Figura 6 – J. S. Dorton Arena em Raleigh, Estados Unidos, 1952.



Fonte: Drew (1979).

Influenciado pela Arena de Raleigh, o arquiteto alemão Frei Otto começou a desenvolver estudos sobre as estruturas tensionadas por meio de modelos físicos, utilizando materiais como correntes, cabos, tecidos elásticos e filmes de sabão. A evolução no entendimento do princípio de funcionamento das superfícies anticlásticas se mostra nas obras de Otto, como o pavilhão construído em Kassel, na Alemanha, em 1955 (Figura 7). Devido à limitação de resistência das membranas da época, foi utilizada uma rede de cabos para a sustentação.

Figura 7 – Pavilhão de música em Kassel, Alemanha, 1955.



Fonte: Borges Filho (2006).

Uma obra de Otto que alcançou grande visibilidade foi a cobertura do Estádio Olímpico de Munique, construído para os Jogos Olímpicos de 1972 (Figura 8). Foram utilizados painéis de acrílico transparente apoiados em uma malha de cabos para que não houvesse grande diferença de luminosidade entre as partes coberta e descoberta do estádio, de modo a não prejudicar as transmissões televisivas do evento. De modo pioneiro na história das estruturas tensionadas, o projeto foi realizado com base em modelos computacionais em elementos finitos ao invés dos modelos físicos (PAULETTI, 2003; ARGYRIS; ANGELOPOULOS; BICHAT, 1974).

Figura 8 – Estádio Olímpico de Munique, Alemanha, construído em 1971.



Fonte: Mojtahedi (2006).

Com os avanços teóricos obtidos por Frei Otto e a evolução tecnológica dos materiais, desenvolveram-se as estruturas em membrana nos moldes contemporâneos. Algumas das obras famosas executadas com este sistema construtivo são o Terminal Hajj no Aeroporto Internacional Rei Abdullaziz em Jeddah, Arábia Saudita (Figura 9), o Aeroporto Internacional de Denver em Denver, Estados Unidos (Figura 10) e o Domo do Milênio em Londres, Reino Unido (Figura 11).

Figura 9 – Terminal Hajj no Aeroporto Internacional Rei Abdullaziz, Jeddah, Arábia Saudita, 1981.



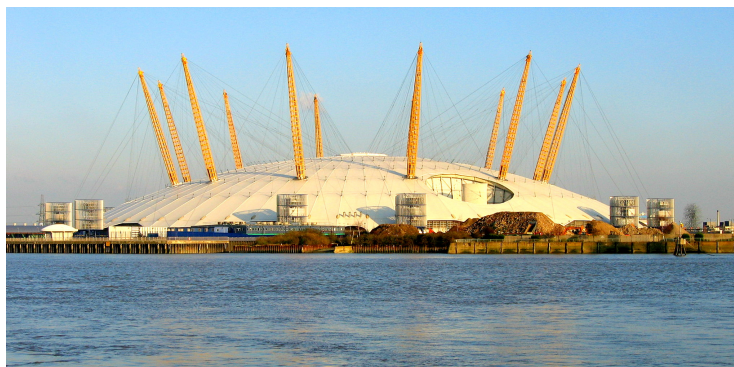
Fonte: Robbin (1996).

Figura 10 – Aeroporto Internacional de Denver, Denver, Estados Unidos, 1994.



Fonte: Robbin (1996).

Figura 11 – Domo do Milênio, Londres, Reino Unido, 1999.



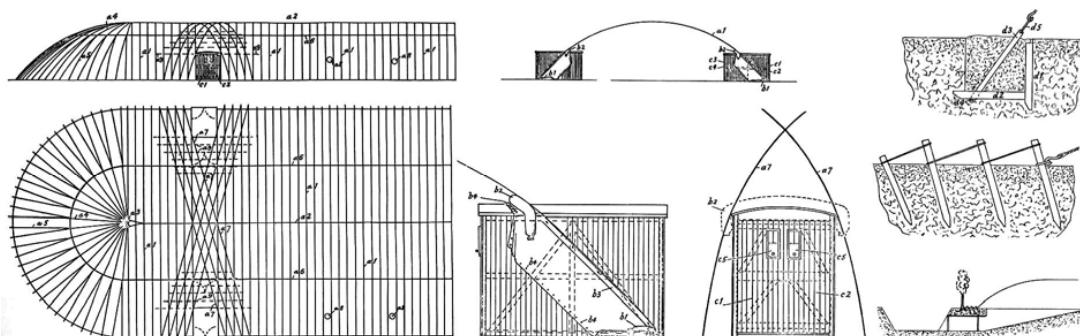
Fonte: Jin (2004).

3.2.2 Membranas pneumáticas

O uso de membranas pneumáticas como forma de cobertura das construções é relativamente recente. Entretanto, o princípio de funcionamento – enrijecimento da membrana devido a uma pressão interna – é conhecido há milhares de anos, atribuindo-se aos romanos a criação de boias pneumáticas flutuantes em água e tendo os chineses inventado os balões de ar feitos de papel, muitas vezes denominados como lanternas (BORGES FILHO, 2006). As próprias velas marítimas dos barcos podem ser entendidas como estruturas que funcionam devido a um diferencial de pressão de ar.

O uso das estruturas pneumáticas era limitado pelos materiais, que deveriam ser leves e impermeáveis ao ar. A partir do século XVIII, houve o desenvolvimento dos grandes balões de ar quente, com o primeiro balão construído em Lisboa pelo padre brasileiro Bartolomeu de Gusmão, em 1709, e a experiência dos irmãos Montgolfier com um balão de papel de 11 m de diâmetro, na França, em 1783 (PAULETTI, 2003). No ano de 1917, o engenheiro inglês F. W. Lanchester patenteou um sistema em estrutura pneumática para hospitais de campo, porém nunca chegou a executar a obra. Os detalhes da patente são mostrados na Figura 12.

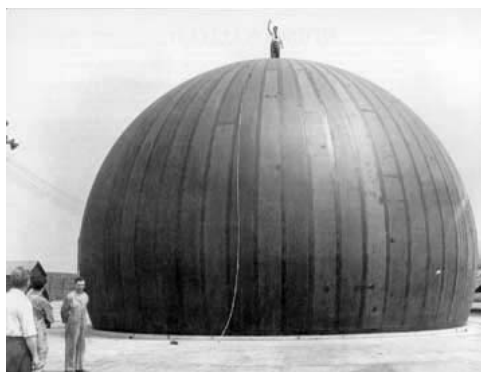
Figura 12 – Detalhes da patente da estrutura pneumática de Lanchester.



Fonte: Herzog (1977).

Durante a Segunda Guerra Mundial foram criados tecidos sintéticos como o nylon, que começou a ser utilizado em abrigos de emergência e mesmo em chamarizes, como tanques e caminhões infláveis (CHI; PAULETTI, 2005). Após o final da guerra, pela necessidade de proteção das antenas de radar dos ventos e condições climáticas adversas, pesquisas lideradas por Walter Bird resultaram no primeiro protótipo de uma cobertura em membrana pressurizada que ficou conhecida como radome (contração de *radar dome*) em 1948, mostrado na Figura 13. A membrana fina não metálica apresentava pequena interferência nos sinais de rádio, sendo bastante apropriada para o uso.

Figura 13 – Primeiro protótipo do radome (1948).



Fonte: Borges Filho (2006).

Com o sucesso dos radomes, Bird fundou uma empresa especializada em estruturas pneumáticas, a Birdair, difundindo o uso do sistema construtivo em aplicações comerciais, como armazéns e coberturas de piscinas e quadras esportivas.

Outros tecidos sintéticos adequados para a confecção de membranas estruturais foram sendo desenvolvidos nos anos que se seguiram. Na Exposição Mundial de 1970 em Osaka, no Japão, a cobertura do Pavilhão dos Estados Unidos foi o primeiro uso da membrana de fibra de vidro revestida com politetrafluoretileno (PTFE). O projeto dos engenheiros David Geiger e Horst Berger consistia em um domo pneumático de baixa altura (6,1 m) reforçado com uma malha de cabos em diagonal, cobrindo uma área de aproximadamente 142 x 80 m (Figura 14).

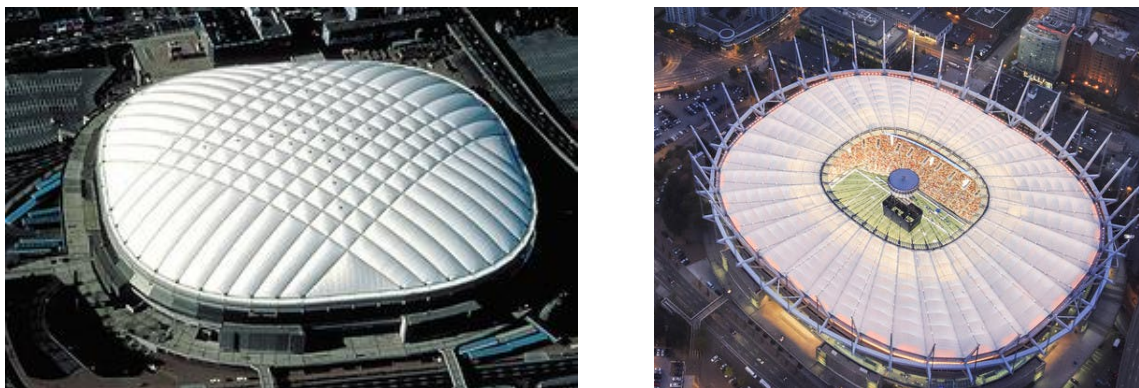
Figura 14 – Pavilhão dos Estados Unidos na Exposição Mundial de 1970, Osaka, Japão.



Fonte: adaptada de Hidden Architecture (2016).

O pavilhão inspirou o uso das coberturas pneumáticas em vários estádios esportivos nos Estados Unidos e no Canadá. Robbin (1996) relata que, durante os anos de 1974 a 1986, o engenheiro David Geiger construiu 12 coberturas com esse sistema construtivo para estádios e instalações esportivas. Um deles é o BC Place em Vancouver, no Canadá, construído em 1983. Em 2011, a cobertura foi reformulada para um sistema retrátil (Figura 15).

Figura 15 – Estádio BC Place, Vancouver, Canadá. Cobertura original (esq.) e após a reformulação (dir.).



Fonte: Freeborn (2018); obtida em <https://www.bcplace.com/the-stadium/the-roof> (em 26 mar. 2020).

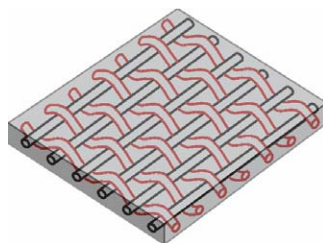
3.3 Materiais utilizados

O desenvolvimento tecnológico das membranas estruturais ocorreu a partir da segunda metade do século XX com a invenção das fibras sintéticas. Entretanto, ainda hoje não há uma grande variedade de materiais adequados para este fim, sendo um campo importante para pesquisas futuras.

Em geral, as membranas estruturais são materiais compósitos que se constituem em uma malha de fios imersa em uma matriz de revestimento, podendo apresentar camadas adicionais de revestimento de proteção. A Figura 16 traz um exemplo esquemático. Por fio entende-se

um conjunto de fibras paralelas ou retorcidas. A malha de fios (trançados ou não) recebe o material da matriz em forma líquida ou pastosa e, por meio de processos industriais, resulta-se na membrana estrutural.

Figura 16 – Esquema de membrana estrutural com a malha de fios imersa na matriz de revestimento.



Fonte: Borges Filho (2006).

Assis (2012) apresenta uma descrição detalhada dos processos de fabricação das membranas de uso mais comum.

3.3.1 Membranas estruturais

Dentre as propriedades desejadas ao tecido estrutural estão a resistência à tração e à propagação de danos (rasgos ou furos), estabilidade dimensional, baixo peso específico, resistência às intempéries (principalmente radiação ultravioleta) e facilidade de execução de emendas (LEONARD, 1988). Cada material possui vantagens em alguns quesitos e desvantagens em outros, de modo que a escolha deve ser feita considerando as características intrínsecas de cada empreendimento.

Os materiais compósitos de uso mais comum em membranas estruturais são o poliéster revestido com PVC (policloreto de vinila) e a fibra de vidro revestida com PTFE (politetrafluoretileno, também conhecido como Teflon). Também são utilizados a fibra de vidro revestida com silicone e as aramidas (fibras artificiais orgânicas, também denominadas Kevlar) revestidas com PTFE ou silicone. O nylon, a primeira fibra sintética utilizada em membranas, vem tendo seu uso reduzido devido a problemas de instabilidade dimensional em presença de umidade e baixa durabilidade quando exposto à radiação ultravioleta.

O poliéster revestido com PVC apresenta menor resistência à tração que o nylon, porém maior rigidez. Não é afetado pela umidade e possui maior resistência à radiação ultravioleta, ainda que sofra alguma degradação com o tempo – Lewis (2018) indica uma vida útil aproximada de 15 anos. O mesmo trabalho ainda cita o problema de fluência e perda do pré-tensionamento da membrana. Este tecido é de menor custo e é predominante nas obras menores.

O tecido de fibra de vidro revestido com PTFE possui alta resistência mecânica, ao corte e à perfuração e é mais resistente à radiação, com vida útil estimada de 50 anos (LEWIS, 2018).

É dimensionalmente estável, porém o custo é relativamente elevado em relação ao poliéster revestido com PVC, de modo que tem maior uso em obras de grande porte. Requer cuidados especiais no transporte e montagem da estrutura para não causar danos à membrana devido à baixa resistência à flexão da fibra de vidro.

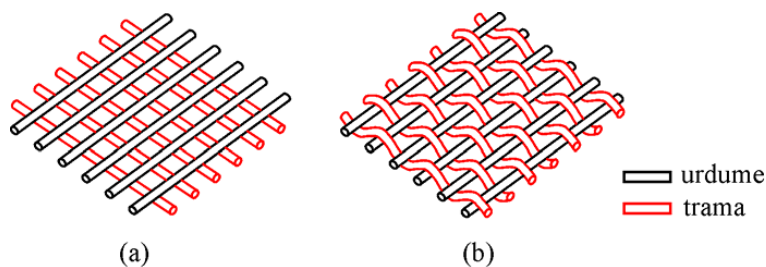
O revestimento da fibra de vidro com silicone ao invés de PTFE torna o material mais flexível e menos sujeito aos danos, porém as emendas necessitam ser coladas, o que torna o processo de construção mais trabalhoso. As aramidas possuem maior resistência à flexão que a fibra de vidro, porém são mais sujeitas à deterioração pela ação dos raios ultravioleta, de modo que necessitam de revestimento adequado (HUNTINGTON, 2013).

Além da matriz de revestimento, podem ser adicionadas camadas de revestimentos de superfície para melhorar algumas propriedades do tecido. Materiais como o PVDF (fluoreto de polivinilideno) e o PVF (fluoreto de polivinila ou Tedlar) são utilizados para aumentar a resistência à radiação ultravioleta e conferir propriedades autolimpantes à membrana.

3.3.2 Comportamento estrutural do tecido

Os fios que compõem a malha são geralmente dispostos em direções perpendiculares e podem ser sobrepostos ou tecidos. Os fios sobrepostos são colocados uns sobre os outros sem nenhum tipo de entrelaçamento. Para os fios tecidos, cada fio passa alternadamente por cima e por baixo dos fios da direção perpendicular. Os arranjos são mostrados na Figura 17. No processo de tecelagem, os fios em uma das direções, o urdume, são mantidos retos e esticados e os fios da outra direção, a trama, são entrelaçados com os primeiros.

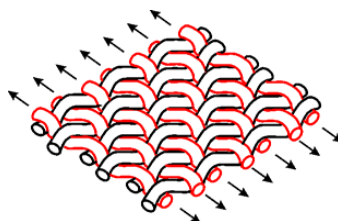
Figura 17 – Arranjos dos fios na membrana estrutural: (a) sobrepostos; (b) tecidos.



Fonte: Borges Filho (2006).

Apesar de retos no início do processo, os fios do urdume passam a apresentar certa ondulação devido à interação com os fios da trama. Quando o tecido é tracionado, os níveis de ondulação das duas direções se alteram, conferindo comportamento anisotrópico ao material dependente da relação entre as duas tensões. Esse fenômeno, mostrado na Figura 18, é denominado *crimp interchange* ou troca de ondulações.

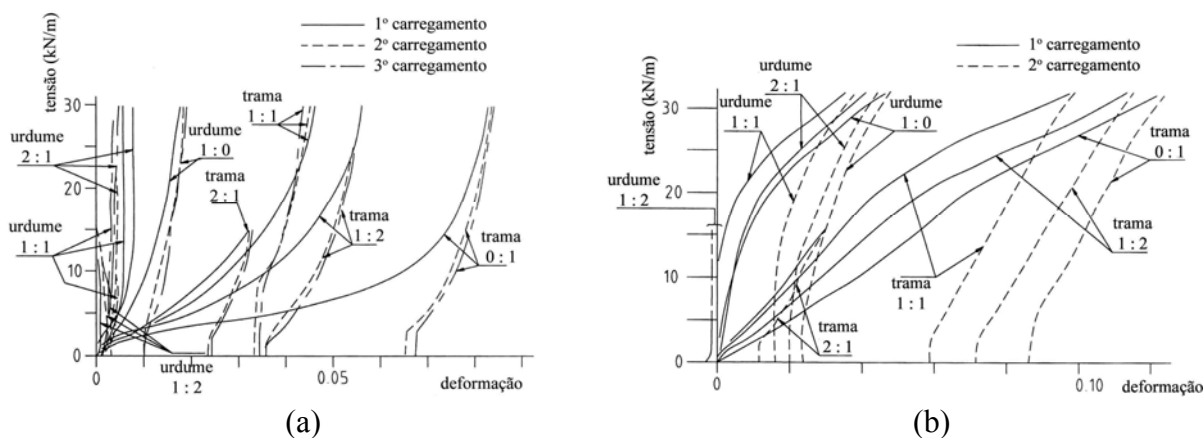
Figura 18 – Troca de ondulações (*crimp interchange*) – ondulação dos fios de uma direção devido às tensões aplicadas na direção perpendicular.



Fonte: Borges Filho (2006).

Ensaio para a determinação das propriedades do tecido podem ser realizados na forma uniaxial ou biaxial, este último com corpo de prova em formato cruciforme. O comportamento tensão-deformação é não linear e varia com a repetição do carregamento, além da dependência da relação entre as tensões nas direções do urdume e da trama, como ilustrado na Figura 19. Nas curvas, “trama” e “urdume” são as direções nas quais se mediu a deformação e a indicação do tipo “x:y” se refere à relação entre a tensão no urdume (x) e a tensão na trama (y).

Figura 19 – Curvas típicas tensão-deformação para membranas de: (a) fibra de vidro revestida com PTFE; (b) poliéster revestido com PVC.



Fonte: Huntington (2013).

Várias pesquisas têm sido desenvolvidas tanto na área de determinação das propriedades mecânicas quanto em propostas de modelos constitutivos. Sobre propriedades mecânicas, Hu et al. (2020) resumiram resultados obtidos por vários autores. Alguns trabalhos em âmbito nacional são os de Chivante (2009) e Suzin (2019). Modelos constitutivos avançados são apresentados por Kato, Yoshino e Minami (1999), Pargana, Lloyd-Smith e Izzuddin (2007) e Pargana e Leitão (2015). Este último trabalho ainda apresenta uma revisão de vários modelos constitutivos existentes na literatura.

Tendo em vista a complexidade do tecido composto e o objetivo da tese em se propor formulação não linear geométrica específica para a solução estática e dinâmica de estruturas em membrana, o presente trabalho não incluiu uma avaliação extensa de modelos constitutivos,

utilizando apenas o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico, mais simples que aqueles apresentados na Figura 19.

3.3.3 Enrugamento da membrana

Devido à pequena espessura da membrana, a rigidez à compressão dos elementos estruturais é bastante reduzida. Quando existe a tendência de compressão na membrana, ocorre o fenômeno denominado de enrugamento, com o aparecimento de dobras (deslocamentos fora do plano) e conseqüente redistribuição de tensões. Essa tendência de compressão pode ocorrer quando a membrana está em um estado inicial frouxo (sem pré-tensionamento), ou ainda quando as ações atuantes na estrutura sejam tais que ocorra a perda do pré-tensionamento aplicado.

Na análise numérica, existem duas formas principais de se considerar esse fenômeno (DIABY; LE VAN; WIELGOSZ, 2006). A primeira adota uma abordagem baseada na chamada teoria do campo de tensões e a segunda considera uma análise de estabilidade.

Pela teoria do campo de tensões, considera-se o elemento de membrana sem nenhuma rigidez à compressão ou flexão. As rugas aparecem quando pelo menos uma das tensões principais é de compressão; nesse caso, a tensão de compressão e conseqüentes deslocamentos fora do plano são considerados como uma tensão nula e um deslocamento de contração no plano, de modo que o problema ainda mantém o aspecto bidimensional. Embora essa abordagem não forneça parâmetros como comprimento de onda e amplitude das rugas, é possível obter a distribuição de tensões e a localização das regiões enrugadas e frouxas de forma consistente. Várias metodologias para avaliação do enrugamento foram propostas com base nessa teoria, dentre elas as de Contri e Schrefler (1988), Roddeman et al. (1987a, 1987b), Kang e Im (1997), Lu, Accorsi e Leonard (2001), Akita et al. (2007), Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2008, 2009) e Wang, Yang e Law (2014).

Quando se representa a membrana com elementos que possuem rigidez à flexão (como os de casca, mais comuns na literatura, ou ainda os de sólido), pode-se realizar uma análise de estabilidade e determinar a posição de equilíbrio após o ponto de bifurcação. Os trabalhos de Wong e Pellegrino (2002) e Flores e Oñate (2011) utilizam essa abordagem. Como o elemento possui rigidez à flexão, é possível avaliar a amplitude das rugas e o comprimento de onda por meio da distância entre cristas ou vales adjacentes.

Neste trabalho, o enrugamento dos elementos bidimensionais de membrana será considerado por meio de um critério de tensões, assim como feito em Pauletti e Rocha (2021) e Tabarrok e Qin (1992), porém utilizando a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S , medida lagrangiana adotada na formulação. Sendo S_1 e S_2 as tensões principais, com $S_1 > S_2$, três situações são possíveis para a membrana:

- 1) $S_2 > 0$: membrana esticada;
- 2) $S_1 > 0$ e $S_2 \leq 0$: membrana enrugada ou enrugamento uniaxial;
- 3) $S_1 \leq 0$: membrana frouxa ou enrugamento biaxial.

Caso seja verificado o enrugamento, o estado de tensões S é recalculado de modo a eliminar as tensões de compressão. Isso é obtido da seguinte maneira:

- 1) as tensões e direções principais do tensor S são calculadas, ou seja, o tensor é rotacionado para as direções principais;
- 2) caso haja tensões principais negativas, a estas é atribuído valor nulo;
- 3) o tensor S é rotacionado de volta às direções originais por meio das direções principais calculadas previamente.

Apenas após estas operações é que são calculadas a contribuição nas variáveis globais de força interna e rigidez (a matriz Hessiana, como será discutido nos capítulos seguintes). Esta técnica é aproximada no sentido de que ainda se considera a rigidez elástica da membrana, sendo desprezadas a parcela de rigidez geométrica e a contribuição nas forças internas (essas rigidezes serão discutidas na subseção 3.4.2). Entretanto, uma vez que a rigidez elástica das membranas é bastante reduzida, este modelo se mostra adequado às aplicações aqui apresentadas, permitindo o cálculo das tensões de forma consistente e evitando o aparecimento de compressão nos elementos.

3.3.4 Cabos estruturais

Mesmo nas estruturas em que o elemento principal é a membrana, é comum a utilização de cabos como elementos secundários. Dessa forma, nesta seção o funcionamento dos cabos será discutido brevemente.

O principal material do qual são feitos os cabos utilizados nas tensoestruturas é o aço. Entretanto, o aço dos cabos tem propriedades diferentes de outros aços mais comumente utilizados na construção civil, como os de perfis metálicos (vigas e colunas) e os de armadura passiva para concreto armado. Existe mais proximidade com os aços utilizados em armaduras ativas para concreto protendido, embora com algumas diferenças.

O aço utilizado na confecção dos cabos estruturais tem um teor de carbono consideravelmente maior que outros aços. Isso traz um aumento expressivo da resistência, porém com diminuição da ductilidade e da soldabilidade. Estes aços podem chegar a resistências da ordem de 1860 MPa, com apenas 4% de deformação na ruptura (GIMSING; GEORGAKIS, 2012).

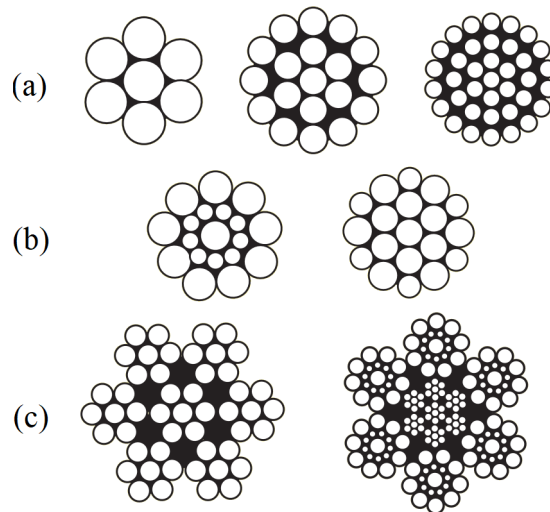
O tipo básico de cabo estrutural consiste em um arranjo de 7 fios (ou arames), com um fio reto central (alma ou núcleo) circundado por uma camada de 6 fios torcidos em formato helicoidal, também chamados de pernas (Figura 20). Algumas variações desse modelo são o uso de mais camadas de fios (p. ex., 1+6+12 fios, totalizando 19, ou 1+6+12+18, totalizando 37 fios) e ainda a composição deste módulo básico formando cabos maiores (i. e., um cabo de 7 fios circundado por uma ou mais camadas de cabos de 7 fios), como mostrado na Figura 21. Tem-se ainda uma composição denominada *locked coil*, que possui camadas internas de fios circulares e camadas exteriores com fios especiais com seção transversal em formato de Z, mais “quadrados”, que proporcionam maior intertravamento dos fios e menor índice de vazios (Figura 22).

Figura 20 – Cabo formado por 7 fios.



Fonte: Gimsing e Georgakis (2012).

Figura 21 – Alguns tipos de cabos estruturais. (a) Composição simples com 7, 19 e 37 fios. (b) Composições com fios de diâmetros diferentes. (c) Composições formadas por vários cabos.



Fonte: elaborada pelo autor, baseado em Belgo Bekaert Arames (2012).

Figura 22 – Cabo do tipo *locked coil*.



Fonte: Redaelli Tecna (2020).

Quanto às propriedades mecânicas, Buchholdt (1999) aponta que os valores típicos de módulo de elasticidade para os cabos ficam entre 145 e 170 GPa e as tensões de ruptura na ordem de 1300 a 1500 MPa. Estes valores são diferentes das propriedades dos fios isolados devido ao próprio processo de fabricação, sendo influenciados pelo passo, que é a distância, no sentido do eixo do cabo, necessária para que uma perna complete uma volta ao redor da alma.

Em virtude do arranjo helicoidal e multicomponente dos cabos, quando uma carga axial é aplicada ao elemento pela primeira vez ocorre uma deformação causada pela acomodação dos fios e compactação do conjunto, além da deformação elástica. Para eliminar essa deformação de acomodação de modo a que o cabo se comporte de forma mais próxima ao regime linear, é comum realizar uma operação de pré-tensionamento do cabo antes de sua instalação na construção. Essa operação é realizada com uma carga maior que a carga de trabalho e inferior à correspondente ao limite elástico do material.

Um ponto importante destacado por Gimsing e Georgakis (2012) é o fato de que, pela reduzida ductilidade dos cabos, as deformações plásticas disponíveis permitem certa redistribuição local de forças devido à imperfeições e flexão do cabo, porém não são suficientes para permitir uma análise plástica da estrutura como um todo considerando a formação de mecanismos e redistribuição de esforços. Isso indica que o uso de relações constitutivas lineares para os cabos é uma consideração válida para descrever o comportamento das tensoestruturas.

Outros tópicos importantes a serem considerados quando do projeto de tensoestruturas em cabos são a relaxação do aço, a ocorrência de fadiga e a resistência à corrosão. Para este último caso, diversas estratégias podem ser utilizadas, variando desde sistemas simples como pintura ou lubrificação até o uso de cabos galvanizados ou com revestimento extrudado de polietileno de alta densidade (HDPE). O uso de injeção de calda de cimento em tubos de polietileno ou aço para proteção dos cabos vem diminuindo nos últimos anos devido ao elevado peso próprio e à possibilidade de fissuração no material inibidor de corrosão (GIMSING; GEORGAKIS, 2012).

Informações mais detalhadas sobre o comportamento estrutural dos cabos podem ser encontradas em Buchholdt (1999), Gimsing e Georgakis (2012) (com ênfase no uso em pontes) e em Belgo Bekaert Arames (2012).

3.4 Métodos de análise e busca da forma

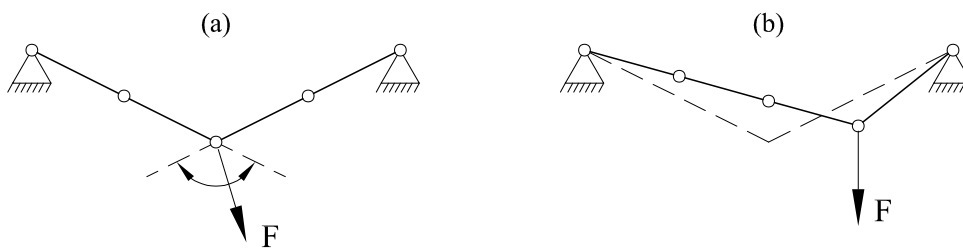
Há certo consenso na literatura sobre a divisão do projeto de estruturas tensionadas em três etapas: busca da forma, determinação dos padrões de corte e a análise estrutural (ou resposta aos carregamentos em serviço). Nos tópicos seguintes, será dada ênfase na etapa de busca da forma, apresentando-se primeiramente certos conceitos teóricos envolvidos. Alguns desses conceitos são exemplificados por meio de elementos de cabo apenas para fins didáticos,

sendo igualmente válidos para os elementos de membrana.

3.4.1 Formas funiculares

Como já observado, cabos e membranas são elementos estruturais constituídos de tal maneira que não possuem rigidez à compressão, apenas à tração. Em uma situação hipotética em que nenhuma força esteja atuando (inclusive o peso próprio), pode-se arbitrar qualquer forma desejada a um cabo fixo entre dois apoios. Entretanto, pelos elementos possuírem rigidez somente à tração, a estrutura não dispõe de rigidez para um carregamento qualquer; para o caso da Figura 23a, p. ex., a geometria é tal que a estrutura tem rigidez para uma força concentrada cuja direção esteja no intervalo indicado, aplicada no vértice inferior do cabo. Obviamente, seria possível aplicar outros carregamentos, como uma força concentrada em outro ponto (Figura 23b), porém existe a necessidade de que o cabo mude sua geometria de modo a fornecer rigidez para o novo carregamento, indicando uma relação entre forma e forças atuantes.

Figura 23 – Relação entre forma do cabo e carregamento atuante.

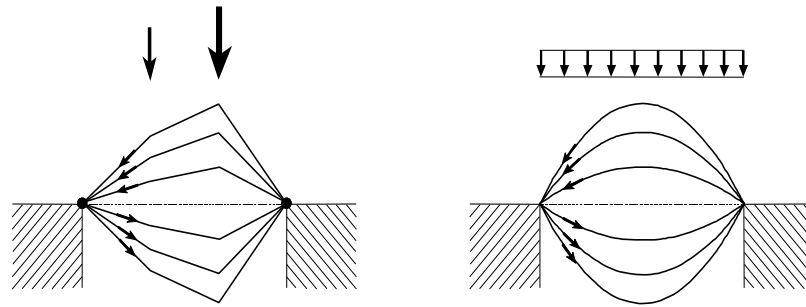


Fonte: elaborada pelo autor.

Matematicamente, em uma análise considerando discretização em elementos finitos, é comum considerar o cabo como vários elementos de treliça concatenados. A matriz de rigidez da estrutura descarregada é claramente singular, indicando ausência de rigidez segundo determinados graus de liberdade.

A forma assumida pelo cabo sujeito a um certo carregamento é denominada forma funicular do carregamento. Um carregamento está associado a uma família de funiculares em que cada membro é particularizado por uma flecha, como mostrado na Figura 24. A diferença entre as funiculares em uma mesma família está na intensidade dos esforços desenvolvidos. As formas acima da linha dos apoios (com flechas negativas) são estados em que a estrutura está sujeita apenas a forças de compressão, situação desejada para os arcos feitos de materiais rígidos, não abordados neste trabalho.

Figura 24 – Famílias de formas funiculares.

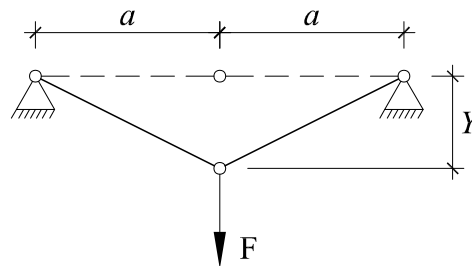


Fonte: Pauletti (2003).

3.4.2 Rigidez elástica e rigidez geométrica

A interação entre forma e rigidez pode ser mais bem entendida por meio da distinção entre rigidez elástica e rigidez geométrica. Para tanto, faz-se uma análise simples do equilíbrio na configuração atual (deslocada) do cabo da Figura 25. Este exemplo é apresentado com maior detalhamento matemático em Pauletti (2003).

Figura 25 – Cabo sujeito a força aplicada nas configurações inicial (linha tracejada) e atual (linha cheia).



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando que os dois trechos do cabo tenham área da seção transversal A , comprimentos inicial l_0 e atual l e material de comportamento linear obedecendo à Lei de Hooke, com módulo de elasticidade E e deformação $\varepsilon = (l - l_0) / l_0$, o esforço normal N em cada elemento vale

$$N = \frac{EA}{l_0} (l - l_0) = \frac{EA}{l_0} (\sqrt{Y^2 + a^2} - l_0). \quad (3.1)$$

A componente de força interna no nó central é dada por

$$F^{int} = 2N \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + a^2}} = 2Y \frac{EA}{l_0} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{Y^2 + a^2}} \right). \quad (3.2)$$

É interessante escrever esta força interna como o produto entre o esforço normal N no elemento e um operador geométrico C , ambos funções da posição atual:

$$F^{int}(Y) = N(Y) C(Y). \quad (3.3)$$

O equilíbrio ocorre quando a força interna determinada pela Equação 3.3 é igual à força externa aplicada, resultando em uma equação não linear para a determinação da posição incógnita Y . Será demonstrado no Capítulo 5 que este tipo de problema pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson, fazendo-se necessário calcular a derivada da força interna em relação à posição. Esta derivada é a rigidez da estrutura na configuração atual, também chamada de rigidez tangente ou matriz Hessiana (H). Para o exemplo analisado,

$$H = \frac{\partial F^{int}}{\partial Y} = C \frac{\partial N}{\partial Y} + N \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (3.4)$$

que também pode ser escrita como

$$H = K_e + K_g, \quad (3.5)$$

sendo K_e a rigidez elástica, dependente da forma da estrutura, e K_g a rigidez geométrica, dependente do esforço normal de tração N atuante.

A parcela elástica da rigidez indica a necessidade de aplicação de forças externas para alterar a intensidade dos esforços internos na estrutura, considerando geometria constante. Por sua vez, a parcela geométrica da rigidez indica a necessidade de aplicação de forças externas para alterar a direção dos esforços internos, considerando que os esforços permaneçam com o mesmo valor. Para estruturas rígidas em pequenos deslocamentos, a rigidez geométrica é considerada nula; nas estruturas tensionadas a rigidez geométrica é preponderante, podendo-se até desprezar a rigidez elástica em alguns casos (PAULETTI, 2003).

Verifica-se a importância de um estado de pré-tensionamento para conferir rigidez às estruturas tensionadas em serviço pelo efeito da rigidez geométrica, seja este estado obtido por forças de protensão intencionais ou devido a outras cargas permanentes atuantes. Em um estado descarregado, a rigidez da estrutura é composta apenas pela parcela elástica, relacionada à forma; caso a geometria correspondente, até aqui tomada como arbitrária, não seja a forma funicular do carregamento em serviço, a estrutura desenvolverá grandes deslocamentos até atingir a funicular. Cumpre destacar que, embora os deslocamentos da estrutura em serviço possam ser pequenos em relação à forma funicular, os carregamentos permanentes atuam inicialmente sobre a estrutura descarregada cuja forma não é necessariamente a funicular, caracterizando o problema como de grandes deslocamentos.

3.4.3 O problema de busca da forma

Pelo fato de as estruturas tensionadas não possuírem rigidez à flexão, a forma da estrutura não é de livre escolha por parte da equipe de projeto. Em outras palavras, se se pretende que um elemento no esquema estrutural seja um cabo ou uma membrana, esse elemento não poderá estar

sujeito à flexão ou compressão; caso esteja, o esquema deve ser alterado ou um elemento rígido deverá ser utilizado.

Assim, mesmo que o aspecto arquitetônico seja definido observando as particularidades das estruturas tensionadas, como o princípio da dupla curvatura, uma descrição precisa da geometria não está disponível inicialmente e deve ser calculada. Esta descrição deve ser tal que, sob o efeito dos carregamentos permanentes (incluindo o pré-tensionamento), sejam atendidos tanto os requisitos arquitetônicos (forma, uso, espaços livres), quanto os estruturais (equilíbrio, rigidez, resistência do material). O procedimento de determinação da configuração da estrutura em equilíbrio sob esses efeitos é denominado *busca da forma*. Devido à forte relação entre arquitetura e estrutura neste sistema construtivo, a interação entre as equipes deve ocorrer desde as primeiras fases do projeto, de modo a garantir que a forma arquitetônica seja estruturalmente possível ao menos de maneira aproximada.

Considerando as mesmas condições de contorno em deslocamentos para a estrutura, existem várias configurações em equilíbrio possíveis, diferenciando-se pelo estado de tensões internas atuantes. Uma vez que a forma pode ser escolhida, um primeiro pensamento é a escolha da *superfície de mínima área* que se enquadre nas condições de contorno especificadas. Além do menor consumo de material, estas superfícies possuem a propriedade de apresentar tensões de tração uniformes sem cisalhamento, possibilitando melhor aproveitamento do material do ponto de vista estrutural. Entretanto, as curvaturas reduzidas dessas superfícies ocasionam menor capacidade resistente da estrutura e podem causar problemas de acúmulo de água de chuva ou neve. Dessa forma, a consideração de uso de uma superfície de mínima área pode ser relaxada para que a estrutura atenda a todos os requisitos de projeto, ou elementos de cabo podem ser utilizados para alterar a geometria. Relações matemáticas que caracterizam as superfícies mínimas são encontradas em Lewis (2018).

Inicialmente, o processo de busca da forma das estruturas tensionadas era realizado por meio da construção de modelos físicos. O pioneiro no uso dessa técnica foi Frei Otto, que utilizava filmes de sabão para representar as superfícies (OTTO; TROSTEL, 1967). Outros materiais passaram a ser utilizados posteriormente, como tecidos e membranas de PVC (PAULETTI, 2003).

Os modelos físicos têm as vantagens de auxiliar na visualização da forma arquitetônica e poderem ser utilizados para determinar os padrões de corte. Entretanto, a falta de precisão e a necessidade de construir um novo modelo quando há uma alteração de projeto tornam o método pouco atrativo. Além disso, não fornecem nenhuma informação sobre o estado de tensão nos elementos.

Os modelos computacionais vêm substituindo os modelos físicos e são bastante eficazes devido a sua praticidade e precisão. Com a tecnologia atual, é comum o uso de programas que dispõem de ferramentas de cálculo estrutural em conjunto com uma visualização gráfica eficiente, permitindo ao projetista simular várias situações com relativa facilidade.

3.4.4 Modelos numéricos de busca da forma

Para entender melhor a etapa de busca da forma utilizando modelagem computacional, é importante identificar quais parâmetros devem ser conhecidos no início do procedimento e quais serão as incógnitas a calcular. Apesar de essa consideração ser diferente de acordo com o método utilizado, conforme a descrição dada por Haber e Abel (1982) é possível estabelecer os seguintes parâmetros principais:

- a) malha inicial;
- b) condições de contorno em deslocamentos;
- c) carregamentos permanentes atuantes (incluindo o pré-tensionamento);
- d) geometria final da superfície;
- e) distribuição interna de tensões.

A discretização da estrutura em uma malha inicial deve ser conhecida no início do processo. Essa discretização envolve, principalmente, a conectividade dos elementos, embora a definição das posições dos nós dessa malha também seja necessária em alguns métodos. Igualmente, as condições de contorno em deslocamentos devem ser conhecidas. É comum considerar uma malha inicial plana e utilizar deslocamentos prescritos em nós chave para dar o aspecto pretendido à estrutura.

Os carregamentos permanentes aplicados, cujo principal é o pré-tensionamento, também são estabelecidos a princípio. Já os parâmetros de geometria final e distribuição interna de tensões normalmente são desconhecidos e calculados no processo. Entretanto, ambos estão relacionados, tendo em vista que uma superfície de mínima área corresponde a um estado de tensões uniforme.

É comum especificar as forças externas de pré-tensionamento dos elementos de membrana diretamente como um estado interno de tensões atuantes. A distribuição de tensões obtida ao final do procedimento pode ser igual ao pré-tensionamento ou não, a depender do método empregado. Para se obter uma superfície de mínima área, é possível considerar um pré-tensionamento uniforme como o único carregamento permanente na estrutura e utilizar estratégias para que essas tensões não se alterem durante o processo. É importante lembrar que a mesma superfície de mínima área é obtida para qualquer nível de tensão arbitrado. Assim, se for verificada a necessidade de alteração do pré-tensionamento durante a análise da estrutura sujeita aos demais carregamentos em serviço, não é preciso realizar novamente a etapa de busca da forma.

Após esta explicação, tem-se o seguinte panorama geral: definem-se uma forma inicial qualquer para a estrutura, as condições de contorno e o carregamento atuante. Por serem definições arbitrárias, provavelmente a estrutura não estará em equilíbrio, e o desbalanceamento entre forças externas e internas induzirá o movimento ou deslocamento até a posição de equilíbrio

estático. Os parâmetros que se deseja calcular são esta posição de equilíbrio e as tensões nos elementos.

Um leitor atento irá observar, com base nos conceitos teóricos apresentados ao início da discussão, que a análise do problema pode resultar em uma matriz de rigidez singular para a estrutura, impedindo a resolução matemática do sistema de equações. Dessa forma, os modelos numéricos de busca da forma devem propor estratégias para eliminar a singularidade da matriz de rigidez e descrever os deslocamentos até a posição de equilíbrio.

A literatura traz uma série de metodologias numéricas para determinação da forma das estruturas tensionadas e ainda uma grande variedade de classificações, tornando a identificação das similaridades e diferenças dos métodos uma tarefa complexa. Na próxima seção, os procedimentos mais tradicionais são apresentados para melhor esclarecer a natureza do problema, sem nenhuma comparação numérica dos métodos.

Na classificação aqui adotada, os métodos serão divididos em dois conjuntos. O primeiro deles envolve utilizar uma rigidez geométrica inicial para a estrutura prescrevendo um estado de forças ou tensões. Dessa forma, a parcela geométrica da rigidez da Equação 3.5 e, conseqüentemente, da rigidez total não serão singulares. O segundo conjunto emprega uma análise dinâmica ou pseudodinâmica; neste caso, a matriz do sistema de equações tem a contribuição de matrizes de massa e amortecimento não singulares além da matriz de rigidez da estrutura. Dentro destes conjuntos, vários modelos são encontrados na literatura com diversas abordagens.

3.4.5 Métodos com rigidez geométrica inicial

A maior parte das estratégias de busca da forma se utiliza de um estado inicial de tensões ou forças prescrito pelo usuário. As maneiras de considerar esse estado de tensões são diversas e dão origem a vários métodos. Os principais são abordados a seguir.

3.4.5.1 Método da densidade de forças

O método da densidade de forças (MDF) foi proposto por Schek (1974) para a busca da forma de redes de cabos. Este foi um dos primeiros métodos numéricos desenvolvidos e deu origem a diversos outros que utilizam a mesma ideia básica, embora alguns tenham escopo mais amplo.

Considere-se uma malha de cabos para a qual se deseja calcular uma geometria em equilíbrio quando sujeita a um certo carregamento. Para este tipo de problema, são conhecidas a

conectividade dos elementos, as condições de contorno em deslocamento e as forças externas atuantes e as incógnitas são as posições nodais. Escrevendo as equações de equilíbrio para o nó i da malha em termos das coordenadas \vec{y} dos nós e das forças normais N_{ij} no segmento de cabo ligando os nós i e j , tem-se:

$$\sum_{j=1}^m N_{ij} \frac{\vec{y}_j - \vec{y}_i}{\|\vec{y}_j - \vec{y}_i\|} + \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (3.6)$$

sendo \vec{F}_i a força externa resultante no nó e m o número de elementos concorrentes no nó. O sistema resultante é não linear segundo as coordenadas e, a princípio, tanto as coordenadas \vec{y} quanto as forças normais N_{ij} são desconhecidas. Uma solução pode ser obtida arbitrando-se, para cada segmento de cabo, o valor de força por unidade de comprimento n_{ij} , denominado *densidade de força*:

$$n_{ij} = \frac{N_{ij}}{\|\vec{y}_j - \vec{y}_i\|}. \quad (3.7)$$

Isso resulta no sistema linear

$$\sum_{j=1}^m n_{ij} (\vec{y}_j - \vec{y}_i) = -\vec{F}_i, \quad (3.8)$$

com 3 equações e 3 incógnitas para cada nó da malha. Assim, conhecidas as posições dos nós fixos e prescrevendo-se a densidade de força para cada elemento, as posições de todos os nós da malha para o carregamento atuante podem ser calculadas.

Caso existam restrições adicionais às posições dos nós, o sistema será não linear e o resultado obtido com a Equação 3.8 pode ser utilizado como uma primeira iteração. Schek (1974) cita como exemplos situações em que a distância entre nós é predeterminada (para o caso deformado ou indeformado) e situações em que a força no elemento é predeterminada.

Schek (1974) ainda demonstra que uma malha de geometria mínima pode ser obtida considerando uma densidade de força unitária em todos os elementos e carregamento nulo. Essa situação é análoga ao caso das membranas, cuja superfície mínima tem a propriedade de estar sujeita a tensões uniformes. A rede de cabos resultante é chamada de *rede geodésica*.

Um dos pontos fortes do método é a possibilidade do sistema resultante ser linear, demandando um custo computacional baixo. Já entre as desvantagens estão as limitações de uso em redes de cabos retilíneos e o fato da densidade de força ser uma grandeza com pouco significado prático para o projetista.

Outras técnicas baseadas no método da densidade de força incluem as apresentadas em Maurin e Motro (1998), Pauletti e Pimenta (2008), Bletzinger e Ramm (1999) e Bonet e Mahaney (2001).

3.4.5.2 Métodos com prescrição de rigidez geométrica inicial

É possível entender a prescrição de uma densidade de força para os elementos como a prescrição de uma rigidez geométrica inicial, o que não fica claro na formulação do método da densidade de forças por não haver a montagem de uma matriz de rigidez. Entretanto, essa relação pode ser obtida a partir de um método proposto por Haber e Abel (1982) e que se mostra como uma generalização do MDF, denominado método da rigidez geométrica assumida. É utilizada uma formulação em elementos finitos, cujo sistema de equações de equilíbrio convém lembrar:

$$\mathbf{K} \cdot \vec{u} = \vec{F}, \quad (3.9)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez, composta das parcelas elástica e geométrica; \vec{u} o vetor de deslocamentos nodais; e \vec{F} o vetor de forças externas. Considerando a matriz constitutiva do material como nula e uma situação em que todos os nós são deslocados para a origem das coordenadas, tem-se $\mathbf{K} = \mathbf{K}_g$ e $\vec{u} = -\vec{y}$. Substituindo na Equação 3.9:

$$\mathbf{K}_g \cdot \vec{y} = -\vec{F}. \quad (3.10)$$

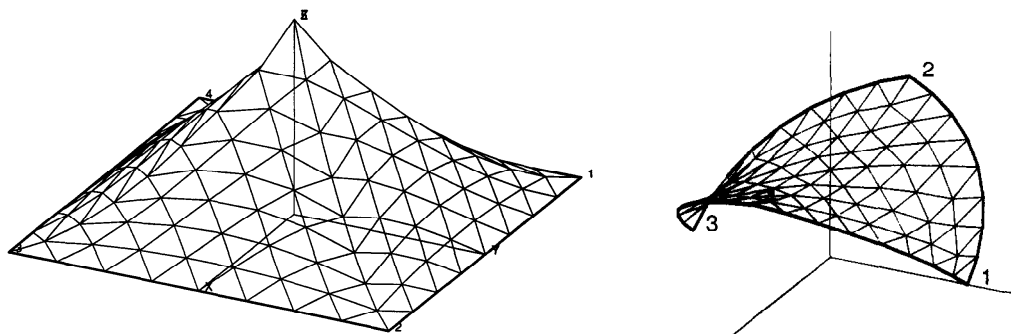
Trata-se de um sistema não linear pela rigidez geométrica depender das posições desconhecidas. Contudo, se a matriz \mathbf{K}_g for prescrita, ou se a rigidez geométrica de cada elemento for prescrita (semelhante a uma prescrição de densidade de forças), o sistema se torna linear, assim como mostrado para o MDF (Equação 3.8).

O princípio de utilizar uma rigidez geométrica inicial está presente em vários métodos. Uma diferença encontrada é a consideração exclusiva da rigidez geométrica, com rigidez elástica nula, ou a consideração de ambas. Na classificação de Veenendaal e Block (2012), são denominados métodos de rigidez geométrica e métodos de matriz de rigidez, respectivamente. As principais técnicas constam no trabalho de Tabarrok e Qin (1992), que apresentam três abordagens diferentes para o problema de busca da forma.

No caso da determinação de superfícies mínimas, a busca da forma parte de uma malha inicial (por simplicidade, usualmente considerada plana), um pré-tensionamento uniforme, considerado diretamente como um estado de tensões internas, e módulo de elasticidade do material muito pequeno, tendendo a zero. São aplicados deslocamentos prescritos em certos nós de maneira a que a estrutura tome o aspecto arquitetônico desejado. Por exemplo, partindo de uma malha plana, a tenda da Figura 26a pode ser obtida pelo levantamento do nó central e a superfície de dupla curvatura da Figura 26b pode ser obtida abaixando-se os nós 1 e 3.

A consideração de um módulo de elasticidade muito pequeno objetiva eliminar a rigidez elástica e utilizar apenas a rigidez geométrica provida pelo campo de tensões especificado. Dessa forma, o deslocamento prescrito dos nós produzirá uma variação desprezível nas tensões e a superfície resultante em equilíbrio continuará em um estado de tensões uniforme como arbitrado inicialmente, correspondendo à superfície mínima desejada.

Figura 26 – Estruturas em membrana em forma de: a) tenda, b) superfície de dupla curvatura.



Fonte: Tabarrok e Qin (1992).

Para a determinação de superfícies não mínimas, a abordagem seguida é semelhante, porém arbitrando um campo inicial de tensões não uniforme. A forma da superfície resultante depende da distribuição inicial de tensões e várias análises podem ser necessárias para que se obtenha uma geometria satisfatória.

A terceira abordagem apresentada por Tabarrok e Qin (1992) difere das outras duas por considerar uma rigidez elástica além da parcela geométrica. Utilizando o módulo de elasticidade real do material e com um estado de tensões iniciais uniformes, os deslocamentos prescritos dos nós são aplicados de forma incremental. Após o primeiro passo, a configuração equilibrada apresenta tensões não uniformes. As tensões elásticas são então removidas e apenas as tensões iniciais são mantidas para resultar em uma superfície mínima. O processo iterativo segue até que os deslocamentos prescritos sejam aplicados totalmente, alcançando uma forma em equilíbrio.

Muitas abordagens propostas em outros trabalhos são similares às apresentadas. Haber e Abel (1982) apresentam outros dois métodos nesse sentido, além do método citado no início dessa seção. Argyris, Angelopoulos e Bichat (1974) usam uma técnica que considera a parcela de rigidez elástica para a análise de redes de cabos.

3.4.6 Métodos de análise dinâmica

O segundo conjunto de métodos para a busca da forma de estruturas tensionadas emprega uma análise dinâmica para resolver o problema de singularidade da matriz de rigidez. Conquanto ainda possa se considerar a rigidez geométrica devido ao pré-tensionamento, estes métodos são válidos mesmo quando o estado de tensões inicial é nulo.

Considerando uma análise não linear geométrica baseada em posições e utilizando o método de integração no tempo de Newmark, que será mais bem detalhado no Capítulo 5, o sistema de equações de movimento pode ser escrito apenas com a variação de posição $\Delta\vec{Y}$ como

incógnita:

$$\left(\mathbf{H} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \right) \Delta \vec{Y} = \vec{F}, \quad (3.11)$$

sendo \mathbf{H} a matriz Hessiana ou rigidez tangente, \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, que pode ser tomada como combinação linear das duas anteriores, \vec{F} é um vetor de forças, γ e β são parâmetros do integrador temporal e Δt é o passo de tempo utilizado. Relação semelhante pode ser obtida para o caso de análise linear em pequenos deslocamentos ou para outras técnicas de solução do problema dinâmico.

Facilmente se observa que, mesmo que a matriz Hessiana seja singular, o sistema tem solução se a matriz de massa for não singular. Dessa forma, resolvendo o sistema obtém-se a posição dos nós da estrutura em equilíbrio estático, após o amortecimento.

A técnica mais comum que adota essa estratégia é a relaxação dinâmica, que foi o método de busca da forma utilizado neste trabalho. Um método alternativo é o uso de uma análise iterativa com matriz de massa decrescente.

3.4.6.1 Método da relaxação dinâmica

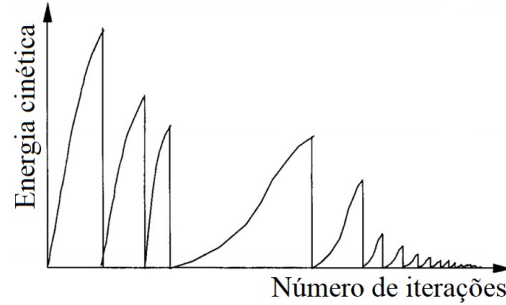
Esse método foi proposto inicialmente por Day (1965), porém com grandes contribuições posteriores de Barnes (1977, 1988, 1999). O trabalho de Lewis (2018) também descreve o procedimento.

Assim como no caso dos métodos de rigidez geométrica, o processo de busca da forma pelo método da relaxação dinâmica parte de uma malha inicial com condições de contorno e carregamentos conhecidos para calcular a geometria em equilíbrio. Entretanto, o problema não é mais tido como estático e realiza-se uma análise dinâmica com um processo de marcha no tempo para avaliar o movimento da estrutura. Esse movimento é considerado amortecido e, após certo intervalo de tempo, a estrutura chegará à posição de equilíbrio estático. Uma vez que se deseja apenas a posição estacionária e não a descrição exata do movimento ao longo do tempo, os parâmetros de massa, amortecimento e intervalos de tempo podem ser fictícios, normalmente definidos de modo a facilitar a convergência numérica.

Originalmente, o método utiliza o amortecimento viscoso, com convergência mais rápida com coeficientes de amortecimento próximos do valor crítico (BARNES, 1988). Um procedimento alternativo, proposto por Cundall (1976 apud BARNES, 1988), utiliza o chamado *amortecimento cinético*. Nesse processo, calcula-se a energia cinética do sistema com o passar do tempo considerando movimento não amortecido. Quando há um pico local na energia, é atribuído valor nulo a todas as componentes de velocidade e o movimento é reiniciado da posição corrente. Os próximos picos de energia tem valor decrescente e o procedimento segue até que a

energia de todos os modos de vibração da estrutura tenha sido dissipada, obtendo a posição de equilíbrio. A Figura 27 traz um exemplo típico da variação da energia com o tempo para esse processo.

Figura 27 – Energia cinética em função do tempo no processo de amortecimento cinético.



Fonte: Lewis (2018).

Para o uso do método em redes de cabos, a massa e a rigidez dos elementos são consideradas concentradas nos nós, obtendo-se matrizes diagonais que podem ser tratadas como vetores, simplificando o cálculo. Assim, a equação de movimento do sistema é semelhante à equação clássica obtida para um grau de liberdade:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F^{ext}, \quad (3.12)$$

sendo u o deslocamento, \dot{u} a velocidade, \ddot{u} a aceleração e F^{ext} a força externa aplicada.

É usual escrever a equação de movimento para o método na forma de diferenças finitas centrais, com a velocidade e a aceleração no passo de tempo n expressas como

$$\dot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} + \dot{u}_{n-1/2}}{2} \quad \text{e} \quad \ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} - \dot{u}_{n-1/2}}{\Delta t}. \quad (3.13)$$

Substituindo na Equação 3.12 e considerando o caso de amortecimento cinético ($C = 0$), a velocidade no meio do passo de tempo seguinte ($n + 1/2$) é dada por

$$\dot{u}_{n+1/2} = \frac{(F^{ext} - F^{int}) \Delta t}{M} + \dot{u}_{n-1/2}. \quad (3.14)$$

sendo $F^{int} = K_n u_n$. Com essa velocidade, obtém-se o deslocamento no passo de tempo seguinte:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_{n+1/2} \Delta t. \quad (3.15)$$

O cálculo das forças internas em um nó pode ser feito diretamente somando-se, para cada direção, as componentes das forças de tração T de cada cabo conectado ao nó. A tração é obtida como

$$T = T^{pt} + \frac{EA}{L^0} \Delta l, \quad (3.16)$$

sendo EA/L^0 a rigidez elástica, Δl a deformação do cabo e T^{pt} a força de pré-tensionamento imposta.

O procedimento segue com a aplicação iterativa das Equações 3.14 e 3.15 até a convergência. Quando se calcula diretamente a força interna F^{int} , prescinde-se do cálculo da rigidez K , bastando definir os parâmetros de massa e tempo para o uso das equações. Por simplicidade, adota-se $\Delta t = 1$. O coeficiente de massa M para um nó, igual para as 3 direções, é dado por

$$M = \frac{K_{max} \Delta t^2}{2}. \quad (3.17)$$

O termo K_{max} é a rigidez máxima possível para o nó, que ocorreria caso todos os cabos conectados ao nó estivessem orientados na mesma direção:

$$K_{max} = \sum \left(\frac{EA}{L^0} + \frac{T}{L} \right)_m, \quad (3.18)$$

com a soma realizada para os m cabos conectados ao nó.

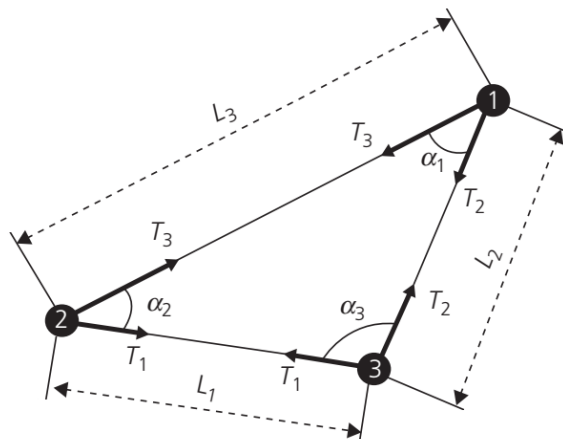
Na busca da forma de redes geodésicas, com todos os cabos sujeitos à mesma tensão (semelhante à superfície mínima), as forças externas são tomadas como zero e apenas um pré-tensionamento T^{pt} constante é considerado na Equação 3.16. A mesma configuração é obtida para qualquer nível de tração imposto.

Em relação ao uso da relaxação dinâmica em estruturas de membrana, o estado bidimensional de tensões em um elemento triangular linear (3 nós) pode ser substituído por três forças equivalentes atuando segundo os lados do triângulo, conforme indicado na Figura 28. Dessa forma, o elemento de membrana é considerado como um conjunto de 3 cabos e o procedimento de cálculo é igual ao descrito anteriormente. Para um pré-tensionamento uniforme σ^{pt} , as forças de tração são calculadas por

$$T_i^{pt} = \frac{\sigma^{pt} L_i}{2 \operatorname{tg} \alpha_i}, \quad (3.19)$$

sendo $i = 1, 2, 3$ o lado do triângulo.

Figura 28 – Consideração do elemento triangular de membrana como três forças atuando segundo os lados do triângulo.



Fonte: Lewis (2018).

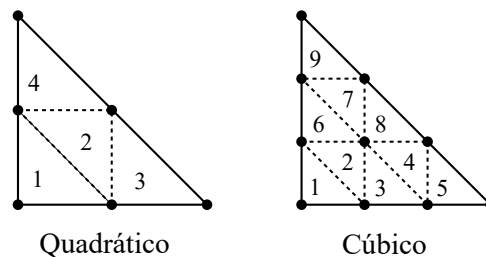
Para se obter uma superfície mínima com tensão uniforme, considera-se apenas a rigidez geométrica provida pelo pré-tensionamento. Entretanto, é possível considerar também a rigidez elástica na busca da forma da membrana. Embora o estado de tensões resultante possa guardar uma pequena diferença para o pré-tensionamento uniforme estipulado, a consideração da rigidez elástica pode diminuir a distorção dos elementos da malha no processo e obter uma malha final mais adequada à análise numérica posterior. Conforme Han e Lee (2003), incluindo a rigidez elástica, a rigidez é calculada como

$$K = \sum \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \frac{t}{4A^{el}} + \frac{T^{pt}}{L} \right)_m \quad (3.20)$$

sendo E e ν o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, t é a espessura da membrana e A^{el} é a área do elemento triangular. Para cada elemento finito m , a parcela de rigidez elástica é somada aos graus de liberdade dos três nós e a rigidez geométrica é somada de acordo com as forças e nós indicados na Figura 28.

No caso de busca da forma com elementos de membrana de ordem superior (quadrático ou cúbico), duas estratégias simplificadas foram adotadas neste trabalho. A primeira consiste em dividir os elementos em subelementos de 3 nós e considerá-los como lineares. Assim, como mostrado na Figura 29, os elementos quadráticos e cúbicos são substituídos por 4 e 9 subelementos lineares, respectivamente.

Figura 29 – Divisão de elementos de membrana de alta ordem em subelementos lineares.



Fonte: elaborada pelo autor.

A segunda estratégia é considerar os elementos como lineares durante a fase de busca da forma. Assim, em um primeiro momento, apenas os nós dos vértices dos elementos triangulares são considerados e, após a determinação da malha, a posição dos demais nós é calculada de modo a haver uma distribuição equidistante aos vértices. A análise do efeito do carregamento em serviço é, então, realizada considerando o elemento com o grau de aproximação desejado.

Em resumo, as etapas do método (quando utilizado no problema de busca da forma) são:

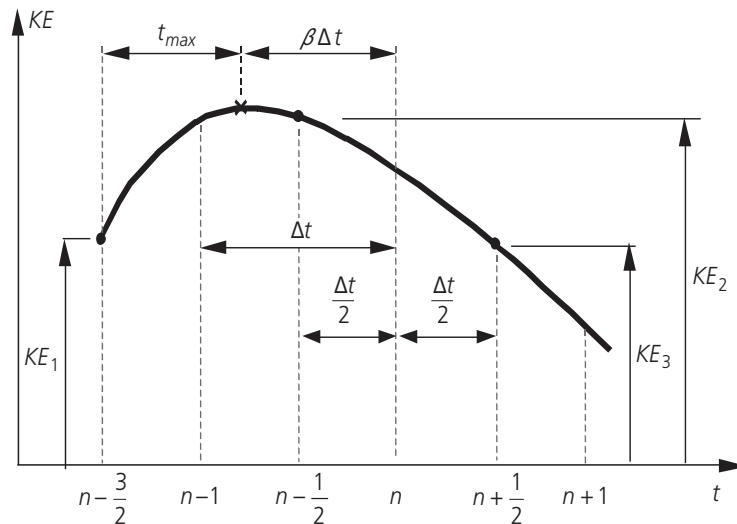
- 1) Leitura dos dados de entrada: malha inicial, deslocamentos prescritos, cargas aplicadas, pré-tensionamento considerado;
- 2) Calcula-se a matriz de massa (Equações 3.17 e 3.18 ou 3.20);

- 3) Calcula-se a velocidade $\dot{u}_{-1/2}$ pela Equação 3.14 considerando $\dot{u}_{1/2} = -\dot{u}_{-1/2}$;
- 4) Aplica-se, iterativamente, as Equações 3.16 ou 3.19 para o cálculo das forças internas, a Equação 3.14 para o cálculo da velocidade e a Equação 3.15 para o cálculo do deslocamento em cada passo de tempo;
- 5) Quando da ocorrência de um pico de energia cinética, o vetor de velocidades é zerado e corrige-se o vetor de deslocamentos, de modo a dissipar a energia do sistema;
- 6) O processo iterativo segue e admite-se a convergência quando os deslocamentos e/ou a energia cinética são menores que uma tolerância definida pelo usuário.

A localização do pico de energia cinética e correção dos deslocamentos (etapa 5 acima) pode ser realizada considerando variação quadrática da energia cinética do sistema com o tempo. Um pico é detectado quando ocorre uma diminuição da energia, como ilustrado na Figura 30 do passo n para o $n + 1$. Recorda-se que, no método das diferenças finitas centrais, o passo de tempo é representado pelo instante médio. Considerando a parábola que passa pelos três pontos de energia KE_1 , KE_2 e KE_3 , é possível determinar a distância $\beta\Delta t$ do passo n até o pico. A correção de deslocamentos é feita por:

$$u_{pico} = u_n - \beta\Delta t \cdot \dot{u}_{n-1/2}. \quad (3.21)$$

Figura 30 – Variação quadrática da energia cinética KE com o tempo e determinação do pico.



Fonte: Lewis (2018).

3.4.6.2 Análise iterativa com matriz de massa decrescente

Uma estratégia alternativa é o uso de uma análise dinâmica modificada para a descrição do movimento da estrutura. Essa é uma técnica bastante simples e foi utilizada em estruturas de cabos por Silva (2020), Silva e Coda (2019) e Coda, Silva e Paccola (2020).

Nessa análise, a matriz de massa (real ou fictícia) é somada à matriz Hessiana, porém com valor decrescente a cada iteração da resolução do problema não linear. O sistema de equações resultante toma a forma

$$\left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \frac{1}{ite} \right) \Delta \vec{Y} = \vec{F}, \quad (3.22)$$

sendo β um parâmetro arbitrário, considerado aqui para manter a forma da equação obtida com o método de Newmark, Δt um passo de tempo fictício e ite o número da iteração. Portanto, na primeira iteração, a singularidade da matriz Hessiana é eliminada pela matriz de massa; conforme o processo continua, a parcela de massa vai diminuindo, porém a Hessiana vai deixando de ser singular pelo aumento da rigidez geométrica da estrutura, mantendo o bom condicionamento do sistema de equações. Após a convergência segundo a tolerância especificada, o processo iterativo é reiniciado retirando a matriz de massa e mantendo apenas a matriz Hessiana para obter a posição de equilíbrio da estrutura. Normalmente, poucas iterações são necessárias nesta segunda etapa. Nessa técnica pode-se considerar ou não a parcela elástica da matriz Hessiana, buscando-se ou não a superfície mínima.

3.5 Exemplos de validação: busca da forma

Nesta seção, apresentam-se alguns exemplos numéricos com o objetivo de validar a rotina de busca da forma implementada computacionalmente, utilizando o método da relaxação dinâmica com amortecimento cinético.

3.5.1 Catenoide

Inicialmente, avaliou-se o exemplo de uma superfície de membrana em formato de catenoide. Esse é um problema clássico de busca da forma pelo fato de o catenoide ser uma das poucas superfícies mínimas que possui expressão analítica.

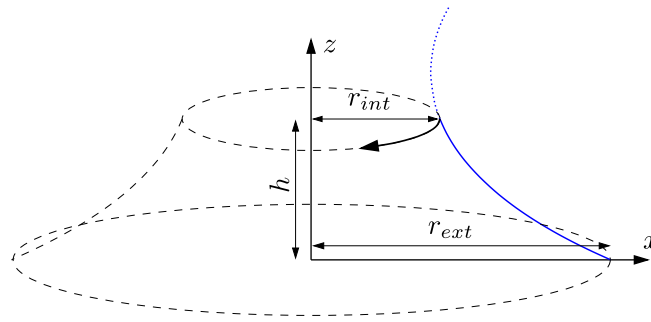
O catenoide é uma superfície obtida pela revolução de uma catenária, conforme mostrado na Figura 31. A equação da curva no plano xz é dada por

$$z = -a \operatorname{acosh} \frac{x}{a} + b, \quad (3.23)$$

com as constantes a e b calculadas em função de r_{ext} , r_{int} e h .

Para o exemplo estudado, considerou-se $r_{ext} = 10$, $r_{int} = 4$ e $h = 6$. A malha adotada é composta de 800 elementos finitos triangulares de aproximação linear, apresentada na Figura 32. A tolerância no processo iterativo foi definida como $tol = \|\vec{u}\|/\|\vec{X}\| = 10^{-6}$, sendo \vec{u} o vetor

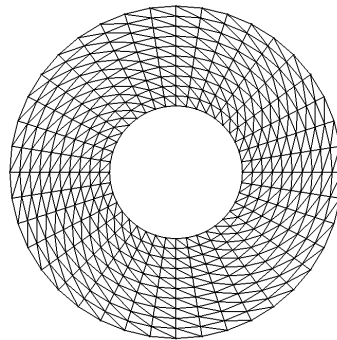
Figura 31 – Catenoide obtido pela revolução da catenária (curva azul) ao redor do eixo z.



Fonte: elaborada pelo autor.

com os deslocamentos nodais a cada passo (Equação 3.15) e \vec{X} o vetor com as posições nodais iniciais.

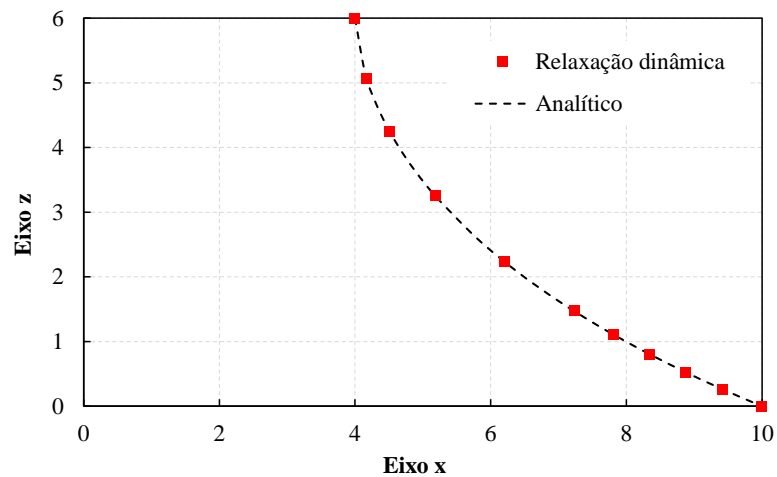
Figura 32 – Malha utilizada para a busca da forma do catenoide.



Fonte: elaborada pelo autor.

As posições obtidas com a relaxação dinâmica e os valores analíticos de referência são comparados na Figura 33. Observa-se perfeita concordância entre os dados.

Figura 33 – Perfil do catenoide no plano xz obtido com a rotina de relaxação dinâmica e valores analíticos.

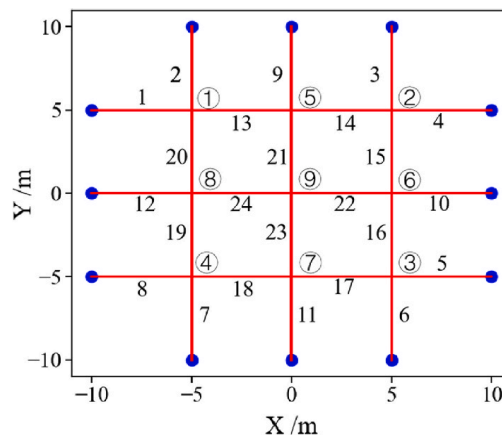


Fonte: elaborada pelo autor.

3.5.2 Rede de cabos tridimensional

Para verificar o desempenho da rotina implementada considerando elementos de cabo, analisa-se o caso de uma rede de cabos no espaço tridimensional. Este exemplo foi apresentado por Li, Xue e Liu (2022) e considera uma rede em forma de sela com a posição inicial dos nós seguindo a superfície do parabolóide hiperbólico de equação $z = (x^2 - y^2)/50$. A projeção no plano horizontal da estrutura é mostrada na Figura 34.

Figura 34 – Projeção horizontal da rede de cabos analisada.



Fonte: Li, Xue e Liu (2022).

Embora o parabolóide hiperbólico seja uma superfície de dupla curvatura, ele não corresponde a uma superfície mínima. Dessa forma, sob o efeito de um pré-tensionamento uniforme, a estrutura não estará em equilíbrio e a configuração mínima (rede geodésica) deve ser determinada. Essa configuração independe do valor de pré-tensionamento e das propriedades dos cabos, desde que sejam constantes para toda a estrutura.

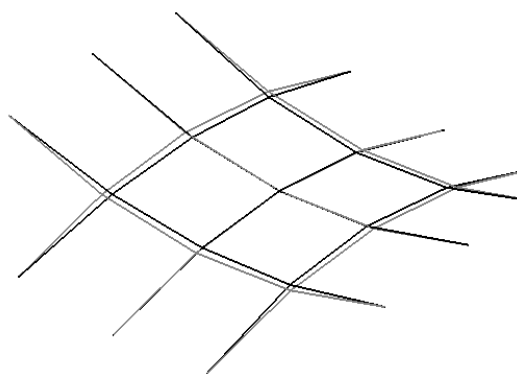
A configuração da rede de cabos após a etapa de busca da forma é mostrada na Figura 35. Devido à simetria, as posições dos nós 1, 5, 8 e 9 já definem totalmente a estrutura. Os resultados obtidos com a rotina de relaxação dinâmica e os de Li, Xue e Liu (2022) são indicados na Tabela 1. Verifica-se que há bastante proximidade entre os valores.

Tabela 1 – Posições nodais calculadas na busca da forma da rede de cabos.

Nó	Li, Xue e Liu (2022)			Presente trabalho		
	x	y	z	x	y	z
1	-4,72	4,72	0	-4,711	4,711	0
5	0	4,64	-0,44	0	4,627	-0,438
8	-4,64	0	0,44	-4,627	0	0,438
9	0	0	0	0	0	0

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 35 – Configurações no processo de busca da forma: inicial (cinza) e final (preta).



Fonte: elaborada pelo autor.

4 ASPECTOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS NÃO LINEAR

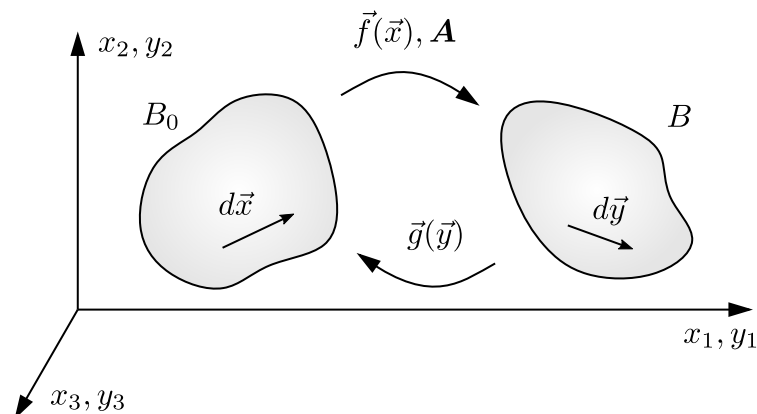
Neste capítulo são apresentados alguns aspectos da mecânica dos sólidos não linear que formam a base teórica do método computacional utilizado na pesquisa. Os conceitos são expostos de maneira sucinta, objetivando o entendimento da sistemática adotada pelo método dos elementos finitos posicional, e não pretendem ser exaustivos. Uma abordagem com mais detalhes pode ser encontrada em Holzapfel (2000), Bonet e Wood (2008), Ogden (1997) e Crisfield (1991).

Os desenvolvimentos seguintes são baseados em Coda (2018) e tem seu enfoque na descrição lagrangiana do problema mecânico contemplando a não linearidade geométrica e posterior análise de equilíbrio por meio da variação da energia mecânica total.

4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Sob o efeito de ações externas, um sólido deformável em equilíbrio estático ou em movimento sofre uma mudança de configuração. Na Figura 36, um corpo passa de uma configuração inicial B^0 , descrita por coordenadas \vec{x} em relação a uma origem, para uma configuração atual B , descrita por coordenadas \vec{y} em relação à mesma origem. A função vetorial \vec{f} é denominada *função mudança de configuração* e define as posições em B a partir das posições em B^0 , ou seja, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Figura 36 – Mudança de configuração.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez que essa função tem como referência (domínio) a configuração inicial do corpo, a descrição do problema é chamada de lagrangiana ou material. Também é possível uma descrição com base na configuração atual do corpo, dita euleriana ou espacial, por meio de uma função $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$. Como já mencionado, será dada ênfase à descrição lagrangiana por ser esta a utilizada na formulação do método dos elementos finitos posicional.

Um vetor infinitesimal qualquer $d\vec{x}$, na configuração inicial, corresponde a um vetor $d\vec{y}$ após a mudança de configuração. A relação entre estes vetores pode ser obtida por

$$d\vec{y} = \nabla \vec{f} \cdot d\vec{x} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}. \quad (4.1)$$

O tensor de segunda ordem \mathbf{A} indica o gradiente da função mudança de configuração:

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \quad (4.2)$$

4.1.1 Deformação de Green-Lagrange

Tendo em vista que a formulação adotada tem caráter não linear por ser geometricamente exata, faz-se necessário o uso de uma medida de deformação objetiva, ou seja, que não registre deformações quando o corpo está sujeito apenas a movimentos de corpo rígido, tanto de translação quanto rotação, e de intensidade finita (não infinitesimal).

Uma medida de deformação objetiva lagrangiana pode ser obtida a partir do gradiente da função mudança de configuração. A deformação de Green-Lagrange (ou apenas de Green) \mathbf{E} pode ser definida como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.3)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade de ordem 2 e \mathbf{C} o tensor alongamento de Cauchy-Green à direita, escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Substituindo-se a Equação 4.4 na Equação 4.3, é possível escrever a deformação de Green diretamente a partir de \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (4.5)$$

É interessante observar que, para o caso unidimensional de uma barra de comprimento inicial l_0 e comprimento atual l , a expressão para a deformação de Green toma a forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \right), \quad (4.6)$$

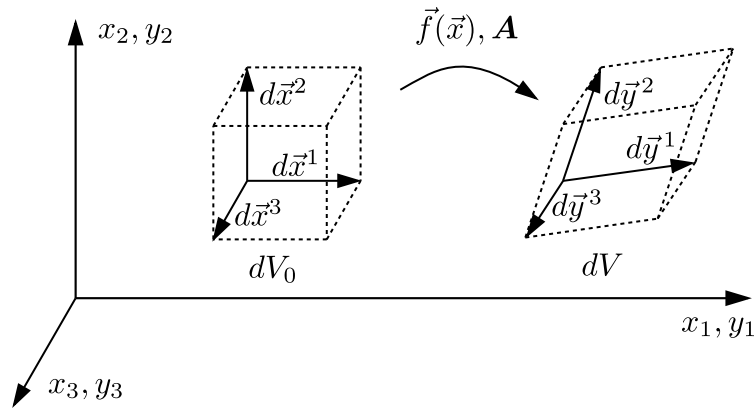
evidenciando o aspecto não linear da medida e também o referencial lagrangiano.

4.1.2 Mudança de volume na mudança de configuração

O equilíbrio de um sólido sob o efeito de ações externas se dá na configuração deformada (atual). Para descrever este equilíbrio de forma lagrangiana, é necessário verificar quais as relações entre volume inicial e atual para calcular as integrais no volume do sólido, e também as relações entre área inicial e atual para calcular as integrais de superfície.

Seja o elemento infinitesimal de volume mostrado na Figura 37 nas configurações inicial dV_0 e atual dV , definido por meio de vetores infinitesimais.

Figura 37 – Mudança de volume na mudança de configuração.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os volumes infinitesimais podem ser calculados da seguinte maneira:

$$dV_0 = (d\vec{x}^1 \times d\vec{x}^2) \cdot d\vec{x}^3 \quad \text{e} \quad dV = (d\vec{y}^1 \times d\vec{y}^2) \cdot d\vec{y}^3. \quad (4.7)$$

É possível demonstrar a seguinte relação entre os dois volumes:

$$\frac{dV}{dV_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A}) = J, \quad (4.8)$$

ou seja, essa relação é igual ao jacobiano da transformação J , que é o valor do determinante do tensor \mathbf{A} . Para a mudança do domínio de integração do volume atual para o volume inicial, convém reescrever esta equação na forma

$$dV = J dV_0. \quad (4.9)$$

4.1.3 Mudança de área na mudança de configuração

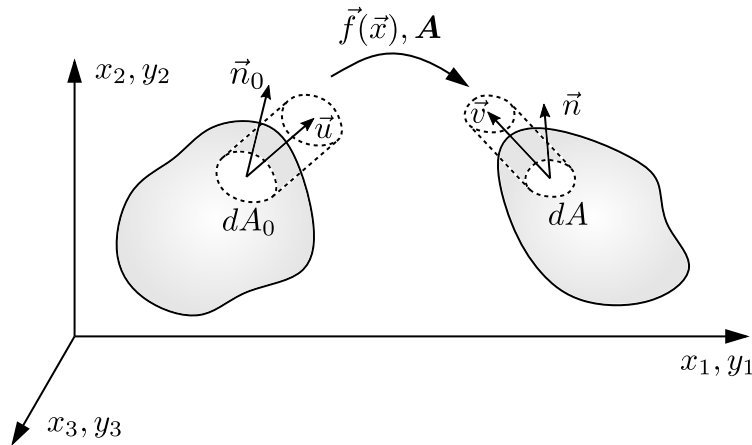
A partir da relação entre volumes, pode-se calcular a relação entre áreas na mudança de configuração do sólido. Na Figura 38 é indicado um elemento de área dA_0 na configuração inicial e seu vetor normal unitário \vec{n}_0 . Tomando-se um vetor \vec{u} qualquer, define-se o volume de um cilindro associado a essa área dA_0 :

$$dV_0 = \vec{u}^t \cdot \vec{n}_0 dA_0, \quad (4.10)$$

em que o produto interno entre os vetores é igual à altura do cilindro. A mudança de configuração transforma \vec{u} , \vec{n}_0 , dA_0 e dV_0 em \vec{v} , \vec{n} , dA e dV , respectivamente. O novo volume pode ser calculado como

$$dV = \vec{v}^t \cdot \vec{n} dA. \quad (4.11)$$

Figura 38 – Mudança de área na mudança de configuração.



Fonte: elaborada pelo autor.

Substituindo as Equações 4.10 e 4.11 na Equação 4.9, sabendo que $\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{u}$ e que este vetor \vec{u} é arbitrário, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{v}^t \cdot \vec{n} dA &= J \vec{u}^t \cdot \vec{n}_0 dA_0 \\ \vec{u}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{n} dA &= J \vec{u}^t \cdot \vec{n}_0 dA_0 \\ \vec{n} dA &= J \mathbf{A}^{-t} \cdot \vec{n}_0 dA_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

A Equação 4.12 é chamada de Fórmula de Nanson e relaciona as áreas atual dA e inicial dA_0 . Nota-se a necessidade de indicar um vetor normal à área infinitesimal para a completa definição da grandeza.

4.1.4 Conservação da massa na mudança de configuração

Nas aplicações estudadas neste trabalho não serão consideradas situações em que haja alteração da massa do sólido. Dessa forma, apesar da existência de mudança no volume e na área do sólido após a mudança de configuração, a massa permanece constante.

Uma relação importante pode ser obtida a partir dessa consideração. Quando um corpo se deforma devido às ações atuantes, a densidade varia mesmo que a massa permaneça constante, pois o volume varia. Dessa forma, a massa pode ser calculada em qualquer instante t como

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV, \quad (4.13)$$

em que o índice 0 denota o instante inicial da análise e t indica que tanto a massa específica do corpo quanto o volume variam com o tempo.

Substituindo a relação entre os volumes infinitesimais no terceiro termo da Equação 4.13, tem-se:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0. \quad (4.14)$$

Portanto:

$$\rho_0 = \rho(t) J(t). \quad (4.15)$$

Considere agora que seja necessário calcular uma expressão no seguinte formato:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV, \quad (4.16)$$

ou seja, a derivada no tempo da integral do produto de duas funções, sendo uma delas a função massa específica ρ e a outra uma função f qualquer, com essa integral sendo realizada no volume atual do sólido. Transformando o domínio da integral do volume atual para o inicial e utilizando a Equação 4.15, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho(t) f(t) J(t) dV_0 = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0, \quad (4.17)$$

o que permite a aplicação do operador derivada apenas sobre $f(t)$, pois ρ_0 é constante:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{df(t)}{dt} dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \dot{f}(t) dV_0. \quad (4.18)$$

Voltando ao domínio de integração original, tem-se:

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{f}(t) dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) J(t) \dot{f}(t) \frac{dV}{J(t)} = \int_{V(t)} \rho(t) \dot{f}(t) dV. \quad (4.19)$$

Então, finalmente, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV = \int_{V(t)} \rho(t) \dot{f}(t) dV, \quad (4.20)$$

que demonstra que, devido ao princípio da conservação da massa, o cálculo da expressão pode ser feito aplicando o operador derivada somente sobre a função $f(t)$ no núcleo da integral. Essa relação será particularmente importante em deduções referentes à análise de equilíbrio do sólido mostradas adiante no texto.

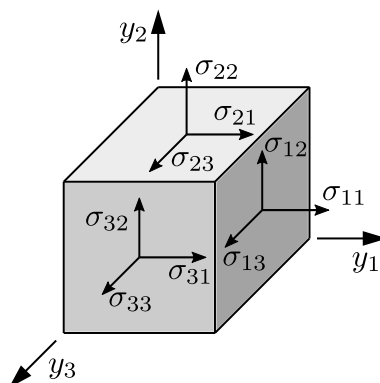
4.2 Equilíbrio e energia do sistema mecânico

O equilíbrio de um sistema mecânico pode ser analisado sob a ótica das forças atuantes, utilizando a Segunda Lei de Newton, mas também sob a ótica da energia do sistema, utilizando, p. ex., o princípio da estacionariedade da energia mecânica. Nos tópicos seguintes, são apresentadas as bases da formulação do equilíbrio utilizada no presente trabalho, prosseguindo do equilíbrio em forças na descrição euleriana para a lagrangiana e, por fim, para a estacionariedade da energia.

4.2.1 Equilíbrio no referencial euleriano

Seja um corpo em equilíbrio (estático ou dinâmico) em sua configuração atual. Analisando um elemento cúbico de volume infinitesimal do corpo, o equilíbrio é mantido por forças atuando de modo distribuído nas faces, representadas como as componentes de tensão mostradas na Figura 39.

Figura 39 – Componentes de tensão.



Fonte: elaborada pelo autor.

Essas tensões são denominadas tensões de Cauchy e são indicadas por σ_{ij} , sendo i a direção normal ao plano de atuação e j a direção da componente. Essas tensões tem significado físico por serem aquelas que efetivamente mantêm a integridade do material na configuração deformada. Ao longo do texto, serão apresentadas outras medidas de tensão sem significado físico, porém de utilidade para a análise segundo a formulação adotada.

Pode-se organizar essas componentes de tensão de modo a formar um tensor de ordem 2 que indica o estado de tensões no elemento infinitesimal, o tensor das tensões de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Considerando um corpo sujeito a forças de volume \vec{b} e em um estado geral de movimento, podendo apresentar aceleração, o equilíbrio avaliado pela Segunda Lei de Newton recai na expressão

$$\text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^t) + \vec{b} = \rho \vec{y}, \quad (4.22)$$

sendo ρ a massa específica do material e o índice y indicando que o operador divergente atua segundo as coordenadas atuais. A Equação 4.22 é chamada de equação de equilíbrio local, por ser escrita para um elemento infinitesimal. Analisando o equilíbrio de momentos no elemento, verifica-se que o tensor das tensões de Cauchy é simétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t. \quad (4.23)$$

A equação de equilíbrio global do corpo pode ser obtida integrando-se a Equação 4.22 no volume:

$$\int_V \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^t) dV + \int_V \vec{b} dV = \int_V \rho \vec{y} dV. \quad (4.24)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss, o primeiro termo pode ser calculado como uma integral na área da superfície do corpo, resultando em

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n} dA + \int_V \vec{b} dV = \int_V \rho \vec{y} dV. \quad (4.25)$$

4.2.2 Equilíbrio no referencial lagrangiano

Para analisar o equilíbrio segundo o referencial lagrangiano (inicial), substituem-se na Equação 4.25 as fórmulas de variação de volume e área (Equações 4.9 e 4.12):

$$\int_{A_0} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot (J\mathbf{A}^{-t} \cdot \vec{n}^0) dA_0 + \int_{V_0} J\vec{b} dV_0 = \int_{V_0} J\rho \vec{y} dV_0. \quad (4.26)$$

Pela conservação de massa, sabe-se que $J\rho = \rho_0$. De maneira análoga, pode-se considerar $J\vec{b} = \vec{b}^0$ como uma força de volume na configuração inicial. Além disso, o termo que acompanha \vec{n}^0 na primeira integral tem unidade de tensão e pode ser escrito como

$$\mathbf{P}^t = J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t}. \quad (4.27)$$

O tensor \mathbf{P} é denominado tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie e, embora não tenha significado físico direto, pode ser associado a uma força na configuração atual distribuída sobre a área indeformada (BONET; WOOD, 2008). Observa-se que este tensor não é simétrico.

Dessa forma, escreve-se a equação de equilíbrio global no referencial lagrangiano:

$$\int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \vec{n}^0 dA_0 + \int_{V_0} \vec{b}^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} dV_0. \quad (4.28)$$

Utilizando novamente o teorema da divergência de Gauss na integral sobre a área do primeiro termo da Equação 4.28 e sabendo que o volume de integração é arbitrário, obtém-se a equação de equilíbrio local no referencial lagrangiano:

$$\text{div}_x (\mathbf{P}^t) + \vec{b}^0 = \rho_0 \vec{y}, \quad (4.29)$$

no qual se utilizou o índice x para indicar que o operador divergente atua segundo as coordenadas iniciais.

4.2.3 Equilíbrio no referencial lagrangiano por meio da variação da energia mecânica

A formulação do método dos elementos finitos posicional descreve o equilíbrio com base no princípio da estacionariedade da energia mecânica, que estabelece que a primeira variação do funcional da energia mecânica total Π deve ser nula. Esse funcional pode ser escrito como

$$\Pi = P + U + K, \quad (4.30)$$

sendo P a energia potencial das forças externas, U a energia de deformação e K a energia cinética. Para o sistema em equilíbrio:

$$\delta\Pi = \delta P + \delta U + \delta K = 0. \quad (4.31)$$

É possível se demonstrar a equivalência entre a equação de equilíbrio (Equação 4.29) e o princípio da estacionariedade (Equação 4.31). Para tanto, uma forma é analisar a variação do

funcional de energia a partir de uma variação de posição nos pontos do sólido, integrando-se o resultado obtido no volume. Reescrevendo a equação de equilíbrio na forma

$$\rho_0 \vec{y} - \text{div}_x (\mathbf{P}^t) - \vec{b}^0 = \vec{0} = \vec{G}, \quad (4.32)$$

sendo \vec{G} um vetor de força por unidade de volume, tem-se, em notação indicial:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} G_i \delta y_i dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_i dV_0 = 0. \quad (4.33)$$

As integrais da Equação 4.33 correspondem às parcelas de variação de energia da Equação 4.31, como será mostrado nas seções seguintes. De forma preliminar, convém reescrever a última integral com o auxílio de um gradiente, de acordo com a expressão:

$$(P_{ji} \delta y_i)_{,j} = P_{ji,j} \delta y_i + P_{ji} \delta y_{i,j} \quad \therefore \quad P_{ji,j} \delta y_i = (P_{ji} \delta y_i)_{,j} - P_{ji} \delta y_{i,j}. \quad (4.34)$$

Substituindo na Equação 4.33:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} (P_{ji} \delta y_i)_{,j} dV_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = 0. \quad (4.35)$$

A terceira e a quarta integrais ainda podem ser escritas como

$$\int_{V_0} (P_{ji} \delta y_i)_{,j} dV_0 = \int_{A_0} P_{ji} \delta y_i n_j^0 dA_0 = \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0, \quad \text{e} \quad (4.36a)$$

$$\int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0. \quad (4.36b)$$

sendo $\vec{p}^0 = \mathbf{P}^t \cdot \vec{n}^0$ uma força de superfície atuando segundo a configuração inicial. Fazendo essas alterações, chega-se à expressão

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = 0. \quad (4.37)$$

4.2.3.1 Variação da energia cinética

A energia cinética do sistema mecânico e sua variação podem ser calculadas da seguinte forma:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV, \quad \text{e} \quad (4.38)$$

$$\delta K = \frac{dK}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{y}_i \dot{y}_i J dV_0 \right) dt. \quad (4.39)$$

Fazendo $\rho J = \rho_0$ e aplicando a Equação 4.20, proveniente da conservação da massa, tem-se:

$$\delta K = \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \frac{d}{dt} (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV_0 = \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 (2\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0, \quad (4.40)$$

com a última passagem sendo realizada fazendo $\dot{y}_i dt = \delta y_i$. Percebe-se, assim, que o primeiro termo da Equação 4.37 corresponde à parcela de variação da energia cinética do sólido.

4.2.3.2 Variação da energia potencial das forças externas

Considerando um sólido sob o qual atuam forças externas distribuídas no volume \vec{b}^0 e distribuídas na superfície \vec{p}^0 , no referencial lagrangiano, a energia potencial em relação à origem do sistema de coordenadas é escrita como

$$P = - \int_{V_0} b_i^0 y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 y_i dA_0. \quad (4.41)$$

Logo, a variação dessa energia vale

$$\delta P = - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0, \quad (4.42)$$

correspondendo à segunda e terceira integrais da Equação 4.37.

4.2.3.3 Variação da energia de deformação

A energia de deformação de um sólido pode ser calculada pela integração no volume da energia específica de deformação u_e , também chamada de energia livre de Helmholtz Ψ :

$$U = \int_V \Psi dV. \quad (4.43)$$

A energia livre de Helmholtz define a relação entre tensões e deformações no material, ou seja, a relação constitutiva. Dada a igualdade entre a variação do funcional II descrito nas Equações 4.37 e 4.31, tem-se que a última integral em 4.37 corresponde à variação da energia de deformação:

$$\delta U = \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0, \quad (4.44)$$

o que demonstra que o gradiente da função mudança de configuração \mathbf{A} é o conjugado energético da tensão \mathbf{P}^t . O uso dessas medidas no cálculo de δU incide em algumas desvantagens, como o

fato de ambos os tensores não serem simétricos e \mathbf{A} não ser uma medida de deformação objetiva. Dessa forma, convém utilizar medidas de tensão e deformação mais adequadas. Fazendo

$$\mathbf{P}^t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}, \quad (4.45)$$

obtem-se um tensor \mathbf{S} denominado tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, medida de tensão lagrangiana sem significado físico, porém facilmente relacionada com as tensões de Cauchy quando se substitui a Equação 4.45 na 4.27:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t. \quad (4.46)$$

Essa expressão demonstra, em virtude da simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, que \mathbf{S} também é simétrico. Substituindo agora a Equação 4.45 na 4.44 para o cálculo da variação da energia:

$$\delta U = \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A}) dV_0, \quad (4.47)$$

aproveitando-se, na última passagem, de uma relação que pode ser demonstrada pelo cálculo tensorial. Verificando-se que o tensor entre parênteses é simétrico, pode-se obter

$$\delta U = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A}^t) dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0, \quad (4.48)$$

de onde se conclui que o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é o conjugado energético da deformação de Green-Lagrange, medida de deformação lagrangiana já apresentada em seção anterior.

Finalmente, a equação da variação do funcional de energia toma a forma

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0. \quad (4.49)$$

Esta equação será utilizada no próximo capítulo na formulação do método dos elementos finitos posicional.

4.3 Modelo constitutivo hiperelástico adotado

Antes de se apresentar a formulação numérica utilizada neste trabalho, cumpre discorrer acerca do modelo constitutivo adotado no estudo.

Um material é dito elástico quando o comportamento constitutivo é função apenas do estado de deformação atual (BONET; WOOD, 2008), independentemente do histórico e taxa dessa deformação. Também pode ser entendido como um material no qual a deformação desaparece completamente com a retirada das tensões atuantes. No caso em que o trabalho realizado

pelos tensões durante a deformação depende apenas das configurações inicial e atual, portanto, sendo independente do caminho percorrido pelos pontos do sólido, o material é chamado de hiperelástico. Dessa definição segue que as forças internas no sólido (resultantes das tensões) são conservativas e existe uma energia potencial por unidade de volume associada que pode ser descrita como uma função das deformações (HOLZAPFEL, 2000). Essa energia potencial é a energia livre de Helmholtz Ψ , também chamada de energia específica de deformação u_e , citada anteriormente.

Derivando-se essa função de energia potencial em relação à deformação, obtém-se a tensão associada e o par tensão-deformação é denominado conjugado energético. Exemplificando com as medidas de tensão e deformação lagrangianas que são utilizadas na formulação do método adotado, a deformação de Green-Lagrange e o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, tem-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}. \quad (4.50)$$

Uma vez que a função Ψ define a relação entre tensão e deformação no material, ela também é denominada de lei constitutiva ou modelo constitutivo. Um modelo constitutivo completo deve contemplar as condições de normalização e crescimento definidas, respectivamente, nas Equações 4.51a e 4.51b:

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi = 0, \quad (4.51a)$$

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \Psi = \lim_{J \rightarrow +\infty} \Psi = +\infty. \quad (4.51b)$$

A primeira condição indica que a energia Ψ deve ser nula na ausência de deformação. A segunda indica que a energia deve crescer indefinidamente quando material for comprimido indefinidamente (volume tendendo a zero) ou tracionado indefinidamente (volume tendendo ao infinito). A adoção de modelos constitutivos incompletos é possível desde que suas aplicações sejam limitadas a deformações moderadas, podendo se utilizar o jacobiano como parâmetro para essa verificação.

O tensor constitutivo elástico tangente que relaciona diretamente as tensões \mathbf{S} e deformações \mathbf{E} pode ser obtido como

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}}. \quad (4.52)$$

Pelo teorema de Clairaut-Schwarz e sabendo que \mathbf{E} é simétrico, verifica-se que o tensor constitutivo elástico também é simétrico.

4.3.1 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico

O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) é considerado o modelo constitutivo mais simples em grandes deslocamentos por resultar em uma relação linear entre tensões

e deformações. Uma limitação é que a primeira condição de crescimento (primeiro limite da Equação 4.51b) não é intrinsecamente garantida quando o volume tende a zero, permitindo que o volume se torne nulo ou negativo (ou seja, $J \leq 0$). Entretanto, nas análises pretendidas, as membranas estarão sempre sujeitas a tração e o nível de deformação será, no máximo, moderado. O modelo é semelhante à Lei de Hooke nestes níveis de deformação e possui as vantagens da definição trivial do estado plano de tensões, admitido para membranas, e a facilidade de evolução para um modelo ortotrópico. A função de energia livre de Helmholtz é definida como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}. \quad (4.53)$$

Aplicando a Equação 4.50, tem-se:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}. \quad (4.54)$$

O tensor constitutivo \mathbb{C} , constante para qualquer nível de deformação e idêntico ao da Lei de Hooke, pode ser escrito conforme a Equação 4.55, em notação indicial:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (4.55)$$

na qual δ é o tensor Delta de Kronecker, G é o módulo de elasticidade transversal e λ é a constante de Lamé, calculados a partir do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν segundo as expressões

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (4.56)$$

Outra forma de representar o tensor constitutivo é utilizando a notação de Voigt:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

e sua forma inversa:

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

4.3.1.1 Estados planos e material transversalmente isotrópico

Quando se trabalha com elementos finitos bidimensionais, é útil distinguir entre as formas clássicas de estado plano, o estado plano de deformação (EPD) e o estado plano de tensão (EPT).

No EPD, considera-se que só existem deformações no plano do elemento, portanto, $E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$. No EPT, considera-se que só existem tensões no plano do elemento e é assumido que estas não variam com a espessura, ou seja, $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$. Assim, trata-se de uma simplificação que é razoável para elementos de pequena espessura. A relação constitutiva para um sólido bidimensional em EPD pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.59)$$

Para o EPT, utiliza-se a constante de Lamé modificada $\bar{\lambda}$ em lugar de λ :

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - \nu)}. \quad (4.60)$$

Assim, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & 2G + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.61)$$

Neste trabalho, de acordo com descrição mais detalhada apresentada em seção posterior, o elemento de membrana será considerado como um sólido bidimensional em EPT contido no espaço tridimensional. Nesse caso, é útil distinguir o material como *transversalmente isotrópico*, ou seja, isotrópico segundo a superfície bidimensional do elemento, porém possuindo propriedades diferentes na direção da espessura. Observando que, para uma superfície genérica, a direção normal à superfície varia com a posição, convém determinar um referencial local para o elemento de modo a definir a direção normal naquela posição.

Considerando a direção local 3 como normal à superfície e utilizando uma barra superior para indicar as variáveis no referencial local, escreve-se a forma inversa do tensor constitutivo para o material transversalmente isotrópico:

$$\begin{Bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{33} \\ \bar{E}_{12} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_{13}/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu_{23}/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E & -\nu_{32}/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{23} \end{Bmatrix}. \quad (4.62)$$

As equações do EPT são recuperadas fazendo $\nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{33} \\ \bar{E}_{12} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{23} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{23} \end{array} \right\}. \quad (4.63)$$

e o tensor constitutivo se torna semelhante ao disposto na Equação 4.61. Nesta expressão, tem-se $G_{13} = G_{23}$.

5 CÁLCULO NUMÉRICO POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

A solução das equações de equilíbrio apresentadas nas seções precedentes é comumente calculada de forma numérica, com o uso de métodos aproximados. Um dos métodos mais difundidos atualmente é o método dos elementos finitos (MEF), que se baseia na subdivisão do domínio contínuo em subdomínios menores, chamados de elementos finitos, a quem estão associados certos pontos denominados nós. Os parâmetros de interesse são calculados nos nós dos elementos, transformando um problema com infinitas incógnitas em um problema com um número finito de incógnitas. As variáveis são aproximadas a partir dos valores nodais e das funções de forma, definidas para cada nó do elemento.

A abordagem clássica do MEF tem como incógnitas os deslocamentos nodais. Entretanto, este trabalho adota uma formulação baseada no cálculo direto das posições nodais em relação à origem do sistema de coordenadas, elaborada por Coda (2003) e Bonet et al. (2000). Neste capítulo, essa formulação posicional será detalhada, incluindo o cálculo dos vetores de forças e das parcelas da matriz Hessiana, e serão ainda apresentadas as cinemáticas adotadas para os elementos finitos posicionais.

5.1 Formulação numérica

A formulação do MEF posicional baseia-se na aplicação do princípio da estacionariedade da energia mecânica e escrita das parcelas de energia do sólido em função das posições nodais. As deduções desta seção e das seguintes são baseadas em Coda (2018).

Resgatando a equação de equilíbrio obtida no capítulo anterior (Equação 4.49), escrita aqui novamente por conveniência, tem-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta\vec{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 = 0. \quad (5.1)$$

Por se utilizar de um método numérico que permite a aplicação de forças concentradas nos nós dos elementos, pode-se adicionar mais um termo à Equação 5.1, referente à variação da energia potencial das forças concentradas \vec{F} :

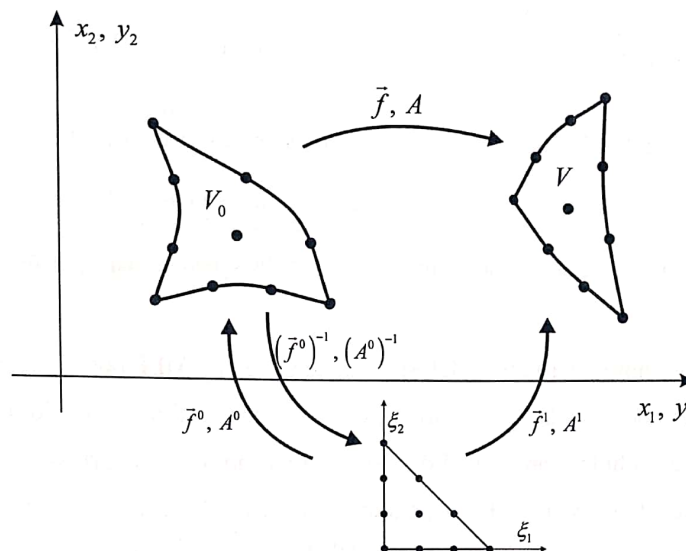
$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta\vec{y} dA_0 - \vec{F} \cdot \delta\vec{y} + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 = 0. \quad (5.2)$$

A seguir, a Equação 5.2 é trabalhada de modo a permitir a implementação numérica do método.

5.1.1 Mudança de configuração a partir das funções de mapeamento

Para o cálculo da variação da energia de deformação em função das posições (último termo da Equação 5.2) é necessário determinar o gradiente da função mudança de configuração \mathbf{A} para calcular a deformação de Green-Lagrange e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Isso pode ser feito a partir de funções de mapeamento que transformam as coordenadas do elemento em um espaço adimensional auxiliar nas coordenadas iniciais e atuais, conforme mostrado na Figura 40 para um elemento no plano.

Figura 40 – Mapeamento posicional de um elemento finito triangular no plano.



Fonte: Coda (2018).

A função mudança de configuração pode ser escrita a partir das funções de mapeamento:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1}, \quad (5.3)$$

e o gradiente pode ser calculado como

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}. \quad (5.4)$$

Por simplicidade, as deduções a seguir consideram o caso básico do elemento finito triangular no plano indicado na Figura 40. Nas seções posteriores, que tratarão da cinemática dos elementos finitos adotados, serão apresentados os mapeamentos para cada caso. Importa observar que, para os vários tipos de elementos, as únicas alterações na formulação posicional ocorrem

na forma de calcular os gradientes de mapeamento \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 e suas derivadas, permanecendo a mesma ideia básica para o cálculo do gradiente \mathbf{A} e das demais variáveis.

Considerando então este elemento básico e empregando a aproximação do MEF, as posições iniciais \vec{x} e atuais \vec{y} são escritas, em notação indicial, como

$$x_i = \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) X_i^\alpha \quad \text{e} \quad y_i = \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) Y_i^\alpha, \quad (5.5)$$

sendo X_i^α e Y_i^α as posições iniciais e atuais, respectivamente, do nó α do elemento finito segundo a direção i , ϕ^α é a função de forma do elemento referente ao nó α e ξ_1 e ξ_2 são as coordenadas no espaço adimensional. Portanto,

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_j} X_i^\alpha \quad \text{e} \quad A_{ij}^1 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_j} Y_i^\alpha. \quad (5.6)$$

Assim, conhecendo-se as posições iniciais (dado do problema) e as atuais (por tentativa no processo iterativo de solução), calcula-se a deformação de Green-Lagrange substituindo a Equação 5.4 na 4.5:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} - \mathbf{I} \right). \quad (5.7)$$

É oportuno observar que a energia de deformação armazenada no sólido depende apenas das posições atuais dos nós.

5.1.2 Equação de equilíbrio do MEF posicional

Visto que se deseja escrever a Equação 5.2 em função das posições, a variação $\delta \mathbf{E}$ pode ser expressa como:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{y}} \delta \vec{y}. \quad (5.8)$$

Por sua vez, o vetor $\delta \vec{y}$ pode ser escrito em função das posições nodais e das funções de forma. Em notação indicial:

$$\delta y_i = \phi^\alpha \delta Y_i^\alpha. \quad (5.9)$$

Substituindo as Equações 5.8 e 5.9 na Equação 5.2 e lembrando que a variação de posição δY_i^α é arbitrária:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \phi^\alpha dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \phi^\alpha dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \phi^\alpha dA_0 - F_i^\alpha + \int_{V_0} S_{jk} \frac{\partial E_{jk}}{\partial Y_i^\alpha} dV_0 = 0. \quad (5.10)$$

Escrevendo o vetor aceleração \ddot{y}_i como a combinação dos valores nodais e das funções de forma:

$$\ddot{y}_i = \phi^\beta \ddot{Y}_i^\beta. \quad (5.11)$$

Substituindo a aproximação na Equação 5.10:

$$\ddot{Y}_i^\beta \int_{V_0} \rho_0 \phi^\alpha \phi^\beta dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \phi^\alpha dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \phi^\alpha dA_0 - F_i^\alpha + \int_{V_0} S_{jk} \frac{\partial E_{jk}}{\partial Y_i^\alpha} dV_0 = 0. \quad (5.12)$$

A partir da Equação 5.12, é possível definir os vetores de forças inerciais, forças externas e forças internas:

$$\ddot{Y}_i^\beta \int_{V_0} \rho_0 \phi^\alpha \phi^\beta dV_0 = (F^{inerc})_i^\alpha, \quad (5.13a)$$

$$- \int_{V_0} b_i^0 \phi^\alpha dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \phi^\alpha dA_0 - F_i^\alpha = - (F^{ext})_i^\alpha, \quad (5.13b)$$

$$\int_{V_0} S_{jk} \frac{\partial E_{jk}}{\partial Y_i^\alpha} dV_0 = (F^{int})_i^\alpha. \quad (5.13c)$$

A equação de equilíbrio toma então a forma

$$(F^{inerc})_i^\alpha + (F^{int})_i^\alpha - (F^{ext})_i^\alpha = 0_i^\alpha, \quad (5.14)$$

sendo α os nós do elemento finito e i as direções do problema.

5.1.3 Consideração de forças externas não conservativas

Uma força não conservativa pode ser definida como aquela para a qual o trabalho da força em um ciclo de movimento (posição final igual à posição inicial) é diferente de zero (RESNICK; HALLIDAY; KRANE, 2003). Isso implica em que o trabalho de uma força não conservativa é dependente do percurso da partícula sobre a qual a força atua; portanto, existe uma dependência entre a força aplicada e as posições do sólido analisado.

Nos problemas de engenharia, situações comuns de forças externas não conservativas são a pressão de fluidos em grandes deslocamentos, com a força mudando de direção ao longo do deslocamento por ser sempre normal à superfície, e as forças de atrito. Existem ainda casos de forças internas não conservativas, como materiais de comportamento plástico ou viscoso.

Quando a força que atua sobre um sistema é identificada como não conservativa, ela causa uma variação (acréscimo ou decréscimo) na energia total do sistema. Por conta disso, não existe energia potencial associada às forças não conservativas e não é possível escrever explicitamente o funcional de energia Π do sistema (Equação 4.30) com as parcelas associadas a estes fenômenos. Entretanto, a variação da energia pode ser escrita, de modo que o princípio da estacionariedade da energia mecânica (Equação 4.31) ainda pode ser utilizado. Para isto, considerando a conservação de energia, basta considerar um certo sistema S^* que contenha o sistema estrutural original S e os fenômenos não conservativos de S , que serão conservativos

para S^* por terem sido incluídos dentro do sistema. Isso significa aumentar o universo de análise de modo a contemplar o princípio da conservação de energia. O funcional de energia do novo sistema é dado então por

$$\Pi^* = \Pi + Q, \quad (5.15)$$

com a energia Q relacionada às forças não conservativas do sistema S . Aplicando o princípio da estacionariedade a S^* tem-se

$$\delta\Pi^* = \delta\Pi + \delta Q = 0 \quad \rightarrow \quad \delta P + \delta U + \delta K + \delta Q = 0. \quad (5.16)$$

Utilizando a discretização posicional por meio de uma variação arbitrária $\delta\vec{y}$, chega-se à equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{y}} \cdot \delta\vec{y} + \frac{\partial U}{\partial \vec{y}} \cdot \delta\vec{y} + \frac{\partial K}{\partial \vec{y}} \cdot \delta\vec{y} + \frac{\partial Q}{\partial \vec{y}} \cdot \delta\vec{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{y}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{y}} + \frac{\partial K}{\partial \vec{y}} + \frac{\partial Q}{\partial \vec{y}} = 0. \quad (5.17)$$

As três primeiras parcelas da Equação 5.17 correspondem às forças da Equação 5.13. Os efeitos não conservativos são considerados no termo $\partial Q/\partial \vec{y}$, que pode ser composto por forças provenientes de diversos fatores.

Neste trabalho, a lei constitutiva adotada é hiperelástica e o modelo de contato (discutido no Capítulo 6) não inclui atrito, sendo ambos casos conservativos. Por outro lado, para o problema dinâmico é considerada a existência de dissipação por amortecimento viscoso, dado por

$$(F^{amort})_i^\alpha = C_{\alpha\beta} \dot{Y}_i^\beta, \quad (5.18)$$

sendo C a matriz de amortecimento, que pode ser considerada como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez (amortecimento de Rayleigh).

Na análise de estruturas de membrana, dois efeitos não conservativos importantes relacionados às forças externas são as ações de vento e a pressão de ar em estruturas pneumáticas. Os dois casos consistem em forças que dependem da posição atual por atuarem no sentido normal à superfície. Para o vento, a pressão pode ser considerada constante; para estruturas infladas, como balões, a pressão de ar interna varia com o volume do elemento e, portanto, também depende das posições nodais. A consideração das forças externas não conservativas de modo especial se deve ao fato de que, pela dependência das posições, a derivada das forças não é nula e vai gerar uma contribuição de rigidez a ser somada à matriz Hessiana da estrutura.

Para os casos aqui considerados, o vetor de forças externas não conservativas pode ser escrito de forma semelhante à Equação 5.13b, porém observando que a pressão atua na configuração atual e sempre com o sentido do vetor normal unitário \vec{n} :

$$(F^{mc})_i^\alpha = \int_A p(\vec{y}) n_i(\vec{y}) \phi^\alpha dA + F^\alpha n_i(\vec{y}). \quad (5.19)$$

Na Equação 5.19, explicitou-se a dependência da pressão e do vetor normal com as posições e incluiu-se a possibilidade de atuação de forças concentradas nos nós do modelo em elementos finitos. Neste caso, o vetor normal no nó pode ser calculado como a média dos vetores normais de todos os elementos que compartilham o nó.

Incluindo as forças de amortecimento viscoso e forças externas não conservativas, a equação de equilíbrio é descrita por

$$(F^{inerc})_i^\alpha + (F^{amort})_i^\alpha + (F^{int})_i^\alpha - (F^{ext})_i^\alpha - (F^{nc})_i^\alpha = 0_i^\alpha. \quad (5.20)$$

5.1.4 Solução do problema dinâmico: métodos de integração temporal

Ao observar as Equações 5.13a e 5.18, percebe-se que as forças inercial e de amortecimento encontram-se em função das acelerações e velocidades nodais, respectivamente. Entretanto, convém escrever as forças em função das posições de modo a manter a uniformidade de incógnitas no sistema. Para isso, é necessário um algoritmo de integração temporal para determinar os parâmetros de velocidade e aceleração com base em variáveis conhecidas no instante de tempo da análise, como posições atuais e velocidade e aceleração do passo de tempo anterior.

Dois métodos diferentes são utilizados neste trabalho. O primeiro deles é o de Newmark (1959), cujas expressões para cálculo são:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \Delta t \vec{Y}_s + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \vec{Y}_s + \beta \Delta t^2 \vec{Y}_{s+1} \quad \text{e} \quad (5.21)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + (1 - \gamma) \Delta t \vec{Y}_s + \gamma \Delta t \vec{Y}_{s+1}, \quad (5.22)$$

onde os índices s e $s + 1$ indicam os passos de tempo anterior e atual, respectivamente, Δt é o intervalo de tempo entre os passos e β e γ são parâmetros do método, que serão discutidos mais à frente.

Reorganizando as Equações 5.21 e 5.22, pode-se escrever a velocidade e a aceleração atuais em função dos valores do passo anterior e das posições atuais:

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - \vec{Q}_s \quad \text{e} \quad (5.23)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s. \quad (5.24)$$

Os vetores \vec{Q}_s e \vec{R}_s indicam os valores conhecidos do passo anterior:

$$\vec{Q}_s = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_s + \frac{1}{\beta \Delta t} \vec{Y}_s + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{Y}_s \quad \text{e} \quad (5.25)$$

$$\vec{R}_s = \vec{Y}_s + (1 - \gamma) \Delta t \vec{\ddot{Y}}_s. \quad (5.26)$$

Dessa forma, os vetores de forças inerciais e forças de amortecimento podem ser escritos em função das posições, tornando-se estas as únicas incógnitas do sistema.

Os parâmetros β e γ controlam os aspectos de precisão e estabilidade do método numérico. Um método numérico é dito estável quando os erros de cálculo em um passo anterior não são amplificados nos seguintes; se o método for instável, o crescimento do erro dominará a solução e os resultados obtidos serão espúrios. Em relação ao problema da resposta dinâmica de uma estrutura, fazendo uma analogia com um sistema de um grau de liberdade em vibração livre, a estabilidade pode ser associada ao erro cometido na amplitude do movimento. Se o método é instável, os deslocamentos serão sempre amplificados e tenderão ao infinito. Para que haja estabilidade, a amplitude deve manter-se constante ou então diminuir progressivamente, caso em que se diz (por analogia com o fenômeno físico) que há amortecimento ou dissipação numérica. Existem situações em que um método pode ser condicionalmente estável, isto é, a estabilidade depende de se utilizar um passo de tempo Δt menor que certo valor crítico.

Os valores mais comuns na literatura são $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, significando adotar aceleração constante durante o passo de tempo e com valor igual à média entre as acelerações do passo anterior e do atual. Esse procedimento também é denominado *regra do trapézio* e é incondicionalmente estável para o caso linear. Outros valores utilizados são $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$, o que equivale a uma variação linear da aceleração durante o passo de tempo. O uso destes valores torna o procedimento condicionalmente estável.

Uma análise detalhada da estabilidade numérica do método de Newmark pode ser encontrada em Paultre (2011). É importante destacar que o parâmetro γ controla a quantidade de amortecimento numérico inserido, sendo nulo para $\gamma = 1/2$. O método se torna instável para $\gamma < 1/2$ e existe amortecimento numérico quando $\gamma > 1/2$. Embora possa prejudicar a precisão do método, esse amortecimento é útil para filtrar algumas vibrações espúrias de alta frequência que podem surgir em virtude da própria discretização em elementos finitos e também em problemas de contato, cuja não linearidade acentuada pode produzir mudanças bruscas de aceleração e velocidade. Para esses problemas, Hu (1997) propõe os valores $\beta = 1$ e $\gamma = 3/2$, resultando em estabilidade incondicional e induzindo o amortecimento numérico das frequências de vibração altas.

Outro ponto relevante é a observação de que a quantidade de amortecimento numérico varia de acordo com as frequências de vibração do sistema. É desejável que as frequências altas sejam amortecidas, porém com a menor influência possível nas frequências mais baixas. Por isso, alguns algoritmos de integração no tempo foram desenvolvidos de modo a introduzir amortecimento numérico de forma mais refinada que a simples modificação dos parâmetros β e γ no método de Newmark.

Um destes algoritmos, proposto por Chung e Hulbert (1993), é o método α -generalizado, que também é utilizado neste trabalho. As aproximações de velocidade e aceleração são as mesmas que as do método de Newmark, porém a equação de movimento é reescrita considerando todas as parcelas de força em um instante de tempo auxiliar $s + 1 - \alpha_f$, exceto as forças inerciais, que são consideradas em um instante $s + 1 - \alpha_m$:

$$\vec{F}_{s+1-\alpha_m}^{inerc} + \vec{F}_{s+1-\alpha_f}^{amort} + \vec{F}_{s+1-\alpha_f}^{int} - \vec{F}_{s+1-\alpha_f}^{ext} - \vec{F}_{s+1-\alpha_f}^{nc} = \vec{0}. \quad (5.27)$$

Nestes instantes auxiliares, o valor de uma variável qualquer d (força, posição, velocidade, aceleração) é calculado como uma combinação linear do tipo

$$d_{s+1-\alpha} = (1 - \alpha) d_{s+1} + \alpha d_s, \quad (5.28)$$

na qual α pode representar tanto α_f quanto α_m .

Retomando a Equação 5.27 com essa consideração, pode-se obter

$$(1 - \alpha_m) \vec{F}_{s+1}^{inerc} + (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{amort} + (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{int} - (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{ext} - (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{nc} + \vec{P}_s = \vec{0}, \quad (5.29)$$

com o vetor \vec{P}_s dado por

$$\vec{P}_s = \alpha_m \mathbf{M} \vec{Y}_s + \alpha_f \mathbf{C} \vec{Y}_s + \alpha_f \vec{F}_s^{int} - \alpha_f \vec{F}_s^{ext} - \alpha_f \vec{F}_s^{nc}, \quad (5.30)$$

sendo $\mathbf{M} \vec{Y}_s$ e $\mathbf{C} \vec{Y}_s$ as forças inercial e de amortecimento do passo anterior. As posições atuais são obtidas resolvendo-se o sistema não linear e as acelerações e velocidades atuais são calculadas com as Equações 5.23 e 5.24.

Percebe-se que, além dos parâmetros β e γ do método de Newmark, o método α -generalizado possui ainda outros dois (α_f e α_m) relativos aos instantes de tempo no qual são calculadas as forças. As equações do método de Newmark são recuperadas impondo-se $\alpha_f = \alpha_m = 0$, fazendo com que a equação de movimento seja escrita, para todas as forças, no instante $s + 1$.

Para maximizar o amortecimento numérico dos modos de vibração de frequências mais altas e minimizá-lo para os modos de frequências mais baixas, Chung e Hulbert (1993) recomendam calcular α_f e α_m da seguinte forma:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \text{e} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad (5.31)$$

sendo ρ_∞ o raio espectral da matriz de amplificação do método com as frequências tendendo ao infinito. Esse valor indica o grau de amortecimento numérico dessas frequências e deve ser escolhido no intervalo $[0;1]$. Ainda, para maximizar esse amortecimento com o menor prejuízo às baixas frequências, os valores de β e γ devem ser calculados como

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2. \quad (5.32)$$

Dessa forma, apesar de aparecer um total de cinco parâmetros na formulação, apenas o valor de ρ_∞ precisa ser escolhido e os demais são calculados. Para $\rho_\infty = 1$, tem-se um caso sem amortecimento numérico e os outros parâmetros são dados por

$$\alpha_m = \alpha_f = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad (5.33)$$

onde os valores de α_f e α_m indicam que todas as forças da equação de movimento são calculadas no meio do instante de tempo, $s + 1/2$, e β e γ são iguais ao caso de aceleração constante.

Para $\rho_\infty = 0$, tem-se o caso de aniquilação assintótica, na qual as frequências altas são aniquiladas após um passo de tempo. Os demais parâmetros têm os valores

$$\alpha_m = -1, \quad \alpha_f = 0, \quad \gamma = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \beta = 1, \quad (5.34)$$

mostrando que as forças são calculadas no instante de tempo atual $s + 1$, excetuando-se a força inercial, calculada no instante seguinte $s + 2$, e β e γ são iguais aos valores propostos por Hu (1997).

5.1.5 Solução do sistema não linear: método de Newton-Raphson

Ao se analisar os vetores de forças (Equação 5.13), verifica-se que as equações do sistema são não lineares devido à dependência entre a força interna e a deformação de Green-Lagrange, que é uma medida não linear. Uma das formas de resolução matemática do problema, que é utilizada nesse trabalho, é o método de Newton-Raphson, descrito a seguir. O procedimento de solução será demonstrado para o sistema resultante do método α -generalizado, uma vez que o sistema do método de Newmark é facilmente obtido a partir daquele impondo $\alpha_f = \alpha_m = 0$.

Inicialmente, reescreve-se a Equação 5.29 na forma vetorial fazendo

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{Y}_{s+1-\alpha}) &= (1 - \alpha_m) \vec{F}_{s+1}^{inerc} + (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{amort} + (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{int} \\ &\quad - (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{ext} - (1 - \alpha_f) \vec{F}_{s+1}^{nc} + \vec{P}_s = \vec{0}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

na qual \vec{G} seria um vetor nulo para uma solução exata, porém igual a um vetor resíduo não nulo no caso de uma solução numérica. O método de Newton-Raphson consiste em fazer uma expansão em série de Taylor da Equação 5.35 truncada em primeira ordem, de modo a obter um sistema de equações lineares:

$$\vec{G}(\vec{Y}_{s+1-\alpha}) = \vec{G}(\vec{Y}_{s+1-\alpha}^0) + \left. \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_{s+1-\alpha}^0} \cdot \Delta \vec{Y} = \vec{0}, \quad (5.36)$$

sendo \vec{Y}^0 uma posição tentativa, tomada igual à posição inicial na primeira iteração e igual à posição anterior nas demais iterações. O vetor $\Delta\vec{Y}$ é uma correção de posição, calculado em cada iteração e somado à \vec{Y}^0 para se obter a nova posição tentativa:

$$\vec{Y}^0 = \vec{Y}^0 + \Delta\vec{Y}. \quad (5.37)$$

Com o novo valor de \vec{Y}^0 , retorna-se à Equação 5.36 e a resolução é feita de forma iterativa até que o vetor resíduo \vec{G} ou a correção de posição $\Delta\vec{Y}$ se tornem suficientemente pequenos, de acordo com uma tolerância de erro adotada pelo usuário.

A derivada do vetor \vec{G} , que é igual à segunda derivada da energia mecânica Π , é chamada de matriz Hessiana (\mathbf{H}):

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} = \mathbf{H}. \quad (5.38)$$

Assim, a Equação 5.36 pode ser escrita na forma usual de sistemas de equações lineares:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta\vec{Y} = -\vec{G}(\vec{Y}_{s+1-\alpha}^0). \quad (5.39)$$

Adota-se como critério de parada a correção em posições dada pela Equação 5.40:

$$\frac{\|\Delta\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq tol, \quad (5.40)$$

sendo \vec{X} o vetor com as posições iniciais e tol a tolerância de erro definida pelo usuário.

Uma vez atendida a Equação 5.40, prossegue-se a análise para o próximo passo de tempo ou de carga até que o processo seja finalizado.

5.2 Cálculo das variáveis do sistema de equações

Tendo sido descritos a formulação geral do método numérico e a forma de resolução do sistema de equações, cumpre ainda detalhar como são obtidos os vetores de forças e a matriz Hessiana para o uso da Equação 5.39.

5.2.1 Forças inerciais e de amortecimento

A partir da Equação 5.13a, pode-se escrever o vetor de forças inerciais como

$$(F^{inerc})_i^\alpha = M_{\alpha\beta} \ddot{Y}_i^\beta, \quad (5.41)$$

sendo

$$M_{\alpha\beta} = \int_{V_0} \rho_0 \phi^\alpha \phi^\beta dV_0 \quad (5.42)$$

a matriz de massa do elemento finito, constante ao longo do tempo.

Para melhor entendimento da Equação 5.42, toma-se o exemplo da matriz de massa de um elemento triangular de 3 nós no plano:

$$M^{el} = \int_{V_0} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & 0 & \phi_1\phi_2 & 0 & \phi_1\phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1\phi_1 & 0 & \phi_1\phi_2 & 0 & \phi_1\phi_3 \\ \phi_2\phi_1 & 0 & \phi_2\phi_2 & 0 & \phi_2\phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_2\phi_1 & 0 & \phi_2\phi_2 & 0 & \phi_2\phi_3 \\ \phi_3\phi_1 & 0 & \phi_3\phi_2 & 0 & \phi_3\phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_3\phi_1 & 0 & \phi_3\phi_2 & 0 & \phi_3\phi_3 \end{bmatrix} dV_0. \quad (5.43)$$

Escrevendo a aceleração em função das posições e de parâmetros conhecidos a partir da Equação 5.23, tem-se o vetor de forças inerciais do sistema no instante $s + 1$:

$$\vec{F}_{s+1}^{inerc} = \mathbf{M} \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - \vec{Q}_s \right). \quad (5.44)$$

A força de amortecimento é dada pela Equação 5.18 e depende das velocidades nodais. De maneira semelhante, utilizando a Equação 5.24, chega-se ao vetor de forças de amortecimento do sistema no instante $s + 1$:

$$\vec{F}_{s+1}^{amort} = \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \right). \quad (5.45)$$

5.2.2 Forças internas

Para calcular as forças internas a partir da Equação 5.13c, é necessário calcular a derivada da deformação de Green-Lagrange (Equação 5.7) em relação às posições. Utilizando notação mista, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_i^\alpha} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^\alpha} (\mathbf{A}^0)^{-1} \right). \quad (5.46)$$

Convém lembrar que o tensor \mathbf{A}^0 depende apenas das posições iniciais; assim, a derivação incide apenas no tensor \mathbf{A}^1 . Por sua vez, a derivada de \mathbf{A}^1 em relação às posições para o elemento finito básico é obtida a partir da Equação 5.6b:

$$\frac{\partial A_{kj}^1}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_j} Y_k^\beta \right) = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_j} \delta_{ik} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_j} \delta_{ik}. \quad (5.47)$$

Assim, as forças internas são calculadas combinando as Equações 5.13c, 5.46 e 5.47.

5.2.3 Forças externas conservativas

Reescreve-se a definição adotada para o vetor de forças externas da Equação 5.13b:

$$(F^{ext})_i^\alpha = \int_{V_0} b_i^0 \phi^\alpha dV_0 + \int_{A_0} p_i^0 \phi^\alpha dA_0 + F_i^\alpha. \quad (5.48)$$

Para o caso comum de carga uniformemente distribuída sobre o volume ou sobre a área, tem-se:

$$(F^{ext})_i^\alpha = b_i^0 \int_{V_0} \phi^\alpha dV_0 + p_i^0 \int_{A_0} \phi^\alpha dA_0 + F_i^\alpha. \quad (5.49)$$

5.2.4 Forças externas não conservativas

A integral da Equação 5.19, escrita conforme a configuração atual, pode ser calculada no espaço adimensional $\xi_1 \xi_2$ por integração numérica. Uma vez que as forças não conservativas consideradas atuam no sentido normal à superfície da membrana, é necessário determinar o vetor normal unitário \vec{n} no ponto de integração pelas expressões do Apêndice A (Equações A.1 e A.2). Ainda, observa-se que o jacobiano dessa transformação é igual ao módulo N do vetor normal não unitário \vec{N} , ou seja,

$$dA = N d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.50)$$

Substituindo-se a Equação 5.50 na Equação 5.19, pode-se utilizar diretamente o vetor normal não unitário. Considerando, primeiramente, a situação em que a pressão é constante, tem-se:

$$(F^{nc})_i^\alpha = p \iint_{\xi_1 \xi_2} N_i \phi^\alpha d\xi_1 d\xi_2 + F_i^\alpha n_i. \quad (5.51)$$

No caso de estruturas infladas, a pressão aplicada na membrana varia com o volume do gás confinado. Embora seja possível realizar uma análise simplificada desprezando essa variação de pressão, isso pode levar a diferenças significativas nos resultados. Para considerar esse efeito, também chamado de acoplamento pressão-volume, deve-se definir a relação entre essas duas variáveis. Adota-se aqui a Lei de Boyle-Mariotte para um sistema isotérmico:

$$p_0 V_0 = pV \quad \rightarrow \quad p = \frac{p_0 V_0}{V}, \quad (5.52)$$

sendo p_0 e V_0 a pressão e o volume do gás confinado na configuração inicial e p e V os valores na configuração atual.

É importante observar que, no uso da Equação 5.52, p e p_0 se referem à *pressão absoluta* do gás e não à *pressão manométrica* (p_{man}), sendo esta definida como o diferencial de pressão

entre as regiões interna e externa, delimitadas pela membrana. A pressão absoluta é calculada somando-se a pressão atmosférica ($p_{atm} \approx 10^5$ Pa) à manométrica, ou seja, $p = p_{atm} + p_{man}$. Dessa forma, verifica-se que a pressão manométrica pode ser utilizada no cálculo da força aplicada (Equação 5.51), por ser a pressão resultante na superfície da membrana, porém a pressão absoluta deve ser utilizada na atualização da pressão conforme a Lei de Boyle-Mariotte.

O volume de gás é calculado por meio do teorema da divergência de Gauss, dado pela relação

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} dV = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS, \quad (5.53)$$

sendo \vec{f} uma função vetorial qualquer no volume V , S é a superfície de contorno do volume e \vec{n} é o vetor normal unitário na superfície. Essa expressão pode ser usada para calcular V escolhendo uma função \vec{f} tal que $\operatorname{div} \vec{f} = 1$, por exemplo, $\vec{f} = \{y_1, y_2, y_3\} \cdot (1/3)$. Essa função pode facilmente ser expressa em notação indicial como $f_k = Y_k^\gamma \phi^\gamma \cdot (1/3)$. Observando que a superfície S é a área A dos elementos finitos e fazendo a integração numérica no espaço adimensional:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\xi_1 \xi_2} Y_k^\gamma \phi^\gamma N_k d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.54)$$

Essa mesma expressão pode ser utilizada para calcular o volume V_0 , bastando considerar as coordenadas iniciais na integração e na determinação do vetor normal.

Para calcular o vetor de forças, deve-se notar que, embora a pressão varie no processo incremental de solução, ela é constante dentro do elemento finito e é a mesma para todos os elementos. Assim, pode-se utilizar a mesma Equação 5.51 para determinar o vetor de forças externas não conservativas, bastando atualizar o valor da pressão nas iterações de acordo com as Equações 5.52 e 5.54.

5.2.5 Matriz hessiana

A matriz Hessiana, conforme a Equação 5.38, é a segunda derivada do funcional de energia mecânica Π e tem o significado físico de rigidez do sistema. Como a primeira derivada do funcional é a equação de equilíbrio, a Hessiana no instante de tempo $s + 1 - \alpha$ pode ser calculada a partir da derivada da Equação 5.29:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{Y}} = (1 - \alpha_m) \frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{inerc}}{\partial \vec{Y}} + (1 - \alpha_f) \frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{amort}}{\partial \vec{Y}} \\ &+ (1 - \alpha_f) \frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{int}}{\partial \vec{Y}} - (1 - \alpha_f) \frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{ext}}{\partial \vec{Y}} - (1 - \alpha_f) \frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{nc}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \vec{P}_s}{\partial \vec{Y}}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

5.2.5.1 Problema estático

Considerando inicialmente apenas forças externas conservativas no caso estático, a matriz Hessiana é composta apenas pela parcela de derivada da força interna da Equação 5.55. Recordar-se que a derivada de \vec{P}_s é nula porque este vetor não depende das posições atuais e a derivada de \vec{F}^{ext} é nula porque este vetor considera apenas as forças externas conservativas. Calculando então a derivada da força interna com a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0. \quad (5.56)$$

Por meio da Equação 4.52, verifica-se que a derivada de \mathbf{S} em relação à \mathbf{E} é o tensor constitutivo \mathbb{C} :

$$\frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0, \quad (5.57)$$

e, fazendo $\mathbb{C} : \partial \mathbf{E} / \partial \vec{Y} = \partial \mathbf{S} / \partial \vec{Y}$:

$$\frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0 = \mathbf{H}^{est}. \quad (5.58)$$

Na Equação 5.58, o primeiro termo da integral é a rigidez elástica e o segundo termo é a rigidez geométrica, proporcional à tensão \mathbf{S} e especialmente importante na análise de estruturas de membrana, conforme já comentado na subseção 3.4.2.

A segunda derivada da deformação de Green-Lagrange em relação às posições pode ser obtida a partir da Equação 5.46:

$$\frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_i^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_j^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^\alpha} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right), \quad (5.59)$$

lembrando que, para o elemento finito básico, as derivadas de \mathbf{A}^1 são calculadas pela Equação 5.47 e não dependem das posições atuais. Para cinemáticas em que isso não ocorre, a expressão a ser utilizada é:

$$\frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_i^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_j^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^\alpha} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \right. \\ \left. (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right). \quad (5.60)$$

5.2.5.2 Problema dinâmico

Para o problema dinâmico (ainda considerando apenas forças externas conservativas), as contribuições das derivadas das forças inerciais e de amortecimento devem ser somadas à Hessiana estática. Utilizando as Equações 5.44 e 5.45 e observando que as derivadas de \vec{Q}_s e \vec{R}_s são nulas:

$$\frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{inerc}}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}, \quad (5.61a)$$

$$\frac{\partial \vec{F}_{s+1}^{amort}}{\partial \vec{Y}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}. \quad (5.61b)$$

Substituindo na Equação 5.55:

$$\mathbf{H}^{din} = (1 - \alpha_f) \int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0 + (1 - \alpha_m) \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 - \alpha_f) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}. \quad (5.62)$$

5.2.5.3 Caso com forças externas não conservativas

Quando existe a atuação de forças externas não conservativas que dependem das posições atuais, a derivada do vetor de forças não é nula e gera uma matriz Hessiana do carregamento a ser somada à Hessiana global, conforme apontado anteriormente na subseção 5.1.3.

A Hessiana do carregamento é obtida pela derivada do vetor de forças da Equação 5.51 com o sinal negativo, conforme o vetor aparece na equação de equilíbrio. Considerando inicialmente o caso de pressão constante, tem-se, em notação indicial:

$$(H^{nc})_{ij}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial (F^{nc})_i^\alpha}{\partial Y_j^\beta} = -p \iint_{\xi_1 \xi_2} (DN_i)_j^\beta \phi^\alpha d\xi_1 d\xi_2 - F^\alpha (dn_i)_j^\beta, \quad (5.63)$$

com as derivadas dos vetores normais indicadas no Apêndice A (Equações A.7 e A.13). Para a parcela das forças concentradas nos nós, pode-se considerar a média das derivadas calculadas para cada elemento finito que contém o nó.

Se a pressão não for constante (elemento com gás confinado), p deve ser substituído por p_{man} na determinação da força. A derivada da Equação 5.51 (com o sinal negativo) é dada então por:

$$(H^{nc})_{ij}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial (F^{nc})_i^\alpha}{\partial Y_j^\beta} = -p_{man} \iint_{\xi_1 \xi_2} (DN_i)_j^\beta \phi^\alpha d\xi_1 d\xi_2 - \frac{\partial p_{man}}{\partial Y_j^\beta} \iint_{\xi_1 \xi_2} N_i \phi^\alpha d\xi_1 d\xi_2 - F^\alpha (dn_i)_j^\beta. \quad (5.64)$$

Como a pressão atmosférica é constante, a derivada da pressão manométrica p_{man} é igual à derivada da pressão absoluta p . Utilizando as Equações 5.52 e 5.54:

$$\frac{\partial p_{man}}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial p}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial Y_j^\beta} = -\frac{p_0 V_0}{V^2} \cdot \frac{1}{3} \iint_{\xi_1 \xi_2} \delta_{jk} \delta_{\beta\gamma} \phi^\gamma N_k + Y_k^\gamma \phi^\gamma (DN_k)_j^\beta d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.65a)$$

$$\frac{\partial p_{man}}{\partial Y_j^\beta} = -\frac{p}{V} \cdot \frac{1}{3} \iint_{\xi_1 \xi_2} \phi^\beta N_j + Y_k^\gamma \phi^\gamma (DN_k)_j^\beta d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.65b)$$

5.2.5.4 Condições de simetria da Hessiana do carregamento

Na literatura, é comumente citado que a matriz de rigidez do carregamento, para forças não conservativas, é assimétrica (SCHWEIZERHOF; RAMM, 1984; RUMPEL; SCHWEIZERHOF, 2003). Poucos trabalhos demonstram essa propriedade; alguns são os de Romano (1972) e Sewell (1967). Aqui, uma dedução diferente (e bastante simples) será utilizada. No cálculo de campos vetoriais, sabe-se que a seguinte relação é válida para um campo escalar P :

$$\text{rot}(\nabla P) = 0. \quad (5.66)$$

Quando existe um campo vetorial \vec{F} que é o gradiente de um escalar P ($\vec{F} = \nabla P$), diz-se que \vec{F} é conservativo e P é o potencial associado ao campo. A partir da Equação 5.66, verifica-se que o rotacional de \vec{F} é nulo. Calculando esse rotacional no espaço de coordenadas atuais \vec{y} , tem-se:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_3} - \frac{\partial F_3}{\partial y_1} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \right) \vec{k}. \quad (5.67)$$

Se as forças \vec{F} são conservativas, as três componentes do rotacional calculado pela Equação 5.67 são nulas. Escrevendo em notação indicial e verificando que a derivada da força em relação à posição é a matriz de rigidez (ou Hessiana) do carregamento \mathbf{H}^L :

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = 0 \quad \rightarrow \quad H_{ij}^L = H_{ji}^L. \quad (5.68)$$

Essa relação demonstra que uma matriz de rigidez simétrica está associada aos campos conservativos e, por outro lado, a rigidez associada aos campos não conservativos será assimétrica. Dessa forma, a simetria da matriz de rigidez do carregamento pode ser utilizada para avaliar se as cargas são conservativas ou não.

É importante observar que as forças externas aplicadas podem ser conservativas mesmo que variem segundo as posições atuais, dependendo das condições de contorno e da disposição

do carregamento (RUMPEL; SCHWEIZERHOF, 2003). Duas situações em que isso acontece são os elementos inflados completamente fechados, nos quais há pressão uniforme e não existe contorno, e membranas com pressão uniforme e contorno fixo.

Entretanto, pelo fato de estas serem condições particulares de carga e contorno, foi considerada a mesma formulação para todos os casos, não se assumindo *a priori* a simetria da matriz. Embora isso possa prejudicar o desempenho do código computacional, Schweizerhof e Ramm (1984) indicam que, na maioria das análises, é possível desprezar esta rigidez (considerar o efeito das cargas não conservativas somente no vetor de forças da estrutura) ou considerar apenas os termos simétricos da matriz. Neste trabalho, foi considerada uma forma simétrica \hat{H}^L obtida como

$$\hat{H}^L = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}^L + (\mathbf{H}^L)^t \right). \quad (5.69)$$

Cumpra ainda lembrar que, em problemas não lineares, a matriz Hessiana está relacionada apenas ao método numérico de solução (neste trabalho, o método de Newton-Raphson), e não à posição de equilíbrio em si. Dessa forma, o uso da Hessiana simétrica reduz a taxa de convergência da busca do equilíbrio, mas não influencia na resposta final obtida.

5.3 Elementos finitos utilizados e funções de forma

Nesta pesquisa, vários tipos de elementos finitos são considerados, sempre utilizando a abordagem posicional. Na representação da membrana estrutural, foram utilizados elementos de membrana triangulares e elementos de sólido prismático com base triangular. Na representação dos cabos são utilizados elementos unidimensionais com apenas rigidez axial. As cinemáticas de cada elemento serão detalhadas em seção posterior.

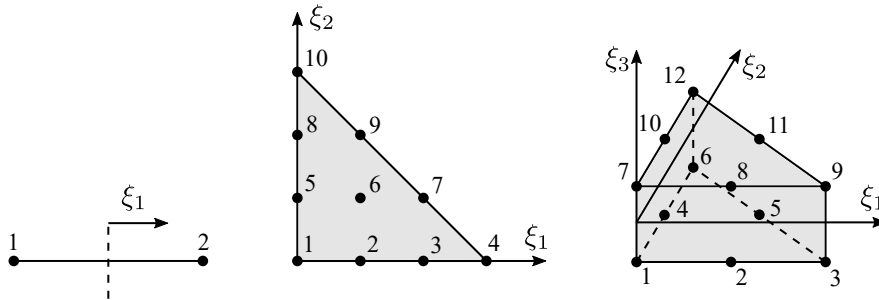
Para as funções de forma, serão considerados polinômios de Lagrange de aproximação linear, quadrática ou cúbica, definindo a quantidade de nós para cada elemento finito. A Figura 41 ilustra alguns casos. Destaca-se que o uso de elementos de aproximação linear é mais comum na literatura, e algumas formulações – como as baseadas na ideia de deformações naturais (ARGYRIS et al., 1979; PAULETTI; PIMENTA, 2008; BARNES, 1999; PAULETTI; ROCHA, 2021) – não são facilmente estendidas para se considerar elementos de alta ordem.

As integrais da formulação são calculadas de forma numérica por meio de um espaço adimensional $\vec{\xi}$. A Tabela 2 indica os limites desse espaço e as quadraturas utilizadas.

Recorda-se que a ideia do MEF é a de representar o domínio contínuo por funções interpoladoras escritas em função dos parâmetros nodais. Assim, tomando como exemplo o espaço adimensional ξ_1, ξ_2 , qualquer variável de interesse $a(\xi_1, \xi_2)$ pode ser escrita como

$$a(\xi_1, \xi_2) = \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) a^\alpha, \quad (5.70)$$

Figura 41 – Exemplos de elementos finitos utilizados: elemento unidimensional de aproximação linear, elemento plano triangular de aproximação cúbica e elemento prismático de sólido com aproximação quadrática na base e linear na espessura.



Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Limites do espaço adimensional e quadraturas utilizadas na integração numérica para os elementos finitos utilizados.

Elemento finito	Limites	Quadratura
Cabo	$-1 \leq \xi_1 \leq 1$	Gauss
Membrana	$0 \leq \xi_1 \leq 1$ $0 \leq \xi_2 \leq 1$	Hammer
Sólido	$0 \leq \xi_1 \leq 1$ $0 \leq \xi_2 \leq 1$ $-1 \leq \xi_3 \leq 1$	Hammer (base); Gauss (espessura)

Fonte: elaborada pelo autor.

sendo ϕ^α a função de forma associada ao nó α e a^α o valor nodal da variável. A repetição do índice α indica soma sobre os nós do elemento.

5.4 Cinemática do elemento de membrana

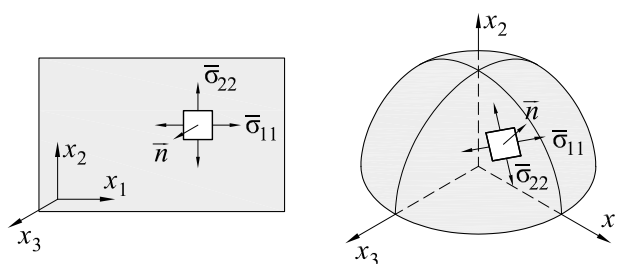
Tendo sido apresentados os principais conceitos sobre a formulação utilizada neste trabalho, destaca-se agora a cinemática adotada para o elemento finito de membrana.

As membranas são elementos estruturais de pequena espessura sujeitas a tensões apenas no plano do elemento. Assim, é razoável considerar que a membrana está sujeita a um estado plano de tensões (EPT) e representá-la por um elemento bidimensional de formulação próxima ao do elemento de chapa, sem rigidez transversal.

No caso de um problema de chapa em duas dimensões e modelo constitutivo isotrópico, o plano de atuação das tensões no elemento coincide com o plano coordenado global tomado como referência para a determinação das posições. Em outras palavras, como existe apenas um plano no problema, a direção de atuação das tensões é óbvia.

Entretanto, para uma superfície no espaço em três dimensões, a direção na qual se desenvolve o EPT pode ser variável, porque acompanha a geometria da superfície. Dessa forma, na subseção 4.3.1.1 foi definido o material transversalmente isotrópico e indicada a necessidade de se adotar um referencial local para a definição da direção normal a essa superfície. Essa situação é ilustrada na Figura 42, na qual $\bar{\sigma}$ denota uma tensão no referencial local e \bar{n} é o vetor normal à superfície.

Figura 42 – Plano de atuação das tensões em superfícies no plano e no espaço.



Fonte: elaborada pelo autor.

O fato de se determinar as direções locais torna bastante simples a consideração de um modelo constitutivo ortotrópico, bastando apenas definir as outras duas direções locais segundo a superfície e estabelecer a relação constitutiva correspondente.

Para um elemento finito de membrana são considerados três graus de liberdade por nó correspondendo às três componentes de deslocamento no espaço, sendo o eixo \bar{x}_3 normal à superfície na configuração inicial definindo o plano tangente de isotropia. De acordo com a hipótese de EPT adotada, impõe-se que a espessura do elemento não varia e que qualquer vetor normal à superfície média (representativa) da membrana na configuração inicial permanece normal à superfície na configuração atual.

A determinação das variáveis globais do problema mecânico (vetores de força e matriz Hessiana) envolve integrais que são calculadas numericamente a partir dos valores da função integrando e da quadratura utilizada. Assim, os eixos locais devem ser definidos para cada ponto de integração para o cálculo de \bar{A}^0 , \bar{A}^1 , \bar{A} , \bar{E} e \bar{S} e suas derivadas, e sua contribuição nas variáveis globais deve ser rotacionada para o referencial global de modo a realizar a soma de todas as parcelas em um mesmo referencial. Quando necessário, as variáveis calculadas no referencial local serão indicadas com uma barra superior.

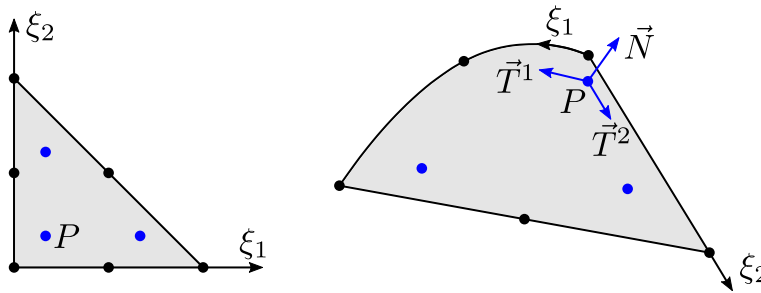
É importante observar que, considerando o elemento finito de membrana como bidimensional, os mapeamentos para o espaço tridimensional resultarão em gradientes de mapeamento \bar{A}^0 e \bar{A}^1 retangulares, de dimensão 3×2 . Dessa forma, algum tratamento matemático é necessário para possibilitar o cálculo da inversa de \bar{A}^0 , tendo em vista que uma matriz retangular não possui inversa. Os tópicos seguintes mostram a determinação dos eixos locais e o mapeamento adotado de forma a permitir o cálculo consistente das variáveis do problema.

5.4.1 Determinação dos eixos locais em um ponto de integração

Para o cálculo da direção normal, escrevem-se os vetores tangentes à superfície segundo a configuração inicial nas direções de ξ_1 e ξ_2 , conforme representação na Figura 43:

$$T_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_1} X_i^\alpha \quad \text{e} \quad T_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_2} X_i^\alpha. \quad (5.71)$$

Figura 43 – Vetores tangentes e normal ao elemento finito em um ponto de integração P .



Fonte: elaborada pelo autor.

O vetor normal é dado por

$$\vec{N} = \vec{T}^1 \times \vec{T}^2, \quad (5.72)$$

e, ainda, pode ser normalizado como

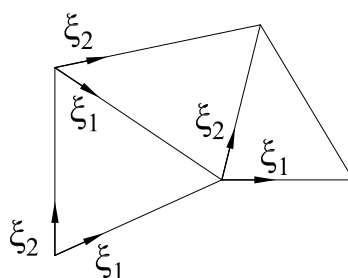
$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}. \quad (5.73)$$

Para a determinação das direções locais no plano tangente à superfície, os vetores \vec{T}^1 e \vec{T}^2 não podem ser utilizados porque seguem as direções dos eixos ξ_1 e ξ_2 , que variam conforme a incidência dos nós dos elementos. Isso é ilustrado na Figura 44. Uma vez que as tensões em um nó da malha são calculadas como a média dos valores obtidos para cada elemento concorrente no nó, as direções locais devem ser definidas de modo a possibilitar o cálculo das tensões de maneira coerente. Se uma das direções tangentes à superfície na configuração atual é conhecida, que é o caso para certas geometrias regulares ou simétricas, é possível calcular a direção restante por meio do produto vetorial entre as duas conhecidas. Por exemplo, considerando as geometrias da Figura 45, percebe-se que vetores paralelos às direções x_1 , x_2 e θ , respectivamente, são tangentes às superfícies mostradas em qualquer posição.

Conhecida uma das direções locais por meio do vetor normalizado \vec{v}^2 , a primeira direção é obtida como

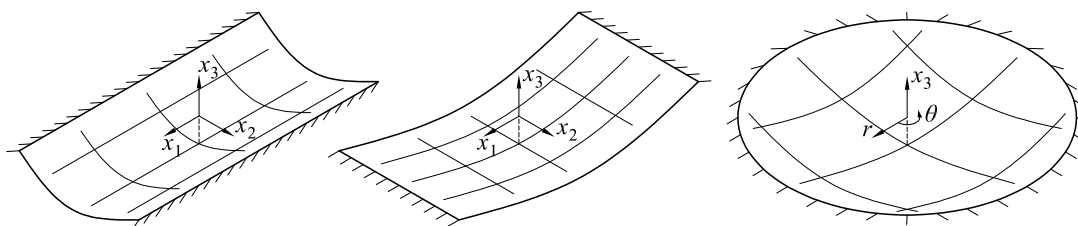
$$\vec{v}^1 = \vec{v}^2 \times \vec{n}. \quad (5.74)$$

Uma opção que pode ser utilizada para geometrias mais genéricas é considerar uma das direções locais como a projeção da direção global no elemento. A Figura 46 mostra o caso

Figura 44 – Direções dos eixos ξ_1 e ξ_2 em elementos adjacentes de uma malha genérica.

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 45 – Superfícies com vetores tangentes conhecidos.

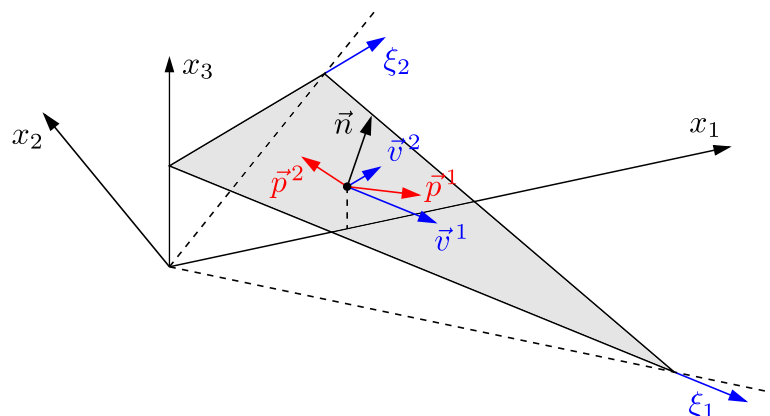


Fonte: elaborada pelo autor.

em que a direção local \bar{x}_1 é tomada como a projeção de x_1 no plano tangente ao elemento (para simplificar o entendimento, o próprio elemento é ilustrado como plano). Para uma base ortonormal qualquer definida por \vec{v}^1 , \vec{v}^2 e \vec{n} , a projeção \vec{p}^1 do eixo x_1 (vetor \vec{i}) no plano tangente é dada por:

$$\vec{p}^1 = (\vec{i} \cdot \vec{v}^1) \vec{v}^1 + (\vec{i} \cdot \vec{v}^2) \vec{v}^2. \quad (5.75)$$

Figura 46 – Determinação de um eixo local como projeção de um eixo global no plano tangente. Os vetores \vec{v}^1 e \vec{v}^2 (em azul) tem a mesma direção que os vetores tangentes segundo ξ_1 e ξ_2 . Os vetores \vec{p}^1 e \vec{p}^2 (em vermelho) são as projeções no plano dos eixos x_1 e x_2 .



Fonte: elaborada pelo autor.

Calcula-se o novo vetor \vec{v}^1 normalizando \vec{p}^1 :

$$\vec{v}^1 = \frac{\vec{p}^1}{\|\vec{p}^1\|}, \quad (5.76)$$

e calcula-se o novo vetor \vec{v}^2 , de modo a manter a base como ortonormal:

$$\vec{v}^2 = \vec{n} \times \vec{v}^1. \quad (5.77)$$

Com os três vetores normalizados, escreve-se a matriz de rotação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & n_1 \\ v_2^1 & v_2^2 & n_2 \\ v_3^1 & v_3^2 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

Essa matriz de rotação transforma as coordenadas \bar{X}_i e \bar{Y}_i segundo o referencial local nas coordenadas globais X_i e Y_i :

$$\vec{X} = \mathbf{R} \cdot \vec{\bar{X}} \quad \text{e} \quad \vec{Y} = \mathbf{R} \cdot \vec{\bar{Y}}, \quad (5.79)$$

e, inversamente:

$$\vec{\bar{X}} = \mathbf{R}^t \cdot \vec{X} \quad \text{e} \quad \vec{\bar{Y}} = \mathbf{R}^t \cdot \vec{Y}. \quad (5.80)$$

5.4.2 Mapeamento posicional do elemento de membrana

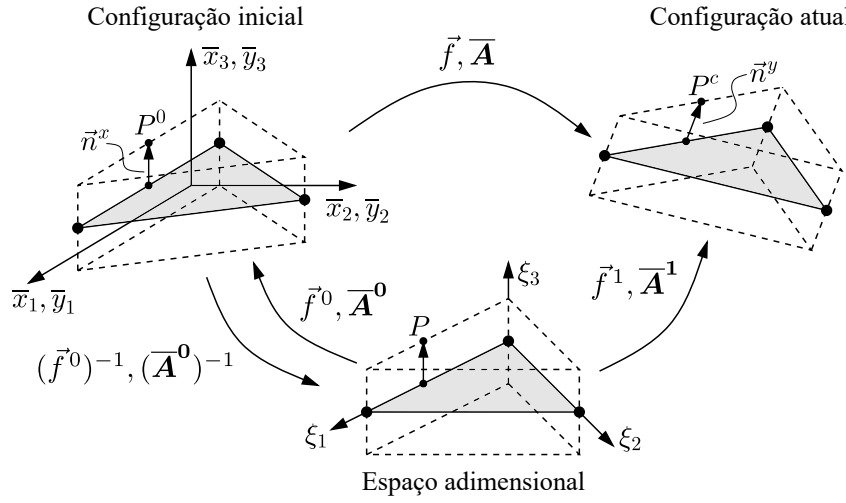
Neste trabalho, o elemento finito de membrana é considerado como elemento de sólido falso ou degenerado, com uma aproximação constante (polinômio de grau 0) na direção da espessura. O mapeamento dessa terceira dimensão é feito por meio de uma coordenada adimensional ξ_3 , variando no intervalo $[-0,5; 0,5]$ e cuja origem se encontra na superfície média da membrana. Com a consideração dessa terceira dimensão, definida em função das outras duas (ξ_1 e ξ_2), os mapeamentos sempre ocorrem entre espaços tridimensionais e isso leva a uma definição mais consistente dos gradientes $\bar{\mathbf{A}}^0$ e $\bar{\mathbf{A}}^1$, que serão quadrados e inversíveis.

Seja o elemento finito mostrado na Figura 47, com aproximação de grau qualquer no plano médio da membrana e com a aproximação constante na espessura. Uma aproximação constante implica em somente uma camada de nós na superfície média e na consideração de valores constantes para as variáveis nessa direção, o que é muito semelhante à consideração de elemento plano em EPT (se considerarmos tensão constante) ou em EPD (se considerarmos deformação constante).

Um ponto qualquer do sólido P^0 na configuração inicial, após o deslocamento ou movimento do corpo, se encontra na posição P^c na configuração atual. Assim, o mapeamento da configuração inicial usando os eixos locais é descrito como

$$\vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{x}_i = \bar{X}_i^\alpha \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) + t \xi_3 n_i^x, \quad (5.81)$$

Figura 47 – Mapeamentos inicial e atual e função mudança de configuração.



Fonte: elaborada pelo autor.

sendo t a espessura do elemento e \vec{n}^x o vetor normal unitário à superfície média na configuração inicial na projeção do ponto P^0 .

O gradiente de mapeamento inicial nas coordenadas locais $\bar{\mathbf{A}}^0$ é dado então por

$$\bar{A}_{ij}^0 = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_j} = \bar{X}_i^\alpha \phi_{,j}^\alpha + t (\xi_3 n_{i,j}^x + \delta_{3j} n_i^x). \quad (5.82)$$

Uma vez que $\xi_3 = 0$ na superfície média do elemento e as funções de forma não dependem de ξ_3 , tem-se:

$$\bar{\mathbf{A}}^0 = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{X}_1^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_1^x \\ \bar{X}_2^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{X}_2^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_2^x \\ \bar{X}_3^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{X}_3^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_3^x \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Como os eixos locais foram definidos de forma a que a direção 3 seja normal à superfície média no ponto e as direções 1 e 2 sejam tangentes, sabe-se que

$$\vec{n}^x = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \quad \text{e} \quad \bar{X}_3^\alpha \phi_{,1}^\alpha = \bar{X}_3^\alpha \phi_{,2}^\alpha = 0. \quad (5.84)$$

Substituindo na Equação 5.83:

$$\bar{\mathbf{A}}^0 = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{X}_1^\alpha \phi_{,2}^\alpha & 0 \\ \bar{X}_2^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{X}_2^\alpha \phi_{,2}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

O mapeamento atual é feito de forma análoga ao mapeamento inicial:

$$\vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{y}_i = \bar{Y}_i^\alpha \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2) + t \xi_3 n_i^y, \quad (5.86)$$

com a diferença de que o vetor \vec{n}^y é, agora, normal à superfície na configuração atual. O gradiente de mapeamento atual é dado por

$$\bar{A}_{ij}^1 = \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \xi_j} = \bar{Y}_i^\alpha \phi_{,j}^\alpha + t (\xi_3 n_{i,j}^y + \delta_{3j} n_i^y) \quad (5.87)$$

e, na forma matricial,

$$\bar{\mathbf{A}}^1 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{Y}_1^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_1^y \\ \bar{Y}_2^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{Y}_2^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_2^y \\ \bar{Y}_3^\alpha \phi_{,1}^\alpha & \bar{Y}_3^\alpha \phi_{,2}^\alpha & t n_3^y \end{bmatrix}. \quad (5.88)$$

Deve-se observar que o vetor \vec{n}^y é normal à superfície média na configuração atual, porém escrito conforme os eixos tangentes e normais à superfície na configuração inicial. Portanto, condições correspondentes às da Equação 5.84 não são aplicáveis.

Nota-se ainda que no gradiente da função mudança de configuração $\bar{\mathbf{A}}$ não aparece a espessura t do elemento. Escrevendo os termos de $\bar{\mathbf{A}}^1$ e da inversa de $\bar{\mathbf{A}}^0$ de forma genérica como a_{ij}^1 e a_{ij}^0 , é possível obter:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^1 \cdot (\bar{\mathbf{A}}^0)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & t n_1^y \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & t n_2^y \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & t n_3^y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & 0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & n_1^y \\ a_{21} & a_{22} & n_2^y \\ a_{31} & a_{32} & n_3^y \end{bmatrix}. \quad (5.89)$$

Assim, por simplicidade, será considerado $t = 1$ nas deduções subsequentes e o mesmo valor foi utilizado no código computacional.

5.4.3 Cálculo da força interna e da matriz Hessiana para o elemento de membrana

A partir do gradiente da função mudança de configuração, calculam-se a deformação de Green-Lagrange e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie utilizando as mesmas relações demonstradas nas seções anteriores. É necessário ainda determinar as derivadas primeira e segunda do gradiente de mapeamento $\bar{\mathbf{A}}^1$ para calcular as derivadas de $\bar{\mathbf{E}}$ que serão utilizadas para se obter as contribuições no vetor de forças internas e na matriz Hessiana.

A derivada primeira de $\bar{\mathbf{A}}^1$ para o mapeamento adotado é obtida derivando-se a Equação 5.87. Relembrando que $\xi_3 = 0$ para qualquer ponto do elemento, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{A}_{ij}^1}{\partial Y_m^\theta} = \frac{\partial (\bar{Y}_i^\alpha \phi_{,j}^\alpha + \delta_{3j} n_i^y)}{\partial Y_m^\theta} = \phi_{,j}^\alpha \delta_{im} \delta_{\alpha\theta} + \delta_{3j} \frac{\partial n_i^y}{\partial Y_m^\theta} = \phi_{,j}^\theta \delta_{im} + \delta_{3j} \frac{\partial n_i^y}{\partial Y_m^\theta}. \quad (5.90)$$

A derivada segunda de $\bar{\mathbf{A}}^1$ não é nula devido à derivada do vetor normal que aparece na Equação 5.90:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}_{ij}^1}{\partial Y_m^\theta \partial Y_n^\lambda} = \frac{\partial}{\partial Y_n^\lambda} \left(\frac{\partial \bar{A}_{ij}^1}{\partial Y_m^\theta} \right) = \delta_{3j} \frac{\partial^2 n_i^y}{\partial Y_m^\theta \partial Y_n^\lambda}. \quad (5.91)$$

Em um primeiro momento, parece necessário calcular as derivadas do vetor normal unitário na configuração atual para o uso das Equações 5.90 e 5.91. Entretanto, pode-se prescindir da inclusão desses valores nas equações. Para esclarecer esse ponto, recorda-se que as contribuições do caso estático para a força interna e a matriz Hessiana, no referencial local, são dadas por

$$\bar{\mathbf{H}} = \int_{V_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} + \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} dV_0 \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{F}}^{\text{int}} = \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}}. \quad (5.92)$$

Como a membrana está sendo considerada em estado plano de tensão, $\bar{\mathbf{S}}$ tem, necessariamente, a forma

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & 0 \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.93)$$

e o mesmo é válido para $\partial \bar{\mathbf{S}} / \partial \bar{\mathbf{Y}}$ quando este é entendido como um tensor de segunda ordem para cada componente de $\bar{\mathbf{Y}}$. Esse raciocínio também pode ser utilizado para as derivadas da deformação $\bar{\mathbf{E}}$ e considerar os termos da Equação 5.92 como uma série de contrações de segunda ordem entre tensores do tipo da Equação 5.93 ($\bar{\mathbf{S}}$ e $\partial \bar{\mathbf{S}} / \partial \bar{\mathbf{Y}}$) com outros tensores de segunda ordem ($\partial \bar{\mathbf{E}} / \partial \bar{\mathbf{Y}}$ e $\partial^2 \bar{\mathbf{E}} / \partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}$).

Isto posto, é possível demonstrar que, devido ao termo δ_{3j} que multiplica as derivadas de \bar{n}^y , essas derivadas aparecerão apenas nos termos da terceira linha ou coluna das derivadas de $\bar{\mathbf{E}}$. Portanto, quando do cálculo das contrações duplas com tensores do tipo da Equação 5.93, a contribuição na força interna e na Hessiana será nula. Dessa forma, é possível desprezar as derivadas de \bar{n}^y no cálculo das Equações 5.90 e 5.91, considerando as derivadas de $\bar{\mathbf{A}}^1$ para o elemento de membrana como semelhantes às do elemento finito no plano, apresentadas anteriormente.

Finalmente, as contribuições no vetor de forças internas e na parcela estática da matriz Hessiana obtidas para cada ponto de integração são rotacionadas para o referencial global para a acumulação nas variáveis globais do problema:

$$\bar{\mathbf{F}}^{\text{int}} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{\text{int}}; \quad (5.94)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R}^t. \quad (5.95)$$

No código computacional, a rotação pode ser feita para cada ponto de integração individualmente, sem a montagem de variáveis locais de força interna e matriz Hessiana, escrevendo

as Equações 5.94 e 5.95 em notação indicial:

$$f_i^{int} = r_{ij} \bar{f}_j^{int}; \quad (5.96)$$

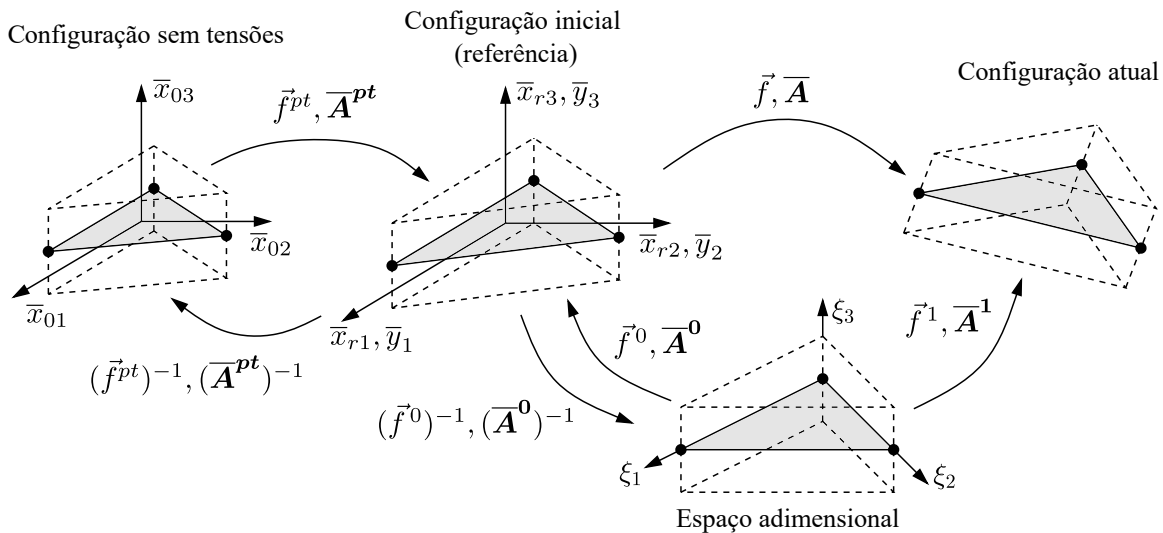
$$h_{il} = r_{ij} \bar{h}_{jk} r_{lk}. \quad (5.97)$$

Pensando nos índices i e l como as direções globais variando de 1 a 3, percebe-se a necessidade, no código, de realizar um *loop* para o cálculo de f_i^{int} e dois *loops* para o cálculo de h_{il} a partir da contribuição de cada ponto de integração calculada no referencial local.

5.4.4 Consideração de pré-tensionamento na membrana

Devido à baixa rigidez, é comum que as estruturas em membrana estejam sujeitas a um pré-tensionamento para prover rigidez geométrica ao sistema. Usualmente, a configuração inicial de referência informada como dado de entrada no cálculo não é sem tensões, mas já se encontra tensionada. Para o cálculo correto das deformações (que devem ser calculadas em relação a uma configuração sem tensões), é necessário calcular um gradiente de pré-tensionamento $\bar{\mathbf{A}}^{pt}$ que relaciona as configurações de referência \bar{x}_r e sem tensões \bar{x}_0 , como mostrado na Figura 48.

Figura 48 – Configuração sem tensões e gradiente de pré-tensionamento.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma forma simples de aplicar o pré-tensionamento é calcular $\bar{\mathbf{A}}$ de modo a considerar a mudança de configuração do espaço adimensional até a configuração sem tensões, ou seja, atualizar o valor de $\bar{\mathbf{A}}^0$ para $\bar{\mathbf{A}}^{0pt}$ fazendo

$$\bar{\mathbf{A}}^{0pt} = (\bar{\mathbf{A}}^{pt})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}}^0. \quad (5.98)$$

O gradiente $\overline{\mathbf{A}}^{pt}$ é dado por

$$\overline{\mathbf{A}}^{pt} = \frac{\partial \vec{\bar{x}}_r}{\partial \vec{\bar{x}}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{r1}}{\partial \bar{x}_{01}} & \frac{\partial \bar{x}_{r1}}{\partial \bar{x}_{02}} & \frac{\partial \bar{x}_{r1}}{\partial \bar{x}_{03}} \\ \frac{\partial \bar{x}_{r2}}{\partial \bar{x}_{01}} & \frac{\partial \bar{x}_{r2}}{\partial \bar{x}_{02}} & \frac{\partial \bar{x}_{r2}}{\partial \bar{x}_{03}} \\ \frac{\partial \bar{x}_{r3}}{\partial \bar{x}_{01}} & \frac{\partial \bar{x}_{r3}}{\partial \bar{x}_{02}} & \frac{\partial \bar{x}_{r3}}{\partial \bar{x}_{03}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{pt} & a_{12}^{pt} & a_{13}^{pt} \\ a_{21}^{pt} & a_{22}^{pt} & a_{23}^{pt} \\ a_{31}^{pt} & a_{32}^{pt} & a_{33}^{pt} \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

O gradiente $\overline{\mathbf{A}}^{pt}$ é calculado de acordo com o estado de pré-tensionamento $\overline{\mathbf{S}}^{pt}$ imposto. Com as tensões, calculam-se as deformações de pré-tensionamento $\overline{\mathbf{E}}^{pt}$ a partir da relação constitutiva:

$$\overline{\mathbf{S}}^{pt} = \mathbb{C} : \overline{\mathbf{E}}^{pt} \quad \rightarrow \quad \overline{\mathbf{E}}^{pt} = \mathbb{C}^{-1} : \overline{\mathbf{S}}^{pt}. \quad (5.100)$$

Então:

$$\overline{\mathbf{E}}^{pt} = \frac{1}{2} \left(\left(\overline{\mathbf{A}}^{pt} \right)^t \cdot \overline{\mathbf{A}}^{pt} - \mathbf{I} \right) \quad \rightarrow \quad \left(\overline{\mathbf{A}}^{pt} \right)^t \cdot \overline{\mathbf{A}}^{pt} = 2\overline{\mathbf{E}}^{pt} + \mathbf{I}. \quad (5.101)$$

Explicitando a equação anterior em termos das componentes:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}^{pt})^2 + (a_{21}^{pt})^2 + (a_{31}^{pt})^2 & a_{11}^{pt}a_{12}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{22}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{32}^{pt} & a_{11}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{33}^{pt} \\ a_{11}^{pt}a_{12}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{22}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{32}^{pt} & (a_{12}^{pt})^2 + (a_{22}^{pt})^2 + (a_{32}^{pt})^2 & a_{12}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{22}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{32}^{pt}a_{33}^{pt} \\ a_{11}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{33}^{pt} & a_{12}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{22}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{32}^{pt}a_{33}^{pt} & (a_{13}^{pt})^2 + (a_{23}^{pt})^2 + (a_{33}^{pt})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\overline{E}_{11}^{pt} + 1 & 2\overline{E}_{12}^{pt} & 2\overline{E}_{13}^{pt} \\ 2\overline{E}_{21}^{pt} & 2\overline{E}_{22}^{pt} + 1 & 2\overline{E}_{23}^{pt} \\ 2\overline{E}_{31}^{pt} & 2\overline{E}_{32}^{pt} & 2\overline{E}_{33}^{pt} + 1 \end{bmatrix}, \quad (5.102)$$

que, devido à simetria das duas matrizes, é um sistema com 6 equações independentes e 9 incógnitas:

$$\begin{cases} (a_{11}^{pt})^2 + (a_{21}^{pt})^2 + (a_{31}^{pt})^2 = 2\overline{E}_{11}^{pt} + 1 \\ (a_{12}^{pt})^2 + (a_{22}^{pt})^2 + (a_{32}^{pt})^2 = 2\overline{E}_{22}^{pt} + 1 \\ (a_{13}^{pt})^2 + (a_{23}^{pt})^2 + (a_{33}^{pt})^2 = 2\overline{E}_{33}^{pt} + 1 \\ a_{11}^{pt}a_{12}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{22}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{32}^{pt} = 2\overline{E}_{12}^{pt} \\ a_{11}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{21}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{31}^{pt}a_{33}^{pt} = 2\overline{E}_{13}^{pt} \\ a_{12}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{22}^{pt}a_{23}^{pt} + a_{32}^{pt}a_{33}^{pt} = 2\overline{E}_{23}^{pt} \end{cases}. \quad (5.103)$$

Sendo um sistema subdeterminado (mais incógnitas que equações), existe um número infinito de soluções, ou seja, a configuração sem tensões \bar{x}_0 (para o ponto de integração considerado) não é única. Uma solução possível pode ser encontrada impondo-se algumas relações sobre as variáveis. Inicialmente, considera-se que \bar{x}_{r3} e \bar{x}_{03} tem a mesma direção, ou seja, os planos $\bar{x}_{r1}\bar{x}_{r2}$ e $\bar{x}_{01}\bar{x}_{02}$ são idênticos com a direção 3 normal a ambos os planos. Isso leva a

$$a_{31}^{pt} = \frac{\partial \bar{x}_{r3}}{\partial \bar{x}_{01}} = 0 \quad \text{e} \quad a_{32}^{pt} = \frac{\partial \bar{x}_{r3}}{\partial \bar{x}_{02}} = 0. \quad (5.104)$$

Considerando ainda que \bar{x}_{r1} e \bar{x}_{01} tem a mesma direção, tem-se:

$$a_{21}^{pt} = \frac{\partial \bar{x}_{r2}}{\partial \bar{x}_{01}} = 0. \quad (5.105)$$

Substituindo-se esses valores na Equação 5.103, tem-se um novo sistema com a mesma quantidade de equações e incógnitas:

$$\begin{cases} (a_{11}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{11}^{pt} + 1 \\ (a_{12}^{pt})^2 + (a_{22}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{22}^{pt} + 1 \\ (a_{13}^{pt})^2 + (a_{23}^{pt})^2 + (a_{33}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{33}^{pt} + 1 \\ a_{11}^{pt}a_{12}^{pt} = 2\bar{E}_{12}^{pt} \\ a_{11}^{pt}a_{13}^{pt} = 2\bar{E}_{13}^{pt} \\ a_{12}^{pt}a_{13}^{pt} + a_{22}^{pt}a_{23}^{pt} = 2\bar{E}_{23}^{pt} \end{cases}. \quad (5.106)$$

Esse sistema é válido para *qualquer* estado de pré-tensionamento \bar{S}^{pt} imposto. Entretanto, no caso de estruturas de membrana (ainda que o elemento finito utilizado seja o de sólido), o pré-tensionamento será imposto no plano 12 ($\bar{E}_{13}^{pt} = \bar{E}_{23}^{pt} = 0$) e de tração ($a_{11}^{pt} > 1$ e $a_{22}^{pt} > 1$). Nessas condições, obtém-se $a_{13}^{pt} = 0$ e $a_{23}^{pt} = 0$. Sobram 4 equações que definem os 4 últimos termos de \bar{A}^{pt} :

$$\begin{cases} (a_{11}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{11}^{pt} + 1 \\ (a_{12}^{pt})^2 + (a_{22}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{22}^{pt} + 1 \\ (a_{33}^{pt})^2 = 2\bar{E}_{33}^{pt} + 1 \\ a_{11}^{pt}a_{12}^{pt} = 2\bar{E}_{12}^{pt} \end{cases}. \quad (5.107)$$

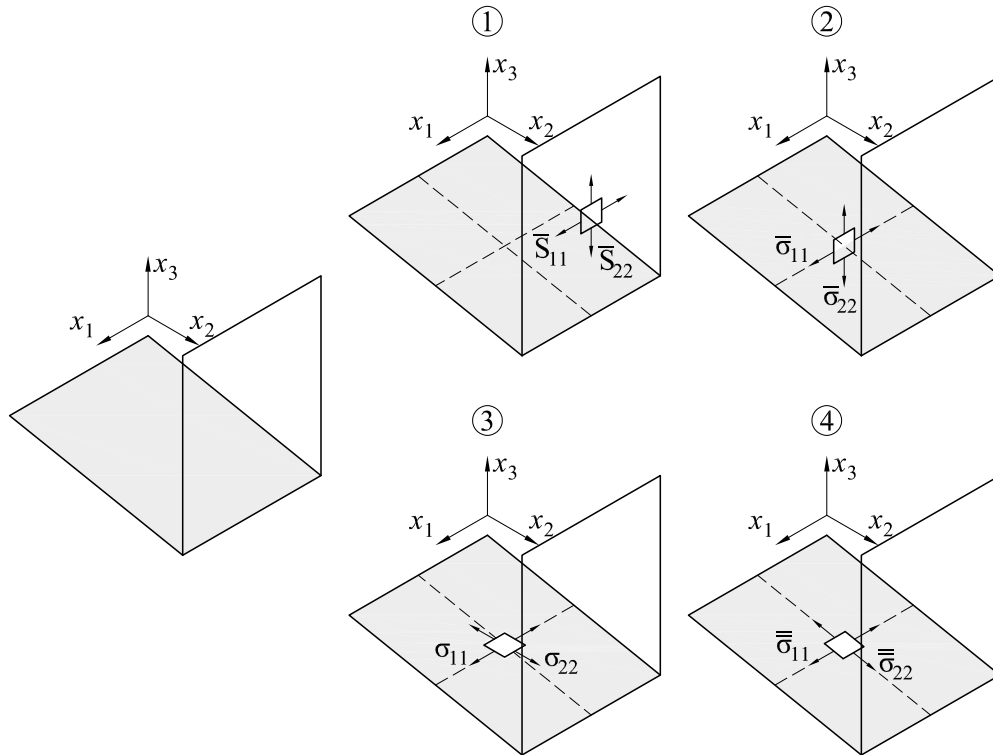
Para o elemento finito de membrana em EPT, não se considera variação na espessura ($\bar{E}_{33}^{pt} = 0$), de modo que $a_{33}^{pt} = 1$. Para o elemento de sólido, isso não ocorre e o valor de a_{33}^{pt} deve ser calculado.

5.4.5 Cálculo das tensões na configuração atual

Devido ao caráter lagrangiano total da formulação adotada, é necessário uma etapa de pós-processamento para determinar o valor das tensões com significado físico prático para o usuário. Essa etapa é detalhada na Figura 49.

A Figura 49 indica uma superfície qualquer na configuração inicial (plano vertical, transparente) e na configuração atual (plano inclinado, cinza). Conhecendo-se a configuração deformada, calculam-se as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \bar{S} com as equações já apresentadas. Uma vez que a configuração de referência é a inicial com os eixos locais, a

Figura 49 – Passos para a determinação das tensões com significado físico prático.



Fonte: elaborada pelo autor.

direção das tensões normais para um elemento infinitesimal é mostrada no passo 1. Determinado \bar{S} , calculam-se as tensões de Cauchy $\bar{\sigma}$ com a Equação 4.46. As direções de $\bar{\sigma}$ acompanham as de \bar{S} e são mostradas no passo 2.

Percebe-se que, apesar das tensões $\bar{\sigma}$ possuírem significado físico, são de pouco uso prático, pois se referem a um estado plano de tensões estando direcionadas fora desse plano. Convém rotacionar o tensor $\bar{\sigma}$ para a configuração atual, o que pode ser feito em duas etapas: primeiramente, $\bar{\sigma}$ é rotacionado para o sistema global de referência (passo 3):

$$\sigma = R \cdot \bar{\sigma} \cdot R^t. \quad (5.108)$$

Por fim, a determinação das tensões de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$ nos eixos locais da configuração atual (passo 4) é feita por:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{R}}^t \cdot \sigma \cdot \bar{\bar{R}}. \quad (5.109)$$

A matriz de rotação $\bar{\bar{R}}$ é calculada de maneira semelhante à R , porém com os vetores tangentes \bar{T}^1 e \bar{T}^2 calculados como:

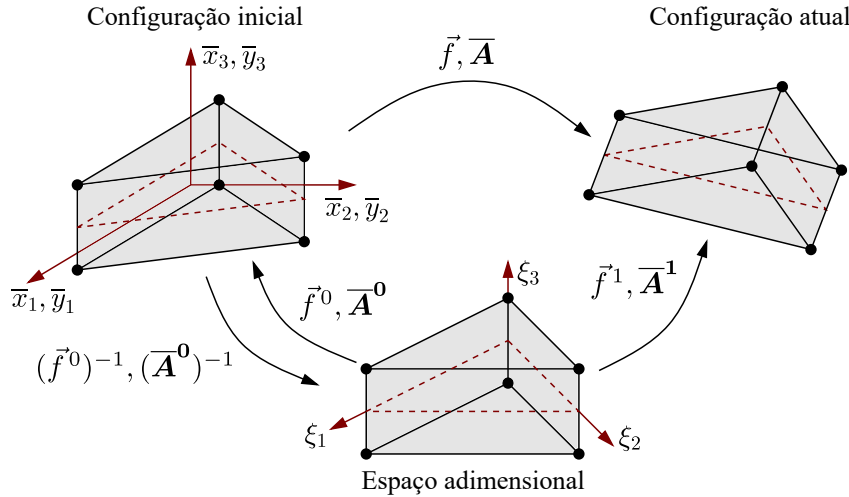
$$T_i^1 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_1} Y_i^\alpha \quad \text{e} \quad T_i^2 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_2} Y_i^\alpha, \quad (5.110)$$

procedendo-se, então, de maneira semelhante ao disposto nas Equações 5.72 a 5.78.

5.5 Cinemática do elemento de sólido

O elemento finito posicional de sólido considerado, de forma prismática com base retangular, é uma extensão tridimensional do elemento finito de membrana (Figura 50).

Figura 50 – Mapeamentos inicial e atual e função mudança de configuração para o sólido.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os mapeamentos inicial e atual são dados por

$$\vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_i = X_i^\alpha \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{e} \quad (5.111a)$$

$$\vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = y_i = Y_i^\alpha \phi^\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (5.111b)$$

e os gradientes desses mapeamentos são

$$\mathbf{A}^0 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = X_i^\alpha \phi_{,j}^\alpha = \begin{bmatrix} X_1^\alpha \phi_{,1}^\alpha & X_1^\alpha \phi_{,2}^\alpha & X_1^\alpha \phi_{,3}^\alpha \\ X_2^\alpha \phi_{,1}^\alpha & X_2^\alpha \phi_{,2}^\alpha & X_2^\alpha \phi_{,3}^\alpha \\ X_3^\alpha \phi_{,1}^\alpha & X_3^\alpha \phi_{,2}^\alpha & X_3^\alpha \phi_{,3}^\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (5.112a)$$

$$\mathbf{A}^1 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} = Y_i^\alpha \phi_{,j}^\alpha = \begin{bmatrix} Y_1^\alpha \phi_{,1}^\alpha & Y_1^\alpha \phi_{,2}^\alpha & Y_1^\alpha \phi_{,3}^\alpha \\ Y_2^\alpha \phi_{,1}^\alpha & Y_2^\alpha \phi_{,2}^\alpha & Y_2^\alpha \phi_{,3}^\alpha \\ Y_3^\alpha \phi_{,1}^\alpha & Y_3^\alpha \phi_{,2}^\alpha & Y_3^\alpha \phi_{,3}^\alpha \end{bmatrix}. \quad (5.112b)$$

Não é necessário adotar eixos locais para o cálculo das variáveis (\mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{S} , etc.), mas o fato de uma das direções do sólido ser muito menor que as outras duas faz com que, fisicamente, as tensões na direção da superfície sejam de maior importância prática do que aquelas na direção da espessura. É comum que o pré-tensionamento seja imposto conforme as direções locais tangentes à superfície, e, do mesmo modo, os resultados finais de tensões atuantes são mais bem avaliados quando tomados nesse referencial. Dessa forma, também foi utilizado um sistema de eixos locais para o cálculo das variáveis do problema para o elemento de sólido. O sistema local

foi definido considerando a projeção do ponto de integração na superfície média do sólido e determinando o plano tangente à essa superfície, semelhante à determinação dos eixos locais para o elemento de membrana (subseção 5.4.1).

Em relação ao modelo constitutivo, para o elemento de sólido foi adotado o mesmo considerado para o elemento de membrana (Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico), porém no caso tridimensional, sem a necessidade de imposição de $\nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0$ para definir o material transversalmente isotrópico. As matrizes constitutiva e sua inversa são as indicadas nas Equações 4.57 e 4.58.

Nas situações em que há a possibilidade de enrugamento dos elementos estruturais, importa observar que o estado de tensões \bar{S} calculado nos pontos de integração do sólido contém a contribuição de tensões de flexão que não existem na teoria de membrana. Entretanto, essas tensões são de pequena magnitude quando comparadas com as tensões no plano devido à espessura reduzida dos elementos. Dessa forma, o modelo de enrugamento utilizado para o sólido foi o mesmo que o definido anteriormente para o elemento de membrana (subseção 3.3.3), reconhecendo-se o caráter aproximado desta estratégia, porém considerada válida para as aplicações aqui descritas.

5.6 Formulação posicional e cinemática do elemento de cabo

Nesta seção será definida a cinemática adotada para o elemento finito de cabo. Este elemento foi considerado como semelhante a um elemento de treliça, uma vez que, para ambos, não se leva em conta a rigidez à flexão e considera-se somente as forças axiais. Desta forma, a formulação do MEF Posicional para treliças será brevemente descrita, aproveitando-se os conceitos e equações já apresentados nas seções anteriores. Maiores detalhes podem ser encontrados em Coda (2018) e Silva (2020).

A diferença principal entre os elementos de treliça e cabo consiste no fato de que os cabos não tem rigidez à compressão, podendo estar submetidos apenas à forças de tração. No modelo numérico, o pré-tensionamento adotado e a própria geometria da estrutura, com elementos de cabo articulados nas extremidades ligados de forma concatenada, evitam o aparecimento das forças de compressão. A matriz Hessiana do cabo descarregado é singular, porém a rigidez geométrica provida pelo pré-tensionamento e pelas tensões induzidas pelo próprio carregamento tornam possível a análise da estrutura.

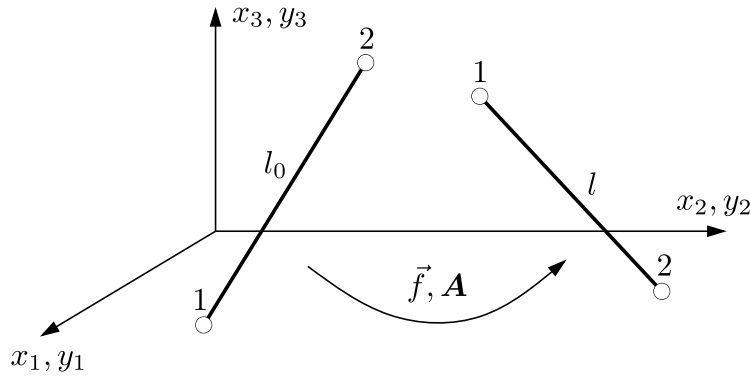
Os elementos de cabo utilizados são de aproximação linear, com 6 graus de liberdade de posição por elemento (3 por nó). Considera-se que a área da seção transversal A_0 permanece constante durante a deformação e, de acordo com o modelo de treliça, as cargas externas são aplicadas de forma concentrada nos nós.

5.6.1 Deformações, tensões e modelo constitutivo para o elemento de cabo

O uso de elementos de aproximação linear implica em deformação constante ao longo do elemento e definida apenas com base nos comprimentos inicial l_0 e atual l (Figura 51). A deformação de Green pode ser escrita verificando-se que, para o caso unidimensional, $\mathbf{A} = l/l_0$ e $\mathbf{I} = 1$ (escalares), de modo que a Equação 4.5 se torna

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.113)$$

Figura 51 – Função mudança de configuração para o cabo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os comprimentos l_0 e l são calculados de acordo com as posições nodais:

$$l_0^2 = (X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2 \quad \text{e} \quad (5.114a)$$

$$l^2 = (Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2. \quad (5.114b)$$

O modelo constitutivo adotado é o de Saint-Venant-Kirchhoff elástico, em que se considera uma relação linear entre a deformação de Green E e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S , dada por

$$S = KE, \quad (5.115)$$

sendo K o módulo de elasticidade do material. A energia específica de deformação (energia livre de Helmholtz) é escrita como

$$\psi = \frac{1}{2} KE^2. \quad (5.116)$$

5.6.2 Forças internas e matriz Hessiana estática do elemento de cabo

Para determinar as forças internas no elemento de cabo, calcula-se a derivada da deformação E em relação às posições nodais para o uso da Equação 5.13c. Derivando a Equação 5.113

com o valor de l dado pela Equação 5.114b e observando que l_0 não depende das posições atuais, tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{l_0^2}. \quad (5.117)$$

Multiplicando pela tensão S e fazendo a integração no domínio do elemento, com $V_0 = A_0 l_0$:

$$(F^{int})_i^\alpha = (-1)^\alpha S A_0 \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{l_0}. \quad (5.118)$$

Analisando a equação anterior, verifica-se que a força normal N em cada elemento é calculada como:

$$F^{int} = N = S A_0 \frac{l}{l_0}, \quad (5.119)$$

e que a relação entre a tensão de Cauchy $\sigma = N/A_0$ e S é

$$\sigma = S \frac{l}{l_0} = S J, \quad (5.120)$$

sendo $J = l/l_0$ o jacobiano da mudança de configuração.

Para o cálculo da matriz Hessiana do elemento, é necessário a derivada segunda da deformação, dada por

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{(-1)^\alpha (-1)^\beta}{l_0^2} \delta_{ij}. \quad (5.121)$$

Substituindo na Equação 5.58 e fazendo a integração no domínio do elemento, obtém-se:

$$H_{ij}^{\alpha\beta} = (-1)^\alpha (-1)^\beta \frac{K A_0}{l_0} \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{l_0} \frac{(Y_j^2 - Y_j^1)}{l_0} + (-1)^\alpha (-1)^\beta \frac{S A_0}{l_0} \delta_{ij}. \quad (5.122)$$

As duas parcelas da Equação 5.122 correspondem, respectivamente, às rigidezes elástica e geométrica do elemento de cabo.

5.6.3 Matriz de massa do elemento de cabo

Em um problema estático, a inclusão dos elementos de cabo requer apenas o cálculo do vetor de forças internas e da matriz Hessiana, demonstrados anteriormente. No caso de um problema dinâmico, deve-se levar em consideração as forças inerciais e de amortecimento e ainda as matrizes de massa e de amortecimento do elemento. Para as forças, a aceleração e a velocidade são escritas em função das posições de acordo com o método de integração no tempo adotado; quanto à matriz de amortecimento, é considerada como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez (Hessiana estática). Resta determinar a matriz de massa do elemento de cabo.

Na definição da matriz de massa, pode-se considerar a massa concentrada nos nós do elemento, obtendo uma matriz diagonal, ou calcular os coeficientes de acordo com as funções de forma, caso em que a matriz é denominada consistente. Uma das vantagens da matriz de massa concentrada é o ganho computacional decorrente de se armazenar e manipular apenas os termos da diagonal principal da matriz; entretanto, uma vez que está sendo utilizada a matriz consistente para os elementos de membrana e sólido, essa vantagem não se aplicaria nesse caso. Dessa forma, considerou-se a matriz de massa consistente também para o elemento de cabo, dada pela Equação 5.42.

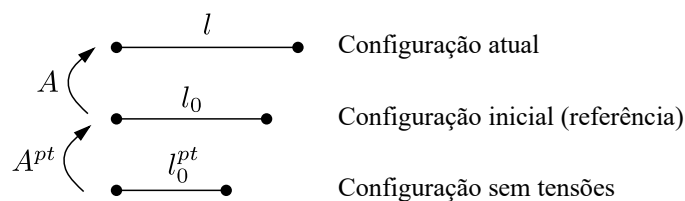
Substituindo as funções de forma do elemento linear na Equação 5.42 e efetuando a integração, obtém-se a matriz de massa consistente do elemento de cabo:

$$M^{el} = \frac{\rho_0 A_0 l_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.123)$$

5.6.4 Consideração de pré-tensionamento no cabo

É uma prática usual considerar um pré-tensionamento nos cabos que compõe a estrutura, assim como descrito para os elementos de membrana. Para a aplicação do pré-tensionamento, observa-se que o gradiente da função mudança de configuração A é definido pelos comprimentos dos elementos nas várias configurações, como indicado na Figura 52.

Figura 52 – Configurações sem tensões, inicial e atual para o elemento de cabo com pré-tensionamento.



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a aplicação do pré-tensionamento, deve-se considerar a mudança de configuração do estado sem tensões para a configuração atual, ou seja, atualizar o valor de A de modo a considerar o gradiente A^{pt} . Como as deformações são calculadas com base nos comprimentos do elemento, essa atualização é equivalente a alterar o comprimento inicial l_0 para um valor l_0^{pt} e

calcular E fazendo

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{l_0^{pt}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.124)$$

O comprimento l_0^{pt} é definido com base na força de pré-tensionamento N^{pt} imposta para o elemento. Essa força será considerada como atuando na configuração inicial, ou seja, produzindo uma tensão $S^{pt} = N^{pt}/A_0$. A consideração de N^{pt} atuando na configuração atual, produzindo uma tensão $\sigma^{pt} = N^{pt}/A_0$, recai em uma equação não linear para a determinação de l_0^{pt} e não altera significativamente o comprimento calculado quando o elemento está sujeito a pequenas deformações.

Assim, segue-se um procedimento semelhante ao utilizado na subseção 5.4.4 para os elementos de membrana. Com a tensão S^{pt} , calcula-se a deformação de pré-tensionamento E^{pt} :

$$E^{pt} = \frac{S^{pt}}{K}. \quad (5.125)$$

Essa deformação é obtida quando o elemento passa da configuração sem tensões para a configuração inicial, portanto:

$$E^{pt} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_0}{l_0^{pt}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.126)$$

O comprimento l_0^{pt} fica definido então como

$$l_0^{pt} = \frac{l_0}{\sqrt{2E^{pt} + 1}} = \frac{l_0}{\sqrt{\frac{2N^{pt}}{KA_0} + 1}}. \quad (5.127)$$

5.7 Exemplos de validação

Nesta seção, alguns exemplos numéricos são apresentados para verificar a formulação posicional em relação aos elementos finitos adotados, considerando situações estáticas e dinâmicas. A tolerância considerada no processo iterativo (Equação 5.40) foi $tol = 10^{-6}$ em todas as análises.

5.7.1 Vaso de pressão cilíndrico

Com o objetivo de comparar a formulação numérica implementada com soluções analíticas, analisa-se um vaso de pressão cilíndrico de espessura constante sujeito a pressão interna

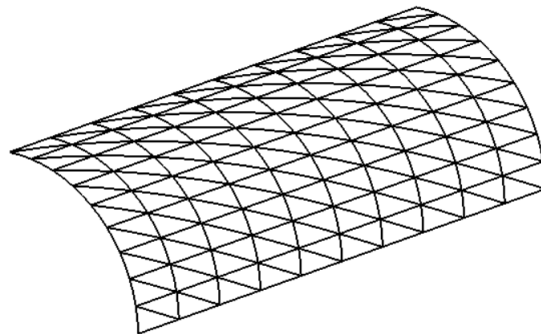
uniforme. Em uma análise simplificada (ideal), as tensões circunferencial σ_θ e longitudinal σ_x e o deslocamento radial δ são dados por:

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}, \quad \sigma_x = \frac{pr}{2t}, \quad \delta = \frac{pr^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right), \quad (5.128)$$

sendo p a pressão interna, r o raio do cilindro, t é a espessura e E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material. Quando se considera um vaso de comprimento infinito, semelhante a uma tubulação, a tensão longitudinal σ_x é nula e não se aplica ao problema.

No exemplo, foi considerado um cilindro de comprimento infinito com $p = 1$ MPa, $r = 0,5$ m, $t = 10$ mm, $E = 200$ GPa e $\nu = 0$. Devido à simetria, apenas um quarto da parede do cilindro foi discretizada, adotando-se um comprimento de 2 m na direção longitudinal. Utilizou-se elementos de membrana de aproximações linear e quadrática conforme a malha ilustrada na Figura 53, composta de 180 elementos (10 na direção longitudinal e 9 na direção circunferencial). Para evitar a singularidade da matriz Hessiana, considerou-se um pré-tensionamento fictício nas primeiras iterações, que foi depois removido para se obter a posição de equilíbrio real.

Figura 53 – Malha utilizada para o vaso de pressão.



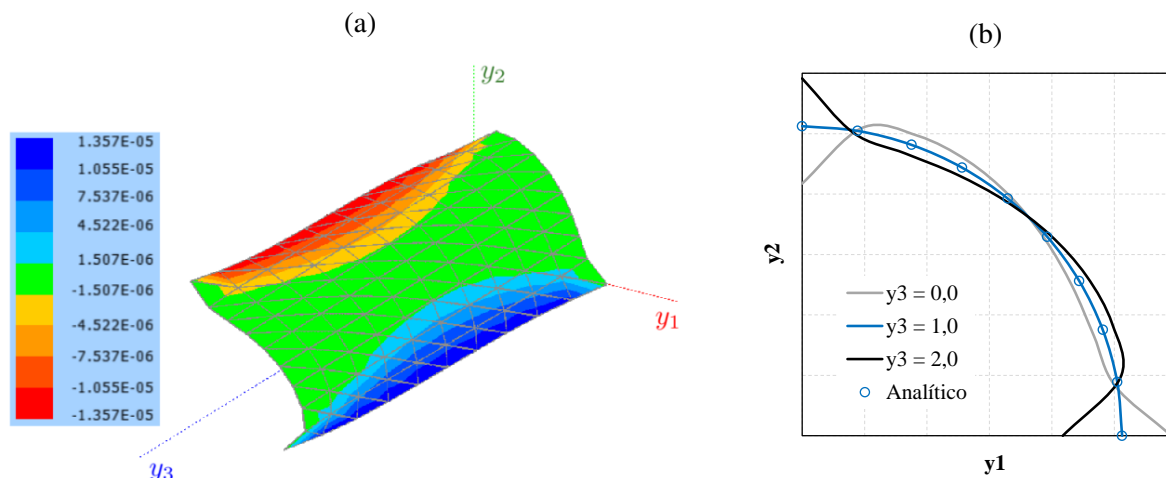
Fonte: elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos indicam que o elemento finito de aproximação linear não é adequado para a solução do problema. A Figura 54a mostra um efeito de empenamento do cilindro provocado pelo aparecimento de tensões de cisalhamento longitudinais nos cantos da superfície, fazendo com que os deslocamentos e tensões se afastem dos valores analíticos esperados. A Figura 54b mostra as posições em perfis transversais do cilindro. Em ambas as figuras, os deslocamentos foram amplificados para melhor visualização.

Por outro lado, o uso de elementos de aproximação quadrática trouxe resultados muito próximos aos analíticos. O cisalhamento longitudinal ainda aparece, mas em níveis bastante reduzidos, não comprometendo a precisão da análise. A Figura 55 mostra os deslocamentos radiais e tensões circunferenciais.

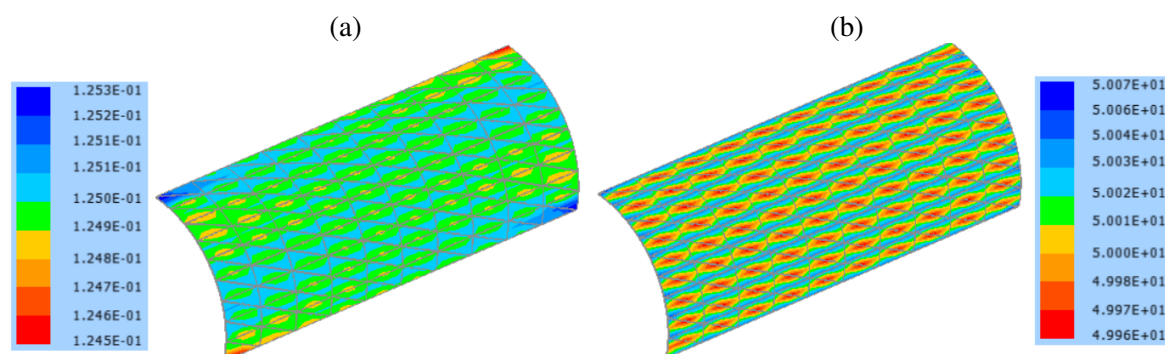
Para avaliar o efeito da discretização, foi realizada uma análise com o elemento linear utilizando uma malha mais refinada, com 5760 elementos (80 na direção longitudinal e 36 na direção circunferencial). Os resultados mostram um comportamento semelhante ao da malha

Figura 54 – Vaso de pressão utilizando elemento linear. (a) Deslocamento na direção 3 (em m). (b) Perfis em planos transversais. Os deslocamentos foram amplificados para melhor visualização.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 55 – Vaso de pressão utilizando elemento quadrático. (a) Deslocamento radial δ (mm). Valor analítico: $\delta = 0,125$ mm. (b) Tensão circunferencial σ_θ (MPa). Valor analítico: $\sigma_\theta = 50$ MPa.



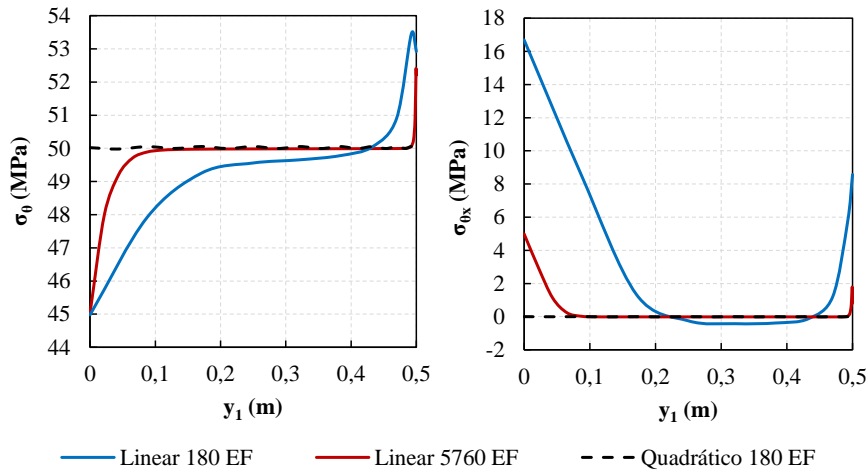
Fonte: elaborada pelo autor.

inicial. A Figura 56 ilustra as tensões normais no sentido circunferencial σ_θ e as tensões de cisalhamento longitudinais $\sigma_{\theta x}$ no plano $y_3 = 0$ para os três modelos analisados (ver eixos na Figura 54a).

5.7.2 Membrana plana com carga transversal

Neste exemplo, apresentado por Levy e Spillers (2003) e também avaliado por Gil (2006) e Valdés, Miquel e Oñate (2009), analisa-se uma membrana plana sob o efeito de uma carga transversal. A membrana é quadrada, de lado 240 in e espessura 0,004167 in, fixa nas quatro bordas. O material é isotrópico, com módulo de elasticidade 30.000 ksi e coeficiente de Poisson 0,3, e o carregamento consiste em uma força concentrada vertical de 10 kip no centro da membrana, além de um pré-tensionamento uniforme de 80 ksi. A conversão para o SI pode ser feita considerando 1 in = 2,54 cm, 1 ksi = 6,8948 MPa e 1 kip = 4.448,22 N.

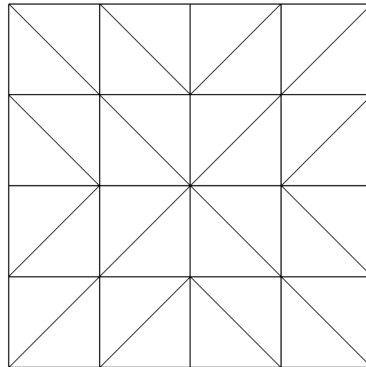
Figura 56 – Tensão normal circunferencial σ_θ e tensão de cisalhamento $\sigma_{\theta x}$ no plano $y_3 = 0$ para os modelos analisados.



Fonte: elaborada pelo autor.

A malha adotada, indicada na Figura 57, é composta de 32 elementos finitos de membrana de aproximação linear, assim como utilizado por Levy e Spillers (2003). Adicionalmente, a mesma malha foi analisada considerando elementos de membrana de aproximações quadrática e cúbica.

Figura 57 – Malha utilizada para o exemplo.



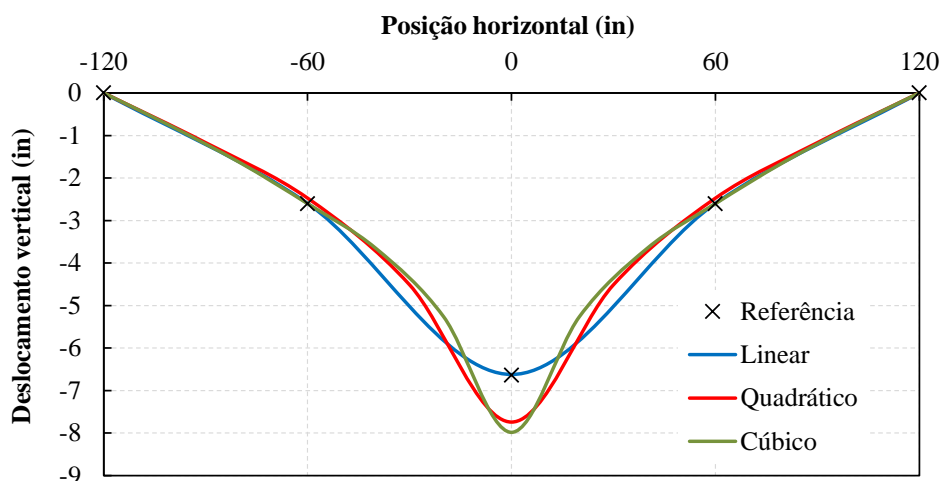
Fonte: elaborada pelo autor.

Os deslocamentos no plano médio vertical da membrana são mostrados na Figura 58. Há perfeita concordância entre os resultados obtidos com o elemento linear e os de referência, validando o código implementado. Os deslocamentos calculados com os elementos quadrático e cúbico foram semelhantes, com uma diferença não desprezível para o caso do elemento linear (aproximadamente 17% e 21%, respectivamente).

As tensões principais calculadas com o elemento linear são ilustradas na Figura 59. Os resultados são semelhantes aos obtidos pela média nodal das tensões por elemento calculadas por Levy e Spillers (2003).

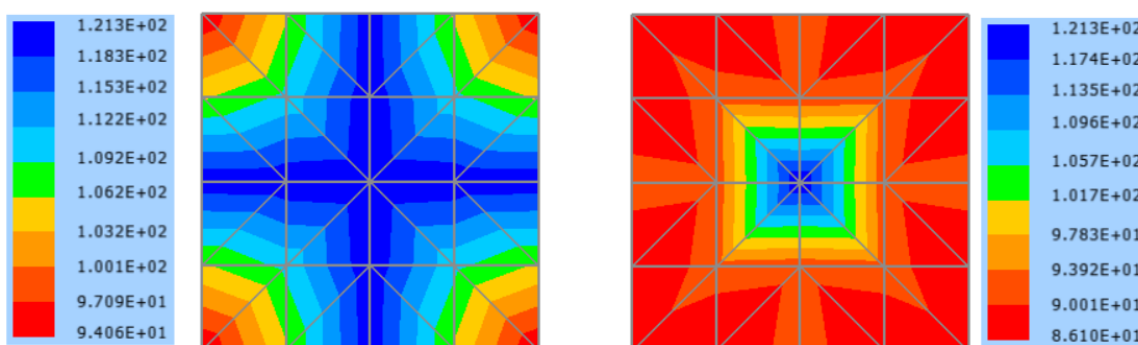
Adicionalmente, foi realizado um estudo de convergência da malha e ainda uma comparação com os valores obtidos com o elemento de sólido prismático de aproximação linear na

Figura 58 – Deslocamentos verticais no plano médio da membrana.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 59 – Tensões principais (em ksi): primeira (esq.) e segunda (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

espessura. O uso de aproximação quadrática ou cúbica na espessura do elemento de sólido não produziu variação nos resultados. Seis malhas foram utilizadas, conforme indicado na Tabela 3. As malhas foram definidas de acordo com o comprimento do lado do elemento triangular l_{el} . Recorda-se que o modelo tem 3 graus de liberdade por nó tanto para o elemento de membrana quanto para o elemento de sólido.

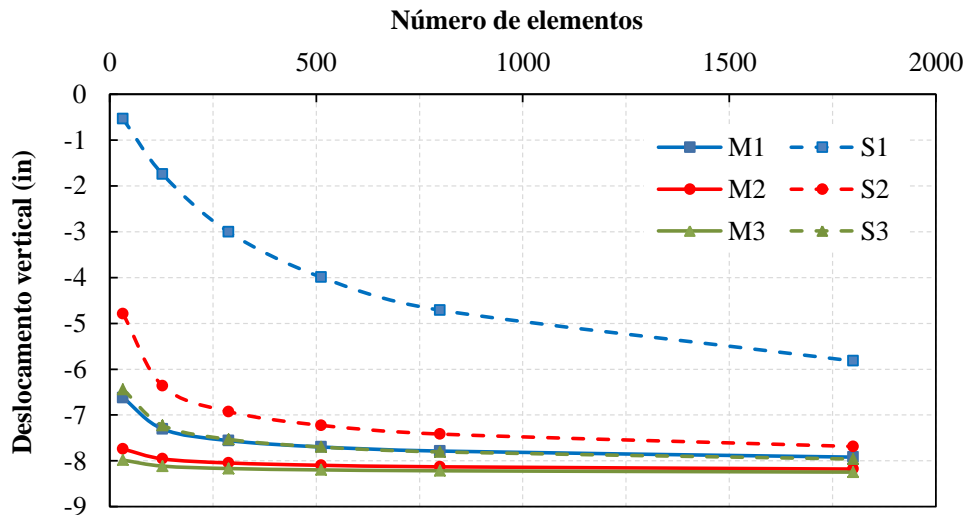
Tabela 3 – Dados das malhas utilizadas no estudo de convergência.

Malha	l_{el} (in)	N.º elementos	N.º nós - Membrana			N.º nós - Sólido		
			Linear	Quadrático	Cúbico	Linear	Quadrático	Cúbico
1	60	32	25	81	169	50	162	338
2	30	128	81	289	625	162	578	1250
3	20	288	169	625	1369	338	1250	2738
4	15	512	289	1089	2401	578	2178	4802
5	12	800	441	1681	3721	882	3362	7442
6	8	1800	961	3721	8281	1922	7442	16562

Fonte: elaborada pelo autor.

O deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga para as malhas analisadas é mostrado na Figura 60, na qual M indica o elemento de membrana e S o de sólido, e os números se referem ao grau de aproximação do elemento (no caso do sólido, apenas à base triangular).

Figura 60 – Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga para as malhas e elementos avaliados.



Fonte: elaborada pelo autor.

Várias conclusões podem ser tiradas a partir dos dados. Em primeiro lugar, comparando os elementos de membrana e de sólido, observa-se que os deslocamentos da membrana são sempre maiores. Isso já era esperado, uma vez que o sólido possui rigidez à flexão, ainda que pequena. Entretanto, os deslocamentos se tornam bastante próximos conforme se refina a malha e são quase coincidentes para as curvas M1 e S3, mostrando que a consideração de elementos sem rigidez à flexão é coerente para este tipo de problema.

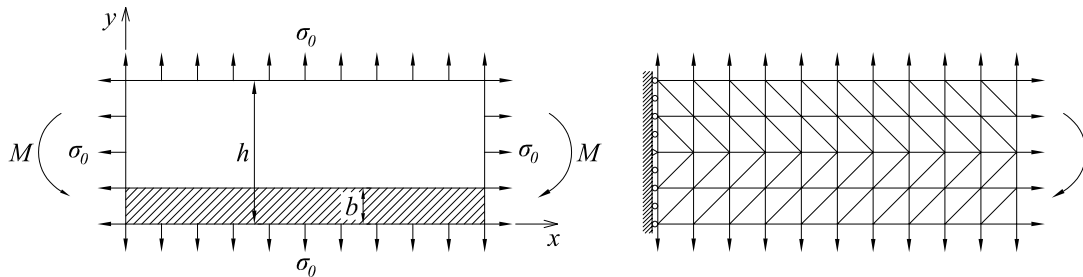
Verifica-se ainda que, para ambos os tipos de elemento, os resultados das aproximações de alta ordem foram mais próximos, ao passo que a aproximação linear foi destoante. Uma possível razão é o fato de que o elemento linear depende de maior discretização para poder representar a curvatura da estrutura, uma vez que a curvatura do próprio elemento é nula.

Em relação ao sólido, a maior rigidez relativa ao elemento S1 se deve ao fenômeno de travamento, que ocorre devido à incapacidade do elemento linear representar a curvatura de flexão. Assim, no modelo numérico, aparece uma rigidez espúria que é responsável pelos deslocamentos mais baixos nesse caso. Além disso, observa-se que a convergência com os elementos de sólido é mais lenta do que com os de membrana, mesmo para aproximações de alta ordem.

5.7.3 Enrugamento de membrana retangular sujeita a flexão no plano

A estratégia de enrugamento adotada é avaliada em um exemplo clássico de uma membrana retangular semelhante a uma viga, sujeita a uma tensão σ_0 nas direções x e y e a um momento fletor M no plano da membrana, conforme mostrado na Figura 61. Aproveitando-se da simetria, apenas metade da viga foi modelada utilizando 80 elementos triangulares de membrana de aproximação quadrática. A membrana tem altura h e espessura t e, à medida que o momento M aumenta, começa a ocorrer o enrugamento na direção y em uma largura b medida a partir da extremidade inferior. A força normal de pré-tensionamento resultante é $P = \sigma_0 t h$ e módulo de elasticidade é E .

Figura 61 – Membrana sujeita a flexão no plano e malha de elementos finitos adotada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Este problema é usado como *benchmark* em vários trabalhos, como os de Lu, Accorsi e Leonard (2001), Akita et al. (2007) e Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2009). A solução analítica é apresentada por Stein e Hedgepeth (1961). A largura b da região enrugada é dada por

$$\frac{b}{h} = \begin{cases} 0, & M/(Ph) < \frac{1}{6} \\ 3M/(Ph) - \frac{1}{2}, & \frac{1}{6} \leq M/(Ph) < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.129)$$

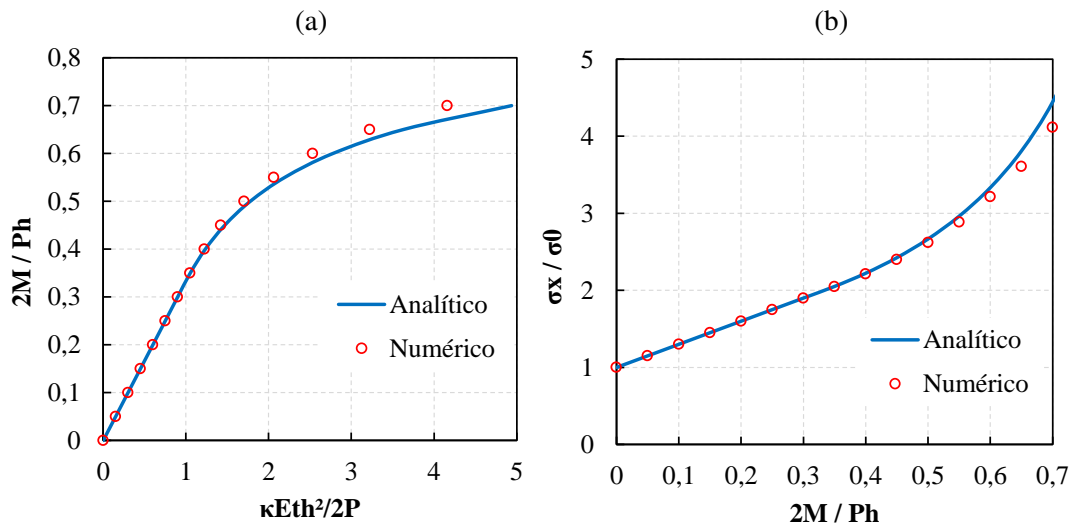
Quando há enrugamento, a tensão normal σ_x na direção x é calculada como

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \begin{cases} \frac{2(y/h - b/h)}{(y/h - b/h)^2}, & b/h < y/h \leq 1 \\ 0, & 0 \leq y/h \leq b/h \end{cases} \quad (5.130)$$

e a relação entre o momento M e a curvatura κ da membrana no plano vale

$$\frac{2M}{Ph} = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{Eth^2}{2P} \kappa, & \frac{Eth^2}{2P} \kappa \leq 1 \\ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P}{Eth^2} \frac{1}{\kappa}}, & \frac{Eth^2}{2P} \kappa > 1 \end{cases} \quad (5.131)$$

Os resultados de curvatura e tensão máxima obtidos são mostrados na Figura 62. A diferença em relação aos valores analíticos se deve ao caráter aproximado do enrugamento adotado, conforme citado na subseção 3.3.3. Entretanto, observa-se que essa diferença só é significativa quando a estrutura está sujeita a um nível de enrugamento bastante elevado.

Figura 62 – Relação entre: (a) momento M e curvatura κ ; (b) tensão longitudinal σ_x e momento M .

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.7.4 Vibração livre de membrana retangular

Novamente, a formulação numérica implementada é comparada com resultados analíticos, agora em um problema de vibração livre de uma membrana retangular. As frequências ω podem ser obtidas por (KABE; SATO, 2020):

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{n\pi c_M}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c_M}{l_y}\right)^2}, \quad (5.132)$$

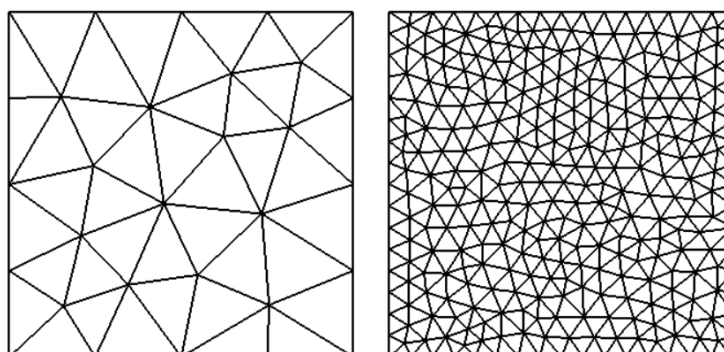
sendo l_x e l_y os comprimentos nas direções x e y , $c_M = \sqrt{\sigma_{pt}/\rho}$, e n e m são as quantidades de semiondas em x e y que definem os modos de vibração.

A geometria e propriedades adotadas para a membrana foram as mesmas que as do exemplo 5.7.2, além de peso específico $\gamma = \rho g = 0,284 \text{ lb/in}^3$ e aceleração da gravidade $g = 386,22 \text{ in/s}^2$. O mesmo pré-tensionamento foi considerado. Verificou-se que o uso da malha estruturada ocasionou o aparecimento de alguns modos de vibração espúrios, embora as frequências estivessem corretas. Dessa forma, foram adotadas duas novas malhas não estruturadas na análise, com 42 e 566 elementos finitos, ilustradas na Figura 63. Utilizou-se elementos de aproximação linear, quadrática e cúbica.

As frequências naturais para os 6 primeiros modos de vibração são mostradas na Tabela 4. Observa-se boa concordância entre os valores. O aumento do número de elementos trouxe maior diferença nos resultados do elemento linear, ao passo que, para os elementos quadrático e cúbico, o refinamento não apresentou diferença significativa.

Em relação aos modos de vibração, verificou-se que o aspecto deslocado da estrutura é bastante influenciado pela discretização adotada, de forma que é necessário um refinamento

Figura 63 – Malhas não estruturadas utilizadas, com 42 e 566 elementos finitos.



Fonte: elaborada pelo autor.

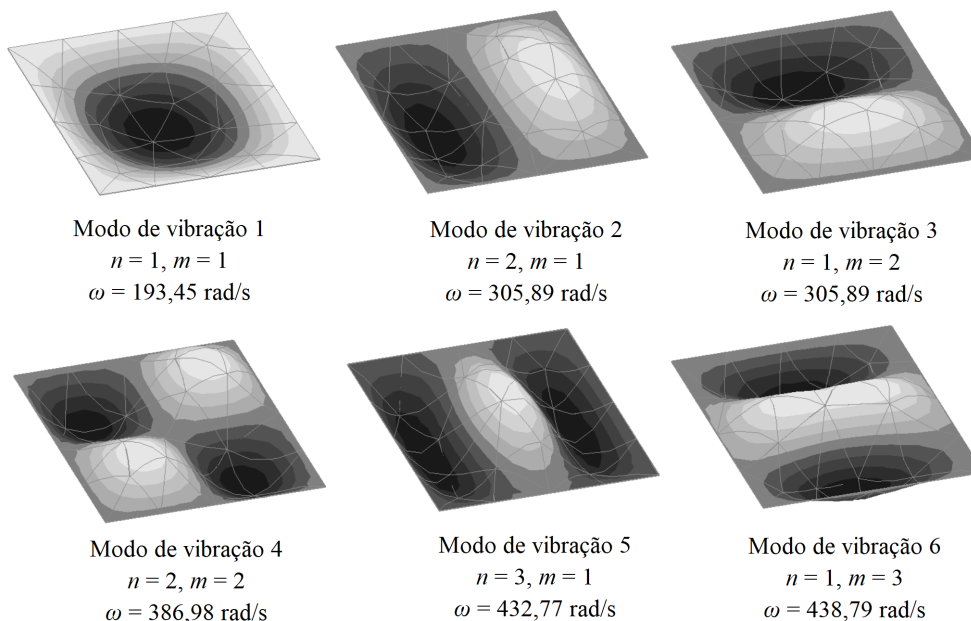
Tabela 4 – Frequências naturais de vibração ω (rad/s) para a membrana retangular.

Modo	n, m	Analítico	Malha 42 EF			Malha 566 EF		
			Linear	Quadrático	Cúbico	Linear	Quadrático	Cúbico
1	1,1	193,09	200,70	193,57	193,45	193,99	193,45	193,45
2	2,1	305,30	334,13	306,82	305,89	308,02	305,88	305,87
3	1,2	305,30	335,23	307,06	305,89	308,05	305,88	305,87
4	2,2	386,18	441,66	390,17	386,98	391,17	386,92	386,90
5	3,1	431,76	512,13	436,83	432,77	438,63	432,60	432,57
6	1,3	431,76	516,51	437,14	432,79	438,79	432,60	432,57

Fonte: elaborada pelo autor.

adequado para representar os modos com precisão. Com a malha menos refinada, apenas o elemento cúbico proveu resultados satisfatórios, mostrados na Figura 64.

Figura 64 – Modos de vibração obtidos com o elemento cúbico e malha de 42 elementos.



Fonte: elaborada pelo autor.

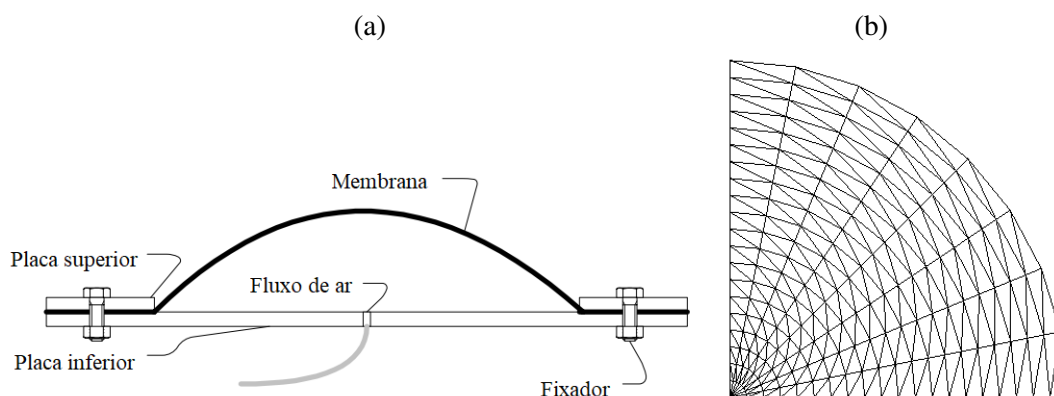
5.7.5 Membrana circular inflada com acoplamento pressão-volume

Analisa-se neste exemplo uma membrana circular, inicialmente plana, fixa na borda e inflada por uma pressão de ar constante. O objetivo aqui é validar a implementação da formulação referente às cargas dependentes do deslocamento, incluindo o acoplamento pressão-volume. As cargas de pressão neste caso são conservativas e a Hessiana do carregamento é simétrica, se enquadrando nas condições discutidas na subseção 5.2.5.4.

Este problema tem sido bastante investigado na literatura, contando inclusive com várias soluções analíticas com diferentes considerações. Coelho, Roehl e Bletzinger (2014) apresentam resultados numéricos e três soluções analíticas clássicas obtidas por outros autores, propondo ainda outras duas; uma delas, considerada aqui como a de referência, considera a ação da pressão normal à superfície da membrana, a existência de pré-tensionamento e deformações finitas, além de grandes deslocamentos. Outros trabalhos que avaliaram este exemplo são os de Bouzidi, Ravaut e Wielgosz (2003) e Pauletti e Rocha (2021).

O aspecto geral do problema é indicado na Figura 65a. Adotou-se uma malha simétrica com 1248 elementos triangulares de aproximação linear, com 8 divisões na direção circunferencial (por quadrante) e 20 na direção radial. Apenas um quadrante da malha é mostrado na Figura 65b. Seguindo a análise feita por Coelho, Roehl e Bletzinger (2014), considerou-se a membrana com comportamento isotrópico, com módulo de elasticidade $E = 311.488$ Pa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,34$, espessura unitária e raio 0,1425 m.

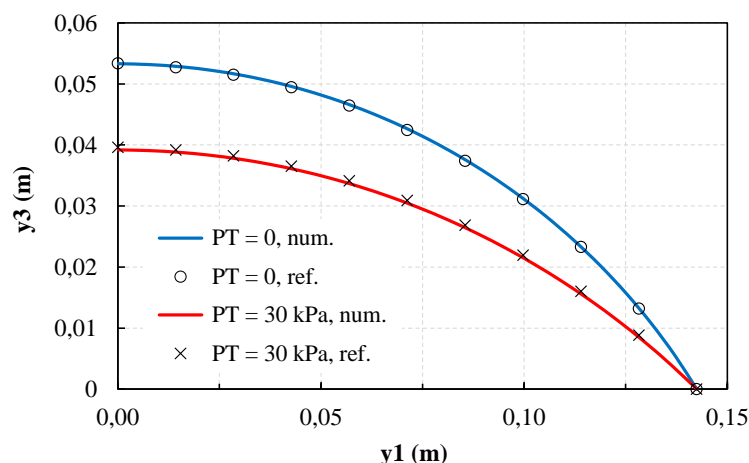
Figura 65 – (a) Membrana circular sob pressão de ar. (b) Um quadrante da malha utilizada.



Fonte: (a) Bouzidi, Ravaut e Wielgosz (2003). (b) Elaborada pelo autor.

A membrana é analisada em duas situações, uma delas sem pré-tensionamento e outra com um pré-tensionamento de 30 kPa. Em ambos os casos, o carregamento consiste em duas etapas. Na primeira, a membrana é inflada com uma pressão de 400 kPa, sem o acoplamento pressão-volume. Os valores numéricos (obtidos com o código) e os de referência de Coelho, Roehl e Bletzinger (2014) são mostrados na Figura 66. Observa-se que os resultados são bastante próximos.

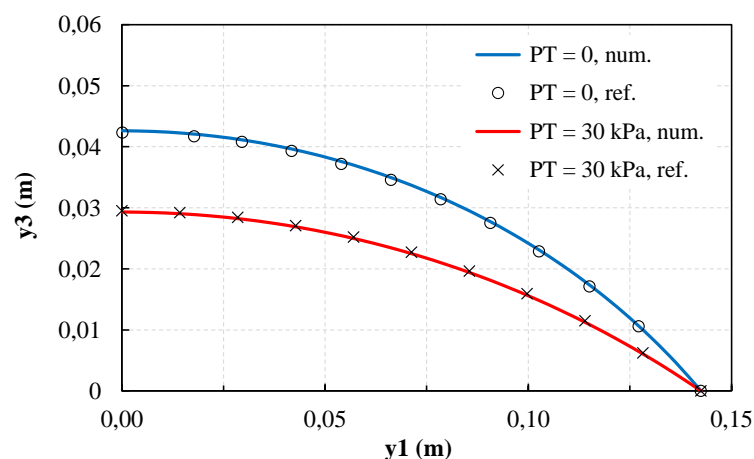
Figura 66 – Deslocamentos da membrana circular para a primeira etapa do carregamento (inflação).



Fonte: elaborada pelo autor.

A segunda etapa do carregamento é a aplicação de uma pressão externa de 300 kPa na membrana, considerando agora que há um volume de ar confinado. Neste caso, a pressão atmosférica foi desprezada e considerou-se $p = p_{man}$. Para a membrana sem pré-tensionamento, os dados de referência foram obtidos da tese de Coelho (2012). A Figura 67 ilustra a comparação. Novamente, as diferenças entre as curvas são pequenas.

Figura 67 – Deslocamentos da membrana circular para a segunda etapa do carregamento (pressão externa com acoplamento pressão-volume).



Fonte: elaborada pelo autor.

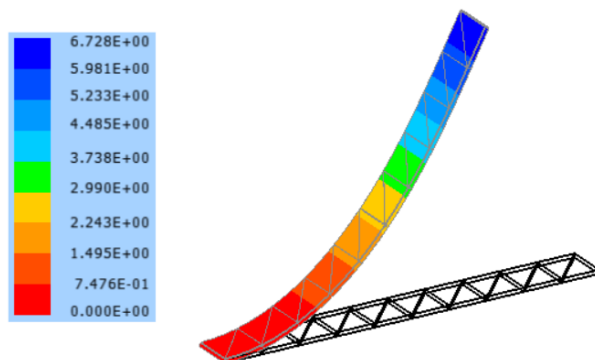
É interessante comentar que, na análise deste exemplo clássico, alguns autores indicam a rigidez da membrana diretamente como o produto Et entre o módulo de elasticidade e a espessura. Uma vez mantido fixo o valor deste produto, os valores individuais de E e t não influenciam o resultado dos deslocamentos da membrana sem pré-tensionamento, mas influenciam as tensões resultantes. No caso com pré-tensionamento, os deslocamentos também serão influenciados, porém os mesmos valores serão obtidos quando a razão σ_{pt}/E for constante.

5.7.6 Viga engastada com carga transversal conservativa e não conservativa

Este exemplo consiste em uma viga engastada sujeita a uma força transversal na extremidade, produzindo grandes deslocamentos (HORRIGMOE; BERGAN, 1978). Foram considerados os casos em que a força é conservativa, sempre na direção vertical, e também quando a força é não conservativa e atua sempre na direção normal à viga na extremidade.

Para o caso com força conservativa, este problema é avaliado em vários trabalhos na literatura normalmente empregando elemento finito de casca, como o próprio artigo de Horrigmoe e Bergan (1978) e ainda o de Sze, Liu e Lo (2004). Aqui, para ambos os casos de carregamento, o elemento posicional de sólido será utilizado no modelo, com uma malha composta por 20 elementos prismáticos de aproximação cúbica na base e na espessura, mostrada na Figura 68. A viga tem comprimento $L = 10$ e seção transversal retangular com base $b = 1$ e altura $h = 0,1$. O material tem módulo de elasticidade $E = 1,2 \cdot 10^6$ e $\nu = 0$. A carga na extremidade é distribuída na largura da viga e tem valor $P = 4$.

Figura 68 – Malha utilizada para o exemplo (em preto) e deslocamentos verticais para a carga conservativa.

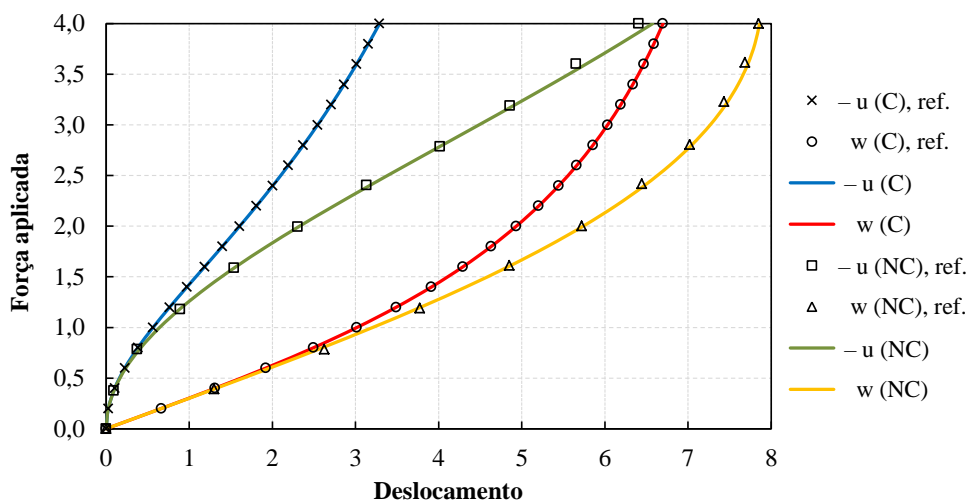


Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 69 mostra os deslocamentos vertical w e longitudinal $-u$ na extremidade da viga obtidos com o código implementado, considerando a carga dividida em 20 passos. Os resultados de referência são de Sze, Liu e Lo (2004) para o caso com carga conservativa e de Horrigmoe e Bergan (1978) para carga não conservativa. Verifica-se que o elemento posicional de sólido pôde reproduzir com precisão o comportamento da estrutura em grandes deslocamentos em ambas as situações.

Além disso, para o caso de força não conservativa, a convergência do problema foi estudada em relação à consideração da Hessiana do carregamento. A Figura 70 ilustra a quantidade de iterações necessárias em três situações: (1) não considerando a Hessiana do carregamento ($H^L = 0$), apenas considerando o efeito no vetor de forças; (2) uso da forma simétrica dada pela Equação 5.69; (3) uso da Hessiana assimétrica. Os resultados indicam que a consideração da rigidez melhora a convergência do problema, porém a diferença entre utilizar a forma simétrica

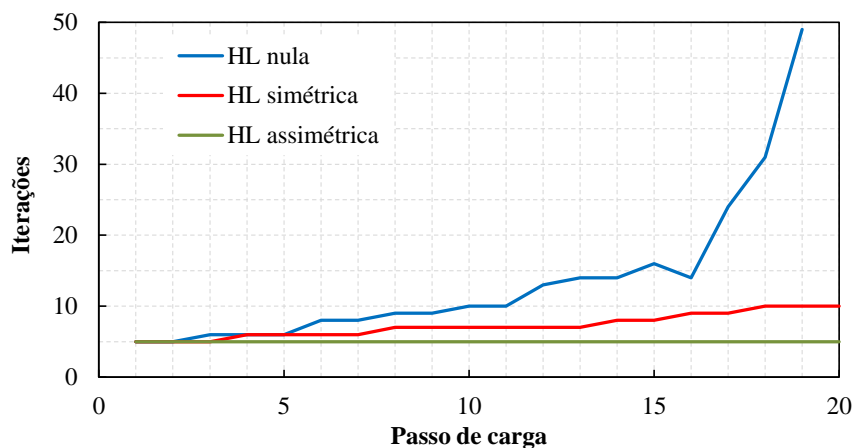
Figura 69 – Deslocamentos vertical w e longitudinal $-u$ na extremidade do eixo da viga para os casos de carga conservativa (C) ou não conservativa (NC).



Fonte: elaborada pelo autor.

ou a assimétrica não é significativa. Com a Hessiana assimétrica, foram necessárias 5 iterações em todos os passos; com a Hessiana simétrica, o valor variou de 5 (passo inicial) até 10 (passo final). Quando se adotou a Hessiana como nula, foram necessárias 49 iterações no passo 19 e a análise não convergiu no último passo, mostrando a importância de se considerar a rigidez do carregamento, ainda que em uma forma simétrica.

Figura 70 – Quantidade de iterações para a convergência de acordo com a Hessiana do carregamento H^L .



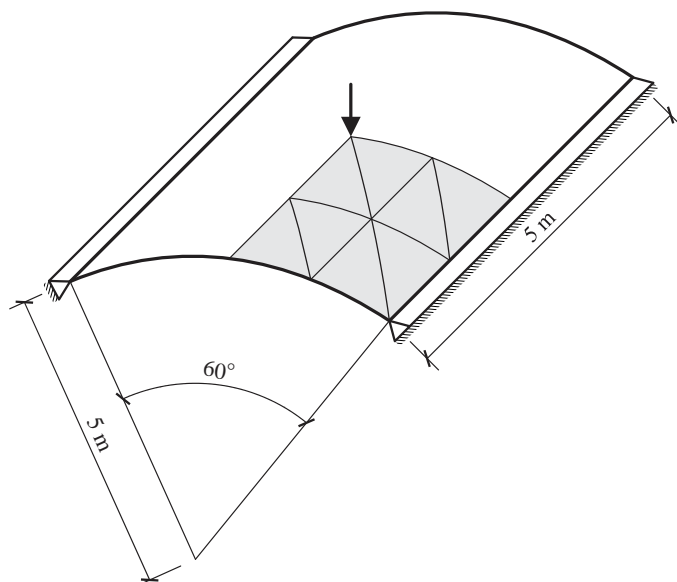
Fonte: elaborada pelo autor.

O tempo total de processamento foi de 1943 segundos (aproximadamente 32 minutos) quando do uso da Hessiana nula (considerando apenas até o passo de carga 19), 529 segundos (9 minutos) para a Hessiana simétrica e 775 segundos (13 minutos) para a Hessiana assimétrica. Todas as análises foram realizadas no mesmo computador. Isso demonstra a validade de se utilizar uma forma simétrica da Hessiana, pois, ainda que sejam necessárias mais iterações no processo iterativo de solução, o tempo de processamento é menor do que quando se utiliza a forma assimétrica exata.

5.7.7 Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Neste exemplo, o elemento finito posicional de sólido é utilizado na simulação de uma estrutura de casca sujeita a grandes deslocamentos e instabilidade, com a geometria e apoios indicados na Figura 71. Uma carga vertical concentrada é aplicada no centro da casca, induzindo o deslocamento e o *snap through*. Esse exemplo foi apresentado por Kuhl e Ramm (1999) utilizando elemento de casca de 8 nós com integração reduzida e avaliado também por Siqueira (2019) adotando elemento finito posicional de casca com a consideração de variação linear da deformação ao longo da espessura, resultando em um grau de liberdade adicional por nó representando essa taxa de variação.

Figura 71 – Geometria e condições de contorno da casca cilíndrica.



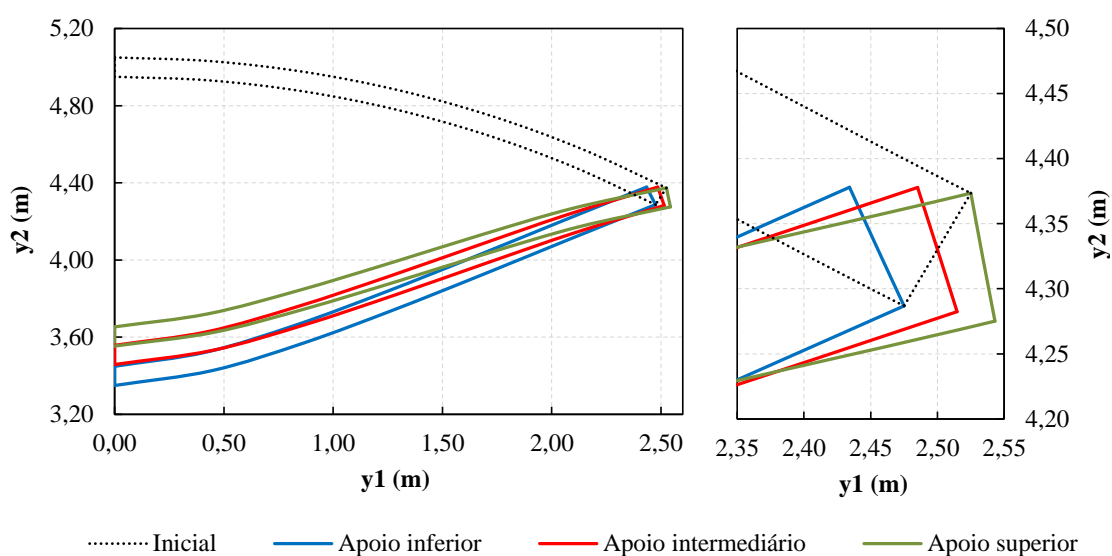
Fonte: Siqueira (2019).

Aproveitando a simetria, utilizou-se uma malha de 8 elementos para a discretização de apenas um quarto da estrutura. Considerou-se elemento prismático de sólido com aproximação cúbica na base e quadrática na espessura. O material tem comportamento linear, com parâmetros $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,25$ e $\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$, e a espessura da casca é $h = 0,10 \text{ m}$. A intensidade da força aumenta linearmente até um valor $F = 50 \cdot 10^6 \text{ N}$ no tempo $t = 0,2 \text{ s}$ e é mantida constante dali em diante. Este valor já é o considerado no modelo com simetria. Seguindo Siqueira (2019), o método de Newmark foi utilizado na integração temporal, adotando-se $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$ e passo de tempo $\Delta t = 0,0625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Inicialmente, avaliou-se a resposta da estrutura em uma análise estática, com a força aplicada dividida em 50 passos para simular o comportamento crescente da carga (cada passo de carga equivalendo a $4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$). Contudo, nos resultados mostrados, o eixo de tempo será prolongado até $t = 0,3 \text{ s}$ para melhor comparação com a resposta dinâmica.

A forma de aplicação das condições de contorno no sólido tem particular importância. Uma vez que o elemento de sólido possui espessura, pode-se restringir os deslocamentos de cada uma das três camadas de nós para impor a condição de apoio. Essa restrição deve ser realizada em apenas uma camada de nós para que o apoio se configure como articulado. As três condições foram avaliadas – apoio na face superior, apoio intermediário e apoio na face inferior – e foi observado que o deslocamento final do ponto de aplicação da carga após a instabilidade difere, nos três casos, por um valor próximo ao da espessura da casca. A Figura 72 ilustra as diferenças verificadas.

Figura 72 – Configuração final da face curva da casca que contém o ponto de aplicação da carga (esq.) e detalhe do apoio (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

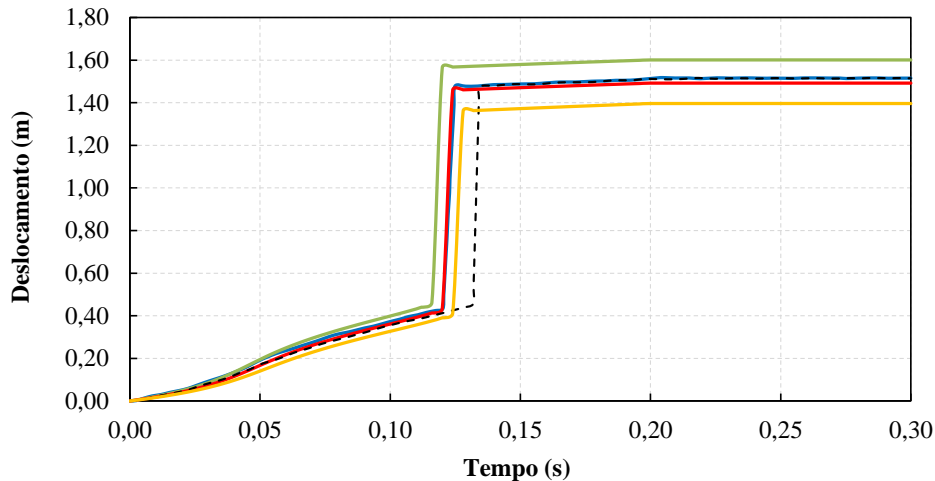
A comparação dos deslocamentos do ponto de aplicação da carga em análise estática é mostrada na Figura 73. Sobre os valores das duas referências, a estrutura de Siqueira (2019) é mais flexível devido à consideração de variação linear da deformação da casca ao longo da espessura, o que equivale a adotar aproximação quadrática para posições e deslocamentos nessa direção, ao passo que a de Kuhl e Ramm (1999) considera deformação constante na espessura com integração reduzida para evitar travamento. Essas diferenças modificam o instante de ocorrência da instabilidade, porém sem efeito no deslocamento final.

Como esperado, o caso com os apoios do sólido na posição intermediária é o que mais se aproxima das referências, principalmente quanto ao deslocamento final. A diferença é de aproximadamente 1,5%. A estrutura com os apoios na face inferior foi a mais flexível e a com os apoios na face superior foi a mais rígida.

Observando os deslocamentos antes da ocorrência do *snap through*, percebe-se que a formulação implementada com o apoio intermediário captou a instabilidade no mesmo instante de tempo que a análise de Siqueira (2019), como indicado na Figura 74.

Em relação à análise dinâmica, os resultados obtidos com a consideração de apoio

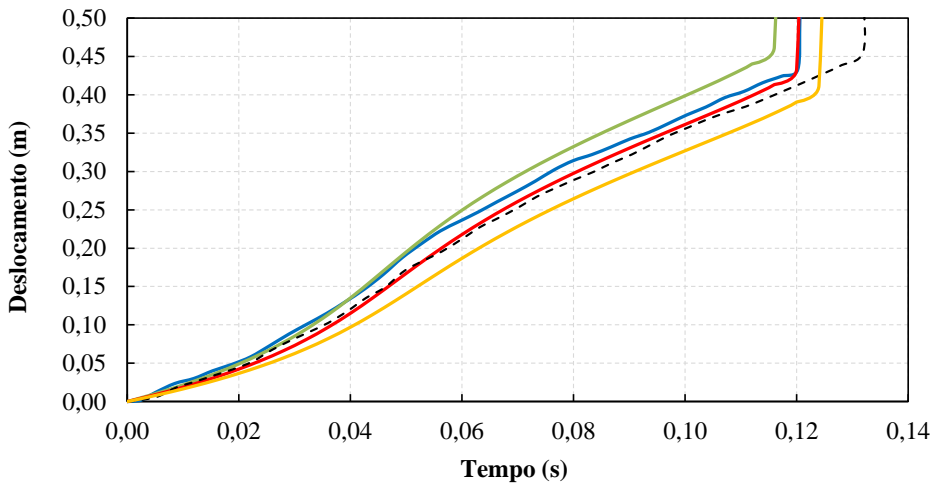
Figura 73 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força em análise estática.



— Siqueira (2019) — Apoio na face inferior — Apoio intermediário
 - - - Kuhl e Ramm (1999) — Apoio na face superior

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 74 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força antes da instabilidade.



— Siqueira (2019) — Apoio na face inferior — Apoio intermediário
 - - - Kuhl e Ramm (1999) — Apoio na face superior

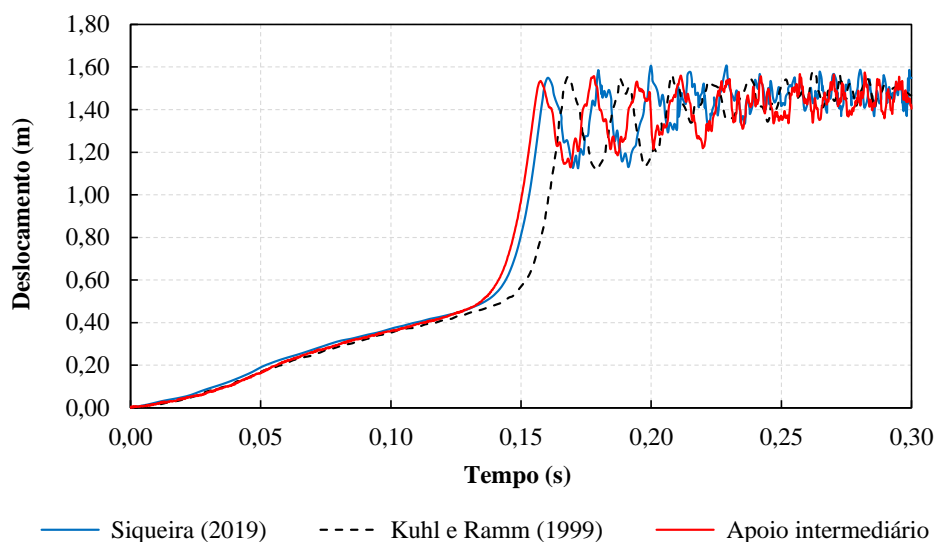
Fonte: elaborada pelo autor.

intermediário são mostrados na Figura 75. Apesar de uma pequena defasagem, percebe-se que os valores são próximos aos de Siqueira (2019), mostrando que o código implementado apresentou uma resposta adequada da estrutura em um problema com instabilidade e grandes oscilações.

5.7.8 Cabo sob carga concentrada

Neste exemplo, o elemento de cabo e a estratégia de pré-tensionamento são validados por meio da análise de uma estrutura simples com solução analítica. A estrutura em questão é

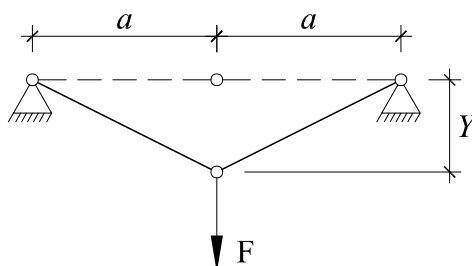
Figura 75 – Deslocamentos do ponto de aplicação da força em análise dinâmica.



Fonte: elaborada pelo autor.

composta por um cabo horizontal pré-tensionado com carga concentrada no meio do vão. Este sistema foi comentado na subseção 3.4.2 e, por conveniência, é novamente mostrado na Figura 76. As equações aqui apresentadas diferem daquelas da subseção 3.4.2 por se considerar agora a relação constitutiva em grandes deslocamentos $S = KE$ e a existência de pré-tensionamento.

Figura 76 – Cabo sujeito a força aplicada nas configurações inicial (linha tracejada) e atual (linha cheia).



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a aplicação da força externa F no ponto central do vão, consideram-se dois elementos de cabo simétricos. O deslocamento Y é calculado igualando-se a componente vertical da força interna \vec{F}^{int} com a força externa aplicada:

$$F = 2N \frac{Y}{l} \quad (5.133)$$

Considerando a relação entre força normal e tensão S dada pela Equação 5.119 e calculando a deformação E com a Equação 5.124 para considerar o pré-tensionamento:

$$F = 2 \left(SA_0 \frac{l}{l_0^{pt}} \right) \frac{Y}{l} = 2 \left\{ K \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{l_0^{pt}} \right)^2 - 1 \right] A_0 \frac{l}{l_0^{pt}} \right\} \frac{Y}{l}. \quad (5.134)$$

Rearranjando os termos e utilizando $l = \sqrt{Y^2 + a^2}$, chega-se a:

$$Y^3 + \left(a^2 - (l_0^{pt})^2\right) Y - \frac{F (l_0^{pt})^3}{K A_0} = 0, \quad (5.135)$$

que é uma equação cúbica que descreve o deslocamento Y com base na força aplicada F e nas demais variáveis do problema.

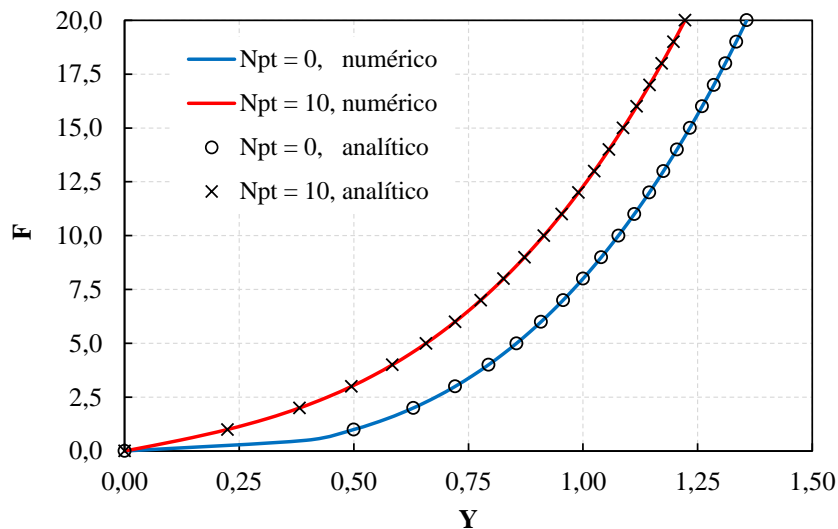
A Equação 5.135 pode ser resolvida por um método numérico iterativo, como o método de Newton-Raphson, para se obter o deslocamento. No caso sem pré-tensionamento, tem-se $l_0^{pt} = a$ e a solução é direta:

$$Y = a \left(\frac{F}{K A_0} \right)^{1/3}. \quad (5.136)$$

No exemplo numérico, os valores adotados foram $K = 1000$, $A_0 = 1$ e $a = 5$ e dois valores diferentes de pré-tensionamento: $N^{pt} = 0$ (sem pré-tensionamento), e $N^{pt} = 10$, com o valor de l_0^{pt} determinado pela Equação 5.127. A força externa foi aplicada de maneira gradual de $F = 0$ até $F = 20$.

A Figura 77 ilustra os resultados obtidos com o código implementado (numérico) e os valores obtidos de forma analítica, com perfeita aderência entre ambos. Observa-se claramente a natureza não linear do problema. O aumento de rigidez do sistema com o aumento do carregamento vem da mudança de inclinação dos cabos e da parcela de rigidez geométrica, proporcional ao esforço normal atuante.

Figura 77 – Deslocamentos no cabo em função da força aplicada.

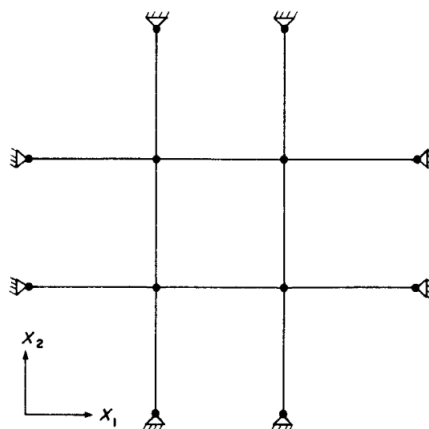


Fonte: elaborada pelo autor.

5.7.9 Vibração livre de rede de cabos

Neste exemplo, calculam-se as frequências de vibração livre de uma rede de cabos no plano horizontal, mostrada na Figura 78 (OZDEMIR, 1979). A rede é composta por duas linhas de cabos em cada direção com trechos de 40 in, totalizando 120 in de vão livre. Os cabos possuem área de $0,5 \text{ in}^2$, módulo de elasticidade 20.000 ksi e peso específico $\gamma = \rho g = 0,29 \text{ lb/in}^3$. A força de pré-tensionamento nos cabos é de 75 kip. A conversão para o SI pode ser feita considerando $1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$, $1 \text{ ksi} = 6,8948 \text{ MPa}$ e $1 \text{ kip} = 4.448,22 \text{ N}$ e aceleração da gravidade $g = 386,22 \text{ in/s}^2$.

Figura 78 – Rede de cabos analisada no exemplo.

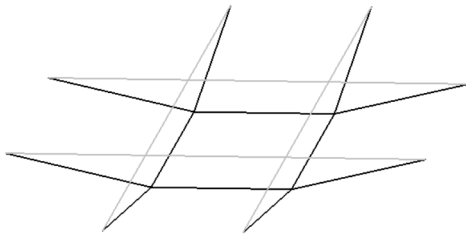


Fonte: Ozdemir (1979).

A Figura 79 ilustra os 4 primeiros modos de vibração da estrutura, cujos deslocamentos ocorrem no sentido normal ao plano. A rigidez a estes deslocamentos (verticais) é exclusivamente geométrica, conferida pelo pré-tensionamento aplicado. Os demais modos (em número de 8 para a discretização adotada) se referem a deslocamentos no plano horizontal e consideram tanto a rigidez elástica quanto a geométrica, apresentando frequências de vibração maiores.

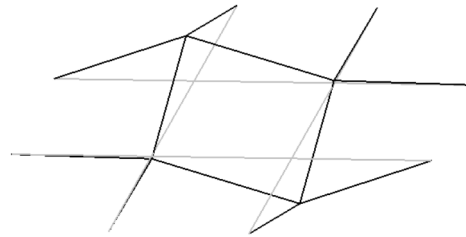
Utilizando elementos finitos de aproximação linear e matriz de massa consistente, Ozdemir (1979) obteve o valor de 61,64 Hz para a primeira frequência de vibração da estrutura. A diferença do valor calculado no presente trabalho para a referência é de 0,69%.

Figura 79 – Modos de vibração para a rede de cabos.



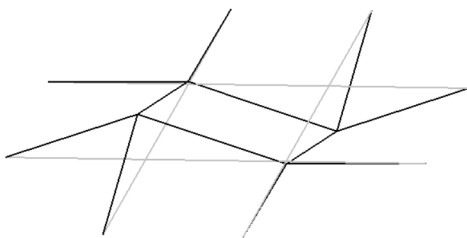
Modo de vibração 1

$$\omega = 389,97 \text{ rad/s}, f = 62,07 \text{ Hz}$$



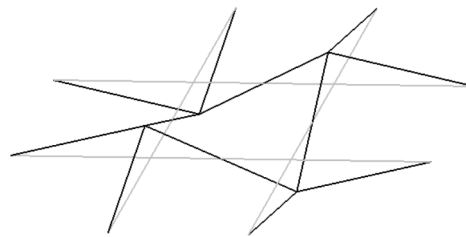
Modo de vibração 2

$$\omega = 616,59 \text{ rad/s}, f = 98,13 \text{ Hz}$$



Modo de vibração 3

$$\omega = 616,59 \text{ rad/s}, f = 98,13 \text{ Hz}$$



Modo de vibração 4

$$\omega = 871,99 \text{ rad/s}, f = 138,78 \text{ Hz}$$

Fonte: elaborada pelo autor.

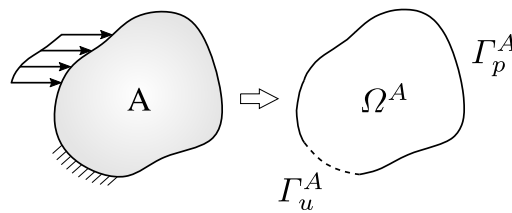
6 ASPECTOS DA MECÂNICA DO CONTATO

Neste capítulo são descritas as bases teóricas do problema mecânico de contato sem atrito. Primeiramente, são discutidos alguns aspectos conceituais importantes considerando o meio contínuo e, em seguida, é dada ênfase ao tratamento numérico do problema visando a implementação computacional segundo o método dos elementos finitos.

6.1 Descrição do problema do contato

Considere-se o corpo A mostrado na Figura 80, sujeito a forças de superfície e/ou volume aplicadas e deslocamentos (ou posições) prescritos. Na análise do problema mecânico, são conhecidos o contorno Γ_p^A , no qual as forças de superfície são conhecidas, e o contorno Γ_u^A , no qual os deslocamentos prescritos são conhecidos, e busca-se determinar os campos de tensões, deformações e deslocamentos no domínio Ω^A .

Figura 80 – Problema mecânico de um corpo isolado.

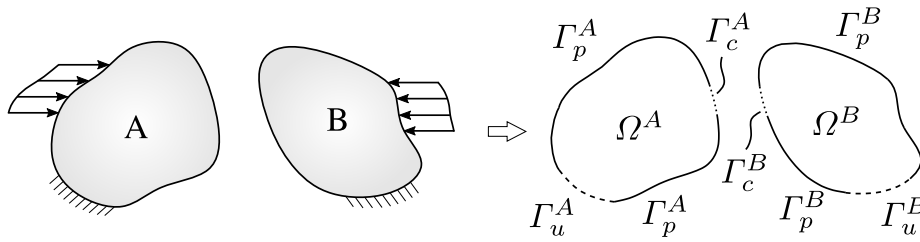


Fonte: o autor.

Para o caso da Figura 81, têm-se dois corpos A e B sujeitos a forças aplicadas e deslocamentos prescritos em uma situação de possível contato entre os corpos. Quando o contato efetivamente ocorre no passo de carga ou tempo em estudo, pode-se diferenciar, para cada corpo, os contornos Γ_p^i e Γ_u^i já descritos e ainda um contorno Γ_c^i relativo à região de contato. O índice i indica os corpos aos quais cada contorno se refere.

Em Γ_c^i tanto os deslocamentos quanto as forças de superfície são desconhecidos, e disso advém a necessidade de definir um terceiro tipo de contorno. Além disso, a própria extensão desse contorno é desconhecida e deve ser avaliada no processo de cálculo. No problema contínuo, $\Gamma_c^A = \Gamma_c^B$, o que é observado apenas de maneira aproximada em soluções numéricas; contudo, é usual na literatura considerar apenas um mesmo contorno Γ_c .

Figura 81 – Problema mecânico de contato de dois corpos.



Fonte: o autor.

É interessante observar que a formulação desenvolvida para o contato entre dois corpos pode, facilmente, ser estendida para outras situações, como o contato de um corpo deformável com um anteparo rígido, o contato entre mais de dois corpos (que consiste na interação entre pares de corpos), e o chamado autocontato, quando há a interação entre partes diferentes do mesmo corpo.

Segundo Belytschko et al. (2014), os problemas de contato estão entre os problemas não lineares de mais difícil resolução por sua resposta não ser suave. Essa não linearidade se verifica mesmo em pequenos deslocamentos, haja vista que o contato pode ser entendido como uma situação em que as condições de contorno variam ao longo da análise.

O contato surge pela impossibilidade física de dois corpos ocuparem a mesma posição simultaneamente, chamada condição de impenetrabilidade. Dessa forma, quando há uma tendência de interpenetração, aparecem restrições ao deslocamento dos corpos e também a aplicação de forças de um corpo sobre o outro. Conforme a Terceira Lei de Newton, essas forças constituem um par ação e reação e, por isso, tem a mesma intensidade e direção e sentidos opostos.

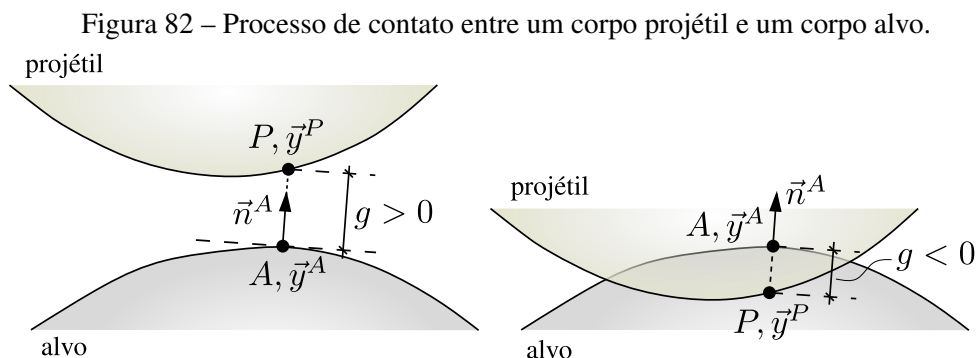
Existem vários modelos que podem ser adotados para representar a interação na interface entre os corpos. Neste trabalho, considera-se o modelo sem atrito e sem adesão, de modo que apenas forças normais de compressão são permitidas nessa interface.

A Figura 82 mostra, esquematicamente, o processo de contato entre um corpo projétil com um corpo alvo. O corpo alvo é tomado como referência para a definição das variáveis de interesse do problema. Na literatura, os corpos projétil e alvo são muitas vezes denominados escravo e mestre, respectivamente.

Para cada ponto P do contorno contínuo do projétil pode-se associar um ponto A do contorno contínuo do alvo tal que esses pontos sejam posições de possível contato entre os corpos. O ponto A é definido como aquele mais próximo (menor distância) de P , o que se obtém, matematicamente, quando o vetor que une os dois pontos é normal à superfície do alvo (WRIGGERS, 1995), ou seja, A é a projeção de P no alvo. A distância orientada entre os pontos é chamada de *gap* (g) e pode ser calculada como

$$g \cdot \vec{n}^A = \vec{A}P = \vec{y}^P - \vec{y}^A \quad \rightarrow \quad g = (\vec{y}^P - \vec{y}^A) \cdot \vec{n}^A, \quad (6.1)$$

sendo \vec{n}^A o vetor unitário normal à superfície em A e \vec{y} as posições atuais dos pontos.



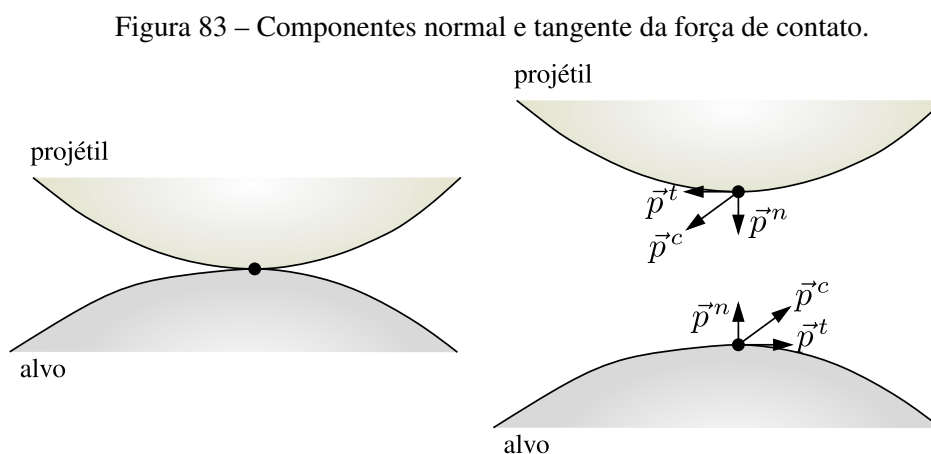
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da condição de impenetrabilidade, verifica-se que

$$g(\vec{y}, t) \geq 0, \quad (6.2)$$

no qual se explicitou a dependência da distância g com a posição e o tempo. Um valor nulo para g significa que o par de pontos em questão encontra-se em contato; valores negativos indicam a penetração do projétil no alvo, o que pode ser admitido em etapas intermediárias do cálculo, como será discutido posteriormente.

A existência do contato implica no surgimento de forças de ação e reação distribuídas na interface. A resultante \vec{p}^c das forças no alvo A pode ser decomposta em uma parcela normal à superfície e uma parcela tangente, como mostrado na Figura 83.



Fonte: elaborada pelo autor.

Desconsiderando-se o atrito, a componente tangencial da força de contato p^t se torna nula. Além disso, não havendo adesão entre as superfícies, segue-se que a força normal de contato deve ser de compressão. Considerando o sentido positivo dado pelo vetor \vec{n}^A , tem-se, para o corpo alvo:

$$p^n \leq 0. \quad (6.3)$$

As condições dadas nas Equações 6.2 e 6.3 podem ser reunidas em uma única, chamada de condição de complementaridade:

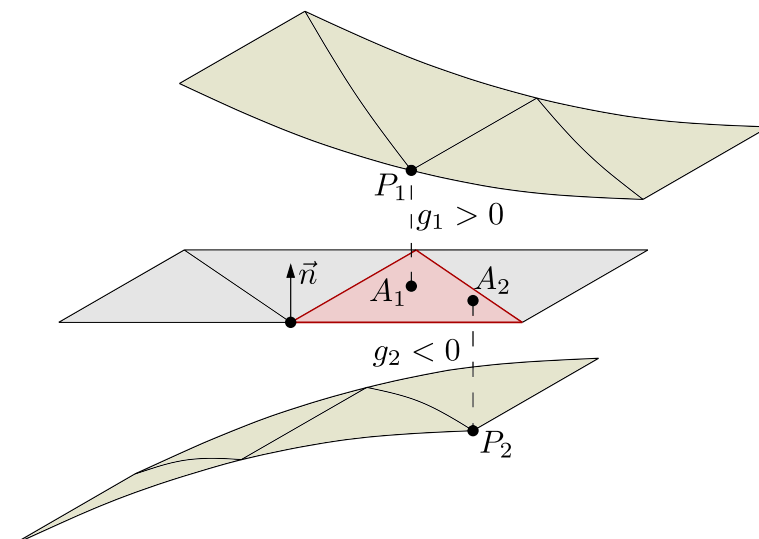
$$g \cdot p^n = 0. \quad (6.4)$$

6.2 Discretização e detecção do contato

Em relação ao problema de contato em duas dimensões, uma das técnicas mais adotadas na discretização das interfaces é a nó-a-segmento, que considera uma interface composta por elementos nodais (projéteis) e a outra composta por segmentos de linha (alvos). Neste trabalho, que estuda o caso de estruturas de membrana no espaço tridimensional, utilizou-se uma estratégia semelhante denominada nó-a-superfície, na qual se considera os nós projéteis incidindo em uma superfície alvo composta por elementos de área. Essa situação é válida mesmo para o elemento finito posicional de sólido, porém, por simplicidade, as deduções relativas à detecção terão enfoque no elemento de membrana.

Para verificar se houve contato no passo de carga ou tempo em análise, é necessário avaliar a condição de impenetrabilidade (Equações 6.1 e 6.2). Se a impenetrabilidade foi violada, houve contato entre o nó projétil e o elemento alvo e o contato deve ser ativado. Entretanto, para corpos de pequena espessura, como as membranas, o contato pode ocorrer tanto pela parte superior quanto pela parte inferior do elemento, de modo que a Equação 6.2 não é suficiente para verificar a impenetrabilidade, como mostrado na Figura 84. Uma vez que g carrega o sentido do vetor normal, é possível que um par projétil-alvo com $g < 0$ não esteja em contato.

Figura 84 – Contato pelas partes superior e inferior do elemento finito de membrana. O elemento destacado é a superfície alvo.



Fonte: elaborada pelo autor.

As duas situações de contato são:

- o projétil se aproxima pela parte superior ($g > 0$) e o contato ocorre no passo de carga ou tempo em que $g \leq 0$; ou
- o projétil se aproxima pela parte inferior ($g < 0$) e o contato ocorre no passo de carga ou tempo em que $g \geq 0$.

Conclui-se que o contato deve ser ativado quando existe uma mudança no sinal do escalar g de um passo de carga ou tempo em relação ao anterior. Portanto, considerando que não há contato na situação inicial, a primeira etapa da análise é o cálculo dos valores de g para cada nó projétil e cada elemento alvo de modo que seja possível a verificação da mudança do sinal no passo seguinte.

No cálculo de g , o nó projétil P é conhecido e a projeção A no elemento alvo deve ser determinada por meio das coordenadas adimensionais ξ_1 e ξ_2 . Para elementos de membrana de aproximação linear, o vetor normal é constante e a determinação da projeção é direta. Para aproximações de ordem superior, a normal varia ao longo da superfície e o problema se torna não linear, necessitando de uma tentativa inicial para ξ_1 e ξ_2 que será atualizada no decorrer do processo iterativo de solução.

Sabendo que o vetor $\vec{AP} = \vec{y}^P - \vec{y}^A$ deve ser normal à superfície na projeção, obtém-se o seguinte sistema de equações, em notação indicial:

$$\begin{cases} (Y_i^P - Y_i^A) T_i^1 = 0 \\ (Y_i^P - Y_i^A) T_i^2 = 0 \end{cases}, \quad (6.5)$$

sendo \vec{T}^1 e \vec{T}^2 vetores tangentes no ponto projeção, calculados da mesma forma que no caso da determinação dos eixos locais. Essa relação é recordada aqui por conveniência:

$$T_i^1 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_1} Y_i^\alpha = \phi_{,1}^\alpha Y_i^\alpha \quad \text{e} \quad T_i^2 = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \xi_2} Y_i^\alpha = \phi_{,2}^\alpha Y_i^\alpha. \quad (6.6)$$

Na Equação 6.5, tanto as coordenadas do ponto A quanto os vetores tangentes dependem das incógnitas ξ_1 e ξ_2 por meio das funções de forma ϕ . Calculando a solução por meio do método de Newton-Raphson e utilizando uma barra para denotar os valores no ponto tentativa, tem-se:

$$\begin{cases} (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{T}_i^1 + \left[(Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \frac{\partial \bar{T}_i^1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_1} \bar{T}_i^1 \right] \Delta \xi_1 + \left[(Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \frac{\partial \bar{T}_i^1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_2} \bar{T}_i^1 \right] \Delta \xi_2 \\ (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{T}_i^2 + \left[(Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \frac{\partial \bar{T}_i^2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_1} \bar{T}_i^2 \right] \Delta \xi_1 + \left[(Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \frac{\partial \bar{T}_i^2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_2} \bar{T}_i^2 \right] \Delta \xi_2 \end{cases} = 0 \quad (6.7)$$

As derivadas que aparecem na Equação 6.7 são calculadas como:

$$\frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_1} = \bar{T}_i^1, \quad \frac{\partial \bar{Y}_i^A}{\partial \xi_2} = \bar{T}_i^2, \quad (6.8a)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_i^1}{\partial \xi_1} = \phi_{,11}^\alpha Y_i^\alpha = \bar{D}_i^{11}, \quad \frac{\partial \bar{T}_i^2}{\partial \xi_2} = \phi_{,22}^\alpha Y_i^\alpha = \bar{D}_i^{22}, \quad \frac{\partial \bar{T}_i^1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \bar{T}_i^2}{\partial \xi_1} = \phi_{,12}^\alpha Y_i^\alpha = \bar{D}_i^{12}. \quad (6.8b)$$

Substituindo na Equação 6.7 e organizando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{D}_i^{11} - \bar{T}_i^1 \bar{T}_i^1 & (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{D}_i^{12} - \bar{T}_i^2 \bar{T}_i^1 \\ (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{D}_i^{12} - \bar{T}_i^1 \bar{T}_i^2 & (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{D}_i^{22} - \bar{T}_i^2 \bar{T}_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{T}_i^1 \\ - (Y_i^P - \bar{Y}_i^A) \bar{T}_i^2 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

A Equação 6.9 é resolvida iterativamente até alcançar a convergência, definida como

$$\|\Delta \vec{\xi}\| \leq tol2, \quad (6.10)$$

com o valor $tol2 = 10^{-3}$ sendo utilizado no código computacional.

Após o cálculo das coordenadas adimensionais ξ_1 e ξ_2 , ainda é preciso verificar se a projeção A se encontra dentro do elemento alvo, ou seja, se são atendidas as condições

$$0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1, \quad 0 \leq 1 - \xi_1 - \xi_2 \leq 1. \quad (6.11)$$

Atendidos os limites da Equação 6.11, calcula-se g com a equação 6.1. O vetor normal unitário \vec{n}^A é calculado facilmente como

$$\vec{N}^A = \vec{T}^1 \times \vec{T}^2, \quad e \quad (6.12a)$$

$$\vec{n}^A = \frac{\vec{N}^A}{\|\vec{N}^A\|}. \quad (6.12b)$$

Finalmente, caso g tenha mudado de sinal em relação ao passo anterior, as condições de contato devem ser ativadas para os graus de liberdade do nó projétil e do elemento alvo.

6.3 Equação de equilíbrio do problema do contato

A partir da descrição do problema e das variáveis definidas, escreve-se a equação de equilíbrio do problema com contato. Assumindo que existe contato no passo de carga ou tempo em análise, o funcional de energia mecânica Π passa agora a integrar uma parcela de energia potencial relativa ao contato:

$$\Pi = P + U + K + C. \quad (6.13)$$

A equação de equilíbrio é escrita por meio da primeira variação do funcional:

$$\delta \Pi = \delta P + \delta U + \delta K + \delta C = 0. \quad (6.14)$$

Tendo em vista que a formulação adotada utiliza as posições como incógnitas, pode-se reescrever a Equação 6.14 como

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} = \frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} + \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} + \frac{\partial K}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} + \frac{\partial C}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} = \vec{0}, \quad (6.15)$$

e, pelo fato de a variação de posições ser arbitrária, tem-se

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial K}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial C}{\partial \vec{Y}} = \vec{0}, \quad (6.16)$$

que é a nova equação de equilíbrio, sendo o último termo do lado esquerdo o vetor de forças de contato:

$$\vec{F}^{cont} = \frac{\partial C}{\partial \vec{Y}}. \quad (6.17)$$

A Equação 6.16 é um sistema de equações não lineares que, conforme apresentado na subseção 5.1.5, é resolvido pelo método de Newton-Raphson. Para isso, é necessário calcular a segunda derivada do funcional de energia (matriz Hessiana), que terá uma contribuição da energia relativa ao contato:

$$\mathbf{H}^{cont} = \frac{\partial^2 C}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}}, \quad (6.18)$$

procedendo-se, então, ao cálculo da variação de posições por meio do processo iterativo.

Pela condição de impenetrabilidade, tem-se que $g = 0$ para os pares de pontos em contato. Logo, a parcela de energia relativa ao contato deve obedecer a essa restrição, incidindo em um problema matemático de minimização (ou otimização) restrita, havendo várias técnicas passíveis de uso para a resolução. Neste trabalho, são utilizadas duas delas: a técnica da penalização e o uso de multiplicadores de Lagrange.

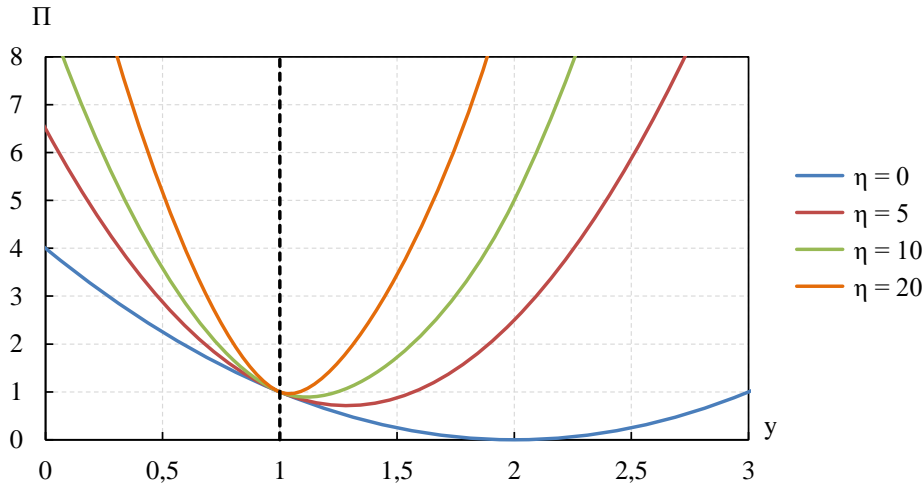
6.4 Imposição das condições de contato utilizando penalização

A ideia do método da penalização é a de transformar o problema de minimização restrita em minimização irrestrita por meio do seguinte funcional de energia para cada par nó-superfície em contato:

$$C^{pen} = \frac{1}{2} \eta g^2, \quad (6.19)$$

no qual η é uma constante escalar. O método trabalha “penalizando” violações da restrição g com o acréscimo de grandes quantidades de energia ao sistema, forçando o valor mínimo de Π para os limites do intervalo delimitado pela restrição g (LAURSEN, 2002). Para ilustrar este conceito, o gráfico do funcional de energia para um exemplo em que em que o equilíbrio com contato ocorre na posição $y = 1$ é mostrado na Figura 85.

Figura 85 – Gráfico do funcional de energia total Π com penalização para um problema genérico em que o equilíbrio com contato ocorre para $y = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

O aumento no escalar η força o mínimo do potencial para a posição $y = 1$. Entretanto, essa posição é apenas aproximada, de modo que o equilíbrio é obtido com alguma penetração. A penetração nula seria obtida com o parâmetro η tendendo ao infinito.

É possível perceber a similaridade do funcional da Equação 6.19 com a energia associada a uma mola de comportamento linear. De fato, pode-se atribuir ao método o significado físico da consideração de molas de rigidez η entre os pares nó-superfície em contato, de modo que uma penetração $g < 0$ corresponde a uma força de contato proporcional a essa penetração.

O método da penalização apresenta implementação computacional simples e não aumenta a quantidade de incógnitas no cálculo. Entretanto, a restrição não é imposta de forma exata e o parâmetro η (rigidez da mola) possui um valor arbitrário que depende de calibração. Valores altos diminuem a penetração, porém podem resultar em um mau condicionamento do sistema de equações; valores baixos permitem penetrações elevadas, de maneira que o modelo matemático pode se distanciar do comportamento físico.

6.4.1 Força de contato utilizando penalização

O vetor de forças de contato é a derivada do funcional da Equação 6.19 em relação às posições. Utilizando notação indicial:

$$(F^{cont})_i^\alpha = \frac{\partial C^{pen}}{\partial Y_i^\alpha} = \eta g \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha}. \quad (6.20)$$

Para calcular a derivada de g , inicialmente escreve-se a Equação 6.1 da seguinte forma,

também em notação indicial:

$$g = (Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) n_k, \quad (6.21)$$

na qual o índice 0 foi utilizado para denotar o nó projétil, que não está contido no elemento finito, e o ponto projeção foi expresso com as coordenadas nodais e funções de forma. Os índices mudos γ e k indicam nó do elemento alvo e direção, respectivamente.

Efetuada a derivação, obtém-se:

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} [(Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) n_k] = (\delta_{ki} \delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{ki} \delta_{\gamma\alpha}) n_k + (Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha}, \quad (6.22a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i + (Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha}, \quad (6.22b)$$

com o índice i (direção) variando de 1 a 3 e o índice α (nó) variando de 0 (nó projétil) até o número de nós do elemento finito npe .

As derivadas do vetor normal à superfície também aparecem no cálculo das forças internas para o elemento de membrana (subseção 5.4.3). Na ocasião, foi demonstrado que essas derivadas não precisavam ser incluídas devido à consideração do elemento em EPT. Contudo, na determinação das forças de contato em grandes deslocamentos, as derivadas do vetor normal não podem ser desprezadas. O Apêndice A contém as deduções das derivadas e expressões relacionadas.

O segundo termo entre parênteses da Equação 6.22b é o vetor que une o ponto projeção ao nó projétil e pode ser escrito como $\vec{AP} = g \cdot \vec{n}$, ou seja, o vetor \vec{AP} é proporcional (mesma direção) que o vetor normal unitário e tem “tamanho” g (g pode ser negativo). Substituindo na Equação 6.22b:

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i + (g n_k) \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i + g (ndn)_i^\alpha, \quad (6.23)$$

na qual se utilizou de uma notação mais compacta para indicar o produto entre o vetor normal unitário e a derivada (índice mudo k). Da Equação A.14, tem-se que $(ndn)_i^\alpha = 0$, portanto:

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i. \quad (6.24)$$

A contribuição no vetor de forças de contato é dada por

$$(F^{cont})_i^\alpha = \eta g (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i. \quad (6.25)$$

A expressão entre parênteses tem os seguintes valores:

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) = 1, \quad (6.26a)$$

$$\alpha = 1 \dots npe \quad \Rightarrow \quad (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) = -\phi^\alpha. \quad (6.26b)$$

Verifica-se que a força de contato tem valor ηg , como esperado para o método da penalização. Esse valor é aplicado no nó projétil 0 e distribuído nos nós do elemento alvo conforme os valores das funções de forma ϕ^α avaliados no ponto projeção.

6.4.2 Matriz Hessiana do contato utilizando penalização

A contribuição na matriz Hessiana da parcela do contato é obtida por meio da derivada da força de contato em relação às posições. Usando a Equação 6.20, tem-se:

$$(H^{cont})_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial (F^{cont})_i^\alpha}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_j^\beta} \left(\eta g \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \right) = \eta g \frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} + \eta \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial g}{\partial Y_j^\beta} \quad (6.27)$$

A primeira derivada de g já foi calculada (Equações 6.22b e 6.24). Calculando o produto das derivadas com a Equação 6.24:

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial g}{\partial Y_j^\beta} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) n_i n_j. \quad (6.28)$$

Deve-se destacar que, embora o termo $(ndn)_i^\alpha$ da Equação 6.23 seja nulo e não apareça na expressão final da força de contato (Equação 6.25), as derivadas desse termo não são nulas e precisam ser consideradas. Assim, a segunda derivada de g é calculada a partir da Equação 6.22b:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} &= \frac{\partial}{\partial Y_j^\beta} \left[(\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i + (Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha} \right] \\ &= (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) \frac{\partial n_i}{\partial Y_j^\beta} + (\delta_{kj} \delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{kj} \delta_{\gamma\beta}) \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha} + (Y_k^0 - \phi^\gamma Y_k^\gamma) \frac{\partial^2 n_k}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Colocando δ_{kj} em evidência e expressando último termo entre parênteses em função de g e n_k :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) \frac{\partial n_i}{\partial Y_j^\beta} + (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) \frac{\partial n_j}{\partial Y_i^\alpha} + (g n_k) \frac{\partial^2 n_k}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta}, \quad (6.30a)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) (dn_i)_j^\beta + (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) (dn_j)_i^\alpha + g (nd2n)_{ij}^{\alpha\beta}, \quad (6.30b)$$

na qual o vetor normal unitário e seu produto com a derivada segunda foram expressos com a notação compacta. Os valores de $(dn_j)_i^\alpha$ e $(nd2n)_{ij}^{\alpha\beta}$ são dados pelas Equações A.13 e A.20, respectivamente, e as Equações 6.26 valem para os dois primeiros termos entre parênteses.

Finalmente, a matriz Hessiana do contato para a penalização pode ser escrita como

$$(H^{cont})_{ij}^{\alpha\beta} = \eta (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) n_i n_j + \eta g \frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta}. \quad (6.31)$$

Percebe-se que, na Hessiana, há a contribuição de um termo proporcional à força de contato ηg . Esse termo se assemelha à uma rigidez geométrica para o contato e se anula no caso de pequenos deslocamentos, em que o vetor normal pode ser considerado constante e as respectivas derivadas são zero.

6.5 Imposição das condições de contato utilizando multiplicadores de Lagrange

No método dos multiplicadores de Lagrange, a restrição é incluída de modo explícito por meio de uma nova variável λ , denominada multiplicador de Lagrange. Isso equivale a considerar, para cada par nó-superfície em contato, a seguinte parcela no funcional de energia:

$$C^{lag} = \lambda g. \quad (6.32)$$

Como $g = 0$ para impor a restrição, o novo termo somado é nulo e não altera a energia total do sistema; entretanto, a inclusão do termo permite que a minimização seja feita considerando a restrição.

Assim como no caso da penalização, é possível associar um significado físico ao método dos multiplicadores de Lagrange quando aplicado ao problema do contato. Sendo g uma função de deslocamento e o termo λg uma parcela de energia (semelhante à energia potencial de forças externas, $P = -\vec{F}^{ext} \cdot \vec{Y}$), depreende-se que o multiplicador de Lagrange é o valor negativo da força de contato na interface. Além disso, para o modelo de contato utilizado neste trabalho, em que apenas forças de compressão são admitidas, infere-se da Figura 84 que o sinal da força de contato no nó projétil deve ser o mesmo que o da distância g antes do contato; logo, o multiplicador de Lagrange deve ter sinal oposto. A situação em que λ e g tem o mesmo sinal indica tração na interface e, nesse caso, o contato deve ser desativado.

O uso desse método permite que as restrições sejam impostas de forma exata, sem interpenetração. Entretanto, os multiplicadores são novas incógnitas que precisam ser calculadas e isso aumenta o número de graus de liberdade do problema, tornando a implementação computacional mais complexa que a do método da penalização. Dessa forma, para a determinação da força de contato e da matriz Hessiana do contato, as derivadas do funcional da Equação 6.32 devem ser calculadas em relação às posições e também em relação aos multiplicadores λ .

Além disso, a solução do sistema pelo método de Newton-Raphson se dá de forma iterativa, de modo que é necessário uma tentativa inicial para o multiplicador de Lagrange e esse valor é atualizado ao longo das iterações. O sistema de equações pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{H} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y} \\ \Delta \vec{\lambda} \end{Bmatrix} = -\vec{G} \left(\vec{Y}_{s+1-\alpha}^0, \vec{\lambda}_{s+1-\alpha}^0 \right), \quad (6.33)$$

sendo $\vec{\lambda}$ um vetor com os multiplicadores de Lagrange para todos os nós que entraram em contato.

6.5.1 Força de contato utilizando multiplicadores de Lagrange

Para se obter a força de contato, deriva-se o funcional da Equação 6.32. A derivada em relação às posições vale

$$(F^{cont})_i^\alpha = \frac{\partial C^{pen}}{\partial Y_i^\alpha} = \lambda \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha}. \quad (6.34)$$

A derivada de g é dada pela Equação 6.24. Substituindo na equação anterior:

$$(F^{cont})_i^\alpha = \lambda (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i. \quad (6.35)$$

Essa equação demonstra que a força de contato tem valor λ , aplicado diretamente no nó projétil 0 e distribuído nos nós do elemento alvo conforme os valores de ϕ^α . Conclusão semelhante foi obtida para o método da penalização.

Como os multiplicadores de Lagrange também são incógnitas, ainda é necessário fazer a derivação do potencial de energia em relação a λ para se obter a contribuição no vetor de forças de contato para o respectivo grau de liberdade:

$$(F^{cont})^\lambda = \frac{\partial C^{pen}}{\partial \lambda} = g. \quad (6.36)$$

Como só existe um multiplicador de Lagrange para cada nó projétil, optou-se por representar o grau de liberdade do multiplicador com o próprio índice λ na Equação 6.36.

6.5.2 Matriz Hessiana do contato utilizando multiplicadores de Lagrange

A matriz Hessiana do contato para os multiplicadores de Lagrange é obtida derivando-se as Equações 6.35 e 6.36 em relação às posições e ao multiplicador:

$$(H^{cont})_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial (F^{cont})_i^\alpha}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_j^\beta} \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \right) = \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \lambda \left[(\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) (dn_i)_j^\beta + (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) (dn_j)_i^\alpha + g (nd2n)_{ij}^{\alpha\beta} \right]; \quad (6.37a)$$

$$(H^{cont})_i^{\alpha\lambda} = \frac{\partial (F^{cont})_i^\alpha}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \right) = \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = (\delta_{0\alpha} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\alpha}) n_i; \quad (6.37b)$$

$$(H^{cont})_j^{\beta\lambda} = \frac{\partial (F^{cont})^\lambda}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial g}{\partial Y_j^\beta} = (\delta_{0\beta} - \phi^\gamma \delta_{\gamma\beta}) n_j; \quad (6.37c)$$

$$(H^{cont})^{\lambda\lambda} = \frac{\partial (F^{cont})^\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0. \quad (6.37d)$$

6.6 Estabilidade numérica de problemas dinâmicos com restrições

Na subseção 5.1.4, foi indicado que o uso de integradores temporais nos problemas dinâmicos deve levar em consideração a estabilidade numérica da resposta, podendo ser necessário o emprego de algoritmos que inserem amortecimento numérico no sistema. Cardona e G eradin (1989) e G eradin e Cardona (2001) demonstram que a avaliação da estabilidade em sistemas com restrições, como o caso do contato, possui algumas particularidades em relação aos sistemas sem restrições. Isso é mais relevante no uso dos multiplicadores de Lagrange, em que as restrições são consideradas de maneira explícita, porém as conclusões dos autores também são importantes para a situação em que as restrições são impostas de forma aproximada, como no método da penalização.

Conforme já descrito, os multiplicadores de Lagrange são incógnitas (graus de liberdade) que são adicionados ao sistema dinâmico. Entretanto, constata-se que não existe nenhuma massa associada a estes novos graus de liberdade. Considerando que o sistema seja composto por n graus de liberdade de movimento e m multiplicadores de Lagrange, pode-se demonstrar que o problema de vibração livre associado tem como solução $n - m$ frequências finitas e m pares de frequências $+\infty$ e $-\infty$. Isso mostra a importância do uso de algoritmos de integração com amortecimento numérico para estes casos, tendo em vista que as frequências altas podem prejudicar a resposta.

Em relação aos métodos utilizados nesse trabalho, os autores indicam que existe uma instabilidade fraca no método de Newmark sem amortecimento numérico que o torna incondicionalmente instável em análises de tempo mais longas. Sobre o α -generalizado, G eradin e Cardona (2001) fazem a ressalva de que, para o método ser estável,   necessário que $\alpha_m \neq \alpha_f$ e, portanto, $\rho_\infty \neq 1$, impedindo o uso do método sem dissipação.

Além dessas observações, acrescenta-se aqui ainda o fato de que, para o caso dos multiplicadores de Lagrange, a existência de autovalores negativos faz com que a matriz do sistema de equações deixe de ser positiva definida para se tornar indefinida. Isso deve ser levado em conta na escolha da rotina computacional de solução do sistema, tendo em vista que várias rotinas são específicas para o caso de matrizes positivas definidas e, por isso, inadequadas para este problema.

Tendo em vista esse pormenor, este trabalho utilizou duas rotinas computacionais diferentes para calcular a solução do sistema de equações lineares. Para o caso geral, foi considerada a rotina HSL MA87 (HSL, 2016), específica para matrizes positivas definidas. Quando do uso dos multiplicadores de Lagrange, foi empregada a rotina HSL MA86 (HSL, 2016) para sistemas indefinidos. Esta segunda rotina também foi utilizada nos exemplos numéricos em que a estrutura apresenta instabilidade, com a matriz Hessiana possuindo determinante (e pelo menos um autovalor) nulo ou negativo.

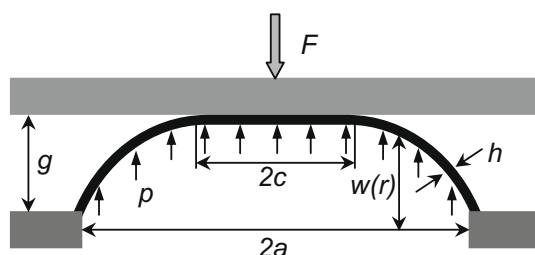
6.7 Exemplos de validação

Apresentam-se aqui alguns exemplos numéricos para validar a formulação posicional do contato para elementos de membrana e de sólido.

6.7.1 Membrana em contato com anteparo rígido

Para verificar o contato entre elementos de membrana, analisa-se o exemplo de uma membrana circular, fixa nas bordas, sujeita a uma pressão uniforme que induz o contato com um anteparo rígido. Este problema foi avaliado experimentalmente por Xu e Liechti (2010), que também propõem uma solução analítica aproximada. O arranjo estudado é indicado na Figura 86.

Figura 86 – Membrana circular sujeita à pressão em contato com anteparo rígido.

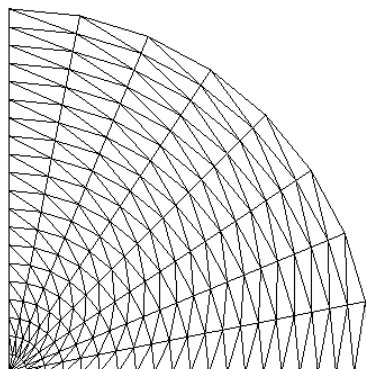


Fonte: Xu e Liechti (2010).

A membrana ensaiada é um filme de polietileno tereftalato (PET) com módulo de elasticidade $E = 4,65$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,34$ e espessura $h = 3$ μm . O diâmetro $2a$ é de 20,32 mm e verificou-se uma tensão residual de 7,5 MPa, que foi considerada como um pré-tensionamento. Sob o efeito de uma pressão variável p , a membrana horizontal desenvolve deslocamentos w até entrar em contato com um anteparo de vidro situado a uma distância $g = 203$ μm . O que se busca é a determinação do raio de contato c de acordo com a pressão p aplicada. Pelas dimensões apresentadas, verifica-se que este problema é de pequenos deslocamentos e a direção considerada para a pressão (vertical ou normal à superfície) tem pouca influência nos resultados.

A análise numérica do presente trabalho considerou a pressão p variando de 0 até 1040 Pa em 52 passos de carga (20 Pa por passo). Utilizou-se uma malha semelhante à empregada em exemplo anterior (subseção 5.7.5), com 1248 elementos triangulares, mostrada na Figura 87. Duas análises foram realizadas, considerando elementos de aproximação linear (641 nós na malha) e quadrática (2529 nós). O contato foi avaliado com a penalização ($\eta = 10^6$) e com os multiplicadores de Lagrange, resultando em respostas praticamente coincidentes. A tolerância considerada no processo iterativo foi $tol = 10^{-6}$.

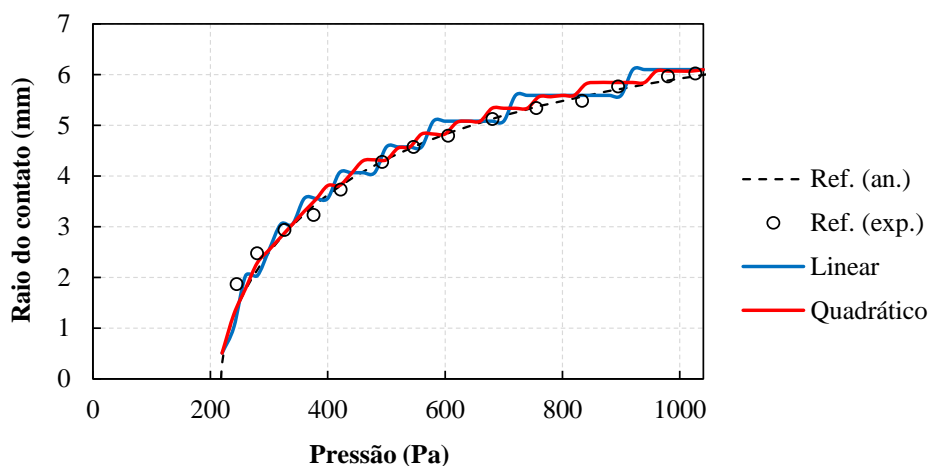
Figura 87 – Um quadrante da malha utilizada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os valores do raio c da área em contato obtidos com os elementos linear e quadrático são mostrados na Figura 88, juntamente com a solução analítica aproximada e os resultados experimentais da fase de carregamento de Xu e Liechti (2010). Inicialmente, observa-se que as curvas numéricas possuem trechos horizontais, indicando que o raio de contato não variou entre alguns passos de carga consecutivos. Isso ocorre devido à discretização nó-a-superfície, que faz com que o contato só seja detectado quando o nó da membrana se desloca uma distância g , mesmo que a região intermediária do elemento já tenha atingido o anteparo. Esse efeito é menor na malha com elementos quadráticos porque a quantidade de nós é maior, apresentando variação mais contínua.

Apesar disso, verifica-se que os resultados obtidos com ambos os elementos foram bastante próximos aos de referência, validando a formulação implementada. A pressão para a qual o contato se iniciou nas análises foi de 220 Pa (passo 11), predizendo corretamente o valor experimental de 218 Pa.

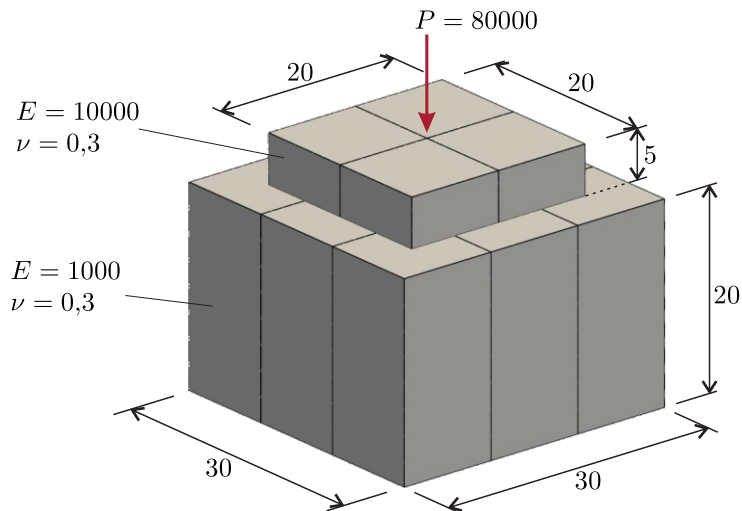
Figura 88 – Raio de contato da membrana em função da pressão p aplicada.

Fonte: elaborada pelo autor.

6.7.2 Blocos em contato

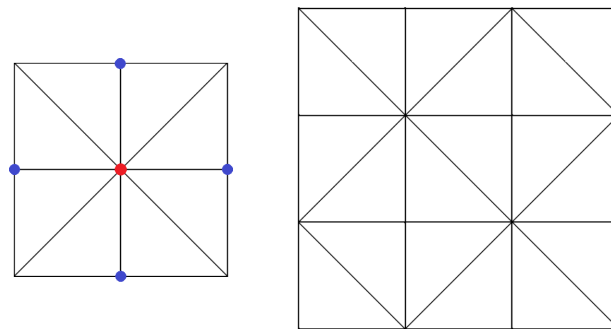
Este exemplo consiste em um conjunto de dois blocos em contato sob a ação de uma força concentrada, com a base do bloco inferior totalmente fixa. O exemplo foi apresentado originalmente por Parisch (1989), mas também foi avaliado por Soares (2021) utilizando a formulação posicional. A Figura 89 ilustra o problema e a discretização adotada por ambas as referências, que utilizaram elemento de sólido hexaédrico de 8 nós. Aqui, foi utilizado o elemento de sólido prismático de base triangular com as malhas indicadas na Figura 90. Optou-se por utilizar uma malha não simétrica para o bloco inferior, haja vista que uma malha simétrica só seria possível com o aumento do número de elementos finitos e isso traria diferenças nas respostas obtidas devido ao baixo nível de discretização.

Figura 89 – Blocos em contato.



Fonte: Soares (2021).

Figura 90 – Vista superior das malhas utilizadas para os blocos superior (esq.) e inferior (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

Para impedir a ocorrência de uma Hessiana singular, foram aplicadas condições de contorno no bloco superior. Nos pontos azuis da malha da Figura 90, o deslocamento horizontal

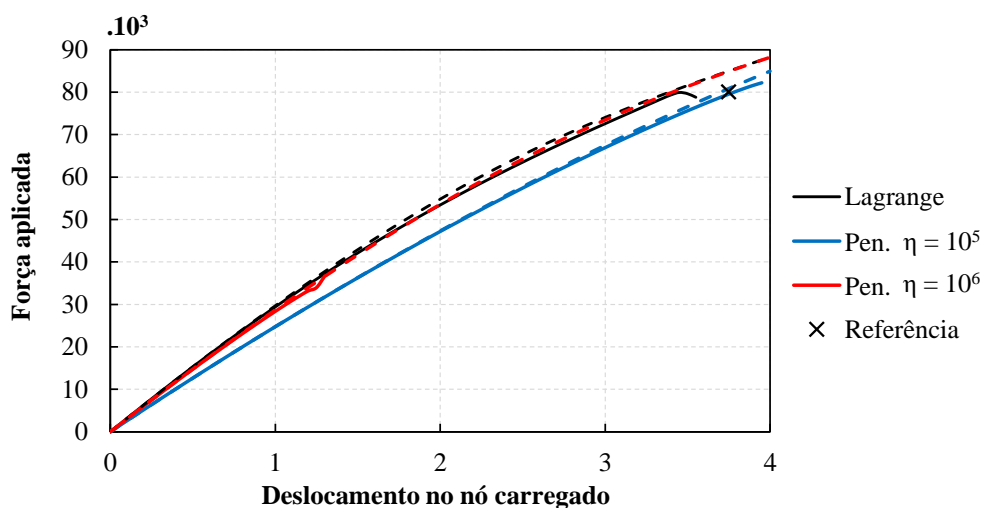
nas faces superior e inferior do bloco foi restringido considerando a simetria (ou seja, apenas o deslocamento “radial” foi permitido). No nó central (vermelho) da face superior, ao invés de se considerar a força aplicada como Parisch (1989) e Soares (2021), foi imposto um deslocamento vertical e mediu-se a força associada. Foi adotado um deslocamento total de 4,0 no sentido para baixo, em 80 passos de 0,05, obtendo-se um gráfico força-deslocamento para comparação com o resultado pontual (uma força e um deslocamento) das referências.

A tolerância considerada no processo iterativo (Equação 5.40) foi $tol = 10^{-6}$. Entretanto, verificou-se que o processo iterativo de solução ficava “preso” na maioria dos passos de carga, oscilando entre as mesmas posições nodais. Dessa forma, foi considerado um limite de 10 iterações por passo, prosseguindo-se com a análise ainda que a tolerância especificada não tenha sido atingida.

As análises realizadas demonstraram que a estabilidade numérica é um ponto relevante para o problema; dessa forma, seis situações diferentes foram consideradas. Na imposição do contato, utilizou-se o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da penalização com parâmetros $\eta = 10^5$ e $\eta = 10^6$, fazendo a detecção do contato conforme discutido na seção 6.2. Ainda, observando que no problema em questão as interfaces não se separam, esses três casos foram repetidos impondo-se que os pares nó projétil e elemento alvo estão sempre em contato. Essa consideração trouxe uma melhoria expressiva na estabilidade numérica da análise e, por isso, serão os principais dados utilizados na comparação.

A Figura 91 ilustra as relações entre força aplicada (por meio do controle de deslocamento) e deslocamento do nó carregado. As linhas tracejadas indicam os resultados obtidos impondo-se os pares de contato. Soares (2021) obteve valores próximos utilizando penalização e multiplicadores de Lagrange e optou-se por indicar apenas o último como referência.

Figura 91 – Relação entre força aplicada e deslocamento do nó carregado. As linhas tracejadas indicam os resultados obtidos impondo-se os pares de contato.



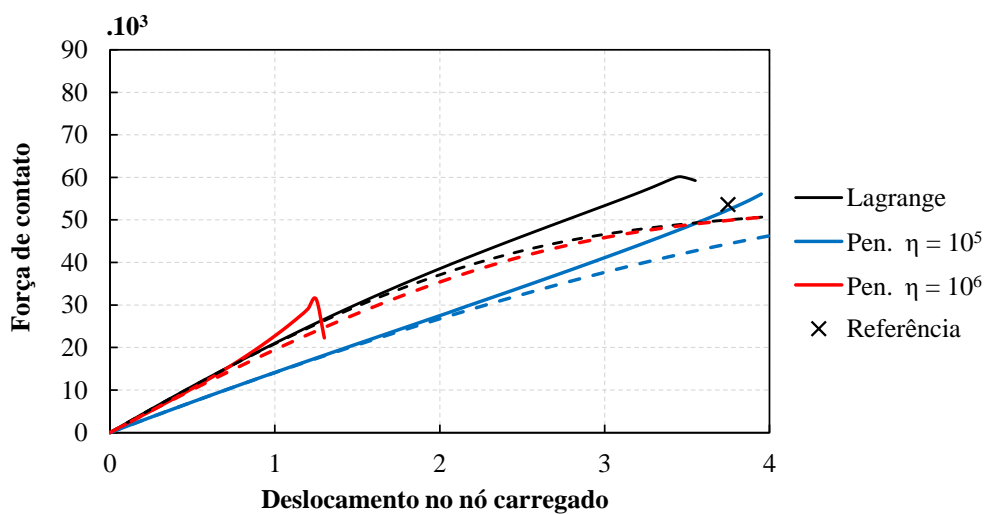
Fonte: elaborada pelo autor.

Para as análises com detecção do contato (linha contínua), nenhum dos três casos chegou ao final dos 80 passos de deslocamento. A análise foi interrompida nos passos 72, 80 e 27 para multiplicadores de Lagrange, $\eta = 10^5$ e $\eta = 10^6$, respectivamente. Já para as análises com pares de contato fixos não se verificou problemas com instabilidade numérica. Percebe-se ainda que, com o aumento do parâmetro de penalização η , os resultados tendem a ser iguais aos obtidos com os multiplicadores de Lagrange, indicando que os métodos foram corretamente implementados.

A comparação com o valor de referência (deslocamento $3,7485$ para força de $80 \cdot 10^3$) pode ser feita interpolando-se o resultado de força aplicada para os passos de deslocamento anterior e posterior. Com os multiplicadores de Lagrange, a força calculada é de 84953 , valor $6,19\%$ superior. Essa pequena diferença pode ser causada pela discretização utilizada, com o emprego de elementos prismáticos triangulares ao invés de hexaédricos.

Os resultados da força de contato no nó abaixo do nó carregado são mostrados na Figura 92. Como esperado, essa força é sempre menor que a força aplicada, visto que os nós da borda também entram em contato. O valor de referência é de $53615,1$ e o interpolado com os multiplicadores de Lagrange é de 50012 , diferença de $-6,72\%$.

Figura 92 – Relação entre força de contato e deslocamento do nó carregado. As linhas tracejadas indicam os resultados obtidos impondo-se os pares de contato.



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o método da penalização, os valores de penetração $|g|$ são de $0,4586$ e $0,0610$ para $\eta = 10^5$ e $\eta = 10^6$, respectivamente. Tendo em vista que os nós do bloco inferior também tem a tendência de penetrar no bloco superior, a força de contato resultante é menor que a multiplicação ηg para o nó. A análise de Soares (2021) obteve penetração $|g| = 0,0530$ para $\eta = 10^6$, valor compatível com o calculado no presente trabalho.

7 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

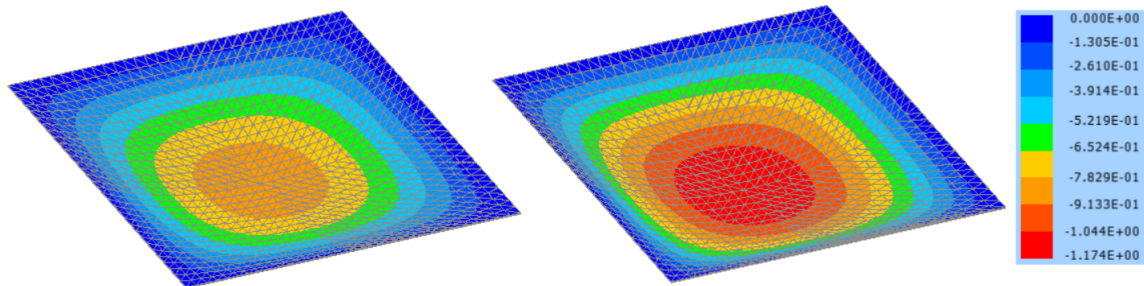
Neste capítulo, serão apresentados alguns exemplos de aplicação do código computacional implementado com vistas a demonstrar as potencialidades da formulação desenvolvida.

7.1 Membrana horizontal pré-tensionada

Neste exemplo, é analisada uma membrana horizontal quadrada com lados de 8,0 m sob um carregamento vertical de 100 N/m^2 . As quatro bordas são fixas e a malha é composta de 2048 elementos de membrana de aproximação linear. O material considerado possui módulo de elasticidade $E = 200 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e a espessura da membrana é $t = 0,03 \text{ mm}$. A tolerância utilizada no processo de Newton-Raphson foi $tol = 10^{-6}$.

Embora esse problema seja semelhante ao exemplo de verificação já estudado, o foco aqui é a avaliação do efeito do pré-tensionamento na membrana. Assim, os deslocamentos e tensões principais foram avaliados para dois casos: (1) pré-tensionamento uniforme de 10,0 MPa; (2) sem pré-tensionamento (membrana frouxa). A Figura 93 mostra os deslocamentos verticais para os dois casos.

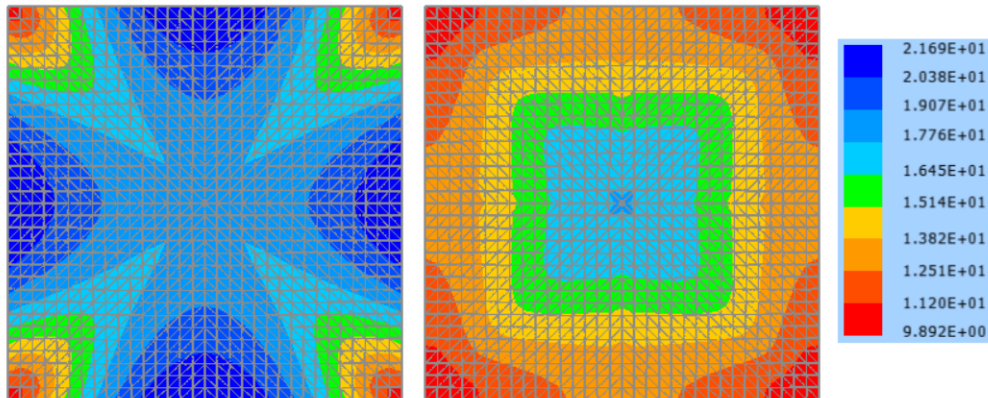
Figura 93 – Deslocamentos verticais (em m) para a membrana com pré-tensionamento de 10 MPa (esq.) e sem pré-tensionamento (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

Para o caso com pré-tensionamento de 10 MPa, as tensões principais são mostradas na Figura 94. Para a tensão principal 1 (σ_{p1}), os maiores valores ocorrem no meio das bordas e os menores nos cantos. Para a tensão principal 2 (σ_{p2}), observa-se um padrão decrescente a partir do centro da membrana, também com valores nos cantos menores que no meio das bordas.

Figura 94 – Tensões principais (em MPa) na membrana com pré-tensionamento de 10 MPa: (σ_{p1}) (esq.) e (σ_{p2}) (dir.).

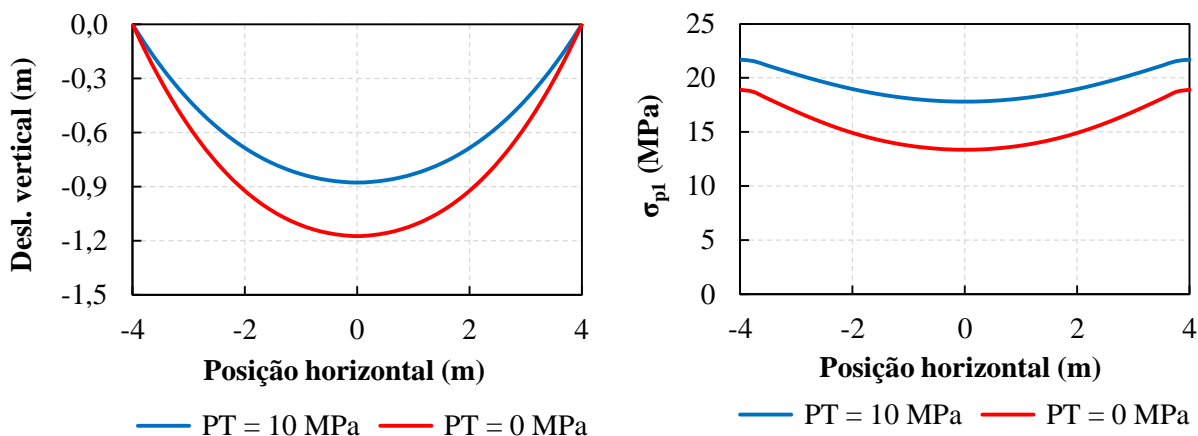


Fonte: elaborada pelo autor.

A matriz Hessiana na primeira iteração para a membrana frouxa é singular, visto que a membrana frouxa horizontal não possui nenhuma rigidez vertical. Para contornar este problema, a análise desse caso foi simplesmente iniciada a partir da configuração final obtida do caso pré-tensionado, eliminando o pré-tensionamento e buscando a nova configuração de equilíbrio.

Os resultados de deslocamento vertical e primeira tensão principal em um perfil na metade do vão são mostrados na Figura 95. Como esperado, o pré-tensionamento aumenta a rigidez da estrutura, reduzindo o deslocamento máximo de 1,1743 m para 0,8772 m (25,3% de redução). As tensões principais são maiores para o caso com pré-tensionamento, porém a diferença é menor que a tensão aplicada. No meio da borda, a tensão na membrana frouxa é de 18,91 MPa e na pré-tensionada é de 21,69 MPa (2,78 MPa ou 14,7% maior). No centro, a tensão é de 13,36 MPa na membrana frouxa e de 17,81 MPa na pré-tensionada (4,45 MPa ou 33,3% maior). Esses resultados ilustram a importância do pré-tensionamento para conferir rigidez geométrica às estruturas de membrana.

Figura 95 – Perfil na metade do vão: deslocamentos verticais (esq.) e σ_{p1} (dir.).

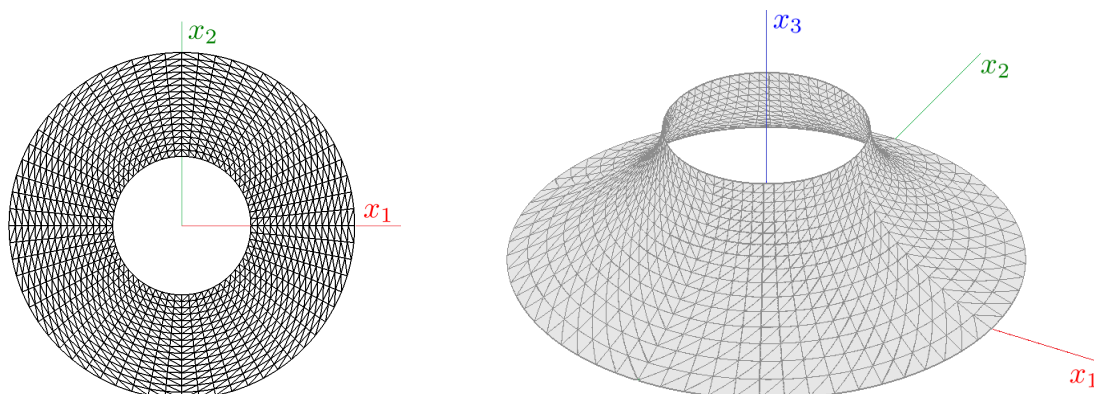


Fonte: elaborada pelo autor.

7.2 Catenoide

Este exemplo estuda uma membrana com o formato clássico de um catenoide. O catenoide já foi discutido em um exemplo de validação (subseção 3.5.1) e o presente exemplo utilizou a mesma geometria inicial, com $r_{ext} = 10$ m, $r_{int} = 4$ m e $h = 6$ m. Foram utilizados elementos de membrana linear (M1) e quadrático (M2) e de sólido quadrático (S2) com aproximação linear na espessura em uma malha simétrica composta por 2048 elementos. O procedimento de busca da forma foi realizado com o método da relaxação dinâmica considerando um pré-tensionamento uniforme fictício e elevação do anel central desde a posição inicial no plano até a altura h . Utilizou-se a estratégia de divisão do elemento quadrático em subelementos lineares. A tolerância adotada neste procedimento foi $tol = \|\vec{u}\|/\|\vec{X}\| = 10^{-8}$. A Figura 96 ilustra a malha inicial plana e a configuração espacial em equilíbrio obtida após a busca da forma. Para o modelo de sólido, aproveitou-se da busca da forma da membrana, considerando este resultado como a superfície média do sólido para se obter a malha correspondente de elementos tridimensionais.

Figura 96 – Malhas do catenoide: plana inicial (esq.) e após a busca da forma (dir.).



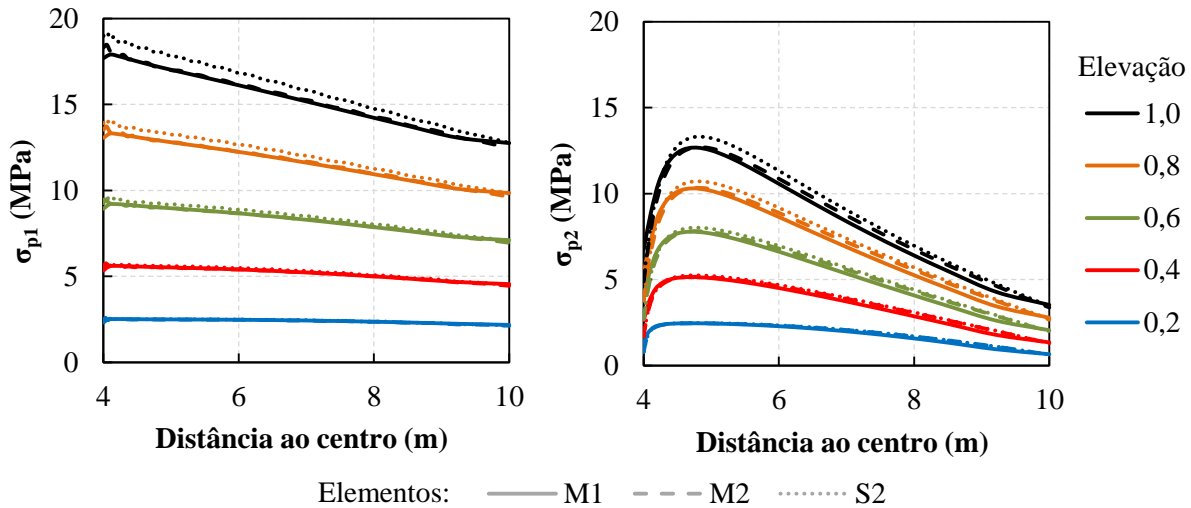
Fonte: elaborada pelo autor.

A espessura e as propriedades do material são as mesmas que as do exemplo anterior ($E = 200$ MPa, $\nu = 0,3$ e $t = 0,03$ mm) e a tolerância adotada para o processo de Newton-Raphson foi $tol = 10^{-5}$. Dois casos de carregamento foram analisados, ambos considerando a membrana sem pré-tensionamento (frouxa): (1) uma elevação vertical do anel interno em 1,0 m; (2) uma carga horizontal distribuída de $50,0$ N/m² na direção x_1 , atuando apenas na metade esquerda ($x_1 < 0$) do catenoide, juntamente com uma carga vertical de $0,003$ N/m² representando o peso próprio. Para o segundo caso, a carga horizontal é distribuída conforme a área de projeção normal à carga na configuração inicial, ao passo que o peso próprio é distribuído conforme a geometria (inclinada) dos elementos.

A elevação do anel central do primeiro caso de carregamento foi dividida em 5 passos de 0,2 m cada. Essa elevação pode simular uma operação real de pré-tensionamento na estrutura,

embora o estado de tensões resultante não seja isotrópico. A resposta obtida com os três elementos (M1, M2 e S2) foi bastante próxima. As tensões principais são indicadas na Figura 97. As duas tensões são ligeiramente superiores para o elemento de sólido; quanto aos elementos de membrana, a primeira tensão principal é ligeiramente maior junto ao anel interno para o elemento quadrático.

Figura 97 – Catenóide com elevação do anel interno: tensões principais (em MPa).



Fonte: elaborada pelo autor.

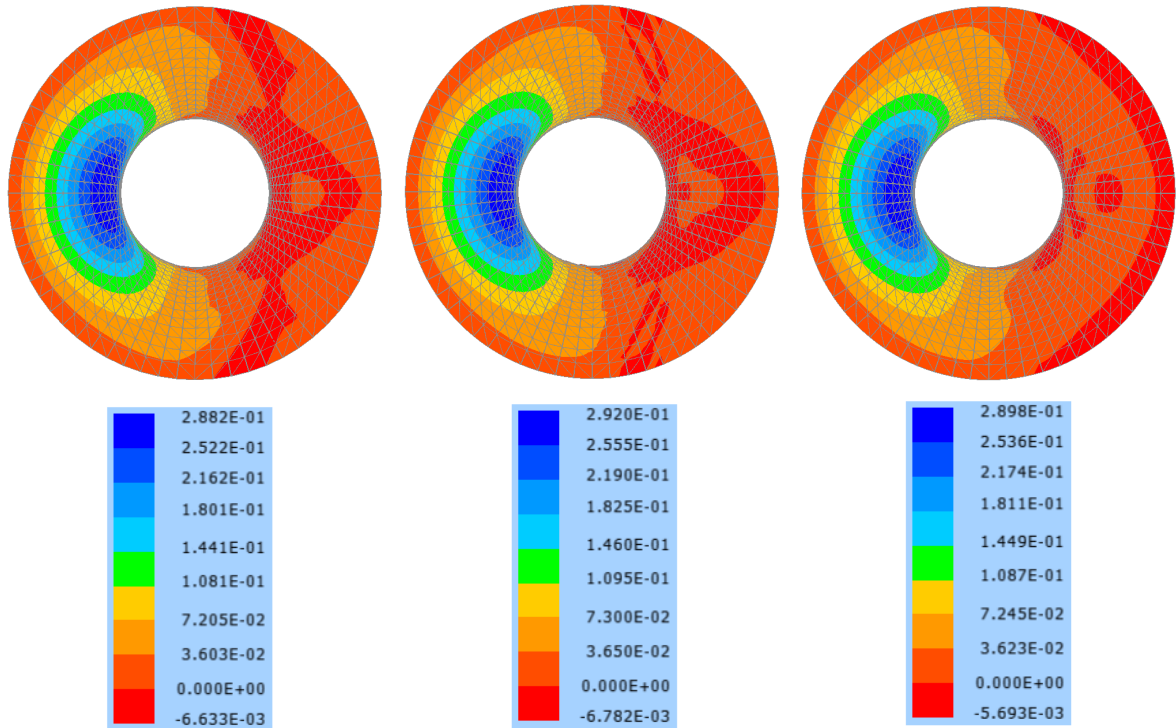
Sobre a distribuição das tensões, verifica-se que σ_{p1} tem, aproximadamente, uma variação linear, diminuindo com a distância ao centro do catenóide. Essa tensão é aproximadamente constante para o primeiro passo de carga. Para σ_{p2} , os valores máximos ocorrem a certa distância do anel interno, porém a variação ainda é aproximadamente linear do ponto de máximo até as bordas interior e exterior. Com o aumento da elevação, há uma tendência deste ponto de máximo se distanciar do centro.

Para o segundo caso de carregamento, ocorre o enrugamento em parte da membrana devido à ausência de pré-tensionamento na condição inicial. O modelo de enrugamento indicado na subseção 3.3.3 foi utilizado tanto para o elemento de membrana quanto para o sólido (conforme citado na seção 5.5).

Observando o comportamento geral da estrutura, verifica-se que apenas o lado esquerdo ($x_1 < 0$) trabalha suportando a carga lateral aplicada, ao passo que o lado direito ($x_1 > 0$) praticamente não trabalha, suportando apenas o peso próprio, que é de baixíssima magnitude. Na transição entre estas duas zonas (eixo x_2), o enrugamento tem um efeito importante.

Os resultados de deslocamento na direção x_1 obtidos com os três elementos são mostrados na Figura 98. Os valores numéricos são bastante próximos. Observa-se uma pequena diferença na forma das regiões com deslocamentos negativos, principalmente para o elemento S2. Este elemento também apresenta resposta com variação mais suave nas regiões de maior enrugamento, próximas ao eixo x_2 .

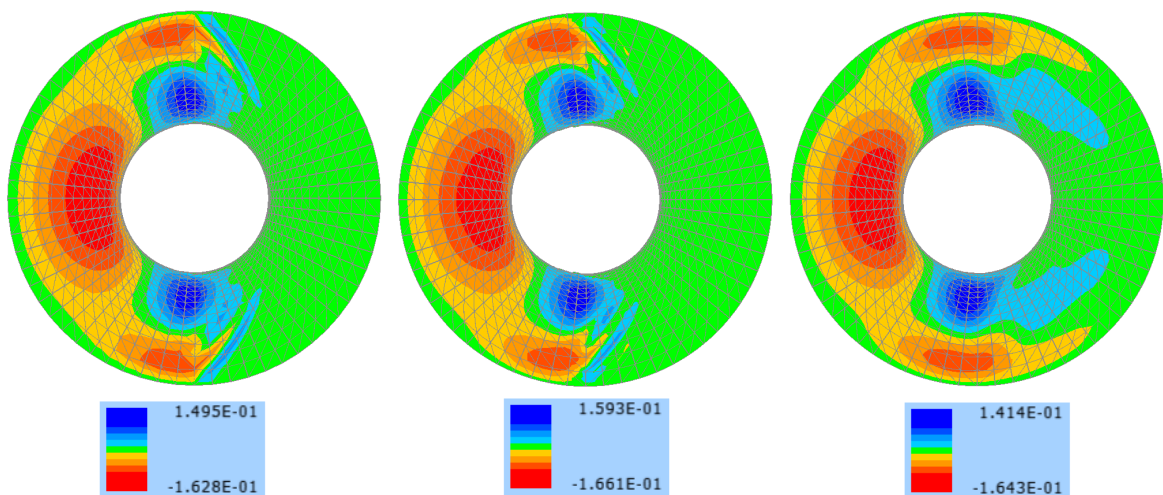
Figura 98 – Catenóide sob carga horizontal: deslocamentos na direção x_1 (em m) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 99 apresenta os deslocamentos na direção vertical x_3 . Novamente, os valores obtidos foram próximos, com deslocamentos para baixo na face que recebe a carga. Há um levantamento da membrana junto ao anel interno, pelo efeito da carga aplicada, e também deslocamentos positivos em uma região mais à direita devido ao enrugamento. Para os elementos M1 e M2, essas regiões são descontínuas e seguem as linhas diagonais da malha; para o elemento S2, a região é maior e de variação mais suave.

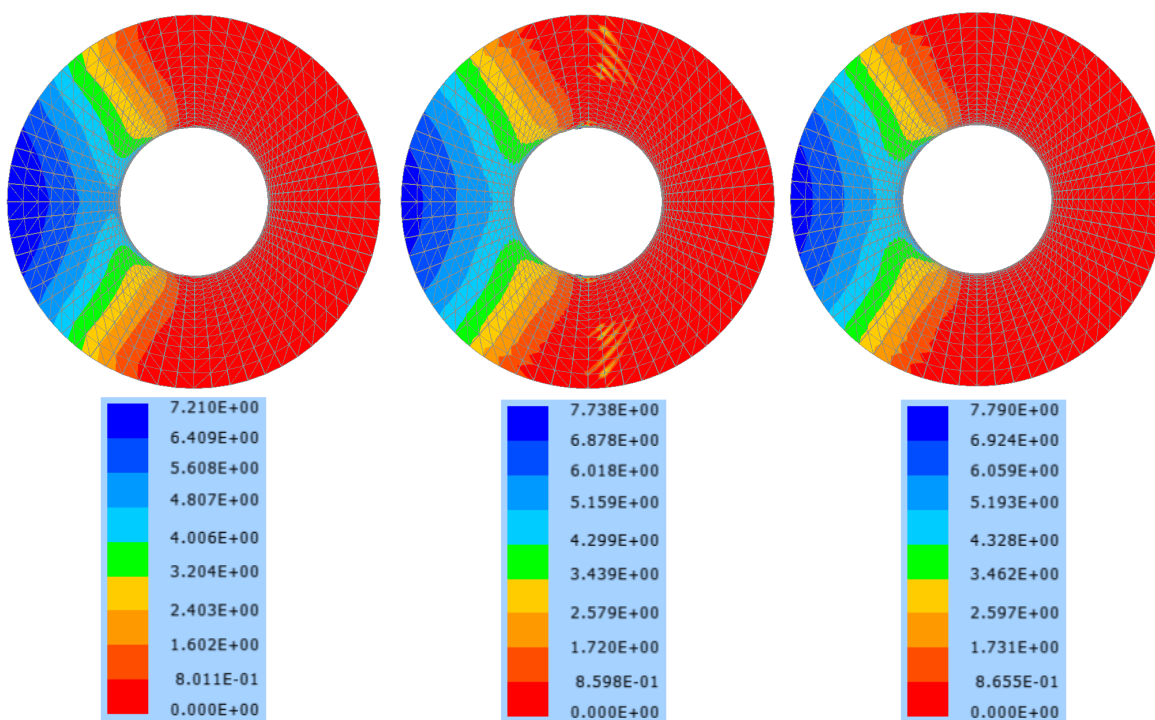
Figura 99 – Catenóide sob carga horizontal: deslocamentos na direção x_3 (em m) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor.

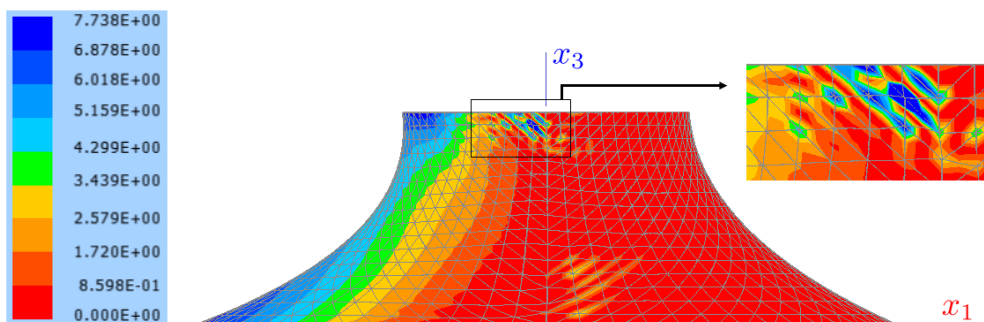
Em relação às tensões, dois pontos importantes precisam ser mencionados. Inicialmente, em linhas gerais, os resultados calculados com os três elementos ainda foram parecidos, como mostrado na Figura 100 para σ_{p1} . Entretanto, para o elemento M2 ocorreram concentrações de tensões em alguns nós na região próxima ao eixo x_2 devido ao enrugamento. A Figura 101 apresenta uma vista lateral da estrutura na qual se observam essas concentrações, a mais intensa na parte superior da estrutura e ainda outra na parte inferior, de menor magnitude. As tensões na parte superior atingiram o valor de 24,66 MPa. As concentrações de tensão seguem as linhas diagonais da malha, assim como no caso dos deslocamentos verticais.

Figura 100 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p1} (em MPa) com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 101 – Catenoide sob carga horizontal: detalhe de σ_{p1} (em MPa) para o elemento M2.

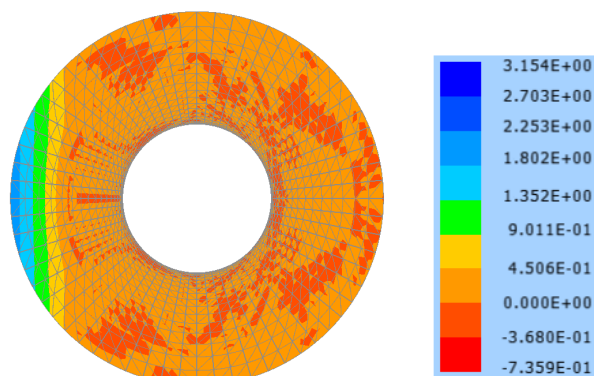


Fonte: elaborada pelo autor.

O segundo ponto refere-se ao uso do algoritmo de enrugamento para o elemento de sólido. Embora as respostas de deslocamento e mesmo em tensões tenham sido semelhantes, ainda

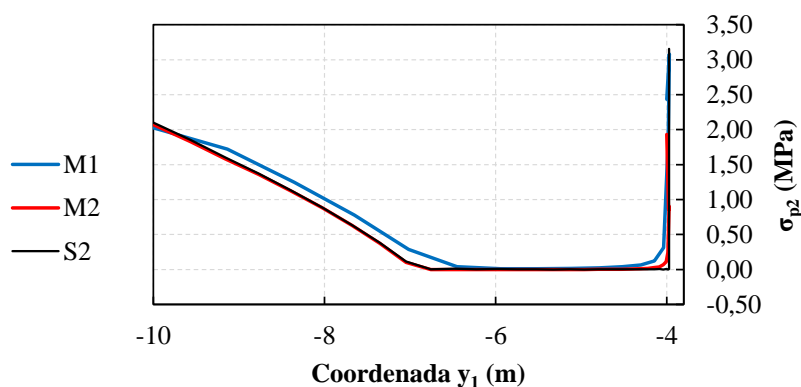
houve a ocorrência de compressão nos elementos, como mostrado na Figura 102. A Figura 103 ilustra as tensões no lado negativo do eixo x_1 (face em que atua a carga), com concentrações de tensão próximas ao anel interno. O elemento M2 ainda apresentou concentrações de tensão (σ_{p2}) na região de enrugamento próxima ao eixo x_2 , com valor máximo de 7,08 MPa.

Figura 102 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p2} (em MPa) com o elemento S2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 103 – Catenoide sob carga horizontal: σ_{p2} (em MPa).



Fonte: elaborada pelo autor.

De modo geral, os três elementos forneceram uma resposta numérica próxima. Entretanto, para os elementos de membrana, observa-se que alguns padrões de tensões e de deslocamentos seguem as linhas diagonais da malha, indicando que a orientação da malha pode ter influência na resposta calculada. Estudos subsequentes podem analisar melhor esse efeito, considerando inclusive o elemento quadrilátero, que não foi implementado no âmbito deste trabalho. Quanto ao uso do algoritmo de enrugamento para o sólido, os resultados foram compatíveis com os obtidos com o elemento de membrana, apesar de não impedir completamente a ocorrência de compressão.

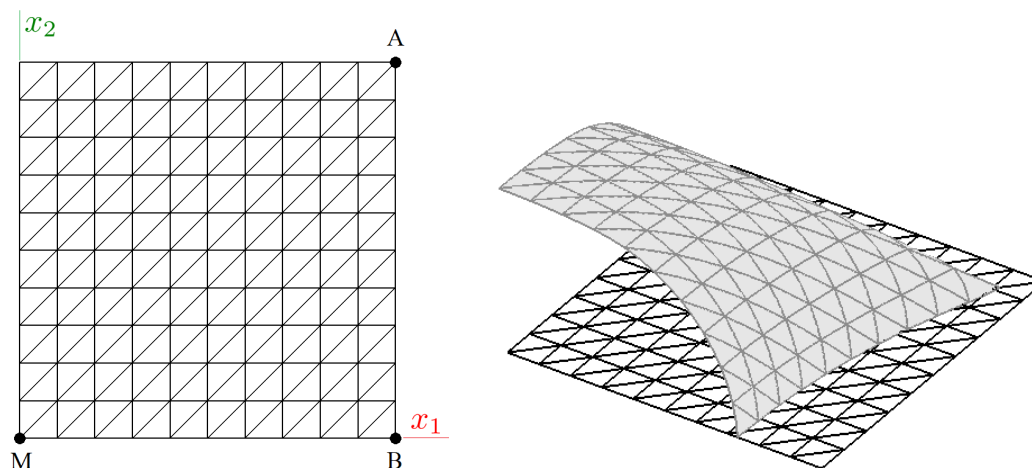
Cumprе citar que, no caso do elemento de sólido, as tensões principais foram calculadas considerando apenas as tensões no plano tangente à estrutura. Ou seja, considerando que o plano tangente contém as direções locais 1 e 2, apenas as componentes σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} foram utilizadas no cálculo de σ_{p1} e σ_{p2} .

7.3 Airbag inflado

O problema analisado neste exemplo é o de um airbag inflado pela ação de uma pressão interna. O airbag é composto por duas membranas quadradas unidas ao longo das bordas, com dimensão de 1,2 m na diagonal, e o material é isotrópico com $E = 588$ MPa e $\nu = 0,4$. A espessura considerada foi $t = 0,6$ mm. Este exemplo aparece em vários trabalhos da literatura, como os de Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2008), Ziegler, Wagner e Bletzinger (2003), Contri e Schrefler (1988) e Kang e Im (1999). A pressão atuante é de 5 kPa e atua sempre no sentido normal à membrana.

Aproveitando-se da simetria, apenas um oitavo do airbag foi modelado, com a malha de 200 elementos triangulares apresentada na Figura 104. Essa malha é igual à utilizada por Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2008) e semelhante à utilizada por Ziegler, Wagner e Bletzinger (2003), que empregaram 100 elementos quadriláteros. Os eixos x_1 e x_2 são eixos de simetria e o plano x_1x_2 é um plano de simetria. A Figura 104 mostra ainda uma vista em perspectiva do modelo na posição de equilíbrio. Foram utilizados elementos de membrana lineares (M1) e quadráticos (M2) e elemento de sólido com aproximação quadrática na base e na espessura (S2). Neste último caso, as condições de contorno referentes à simetria foram aplicadas nos nós da camada intermediária do sólido. No processo de Newton-Raphson utilizou-se $tol = 10^{-5}$.

Figura 104 – Malha utilizada para o airbag (esq.) e posição de equilíbrio (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

Um ponto chave neste problema é a quase singularidade da matriz Hessiana no estado inicial. Os elementos de membrana não possuem rigidez transversal (rigidez elástica nula nessa direção) e não há pré-tensionamento (rigidez geométrica nula), de modo que a única parcela de rigidez vem do pressão atuante, cuja direção é dependente do deslocamento. Para realizar a análise, Contri e Schrefler (1988) utilizaram um procedimento empregando o refinamento sucessivo da malha com a imposição de posições nodais e possibilidade de ocorrência de compressão

(depois eliminada), de modo a prover a estabilidade numérica necessária. Kang e Im (1999) adotaram procedimento semelhante. Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2008) e Ziegler, Wagner e Bletzinger (2003) citam que consideraram um refinamento sucessivo da malha, mas não explicitam o método empregado. No presente trabalho, o problema da estabilidade numérica foi resolvido adotando-se um pré-tensionamento fictício (imposto de acordo com o disposto na subseção 5.4.4) para prover rigidez geométrica, e, após o equilíbrio, esse pré-tensionamento foi eliminado para se encontrar a posição real de equilíbrio do problema.

A Tabela 5 mostra os resultados de deslocamento para os nós A, B e M da malha e ainda a primeira tensão principal para o nó M (no modelo de sólido, foi considerado o nó na camada intermediária). Os valores de Jarasjarungkiat, Wuchner e Bletzinger (2008) (ref. 1) e Ziegler, Wagner e Bletzinger (2003) (ref. 2) também são apresentados para comparação. Observa-se que há boa concordância entre os resultados calculados e os de referência. Uma possível causa para as pequenas diferenças é o método utilizado na consideração do enrugamento.

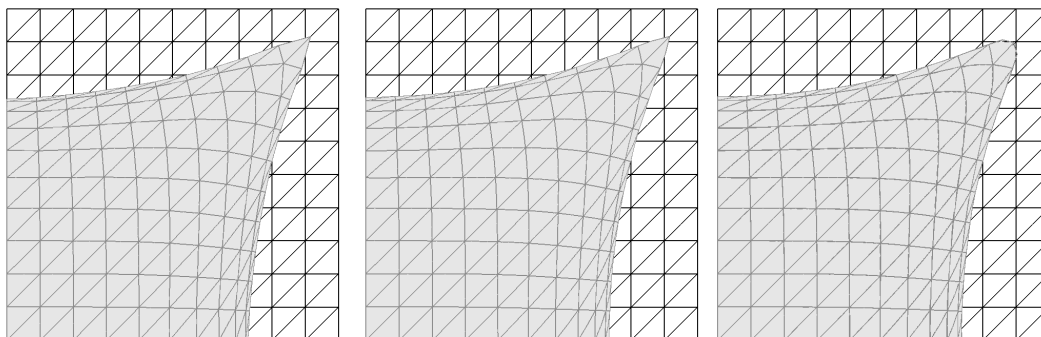
Tabela 5 – Resultados da análise do airbag. Os índices superescritos denotam os nós e os deslocamentos u e w se referem às direções 1 e 3, respectivamente.

	ref. 1	ref. 2	M1	M2	S2
w^M (cm)	21,75	21,60	21,91	21,82	21,86
$-u^B$ (cm)	12,03	12,30	11,59	11,36	11,26
$-u^A$ (cm)	3,49	4,88	3,59	3,55	4,58
σ_{p1}^M (MPa)	3,9	3,7	4,01	4,31	4,36

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma comparação qualitativa da configuração final é apresentada na Figura 105. O elemento M2 produziu contornos mais suaves que o M1, como esperado. Com o elemento S2, o canto do airbag ficou com formato mais arredondado devido à rigidez à flexão, ao passo que o uso dos elementos de membrana trouxe um aspecto mais pontiagudo.

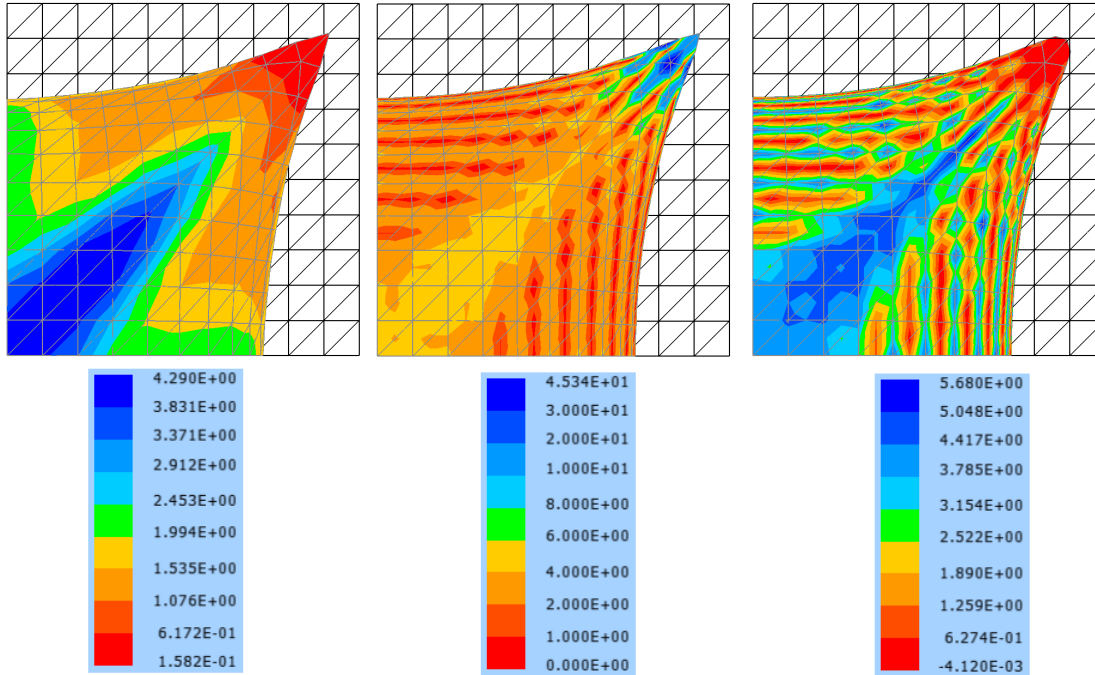
Figura 105 – Configuração final do airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2, respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor.

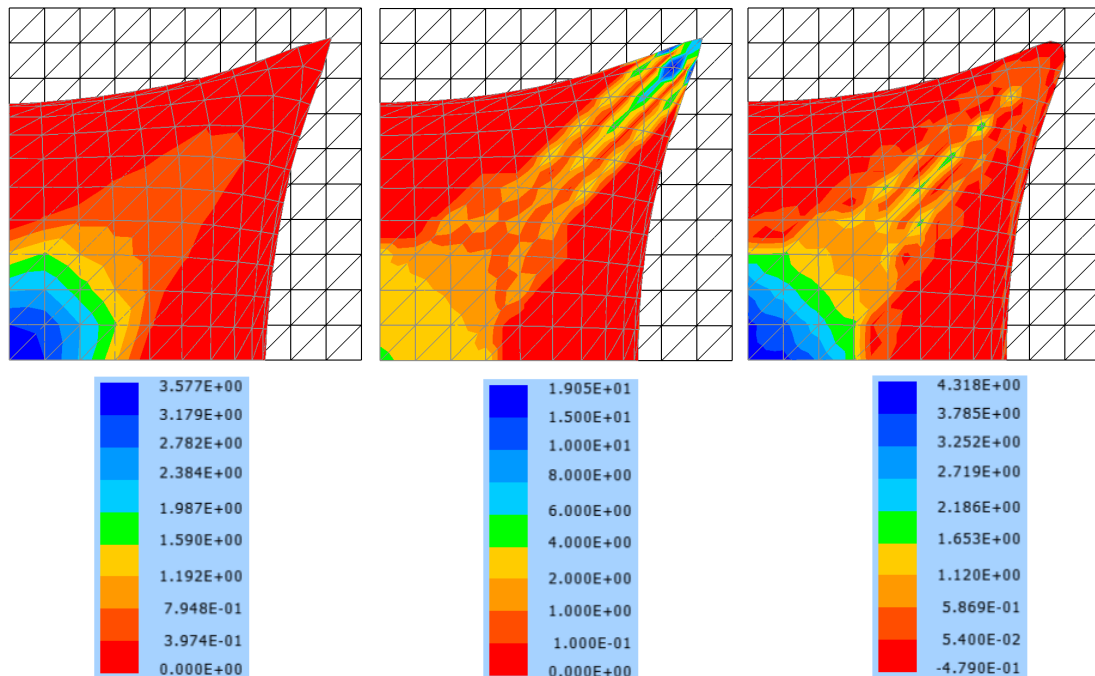
Embora os deslocamentos obtidos tenham sido semelhantes, os padrões de tensões principais observados apresentam diferenças significativas, como mostrado nas Figuras 106 e 107. No modelo de sólido, são mostradas as tensões nos nós da camada intermediária.

Figura 106 – Tensão σ_{p1} (em MPa) no airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2. Os intervalos da escala de cores do elemento M2 foram ajustados para melhor visualização dos resultados.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 107 – Tensão σ_{p2} (em MPa) no airbag obtida com os elementos M1, M2 e S2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Cabe destacar que no modelo de sólido houve um efeito importante de flexão, mesmo com a reduzida espessura do elemento. As tensões principais máximas nas camadas inferior, intermediária e superior foram 4,65 MPa, 5,68 MPa e 7,39 MPa, uma diferença não desprezível. A flexão é mais importante junto ao canto do airbag; nessa região, as tensões com o elemento M2

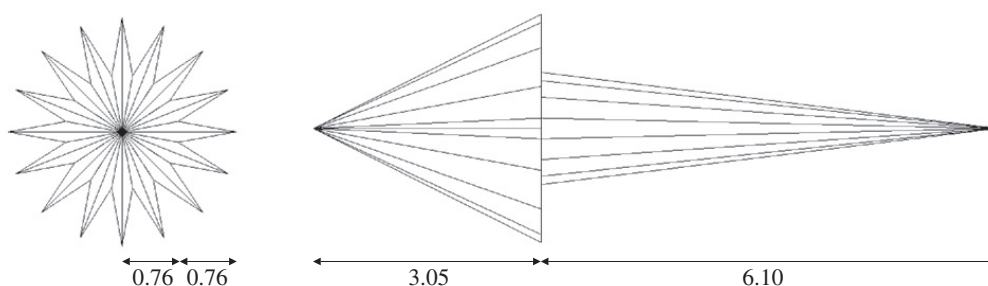
foram bastante superiores às dos outros dois modelos. As tensões são mais semelhantes no meio do airbag, que possui curvatura quase nula, e mais díspares no canto, onde a curvatura é maior. Isso pode estar relacionado com a capacidade de cada elemento finito representar a curvatura da estrutura em membrana.

Observa-se ainda que, para os elementos M2 e S2, os padrões da primeira tensão principal formam linhas paralelas de tensão quase constante e baixa magnitude, possivelmente indicando uma tendência de enrugamento (para o M2, apenas tendência, pois as tensões ainda são positivas). Por meio dos resultados da segunda tensão principal, percebe-se que essa região se encontra sob enrugamento uniaxial, ao passo que a diagonal do airbag não apresenta enrugamento.

7.4 Paraquedas

O sistema estudado neste exemplo consiste em um paraquedas, inicialmente dobrado, sobre o qual atua uma pressão de ar. Este problema foi abordado por Valdés, Miquel e Oñate (2009). A geometria inicial (rotacionada) é mostrada na Figura 108; no modelo, o eixo de axissimetria foi considerado na vertical. O raio do paraquedas é de 1,525 m e a distância (no plano horizontal) dos pontos de dobra ao centro é 0,777438 m. A malha é composta por 1632 elementos de membrana e 16 elementos de cabo. Foram utilizados elementos de membrana linear (M1) e quadrático (M2), além dos elementos de cabo lineares. Os cabos são ligados ao paraquedas nos pontos de dobra e não se estendem sobre o dossel.

Figura 108 – Geometria inicial do paraquedas. Dimensões em metros.



Fonte: Valdés, Miquel e Oñate (2009).

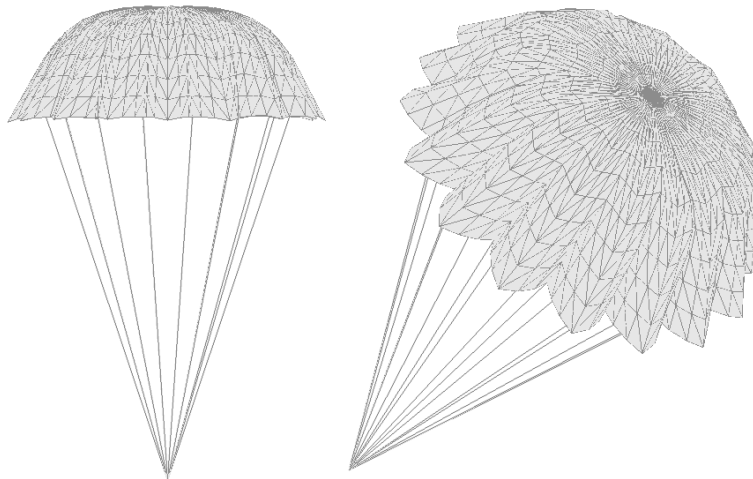
O material do paraquedas possui $E = 2,07 \cdot 10^8$ Pa e $\nu = 0,3$ e a espessura é $t = 0,03$ mm. Os cabos possuem $E = 2,07 \cdot 10^9$ Pa e área da seção transversal $A = 1,3$ cm². A pressão que atua no paraquedas é de 5 Pa e a tolerância considerada no processo de Newton-Raphson foi $tol = 5 \cdot 10^{-5}$.

Assim como no exemplo do airbag, a matriz Hessiana da estrutura no estado inicial é singular. Novamente, utilizou-se da estratégia de considerar um pré-tensionamento fictício

na análise em um momento inicial, que foi depois removido para se obter a posição real de equilíbrio.

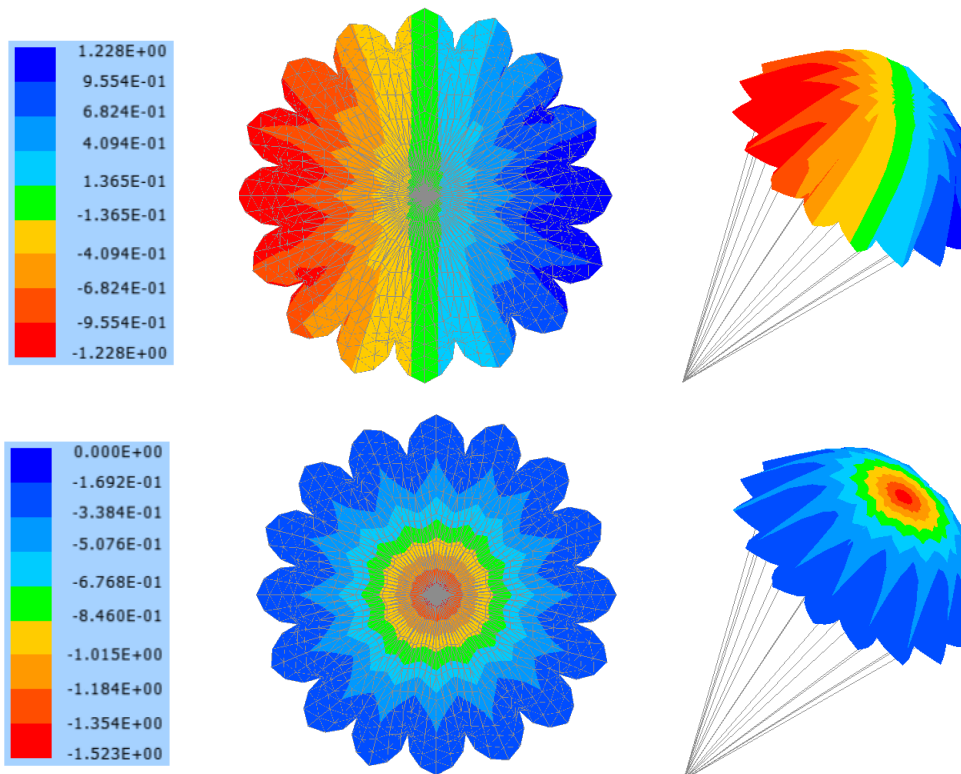
A configuração final do paraquedas aberto (com o elemento M1) é ilustrada na Figura 109. Os resultados de deslocamentos e tensões principais são mostrados nas Figuras 110 a 115.

Figura 109 – Configuração final do paraquedas.



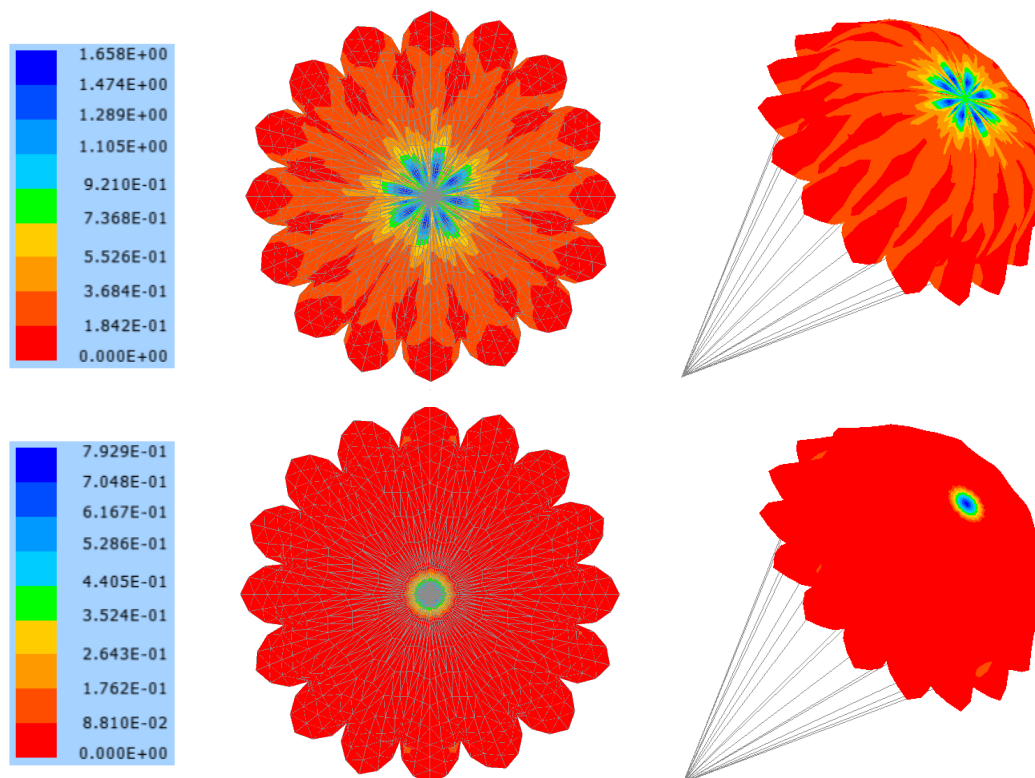
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 110 – Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento M1.



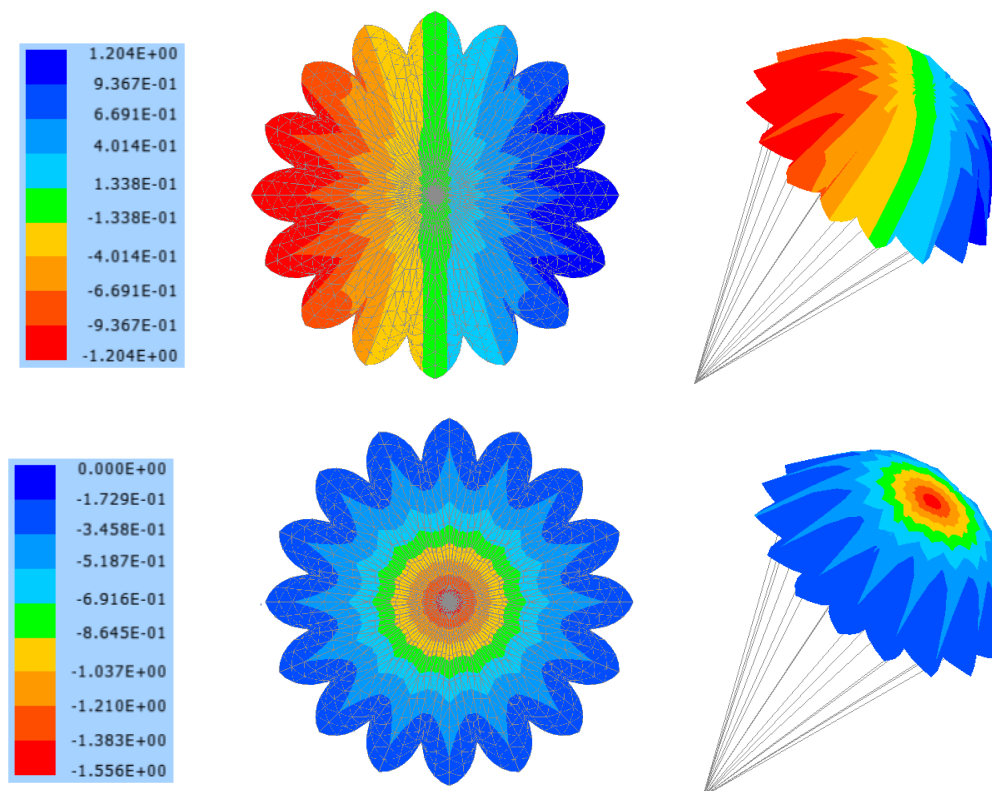
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 111 – Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento M1.



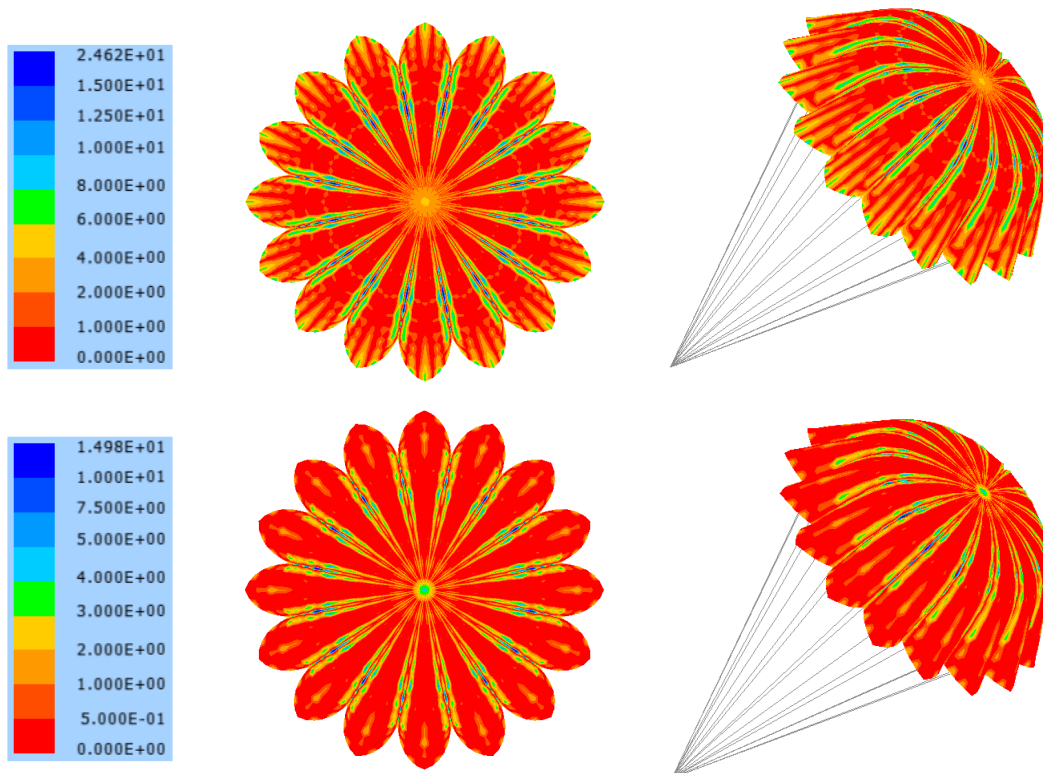
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 112 – Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento M2.



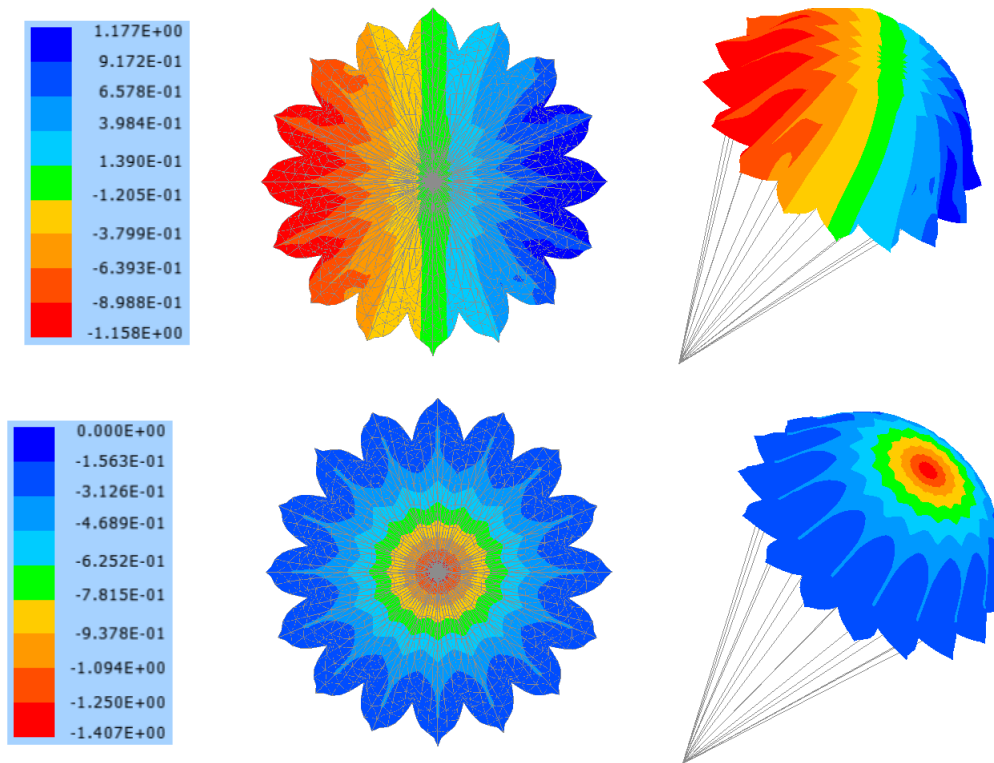
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 113 – Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento M2. Os intervalos da escala de cores foram ajustados para melhor visualização dos resultados.



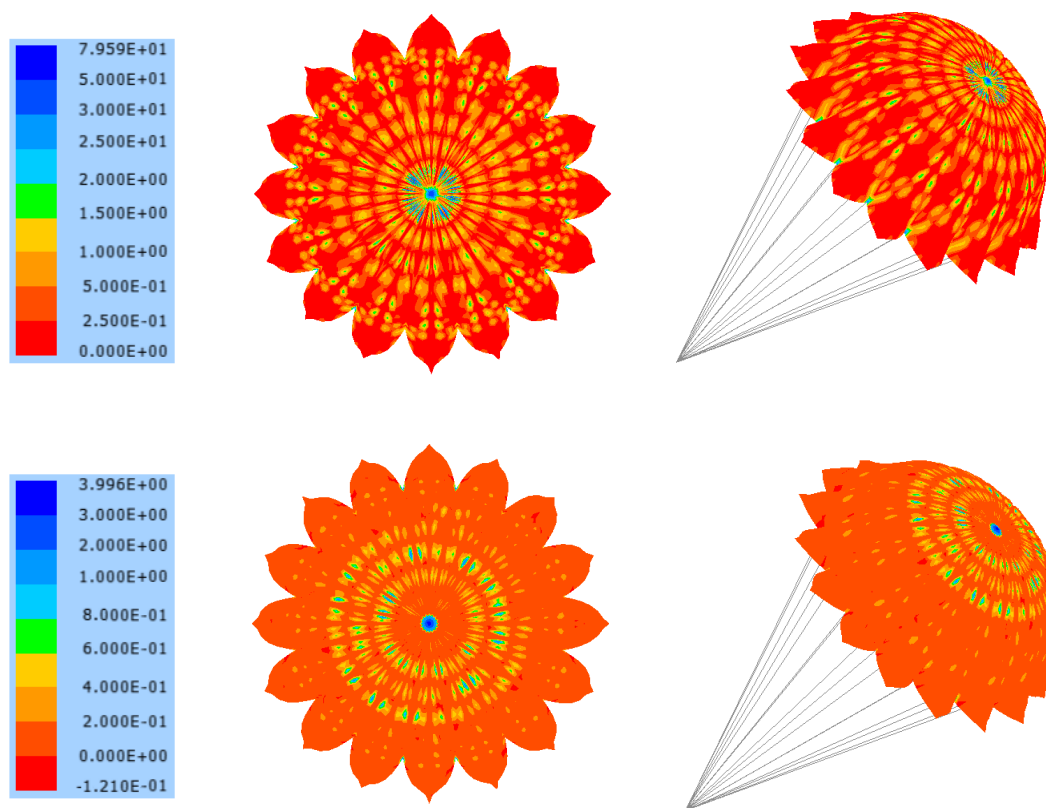
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 114 – Deslocamentos nas direções 1 e 3 (em m) no paraquedas com o elemento S2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 115 – Primeira e segunda tensões principais (em MPa) no paraquedas com o elemento S2. Os intervalos da escala de cores foram ajustados para melhor visualização dos resultados.



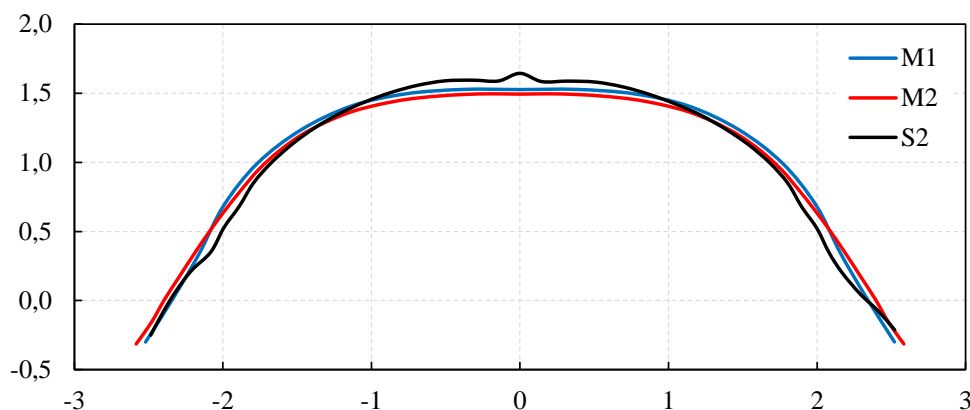
Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 6 são comparados os resultados obtidos neste trabalho com os de Valdés, Miquel e Oñate (2009). De modo geral, os dados mostram um comportamento semelhante ao observado no exemplo do airbag. Os deslocamentos são próximos aos valores de referência, porém as tensões são mais distantes. O deslocamento vertical com o elemento S2 é ligeiramente inferior aos demais; um olhar mais próximo mostra que isso é um efeito localizado no centro do paraquedas, ilustrado na Figura 116.

Tabela 6 – Resultados da análise do paraquedas. Os deslocamentos u e w se referem às direções 1 e 3, respectivamente.

	ref.	M1	M2	S2
u_{max} (cm)	1,42	1,228	1,204	1,177
$-w_{max}$ (cm)	1,58	1,523	1,556	1,407
$\sigma_{p1,max}$ (MPa)	2,6	1,658	24,622	7,959
$\sigma_{p2,max}$ (MPa)	0,32	0,793	14,977	3,996
$\sigma_{p1,centro}$ (MPa)	-	0,807	4,783	4,283
$\sigma_{p2,centro}$ (MPa)	-	0,793	4,630	3,996
N_{cabos} (N)	-	5,864	5,912	5,438

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 116 – Perfis do paraquedas no plano y_1y_3 .

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor máximo da primeira tensão principal não se encontra no centro; contudo, as duas tensões principais no centro são quase iguais, o que é condizente com um problema axissimétrico (tensões normais iguais em duas direções ortogonais e tensão de cisalhamento nula). Com o elemento M2 ocorreram concentrações de tensões principalmente nas linhas que unem os pontos onde os cabos estão ligados à membrana ao centro do paraquedas. Em menor intensidade, houve também concentrações nos pontos centrais das bordas dos gomos.

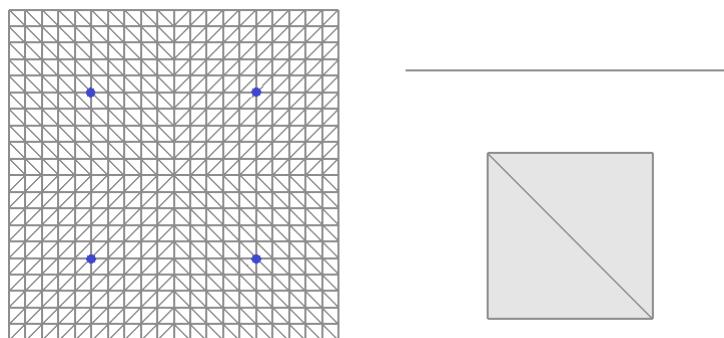
Em relação ao elemento S2, houve uma redução expressiva da espessura da membrana no centro do paraquedas, chegando a $t = 0,458 \cdot 10^{-5}$ m. Isso causou um aumento da tensão calculada. Desprezando essa redução de espessura, as tensões no centro seriam $\sigma_{p1} = 0,654$ MPa e $\sigma_{p2} = 0,610$ MPa.

7.5 Membrana caindo sobre base rígida

Analisa-se neste exemplo uma membrana sujeita a uma situação de contato dinâmico. Um tecido quadrado, com lados de 20 cm, cai sob o peso próprio sobre uma base rígida quadrada com lados de 10 cm, com uma altura inicial de 5 cm entre os planos. O peso próprio é considerado como uma carga uniformemente distribuída de $1,8816$ N/m², as propriedades do material são $E = 2$ MPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 320$ kg/m³ e a espessura da membrana é $t = 0,6$ mm. A Figura 117 ilustra a malha utilizada, com 800 elementos finitos. Novamente, foram utilizados os elementos M1, M2 e S2 com aproximação linear na espessura. Nas análises com o elemento de sólido, com o objetivo de melhorar o desempenho computacional, foi utilizado apenas um quarto da malha e impôs-se as condições de simetria correspondentes. Além disso, para o sólido foi necessário considerar $\nu = 0$, como será explicado por meio dos resultados.

Como não existe pré-tensionamento no tecido, o modelo de enrugamento foi novamente considerado para evitar o aparecimento de tensões de compressão e avaliar com mais precisão a

Figura 117 – Malha do exemplo em vistas superior e lateral. Os pontos azuis indicam os cantos da base.



Fonte: elaborada pelo autor.

resposta do sistema. O contato foi imposto utilizando os métodos da penalização (considerando $\eta = 10^4$ N/m) e dos multiplicadores de Lagrange. A tolerância utilizada no processo de solução foi $tol = 10^{-6}$.

Para o procedimento de integração no tempo, adotou-se uma discretização em 10 passos de 0,01 s seguidos por 450 passos de 10^{-4} s, totalizando 0,145 s de análise. O contato do tecido com a base ocorreu em $t = 0,1011$ s. Três procedimentos diferentes foram considerados: (1) método de Newmark com amortecimento numérico (NAN), com os parâmetros sugeridos por Hu (1997), (2) método α -generalizado com aniquilação assintótica (GAA) e (3) método de Newmark com aceleração constante (NAC). A Tabela 7 apresenta os parâmetros para os três métodos.

Tabela 7 – Parâmetros considerados na integração temporal do exemplo.

Método	β	γ	α_f	α_m	ρ_∞
NAN	1,00	1,50	-	-	-
GAA	1,00	1,50	-1	0	0
NAC	0,25	0,50	-	-	-

Fonte: elaborada pelo autor.

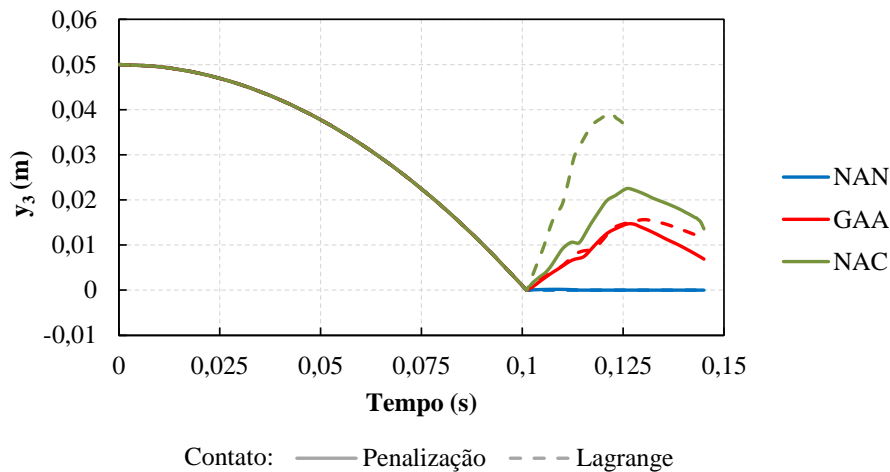
Um ponto importante a se observar é que o problema em questão é bastante sensível numericamente. Como o tecido não possui pré-tensionamento inicial, a matriz Hessiana estática é singular. A análise dinâmica é possível devido à matriz de massa (não singular) adicionada à Hessiana no sistema de equações; entretanto, o tecido tem peso próprio reduzido e a contribuição devido ao contato (\mathbf{H}^{cont}) também pode produzir um efeito desestabilizador no sistema.

A estabilidade numérica da análise transiente está relacionada ao amortecimento numérico inserido e à forma de imposição do contato. Dentre os três métodos de integração no tempo utilizados, o NAN é o que insere mais amortecimento numérico (mais estável neste problema), seguido pelo GAA e então pelo NAC (que não insere nenhum amortecimento, sendo o menos estável). Quanto às técnicas de imposição do contato, o método da penalização, que é aproximado, foi mais estável que o método dos multiplicadores de Lagrange, que impõe as restrições de forma exata. Ainda, os elementos finitos utilizados (M1, M2 e S2) influenciaram na

estabilidade. No cálculo, isso se verificou pelo fato dos métodos mais estáveis serem capazes de permitir a análise por mais passos de tempo, enquanto que, com os menos estáveis, a análise precisou ser interrompida mais cedo pela ocorrência de matriz singular ou resultados espúrios.

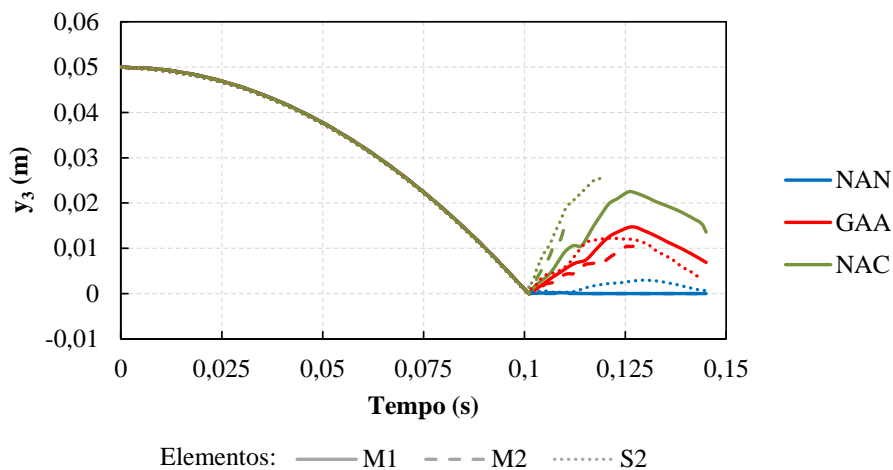
Uma maneira possível de avaliar a estabilidade (além da extensão da análise) é por meio do deslocamento vertical do nó central do tecido. Após o contato com a base, o nó se elevou mais para os métodos menos estáveis e se elevou pouco (ou nada) para os métodos mais estáveis. Contudo, para o elemento S2, a elevação foi maior mesmo com mais estabilidade devido à rigidez à flexão do sólido, como será explicado adiante. A Figura 118 apresenta os deslocamentos com o elemento M1 para os métodos de penalização e multiplicadores de Lagrange e a Figura 119 traz os deslocamentos para os três elementos, considerando contato imposto por penalização.

Figura 118 – Posição vertical do nó central do tecido com penalização e multiplicadores de Lagrange, utilizando elemento M1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 119 – Posição vertical do nó central do tecido para os elementos M1, M2 e S2, utilizando penalização.

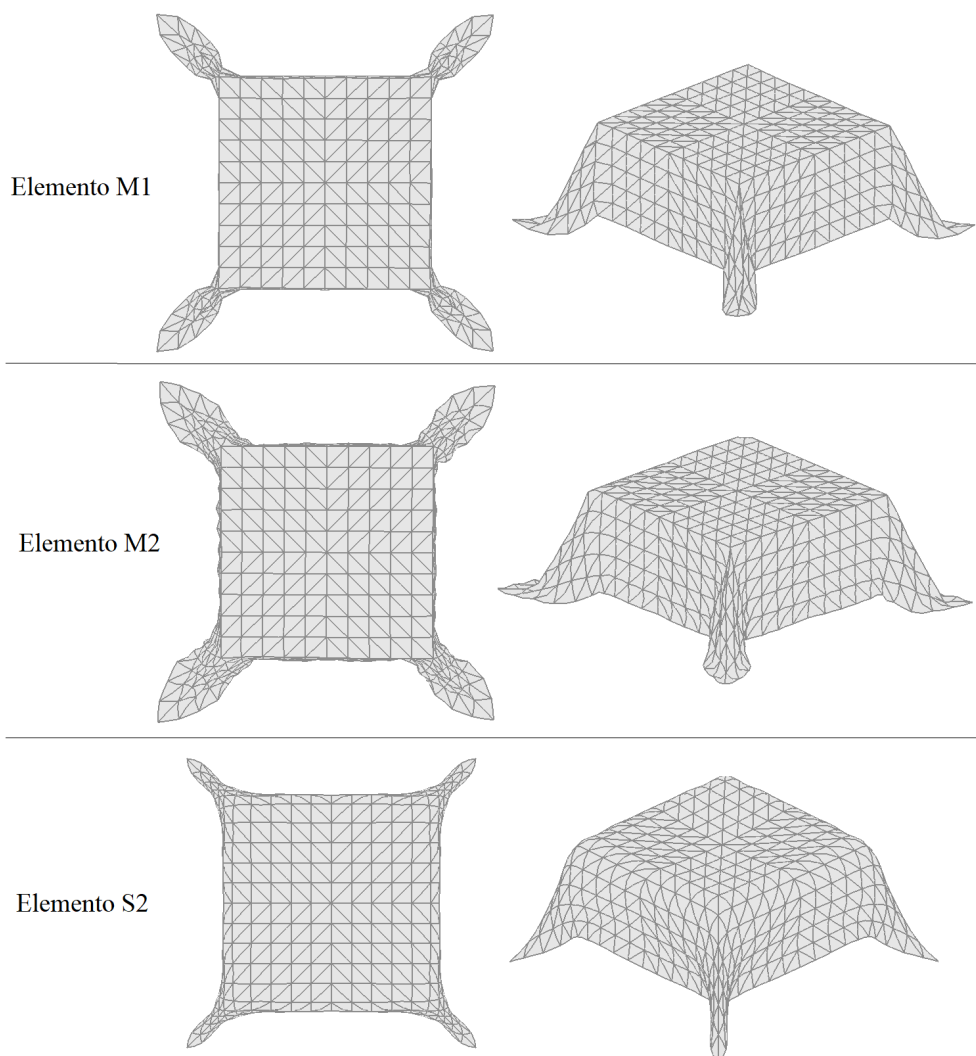


Fonte: elaborada pelo autor.

Observando os resultados, percebe-se que a utilização dos multiplicadores de Lagrange diminuiu a estabilidade numérica da análise, em concordância com a discussão feita na seção 6.6. O uso de elementos mais flexíveis (M2) também prejudicou a estabilidade, ao passo que o elemento de sólido (S2), que possui rigidez à flexão, permitiu a análise por mais tempo que o elemento de membrana com a mesma ordem de aproximação.

Outras conclusões podem ser obtidas a partir da visualização do tecido durante a análise transiente. A Figura 120 apresenta a configuração ao final da análise para os elementos M1, M2 e S2 considerando contato imposto por penalização e integração no tempo com o método NAN. Devido ao amortecimento numérico, o levantamento do tecido após o contato com a base é praticamente nulo (membrana) ou bastante reduzido (sólido). Nos passos de tempo finais da análise, os cantos do tecido começam a dobrar e, para os elementos de membrana, ocorre o auto-contato.

Figura 120 – Configuração do tecido ao final da análise para os elementos M1, M2 e S2, utilizando penalização e o método NAN.

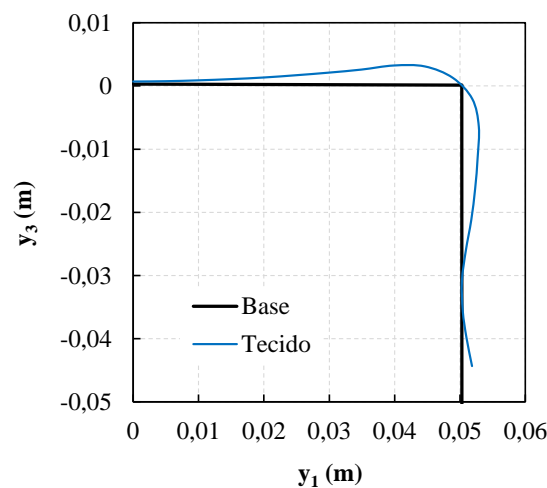


Fonte: elaborada pelo autor.

A formulação numérica proposta conseguiu avaliar corretamente os grandes deslocamentos do problema e ainda o encaixe do tecido sobre a base, situação denominada *draping* na literatura em língua inglesa. Para os elementos de membrana (M1 e M2), houve uma penetração mais significativa do tecido nas bordas da base rígida. Isso não ocorre pelo uso do método da penalização; na verdade, essa penetração aparece devido à resíduos numéricos nas verificações de contato realizadas ao longo da análise que fazem com que o algoritmo de detecção acabe falhando em alguns momentos. Isso explica o fato de essas penetrações não serem simétricas. Destaca-se que esta situação de contato é bastante complexa porque há correspondência perfeita dos nós da malha do tecido com o perímetro da base rígida e, nas regiões de borda, existe uma descontinuidade do vetor normal, de modo que o contato pode ocorrer em dois planos perpendiculares distintos (ou três, no caso das quinas).

Para o elemento de sólido (S2), no final da análise, o contato do tecido ocorre apenas com a borda da base e não no centro. Essa situação é ilustrada na Figura 121, que mostra o perfil (corte) do tecido no plano y_1y_3 no centro da base ($y_2 = 0$). Isso acontece devido à presença de rigidez à flexão do sólido, de modo que a curvatura em que o tecido se dobra na borda é mais suave do que com os elementos de membrana, estes capazes de permitir uma dobra a 90° sem o aparecimento de nenhum tipo de tensão.

Figura 121 – Perfil do tecido no plano y_1y_3 no centro da base, utilizando penalização e o método NAN com elemento S2.

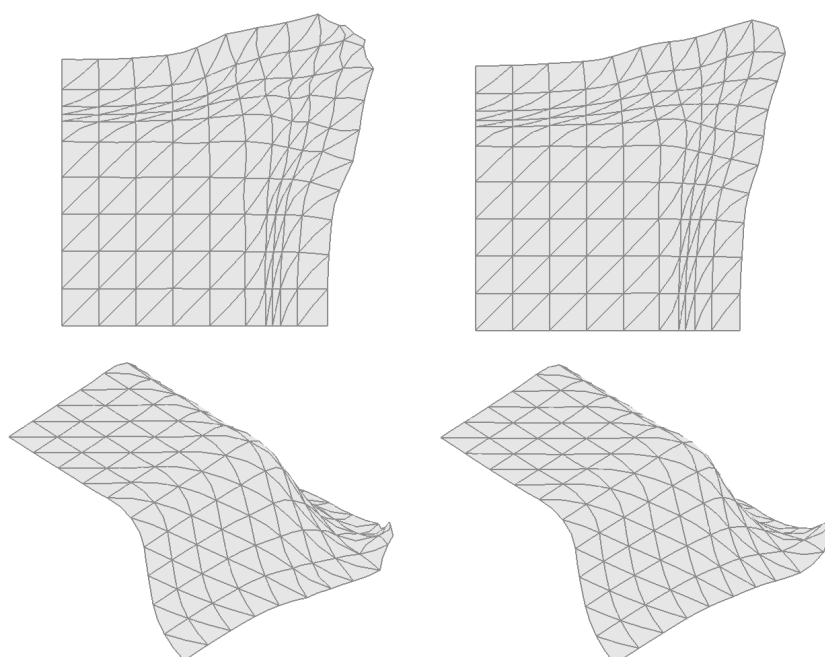


Fonte: elaborada pelo autor.

No início desta seção, comentou-se que foi necessário considerar $\nu = 0$ para a análise com o elemento de sólido. Em elementos sujeitos à flexão, existe o chamado *efeito anticlástico*, que se caracteriza pelo fato de momentos fletores em uma direção produzirem curvatura não só na direção de atuação, mas também em uma direção transversal (LANZONI; TARANTINO, 2017; JOHNSON, 2000). Considerando que uma flexão longitudinal produza compressão nas fibras superiores do elemento e tração nas inferiores, devido ao coeficiente de Poisson, no plano transversal haverá um alargamento das fibras superiores e contração das inferiores, produzindo

uma curvatura oposta à primeira (gerando uma superfície anticlástica, portanto). No presente problema, esse efeito gerou algum tipo de deslocamento espúrio nos cantos do tecido, sujeitos à flexão e grande curvatura, causando instabilidade numérica e paralisando de forma prematura a análise com $\nu = 0,3$. A consideração de coeficiente de Poisson nulo eliminou esse efeito e permitiu que a análise prosseguisse por todos os passos de tempo estipulados. Na Figura 122, o tecido é mostrado no passo de tempo 340 ($t = 0,1330$ s) para $\nu = 0,3$ e $\nu = 0$, considerando análise com penalização e NAN. Para $\nu = 0,3$, a análise foi interrompida no passo 346 ($t = 0,1336$ s).

Figura 122 – Configuração do tecido no passo de tempo 340 ($t = 0,1330$ s) para $\nu = 0,3$ (esq.) e $\nu = 0$ (dir.), utilizando penalização e o método NAN com elemento S2.



Fonte: elaborada pelo autor.

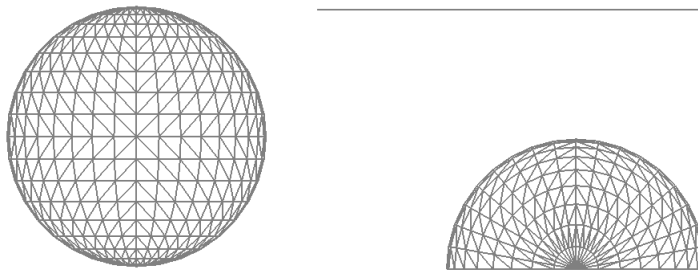
7.6 Membrana caindo sobre bola flexível

Com o objetivo de avaliar o contato entre superfícies não rígidas, tem-se agora uma membrana caindo sobre uma bola inflada de material flexível. A membrana é um tecido semelhante ao do exemplo anterior (lados de 20 cm, $E = 2$ MPa, $\nu = 0,3$, $t = 0,6$ mm), porém com massa específica dez vezes maior ($\rho = 3200$ kg/m³) para intensificar os deslocamentos na bola. A carga de peso próprio atuante no tecido é de 18,816 N/m². A bola tem raio 5 cm, $E = 8$ MPa, $\nu = 0,4$, $\rho = 900$ kg/m³ e $t = 0,6$ mm. O peso próprio é 5,292 N/m² e atua uma pequena pressão manométrica $p_{man} = 0,12$ kPa. Foi considerado o acoplamento pressão-volume para a bola, com

pressão atmosférica $p_{atm} = 100$ kPa. Devido à pressão manométrica, a bola já se encontra em um estado de pré-tensionamento com $\sigma^{pt} = p_{man}r/2t = 5$ kPa.

A malha utilizada para o tecido é a mesma do exemplo anterior, com 800 elementos (Figura 117) e considerou-se apenas elementos de membrana de aproximação linear. Para a bola, somente a metade superior foi discretizada com a malha de 612 elementos mostrada na Figura 123. A distância entre o plano do tecido e o topo da bola é 5 cm.

Figura 123 – Malha da bola em vista superior e vista lateral do conjunto.

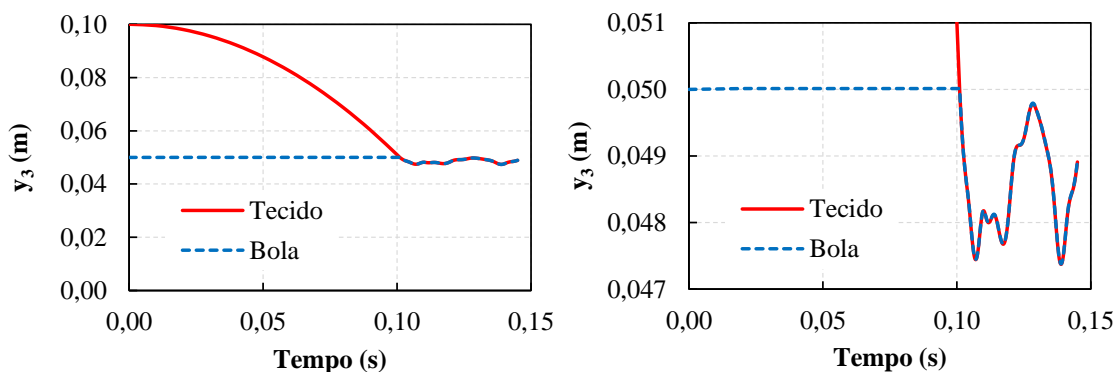


Fonte: elaborada pelo autor.

Novamente, foi empregado o modelo de enrugamento para evitar as tensões de compressão. A discretização do tempo foi a mesma do exemplo anterior (10 passos de 0,01 s seguidos por 450 passos de 10^{-4} s, totalizando 0,145 s) e considerou-se apenas o método de Newmark com amortecimento numérico (NAN) e contato por penalização com $\eta = 10^4$ N/m. A tolerância utilizada no processo de solução foi $tol = 10^{-6}$.

Os deslocamentos do nó central do tecido e do nó do topo da bola podem ser visualizados na Figura 124. A aderência dos dois nós mostra que o contato foi avaliado corretamente, mesmo com uma superfície de impacto flexível. Mesmo com a bola sendo considerada de material com baixo módulo de elasticidade e com uma pressão manométrica baixa, o deslocamento máximo do topo foi de apenas 2,62 mm (5,24% do raio) devido à rigidez fornecida pelo confinamento do gás. Recordar-se que, conforme a Equação 5.65b, essa rigidez é proporcional à pressão absoluta, e não à manométrica.

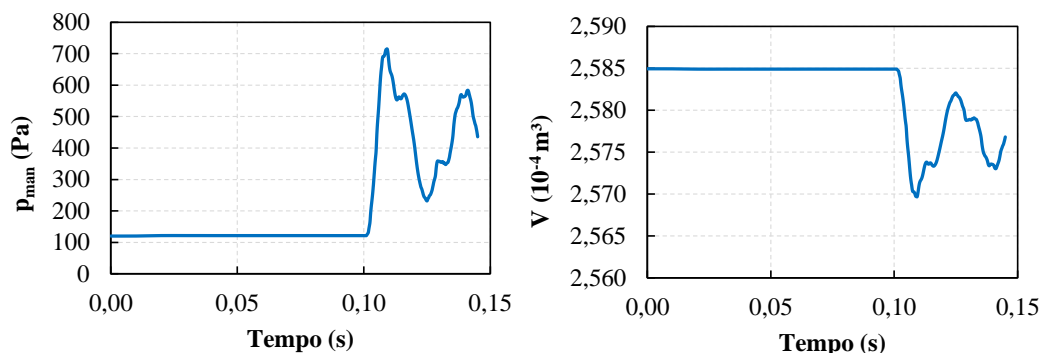
Figura 124 – Posição do nó central do tecido e do nó do topo da bola.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 125 mostra a variação da pressão manométrica e do volume da bola ao longo do tempo. A pressão manométrica máxima atingida foi de 715,2 Pa.

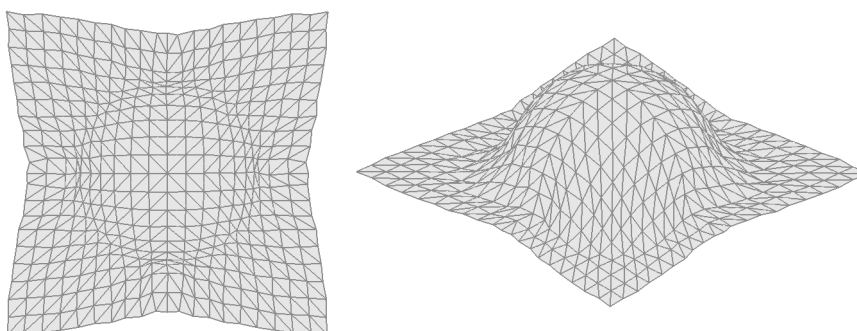
Figura 125 – Variação da pressão manométrica e do volume da bola.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 126 ilustra a configuração do tecido obtida ao final da análise dinâmica. Observa-se que o *draping* do tecido foi corretamente avaliado com a formulação proposta. Neste caso, não ocorreram as dobras nas diagonais e o autocontato, como visto no exemplo anterior, porque a projeção da bola é menor que a base quadrada, permitindo uma queda mais livre do tecido.

Figura 126 – Configuração do tecido ao final da análise.

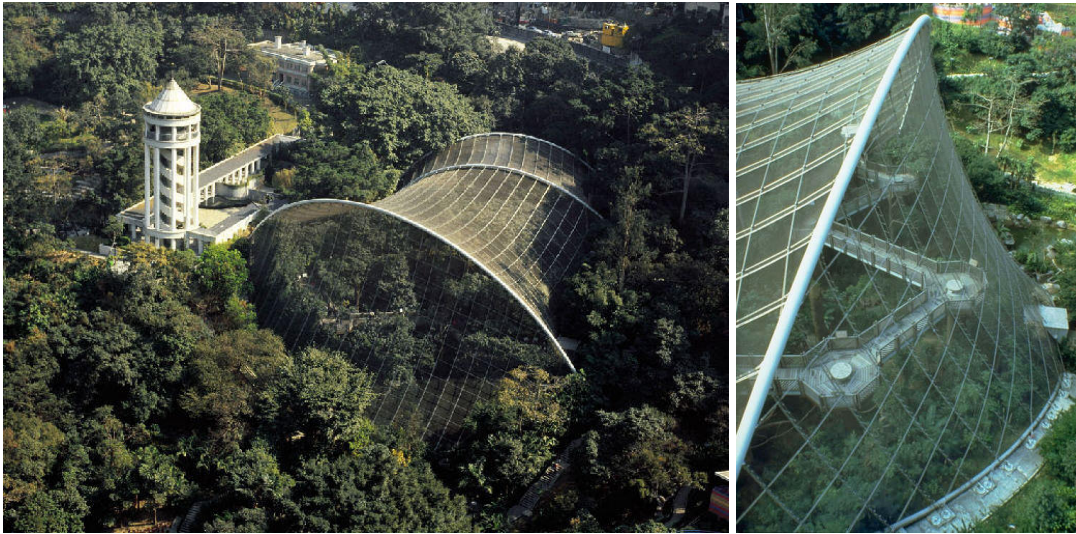


Fonte: elaborada pelo autor.

7.7 Estrutura em membrana pré-tensionada: Aviário Edward Youde

Neste exemplo, analisa-se um modelo mais complexo baseado na estrutura do Aviário Edward Youde, em Hong Kong (Figura 127). Detalhes sobre a construção podem ser encontrados nas páginas eletrônicas de Halvorsen Architects (2007), Tensinet (2023) e Hong Kong Park (2022). A estrutura consiste em quatro arcos feitos de aço que sustentam a cobertura do aviário, composta de uma rede de cabos em curvatura dupla e uma tela fina de aço com a função de fechamento. Ao nível do solo, a rede de cabos é ancorada em vigas rígidas que transferem os esforços às fundações.

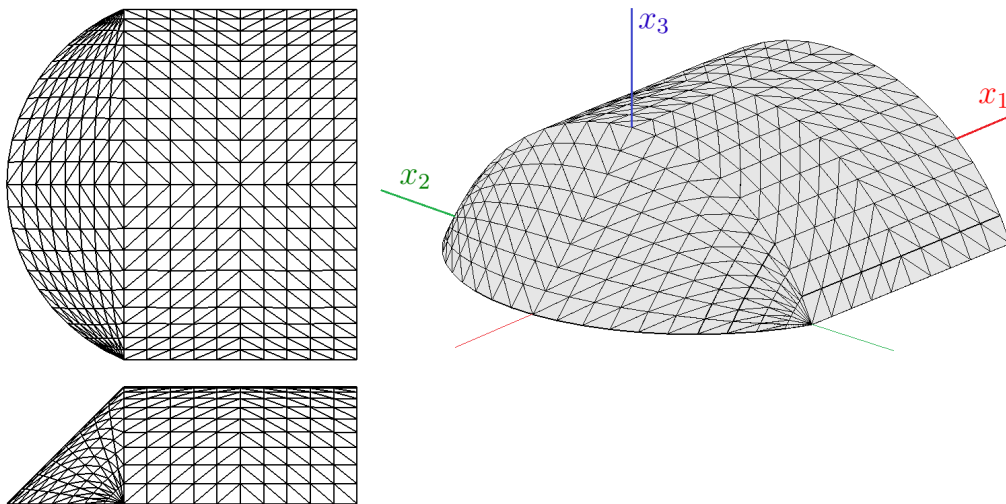
Figura 127 – Aviário Edward Youde, Hong Kong.



Fonte: Halvorsen Architects (2007).

O modelo aqui avaliado, mostrado na Figura 128, é uma simplificação da estrutura real. Apenas dois dos arcos principais estão incluídos, ambos considerados como apoios rígidos e de mesmo vão e altura, contidos em planos verticais. Na base, a região entre estes dois arcos é delimitada por linhas paralelas e uma segunda região da cobertura é delimitada por um arco. O material da cobertura foi considerado como uma membrana tensionada ao invés da rede de cabos.

Figura 128 – Malha do modelo simplificado do Aviário (vista superior e lateral e perspectiva).



Fonte: elaborada pelo autor.

Quanto à geometria do modelo, o vão dos arcos principais é 60 m e a altura é de 20 m, recaindo em um raio de circunferência de 32,5 m. O “topo” do arco da base dista 20 m do plano vertical do arco principal e o raio de circunferência é o mesmo. A distância entre os arcos principais é de 40 m.

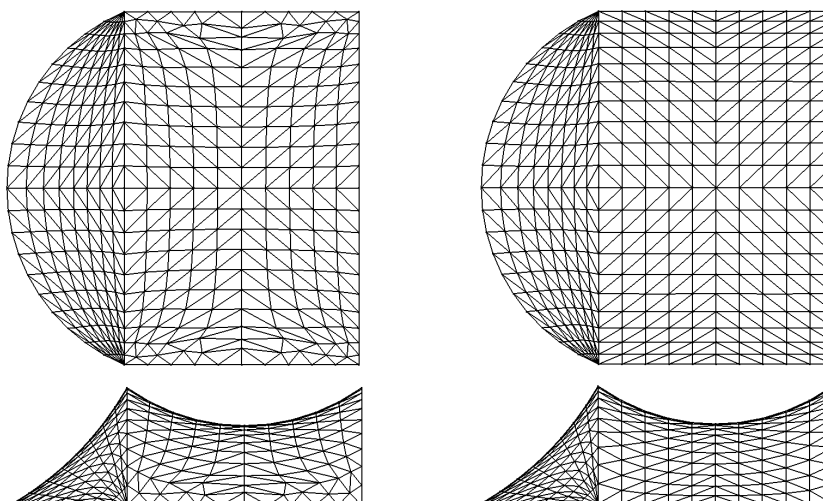
A malha do modelo é composta de 704 elementos de membrana de aproximação linear (304 à esquerda do primeiro arco e 400 entre os arcos). Três casos diferentes foram avaliados: (1) fechamento na base entre os arcos em vigas rígidas; (2) fechamento na base entre os arcos em cabos; (3) além do fechamento em cabos, a inclusão de um cabo de reforço no eixo de simetria da estrutura.

A membrana é feita de material com $E = 1$ GPa e $\nu = 0,4$ e possui espessura $t = 0,6$ mm. Os cabos possuem $E = 130$ GPa e área da seção transversal $A = 4$ cm². O pré-tensionamento estipulado para a membrana é $\sigma^{pt} = 15$ MPa e a força de pré-tensionamento nos cabos (quando existentes) é $N^{pt} = 200$ kN. A carga considerada em serviço é de 0,5 kN/m², uniformemente distribuída segundo a projeção da estrutura no plano horizontal. A tolerância considerada no método de Newton-Raphson foi $tol = 10^{-6}$ e a tolerância no processo de busca da forma foi $tol = \|\vec{u}\|/\|\vec{X}\| = 10^{-8}$.

7.7.1 Caso 1: vigas rígidas na base

O primeiro caso analisado considera vigas rígidas na base entre os arcos. A fase de busca da forma foi realizada partindo-se da malha da Figura 128, inicialmente, apenas com a rigidez geométrica provida pelo pré-tensionamento. A malha final resultante apresentou alguns elementos bastante distorcidos. Para melhorar o resultado, um novo cálculo foi feito com a mesma malha, mas considerando agora que os nós da região entre arcos estão fixos nas direções horizontais (x_1 e x_2), podendo movimentar-se apenas na vertical (direção x_3). A malha obtida dessa forma apresentou aspecto regular. Os dois resultados são mostrados na Figura 129.

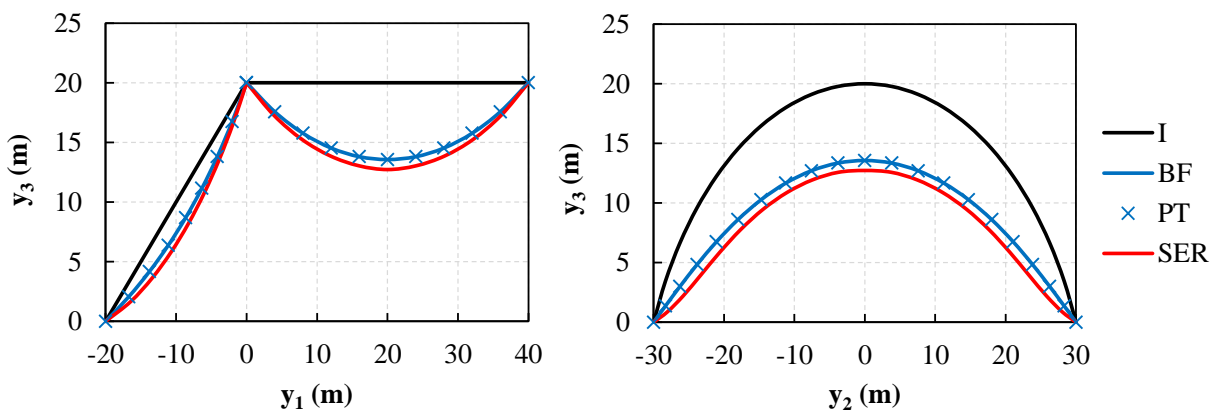
Figura 129 – Malhas obtidas com a busca da forma: sem restrição de movimento horizontal (esq.) e com restrição (dir.) para o Caso 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os deslocamentos no plano de simetria da estrutura ($y_2 = 0$) e no plano médio entre os arcos principais ($y_1 = 20$ m) são mostrados na Figura 130. I é a malha inicial antes do processo de busca da forma, BF é a configuração obtida na busca da forma, PT se refere à atuação somente do pré-tensionamento e SER são os resultados da estrutura em serviço, sujeita ao carregamento uniformemente distribuído. Observa-se que as configurações BF e PT são iguais, indicando que o processo de busca da forma obteve resultados aceitáveis (a posição encontrada realmente está em equilíbrio sob o efeito do pré-tensionamento). O deslocamento vertical máximo em SER (tomando BF com referência) é de 0,8947 m.

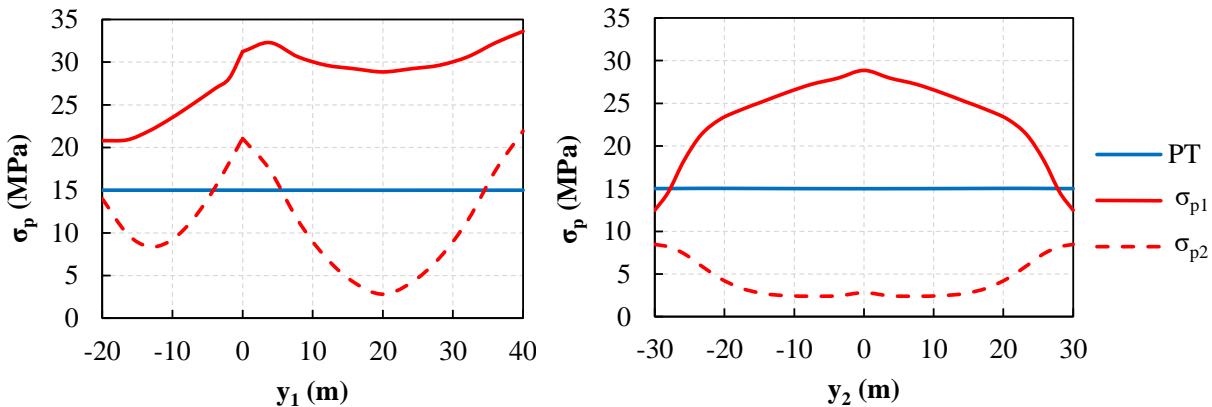
Figura 130 – Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

As tensões principais obtidas em serviço são mostradas na Figura 131, juntamente com a tensão de pré-tensionamento para comparação. A carga vertical para baixo produz um aumento de tensão na direção com concavidade para cima e uma diminuição da tensão na direção com concavidade para baixo. Dessa forma, a primeira tensão principal σ_{p1} é maior que o pré-tensionamento e a segunda tensão principal σ_{p2} é menor. O valor mínimo de σ_{p2} é próximo a zero, porém a membrana ainda se encontra totalmente tensionada (sem enrugamento).

Figura 131 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 1.

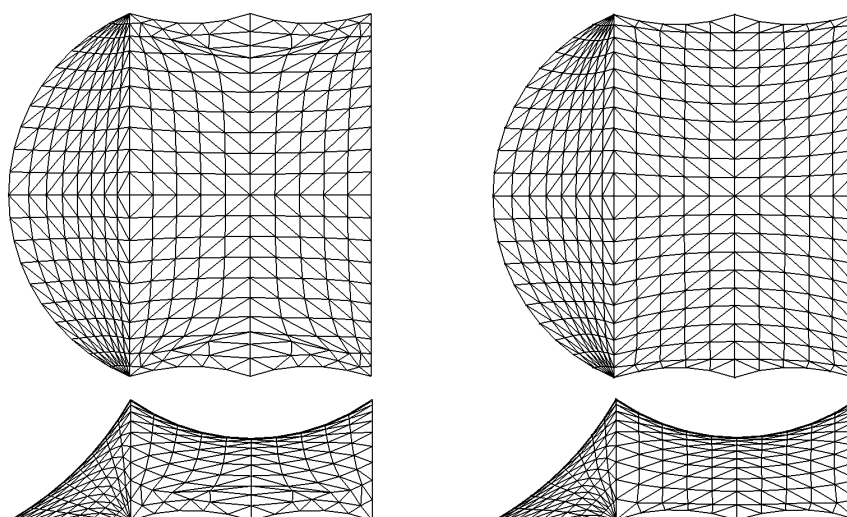


Fonte: elaborada pelo autor.

7.7.2 Caso 2: cabos na base

No caso 2, o fechamento da região entre os arcos principais é feito por meio de cabos ao invés de vigas rígidas. Adotou-se um apoio intermediário, configurando dois vãos de 20 m para os cabos. Novamente, iniciou-se o processo de busca da forma somente com a rigidez geométrica provida pelo pré-tensionamento, obtendo-se uma malha com elementos distorcidos próximo à base. Devido à presença dos cabos, não é possível restringir o deslocamento horizontal dos nós, como feito anteriormente. Assim, optou-se por executar uma nova busca da forma considerando a rigidez elástica da membrana, resultando em uma malha de aspecto mais regular. Ambos os resultados são mostrados na Figura 132.

Figura 132 – Malhas obtidas com a busca da forma: sem rigidez elástica da membrana (esq.) e com rigidez elástica (dir.) para o Caso 2.

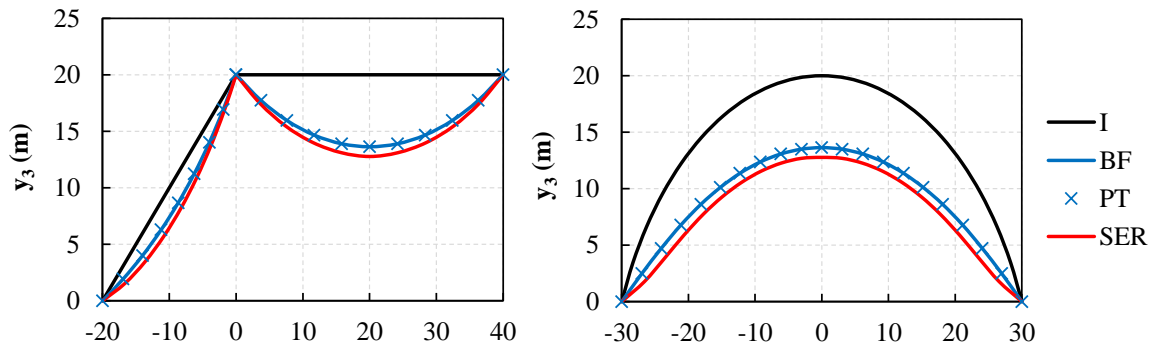


Fonte: elaborada pelo autor.

Os deslocamentos nos planos de referência são mostrados na Figura 133 e as tensões principais na Figura 134. Embora pouco perceptível no gráfico, o uso da rigidez elástica na busca da forma traz uma ligeira alteração nas tensões para o caso PT. A diferença máxima (em módulo) para o pré-tensionamento estipulado foi de apenas 0,80% nesta análise, mas pode ser maior dependendo dos valores de pré-tensionamento e rigidez da membrana. Fazendo um teste com $\sigma^{pt} = 5$ MPa, por exemplo, a diferença foi de 5,08%. Observa-se também que σ_{p2} é de baixa intensidade na região próxima ao cabo (1,255 MPa).

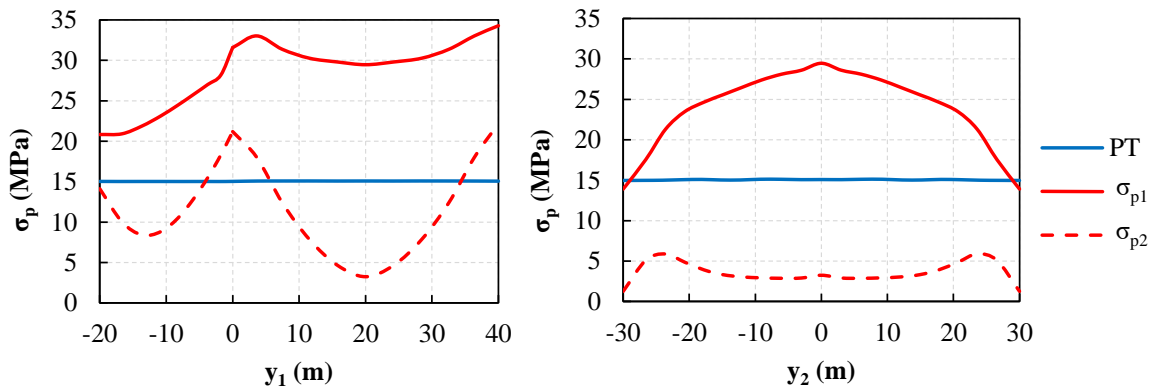
Quanto aos cabos, a força normal em PT não apresentou diferença significativa para o valor prescrito de 200 kN. Já na situação SER, a força nos elementos variou de 90,71 kN a 131,67 kN, uma redução de 54,65% e 34,17%, respectivamente.

Figura 133 – Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 134 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

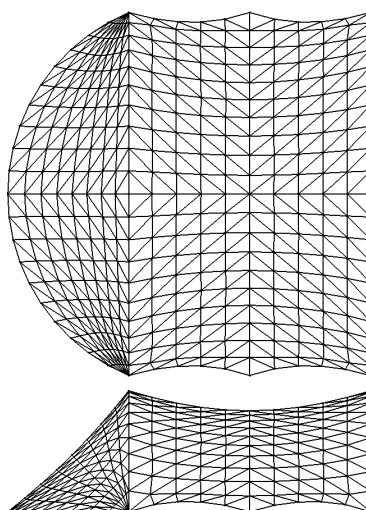
7.7.3 Caso 3: cabo de reforço

Neste terceiro caso considera-se, além dos cabos de borda na base da estrutura, um cabo de reforço situado no plano de simetria da estrutura. O processo de busca da forma foi realizado considerando a rigidez elástica da membrana (além da rigidez geométrica da estrutura) e a malha resultante é indicada na Figura 135.

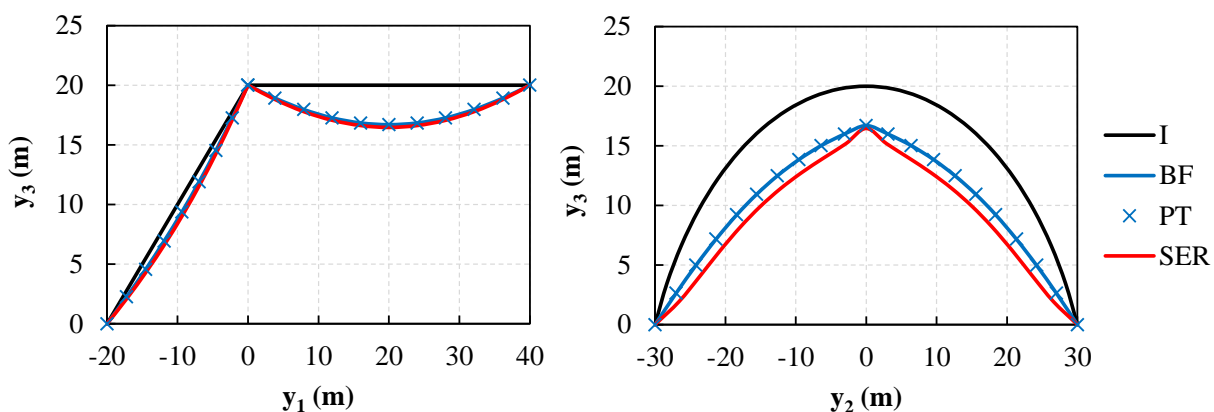
Na Figura 136 são indicados os deslocamentos da estrutura. Como o plano de simetria é a posição exata do cabo de reforço, os deslocamentos nessa linha são menores que nos outros casos, com bastante proximidade entre os casos BF e SER. Ainda, conforme se nota nos resultados no plano vertical entre os arcos, o uso do cabo leva a uma configuração final visualmente distinta das anteriores.

As tensões principais são mostradas na Figura 137. As tensões no plano de simetria estão próximas ao pré-tensionamento imposto, indicando que o cabo recebe parcela significativa do carregamento atuante. No plano entre os arcos, verifica-se que a tensão na membrana tem uma redução acentuada na região próxima ao cabo.

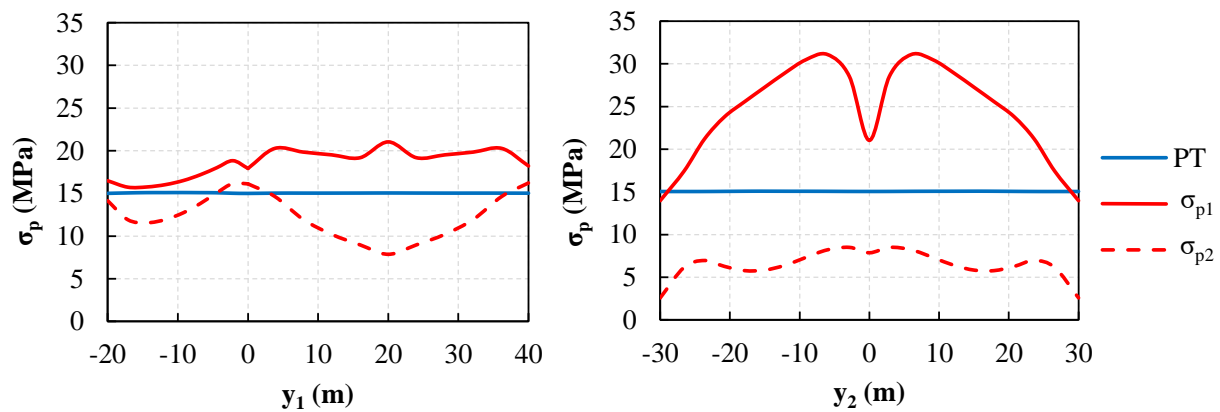
Figura 135 – Malha obtida com a busca da forma para o Caso 3.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 136 – Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 3.

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 137 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) para o Caso 3.

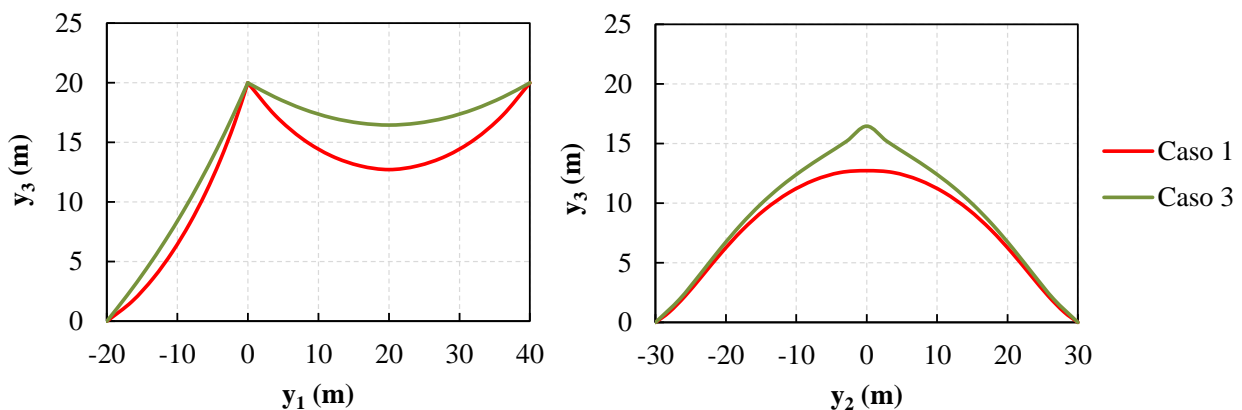
Fonte: elaborada pelo autor.

Os cabos de borda na base apresentaram esforços semelhantes ao caso anterior, com força normal nos elementos variando de 98,73 kN a 138,97 kN, uma redução significativa do pré-tensionamento imposto. Com os elementos do cabos de reforço, a situação foi a oposta: houve um aumento expressivo do esforço. Na região delimitada pelo arco na base, a força normal variou de 255,58 kN (junto à base) a 316,89 kN (junto ao topo do arco principal). Na região entre arcos, o esforço foi praticamente constante, próximo de 340 kN.

7.7.4 Comparação dos 3 casos na situação em serviço

É interessante fazer uma comparação dos três casos estudados na situação em serviço (SER). Os deslocamentos no plano $y_2 = 0$ (simetria) e no plano $y_1 = 20$ m (entre os arcos) são mostrados na Figura 138 para os Casos 1 e 3. Os deslocamentos do Caso 2 nestes planos são semelhantes aos do Caso 1. O uso do cabo de reforço diminuiu significativamente os deslocamentos verticais, fazendo o ponto médio do vão entre arcos passar da coordenada $y_3 = 12,72$ m (Caso 1) para $y_3 = 16,46$ m (Caso 3). Entretanto, ocorre também uma mudança na forma, fazendo com que o aspecto no plano se torne menos arredondado e mais triangular.

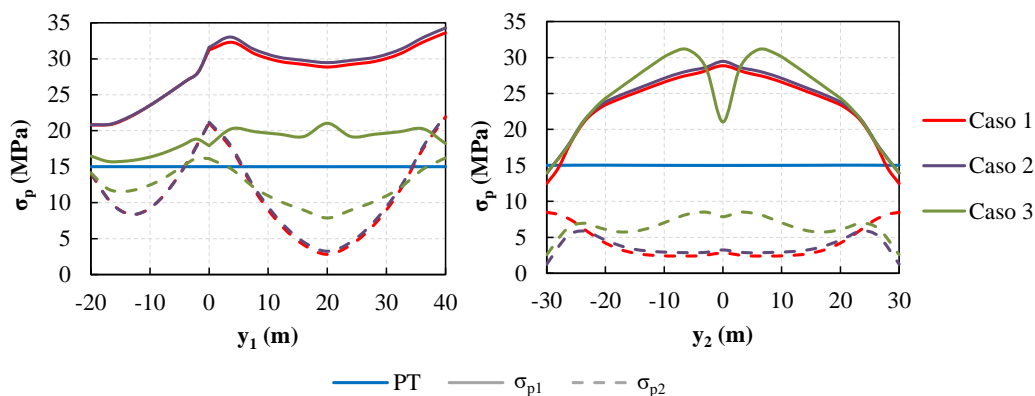
Figura 138 – Deslocamentos verticais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em serviço para os Casos 1 e 3.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em relação às tensões, a Figura 139 traz os resultados para a comparação. Embora os Casos 1 e 2 sejam muito semelhantes quanto aos deslocamentos, uma pequena diferença aparece nas tensões. O uso dos cabos na borda diminuiu σ_{p2} nessa região, com pouca influência no restante da estrutura. A consideração do cabo de reforço também trouxe efeitos localizados de diminuição das tensões na linha do cabo e de σ_{p1} na direção transversal, mas também aumentou σ_{p2} em uma região significativa na direção transversal. No plano $y_1 = 20$ m, a tensão máxima σ_{p1} na membrana foi ligeiramente maior no Caso 3 que nos outros dois casos.

Figura 139 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em serviço para os três casos.



Fonte: elaborada pelo autor.

É importante lembrar que, conquanto tensões σ_{p1} elevadas não sejam desejáveis por trazerem preocupações quanto à resistência do material, tensões σ_{p2} muito baixas trazem risco à estabilidade da estrutura por se aproximarem do estado de perda de tensão da membrana e consequente enrugamento. A ocorrência de enrugamento na estrutura, além de visualmente desagradável, pode levar a danos sérios sob efeito de ações dinâmicas do vento.

Foi possível verificar também, quanto aos cabos, que a força normal em serviço foi bastante distante da estipulada no pré-tensionamento – para menos nos cabos de borda e para mais no cabo de reforço. Em uma situação de projeto real, a intensidade do pré-tensionamento e a área do cabo seriam determinadas de forma iterativa, realizando-se várias análises até ajustar o modelo às condições de segurança e dimensionamento desejadas.

7.8 Busca da forma com elementos de membrana de alta ordem

Neste trabalho, dentre os vários assuntos estudados, buscou-se fazer uma comparação entre o uso de elementos de membrana e sólido na modelagem das estruturas tensionadas em membrana. Uma vez que o elemento finito de sólido possui rigidez à flexão, considerar esses elementos com aproximação linear recai em problemas de travamento, como demonstrado no exemplo da subseção 5.7.2. O uso de elementos de alta ordem resolve este problema numérico, e a formulação posicional aqui apresentada permite o uso de qualquer aproximação tanto para os elementos de membrana quanto para os de sólido.

Na etapa de busca da forma, como indicado no exemplo do catenoide (seção 7.2), a malha obtida para o modelo de membrana foi considerada como a superfície média para se determinar a malha do sólido. Neste caso, foi adotada aproximação quadrática para ambos os elementos para se permitir a comparação. Entretanto, o procedimento de busca da forma por relaxação dinâmica é bem definido apenas para os elementos de membrana lineares (ver as referências indicadas na

subseção 3.4.6.1). Apenas alguns poucos estudos são encontrados sobre o uso de elementos de ordens superiores, como os de Gosling e Lewis (1996a, 1996b) e Hegyi et al. (2006).

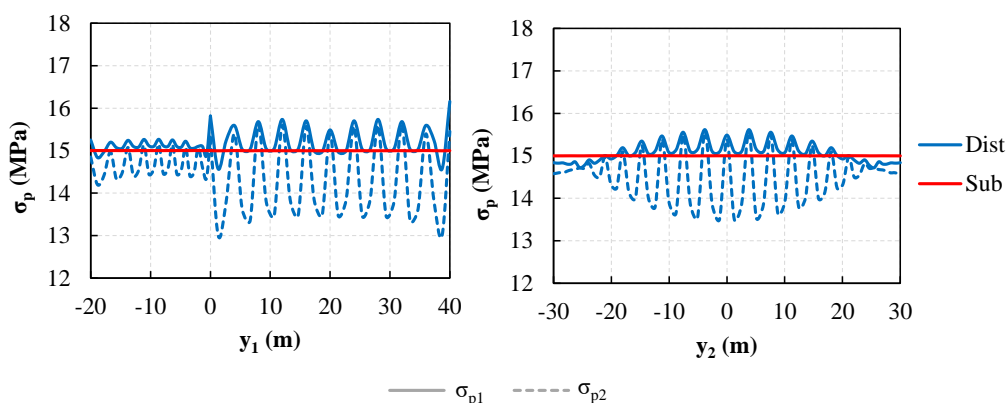
Assim, neste exemplo será feito um pequeno estudo sobre o uso da busca da forma com relaxação dinâmica considerando elementos de alta ordem. Foram consideradas as duas estratégias descritas na subseção 3.4.6.1: (1) subdivisão do elemento de alta ordem em subelementos lineares (*sub*) e (2) consideração do elemento de alta ordem como linear, ou seja, apenas com os nós dos vértices, e posterior distribuição dos nós intermediários de forma equidistante (*dist*). Após a busca da forma, realizou-se a análise mecânica sob o efeito do pré-tensionamento (PT), considerando o elemento de alta ordem, para avaliação do resultado.

A estrutura analisada foi o modelo simplificado do Aviário Edward Youde, estudado no exemplo anterior, mas agora com elementos de membrana de ordem cúbica. Apenas os Casos 1 e 2 foram considerados (bordas em vigas rígidas ou cabos, respectivamente). De acordo com as análises já realizadas, a busca da forma para o Caso 1 foi realizada restringindo o deslocamento horizontal dos nós entre os arcos e, para o Caso 2, foi considerada a rigidez elástica da membrana em conjunto com a rigidez geométrica. As tolerâncias na busca da forma e no processo de solução por Newton-Raphson foram $tol = 10^{-8}$ e $tol = 10^{-6}$, respectivamente.

As malhas obtidas na busca da forma não apresentaram grande diferença para aquelas mostradas anteriormente (Figuras 130 e 133). Sob a atuação do pré-tensionamento, os deslocamentos no plano de simetria da estrutura ($y_2 = 0$) e no plano médio entre os arcos principais ($y_1 = 20$ m) não foram significativos. Na estrutura como um todo, esses deslocamentos também não foram significativos, porém causaram variações de tensão importantes em certos locais.

As tensões principais nos planos de referência para o Caso 1 são ilustradas na Figura 140. Com a divisão em subelementos, os nós intermediários se encontram mais próximos da superfície mínima e as tensões são iguais ao pré-tensionamento. Quando os nós são distribuídos dentro do elemento considerado como linear, eles estão contidos no plano definido pelos vértices e, ao se calcular a posição de equilíbrio, ficam livres para se movimentar, gerando flutuação nas tensões.

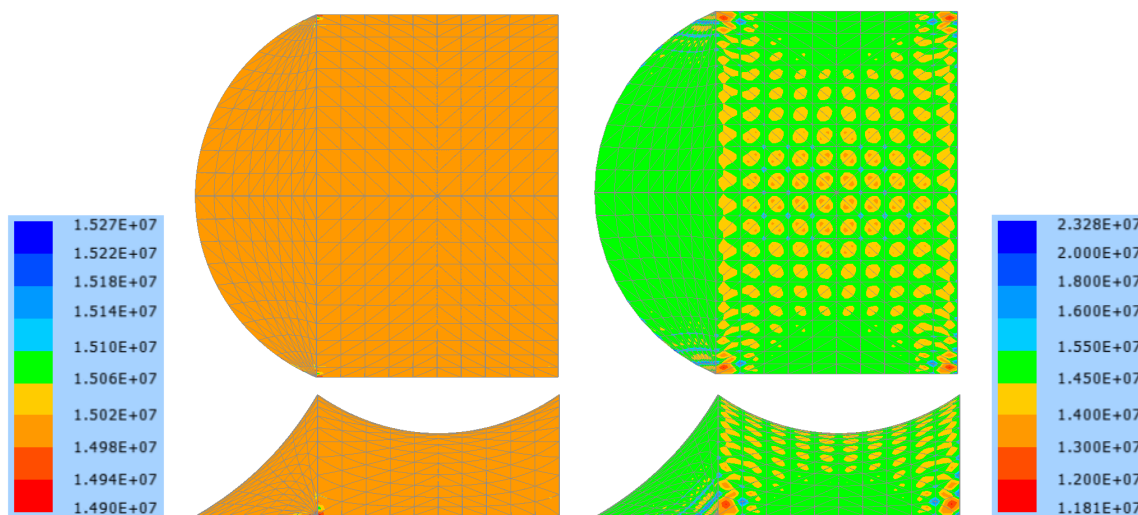
Figura 140 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em PT (Caso 1).



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 141, tem-se o mapa de cores da tensão σ_{p1} para a estrutura. Com os subelementos, as tensões sofreram ligeira alteração apenas em uma região localizada. Já com a distribuição a variação de tensões foi mais significativa, porém a quase totalidade da membrana ficou com tensão entre 14 MPa e 16 MPa.

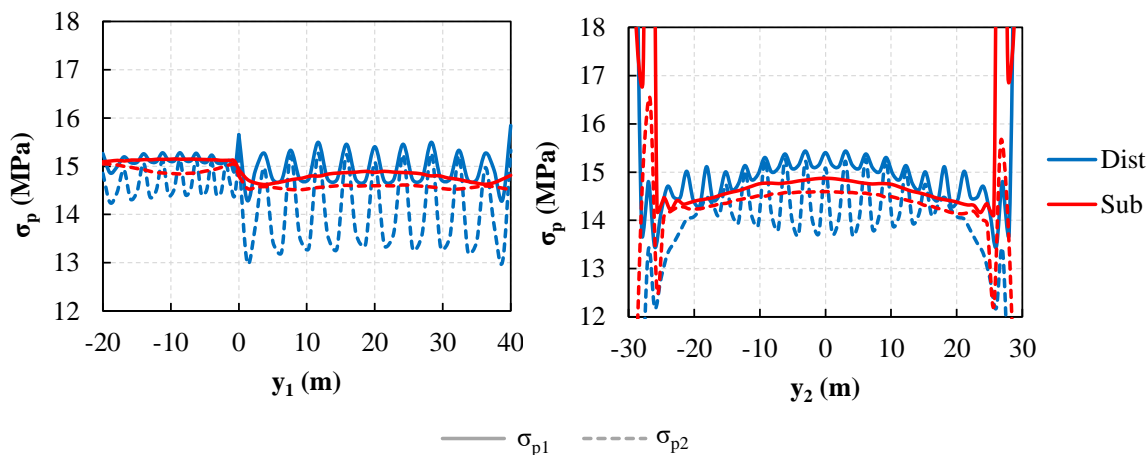
Figura 141 – Tensões σ_{p1} (Pa) da estrutura em PT com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.) para o Caso 1.



Fonte: elaborada pelo autor.

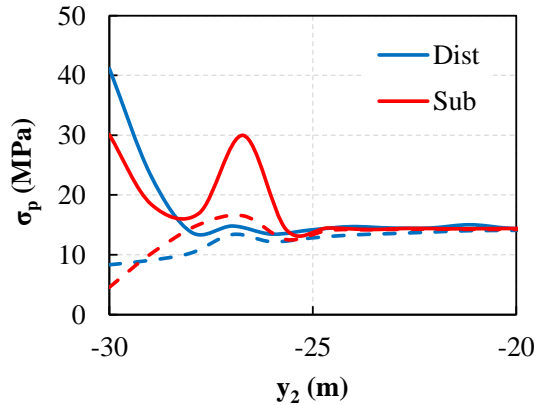
No Caso 2, a presença dos cabos de borda demanda maior movimentação da malha e as tensões obtidas com as duas estratégias tem grandes variações junto aos cabos. Contudo, como indicado na Figura 142, mesmo distante das bordas as tensões se afastaram mais do pré-tensionamento do que no Caso 1. Um detalhe da região da borda (Figura 143) ilustra a grande oscilação nessa região.

Figura 142 – Tensões principais da estrutura nos planos $y_2 = 0$ (esq.) e $y_1 = 20$ m (dir.) em PT para o Caso 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

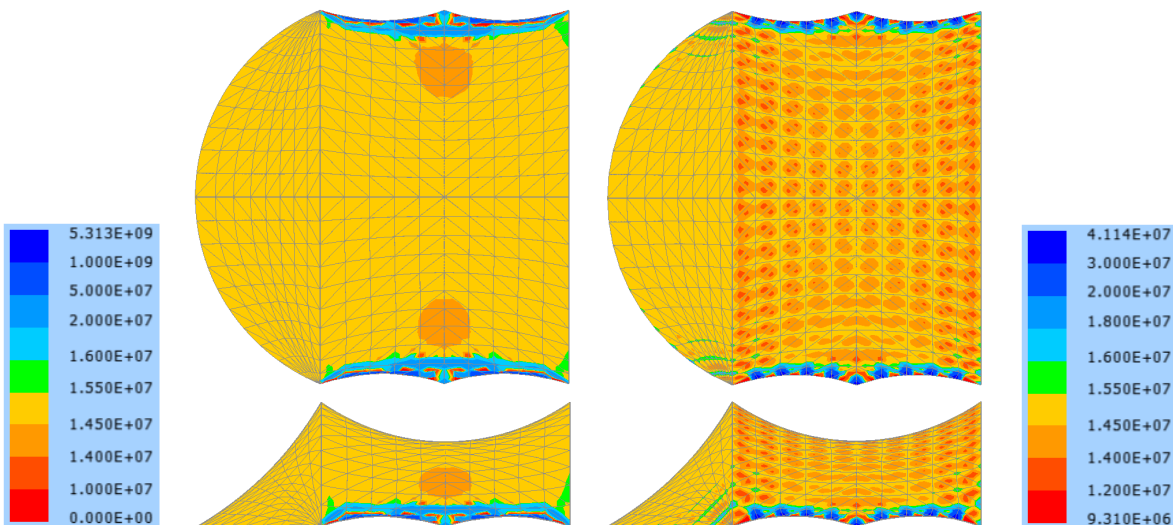
Figura 143 – Tensões principais da estrutura no plano $y_1 = 20$ m junto à borda. Os resultados de σ_{p1} estão em linha contínua e os de σ_{p2} estão em tracejado.



Fonte: elaborada pelo autor.

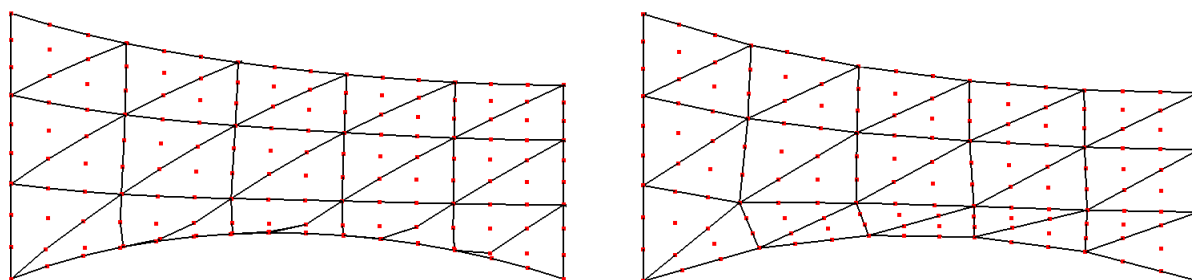
Com o mapa de cores da tensão σ_{p1} (Figura 144), verifica-se uma situação parecida com o Caso 1 nas regiões distantes das bordas: a variação de tensão com a estratégia de distribuição foi maior, porém ainda de intensidade leve; com os subelementos, quase não houve variação. Entretanto, junto aos cabos, a distribuição conseguiu lidar melhor com a acomodação da malha, chegando à tensões próximas de 40 MPa, ao passo que a tensão alcançou valores da ordem de 1000 MPa com os subelementos. Um olhar mais próximo da malha obtida na busca da forma (Figura 145) mostra uma distribuição bastante desigual dos nós dos elementos com esse método.

Figura 144 – Tensões σ_{p1} (Pa) da estrutura em PT com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.) para o Caso 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 145 – Malhas obtidas na busca da forma na região próxima aos cabos com a divisão em subelementos (esq.) e fazendo a distribuição dos nós (dir.).



Fonte: elaborada pelo autor.

Como conclusões deste breve estudo, verifica-se que, para malhas mais regulares (como o catenoide estudado no exemplo da seção 7.2, ou para a malha do Caso 1, com bordas rígidas e deslocamento horizontal restringido), a estratégia de subelementos trouxe resultados aceitáveis, encontrando a posição de equilíbrio da membrana sob o efeito do pré-tensionamento com bastante precisão. Entretanto, em situações que demandam maior movimentação da malha, o uso dos subelementos permite uma distorção muito grande dos elementos, gerando problemas numéricos na determinação das tensões. Com a estratégia de distribuição dos nós, existe certa flutuação de tensão devido aos nós intermediários não terem sido considerados na busca da forma, porém a malha gerada é mais consistente, com nós igualmente espaçados mesmo em regiões mais complexas.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida uma formulação não linear geométrica para a análise de estruturas tensionadas em membrana empregando o Método dos Elementos Finitos Posicional, uma abordagem alternativa do método dos elementos finitos que considera diretamente as posições nodais como incógnitas a serem determinadas. O equilíbrio é descrito na forma lagrangiana total e o método de Newton-Raphson foi utilizado na obtenção da solução numérica.

A principal vantagem da formulação posicional é operacional e consiste na consideração natural da não linearidade geométrica quando se adotam as posições como parâmetros primários ao invés dos deslocamentos. A não linearidade geométrica é especialmente importante na análise de estruturas tensionadas sujeitas a grandes deslocamentos, de modo que a formulação numérica aqui desenvolvida é bastante adequada ao objetivo proposto.

Tendo em vista que o sistema estrutural em membrana tensionada não é usual, incluiu-se um capítulo com uma descrição dos principais tópicos relacionados, como o histórico do uso dessas estruturas, os tipos e classificações, materiais normalmente empregados e o comportamento destes, e ainda sobre o problema de busca da forma e os principais métodos numéricos empregados na solução. O método da relaxação dinâmica, utilizado ao longo da pesquisa quando necessário, foi tratado com maiores detalhes.

Elementos finitos posicionais de membrana e de sólido foram utilizados na modelagem, em conjunto com elementos de cabo. Os elementos de sólido e cabo foram desenvolvidos em outros trabalhos do grupo de pesquisa no qual esta se insere, porém foram integralmente reprogramados no código computacional. O elemento posicional de membrana, considerado como um sólido de aproximação constante na espessura para a obtenção de gradientes de mapeamento consistentes em espaços tridimensionais, é uma contribuição original do presente estudo. Outra contribuição é a estratégia de imposição do pré-tensionamento nas estruturas tensionadas, válida para os três tipos de elementos finitos utilizados.

A existência de cargas não conservativas dependentes das posições nodais, como a pressão de ar em estruturas pneumáticas ou o efeito do vento, foi levada em consideração na formulação. No cálculo da matriz Hessiana do carregamento, uma forma simétrica foi utilizada em substituição à Hessiana original assimétrica e os resultados demonstraram a validade dessa estratégia na redução do tempo de análise. Para as estruturas pneumáticas, considerou-se o acoplamento pressão-volume por meio da Lei de Boyle-Mariotte para sistemas isotérmicos. Por meio dos resultados, constata-se que a parcela de rigidez correspondente, proporcional à pressão

absoluta do gás confinado, é bastante relevante na resposta obtida.

Considerou-se ainda uma estratégia de enrugamento simplificada para a eliminação de eventuais tensões principais de compressão nos elementos de membrana e sólido. Os resultados de deslocamentos foram bastante semelhantes com os dois tipos de elementos, porém houve certa diferença nos valores de tensão obtidos.

Estruturas de membrana em situações de contato dinâmico também foram avaliadas neste trabalho. Os efeitos dinâmicos foram considerados por meio de dois métodos diferentes de integração temporal, o método de Newmark e o método α -generalizado. Foi verificado que a consideração do amortecimento numérico inserido pelos algoritmos de integração é fundamental na análise de problemas de contato, em que há grande instabilidade numérica. A baixa rigidez da membrana acentua ainda mais este efeito; por outro lado, o uso de elemento de sólido melhora a estabilidade devido à rigidez à flexão dos elementos.

Em relação ao problema de contato, adotou-se a discretização nó-a-superfície e a imposição das restrições foi feita pelas técnicas de penalização e multiplicadores de Lagrange. Foram deduzidas as contribuições no vetor de forças e na matriz Hessiana para os dois métodos, inclusive as parcelas relativas às derivadas do vetor normal em relação às posições nodais no espaço tridimensional. O método da penalização se mostrou mais estável nas análises efetuadas.

Uma grande variedade de exemplos numéricos foi apresentada para validação do código computacional e aplicação da formulação desenvolvida em problemas estáticos e dinâmicos, demonstrando sua robustez e precisão. Em especial, foram avaliados exemplos de *draping* de tecidos não tensionados em bases rígidas ou flexíveis e um modelo simplificado de uma estrutura real, incluindo discussões sobre a busca da forma utilizando elementos de membrana de alta ordem.

Das análises realizadas, conclui-se que as implementações numéricas estão corretas e que a formulação desenvolvida foi capaz de resolver os problemas de membranas tensionadas com precisão e estabilidade adequadas, seja em casos estáticos ou dinâmicos.

Duas conclusões de cunho prático podem ainda ser destacadas. Primeiramente, a utilização de processos de busca da forma considerando pré-tensionamento uniforme e elementos lineares pode conduzir a resultados imprecisos para geometrias complexas. Isso porque se mostrou (em problemas simples) que resultados de membranas simuladas com elementos de alta ordem são mais precisos do que resultados encontrados utilizando-se elementos lineares. Complementarmente, nos exemplos finais, mostrou-se que a superfície “ótima” obtida por elemento linear ainda permite a movimentação da malha na análise com pré-tensionamento. Isso leva à conclusão de que a membrana real, que possui infinitos graus de liberdade, possuirá distribuição de tensão distinta da esperada (uniforme) quando se realiza a busca da forma e a análise do problema mecânico com elementos lineares.

Em segundo lugar, a comparação dos resultados obtidos utilizando-se elementos de

membrana e de sólido alerta para o fato de se ter em mente qual o tipo de material se está modelando. Não se podem generalizar os resultados da literatura (onde a utilização de elementos de membrana é muito vasta) como sendo os resultados corretos quando o material utilizado for, por exemplo, filme polimérico. Por outro lado, quando o material utilizado for tecido, acredita-se que os elementos de membrana reproduzirão melhor a realidade.

8.1 Continuidade da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros

Alguns tópicos de interesse sobre as estruturas tensionadas não fizeram parte do escopo desta pesquisa e podem ser objeto de estudos posteriores. Além disso, os próprios resultados advindos de alguns dos exemplos numéricos ensejam uma investigação mais aprofundada sobre os fenômenos observados.

Neste trabalho, foi considerado apenas o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico para os elementos de membrana e cabos. Pesquisas futuras podem estender a formulação de modo a considerar efeitos como elastoplasticidade e ortotropia e relações constitutivas mais elaboradas para os elementos de membrana.

Conforme citado na subseção 3.3.3 e no exemplo da subseção 5.7.3, adotou-se aqui um modelo de enrugamento aproximado no qual a rigidez elástica da membrana ainda é considerada. Sugere-se o desenvolvimento de um modelo mais preciso para a avaliação do enrugamento utilizando a abordagem posicional.

Outro assunto que pode ser objeto de análise são as metodologias de busca da forma. Sugere-se estudar a relação das diferentes estratégias com a formulação posicional e também a consideração de elementos de ordem superior para a membrana. Os resultados obtidos no último exemplo (seção 7.8) podem servir como ponto de partida para a elaboração de métodos mais precisos.

Na análise do exemplo do vaso de pressão cilíndrico (subseção 5.7.1) foi verificada a existência de uma tensão de cisalhamento espúria no modelo com elemento de membrana linear. Este efeito pode ser mais bem avaliado e descrito em investigação posterior. Também pode ser estudado o efeito da orientação da malha triangular e ainda a implementação de elemento quadrilátero, como sugerido no exemplo do catenoide (seção 7.2).

Em relação ao contato, novos trabalhos podem utilizar estratégias distintas daquelas empregadas aqui, como a discretização com o método *mortar* e a imposição da restrição utilizando o Lagrangiano aumentado. Sugere-se também o uso de modelos que avaliem a troca de esforços na interface de modo mais elaborado, como a consideração de atrito e adesão.

REFERÊNCIAS

- ADINI, A.; CLOUGH, R. W. **Analysis of plate bending by the finite element method**. Washington D. C., 1961. Report submitted to National Science Foundation, G7337.
- AKITA, T.; NAKASHINO, K.; NATORI, M. C.; PARK, K. C. A simple computer implementation of membrane wrinkle behaviour via a projection technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 71, n. 10, p. 1231–1259, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1990>.
- ARCHER, J. S. Consistent mass matrix for distributed mass systems. **Journal of the Structural Division**, v. 89, n. 4, p. 161–178, 1963. Disponível em: <https://doi.org/10.1061/jsdeag.0000939>.
- ARGYRIS, J.; ANGELOPOULOS, T.; BICHAT, B. A general method for the shape finding of lightweight tension structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 1, p. 135–149, 1974. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90046-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90046-2).
- ARGYRIS, J.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J.; DUNNE, P.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G.; MLEJNEK, H.-P.; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. Finite element method — The natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, p. 1–106, 1979. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90083-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90083-5).
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. **Energy theorems and structural analysis**. London: Butterworths, 1960.
- ASSIS, R. G. **Um estudo sobre arquitetura têxtil no Brasil: o segmento de mercado das estruturas tensionadas feitas com membranas de poliéster/PVC**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação Têxtil e Moda, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.100.2012.tde-09012013-104014>.
- BARNES, M. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. **Computers & Structures**, v. 30, n. 3, p. 685–695, 1988. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90304-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90304-5).
- BARNES, M. R. **Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation**. 1977. Tese (Doutorado) — The City University, London, 1977.
- BARNES, M. R. Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. **International Journal of Space Structures**, v. 14, n. 2, p. 89–104, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1260/0266351991494722>.
- BATHE, K.-J.; CHAUDHARY, A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, n. 1, p. 65–88, 1985. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620210107>.

- BELGACEM, F.; HILD, P.; LABORDE, P. The mortar finite element method for contact problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 28, n. 4-8, p. 263–271, 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0895-7177\(98\)00121-6](https://doi.org/10.1016/s0895-7177(98)00121-6).
- BELGO BEKAERT ARAMES. **Manual técnico de cabos CIMAF**. Osasco, 2012.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B.; ELKHODARY, K. I. **Nonlinear finite element for continua and structures**. 2. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2014.
- BERNARDI, C.; DEBIT, N.; MADAY, Y. Coupling finite element and spectral methods: First results. **Mathematics of Computation**, v. 54, n. 189, p. 21–39, 1990. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2008680>.
- BLETZINGER, K.-U.; RAMM, E. A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy. **International Journal of Space Structures**, v. 14, n. 2, p. 131–145, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1260/0266351991494759>.
- BONET, J.; MAHANEY, J. Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 32-33, p. 5469–5480, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0020-7683\(00\)00382-6](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(00)00382-6).
- BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(99\)00428-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00428-4).
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2. ed. New York: Cambridge University Press 1997, 2008.
- BORGES FILHO, J. P. **Projeto de tensoestruturas em membrana com aplicação de programação não-linear**. 2006. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- BOUZIDI, R.; RAVAUT, Y.; WIELGOSZ, C. Finite elements for 2D problems of pressurized membranes. **Computers & Structures**, v. 81, n. 26-27, p. 2479–2490, 2003. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(03\)00308-0](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(03)00308-0).
- BUCHHOLDT, H. A. **An introduction to cable roof structures**. 2. ed. London: Thomas Telford, 1999.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. **Computers & Structures**, v. 33, n. 3, p. 801–820, 1989. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90255-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90255-1).
- CARPENTER, N. J.; TAYLOR, R. L.; KATONA, M. G. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 1, p. 103–128, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620320107>.
- CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2019.tde-24062019-091109>.

- CHAUDHARY, A. B.; BATHE, K.-J. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 24, n. 6, p. 855–873, 1986. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(86\)90294-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90294-4).
- CHEUNG, Y.; ZINKIEWICZ, O. Plates and tanks on elastic foundations—an application of finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 1, n. 4, p. 451–461, 1965. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(65\)90008-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90008-9).
- CHI, J. Y.; PAULETTI, R. M. O. An outline of the evolution of pneumatic structures. *In: II SIMPOSIO LATINOAMERICANO DE TENSOESTRUTURAS*, 2005, Caracas. Caracas, 2005.
- CHIVANTE, M. R. P. **Avaliação experimental das relações tensão-deformação de um tecido de fibra de vidro recoberto com PTFE**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.3.2009.tde-18122009-134136>.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2900803>.
- CODA, H.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.
- CODA, H. B. An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on position description. *In: ABCM*, 17., 2003, São Paulo. **Proceedings...** São Paulo: International Congress of Mechanical Engineering, 2003. Disponível em: <https://abcm.org.br/anais/cobem/2003/html/pdf/COB03-0546.pdf>.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 3, p. 187–212, 2009. Disponível em: <https://www.lajss.org/index.php/LAJSS/article/view/177>.
- CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0094-1>.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1–32, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2009/575131>.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. do S. M. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 67, p. 66–75, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.12.001>.

- CODA, H. B.; SILVA, A. P. de O.; PACCOLA, R. R. Alternative active nonlinear total lagrangian truss finite element applied to the analysis of cable nets and long span suspension bridges. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 3, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78255818>.
- COELHO, M.; ROEHL, D.; BLETZINGER, K.-U. Numerical and analytical solutions with finite strains for circular inflated membranes considering pressure-volume coupling. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 82, p. 122–130, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.012>.
- COELHO, M. A. O. **Analysis of pneumatic structures considering nonlinear material models and pressure–volume coupling**. 2012. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.55511>.
- CONTRI, P.; SCHREFLER, B. A. A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 4, n. 1, p. 5–15, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/cnm.1630040103>.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. 1. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 1991. v. 1.
- DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46–55, 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/99.660313>.
- DAY, A. S. An introduction to dynamic relaxation. **The Engineer**, v. 219, p. 218–221, 1965.
- DIABY, A.; LE VAN, A.; WIELGOSZ, C. Buckling and wrinkling of prestressed membranes. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 11, p. 992–1001, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.03.003>.
- DREW, P. **Tensile architecture**. London: Crosby Lockwood Staples, 1979.
- FISCHER, K. A.; WRIGGERS, P. Frictionless 2D contact formulations for finite deformations based on the mortar method. **Computational Mechanics**, v. 36, n. 3, p. 226–244, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0660-y>.
- FLORES, F. G.; OÑATE, E. Wrinkling and folding analysis of elastic membranes using an enhanced rotation-free thin shell triangular element. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 9, p. 982–990, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.03.014>.
- FREEBORN, J. BC Lions. **The Canadian Encyclopedia**, 2018. Disponível em: <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/en/article/bc-lions>. Acesso em: 26 mar. 2020.
- GALLAGHER, R. H.; PADLOG, J. Discrete element approach to structural instability analysis. **AIAA Journal**, v. 1, n. 6, p. 1437–1439, 1963. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.1825>.
- GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. 1. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2001.

GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.2579>.

GIL, A. J. Structural analysis of prestressed Saint Venant–Kirchhoff hyperelastic membranes subjected to moderate strains. **Computers & Structures**, v. 84, n. 15-16, p. 1012–1028, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.02.009>.

GIMSING, N. J.; GEORGAKIS, C. T. **Cable supported bridges: concept and design**. 3. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2012.

GOSLING, P.; LEWIS, W. Optimal structural membranes—I. Formulation of a curved quadrilateral element for surface definition. **Computers & Structures**, v. 61, n. 5, p. 871–883, 1996. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(96\)00090-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(96)00090-9).

GOSLING, P.; LEWIS, W. Optimal structural membranes—II. Form-finding of prestressed membranes using a curved quadrilateral finite element for surface definition. **Computers & Structures**, v. 61, n. 5, p. 885–895, 1996. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(96\)00091-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(96)00091-0).

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2004.tde-10112004-102715>.

GRECO, M.; CODA, H. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.018>.

GRECO, M.; GESUALDO, F.; VENTURINI, W.; CODA, H. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.04.007>.

HABER, R.; ABEL, J. Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I — Formulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 30, n. 3, p. 263–284, 1982. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90080-9).

HALLQUIST, J.; GOUDREAU, G.; BENSON, D. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1-3, p. 107–137, 1985. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90030-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90030-1).

HALVORSEN ARCHITECTS. **Youde Aviary, Hong Kong**. 2007. Disponível em: <https://www.halvorsen-architects.co.uk/youde-aviary-hong-kong/>. Acesso em: 25 jan. 2023.

HAN, S.-E.; LEE, K.-S. A study of the stabilizing process of unstable structures by dynamic relaxation method. **Computers & Structures**, v. 81, n. 17, p. 1677–1688, 2003. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(03\)00187-1](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(03)00187-1).

HEGYI, D.; SAJTOS, I.; GEISZTER, G.; HINCZ, K. Eight-node quadrilateral double-curved surface element for membrane analysis. **Computers & Structures**, v. 84, n. 31-32, p. 2151–2158, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.046>.

HERZOG, T. **Pneumatic structures: a handbook for the architect and engineer**. London: Crosby Lockwood Staples, 1977.

- HIDDEN ARCHITECTURE. **United States Pavilion – Osaka 70**. 2016. Disponível em: <http://hiddenarchitecture.net/united-states-pavilion-osaka-70>. Acesso em: 26 mar. 2020.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering**. Chichester: John Wiley and Sons, 2000.
- HONG KONG PARK. **The Edward Youde Aviary of Hong Kong Park**. 2022. Disponível em: https://www.lcsd.gov.hk/en/parks/hkp/facilities/outdoor/edward_youde_intro.html. Acesso em: 25 jan. 2023.
- HORRIGMOE, G.; BERGAN, P. G. Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 16, n. 1, p. 11–35, 1978. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(78\)90030-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(78)90030-0).
- HSL. A collection of fortran codes for large scale scientific computation. 2016. Disponível em: <http://www.hsl.rl.ac.uk>.
- HU, J.; CHEN, W.; QU, Y.; YANG, D. Safety and serviceability of membrane buildings: A critical review on architectural, material and structural performance. **Engineering Structures**, v. 210, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110292>.
- HU, N. A solution method for dynamic contact problems. **Computers & Structures**, v. 63, n. 6, p. 1053–1063, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(96\)00408-7](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(96)00408-7).
- HUGHES, T. J.; TAYLOR, R. L.; SACKMAN, J. L.; CURNIER, A.; KANOKNUKULCHAI, W. A finite element method for a class of contact-impact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 8, n. 3, p. 249–276, 1976. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(76\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(76)90018-9).
- HUNTINGTON, C. G. (ed.). **Tensile fabric structures: design, analysis, and construction**. Reston: American Society of Civil Engineers, 2013.
- IRONS, B.; BARLOW, J. Comment on “Matrices for the direct stiffness method”. **AIAA Journal**, v. 2, n. 2, p. 403–404, 1964. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.2313>.
- JARASJARUNGKIAT, A.; WUCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. A wrinkling model based on material modification for isotropic and orthotropic membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6-8, p. 773–788, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.09.005>.
- JARASJARUNGKIAT, A.; WUCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. Efficient sub-grid scale modeling of membrane wrinkling by a projection method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 9-12, p. 1097–1116, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.014>.
- JIN, J. **The Millennium Dome, London, UK**. 2004. 1 fotografia. Disponível em: <https://www.flickr.com/photos/jamesjin/58712717/>. Acesso em: 26 mar. 2020.
- JOHNSON, D. **Advanced structural mechanics: An introduction to continuum mechanics and structural mechanics**. 2. ed. London: Thomas Telford Publishing, 2000.
- JONES, R. E. A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. **AIAA Journal**, v. 2, n. 5, p. 821–826, 1964. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.2437>.

KABE, A. M.; SATO, B. H. **Structural dynamics fundamentals and advanced applications**. London: Academic Press, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/C2019-0-00002-7>.

KANG, S.; IM, S. Finite element analysis of wrinkling membranes. **Journal of Applied Mechanics**, v. 64, n. 2, p. 263–269, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2787302>.

KANG, S.; IM, S. Finite element analysis of dynamic response of wrinkling membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 173, n. 1-2, p. 227–240, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(98\)00271-0](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(98)00271-0).

KATO, S.; YOSHINO, T.; MINAMI, H. Formulation of constitutive equations for fabric membranes based on the concept of fabric lattice model. **Engineering Structures**, v. 21, n. 8, p. 691–708, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(98\)00024-8](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(98)00024-8).

KIKUCHI, N.; ODEN, J. T. **Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1988.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy–momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 178, n. 3-4, p. 343–366, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(99\)00024-9](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00024-9).

LANZONI, L.; TARANTINO, A. M. Finite anticlastic bending of hyperelastic solids and beams. **Journal of Elasticity**, v. 131, n. 2, p. 137–170, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10659-017-9649-y>.

LAURSEN, T. A. **Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

LAURSEN, T. A.; SIMO, J. C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 20, p. 3451–3485, 1993a. Disponível em: <https://doi.org/nme.1620362005>.

LAURSEN, T. A.; SIMO, J. C. Algorithmic symmetrization of coulomb frictional problems using augmented lagrangians. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 108, n. 1-2, p. 133–146, 1993b. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(93\)90157-s](https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90157-s).

LEONARD, J. W. **Tension structures: behavior and analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1988.

LEVY, R.; SPILLERS, W. R. **Analysis of geometrically nonlinear structures**. 2. ed. Dordrecht: Springer, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0243-0>.

LEWIS, W. J. **Tension structures: form and behaviour**. 2. ed. London: ICE Publishing, 2018.

LI, X.; XUE, S.; LIU, Y. A novel form finding method for minimum surface of cable net. **Journal of Building Engineering**, v. 48, p. 103939, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2021.103939>.

LU, K.; ACCORSI, M.; LEONARD, J. Finite element analysis of membrane wrinkling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 5, p. 1017–1038, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/1097-0207\(20010220\)50:5<1017::aid-nme47>3.0.co;2-2](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20010220)50:5<1017::aid-nme47>3.0.co;2-2).

- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2008.tde-08052008-090039>.
- MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2006.tde-22062006-104749>.
- MAURIN, B.; MOTRO, R. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. **Engineering Structures**, v. 20, n. 8, p. 712–719, 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(97\)00108-9](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(97)00108-9).
- MOJTAHEDI, A. **Munich Olympic stadium, view from Olympic Tower**. 2006. 1 fotografia. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Olympiastadion_Muenchen.jpg. Acesso em: 26 mar. 2020.
- MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021. Disponível em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/1248>.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Disponível em: <https://doi.org/10.1061/jmcea3.0000098>.
- OGDEN, R. **Non-linear elastic deformations**. New York: Dover Publications, 1997.
- OLIVEIRA, M. B. **Estudo das estruturas de membrana: uma abordagem integrada do sistema construtivo, do processo de projetar e dos métodos de análise**. 2001. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2001.tde-06062006-145331>.
- OTTO, F.; TROSTEL, R. **Tensile structures: v.1 – Pneumatic structures**. Cambridge: The MIT Press, 1967.
- OZDEMIR, H. A finite element approach for cable problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 5, p. 427–437, 1979. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90063-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90063-5).
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView: software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.
- PARGANA, J.; LEITÃO, V. A simplified stress-strain model for coated plain-weave fabrics used in tensioned fabric structures. **Engineering Structures**, v. 84, p. 439–450, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.12.002>.
- PARGANA, J.; LLOYD-SMITH, D.; IZZUDDIN, B. Advanced material model for coated fabrics used in tensioned fabric structures. **Engineering Structures**, v. 29, n. 7, p. 1323–1336, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.09.001>.

- PARISCH, H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 8, p. 1803–1812, 1989. Disponível em: <https://doi.org/nme.1620280807>.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59–75, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.09.005>.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 133, p. 25–41, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.05.007>.
- PAULETTI, R.; ROCHA, K. A simple finite element framework for modelling pneumatic structures. **Engineering Structures**, v. 235, p. 111812, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111812>.
- PAULETTI, R. M.; PIMENTA, P. M. The natural force density method for the shape finding of taut structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 49-50, p. 4419–4428, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.05.017>.
- PAULETTI, R. M. O. **História, análise e projeto de estruturas retesadas**. 2003. Tese (Livre-docência) — Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25352.98561>.
- PAULTRE, P. **Dynamics of structures**. London: ISTE, 2011.
- PIEADADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2009.tde-14072009-165646>.
- PIEADADE NETO, D. **On the generalized finite element method in nonlinear solid mechanics analyses**. 2013. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2013.tde-20012014-094606>.
- PIETRZAK, G.; CURNIER, A. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangian treatment. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 177, n. 3-4, p. 351–381, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(98\)00388-0](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(98)00388-0).
- PUSO, M. A.; LAURSEN, T. A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 6-8, p. 601–629, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.10.010>.
- REDAELLI TECNA. **Full locked coil strands**. 2020. Disponível em: <https://www.redaelli.com/br/produtos/cabos/locked-coil-ropes/full-locked-coil-strands>. Acesso em: 04 jul. 2022.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física 1**. 5. ed. Rio De Janeiro: LTC, 2003.
- RIVERA, L. A. M. **Tensoestructuras: guía básica de diseño**. Lima, 2012. Disponível em: <https://civilgeeks.com/2014/09/04/guia-basica-de-diseno-de-tensoestructuras/>. Acesso em: 03 out. 2019.

- ROBBIN, T. **Engineering a new architecture**. Leominster: Quebecor-Eusy Press, 1996.
- RODDEMAN, D. G.; DRUKKER, J.; OOMENS, C. W. J.; JANSSEN, J. D. The wrinkling of thin membranes: Part I — Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, n. 4, p. 884–887, 1987a. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3173133>.
- RODDEMAN, D. G.; DRUKKER, J.; OOMENS, C. W. J.; JANSSEN, J. D. The wrinkling of thin membranes: Part II — Numerical analysis. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, n. 4, p. 888–892, 1987b. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3173134>.
- ROMANO, G. Potential operators and conservative systems. **Meccanica**, v. 7, n. 3, p. 141–146, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf02128759>.
- RUMPEL, T.; SCHWEIZERHOF, K. Volume-dependent pressure loading and its influence on the stability of structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 56, n. 2, p. 211–238, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.561>.
- SARACIBAR, C. A. de. A new frictional time integration algorithm for large slip multi-body frictional contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 142, n. 3-4, p. 303–334, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(96\)01133-4](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(96)01133-4).
- SCHEK, H.-J. The force density method for form finding and computation of general networks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 1, p. 115–134, 1974. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0).
- SCHWEIZERHOF, K.; RAMM, E. Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. **Computers & Structures**, v. 18, n. 6, p. 1099–1114, 1984. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90154-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90154-8).
- SEWELL, M. J. On configuration-dependent loading. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 23, n. 5, p. 327–351, 1967. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf00276777>.
- SILVA, A. P. de O. **Desenvolvimento de código computacional para análise estática e dinâmica de pontes pênséis, pontes estaiadas e tenso-estruturas simples**. 2020. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020. Disponível em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/1241>.
- SILVA, A. P. O.; CODA, H. B. A positional finite element formulation for tension structures analysis. In: IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 40., 2019, Natal. **Proceedings...** Natal: ABMEC, 2019. Disponível em: <https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/128/7074.pdf>.
- SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2019.tde-23052019-084903>.
- SOARES, H. B. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2021. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021. Disponível em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/1260>.

SORIANO, H. L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

STEIN, M.; HEDGEPEETH, J. M. **Analysis of partly wrinkled membranes**. Washington D. C., 1961. NASA Technical Note D-813.

SUZIN, C. M. **Análise de tração biaxial em membranas**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019.

SZE, K.; LIU, X.; LO, S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, n. 11, p. 1551–1569, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2003.11.001>.

TABARROK, B.; QIN, Z. Nonlinear analysis of tension structures. **Computers & Structures**, v. 45, n. 5-6, p. 973–984, 1992. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90056-6).

TAYLOR, R. L.; PAPADOPOULOS, P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 12, p. 2123–2140, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620361211>.

TENSINET. **Youde Aviary, Hong Kong Park**. 2023. Disponível em: <https://www.tensinet.com/index.php/component/tensinet/?view=project&id=4177>. Acesso em: 25 jan. 2023.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/8.3664>.

VALDÉS, J.; MIQUEL, J.; OÑATE, E. Nonlinear finite element analysis of orthotropic and prestressed membrane structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 6-7, p. 395–405, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.11.008>.

VEENENDAAL, D.; BLOCK, P. An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, n. 26, p. 3741–3753, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.08.008>.

WANG, X. F.; YANG, Q. S.; LAW, S. Wrinkled membrane element based on the wrinkling potential. **International Journal of Solids and Structures**, v. 51, n. 21-22, p. 3532–3548, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.06.004>.

WILSON, E. L.; NICKELL, R. E. Application of the finite element method to heat conduction analysis. **Nuclear Engineering and Design**, v. 4, n. 3, p. 276–286, 1966. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(66\)90051-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(66)90051-3).

WONG, Y. W.; PELLEGRINO, S. Amplitude of wrinkles in thin membranes. *In*: DREW, H. R.; PELLEGRINO, S. (ed.). **New Approaches to Structural Mechanics, Shells and Biological Structures**. Dordrecht: Springer, 2002. p. 257–270. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-015-9930-6_21.

WRIGGERS, P. Finite element algorithms for contact problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 2, n. 4, p. 1–49, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf02736195>.

WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

WRIGGERS, P.; SIMO, J.; TAYLOR, R. Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING: THEORY AND APPLICATIONS, 1985, Swansea. **Proceedings...** Rotterdam/Boston: A. A. Balkema, 1985.

XU, D.; LIECHTI, K. M. Analytical and experimental study of a circular membrane in Hertzian contact with a rigid substrate. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, n. 7-8, p. 969–977, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.12.013>.

ZIEGLER, R.; WAGNER, W.; BLETZINGER, K.-U. A finite element model for the analysis of wrinkled membrane structures. **International Journal of Space Structures**, v. 18, n. 1, p. 1–14, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1260/026635103769016591>.

APÊNDICE A – DERIVADAS DOS VETORES NORMAIS EM RELAÇÃO ÀS POSIÇÕES NODAIS

Neste apêndice, são deduzidas as derivadas dos vetores normais (unitário e não unitário) e expressões relacionadas. Quando conveniente, essas expressões serão denotadas com uma notação mais compacta para facilitar o entendimento.

As derivadas serão calculadas em relação às posições nodais atuais Y_i^α , sendo i a direção, variando de 1 a 3, e α o nó, variando de 0 (nó projétil no caso do contato) até npe , o número de nós do elemento finito (elemento alvo no caso do contato). Dessa forma, as funções de forma ϕ e suas derivadas para o nó $\alpha = 0$ são nulas.

Inicialmente, recorda-se que o vetor normal à superfície nas coordenadas atuais é obtido a partir dos vetores tangentes, dados por:

$$T_l^1 = \frac{\partial y_l}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \xi_1} Y_l^\gamma = Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \quad \text{e} \quad T_l^2 = \frac{\partial y_l}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \xi_2} Y_l^\gamma = Y_l^\gamma \phi_{,2}^\gamma. \quad (\text{A.1})$$

Os vetores normal e normal unitário são calculados como:

$$\vec{N} = \vec{T}^1 \times \vec{T}^2, \quad \text{e} \quad (\text{A.2a})$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{N}, \quad (\text{A.2b})$$

sendo N o módulo de \vec{N} .

Em notação indicial, o produto vetorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:

$$w_k = \epsilon_{klm} u_l v_m, \quad (\text{A.3})$$

no qual ϵ_{klm} é o tensor de permutação cíclica de Levi-Civita, definido como:

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} +1 & \text{se } (k,l,m) \text{ é } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \text{ (permutação par);} \\ -1 & \text{se } (k,l,m) \text{ é } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3) \text{ (permutação ímpar);} \\ 0 & \text{demais casos (índices repetidos).} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.1 Derivadas do vetor normal

A primeira derivada do vetor normal é calculada a partir da Equação A.2a em notação indicial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial Y_i^\alpha} &= (DN_k)_i^\alpha = \frac{\partial (\epsilon_{klm} T_l^1 T_m^2)}{\partial Y_i^\alpha} = \epsilon_{klm} \left(T_l^1 \frac{\partial T_m^2}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial T_l^1}{\partial Y_i^\alpha} T_m^2 \right) = \\ \epsilon_{klm} \left[(Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma) \frac{\partial (Y_m^\theta \phi_{,2}^\theta)}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma)}{\partial Y_i^\alpha} (Y_m^\theta \phi_{,2}^\theta) \right] &= \epsilon_{klm} (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \delta_{mi} \delta_{\theta\alpha} \phi_{,2}^\theta + \delta_{li} \delta_{\gamma\alpha} \phi_{,1}^\gamma Y_m^\theta \phi_{,2}^\theta) \\ &= \epsilon_{klm} (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \delta_{mi} \phi_{,2}^\alpha + \delta_{li} \phi_{,1}^\alpha Y_m^\theta \phi_{,2}^\theta). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A Equação A.5 expressa a soma de dois produtos vetoriais. Pela propriedade $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, invertem-se os índices l e m do segundo termo trocando-se o sinal:

$$(DN_k)_i^\alpha = \epsilon_{klm} (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \delta_{mi} \phi_{,2}^\alpha - \delta_{mi} \phi_{,1}^\alpha Y_l^\theta \phi_{,2}^\theta) = \epsilon_{klm} (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \phi_{,2}^\alpha - \phi_{,1}^\alpha Y_l^\theta \phi_{,2}^\theta) \delta_{mi}. \quad (\text{A.6})$$

É possível retornar à forma vetorial fazendo (em notação mista):

$$(DN_k)_i^\alpha = \left(\phi_{,2}^\alpha \vec{T}^1 - \phi_{,1}^\alpha \vec{T}^2 \right) \times \vec{e}^i, \quad (\text{A.7})$$

sendo \vec{e}^i o vetor unitário na direção i , ou seja, $\vec{e}^1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}^2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}^3 = (0, 0, 1)$. Dessa forma, no código computacional, é possível considerar $(DN_k)_i^\alpha$ como um vetor de componentes k para cada par i - α .

Para calcular a segunda derivada do vetor normal, utiliza-se a Equação A.6:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_k}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} &= (D2N_k)_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_j^\beta} \left[\epsilon_{klm} (Y_l^\gamma \phi_{,1}^\gamma \phi_{,2}^\alpha - \phi_{,1}^\alpha Y_l^\theta \phi_{,2}^\theta) \delta_{mi} \right] = \\ \epsilon_{klm} (\delta_{lj} \delta_{\gamma\beta} \phi_{,1}^\gamma \phi_{,2}^\alpha - \phi_{,1}^\alpha \delta_{lj} \delta_{\theta\beta} \phi_{,2}^\theta) \delta_{mi} &= \epsilon_{klm} \left(\phi_{,1}^\beta \phi_{,2}^\alpha - \phi_{,1}^\alpha \phi_{,2}^\beta \right) \delta_{lj} \delta_{mi}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Novamente, retorna-se à forma vetorial com a notação mista:

$$(D2N_k)_{ij}^{\alpha\beta} = \left(\phi_{,1}^\beta \phi_{,2}^\alpha - \phi_{,1}^\alpha \phi_{,2}^\beta \right) \vec{e}^j \times \vec{e}^i, \quad (\text{A.9})$$

e considera-se, no código computacional, $(D2N_k)_{ij}^{\alpha\beta}$ como um vetor para cada conjunto i - j - α - β .

A derivada do módulo do vetor normal pode ser calculada a partir da derivada das componentes:

$$\frac{\partial N}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial (N_k N_k)^{1/2}}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{1}{2} (N_k N_k)^{-1/2} 2N_k \frac{\partial N_k}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{N_k}{N} (DN_k)_i^\alpha. \quad (\text{A.10})$$

Essa expressão descreve o produto interno entre dois vetores e k é um índice mudo. Escrevendo com a notação compacta:

$$\frac{\partial N}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{N DN_i^\alpha}{N}. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Derivadas do vetor normal unitário

A primeira derivada do vetor normal unitário é calculada a partir da Equação A.2b:

$$\frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha} = (dn_k)_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{N_k}{N} \right) = N_k \left(\frac{-1}{N^2} \right) \frac{\partial N}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{1}{N} (DN_k)_i^\alpha. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo o valor obtido da Equação A.11:

$$(dn_k)_i^\alpha = \frac{(DN_k)_i^\alpha}{N} - \frac{NDN_i^\alpha N_k}{N^3}. \quad (\text{A.13})$$

Verifica-se que o produto interno entre o vetor normal unitário e sua derivada é nulo:

$$n_k \frac{\partial n_k}{\partial Y_i^\alpha} = (n dn)_i^\alpha = \frac{N_k}{N} \left(\frac{(DN_k)_i^\alpha}{N} - \frac{NDN_i^\alpha N_k}{N^3} \right) = \frac{NDN_i^\alpha}{N^2} - \frac{NDN_i^\alpha N^2}{N^4} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Derivando a Equação A.13 para se obter a derivada segunda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_k}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} &= (d^2 n_k)_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_j^\beta} \left(\frac{(DN_k)_i^\alpha}{N} - \frac{NDN_i^\alpha N_k}{N^3} \right) = (DN_k)_i^\alpha \left(\frac{-1}{N^2} \right) \frac{\partial N}{\partial Y_j^\beta} + \\ &\frac{1}{N} (D^2 N_k)_{ij}^{\alpha\beta} - \frac{\partial (NDN_i^\alpha) N_k}{\partial Y_j^\beta N^3} - \frac{NDN_i^\alpha}{N^3} (DN_k)_j^\beta - NDN_i^\alpha N_k \left(\frac{-3}{N^4} \right) \frac{\partial N}{\partial Y_j^\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A derivada do produto NDN_i^α ainda não foi calculada. Inserindo um índice mudo l :

$$\frac{\partial (NDN_i^\alpha)}{\partial Y_j^\beta} = \frac{\partial (N_l (DN_l)_i^\alpha)}{\partial Y_j^\beta} = N_l (D^2 N_l)_{ij}^{\alpha\beta} + (DN_l)_j^\beta (DN_l)_i^\alpha = ND^2 N_{ij}^{\alpha\beta} + DNDN_{ij}^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a Equação A.16 e a Equação A.11 na Equação A.15:

$$\begin{aligned} (d^2 n_k)_{ij}^{\alpha\beta} &= -\frac{NDN_j^\beta (DN_k)_i^\alpha}{N^3} + \frac{(D^2 N_k)_{ij}^{\alpha\beta}}{N} - \left(ND^2 N_{ij}^{\alpha\beta} + DNDN_{ij}^{\alpha\beta} \right) \frac{N_k}{N^3} \\ &\quad - \frac{NDN_i^\alpha (DN_k)_j^\beta}{N^3} + \frac{3NDN_i^\alpha NDN_j^\beta N_k}{N^5}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Organizando os termos:

$$\begin{aligned} (d^2 n_k)_{ij}^{\alpha\beta} &= \left(\frac{3NDN_i^\alpha NDN_j^\beta}{N^2} - ND^2 N_{ij}^{\alpha\beta} - DNDN_{ij}^{\alpha\beta} \right) \frac{N_k}{N^3} - \frac{NDN_i^\alpha (DN_k)_j^\beta}{N^3} \\ &\quad - \frac{NDN_j^\beta (DN_k)_i^\alpha}{N^3} + \frac{(D^2 N_k)_{ij}^{\alpha\beta}}{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Finalmente, calcula-se o produto entre o vetor normal unitário e a derivada segunda:

$$\begin{aligned} n_k \frac{\partial^2 n_k}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} &= nd^2 n_{ij}^{\alpha\beta} = \left(\frac{3NDN_i^\alpha NDN_j^\beta}{N^2} - ND^2 N_{ij}^{\alpha\beta} - DNDN_{ij}^{\alpha\beta} \right) \frac{1}{N^2} \\ &\quad - \frac{NDN_i^\alpha NDN_j^\beta}{N^4} - \frac{NDN_j^\beta NDN_i^\alpha}{N^4} + \frac{ND^2 N_{ij}^{\alpha\beta}}{N^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Organizando:

$$nd2n_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{NDN_i^\alpha NDN_j^\beta}{N^4} - \frac{DNDN_{ij}^{\alpha\beta}}{N^2}. \quad (\text{A.20})$$

