**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

LUCAS ANTÔNIO MORAIS OLIVEIRA

# Comportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo

São Carlos
2019

LUCAS ANTÔNIO MORAIS OLIVEIRA

# Comportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia Civil (Estruturas)

Orientador: Profª. Dra. Ana Lúcia Homce de Cresce El Debs

São Carlos

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Morais Oliveira, Lucas Antônio

M933c Comportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo / Lucas Antônio Morais Oliveira; orientadora Ana Lúcia Homce de Cresce El Debs. São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Estruturas mistas. 2. Estado limite de serviço. 3. Flechas diferidas no tempo. 4. Retração não-uniforme. 5. Fluência. 6. Fissuração do concreto. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

# FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **LUCAS ANTÔNIO MORAIS OLIVEIRA.**

Título da dissertação: "Comportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo".

Data da defesa: 29/04/2019.

**Comissão Julgadora:** **Resultado:**

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs** APROVADO
**(Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Rodrigo Barreto Caldas** APROVADO
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

Profa. Dra. **Silvana De Nardin** APROVADO
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):
Prof. Assoc. **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, pelo dom da vida e pela proteção divina. Renovai constantemente a minha fé e esperança e guiai meus passos.

Aos meus pais, Décio e Nilda, e meus irmãos Hugo e José Garibaldi pela ajuda, compreensão e união. Apesar da distância e saudade, sempre presentes nessa caminhada. Pela paciência e atenção. Difícil falar da importância de todos vocês em minha vida. Meu muito obrigado, de coração.

À minha namorada e minha noiva Eliane, pelo seu companheirismo, pelo seu amor e carinho. Apesar da distância, nossas ligações sempre diminuíam um pouquinho a minha saudade. Obrigado pela sua paciência e compreensão nos meus momentos de ausência.

À minha orientadora Ana Lúcia El Debs pela orientação, apoio e prontidão. Agradeço pelos conselhos, dicas e correções, pela sua paciência e dedicação. Sempre serei grato pela ajuda, seja sobre a pesquisa ou nos assuntos pessoais. Com certeza, um exemplo para mim.

Ao pessoal do Laboratório de Estruturas da EESC: Amaury, Romeu, Jorge, Fabiano, Mauri e Luiz Vareda, pelos auxílios nos ensaios e concretagens, além das amizades construídas.

Aos funcionários do SET: Nadir, Clayton, Dani, Sylvia, Marcela, Masaki, Melina, Francisco e Dorival, pelas assistências durante o mestrado.

Ao Departamento de Estruturas e Universidade de São Paulo, a todos os professores, técnicos e funcionários que maneira direta e indireta contribuíram para realização do trabalho.

Aos professores pela atenção e contribuições: Maximiliano Malite (exame de qualificação), Silvana de Nardin (exame de qualificação e defesa) e Rodrigo Caldas (defesa).

Aos colegas de turma do mestrado e amigos do SET.

Pelas ajudas nos ensaios e nas suas medições: Alex Dantas, Bernardo Carvalho, Carol Rezende, Gustavo Gidrão, Davi Leal, Rafael Dupim, Paulo Carvalho, Paula Oliveira, Herbert Lopes, Tulio Raunyr e Fernando Melin.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU), onde me formei, conheci professores e pessoas incríveis e ao escritório *Ayres de Lima* pela experiência com projetos estruturais.

Ao pessoal da república *Bruxas*: Alex, Bernardo, Sérgio, Victor, Patrick e Richard, pela convivência harmoniosa e pelos almoços sensacionais aos domingos.

Agradeço pelo apoio financeiro dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da bolsa do mestrado.

À empresa *Modular Sistema Construtivo* pela doação das fôrmas de aço incorporadas.

*A minha gratidão.*

“A melhor maneira de se ter uma boa ideia é ter várias boas ideias”

*(Linus Carl Pauling)*

# RESUMO

MORAIS OLIVEIRA, L. A. C**omportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo**. 2019. 250p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

O sistema estrutural de pisos com lajes mistas, também chamadas de lajes com fôrma de aço incorporada e popularmente conhecido como *steel deck*®, é de desenvolvimento recente no Brasil e tem ganhado espaço na indústria da construção civil. Pesquisas internacionais recentes têm mostrado que os efeitos da retração não-uniforme, da fluência e da fissuração são significativos para a evolução dos deslocamentos verticais. No entanto, não há referências na literatura nacional de investigações sobre o tópico, como é usual para as estruturas de concreto armado. Desta forma, o presente trabalho tem como foco estudar o comportamento em serviço de lajes mistas de aço e concreto, com ênfase nos deslocamentos verticais (flechas) diferidos no tempo. São considerados os efeitos da retração e da fluência do concreto, além da interação entre o perfil de aço e o concreto. Um programa experimental exploratório com dois protótipos de lajes mistas idênticas, uma submetida a um carregamento imposto e outra sujeita apenas ao peso próprio, submetidos a um ensaio de longa duração de 260 dias. Os deslocamentos foram medidos diariamente e as condições de temperatura e umidade do ambiente foram monitoradas. Observou-se a evolução das flechas diferidas ao longo dos 260 dias na ordem de 3,20 vezes maior que as flechas imediatas. Ensaios de flexão a quatro pontos foram realizados com as duas lajes submetidas ao ensaio de longa duração e a outras duas com idade de 28 dias, não sendo observado influência do tempo quanto à capacidade resistente das lajes mistas. Finalmente, abordagens analíticas de previsão de flechas foram aplicadas aos protótipos testados e também a outros modelos experimentais presentes na literatura. Os valores previstos por diferentes abordagens de avaliação foram comparados aos resultados experimentais, observando-se que as abordagens que não levam em conta os efeitos da retração não-uniforme e fluência tendem a subestimar a previsão. As abordagens com consideração dos efeitos diferidos apresentaram boa acurácia e destaca-se a importância da consideração dos efeitos dependentes do tempo na previsão dos deslocamentos verticais das lajes estudadas.

**Palavras-chave:** Estruturas mistas. Estado limite de serviço. Flechas diferidas no tempo. Retração não-uniforme. Fluência. Fissuração do concreto.

# ABSTRACT

MORAIS OLIVEIRA, L. A. **In service behavior of steel-concrete composite slabs under the long-term conditions.** 2019. 250p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structures)) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

The structural floor system using steel-concrete composite slabs also called slabs with profiled steel decking and popularly known as steel deck®, has a recent development in Brazil and has taken space in the civil construction industry. Recent international researches have shown that non-uniform shrinkage, creep and cracking are significant for the time-dependent deflections of those slabs. However, there is no reference in the Brazilian literature of any study investigating the time-dependent behavior of composite slabs, as it is usual for reinforced concrete structures. So, this work focuses on the study of the in-service behavior of steel-concrete composite slabs under long-term conditions. The main emphasis lies on considering the time-dependent effects due to concrete shrinkage and creep, besides the influence of the steel-concrete interaction to calculate the slabs deflections. An exploratory experimental program with two prototypes of identical composite slabs, one subjected to an imposed loading and another subject only to self-weight, submitted to the 260-day long test. During all testing time, they were taken daily measurements of deflection and temperature and humidity conditions were monitored to understand its influence. The time-dependent deflections during the 260-days on the order of 3.20 times greater than the instantaneous deflection were observed. Four-point bending tests were performed with the two slabs submitted to the long-duration test 260-day and two others with a 28-day age. No influence of time was observed on the resistant capacity of composite slabs. Finally, analytical approaches to predict the deflections of the slabs were applied to the prototypes tested and other experimental tests from the literature. The calculated values by different evaluation approaches were compared to the experimental results. The evaluation approaches that do not take into account the effects of non-uniform shrinkage and creep tend to underestimate the previsions. The evaluation approaches considering the time-dependent effects presented good accuracy. The importance of the time-dependent effects for the deflections is demonstrated.

**Keywords:** Composite structures. Serviceability state. Time-dependent deflections. Non-uniform Shrinkage. Creep. Concrete cracking.

# LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

| | |
|---|---|
| $A_c, B_c, I_c$ | Área do concreto, momento estático de área e momento de inércia do concreto. |
| $d_p$ | Altura útil. |
| $E_c, E_{Sd}, E_s$ | Módulo de elasticidade do concreto, fôrma de aço e armaduras. |
| $E_{ef,cc}$ | Módulo efetivo de elasticidade do concreto usado para parcela de fluência. |
| $E_{ef,sh}$ | Módulo efetivo de elasticidade do concreto usado para parcela de retração. |
| $f_c$ | Resistência à compressão do concreto. |
| $f_{ck}$ | Resistência característica à compressão do concreto, aos 28 dias. |
| $f_{ct}, f'_{ct,f}$ | Resistência característica do concreto à tração. |
| $f_{p1}, f_{p2}$ | Força axial e momento descrevendo os efeitos da protensão. |
| $f_u, f_y$ | Resistência ao escoamento, resistência à ruptura, respectivamente. |
| H, h, D | Altura, Altura total da laje. |
| $I_{cr}$ | Momento de inércia da seção fissurada do concreto. |
| $I_{ef}, I_{eq}$ | Momento de inércia equivalente ou efetivo da seção mista. |
| $I_{ef,cc}$ | Momento de inércia obtido com módulo efetivo do concreto $E_{ef,cc}$. |
| $I_{ef,max}$ | Máximo momento de inércia correspondente a seção não-fissurada. |
| $I_{uncr}$ | Momento de inércia da seção não-fissurada do concreto. |
| $L_f$ | Vão efetivo, vão da laje. |
| *LT* | *Long-term* (longa duração). |
| $M_{cr}$ | Momento de fissuração. |
| $M_s, M_{serv.}$ | Máximo momento fletor resistido pela seção em situação de serviço. |
| *N* | Esforço normal. |
| $q_0, p_0, p$ | Carregamento distribuído sobre as lajes mistas. |
| $q_{0,sus}$ | Parcela de carga sustentada pela seção mista. |
| $R_A, R_B, R_I$ | Rigidez axial, rigidez associada ao momento estático de área e rigidez à flexão, respectivamente, calculadas para tempo $t_0$, em condições não-fissuradas. |
| $R_{A,cr}, R_{B,cr}, R_{I,cr}$ | Rigidez axial, rigidez associada ao momento estático de área e rigidez à flexão, respectivamente, para seção fissurada. |
| $R_{A,cs}, R_{B,cs}, R_{I,cs}$ | Rigidez axial, rigidez associada ao momento estático de área e rigidez à flexão, respectivamente, usadas para cálculo dos efeitos da retração. |
| *ST* | *Short-term* (curta duração). |
| s, *ds* | Deslizamento relativo entre aço e concreto. |
| $t_0$ | Idade de carregamento. |
| $t_c$ | Tempo de cura, início de secagem. |
| t | Idade avaliada, espessura da chapa de aço. |
| $t_h$ | Espessura fictícia. |
| T | Temperatura. |
| u | Perímetro exposto do concreto ao ambiente. |
| U | Umidade relativa do ar. |

| | |
|---|---|
| $\nu$ | Deslocamento vertical da peça. |
| y | Eixo vertical. |
| $\alpha_{cc}$ | Multiplicador de fluência. |
| $\Delta z, a$ | Partição do vão. |
| $\gamma_{sh}$ | Coeficiente de distribuição. |
| $\delta$ | Flecha da peça fletida. |
| $\delta_{cc}$ | Parcela de flecha devido à fluência. |
| $\delta_{cs}$ | Parcela de flecha devido à retração. |
| $\delta_0, \delta_i$ | Parcela de flecha imediata. |
| $\varepsilon_{cc}$ | Deformação devido à fluência do concreto. |
| $\varepsilon_{sh}, \varepsilon_{cs}$ | Retração do concreto calculada de acordo com normas de projeto. |
| $\varepsilon_{sh,r}$ | Deformação de retração no eixo de referência adotado. |
| $\varepsilon_{p,init}$ | Deformação inicial produzida durante a protensão. |
| $\kappa$ | Curvaturas. |
| $\kappa_{A,0}, \kappa_{B,0}, \kappa_{C,0}$ | Curvatura da seção sobre os apoios (A e B) e no meio do vão (C). |
| $\kappa_{sh}$ | Curvatura induzida pela retração. |
| $\kappa_{shcr}$ | Curvatura induzida pela retração considerando as propriedades da seção fissurada da laje mista. |
| $\kappa_{sh,uncr}$ | Curvatura induzida pela retração considerando as propriedades da seção não-fissurada da laje mista. |
| $\sigma_c, \sigma_{Sd}, \sigma_s$ | Tensão no concreto, fôrma de aço e armadura, respectivamente. |
| $\sigma_{cpre}$ | Tensão de compressão induzida pela protensão, contabilizada as perdas de protensão até idade t de interesse. |
| $\sigma_{sh}$ | Tensão de tração induzida pela retração na seção não-fissurada. |
| $\phi_{cc}, \phi(t, t_0), \varphi_i(t, t_o)$ | Coeficiente de fluência calculado na idade $t$ para carregamento aplicado na idade $t_0$. |
| $\phi_p$ | Coeficiente de relaxação do aço de protensão. |
| $\chi_i(t, t_o)$ | Coeficiente de envelhecimento do concreto. |
| $w_c, \rho_c$ | Massa específica do concreto. |
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas. |
| ACI | *American Concrete Institute.* |
| ANSI-ASCE | *American National Standards Institute - Society of Civil Engineers.* |
| ANSI-SDI | *American National Standards Institute - Steel Deck Institute.* |
| AS/NZS | *Australian Standard/New Zealand Standard.* |
| BS | *British Standard.* |
| CEB | Comité *Euro-International du Béton.* |
| CSSBI | *Canadian Sheet Steel Building Institute.* |
| CP | Corpo de prova, Cimento Portland. |
| EESC | Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. |
| LE | Laboratório de Estruturas Dante Martinelli - Departamento de Engenharia de Estruturas. |

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Laje mista de aço e concreto ..... 27
Figura 2.1 – Estrutura mista de aço e concreto ..... 33
Figura 2.2 – Lajes mistas de aço e concreto ..... 34
Figura 2.3 – Sistema de piso em laje mista de aço e concreto ..... 35
Figura 2.4 – Montagem de uma laje mista de aço e concreto ..... 36
Figura 2.5 – Flechas devido retração para vigas mistas ..... 41
Figura 2.6 – Visão do ensaio de monitoramento da retração ..... 44
Figura 2.7 – Condições de secagem e distribuição qualitativa de laje exposta em ambas faces ..... 45
Figura 2.8 – Condições de secagem e distribuição qualitativa de laje exposta em apenas uma face .... 45
Figura 2.9 – Relação qualitativa momento-curvatura devido aos efeitos diferidos no tempo ..... 46
Figura 2.10 – Geometria do ensaio de Ranzi et al. (2013) ..... 48
Figura 2.11 – Vistas lajes mistas sob carregamento ..... 48
Figura 2.12 – Vistas lajes mistas sob carregamento ..... 48
Figura 2.13 – Configuração das lajes mistas sob carregamento ..... 49
Figura 2.14 – Resultados das flechas diferidos no tempo das lajes mistas de Gholamhoseini (2014).. 51
Figura 2.15 – Vistas lajes mistas sob carregamento de longa-duração ..... 51
Figura 2.16 – Previsão das flechas ao longo do tempo pelos modelos analíticos ..... 52
Figura 2.17 – Ensaio de longa duração das lajes mistas de Wang et al. (2016) ..... 53
Figura 2.18 – Resultado das flechas diferidas dos ensaios de Wang et al. (2016) ..... 53
Figura 2.19 – Esquema ensaio de Gholamhoseini et al. (2016) ..... 54
Figura 2.20 – Resultados das flechas das lajes mista de Gholamhoseini et al. (2016) ..... 54
Figura 2.21 – Esquema ensaio de Altoubat, Rieder e Junaid (2017) ..... 56
Figura 2.22 – Flechas ao longo do tempo das lajes mista de Altoubat, Rieder e Junaid (2017) ..... 57
Figura 2.23 – Aberturas de fissuras ao longo do tempo das lajes de Altoubat, Rieder e Junaid (2017) 57
Figura 2.24 – Ensaio experimental das lajes mistas contínuas de Gholamhoseini (2016c) ..... 58
Figura 2.25 – Esquema de ensaio das lajes mistas contínuas sob carregamento de longa-duração ..... 59
Figura 2.26 – Flechas ao longo do tempo das lajes mistas contínua ..... 60
Figura 2.27 – Variação do momento fletores das lajes ao longo do tempo de Gholamhoseini (2018). 61
Figura 3.1 – Fôrmas de aço para as lajes mistas de aço e concreto ..... 67
Figura 3.2 – Mecanismos de transferência de cisalhamento das lajes mistas ..... 68
Figura 3.3 – Seções críticas ao colapso ..... 70
Figura 3.4 – Ensaio rápido e modos de falha possíveis nas lajes mistas ..... 71
Figura 3.5 – Exemplo de comportamento frágil (1) e dúctil (2) de lajes mistas ..... 72
Figura 3.6 – Verificação de flechas em elementos (a) individuais e (b) com mais de um elemento .... 74

Figura 4.1 – Deformação do concreto dependente do tempo sob carga constante ..... 78
Figura 4.2 – Definição do módulo de deformação do concreto..... 79
Figura 4.3 – Fatores que afetam o módulo de elasticidade do concreto ..... 80
Figura 4.4 – Parcelas de deformação de fluência ..... 83
Figura 4.5 – Tipos e estágios da retração do concreto..... 87
Figura 4.6 – Medidas das deformações ao longo da seção da laje mista ao longo do tempo ..... 93
Figura 4.7 – Estudo do perfil de retração das lajes mistas de Gholamhoseini (2014)..... 93
Figura 4.8 – Perfis de deformações obtidos no ensaio de Gholamhoseini (2014)..... 94
Figura 4.9 – Deformações medidas ao longo da altura da laje de Wang et al. (2016) ..... 95
Figura 4.10 – Medidas da retração ao longo da seção da laje mista ao longo do tempo ..... 97
Figura 4.11 – Perfil de retração não uniforme de Gholamhoseini (2014) ..... 98
Figura 4.12 – Definição do fator de forma $rd$ ..... 98
Figura 4.13 – Fissuração do concreto e geometria da fissura..... 102
Figura 4.14 – Contribuição do concreto tracionado ..... 102
Figura 4.15 – Aspecto relação momento-curvatura ensaio instantâneo ..... 103
Figura 4.16 – Aspecto da curva momento-curvatura sob efeitos do carregamento, fluência e retração ..... 104
Figura 5.1 – Seções típicas de peças com concreto estrutural..... 109
Figura 5.2 – Modelo de viga sujeito a carregamento e suas deformações..... 110
Figura 5.3 – Seção transversal genérica e perfil de deformação esquemático para laje mista ..... 112
Figura 5.4 – Sistema simplesmente apoiado..... 113
Figura 5.5 – Efeitos na retração na seção mista..... 114
Figura 5.6 – Modelo de viga simplesmente apoiada com momentos nas extremidades ..... 115
Figura 5.7 – Sistema simplesmente apoiado-engastado ..... 116
Figura 5.8 – Diagrama e linha elástica para modelo viga apoiado-engastado..... 117
Figura 5.9 – Esquema estático com carregamento equivalente devido retração ..... 118
Figura 5.10 – Diagrama de momento e linha elástica devido retração efeitos da retração..... 118
Figura 5.11 – Interpretação geométrica para a derivada de função ..... 119
Figura 5.12 – Condição de contorno para a diferença central do MDF..... 121
Figura 5.13 – Discretização da peça para aplicação do método das diferenças finitas ..... 121
Figura 5.14 – Discretização do concreto em camadas para análise da seção mista..... 123
Figura 5.15 – Comportamento da seção dependente do nível de solicitação ..... 124
Figura 6.1 – Representação de laje mistas com fôrma de aço trapeizoidal com interação parcial ..... 141
Figura 6.2 – Fluxograma da metodologia refinada de cálculo das flechas nas lajes mistas ..... 144
Figura 7.1 – Perfil da fôrma de aço Modular MD 55 ..... 145
Figura 7.2 – Dimensões da seção transversal da laje mista..... 146
Figura 7.3 – Protótipos das laje mista avaliadas..... 146

Figura 7.4 – Produção e controle tecnológico do concreto ..... 147
Figura 7.5 – Ensaio de caracterização do concreto ..... 148
Figura 7.6 – Avaliação do módulo de deformação do concreto ..... 149
Figura 7.7 – Adensamento e cura das lajes mistas construídas ..... 150
Figura 7.8 – Curva tensão *x* deformação do ensaio de tração de chapas de aço da fôrma ..... 151
Figura 7.9 – Dimensões (em milímetros) da fôrma de aço incorporada ..... 152
Figura 7.10 – Curva tensão *x* deformação do ensaio de tração do aço da tela soldada ..... 152
Figura 7.11 – Curva tensão *x* deformação do ensaio de tração do aço da tela soldada ..... 153
Figura 7.12 – Fluxograma do ensaio de longa duração e atividades importantes ..... 155
Figura 7.13 – Esquema geral do ensaio de longa duração da laje *L1-MD125-LT* ..... 156
Figura 7.14 – Ensaio da laje mista *L1-MD55-LT* ..... 158
Figura 7.15 – Laje mista *L2-MD55-LT* ..... 159
Figura 7.16 – Relógios comparadores do ensaio da laje mista *L1-MD55-LT* ..... 160
Figura 7.17 – Monitoramento das condições ambientais do ensaio de longa duração ..... 161
Figura 7.18 – Deslocamentos verticais da laje mista *L1-MD125-LT* (*experimental*) ..... 162
Figura 7.19 – Deslocamentos verticais da laje mista *L2-MD125-LT* (*experimental*) ..... 162
Figura 7.20 – Esquema geral do ensaio de flexão (curta-duração) da laje mista ..... 165
Figura 7.21 – Seção transversal da laje mista e posicionamento dos extensômetros elétricos ..... 166
Figura 7.22 – Ensaio da laje mista *L3-MD125-ST* ..... 167
Figura 7.23 – Curvas do ensaio: Força *x* flecha dos protótipos ..... 168
Figura 7.24 – Resultados do ensaio da Laje mista *L1-MD125-LT* ..... 170
Figura 7.25 – Resultados do ensaio da Laje mista *L2-MD125-LT* ..... 171
Figura 7.26 – Resultados do ensaio da Laje mista *L3-MD125-ST* ..... 172
Figura 7.27 – Resultados do ensaio da Laje mista *L4-MD125-ST* ..... 173
Figura 7.28 – Aspecto da direção das mossas em *V horizontal* ..... 174
Figura 7.29 – Aspectos do ensaio de capacidade resistente ..... 175
Figura 8.1 – Medidas da laje mista *L1-MD125-LT* ..... 181
Figura 8.2 – Seção da laje mista *L1-MD125-LT* ..... 185
Figura 8.3 – Sistema de eixo de referência e gradiente de retração linear ..... 187
Figura 8.4 – Resultados das previsões das flechas para lajes mistas da literatura pelo método simplificado de Ranzi (2015) ..... 194
Figura 8.5 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método simplificado de Ranzi (2017) ..... 197
Figura 8.6 – Sistema de eixo de referência e gradiente de retração parabólico de Gholamhoseini(2014) ..... 201
Figura 8.7 – Curvaturas (κ) calculadas na laje mista L1-MD125-LT ..... 207

Figura 8.8 – Sistema de solução pelo MDF para deslocamentos verticais totais na idade de 260 dias ..... 207
Figura 8.9 – Resultados das previsões das flechas para lajes mistas ensaiadas pelo método refinado 208
Figura 8.10 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método refinado com perfil de retração parabólico de Gholamhoseini (2014) ..... 209
Figura B.1 – Circuito do sensor DHT22 para monitoramento do ambiente ..... 248
Figura C.1 – Fissuras da Laje Mista L1-MD125-LT após ensaio de flexão a quatro pontos ..... 249
Figura C.2 – Fissuras da Laje Mista L3-MD125-ST após ensaio de flexão a quatro pontos ..... 249
Figura C.3 – Fissuras da Laje Mista L2-MD125-LT após ensaio de flexão a quatro pontos ..... 250
Figura C.4 – Fissuras da Laje Mista L4-MD125-ST após ensaio de flexão a quatro pontos ..... 250

# LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resumo do ensaio: flechas e aberturas de fissuras imediatas e diferidas ..... 56
Tabela 2.2 – Resumo do ensaio: flechas e aberturas de fissuras imediatas e diferidas ..... 56
Tabela 2.3 – Resumo do ensaio de Gholamhoseini (2018) flechas imediatas e diferidas..... 60
Tabela 2.4 – Resumo dos ensaios experimentais e protótipos de lajes mistas na literatura ..... 62
Tabela 3.1 – Limites de deslocamento máximo permitidos das lajes mistas em serviço..... 75
Tabela 4.1 – Expressões para estimativa do módulo de elasticidade do concreto segundo modelos de previsão ..... 81
Tabela 4.2 – Propriedades do concreto segundo AS 3600 (2018) ..... 81
Tabela 4.3 – Expressões para estimativa do módulo de elasticidade do concreto segundo modelos de previsão para idades menores que 28 dias..... 82
Tabela 4.4 – Correlação entre tipos de cimentos..... 90
Tabela 4.5 – Intervalos de aplicação dos modelos na previsão da fluência e retração..... 90
Tabela 6.1 – Dispensa do cálculo de flecha em razão do máximo valor entre vão/altura..... 132
Tabela 6.2 – Fatores de multiplicação para flechas adicionais ..... 134
Tabela 7.1 – Resistencia à compressão e massa especifica do concreto em diferentes idades ..... 148
Tabela 7.2 – Resistência do concreto à tração na flexão em diferentes idades ..... 149
Tabela 7.3 – Resumo dos resultados da caracterização do aço da fôrma ..... 151
Tabela 7.4 – Propriedades da fôrma de aço MD55 ..... 152
Tabela 7.5 – Resumo dos resultados da caracterização do aço da tela..... 153
Tabela 7.6 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT* ..... 163
Tabela 7.7 – Parcelas de flechas (meio do vão) imediatas e diferidas da laje *L1-MD125-LT* ..... 163
Tabela 7.8 – Resumo da descrição dos protótipos ensaiados a flexão ..... 168
Tabela 7.9 – Resultados experimentais do ensaio de capacidade resistente dos protótipos..... 169
Tabela 7.10 – Resumo da análise da capacidade resistente..... 177
Tabela 8.1 – Resumo das estimativas das flechas por avaliação sem consideração explicita dos efeitos da retração ..... 182
Tabela 8.2 – Fatores e variáveis consideradas na avaliação da evolução das flechas ..... 183
Tabela 8.3 – Cálculo do coeficiente de fluência e da retração para o método simplificado ..... 184
Tabela 8.4 – Resultados da discretização da seção transversal em 10 camadas ..... 185
Tabela 8.5 – Dados para análise por meio das rigidezes seção não-fissurada..... 187
Tabela 8.6 – Dados para análise por meio das rigidezes seção não-fissurada..... 188
Tabela 8.7 – Dados para cálculo da parcela de flecha devido à retração na idade de 260 dias..... 193
Tabela 8.8 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT* ..... 195
Tabela 8.9 – Resumo das características das lajes mistas da literatura analisadas..... 196

Tabela 8.10 – Área, posição e deformação de retração para as camadas discretizadas do concreto ... 203
Tabela 8.11 – Dados para a parcela do vetor de retração para a seção fissurada ..... 204
Tabela 8.12 – Parcelas das curvaturas imediata e de longa duração ..... 206
Tabela 8.13 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT* ..... 211
Tabela A1 – Fator de correção para espessura de elementos ($\gamma c, d$) ..... 224
Tabela A2 – Coeficientes de fluência básica ..... 227
Tabela A3 - Valores de $kh$ na Equação A54. ..... 232
Tabela A4 - Valores de $\alpha i$ dependentes do tipo de cimento. ..... 232
Tabela A5 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração ..... 234
Tabela A6 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração. ..... 236
Tabela A7 – Coeficientes $\alpha$ dependentes do tipo de cimento ..... 239
Tabela A8 – Parâmetros do modelo de retração dependentes do tipo de cimento ..... 244
Tabela A9 – Fatores dependentes do tipo de agregado para modelo de retração B4 ..... 246
Tabela A10 – Parâmetros do modelo de retração dependentes do tipo de cimento ..... 246
Tabela A11 – Parâmetros dependentes do cimento para a retração autógena ..... 246

# SUMÁRIO

**1 INTRODUÇÃO ..... 27**

**1.1 Contexto e motivação ..... 27**
**1.2 Objetivos ..... 29**
**1.3 Justificativas ..... 30**
**1.4 Metodologia da pesquisa ..... 31**
**1.5 Organização da dissertação ..... 32**

**2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA ..... 33**

**2.1 Aspectos gerais das lajes mistas ..... 33**
**2.2 Estudos nacionais sobre lajes mistas ..... 37**
**2.3 Avaliação dos deslocamentos em serviço ..... 38**
**2.4 Comportamento das lajes mistas ao longo do tempo ..... 40**

**3 NORMAS E RECOMENDAÇÕES PRÁTICAS ..... 65**

**3.1 Considerações gerais ..... 65**
**3.2 Comportamento das lajes mistas de aço e concreto ..... 67**
**3.3 Sobre a ruína das lajes mistas ..... 69**
*3.3.1 Verificação da fôrma de aço antes da cura do concreto ..... 69*
*3.3.2 Verificação da laje após a cura do concreto ..... 69*
**3.4 Estado limite de fissuração inaceitável ..... 73**
**3.5 Aceitabilidade dos deslocamentos verticais máximos ..... 74**

**4 COMPORTAMENTO DO CONCRETO E SUA RELAÇÃO COM O TEMPO ..... 77**

**4.1 Tipos de deformação do concreto ..... 77**
*4.1.1 Deformação elástica do concreto ..... 79*
*4.1.2 Fluência ..... 83*
*4.1.3 Retração ..... 86*
**4.2 Modelos de previsão da fluência e retração ..... 88**
**4.3 A retração não-uniforme na laje mista ..... 92**
*4.3.1 Distribuição linear da retração não-uniforme ..... 96*
*4.3.2 Distribuição parabólica da retração não-uniforme ..... 98*

**4.4 A fissuração do concreto ..... 102**

*4.4.1 Modelo ACI 318 (2008) e Modelo AS 3600 (2009) ..... 105*

*4.4.2 Modelo Eurocode 2 (2004) ..... 107*

**5 MODELO TEÓRICO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI APLICADO ÀS LAJES MISTAS ..... 109**

**5.1 Considerações iniciais ..... 109**

**5.2 Cinemática do modelo ..... 110**

**5.3 Expressões para cálculo das flechas nas lajes mistas ..... 111**

*5.3.1 Expressões simplificadas ..... 113*

*5.3.2 Formulação por meio da integração das curvaturas pelo MDF ..... 119*

**5.4 Análise da seção transversal da laje mista de aço e concreto ..... 123**

*5.4.1 Concreto com seção não-fissurada ..... 125*

*5.4.2 Concreto com seção fissurada ..... 129*

**5.5 Considerações finais do capítulo ..... 130**

**6 ABORDAGENS DE AVALIAÇÃO DAS FLECHAS NAS LAJES MISTAS DE AÇO E CONCRETO ..... 131**

**6.1 Considerações iniciais ..... 131**

**6.2 Abordagens por cálculos simplificados ..... 132**

*6.2.1 Abordagem simplificada por dispensa de verificação ..... 132*

*6.2.2 Abordagem simplificada sem consideração explícita dos efeitos da retração ..... 133*

*6.2.3 Abordagem simplificada com consideração explícita da retração ..... 134*

*6.2.4 Flechas com a consideração de interação parcial ..... 141*

**6.3 Abordagem por métodos de cálculo refinados ..... 143**

**6.4 Considerações finais do capítulo ..... 144**

**7 ANÁLISE EXPERIMENTAL ..... 145**

**7.1 Considerações gerais ..... 145**

**7.2 Propriedades dos materiais constituintes da laje mista ..... 147**

*7.2.1 Concreto ..... 147*

*7.2.2 Fôrma de aço incorporada ..... 150*

*7.2.3 Aço da tela soldada ..... 152*

**7.3 Ensaio de longa duração da laje mista** ..... **154**
*7.3.1 O programa experimental* ..... *154*
*7.3.2 Metodologia aplicada* ..... *158*
*7.3.3 Condições ambientais* ..... *161*
*7.3.4 Evolução dos deslocamentos verticais e deslizamentos* ..... *162*
**7.4 Ensaio de avaliação da capacidade resistente da laje** ..... **165**
*7.4.1 O programa experimental* ..... *165*
*7.4.2 Resultados dos ensaios de avaliação da capacidade resistente* ..... *167*
**7.5 Considerações finais do capítulo** ..... **178**

**8 AVALIAÇÃO DAS FLECHAS NAS LAJES MISTAS** ..... **179**

**8.1 Considerações gerais** ..... **179**
**8.2 Avaliação por dispensa de verificação** ..... **180**
**8.3 Avaliação simplificada sem consideração explícita dos efeitos da retração** ..... **181**
*8.3.1 Abordagem simplificada do Eurocode 4 (2004)* ..... *181*
*8.3.2 Resumo das abordagens simplificadas sem consideração explícita dos efeitos da retração* ..... *182*
**8.4 Avaliação simplificada do modelo da AS/NZS 2327 (2017)** ..... **183**
*8.4.1 Considerações adotadas* ..... *183*
*8.4.2 Cálculo das parcelas de flechas da L1-MD125-LT* ..... *186*
*8.4.5 Resultados da abordagem para outras lajes mistas da literatura* ..... *195*
**8.5 Avaliação pela abordagem refinada com perfil de retração proposto por Gholamhoseini (2014)** ..... **199**
**8.6 Comparação dos resultados das diferentes abordagens** ..... **211**

**9 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS** ..... **213**

**REFERÊNCIAS** ..... **215**

**APENDICÊ A - MODELOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA** ..... **223**

***A1. Modelo do ACI 209-2R (2008)*** ..... **223**
***A2. Modelo AS 3600 (2018)*** ..... **227**
***A.3 Modelo Eurocode 2 (2004)*** ..... **230**
***A.4 Modelo ABNT NBR 6118 (2014)*** ..... **233**
***A.5 Modelo Model Code (2010)*** ..... **236**

*A.6 Modelo de Bazant e Rilem B4 (2015)* ..... **241**

**APÊNDICE B – SENSOR PARA MONITORAMENTO DO AMBIENTE ..... 248**

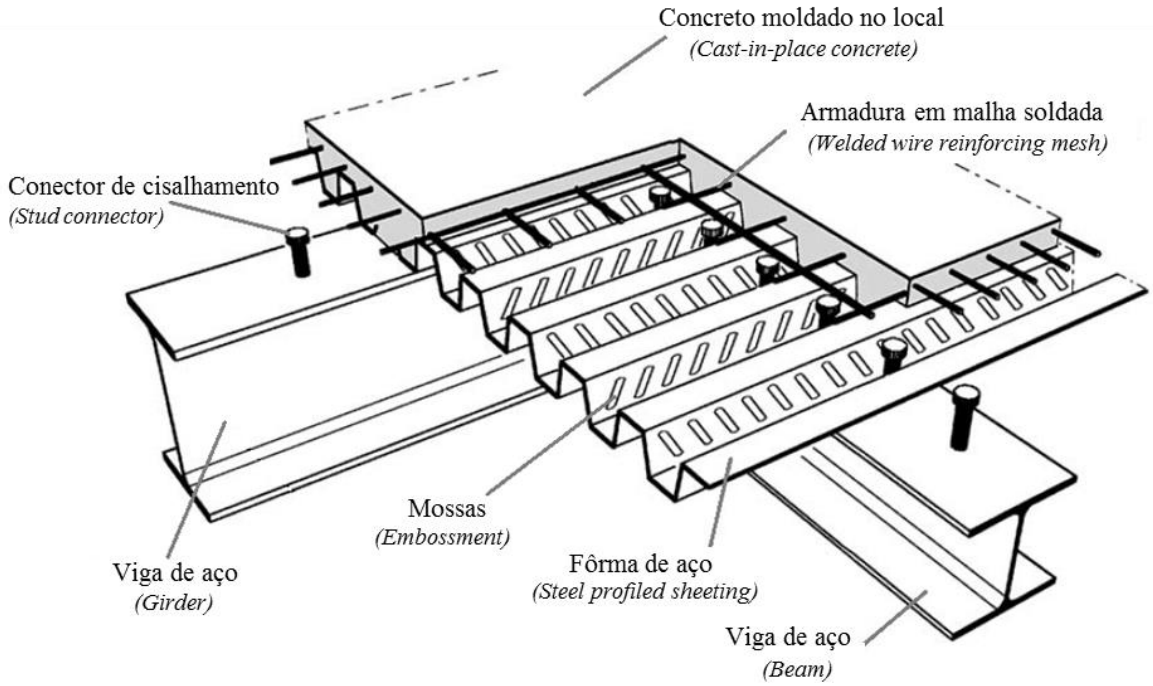
**APÊNDICE C – PADRÃO DE FISSURAS DO ENSAIO DE FLEXÃO ..... 249**

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto e motivação

As construções atuais têm buscado proporcionar liberdade na escolha de *layout* e acabamentos, vãos livres mais ousados, sustentabilidade, rapidez de execução e economia de mão-de-obra e materiais, fatores que levam à busca de sistemas estruturais mais industrializados. Nesse sentido, tem-se destacado o uso do sistema estrutural de lajes mistas de aço e concreto. Ele tem como principal característica o uso de uma fôrma metálica, normalmente de aço formado a frio, servindo de suporte aos trabalhos durante a concretagem e de armadura após a cura do concreto. A Figura 1.1 apresenta de maneira esquemática uma laje mista de aço e concreto.

Figura 1.1 – Laje mista de aço e concreto




Fonte: Adaptado de Crisinel e Marimon (2004)

O sistema estrutural deve atender a diversos aspectos, como a adequação à concepção arquitetônica, segurança contra a ruína da edificação, avaliação do desempenho em serviço e processo construtivo. Usualmente composto pelos pilares, vigas e lajes, o sistema deve possuir resistência mecânica, durabilidade, robustez e estabilidade, integridade à fissuração e a deslocamentos excessivos, garantindo resistência global da edificação e conforto aos usuários. Desse modo, as lajes mistas devem atender aos chamados estados limites último e de serviço.

O estado limite último é caracterizado pela ruína ou esgotamento da capacidade resistente do elemento estrutural. O estado limite de serviço busca retratar o dia-a-dia da estrutura, caracterizando seu comportamento durante a utilização da edificação. Como este último trata de situações mais susceptíveis de ocorrência, busca assegurar que os elementos estruturais apresentem, na média, um comportamento real dentro de limites sensoriais e funcionais aceitáveis.

Os estados limites de serviço apresentados nos códigos de projetos em sua maioria são verificações quanto aos deslocamentos máximos verticais (flechas) e de fissuração do concreto. Além destes, vale citar a verificação quanto às vibrações. Reforça-se que devido ao uso de concretos e aços com resistências maiores e de perfis metálicos cada vez mais delgados, elementos mais esbeltos têm sido obtidos, aumentando a importância das verificações em serviço nos projetos.

Apesar do uso comum do sistema de laje mista de aço e concreto, há relativamente pouca pesquisa sobre o comportamento em serviço das mesmas. Muitos estudos experimentais têm sido realizados, utilizando ensaios de curta duração para avaliar sua capacidade e mecanismos de ruína. Nesse sentido, vale citar a influência do cisalhamento longitudinal na obtenção do funcionamento conjunto do sistema misto, conseguido por meio das mossas e reentrâncias nas fôrmas de aço incorporadas. No entanto, poucos trabalhos têm estudado os efeitos ao longo do tempo no acréscimo dos deslocamentos verticais das lajes, como feito para as estruturas de concreto armado.

As deformações excessivas não devem prejudicar a funcionalidade das estruturas ou serem esteticamente desagradáveis. No entanto, tanto lajes de concreto quanto lajes mistas de aço-concreto, são elementos estruturais sensíveis a deslocamentos verticais e a vibração por conta de sua esbeltez.

O cálculo desses deslocamentos é complicado em razão do comportamento não-linear do concreto sob cargas de serviço, principalmente pelos efeitos da fissuração, fluência e retração. Além disso, a depender da interação entre aço e concreto na estrutura mista, podem ocorrer deslizamentos relativos entre os mesmos, o que reduz a rigidez do sistema e aumenta as deformações. Somadas a isso, a retração e a fluência produzem variação de deformação e tensão ao longo do tempo.

De forma significativa ou de maneira branda, os efeitos da fluência e da retração sempre estão presentes nas estruturas que possuem concreto, levando-o à deformação lenta, diferida ao longo do tempo, cujos efeitos precisam ser levados em conta nas verificações em serviço. Além disso, a distribuição de retração por secagem através da laje mista não é uniforme, em razão da

impermeabilidade ocasionada pela fôrma de aço na face inferior. A quantificação dos efeitos da retração se trata de um problema complexo. Gilbert (2013) comenta que os métodos comumente usados para incluir esses efeitos nos cálculos de deslocamentos verticais são relativamente imprecisos e não confiáveis e a flecha excessiva em lajes pode ser um problema comum.

Dessa forma, o presente trabalho busca realizar um estudo aprofundado da literatura e considerações normativas na avaliação dos estados limites de serviço das lajes mistas de aço e concreto, diferidos ao longo do tempo. Comenta-se que a literatura nacional não tem apresentado indicações diretas a esse respeito. Discutem-se os fenômenos inerentes às verificações das lajes mistas, com foco na interação entre o aço e o concreto, na retração e na fluência.

Ensaios de curta e longa duração em protótipos de lajes mistas de aço e concreto são propostos para que se possa medir a flecha imediata e acompanhar a sua evolução ao longo do tempo, além de verificar a influência das ações de longa duração sobre a capacidade das lajes estudadas.

Devido aos custos significativos para a realização de um número de ensaios que abrangesse todas as variedades de fôrmas de aço, geometrias e tipos de concretos, o estudo experimental foi complementado por uma análise teórico-analítica com base nas respostas experimentais, com a avaliação das abordagens de previsão dos deslocamentos verticais em serviço das lajes mistas de aço e concreto.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estudar o comportamento em serviço das lajes mistas de aço e concreto, ao longo do tempo.

São objetivos específicos do presente estudo:

- Avaliar os efeitos da retração e da fluência do concreto no comportamento do sistema misto;
- Estudar a influência do tempo sobre a interface aço-concreto no comportamento da laje mista em ruína e em serviço;
- Comparar as prescrições normativas nacional e internacional a respeito das lajes mistas, com ênfase aos estados limites de serviço de deslocamentos verticais, ao longo do tempo;
- Apresentar e desenvolver modelos analíticos para cálculo das flechas das lajes mistas de aço e concreto com a consideração dos efeitos diferidos ao longo do tempo.

## 1.3 Justificativas

As lajes por se tratarem de elementos mais delgados, exigem dos projetistas uma preocupação na limitação das flechas, na garantia de promover condições estéticas e de conforto agradáveis aos usuários. Devem também permitir a funcionalidade de elementos não estruturais como alvenarias e caixilhos, além de manter as vibrações dentro de limites aceitáveis. As principais pesquisas sobre lajes mistas se concentram em ensaios com carregamento de curta duração, analisando resistência, ductilidade e modos de falhas. Estudos do comportamento das lajes em serviço ao longo do tempo, avaliando os efeitos da retração e fluência no concreto têm sido pouco realizados.

O uso das lajes mistas de aço e concreto tem se difundido como um sistema de pisos nos edifícios e pontes, com uso de concreto armado ou concreto protendido. Ressalta-se que o projeto de lajes mistas pode ser governado pelo estado limite de serviço associado aos deslocamentos verticais. Além do concreto armado e protendido, têm-se realizado pesquisas quanto ao uso do concreto leve e do uso da laje mista de aço e concreto como sistema de piso nas edificações em concreto armado e de madeira.

A mais atual norma de estruturas mistas em vigor, a norma australiana AS/NZS 2327 (2017), já apresenta considerações a respeito das flechas diferidas no tempo, com consideração do cálculo dos deslocamentos devidos aos efeitos da retração não-uniforme e fluência. A atual norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) não traz qualquer orientação. Vale citar que as condições ambientais regionais e a existência de diferentes fornecedores nacionais de fôrmas, com suas características próprias, influenciam no comportamento estrutural.

Assim, confirma-se a necessidade de pesquisas e conhecimento quanto ao comportamento do sistema frente às solicitações em serviço. Desse modo, realiza-se estudo teórico-analítico e experimental do comportamento em serviço do sistema de lajes mistas. São considerados os materiais comumente utilizados no Brasil, tais como fôrma de aço, procedimentos normativos de cálculo e execução, além das condições ambientais locais.

## 1.4 Metodologia da pesquisa

A metodologia utilizada para atingir os objetivos desse trabalho consiste de quatro etapas:

- **Revisão bibliográfica:** contemplou as pesquisas realizadas sobre o comportamento geral das lajes mistas de aço e concreto. Ênfase é dada ao comportamento das lajes mistas em situação de serviço ao longo do tempo. Investigaram-se os fatores que interferem no comportamento, como a fissuração do concreto, a retração não-uniforme e fluência do concreto. Além disso, abordam as principais teorias já consolidadas no meio técnico nacional e internacional sobre lajes mistas. Apresenta-se um resumo das principais recomendações sobre os métodos de avaliação da capacidade resistente e limites de aceitabilidade dos deslocamentos máximos nas lajes mistas;
- **Modelos e formulações analíticas:** apresentação de modelos de previsão do comportamento do concreto ao longo do tempo: de fluência e de retração. Estudo e adaptação do modelo cinemático de viga de Euler-Bernoulli para a previsão do comportamento mecânico das lajes mistas de aço e concreto. Dentre esses, reuniram-se métodos de cálculo ditos simplificados e os métodos refinados para o cálculo das flechas imediatas e diferidas no tempo.
- **Investigação experimental**: realização de ensaios em modelos físicos de lajes formadas pela fôrma de aço incorporada e concreto. Os ensaios experimentais avaliaram o comportamento no estado limite de serviço e no estado limite último. O ensaio de longa duração mostrou a evolução das flechas em função do tempo, decorrente dos efeitos de retração e fluência do concreto. Dividido em dois conjuntos de lajes idênticas, realizou-se o ensaio de flexão das lajes aos 28 dias e aos 260 dias. Comparam-se os resultados do ensaio rápido com o ensaio de longa duração. O ensaio de flexão permitiu identificar o modo de ruptura por cisalhamento longitudinal.
- **Análise dos resultados experimentais e teóricos do comportamento das lajes mistas:** realização de previsões teóricas das flechas das lajes ensaiadas, baseada nas formulações analíticas e, ampliada a outros resultados da literatura. Comparou-se os resultados das diferentes abordagens. Analisou-se o tipo de ruptura identificada e a diferença de comportamento das lajes em idades diferentes.

Dessa forma, destacam-se as principais considerações e diretrizes sobre o comportamento em serviço das lajes com fôrma incorporada ao longo do tempo para a comunidade científica e profissional.

## 1.5 Organização da dissertação

A dissertação foi organizada em 9 capítulos. Neste primeiro capítulo são apresentados o contexto e a motivação do estudo sobre as lajes mistas de aço e concreto, em especial aos estados limites de serviço, além das justificativas, objetivos e metodologia da pesquisa.

O *Capítulo 2* traz uma revisão bibliográfica sobre o comportamento das lajes mistas, sobre os aspectos gerais e um resumo dos estudos já realizados no Brasil. Um estado da arte sobre o comportamento desse sistema estrutural ao longo do tempo é apresentado.

O *Capítulo 3* traz as principais recomendações normativas sobre a ruína das lajes mistas e em situação em serviço. Destacam-se os dispositivos e mecanismos da interação entre aço-concreto e os limites de fissuração inaceitável e de aceitabilidade dos deslocamentos máximos em pisos.

No *Capítulo 4* discute-se o comportamento não-linear do concreto ao longo do tempo e sobre os fenômenos da retração e da fluência. Definem-se e apresentam-se modelos de previsão das parcelas de deformação: elástica, fluência e retração. Apresentam-se os modelos de retração não-uniforme e de fissuração do concreto.

O *Capítulo 5* traz abordagem teórico-analítica para obtenção de expressões para deslocamentos, deformações e tensões das lajes mistas com base na formulação do modelo de viga de Euler-Bernoulli.

O *Capítulo 6* apresenta o conjunto de abordagens para a avaliação das flechas das lajes mistas encontradas na literatura. São feitas divisões entre essas abordagens e aprofunda-se na abordagem simplificada com consideração explícita das parcelas de fluência e retração não-uniforme e na metodologia refinada apresenta-se um fluxograma geral com dados necessários e etapas de cálculos.

O *Capítulo 7* apresenta a investigação experimental com o ensaio de longa duração e avaliação da capacidade resistente das lajes. São mostradas a metodologia adotada, a caracterização dos materiais, os resultados experimentais e a comparação entre os mesmos.

No *Capítulo 8* avaliam-se as diferentes abordagens na avaliação das flechas às lajes ensaiadas experimentalmente. Expandem-se as abordagens para outras lajes mistas da literatura. São feitas comparações e conclusões sobre os modelos de previsão das flechas.

Finalmente, no *Capítulo 9* são feitas as considerações finais do trabalho, levando em consideração a análise experimental e os modelos teórico-analíticos de avaliação dos deslocamentos verticais das lajes mistas e sugestões para pesquisas futuras.

# 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

*Neste capítulo discutem-se os aspectos gerais do uso das lajes mistas, estudos nacionais já realizados, conceitos sobre a avaliação dos deslocamentos verticais e, principalmente, o estado da arte do comportamento ao longo do tempo das lajes mistas de aço e concreto.*

## 2.1 Aspectos gerais das lajes mistas

O uso de lajes mistas de aço e concreto teve seu início relatado na década de 1950 (CBCA, 2014). Também chamada de laje com fôrma de aço incorporada, atualmente é empregada principalmente em edificações de múltiplos pavimentos com estruturas de aço (Figura 2.1) e também em pontes. Além das edificações metálicas, o uso das lajes mistas estendeu-se para as construções em estruturas de concreto e em estruturas de madeira. No Brasil, o sistema em laje mista, conhecido popularmente como lajes *steel deck*®, começou a ser mais difundido na década de 1970.

Figura 2.1 – Estrutura mista de aço e concreto

Fonte: Souza (2014)

De um modo geral, a utilização e normalização das estruturas mistas com perfis metálicos e concreto é considerada recente. Segundo Taranath (2011), desenvolveu-se no final do século XIX nos Estados Unidos, com a ideia de usar o concreto como revestimento para aumentar a resistência ao fogo das estruturas de aço, mas sem considerar o acréscimo de resistência

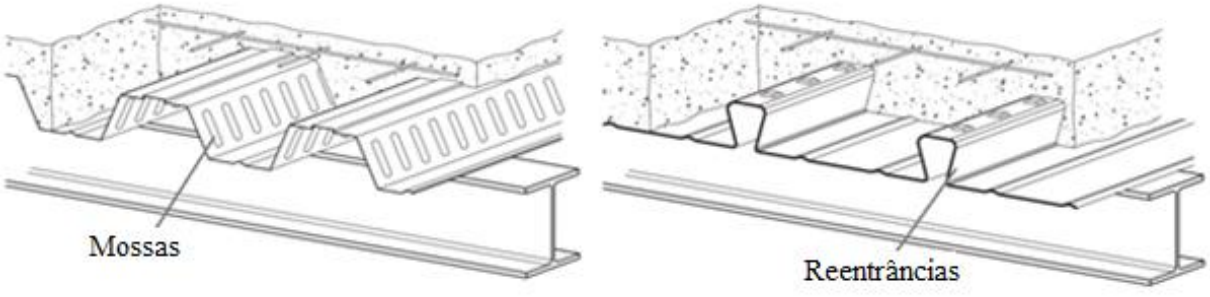
disponibilizada. No entanto, com o advento dos conectores de cisalhamento, na metade do século XX, foi que as estruturas mistas, inicialmente pilares e vigas, se desenvolveram, com garantia da aderência entre o aço e concreto, seguidos pelas lajes mistas, estas com outros processos de garantia da interação, discutidos à frente.

Formados por perfis metálicos e por concreto, valem-se do aproveitamento das melhores características de ambos os materiais. À leveza dos perfis do aço e sua resistência à tração acrescenta-se a resistência à compressão do concreto, relativamente barato, de baixa manutenção, alta durabilidade e resistência ao fogo. Desse modo, a construção favorece economia, rapidez, flexibilidade, alta qualidade, sustentabilidade e estética agradável.

De acordo com a norma Brasileira da Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT NBR 8800 (2008), o sistema de lajes mistas de aço e concreto consiste na utilização de uma fôrma permanente de aço. Antes da cura do concreto, fase inicial, a mesma atua como suporte, absorvendo todas as ações permanentes e sobrecargas de construção e após a cura, na fase final, definida quando o concreto atinge 75% da sua resistência à compressão, os dois materiais solidarizam-se. A partir daí o concreto atua estruturalmente em conjunto com a fôrma de aço, como parte ou como toda a armadura resistente aos esforços de tração.

Forma-se então o sistema misto, quando a fôrma de aço é capaz de transmitir o cisalhamento longitudinal na interface entre o aço e o concreto. A aderência natural existente entre o aço e o concreto não é suficiente para o comportamento misto e garante-se o mesmo com a adoção de ligação mecânica e por meio de atrito. A Figura 2.2 apresenta o esquema das lajes mistas em que a ligação mecânica é obtida por meio de mossas nas fôrmas de aço trapezoidais (a) e a ligação por atrito se dá pelo confinamento do concreto em fôrmas de aço reentrantes (b).

Figura 2.2 – Lajes mistas de aço e concreto



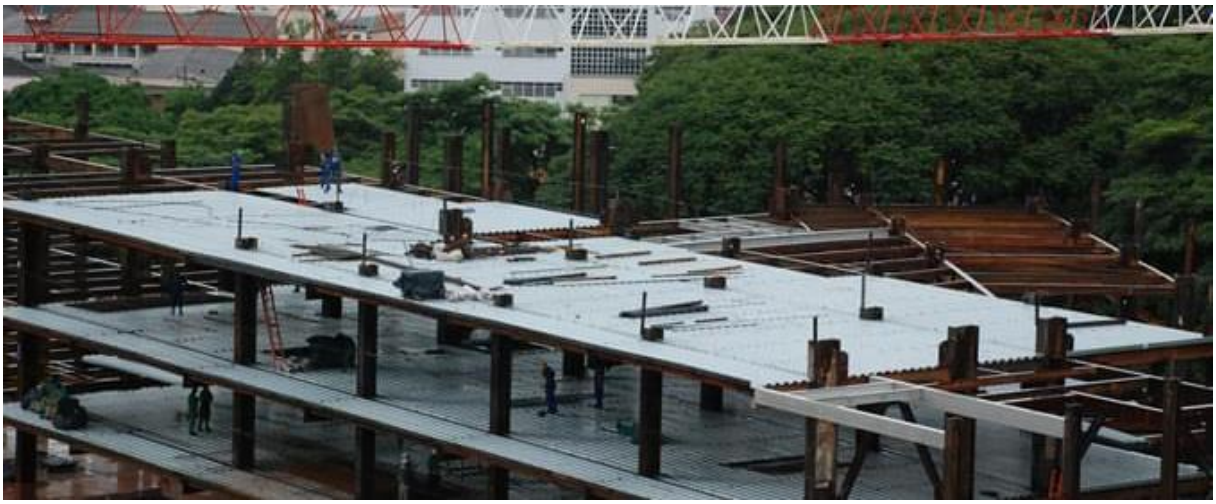

(a) Fôrma trapezoidal b) Fôrma Reentrante

Fonte: ABNT NBR 8800 (2008)

O uso das fôrmas de aço, usualmente perfis formados a frio, possui destacadas funções: suportam os carregamentos durante a concretagem e funcionam como plataforma de trabalho,

desempenham o papel de diafragma horizontal (contraventamento), distribuem as deformações por retração, evitam a fissuração excessiva do concreto. Dessa forma, tem vantagens como a leveza ao ser manuseado e instalado, possibilidade de dispensa do escoramento da laje, facilidade à passagem de dutos e instalações, maior rapidez construtiva ao permitir um avanço considerável na obra e redução de gastos com desperdícios. Na Figura 2.3 observa-se três pavimentos sem nenhuma escora e um destaque de organização evidente na obra.

Figura 2.3 – Sistema de piso em laje mista de aço e concreto



Fonte: CBCA (2015)

Desvantagens do sistema são a necessidade de utilização de forros suspensos, por razões estéticas; maior quantidade de vigas secundárias, caso não se utilize sistema escorado ou fôrma de grande altura, devido à limitação do vão antes da cura do concreto, e a preocupação com a resistência a incêndios. Usualmente, as lajes são mais altas que as lajes maciças de concreto, porém mais leves. Sem nenhuma proteção contra incêndios, a fôrma pode entrar em colapso trazendo riscos para a estrutura, para isso, deve respeitar as prescrições da ABNT NBR 14323 (2013) – Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios em Situação de Incêndio. No entanto, é comum um tempo de resistência ao fogo de 30 minutos das lajes mistas sem proteção. Por isso, quando necessário faz-se um revestimento na parte inferior da fôrma, com aplicação de argamassa cimentícia projetada, uso de lã de vidro ou de tintas intumescentes, que são produtos que cumprem bem esta função. Outra possibilidade é o uso de armaduras apropriadas, que aumentam o tempo de resistência ao fogo pelo uso de armadura positiva adicional colocada, por exemplo, no interior das nervuras e com uma espessura de concreto adequado.

O uso das lajes mistas de aço e concreto na construção civil deu grande passo na última década, com crescente demanda do setor, que agora sentiu um retrocesso devido à instabilidade

econômica do país. No entanto, trata-se de um sistema que agrega sustentabilidade, qualidade, agilidade e segurança para trabalhos sobrepostos. Na Figura 2.4 (a) mostra-se uma visão de construção limpa e a fôrma trabalhando como plataforma para posterior concretagem; enquanto a figura 2.4 (b) mostra a instalação de conectores de cisalhamento necessários para garantia de trabalho misto entre a viga metálica e o concreto da laje mista.

Figura 2.4 – Montagem de uma laje mista de aço e concreto

(a) Fôrma isolada como plataforma de trabalho (b) Instalação de conectores de cisalhamento

Fonte: Téchne (2012)

A utilização das lajes mistas de aço e concreto pode ser feita tanto em edificações em estrutura metálica, como em estrutura em concreto ou madeira. Mostra-se como solução competitiva principalmente em situações com vãos de 2 a 4 metros para os principais perfis disponíveis no mercado nacional que se situam entre 45 a 75 mm de altura da nervura, utilizando vigas secundárias. Nessa condição, é comum a dispensa dos escoramentos e, consequente agilidade no cronograma da obra. Essa solução apresenta grande aplicação na construção de shoppings, centros de convenções, edifícios comerciais e residenciais, hotéis, hospitais, escolas, conjuntos habitacionais, pontes, garagens e mezaninos, além de edifícios industriais em geral.

Normalmente os fabricantes das fôrmas de aço fornecem tabelas com espessuras da fôrma e altura de lajes com suas capacidades de carga e vãos admissíveis para projetos. Em razão da particularidade de cada tipo de fôrma, as informações das tabelas são formuladas usando dados experimentais. Dada a necessidade de o projetista fazer verificações e justificar os cálculos ou analisar lajes com dimensões não padrão, a literatura nacional carece de informações para as verificações em serviço, considerando os efeitos diferidos no tempo.

A grande maioria dos ensaios experimentais e procedimentos de cálculo seguem procedimentos normativos estabelecidos pelas principais normas internacionais sobre lajes mistas de aço e concreto. A maioria das pesquisas investiga o comportamento em ruína da fôrma de aço isolada e da laje mista, dado que o sistema de construção das lajes mistas deve ser verificado tanto na fase de construção, quanto na fase final ou mista.

## 2.2 Estudos nacionais sobre lajes mistas

Trabalhos nacionais voltados para as lajes mistas de aço e concreto tem sido feitos nos últimos anos, com a avaliação de comportamento e da capacidade resistente com ensaios de curta-duração, caracterizando perfis utilizados na indústria brasileira, como os trabalhos de Melo (1999), Vieira (2003), Brendolan (2007), Sieg (2015) e Kataoka, Friedrich e El Debs (2017). Um estudo da análise do sistema de laje com fôrma de aço incorporada aplicado a estruturas prediais de concreto armado foi realizado por Silva (1999). Gomes (2001) realizou estudo do sistema de lajes mistas empregando concreto estrutural leve. Campos (2001) estudou sobre o efeito da continuidade no comportamento e na resistência das lajes mistas.

Souza Neto (2001) realizou análise do comportamento e da resistência das lajes analisando ancoragem de extremidade com consideração da fôrma de aço isolada e atrito nos apoios. Estudo semelhante sobre a consideração da influência do atrito dos apoios e incluindo a avaliação do momento de inércia efetivo foi feito com Costa (2009). Sommer (2002) fez um trabalho sobre análise de vibrações em pisos mistos de aço e concreto. Takey (2001) estudou sobre sistemas de laje mista para edificações com uso de perfis de chapa metálica. Vianna (2005) discorreu sobre o sistema de laje mista para edificações residenciais com uso de perfis embossados de chapa dobrada.

Sanches (2009) fez uma análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com fôrma de aço incorporada utilizando o método dos elementos de contorno. Estudos do comportamento de perfis para lajes mistas antes da fase de cura do concreto foram realizados por Baião Filho (2003) e Carvalho (2005). Martins (2001) avaliou as respostas estruturais, após a cura do concreto, de algumas fôrmas metálicas incorporadas às lajes, disponíveis nos mercados nacional e internacional. Beltrão (2003) discorreu sobre o comportamento estrutural de lajes mistas com corrugações na alma dos perfis de chapa dobrada. Um estudo da análise do comportamento e da resistência de um sistema de lajes mistas pelo método de interação parcial foi feito por Araújo (2008).

Spíndola (2002) tratou do dimensionamento de pisos mistos em situação de incêndio com proteção apenas das vigas principais. Andrade (2012) discorreu sobre lajes mistas de aço e concreto em situação de incêndio. Mais recentemente, estudo sobre as lajes mistas em situação de incêndio foi apresentado por Cordeiro (2014). Calixto (2006) publicou sobre o comportamento das lajes mistas com armadura de reforço e Grossi (2016) fez estudo com temática semelhante, no entanto, ampliou a abordagem com o estudo do comportamento estrutural e o dimensionamento das lajes mistas de aço e concreto com armadura adicional. Britto Junior (2017) analisou o comportamento de um novo perfil de fôrma de aço antes da cura do concreto e determinação da resistência longitudinal com ensaios experimentais. Silva (2018) fez estudo com análise numérica não-linear e uma discretização bidimensional do sistema das lajes mistas, simulando ensaios experimentais de curta-duração.

Da listagem dos trabalhos nacionais sobre lajes mistas de aço e concreto, observa-se que não se tem investigado sobre o comportamento das lajes mistas em serviço na avaliação dos deslocamentos excessivos ao longo do tempo. A norma ABNT NBR 8800 (2008) também não cita nada a respeito sobre essa consideração nas lajes mistas. Sabe-se que o estudo das lajes de concreto, leva-se em conta na avaliação das flechas diferidas ao longo do tempo, os efeitos da fluência e retração e os devido aos carregamentos aplicados.

## 2.3 Avaliação dos deslocamentos em serviço

Baseado nos ensaios experimentais, as flechas medidas no ensaio de curta-duração fornecem informações importantes como a não-linearidade entre carregamentos e deformações. No entanto, são flechas ditas imediatas, decorrentes da acomodação dos cristais que formam os materiais e que não consideram os efeitos decorrentes ao longo do tempo. As flechas diferidas no tempo são aquelas que surgem ao longo do tempo, sob a ação de cargas de longa duração e retração e somam-se às flechas imediatas.

O cálculo exato das flechas é muito complexo, pela dependência de inúmeras variáveis, como temperatura e umidade, condições de cura e exposição da peça, idade do concreto, histórico de carregamento, taxa de armadura de compressão, percentual de carga permanente, entre outros. A fissuração do concreto contribui nas flechas, uma vez que modifica as condições de deformação das seções e a rigidez ao longo da peça.

Sobre a retração, Leonhardt e Monnig (1979) citam que a mesma independe do estado de tensões existente, variando com as tensões capilares, a idade do concreto, condições ambientais, especialmente temperatura e umidade. Mehta e Monteiro (2014) descrevem sucintamente os

fenômenos e causas da retração. O fenômeno está ligado à perda de água que ocorre quando a peça fica em um ambiente com teor de umidade menor que o seu internamente. As flechas na laje mista, devidas à retração ocorre porque a fibra mais comprimida sofre um encurtamento, enquanto, a zona tracionada, onde está presente a fôrma de aço tem uma deformação menor ou restringida pela mesma.

A fluência é definida como o aumento de deformações sob uma tensão constante. No concreto, a fluência é uma deformação lenta que aparece quando a peça é submetida a um carregamento permanente ou de longo prazo. Mehta e Monteiro (2014) discorrem sobre as principais causas do fenômeno da fluência e sua dependência com a microestrutura do concreto. Montoya et al. (1979) define a fluência como o conjunto de deformações elásticas e plásticas que ocorrem ao longo do tempo. Ele admite que a fluência tende a ser uma assíntota, com valor proporcional à deformação elástica por um coeficiente denominado coeficiente de fluência.

Desse modo, a determinação das flechas diferidas, das lajes mistas sob cargas de longa duração vem somar os efeitos da retração e fluência. Dado o grande número de variáveis, é comum recorrer-se a simplificações e procedimentos que forneçam boa estimativa da deformação final. Montoya et al. (1979) cita que, pela dificuldade de recorrer a procedimentos complicados ao cálculo de flechas diferidas ao longo do tempo em peças de concreto armado, é preferível utilizar fórmulas aproximadas como as seguintes:

- Cálculo de flecha diferida como imediata, com módulo de deformação menor;
- Obtenção da flecha total, como uma soma da imediata e deferida supondo-a um fator tantas vezes superior a flecha diferida, sendo esse fator dependente do tempo.

Alguns autores indicam o uso, de maneira simplificada, do procedimento simplificado do Eurocode 4 (2004), como apresentado para as vigas mistas, dividindo por 2 o módulo de elasticidade do concreto. A norma ANSI-SDI C (2011) indica o uso de um fator de multiplicação em relação a duração do carregamento.

Para as lajes mistas de aço e concreto, observa-se que se tem usado o procedimento de utilização de rigidez menor, como apresentado pelo Eurocode 4 (2004) e a ANSI/ASCE 3-91 (1992), este último discutido nos trabalhos de Lamport e Porter (1990). Quanto às flechas, faz-se considerações diferenciando os vãos internos e externos, levando em conta a continuidade das lajes mistas (EUROCODE 4, 2004). Para vãos internos as flechas podem ser estimadas usando as seguintes aproximações diretas:

- O valor médio do momento de inércia da seção não fissurada e fissurada;
- Para o concreto, um valor médio da razão entre os módulos de deformação considerando os efeitos de curta e longa duração pode ser usado, cita-se que tanto a norma Eurocode como a

> BS 5950 (1994) trazem essa abordagem, mas a razão modular para os efeitos ao longo do tempo e a curto prazo é calculado de forma ligeiramente diferente no EN 1994-1-1 e BS 5950-4 (que se refere a BS 5950-3).

As normas ANSI-ASCE3-91 (1992) e CSSBI S3-03 (2008) indicam as hipóteses de comportamento do conjunto misto em serviço, citando a hipótese de Euller-Bernoulli. As normas Eurocode 4 (2004) e BS 5950-4 (1994) citam que as flechas devido aos carregamentos aplicados nos elementos mistos devem ser calculadas usando análise elástica, negligenciando os efeitos da retração. Em geral algumas normas citam o uso de procedimento indireto em que se pode negligenciar o cálculo da flechas para vãos externos, ou simplesmente apoiados das lajes mistas de aço e concreto a partir do cumprimento de certos limites, como a razão entre vão e altura útil do elemento fletido.

A norma mais atual sobre as lajes mistas é a australiana AS/NZS 2327 (2017) - Estruturas mistas - construção mista de aço e concreto em edifícios. Pesquisas realizadas na Austrália com lajes mistas indicaram conceitos pertinentes na consideração do cálculo dos deslocamentos verticais dessas lajes. Hicks e Uy (2015) citam que diferentemente da norma Eurocode, a partir do monitoramento do comportamento a longo prazo das lajes mistas, verificou-se que, pela presença da fôrma de aço que atua efetivamente como "vedação" para o concreto, ocorre uma retração não-uniforme do concreto que resulta em flechas maiores do que o previsto. Sobre isso, vale citar os trabalhos de Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), Ranzi et al. (2013a) e Ranzi et al. (2013b) e Gholamhoseini (2014).

Desses estudos recentes sobre a consideração dos efeitos diferidos ao longo do tempo, a norma AS/NZS 2327 (2017) trouxe considerações mais claras quanto ao cálculo dos deslocamentos máximos das lajes mistas, e como resultado, traz dois métodos que podem ser usados para o cálculo das flechas nas lajes: flecha por cálculo refinado e flecha por cálculo aproximado, considerando o comportamento das lajes mistas de aço e concreto ao longo do tempo.

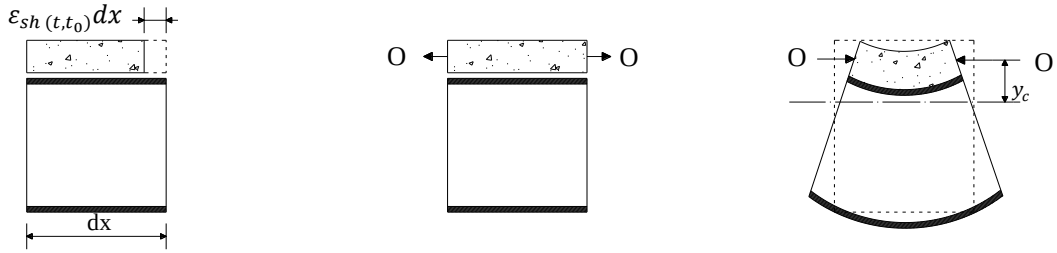
## 2.4 Comportamento das lajes mistas ao longo do tempo

A grande maioria dos trabalhos realizados sobre o comportamento das lajes mistas de aço e concreto se concentraram no estudo do comportamento de ruína, enquanto relativamente poucos trabalhos investigaram a resposta estrutural em serviço e seu comportamento ao longo do tempo, conforme retratados pelos trabalhos de Ranzi, Leoni e Zandonini (2013), Gholamhoseini (2014) e Luzzi (2016).

De acordo com Montgomery, Kulak e Shwartsburd (1993) os trabalhos com vigas mistas foram utilizados como ponto de partida para as lajes mistas. Formadas por perfis metálicos e lajes de concreto armado, as vigas mistas tiveram estudos dedicados à análise do comportamento em serviço analisando os efeitos da fluência e retração.

Montgomery, Kulak e Shwartsburd (1993) avaliaram as flechas teóricas de uma viga bi-apoiada com carregamento permanente. Computaram a flecha devido à fluência usando o módulo de deformação efetivo ajustado à idade do concreto. A deformação por retração foi considerada uniforme ao longo da altura da laje de concreto e as flechas devido à retração foram avaliadas. A Figura 2.5 mostra a teoria do comportamento da retração para a viga mista.

Figura 2.5 – Flechas induzidas pela retração nas vigas mistas




(a) Retração livre na laje de concreto (b) Imposição de compatibilidade (c) Condição de Equilíbrio

Fonte: Montgomery, Kulak e Shwartsburd (1993)

Modelos analíticos desenvolvidos foram baseados nas considerações de interação total entre o aço e concreto. Ghali e Favre (1986) estudaram uma viga mista protendida e os efeitos ao longo do tempo. Citam que o desenvolvimento ao longo do tempo da fluência e retração aumenta a curvatura da seção da viga e, como consequência, a flecha aumenta com o tempo.

Gilbert (1989) apresentou em seu trabalho dois métodos alternativos para análise dos efeitos em seções mistas ao longo do tempo: o método de módulo efetivo ajustado a idade (*Age-Adjusted Effective Modulus Method*) (AAEM) de Bazant (1972) e o método da taxa de fluência (*Rate of Creep Method*) (RCM). O RCM baseia-se no pressuposto de que a taxa de mudança de fluência com o tempo é independente da idade de carregamento (Luzzi, 2016). Gilbert (1989) assumiu interação total entre os materiais e indicou que se trata de uma condição razoável, dado que em carregamento em serviço os deslizamentos relativos em geral são desprezíveis. Os procedimentos apresentados permitem cálculos manuais e possibilitam melhor imagem da interação entre concreto e aço ao longo do tempo e uma melhor compreensão do comportamento em serviço. Prasada Rao (1992) trouxe uma discussão e contribuição ao trabalho de Gilbert (1989) demonstrando como as equações de equilíbrio e compatibilidade poderiam ser derivadas.

Leon (1990) abordou os problemas em serviço dos pisos mistos formados por vigas mistas, principalmente devido às flechas instantâneas e as diferidas no tempo para os pisos projetados de acordo com as novas especificações americanas dos estados limites últimos. O autor descreve os resultados dos ensaios na determinação dos efeitos de contraflechas e escoramentos, fluência e retração, e o grau de restrição nas extremidades nas flechas de vigas mistas delgadas. Relata que um dos problemas mais comuns na construção são as flechas excessivas e a fissuração dos pisos dentro de 6 a 24 meses após o término da construção. Relata que a explicação mais provável para esses problemas é a falta de cálculo dos efeitos de fluência e retração na laje de concreto. Leon (1990) discute os estados limites pertinentes e oferece recomendações e orientações sobre como calcular flechas para as vigas mistas.

Lamport e Porter (1990) apresentam um método para o cálculo de flechas instantâneas de lajes mistas baseado no ensaio experimental de avaliação do cisalhamento longitudinal. Tomou como base as recomendações para cálculo da inércia equivalente para seções de concreto armado, considerando redução da inércia devido à fissuração do concreto. O autor não faz menção às flechas diferidas no tempo, no entanto, já traz nova abordagem em relação aos deslocamentos verticais das lajes mistas de aço e concreto.

Wright, Vitek e Rakib (1992) publicaram um trabalho analisando o comportamento ao longo do tempo da fluência e da retração em vigas mistas com interação parcial. Contou com um trabalho experimental, no qual as vigas mistas eram formadas por perfil metálico e laje mista, conectados por conectores de cisalhamentos. Avaliaram vigas com concreto leve e normal, carregadas com uma carga de 50% da carga variável de projeto e monitoradas por três anos, medidos a temperatura e umidades e analisando suas flechas, deformações e os deslizamentos relativos ao longo desse tempo e um conjunto de avaliações analíticas. Destaca-se que os autores do artigo consideraram a fluência e a retração ocorrendo de maneira uniforme em toda a seção do concreto e apresentam expressões analíticas da previsão das flechas pela retração e devida a interação parcial e usam o AAEM para consideração da fluência.

Bradford e Gilbert (1994)[1] apud Uy (1997) realizaram um estudo experimental e teórico de vigas mistas com laje mista e fôrma perpendicular ao vão e teve como objetivo a avaliação dos efeitos da fluência e retração sobre a viga de aço e a laje mista. A abordagem utilizada por Bradford e Gilbert (1994) para as vigas foi adotada por Uy (1997) para descrever o comportamento das lajes mistas, considerando retração uniforme ao longo da espessura da laje e

[1] BRADFORD, M. A; GILBERT R. I. (1994) Service load behaviour of profiled composite teebeams. **Proceedings of the Australian Structural Engineering Conference**. p. 631–634, 1994.

interação total. Uy (1997) descreve os métodos utilizados para a análise da seção da laje mista, adotando comportamento linear e utilizando o AAEM acoplado com um método da relaxação, para a consideração dos efeitos da fluência e retração. Na consideração da seção fissurada, considera a rigidez efetiva dada pelo modelo de Branson (1968).

Uy (1997) esclarece que o comportamento dependente do tempo das lajes mistas em serviço é governado principalmente pelas deformações induzidas pelas fluência e retração e, que essas deformações são dependentes dos seguintes fatores: propriedades do concreto, aço e perfil da fôrma incorporada, geometria da fôrma de aço, deslizamento da interface aço-concreto, histórico e distribuição dos carregamentos e as condições ambientais.

Uy (1997) ainda apresenta um estudo paramétrico mostrando os efeitos de algumas variáveis nas flechas, tensões e deformações, onde avalia a relação entre o comprimento e a altura da laje, a mudança da altura da laje, as propriedades do material e as cargas de serviço aplicadas ao longo do tempo nas lajes mistas. Os resultados das flechas diferidas são comparados com as recomendações do código britânico BS 5950 (1982), e mostram-se de acordo. No entanto, ele cita que o método mostra que as tensões de longo prazo induzidas pelo concreto no aço aumentam com o tempo e indica que se deve observar a variação na deformação e tensão na fibra superior da laje de concreto e a fibra inferior da fôrma de aço devidos à fluência e à retração.

Geralmente, os engenheiros adotavam a distribuição uniforme para a retração, baseando-se em diretrizes de concreto armado (RANZI, LEONI E ZANDONINI, 2013). Assumiam, dessa forma, ser conservadores com base na consideração de que uma menor área exposta da placa composta envolvia menos secagem e consequente menor magnitude da retração, quando comparada à laje de concreto de referência, exposta em ambas as faces. Mas na verdade, a condição de vedação proporcionada pela fôrma de aço induz a um gradiente de retração ao longo da espessura das lajes mistas, conforme apresentados nos estudos recentes de Ranzi e Vrcelj (2009); Bradford (2010); Bradford et al. (2011); Gilbert et al. (2012), Ranzi, Leoni e Zandonini (2013); Gilbert (2013), Ranzi et al (2013), Al-Deen e Ranzi (2015); Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), Wang et al. (2016) e Gholamhoseini et al. (2014a, 2014b, 2015, 2016 e 2018).

Ensaios experimentais foram realizados em lajes para quantificar as deformações provenientes da retração não-uniforme. Geralmente, um conjunto de espécimes é preparado e subdividido em exemplares sujeitos a secagem livre nas faces inferiores, exemplares selados nas faces inferiores por camadas de plástico e exemplares formadas pelas fôrmas de aço que incorporam à laje mista, como pode ser visto na Figura 2.6. Os exemplares são selados nas laterais para eliminar a secagem nessa direção e simular a continuidade das lajes, como em um

piso real. Deformações ao longo do tempo são monitoradas por extensômetros colados nas faces superiores e inferiores e imersos no concreto.

Figura 2.6 – Visão do ensaio de monitoramento da retração

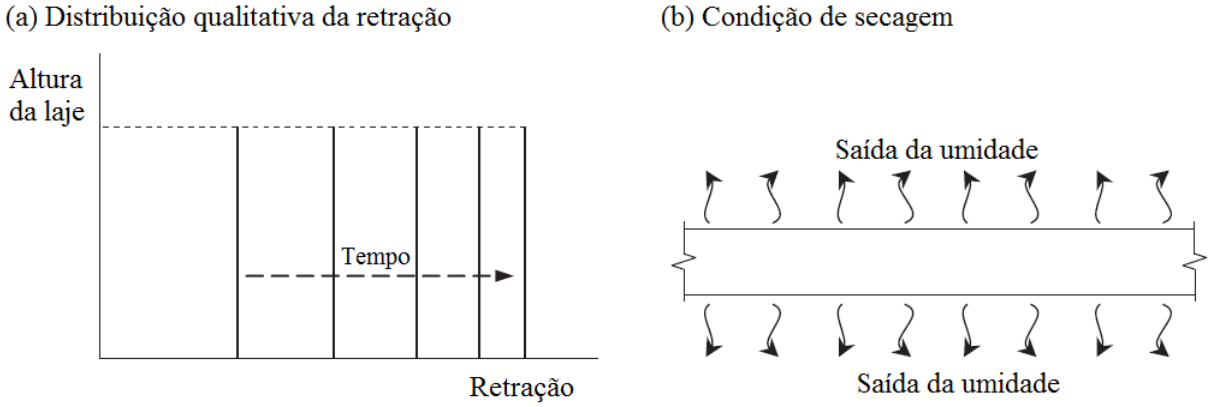
Fonte: Gholamhoseini (2014)

Fonte: Al-Deen e Ranzi (2015)

Os exemplares selados e as lajes mistas mostram diferentes leituras de deformação ao longo da espessura da laje com um maior encurtamento na face exposta. De acordo com Al-Deen e Ranzi (2015) a deformação total na face superior da laje mista pode ser 20-30% maior do que nas lajes com secagem livre na face inferior. Gilbert et al (2012) citam que a face inferior exibe deformação não nula devido à retração por secagem. Isso foi demonstrado pela presença de deformação significativa após um mês da secagem, o que não pode ser causado por retração autógena, já que esta tende a ocorrer nas primeiras duas ou três semanas após iniciado a cura do concreto. Luzzi (2016) comenta que a espessura da laje não influencia esse comportamento, embora as deformações devido à secagem diminuam com um valor menor da relação entre a superfície do concreto exposta e o volume do concreto. Dentro desse contexto, presume-se que é devido à fôrma possuir variação de tamanho das suas nervuras.

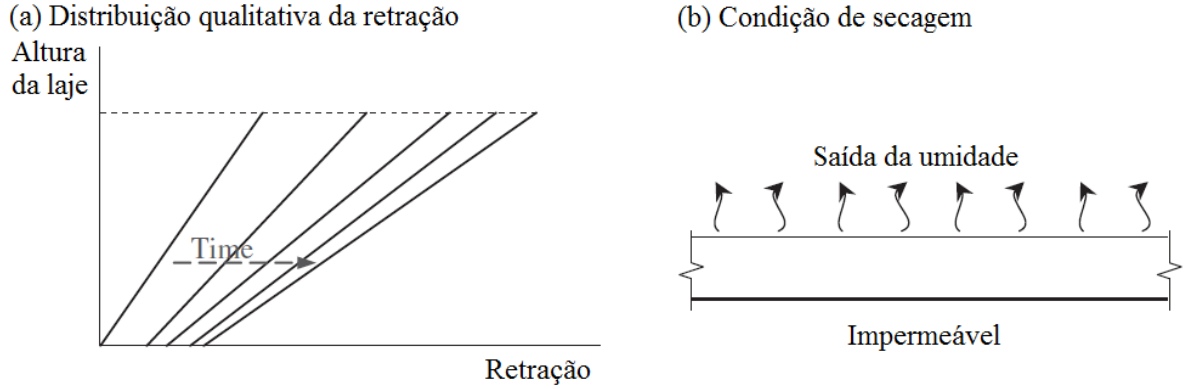
Al-Deen e Ranzi (2015) apresentaram uma abordagem simplificada da retração não-uniforme das lajes mistas. Baseado em um perfil de retração linear, permitem usar a deformação de retração uniforme das lajes de concreto armado como referência. A Figura 2.7 apresenta o caso de retração constante geralmente adotado para lajes de concreto convencionais expostas em ambas as faces. O perfil de retração para uma laje exposta em apenas um lado é retratado na Figura 2.8, que mostra o gradiente significativo que se desenvolve através da seção transversal ao longo do tempo. No artigo, os autores citam que para uma representação precisa da resposta das lajes mistas a longo prazo é essencial especificar a retração não-uniforme.

Figura 2.7 – Condições de secagem e distribuição qualitativa de laje exposta em ambas faces




Fonte: Ranzi, Leoni e Zandonini (2013)

Figura 2.8 – Condições de secagem e distribuição qualitativa de laje exposta em apenas uma face




Fonte: Ranzi, Leoni e Zandonini (2013)

Ranzi, Leoni e Zandonini (2013) citam que polinômios de ordem superior, ou outras funções, poderiam ser considerados para uma análise refinada dessa variação, ou mesmo uma distribuição de retração linear pode ser suficiente para propósitos de projeto, como convenientemente se assume para projeto de concreto armado. O valor da deformação de retração uniforme, disponível em códigos, é multiplicado por coeficientes, determinados a partir de dados experimentais, para definir a linha superior e inferior da laje. Normalmente, o coeficiente para o topo varia entre 1,10 e 1,20, enquanto o valor para a face inferior é 0,20 e 0,30. Como apresentado na norma australiana AS 2327 (2017), no procedimento simplificado, adota-se 1,20 e 0,20, respectivamente, para os coeficientes de retração superior e inferior.

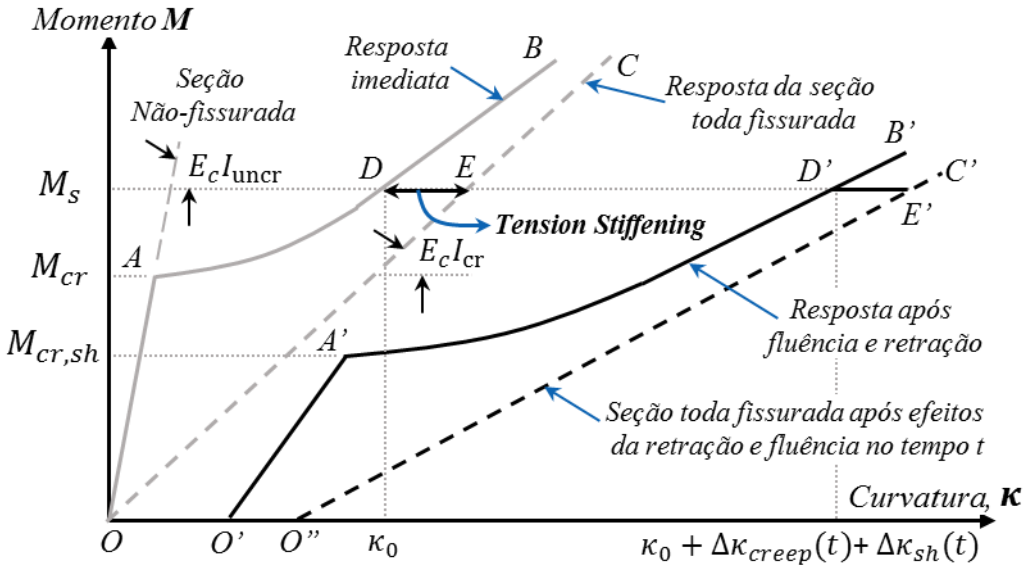
Formulações analíticas e um modelo genérico são propostas por Bradford (2010) e Bradford et al. (2011), em que se considera os efeitos da retração e temperatura, ditas deformações indiretas ou não-mecânicas, por não depender do estado de carregamento da peça. Além disso, inclui os efeitos da fluência e da interação parcial entre aço e concreto da laje. Sua formulação foi baseada no comportamento mecânico de viga de Euler-Bernoulli e equações são

derivadas com base no princípio do trabalho virtual. Ranzi e Vrcelj (2009) também apresentam formulação analítica.

Gilbert et al. (2012) e Al-Deen e Ranzi (2015) trazem abordagens numéricas que levam em conta a presença da retração não-uniforme na análise da seção transversal. O primeiro apresentou uma abordagem que estendeu a formulação de longo prazo e se baseia no método do módulo efetivo ajustado à idade (AAEM). Al-Deen e Ranzi (2015) apresentaram uma abordagem simplificada na estimativa do perfil de retração não-uniforme e sua influência nas flechas com bons resultados numéricos comparados com os experimentais disponíveis na literatura.

Gilbert (2013) demostra os efeitos da fluência, retração e fissuração do concreto nas flechas das lajes mistas em serviço, discute e descreve procedimentos para a previsão das flechas diferidas ao longo do tempo. O procedimento apresentado inclui a natureza variável no tempo do chamado *tension stiffening* e dos efeitos de fissuração induzida pela retração dependente do tempo. Apresenta de maneira gráfica o efeito das variáveis sobre as curvaturas da laje mista, conforme a Figura 2.9, que mostram qualitativamente o efeito não-linear das respostas e possível dependência entre efeitos. Os métodos são validados por meio de uma série de dados de ensaios experimentais e demostra-se fornecer estimativas confiáveis.

Figura 2.9 – Relação qualitativa momento-curvatura devido aos efeitos diferidos no tempo




Fonte: Gilbert (2013)

Quando se inclui a retração antes e depois do primeiro carregamento, a curvatura aumenta ainda mais com o tempo e a resposta temporal da seção transversal é mostrada na curva O'A'B'. Quando M = 0, a curvatura aumenta devido à retração na seção transversal não fissurada e o ponto O move-se horizontalmente para O'. Devido ao impedimento da retração provido pela fôrma de aço, uma tração é induzida, e isso tem o efeito de reduzir o momento de fissuração de

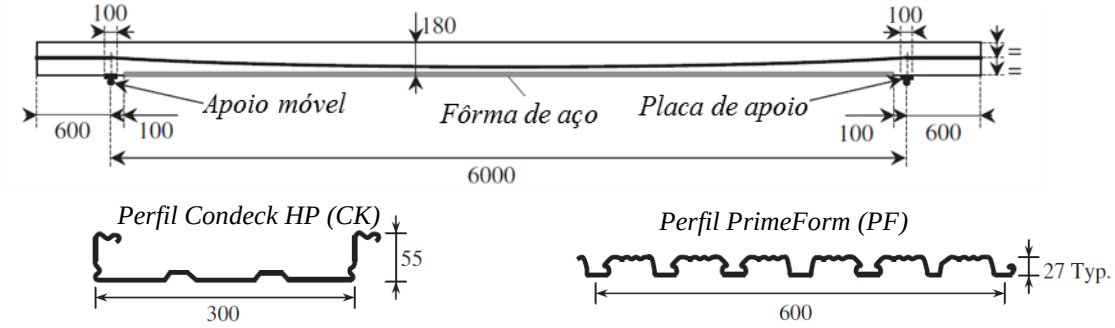
$M_{cr}$ para $M_{cr,sh}$. Para qualquer seção transversal submetida a um momento na faixa $M_{cr.sh} < M_s \leq M_{cr}$, a fissuração ocorrerá primeiro com a consideração do tempo e o aumento da curvatura ocorre pela perda de rigidez causada por fissuração dependente desse tempo (GILBERT, 2013). Cita ainda que a inclinação da resposta da seção fissurada é suavizada pela fluência.

Gholamhoseini (2014) cita que poucas pesquisas foram divulgadas sobre o comportamento em serviço ao longo do tempo de lajes mistas de aço e concreto e pouca orientação está disponível para o cálculo de flechas diferidas no tempo. A particularidade do efeito de retração não-uniforme que ocorre nas lajes mistas foi observada experimentalmente nos ensaios de Al-Deen, Ranzi e Vrcelj (2011), com estudo da retração ao longo da altura da laje mista que constituía a viga mista, conforme cita Ranzi (2017). Trabalhos posteriores passaram a investigar a resposta ao longo do tempo das lajes mistas, com os trabalhos de Shayan et al. (2010) e Mirza e Uy (2012), Ranzi et al. (2013), Gholamhoseini (2014, 2018), Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), Wang et al. (2016) e Altoubat, Rieder e Junaid (2017).

Shayan et al. (2010) realizou dois conjuntos de experimentos, um primeiro estudou o perfil de retração das lajes e as diferenças entre as lajes de concreto sem armadura de retração, laje de concreto com faces seladas e laje mista. O segundo conjunto era formado por quatro lajes mistas, das quais duas submetidas ao carregamento apenas do peso próprio e retração e outras duas sujeitas a carregamentos impostos. Mirza e Uy (2012) avaliaram oito lajes: quatro lajes de concreto e quatro lajes mistas de aço e concreto, sendo, duas com a presença de conectores de cisalhamento na viga de apoio. Foram submetidas ao carregamento de peso próprio e cargas impostas por um período de 710 dias, onde avaliaram as flechas, deformações e a fissuração. Ambos os trabalhos verificaram um aumento de curvaturas devido à presença da fôrma de aço.

Ranzi et al. (2013) avaliou o comportamento de lajes mistas de aço e concreto protendidas, com uma análise experimental da deformação da laje por 239 dias. As Figura 2.10 e Figura 2.11 mostram o esquema utilizado, com vão de estudo de 6 metros e dois tipos de perfis: perfis tipo clip-pan ou reentrante em L (CK) e trapezoidal (PF). Estudou o perfil de retração e desenvolveu um modelo teórico contabilizando a retração não-uniforme observada. Comparou os resultados das lajes mistas com lajes de concreto convencionais (SS). As medidas das flechas ao longo do tempo são apresentadas na Figura 2.12. Avaliou a influência da força de protensão na resposta a longo prazo e observou que a mudança no nível de protensão provocou uma variação limitada das flechas, mas cita que em parte esses valores são devidos ao fato de que só foram medidos componentes de flecha diferida no tempo, sem levar em conta as flechas imediatas.

Figura 2.10 – Geometria do ensaio de Ranzi et al. (2013)

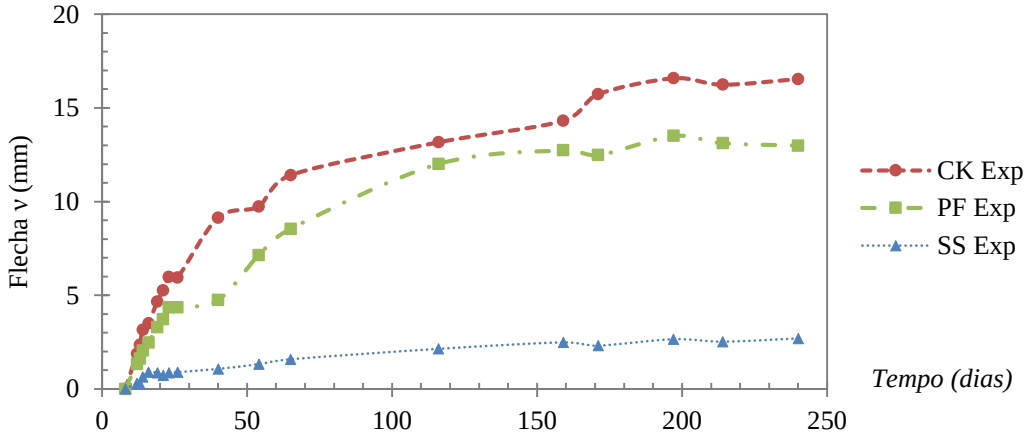



Fonte: Ranzi et al. (2013)

Figura 2.11 – Vistas lajes mistas sob carregamento

Fonte: Ranzi et al. (2013)

Figura 2.12 – Vistas lajes mistas sob carregamento




Fonte: Ranzi et al. (2013)

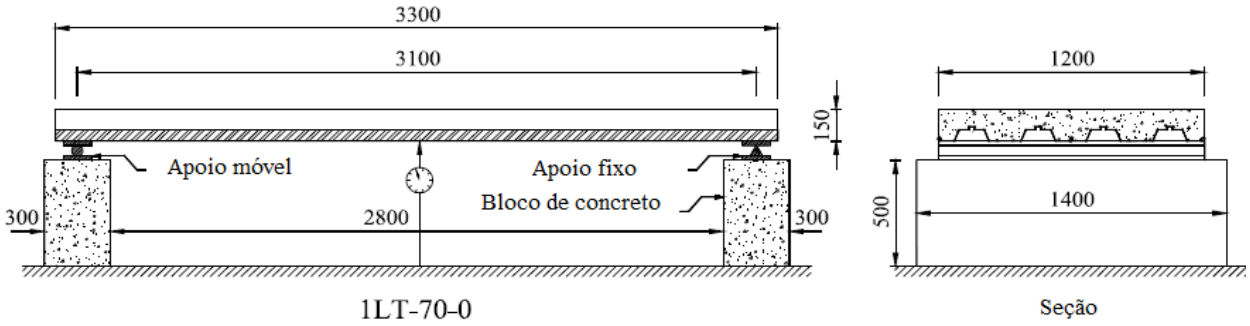
Al-Deen, Ranzi e Uy (2015) e Al-Deen e Ranzi (2015) estudaram os efeitos da retração não-uniforme das lajes mistas de aço e concreto, com monitoramento de duas lajes mistas simplesmente apoiadas e lajes comuns e lajes mistas sujeitas à retração e propuseram modelos teóricos capazes de incorporar os efeitos da retração não-uniforme.

Mais recentemente, pode-se destacar os trabalhos de Ranzi (2017a, 2017b, 2017c) que trazem as principais considerações em serviço das lajes mistas de aço e concreto e para sistemas de lajes mistas protendidas. Ele também cita a importância da consideração de ocorrência da retração não-uniforme na altura da laje. Apresenta um procedimento e compara com resultados experimentais selecionados disponíveis na literatura, abordagem similar a apresentada pelo processo simplificado pela norma australiana AS/NZS 2327 (2017). O autor ressalta que foi obtida boa correlação entre os valores experimentais e o modelo proposto quando considerado a ocorrência da retração não-uniforme.

O trabalho de Gholamhoseini (2014) foi um dos primeiros estudos detalhados sobre os efeitos da fluência e retração no comportamento em serviço das lajes mistas. O autor fez ensaios experimentais a longo prazo em lajes mistas sujeitas à retração por secagem e com carregamentos aplicados. Nos seus ensaios mediu a distribuição da deformação de retração através da espessura das lajes; flechas induzidas pela retração e flechas dependentes do tempo e fissuração sob cargas de serviço. Analisou lajes simplesmente apoiadas (bi-apoiadas) e lajes contínuas e avaliou as flechas com carregamentos variados ao longo do tempo, com ensaios de duração média entre 250 a 350 dias.

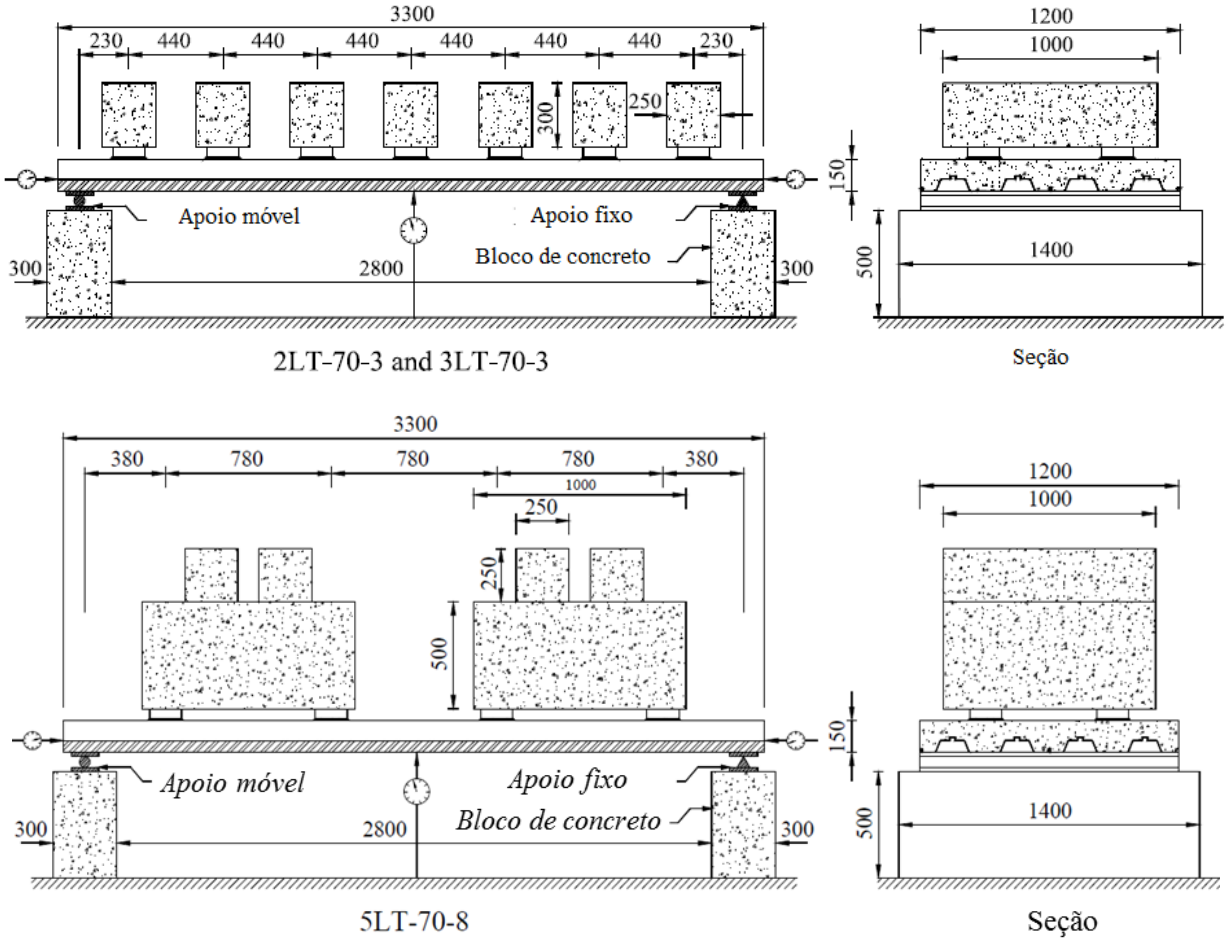
Um esquema do ensaio realizado é apresentado na Figura 2.13. Tomou como base o perfil da fôrma de aço KF70 de 70 mm de altura e KF40 de 40 mm de altura da fôrma de aço e laje com altura total de 150 mm. Na Figura 2.13 apresentam-se três tipos das configurações de carregamento das lajes. A nomenclatura para as lajes vem de *long-term* (LT) seguido da altura do perfil e a ordem de carregamento aplicada em kPa. Usou um sistema de carregamento composto por blocos de concreto e instrumentação na aferição de deslizamentos nas extremidades dos apoios e relógios comparadores para a medição dos deslocamentos verticais.

Figura 2.13 – Configuração das lajes mistas sob carregamento




*(continuação)*

Figura 2.13 – Configuração das lajes mistas sob carregamento *(continuação)*

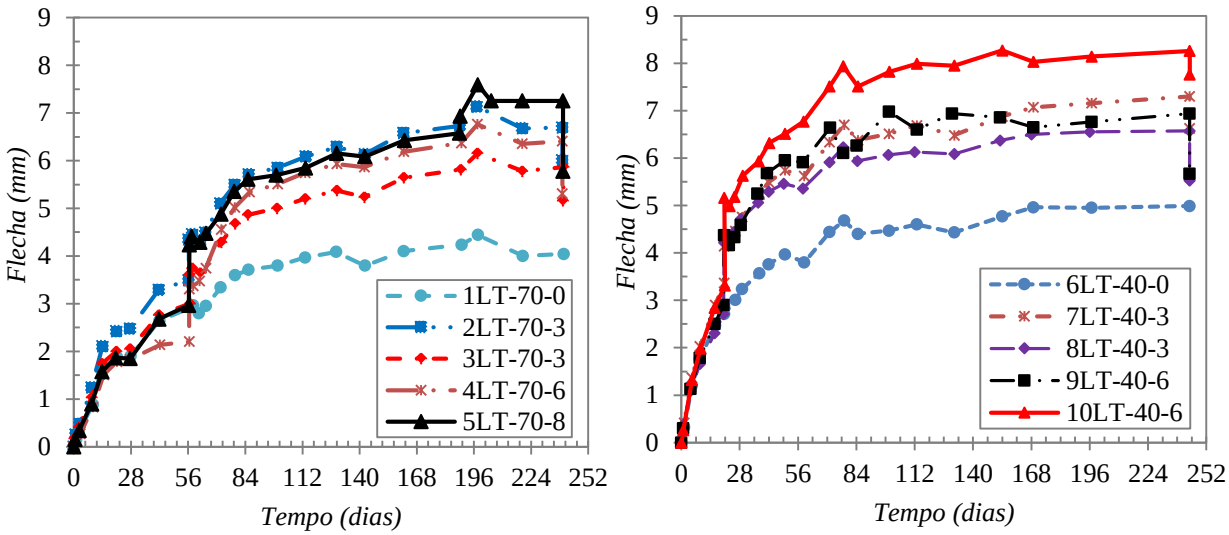



Fonte: Gholamhoseini (2014)

Gholamhoseini (2014) verificou o aumento das flechas ao longo do tempo. O autor comenta que as flechas diferidas no tempo são causadas pela retração, pela fluência devido ao carregamento permanente e pela perda de rigidez dependente do tempo devido à fissuração crescente. A Figura 2.14 mostra as medidas de deslocamentos verticais de alguns ensaios das lajes mistas avaliadas como podem ser vistos na Figura 2.15. Não se inclui as flechas instantâneas da laje mista devido ao seu peso próprio na idade de sete dias. Neste mesmo ensaio, avaliaram-se as deformações ao longo da altura com extensômetros elétricos.

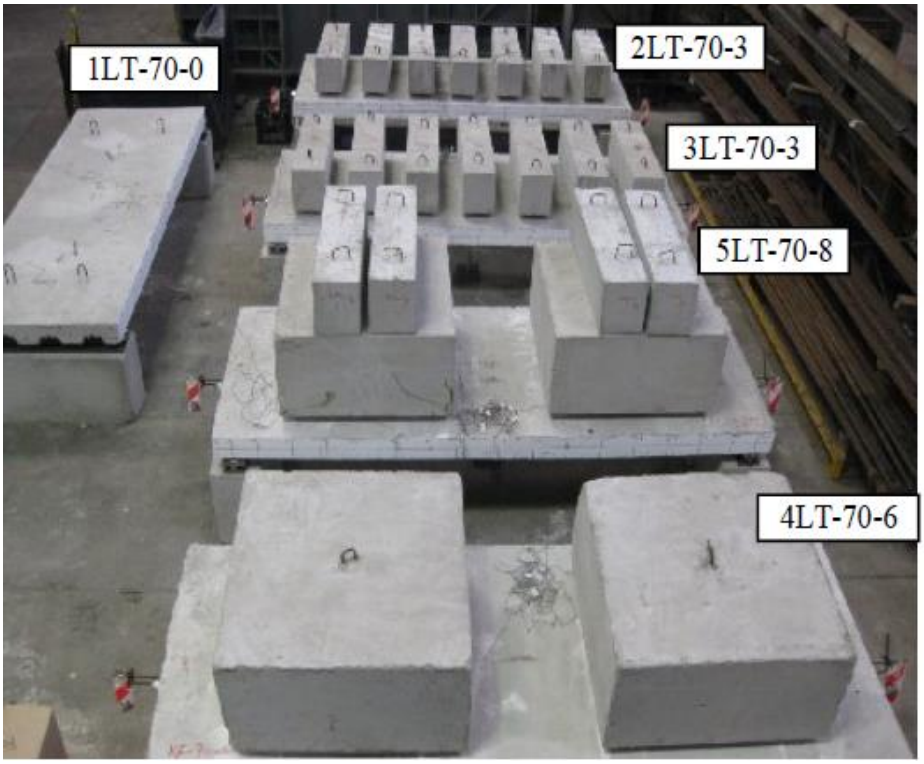
Baseado nos ensaios e nas prescrições sobre retração, Gholamhoseini (2014) adaptou o perfil de retração ao longo da altura da seção baseando-se nas normas americana ACI 209 (2008) e australiana AS3600 (2009). Além disso, utilizou um modelo analítico desenvolvido por Gilbert (2013) para avaliação da flecha diferida no tempo e demonstrou estar de acordo com as medidas experimentais, conforme Gholamhoseini et al (2014a, 2014b, 2014c). A Figura 2.16 apresenta os resultados das suas estimativas em relação aos valores experimentais, usando os modelos adaptados de previsão do ACI 318 (2008) e AS 3600 (2009), tendo obtido bons resultados.

Figura 2.14 – Resultados das flechas diferidas no tempo das lajes mistas de Gholamhoseini (2014)




Fonte: Gholamhoseini (2014)

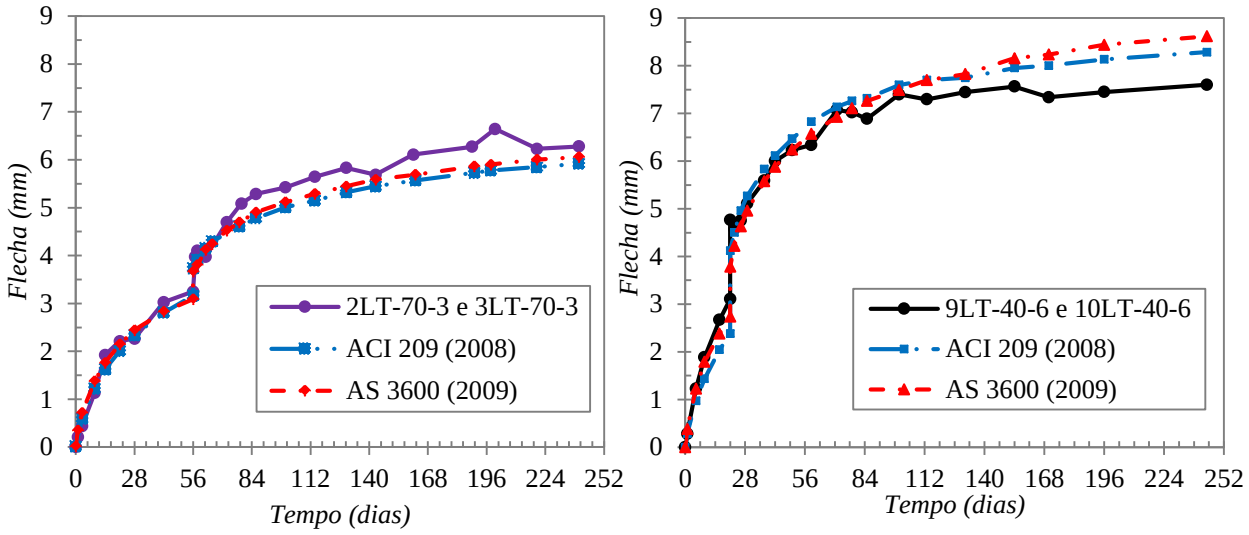
Figura 2.15 – Vistas lajes mistas sob carregamento de longa-duração




Fonte: Gholamhoseini (2014)

Cita que o perfil de retração por secagem através da espessura de uma laje mista é muito afetado pela fôrma de aço, e com isso, apresenta uma proposta de modelo para análise dos mesmos em Gholamhoseini (2014b, 2016a). Gholamhoseini (2014) fez na presente literatura o trabalho mais relevante do tema a respeito do comportamento das lajes mistas ao longo do tempo.

Figura 2.16 – Previsão das flechas ao longo do tempo pelos modelos analíticos

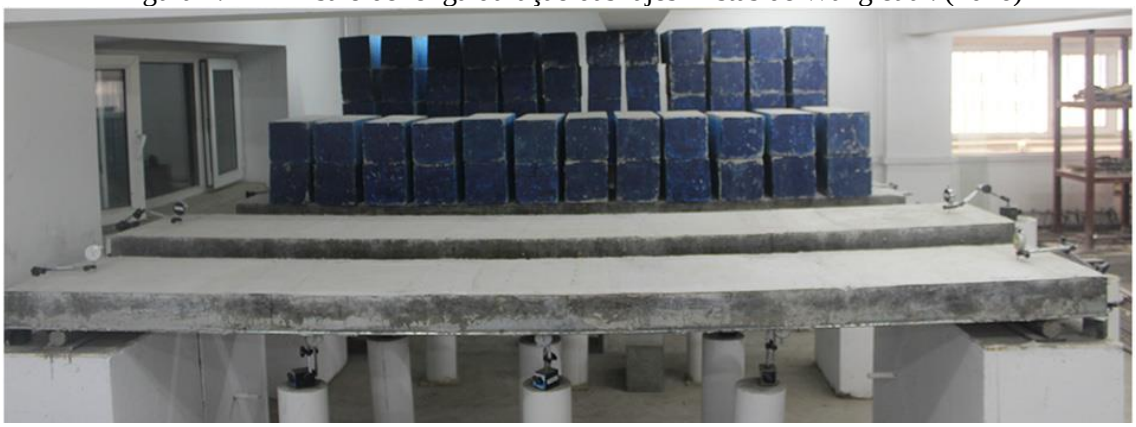



Fonte: Gholamhoseini (2014)

Wang et al. (2016) fez um estudo do comportamento ao longo do tempo de lajes mistas de aço e concreto na China, com sistema simplesmente apoiado e usando concreto com agregado graúdo reciclado. Realizou um programa experimental com quatro lajes de 3300 mm de vão teórico e alturas de lajes de 120 mm e 180 mm, sujeitas à retração e a carregamentos constituídos de blocos, como pode ser visto na Figura 2.17. Os ensaios tiveram como objetivo avaliar a retração da laje e a evolução das flechas ao longo do tempo de medição de 268 dias, cujos resultados experimentais da evolução da flecha são mostrados na Figura 2.18.

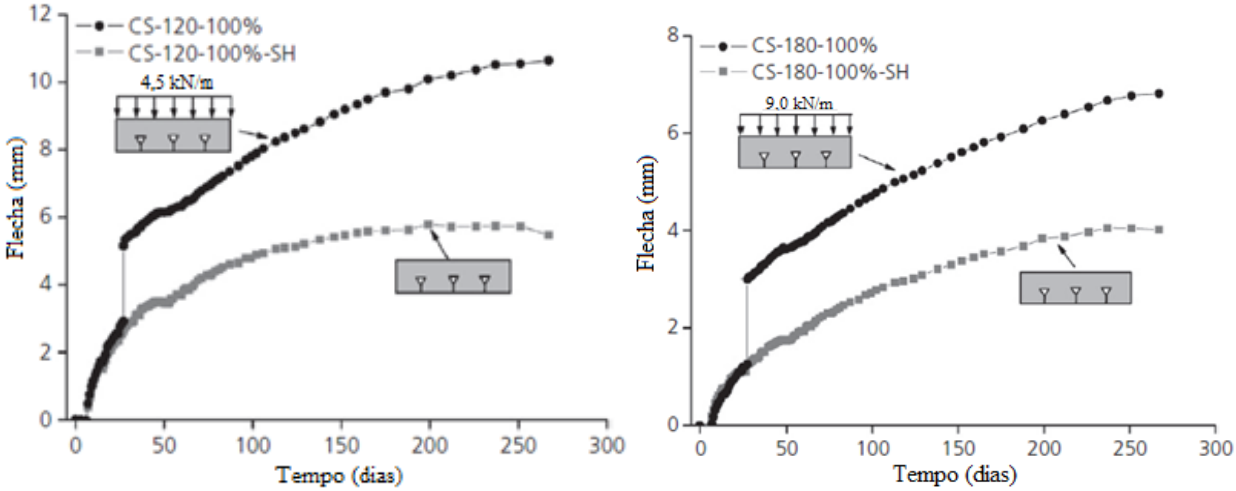
Wang et al. (2016) tomou como base os trabalhos de Al-Deen e Ranzi (2015), Al-Deen, Ranzi e Vrcelj (2011), Gilbert et al. (2012), Ranzi et al. (2013a, 2013b) e Gholamhoseini (2014). Realizou o monitoramento da temperatura e teor de umidade do ambiente. Realizou uma análise teórica e um modelo numérico não-linear foi desenvolvido para estimativa das flechas e considerou os efeitos da retração não-uniforme, a fluência e a fissuração do concreto. Dado o uso de agregados reciclados na produção de concreto, o autor cita a importância do estudo, visto que as deformações devido à retração e fluência são comumente maiores do que aquelas em agregados normais. Cita que se deve ao aumento do teor de argamassa total e à diminuição da rigidez do agregado reciclado. O modelo para lajes mistas considerando o concreto reciclado foi validado com os resultados experimentais e verificou-se que estimou bem as flechas dependentes do tempo.

Figura 2.17 – Ensaio de longa duração das lajes mistas de Wang et al. (2016)



Fonte: Wang et al. (2016)

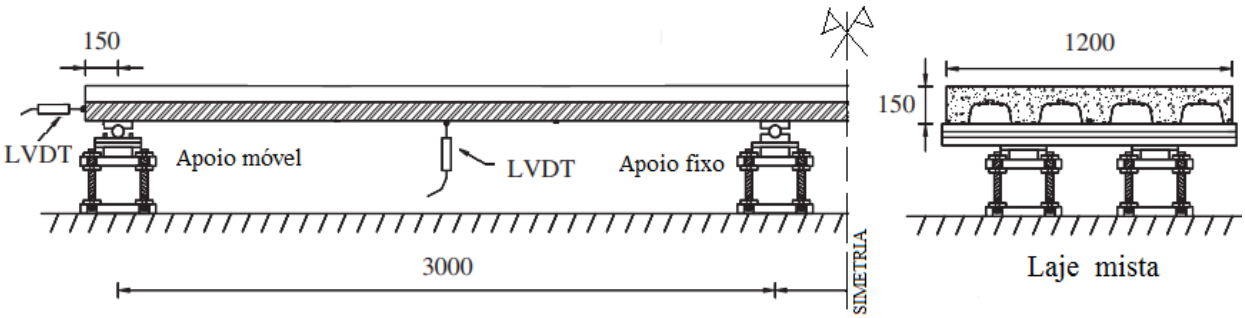
Figura 2.18 – Resultado das flechas diferidas dos ensaios de Wang et al. (2016)




Fonte: Wang et al. (2016)

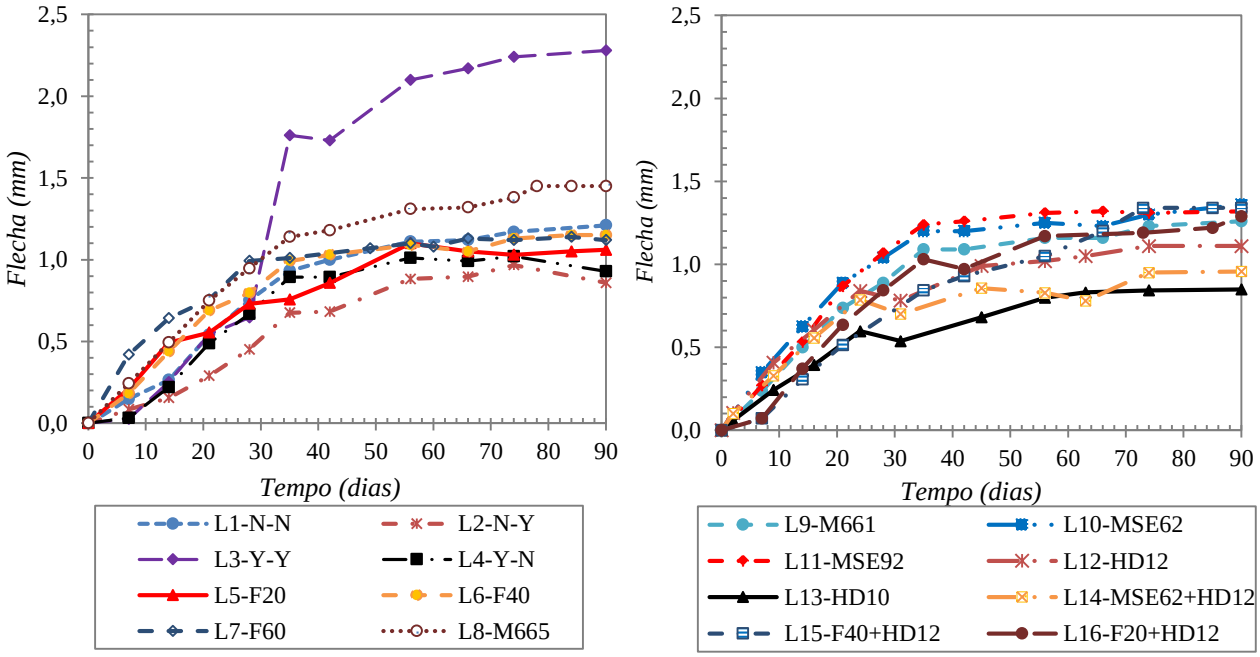
Gholamhoseini et al. (2016) realizou um estudo do comportamento em serviço da fissuração sobre apoios intermediários e as flechas das lajes mistas contínuas utilizando concreto com fibras de aço com objetivo de quantificar a influência da malha e fibras em relação aos efeitos da retração e cargas permanentes. Para as lajes mistas com continuidade sobre apoio intermediário, é comum o uso de armaduras ou fibras de aço ou sintéticas para garantir condições satisfatórias em serviço da abertura de fissuras. Variaram-se a taxa de armadura e teor de fibras, totalizando 16 lajes mistas de dois tramos, usando perfil de aço trapezoidal da ComFlor 80, com 80 mm de altura, que tiveram seu comportamento avaliado por 90 dias, sob efeito do seu peso próprio e dos efeitos de retração e fluência. Posteriormente, foram submetidas a ensaios até a ruptura. As lajes tinham dois vãos de 3,0 metros com altura total de 150 mm. De acordo com Gholamhoseini et al. (2016) verificou no ensaio de retração que todos os concretos apresentam valores de deformação devido à retração relativamente semelhantes. A Figura 2.19 mostra o esquema do ensaio realizado e a Figura 2.20 seus resultados.

Figura 2.19 – Esquema ensaio de Gholamhoseini et al. (2016)




Fonte: Gholamhoseini et al. (2016)

Figura 2.20 – Resultados das flechas das lajes mistas de Gholamhoseini et al. (2016)




Fonte: Gholamhoseini et al. (2016)

Avaliaram-se dessa forma o tipo de reforço dado às lajes mistas com continuidade. A nomenclatura para as quatro primeiras lajes (L1 a L4) se dá pela diferença estudada quanto ao perfil da fôrma de aço, com o uso (Y) ou sem uso (N), sendo o primeiro termo referente ao uso de mossas e o segundo quando da lubrificação sobre fôrma, para eliminar a parcela de adesão química. As laje L5 a L7 avaliaram o teor de fibras de aço, sendo F referente a fibra e o número posterior ao teor em kg/m³ de fibra no concreto. As lajes L8 a L11 avaliaram diferentes malhas de aço (M). As laje L12 e L13 avaliaram uso de vergalhões com diâmetro de 10 mm e 12 mm, respectivamente. As lajes L4 a L16 fizeram uma união de diferentes reforços.

Dos resultados de Gholamhoseini et al. (2016), com exceção da laje L3, nenhuma outra laje apresentou fissuração sobre apoio intermediário. Como a laje L3 foi “lubrificada” apenas a aderência mecânica foi mobilizada. Com o desenvolvimento da retração e fluência do concreto

e provavelmente pela perda repentina da ligação mecânica entre a fôrma e o concreto ocorreu a fissuração da laje, que na idade de 90 dias atingiu abertura de fissura igual a 0,4 mm. Sobre a variação dos resultados das flechas nas lajes, a L3 apresentou maior flecha devido à perda de rigidez do concreto sobre o apoio e consequente aumento do deslocamento vertical no meio do vão. Durante o período, as outras lajes tiveram flechas entre 0,85mm (L13) e 1,45 mm (L8) de 4-7 vezes maior quando comparado à flecha imediata de 0,2 mm, calculada apenas com seu peso próprio na idade de 7 dias (GHOLAMHOSEINI et al., 2016). Por fim, essa observação reforça o papel desempenhado pela retração não-uniforme nas flechas diferidas ao longo do tempo nas lajes mistas de aço e concreto.

Trabalho relativamente semelhante foi desenvolvido por Altoubat, Rieder e Junaid (2017), quanto aos estudos ao longo tempo do comportamento em serviço das lajes mistas de aço e concreto com continuidade. Os autores avaliaram a diferença entre o uso de malha de aço (tela soldada) com fibras sintéticas de polipropileno/polietileno. Um total de 4 lajes foram concretadas com duas espessuras: 125 e 150 mm com o perfil da fôrma de aço *Vulcraft* de 50 mm de altura. Duas lajes, uma de cada espessura usaram malhas de aço em tela soldada e as outras duas com dosagem usando fibra sintética, conforme especificação da norma ANSI/SDI (2011). As lajes possuem dois vãos de 2,30 m cada, totalizando 4,60 m. O principal objetivo foi comparar a capacidade da especificação normativa em controlar a fissuração da laje mista. Dessa forma, mediram-se as aberturas de fissuras e as flechas.

Como nomenclatura, as lajes mistas de 150 mm são aqui divididas em: com malha de aço Slab-150-Mesh (com taxa de armadura de 88 $mm^2/m$) e Slab-150-Fiber (com teor de fibras sintéticas de 2,1 $kg/m^3$). As lajes de 125 mm em: Slab-125-Mesh (com taxa de armadura de 59,8 $mm^2/m$) e Slab-125-Fiber (com teor de fibras de 2,4 $kg/m^3$ de fibra no concreto). Altoubat, Rieder e Junaid (2017) citam que a malha de aço foi colocada a 50 mm de distância da face superior da laje e que tanto as taxas de armadura e fibras coincidem aos teores mínimos indicados pela norma ANSI/SDI (2011).

As lajes foram concretadas e deixadas em cura úmida por 7 dias e então mantidas descarregadas até idade de 28 dias. Na idade de 28 dias, as lajes foram carregadas com suas taxas máximas de capacidade nominal máxima resistente, que valem carga de 12,9 kPa e 10,4 kPa para laje de 150 mm e 125 mm, respectivamente. Depois de 60 dias carregadas, a carga foi reduzida em 50%, para representar o carregamento em serviço. A Figura 2.21 apresenta esquema de ensaio e destaca a região sobre apoio intermediário, com destaque para a pintura e instrumentação, esta semelhante ao desenvolvido por Gholamhoseini (2014) para as lajes bi-apoiadas.

Figura 2.21 – Esquema ensaio de Altoubat, Rieder e Junaid (2017)

Fonte: Altoubat, Rieder e Junaid (2017)

Os resultados do ensaio podem ser vistos na Figura 2.22 e 2.23, mostrando a evolução da abertura de fissuras e flechas ao longo do tempo, devido os efeitos da retração, fluência e fissuração. As Tabela 2.1 e 2.2 apresentam um resumo das flechas e fissuras sobre apoio imediatas e diferidas no tempo, respectivamente.

Tabela 2.1 – Resumo do ensaio: flechas e aberturas de fissuras imediatas e diferidas

| Laje Mista | Flechas (mm) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Antes do carregamento | Imediata *carregamento* | Diferidas antes *retirada "50% carregamento"* | Diferidas após retirada "50%" | Razão entre: diferidas e imediatas | Total |
| Slab-125-Fiber | 4,06 | 1,55 | 1,16 | 2,10 | 1,35 | 7,71 |
| Slab-125-Mesh | 4,83 | 1,25 | 1,14 | 1,70 | 1,36 | 7,78 |
| Slab-150-Fiber | 2,50 | 0,88 | 1,60 | 1,30 | 1,51 | 4,68 |
| Slab-150-Mesh | 2,60 | 0,75 | 1,20 | 1,11 | 1,48 | 4,46 |

Tabela 2.2 – Resumo do ensaio: flechas e aberturas de fissuras imediatas e diferidas

| Laje Mista | Abertura de fissuras (mm) | | |
|---|---|---|---|
| | Imediata devido carregamento | Diferida no tempo devido retração e fluência | Razão entre: Diferidas e imediatas |
| Slab-125-Fiber | 0,60 | 1,40 | 2,33 |
| Slab-125-Mesh | 0,50 | 1,00 | 2,00 |
| Slab-150-Fiber | 0,35 | 1,00 | 2,85 |
| Slab-150-Mesh | 0,29 | 0,70 | 2,40 |

Fonte: Altoubat, Rieder e Junaid (2017)

Figura 2.22 – Flechas ao longo do tempo das lajes mistas de Altoubat, Rieder e Junaid (2017)

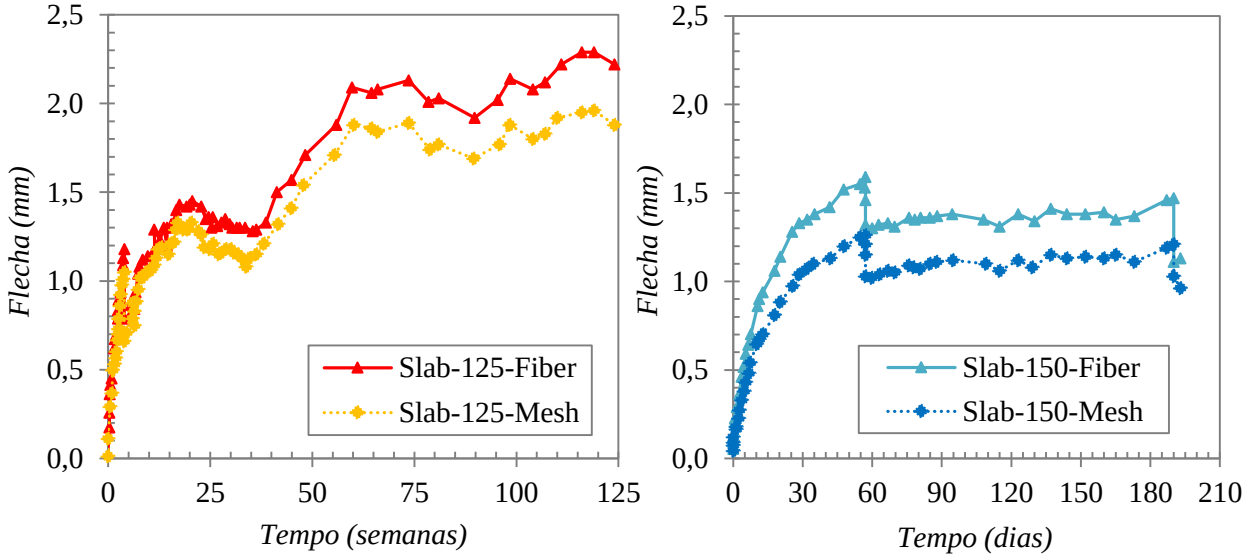
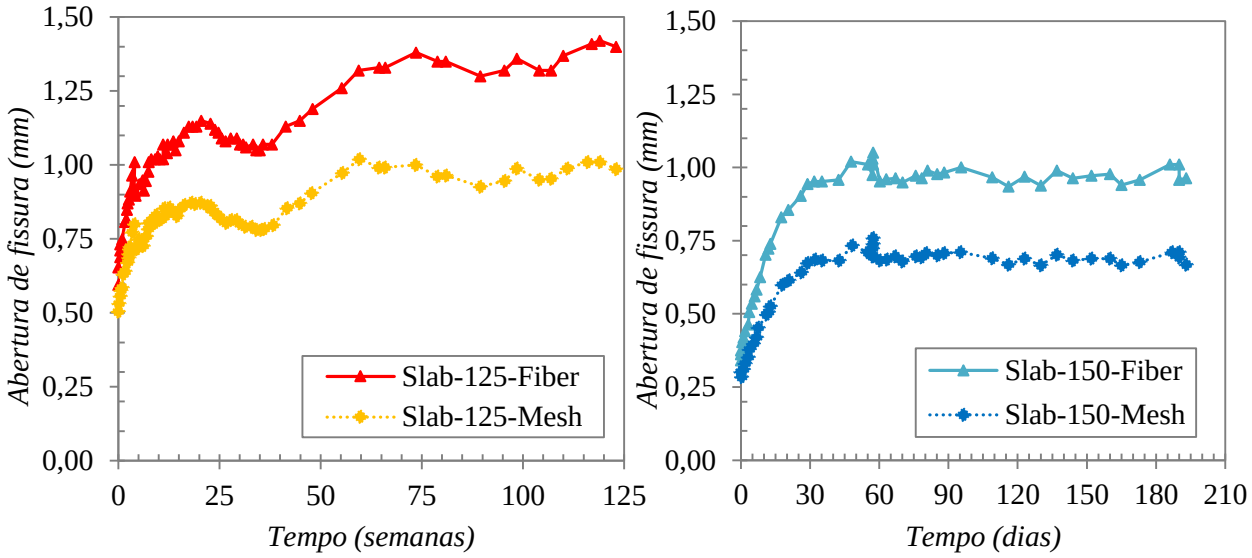



Figura 2.23 – Aberturas de fissuras ao longo do tempo das lajes de Altoubat, Rieder e Junaid (2017)



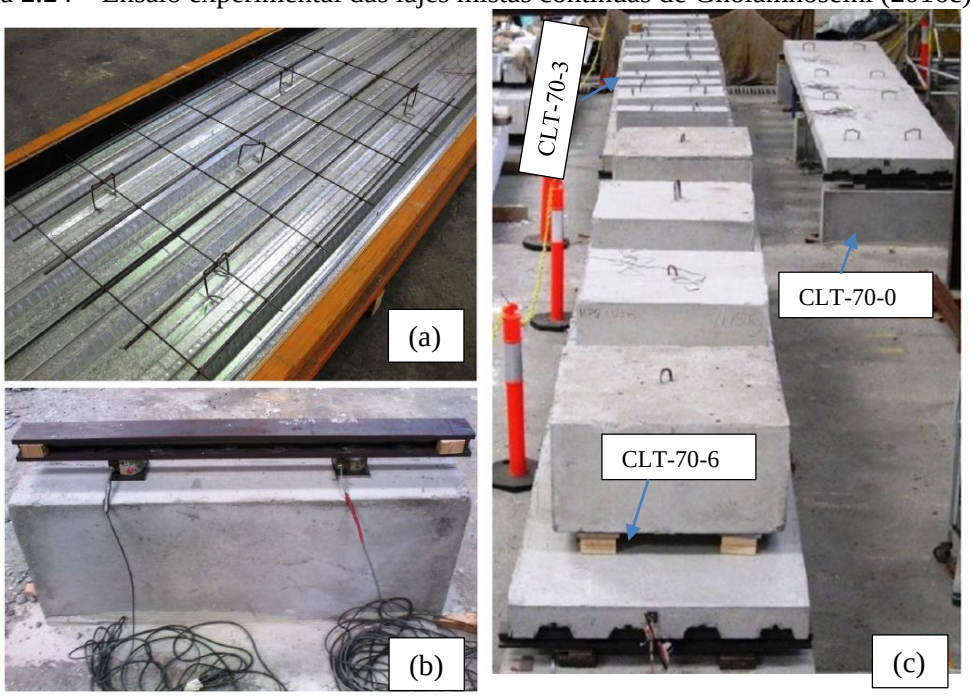

Fonte: Altoubat, Rieder e Junaid (2017)

Altoubat, Rieder e Junaid (2017) verificaram que para a laje com espessura de 150 mm, após a retirada de 50% da carga nominal máxima, tanto a abertura de fissura quanto a flecha mantiveram-se praticamente constantes até 190 dias, encerrando-se o ensaio destas lajes. O comportamento das lajes com fibra e com malha foram similares, sendo tanto a flecha quanto a abertura de fissuras maiores para as lajes reforçadas com fibras. Para a laje mista de 125 mm, a evolução dos efeitos foi mais expressiva, levando o ensaio até 125 semanas, mantendo os efeitos diferidos no tempo nas lajes mistas reforçadas com fibra mais expressivos que os com malha de aço.

Altoubat, Rieder e Junaid (2017) indicam que o estudo ainda possibilitou identificar que para cargas de serviço não foi identificada ruptura por fluência das fibras. As razões entre as flechas imediatas e as diferidas no tempo ficaram entre 1,36 e 1,51 e as aberturas de fissuras entre 2,0 e 2,85 para as lajes em estudo. Dessa forma, os resultados confirmam a influência e importância da consideração dos efeitos da fluência, retração não-uniforme e fissuração dependentes do tempo nas lajes mistas contínuas de aço e concreto.

Por último, Gholamhoseini (2014, 2016c, 2018) discutiu o comportamento das lajes mistas contínuas ao longo do tempo, por meio de ensaios experimentais e desenvolvimentos analíticos. O esquema de ensaio está apresentado na Figura 2.24 e Figura 2.25. Analisaram-se as flechas diferidas no tempo, os deslizamentos de extremidades, panorama de fissuração e a redistribuição dos momentos fletores em lajes mistas contínuas ao longo do tempo.

Figura 2.24 – Ensaio experimental das lajes mistas contínuas de Gholamhoseini (2016c)



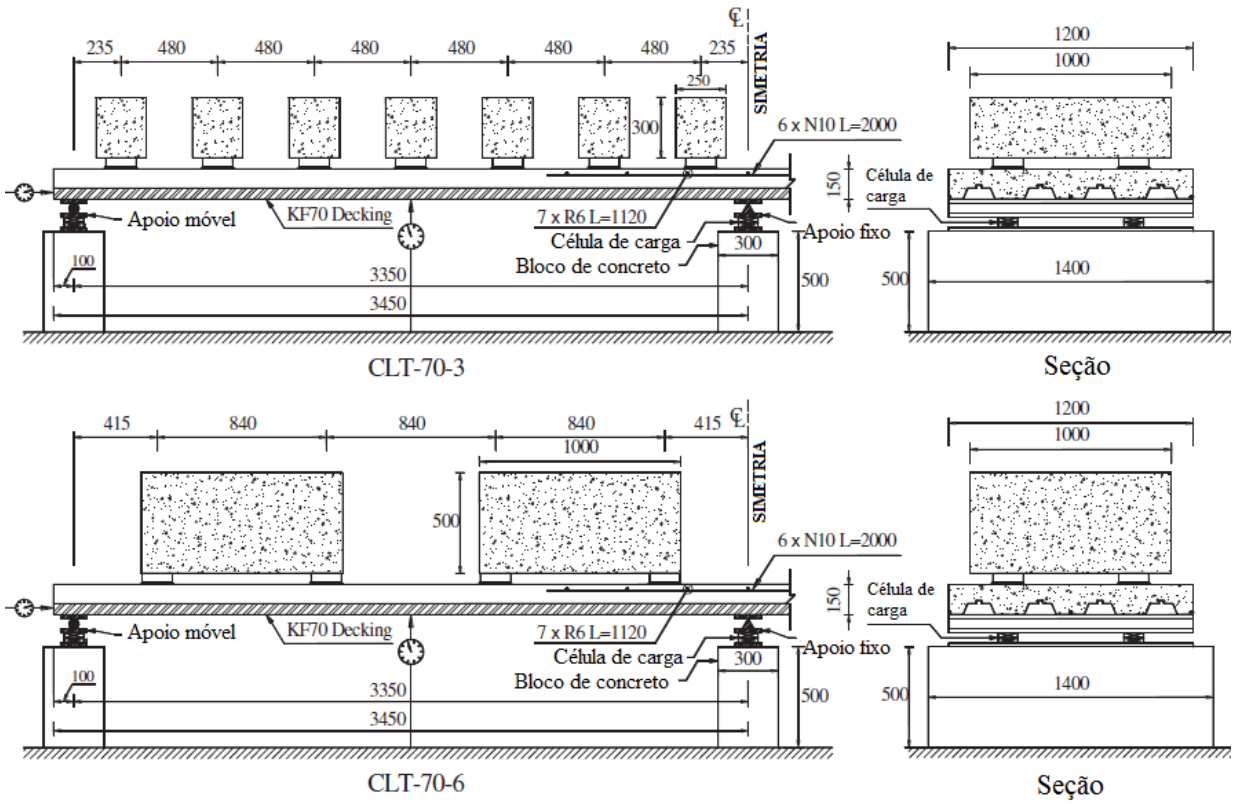

(a) Reforço sobre apoio; (b) Célula de carga sobre apoio e (c) Lajes mistas contínuas

Fonte: Gholamhoseini (2016c)

As lajes mistas contínuas de Gholamhoseini (2014, 2016c, 2018) possuem dois vãos de 3350 mm entre apoios, com laje mista formada pelo perfil de aço KF70, com 70 mm de altura e com espessura total da laje de 150mm. As três lajes ensaiadas possuem as mesmas características, com reforço sobre apoio intermediário composto por seis barras de aço, conforme Figura 2.24 (a). As reações de apoio sobre apoios intermediários foram aferidas ao longo do tempo por meio do uso de células de carga, como visto na Figura 2.24 (b). Os carregamentos impostos foram feitos com uso de blocos de concreto (Figura 2.24 (c) e Figura 2.25), cujas lajes CLT (*continuous*

*long-term*), representam as lajes contínuas avaliadas ao longo do tempo, sendo CLT-70, a laje formada pelo perfil KF70 e segundo termo a carga aproximada, CLT-70-0 sem carregamento imposto, sujeito apenas ao seu peso próprio, CLT-70-3, com carregamento imposto de 3,10 kPa e a laje CLT-70-6 com carregamento de 5,60 kPa.

Figura 2.25 – Esquema de ensaio das lajes mistas contínuas sob carregamento de longa-duração



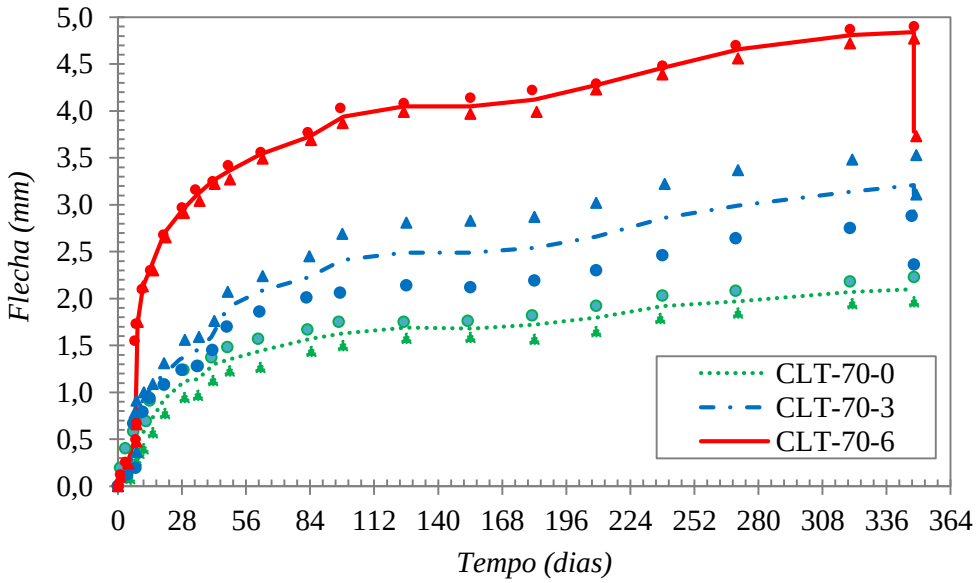

Fonte: Gholamhoseini (2016c)

O carregamento das lajes CLT-70-3 e CLT-70-6 foi feito aos 8 dias de idade do concreto e mantido até 348 dias, idade em que se retiraram os carregamentos. A fissuração devida à flexão foi observada na região de momento negativo sobre o apoio intermediário, permanecendo estável ao longo do ensaio, com exceção para a laje CLT-70-6 que apresentou maior panorama de fissuração. As fissuras máximas medidas foram de 0,2 mm, 0,3 mm e 0,6 mm, respectivamente para as lajes CLT-70-0, CLT-70-3 e CLT-70-6. Não foram observadas fissuras na região do meio do vão da laje.

As flechas imediatas e ao longo do tempo foram medidas em ambos os lados, cujos resultados são apresentados na Figura 2.26, como média das medidas dos dois vãos. Gholamhoseini (2016c) indica que não se inclui flechas imediatas devida ao peso próprio da laje com seções não fissuradas, estimada em 0,27mm. As medidas do deslizamento relativo entre fôrma de aço e concreto tiveram valores máximos de 0,1 mm (laje CLT-70-3) e 0,05mm laje

CLT-70-6, valores bem pequenos. Ao realizar estudo semelhante ao apresentado por Altoubat, Rieder e Junaid (2017), temos a Tabela 2.3, demonstrando as parcelas de flechas imediatas e diferidas no tempo devido à retração, fluência e fissuração dependentes do tempo. Como se observa, a razão entre flechas diferidas no tempo e as flechas imediatas apresentou valores maiores, ao comparar com resultados de Altoubat, Rieder e Junaid (2017).

Figura 2.26 – Flechas ao longo do tempo das lajes mistas contínua




Fonte: Gholamhoseini (2016c)

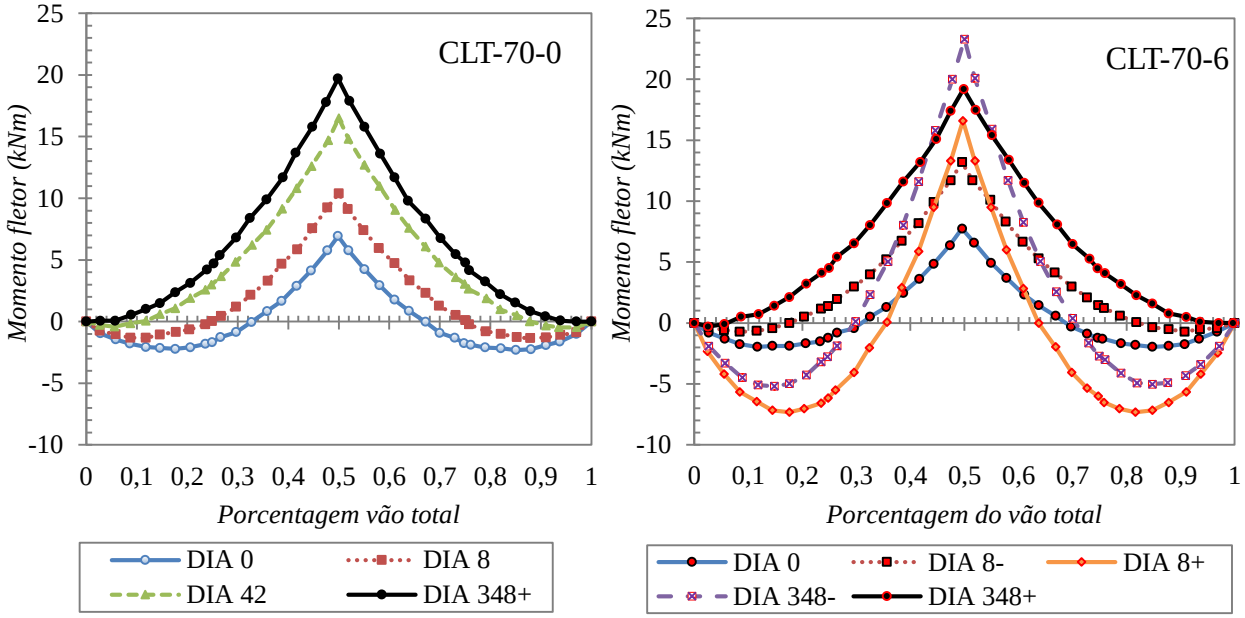
Tabela 2.3 – Resumo do ensaio de Gholamhoseini (2018) flechas imediatas e diferidas

| Laje Mista | Flechas (mm) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Antes do carregamento (estimada) | Diferida (0-8) dias | Imediata *carregamento* | Diferidas (8-348) dias | Imediata (retirada carregamento | Razão entre: diferidas e imediatas | Total |
| CLT-70-0 | 0,27 | - | - | 2,11 | - | 7,81 | 2,38 |
| CLT-70-3 | 0,27 | 0,28 | 0,48 | 2,44 | - 0,46 | 3,63 | 3,47 |
| CLT-70-6 | 0,27 | 0,50 | 0,61 | 3,73 | - 1,05 | 4,81 | 5,11 |

Fonte: Adaptado de Gholamhoseini (2016c)

Outro ponto de destaque do trabalho de Gholamhoseini (2014, 2016c, 2018) foi a constatação da redistribuição de esforços internos da laje mista. A partir da célula de carga sob o apoio intermediário, pode-se obter a reação de apoio e pela simetria da laje, traçar os diagramas de momentos fletores. Os resultados obtidos para as lajes CLT-70-0 e CLT-70-6 são apresentados na Figura 2.27. A laje CLT-70-3 também apresentou resultado semelhante às outras duas.

Figura 2.27 – Variação do momentos fletores das lajes ao longo do tempo de Gholamhoseini (2018)




Fonte: Gholamhoseini (2018)

A reação do apoio intermediário aumentou com o tempo, conforme pode ser visto pela Figura 2.27, na qual as reações dos apoios de extremidade reduziram drasticamente, tanto para laje CLT-70-0 e CLT-70-6. A laje CLT-70-6 apresenta redistribuição já no dia 0 (início do ensaio) até a idade antes de carregamento (dia 8-). Ao aplicar o carregamento (dia 8+) os momentos fletores tanto positivos quanto negativos passam a ter padrão esperado. No dia 348- (antes da retirada do carregamento) observa-se que em comparação ao dia 8+ houve aumento do momento negativo. Com a retirada do carregamento, dia 348+, a laje volta a ter aspecto similar de distribuição dos momentos fletores negativos em praticamente todas as seções. Gholamhoseini (2016c, 2018) indica que o efeito da retração foi o efeito marcante na redistribuição dos esforços internos. Fato não apresentado por Gholamhoseini (2018) e que completa a análise é o surgimento de um momento devido à retração que aumenta os momentos positivos e negativos, justificando o aumento das flechas. Por fim, Gholamhoseini (2014, 2016c, 2018) apresenta um procedimento analítico simplificado para a determinação das flechas ao longo do tempo em lajes mistas contínuas, que comparado com os dados experimentais, apresentou boa concordância.

Observa-se que pesquisas recentes têm demonstrado a importância da consideração da influência dos efeitos ao longo do tempo no estado limite de serviço. No entanto, o número de pesquisas e experimentos ainda é pequeno, conforme resumo esquemático das pesquisas experimentais realizadas com lajes mistas encontradas na literatura e apresentadas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Resumo dos ensaios experimentais e protótipos de lajes mistas na literatura

| Autor(es) | Protótipo | Fôrma de aço | Vão total (interno) | Largura da laje (mm) | Altura da laje (mm) | Carregamento (kPa) Excluindo o peso próprio (duração) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Shayan et al. (2010)*** | CS1 a CS4 | - | 2600 | - | - | - (45d) |
| **Mirza e Uy (2012)*** | | W-DEK | 3000 | 700 | 150 | - (710d) |
| **Golamhoseini (2014)** | 1LT-70-0 | KF70 | 3300 (3100) | 1200 | 150 | Nenhum (240 dias) |
| | 2LT-70-3 | | | | | 3,40 (dia 64 a dia 247) |
| | 3LT-70-3 | | | | | 3,40 (dia 64 a dia 247) |
| | 4LT-70-6 | | | | | 6,00 (dia 64 a dia 247) |
| | 5LT-70-8 | | | | | 6,10 (dia 64 a dia 197)<br>7,90 (após o dia 197) |
| | 6LT-40-0 | KF70 | 3300 (3100) | 1200 | 150 | Nenhum (244 dias) |
| | 7LT-40-3 | | | | | 3,40 (dia 28 a dia 251) |
| | 8LT-40-3 | | | | | 3,40 (dia 28 a dia 251) |
| | 9LT-40-6 | | | | | 6,40 (dia 28 a dia 251) |
| | 10LT-40-6 | | | | | 6,40 (dia 28 a dia 251) |
| **Ranzi et al. (2012, 2013)** | CK1 | Condeck HP | 7200 (6000) (Protendida) | 900 | 180 | Nenhum (239 dias) |
| | CK2 | | | | | |
| | PF1 | Prime--Form | | | | |
| | PF2 | | | | | |
| **Al-Deen, RAnzi e Uy (2015)** | CS1 | Condeck HP | 3300 (3000) | 900 | 180 | Nenhum (4 meses) |
| | CS2 | | | | | |
| **Wang et al (2016)** | CS-120-SH | DW65-510-170 | 3300 (3000) | 510 | 120 | Nenhum (268 dias) |
| | CS-120 | | | | | 4,5 kN/m (dia 28 a 268) |
| | CS-180-SH | | | | 180 | Nenhum (268 dias) |
| | CS-180 | | | | | 9 kN/m (dia 28 a 268) |
| **Gholamhoseini et al. (2016)** | Contínuas (16 lajes) | ComFloor 80 | 6300 (3000) (Contínuas) | 1200 | 150 | Nenhum (90 dias) |
| **Altoubat, Rieder e Junaid (2017)** | S-125-F | Vulcraft 50 | 4600 (2300) (Contínuas) | 914 | 125 | 12,9 (60d)/6,5(130d) |
| | S-125-M | | | | | 12,9 (60d)/6,5(130d) |
| | S-150-F | | | | 150 | 10,4 (60d)/5,2(815d) |
| | S-150-M | | | | | 10,4 (60d)/5,2(815d) |
| **Golamhoseini (2014, 2018)** | CLT-70-0 | KF70 | 6900 (3350) (Contínuas) | 1200 | 150 | Nenhum (348 dias) |
| | CLT-70-3 | KF70 | | | | 3,10 (dia 36 ao dia 376) |
| | CLT-70-6 | KF70 | | | | 5,60 (dia 36 ao dia 376) |
| **Nota (*):** | Com os trabalhos de Shayan et al. (2010) e Mirza e Uy (2012) não foi possível obter dados suficientes para a descrição dos ensaios e características dos materiais utilizados. | | | | | |

Fonte: Autor (2019)

Observa-se que o número de pesquisas e experimentos ainda é pequeno e de certa maneira restrito localmente ao grupo de pesquisadores Australianos formados por Gilbert, Bradford, Gholamhoseini, Chang, Al-Deen, Uy e Mirza, Wang et al. (2016) com supervisão de Ranzi e, o trabalho de Altoubat, Rieder e Junaid (2017).

Deve-se salientar que as abordagens teóricas e analíticas foram validadas por esses resultados experimentais e dessa forma, fornecem base aos projetos, haja vista que o estado limite de deslocamentos verticais excessivos é importante, pois pode governar o critério de verificação das lajes mistas de aço e concreto.

As últimas pesquisas em sua maioria têm se dedicado à consideração dos efeitos da retração não-uniforme, à fluência e à consideração da interação total ou parcial entre o perfil de aço e o concreto. Os resultados em termos gerais, variam mais por conta da disposição de oferta de diferentes perfis pelos fornecedores e às condições de exposição e tipo de concreto; no entanto, resultados semelhantes têm sido identificados e incorporados aos códigos e recomendações de projetos.

Desse modo, o trabalho reúne informações sobre os estados limites de serviço de deformação excessiva para aplicação às lajes mistas de aço e concreto, de maneira a contribuir para o conhecimento científico e adequação das normas e recomendações ao sistema de construção nacional, por meio de experimentação e desenvolvimentos analíticos para a avaliação dos deslocamentos verticais máximos.

# 3 NORMAS E RECOMENDAÇÕES PRÁTICAS

*Este capítulo apresenta um conjunto das principais normas técnicas de projetos sobre lajes mistas de aço e concreto e suas recomendações. De maneira resumida, discutem-se os materiais constituintes, comportamentos típicos das lajes mistas e verificações necessárias na garantia de segurança em relação aos estados limites último e de serviço. Destaque é dado às considerações sobre os limites de deslocamentos máximos aceitáveis das estruturas de pisos em serviço.*

## 3.1 Considerações gerais

As verificações de segurança e desempenho na sua grande maioria seguem os procedimentos normativos presentes em alguma das principais normas sobre lajes mistas de aço e concreto, aqui levantadas e citadas: ANSI/ASCE 3-91 (1992) (Americana), Eurocode 4 (2004) Part 1-1 (Européia), BS 5950-4 (1994) (Britânica), CSSBI S3:2008 (Canadense), ABNT NBR 8800 (2008) (Brasileira) e AS/NZS 2327 (2017) (Australiana).

O dimensionamento das lajes mistas nacionalmente é regulamentado pela norma ABNT NBR 8800 (2008) - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Verifica-se o sistema tanto na fase de construção, quanto na fase final ou mista. Verificações em situação em incêndio são apresentados na norma ABNT NBR 14323 (2013) - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios em situação de incêndio, que baseado no método dos estados-limites, estabelece os requisitos para o projeto das estruturas de aço e das estruturas mistas de aço e concreto em situação de incêndio.

Na fase de construção, o perfil de aço formado a frio deve seguir as recomendações da ABNT NBR 14762 (2010) - Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. As especificações do concreto são baseadas na norma ABNT NBR 6118 (2014) - Projeto de estruturas de concreto. Usualmente os fabricantes fornecerem, sob forma de tabelas, a capacidade de carga da fôrma sob um dado vão, para uma determinada altura e resistência do concreto para aquele tipo de perfil ou um vão máximo admissível da fôrma para dado carregamento.

A norma ABNT NBR 16421 (2015) - Telha-fôrma de aço colaborante para laje mista de aço e concreto – requisitos e ensaios, para o sistema de lajes mistas no Brasil é recente e inédita. Tem como objetivo estabelecer os requisitos e os ensaios aos quais devem atender a telha-fôrma de aço para a laje mista de aço e concreto, revestida, conformada a frio, de seção

transversal trapezoidal, reentrante, retangular, ondulada, entre outras, com revestimento zincado por imersão a quente ou zincado por imersão a quente e revestido por um processo de pintura.

Como esquema geral das lajes mistas de aço e concreto, destaca-se que há uma variedade de fôrmas de aço no mercado, sendo estas patenteadas pelas empresas. As lajes mistas são calculadas como lajes unidimensionais apoiadas em vigas ou paredes. Podem ser lajes bi-apoiadas ou contínuas. Os elementos que integram a laje, garantindo o trabalho conjunto do sistema são: fôrma de aço, concreto estrutural, malhas de aço, armaduras adicionais e sistemas de ancoragem, estes que podem não ser obrigatórios.

As fôrmas de aço mais comuns são as trapezoidais e reentrantes, sendo a primeira no Brasil a mais usada. Segundo Instituto de construção em aço (RACHHAM; COUCHMAN; HICKS, 2009) no Reino Unido existe uma grande variedade de perfis, que resumidamente se agrupam: nervuras com altura de 45 a 60 mm com vão usual na ordem de 3 m sem escoramentos; perfis com até 95 mm foram desenvolvidos para permitir vão de 4,5 m sem escoramentos e mais recentemente perfis de grande altura com 160 mm permitindo vãos de 6 m sem escoramentos como membros simplesmente apoiados.

O aço utilizado nas lajes mistas apresenta-se como uma fina chapa de aço zincada formada a frio. A espessura da fôrma de aço, por razões econômicas, é delgada, usualmente entre 0,75 mm e 1,20 mm, sendo revestida por uma camada de zinco. Nesse processo de revestimento, contínuo e denominado de galvanização a quente, deposita-se uma camada de zinco da ordem de 275 g/m² para ambientes não agressivos, correspondendo a uma espessura da ordem de 0,04 a 0,05 mm (considerando ambas as faces). No mercado nacional, essa camada de zinco é considerada na espessura nominal da chapa. Assim, por exemplo, uma chapa de aço zincada com 0,80 mm de espessura nominal, em verdade, é composta por um núcleo de aço de 0,75 mm e um revestimento total, considerando ambas as faces da chapa, de 0,05 mm de zinco (QUEIROZ e PIMENTA, 2001).

O concreto estrutural, seja armado ou protendido, pode ser o concreto convencional ou concreto leve. Para o concreto, feito com agregados comuns da natureza, possuem classes de resistência da ordem de 20 a 40 MPa. Para os concretos leves, produzidos com agregados artificiais tais como a argila expandida, as mesmas classes de resistência são comuns, mas a relação água/cimento normalmente é maior devido a maior absorção dos agregados e possuem massa específica menor que 20 kN/m³.

A principal vantagem do concreto leve é a redução de cerca de 25% do peso próprio da estrutura e cargas às fundações. Cita-se também a melhora no desempenho à exposição ao fogo.

No entanto, em locais com elevada abrasão o mesmo não é indicado e não é todo local que possui disponibilidade de fornecimento do material. Para o uso do concreto leve no Brasil, busca-se normas internacionais como Eurocode 2 (2004), por não dispor de norma nacional. O uso de concreto com fibras de aço ou sintéticas tem sido empregado para ajudar no controle da fissuração do concreto causada pelos efeitos da retração.

A malha de aço e armadura nas faces superiores têm a função de evitar fissuras ao longo da superfície da laje, causadas por efeitos da retração e da dilatação do concreto e fissuras na região sobre as vigas de apoio, devido à tendência de continuidade da laje. As armaduras adicionais têm duas principais funções: servir de armadura de flexão, em condições normais somada ao aço da fôrma ou resistir às ações em situação de incêndios.

## 3.2 Comportamento das lajes mistas de aço e concreto

O sistema misto formado pela fôrma de aço e pelo concreto permite que os esforços solicitantes numa seção qualquer sejam distribuídos entre os materiais. Essa distribuição dos esforços entre os materiais é função das propriedades mecânicas e de sua interação. Essa interação depende de como os materiais estão interligados e principalmente da eficiência da transmissão do cisalhamento da ligação do aço ao concreto. A ligação que não transmite cisalhamento não gera ação conjunta entre os materiais, não formando, portanto, o elemento misto. A ligação que garante total transferência é dita interação total, a ligação que não transfere esses esforços é dita interação nula e a intermediária é dita interação parcial. A Figura 3.1 apresenta os três principais tipos de fôrma de aço usadas nas lajes mistas de aço e concreto, sendo apenas as duas primeiras apresentadas na norma brasileira ABNR NBR 8800 (2008).

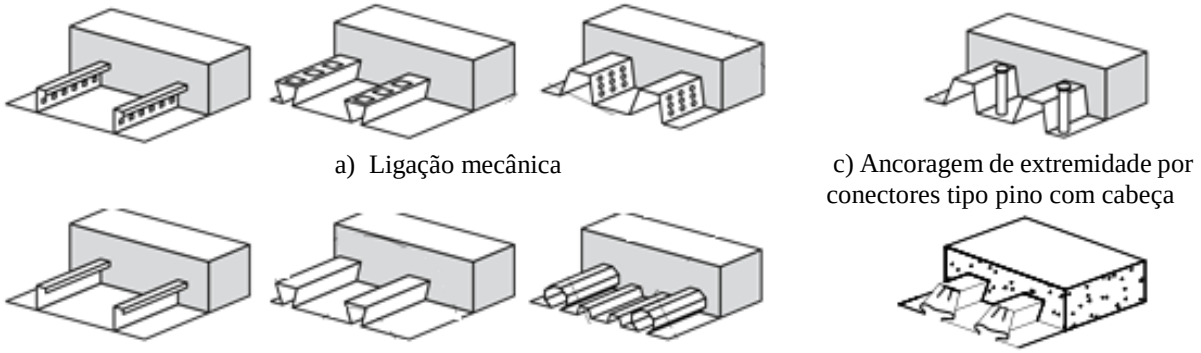
Figura 3.1 – Fôrmas de aço para as lajes mistas de aço e concreto

a) Fôrma trapezoidal b) Fôrma reentrantes c) Fôrma clip-pan ou L

Fonte: Autor (2019)

Os mecanismos utilizados para transferência de cisalhamento entre os dois materiais são aplicados à fôrma de aço e são em eficiência, na grande maioria, de interação parcial. Os mecanismos de transferência são a adesão natural, a ligação por atrito e a mecânica. Os principais sistemas usados nas fôrmas de aço na garantia de transferência de cisalhamento longitudinal entre aço e o concreto podem ser vistos na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Mecanismos de transferência de cisalhamento das lajes mistas



a) Ligação mecânica

b) Ligação por atrito

c) Ancoragem de extremidade por conectores tipo pino com cabeça

d) Ancoragem de extremidade por deformações das nervuras

Fonte: Adaptado de AS/NZS 2327 (2017)

A adesão natural (*chemical bond*) existente entre o aço e o concreto não é efetiva para o comportamento misto, esta se perde com a alternância de carga ou impactos e uma vez vencida, perde sua capacidade, não sendo usada como contribuição para a transferência de cisalhamento longitudinal em projeto. A ligação mecânica (Figura 3.2 (a)) (*mechanical resistance*) é obtida por meio de conformação superficial da fôrma, na presença de mossas, que mobilizam forças devido à restrição aos deslocamentos relativos. A ligação por atrito (Figura 3.2 (b)) (*frictional resistance*) ocorre pela existência das rugosidades superficiais e se dá pelo confinamento do concreto em fôrmas de aço reentrantes. A garantia da transferência é feita pela adoção de ligação mecânica ou por meio de atrito ou os dois mecanismos em conjunto.

A norma ABNT NBR 8800 (2008) apresenta os mecanismos da ligação mecânica pelas mossas e por atrito pelas fôrmas reentrantes. Outros mecanismos são citados por outras normas como a AS/NZS 2327 (2017) e Eurocode 4 (2004), como os apresentados na Figura 3.2 (c) ancoragem de extremidade fornecida por conectores tipo *stud* usado em combinação com (a) ou (b); e Figura 3.2 (d) ancoragem de extremidade obtida pela deformação das nervuras na extremidade das chapas, somente usada em combinação com (b) fôrmas reentrantes.

Sobre o comportamento do sistema misto deve haver garantia da transmissão de esforços longitudinais na interface aço e concreto. Pela dificuldade, fatores envolvidos e variedade de fôrmas existentes, não existem equações consolidadas que correlacionam o comportamento do mecanismo de transferência de cisalhamento nas lajes mistas. Ensaios experimentais são os recomendados nas normas para avaliação da capacidade resistente dos perfis e da estrutura mista.

## 3.3 Sobre a ruína das lajes mistas

As lajes mistas de aço e concreto são analisadas em duas fases: antes da cura e após a cura do concreto. A presença de nervuras unidirecionais faz com que as lajes mistas sejam consideradas um sistema estrutural que trabalha em apenas uma direção, tanto na fase de construção como na fase mista.

### *3.3.1 Verificação da fôrma de aço antes da cura do concreto*

A fôrma de aço incorporada funciona como suporte das ações permanentes e sobrecargas de construção; nessa situação, envolve basicamente o dimensionamento de seções de aço formadas a frio e deve obedecer às prescrições da norma brasileira ABNT NBR 14762 (2010) - Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio ou normas estrangeiras, como AISI-S100 (2007), Eurocode 3 Parte 1-3 (2006) e AS/NZS 4600 (2018). Resumidamente, realiza-se verificações da capacidade resistente ao momento fletor e força cortante e de instabilidade do perfil da fôrma.

### *3.3.2 Verificação da laje após a cura do concreto*

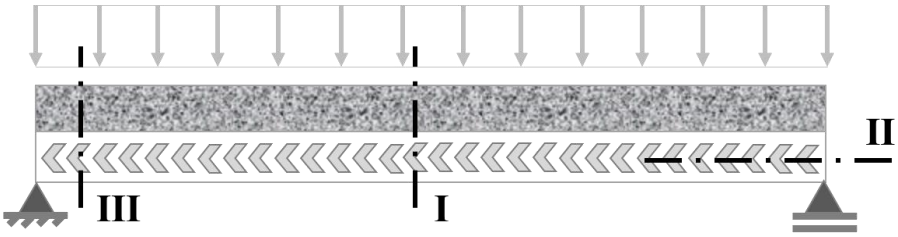
A fase final ou mista é definida quando o concreto atinge 75% da resistência especificada. As lajes mistas de aço e concreto devem suportar as cargas de cálculo com garantia que nenhum estado limite último seja atingido. As normas e códigos de projeto de lajes mistas trazem as considerações de cálculo e suas formulações e são comumente divididas em duas partes: a verificação do dimensionamento das lajes mistas em temperatura ambiente e o dimensionamento em situação de incêndio, ou seja, em temperatura elevada durante a ocorrência de um sinistro de incêndio. A verificação de fadiga também pode ser requerida em situações onde há possibilidade de ocorrência.

No Brasil, o dimensionamento em temperatura ambiente segue as prescrições da ABNT NBR 8800 (2008) e para a verificação em situação de incêndio as recomendações da ABNT NBR 14323 (2013). Esta última, descreve os requisitos de isolamento térmico, estanqueidade e resistência em situação de incêndio. Outras normas para dimensionamento à temperatura ambiente já foram citadas, mas vale lembrar, ANSI/ASCE 3 e 9 (1992), ANSI/SDI C (2011), CSSBI S3 (2008), Eurocode 4 (2004) e BS 5950-4 (1994) e AS/NZS 2327 (2017). Para verificação em incêndio, cita-se as normas internacionais do Eurocode 4 Parte 1-2 (2005) e BS 5950-8 (2003).

O presente trabalho não tem como foco central estudar o comportamento das lajes mistas no estado limite último, de colapso. No entanto, as lajes são, em sua maioria, definidas com base na verificação da capacidade resistente a vários estados limites último e posteriormente, analisados os deslocamentos máximos verticais em serviço. Quatro modos de colapso devem ser atendidos na especificação da laje: flexão, cisalhamento longitudinal, cisalhamento vertical e punção.

Os estados limites últimos que devem ser verificados são baseados nos seguintes modos de colapso, alguns ilustrados na Figura 3.3 (QUEIROZ e PIMENTA, 2001):

Figura 3.3 – Seções críticas ao colapso



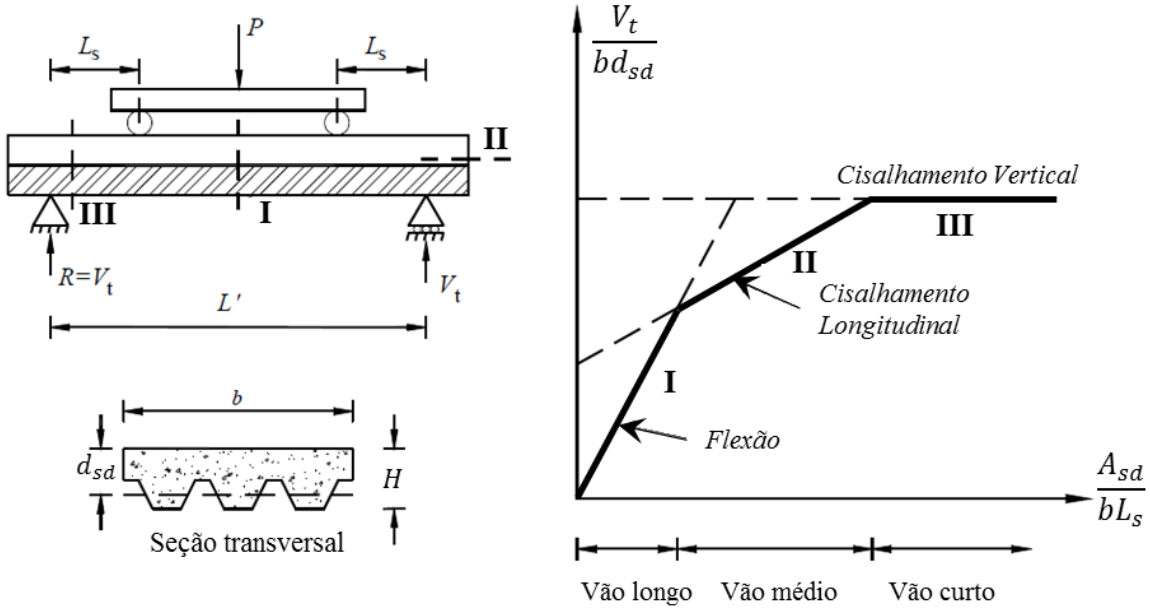

Fonte: Autor (2019)

- *Momento fletor* (Seção crítica I): pressupõe-se interação total entre a fôrma de aço e o concreto nesse estado limite. Costuma ser crítico se o vão for suficientemente grande;
- *Cisalhamento longitudinal* (Seção crítica II): caracteriza-se pela interação parcial entre aço e concreto, não sendo possível atingir a resistência última ao momento fletor. A carga máxima da laje é então determinada pela resistência ao cisalhamento longitudinal e, usualmente é o estado limite de ruína com mais frequência na prática;
- *Cisalhamento vertical* (Seção crítica III): ruptura devido ao cisalhamento usualmente próxima aos apoios, que somente ocorre em casos especiais de lajes espessas de vão curto, sujeitas a cargas elevadas;
- *Punção*: a ruptura pode ser crítica devido a cargas de alta intensidade sobre pequenas áreas e espessuras de laje.

Dessa forma, atendido todos os estados limites de ruptura, tanto a temperatura ambiente e em situação de incêndio, as lajes mistas devem juntamente atender aos deslocamentos máximos em serviço (flechas) e a ocorrência de fissuração e vibrações. Usualmente, os fabricantes fornecem em forma de tabelas, para cada tipo e espessura de fôrma de aço, o vão máximo sem escoramento nas situações de vãos simples, duplos, triplos e balanços, para cada altura total da laje mista. Para a laje mista, em geral apresentam para um dado vão, definido a espessura e altura total da laje, a sua capacidade de carga sobreposta máxima.

Dentre os estados limites últimos, o cisalhamento longitudinal é usualmente o estado limite crítico de lajes mistas e caracteriza a estrutura mista de interação parcial. O Eurocode 4 (2004) apresenta dois métodos para avaliação da capacidade resistente de cisalhamento longitudinal das lajes mistas, conhecidos como método m-k e o método de interação parcial. Em ambos os métodos, a capacidade resistente ao cisalhamento longitudinal é calculada por meio de ensaios experimentais em escala real dos protótipos. Essa característica é dependente da geometria e da flexibilidade de cada tipo de perfil, que inclui o tipo de mossas usadas e a esbeltez da laje (GHOLAMHOSEINI, 2014). A Figura 3.4 mostra um esquema dos ensaios feitos para determinação da capacidade resistente das lajes mistas de aço e concreto, sendo possível observar alguns modos de colapso possíveis.

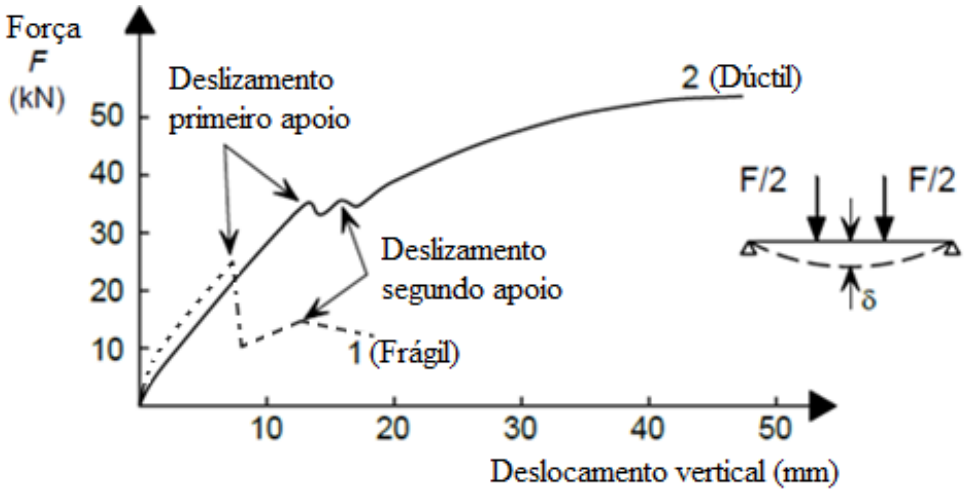
Figura 3.4 – Ensaio rápido e modos de falha possíveis nas lajes mistas




Fonte: Adaptado de Gholamhoseini (2014)

Nesses ensaios são medidos para o nível de carregamento, os deslocamentos verticais e as medidas de deslizamentos entre a fôrma de aço e o concreto nas extremidades. Se distinguem dois comportamentos característicos da laje: comportamento dúctil e frágil. A Figura 3.5 mostra um esquema do comportamento de lajes mistas com acréscimo do carregamento e os deslocamentos verticais (flechas) tipicamente encontrado nos ensaios de curta duração. No comportamento frágil a laje sofre uma queda de resistência imediata, com expressivo deslizamento relativo entre o aço e concreto no apoio. O comportamento dúctil é sempre o almejado, com a presença deslizamentos, mas com permanente resistência às cargas.

Figura 3.5 – Exemplo de comportamento frágil (1) e dúctil (2) de lajes mistas




Fonte: Hicks (2008)

De maneira geral, inicialmente as lajes mistas apresentam interação completa, onde os carregamentos são suportados pelo aço e concreto. Com o avanço do carregamento aplicado a laje fissura, inicia-se uma separação entre o aço e o concreto na região de aplicação da força, perdendo aos poucos a ação mista, passando à interação parcial. Ocorre então deslizamentos relativos entre o aço e o concreto. Nas lajes mistas frágeis após o deslizamento verifica-se uma perda de rigidez e a laje não suporta mais acréscimos de carregamentos. Para as lajes dúcteis, mesmo ocorrendo deslizamentos ainda apresentam capacidade para suportar considerável acréscimo de carregamento.

Como referência, o Eurocode 4 (2004) e AS/NZS 2327 (2017) definem o comportamento das lajes como dúctil se, a força máxima em um ensaio, superar 10% a força que causou um deslizamento relativo nas extremidades da laje de 0,10mm. Caso não atendido, o comportamento é dito frágil. Cita ainda que a força máxima é o menor valor entre a maior força atingida no experimento e a força correspondente à flecha $L'/50$ do ensaio. A depender do tipo de comportamento apresentado nos ensaios experimentais, as normas indicam qual procedimento de cálculo podem ser usados para avaliação do cisalhamento longitudinal, ao qual vale citar que o metodo de interação parcial pode ser usado apenas para lajes que apresentam comportamento ductéis.

Maiores informações e discussões, além das normas técnicas, e aplicação em exemplos sobre os estados limites últimos podem ser vistos em Queiroz e Pimenta (2001), Queiroz, Pimenta e Martins (2012), Johnson (2013) e Calado e Santos (2013).

## 3.4 Estado limite de fissuração inaceitável

De forma geral, observa-se que as normas indicam armaduras mínimas no atendimento ao estado limite de fissuração do concreto, que varia a cada especificação normativa. A fissuração aqui não é aquela definida pela abertura de fissuras em barras de aço tracionadas, visto na face inferior há a presença da fôrma de aço e está é impermeável aos agentes externos.

A ABNT NBR 8800 (2008) indica que para as lajes calculadas como simplesmente apoiadas, deve-se colocar armadura para combater os efeitos da retração e temperatura com área não menor que 0,10% da seção de concreto acima da face superior da fôrma, mesmo valor indicado pela norma britânica BS 5950-4 (1994) e indica que deve ser colocada preferencialmente a 20 mm abaixo do topo da laje. A norma canadense CSSBI S3 (2008) indica uma tabela com área mínima em função da altura da capa de concreto, com mínimo de 60 mm²/m. A norma ANSI/ASCE 3-91 (1992) indica o uso de área de aço de 0,075% da seção de concreto acima da nervura da fôrma, com mínimo de 60 mm²/m.

As lajes com continuidade de vãos podem ser dimensionadas como lajes contínuas. No entanto, cita-se que lajes contínuas podem ser calculadas como simplesmente apoiadas e a norma Eurocode 4 (2004) e AS/NZS 2327 (2017) impõem uma área mínima de aço para evitar fissuração da capa de concreto decorrente da retração e temperatura que por si só não se destinam a resistir a momentos fletores negativos, com valores de no mínimo:

- 0,2% de área de aço sobre a área de concreto, caso não disponha de escoramento durante processo construtivo;
- 0,4% de área de aço sobre a área de concreto caso disponha de escoramento durante o processo construtivo.

O Eurocode 4 (2004) traz o cálculo de uma área de aço para combater os efeitos da retração em lajes de vigas mistas, no seu item 7.4.2. Alguns autores têm sugerido o uso dessa taxa de armadura para as lajes mistas.

Armaduras na borda superior (negativa) devem ser utilizadas no projeto estrutural quando o momento fletor negativo tiver que ser resistido pela seção, ou seja, a laje é considerada contínua e será calculada como tal. O estado de fissuração do concreto nessas regiões de momento negativo deve ser verificado; no Brasil é feita de acordo com a norma ABNT NBR 6118 (2014) para o concreto normal e para concretos leves, cita-se o Eurocode 2 Part 1-1 (2004), para esse requisito de durabilidade.

Todos esses fatores e considerações de cálculo, quanto ao uso de armaduras e disposições, continuidade dos vãos e a fissuração influenciam na rigidez da laje mista e de maneira direta, no comportamento de evolução das flechas do elemento fletido.

## 3.5 Aceitabilidade dos deslocamentos verticais máximos

A avaliação dos deslocamentos verticais máximos faz parte das verificações em serviço e conforme Galambos e Ellingwood (1986) tem grande importância. Apresentam em seu trabalho, exemplos do efeito dos deslocamentos estruturais excessivos, aos quais vale enumerar:

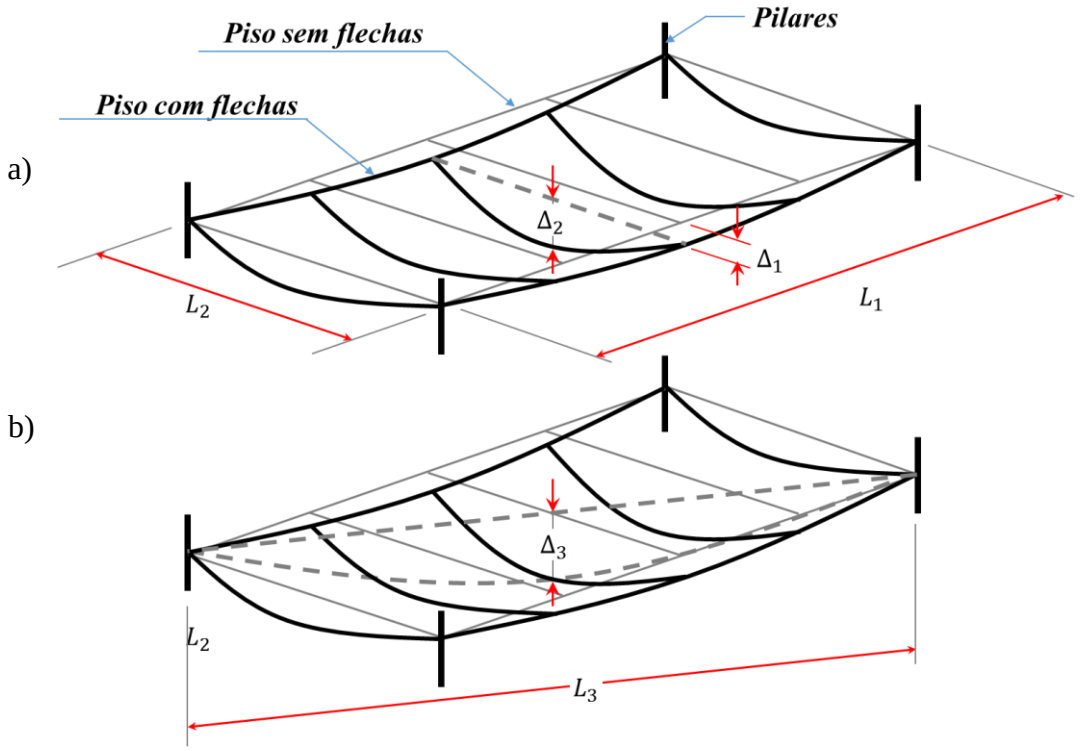
a) Danos locais a elementos não estruturais por efeito de carregamento, pela variação de temperatura, pela retração ou deformação lenta do concreto;

b) Deslocamentos sensorial ou visualmente perceptíveis causando desconforto ao usuário;

c) Interferência no funcionamento de móveis ou equipamentos como elevadores ou portas de correr.

Normalmente os valores dos deslocamentos são expressos como uma porcentagem do vão livre (L) e a flecha máxima indicada refere-se à medida no meio do vão. Se tratando de uma edificação comum, composta por vigas e lajes, esses elementos fletidos apresentam deformações e flechas que devem ser analisadas individualmente e em efeito conjunto. A norma AS/NZS 2327 (2017) traz ilustrado como considerar esses limites quanto a relação de vão ($L_i$) e flechas ($\Delta_i$), conforme a Figura 3.6, para (a) os elementos individuais e (b) para os efeitos das flechas combinadas de mais de um elemento estrutural.

Figura 3.6 – Verificação de flechas em elementos (a) individuais e (b) com mais de um elemento




Fonte: AS/NZS 2327 (2017)

Os limites usuais de deslocamentos verticais máximos especificados pelas normas são separados para os perfis da fôrma de aço atuando isoladamente, enquanto o concreto fresco, e a estrutura atuando como estrutura mista. A Tabela 3.1 apresenta as principais recomendações dos códigos normativos para os limites de deslocamento máximos permitidos nas lajes mistas.

Tabela 3.1 – Limites de deslocamento máximo permitidos para as lajes mistas em serviço

| Norma | Tipo | Limite de deslocamento | Ações consideradas | Observação |
|---|---|---|---|---|
| **ABNT NBR 8800 (2008) (Brasileira)** | Fôrma isolada | $\leq L_f/180$ ou 20mm | Peso próprio e peso do concreto fresco | $L_f$ é o vão teórico na direção das nervuras; |
| | MISTA | $L_f/350$ | Apenas ações variáveis | |
| **AS/NZS 2327 (2017) (Australiana)** | Fôrma isolada | $\leq L_f/240$ ou 20mm | Peso próprio e peso do concreto fresco + efeito do empoçamento (*) | Boa qualidade de acabamento visual |
| | | $\leq L_f/180$ ou 20mm | Peso próprio e peso do concreto fresco (sem efeito do empoçamento) | Não é requerido boa qualidade de acabamento visual |
| | | $L_f/130$ ou 30mm | Peso próprio e peso do concreto fresco + efeito do empoçamento (*) | Não é requerido boa qualidade de acabamento visual |
| | MISTA | $L_f/250$ | Flecha devido ações totais de serviço | Em balanços ($L_f/125$) |
| | | $L_f/500$ | Flecha que ocorre após adição ou fixação do acabamento | Elementos que suportam acabamentos frágeis |
| | | $L_f/800$ | Flecha das ações impostas (cargas móveis e impactos) | Elementos sujeitos a tráfico de veículos e pedestres |
| **Eurocode 4 e 2 (2004) (Europeu)** | Fôrma isolada | $L_f/180$ | Peso próprio e peso do concreto fresco (*) | $L_f$ é o vão teórico na direção da nervura |
| | MISTA | $L_f/250$ | Combinação Quase-Permanente | |
| **ANSI-SDI C (2011) e ANSI ASCE 3 (1992) (Estadunidense) e CSSBI S3 (2008) (Canadense)** | Fôrma isolada | $\leq L_f/180$ ou 20mm | Peso próprio e peso do concreto fresco | - |
| | MISTA | $L_f/360$ | Apenas ações variáveis | |
| | | $L_f/480$ | Flecha que ocorre após adição ou fixação do acabamento | Elementos que suportam acabamentos frágeis |
| **BS 5950-4 (1994) (Britânica)** *(Substituída pelo Eurocode 4)* | Fôrma isolada | $\leq L_f/180$ ou 20mm | Peso próprio e peso do concreto fresco (sem efeito do empoçamento) | |
| | | $\leq L_f/130$ ou 30mm | Peso próprio e peso do concreto fresco + efeito do empoçamento (*) | |
| | MISTA | $L_f/350$ | Ações impostas | |
| | | $L_f/250$ | Flecha da carga total menos da carga de peso-próprio, somado, quando usado escoramento, a flecha devido a remoção dos mesmos. | |

**Nota 1 (*):** Se a flecha máxima da fôrma isolada sob peso próprio e do concreto fresco e armaduras for menor que 1/10 da altura da laje, o efeito de empoçamento pode ser ignorado no projeto da fôrma de aço. Se for maior, esse efeito deve ser considerado, assumindo-se então uma espessura adicional de concreto de 0,70 vez a flecha máxima.

Fonte: Autor (2019)

O projetista deve impor limite adequado ou basear-se nesses limites estabelecidos pelos códigos aplicados às estruturas de concreto e/ou aço ou a norma ISO 4356 (1977) - Deformações dos edifícios no estado limite de serviço.

A norma australiana AS/NZS 1170.0 (2002) – Ações para projeto estrutural somada a norma AS/NZS 2327 (2017) apresenta um conjunto de valores e explicações mais aprofundadas sobre o estado limite de verificação dos deslocamentos máximos com consideração dos efeitos diferidos ao longo do tempo. Cita que a fluência, quando presente, precisa ser incluída na avaliação da flecha de longo prazo. Cita ainda que os limites são fortemente influenciados pelos acabamentos e instalações na superfície do elemento estrutural, dando ênfase à acabamentos ou instalação de vidraria, onde critérios costumam ser mais rigorosos.

A norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) indica também que em alguns casos, limites mais rigorosos devem ser adotados considerando, por exemplo, o uso da edificação, as características dos materiais de acabamento, o funcionamento adequado de equipamentos, questões de ordem econômica e a percepção de desconforto.

Pela ABNT NBR 8800 (2008), o responsável técnico pelo projeto que deve decidir quais combinações de serviço que devem ser usadas para a avaliação das lajes mistas, suas características dos materiais de acabamento vinculados à estrutura e a sequência da construção. Dependendo desses fatores, indica que pode ser que se tenha de alterar uma combinação de serviço comumente utilizada. A combinação de ações quase-permanentes normalmente é adotada para cálculo dos deslocamentos relacionados à aparência da estrutura. No entanto, nas situações em que esse deslocamento venha a afetar o funcionamento de equipamentos ou causar danos permanentes a elementos não-estruturais sujeitos à fissuração, como paredes divisórias e forros, colocados antes que as ações consideradas passem a atuar, deve-se então utilizar, no primeiro e segundo casos, combinação frequente e, no terceiro, rara (ABNT NBR 8800, 2008).

Os catálogos fornecidos pelos fornecedores das fôrmas de aço através de tabelas para a verificação e decisão das cargas máximas e vãos sem escoramentos para a fôrma atuando antes e depois da cura do concreto, não informam o estado limite dominante. Sabe-se que o estado limite de deslocamentos excessivos pode ser um caso crítico na determinação das cargas na verificação do atendimento aos estados limites de serviço.

Apesar das lajes mistas estarem sendo amplamente utilizadas, pouca orientação ainda é disponível nacionalmente sobre o comportamento em serviço frente as novas constatações. Principalmente a influência do comportamento do concreto ao longo do tempo, dado seu comportamento não-linear e os efeitos diferidos ao longo do tempo.

# 4 COMPORTAMENTO DO CONCRETO E SUA RELAÇÃO COM O TEMPO

*Este capítulo apresenta o comportamento do concreto e o as propriedades dependentes do tempo, como a fluência e a retração. Apresentam-se as parcelas de deformação do concreto e, de maneira sucinta a teoria dos modelos usados para descrever os fenômenos e a previsão desses efeitos quando aplicados às lajes mistas de aço e concreto, com destaque à retração não-uniforme. Além disso, discute o efeito da contribuição do concreto fissurado à rigidez (tension stiffening effect) de um elemento estrutural de concreto em serviço.*

## 4.1 Tipos de deformação do concreto

As deformações no concreto podem ser compreendidas como a resposta do material às solicitações externas e ao meio ambiente de exposição. A intensidade dos carregamentos atuantes, a sua duração, as variações de temperatura e umidade e os fenômenos de retração e fluência são os principais fatores que influenciam as deformações do concreto.

A deformação total do concreto $\varepsilon_c$ é dada pela soma das deformações instantânea ($\varepsilon_{ci}$), de temperatura $\varepsilon_c(\Delta T)$ e das deformações que variam com o tempo: da retração (do inglês *shrinkage*) $\varepsilon_{sh}(t)$ e da fluência (do inglês *creep*) $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$, resultando na Equação 4.1:

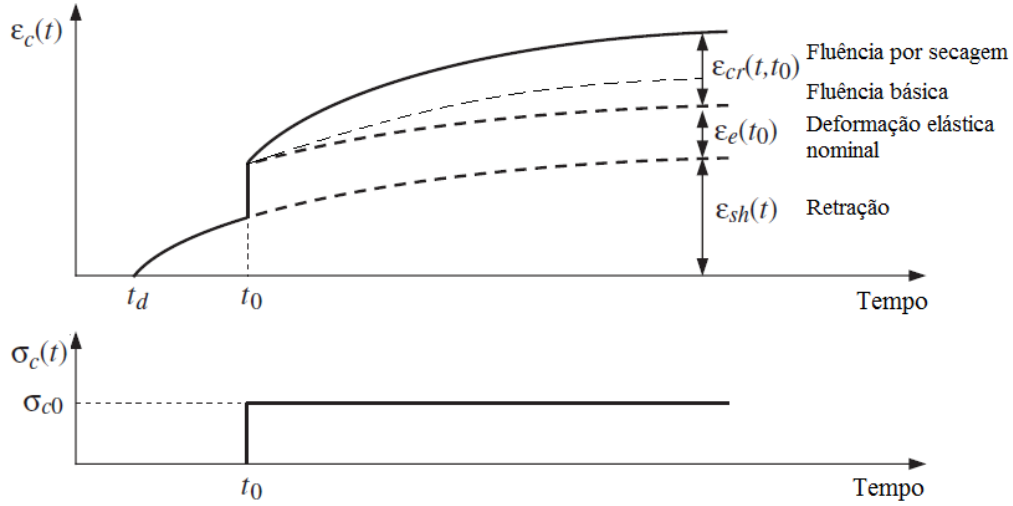
$$\varepsilon_c(t, t_0) = \varepsilon_{ci} + \varepsilon_T(t) + \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) \quad (4.1)$$

A deformação imediata ou instantânea é a que se apresenta no momento da aplicação do carregamento. Além das deformações devidas à carga aplicada, há as deformações devido à variação de temperatura e as inerentes do concreto causadas pela perda de água, denominada deformação por retração. Além disso, surge a fluência ou também chamada de deformação lenta, que se trata do aumento da deformação quando sob tensão mantida constante, ou quando dada uma deformação constante a fluência se manifesta como redução progressiva da tensão ao longo do tempo, denominando a relaxação, conforme Neville (1997). A fluência do concreto é atribuída à migração de água adsorvida, causada pela carga externa; ao se solicitar o concreto, há uma redistribuição dessa água na estrutura de gel pelo esqueleto do sólido e pelos poros.

A fluência total do concreto é caracterizada pela soma da fluência básica e da fluência por secagem. A fluência básica é conceituada por Mehta e Monteiro (2014) como o aumento de deformação ao longo do tempo com tensão constante sob condição de umidade relativa do ar de 100%. A fluência por secagem é uma fluência adicional que ocorre quando a peça está sob carregamento e sob condições de secagem.

Dessa forma, a deformação total, para uma temperatura constante, é a soma da deformação elástica, da deformação devido à fluência total e da deformação por retração. Neville (1997) cita que a fluência é dada pela deformação total de um elemento carregado, menos a retração do mesmo elemento descarregado observadas as mesmas condições durante um mesmo período de tempo. Esquematicamente tem-se, de maneira qualitativa, as deformações apresentadas na Figura 4.1, em que a retração começa no tempo $t_d$, instante de tempo após a concretagem ou fim da cura úmida e o carregamento imposto a laje se dá a um tempo $t_0$.

Figura 4.1 – Deformação do concreto dependente do tempo sob carga constante




Fonte: Adaptado de Ranzi, Leoni e Zandonini (2013)

Ranzi, Leoni e Zandonini (2013) citam que as contribuições de cada deformação são convenientemente tratadas separadamente, embora isso não seja rigorosamente uma realidade. Dado que o módulo de deformação do concreto aumenta ao longo do tempo e a deformação elástica tende a decrescer progressivamente, a rigor, a fluência deveria ser tomada como a deformação que excede a deformação elástica no momento em que a fluência está sendo determinada. No entanto, para fins práticos considera-se elástica a deformação imediata e o aumento de deformação devido à carga constante é considerado como fluência.

A componente de retração independe do carregamento ou estado de tensão da peça e começa logo que o concreto começa a endurecer e já a fluência ocorre quando a peça está sujeita a um carregamento. Gilbert e Ranzi (2011) citam que aproximadamente 50% da fluência total desenvolve-se nos 2-3 meses iniciais e aproximadamente 90% depois de 2-3 anos. Para a retração indica que 30% da retração total desenvolve-se nas primeiras 2-3 semanas. De modo geral, observa-se que a fluência e a retração tendem a uma assíntota horizontal num tempo dito infinito, e desse modo, a deformação a longo prazo tende a um valor limite.

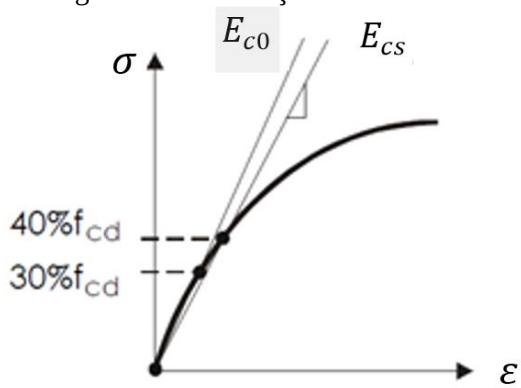
### *4.1.1 Deformação elástica do concreto*

A deformação instantânea ocorre imediatamente após a aplicação do carregamento. Dado que o módulo de deformação do concreto possui caráter não-linear, explicada pelo processo de microfissuração progressiva do concreto sob carregamento, um modelo constitutivo do comportamento é necessário para prever o seu comportamento do concreto. Por se tratar de material multifásico e heterogêneo, o módulo de deformação varia com o nível do carregamento, mas a níveis de tensões baixas, menores que cerca de 40% da resistência à compressão, mantem-se razoavelmente constante, sendo válida a lei de Hooke, de proporcionalidade entre tensão e deformação.

Os métodos utilizados para estimativa do valor do módulo de deformação do concreto são aproximados e esses métodos originam diferentes tipos de módulos, que valem citar o módulo de deformação tangente inicial e o módulo de deformação secante, como mostra a Figura 4.2 e suas definições:

- Módulo de deformação tangente inicial ($E_{ci}\ ou\ E_{co}$), também chamado de módulo de deformação longitudinal, é o modulo de deformação tangente inicial cordal a 30% da resistência do concreto. Com esse nível de carregamento a curva é aproximadamente linear, dado que microfissuras são estáveis na zona de transição na interface (MEHTA e MONTEIRO, 2014);
- Módulo de deformação secante ($E_{cs}$) é o modulo de deformação tangente inicial cordal a 40% da resistência do concreto. Convencionalmente, simula a estrutura durante o carregamento inicial e é usado nas análises elásticas de projeto, na determinação de esforços solicitantes e verificação dos estados limites de serviço.

Figura 4.2 – Definição do módulo de deformação do concreto




Lei de Hooke:

$$\varepsilon_{ci}(t) = \frac{\sigma_{c0}}{E_c(t_0)} \qquad (4.2)$$

Onde: $t_0$ é a idade do carregamento.

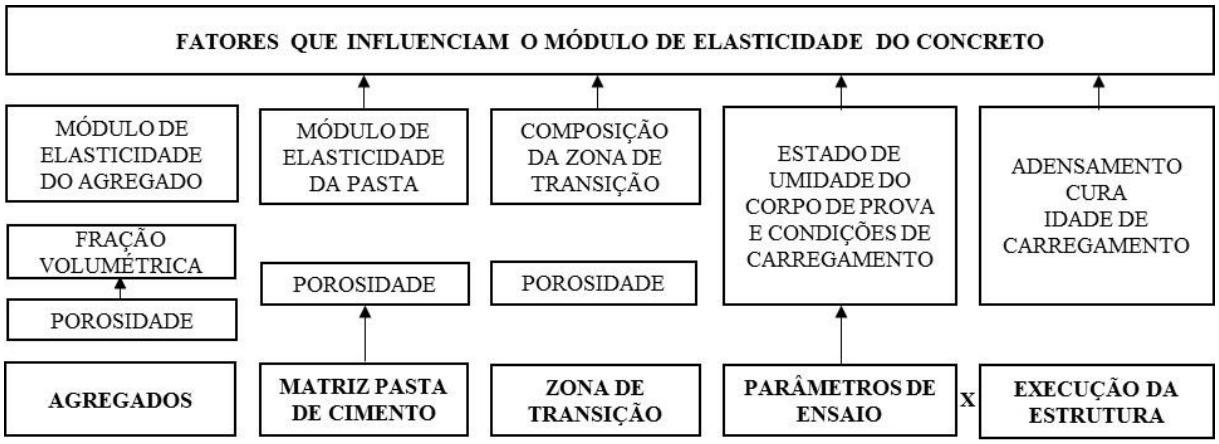
Fonte: Autor (2019)

Quando o concreto é sujeito a compressão, assume-se permanecer no regime elástico-linear. Se o concreto está sujeito a tração ou flexão, assume-se a capacidade a tração como a

resistência característica a tração e o concreto fissura quando atinge essa resistência. Dessa forma, assume-se a deformação elástica instantânea, linear e sempre recuperável com o descarregamento. Portanto, a relação tensão deformação é dada pela Equação 4.2 da Lei de Hooke.

Na literatura existem algumas abordagens que permitem estimar o módulo de elasticidade ou módulo de deformação do concreto ($E_{ci}$ $ou$ $E_{cs}$). Vários fatores afetam as propriedades do concreto e, consequentemente, o valor do módulo de elasticidade do concreto. A Figura 4.3 apresenta resumidamente os principais fatores.

Figura 4.3 – Fatores que afetam o módulo de elasticidade do concreto




Fonte: Adaptado de Mehta e Monteiro (2014)

A determinação do módulo de elasticidade do concreto pode ser obtida por ensaios físicos estáticos e dinâmicos. Os modelos estáticos são determinados para uma certa velocidade de carregamento previamente estabelecida e os modelos dinâmicos são determinados por ensaios dinâmicos por ultrassom. Para a aplicação ao cálculo estrutural predomina o uso dos valores obtidos em ensaios estáticos, seguindo estes procedimentos normativos como os apresentados na ISO 1920-10 (2010), ABNT NBR 8522 (2017) e ASTM C 469 (2002) na determinação do módulo de elasticidade (deformação) do concreto.

Previsões teóricas, baseadas em resultados de ensaios experimentais, têm sido adotadas em normas técnicas de projeto estrutural no mundo todo, correlacionando o módulo de elasticidade do concreto à sua resistência característica à compressão. No entanto, cita-se que não há uma correlação direta em todos os casos entre módulo de elasticidade e a resistência à compressão. Com isso algumas normas incluem na formulação dos modelos de previsão, além da resistência à compressão, a massa específica e o tipo de agregado graúdo utilizado.

Tabela 4.1 – Expressões para estimativa do módulo de elasticidade do concreto segundo modelos de previsão

| Código ou norma de projeto | Módulo Tangente ($E_{ci}$) | Módulo Secante ($E_{cs}$) |
|---|---|---|
| **ABNT NBR 6118 (2007)** | $E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}$ | $E_{cs} = 0{,}85 \cdot E_{ci}$ |
| **ABNT NBR 6118 (2014)** | $E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600\sqrt{f_{ck}}$ *(Para* $20\ MPa \leq f_{ck} \leq 50\ MPa$*)*<br>$E_{ci} = 21{,}5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E{}^{(1)} \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1{,}25\right)^{1/3}$ *(Para* $55\ MPa \leq f_{ck} \leq 90\ MPa$*)* | $E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci}$<br>$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\left(\frac{f_{ck}}{80}\right) \leq 1{,}0$ |
| **ACI 318 (2014)** | - | $E_c = 0{,}043 \cdot w_c{}^{1{,}5} \cdot \sqrt{f_c'}$ (2)<br>$1440 \leq w_c \leq 2560\ (kg/m^3)$<br>$E_c = 4700 \cdot \sqrt{f_c'}$<br>(concreto de peso normal) |
| **AS 3600 (2018)** | - | $E_c = \rho^{1{,}5} \cdot 0{,}043 \cdot \sqrt{f_{cmi}}$ (3)<br>*(Para* $f_{ck} \leq 40\ MPa$*)*<br>$E_c = \cdot\ \rho^{1{,}5} \cdot (0{,}024 \cdot \sqrt{f_{cmi}} + 0{,}12)$<br>*(Para* $f_{ck} > 40\ MPa$*)* |
| ***fib* Model Code (2010)** | $E_{ci} = 21{,}5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E{}^{(1)} \cdot \left(\frac{f_{ck} + 8}{10}\right)^{1/3}$ | $E_c = \alpha_i \cdot E_{ci}$<br>$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\left(\frac{f_{cm}}{88}\right) \leq 1{,}0$ |
| **EUROCODE 2 (2004)** | $E_{ci} = 1{,}05 \cdot E_{cm}$ | $E_{cm} = 22 \cdot \left(\frac{f_{ck}+8}{10}\right)^{1/3}$ (4)<br>(concreto peso normal)<br>$E_{lcm} = \eta_E \cdot E_{cm}$<br>$\eta_E = (\rho/2200)^2$<br>(concreto leve) |

Fonte: Autor (2019)

***Observações:***

*(1) Fator que depende do tipo de agregado:* $\alpha_E = 1{,}2\ (basalto\ e\ diabásio)$; $\alpha_E = 1{,}0\ (granito\ e\ gnaisse)$; $\alpha_E = 0{,}9\ (cálcario)$ *e* $\alpha_E = 0{,}7\ (arenito)$*, ABNT NBR 6118 (2014);*

*(2)* $f_c'$ *é a resistência à compressão especificada do concreto,* $w_c$ *é a massa especifica do concreto, ACI 318 (2014) indica que o módulo é definido como a linha secante de 0 a 0,45*$f_c'$ *e reforça que ao módulo de elasticidade é influenciado pelo agregado e proporção da mistura do concreto, por isso, possui intervalo de confiança de 80-120%.*

*(3)* $f_{cmi}$ *é o valor médio da resistência à compressão do concreto na sua idade, pode ser tomado como 90% do valor médio da resistência dos corpos de prova cilíndricos ou tomados como dado na Tabela 4.2;* $\rho$ *é a massa específica do concreto, AS3600 (2018) indica que a estimativa tem intervalo de confiança de* $\pm 20\%$*.*

Tabela 4.2 – Propriedades do concreto segundo AS 3600 (2018)

| $f_c'$ (MPa) | 20 | 25 | 32 | 40 | 50 | 65 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{cmi}$ (MPa) | 22 | 28 | 35 | 43 | 53 | 68 | 82 | 99 |
| $E_c$ (MPa) | 24000 | 26700 | 30100 | 32800 | 34800 | 37400 | 39600 | 42200 |

Fonte: AS 3600 (2018)

*(4) O módulo de elasticidade* $E_{cm}$ *é o valor aproximado da reta secante entre tensão de 0 a 0,4*$f_{cm}$ *e tomado por base agregado do tipo quartzito. Para calcário e arenitos indica reduzir em 10% e 30% respectivamente. Para o basalto o valor deve ser aumentado em 20%.*

As expressões apresentadas, em geral, são válidas para concretos com, no mínimo, 28 dias de idade. Para uma melhor avaliação das flechas é fundamental um estudo criterioso do módulo de elasticidade, quando necessário, às primeiras idades e em condições diferentes de cura, haja vista a ocorrência de retirada de escoramento, sistemas de protensão ou carregamentos ocorrerem antes de 28 dias. Desse modo, existem previsões teóricas e que o módulo de elasticidade em uma idade menor que 28 dias pode ser avaliado pelas expressões da Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Expressões para estimativa do módulo de elasticidade do concreto segundo modelos de previsão para idades menores que 28 dias

| **Código ou norma de projeto** | **Módulo Tangente ($E_{ci}$)** | **Observações** |
|---|---|---|
| **ABNT NBR 6118 (2014) e fib Model Code (2010)** | $E_{ci}(t) = \left[\frac{f_{ckj}}{f_{ck}}\right]^{0,5} \cdot E_{ci}$ $(Para\ \ 20\ MPa \leq f_{ck} \leq 45\ MPa)$ | $E_{ci}(t)$ é a estimativa do módulo de elasticidade do concreto em uma idade entre 7 e 28 dias |
| | $E_{ci}(t) = \left[\frac{f_{ckj}}{f_{ck}}\right]^{0,3} \cdot E_{ci}$ $(Para\ \ 50\ MPa \leq f_{ck} \leq 90\ MPa)$ | $f_{ckj}$ é a resistência característica à compressão do concreto na idade que se pretende estimar o módulo de elasticidade, em MPa. |
| **EUROCODE 2 (2004)** | $E_{cm}(t) = \left[\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}}\right]^{0,3} \cdot E_{cm}$ | $f_{cm}(t)$é a resistência característica à compressão do concreto na idade *t* dias |
| | Sendo $\beta_1 = \frac{f_{ckj}}{f_{ck}} = \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}} = e^{\left\{s\left[1-\left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]\right\}}$ | *Onde:* $s = 0{,}38\ para\ cimento\ CPIII\ e\ CPIV$ $s = 0{,}25\ para\ cimento\ CPI\ e\ II$ $s = 0{,}20\ para\ cimento\ CPV - ARI$ *t é a idade efetiva do concreto, em dias.* |

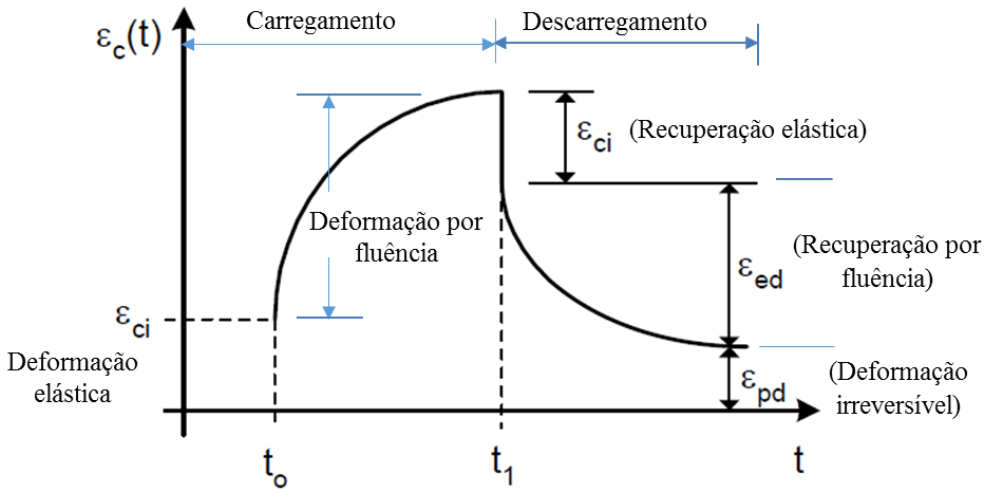
Fonte: Autor (2019)

Cabe salientar que essas expressões conduzem, algumas vezes, a valores com uma faixa de tolerância prevista da ordem de 20%, como salienta a AS 3600 (2018) e ACI 318 (2014), sendo que os valores são tão próximos do real quanto mais se aproximarem dos materiais usados, do tipo de mistura, da composição do concreto, das condições de ensaio, daqueles utilizados nos estudos experimentais. De maneira geral, frequentemente se utiliza em projetos dessas previsões dos valores do módulo de elasticidade para estudo do comportamento do sistema misto aço-concreto, no cálculo das tensões e das deformações imediatas e de longa duração.

### *4.1.2 Fluência*

A fluência do concreto pode ser classificada em fluência básica e fluência por secagem. Para as estruturas esbeltas como as lajes, a fluência por secagem é importante, uma vez que a troca de água é facilitada quanto menores forem as espessuras e maiores as áreas expostas do elemento. Experimentalmente, verificou-se que existe uma parcela de deformação de fluência recuperável (chamada de deformação elástica recuperável) e outra parcela irrecuperável (parcela de deformação plástica diferida), conforme esquematicamente apresentado na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Parcelas de deformação de fluência




Fonte: Autor (2019)

Na Figura 4.3, a estrutura de concreto é carregada no tempo $t_0$ e mantido o carregamento constante até $t_1$ e então descarregada. Observa-se que a fluência aumenta com o passar do tempo. A deformação imediata $\varepsilon_{ci}$ é recuperada quando do descarregamento e ocorre uma recuperação por fluência ($\varepsilon_{ed}$) com o passar do tempo, no entanto, a parcela de deformação irreversível ($\varepsilon_{ed}$) é residual.

Normalmente, a deformação por fluência do concreto compõe-se de duas parcelas, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida é irreversível e ocorre nas primeiras 24 horas após a aplicação do carregamento que originou e é inversamente proporcional a idade do concreto (tempo desde sua cura) no instante de aplicação da carga. A fluência lenta é composta por duas parcelas: a deformação lenta irreversível e a deformação lenta reversível. A parcela reversível ocorre em função da restituição da deformação elástica do agregado presente no concreto. Em média. 25% da fluência total ocorre após 2 semanas, 55% após 3 meses e 75% após 1 ano (ISAIA, 2011)

A deformação lenta irreversível é formada pela deformação básica, quando a umidade ambiental é superior ou maior que a de saturação da pasta de cimento, e pela deformação por secagem, que ocorre quando a umidade ambiente é inferior à da pasta e, com isso, há perda de água do concreto para o ambiente externo. A deformação básica é influenciada pela composição do concreto, onde se destacam: tipo de agregado, tamanho e quantidade, resistência e pela idade de aplicação do carregamento. A deformação por secagem é influenciada pela mistura do concreto, como o tipo de cimento, fator água-cimento e abatimento, e geometria exposta da peça de concreto. Maiores informações estão presentes em Mehta e Monteiro (2014) e Gilbert e Ranzi (2011).

Muitos fatores influenciam tanto na magnitude, quanto na taxa de desenvolvimento do fenômeno, seja amplificando ou atenuando seus mecanismos. A fluência aumenta à medida que a umidade relativa diminui e também é maior em elementos com grandes áreas expostas, como lajes. Também é dependente da temperatura ambiente. Uma temperatura mais elevada aumenta a deformabilidade da pasta de cimento e acelera a secagem, que acelera a fluência. Além disso, a fluência depende do histórico de carga, por exemplo a magnitude e a duração da tensão e a idade do concreto quando o esforço foi aplicado pela primeira vez.

Os códigos e orientações citam que se a tensão do concreto for menor que 50% da resistência do concreto, a fluência é aproximadamente proporcional à tensão e é conhecida como fluência linear. Em um nível mais alto de tensão, a fluência aumenta de forma não-linear, e atribui-se este comportamento ao aumento da microfissuração da microestrutura do concreto.

O mecanismo de ocorrência da fluência ainda é controverso na comunidade científica. Sua origem está ligada à pasta de cimento endurecida, essa pasta consiste de um gel com muitos capilares, formados por silicatos hidratados e água evaporável. Bazant (1972) sugere que a fluência é devido à desordem e instabilidade que caracterizam a ligação entre os colóides formadores da pasta.

Os modelos de fluência são, em geral, baseados em um coeficiente de fluência ($\varphi$), fornecido pelos códigos normativos ou publicações específicas. Muitos métodos são usados para analisar os efeitos da fluência, em que se destacam o Método do Módulo Efetivo (EMM), o Método do Módulo Efetivo Ajustado à Idade (AEMM), O Método da Taxa de Fluência (RCM), o Método da Superposição do Passo-a-Passo (SSM) (GILBERT E RANZI, 2011). De acordo com Jayasinghe (2011) os dois primeiros métodos são mais amplamente usados.

Resumidamente, a maioria dos métodos são baseados no coeficiente de fluência ($\varphi_{cr}$), definido como a razão entre deformação por fluência e a imediata. O método analítico mais simples disponível para considerar a fluência é o Método do Módulo Efetivo (EMM)

apresentado por Faber (1927). De acordo com Park, Lee e Lee (2016) esse método costuma fornecer o maior valor em casos de histórico de tensão variável no tempo. A ideia básica deste modelo é modificar o módulo de elasticidade do concreto para considerar a fluência. A deformação por fluência $\varepsilon_{cr}(t)$ e a correspondente deformação total $\varepsilon_c(t)$ devido à tensão total $\sigma_c(t)$ é calculada conforme Equação 4.3 e 4.4.

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{\varphi_{cr}(t,t_0)}{E_c(t_0)}\sigma_c(t) = J(t,t_0)\sigma_c(t) \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_c(t) = \left[\frac{1+\varphi_{cr}(t,t_0)}{E_c(t_0)}\right]\sigma_c(t) + \varepsilon_{sh}(t)$$

$$= \frac{\sigma_c(t)}{E_{ef,cc}(t,t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) \tag{4.4}$$

Onde $J(t,t_0)$ é chamada de função de conformidade, $\varepsilon_c(t)$ é a deformação total do concreto na idade t, $E_{ef,cc}(t,t_0)$ é o módulo efetivo e $\varepsilon_{sh}(t)$ é a deformação por retração.

Um modelo um pouco mais complexo é o Método do Módulo Efetivo Ajustado pela Idade (AEMM, *Age-adjusted Effective Modulus Method*), Trost (1967) introduziu um coeficiente de envelhecimento $\chi(t,t_0)$ ao método EMM de Faber (1927) para explicar o envelhecimento do concreto. Mais tarde foi revisto e mais rigorosamente desenvolvido por Dilger e Neville (1971) e Bazant (1972). A deformação por fluência $\varepsilon_{cr}(t)$ e a correspondente deformação total $\varepsilon_c(t)$ em uma idade *t* passa a ser expressa com módulo efetivo ajustado a idade ($\overline{E}_{ef,cc}(t,t_0)$) é calculada conforme Equação 4.5 e 4.6.

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}\varphi_{cr}(t,t_0) + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(t_0)}\chi(t,t_0)\varphi_{cr}(t,t_0) \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_c(t) = \left[\frac{1+\varphi_{cr}(t,t_0)}{E_c(t_0)}\right]\sigma_c(t_0) + \left[\frac{1+\chi(t,t_0)\varphi_{cr}(t,t_0)}{E_c(t_0)}\right]\Delta\sigma_c(t) + \varepsilon_{sh}(t)$$

$$= \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ef,cc}(t,t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{\overline{E}_{ef,cc}(t,t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) \tag{4.6}$$

Onde $\Delta\sigma_c(t)$ é a variação de tensão durante o tempo de $t$ a $t_0$. O coeficiente de envelhecimento $\chi(t,t_0)$ é dependente do nível de tensão e seu valor é obtido a partir de ensaios de fluência sob um histórico de tensão variável. Ranzi e Gilbert (2011) citam que o coeficiente depende de várias variáveis entre algumas principais estão a idade do primeiro carregamento, da duração do carregamento, o tamanho e a forma do elemento. Para peças carregadas em poucas semanas após cura e com duração acima de 3 meses, o coeficiente de envelhecimento

fica entre 0,55 e 0,72 para concreto classe normal, para idades maiores de carregamento inicial o valor do coeficiente vai se aproximando de 1. A faixa usual dos valores do coeficiente de envelhecimento se situa entre 0,5 e 1. Para situações práticas a valor de $\chi(t, t_0) = 0{,}65$ é um valor aceitável médio para os problemas de fluência com carregamento de idades menores que 20 dias. Para concreto com idade de carregamento maiores que 28 dias, Ranzi e Gilbert (2011) indicam o valor de $\chi(t, t_0) = 0{,}75$, onde os mesmos autores indicam que geralmente esses valores levam a boas aproximações tanto do comportamento do material quanto estrutural.

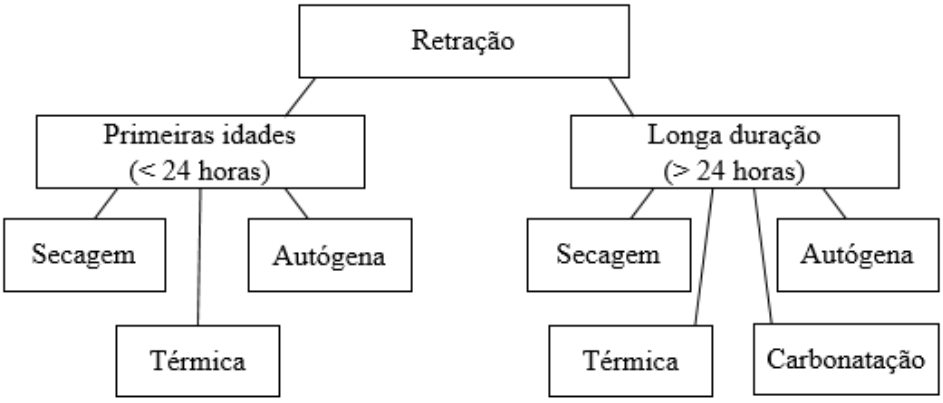
Um modelo mais refinado é representado pelo *Modelo Step by Step* (SSM), que permite uma previsão mais precisa das mudanças nas tensões de concreto que ocorrem ao longo do tempo (Park, Lee e Lee, 2016). Maiores informações desse modelo é apresentada em Ranzi e Gilbert (2011) e Park, Lee e Lee (2016). Para o presente trabalho utilizam-se para a consideração da fluência o Método do Módulo Efetivo (EMM) e o Método do Módulo Efetivo Ajustado pela Idade (AEMM).

### *4.1.3 Retração*

A retração é a redução de volume do concreto durante o processo de endurecimento, devido a diminuição do volume de água dos poros. Ocorre um aumento gradual da deformação do elemento devida à sua exposição a ambientes com umidade relativa inferior à de saturação da pasta de cimento e devido às reações químicas próprias do material. Mehta e Monteiro (2014) citam que a pasta de cimento hidratada é a principal causa das deformações relativas pela sensibilidade à umidade no concreto.

De acordo com Gilbert e Ranzi (2011) a deformação por retração pode ser dividida em quatro tipos: retração plástica, retração química ou autógena, retração térmica e retração por secagem. A **retração plástica** ocorre quando a mistura do concreto ainda está viscosa e é devida a perda de água do concreto fresco recém vertido, por exsudação e é acelerada pela exposição da superfície a ventos, baixa umidade relativa do ar e ao aumento de temperatura ambiente, e pode causar fissuração. A retração plástica pode ser minimizada, mantendo a superfície do concreto molhada promovendo uma cura úmida. A Figura 4.5 apresenta os tipos e estágios que pode ser dividido a retração do concreto.

Figura 4.5 – Tipos e estágios da retração do concreto




Fonte: Adaptado de Jayasinghe (2011)

A literatura costuma dividir a retração química e autógena, no entanto, são devidas às reações de hidratação do cimento:

A **retração química** ocorre nos primeiros dias, ou semanas, após a concretagem, pelas reações químicas de hidratação da pasta de cimento e ocorre devido à redução de volume iniciada na hidratação, visto que os produtos gerados têm volumes menores;

A **retração autógena** é a redução de volume da pasta de cimento durante a hidratação do cimento como consequência da remoção da umidade dos poros capilares pela hidratação do cimento. A água utilizada na reação de hidratação sai dos poros capilares do concreto e, assim, reduz o seu volume. A redução de volume que ocorre na retração autógena não é causada pela perda ou ganho de umidade para o ambiente externo circulante, variação de temperatura e restrições (NEVILLE, 1997).

Cita-se ainda a **retração por carbonatação** que é devido à reação química de produtos de hidratação do cimento com dióxido de carbono presente no ar.

A **retração térmica** ocorre nas primeiras horas, ou dias, após a hidratação do cimento, durante a dissipação do calor devido à reação exotérmica da pasta de cimento, que ao se resfriar causa redução de volume. As retrações químicas e térmicas não estão associadas a perda de água da pasta de cimento e a soma de seus efeitos é denominada de deformação por retração endógena.

A **retração por secagem,** ou também chamada retração hidráulica, é causado pela perda de água adsorvida da pasta de cimento do concreto no estado endurecido. Esta deformação está associada à perda de umidade para o meio ambiente. Como resultado, o concreto na superfície externa encolhe mais rapidamente que o interior, levando a tensões de tração na superfícies externas e tensões de compressão no seu interior. A retração é uma das principais causas de

fissuração em elementos de lajes, que pode afetar a durabilidade do concreto. A maior parcela da retração é representada pela retração por secagem (VITTORIO, 2011). Assim como na fluência, de acordo com Metha e Monteiro (2014), a retração por secagem também possui parcela reversível e irreversível.

Na análise de estruturas de concreto a retração é usualmente considerada como a soma de duas parcelas: a retração de secagem e retração autógena. Muitos fatores influenciam, tanto na magnitude, quanto na taxa de desenvolvimento do fenômeno, destacando-se alguns importantes: umidade relativa do ambiente externo, características da pasta de cimento como, por exemplo, o grau de hidratação, o fator água-cimento, o tipo e tamanho dos agregados e a geometria da peça de concreto (ARAÚJO, 2002).

De maneira similar a fluência, a retração pode ser dividida em uma parcela reversível e uma irreversível, a primeira caracteriza-se pelos fenômenos cíclicos da variação de umidade, com molhagem e secagem, que ocorrem ao longo da vida da estrutura, e a segunda, representa o primeiro ciclo de secagem que ocorre em uma peça de concreto, sendo a mais importante, uma vez que é neste primeiro momento que a peça adquire sua estabilidade dimensional característica (MEHTA E MONTEIRO, 2014).

As deformações decorrentes desses mecanismos são responsáveis por efeitos de microfissuração, deslocamentos e pela redistribuição de tensões. No caso da retração, a microfissuração pode aumentar os efeitos de fluência e dessa forma provocar deformações excessivas e indesejadas, ao mesmo tempo que se contida, pode ocasionar em tensões residuais de tração não previstas. Do mesmo modo, as deformações provocadas pela fluência podem influenciar fortemente a retração, por meio da acomodação das deformações, ocorrendo o fenômeno da relaxação do concreto, em que as tensões provocadas pela retração contida são redistribuídas devido ao comportamento visco-elástico apresentado pelo concreto.

## 4.2 Modelos de previsão da fluência e retração

Muitos modelos estão disponíveis na literatura para prever a deformação por fluência e por retração do concreto, como os modelos atuais normativos do ACI 209.2R (2008), AS 3600 (2018), Eurocode 2 (2004), CEB-FIB Model Code MC90-99 (1999), AASHTO LRFD (2014), JSCE (2010), modelo da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014) e os modelos ditos “acadêmicos”: Modelo B4 de Bazant e Rilem (2015) e Modelo GL de Gardner e Lockman (2001).

A previsão real da fluência e da retração do concreto é influenciada por muitos parâmetros e uma previsão real é de difícil exatidão, por serem resultado da interação de muitos

parâmetros e mecanismos físicos. Pressupõe que quanto maior a quantidade de dados para entrada nos modelos de previsão, melhor a aproximação com os resultados experimentais e reais das estruturas. Metha e Monteiro (2014) citam que a divisão da retração e da fluência é feita matematicamente para permitir seus cálculos separadamente, no entanto, fisicamente os efeitos são conjuntos e por vezes dependentes.

Os modelos de previsão apresentam complexidade e a necessidade de uma grande quantidade de dados de entrada, dentre as quais se destacam:

- Propriedades do concreto fresco;
- Propriedades do concreto endurecido;
- Condições ambientais: temperatura e umidade relativa do ar;
- Dimensões e exposição dos elementos;
- Condições, intensidades e idades dos carregamentos.

O ACI Committee-209 (2008) cita que o maior problema para todos os modelos é a correta descrição do concreto. A maioria dos modelos é sensível ao tipo de cimento e a às características relacionadas ao desenvolvimento da resistência do material. O comitê ACI Committee-209 (2008) recomenda fortemente os projetistas a realizar análises de sensibilidade da resposta da estrutura usando os modelos e realizar testes de curto prazo para calibrar os modelos para melhorar as previsões. De maneira geral, não há um acordo sobre quais informações devem ser requeridas para o cálculo das propriedades dependentes do tempo do concreto: as propriedades mecânicas do concreto especificado no momento do projeto devem ser suficientes ou as proporções de mistura também são necessárias.

Até recentemente, a retração autógena não era considerada significativa porque, na maioria dos casos, não excedia 150 *microstrains* (ACI COMMITTEE-209, 2008). No entanto, para concretos com proporções de água-cimento inferiores a 0,40 e com resistências à compressão médias superiores a 60 MPa, a retração autógena pode ser uma parcela importante. O ACI Committee-209 (2008) traz uma comparação e explicação dos principais modelos de previsão de fluência e retração.

Cada modelo apresenta peculiaridades que buscam refletir a sua localidade e dados de calibração experimentais e, por isso, devem ser respeitadas as limitações de utilização desses modelos. De forma geral, a fluência (*creep*) e a retração (*shrinkage*) são calculadas para efeitos práticos pelo coeficiente de fluência ($\varphi_{cr}$) e deformação de retração ($\varepsilon_{sh}$).

Para comparação dos diferentes modelos de previsão é necessário conhecer e estabelecer condições equivalentes dos parâmetros de entrada. Dentre uma das principais correlações a ser

feita é a dos tipos de cimentos, dado a difícil equivalência entre os cimentos dos diferentes países. Kataoka (2010) apresentou uma correlação entre tipos de cimentos apresentados nas normas brasileira (ABNT NBR 6118, 2014), estadunidense (ACI209-2R, 2008) e europeu (Eurocode 2, 2004), Model Code (2010) e Modelo B4 (2015) conforme apresentado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Correlação entre tipos de cimentos

| ABNT NBR 6118 (2014) | ACI209-2R (2008) | Eurocode 2 (2004) | Model Code e modelo B4 (2015) |
|---|---|---|---|
| CPI | ASTM I | N *(Normal)* | R (*normal*) |
| CPII | ASTM II | N *(Normal)* | SL (*slow hardening*) |
| CPIII | ASTM IS | S *(Slow)* | - |
| CPIV | ASTM IP | S *(Slow)* | - |
| CPV | ASTM III | R *(Rapid)* | RS (*rapid hardening*) |

Fonte: Autor (2019)

A Tabela 4.5 apresenta os principais modelos presentes na literatura com os seus intervalos de aplicação na previsão da fluência e retração.

Tabela 4.5 – Intervalos de aplicação dos modelos na previsão da fluência e retração

| Fatores | Modelos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ACI209-2R (2008) | AS3600 (2017) | Eurocode 2 (2004) | NBR 6118 (2014) | Model Code (2010) | Bazant e Rilem B4 (2015) |
| $f_{cm}$(MPa) | - | | | - | 20-130 | 15-70 |
| $f_{ck}$(MPa) | - | 20-100 | - | 20-90 | - | - |
| Nível de tensão (%) | 0-50 | 0-0,40 | 0-0,45 | 0-0,40 | 0-0,40 | 0-45 |
| Agregado/cimento | - | - | - | | - | 1,0-13,2 |
| Água/cimento | - | - | - | - | - | 0,22-0,87 |
| Consumo de cimento (kg/m³) | 279-446 | - | - | - | - | 200-1500 |
| Tipo cimento (Europeu, EUA, Brasil) | ASTM I, II, IS IP, e III | | S, N e R | CP I, II, III, IV e IV | R, SL, RS | R, SL, RS |
| Umidade relativa (%) | 40 a 100 | 40 a 100 | 40 a 100 | 40 a 100 | 40 a 100 | 40 a 100 |
| Temperatura ambiente (ºC) | - | - | -40 a 40 | - | 5 a 30 | -25 a 75 |
| Tempo de cura úmida (dias) | ≥ 1 dia | - | - | ≥ 3 dias | < 14 dias | ≥ 1 dia |
| Idade no carregamento (dias) | ≥ 7 dias | - | - | ≥ 3 dias | > 1 dia | ≥ tempo de cura úmida |

Fonte: Autor (2019)

Apresenta-se no Apêndice A, seis modelos de previsão de retração e fluência: modelo do ACI 209-2R (2008); modelo da AS 3600 (2018), Eurocode 2 (2004), ABNT NBR 6118 (2014), Model Code (2010) e modelo de Bazant e Rilem B4 (2015).

Sobre os modelos, grande maioria dos trabalhos a respeito das lajes mistas ao longo do tempo foram feitos na Austrália, boa parte dos procedimentos de previsão do coeficiente de fluência e retração se baseiam na norma australiana AS 3600 (2009, 2018). Há trabalhos publicados incluindo as previsões das normas do ACI 209-2R (2008) e B4 de Bazant e Rilem (2015).

O modelo AS 3600 (2009) e ACI 209-2R (2008) foram usados por Gholamhoseini (2014) nas suas previsões das flechas nas lajes mistas. A norma AS 3600 (2009) teve recentemente uma atualização e pequenas mudanças no cálculo de parcelas da retração, com a AS 3600 (2018). O modelo da AS 3600 (2018) inclui fatores que levam em conta o tipo de ambiente, geometria da peça com uso de uma espessura fictícia, a maturidade e resistência do concreto e o tempo de carregamento e secagem da estrutura. O ACI 209-2R (2008) leva em conta mais fatores em seu método empírico, como o método de cura, condições ambientais, consumo de cimento, tipo de cimento, geometria exposta e idade de carregamento e secagem.

O modelo do Eurocode 2 (2004) leva em conta basicamente dados da condição ambiental, como temperatura e umidade, geometria exposta, a resistência do concreto e as idades de interesse: carregamento e de tempo de secagem da peça. O modelo da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014) leva em consideração a resistência do concreto, as condições de temperatura e umidade, geometria da peça usando espessura fictícia, tipo de cura, abatimento e tipo de cimento, além das idades do concreto. Os dados de entrada do modelo do Model Code (2010) são muito semelhantes ao modelo da ABNT NBR 6118 (2014), no entanto apresenta formulação mais complexa. O modelo B4 de Bazant e Rilem (2015) é baseado na descrição matemática de dez fenômenos que afetam a fluência e retração. Usa um conjunto de equações e tabelas na previsão das parcelas de retração e de funções de conformidade. Maiores informações podem ser vistas no Apêndice A.

Dessa maneira, observa-se que os modelos mais refinados como o Model Code (2010) e B4 de Bazant e Rilem (2015) apresentam uma certa complexidade na formulação. Todos os modelos foram calibrados experimentalmente, baseados na retração livre e no estudo da fluência. A partir desses modelos, aplicando-os às condições locais e dos materiais utilizados, busca-se para as lajes mistas expandir às previsões para as previsões desses fenômenos, haja vista à influência da fôrma impermeável que afeta o perfil de retração e fluência.

## 4.3 A retração não-uniforme na laje mista

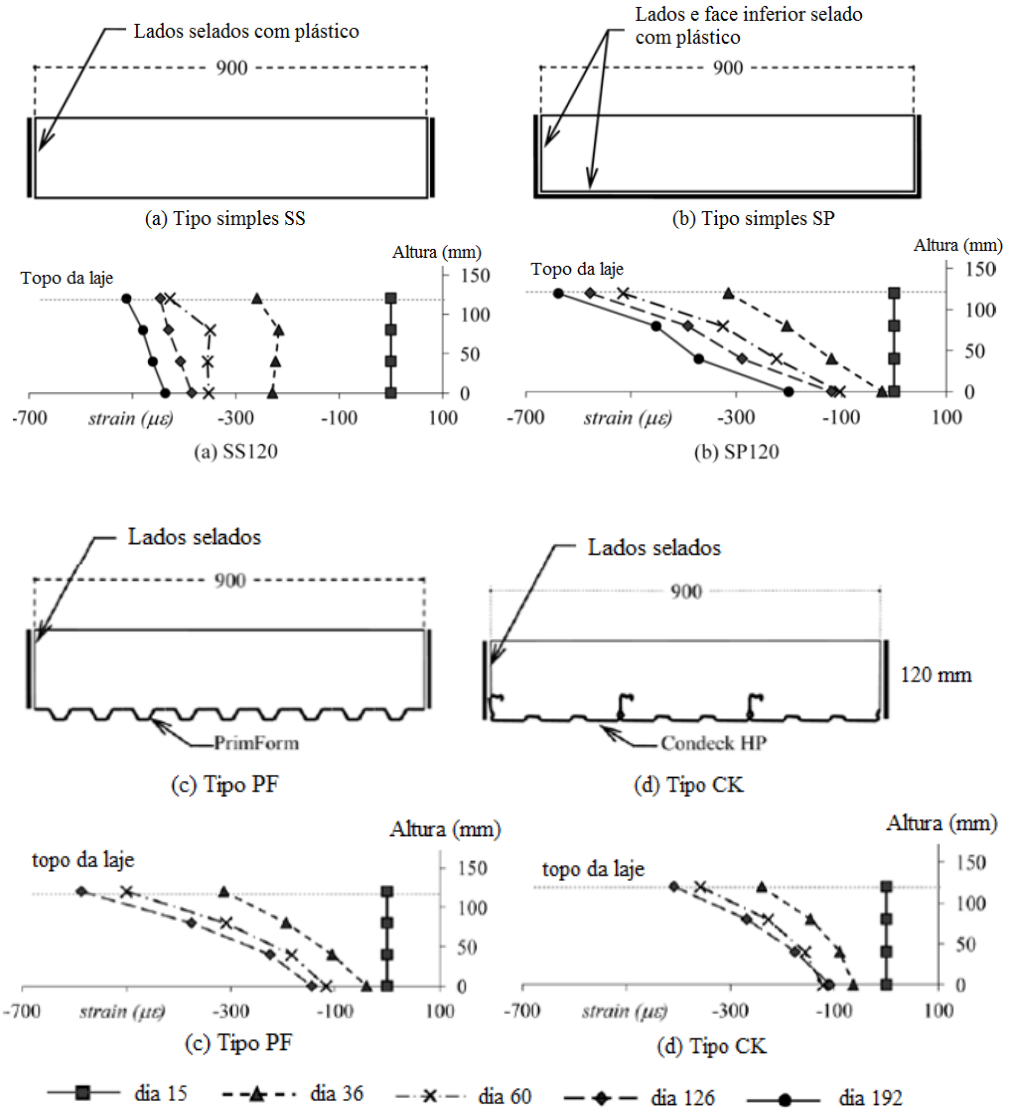
A condição de vedação promovida pela fôrma incorporada na face inferior afeta o comportamento geral da retração das lajes mistas de aço e concreto, conforme trabalhos de Ranzi e Vrcelj (2009), Bradford (2010), Gilbert et al. (2012), Gholamhoseini (2014); Al-Deen, Ranzi e Uy (2015); Al-Deen e Ranzi (2015), Ranzi (2017).

A retração usualmente acontece mais rapidamente no lado livre da laje mista, onde a evaporação não é contida e é mais lenta no núcleo, tanto quanto mais longe da superfície de secagem. Para as lajes mistas de aço e concreto, dada a face inferior impermeável, ocorre uma secagem não simétrica que leva a deformações e curvaturas induzidas pela retração nesses elementos, pelo desenvolvimento de um gradiente não-uniforme da retração.

Conforme ensaios de retração em lajes mistas de Al-Deen e Ranzi (2015), apresentados na Figura 4.6, observa-se um aumento das deformações por retração para os dois tipos de fôrma de aço avaliadas com o tempo e a presença de uma retração não-uniforme ao longo da altura da laje mista. Avaliou o perfil de retração das lajes mistas em comparação com as lajes de concreto convencionais. Desse modo, realizaram ensaios com lajes de concreto expostas em ambas faces, somente uma face exposta (face selada com plástico) e ensaios com lajes mistas formadas por perfil reentrante e perfil trapezoidal, com mesmo concreto com resistência média de 27,3 MPa, aos 28 dias. Os exemplares tinham dimensões de 900 mm x 900 mm e alturas de 120mm, 180 mm e 250 mm. Os ensaios tiveram duração de 192 dias, com temperatura média de 19ºC e unidade relativa na ordem de 60%. Avaliaram-se as deformações devido à retração ao longo da espessura das lajes por meio de extensômetros. A Figura 4.6 apresenta os resultados para lajes com alturas de 120mm, maiores detalhes são apresentados em Al-Deen e Ranzi (2015).

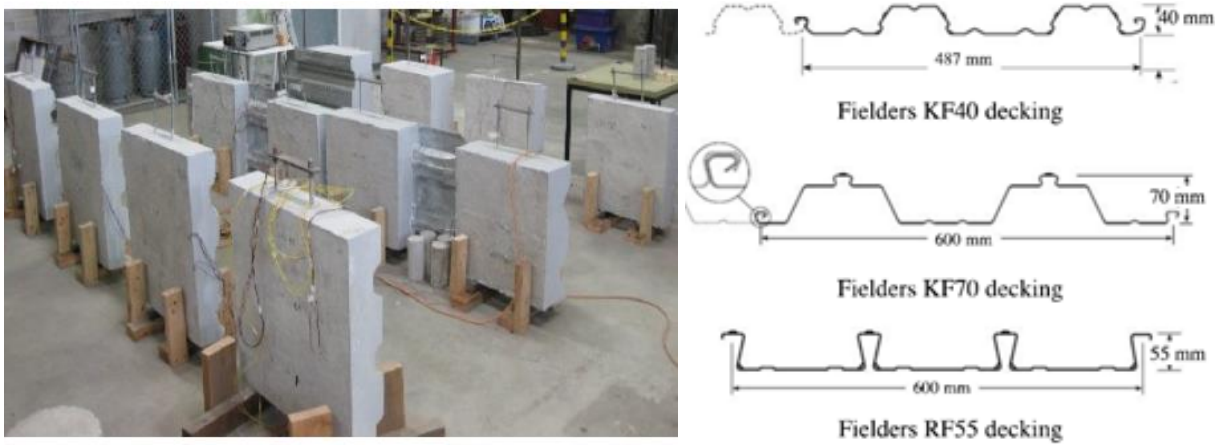
Gholamhoseini (2014) fez estudo do perfil de retração de laje de concreto com fôrma incorporada com 11 amostras envolvendo 3 tipos diferentes de perfis, um reentrante e dois trapezoidais, todos com espessura de 0,75 mm e três diferentes espessuras de lajes (150 mm, 200 mm e 300 mm). As amostras tinham dimensões de 750 mm por 750 mm, mostrados na Figura 4.7. A cura foi realizada por 21 dias e medições foram feitas em um período de 322 dias. Comparativamente, realizou a avaliação da retração com prismas de 75 mm x 75 mm x 280 mm. A temperatura média e a umidade relativa do ambiente foram de 20,8 ºC e 72,5%, respectivamente. Os perfis de retração são apresentados na Figura 4.8. Gholamhoseini (2014) verificou que o perfil de retração foi não-uniforme, assim como Al-Deen e Ranzi (2015).

Figura 4.6 – Medidas das deformações ao longo da seção da laje mista ao longo do tempo




Fonte: Adaptado Al-Deen e Ranzi (2015)

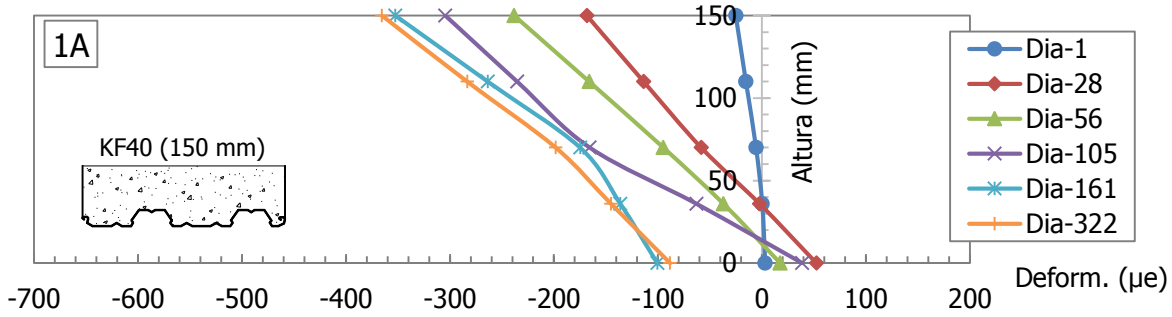
Figura 4.7 – Estudo do perfil de retração das lajes mistas de Gholamhoseini (2014)



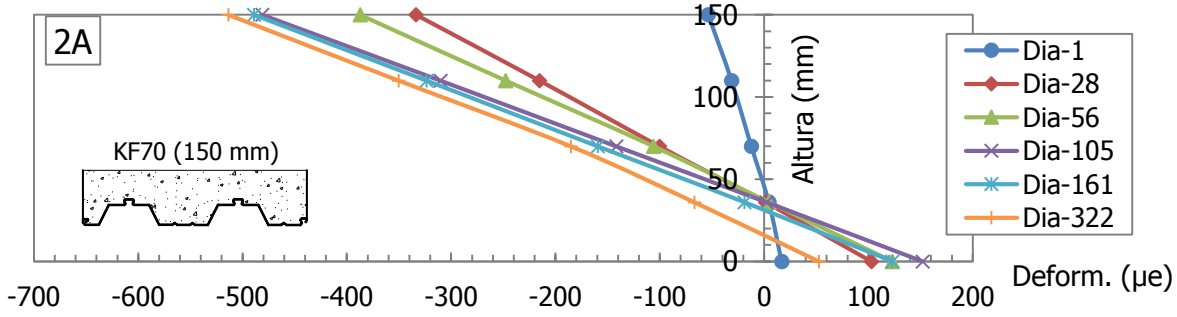

(a) Esquema das amostras expostas a secagem (b) Perfis da fôrma de aço incorporada

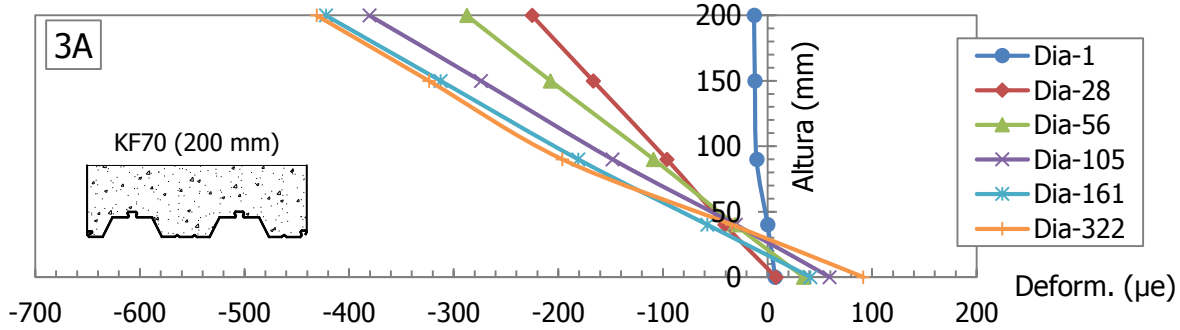
Fonte: Gholamhoseini (2014)

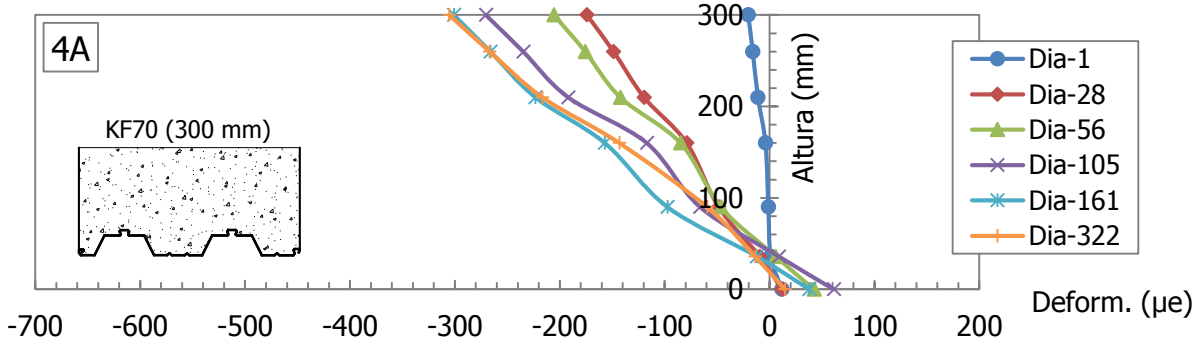
Figura 4.8 – Perfis de deformações obtidos no ensaio de Gholamhoseini (2014)



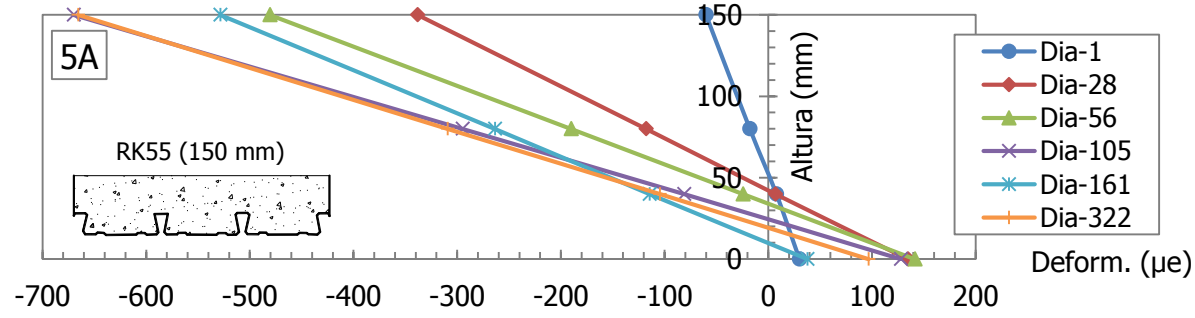

(a) Perfil de retração laje KF40 – 150 mm (1A)




(b) Perfil de retração laje KF70 – 150 mm (2A), 200mm (3A) e 300 mm (4A), respectivamente.

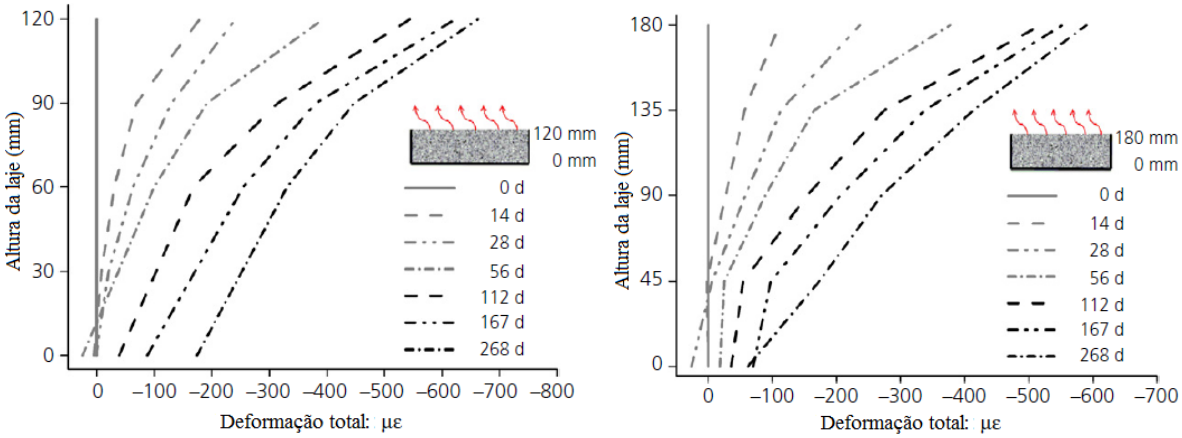



(c) Perfil de retração laje RK55 – 150 mm (5A)

Fonte: Gilbert et al. (2012) e Gholamhoseini (2014)

Wang et al. (2016) realizou ensaio semelhante na avaliação do perfil de retração das lajes mistas, no entanto, destaca-se o uso de concreto com agregados graúdos reciclados, com resistência média à compressão de 29 MPa. As lajes mistas tinham perfil reentrante e tinham dimensões de 600 mm x 600 mm e altura de 120 mm e 180 mm. Wang et al. (2016) destaca o fato do uso do agregado reciclado amplificar os efeitos da retração por ter mais água absorvida, principalmente por conta da argamassa residual aderida aos agregados. A Figura 4.9 mostra os resultados obtidos no ensaio.

Figura 4.9 – Deformações medidas ao longo da altura da laje de Wang et al. (2016)




Fonte: Wang et al. (2016)

Dessa forma, pode-se observar a ocorrência do perfil de retração não-uniforme nas lajes de concreto com fôrma de aço incorporada. Ao comparar o perfil de retração para laje simples com lajes mistas de Al-Deen e Ranzi (2015) observa-se que estas últimas possuem uma maior retração na face superior livre para secagem e uma menor na face inferior em relação. Gholamhoseini (2014) obteve resultados parecidos, mas destaca-se que a ocorrência de tensões de tração decorrentes da retração não-uniforme, ao qual atribui à presença da fôrma de aço que restringiu a movimentação do concreto em relação ao aço. Com o aumento da altura da laje, observado nas lajes com fôrma de aço KF70, a deformação por retração diminuiu, no entanto permanece um perfil não-uniforme. O mesmo foi observado por Wang et al. (2016).

Dado que os procedimentos de previsão da retração nas peças de concreto armado apresentados nos códigos normativos trazem a retração livre, ou seja, condições de secagem com ambas faces expostas e retração uniforme ao longo da espessura da laje. Gilbert et al. (2012), Al-Deen e Ranzi (2015) e Gholamhoseini (2014) mostram em seus trabalhos que a consideração do perfil de retração não-uniforme tem um impacto nas deformações ao longo do

tempo e que também afetam as tensões de tração induzidas no concreto, pela restrição da retração proporcionada pela fôrma de aço, e, consequentemente a fissuração do concreto.

Do estudo da literatura técnica, observa-se duas linhas para consideração da retração não-uniforme nas lajes mistas de aço e concreto, a primeira apresentada como um método simplificado com aproximação linear apresentado por Al-Deen e Ranzi (2015), Al-Deen, Ranzi e Uy (2015) e Ranzi (2017). O segundo, apresentado por Gholamhoseini (2014) como um perfil de retração não-uniforme parabólico.

### *4.3.1 Distribuição linear da retração não-uniforme*

A partir dos seus estudos Al-Deen e Ranzi (2015), Al-Deen, Ranzi e Uy (2015) e Ranzi (2017) propuseram uma aproximação baseada na variação linear de distribuição de retração, que usa como referência os valores de retração livre das lajes convencionais de concreto avaliados por meio de códigos ou de medidas experimentais.

O método já foi incorporado às recomendações normativas da norma australiana AS/NZS 2327 (2017) para a avaliação das flechas nas lajes mistas de aço e concreto.

O método simplificado proposto no trabalho de Al-Deen e Ranzi (2015) para a retração pode ser descrito por uma deformação superior (*top*) e uma deformação inferior (*bottom)* dadas pelas Equação 4.7 e 4.8.

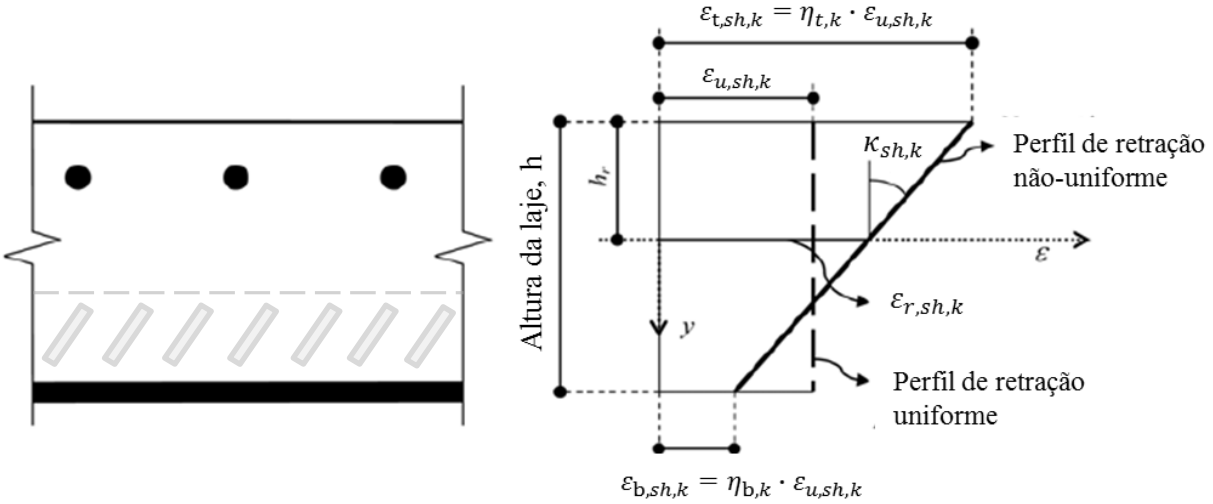
$$\varepsilon_{t,sh,k} = \eta_{t,k} \cdot \varepsilon_{sh,k} \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_{b,sh,k} = \eta_{b,k} \cdot \varepsilon_{sh,k} \tag{4.8}$$

Onde $k$ refere-se ao tempo no qual a deformação é calculada e $\varepsilon_{sh,k}$ é a retração com distribuição uniforme da laje exposta em ambas faces. Os coeficientes $\eta_{t,k}$ e $\eta_{b,k}$ são determinados experimentalmente e para projeto Al-Deen e Ranzi (2015) e a AS/NZS 2327 (2017) recomendam os valores de $\eta_{t,k} = 1{,}20$ e $\eta_{b,k} = 0{,}20$. O valor da deformação de referência de $\varepsilon_{cs}$ calculado de acordo com norma australiana para o concreto AS 3600 ou NZS 3101, adota uma espessura fictícia igual à espessura da laje. Al-Deen e Ranzi (2015) citam que valores ligeiramente menores podem ser usados para $\eta_{t,k}$ e dependem da laje considerada.

O perfil de retração pode também ser expresso pela deformação de retração medida em um eixo de referência da seção da laje (*reference*) $(\varepsilon_{r,sh,k})$ e uma curvatura adicional $(\kappa_{r,sh,k})$, como pode ser visto esquematicamente na Figura 4.10 e dadas pelas Equações 4.9 e 4.10.

Figura 4.10 – Medidas da retração ao longo da seção da laje mista ao longo do tempo




Fonte: Adaptado de Al-Deen e Ranzi (2015)

$$\varepsilon_{r,sh,k} = \frac{(h - h_r) \cdot \eta_{t,k} + h_r \cdot \eta_{b,k}}{h} \varepsilon_{sh,k} \tag{4.9}$$

$$\kappa_{r,sh,k} = \frac{(\eta_{t,k} - \eta_{b,k})}{h} \varepsilon_{sh,k} \tag{4.10}$$

Onde $h_r$é a posição do eixo de referência em relação a face superior.

O valor de deformação da retração de referência é baseado na previsão do modelo AS 3600 ou NZS 3101, adotando uma espessura fictícia igual a espessura da laje $h$, conforme AS/NZS 2327 (2017). Cita-se ainda que o gradiente de retração foi calibrado com base nas lajes de concreto expostas em ambos os lados e com mesma espessura das lajes mistas.

Conjuntamente ao fato da retração não-uniforme promovida pela impermeabilidade da face inferior devido à fôrma de aço, principalmente a fluência por secagem é influenciada. A norma AS/NZS 2327 (2017) indica no seu método simplificado, calcular o coeficiente de fluência considerando a condição de espessura fictícia $t_h$ como uma laje convencional, usando área bruta da seção transversal com espessura real da laje mista e perímetro exposto igual à largura da laje, assumindo, portanto, a ocorrência de secagem apenas na face superior exposta.

Desse modo, a partir da previsão da retração em estruturas convencionais de concreto armado é possível de maneira simples levar em conta a retração não-uniforme das lajes mistas na curvatura adicional que causa aumento dos deslocamentos verticais.

### *4.3.2 Distribuição parabólica da retração não-uniforme*

A partir do seu trabalho, Gholamhoseini (2014) propôs uma distribuição do perfil de retração não-uniforme a partir de seus ensaios experimentais. A proposta foi desenvolvida empiricamente a partir das medições da distribuição do perfil de deformação induzido pela retração e flechas nas lajes mistas.

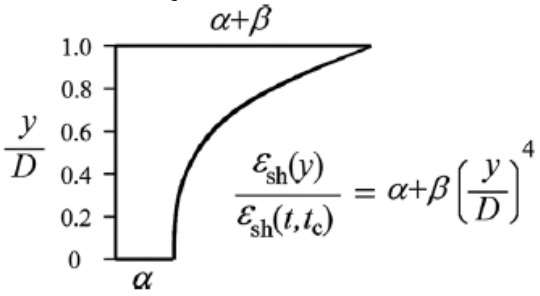
A deformação de retração em qualquer altura acima da face inferior da laje mista com altura $D$, $\varepsilon_{sh}(y)$ pode ser aproximadamente estimada conforme Equação 4.11.

$$\frac{\varepsilon_{sh}(y)}{\varepsilon_{sh}(t,t_c)} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{y}{D}\right)^4 \tag{4.11}$$

Onde $\varepsilon_{sh}(0) = \alpha \cdot \varepsilon_{sh}(t,t_c)$ é a deformação devido à retração na face inferior da laje e $\varepsilon_{sh}(y) = (\alpha + \beta) \cdot \varepsilon_{sh}(t,t_c)$ é a retração na face superior da laje.

O perfil de retração não uniforme com distribuição parabólica apresenta o aspecto mostrado na Figura 4.11.

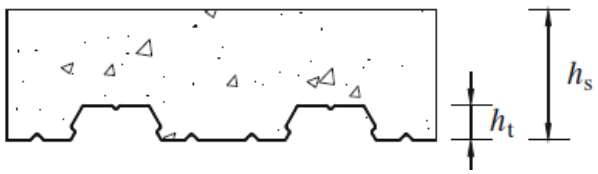
Figura 4.11 – Perfil de retração não uniforme de Gholamhoseini (2014)




Fonte: Gholamhoseini (2014)

Dos seus resultados experimentais, o valor de $\alpha = 0{,}2$ forneceu uma estimativa razoável. O valor de $\beta$ segundo Gholamhoseini (2014b) parece depender do perfil da fôrma de aço e concreto. Gholamhoseini (2014a, 2016) indica correlações entre valor de $\beta$ e um fator de fôrma dado por $r_d$ , definido como a razão entre a altura total da laje $h_s$ e a altura do perfil $h_t$, conforme Figura 4.12 e pela Equação 4.12.

Figura 4.12 – Definição do fator de forma $r_d$




$$r_d = h_t / h_s \tag{4.12}$$

Fonte: Gholamhoseini (2014)

Gholamhoseini (2014) indica no seu estudo excelentes resultados para a faixa de $0{,}25 \leq r_d \leq 0{,}50$. A depender do modelo de previsão, foi calibrado uma equação que correlaciona o valor de $\beta$ com o chamado fator de fôrma da laje mista $r_d$.

Para calcular a deformação diferida no tempo da seção mista, o perfil de retração não uniforme e o coeficiente de fluência, usando o método AAEM para considerar a fluência, são necessários. Dessa forma, Gholamhoseini (2014, 2016) e Gholamhoseini et al. (2014), indicam modificações para correção ao cálculo da retração e fluência a partir dos modelos de previsão da retração e coeficiente de fluência, como os modelos do ACI 209 2R (2008), AS 3600 (2009) e modelo B3 de Bazant e Baweja (2000).

Desse modo, apresentam-se os fatores modificadores para cálculo do coeficiente de fluência $\varphi_{cr}(t, t_0)$ e a deformação de retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ para as lajes mistas de aço e concreto. Esses fatores foram desenvolvidos empiricamente a partir das medidas experimentais da deformação induzida pela distribuição da retração, de acordo com Gholamhoseini (2014a, 2016a, 2016b).

- ***Modelo ACI 209 2R (2008)***

Os fatores de modificação propostos para contabilizar os efeitos da fôrma de aço na fluência do concreto e no perfil de retração na laje mista e quantificá-los modifica a parcela relativa ao tamanho do elemento, com os parâmetros $\gamma_{c,vc}$ e $\gamma_{sh,VS}$, dados pelas Equações 4.13 e 4.14 de acordo com o modelo para fluência e para a retração, respectivamente.

$$\gamma_{c,vc} = \frac{2}{3} \cdot (1 + 1{,}13 \cdot e^{\{-0{,}0213 \cdot (V/S)\}}) \tag{4.13}$$

$$\gamma_{sh,vs} = 1{,}2e^{\{-0{,}00472(V/S)\}} \tag{4.14}$$

Onde o *V* volume do elemento é dado em mm³ e *S* é a área exposta em mm².

A correção para a laje com fôrma de aço incorporada define uma espessura média $t_{ave}$, dada pela área $A_c$ dividida pela largura $b$ da seção transversal e são dadas pelas Equações 4.15 e 4.16 propostas por Gholamhoseini (2014a, 2014b):

$$\gamma_{c,vc} = 2 + 0{,}45 \cdot e^{\{-0{,}0053 \cdot (t_{ave})\}}) \tag{4.15}$$

$$\gamma_{sh,vs} = 1{,}2e^{\{-0{,}00472(25+0{,}25 \cdot t_{ave})\}} \tag{4.16}$$

Com os novos valores de $\gamma_{c,vc}$ e $\gamma_{sh,VS}$, o coeficiente de fluência $\varphi_{cr}(t, t_0)$ e a deformação devido à retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ podem ser determinados para aplicação na previsão nas lajes mistas de aço e concreto.

Boa estimativa para prever as flechas diferidas no tempo e aos valores experimentais medidos foi obtido com $\beta = 1{,}0$ para a laje formada pelo perfil KF70, com 70 mm de altura e $\beta = 1{,}4$ para a laje formada pelo perfil KF40, com 40 mm de altura. Gholamhoseini (2016) cita que para outros perfis o valor de $\beta$ pode ser obtido pela Equação 4.17.

$$\beta_{ACI} = 2{,}0 - 2{,}25 \cdot r_d \tag{4.17}$$

- ***Modelo AS 3600 (2009)***

Gholamhoseini (2014a, 2014c) utilizou o modelo australiano de previsão AS 3600 (2009), que sofreu algumas modificações na sua atual versão AS 3600 (2018). A espessura fictícia padrão da norma $t_h$ (Equação 4.18), onde $A_g$ é a área da seção transversal e $u_e$ é o perímetro exposto, para lajes convencionais de concreto leva a um $t_h$ igual a espessura da laje.

$$t_h = \frac{2A_g}{u_e} \tag{4.18}$$

Gholamhoseini (2016a) definiu uma nova espessura fictícia ($t_h{}^*$) para as lajes mistas, dado pela Equação 4.19.

$$t_h{}^* = 50 + \frac{t_{ave}}{2} \quad (mm) \tag{4.19}$$

Onde a espessura média $t_{ave}$ é dada pela área de concreto $A_c$ dividido pela largura $b$ da seção transversal. Encontrado o valor de $t_h$, determina-se os valores do coeficiente de fluência e a retração segundo modelo AS 3600 (2009).

De maneira semelhante ao modelo da ACI 209 2R (2008), um valor de $\beta$ foi correlacionado com o fator de fôrma dado por $r_d$, baseado nos resultados experimentais, de acordo com Equação 4.20 para previsão da fluência e retração conforme norma AS 3600 (2009).

$$\beta_{AS} = 1{,}7 - 2{,}5 \cdot r_d \tag{4.20}$$

- ***Modelo B3 de Bazant e Baweja (1995)***

De modo semelhante ao modelo modificado do ACI 209 2R (2008), Gholamhoseini (2016b) define a modificação na razão $V/S$ (volume/superfície exposta) a partir da espessura média ($t_{ave} = A_c/b$), conforme Equação 4.21, para contabilizar os efeitos da fôrma de aço incorporada ao perfil de secagem do concreto.

$$V/S = 25 + 0{,}25 \cdot t_{ave} \quad (mm) \tag{4.21}$$

Propõe ainda o fator de modificação $K_m$ (Equação 4.22) como um coeficiente multiplicador para o coeficiente de fluência e deformação devido à retração, obtidos do modelo B3 de Bazant e Baweja (2000), dados pela Equação 4.23 e 4.24, para coeficiente de fluência $\varphi_{cr}{}^{*}(t, t_0)$ e retração $\varepsilon_{sh}{}^{*}(t, t_c)$, respectivamente:

$$K_m = 1{,}5 - 0{,}55 \cdot r_d \tag{4.22}$$

$$\varphi_{cr}{}^{*}(t, t_0) = K_m \cdot \varphi_{cr}(t, t_0) \tag{4.23}$$

$$\varepsilon_{sh}{}^{*}(t, t_c) = K_m \cdot \varepsilon_{sh}(t, t_c) \tag{4.24}$$

Desse modo, têm-se calculados os coeficientes de fluência e deformação devido a retração segundo modelo B3. Para o perfil de retração adota-se $\alpha = 0{,}2$ e $\beta$ é estimado conforme Equação 4.25 idêntica à formulada para o ACI 209 2R (2008). A Equação 4.26 apenas ressalta o uso da deformação devido à retração modificada $\varepsilon_{sh}{}^{*}(t, t_c)$.

$$\beta_{B3} = 2{,}0 - 2{,}25 \cdot r_d \tag{4.25}$$

$$\frac{\varepsilon_{sh}(y)}{\varepsilon_{sh}{}^{*}(t, t_c)} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{y}{D}\right)^4 \tag{4.26}$$

Dado as diferentes abordagens dos modelos de previsão de retração e fluência, o método usando a distribuição parabólica de Gholamhoseini (2014, 2016a, 2016b) calibrado com base nos seus ensaios experimentais, apresenta parâmetros modificadores empíricos, buscando levar em conta a impermeabilidade devida à fôrma de aço nos efeitos da retração não-uniforme mais próxima à real, observados experimentalmente e correção no coeficiente de fluência.

Um trabalho recente de Al-Deen (2018) trouxe uma nova abordagem de investigação do perfil de retração baseado em análises hidro-mecânicas com modelos de difusão de umidade ao longo da altura da laje mista. A partir da correlação entre umidade interna e retração das camadas, o trabalho apresentou aplicação dessa metodologia para previsão das deformações e flechas de lajes mistas de Al-Deen e Ranzi (2015), obtendo bons níveis de acurácia.

Observa-se que a retração em ambas abordagens é assumida como 20% na face inferior da deformação de referência de retração. O modelo linear de distribuição da retração não-uniforme apresenta como uma alternativa simplificada da sua consideração e já foi incorporado na norma australiana de estruturas mistas AS/NZS 2327 (2017). Dado que as deformações de retração de referência são calculadas de maneiras diferentes, decorre de diferentes parâmetros de calibração para cada modelo.

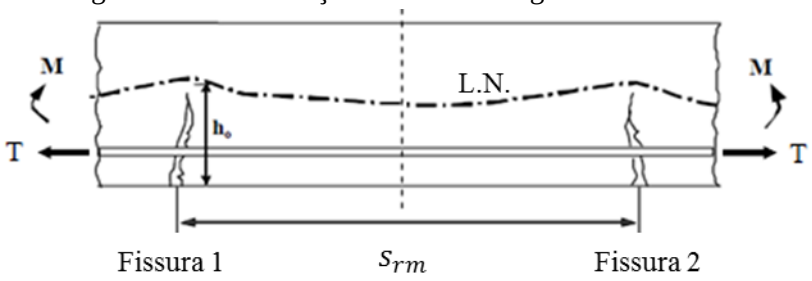
## 4.4 A fissuração do concreto

A capacidade a tração do concreto é normalmente negligenciada na avaliação da capacidade resistente das estruturas de concreto, dada a baixa resistência à tração do concreto. Desse fato, normalmente as estruturas apresentam fissuração do concreto, que ocorre quando as tensões no concreto são maiores que sua resistência à tração. Após a fissuração, a tensão de tração ainda está presente no concreto não fissurado entre as fissuras, dado que a tensão é transferida do aço para o concreto circundante pela aderência. Como consequência, a rigidez a tração do concreto fissurado é maior do que considerar apenas as armaduras. Essa contribuição do concreto tracionado à rigidez é conhecida por *tension stiffening*.

O *tension stiffening* afeta consideravelmente o comportamento em serviço das estruturas de concreto, aumentando a rigidez à flexão na faixa pós-fissuração, portanto influencia a verificação de flechas e aberturas de fissuras. Segundo Nejadi (2005), o fenômeno resulta da formação de fissuras e do deslizamento entre a armadura e o concreto circundante e é influenciada principalmente pela resistência à tração do concreto, magnitude da tensão de aderência, a taxa de armadura e o histórico de carregamento.

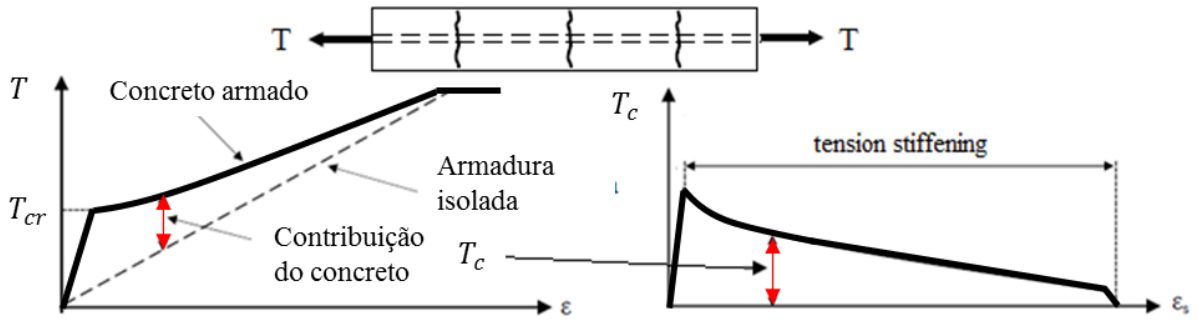
A Figura 4.13 mostra o aspecto da linha neutra em uma seção sob flexão fissurada, caso comum de lajes e vigas, onde observa-se alteração da profundidade da mesma e, esquematicamente, a Figura 4.14 mostra uma resposta típica de um elemento em concreto armado e a correspondente contribuição do concreto para rigidez.

Figura 4.13 – Fissuração do concreto e geometria da fissura




Fonte: Nejadi (2005)

Figura 4.14 – Contribuição do concreto tracionado

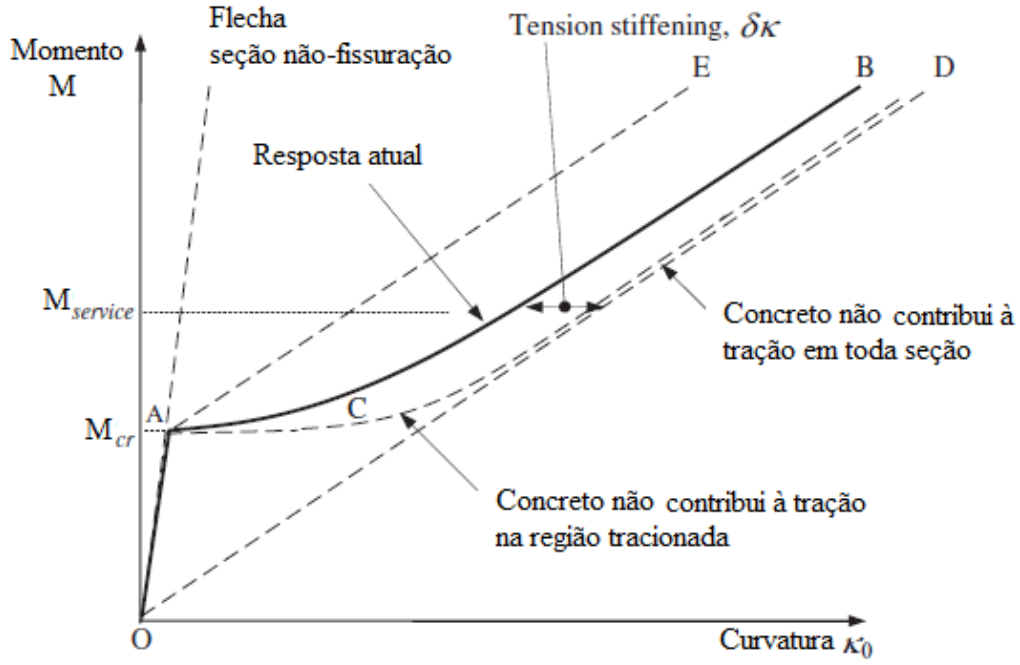



Fonte: Nejadi (2005)

Desse modo, a consideração do comportamento do *tension stiffening* é importante no projeto e análise dos elementos de concreto quando fissurados, principalmente na situação em serviço. Para fins de projeto, frequentemente descrições empíricas do efeito do *tension stiffening* são incorporadas nas relações força-deslocamento ou momento curvatura usando fórmulas empíricas (NEJADI, 2005). A abordagem nesse sentido mais comum é o cálculo dos deslocamentos verticais usando um momento de inércia efetivo ou equivalente para elementos fissurados $(I_{eq})$.

A resposta das lajes ou vigas sob flexão, considerando uma condição de contorno simplesmente apoiada, quando do acréscimo de carregamento em um ensaio rápido, apresenta o aspecto momento-curvatura mostrado na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Aspecto relação momento-curvatura ensaio instantâneo




Fonte: Ranzi e Gilbert (2011)

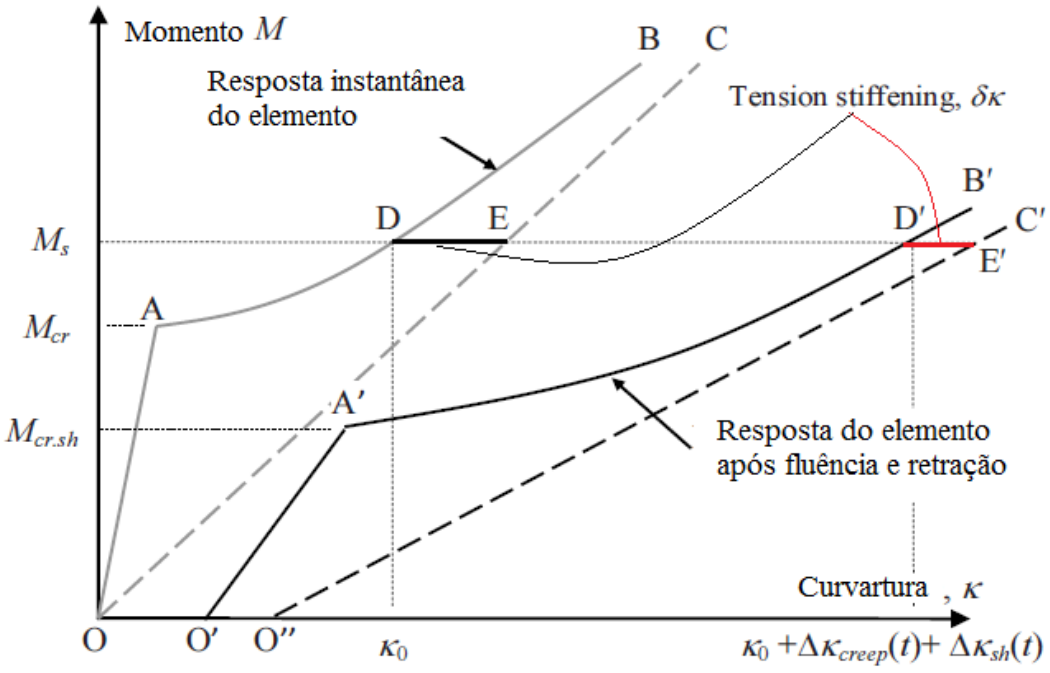
Para carregamentos menores que a carga que provoca a fissuração da peça, dado pelo momento de fissuração $M_{cr}$, a peça não fissura e apresenta comportamento elástico e a flecha é proporcional ao momento de inércia da seção não fissurada $I_{uncr}$. A primeira fissura aparece quando o momento $M_{cr}$ leva a fibra mais tracionada da seção superar à resistência a tração na flexão ou chamado de módulo de ruptura $f_r$. Nesse ponto, há uma mudança súbita da rigidez local após essa primeira fissura. A rigidez cai significativamente, mas grande parte da peça permanece sem fissuras. À medida que a carga aumenta, formam-se mais fissuras e a rigidez média do elemento todo diminui (GILBERT, 2007).

Conforme Gilbert (2007) se o concreto tracionado nas regiões fissuradas não contribuísse, à tração, a relação momento curvatura seguiria a linha tracejada ACD da Figura 4.17. Se a tração na fibra mais tracionada permanecesse igual a resistência a tração na flexão $f_r$ após a fissuração, a relação seguiria a linha AE. Na estrutura real, a resposta está entre esses dois extremos, como mostra a linha AB. A diferença entre a resposta real e a resposta da consideração do concreto não contribuir à tração na região tracionada é o *tension stiffening*, visto graficamente em $\Delta\delta$.

De acordo com Ranzi e Gilbert (2011) à medida que a carga aumenta, a contribuição à tração no concreto diminui à medida que mais fissuras se desenvolvem e a resposta real tende para a resposta de nenhuma contribuição do concreto tracionado, pelo menos até atingir um padrão de fissuração e número estável de fissuras.

O efeito do *tension stiffening* diminui com o tempo sob cargas permanentemente sustentadas, segundo Gilbert (2007) e Ranzi e Gilbert (2011) associadas aos efeitos combinados de fluência na tração, ruptura por fluência e fissuração devido à retração e, por isso, devem ser contabilizados esses efeitos nos cálculos dos deslocamentos máximos ao longo do tempo. A Figura 4.16 mostra o aspecto da relação momento-curvatura de um elemento com efeitos da fluência e retração na resposta ao longo do tempo.

Figura 4.16 – Aspecto da curva momento-curvatura sob efeitos do carregamento, fluência e retração




Fonte: Gilbert (2013)

Gilbert (2013) apresenta que para as lajes mistas de aço e concreto ou lajes de concreto armado a curva momento-curvatura da Figura 4.16 indica algumas respostas da estrutura frente aos efeitos da retração, fluência, fissuração e inter-relacionados como segue:

- A curvatura inicial $\kappa_0$ da seção passa de $O$ para $O'$ em virtude da curvatura induzida pela retração $\kappa_{sh,uncr}$ , dado a excentricidade da fôrma de aço ou armaduras desenvolvem na seção não-fissurada;
- O ponto $O''$ representa a curvatura devido à retração para seção fissurada $\kappa_{sh,cr}$;
- O momento de fissuração $M_{cr}$ é diminuído devido os efeitos da retração ao proporcionar um tensão de tração induzida pela mesma e passa a ser $M_{cr,sh}$;
- A fluência causa um aumento da curvatura ao longo do tempo em todo o nível de momento, reduzindo a inclinação da reta $OA$ para $O'A'$;
- A resposta de uma seção fissurada (desprezando a contribuição da tração do concreto) depois da retração e fluência passa a ser a reta $O''E'$, sendo está "suavizada" pela fluência.

Desse modo, observa-se para seção fissurada, as deformações são subestimadas se a análise assumir todas as seções não fissuradas. Do mesmo modo, as deformações são superestimadas, se toda seção transversal for assumida estar totalmente fissurada. Desse modo, recorre a modelos empíricos para estimativa da inércia equivalente ou curvatura média baseada nas propriedades das seções fissuradas e não-fissuradas. Os modelos práticos para contabilizar o efeito do *tension stiffening* são o do ACI 318 (2005) usando fórmula de Branson e modelo do Eurocode 2 (2004), com a proposta melhorada por Bischoff (2005).

### *4.4.1 Modelo ACI 318 (2008) e Modelo AS 3600 (2009)*

O modelo faz uma ponderação dos momentos de inércia das seções fissuradas e não-fissuradas. Para um elemento simplesmente apoiado é obtido uma inércia equivalente com base na seção do meio do vão e um valor médio ponderado calculado nas regiões de momento positivo e negativo em tramos contínuos. A flecha imediata de uma viga ou laje para carregamento em serviço pode ser calculada da teoria da elasticidade usando módulo de elasticidade do concreto $E_c$ e a momento de inércia efetivo dado pela Equação 4.27.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^3 \cdot I_{uncr} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^3\right] \cdot I_{cr} \leq I_{uncr} \tag{4.27}$$

Onde $I_{cr}$ é a inércia da seção fissurada, $I_{uncr}$ é a inércia da seção não-fissurada; $M_s$ é o momento em serviço máximo do elemento, $M_{cr}$ é o momento de fissuração. O momento de fissuração segundo o ACI 318 (2005) é dado pela Equação 4.28. Onde $f_r$ é o módulo de ruptura do concreto dado por $f_r = 0{,}6\sqrt{f'_c}$ (MPa) e $y_t$ é a distância da linha neutra da seção não-fissurada da fibra mais tracionada (AS3600 (2018) e ACI 318 (2005)).

$$M_{cr} = \frac{f_r \cdot I_g}{y_t} \tag{4.28}$$

Esse é o mesmo modelo apresentado na norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014). No entanto, a norma brasileira apresenta o momento de fissuração dado pela Equação 4.29.

$$M_{cr} = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \tag{4.29}$$

Sendo $\alpha$ um fator que correlaciona aproximadamente a resistência a tração na flexão ou módulo de ruptura ($f_{ct,f}$) com a resistência à tração direta ($f_{ct}$) que está correlaciona à forma da seção como segue:

α = 1,2 para seções T ou duplo T
α = 1,3 para seções I ou T invertido
α = 1,5 para seções retangulares

O termo $f_{ct}$ é a resistência à tração direta do concreto, que para a verificação das deformações excessivas assume o valor médio $f_{ct,m}$ dado pela Equação 4.30 e 4.31 (ABNT NBR 6118 (2014)).

$$f_{ct,m} = 0{,}3 \cdot fck^{2/3} \qquad para \;\; fck \leq 50\ MPa \tag{4.30}$$

$$f_{ct,m} = 2{,}12 \cdot \ln(1 + 0{,}11 \cdot fck \quad para \;\; 50 \leq fck \leq 90\ MPa \tag{4.31}$$

De acordo com Gilbert (2007) uma modificação na abordagem do ACI 318 (2005) incorporou a norma australiana AS 3600 (2009), sendo a inércia efetiva dada pela Equação 4.32. Onde $I_{ef,max} = I_{uncr}$ para elementos sem protensão quando taxa de armadura positiva $\rho = A_{st}/bd \geq 0{,}005$ e $I_{ef,max} = 0{,}6 \cdot I_{uncr}$ quando $\rho < 0{,}005$.

$$I_e = I_{cr} + (I_{uncr} - I_{cr})\left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^3 \leq I_{ef,max} \tag{4.32}$$

O fato da tensão de tração induzida pela retração no concreto reduzir o momento de fissuração e a ocorrência de peças com protensão, levam o momento de fissuração ser obtido pela Equação 4.33.

$$M_{cr} = \frac{I_g}{y_t} \cdot (f_r - \sigma_{cs} + P/A) + P \cdot e \geq 0{,}0 \tag{4.33}$$

Onde $\sigma_{cs}$ é a máxima tensão de tração induzida pela retração na seção não fissurada do concreto na fibra que ocorre a fissuração; $P$ é a força de protensão efetiva (se existir); $e$ é a excentricidade da força medida em relação ao centroide da seção e $A$ é a área não-fissurada da seção transversal.

### *4.4.2 Modelo Eurocode 2 (2004)*

A abordagem do modelo envolve o cálculo da curvatura de seções transversais e então a integração ao longo do elemento para obtenção dos deslocamentos verticais. A curvatura $\kappa$ de uma seção depois da fissuração é calculada usando a Equação 4.34.

$$\kappa = \zeta \kappa_{cr} + (1 - \zeta)\kappa_{uncr} \tag{4.34}$$

Onde $\zeta$ é coeficiente de distribuição que leva em conta o nível de momento e o grau de fissuração, dado pela Equação 4.35.

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 \tag{4.35}$$

Onde $\beta_1 = 1{,}0$ para barras nervuradas e 0,5 para barras lisas; $\beta_2 = 1{,}0$ para uma carga única e imediata e 0,5 para carregamento cíclico e permanente; $\sigma_{sr}$ é a tensão de tração na armadura que causa a primeira fissura (quando o momento é igual ao momento de fissuração), calculado desprezando a resistência à tração do concreto e $\sigma_s$ é a tração na armadura para o carregamento dado quando o momento em serviço atua na peça, desprezando o concreto tracionado. $\kappa_{cr}$ é a curvatura da seção desprezando o concreto tracionado e $\kappa_{uncr}$ é a curvatura da seção não-fissurada homogeneizada.

O Eurocode 2 (2004) cita que para elementos sujeitos principalmente à flexão, a Equação 4.36 pode ser usada, sendo que $\alpha$ é um parâmetro de deformação que pode assumir, uma deformação, a curvatura ou rotação. Cita ainda que como simplificação pode ainda ser tomado como uma flecha.

$$\kappa = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta)\alpha_I \tag{4.36}$$

Cita ainda que a relação $\sigma_{sr}/\sigma_s$ pode ser substituída por $M_{cr}/M_s$ para flexão e $N_{cr}/N_s$ para tração pura, onde $M_{cr}$ e $N_{cr}$ são o momento de fissuração e força de fissuração, respectivamente.

Desse modo, para laje em flexão pura, adotando comportamento na compressão do concreto e da armadura serem elástico e linear, a expressão recai na Equação 4.37 e consequentemente na Equação 4.38.

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 \tag{4.37}$$

$$\frac{M_s}{E_c I_{ef}} = \zeta \left(\frac{M_s}{E_c I_{cr}}\right) + (1 - \zeta) \left(\frac{M_s}{E_c I_{uncr}}\right) \tag{4.38}$$

Rearranjando-se a Equação 4.37 e 4.38, com $\beta = 1{,}0$, a expressão de $I_{ef}$ é obtida pela Equação 4.39, proposta por Bischoff (2005) para cálculo de flechas imediatas e já incorporada na versão da norma AS 3600 (2018).

$$I_{ef} = \frac{I_{cr}}{1 - \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_{uncr}}\right)\left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2} \tag{4.39}$$

Gholamhoseini (2014a, 2014b, 2016b), apresenta em seu método o uso da consideração do efeito do *tension stiffening* para as lajes mistas de aço e concreto pela abordagem do Eurocode 2 (2004), com as equações 4.37 e 4.38, com $\beta = 1{,}0$. Para o método simplificado em Gholamhoseini (2014c) utiliza as mesmas equações, no entanto considera $\beta = 0{,}5$, contabilizando os efeitos do carregamento de longa duração. Comparativamente, são abordagens aplicadas de forma diferente às lajes mistas, mas calibradas para fornecer os resultados adequados para deformações e flechas imediatas e de longa duração.

A abordagem da expressão de Branson (1965) recomendada pela ACI 318 (2005) tem sido criticada por superestimar a rigidez das peças de concreto com baixasx taxas de armaduras, caso comum de lajes convencionais, com avanços dos aços de alta resistência e concretos de melhor qualidade. A alternativa proposta pela AS 3600 (2018) em limitar a divisão da taxa de armadura e os limites de inércia efetiva máxima se dá por conta disso. Ranzi (2017) e abordagem simplificada da AS 2327 (2017) indica usar a Equação 4.32 para levar em conta o efeito do *tension stiffening* para as lajes mistas de aço e concreto.

A abordagem do Eurocode 2 (1992, 2004), com a proposta de Bischoff (2005), dado na Equação 4.39, tem apresentado bons resultados para os elementos fletidos com armaduras de aço e barras de polímero reforçado com fibras, tanto para as vigas e lajes, como mostrado em Ranzi e Gilbert (2011) e Gilbert (2007). A abordagem por meio de curvaturas médias tem apresentado bons resultados quando comparados aos resultados experimentais para as lajes mistas de aço e concreto como apresentado em Gholamhoseini (2014a, 2014b, 2014c, 2016b).

# 5 MODELO TEÓRICO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI APLICADO ÀS LAJES MISTAS

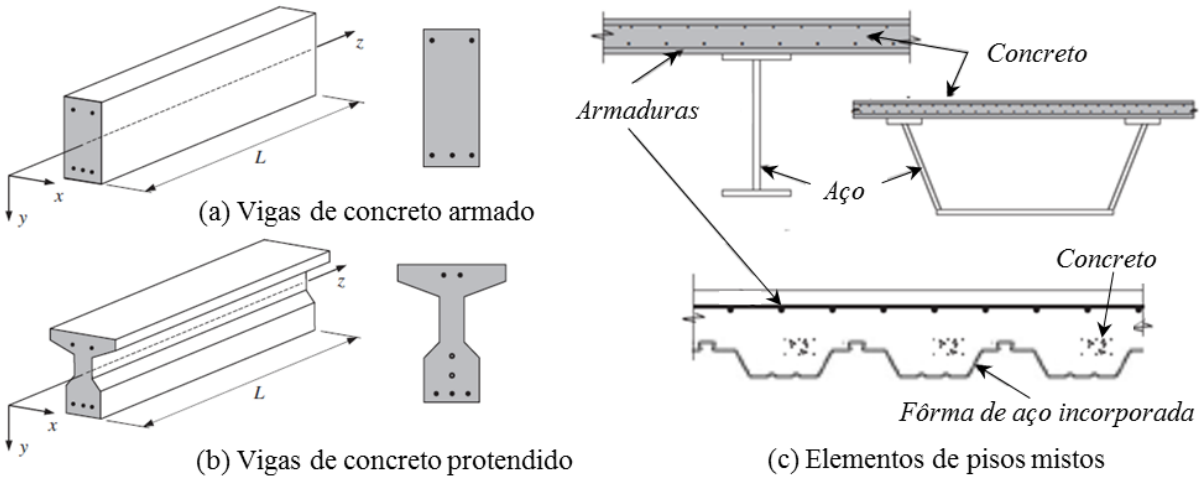
*Apresenta-se neste capítulo a formulação analítica utilizada para analisar as lajes mistas.*

## 5.1 Considerações iniciais

O comportamento das lajes mistas em serviço é usualmente calculado pelo método clássico, com adaptações das hipóteses da viga de Euller-Bernoulli e comportamento elástico-linear às peças de concreto. As equações consideram, no geral, o equilíbrio, compatibilidade de deformações e leis constitutivas dos materiais. Para a estrutura com a seção mista realiza-se o procedimento de homogeneização da seção.

A metodologia apresentada por Ranzi e Gilbert (2011) foi tomada como base para análise das seções compostas de aço e concreto, com armaduras passivas e ativas, perfis metálicos e fôrma de aço para laje mista, que podem ser usadas para alguns outros exemplos como apresentados na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Seções típicas de peças com concreto estrutural




Fonte: Adaptado de Gilbert e Ranzi (2011)

Apresenta-se a seguir a formulação analítica do modelo de viga de Euler-Bernoulli para um elemento com seção mista sob flexão, onde assume-se interação total (não ocorrência de deslizamentos relativos entre aço e o concreto), situação comum apresentada pelas peças na condição em serviço. Para outros casos, com a consideração da ocorrência de deslizamentos relativos cita-se o trabalho de Bradford (2010), no qual traz uma formulação de um modelo genérico para vigas simplesmente apoiadas levando em conta os efeitos da ocorrência de fluência, retração e interação parcial entre os materiais.

## 5.2 Cinemática do modelo

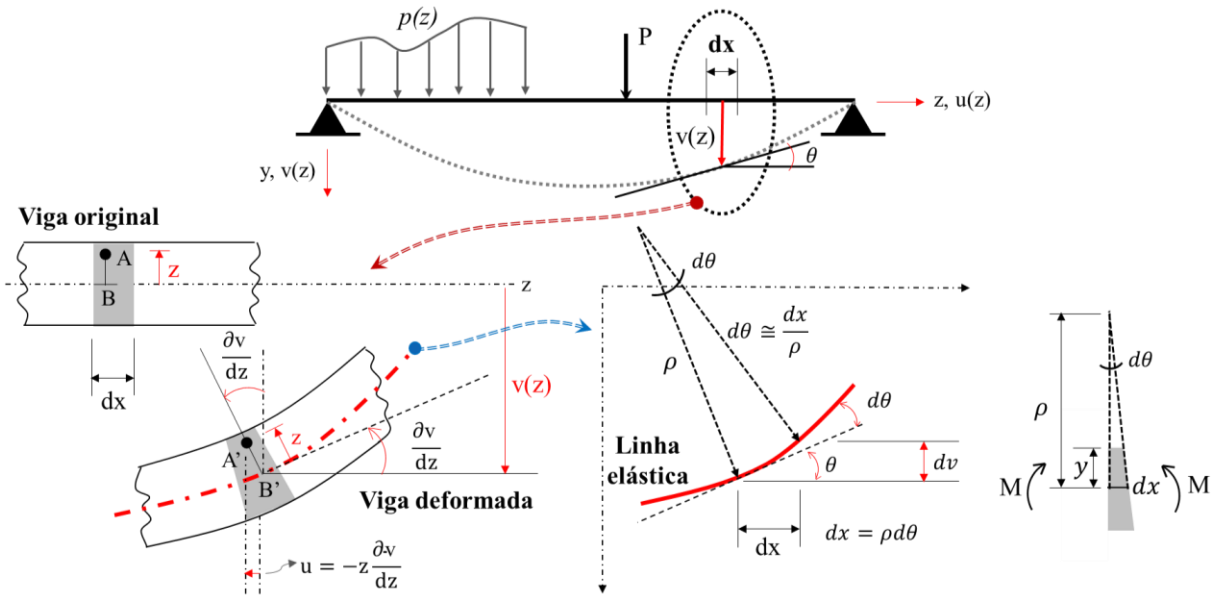
A teoria de *Euller-Bernoulli* para o cálculo de vigas é a que deriva da hipótese cinemática de *Navier-Bernoulli*, e pode ser empregada para calcular tensões e deslocamentos. Para escrever as fórmulas da teoria de *Navier-Bernoulli* toma-se um sistema de coordenadas adequado para a descrição da geometria. Se a direção dos eixos coordenados (y, z) são tomados coincidentes com as direções principais de inércia a equação fica simplificada. O campo de deslocamentos, na hipótese de Bernoulli é dado pela equação da curva (linha) elástica.

A teoria de vigas de Euler Bernoulli compartilha das **seguintes hipóteses**:

- A viga é prismática e o seu comprimento deve ser maior que as outras dimensões (cita-se razões da ordem de L/h>10);
- Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga, de tal forma que a deformação por cisalhamento (distorção angular) pode ser negligenciada;
- As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação; O deslocamento lateral (segundo o eixo x) é nulo;
- Material homogêneo, isótropo e elástico linear;

Considera-se uma viga de comprimento *L*, de largura *B*, de altura *H*, área da seção transversal *A* e momento de inércia *I*, sobre a qual atuam uma série de cargas verticais e momentos contidos no plano *xz*, que pode ser mostrado na Figura 5.2, demonstrando a situação da viga original e após sofrer carregamento, passa a situação deformada.

Figura 5.2 – Modelo de viga sujeito a carregamento e suas deformações




Fonte: Autor (2019)

Graficamente, através de um infinitesimal de área partindo da linha de referência deslocada, a linha elástica é circular com raio de curvatura constante $\rho$ e sua representação analítica é $v(z)$. Dado que para as aplicações práticas das estruturas de concreto e aço estão relacionadas a pequenos deslocamentos e rotações, considera-se que a equação diferencial não linear da linha elástica, recai na Equação 5.1.

$$\frac{1}{\rho_y(z)} = -\frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left(1+\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2\right)^{3/2}};\ \frac{dv}{dz} \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 \cong 0\ \therefore\ \boxed{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{1}{\rho_y(z)}} \qquad (5.1)$$

Por equilíbrio de uma seção submetida a flexão pura, partindo do campo de deslocamentos da viga deformada da Figura 5.2 e do equilíbrio da uma seção infinitesimal submetida ao carregamento $p(z)$, chega-se ao conjunto de Equações 5.2 a 5.4.

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI} \quad (5.2); \qquad \frac{d^3v}{dz^3} = \frac{V(z)}{EI} \quad (5.3); \qquad \frac{d^4v}{dz^4} = \frac{p(z)}{EI} \quad (5.4)$$

Dessa forma, correlaciona-se a curvatura $\kappa$ com momento fletor atuante na seção $M(z)$ e a linha elástica $v$, obtendo-se a Equação 5.5.

$$\kappa = -\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EI} = \frac{d^2v}{dz^2} \qquad (5.5)$$

Associada a Lei de Hooke, com a proporcionalidade entre tensões e deformações dos materiais ($\sigma = E\varepsilon$), o comportamento das peças em serviço pode ser então avaliado, sendo possível obter para conjunto de carregamento, vão, seção transversal e materiais, as deformações, tensões e deslocamentos verticais.

## 5.3 Expressões para o cálculo das flechas nas lajes mistas

O cálculo dos deslocamentos verticais das lajes mistas de aço e concreto podem ser obtidos a partir da linha elástica, tomada como base na resposta da estrutura com a cinemática da viga de Euler-Bernoulli. Dessa forma, o giro da seção $\theta$ e a linha elástica $v$ que representa o deslocamento vertical, são dados pelas Equações 5.6 e 5.7, respectivamente. Toma-se como base a curvatura da seção transversal e de acordo com Gilbert e Ranzi (2011) aplicam-se tanto para materiais de comportamento elástico como inelástico.

$$\theta = \int \kappa(z)dz \qquad (5.6) \qquad e \qquad v = \iint \kappa(z)dz\,dz \qquad (5.7)$$

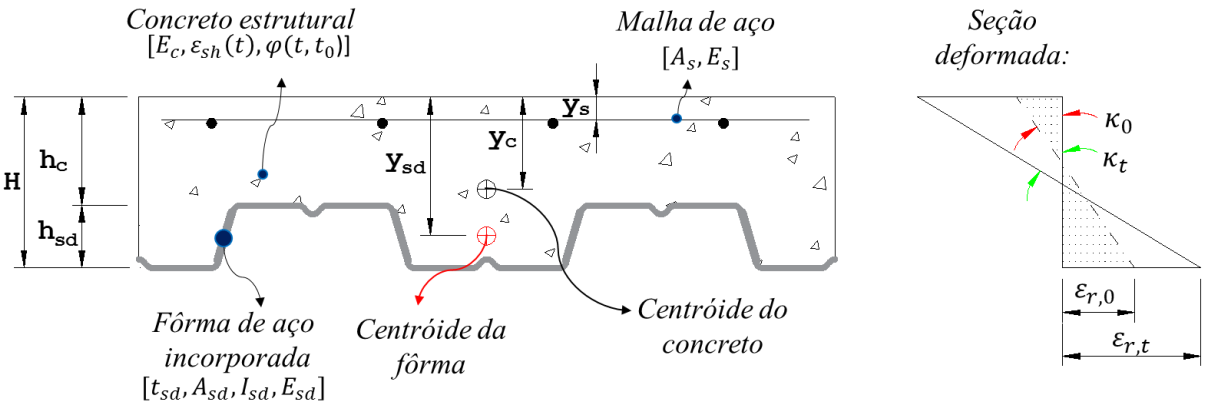
A estrutura quando submetida a carregamentos, sejam eles de peso próprio ou externos, deforma-se, apresentando uma curvatura da seção transversal. Dado a laje ser formada por dois materiais diferentes, faz-se a consideração que ambos apresentam a mesma curvatura. A

curvatura da seção é afetada também pelos efeitos não mecânicos devidos à retração e à fluência.

Nesse ponto destaca-se o fato da retração do concreto mobilizar esforços no aço da tela e na fôrma e, dado a excentricidade entre os centróides dos materiais, resultantes de esforços internos geram momentos mobilizados pela retração. Somado a isso, deve ser levado em conta a constatação do perfil de retração não-uniforme das lajes mistas.

A Figura 5.3 esquematiza a descrição da seção transversal de uma laje mista, usado nas análises.

Figura 5.3 – Seção transversal genérica e perfil de deformação esquemático para a laje mista




Fonte: Autor (2019)

Por conveniência prática de projeto, algumas equações simples são rotineiramente usadas pela facilidade de aplicação. Dessa forma, apresenta-se expressões simplificadas para cálculo dos deslocamentos verticais e giros para as duas principais situações estáticas para lajes mistas encontradas nos ensaios da literatura para avaliação das flechas: com um vão simplesmente apoiado e com dois vãos, representado com o modelo apoiado-engastado, sob carregamentos estáticos e sujeitos à retração.

Posteriormente, apresenta-se uma metodologia refinada baseada no conhecimento da curvatura de várias seções ao longo da peça e integração através do método das diferenças finitas. Particulariza-se a metodologia para as lajes mistas simplesmente apoiadas para a aplicação no presente trabalho, por ser muitas das vezes a situação mais corriqueira de dimensionamento das lajes mistas.

### *5.3.1 Expressões simplificadas*

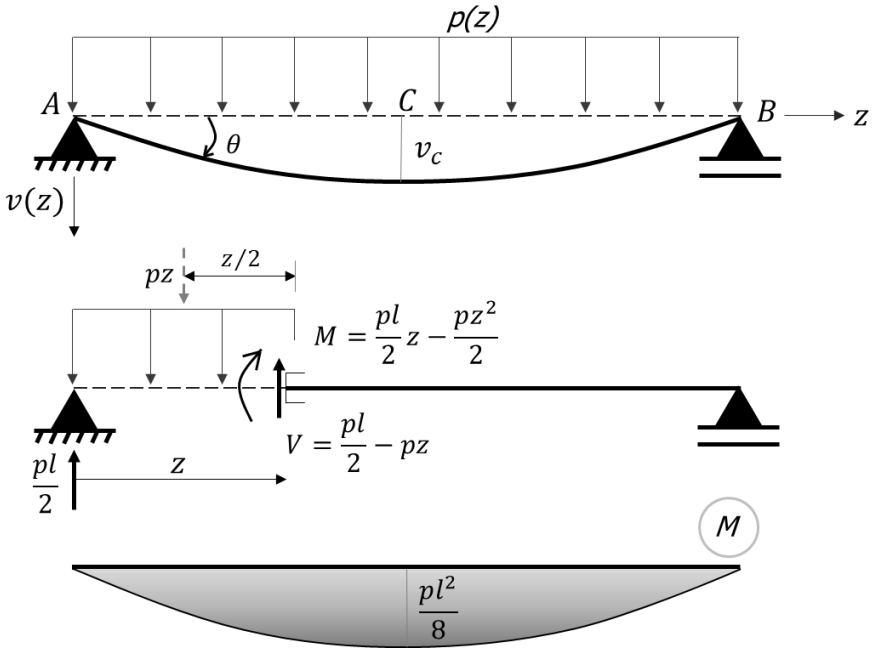
Apresentam-se duas abordagens para o cálculo das flechas máximas devido à carregamentos aplicados, baseadas em expressões fechadas e na integração das curvaturas. Destaca-se que a abordagem baseada na integração de curvaturas possibilita incorporar as parcelas induzidas pela retração e fluência no cálculo das fechas totais.

- ***Modelo de viga simplesmente apoiada sob carregamento***

Seja uma viga de vão *L*, sujeito a um carregamento *p(z)*, com momento de inércia *I* e módulo de elasticidade *E*, na Figura 5.4. Com realização do equilíbrio de esforços internos de momento fletor *M(z)*, partindo da Equação 5.5 da curvatura da seção:

$$\kappa = \frac{M(z)}{EI} = \frac{d^2v}{dz^2} = v"$$

Figura 5.4 – Sistema simplesmente apoiado




Fonte: Autor (2019)

Integrando a equação da linha elástica, tem-se:

$$\kappa = v"(z) = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{lz}{2}\right)$$

$$\theta = v'(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{4} + C_1\right) \quad e \quad v(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{12} + C_1 z + C_2\right)$$

Impondo as condições de contorno, chega-se a:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0\,; \quad v(l) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{l^3}{24}$$

$$\theta(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{4} + \frac{l^3}{24}\right) \quad e \quad v(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{12} + \frac{l^3 z}{24}\right)$$

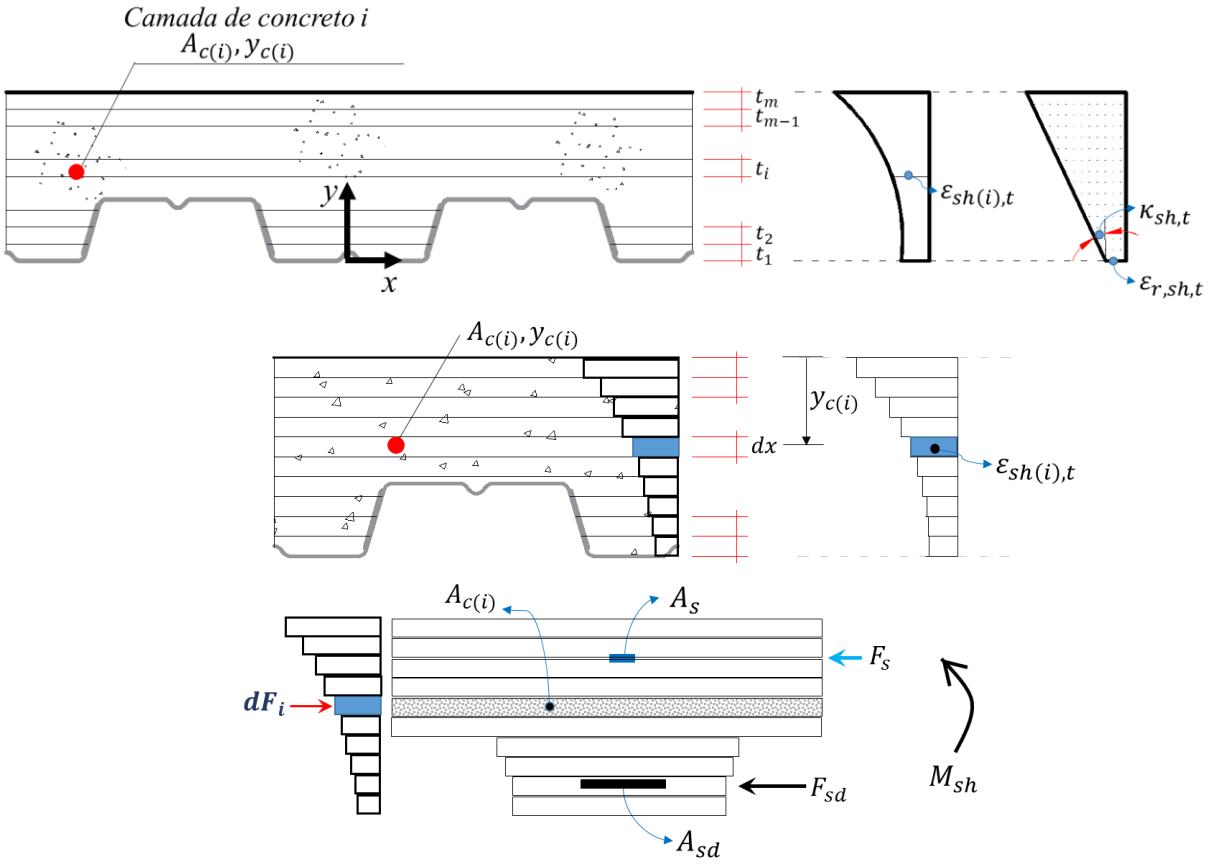
O deslocamento máximo $v$ (flecha) dada a simetria ocorre no meio do vão e o giro $\theta$ máximo ocorre nos apoios, dados pelas Equações 5.8 e 5.9:

$$\boxed{v(l/2) = \frac{5pl^4}{384EI}} \quad (5.8) \qquad e \qquad \boxed{\theta(0) = -\theta(l) = -\frac{pl^3}{24EI}} \quad (5.9)$$

- ***Modelo de viga simplesmente apoiada sob efeitos da retração***

Como o sistema é isostático e determinado, teoricamente a ocorrência da retração não provoca alteração nas reações de apoio. Seja a Figura 5.5 tomada como base para desenvolvimento das análises. Para um elemento infinitesimal *dy*, submetido a deformação de retração $\varepsilon_{sh,t}$, dado a restrição do perfil da fôrma de aço à essa deformação surge como condição de equilíbrio uma força excêntrica na seção, criando um momento interno $M_{sh}$. A Figura 5.5 esquematiza o carregamento axial promovido pela retração.

Figura 5.5 – Efeitos na retração na seção mista




Fonte: Autor (2019)

A força de tração *F* que surge devido à restrição da retração livre do concreto pela fôrma de aço e armaduras, está aplicada como uma resultante no seu centróide. O infinitésimo de força $dF$ é calculado pela Equação 5.10 e sua resultante aplicada no seu centróide ao qual pode ser obtido pela Equação 5.11:

$$dF = \varepsilon_{sh}(t, t_c) E_{c,eff} dA \tag{5.10}$$

$$y_F = \frac{\int_A ydF}{\int_A dF} \tag{5.11}$$

Ao realizar a discretização da seção em camadas onde $dF = F_i$ e $dA = A_i$ e realizando o equilíbrio no centróide da fôrma de aço, e desprezando a parcela usualmente pequena da malha de aço, a expressão fica bem simplificada (Equação 5.12 e 5.13), tem-se:

$$F = \int dF = \int \varepsilon_{sh}(t, t_c) E_{c,eff} dA \Rightarrow \sum F_i = E_{c,eff} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{sh,t}(i) A_i \tag{5.12}$$

$$y_F = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} \tag{5.13}$$

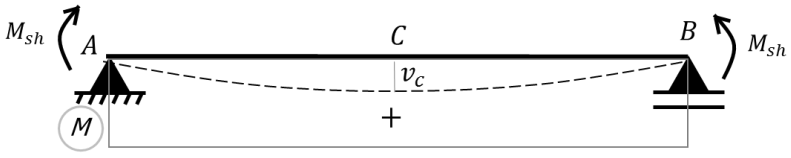
Onde: $E_{c,eff}$ é o módulo efetivo que leva em conta os efeitos da fluência do concreto.

Dessa forma, o efeito da retração pode ser aplicado igual um momento equivalente $M_{sh}$ nos apoios, igual a Equação 5.13:

$$M_{sh} = F(y_F - y_{sd}) \tag{5.13}$$

A condição estática fica representada conforme Figura 5.6. A flecha causada pelo momento equivalente é dado pela Equação 5.14.

Figura 5.6 – Modelo de viga simplesmente apoiada com momentos nas extremidades




Fonte: Autor (2019)

$$v_c = \frac{M_{sh} l^2}{8EI} \tag{5.14}$$

Dado que o momento e a curvatura são diretamente proporcionais, a flecha devido à retração pode então ser expressa pela curvatura ($M(z) = \kappa EI$) ( Equação 5.15):

$$v_c = \frac{\kappa_{sh} l^2}{8} \tag{5.15}$$

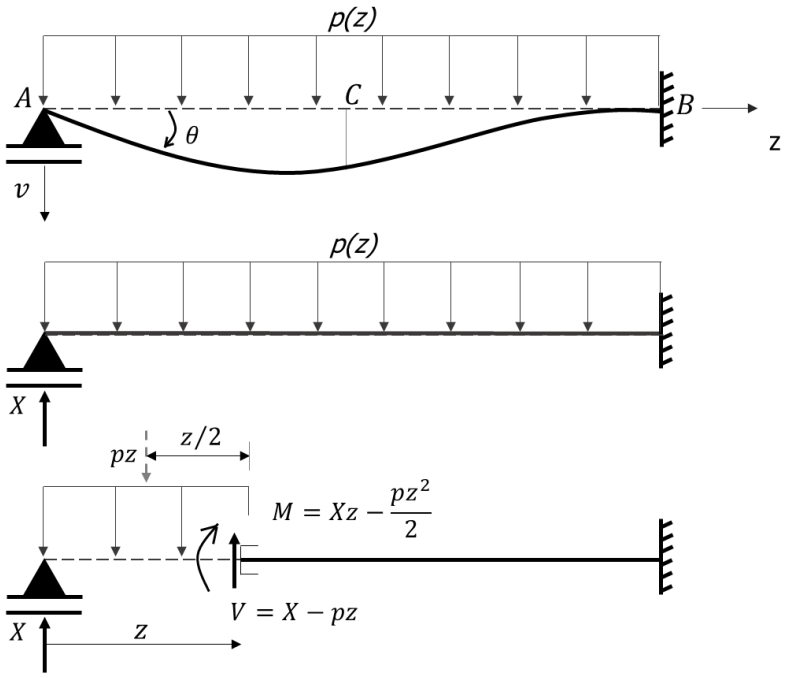
Uma vez determinada a curvatura de uma seção para o modelo de viga simplesmente apoiado, pode-se então determinar a parcela de flecha devida à retração.

- ***Modelo de viga com 2 vãos iguais: apoiada-engastada***

O modelo de viga de dois tramos iguais sujeitos ao mesmo carregamento e com mesmo vão pode ser simplificado pela simetria com o modelo de viga apoiada-engastada. De maneira similar à viga simplesmente apoiada, apresenta-se o esquema estático na Figura 5.7. A viga tem um grau de hiperestaticidade. Partindo-se da estrutura isostática de viga em balanço, a incógnita hiperestática X substitui o vínculo vertical à esquerda e o momento em uma seção arbitrária é dado pela equação 5.16:

$$M(z) = Xz - \frac{pz^2}{2} \tag{5.16}$$

Figura 5.7 – Sistema simplesmente apoiado-engastado




Fonte: Autor (2019)

Da equação da linha elástica é possível de maneira similar chegar às seguintes equações:

$$\kappa(z) = v"(z) = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{pz^2}{2} - Xz\right)$$

$$\theta(z) = v'(z) = \frac{1}{EI}\left(\frac{pz^3}{6} - \frac{Xz^2}{2} + C_1\right)$$

$$v(z) = \frac{1}{EI}\left(\frac{pz^4}{24} - \frac{Xz^3}{6} + C_1 z + C_2\right)$$

A determinação da reação X e das constantes $C_1$ e $C_2$ são obtidas pelas 3 condições de contorno. Dessa forma, tem-se:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow \frac{pl^4}{24} - \frac{Xl^3}{6} + C_1 l = 0 \quad e \quad \theta(l) = 0 \Rightarrow \frac{pl^3}{6} - \frac{Xl^2}{2} + C_1 = 0$$

Resolvendo o sistema de equações obtém-se:

$$X = \frac{3}{8}pl \quad e \quad C_1 = \frac{1}{48}pl^3$$

Introduzidas nas expressões de $\theta(z)$, $v(z)$ e substituindo X na expressão do momento fletor, fornecem as Equações 5.17 a 5.19, para giro, deslocamento verticais e momento:

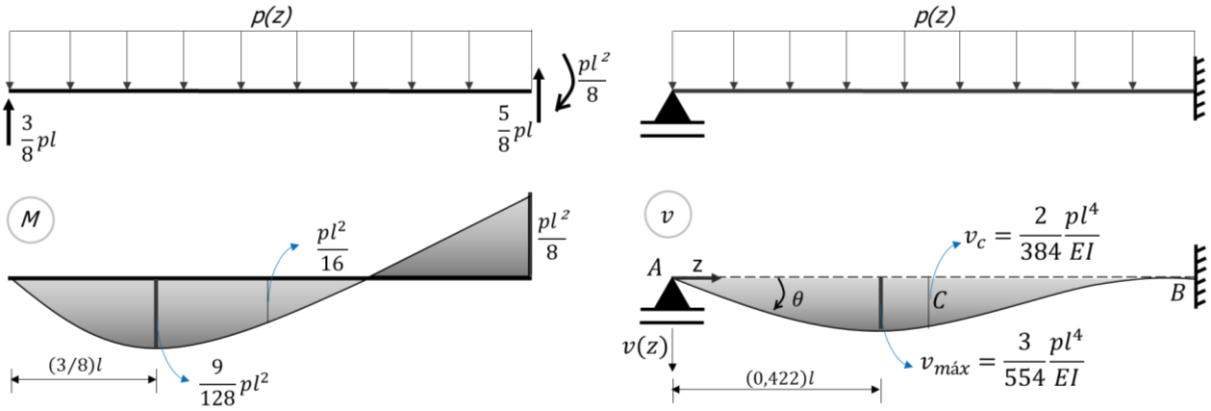
$$\theta(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{3lz^2}{16} + \frac{l^3}{48}\right) \tag{5.17}$$

$$v(z) = \frac{p}{EI}\left(\frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{16} + \frac{l^3 z}{48}\right) \tag{5.18}$$

$$M(z) = \frac{3}{8}plz - \frac{pz^2}{2} \tag{5.19}$$

Uma discussão a ser feita é que normalmente calcula-se a flecha para o meio do vão. Pelas expressões acima, chega-se ao resultado do momento fletor máximo a $z = (3/8)l$ e a flecha máxima a $z = (0{,}422)l$. A Figura 5.8 mostra o diagrama de momento e a linha elástica para a viga apoiada-engastada.

Figura 5.8 – Diagrama e linha elástica para modelo viga apoiado-engastado




Fonte: Autor (2019)

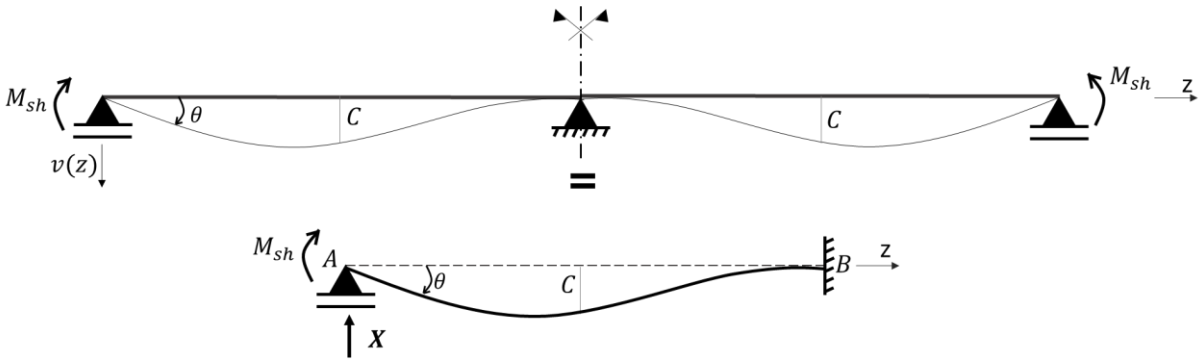
Comumente para as vigas apoiada-engastada os ensaios experimentais medem a flecha no meio do vão. Como se observa da Figura 5.8, a diferença teórica entre o deslocamento do meio do vão e o valor máximo é relativamente pequena, da ordem de 5,0%.

- ***Modelo de viga apoiada-engastada sob efeitos da retração***

Diferente da viga simplesmente apoiada, o modelo de viga apoiado-engastado é estaticamente indeterminado e a retração influencia no cálculo das reações de apoio. Tomando as mesmas considerações de distribuição do perfil de retração e realizando superposição de efeitos, chega-se às parcelas devido os efeitos da retração.

Moussa (1984) traz no seu trabalho um esquema do efeito da retração em uma viga mista, formada por perfil de aço e capa de concreto com laje convencional. Dado o surgimento de um momento devido a retração $M_{sh}$ da mesma maneira que no modelo estático simplesmente apoiada, a partir da Figura 5.9, pode-se derivar as expressões para flecha devido à retração.

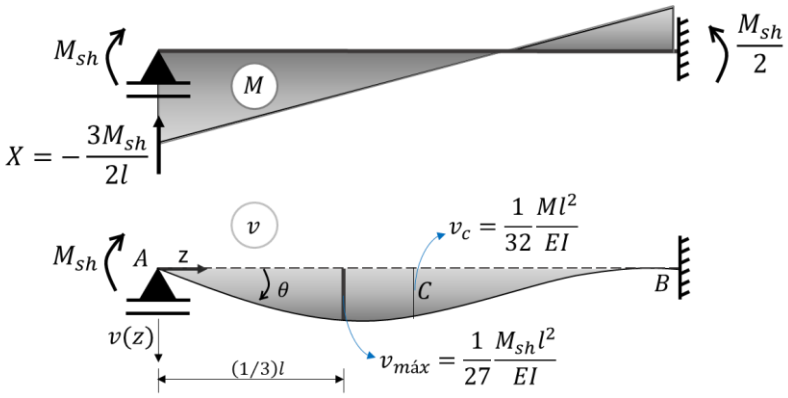
Figura 5.9 – Esquema estático com carregamento equivalente devido à retração




Fonte: Autor (2019)

Por compatibilidade de deslocamentos sobre o apoio A, calculam-se a incógnita $X$ e, consequentemente as reações de apoio e deslocamentos desejados. A Figura 5.10 apresenta os resultados da análise.

Figura 5.10 – Diagrama de momento e linha elástica devido os efeitos da retração




Fonte: Autor (2019)

O momento devido a retração $M_{sh}$ acarreta um aumento da flecha e diminuição da reação do apoio de extremidade, com consequente aumento de reação ao apoio intermediário. Gholamhoseini (2018) detectou ao longo do tempo uma redistribuição de esforços, com o aumento da reação do apoio central por meio de células de carga, dado que a retração do concreto aumenta ao longo do tempo. Um ponto a destacar é que ele apresentou um diagrama de momentos fletores sem levar em conta a parcela de momento devido à retração.

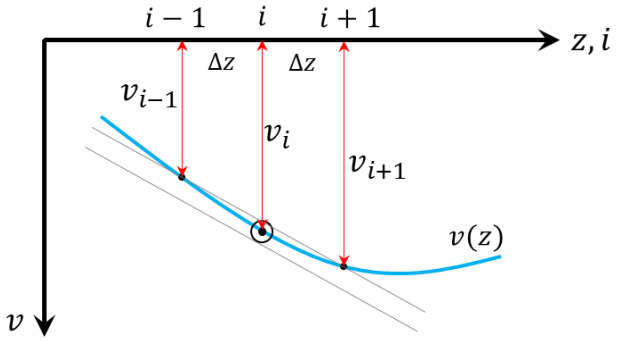
### *5.3.2 Formulação por meio da integração das curvaturas pelo MDF*

Se a curvatura $\kappa$ e as deformações de referência $\varepsilon_t$ são calculadas para um tempo qualquer em um número determinado de pontos ao longo da peça, pode-se utilizar métodos numéricos para a solução da equação diferencial da linha elástica. Aplica-se no presente trabalho a solução diferencial pelo uso do método das diferenças finitas, pela facilidade de implementação em planilhas eletrônicas. Esse método escreve os operadores diferenciais em função de valores pontuais. A solução é aproximada e à medida que a discretização é melhor feita, a resposta numérica tende a se aproximar do valor real.

A formulação básica da Série de Taylor dá início ao Método das Diferenças Finitas (MDF), através da aproximação das derivadas. Dado que a curvatura $\kappa$ é a segunda derivada da linha elástica $v$, conhecido as curvaturas chega-se a solução da linha elástica e consequentemente às flechas. O método utiliza como técnica de solução da equação diferencial a substituição das derivadas por formas de diferenças finitas que podem ser obtidas pela expansão da série de Taylor e truncamento ao nível da ordem de erro admitida.

A aproximação das derivadas pela Série de Taylor pode ser entendida pela interpretação geométrica da derivada (Figura 5.11) e expressa pela Equação 5.20. Aplicando os conceitos a partir da função $f(x) = v(z)$, desenvolvimentos analíticos podem ser realizados.

Figura 5.11 – Interpretação geométrica para a derivada de uma função




Fonte: Autor (2019)

Série de Taylor adaptada à linha elástica:

$$v(z) = v(a) + v'(a)v(z-a) + \frac{v'(a)v(z-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{v^{(n-1)}(a)v(z-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n \qquad (5.20)$$

Onde $v(z)$ é a função que descreve a linha elástica do problema, $a$ é o intervalo ($\Delta z$) e $R_n$ é o resto após n termos, que é dado por algumas formas, como Lagrange e Cauchy.

A partir da Equação 5.20, pode-se escrever:

$$v(z+\Delta z) = v(z) + \frac{dv}{dz}\Delta z + \frac{d^2v}{dz^2}\frac{(\Delta v)^2}{2!} + \frac{d^3v}{dz^3}\frac{(\Delta z)^3}{3!} + \cdots + \frac{d^{(n-1)}v}{dz^{(n-1)}}\frac{(\Delta z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$v(z-\Delta z) = v(z) - \frac{dv}{dz}\Delta z + \frac{d^2v}{dz^2}\frac{(\Delta z)^2}{2!} - \frac{d^3v}{dz^3}\frac{(\Delta z)^3}{3!} + \cdots - \frac{d^{(n-1)}v}{dz^{(n-1)}}\frac{(\Delta z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Trabalhando com dois termos da série (n = 2):

$$v(z) = v(a) + v'(a)v(z-a)$$

Tem-se:

$$v(z+\Delta z) - v(z-\Delta z) = \left[v(z) + \frac{dv}{dz}\Delta z\right] - \left[v(z) - \frac{dv}{dz}\Delta z\right]$$

$$v(z+\Delta z) - v(z-\Delta z) = \frac{dv}{dz}\cdot 2\cdot \Delta z$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v(z+\Delta z) - v(z-\Delta z)}{2\cdot \Delta z}$$

Sendo $v(z)$ e usando notação indicial, tem-se o operador em diferenças finitas para a primeira derivada, conhecido como diferença central (Equação 5.21).

$$\boxed{\left(\frac{dv}{dz}\right)_i = \frac{v_{(i+1)} - v_{(i-1)}}{2\cdot \Delta z}} \tag{5.21}$$

Para obtenção do operador em diferenças finitas para segunda derivada deve-se trabalhar como os três primeiros termos da série (n = 3):

$$v(z) = v(a) + v'(a)v(z-a) + \frac{v'(a)v(z-a)^2}{2!}$$

Tem-se:

$$v(\mathrm{z}+\Delta z) + v(z-\Delta \mathrm{z}) = \left[v(z) + \frac{dv}{dz}\Delta z + \frac{d^2v}{dz^2}\frac{(\Delta z)^2}{2!}\right] + \left[v(z) - \frac{dv}{dz}\Delta \mathrm{z} + \frac{d^2v}{dz^2}\frac{(\Delta z)^2}{2!}\right]$$

$$v(z+\Delta z) - v(z-\Delta z) = 2\cdot v(z) + 2\cdot \frac{d^2v}{dz^2}\frac{(\Delta z)^2}{2!}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{v(z+\Delta z) - 2\cdot v(z) + v(z-\Delta z)}{(\Delta z)^2}$$

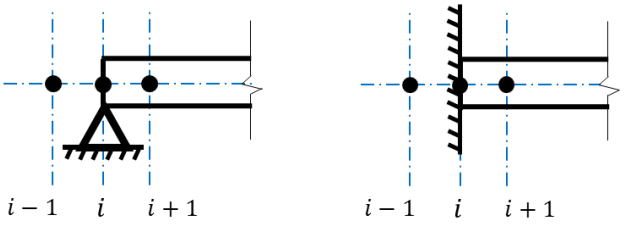
Sendo $\kappa = v"(z)$, tem-se para o operador em diferenças finitas para a segunda derivada (Equação 5.22):

$$\boxed{\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_i = \frac{v_{(i+1)} - 2v_i + v_{(i-1)}}{(\Delta z)^2}} \tag{5.22}$$

Derivadas de ordens superiores podem ser obtidas com facilidade e não serão apresentadas nesse trabalho. Uma estratégia para diminuir o número de variáveis do sistema é aplicar as condições de contorno conhecidas nos pontos da viga ao método das diferenças finitas. Além disso, relacionar pontos fora da viga de Euler-Bernoulli (pelos nós artificiais da malha) a pontos no seu interior, levando ao sistema determinado.

Para as vigas simplesmente apoiadas, os deslocamentos verticais nos apoios são nulos. Para as vigas com apoio do tipo engaste, tanto os deslocamentos como os giros são nulos. Dessa forma, utilizando-se dos pontos fictícios chega-se a relações entre os deslocamentos (Figura 5.12). Para outras configurações como modelos de vigas em balanço ou deslizantes também é possível chegar a relações, mas essas não são mostradas.

Figura 5.12 – Condição de contorno para a diferença central do MDF




Fonte: Autor (2019)

Assim, tem-se:

- Apoios fixos ou móveis:

  - A flecha no apoio é nula: $v_i = 0$;

  - A rotação não é nula, mas o momento nos apoios são igual a zero (Equação 5.23):

$$\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_i = \frac{v_{(i+1)} - 2v_i + v_{(i-1)}}{(\Delta z)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{(i+1)} = -v_{(i-1)}} \tag{5.23}$$

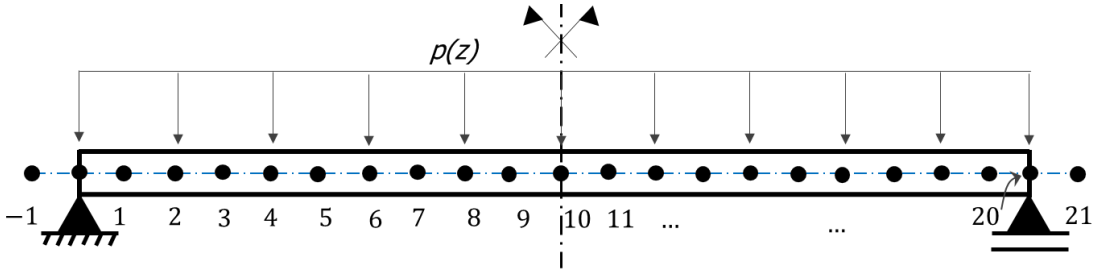
- Apoios do tipo engaste:

  - A flecha no engaste é nula, assim como o giro (Equação 5.24):

$$v_i = 0 \; e \; \left(\frac{dv}{dz}\right)_i = 0 = \frac{v_{(i+1)} - v_{(i-1)}}{2 \cdot \Delta z} \Rightarrow \boxed{v_{(i+1)} = v_{(i-1)}} \tag{5.24}$$

Dessa maneira, aplica-se o método das diferenças finitas para os modelos de viga simplesmente apoiados, com a peça discretizada ao longo do seu comprimento ($l$) em partições ($\Delta z$), conhecido suas curvaturas ($k_i$), conforme ilustra a Figura 5.13. O modelo apresenta simetria geométrica e de carregamento, logo, foi realizada a discretização de metade do modelo, em 10 partições.

Figura 5.13 – Discretização da peça para aplicação do método das diferenças finitas




Fonte: Autor (2019)

Aplicando a formulação do MDF ao estudo dos deslocamentos verticais, tem-se:

- Equação da segunda derivada ($v"(z)$)pela série de Taylor:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta z)^2}$$

- Número de partições ($\Delta z$):

$$\Delta z = \frac{l}{20}$$

- Curvatura da seção $i$ ($k_i$):

$$\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_i = k_i$$

- Manipulação algébrica para montagem do sistema, na determinação do vetor dependente ($\lambda_i$) (Equação 5.25):

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = \frac{d^2v}{dz^2} \cdot (\Delta z)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda_i = k_i \cdot \left(\frac{l}{20}\right)^2} \qquad (5.25)$$

A discretização do presente modelo serve para a condição simplesmente apoiado discretizado até a metade do vão (pela simetria) e para o modelo de viga apoiado-engastado, discretizado em todo o seu vão. Dessa forma, aplicando a Equação 5.25, obtém-se o sistema linear ($10\ x\ 10$) para o a solução dos deslocamentos verticais $v_i$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{10} \end{Bmatrix}$$

Com a solução do sistema obtêm-se os valores dos deslocamentos verticais $v_i$ para cada seção, sendo a flecha dada pelo valor de $v_{10}$, para as lajes simplesmente apoiadas. A solução do sistema é de fácil implementação em planilhas eletrônicas ou calculadoras, apresentando praticidade no seu uso, uma vez implementada. Essa metodologia apresentada permite obter as flechas a partir da curvatura de cada seção, dadas pelos efeitos do carregamento e as curvaturas devidas aos efeitos da retração e fluência. Além disso, a possibilidade de incorporar a parcela devida à fissuração do concreto, com uso de uma curvatura equivalente.

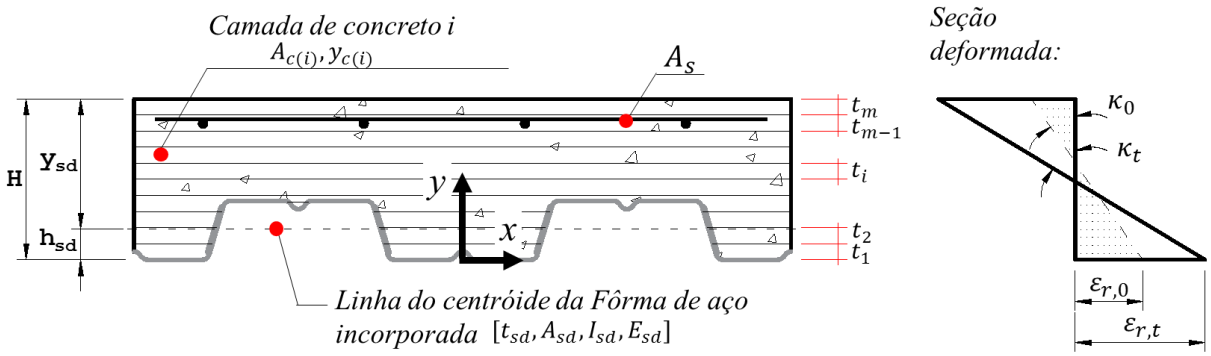
## 5.4 Análise da seção transversal da laje mista de aço e concreto

A formulação estrutural para o elemento fletido pode ser feita usando os princípios dos trabalhos virtuais (Gilbert e Ranzi, 2011). O equacionamento é feito com base no balanceamento do trabalho das forças internas e forças externas para cada variação virtual dos deslocamentos e correspondentes deformações. Dessa forma, pela definição de força interna *N* e momento *M*, tem-se as equações 5.26 e 5.27, respectivamente.

$$N = \int_A \sigma dA \qquad (5.26) \qquad ; \qquad M = \int_A -y\sigma dA \qquad (5.27)$$

Como a utilização da cinemática de viga de Euler-Bernoulli considera material homogêneo, dessa forma a seção mista formado pelos materiais aço, concreto e armaduras necessitam ser homogeneizadas. Dessa forma, seja uma seção genérica de uma laje mista formada pela fôrma de aço incorporada, o concreto e possível armadura adicionais, cada material com seu módulo de elasticidades $E_{(i)}$, realiza-se a discretização da seção por meio de camadas *i de* espessura $t_m$, altura total *D*, área de cada camada de concreto $A_{(i)}$, da fôrma de aço por $A_{sd}$ e do aço por $A_s$. A distância do centróide da fôrma de aço até a face superior da laje $d_{sd}$ e os momentos de inércia para a fôrma de aço incorporada por $I_{sd}$. A Figura 5.14 mostra esquematicamente a discretização da seção mista.

Figura 5.14 – Discretização do concreto em camadas para análise da seção mista




Fonte: Adaptado de Gholamhoseini (2014)

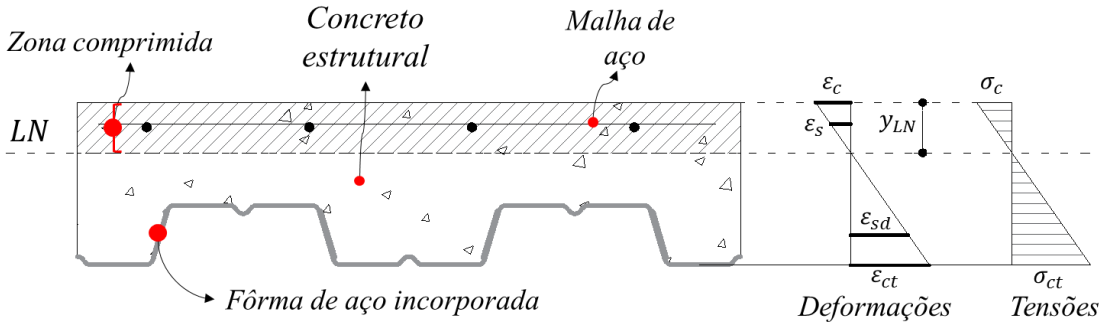
Essa discretização é importante para levar em conta a ocorrência da retração não-uniforme nas respectivas camadas. Gilbert e Ranzi (2011) apresentam esse método para retração uniforme e Gholamhoseini (2014) estendeu para a retração não-uniforme. Dessa maneira, utiliza-se dessa metodologia para análise das seções e respostas imediatas e diferidas do tempo. Realiza-se distinção da resposta das seções de concreto fissurada e não-fissurada, e quando necessário, aplicam-se procedimentos para a consideração da contribuição da parcela do concreto fissurada (*efeito do tension stiffening*).

Uma adequação a ser feita se dá para os estados limites de serviço das estruturas sob flexão, caso típico de lajes e vigas, apresentar diferentes comportamentos a depender do nível de carregamento. O concreto pode apresentar-se parcialmente no estádio I (Figura 5.15 (a)), não apresentando presença de fissuras, e parcialmente no estádio II, quando o concreto já passa a apresentar fissuras (Figura 5.15 (b)). Há ainda o Estádio III definido como a fase em que o concreto comprimido está na iminência da ruptura, usualmente utilizado para verificações no estado limite último.

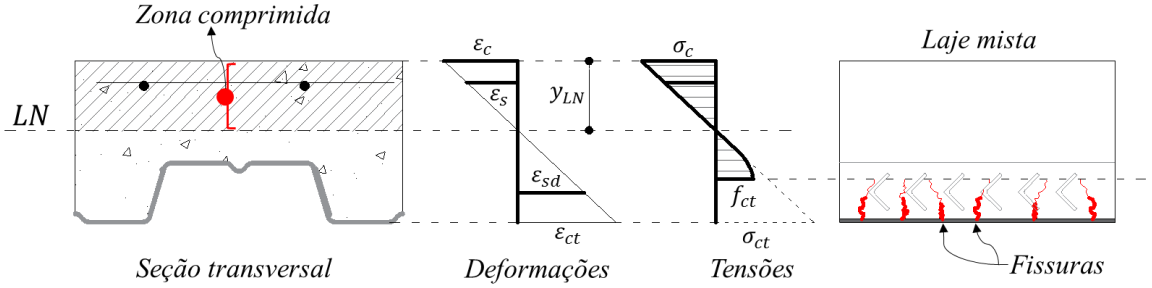
A separação entre a seção fissurada e a não-fissurada é definida pelo momento de fissuração e ocorre quando a tensão no concreto supera sua resistência à tração na flexão $f_{ct,f}$, surgindo as primeiras fissuras na peça. No estádio I, pode ser aplicada a proporcionalidade entre tensões e deformações para qualquer fibra da seção transversal. No estádio II o diagrama de tensões de compressão ainda varia linearmente e para um trecho próximo à linha neutra ainda resiste à tração. Essa contribuição comumente é desprezada e admite-se que toda a região abaixo da linha neutra de tensões está fissurada. A fissuração afeta significativamente a rigidez do elemento. Além disso, o concreto com a presença de armaduras e a fôrma de aço leva as tensões de tração ao concreto induzidas pela retração, que afetam na redução do momento de fissuração.

Figura 5.15 – Comportamento da seção dependente do nível de solicitação

*(a) Peça trabalhando no Estádio I*




*(b) Peça trabalhando no Estádio II*




Fonte: Autor (2019)

### *5.4.1 Concreto com seção não-fissurada*

- **Análise da resposta imediata**

A resposta imediata para cada material (concreto, armaduras e fôrma de aço incorporada) quando sujeitos ao carregamento, na idade $t_0$ assume regime elástico linear. A relação entre tensão e deformação pode ser expressa pela Equação 5.28.

$$\sigma_{c(i),0} = E_{c(i),0}\varepsilon_0;\ \sigma_{s(i),0} = E_{s(i)}\varepsilon_0;\ \sigma_{sd(i)} = E_{sd}\varepsilon_0 \tag{5.28}$$

Onde $\varepsilon_0 = \varepsilon_{r0} - y\kappa_0$ é a deformação imediata ao longo da altura da seção y acima do eixo de referência; $\varepsilon_{r0}$ é a deformação no eixo de referência e $\kappa_0$ é a curvatura imediata e $E_{c(i),0}$, $E_{s(i)}$, $E_{sd}$ são os módulos de elasticidade do concreto, armaduras e fôrma de aço, respectivamente.

As ações internas nos diversos materiais podem ser expressas para as camadas discretizadas do concreto conforme Equação 5.29 e 5.30, que serão usadas para equação de equilíbrio da seção mista.

$$\begin{aligned} N_{c(i),0} &= \int_{A_{c(i)}} \sigma_{c(i),0}dA = \int_{A_{c(i)}} E_{c(i),0}\left(\varepsilon_{r,0} - y\kappa_0\right)dA = \\ &= A_{c(i)}E_{c(i),0}\varepsilon_{r,0} - B_{c(i)}E_{c(i),0}\kappa_0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} M_{c(i),0} &= \int_{A_{c(i)}} -y\sigma_{c(i),0}dA = \int_{A_{c(i)}} -yE_{c(i),0}\left(\varepsilon_{r,0} - y\cdot\kappa_0\right)dA \\ &= -B_{c(i)}E_{c(i),0}\varepsilon_{r,0} + I_{c(i)}E_{c(i),0}\kappa_0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Onde $N_{c(i),0}$ e $M_{c(i),0}$ são a força normal resistida por cada camada discretizada da seção de concreto e o momento fletor em relação ao eixo de referência. Os termos $A_{c(i)}$, $B_{c(i)}$ e $I_{c(i)}$ são a área, o momento estático de área e o momento de inércia da cada camada da seção transversal, respectivamente.

Da mesma maneira, as ações internas nas armaduras e na fôrma de aço são expressas pela Equação 5.31 e 5.32 e Equação 5.33 e 5.34 , respectivamente.

$$\begin{aligned} N_{s(i),0} &= \int_{A_{s(i)}} \sigma_{s(i),0}dA = \int_{A_{s(i)}} E_{s(i)}\left(\varepsilon_{r,0} - y\kappa_0\right)dA = \\ &= \left(A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\varepsilon_{r,0} - \left(y_{s(i)}A_{s(i)}\right)\kappa_0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} M_{s(i),0} &= \int_{A_{s(i)}} -y\sigma_{s(i)}dA = \int_{A_{s(i)}} -E_s y(\varepsilon_{r0} - y\kappa_0)\,dA \\ &= \left(-y_{s(i)}A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\varepsilon_{r,0} + \left(y_{s(i)}^2A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\kappa_0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

e

$$N_{sd,0} = \int_{A_{sd}} \sigma_{sd} dA = \int_{A_{sd}} E_{sd}\left(\varepsilon_{r,0} - y\kappa_0\right) dA = A_{sd}E_{sd}\varepsilon_{r,0} - B_{sd(i)}E_{sd}\kappa_0 \quad (5.33)$$

$$M_{sd,0} = \int\limits_{A_{s(i)}} -y\sigma_{sd} dA = \int\limits_{A_{s(i)}} -yE_{sd}(\varepsilon_{r0} - y\kappa_0)\, dA = -B_{sd(i)}E_{sd}\varepsilon_{r,0} + I_{sd}E_{sd}\kappa_0 \quad (5.34)$$

A equação de equilíbrio para a seção mista é obtida pela soma das forças internas resultantes com as ações externas de força norma externa $N_{e,0}$ e momentos fletores externo $M_{e,0}$ que agem sobre a seção. Com o equilíbrio da seção tem-se as Equações 5.35 e 5.36.

$$\begin{aligned} N_{e,0} &= \sum_{i=1}^{m_c} N_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} N_{s(i),0} + N_{sd,0} \\ &= \left[A_{c(i)}E_{c(i),0}\varepsilon_{r,0} - B_{c(i)}E_{c(i),0}\kappa_0\right] + \left[\left(A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\varepsilon_{r,0} - \left(y_{s(i)}A_{s(i)}\right)\kappa_0\right] \\ &\quad + \left[A_{sd}E_{sd}\varepsilon_{r,0} - B_{sd(i)}E_{sd}\kappa_0\right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} M_{e,0} &= \sum_{i=1}^{m_c} M_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} M_{s(i),0} + M_{sd,0} \\ &= \left[-B_{c(i)}E_{c(i),0}\varepsilon_{r,0} + I_{c(i)}E_{c(i),0}\kappa_0\right] \\ &\quad + \left[\left(-y_{s(i)}A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\varepsilon_{r,0} + \left(y_{s(i)}^2 A_{s(i)}E_{s(i)}\right)\kappa_0\right] \\ &\quad + \left[-B_{sd(i)}E_{sd}\varepsilon_{r,0} + I_{sd}E_{sd}\kappa_0\right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Reescrevendo os termos, por meio de rigidez axial $R_A$, rigidez associado ao momento estático de área $R_B$ e rigidez à flexão $R_I$, tomando como base o trabalho de Gilbert e Ranzi (2011), tem-se as Equações 5.37, 5.38 e 5.39, respectivamente:

$$R_{A,0} = \sum_{i=1}^{m_c} A_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} A_{s(i)}E_{s(i)} + A_{sd}E_{sd} = R_{A,c} + R_{A,s} + R_{A,sd} \quad (5.37)$$

$$R_{B,0} = \sum_{i=1}^{m_c} B_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}A_{s(i)}E_{s(i)} + B_{sd}E_{sd} = R_{B,c} + R_{B,s} + R_{B,sd} \quad (5.38)$$

$$R_{I,0} = \sum_{i=1}^{m_c} I_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}^2 A_{s(i)}E_{s(i)} + I_{sd}E_{sd} = R_{I,c} + R_{I,s} + R_{I,sd} \quad (5.39)$$

Dessa forma, pode-se escrever a equação de equilíbrio da seção de forma matricial conforme a Equação 5.40.

$$\begin{Bmatrix} N_{e,0} \\ M_{e,0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{A,0} & -R_{B,0} \\ -R_{B,0} & R_{I,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,0} \\ \kappa_0 \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Escrevendo de forma compacta tem-se a Equação 5.41, onde $\boldsymbol{D_0}$ é a matriz de rigidez da seção transversal.

$$\boldsymbol{r}_{e,0} = \boldsymbol{D_0}\varepsilon_0 \tag{5.41}$$

Onde

$$\boldsymbol{r}_{e,0} = \begin{bmatrix} N_{e,0} \\ M_{e,0} \end{bmatrix}; \boldsymbol{D_0} = \begin{bmatrix} R_{A,0} & -R_{B,0} \\ -R_{B,0} & R_{I,0} \end{bmatrix}; \varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,0} \\ \kappa_0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, tem-se a solução dada pela Equação 5.42:

$$\varepsilon_0 = \boldsymbol{D_0^{-1}}\boldsymbol{r}_{e,0} = F_0\boldsymbol{r}_{e,0} \tag{5.42}$$

Onde $F_0$ pode ser escrito pela Equação 5.43.

$$F_0 = \frac{1}{R_{A,0}R_{I,0} - R_{B.0}^2}\begin{bmatrix} R_{I,0} & R_{B,0} \\ R_{B,0} & R_{A,0} \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

A distribuição de tensão em cada material, fica portanto, dada pela Equações 5.44, 5.45 e 5.46, para concreto, armaduras e fôrma de aço, respectivamente.

$$\sigma_{c(i),0} = E_{c(i),0}\varepsilon_0 = E_{c(i),0}\left(\varepsilon_{r,0} - y \cdot \kappa_0\right) \tag{5.44}$$

$$\sigma_{s(i),0} = E_{s(i)}\varepsilon_0 = E_{s(i)}\left(\varepsilon_{r,0} - y_{s(i)} \cdot \kappa_0\right) \tag{5.45}$$

$$\sigma_{sd,0} = E_{sd}\varepsilon_0 = E_{sd}\left(\varepsilon_{r,0} - y_{sd} \cdot \kappa_0\right) \tag{5.46}$$

- **Análise da resposta de longa duração**

Para a avaliação da resposta da seção mista em um idade $t$ depois de um período da peça sujeito a um carregamento e à retração, a formulação do AEMM é usada. A relação constitutiva para o concreto discretizada em camadas pode ser expressa pela Equação 5.47.

$$\sigma_{c(i),t} = \bar{E}_{e(i),t}\left(\varepsilon_t - \varepsilon_{sh(i),t}\right) + \bar{F}_{e(i),0}\sigma_{c(i),0} \tag{5.47}$$

Onde $\varepsilon_{sh(i),t}$ é a deformação devido retração que desenvolve na respectiva camada de concreto durante o tempo de intervalo $t_0$ a $t$; $\bar{E}_{e(i),t}$ é o módulo efetivo ajustado a idade e $\bar{F}_{e(i),0}$ é o fator de fluência ajustado a idade, expresso pelas Equação 5.48 e 5.49, respectivamente.

$$\bar{E}_{e(i),t} = \frac{E_{c(i),0}}{1 + \chi_i(t,t_o)\varphi_i(t,t_o)} \tag{5.48}$$

$$\bar{F}_{e(i),0} = \varphi_i(t,t_o)\frac{[\chi_i(t,t_o) - 1]}{[1 + \chi_i(t,t_o)\varphi_i(t,t_o)]} \tag{5.49}$$

Onde $\varphi_i(t,t_o)$ é o coeficiente de fluência para o concreto associado com intervalo de tempo $t_0$ a $t$ e $\chi_i(t,t_o)$ é o coeficiente associado ao coeficiente de envelhecimento do concreto.

A contribuição das camadas de concreto para a força interna normal e momento na idade $t$ pode ser determinada conforme Equações 5.50 e 5.51.

$$N_{c(i),t} = \int_{A_{c(i)}} \sigma_{c(i),t} dA = \int_{A_{c(i)}} \left[\bar{E}_{e(i),t}\left(\varepsilon_{r,t} - y\kappa_t - \varepsilon_{sh(i),t}\right) + \bar{F}_{e(i),0}\sigma_{c(i),0}\right] dA =$$

$$= A_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\varepsilon_{r,t} - B_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\kappa_t - A_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\varepsilon_{sh(i),t} + \bar{F}_{e(i),0}N_{c(i),0} \quad (5.50)$$

$$M_{c(i),t} = \int_{A_{c(i)}} -y\sigma_{c(i),t} dA = \int_{A_{c(i)}} -y\left[\bar{E}_{e(i),t}\left(\varepsilon_{r,t} - y\kappa_t - \varepsilon_{sh(i),t}\right) + \bar{F}_{e(i),0}\sigma_{c(i),0}\right] dA$$

$$= -B_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\varepsilon_{r,t} + I_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\kappa_t + B_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t}\varepsilon_{sh(i),t} + \bar{F}_{e(i),0}M_{c(i),0} \quad (5.51)$$

Dessa forma, a equação de equilíbrio resulta na Equação 5.52.

$$\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} = \mathbf{D_t}\varepsilon_{\mathrm{t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}} \quad (5.52)$$

Onde os termos são dados por:

$$\boldsymbol{r}_{e,t} = \begin{bmatrix} N_{e,t} \\ M_{e,t} \end{bmatrix}; \boldsymbol{D_t} = \begin{bmatrix} R_{A,t} & -R_{B,t} \\ -R_{B,t} & R_{I,t} \end{bmatrix}; \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,t} \\ \kappa_t \end{bmatrix}$$

A rigidez da seção transversal diferida no tempo, fica dado pelas expressões apresentadas pelas Equações 5.53 a 5.55.

$$R_{A,t} = \sum_{i=1}^{m_c} A_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{A,s} + R_{A,sd} \quad (5.53)$$

$$R_{B,t} = \sum_{i=1}^{m_c} B_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{B,s} + R_{B,sd} \quad (5.54)$$

$$R_{I,t} = \sum_{i=1}^{m_c} I_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{I,s} + R_{I,sd} \quad (5.55)$$

Os efeitos da fluência e da retração do concreto são incluídas através dos vetores $\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}}$ e $\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}$, respectivamente e são dados pelas Equações 5.56 e 5.57.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \bar{F}_{e(i),0}\begin{bmatrix} N_{c(i),0} \\ M_{c(i),0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m_c} \bar{F}_{e(i),0}\, E_{c(i),0}\begin{bmatrix} A_{c(i)}\varepsilon_{r,0} - B_{c(i)}\kappa_0 \\ -B_{c(i)}\varepsilon_{r,0} + I_{c(i)}\kappa_0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \begin{bmatrix} A_{c(i)} \\ -B_{c(i)} \end{bmatrix} \bar{E}_{e(i),t}\, \varepsilon_{sh(i),t} \quad (5.57)$$

Resolvendo a equação, a deformação no tempo $t$ é dada pela Equação 5.58.

$$\varepsilon_{\mathrm{t}} = \mathbf{D}_{\mathrm{t}}^{-1}\left(\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}\right) = \mathbf{F}_k\left(\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}\right) \tag{5.58}$$

Onde o termo $\mathbf{F}_k$ pode obtido pela Equação 5.59:

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{R_{A,t}R_{I,t} - R_{B,t}^2}\begin{bmatrix} R_{I,t} & R_{B,t} \\ R_{B,t} & R_{A,t} \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

A distribuição de tensões no tempo $t$ em cada elemento das camadas do concreto, nas armaduras e da fôrma da laje são dadas pelas Equações 5.60, 5.61 e 5.62, respectivamente.

- Concreto:

$$\begin{aligned} \sigma_{c(i),t} &= \bar{E}_{e(i),t}\left(\varepsilon_t - \varepsilon_{sh(i),t}\right) + \bar{F}_{e(i),0}\,\sigma_{c(i),0} \\ &= \bar{E}_{e(i),t}\left(\varepsilon_{r,t} - y\kappa_t - \varepsilon_{sh(i),t}\right) + \bar{F}_{e(i),0}\,\sigma_{c(i),0} \end{aligned} \tag{5.60}$$

- Armaduras e Fôrma de aço incorporada:

$$\sigma_{s(i),t} = E_{s(i)}\varepsilon_t = E_{s(i)}\left(\varepsilon_{r,t} - y_{s(i)} \cdot \kappa_t\right) \tag{5.61}$$

$$\sigma_{sd,t} = E_{sd}\varepsilon_0 = E_{sd}\left(\varepsilon_{r,t} - y_{sd} \cdot \kappa_t\right) \tag{5.62}$$

### *5.4.2 Concreto com seção fissurada*

Diferentemente da seção não-fissurada, onde se considerava a seção integralmente, agora que a tensão de tração no concreto supera a resistência à tração na flexão, aparecem fissuras. Dessa forma, a altura da linha neutra na condição em serviço é calculada usando a equação do momento de área da seção homogeneizada, que pode ser expressa pela Equação 5.63.

Adota-se a hipótese da linha neutra estar acima de nervura, para uma faixa unitária, tomando como base o eixo da face inferior da laje ao centróide de cada material $y_i$, tem-se:

$$y_{cr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i A_i} \tag{5.63}$$

$$y_{cr} = \frac{E_c\left[[(h - y_{cr}) \cdot 1000] \cdot \left(y_{cr} + \frac{(h - y_{cr})}{2}\right)\right] + E_{sd}A_{sd}y_{sd} + (E_{sc} - E_c)A_{sc}y_{sc} + E_{st}A_{st}y_{st}}{E_c[(h - y_{cr}) \cdot 1000] + E_{sd}A_{sd}y_{sd} + (E_{sc} - E_c)A_{sc}y_{sc} + E_{st}A_{st}y_{st}}$$

O resultado da equação acima pode ser obtido pela solução da equação quadrática ou por processo iterativo para obtenção de $y_{cr}$. Determinado a altura da linha neutra, as rigidezes

axial $(R_{A,0}, R_{A,t})$, de momento de área $(R_{B,0}, R_{B,t})$ e relativa a inércia $(R_{I,0}, R_{I,t})$ são calculadas para a seção fissurada, onde despreza-se a contribuição das camadas fissuradas.

O procedimento de análise para o cálculo das parcelas de momentos e normais são semelhantes ao demonstrado para as seções não fissuradas, sendo agora desprezado as camadas de concreto fissurado.

## 5.5 Considerações finais do capítulo

O desenvolvimento do modelo de Euler-Bernoulli desde sua cinemática, com apresentação de equações fechadas permite o cálculo de flechas imediatas de peças homogêneas de comportamento linear e isotrópico submetidas ao carregamento distribuído. Nesse ponto, apresentaram-se as soluções para modelos apoiado-apoiado e apoiado-engastado. São essas as situações comuns de ocorrência das maiores flechas nas estruturas desde que avaliados vãos com tramos iguais.

Demonstrado o efeito secundário devido à retração do concreto que promove o aparecimento de um momento interno, que nas vigas simplesmente apoiadas acarreta ao aumento das flechas. Somado ao aumento das curvaturas, o momento devido à retração leva o modelo apoiado-engastado (estruturas hiperestáticas) ao surgimento de forças que aliviam a reação de apoio nas extremidades, a um aumento dos momentos positivos e negativos.

A adaptação do modelo às peças de concreto, vale da consideração dos materiais trabalharem no regime de deformações elásticas com homogeneização da seção e não ocorrência de deslizamentos entre os materiais.

A abordagem de avaliação da seção transversal pelas rigidezes possibilita a homogeneização da seção e recai em parcelas de contribuição ao sistema linear para cálculo da deformação de referência e curvatura, tanto para a avaliação da seção não-fissurada, como da seção fissurada.

Observa-se que com o refinamento, o número de variáveis aumenta significativamente. No entanto, com o uso dos computadores torna-se fácil a implementação dos cálculos de forma automática em planilhas eletrônicas.

# 6 ABORDAGENS DE AVALIAÇÃO DAS FLECHAS NAS LAJES MISTAS DE AÇO E CONCRETO

*Neste capítulo são apresentados as abordagens utilizadas para a realização da avaliação das flechas nas lajes mistas de aço e concreto.*

## 6.1 Considerações iniciais

Com base nas prescrições normativas e recentes publicações pode-se dividir a avaliação das flechas em duas abordagens: cálculos simplificados e cálculos refinados. A primeira é a mais utilizada pela simplicidade e aplicação prática a projetos. A segunda se diferencia pelo fato da formulação incorporar mais detalhes e rigor aos cálculos e procedimentos numéricos de solução.

As abordagens simplificadas são usualmente indicadas nas normas e apresentadas como o processo de estimativa dos deslocamentos máximos. As abordagens refinadas de cálculo com consideração de todos os efeitos diferidos no tempo apresentam como uma alternativa para avaliações mais rigorosas.

Dessa maneira, apresentam-se inicialmente as abordagens por cálculos simplificados na previsão das flechas das lajes mistas, onde foi dividido em três abordagens: por dispensa de verificação, abordagens com e sem consideração explícita da retração. Por fim, apresenta-se os conceitos da abordagem refinada.

Sobre o procedimento de cálculo das flechas, deve-se atentar ao processo construtivo adotado, com fôrma de aço escorada ou não, visto que a flecha final dependerá dos valores da flecha da fôrma de aço durante a fase construtiva, que resiste às ações permanentes e da flecha da laje mista, a qual resiste às sobrecargas e acabamentos, além dos efeitos diferidos no tempo.

O cálculo dos deslocamentos verticais da fôrma de aço atuando isoladamente, antes da cura do concreto, consideram o seu peso próprio e o peso do concreto fresco, excluindo a sobrecarga de construção. Não se levando em conta a fluência devido peso próprio do concreto. Os deslocamentos da laje mista consideram, quando da existência de escoramentos, a sua retirada, os carregamentos dos acabamentos de pisos, repartições e cargas variáveis de sobrecarga e os efeitos adicionais devidos à retração e à fluência. A depender da aplicação do carregamento em idades diferentes, realizam-se cálculos das flechas de maneira incremental, usando a superposição dos efeitos.

## 6.2 Abordagens por cálculos simplificados

As abordagens de verificação e previsão das flechas por cálculos simplificados estão presentes nas principais normas técnicas do assunto, Eurocode 4 (2004), ANSI-ASCE3-91 (1992) e CSSBI S3-03 (2008), BS 5950-4 (1994) e AS/NZS 2327 (2017). Exemplos de cálculo de deslocamentos máximos são apresentados por Johnson e Anderson (2004), Johnson (2013), Calado e Santos (2013) e Dujmovic, Andrioic e Lukavevic (2015) e Ranzi (2017), cada um com alguma consideração e avanço para simular o comportamento real. Por meio da diferenciação dos cálculos e procedimentos que as normas e exemplos desenvolvidos apresentam, separam-se em três abordagens simplificadas: (1) por dispensa de verificação com limites de razão vão/altura útil; (2) cálculo das flechas negligenciando os efeitos da retração e (3) consideração explícita dos efeitos da retração não-uniforme e fluência.

### *6.2.1 Abordagem simplificada por dispensa de verificação*

A primeira abordagem é usar um procedimento indireto de verificação, em que se pode negligenciar o cálculo das flechas para vãos externos ou simplesmente apoiados das lajes mistas de aço e concreto, respeitando os limites e as orientações:

- A razão vão/altura útil da laje não exceder os limites especificados na Tabela 6.1 apresentado em diferentes normas; e,
- O carregamento que causar deslizamento nos apoios de 0,5 mm nos ensaios de lajes mistas exceder 1,2 vezes o carregamento em serviço.

Tabela 6.1 – Dispensa do cálculo de flecha em razão do máximo valor entre vão/altura

| **Tipo de apoio** | **Eurocode 4 (2004)** | | **BS 5950-4 (1994)** | | **ANSI-ASCE 3-91 (1992)** |
|---|---|---|---|---|---|
| | Concreto normal | Concreto leve | Concreto normal | Concreto leve | - |
| **Vãos biapoiados** | 20 | 18,8 | 30 | 25 | 22 |
| **Vão externos** | 26 | 24,5 | 35 | 30 | 27 |
| **Vãos internos** | 30 | 28,3 | 38 | 33 | 32 |

Fonte: Autor (2019)

Observa-se que as normas trazem diferentes valores dos limites. Não sendo verificada ou conhecida a condição do limite de deslizamento, há duas opções que podem ser adotadas pelo projetista: considerar o deslizamento entre o aço e o concreto ou providenciar ancoragens nos apoios.

Quando utilizado ancoragens de apoio, dado que muitas vezes não se conhece ou não se tem verificação experimental da interação entre a fôrma de aço e o concreto com ancoragens de extremidade, pode ser usado o modelo de cálculo simplificado de arco e tirante (*tied-arch model*) para cálculo da flecha, conforme apresentado em Johnson e Anderson (2004) e Calado e Santos (2013).

### *6.2.2 Abordagem simplificada sem consideração explícita dos efeitos da retração*

A maioria dos métodos simplificados negligenciam os efeitos da retração, como traz a norma Eurocode 4 (2004) e BS 5950-4 (1994), sendo estes os principais método encontrado na verificação das flechas na literatura. Citam que as flechas devidas ao carregamento devem ser calculadas usando análise elástica e cinemática de Euller-Bernoulli com as seguintes hipóteses:

- Seções planas permanecem planas após a flexão, isto é, as deformações longitudinais do concreto e aço em qualquer seção transversal da fôrma de aço é proporcional à distância da fibra da linha neutra da seção mista;
- As tensões são proporcionais às deformações tanto no concreto como no aço em carregamento de serviço;
- Toda a seção transversal de aço deve ser utilizada, exceto quando reduzida por furos;
- Momento de inércia usado nos cálculos da flecha deve ser considerado como a média da seção não-fissurada e fissurada;
- Para a consideração da fluência usualmente utiliza-se um fator multiplicador da flecha imediata ou um módulo de elasticidade reduzido.

A norma ANSI-ASCE 3 (1992) considera as flechas diferidas ao longo do tempo pela fluência, por meio da consideração de um deslocamento vertical adicional, dado por:

$$\delta_{adic} = \delta_0 \cdot \left(2 - 1{,}2\frac{A'_s}{A''_s}\right) \geq 0{,}6 \cdot \delta_0 \tag{6.1}$$

Onde:

$\delta_0 =$ flecha calculada para o carregamento de longa duração sem consideração da deformação lenta; $A'_s =$ área da fôrma de aço sujeita à compressão; $A''_s =$ área da fôrma de aço sujeita à tração;

A norma ANSI-SDI C (2011) e CSSBI-03 (2008) indicam que flechas adicionais resultantes da fluência do concreto, quando aplicado, deve ser calculadas pela multiplicação da flecha elástica imediata devido os carregamentos aplicado pelos fatores da Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Fatores de multiplicação para flechas adicionais

| Duração do carregamento | ANSI-SDI C (2011) | CSSBI-03 (2008) |
|---|---|---|
| 3 meses | (1,0) | (2,0) |
| 6 meses | (1,2) | (2,2) |
| 1 ano | (1,4) | (2,4) |
| 5 anos ou mais | (2,0) | (3,0) |

Fonte: Autor (2019)

O Eurocode 4 (2004), apresenta a avaliação do efeito de deformação lenta, adotando o procedimento simplificado como apresentado para as vigas mistas, dividindo por 2 o módulo de elasticidade do concreto (Equação 6.2). A norma BS 5950 (1994) indica para cálculo uma consideração de uma média ponderada, conforme Equação 6.3.

$$E'_{cm} = \frac{1}{2} \cdot E_{cm} \qquad \text{Eurocode 4 (2004)} \qquad (6.2)$$

$$E'_{cm} = \frac{1}{2} \cdot \left(E_{cm} + \frac{E_{cm}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot E_{cm} \qquad \text{BS 5950 (1994)} \qquad (6.3)$$

Sobre o momento de inércia adota-se a média apresentada pela seção fissurada e não fissurada do concreto, para levar em conta a fissuração do concreto.

Com a análise elástica faz-se as previsões das flechas e compara-se com os limites de deslocamentos máximos permitidos. Observa-se que em geral os limites de deslocamento nas diferentes normas são praticamente iguais, sendo que algumas indicam verificações adicionais.

### *6.2.3 Abordagem simplificada com consideração explícita da retração*

Proposto pela mais recente atualização da norma australiana AS/NZS 2327 (2017) – Estruturas mistas: construções mistas de aço e concreto nas edificações e apresentado com mais detalhes em Al-Deen e Ranzi (2015) e Ranzi (2017), este procedimento leva em conta explicitamente os fatores que influem no comportamento diferido no tempo. A flecha na fôrma de aço isolada é calculada na fase antes da cura, assim como as flechas imediatas após cura e aplicação das sobrecargas, o modelo incorpora a contribuição da rigidez do concreto fissurado, as parcelas de flechas devidas à fluência e à retração não-uniforme.

A norma indica que o procedimento se aplica ao projeto de lajes mistas quando os efeitos dos deslizamentos são considerados insignificantes. Para vãos externos, os efeitos do deslizamento relativo devem ser negligenciados se a carga inicial nos ensaios experimental não causar um deslizamento relativo de 0,50 mm e exceder 1,2 vezes a carga de serviço de projeto.

Se não for atendido, ancoragens de extremidades devem ser providenciadas ou, alternativamente, as flechas devem incluir o efeito do deslizamento relativo.

A flecha devida ao carregamento aplicado apenas às fôrmas de aço deve ser calculada, levando em conta seu peso próprio e o peso do concreto fresco e atenção especial deve ser dada a ocorrência de efeitos de empoçamento na consideração ou não do aumento do peso próprio. A flecha instantânea e as flechas diferidas no tempo, devido à fluência e à retração estão apresentadas a seguir, conforme traz a norma.

A flecha total $\delta_{tot}$ é dada pela soma das flechas imediatas e as diferidas no tempo causadas pela cargas permanentes e parcela das variáveis, efeitos da fluência e da retração. A flecha total é dada por:

$$\delta_{tot} = \delta_{imediata} + \delta_{cc} + \delta_{cs} \quad (6.4)$$

Onde:

$\delta_{imediata}$ = flecha imediata

$\delta_{cc}$ = flecha devido a fluência ($creep$)

$\delta_{cs}$ = flecha devido a retração ($shrinkage$)

O roteiro para a definição e cálculo das parcelas de flechas são apresentados a seguir.

- **Flechas imediatas**

As flechas imediatas $\delta_0$ que ocorrem na aplicação dos carregamentos externos e da aplicação da protensão devem ser calculadas utilizando o valor de $E_c$ (valor médio do módulo de elasticidade do concreto determinado no momento considerado) e o valor do momento de inércia ($I_{ef}$). Cita que as propriedades do material para o concreto e as perdas de protensão nas cordoalhas devem ser aquelas correspondentes à idade da laje mista quando as cargas externas e o protensão são aplicados pela primeira vez.

A norma traz o processo simplificado para o cálculo do valor de $I_{ef}$ que deve ser determinado a partir dos valores da posição das seções:

(a) Para uma vão simplesmente apoiado, o valor no vão central.

(b) Em uma laje contínua:

(i) para vão interno, metade do valor intermédio mais um quarto do valor de cada apoio;

(ii) para vão de extremidade, metade do valor intermédio mais metade do valor no apoio contínuo.

(c) Para um balanço, o valor no engaste.

O valor de inércia efetiva $I_{ef}$ em cada uma das seções indicadas é dado por:

$$I_{ef} = I_{cr} + (I_{uncr} - I_{cr})(M_{cr}/M_s)^3 \leq I_{ef,max} \quad (6.5)$$

Onde:

$I_{ef,max}$ = máximo momento de inércia efetivo e igual a $I_{uncr}$;

$I_{cr}$ = momento de inércia as seção da laje fissurada (desprezando contribuição do concreto tracionado) e com as armaduras de reforço e fôrma de aço transformadas em área de concreto equivalente;

$I_{uncr}$ = momento de inércia da seção não-fissurada e com as armaduras de reforço e fôrma de aço transformadas em área de concreto equivalente;

$M_s$ = máximo momento em serviço resistido pela seção;

$M_{cr}$ = momento de fissuração, dado por (Equação 6.5)

$$M_{cr} = W\left(f'_{ct,f} - \sigma_{cs} + \sigma_{cpre}\right) \geq 0 \quad (6.6)$$

Onde:

W = módulo de resistência da seção não-fissurada, referente à fibra na qual ocorre a fissuração;

$f'_{ct,f}$ = resistência característica à tração em flexão do concreto;

$\sigma_{cs}$ = máxima tensão de tração induzida por retração na seção não-fissurada na fibra mais distante a linha neutra na qual ocorre a fissura;

$\sigma_{cpre}$ = tensão de compressão induzida pela protensão, contabilizando todas as perdas de protensão, na fibra extrema na qual ocorre a fissuração.

De acordo com Ranzi (2017), a Equação 6.5 pode ser reescrita com base nas propriedades da seção e apresentada na sua forma geral, conforme Equação 7.14.

$$M_{cr} = \frac{1}{E_c\left(\frac{R_B}{R_0} - y\frac{R_A}{R_0}\right)}\left[\left(f'_{ct,f} - \sigma_{cs}\right) + E_c\left(\frac{R_I}{R_0} - y\frac{R_B}{R_0}\right)f_{p1} + E_c\left(\frac{R_B}{R_0} - y\frac{R_A}{R_0}\right)f_{p2}\right] \quad (6.7)$$

Onde:

$R_A$ é a rigidez axial calculada no tempo $t_0$ em condições não − fissuradas;

$R_B$ é a rigidez associada com primeiro momento de área calculado no tempo $t_0$ em condições não − fissuradas

$R_I$ é a rigidez a flexão calculada no tempo $t_0$ em condições não − fissuradas;

$$f_{p1} = \Sigma\, A_p E_p \varepsilon_{p,init}\left(1 - \varphi_p\right) \;\; e \;\; f_{p2} = -\Sigma\, y_p A_p E_p \varepsilon_{p,init}\left(1 - \varphi_p\right) \quad (6.8)$$

Onde:

$A_p$ é a área dos cabos protendidos;

$E_p$é o módulo de elasticidade dos cabos protendidos;

$y_p$ é a posição adotada como de referência dos cabos;

$\varepsilon_{p,init}$ é a deformação produzida no fio durante a protensão inicial;

$\varphi_p$ é o coeficiente de relaxação do aço de protensão

Quando não há protensão, a equação recai para:

$$M_{cr} = \frac{1}{E_c\left(\frac{R_B}{R_0} - y\frac{R_A}{R_0}\right)}\left[\left(f'_{ct,f} - \sigma_{cs}\right)\right] \tag{6.9}$$

Os subscritos ‘c’, ‘ss’, ‘s’ e retrata aos componentes: concreto, perfil da fôrma de aço e armaduras respectivamente e:

E é o módulo de elasticidade;

A é a area da seção;

B é o primeiro momento de área (momento estático de área);

I é o segundo momento de área (momento de inércia);

$y_i$ é posição do eixo vertical das barras de aço ou dos cabos de protensão (não presente).

A máxima tensão de tração induzida por retração ($\sigma_{sh}$) na fibra mais externa na qual ocorre a fissura, pode ser calculada pela Equação 7.20 e 7.21.

$$\sigma_{sh} = \frac{E_{ef,cs}}{R_{I,cs}R_{A,cs} - R_{B,cs}^2}\left[\left(R_{I,cs} - yR_{B,cs}\right)f_{cs1} + \left(R_{B,cs} - yR_{A,cs}\right)f_{cs2}\right] + \\ - E_{ef,cs}\left(\varepsilon_{r,cs} - y\kappa_{cs}\right) \tag{6.10}$$

$$\begin{bmatrix} f_{cs1} \\ f_{cs2} \end{bmatrix} = E_{ef,cs}\begin{bmatrix} A_c\varepsilon_{r,cs} - B_c\kappa_{r,cs} \\ -B_c\varepsilon_{r,cs} + I_c\kappa_{r,cs} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Onde:

$A_c$ é área da seção de concreto;

$B_c$ é o primeiro momento de área do concreto;

$I_c$ é o segundo momento de área (momento de inércia)do concreto;

$R_{A,cs}$ é a rigidez axial calculada no tempo $t_0$ para seção não fissurada usando módulo efetivo $E_{ef,cs}$;

$R_{B,cs}$ é a rigidez associada com primeiro momento de área calculado no tempo $t_0$ em condições não − fissuradas usando módulo efetivo $E_{ef,cs}$;

$R_{I,cs}$ é a rigidez a flexão calculada no tempo $t_0$ em condições não − fissuradas usando módulo efetivo $E_{ef,cs}$;

$\varepsilon_{r,cs}$ é a deformação de retração no nível de referência adotado que define a distribuição da retração não − uniforme;

$\kappa_{r,cs}$ é a curvatura que define a distribuição de retração não − uniforme.

- **Flechas devido à fluência**

A componente de flecha devido à fluência $\delta_{cc}$ é determinada pela multiplicação da flecha imediata produzida pelo carregamento $\delta_{0,i}$ pelo multiplicador de fluência ($\alpha_{cc}$), dado na Equação 6.12 e 6.13:

$$\delta_{cc} = \delta_{0,i} \cdot \alpha_{cc} \tag{6.12}$$

$$\alpha_{cc} = \frac{E_c I_{ef}}{E_{ef,cc} I_{ef,cc}} - 1 \tag{6.13}$$

Onde:

$E_c =$ valor médio do módulo de deformação no tempo do primeiro carregamento (ou calculado aos 28 dias se o tempo do primeiro carregamento não é conhecido ou espera ser maior que 28 dias); A parcela $E_{ef,cc}$ é dada pela Equação 6.16:

$$E_{ef,cc} = \frac{E_c}{1 + \varphi_{cc}} \tag{6.14}$$

$\varphi_{cc} =$ coeficiente de fluência calculado para o concreto no tempo de interesse $t$ para o primeiro carregamento no tempo $t_0$, considerando as seguintes condições no cálculo da espessura fictícia $t_h = 2A_g/u_e$;

(a) $A_g$ é igual a área da seção transversal da laje mista, portanto, usando a espessura real da laje composta no cálculo de $A_g$; e

(b) $u_e$ é tomado igual à largura da laje (assumindo, portanto, que a secagem ocorre apenas a partir da superfície exposta da laje).

$I_{ef} =$ momento de inércia efetivo calculado com Equação 6.5 usando $E_c$ para o módulo do concreto, para idade avaliada;

$I_{ef,cc} =$ momento de inércia calculado de acordo com a Equação 6.5 usando $E_{ef,cc}$ para o módulo do concreto para tempo $t_0$. Segundo Ranzi (2017), assume-se que a seção de concreto fissurada corresponde à identificada no tempo $t_0$ para cálculo de flecha imediata.

A norma ainda indica que quando avaliado $I_{ef,cc}$, o momento de inércia associado com a seção fissurada pode ser determinado com base na geometria fissurada identificada para os cálculos de flecha do ensaio de curta prazo.

- **Flechas devido à retração**

A componente de flecha devido à retração $\delta_{cs}$ deve ser determinada para uma análise de longa duração, considerando apenas os efeitos expressos pela curvatura induzida pela retração:

$$\kappa_{sh} = (1 - \gamma_{sh}) \cdot \kappa_{sh,cr} + \gamma_{sh} \cdot \kappa_{sh,uncr} \tag{6.15}$$

e

$$\gamma_{sh} = \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 \leq 1 \tag{6.16}$$

Onde:

$\kappa_{cs,uncr}$ = curvatura produzida por retração sobre uma seção não-fissurada com base em uma análise de longa duração e considerando o módulo efetivo de elasticidade $E_{ef,cs}$ para o componente de concreto;

$\kappa_{cs,cr}$ = curvatura produzida por retração sobre uma seção fissurada com base em uma análise de longa duração e considerando o módulo efetivo de elasticidade $E_{ef,cs}$ para o componente de concreto;

$$E_{ef,sh} = \frac{E_c}{1 + 0{,}55\varphi_{cc}} \tag{6.17}$$

Para laje mista simplesmente apoiada a parcela da flecha $\delta_{cs}$ é dada por meio da curvatura e seu vão:

$$\delta_{sh} = \frac{\kappa_{sh} \cdot L^2}{8} \tag{6.18}$$

A curvatura $\kappa_{cs}$ é determinada com base na ponderação dos efeitos da retração em uma seção fissurada ($\kappa_{cs,cr}$) e não-fissurada ($\kappa_{cs,uncr}$). Podem ser determinadas para a seção transversal da laje mista, conforme procedimento apresentado por Ranzi (2017):

$$\kappa_{sh,uncr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,sh,uncr}}{R_{0,sh,uncr}} & \frac{R_{A,sh,uncr}}{R_{0,sh,uncr}} \end{bmatrix} E_{ef,sh} \begin{bmatrix} A_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,sh} - B_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,sh} \\ -B_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,sh} + I_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,sh} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

$$\kappa_{cs,cr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,sh,cr}}{R_{0,sh,cr}} & \frac{R_{A,sh,cr}}{R_{0,sh,cr}} \end{bmatrix} E_{ef,sh} \begin{bmatrix} A_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,sh} - B_{c,cr} \cdot \kappa_{r,sh} \\ -B_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,sh} + I_{c,cr} \cdot \kappa_{r,sh} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Onde:

$\kappa_{cs,uncr}$ é a curvatura induzida pela retração sobre uma seção não − fissurada determinada com módulo efetivo do concreto $E_{ef,cs}$;

$\kappa_{cs,cr}$ é a curvatura induzida pela retração sobre uma seção fissurada determinada com módulo efetivo do concreto $E_{ef,cs}$.

No método simplificado, o perfil de retração utilizado no cálculo da flecha devido retração e do momento de fissuração pode se basear em uma distribuição de retração linearmente variável com uma deformação de $0{,}2\varepsilon_{sh}$ na face inferior da laje e $1{,}2\varepsilon_{sh}$ na

superfície exposta da laje, onde $\varepsilon_{sh}$ é a deformação de retração de concreto. A norma australiana AS/NZS 2327 (2017) indica que o valor da deformação de referência de $\varepsilon_{sh}$ calculado de acordo com AS 3600 ou NZS 3101 adota uma espessura fictícia igual à espessura da laje.

A norma traz notas e considerações quanto à retração como segue:

1) O perfil de retração não-uniforme se desenvolve devido à fôrma de aço que é impermeável na face inferior. O gradiente linear adotado é uma aproximação do gradiente real de retração, introduzido para simplificar os cálculos. As condições especificadas para a espessura fictícia são baseadas no fato de que o gradiente de retração foi calibrado com base em perfis de retração exibidos por lajes de concreto expostas em ambos os lados com a mesma espessura das lajes mistas.

2) A aplicação de tratamentos de superfície ou a instalação de revestimentos de piso pode influenciar e reduzir a capacidade do concreto secar a partir de sua face superior. Nestes casos, é possível reduzir a componente de retração de secagem usada nos cálculos da flecha por refletir na redução da secagem que ocorre a partir da superfície da laje, desde que a solução adotada se torne parte das especificações do projeto estrutural. É importante contabilizar este efeito apenas para o período de tempo durante o qual se espera que os tratamentos ou coberturas de superfície reduzam a secagem da superfície da laje superior.

A determinação dos momentos de inércia das seções pode ser obtida pela rigidez da seção a partir de um eixo de referência, usando as seguintes Equações 7.27 e 7.28.

$$I_{uncr} = \frac{R_I R_A - R_B^2}{R_A E_c} \qquad (6.21) \qquad e \qquad I_{cr} = \frac{R_{I,cr} R_{A,cr} - R_{B,cr}^2}{R_{A,cr} E_c} \qquad (6.22)$$

Onde:

$I_{uncr}$ é o momento de inércia da seção mista não − fissurada;

$I_{cr}$ é o momento de inércia da seção mista fissurada;

$R_{A,cr}$ é a rigidez axial calculada no tempo $t_0$ para seção fissurada ;

$R_{B,cr}$ é a rigidez associada ao momento estático de área calculada no tempo $t_0$ para seção fissurada;

$R_{I,cr}$ é a rigidez a flexão calculada no tempo $t_0$ para seção fissurada

Dentro desse contexto, e em comparação com os procedimentos apresentados pelas outras normas, verifica-se uma diferença em termos das simplificações dos métodos. Mesmo se tratando do método simplificado da norma AS/NZS 2327 (2017), as considerações da inércia efetiva se assemelham às das outras normas e se adicionam ainda os efeitos da fluência, feitas pelas outras normas de maneira indireta por coeficientes de amplificação, como a ANSI-ASCE 3 (1992) e ANSI-SDI C (2011).

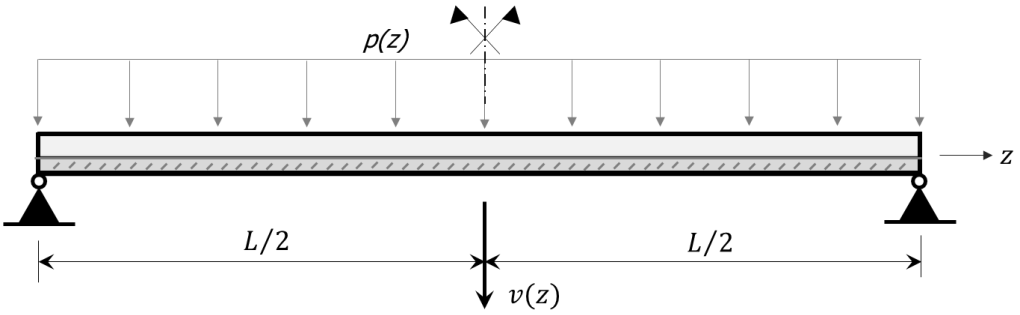
### *6.2.4 Flechas com a consideração da interação parcial*

Bradford (2010) apresentou uma formulação para cálculo das flechas em lajes mistas simplesmente apoiadas. A formulação foi derivada do desenvolvimento do princípios dos trabalhos virtuais (PTV), no qual, incorpora os efeitos dos carregamentos externos, efeitos da retração e fluência e da interação parcial entre os materiais aço e concreto.

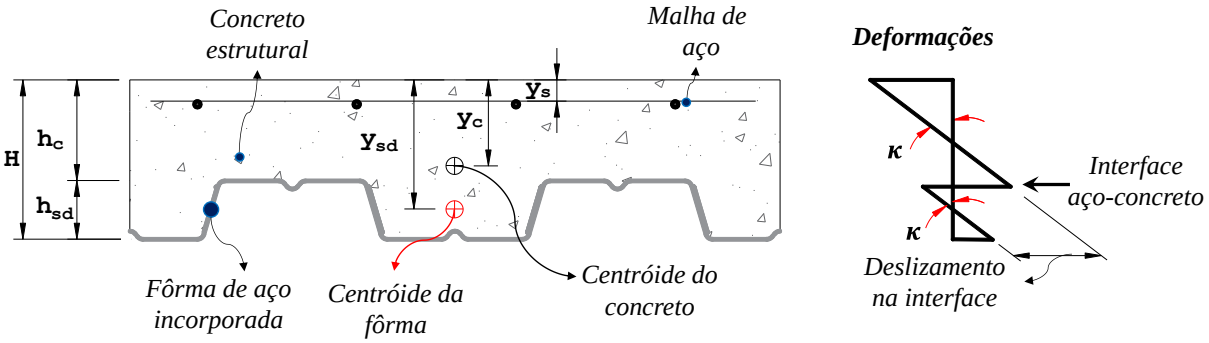
Comumente em situação de serviço as lajes mistas tem apresentado interação total, ou seja, não apresentam deslizamentos relativos significativos. No entanto, como o comportamento geral depende do tipo de fôrma que varia de fornecedor e localidade, possivelmente, pode ocorrer esse fenômeno. Dessa forma, o trabalho de Bradford (2010) traz uma metodologia com expressões fechadas para cálculo das curvaturas, deslocamentos verticais e as tensões no concreto e aço. Conforme artigo, tomando uma laje conforme a Figura 6.1, Bradford (2010) apresenta equações diretas para obtenção das grandezas de interesse, como a flecha, conforme conjunto de Equações 6.23 e 6.24.

Figura 6.1 – Representação de laje mistas com interação parcial

*a) Representação longitudinal e definição dos eixos da laje unidirecional de Bradford (2010)*




*b) Seção transversal e perfil de deformações*




Fonte: Adaptado de Bradford (2010)

A expressão para a flecha da laje mista simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído $p$, efeitos da retração $\varepsilon_{sh}(t)$, fluência $\phi(t,t_0)$e deslizamentos relativos $s$, expresso por meio de uma rigidez linear da ligação ao cisalhamento longitudinal $k$, é dada por (Equação 6.23):

$$v_{total}(0) = \frac{pl^4}{\gamma\overline{EI}}\left\{\frac{1}{8\Theta^2} + \frac{1}{\Theta^4}\left[\frac{1}{cosh(\Theta/2)} - 1\right]\right\} + \frac{\beta_{sh}L^2}{\overline{h}}\left\{\frac{1}{\Theta^2}\left[1 - \frac{1}{cosh(\Theta/2)}\right] - \frac{1}{8}\right\} + + \frac{5pL^4}{384\overline{EI}}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) - \frac{\Psi_{sh}E_cI_cL^2}{8\overline{EI}} \quad (6.23)$$

Onde os termos são calculados a partir do conjnto nomado de Equação 6.24:

$$\overline{h} = h - \frac{y_r A_s E_s}{\overline{\overline{AE}}} \quad ; \quad y_r = y_c - y_s \quad ; \quad \frac{1}{\overline{\overline{AE}}} = \frac{1}{\overline{\overline{AE}}} + \frac{1}{A_{sd}E_{sd}}$$

$$\overline{EI} = E_eI_c + E_{sd}I_{sd} \quad ; \quad \overline{\overline{AE}} = A_cE_c + A_rE_s \; ; \; E_e(t,t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1+\phi(t,t_0)}$$

$$\gamma = 1 + \frac{h\overline{h}}{\overline{r}^2} \quad ; \quad \overline{r} = \sqrt{\frac{\overline{EI}}{\overline{\overline{AE}}}} \quad ; \; \overline{\gamma} = \frac{\overline{\overline{AE}}}{\overline{\overline{AE}}} + \frac{h\overline{h}\,\overline{\overline{AE}}}{\overline{EI}}$$

$$\beta_{sh} = \frac{A_cE_e\Lambda_{sh}}{\overline{\overline{AE}}} + \left(\frac{\overline{h}E_cI_c}{\overline{EI}}\right)\Psi_{sh}$$

$$\Theta = \alpha L \quad ; \quad \alpha^2 = k\left(\frac{1}{\overline{\overline{AE}}} + \frac{h\overline{h}}{\overline{\overline{EI}}}\right)$$

$$\Lambda_{sh} = \frac{1}{A_c}\int_{A_c}\varepsilon_{sh}(y)dA_c \; ; \; \psi_{sh} = \frac{1}{I_c}\int_{A_c} y_c\varepsilon_{sh}(y)dA_c \quad (6.24)$$

A abordagem do trabalho foi baseada na consideração da seção de concreto não fissurada. Com destaque o trabalho de Bradford (2010) incorpora a possibilidade de levar em conta deslizamento relativos entre a fôrma de aço e o concreto. No entanto, em níveis de serviço, a ligação química, o atrito e a presença de mossas ou reentrâncias limitam a possibilidade de escorregamentos na interface. Esse fato tem sido confimado pela grande maioria dos ensaios presentes na literatura.

## 6.3 Abordagem por métodos de cálculo refinados

Ao desenvolvimento da abordagem de previsão de flechas por cálculo refinado foram tomados como base os trabalhos de Gilbert e Ranzi (2011), Gilbert et al. (2012), Gilbert (2013), Gholamhoseini et al. (2014a, 2014b, 2015) e Gholamhoseini (2014, 2016). A abordagem refinada de previsão das flechas, busca considerar todos os possíveis fatores que influem no comportamento da laje mista de aço e concreto ao longo do tempo. Dentre os fatores estão:

(a) Procedimento de construção esperado: escorado ou não-escorado;

(b) Histórico de carregamento esperado;

(c) Flecha da fôrma ou de escoramentos durante a construção;

(d) Fissuração e a contribuição da rigidez do concreto fissurado;

(e) Propriedades de retração e fluência do concreto, levando em conta a presença da fôrma de aço incorporada.

(f) Relaxação de fios/cabos protendidos em lajes mistas protendidas;

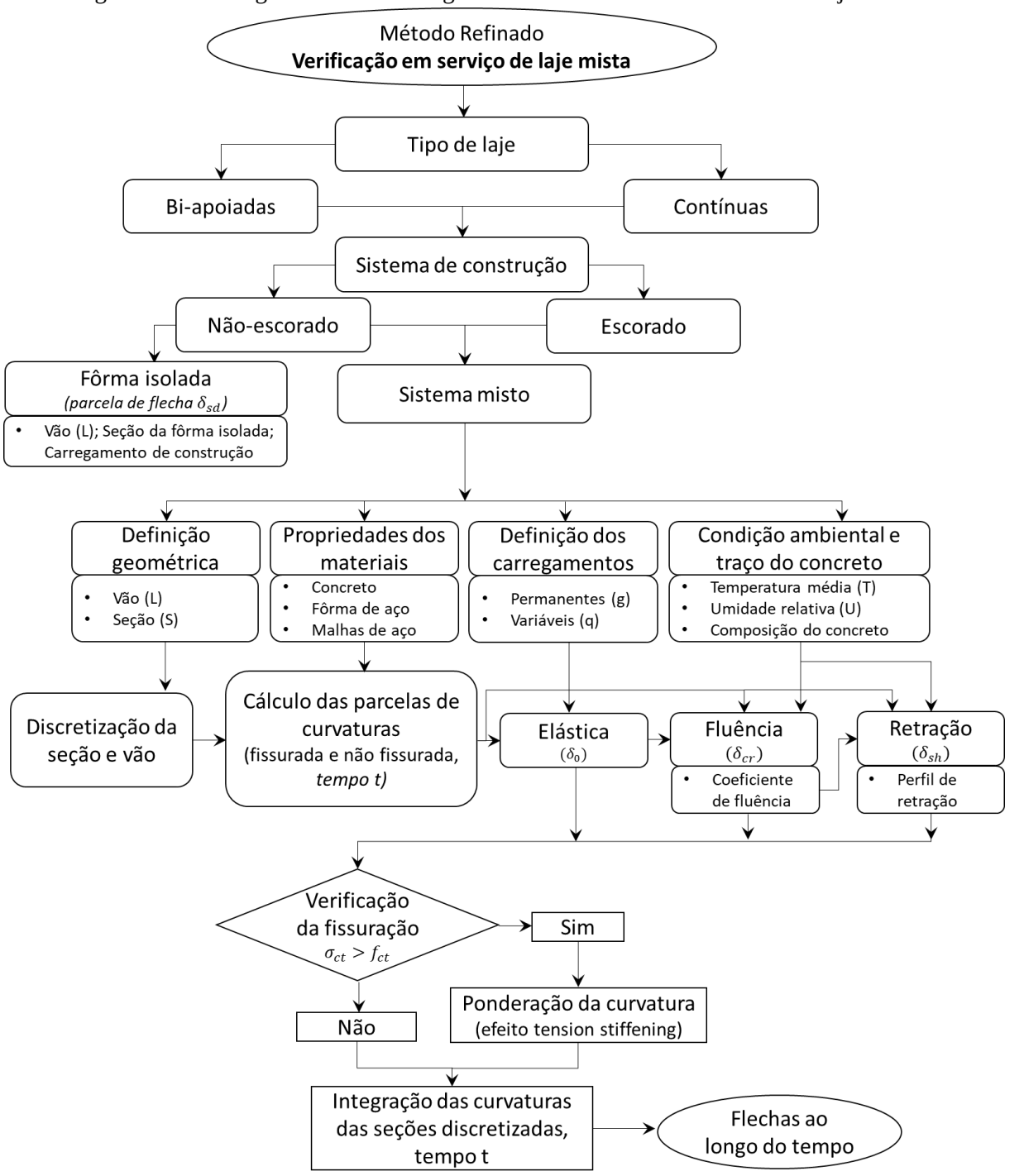
(g) Para lajes com fôrmas de aço que exibam deslizamentos nas condições de serviço, deve-se considerar o comportamento de interação parcial entre a fôrma de aço e a laje de concreto;

Dessa forma, a metodologia apresentada neste trabalho realiza de maneira resumida a seguintes etapas para o cálculo refinado:

- Definição da seção transversal e das propriedades dos materiais: fôrma de aço incorporada, concreto e armaduras;
- Definição dos carregamentos na laje mista e da condição ambiental e concreto: coeficientes de fluência e retração (calculados pelas normas destinadas a projeto de concreto estrutural);
- Adaptação do perfil de retração não-uniforme para as lajes mistas;
- Discretização em camadas da seção de concreto;
- Cálculo das curvaturas e deformações de referência para seção fissurada e não-fissurada, tomando como base a análise da seção transversal pelo método das rigidezes, apresentado no item 5.4.
- Caso a mesma apresente fissurada, aplica-se o modelo do Eurocode 2 (2004) no cálculo da curvatura equivalente apresentado no item 4.4.2.
- Obtenção da flecha pela integração das curvaturas das seções discretizadas ao longo do comprimento pelo método das diferenças finitas, conforme item 5.3.2.

O fluxograma apresentado na Figura 6.2, traz um panorama geral indicado para a sequência de passos na verificação das lajes mistas quanto aos deslocamentos verticais máximos (flechas).

Figura 6.2 – Fluxograma da metodologia refinada de cálculo das flechas nas lajes mistas




Fonte: Autor (2019)

## 6.4 Considerações finais do capítulo

Este capítulo apresentou as diferentes abordagens normativas para a previsão dos deslocamentos máximos nas lajes mistas de aço e concreto. A escolha da abordagem depende mais da qualidade dos resultados obtidos quando confrontados com resultados experimentais, do que do custo operacional da sua implementação. Dessa forma, é preciso avaliar se o uso de procedimentos mais refinados de fato resulta em aumento na qualidade dos resultados.

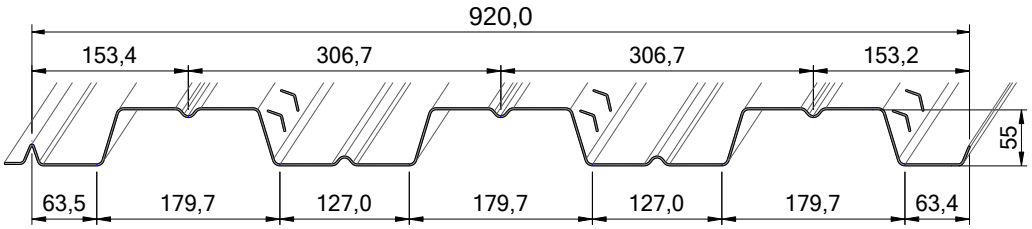
# 7 ANÁLISE EXPERIMENTAL

*Este capítulo apresenta a metodologia e resultados obtidos na investigação experimental. O ensaio experimental analisou o comportamento ao longo do tempo de lajes mistas de aço e concreto por meio de dois protótipos em escala real. Além disso, realizou-se a avaliação da capacidade resistente por meio de ensaios de flexão a 4 pontos em dois conjuntos de lajes idênticas com diferentes idades: duas aos 28 dias de cura do concreto e outras duas aos 260 dias, após finalizado o ensaio de longa duração das lajes que avaliaram a evolução dos deslocamentos verticais ao longo do tempo.*

## 7.1 Considerações gerais

A laje mista é formada pela fôrma de aço do tipo trapezoidal MD55, com 55mm de altura, fornecida pela Empresa *Modular Sistema Construtivo*, concreto convencional e tela soldada. A Figura 7.1 ilustra o perfil da fôrma de aço Modular MD55. Cita-se que esse perfil foi investigado por Sieg (2015) e tem sido tema de outras pesquisa no Departamento de Estruturas (SET/EESC/USP), na avaliação de fatores que influenciam a capacidade resistente e o comportamento a ruína do sistema misto.

Figura 7.1 – Perfil da fôrma de aço Modular MD 55



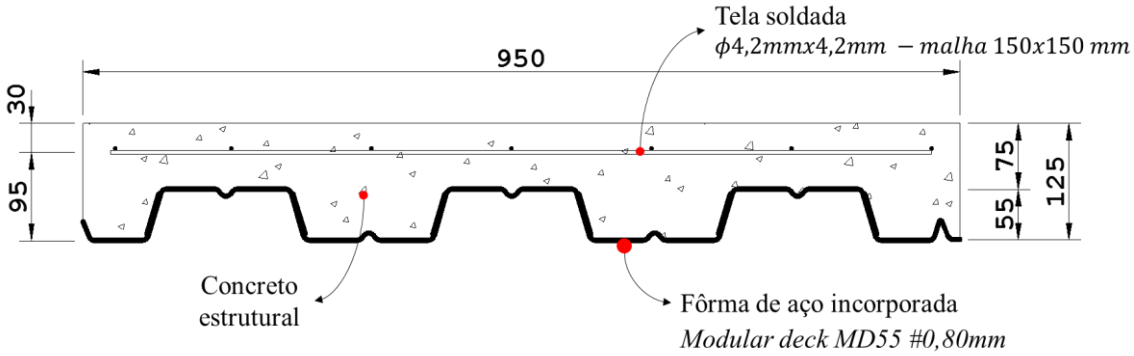

(Medidas em mm)

Fonte: Modular (2014)

O protótipo da laje mista de aço e concreto foi composto pela fôrma de aço *MD55* de espessura nominal $t_n = 0{,}80$ mm, com armadura para retração do tipo tela soldada de malha $\phi 4{,}2\text{mm} \times \phi 4{,}2\text{mm} - 150 \times 150$ (Q92) e altura total de 125 mm, conforme Figura 7.2. O protótipo possui 3200 mm de comprimento e vão teórico de 3000 mm, sistema estrutural como laje simplesmente apoiada. O concreto possui densidade normal e resistência média da ordem de 30 MPa. A largura da laje corresponde à largura de uma fôrma fornecida pelo fabricante.

A literatura indica que os vãos comuns para as lajes mistas de aço e concreto situam-se entre 2 e 4 metros. Dessa forma, com base nos ensaios de longa duração realizados por Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), Gholamhoseini (2014) e Wang et al. (2016), adotaram as dimensões do protótipo do presente trabalho que tiveram vãos similares e alturas de lajes próximas às dos outros autores.

Figura 7.2 – Dimensões da seção transversal da laje mista




Fonte: Autor (2019) (Medidas em mm)

A fôrma de aço incorporada *MD55* é do tipo trapezoidal com mossas em formato de V horizontal. Possui enrijecedores nas ondas altas e baixas que colaboram para aumento da estabilidade da fôrma, principalmente durante a fase de construção, onde a forma trabalha isolada. A Figura 7.3 (a) ilustra a fôrma de aço *MD55* e a Figura 7.3 (b) a construção de dois dos protótipos, onde é possível observar os materiais empregados.

Figura 7.3 – Protótipos das laje mista avaliadas

*(a) Fôrma de aço MD55* *(b) Construção dos protótipos das laje mista antes*

Fonte: Autor (2019)

Foram confeccionadas quatro lajes idênticas: duas destinadas ao ensaio de longa duração (*long-term*) e outras duas para "ensaio de curta-duração" (*short-term*) de flexão a quatro pontos. Ao final do ensaio de longa duração, as duas lajes mistas foram submetidas ao ensaio de flexão a quatro pontos para a avaliação da capacidade resistente.

## 7.2 Propriedades dos materiais constituintes da laje mista

### *7.2.1 Concreto*

O concreto foi dosado e misturado no Laboratório de Estruturas (SET/EESC/USP). Foi composto por agregados naturais: areia média de rio (granulometria de 0,20 a 0,60 mm) e brita nº 01 de agregado do tipo basalto (granulometria de 9,5 a 19 mm). O cimento usado foi do tipo Portland CPII-Z-32. Traço em massa dado por: 1: 2,47: 2,83: 0,56 (cimento: areia: brita: a/c), com consumo de cimento de 350 kg/m³.

A Figura 7.4 apresenta a produção e controle tecnológico realizado no concreto. A mistura foi feita em betoneira de eixo horizontal. O concreto produzido apresentou abatimento de 110 mm dentro do limite estabelecido de 120±20 mm. Foram moldados corpos de prova cilíndricos (*100x200*) mm e prismáticos (*150x150x500*) mm, com adensamento usando mesa vibratória. Foi realizado cura úmida por sete dias nos corpos de prova em câmara apropriada.

Figura 7.4 – Produção e controle tecnológico do concreto

*(a) Concretagem* *(b) Abatimento do tronco de cone* *(c) Adensamento dos CPs*

*(d) Moldagem dos CPs* *(e) Cura úmida do concreto*

Fonte: Autor (2019)

Foram moldados corpos de prova para avaliar diferentes idades do concreto, relacionado às idades de avaliação das lajes mistas. O ensaio de avaliação da resistência à compressão foi realizado (Figura 7.5 (a)) com os corpos de prova cilíndricos, conforme ABNT NBR 5739 (2018). Os ensaio de avaliação da resistencia à tração na flexão foram realizados através dos corpos de provas prismáticos (Figura 7.5 (b)), de acordo com norma ABNT NBR 12142 (2010). Ambos os ensaios foram feitos na máquina hidráulica elétrica da marca *ELE Internacional*. Os resultados do ensaio de compressão e de massa específica do concreto estão apresentados na Tabela 7.1 e da resistência à tração na flexão na Tabela 7.2.

Figura 7.5 – Ensaio de caracterização do concreto

(a) Ensaio de compressão

(b) Ensaio de tração na flexão

Fonte: Autor (2019)

Tabela 7.1 – Resistência à compressão e massa específica do concreto em diferentes idades

| Idade (dias) | Corpo de prova | Resistência a compressão (MPa) | | Massa específica (kg/m³) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | CP | Média | CP | Média |
| ***Protótipos: L1-L2-L3*** | | | | | |
| 8 | CP1-L1 | 28,68 | **26,73** | 2414 | 2428 |
| | CP2-L2 | 24,27 | | 2440 | |
| | CP3-L3 | 27,25 | | 2431 | |
| 29 | CP4-L3 | 33,12 | **31,12** | 2399 | 2375 |
| | CP5-L2 | 29,58 | | 2389 | |
| | CP6-L1 | 28,85 | | 2338 | |
| | CP7-L1* | 32,26 | | - | |
| | CP8-L1* | 32,47 | | - | |
| | CP9-L2* | 30,46 | | - | |
| **260** | CP10-L1 | 34,21 | **32,14** | 2388 | **2365** |
| | CP11-L2 | 28,43 | | 2336 | |
| | CP12-L2 | 33,77 | | 2370 | |

| Idade (dias) | Corpo de prova | Resistência à compressão (MPa) | | Massa específica (kg/m³) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | CP | Média | CP | Média |
| ***Protótipo: L4*** | | | | | |
| 7 | CP1-L4 | 25,90 | 25,97 | - | - |
| | CP2-L4 | 26,69 | | - | |
| | CP3-L4 | 25,31 | | - | |
| 15 | CP4-L4 | 32,15 | 32,35 | - | - |
| | CP5-L4 | 32,54 | | - | |
| **28** | CP6-L3 | 32,87 | **35,24** | 2403 | **2406** |
| | CP7-L2 | 34,87 | | 2406 | |
| | CP8-L1 | 36,49 | | 2392 | |
| | CP9-L1 | 36,72 | | 2425 | |

(*) Foram ensaiados com medição da deformação específica do concreto

Fonte: Autor (2019)

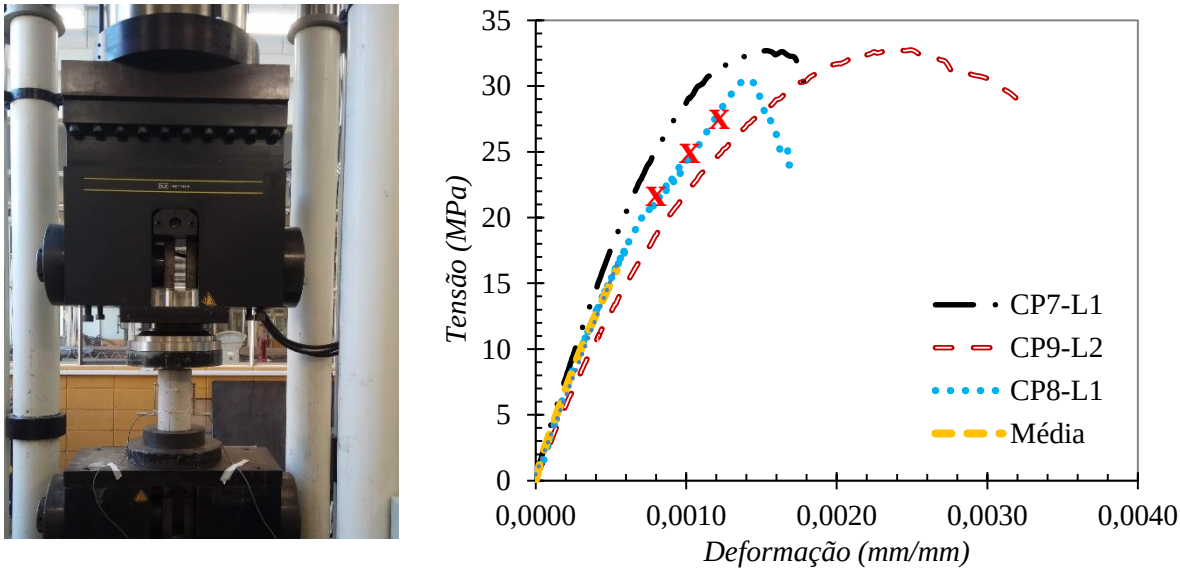
Tabela 7.2 – Resistência do concreto à tração na flexão em diferentes idades

| Idade (dias) | Corpo de prova prismático | Resistência à tração na flexão (MPa) | |
|---|---|---|---|
| | | CP | Média |
| **Lajes L1-L2-L3** | | | |
| 8 | P1-L1<br>P2-L3 | 3,73<br>3,65 | 3,69 |
| 29 | P3-L1<br>P4-L3<br>P5-L2 | 3,54<br>4,14<br>4,18 | **3,95** |
| **260** | P6-L1<br>P7-L1<br>P8-L2<br>P9-L3 | 5,13<br>5,93<br>5,94<br>5,89 | **5,73** |
| **Laje L4** | | | |
| **28** | P10-L4<br>P11-L4 | 4,26<br>3,40 | **3,83** |

Fonte: Autor (2019)

Três corpos de prova *CP7-L1*, *CP8-L1* e *CP9-L2* foram ensaiados a compressão e medidas as deformações através de extensômetro removível. Com a curva tensão *x* deformação, o módulo de deformação do concreto foi estimado, com módulo cordal entre 0,50 MPa e 10 MPa ($0{,}3f_c$). A Figura 7.6 apresenta o corpo de prova na máquina de ensaio *Instron* e o resultado do ensaio. Acredita-se que o extensômetro tenha apresentado problemas de medidas no *CP8-L1* para valores da tensão em torno de 20 MPa, pelo aspecto estranho apresentado. No entanto, aproveita-se a parte inical da curva para obtenção do módulo de deformação apresentado pela média dos três corpos de prova, obtendo módulo $E_c = 30$ GPa.

Figura 7.6 – Avaliação do módulo de deformação do concreto




*(a) Máquina de ensaio* *(b) Gráfico de tensão x deformação*

Fonte: Autor (2019)

Ainda sobre os aspectos relativos ao concreto, a etapa de concretagem das lajes mistas foi dividida em duas: a laje *L1-MD-LT* foi concretada na posição de ensaio, sobre o escoramento, enquanto as outras três lajes *L2-MD-LT*, *L3-MD-ST* e *L4-MD-ST* foram concretadas ao chão. O adensamento foi realizado com vibrador de agulha e a cura úmida com com mantas embebidas de água e cobertas com lonas plásticas, com duração de 7 dias. A Figura 7.7 apresenta o esquema geral de cura (a) e (c) e adensamento realizado nas laje mistas (b).

Figura 7.7 – Adensamento e cura das lajes mistas construídas

*(a) Laje L1 sob cura úmida* *(b)Adensamento e acabamento* *(c) Cura úmida com lonas*

Fonte: Autor (2019)

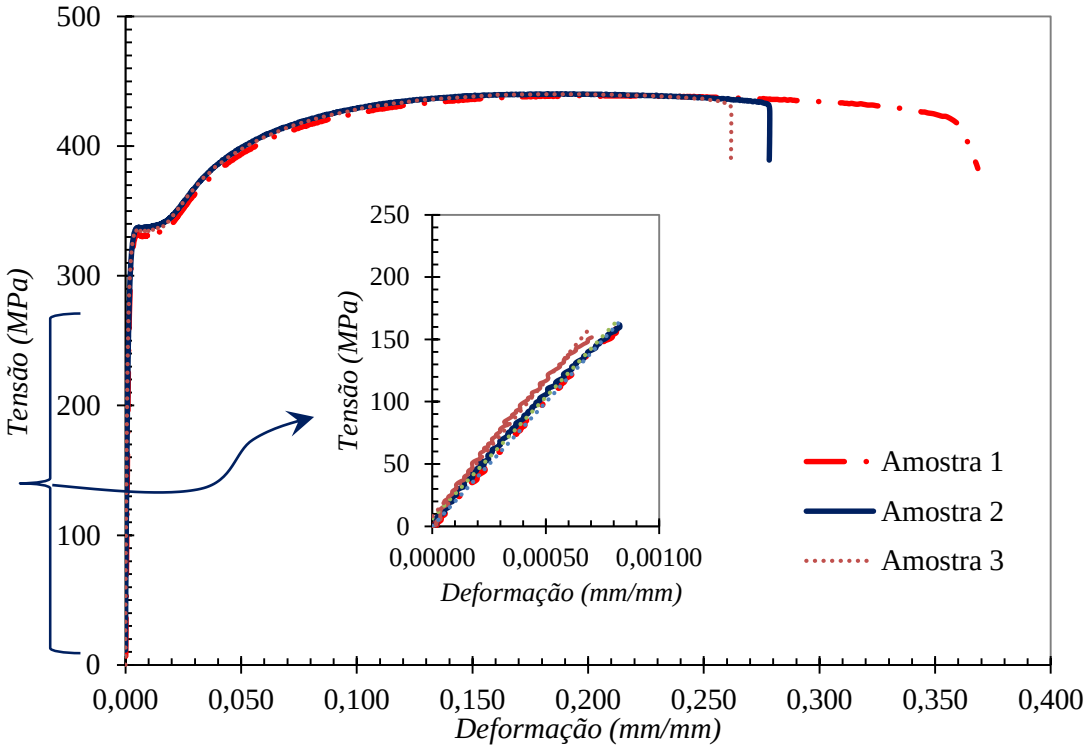
A cura e adensamento buscaram as mesmas condições realizadas nos corpos de provas. Esses fatores somados aos dados do tipo de agregado, tipo de cimento e composição, resultados da resistência média à compressão, possibilitam a entrada de dados na estimativa da retração e fluência do concreto. que não foi medida experimentalmente. Os dados do módulo de elasticidade e resistência à tração possibilitam obter a resposta imediata das deformações do concreto e estimativas do grau de fissuração da peça quando solicitada.

### *7.2.2 Fôrma de aço incorporada*

As propriedades mecânicas do aço da fôrma possuem especificação na ABNT NBR 7008-3 (2012) – ZAR-280. Com base no ensaio de tração de três corpos de prova extraídos de uma amostra da chapa, obtiveram-se os valores de resistência ao escoamento $f_y$ e de resistência à ruptura $f_u$. A partir da curva tensão $x$ deformação, obteve-se o valor do módulo de elasticidade

da fôrma incorporada. A Figura 7.8 apresenta os resultados graficamente do ensaio e a Tabela 7.3 um resumo dos resultados do ensaio.

Figura 7.8 – Curva tensão $x$ deformação do ensaio de tração de chapas de aço da fôrma




Fonte: Autor (2019)

Tabela 7.3 – Resumo dos resultados da caracterização do aço da fôrma

| **Corpo de prova** | Resistência ao escoamento $f_y$ (MPa) | Resistência à ruptura $f_u$ (MPa) | Módulo de Elasticidade E (GPa) [média] |
|---|---|---|---|
| Amostra 1 | 332 | 440 | 204 |
| Amostra 2 | 326 | 439 | |
| Amostra 3 | 330 | 440 | |
| (Média) | 329 | 440 | |

Fonte: Autor (2019)

Segundo a normatização, o corpo de prova da fôrma deve apresentar $f_y \geq 280\ MPa$ e $f_u \geq 380\ MPa$, logo esses limites estão atendidos. A ampliação mostrada na Figura 7.12 mostra o aspecto linear entre tensão e deformação no trecho elástico do aço. O módulo de elasticidade do aço da fôrma foi obtido como média das medidas e igual a $E_{sd} = 204$ GPa.

As propriedades geométricas da fôrma de aço incorporada MD55, espessura de aço de 0,76 mm usada foi tomada com base na geometria medida e apresentada na Figura 7.9. A Tabela 7.4 resume as propriedades da mesma, tomando como base largura unitária.

Figura 7.9 – Dimensões (em milímetros) da fôrma de aço incorporada

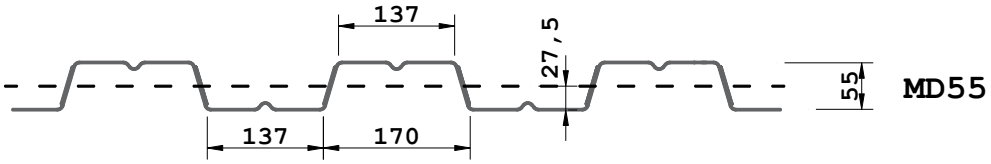



Tabela 7.4 – Propriedades da fôrma de aço MD55

| Fôrma de aço | Espessura $t_{sd}$ | Área de aço $A_{sd}$ | Altura do centróide $h_{sd}$ | Massa | Inércia da seção $I_{sd}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| MD55 | 0,76 mm | 975 mm²/m | 27,5 | 8,35 kg/m² | 565550 |

Fonte: Autor (2019)

Para as verificações da capacidade resistente e em serviço esses dados são importantes.

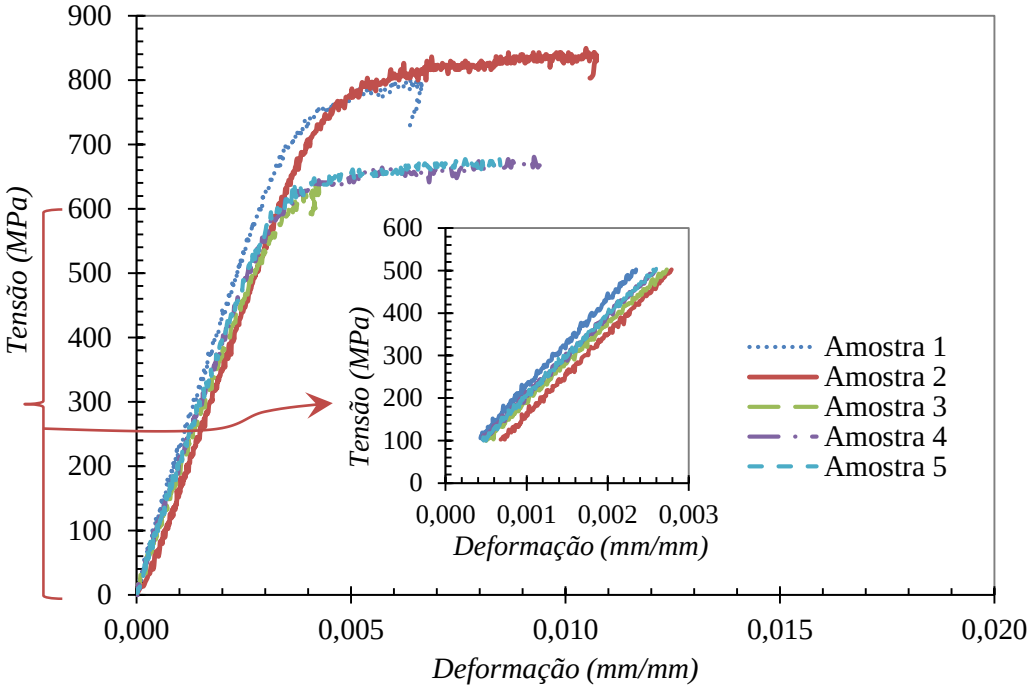
### *7.2.3 Aço da tela soldada*

Ensaio de tração de corpos de prova da malha de tela soldada *Q92*, diâmetro 4,2 mm foram extraídos, com comprimento de 900 mm. Seguindo as recomendações da ABNT NBR 7480 (2007) foi realizado o ensaio. A Figura 7.10 mostra o esquema de ensaio na máquina *Instron* com uso de extensômetro *clip* removível para medição da deformação específica do aço e a Figura 7.11 o diagrama tensão *x* deformação obtido.

Figura 7.10 – Curva tensão *x* deformação do ensaio de tração do aço da tela soldada

Fonte: Autor (2019)

Figura 7.11 – Curva tensão *x* deformação do ensaio de tração do aço da tela soldada




Fonte: Autor (2019)

A partir do ensaio, obtiveram-se os valores de resistência ao escoamento e à ruptura e o módulo de elasticidade do aço da tela, cujos resultados estão apresentados na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 – Resumo dos resultados da caracterização do aço da tela

| **Corpo de prova** | Resistência ao escoamento $f_y$ (MPa) | Resistência à ruptura $f_u$ (MPa) | Módulo de Elasticidade E (GPa) [média] |
|---|---|---|---|
| Amostra 1 | 773 | 810 | |
| Amostra 2 | 773 | 849 | |
| Amostra 3 | *641* | *641* | 191 |
| Amostra 4 | 651 | 684 | |
| Amostra 5 | 654 | 684 | |

Fonte: Autor (2019)

De acordo com a diagrama tensão *x* deformação e especificação da tela aço CA-60, o aço não apresenta patamar de escoamento, pelo seu processo de produção de encruamento ou tratamento a frio. Todas as barras possuíram valores acima do estabelecido para a resistência característica de escoamento mínima de $f_y \geq 600\,MPa$ e o limite de resistência de $f_u = 660\,MPa$. Da análise dos resultados, observa-se que a *Amostra 3* não atendeu a um dos limites, rompendo antes, pelo determinado pela norma ABNT NBR 7480 (2007) como o menor valor entre a tensão com deformação permanente de 0,2% a correspondente à deformação de 0,5%. O módulo de elasticidade esperado para o aço é de 210 GPa, sendo obtido experimentalmente um módulo inferior da ordem de 9,0%.

## 7.3 Ensaio de longa duração da laje mista

### *7.3.1 O programa experimental*

O programa experimental do ensaio de longa duração envolveu a avaliação de duas lajes mistas com mesma geometria e condições de contornos. A primeira foi nomeada de laje *L1-MD125-LT*, com fôrma de aço da empresa Modular, com 125mm de altura total submetida ao ensaio de longa duração (*long-term*), com carregamento aplicado. A segunda laje de *L2-MD125-LT* com mesmas características da primeira, no entanto, ficou submetida apenas ao efeito do peso próprio.

O carregamento aplicado foi composto por carga uniformemente distribuída, constituída por blocos de concreto e teve avaliação do comportamento com duração de 260 dias, de junho de 2018 a fevereiro de 2019.

Baseado nas respostas experimentais dos trabalhos de Gholamhoseini (2014) e Wang et al. (2016), o ensaio teve como objetivo avaliar ao longo do tempo as flechas, os deslizamentos relativos de extremidades entre o aço e o concreto, as deformações específicas do aço e do concreto e possíveis locais de aberturas de fissuras. As medidas experimentais foram então comparadas aos modelos analíticos de previsão do comportamento ao longo do tempo e para auxiliar na orientação da avaliação em serviço das lajes mistas.

Rigoroso controle tecnológico e das propriedades do concreto foi realizado, a fim de permitir adequado controle dos parâmetros e posterior aplicação nas previsões teóricas de fluência e retração da laje mista aos modelos analíticos. Ensaios de resistência à compressão e de módulo de elasticidade do concreto foram realizados, além da resistência à tração pelo ensaio de flexão de prismas $100\,\text{mm} \times 100\text{mm} \times 500\text{mm}$. Ensaio de tração e do módulo de elasticidade do aço foram realizados a partir de testemunhos da fôrma de aço e da tela soldada.

As condições ambientais foram avaliadas com medições diárias da temperatura e umidade relativa do ar, por meio de sensor *DTH22 (Apêndice B)*. O ambiente não foi controlado, mas monitorado diariamente, no Laboratório de Estruturas da EESC-USP, em São Carlos (SP). A laje mista de aço e concreto teve cura úmida realizada com manta plástica molhada e mantida úmida por sete dias para retardar a perda de água do concreto.

O esquema de ensaio das lajes mistas foi o modelo simplesmente apoiado. A laje *L1-MD125-LT* foi concretada sobre os apoios e com escoramento no vão-central. Após sete dias realizou-se a retirada da escora, com medição da flecha imediata e iniciaram-se as medições das flechas ao longo do tempo. A laje *L2-MD125-LT* foi concretada ao chão e posteriormente colocada em posição do ensaio. Esses esquemas abrangeram diferentes situações iniciais.

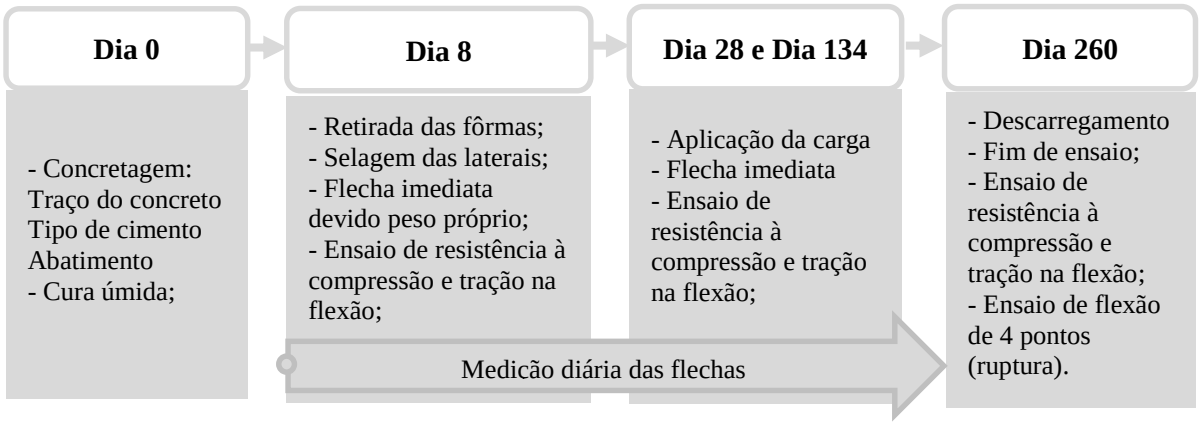
Destaca-se que ao sétimo dia, com o fim da cura úmida, foram retiradas as fôrmas laterais e realizou uma selagem com argamassa impermeabilizante *Viaplus 5000-Viapol*® a fim de evitar perda de umidade pelas laterais, com o objetivo de representar as lajes nas estruturas reais.

Sobre a instrumentação, utilizaram-se o seguinte planejamento experimental:

- Aplicação de força: blocos de concreto sobre a laje para simular um carregamento uniformemente distribuído;
- Medição de deslizamento relativo nas extremidades (2): relógio comparador. Curso de 25 mm;
- Medição dos deslocamentos verticais (4): relógio comparador. Curso de 50 mm;
- Monitoramento da umidade relativa do ar e temperatura: sensor termo-higrômetro *DHT22*.

A Figura 7.12 apresenta o fluxograma do ensaio utilizado para a avaliação do comportamento ao longo do tempo da laje mista e as respectivas atividades nessas datas. Medidas dos deslocamentos verticais foram feitas assim que retirado o escoramento. Medições diárias dos deslocamentos verticais foram realizadas ao longo do tempo. Quando da aplicação de carregamento mediram-se as flechas imediatas devidas às mesmas. Avaliação do concreto nas idades de 8, 28 e 260 dias foram realizadas.

Figura 7.12 – Fluxograma do ensaio de longa duração e atividades importantes

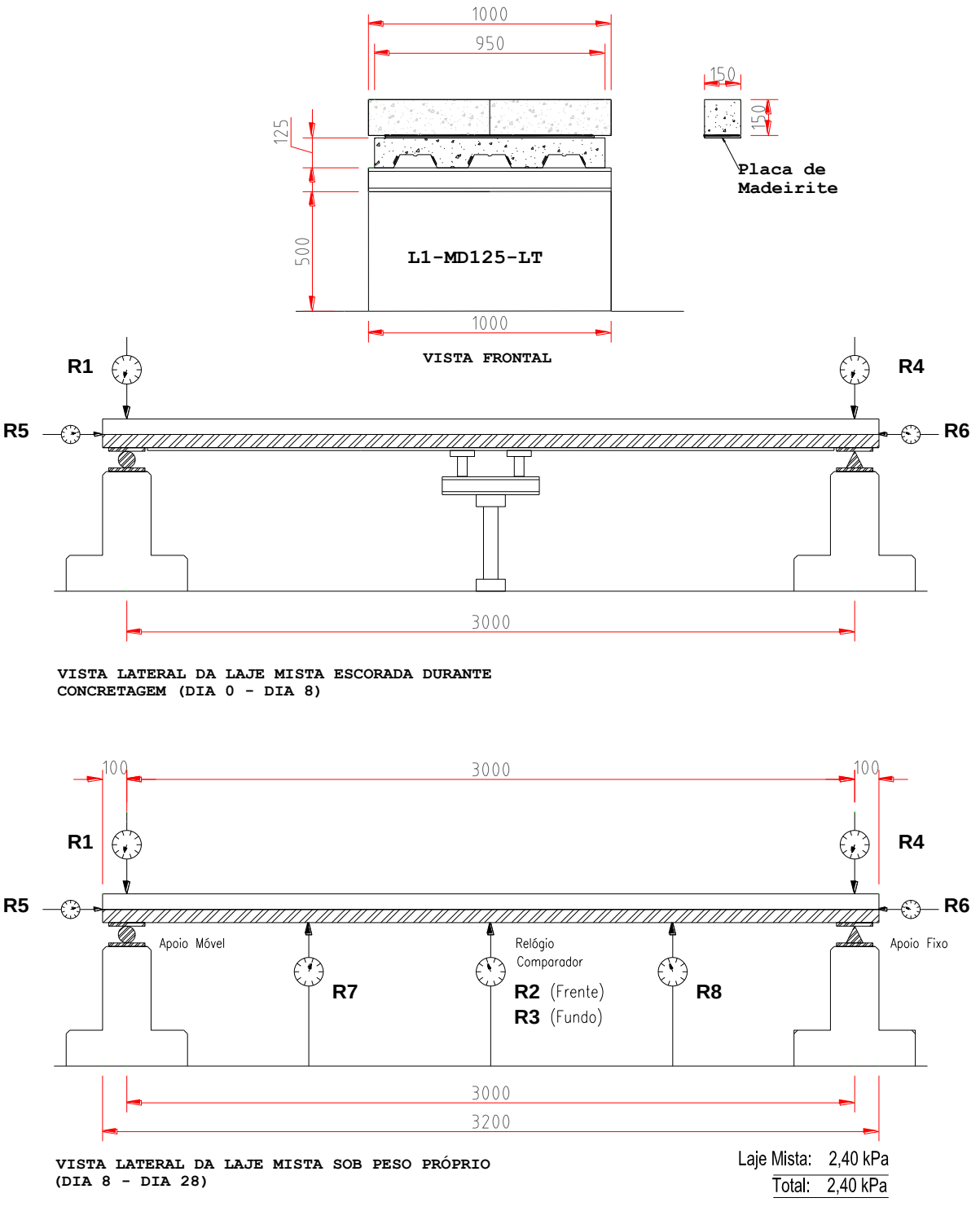



Fonte: Autor (2019)

Dado a possibilidade prática de escoramentos na situação da fôrma de aço atuando isoladamente nas primeiras idades e que a estrutura mista passa a atuar de maneira conjunta quando o concreto atinge 75% da especificada resistência, o ANSI/SDI C (2011) indica que uma prática comum é a retirada dos escoramentos com um mínimo de 7 dias, este número de dias foi adotado e confirmado com o ensaio de resistência à compressão do concreto.

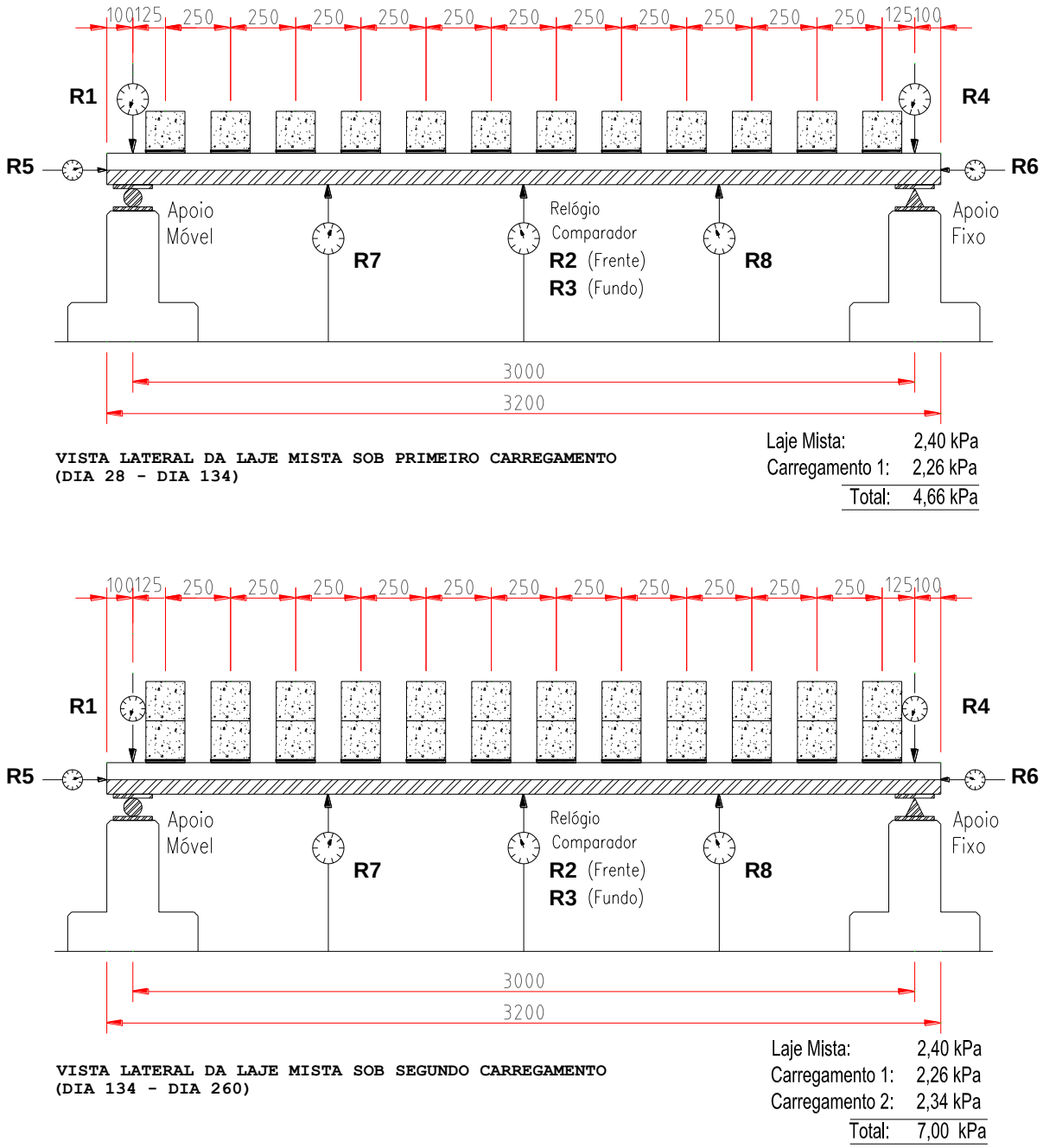
A Figura 7.13 apresenta esquematicamente o ensaio da laje *L1-MD125-LT*. Apresenta-se o esquema utilizado, com denominação dos relógios comparadores, duração das etapas e carregamentos aplicados.

Figura 7.13 – Esquema geral do ensaio de longa duração da laje *L1-MD125-LT*




*(Continuação)*

Figura 7.13 – Esquema geral do ensaio de longa duração da laje *L1-MD125-LT (continuação)*




Fonte: Autor (2019)

A segunda sobrecarga foi disposta a fim de simular mudança de utilização da laje e aumentar o nível de solicitação na promoção da fissuração do concreto na laje mista.

A laje *L2-MD125-LT* não foi submetida a carregamentos externos. A mesma foi concretada e sujeita apenas ao peso próprio e às condições ambientais para observar os efeitos diferidos no tempo no comportamento da evolução das flechas.

### *7.3.2 Metodologia aplicada*

O ensaio de longa duração com as lajes *L1*, sujeita a carregamentos externos, e a e *L2*, apenas ao peso próprio, e às condições ambientais, foram monitoradas diariamente nos dias úteis com medições visuais dos relógios comparadores (*dial gauges*) para obtenção das flechas.

Na laje *L1*, foram dispostos dois relógios comparadores no vão central, denominados de (***R2*** *e* ***R3***) e um em cada quarto de vão (***R7*** (*Esquerda*) e ***R8*** (*Direita*)) para comparação e verificação das flechas em ambos lados. Foi disposto um relógio comparador sobre cada apoio (**R1** (Apoio à *Direita*) e (**R4** (Apoio à *Esquerda*)). Dois relógios foram colocados interligando o aço e o concreto nas lajes como o objetivo de captar a possibilidade de deslizamentos relativos: **R5** (à *Esquerda*) e **R6** (à *Direita*).

Na laje *L2* foram dispostos 2 relógios apenas no vão central. Inicialmente foi concretada ao nível do chão e com auxílio da ponte rolante foi colocada sobre os apoios.

O conjunto de imagens da Figura 7.14 ilustra a laje L1 e a Figura 7.15 traz a laje L2 e a Figura 7.16 a instrumentação feita com os relógios comparadores.

Figura 7.14 – Ensaio da laje mista *L1-MD55-LT*

*a)*

*b)*

*c)*

*d)*

*(continuação)*

Figura 7.14 – Ensaio da laje mista *L1-MD55-LT (continuação)*

*e)*

*f)*

*g)*

*h)*

*i)*

*j)*

*a) Laje mista antes concretagem; b) Concretagem L1; c) Laje após concretagem; d) Antes da retirada do escoramento central (7 dias); e) e f) Sob peso próprio (2,40 kPa: 8-28 dias); g)* e *h) Laje sob primeiro carregamento aplicado (+2,26 kPa: 28-134 dias); i) e j) Laje com segundo carregamento aplicado (+2,34 kPa: 134-260 dias).*

Figura 7.15 – Laje mista *L2-MD55-LT*

*k)*

*l)*

*k) Concretagem lajes L2 (esquerda); l) Laje L2 sob peso próprio (2,40 kPa: 28-260 dias);*

Fonte: Autor (2019)

Os relógios de medição dos deslocamentos verticais das lajes tiveram suas medidas iniciais registradas e tomadas como base para análise da evolução das mesmas. A Figura 7.16 apresenta a disposição através dos registros fotográficos.

Figura 7.16 – Relógios comparadores do ensaio da laje mista *L1-MD55-LT*

*a)* *b)* *c)*

*d)* *e)*

*(a) Relógio comparador **R1=R4** (sobre apoio); b) Relógio **R2=R3** (meio do vão); c) Relógio **R5=R6** (deslizamento de extremidade); d) Perspectiva dos relógios comparadores pelo lado esquerdo; e) Linha de relógios comparadores para medição dos deslocamentos verticais.*

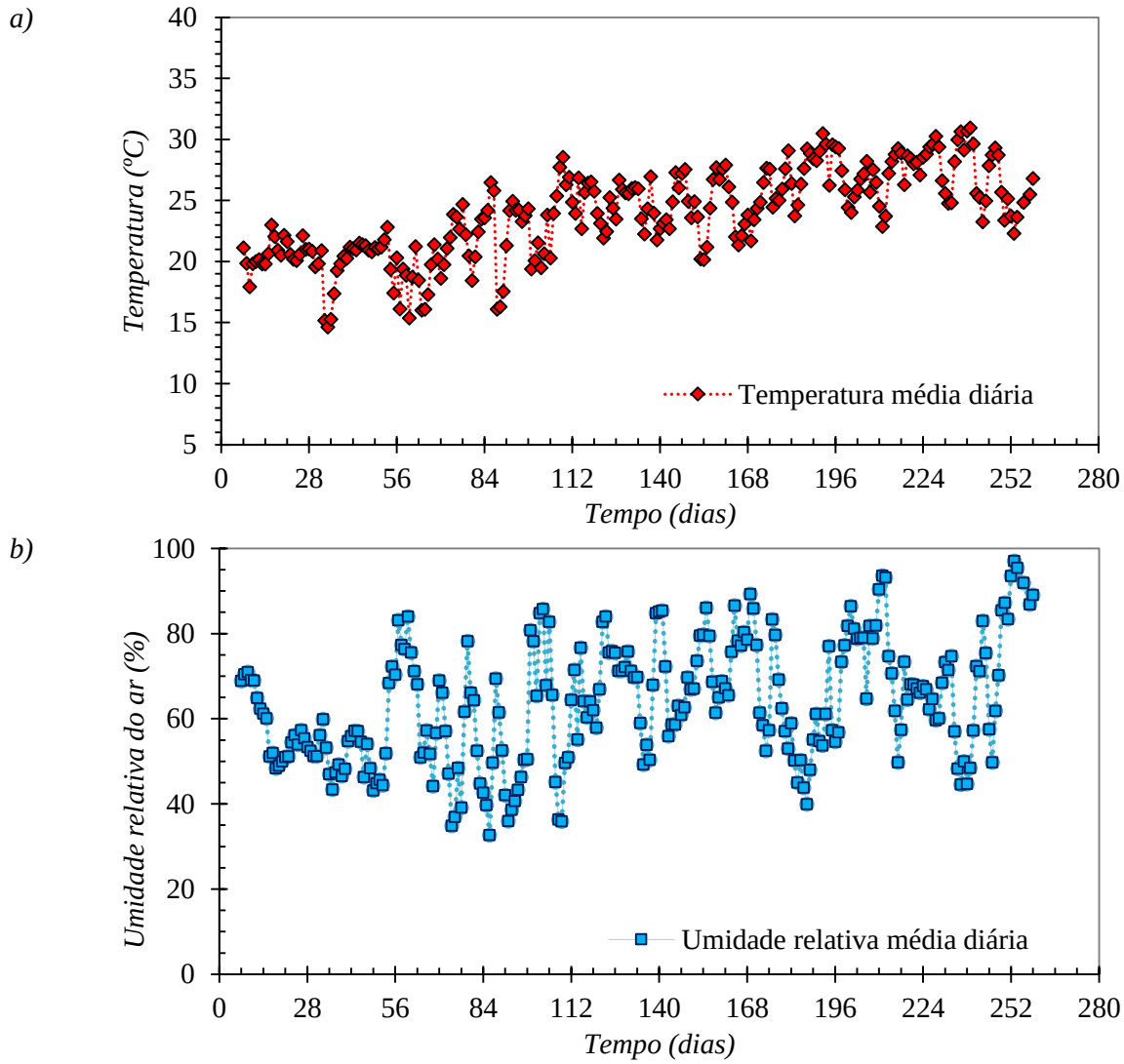
Fonte: Autor (2019)

Os relógios comparadores dispostos abaixo da laje mista (R2, R3, R7 e R8) possuíam mesmas características de curso e marca, colocados sobre aparatos metálicos e estes sobre blocos prismáticos de concreto maciços curados a longa data. Os relógios R1 e R4 dispostos sobre os apoios mediram a possibilidade de algum assentamento ou acomodação dos apoios, estes metálicos e dispostos sobre blocos de concreto. Os relógios R5 e R6 foram colados na fôrma de aço com cola epóxi *Araldite*® e colocado o cursor contra o concreto, de modo a captar algum deslizamento relativo entre os materiais.

### *7.3.3 Condições ambientais*

A condição ambiental foi monitorada através de medições da temperatura e umidade relativa do ar. As lajes foram mantidas dentro do Laboratório de Estruturas (SET/EESC/USP). O monitoramento foi realizado através de circuito montado com o sensor de temperatura e umidade *DHT22 (*Apêndice B*)* localizado próximo às lajes. O sensor tem precisão de medidas para temperatura de $\pm 0{,}5$ºC e para umidade de $\pm 2\%$. Medidas a cada 15 minutos foram programadas. A Figura 7.17 (a) apresenta os resultados do monitoramento da temperatura média diária e a Figura 7.17 (b) a umidade relativa do ar diária, ao longo dos 260 dias de ensaio.

Figura 7.17 – Monitoramento das condições ambientais do ensaio de longa duração




*a) Temperatura média (ºC); b) Umidade relativa do ar (%)*

Fonte: Autor (2019)

Ao longo dos 260 dias de ensaio a temperatura média foi de 24ºC e a umidade relativa do ar média de 64%.

### *7.3.4 Evolução dos deslocamentos verticais e deslizamentos*

As medidas dos deslocamentos verticais das lajes *L1-MD125-LT* e *L2-MD125-LT* ao longo do ensaio de 260 dias (idade do concreto) estão apresentadas nas Figuras 7.18 e Figura 7.19, respectivamente. As medidas dos relógios comparadores são dadas pelas leituras de meio vão e nos quartos de vão à direita (D) e à esquerda (E).

Figura 7.18 – Deslocamentos verticais da laje mista *L1-MD125-LT* (*experimental*)

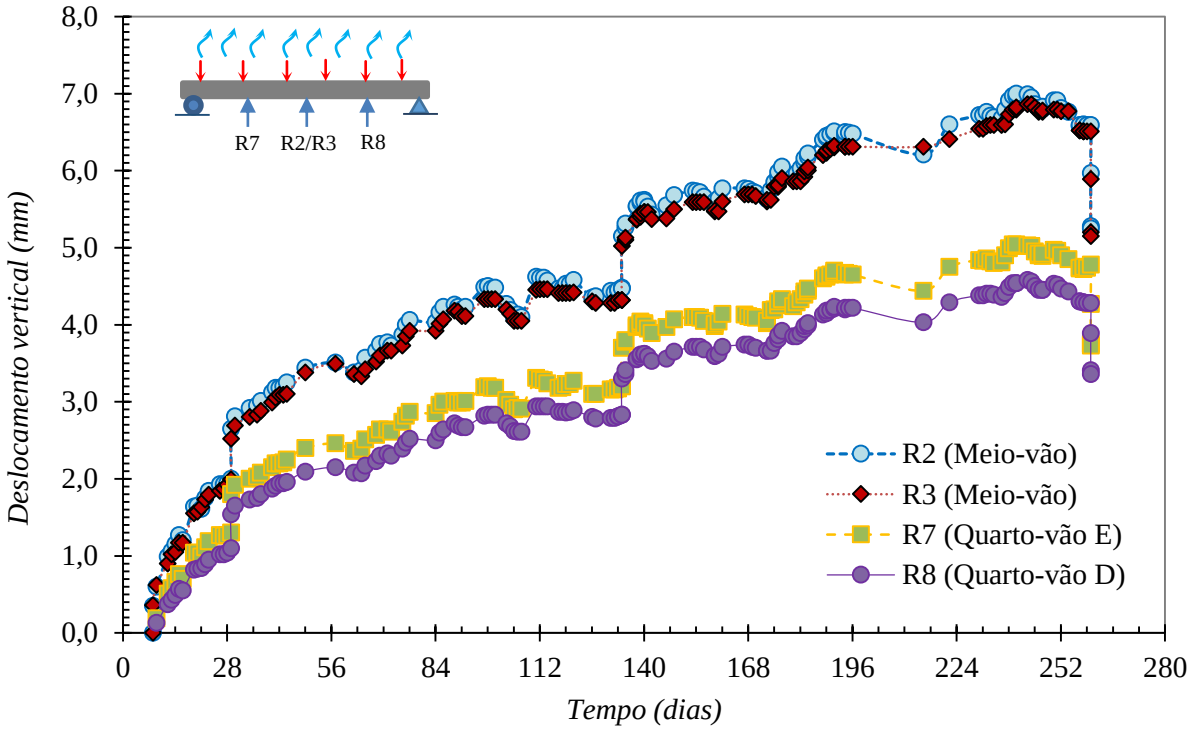
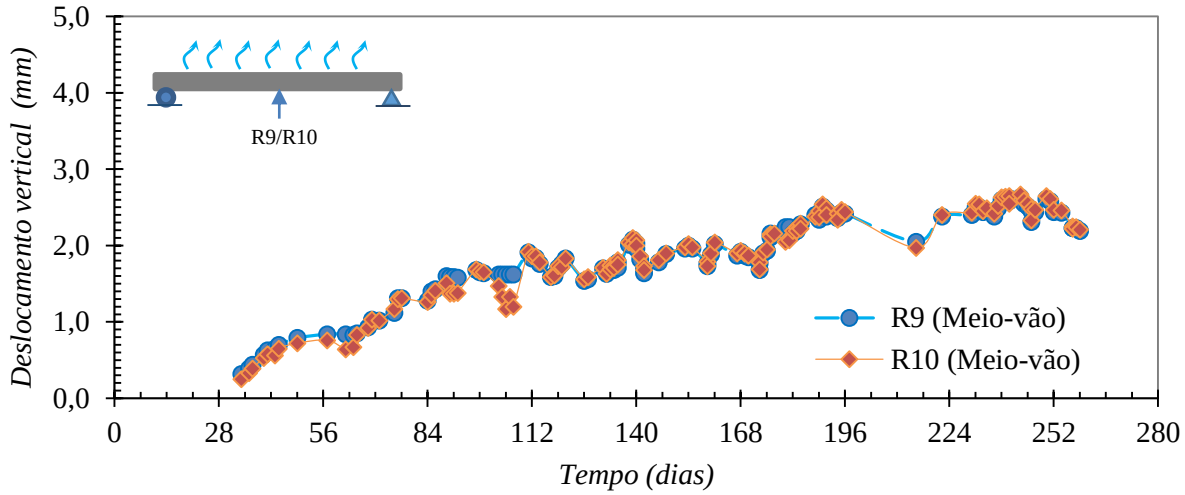



Figura 7.19 – Deslocamentos verticais da laje mista *L2-MD125-LT* (*experimental*)




Fonte: Autor (2019)

As medidas da evolução das flechas da laje mista *L1* são apresentadas na Tabela 7.6, com apresentação das etapas de carregamento e descarregamento. Na Tabela 7.7 apresenta-se os valores de interesse das parcelas imediatas e diferidas entre as etapas de carregamento e, no final, a razão entre as parcelas.

Tabela 7.6 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT*

| Medida | Flecha medida (mm) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 dias | | 28 dias | | 134 dias | | 240 dias | 260 dias | | |
| Atividade *(*)* | Antes *R.E.* *(a)* | Após *R.E.* *(b)* | Antes *SC1* *(c)* | Após *SC1* *(d)* | Antes *SC2* *(e)* | Após *SC2* *(f)* | MÁX. *(g)* | Fim Ensaio *(h)* | Ret. *SC2* *(i)* | Ret. *SC1* *(j)* |
| **R2** | 0 | 0,35 | 2,00 | 2,65 | 4,47 | 5,15 | **6,97** | 6,59 | 5,97 | 5,25 |
| **R3** | 0 | 0,36 | 1,99 | 2,52 | 4,32 | 5,02 | **6,79** | 6,51 | 5,89 | 5,15 |

(*) Atividades: *(a) Antes da retirada do escoramento central (R.E.);(b)Após retirada do escoramento; (c) Antes do primeiro carregamento (sobrecarga SC1); (d) Após o primeiro carregamento (SC1); (e) Antes da aplicação do segundo carregamento (SC2); (f) Após aplicação do segundo carregamento (SC2); (g) Valor máximo obtido no ensaio; (h) Fim do ensaio aos 260 dias; (i) Descarregamento com a retirada da segunda sobrecarga (Ret. SC2); (j) Retirada da primeira sobrecarga (Ret. SC1).*

Tabela 7.7 – Parcelas de flechas (meio do vão) imediatas e diferidas da laje *L1-MD125-LT*

| Medição | Imediatas (i) | | | | Diferidas (d) | | | | | Razão (d)/(i) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Peso Próprio* | *SC1* | *SC2* | *Total* | 8-28 *dias* | *29-134 dias* | *135-240 dias** | *135-260 dias* | *Total (máx.)* | |
| **R2** | 0,35 | 0,65 | 0,68 | 1,68 | 1,65 | 1,82 | 1,82 | 1,44 | 5,29 | |
| **R3** | 0,36 | 0,53 | 0,70 | 1,59 | 1,63 | 1,80 | 1,77 | 1,49 | 5,20 | **3,20** |
| **(média)** | 0,36 | 0,59 | 0,69 | **1,64** | 1,64 | 1,81 | 1,80 | 1,47 | **5,25** | |

*(*) Valor que apresentou máxima flecha no ensaio de longa duração (máx).*

Fonte: Autor (2019)

Da Tabela 7.7, a parcela de flecha imediata, que é aquela que ocorre logo de imediato à aplicação do carregamento, foi de 1,64 mm. A flecha diferida é aquela observada na evolução das flechas, descontando as flechas imediatas, foi de 5,25 mm. Dessa forma, observa-se que as flechas diferidas foram 3,20 vezes maior que as flechas imediatas do ensaio.

Nenhum deslizamento relativo entre o concreto e a fôrma de aço foi identificado nos relógios de extremidades, sendo, portanto, inexistentes no ensaio realizado na condição em serviço. Pela existência da fôrma de aço na face inferior, não foi possível identificar a ocorrência de fissuração do concreto nessa região. Nas faces laterais não foi identificado aberturas de fissuras.

Sobre as medidas observadas no meio do vão comparativamente aos quartos de vão para a laje mista *L1*, observa-se concordância com as medidas dos relógios comparadores, o que indiretamente assegura melhor precisão nos resultados. O relógio comparador **R8**, disposto à direita em relação ao vão central, apresentou medidas ligeiramente menores de flechas, comparativamente às medidas do relógio **R7**, situado no quarto de vão oposto. Sobre os dois relógios dispostos no meio do vão, as medidas foram comparativamente próximas. O relógio **R2** fez medidas na onda baixa, enquanto o relógio **R3** fez leituras na onda alta da fôrma de aço. Mesma situação foi adotada na laje mista *L2*.

A laje *L2-MD125-LT* sujeita apenas ao seu peso próprio e às condições ambientais, com evolução das flechas devidas aos efeitos da retração e fluência, apresentou flecha diferida máxima aos 240 dias de 2,67 mm, com ensaio realizado de 28 a 260 dias da idade do concreto. A Figura 7.19 apresenta apenas as flechas diferidas da laje mista L2, lembrando que a mesma foi concretada ao nível do chão e disposta sobre os apoios posteriormente, aos 28 dias. Assim a idade de 28 dias é tomada como o início das medições. Dessa forma, parcela de flecha imediata e de peso próprio e diferidas até idade de 28 dias não foram medidas e contabilizadas.

Um ponto a ser destacado é a influência verificada das condições ambientais da temperatura e umidade relativa do ar na flecha medida. Observa-se que a flecha das lajes aumenta e diminui ao longo das semanas. Na idade de 100 dias, como pode ser vista na Figura 7.18 e 7.19 de evolução das flechas, ao conflitar com a Figura 7.17 do monitoramento, observa-se que devido à diminuição da temperatura somado a um aumento de umidade relativa do ar, as flechas diminuíram. Mesma situação ocorreu nas semanas finais do ensaio, como pode ser observado. Fato esse que explica o valor máximo da flecha ter acontecido aos 240 dias, com a combinação de uma temperatura mais elevada (ordem de 30ºC) e uma umidade relativa do ar mais baixa (na ordem de 45%) e não aos 260 dias, já que após o máximo valor atingido observa-se um aumento da umidade relativa do ar, em torno de 85%, e uma temperatura mais branda na ordem de 25ºC.

Dessa maneira, observa-se a dependência da evolução das flechas da sazonalidade da temperatura e umidade e da combinação entre as mesmas.

Foi realizada uma instrumentação com extensômetros elétricos de resistência para medição das deformações do concreto, fôrma de aço e do aço da tela, ao longo do tempo. No entanto, os resultados das medidas com o equipamento ao longo do tempo, não forneceu dados consistentes, sendo desprezados.

## 7.4 Ensaio de avaliação da capacidade resistente da laje

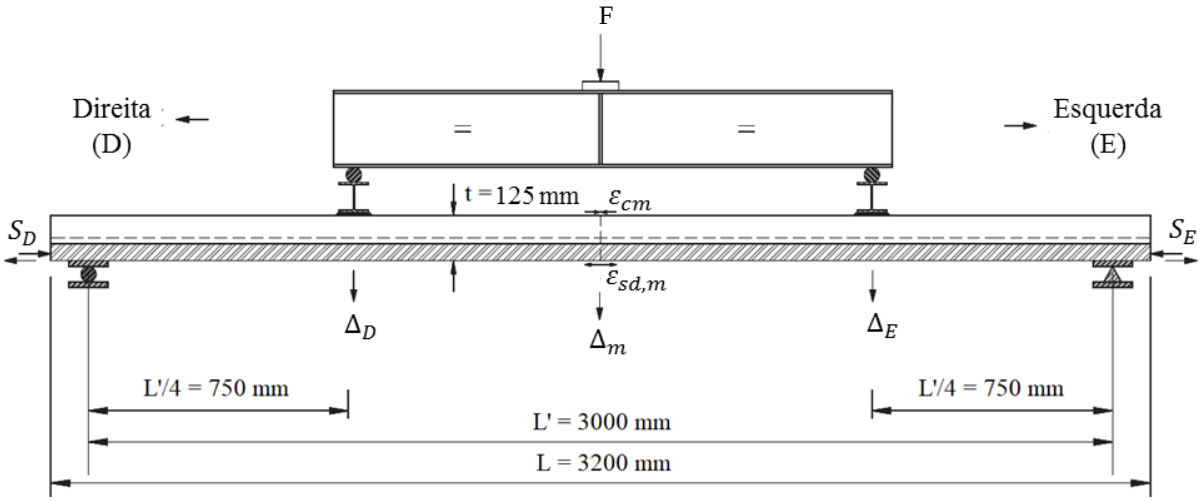
### *7.4.1 O programa experimental*

O ensaio para avaliação da capacidade resistente e do tipo de comportamento da laje mista foi o de flexão a quatro pontos, recomendado pelo Eurocode 4 (2004) e AS/NZS 2327 (2017). Duas lajes foram feitas para avaliar a capacidade resistente aos 28 dias, tomando como base a idade relativa à especificação da resistência à compressão do concreto. Uma das lajes mistas, denominada de *L3-MD125*, foi concretada no mesmo dia das lajes *L1-MD125-LT e L2-MD125-LT*. A quarta laje *L4-MD125*, foi concretada de modo a ser ensaiada juntamente com as lajes *L1* e *L2* ao final do ensaio de longa duração.

Baseou-se a instrumentação nos ensaios experimentais já realizados no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (SET/EESC/USP), apresentados em Sieg (2015) e Grossi (2016).

Trata-se de ensaios na condição estática simplesmente apoiada, com duas forças concentradas situadas nos quartos de vão a L/4 dos apoios. O esquema geral do ensaio é apresentado na Figura 7.20.

Figura 7.20 – Esquema geral do ensaio de flexão (curta-duração) da laje mista

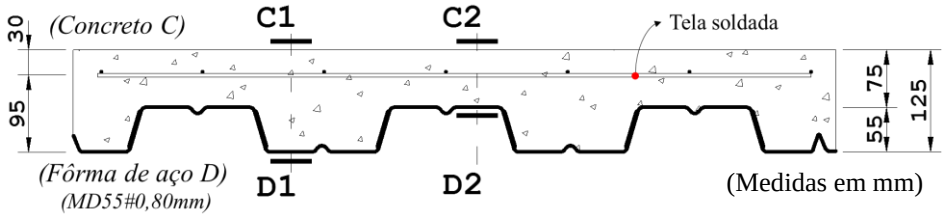



Fonte: Autor (2019)

Medidas de deformação da fôrma de aço $\varepsilon_{sd}$ e do concreto $\varepsilon_c$ no meio-vão foram realizadas por meio de extensômetros elétricos de resistência. Deslizamentos relativos nas extremidades entre a fôrma de aço e o concreto foram medidos durante o ensaio por meio de transdutores de deslocamento posicionados nas extremidades dos modelos, à direita $S_D$ e à esquerda $S_E$.

A Figura 7.21 traz a seção transversal da laje mista com o posicionamento da instrumentação por extensômetros elétricos de resistência.

Figura 7.21 – Seção transversal da laje mista e posicionamento dos extensômetros elétricos




Fonte: Autor (2019)

Para aplicação do carregamento e medição das forças aplicadas, dos deslocamentos e das deformações específicas, foram empregados os seguintes equipamentos e instrumentos de medição:

- Aplicação de força: atuador servo-hidráulico. Capacidade nominal: 500 kN e curso de pistão de 150 mm;
- Medição da força aplicada: célula de carga e rótula acoplada. Capacidade nominal de 500 kN;
- Medição de deslizamento relativo nas extremidades das lajes (2): transdutores de deslocamento à base de extensômetros. Curso de 25 mm;
- Medição dos deslocamentos verticais (4): transdutor de deslocamento à base de extensômetros. Curso de 100 mm;
- Medição de deformação específica no aço (2): extensômetro elétrico de resistência. Marca e modelo proposto: Kyowa e KFG-5-120-C1-11;
- Medição de deformação específica no concreto (2): extensômetro elétrico de resistência: marca e modelo proposto: Kyowa e KFG-10-120-C1-11;
- Aquisição automática de leituras de forças, deslocamentos e deformações específicas: sistema de aquisição de dados System 5000. Marca: VISHAY.

Os ensaios foram conduzidos com controle de deslocamento do pistão do atuador hidráulico. De acordo com Grossi (2016) a taxa de deslocamento no pistão usada nos seus ensaios variou de 0,01 mm/s a 0,05 mm/s. Gholamhoseini (2014) conduziu seus ensaios com taxa de deslocamento, mas numa taxa de 0,3 mm/min (0,005 mm/s). Ao comparar os valores, tomou-se como velocidade de ensaio a taxa de 0,01 mm/s.

### *7.4.2 Resultados dos ensaios de avaliação da capacidade resistente*

O ensaio de flexão a quatro pontos para avaliar a capacidade resistente das lajes mistas foi realizado em duas etapas. A laje *L3* foi concretada no mesmo dia que as lajes *L1* e *L2* e serviu como base inicial para a carga colocada na laje *L1* simular um nível de carregamento em serviço. A laje *L1* foi ensaiada aos 28 dias de idade do concreto. A Figura 7.22 apresenta a laje mista durante o ensaio realizado. A laje *L4* foi concretada de forma a realizar o ensaio junto com as lajes mistas do ensaio de longa duração *L1* e *L2*. Dessa maneira, dividiu-se em dois lotes as lajes mistas: Lajes *L1* e *L2* com 260 dias de idades (*long-term*) e L3 e L4 com idade do concreto com de 28 dias (*short-term*). Todas as lajes possuem as mesmas características geométricas e de material.

Figura 7.22 – Ensaio da laje mista *L3-MD125-ST*

Fonte: Autor (2019)

A Tabela 7.8 apresenta um resumo da descrição dos protótipos ensaiados.

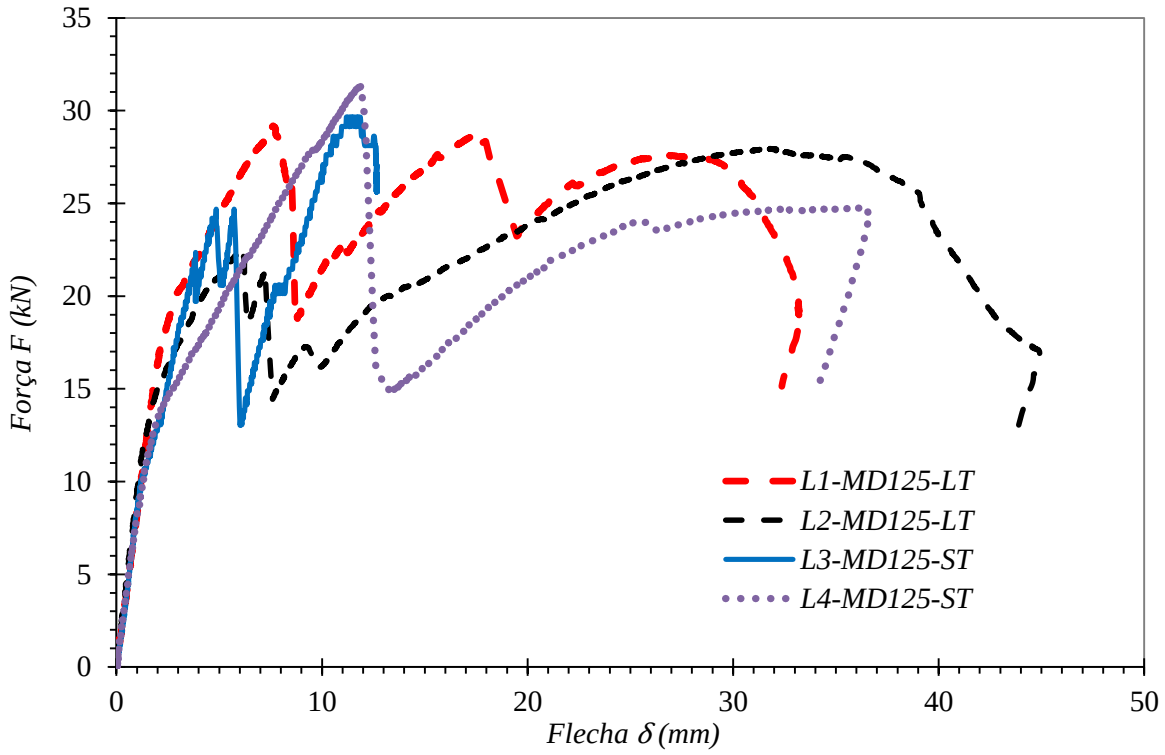
Tabela 7.8 – Resumo da descrição dos protótipos ensaiados a flexão

| Protótipo | Idade concreto (dias) | Fôrma de aço | Altura total (mm) | Largura $b$ (mm) | Vão total $L_t$ (mm) | Vão teórico $L_F$ (mm) | Vão de cisalhamento $L_s$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *L1-MD125-LT* *L2-MD125-LT* | *260 dias* | MD55 0,76 *mm* | 125 | 950 | 3200 | 3000 | 750 |
| *L3-MD125-ST* *L4-MD124-ST* | *28 dias* | | | | | | |

Fonte: Autor (2019)

Os resultados dos ensaios das quatros lajes estão apresentados na Figura 7.23, em função da força aplicada pelo atuador servo-hidráulico ($F$) e a flecha medida ($\delta$) pelo transdutor de deslocamento *LVDT* no meio do vão das lajes.

Figura 7.23 – Curvas do ensaio: Força $x$ flecha dos protótipos




Fonte: Autor (2019)

Em termos de avaliação da flexão, seria mais adequado trabalhar as curvas em função do momento fletor, no entanto, como a literatura apresenta curvas de força $x$ flecha na conceituação do tipo de ruptura dessas lajes, optou-se por usar força. No entanto, essa análise para a seção do meio do vão é obtida multiplicando-se metade da força pelo vão de cisalhamento. Outra justificativa da apresentação das curvas em termos da força é o fato das rupturas na maioria das vezes estarem associadas ao cisalhamento longitudinal.

A Tabela 7.9 apresenta os resultados experimentais dos protótipos, com a definição das forças máximas e do comportamento apresentado.

Tabela 7.9 – Resultados experimentais do ensaio de capacidade resistente dos protótipos

| Protótipo | $F_{desl.}$ (kN)[a] | $F_{máx.}$ (kN)[b] | $F_{total}$ (kN)[c] | $F_{máx}/F_{desl}$ [d] | Comportamento | $V_u$ (kN)[e] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *L1-MD125-LT* | 29,18 | 29,18 | 37,55 | *1,00* | *Frágil* | 15,02 |
| *L2-MD125-LT* | 22,51 | 27,97 | 36,34 | *1,24* | Dúctil | 18,17 |
| *L3-MD125-ST* | 24,69 | 29,65 | 38,92 | *1,20* | Dúctil | 19,46 |
| *L4-MD124-ST* | 31,33 | 31,33 | 39,81 | *1,00* | *Frágil* | 15,92 |

([a]) Força convencional associada ao início do deslizamento relativo entre o aço e o concreto. Corresponde ao deslizamento observado de 0,10 mm.

([b]) Menor valor entre a força máxima aplicada ($F$) durante o ensaio (*peak load*) e a força correspondente à flecha $L/50$.

([c]) Máxima força aplicada ($F_{máx}$) somada ao peso próprio da laje ensaiada ($P_{prop}$) e dos dispositivos de distribuição de força ($P_{disp}$). Como segue:

- Protótipos *L3-MD125-ST:* $P_{prop} + P_{disp} = 6{,}87 + 2{,}40 = 9{,}27\ kN$
- Protótipos L1-MD125-LT e L2-MD125-LT: $P_{prop} + P_{disp} = 6{,}84 + 1{,}53 = 8{,}37\ kN$
- Protótipos *L4-MD-125-ST:* $P_{prop} + P_{disp} = 6{,}95 + 1{,}53 = 8{,}48\ kN$

([d]) O comportamento é considerado dúctil, se $F_{máx}/F_{des} > 1{,}10$.

([e]) Valor experimental representativo da força cortante. Sendo definido como: $0{,}5F_{total}$, se o comportamento é dúctil ou $0{,}8(0{,}5)F_{total}$, se comportamento for frágil.

*As definições apresentadas foram tomadas com base nas normas Eurocode 4 (2004) e AS/NZS 2327 (2017).*

Fonte: Autor (2019)

Como pode ser observado nos resultados, as quatro lajes mistas apresentaram forças máximas ($F_{máx}$) relativamente próximas, com a laje *L2-MD125-LT* uma menor força de 27,97 kN e a laje *L4-MD125-ST* com maior força do ensaio de 31,33 kN.

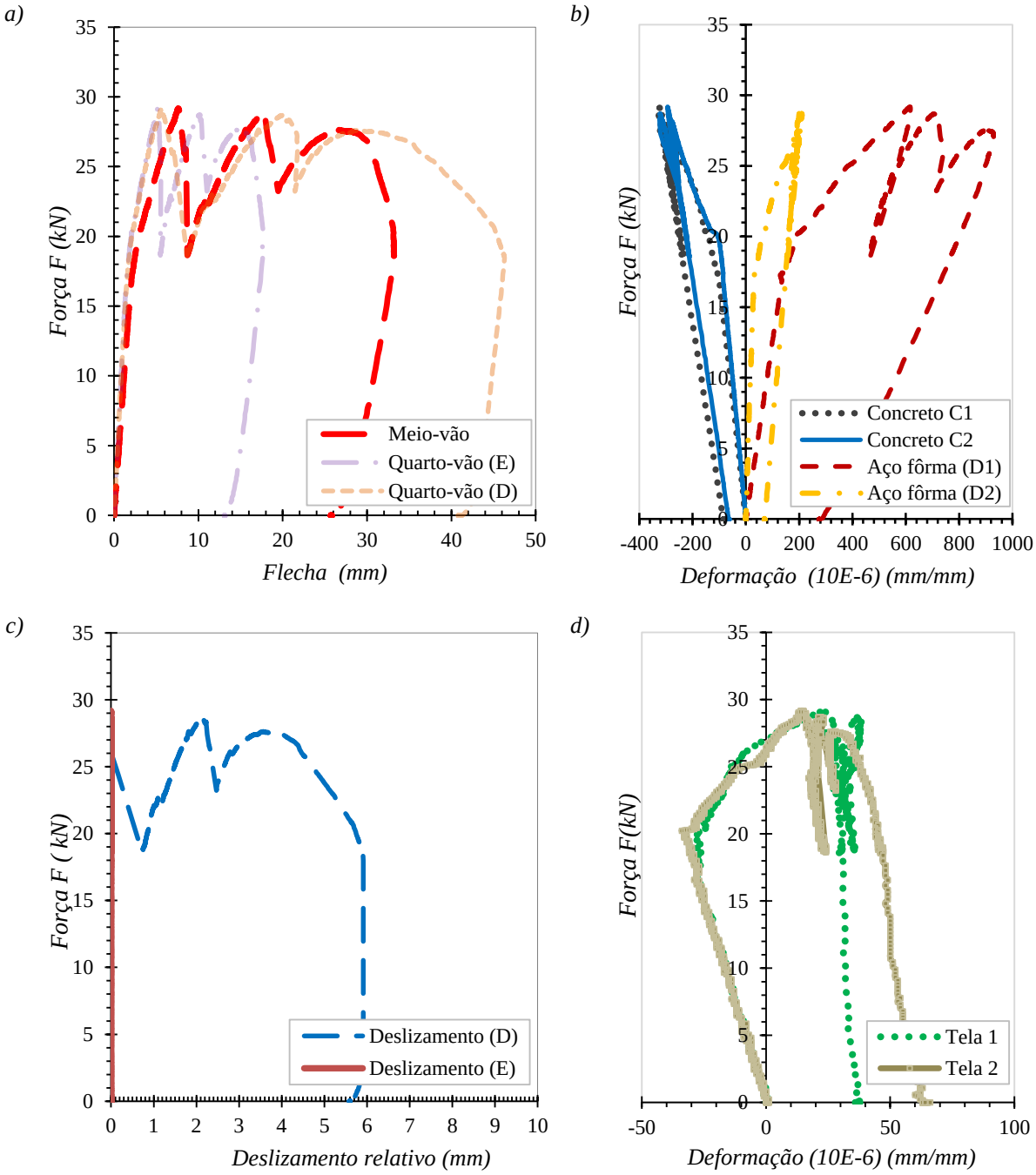
Os trechos iniciais das curvas são praticamente coincidentes, até forças da ordem de 12 kN. No entanto, quanto ao tipo de comportamento, as lajes mistas apresentaram resultados divergentes. Para uma mesma idade, as lajes L1 e L2 com 260 dias, apresentam comportamento distinto. O mesmo foi verificado para as lajes L3 e L4, com 28 dias de idade do concreto.

As lajes L1 e L4 apresentaram comportamento frágil conforme classificação. Enquanto as lajes L2 e L3 apresentam comportamento dúctil.

Para melhor entendimento e estudo das possibilidades dessas ocorrências, apresentam-se os resultados da instrumentação realizada e a comparação entre as lajes. As Figuras 7.24, 7.25, 7.26 e 7.27 traz os resultados do ensaio das lajes *L1*, *L2*, *L3* e *L4*, respectivamente.

O Apêndice C traz o padrão de fissuração das lajes ao fim do ensaio.

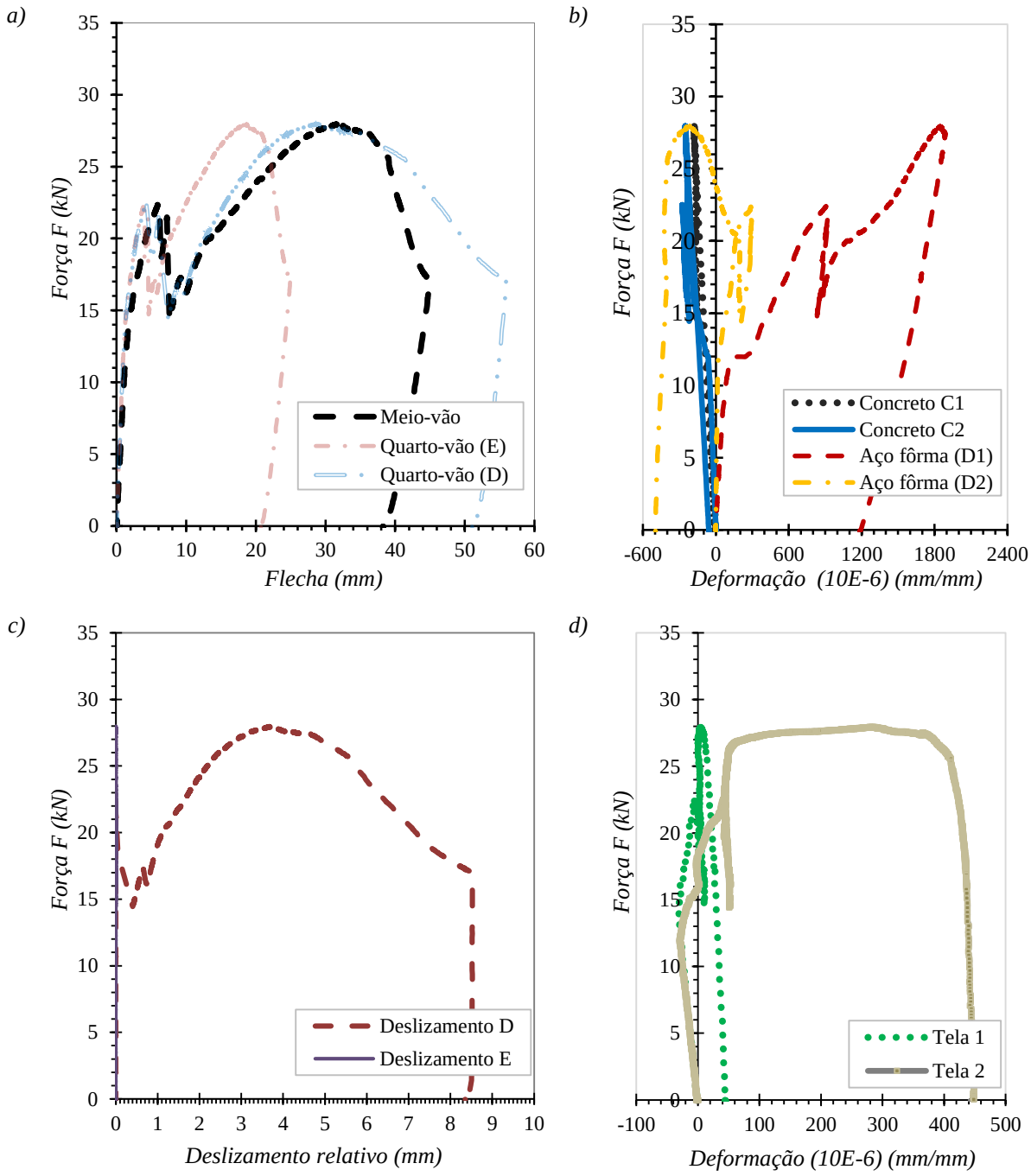
Figura 7.24 – Resultados do ensaio da Laje mista *L1-MD125-LT*




*(a) Gráfico Força aplicada x Flechas do meio de vão e quartos de vão (E-esquerda e D-direita);*
*(b) Gráfico Força aplicada x deformação específica dos materiais aço da fôrma e concreto, conforme instrumentação dos extensômetros da Figura 7.21: D1 (onda baixa) e D2 (onda alta) da fôrma.*
*(c) Gráfico da Força aplicada x deslizamentos relativos entre aço e concreto: extremidade direita (D) e extremidade esquerda (E);*
*(d) Gráfico Força aplicada x deformação específica da tela de aço instrumentada na seção do meio vão.*

Fonte: Autor (2019)

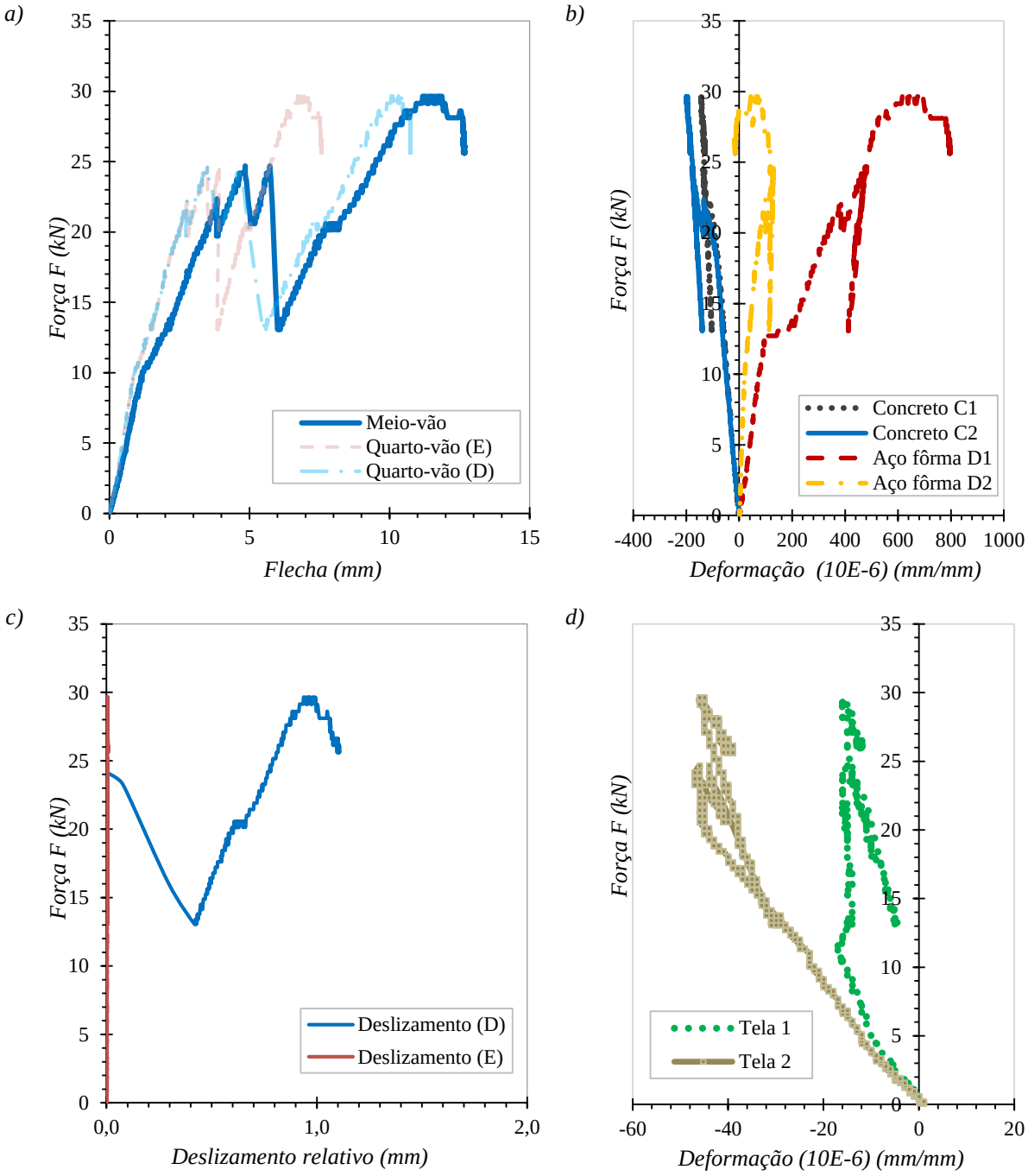
Figura 7.25 – Resultados do ensaio da Laje mista *L2-MD125-LT*




*(a) Gráfico Força aplicada x Flechas do meio de vão e quartos de vão (E-esquerda e D-direita);*
*(b) Gráfico Força aplicada x deformação específica dos materiais aço da fôrma e concreto, conforme instrumentação dos extensômetros da Figura 7.21: D1 (onda baixa) e D2 (onda alta) da fôrma.*
*(c) Gráfico da Força aplicada x deslizamentos relativos entre aço e concreto: extremidade direita (D) e extremidade esquerda (E);*
*(d) Gráfico Força aplicada x deformação específica da tela de aço instrumentada na seção do meio vão.*

Fonte: Autor (2019)

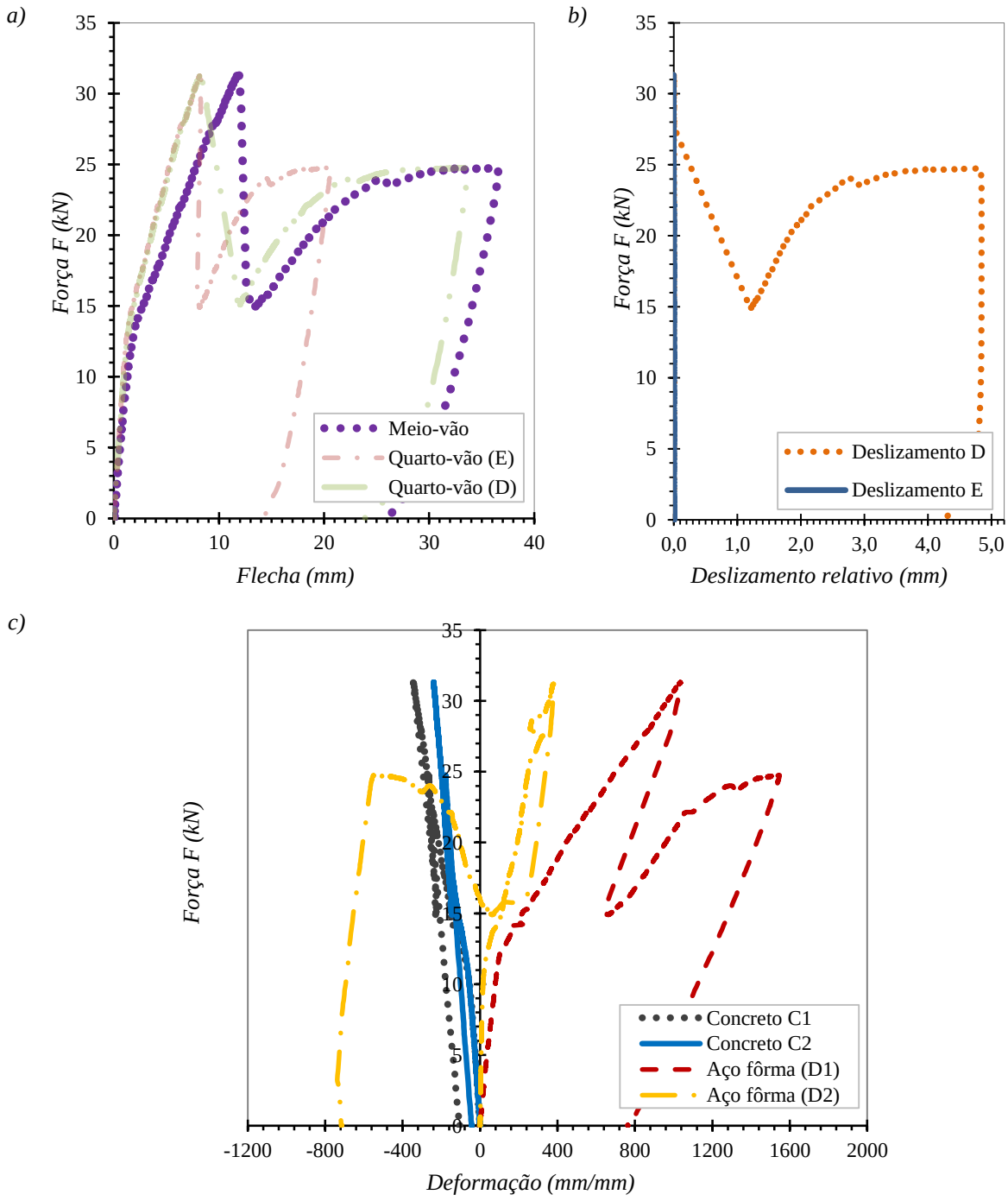
Figura 7.26 – Resultados do ensaio da Laje mista *L3-MD125-ST*




*(a) Gráfico Força aplicada x Flechas do meio de vão e quartos de vão (E-esquerda e D-direita);*
*(b) Gráfico Força aplicada x deformação específica dos materiais aço da fôrma e concreto, conforme instrumentação dos extensômetros da Figura 7.21: D1 (onda baixa) e D2 (onda alta) da fôrma.*
*(c) Gráfico da Força aplicada x deslizamentos relativos entre aço e concreto: extremidade direita (D) e extremidade esquerda (E);*
*(d) Gráfico Força aplicada x deformação específica da tela de aço instrumentada na seção do meio vão.*

Fonte: Autor (2019)

Figura 7.27 – Resultados do ensaio da Laje mista *L4-MD125-ST*




*(a) Gráfico Força aplicada x Flechas do meio de vão e quartos de vão (E-esquerda e D-direita);*
*(b) Gráfico Força aplicada x deformação específica dos materiais aço da fôrma e concreto, conforme instrumentação dos extensômetros da Figura 7.21: D1 (onda baixa) e D2 (onda alta) da fôrma.*
*(c) Gráfico da Força aplicada x deslizamentos relativos entre aço e concreto: extremidade direita (D) e extremidade esquerda (E).*

Fonte: Autor (2019)

Ao observar os resultados dos gráficos (a) *Força aplicada x Flechas* e (c) *Força aplicada x deslizamentos relativos entre aço e concreto* observa-se que em todos os protótipos ocorreu um brusco deslizamento relativo entre o aço e o concreto.

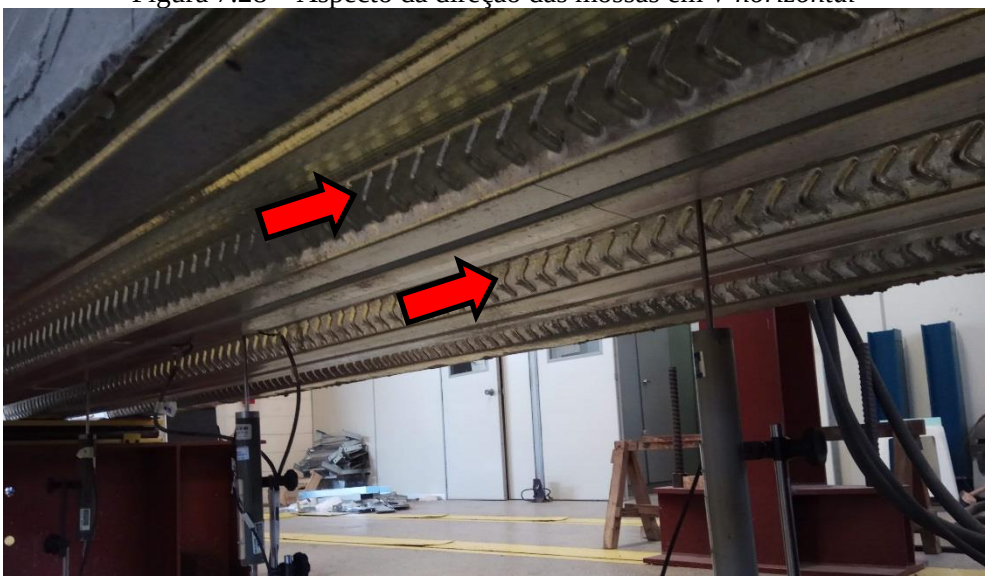
Na ocorrência do deslizamento, a força aplicada pelo atuador apresentou uma queda significativa. As lajes *L1* e *L4* com a ocorrência do deslizamento, não foi possível mais atingir forças maiores que a que provocou o deslizamento inicial. Enquanto isso, as lajes *L2* e *L3*, mesmo com ocorrência do deslizamento, a força atingiu patamar superior ao do deslizamento inicial.

A laje *L1* apresentou comportamento distinto das demais, apresentando aproximadamente três picos. Com a ocorrência dos deslizamentos, a fôrma e o concreto engrenaram e atingiram cargas até níveis aproximadamente iguais à força que causaram o deslizamento anterior. Acredita-se que nas lajes L2 e L3, que apresentaram comportamento dúctil, uma maior parcela de engrenamento entre a fôrma de aço e o concreto foi atingido após os primeiros deslizamentos.

Fissuras foram monitoradas visualmente ao longo do ensaio. Fissuras no meio do vão foram observadas antes da ocorrência de deslizamentos. Com a ocorrência dos deslizamentos relativos, de forma brusca, todos os protótipos apresentaram uma fissura iniciada na região de aplicação da força do lado que ocorreu o deslizamento.

Todas as lajes tiveram a ocorrência de deslizamentos apenas na extremidade direita. Sendo todas com a direção das mossas da fôrma voltada para mesmo lado. Desse fato, destaca-se que a direção das mossas teve importância quanto ao lado de deslizamento. A Figura 7.28 ilustra o aspecto referente à mossa.

Figura 7.28 – Aspecto da direção das mossas em *V horizontal*



Fonte: Autor (2019)

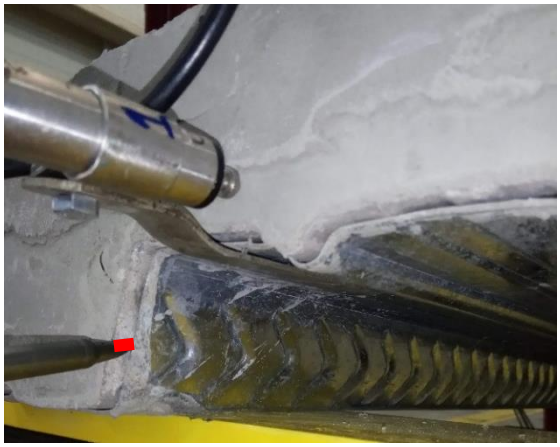
Dessa forma, observa-se que a geometria da mossa em V invertido, apresentou uma resistencia menor à interface para o lado direito pela influencia aos deslizamento relativos e aparecimento da fissura até o ponto de aplicação da carga todos desse lado. Com o desenvolvimento das tensões cisalhamentes na região, tem-se uma resistência maior para o outro lado da mossa, pelo maior confinamento proporcionado.

A Figura 7.29 (a) apresenta o ensaio realizado na laje mista *L1-MD125-LT*, *L2-MD125-LT* e *L4-MD125-ST*, após o pico de carga (*peak load*), onde pode-se ver as fissuras no meio do vão e abaixo do ponto de aplicação da carga. A Figura 7.29 (b) e (d) apresenta a fissura abaixo da aplicação da carga à frente e ao fundo, respectivamente. Por fim, a Figura 7.29 (c) mostra os deslizamentos ocorridos na extremidade, típico para todos os ensaios.

Figura 7.29 – Aspectos do ensaio de capacidade resistente

*a)* *b)*

*c)* *d)*



*(a) Ensaio das lajes mistas L1-MD125-LT, L2-MD125-LT* e *L4-MD125-ST após o peak-loak do ensaio: fissuras no meio do vão e sob ponto de aplicação da carga; (b Linha de fissura abaixo do ponto de aplicação da carga (à frente).) (c) Deslizamentos relativos de extremidade entre aço e concreto (típico); d) Linha de fissura abaixo do ponto de aplicação da carga (ao fundo).*

Fonte: Autor (2019)

Outras observações podem ser feitas a partir dos resultados do ensaio:

- Os materiais aço da fôrma, concreto e aço da tela apresentaram comportamento linear até certo nível de carregamento, como pode ser visto nas Figuras 7.24-7.27 no gráfico Força aplicada $x$ deformação específica dos materiais. Com a fissuração do concreto (vista pela queda de inclinação do gráfico Força aplicada x Flechas*)* o aço da fôrma apresenta aumento significativo das deformações. As deformações no concreto tanto sobre a onda baixa quanto sobre a onda alta da fôrma são relativamente próximas até a força que provoca o deslizamento inicial. As lajes L1, L2, L3 e L4 apresentaram deformação máxima do concreto de 320$\mu\varepsilon$, 232$\mu\varepsilon$, 194$\mu\varepsilon$ e 342$\mu\varepsilon$, respectivamente. Para o módulo de deformação do concreto da ordem de 30 MPa, atingiu-se então tensões no concreto máximas na ordem de 10 MPa.

- Com ocorrência dos deslizamentos relativos, há uma queda da deformação da fôrma de aço, com posterior aumento para o aço da onda baixa.. A fôrma de aço da laje *L1* apresentou uma deformação para a carga máxima de 600$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e 210 $\mu\varepsilon$ (onda alta). A laje *L2* para a carga que provocou o deslizamento de extremidade apresentou 900$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e 295 $\mu\varepsilon$ (onda alta), no entanto para a força máxima, 1848$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e -242 $\mu\varepsilon$ (onda alta). A laje *L3* apresentou uma deformação para a carga máxima de 673$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e 60$\mu\varepsilon$ (onda alta), sendo que a deformação da onda alta atingido uma deformação máxima de 126$\mu\varepsilon$). A laje *L4* para a carga máxima e mesma que provocou o deslizamento de extremidade apresentou 1026$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e 372 $\mu\varepsilon$ (onda alta), no entanto, com a continuidade do ensaio a fôrma de aço apresentou no final do ensaio 1523$\mu\varepsilon$ (onda baixa) e -548 $\mu\varepsilon$ (onda alta). Observa-se que com o deslizamento relativo entre os materiais, e a ocorrência da interação parcial, ocorreu o aparecimento de uma segunda linha neutra nos materiais, como fica claro na laje *L2* e ao fim do ensaio da *L4*. A laje *L2* atingiu a maior deformação da fôrma de aço, deformação que indica que a fôrma iniciou o processo de escoamento do aço, enquanto as outras não.

- Sobre a tela de aço colocada como tela de retração, indicada pelas normas, o comportamento inicial é de compressão do aço, pela sua posição, a 30mm do topo, apresentando deformação máxima de compressão de -33 $\mu\varepsilon$, -44 $\mu\varepsilon$ e -28 $\mu\varepsilon$, para as lajes *L1, L2* e *L3*. A laje L4 não possibilitou realização de leituras da deformação da tela no ensaio. No entanto, atingido um nível de carga que variou da carga que provocou fissuração na laje (identificada pela queda da inclinação da reta) e a carga máxima, a tela passa a diminuir sua deformação, chegando até a estar tracionada, como nas lajes *L1* e *L2*. Justifica-se essa ocorrência pela fissuração do concreto associada ao aparecimento da interação parcial e mudança da linha neutra da seção.

- Sobre os deslizamentos relativos de extremidade, após o deslizamento inicial, os mesmos evoluem gradativamente. A curva força aplicada $x$ flechas e força aplicada $x$ deslizamento relativos mostram concordância dos resultados entre deslizamento e rigidez do sistema. Com a ocorrência dos deslizamentos, o sistema ficou menos rigído, apresentando curvas menos acentuadas da força $x$ flechas. Cita-se que os deslocamentos verticais medidos são devidos apenas à força exercida pelo atuador.

- A interação parcial do sistema pode ser avaliada tomando como base a seção com interação completa. Com os dados obtidos da caracterização do ensaio dos materiais e da geometria da seção, realiza-se o equilíbrio plástico da seção transversal, como apresentado por Grossi (2016). Da análise, conclui-se que a interação parcial da laje mista atingiu a média de 52% da capacidade do momento fletor para a interação completa.

A Tabela 7.10 apresenta um resumo da análise da interação parcial apresentada e das flechas e deslizamentos obtidos para as forças máximas dos ensaios.

Tabela 7.10 – Resumo da análise da capacidade resistente

| Protótipo | $F_{total}$ (kN)[a] | $M_{exp}$ (kNm)[b] | a (mm)[c] | $M_R$ (kNm)[d] | $M_{exp}/M_R$ | $F_{máx.}$ (kN)[e] | $\Delta_u$ (mm)[f] | $S_u$ (mm)[g] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *L1-MD125-LT* | 37,55 | 14,08 | 10,5 | 27,68 | 0,509 | 29,18 | 7,73 | - |
| *L2-MD125-LT* | 36,34 | 13,63 | 10,5 | 27,68 | 0,492 | 27,97 | 27,91 | 3,65 |
| *L3-MD125-ST* | 38,92 | 14,60 | 10,8 | 27,63 | 0,528 | 29,65 | 11,67 | 1,00 |
| *L4-MD124-ST* | 39,81 | 14,93 | 9,57 | 27,82 | 0,537 | 31,33 | 11,98 | - |

([a]) $F_{total}$ é a máxima força aplicada ($F_{máx}$) somada ao peso próprio da laje ensaiada ($P_{prop}$) e dos dispositivos de distribuição de força ($P_{disp}$).

([b]) $M_{exp}$ é o máximo valor do momento fletor obtido experimentalmente, dado por $0{,}5\mathrm{F_{total}L_s}$. ($\mathrm{L_s} = 750\ mm$).

([c]) $a$ é a altura do bloco de compressão do concreto para análise plástica da seção.

([d]) $M_R$ é o momento fletor resistente característico para análise experimental correspondente à interação completa, conforme equação para linha neutra acima da nervura:

$$M_R = \mathrm{A}_{sd}\mathrm{f}_{y,\mathrm{Sd}} \cdot \left(d_f - 0{,}5a\right) \quad e \quad a = \mathrm{A}_{sd}\mathrm{f}_{y,\mathrm{Sd}}/(0{,}95 f_c b),$$

Onde: $\mathrm{A}_{sd} = 912\ mm^2$, $\mathrm{f}_{y,\mathrm{Sd}} = 329\ MPa$, $d_f = h - h_{sd} = 125 - 27{,}5 = 97{,}5\ mm$; $a =$ altura do bloco de concreto comprimido; $0{,}95 f_c =$ representa a resistência do concreto da estrutura, medida em função da resistência medida em corpos de prova levando em conta a influência das placas da prensa da máquina de ensaio; $b = 950\ mm$ é a largura da laje mista.

([e]) Menor valor entre a força máxima aplicada ($F$) durante o ensaio (*peak load*) e a força correspondente à flecha $L/50$.

([f]) $\Delta_u$ é a flecha medida para a carga máxima do ensaio.

([g]) $S_u$ é o deslizamento relativo de extremidade entre o a fôrma de aço e concreto para a carga máxima de ensaio.

Fonte: Autor (2019)

Pela Tabela 7.10, as lajes *L1* e *L2* (que passaram pelo ensaio de longa duração) apresentaram forças máximas próximas, no entanto, flechas comparativamente diferentes. As lajes *L3* e *L4* (idade de 28 dias) apresentaram flechas aproximadamente iguais, para a força máxima do ensaio. No entanto, pela classificação, apresentam tanto *L1 e L2* assim como *L4* e *L3*, comportamentos diferentes, uma frágil e outra dúctil. Para as lajes dúcteis, para a carga máxima foi possível medir o deslizamento relativo que atingiu 3,65 mm e 1,00 mm para as lajes mistas *L2 e L3*, respectivamente. Para as lajes frágeis, com a carga máxima do ensaio, ocorreram os deslizamentos.

Uma verificação feita é o aumento expressivo da resistência a tração do concreto, com base nos ensaios de resistência à tração na flexão dos prismas. A resistência à tração foi em média 1,50 vezes maior para idade de 260 dias em relação a idade de 28 dias do concreto. Esse aumento influenciou o aparecimento das primeiras fissuras e, consequentemente, o momento de fissuração, mas não influenciou a resistência máxima.

Dessa forma, não ficou definido uma orientação sobre as respostas na diferença da influência do comportamento ao longo do tempo das lajes ensaiadas, carregadas ou não, sobre a capacidade resistente. Gholamhoseini (2014) realizou a comparação dos resultados de lajes mistas rompidas aos 28 e 240 dias, e cita que os efeitos da retração e fluência não influenciaram significativamente. Indica que aumentos da capacidade podem estar mais ligadas ao aumento da resistência do concreto.

## 7.5 Considerações finais do capítulo

Sobre o ensaio de longa duração, as flechas diferidas ao longo do tempo para o ensaio de 260 dias de idade do concreto, apresentaram-se 3,20 vezes maiores que as flechas imediatas. Observa-se uma dependência local dos pontos da curva de evolução das flechas com a temperatura e a umidade relativa do ar. As lajes L1 e L2 apresentaram comportamentos semelhantes em termos da evolução das suas flechas.

Não foi observado deslizamento relativos entre o aço e concreto para carregamento em serviço. Nenhuma fissura foi identificada visualmente nas laterais da laje mista carregada durante o ensaio, no entanto, pode ter ocorrido fissuração na região interna próxima às bordas inferiores, não sendo possível visualizar.

A partir dos resultados do ensaio de flexão a quatro pontos, verifica-se que o comportamento das lajes foi divergente, não evidenciando tipo claro de ruptura ou dependência de comportamento com o tempo. A capacidade não foi determinada pelo esmagamento do concreto ou escoamento do aço da fôrma, mas pelo cisalhamento da interface aço-concreto.

# 8 AVALIAÇÃO DAS FLECHAS NAS LAJES MISTAS

*Neste capítulo são apresentados os resultados das abordagens de avaliação das flechas das lajes mistas de aço e concreto. São desenvolvidos os cálculos para as lajes mistas investigadas experimentalmente. Ampliaram-se as análises teóricas a partir de resultados experimentais presentes na literatura. São aplicadas as abordagens simplificadas e refinada na previsão das flechas e uma comparação é realizada entre as diferentes abordagens.*

## 8.1 Considerações gerais

A partir das abordagens apresentadas nos códigos de projeto e na literatura realizou-se a previsão das flechas das lajes mistas ensaiadas experimentalmente *L1-MD-125-LT* e *L2-MD125-LT*. Um roteiro dos cálculos são apresentados para a laje mista *L1-MD125-LT*. Resultados da evolução das flechas ao longo do tempo são apresentados.

Avaliaram-se as previsões das flechas com base nas abordagens simplificadas dos códigos de projeto ANSI-ASCE 3 (1992), ANSI-SDI C (2011) e CSSBI-03 (2008), Eurocode 4 (2004) e BS 5950 (1994) que não trazem consideração explícita das parcelas de retração.

Com a avaliação de previsão com consideração explícita da retração foi utilizado o modelo simplificado da AS/NZS 2327 (2017), com o perfil de retração não-uniforme linear proposto por Al-Deen e Ranzi (2015) e Ranzi (2017). No método refinado foi utilizado o perfil de retração não-uniforme parabólico proposto por Gholamhoseini (2014).

A avaliação da retração e fluência das lajes mistas foi estimada com base nas normas de projeto para estruturas de concreto armado, tomando como base as adaptações que os métodos propõem, como exemplo, na espessura fictícia das peças. Para as lajes ensaiadas experimentalmente do presente trabalho *L1-MD125-LT* e *L2-MD125-LT*, aplicam-se as prescrições da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014) na previsão do coeficiente de fluência e da retração.

Foi realizada a ampliação dos resultados das abordagens de avaliação para outras lajes mistas com resultados experimentais presentes na literatura, de Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), Gholamhoseini (2014) e Wang et al. (2016). Para essas lajes mistas, as previsões da fluência e retração tomaram como base as prescrições da norma australiana AS 3600 (2018), pelo fato de representar mais fielmente a localidade e materiais utilizados pelos autores.

## 8.2 Avaliação por dispensa de verificação

Com base nas lajes mistas ensaiadas, fôrma de aço MD55, concreto de peso normal e condição simplesmente apoiada e do resultado do ensaio experimental e do nível de carregamento que se espera para a laje mista, utiliza-se a avaliação por dispensa de verificação do estado limite de deslocamentos excessivos.

Com base nas prescrições apresentadas no item 6.2.1 e consideração dos limites da Tabela 6.1, para as lajes mistas simplesmente apoiadas, tem-se:

Tabela 6.1 – Dispensa do cálculo de flecha em razão do máximo valor entre vão/altura

| **Tipo de apoio** | **Eurocode 4 (2004)** | **BS 5950-4 (1994)** | **ANSI-ASCE 3-91 (1992)** |
|---|---|---|---|
| | - Concreto normal - | | |
| **Vãos biapoiados** | 20 | 30 | 22 |

Fonte: Autor (2019)

Para utilizar o procedimento, a carga do ensaio que causar deslizamento nos apoios de 0,5 mm nos ensaios de lajes mistas deve exceder 1,2 vezes o carregamento em serviço. Com os resultados dos ensaios experimentais pelos gráficos Força F $x$ Deslizamento relativos (item 7.4.2), observa-se que a carga que causa deslizamento de 0,5mm ocorreram para força acima de 22,51 kN.

Aplicando fatores de segurança de 1,25 para cisalhamento longitudinal (EUROCODE 4, 2004 e ABNT NBR 8800, 2008)), obtem-se uma carga equivalente $[22{,}51kN/(0{,}95 \cdot 3{,}00)m^2]/1{,}25 = 6{,}32\ \mathrm{kN/m^2}$. Para a carga máxima aplicada em serviço utilizados no ensaio de $4{,}60\ \mathrm{kN/m^2}$, tem-se que $6{,}32/4{,}60 = 1{,}37$ vezes maior.

Dessa forma, com base na geometria da laje mista, o vão é $L = 3000\ mm$ e altura útil $d_p = 125 - 27{,}5 = 97{,}5\ mm$:

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{d_p}} = \frac{3000\ \mathrm{mm}}{97{,}5\ \mathrm{mm}} = 30{,}8$$

De acordo com os limites e considerando não ocorrência de deslizamentos significativos confirmado experimentalmente para a laje analisada, observa-se que o valor da razão é maior que as mínimas para a dispensa apresentadas pelas normas. A norma BS5950-4 (1994) indica um valor máximo superior aos demais. Sobre esse valor, em correspondência pessoal com o professor Mark Lawson[2] da Universidade de Surrey (2019) ele indica esse valor em virtude de casos reais de flechas excessivas em edificação no Reino Unido com sistema de lajes mistas.

[2] Mark Lawson. (**Correspondência pessoal**). Guidance on Long Span Composite Floors. Data: 12 de out. 2018.

## 8.3 Avaliação simplificada sem consideração explícita dos efeitos da retração

Sobre os métodos de avaliação das flechas das lajes mistas presentes nos códigos de projeto, citam-se os presentes nas normas ANSI-ASCE 3 (1992), ANSI-SDI C (2011) e CSSBI-03 (2008) que usam de coeficiente de multiplicação das flechas imediatas e o Eurocode 4 (2004) e BS 5950 (1994) que reduzem o módulo de elasticidade do concreto para levar em conta as flechas diferidas no tempo.

A norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) não indica método para avaliação das flechas nas lajes mistas e usualmente se recorre ao Eurocode 4 (2004). Dessa forma, apresenta-se o roteiro de cálculo para avaliação com base na abordagem simplificada do Eurocode 4 (2004).

### *8.3.1 Abordagem simplificada do Eurocode 4 (2004)*

O cálculo das propriedades da laje mista é realizado com a homogeneização da seção adotando o procedimento simplificado como apresentado para as vigas mistas, dividindo por 2 o módulo de elasticidade do concreto para a avaliação do efeito de deformação lenta. O momento de inércia da seção é tomado como a média da inércia da seção fissurada e não-fissurada. A tela de retração não é computada no cálculo da seção.

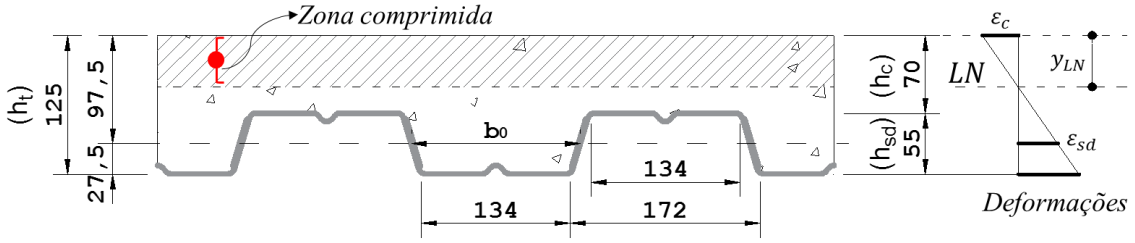
Com base nas características e propriedades da laje mista *L1-MD125-LT*, apresentam-se o roteiro de cálculos para a previsão da flecha máxima.

A razão modular, $n$, considerando os efeitos de longa duração com módulo reduzido:

$$n = \frac{E_{Sd}}{E'_c} = \frac{E_{Sd}}{\frac{1}{2}\cdot E_c} = \frac{204000}{\frac{1}{2}\cdot 30000} = 13{,}6$$

Da seção da laje mista, Figura 8.1, de maneira simplificada adota-se uma seção T equivalente, de maneira simplificada para largura unitária, o valor de $b_m$ é:

Figura 8.1 – Medidas da laje mista *L1-MD125-LT*




Fonte: Autor (2019) (Medidas em mm)

$$b_0 = \frac{172 + 134}{2} = 153 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad b_m = \frac{b}{b_s}\cdot b_0 = \frac{1000}{306}\cdot 153 = 500 \text{ mm/m}$$

- Momento de inércia da seção não-fissurada, $I_{uncr}$, para largura unitária $b$ (Equação 8.1)

$$I_{uncr} = \frac{b \cdot h_c^{\,3}}{12 \cdot n} + \frac{b \cdot h_c}{n} \cdot \left(y_u - \frac{h_c}{2}\right)^2 + \frac{b_m \cdot h_{Sd}^{\,3}}{12 \cdot n} + \frac{b_m \cdot h_p}{n} \cdot \left(h_{total} - y_u - \frac{h_{Sd}}{2}\right)^2 + \\ + A_{Sd} \cdot (y_{Sd} - x_u)^2 + I_{Sd} = 10.337.783\ mm^4/m\ \ (relativo\ ao\ aço) \quad (8.1)$$

Onde $y_u$ é a posição da linha neutra da seção não-fissurada (Equação 8.2):

$$y_{uncr} = \frac{b \cdot \frac{h_c^{\,2}}{2} + b_m \cdot h_{Sd} \cdot \left(h - \frac{h_{Sd}}{2}\right) + n \cdot A_{Sd} \cdot y_{Sd}}{b \cdot h_c + b_m \cdot h_{Sd} + n \cdot A_{Sd}} = 57{,}67\ mm \quad (8.2)$$

- Momento de inércia da seção fissurada, $I_{cr}$, para largura unitária $b$ (Equação 8.3):

$$I_{cr} = \frac{b \cdot y_c^{\,3}}{3 \cdot n} + A_p \cdot (y_{Sd} - y_c)^2 + I_{Sd} = 5.355.816\ \ mm^4/m \quad (8.3)$$

A posição da linha neutra da seção fissurada relativa ao topo da laje $y_{cr}$ é dada pela Equação 8.4:

$$y_{cr} = \frac{\Sigma A_i \cdot z_i}{\Sigma A_i} = \frac{n \cdot A_p}{b}\left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d_{Sd}}{n \cdot A_{Sd}}} - 1\right) = 39{,}29\ \text{mm} \quad (8.4)$$

O valor médio das inércias fissuradas ($I_{cr}$) e não-fissuradas ($I_{uncr}$):

$$I_{cm} = \frac{I_{uncr} + I_{cr}}{2} = \frac{10.337.783 + 5.355.816}{2} = 7.846.800\,\text{mm}^4/\text{m} \quad (8.5)$$

- A flecha da laje mista é dada pela Equação 8.6 para viga simplesmente apoiada:

$$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{p_{total} \cdot l^4}{E_{Sd} I_{cm}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{7{,}00\ \text{kN/m}^2 \cdot (3.000\ \text{mm})^4}{204.000\,\text{kN/m}^2 \cdot 7.846.800\,\text{mm}^4/\text{m}} = \mathbf{4{,}61\ mm} \quad (8.6)$$

### *8.3.2 Resumo das abordagens simplificadas sem consideração explícita dos efeitos da retração*

A Tabela 8.1 apresenta os resultados para as avaliações normativas para a flecha máxima estimada para a laje mista L1-MD125-LT, com procedimento semelhante ao anterior.

Tabela 8.1 – Resumo das estimativas das flechas por avaliação sem consideração explicita dos efeitos da retração

| Códigos normativos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Códigos normativos | Eurocode 4 (2004) | BS 5950 (1994) | ANSI-ASCE 3 (1992) | ANSI-SDI C (2011) | CSSBI-03 (2008) |
| Estratégia dos efeitos diferidos | (Módulo reduzido) | | Coeficiente multiplicador da flecha imediata ($\delta_0 = 2{,}92\ mm$) | | |
| | $E_c/2$ | $(2/3)E_c$ | 2,0 | 2,0 | 3,0 |
| **Flecha final prevista $t_\infty$ (mm)** | 4,61 | 3,84 | 5,84 | 5,84 | 8,76 |

Fonte: Autor (2019)

## 8.4 Avaliação simplificada do modelo da AS/NZS 2327 (2017)

### *8.4.1 Considerações adotadas*

O modelo simplificado de previsão das flechas nas lajes mistas de aço e concreto apresentado na norma AS/NZS 2327 (2017) traz procedimento para cálculo das parcelas de flechas imediata devido carregamento $\delta_0$, parcela devido à fluência $\delta_{cc}$ e parcela devido a retração não uniforme $\delta_{sh}$. Adota-se o modelo de retração não-uniforme linear com distribuição da retração $1{,}2\varepsilon_{\mathrm{sh}}/0{,}2\varepsilon_{\mathrm{sh}}$ (topo/face inferior da laje).

Usa-se a homogeneização da seção pelo método das rigidezes da seção, apresentado no item 5.4. O cálculo do coeficiente de fluência $\varphi(\mathrm{t},\mathrm{t}_0)$ e da retração $\varepsilon_{sh}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0)$ foi determinado com base nas prescrições da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014), apresentado no Apêndice A.4 . A espessura fictícia $h_{fic}$ adotada para a laje mista foi definida como:

- Para o coeficiente de fluência $\varphi(\mathrm{t},\mathrm{t}_0)$: $h_{fic,\varphi} = 2h_{total}$
- Para deformação de retração $\varepsilon_{sh}(\mathrm{t},\mathrm{t}_c)$: $h_{fic,sh} = h_{total}$

Essa simplificação foi adotada para todas as lajes avaliadas. A adoção da altura $h$ para a espessura fictícia para a retração é indicada pela norma AS/NZS 2327 (2017). Para a fluência foi adotada a mesma consideração indicada para uma laje convencional.

A Tabela 8.2 reúne as informações de carregamento, condições ambientais e composição do cimento para avaliação da evolução das flechas na laje mista *L1-MD125-LT*. A Tabela 8.3 apresenta o cálculo dos coeficientes de fluência e retração para algumas idades de interesse, com espessuras fictícias da peça adotadas para a presente abordagem. O tempo infinito foi tomado como 10.000 dias.

Tabela 8.2 – Fatores e variáveis consideradas na avaliação da evolução das flechas

| Fatores | | | Variáveis consideradas | |
|---|---|---|---|---|
| Carregamento | Idade de carregamento $t_0$ | 8 dias | Peso próprio | 2,40 kPa |
| | | 28 dias | Sobrecarga 01 | 2,26 kPa |
| | | 134 dias | Sobrecarga 02 | 2,34 kPa |
| Concreto | Composição | Conteúdo da pasta de cimento | Tipo de cimento | CP II–Z-32 |
| | | | Abatimento *(slump)* | 110 mm |
| | | Grau de compactação<br>Relação a/c (0,56)<br>Traço da mistura | Consumo de cimento | 350 kg/m³ |
| | Cura | Úmida | Tempo de cura | 7 dias |
| Meio ambiente e geometria da peça | Meio ambiente | Ambiente interno (LE/EESC/USP) | Temperatura média | 24 ºC |
| | | | Umidade relativa do ar média | 64 ºC |
| | Geometria | Tamanho e forma | Espessura fictícia | $h_{fic}$ |

Fonte: Autor (2019)

Tabela 8.3 – Cálculo do coeficiente de fluência e da retração para o método simplificado

**Coeficiente de fluência:** $\varphi(t,t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty}\beta_d$

$t_0 = 8, 28$ e 134 dias

Coeficiente de fluência rápida

$\varphi_a = 0{,}8\left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}\right] = 0$ (para todas as idades)

Coeficiente de deformação lenta irreversível:

$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} = 2{,}76 \cdot 1{,}43 = 3{,}95$

$\varphi_{1c}$ (Tabela A1)(U = 64% e Slump $(10 - 15)$

$\varphi_{1c} = 2{,}76$ (interpolação); $\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} = 1{,}43$

$h_{fic} = \gamma 2 h_{total} = 1{,}247 \cdot 125 = 311{,}6$ mm

$\gamma = 1 + e^{(-7{,}8+0{,}1 \cdot U)} = 1 + e^{(-7{,}8+0{,}1 \cdot 64)} = 1{,}247$

Coeficiente de deformação lenta reversível: $\varphi_{d\infty} = 0{,}4$

Idade fictícia (t):

$t = \alpha \sum \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i}$

$\alpha = 2$ (Cimento tipo CP II) $-$ (fluência)

$T_i = 24°C$ (temperatura média )

$\Delta t_{ef,i} =$ período, expresso em dias

| Período ($t_{ef,i}$) | Idade fictícia (t) |
|---|---|
| 8 | 18,13 |
| 28 | 65,73 |
| 134 | 303,73 |
| 260 | 598,93 |
| 10.000 | 10.000 |

$\beta_t(t) = \frac{t^2 + A \cdot t + B}{t^2 + C \cdot t + D}$

$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 = 263{,}5$

$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 = 710{,}9$

$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 = 517{,}9$

$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 = 10075{,}2$

| | |
|---|---|
| $\beta_f(7)$ | 0,294 |
| $\beta_f(28)$ | 0,461 |
| $\beta_f(134)$ | 0,666 |
| $\beta_f(10000)$ | 0,989 |

$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}$; $t_0(8\ dias)$

| | |
|---|---|
| $\beta_d(28)$ | 0,575 |
| $\beta_d(134)$ | 0,859 |
| $\beta_d(260)$ | 0,992 |
| $\beta_d(10000)$ | 0,998 |

$t_0(28\ dias)$

| | |
|---|---|
| $\beta_d(260)$ | 0,916 |
| $\beta_d(10000)$ | 0,998 |

$t_0(134\ dias) = 64\ dias$

| | |
|---|---|
| $\beta_d(260)$ | 0,712 |
| $\beta_d(10000)$ | 1,673 |

Coeficientes de fluência ($\varphi(t,8)$):

$\varphi(28,8) = 0{,}891$

$\varphi(134,8) = 1{,}814$

$\varphi(260,8) = 2{,}207$

$\varphi(10000,8) = 3{,}142$

Coeficiente de fluência ($\varphi(t,28)$):

$\varphi(134,8) = 1{,}144$

$\varphi(260,28) = 1{,}543$

$\varphi(10000,28) = 2{,}481$

Coeficiente de fluência ($\varphi(t,134)$):

$\varphi(260,28) = 0{,}712$

$\varphi(10000,28) = 1{,}673$

**Retração:** $\varepsilon_{cs}(t,t_0) = \varepsilon_{cs\infty}[\beta_s(t) - \beta_s(t_0)]$

$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} = -6{,}71 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}950 = -6{,}38 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_{1s}$ (Tabela A. 1) U = 60% e Slump $(10 - 15)$

$\varepsilon_{1s} = -6{,}71 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20{,}8 + 3h_{fic}} = 0{,}950$

$\alpha = 1$ (Cimento tipo CP II) $-$ (retração)

$h_{fic} = \gamma h_{total} = 1{,}247 \cdot 125 = 155{,}8$ mm

| Período ($t_{ef,i}$) | Idade fictícia (t) |
|---|---|
| 7 | 7,93 |
| 28 | 32,87 |
| 134 | 151,87 |
| 260 | 294,67 |
| 10000 | 10000 |

$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E}$

$A = 40$; $B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4{,}8 = 23{,}0$

$C = 2{,}5h^3 + 8{,}8h + 40{,}7 = 39{,}3$

$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6{,}8 = 84{,}4$

$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0{,}8 = 9{,}1$

| | |
|---|---|
| $\beta_s(7)$ | 0,141 |
| $\beta_s(28)$ | 0,290 |
| $\beta_s(134)$ | 0,565 |
| $\beta_s(260)$ | 0,705 |
| $\beta_s(10000)$ | 1,000 |

Valor da retração ($\varepsilon_{sh}(t,t_0)$):

$\varepsilon_{sh}(28,7) = -95 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_{sh}(134,7) = -270 \cdot 10^{-6}$

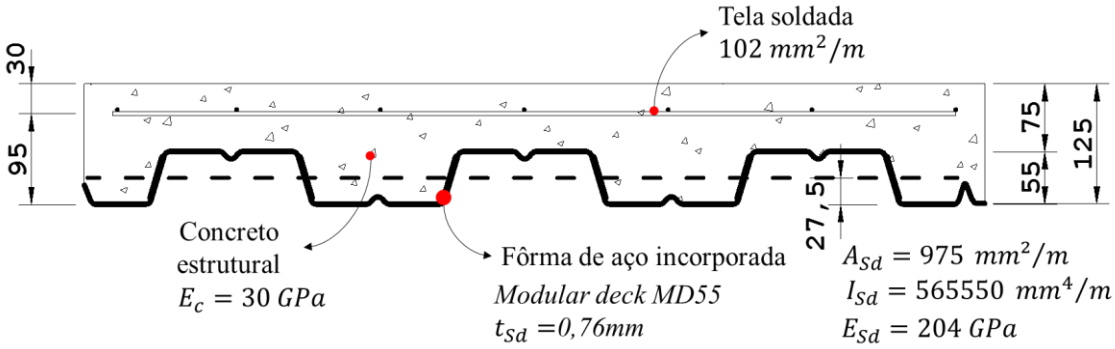
$\varepsilon_{sh}(260,7) = -360 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_{sh}(10.000,7) = -548 \cdot 10^{-6}$

Fonte: Autor (2019)

A Figura 8.2 apresenta a seção transversal da laje mista para largura unitária (1000 mm). Nesse método a tela soldada é incluída no cálculo, por influenciar nas curvaturas induzidas pela retração.

Figura 8.2 – Seção da laje mista *L1-MD125-LT*




Fonte: Autor (2019)

As análises da seção transversal da laje mista foram feitas com discretização em 10 camadas (12,5 mm) ao longo da altura de 125 mm. Com isso, obtiveram-se a área de concreto, a posição do centróide de cada camada e o momento de inércia total. A análise foi realizada tomando como referência a face inferior. Os resultados são apresentados na Tabela 8.4.

Tabela 8.4 – Resultados da discretização da seção transversal em 10 camadas

| Camada (i) | $A_{c(i)}$ (mm²/m) | $y_{ci}$ (mm) | $y_{c(i)} \cdot A_{c(i)}$ (mm³/m) | $b_{eq}$ (mm) | Momento de Inércia ($mm^4/m$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.327,2 | 7,0 | 37.343,7 | 426,2 | 23.626.262,44 |
| 2 | 6.037,5 | 19,5 | 117.790,9 | 483,0 | 17.682.663,19 |
| 3 | 6.377,9 | 32,0 | 204.156,7 | 510,2 | 11.066.411,29 |
| 4 | 6.697,3 | 44,5 | 289.095,4 | 535,8 | 5.718.890,07 |
| 5 | 10.514,6 | 57,0 | 599.440,1 | 841,2 | 2.998.882,01 |
| 6 | 12.500,0 | 69,5 | 868.873,2 | 1000,0 | 362.575,16 |
| 7 | 12.500,0 | 82,0 | 1.025.122,9 | 1000,0 | 1.066.275,39 |
| 8 | 12.500,0 | 94,5 | 1.181.373,7 | 1000,0 | 5.676.223,20 |
| 9 | 12.500,0 | 107,0 | 1.337.662,2 | 1000,0 | 14.192.401,41 |
| 10 | 12.500,0 | 119,5 | 1.493.871,9 | 1000,0 | 26.614.827,19 |
| $\sum_{i=1}^{10} A_{c(i)} =$ | 97.454,37 | $\sum_{i=1}^{10} y_{c(i)} A_{c(i)} =$ | 7.163.690,7 | $\sum_{i=1}^{10} I_{c(i)} =$ | 109.005.411,36 |

Fonte: Autor (2019)

A posição do centróide da camada levou em conta a altura da fôrma de 0,76 mm, sendo $\sum_{i=1}^{10} y_{c(i)} A_{c(i)} / \sum_{i=1}^{10} A_{c(i)} = 73,51\ mm$. A área de concreto para largura unitária é $A_c = 97.454,37\ mm^2/m$. A inércia da seção de concreto foi tomada como a inércia de cada camada em relação ao centróide da seção de concreto, com valor total de $I_c = 109.005.411,36\ mm^4/m$.

Outro ponto necessário para iniciar a análise é a resistência do concreto a tração na flexão $f_{ct,f}$ para cálculo do momento de fissuração $M_{cr}$. A partir dos resultados experimentais na idade de 28 dias, tem-se resistência média à compressão de $f_{cm} = 31{,}12\ MPa$ e resistência à tração dos prismas de $f_{ctm,p} = 3{,}95\ MPa$.

A resistência à tração na flexão da laje mista foi tomada com base que o coeficiente de correlação entre ensaio do prisma é de $f_{ct,f} = 0{,}7 f_{ctm,p}$ e que a resistência à tração para seção T (típica da laje mista com fôrma trapezoidal) tem fator $\alpha = 1{,}2$ (ABNT NBR 6118, 2014). Dessa maneira, a resistência à tração na flexão é de $f_{ct,f} = 1{,}2 \cdot 0{,}7 f_{ctm,p} = 0{,}84 f_{ctm,p} = 3{,}32\ MPa$.

Uma discussão comparativa é quanto às previsões normativas tomadas com base na resistência à compressão $f_c$. Com base na norma ABNT NBR 6118 (2014) e seção T pode ser tomada como $f_{ct,f} = \left(0{,}3 \cdot {f_c}^{2/3}\right)\alpha = \left(0{,}3 \cdot 31{,}12^{2/3}\right) \cdot 1{,}2 = 2{,}97 \cdot 1{,}2 = 3{,}56\ MPa$. A norma americana ACI 318 (2014) e australiana usam $f_{ct,f} = 0{,}6\sqrt{f_c} = 0{,}6\sqrt{31{,}12} = 3{,}35\ MPa$.

Outro ponto de discussão é sobre os modelos de previsão do módulo de elasticidade do concreto. Para análises em serviço, utiliza-se o módulo secante. Para o concreto produzido e com base na norma ABNT NBR 6118 (2014) tomando valor de resistência obtido experimentalmente tem-se: $\mathrm{E_c} = 1{,}2 \cdot [0{,}8 + 0{,}2(31{,}12/80)] \cdot 5600\sqrt{31{,}12} = 32{,}9$ GPa, onde 1,2 leva em conta tipo de agregado basalto. A diferença entre o experimental e o estimado, fica na ordem de 10%. Dessa forma, observa-se valores muito próximos aos obtidos experimentalmente. Para as análises tomam-se como valores bases os obtidos no ensaio.

### *8.4.2 Cálculo das parcelas de flechas da L1-MD125-LT*

Conforme ensaio experimental realizado, a laje mista apresenta as seguintes parcelas:

- Flechas Imediatas: devido peso próprio ($\delta_{0,8}$), sobrecarga 1($\delta_{1,28}$) e sobrecarga 2 ($\delta_{2,134}$);
- Parcelas diferidas no tempo:
  - ❖ Devido à fluência: peso próprio ($\delta_{cc,0}$), sobrecarga 1($\delta_{cc,1}$) e sobrecarga 2 ($\delta_{cc,2}$);
  - ❖ Devido à retração: ($\delta_{sh}$)

Os cálculos para a previsão das flechas da laje mista seguiram as proposta do trabalho de Al-Deen e Ranzi (2015) e Ranzi (2017), com uso de equação que tomam como base rigidezes axial, de momento estático de área e à flexão. Apresenta-se os cálculos para a flecha total estimada para a idade de 260 dias.

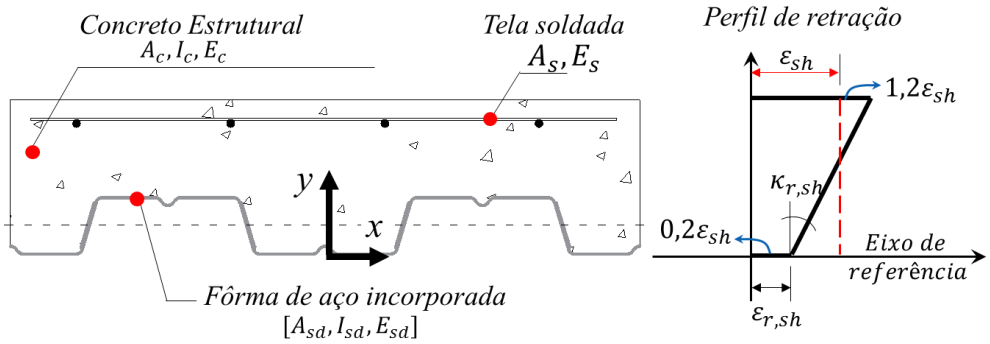
O método toma como base a análise da seção não-fissurada e fissurada, quando o momento fletor em serviço $M_s$ supera o momento de fissuração da seção $M_{cr}$ a seção fissura e realiza-se o cálculo de inércia equivalente.

Algumas considerações foram feitas:

- O cálculo da flecha imediata do carregamento no tempo $t$ é feito com base na inércia da seção na idade $t$;
- Sobreposição dos efeitos;
- Se a seção fissurar em um tempo $t_i$ não se aumentam as flechas das parcelas anteriores.

Dessa forma, tomando como base o item 5.4 e eixo de referência na borda inferior da laje mista (Figura 8.3) e gradiente linear de retração, calculam-se as parcelas de flechas.

Figura 8.3 – Sistema de eixo de referência e gradiente de retração linear




Fonte: Autor (2019)

As propriedades da seção para o tempo $t_0$ são obtidas por meios das rigidezes axial ($R_{A,0}$), momento de área ($R_{B,0}$) e rigidez a flexão ($R_{I,0}$), cujas parcelas de áreas (A), momento estático de área (B), momento de inércias (I) e módulos de elasticidades (I) são apresentadas na Tabela 8.5 para avaliação da resposta imediata, para a seção não-fissurada conforme item 5.4.1.

❖ **Seção não-fissurada ($t_0$)**

Tabela 8.5 – Dados para análise por meio das rigidezes seção não-fissurada

| | Unidade | Concreto (C) | Fôrma de aço (Sd) | Tela soldada (S) |
|---|---|---|---|---|
| Área (A) | $mm^2/m$ | 97.454,4 | 975 | 102 |
| Momento estático de área (B) | $mm^3/m$ | 7.163.690,7 | 26.812,5 | 9695,6 |
| Momento de Inércia (I) | $mm^4/m$ | 635.595.091 | 1.302.894 | 921.189 |
| Módulo de elasticidade (E) | $N/mm^2$ | 30.000 | 204.000 | 191.000 |

Fonte: Autor (2019)

A avaliação da seção fissurada e não-fissurada, parte do cálculo da posição do centróide na seção, como apresentado no item 5.4.2.

$$R_{A,0} = \sum_{i=1}^{m_c} A_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} A_{s(i)}E_{s(i)} + A_{sd}E_{sd} = 3.139 \times 10^6 \text{ N}$$

$$R_{B,0} = \sum_{i=1}^{m_c} B_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}A_{s(i)}E_{s(i)} + B_{sd}E_{sd} = 2.219 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

$$R_{I,0} = \sum_{i=1}^{m_c} I_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}^2A_{s(i)}E_{s(i)} + I_{sd}E_{sd} = 1.948 \times 10^{10} \text{Nmm}^2$$

- **Seção fissurada ($t_0$)**

Para a seção fissurada, calculado o centróide da seção em relação ao eixo de referência (borda inferior da laje), conforme item 5.4.1, obteve-se $y_{cr} = 95{,}07$ mm. A Tabela 8.6 reúne os dados para as propriedades da seção fissurada.

Tabela 8.6 – Dados para análise por meio das rigidezes seção não-fissurada

| | Unidade | Concreto (C) | Fôrma de aço (Sd) | Tela soldada (S) |
|---|---|---|---|---|
| Área (A) | $mm^2/m$ | 29.933 | 975 | 102 |
| Momento estático de área (B) | $mm^3/m$ | 3.293.668 | 26.812,5 | 9695,6 |
| Momento de Inércia (I) | $mm^4/m$ | 364.648.226 | 1.302.894 | 921.189 |
| Módulo de elasticidade (E) | $N/mm^2$ | 30.000 | 204.000 | 191.000 |

Fonte: Autor (2019)

$$R_{A,0,cr} = \sum_{i=1}^{m_c} A_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} A_{s(i)}E_{s(i)} + A_{sd}E_{sd} = 1.113 \times 10^6 \text{ N}$$

$$R_{B,0,cr} = \sum_{i=1}^{m_c} B_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}A_{s(i)}E_{s(i)} + B_{sd}E_{sd} = 1.058 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

$$R_{I,0,cr} = \sum_{i=1}^{m_c} I_{c(i)}E_{c(i),0} + \sum_{i=1}^{m_s} y_{s(i)}^2A_{s(i)}E_{s(i)} + I_{sd}E_{sd} = 1.135 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

- **Momento de fissuração ($M_{cr}$)**

O momento de fissuração para a seção mista por der obtido com base nas rigidezes:

$$\mathrm{M_{cr}} = \frac{1}{E_c\left(\frac{R_{B,0}}{R_0} - y\frac{R_{A,0}}{R_0}\right)}\left[\left(\mathrm{f_{ct,f}} - \sigma_{cs}\right)\right]$$

O termo $R_0$ é dado pela Equação é dado pela Equação 8.1:

$$R_0 = R_I R_A - R_B^2 \tag{8.1}$$

Dessa forma, pelo experimento $\mathrm{f_{ct,f}} = 3{,}32\ N/mm^2$ e o momento de fissuração sem levar em conta a retração é de $\mathrm{M_{cr}} = 7{,}72\ kNm$.

A tensão de tração induzida pela retração pode ser obtida, conforme item 6.2.3.

$$\sigma_{cs} = \frac{E_{ef,cs}}{R_{I,cs}R_{A,cs} - R_{B,cs}^2}\left[\left(R_{I,cs} - yR_{B,cs}\right)f_{cs1} + \left(R_{B,cs} - yR_{A,cs}\right)f_{cs2}\right] - E_{ef,cs}\left(\varepsilon_{r,sh} - y\kappa_{sh}\right)$$

$$\begin{bmatrix} f_{cs1} \\ f_{cs2} \end{bmatrix} = E_{ef,sh}\begin{bmatrix} A_c\varepsilon_{r,sh} - B_c\kappa_{r,sh} \\ -B_c\varepsilon_{r,sh} + I_c\kappa_{r,sh} \end{bmatrix}$$

Na avaliação na data de aplicação do carregamento total $t = 134\ dias$, a retração possui valor de $\varepsilon_{sh}(134{,}7) = -270 \cdot 10^{-6}$ e coeficiente de fluência de $\varphi = 1{,}814$. A análise da seção pelo método da rigidez é novamente realizada com módulo efetivo da retração do concreto $E_{cs}$.

$$E_{ef,cs} = \frac{E_c}{1 + 0{,}55\varphi_{cc}} = \frac{30.000}{1 + 0{,}55 \cdot 1{,}814} = 20.722\ MPa$$

A retração dada pelo perfil linear fornece as deformações de retração e curvatura de referência como apresentado no item 4.3.1.

$$\varepsilon_{r,sh,134} = \frac{(h - h_r)\cdot\eta_{t,k} + h_r\cdot\eta_{b,k}}{h}\varepsilon_{sh,k} = \frac{(125-125)\cdot 1{,}2 + 125\cdot 0{,}2}{125}\cdot -270\cdot 10^{-6}$$
$$= -54\cdot 10^{-6}\ \text{mm/mm}$$
$$\kappa_{r,sh,134} = \frac{\left(\eta_{t,k} - \eta_{b,k}\right)}{h}\varepsilon_{sh,k} = \frac{(1{,}2 - 0{,}2)}{125}\cdot -270\cdot 10^{-6} = -2{,}16\cdot 10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$$

Calculando-se as parcelas:

$$\begin{bmatrix} f_{cs1} \\ f_{cs2} \end{bmatrix} = E_{ef,cs}\begin{bmatrix} A_c\varepsilon_{r,sh} - B_c\kappa_{r,sh} \\ -B_c\varepsilon_{r,sh} + I_c\kappa_{r,sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -314.692 \\ 26.705.656 \end{bmatrix}\text{N}$$

O valor de y é dado pela distância do eixo de referência até a borda inferior da laje, onde avalia-se a fissuração. Desenvolvendo-se de maneira similar as rigidezes para seção não-fissurada do item anterior, tem-se:

$$R_{A,cs} = 1.678 \times 10^6\ \text{N}\ ;\ R_{B,cs} = 1.142 \times 10^8\ \text{Nmm}\ \ R_{I,cs} = 0.992 \times 10^{10}\text{Nmm}^2$$

A tensão de retração induzida pela retração obtida é $\sigma_{cs} = 0{,}52$ MPa e o momento de fissuração de $M_{cr,sh(134)} = 6{,}47\ kNm$.

❖ **Parcelas de flechas imediatas**

Para o cálculo das parcelas de flechas, se a seção não fissurou utilizou-se a inércia da seção não-fissurada, senão, utilizou-se da ponderação com base no momento de fissuração sem levar em conta a tensão de tração induzida pela retração. Essa adoção foi a que mais se assemelhou aos resultados experimentais.

- Idade de 8 dias $\delta_{0,8}$:

O momento em serviço na idade de 8 dias, dado pelo peso próprio $p_{0,8} = 2{,}40\ kPa$ é:

$$M_{s,8} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2{,}40\ kN/m^2 \cdot (3{,}00m)^2}{8} = 2{,}70\ kNm < M_{cr}$$

A flecha imediata $\delta_{0,8}$ para a laje mista unidirecional é dada para condição simplesmente apoiada por:

$$\delta_{0,8} = \frac{5pl^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 2{,}40\ kN/m^2 \cdot (3000mm)^4}{384 \cdot 30.000\,N/mm^2 \cdot 125{,}97 \times 10^6\,mm^4/m} = \mathbf{0,67\ mm}$$

O momento de inércia I, determinado com base nas rigidezes é:

$$\mathrm{I_{uncr}} = \frac{\mathrm{R_I R_A - R_B^2}}{\mathrm{R_A E_c}} = \frac{1.948 \times 10^{10} \cdot 3.139 \times 10^6 - (2.219 \times 10^8)^2}{3.139 \times 10^6 \cdot 30000} = 126{,}3 \times 10^6\,mm^4/m$$

- Idade de 28 dias $\delta_{1,8}$:

O momento em serviço na idade de 28 dias, com aumento de $p_{1,28} = 2{,}26\ kPa$, é:

$$M_{s,8} = \frac{pl^2}{8} = \frac{4{,}46\ kN/m^2 \cdot (3{,}00m)^2}{8} = 5{,}02\ kNm < M_{cr}$$

Flecha imediata $\delta_{1,28}$:

$$\delta_{0,8} = \frac{5pl^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 2{,}26\ kN/m^2 \cdot (3000mm)^4}{384 \cdot 30.000\,N/mm^2 \cdot 125{,}97 \times 10^6\,mm^4/m} = \mathbf{0,63\ mm}$$

- Idade de 134 dias $\delta_{2,134}$:

O momento em serviço na idade de 134 dias, com aumento de $p_{2,134} = 3{,}34\ kPa$, é:

$$M_{s,134} = \frac{pl^2}{8} = \frac{7{,}00\ kN/m^2 \cdot (3{,}00m)^2}{8} = 7{,}875\ kNm > M_{cr}$$

Dessa forma, ocorreu fissuração e faz-se uma ponderação para levar em conta a flecha imediata $\delta_{1,28}$, dado por:

$$\mathrm{I_{ef}} = \mathrm{I_{cr}} + (\mathrm{I_{uncr}} - \mathrm{I_{cr}})\left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_s}}\right)^3 = 43{,}05 \times 10^6 + (126{,}03 \times 10^6 - 43{,}05 \times 10^6)\left(\frac{7{,}72}{7{,}875}\right)^3$$
$$= 121{,}63 \times 10^6\,mm^4/m$$

A inércia da seção não fissurada pode ser obtida pelas rigidezes:

$$\mathrm{I_{cr}} = \frac{\mathrm{R_{I,cr} R_{A,cr} - R_{B,cr}^2}}{\mathrm{R_{A,cr} E_c}} = \frac{1.135 \times 10^{10} \cdot 1.113 \times 10^6 - (1.058 \times 10^8)^2}{3.139 \times 10^6 \cdot 30000} = 43{,}05 \times 10^6\,mm^4/m$$

Flecha imediata $\delta_{2,134}$:

$$\delta_{2,134} = \frac{5pl^4}{384EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2{,}34\ \mathrm{kN/m^2} \cdot (3000\mathrm{mm})^4}{30.000\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 121{,}63 \times 10^6\,\mathrm{mm^4/m}} = \mathbf{0,66\ mm}$$

❖ **Parcela de flecha devido à fluência**

A parcela de flecha devido à retração é dada pela Equação 6.12, com um coeficiente multiplicador da flecha imediata. Sobre essa flecha imediata, observou-se que é a flecha imediata para a inércia da seção não-fissurada. Aplicou-se a superposição de efeitos para as várias parcelas de fluência devido aos carregamentos em diferentes idades.

Como desenvolvimento, apresenta-se os cálculos para a parcela de flecha devida à fluência da sobrecarga 01 aplicada aos 28 dias: $p_{1,28} = 2{,}26\ kPa$ até idade de 134 dias e 260 dias. Até a idade de 134 dias a laje mista teoricamente não apresenta fissuração e, posteriormente, passa a apresentar.

A parcela de flecha devido à fluência dada pela Equação 6.12 é:

$$\delta_{cc,134} = \delta_{1,28} \cdot \alpha_{cc}$$

$$\alpha_{cc} = \frac{E_c I_{ef}}{E_{ef,cc} I_{ef,cc}} - 1$$

O módulo efetivo de fluência para a sobrecarga 01, com coeficiente de fluência $\varphi(134{,}8) = 1{,}144$ é dado por:

$$E_{ef,cc} = \frac{E_c}{1 + \varphi_{cc}(t, 28)} = \frac{30.000}{1 + 1{,}144} = 13.993\ MPa$$

A inércia efetiva $I_{ef}$ e $I_{ef,cc}$ são calculadas com módulos $E_c$ e $E_{ef,cc}$, respectivamente, levando em conta a possibilidade de fissuração. A ponderação é feita com o momento de fissuração levando em conta as tensões de tração induzidas pela retração.

De maneira semelhante, calculado as inércias para $E_{ef,cc}$, obtém-se $I_{ef} = I_{uncr} = 126{,}3 \times 10^6\ mm^4/m$. Para $E_{ef,cc}$ tem-se $I_{ef} = 144{,}5 \times 10^6\ mm^4/m$. Portanto,

$$\alpha_{cc,p2\,(134)} = \frac{E_c I_{ef}}{E_{ef,cc} I_{ef,cc}} - 1 = 0{,}87 \quad \Rightarrow \quad \delta_{cc,134} = 0{,}63\ mm \cdot 0{,}87 = \mathbf{0{,}55\ mm}$$

Para a previsão da parcela de flecha devido à fluência até idade de 260 dias, o coeficiente de fluência é $\varphi(260{,}28) = 1{,}543$, conforme calculado e apresentado na Tabela 8.3. A laje nessa idade está fissurada ($M_s > M_{cr}$). Dessa maneira, para a idade de 260 dias, obtêm-se os momentos $M_{cr} = 6{,}25\ kNm$ e $M_s = 7{,}875\ kNm$.

O cálculo das inércias obtêm-se: $I_{ef} = 84{,}73 \times 10^6\ mm^4/m$ e $I_{ef,cc} = 96{,}73 \times 10^6\ mm^4/m$. Portanto a parcela de fluência na idade de 260 dias para a sobrecarga 01 aplicada aos 29 dias é dada por:

$$\alpha_{cc,p2\,(134)} = \frac{30000 \cdot 84{,}73 \times 10^6}{11797 \cdot 96{,}73 \times 10^6} - 1 = 1{,}23 \quad \Rightarrow \quad \delta_{cc,134} = 0{,}63\ mm \cdot 1{,}23 = \mathbf{0{,}78\ mm}$$

Dessa forma, fica demonstrado como calcular as parcelas de flechas devida à fluência.

❖ **Parcela de flecha devido à retração**

A parcela de flecha devida à retração $\delta_{sh}$ é determinado com base na integração de curvatura induzida pela retração $\kappa_{sh}$. A curvatura da seção é calculada para condição não-fissurada e fissurada, como se faz para análise das flechas imediatas. Se ocorrer fissuração, aplica-se ponderação. Como demonstração do procedimento, calcula-se a parcela de flecha devido à retração para a idade de 260 dias.

Conforme procedimento, a curvatura da seção não-fissurada $\kappa_{cs,uncr}$ e da seção fissurada $\kappa_{cs,cr}$, são obtidas por meio das Equações 6.19 e 6.20 apresentadas.

$$\kappa_{sh,uncr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,sh,uncr}}{R_{0,sh,uncr}} & \frac{R_{A,sh,uncr}}{R_{0,sh,uncr}} \end{bmatrix} E_{ef,sh} \begin{bmatrix} A_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,sh} - B_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,sh} \\ -B_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,sh} + I_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,sh} \end{bmatrix}$$

$$\kappa_{sh,cr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,sh,cr}}{R_{0,sh,cr}} & \frac{R_{A,sh,cr}}{R_{0,sh,cr}} \end{bmatrix} E_{ef,cs} \begin{bmatrix} A_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,sh} - B_{c,cr} \cdot \kappa_{r,sh} \\ -B_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,sh} + I_{c,cr} \cdot \kappa_{r,sh} \end{bmatrix}$$

Dada a retração $\varepsilon_{sh}(260,7) = -360 \cdot 10^{-6}$ e coeficiente de fluência $\varphi(160,8) = 2{,}207$, as rigidezes são calculadas para o módulo efetivo da retração $E_{ef,sh}$:

$$E_{ef,sh} = \frac{E_c}{1 + 0{,}55\varphi_{cc}} = \frac{30.000}{1 + 0{,}55 \cdot 2{,}207} = 13.551\ MPa$$

Obtêm-se as deformações de retração de referência $\varepsilon_{r,sh,260}$ e curvatura $\kappa_{r,sh,260}$:

$$\varepsilon_{r,sh,260} = \frac{(125 - 125) \cdot 1{,}2 + 125 \cdot 0{,}2}{125} \cdot -360 \cdot 10^{-6} = -72 \cdot 10^{-6}\ mm/mm$$

$$\kappa_{r,sh,260} = \frac{(\eta_{t,k} - \eta_{b,k})}{h} \varepsilon_{sh,k} = \frac{(1{,}2 - 0{,}2)}{125} \cdot -360 \cdot 10^{-6} = -2{,}88 \cdot 10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$$

Calculando-se as parcelas:

$$\begin{bmatrix} f_{cs1} \\ f_{cs2} \end{bmatrix} = E_{ef,cs} \begin{bmatrix} A_c \varepsilon_{r,cs} - B_c \kappa_{r,cs} \\ -B_c \varepsilon_{r,cs} + I_c \kappa_{r,cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -374.661 \\ -31.794.832 \end{bmatrix} \text{N}$$

A tensão de tração induzida pela retração é $\sigma_{cs} = 0{,}65$ MPa e o momento de fissuração correspondente é $M_{cr,sh(260)} = 6{,}25\ kNm$. O momento em serviço é de $M_{s,260} = 7{,}875\ kNm$.

Dessa forma, fica definido o coeficiente $\gamma_{sh}$ para a ponderação:

$$\gamma_{cs} = \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 = \left(\frac{6{,}25}{7{,}875}\right)^2 = 0{,}63 \leq 1$$

$$\kappa_{cs} = (1 - \gamma_{cs}) \cdot \kappa_{cs,cr} + \gamma_{cs} \cdot \kappa_{cs,uncr} \ \Rightarrow\ \kappa_{cs} = 0{,}37 \cdot \kappa_{cs,cr} + 0{,}63 \cdot \kappa_{cs,uncr}$$

A Tabela 8.7 apresenta um resumo dos dados calculados para obtenção das curvaturas.

Tabela 8.7 – Dados para cálculo da parcela de flecha devido à retração na idade de 260 dias

| Condição não-fissurada | Condição fissurada |
|---|---|
| $y_{u,sh,r} = 68{,}62$ mm | $y_{c,sh,r} = 84{,}46$ mm |
| $R_{A,cs,uncr} = 1537{,}6 \times 10^6$ N | $R_{A,cs,cr} = 766{,}4 \times 10^6$ N |
| $R_{B,cs,uncr} = -1042{,}7 \times 10^8$ Nmm | $R_{B,cs,cr} = -647{,}3 \times 10^8$ Nmm |
| $R_{0,cs,uncr} = 3032{,}2 \cdot 10^{18}$ N²mm² | $R_{0,cs,cr} = 815{,}2 \cdot 10^{18}$ N²mm² |
| $A_{c,uncr} = 97.454{,}4$ mm² | $A_{c,cr} = 40.543{,}8$ m² |
| $B_{c,uncr} = -7.163.691$ mm³ | $B_{c,cr} = -4.246.078$ mm³ |
| $I_{c,uncr,r} = 635{,}6 \times 10^6$ mm⁴ | $I_{c,cr,r} = 450{,}2 \times 10^6$ mm⁴ |

Fonte: Autor (2019)

$$\kappa_{cs,uncr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,cs,uncr}}{R_{0,cs,uncr}} & \frac{R_{A,cs,uncr}}{R_{0,cs,uncr}} \end{bmatrix} E_{ef,cs} \begin{bmatrix} A_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,cs} - B_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,cs} \\ -B_{c,uncr} \cdot \varepsilon_{r,cs} + I_{c,uncr} \cdot \kappa_{r,cs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1042{,}7 \times 10^8}{3032{,}2 \cdot 10^{18}} & \frac{1537{,}6 \times 10^6}{3032{,}2 \cdot 10^{18}} \end{bmatrix} \cdot 13.551 \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 97.454{,}4 \cdot (-72 \cdot 10^{-6}) - (-7.163.691) \cdot (-2{,}88 \cdot 10^{-6}) \\ -(-7.163.691) \cdot -72 \cdot 10^{-6} + 635{,}6 \times 10^6 \cdot (-2{,}88 \cdot 10^{-6}) \end{bmatrix}$$

$$= -3{,}24 \cdot 10^{-6}\ mm^{-1}$$

$$\kappa_{cs,cr} = \begin{bmatrix} \frac{R_{B,cs,cr}}{R_{0,cs,cr}} & \frac{R_{A,cs,cr}}{R_{0,cs,cr}} \end{bmatrix} E_{ef,cs} \begin{bmatrix} A_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,cs} - B_{c,cr} \cdot \kappa_{r,cs} \\ -B_{c,cr} \cdot \varepsilon_{r,cs} + I_{c,cr} \cdot \kappa_{r,cs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-647{,}3 \times 10^8}{815{,}2 \cdot 10^{18}} & \frac{766{,}4 \times 10^6}{815{,}2 \cdot 10^{18}} \end{bmatrix} \cdot 13.551 \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 40.543{,}8 \cdot (-72 \cdot 10^{-6}) - (-278.514) \cdot (-2{,}88 \cdot 10^{-6}) \\ -(-278.514) \cdot (-72 \cdot 10^{-6}) + 450{,}2 \times 10^6 \cdot (-2{,}88 \cdot 10^{-6}) \end{bmatrix}$$

$$= -4{,}12 \cdot 10^{-6} mm^{-1}$$

$$\kappa_{cs} = 0{,}37 \cdot \kappa_{cs,cr} + 0{,}63 \cdot \kappa_{cs,uncr} = 0{,}37 \cdot (-3{,}24 \cdot 10^{-6}) + 0{,}63 \cdot (-4{,}12 \cdot 10^{-6}\ )$$

$$= -3{,}56 \cdot 10^{-6}\ mm^{-1}$$

Portanto, a flecha devido à retração na idade de 260 dias é:

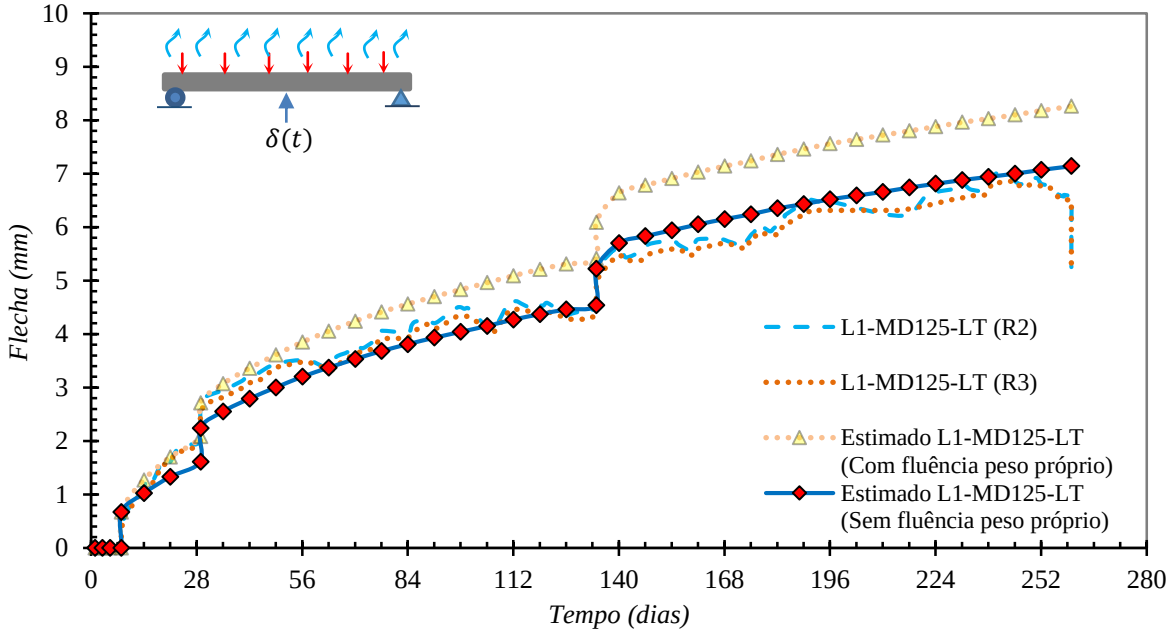
$$\delta_{sh(260)} = \frac{\kappa_{cs} \cdot L^2}{8} = \frac{3{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot 3000^2}{8} = \mathbf{4{,}00\ mm}$$

- **Flechas totais**

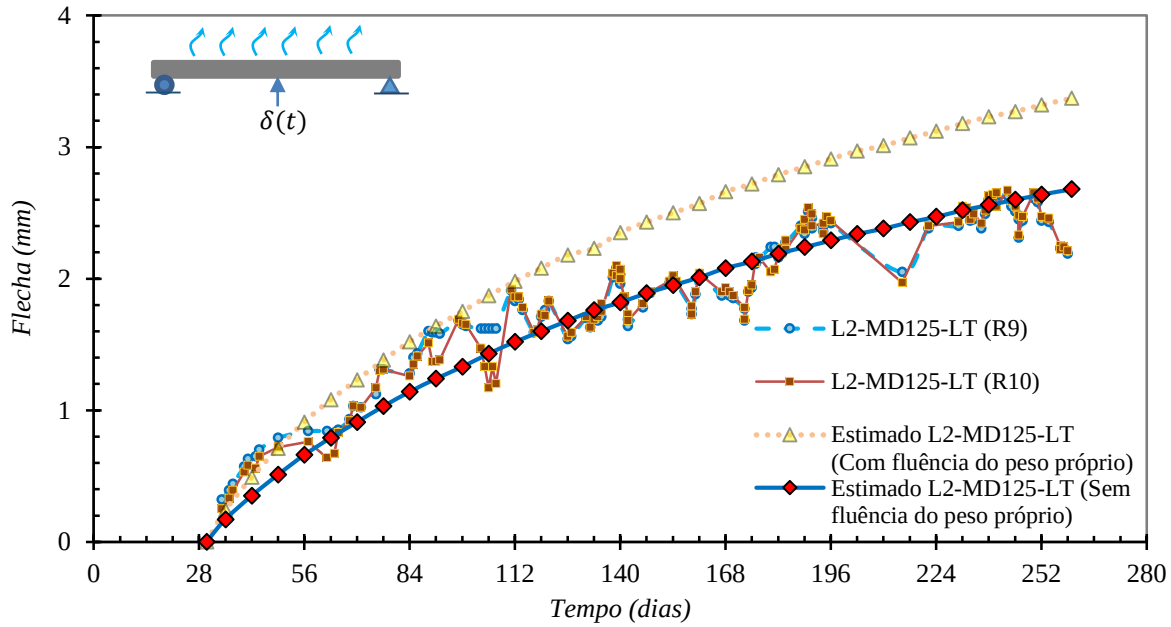
Ao realizar os cálculos de todas as parcelas de flechas imediatas e diferidas (retração e fluência) ao longo do tempo de ensaio de 260 dias, montou-se o gráfico da evolução das flechas teóricas comparativamente às flechas experimentais. O roteiro de cálculo foi desenvolvido em planilhas eletrônicas, seguindo o procedimento apresentado.

A Figura 8.4 (a) apresenta os resultados da análise teórica do método simplificado de Ranzi (2017) – AS/NZS 2327 (2017) para a laje mista *L1-MD125-LT* e a Figura 8.4 (b) os resultados para a laje mista *L2-MD125-LT*.

Figura 8.4 – Resultados das previsões das flechas para lajes mistas da literatura pelo método simplificado de Ranzi (2015)




(a) Laje mista *L1-MD-125-LT*




(b) Laje mista *L2-MD-125-LT*

Fonte: Autor (2019)

Com base nos resultados, observou-se que ao se desprezar a parcela de flecha devida ao peso próprio, a curva teórica teve resultado ainda mais acurado perante à experimental. Em termos gerais, o método simplificado de Ranzi (2017) com as considerações apresentadas apresentou excelentes resultados.

A discussão sobre a consideração da parcela de fluência do peso próprio da laje mista engloba a questão da efetividade do escoramento utilizado e da fôrma isolada absorver os esforços durante a concretagem. Uma parcela do carregamento é de se esperar que a fôrma de aço isolada absorva e que não influencie na parcela de fluência pelo fato do concreto não receber essa mesma parcela. A laje L2-MD125-LT como foi concretado ao chão e posteriormente colocada em posição de ensaio, esperava-se comportamento de menor influência da fluência devido ao peso próprio, como confirmado.

A partir da Tabela 7.6 do item 7.3.4, compararam-se os resultados em termos quantitativos, como mostra a Tabela 8.8, tomando como média os valores aferidos nos relógios comparadores, e os teórico sem levar em conta a parcela de fluência devida ao peso próprio.

Tabela 8.8 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT*

| Medida | Flechas totais (mm) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 dias | | 28 dias | | 134 dias | | 240 dias | 260 dias | ∞ |
| Atividade *(*)* | Antes *R.E.* *(a)* | Após *R.E.* *(b)* | Antes *SC1* *(c)* | Após *SC1* *(d)* | Antes *SC2* *(e)* | Após *SC2* *(f)* | Máx. *(g)* | Fim Ensaio *(h)* | Tempo infinito |
| Experimental | 0 | 0,36 | 2,00 | 2,59 | 4,40 | 5,09 | **6,88** | 6,55 | - |
| Estimada | 0 | 0,67 | 1,61 | 2,24 | 4,54 | 5,22 | 6,95 | **7,14** | ***10,22*** |
| **Razão Estim./Exp.** | - | 1,861 | 0,805 | 0,865 | 1,032 | 1,026 | 1,010 | 1,09 | - |

(*) Atividades: *(a) Antes da retirada do escoramento central (R.E.);(b)Após retirada do escoramento; (c) Antes do primeiro carregamento (sobrecarga SC1);(d) Após o primeiro carregamento (SC1); (e) Antes da aplicação do segundo carregamento (SC2); (f) Após aplicação do segundo carregamento (SC2); (g) Valor máximo obtido no ensaio; (h) Fim do ensaio aos 260 dias;*
Fonte: Autor (2019)

As flechas teóricas diferidas no tempo para idade de 260 dias foram iguais a 5,16 mm e as imediatas iguais a 1,98 mm. Dessa forma, teoricamente as flechas diferidas foram 2,60 vezes maior para a idade avaliada. Em um tempo infinito, 10.000 dias, apresenta flecha máxima total 10,22 mm e diferida 4,16 vezes as flechas imediatas devido aos carregamentos aplicados.

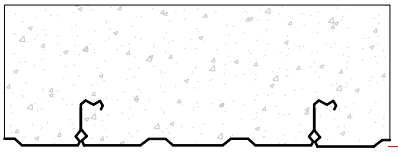
### *8.4.5 Resultados da abordagem para outras lajes mistas da literatura*

A partir da abordagem desenvolvida, com suas considerações e simplificações, ampliou-se a análise das flechas diferidas no tempo para duas lajes mistas de Al-Deen, Ranzi e Uy (2015), dez lajes mistas de Gholamhoseini (2014) e quatro de Wang et al. (2016). Esses trabalhos trouxeram as características das fôrmas empregadas, carregamentos e condições ambientais e características do concreto, como módulo de elasticidade e resistência à flexão. A Tabela 8.9 resume as características das lajes dos autores e a Figura 8.5 os resultados das flechas ao longo do tempo.

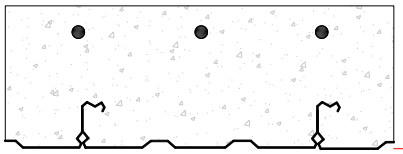
Tabela 8.9 – Resumo das características das lajes mistas da literatura analisadas

**Al-Deen, Ranzi e Uy (2015)**

*Laje Mista CS 1*




*Laje Mista CS 2*




Fôrma do tipo:
- Clip-Pan

*Condeck HP 55*
- Espessura: 0,75 mm
- Área de aço: 1.211 $mm^2/m$ ($E_s = 200\ GPa$)
- Inércia da fôrma: 488.000 $mm^4/m$
- Altura do centróide: 15,3mm

Concreto normal:
$f_{c28} = 27{,}30\ MPa$
$E_c = 26{,}40\ MPa$
$f_{ct,f} = 3{,}13\ MPa$

Geometria:
- Vão: 3000 mm
- Altura total: 180 mm

Carregamento:
- Apenas peso próprio

$p = 4{,}40\ kPa$

Duração:
- 239 dias

**CS2:** *Armadura superior com 1000 mm² a 121 mm da borda inferior.*

**Gholamhoseini (2014)**

Fôrma:
- Trapezoidal *KF70*
- *Espessura: 0,75 mm*
- Área de aço: 1.100 $mm^2/m$
- Altura do centróide: 27,7 mm
- Inércia da fôrma: 584000 $mm^4/m$ ($E_s = 212\ GPa$)

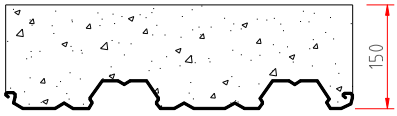
Concreto normal:
$f_{c28} = 28\ MPa$
$E_c = 30{,}725\ MPa$
$f_{ct,f} = 3{,}50\ MPa$

- Altura total: 150 mm

Peso próprio: $p = 3{,}00\ kPa$

Geometria:
- Vão: 3100 mm

| Lajes Mistas | Sobrecarga (kPa) (duração) |
|---|---|
| 1LT-70-0 | - (7 a 247d) |
| 2LT-70-3 | 3,40 (64 a 247d) |
| 3LT-70-3 | |
| 4LT-70-6 | 6,00 (64 a 247d) |
| 5LT-70-8 | 6,10 (64 a 197d) 7,90 (197 a 247d) |




Fôrma:
- Trapezoidal *KF40*
- *Espessura: 0,75 mm*
- Área de aço: 1.040 $mm^2/m$
- Altura do centróide: 14 mm
- Inércia da fôrma: 269.000 $mm^4/m$ ($E_s = 193\ GPa$)

Concreto normal:
$f_{c28} = 35{,}50\ MPa$
$E_c = 28{,}20\ MPa$
$f_{ct,f} = 3{,}80\ MPa$

- Altura total: 150 mm

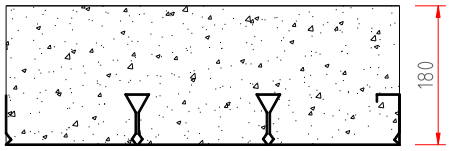
Peso próprio: $p = 3{,}20\ kPa$

Geometria:
Vão: 3100 mm

| | |
|---|---|
| 6-LT-40-0 | - (7 a 244d) |
| 7-LT-40-3 | 3,40 (28 a 251d) |
| 8-LT-40-3 | |
| 9-LT-40-6 | |
| 10LT-40-6 | 6,40 (28 a 251d) |

**Wang et al. (2016)**

Peso próprio: $p = 2{,}90\ kPa$
- Altura total: 120 mm




Peso próprio: $p = 4{,}30\ kPa$
- Altura total: 180 mm

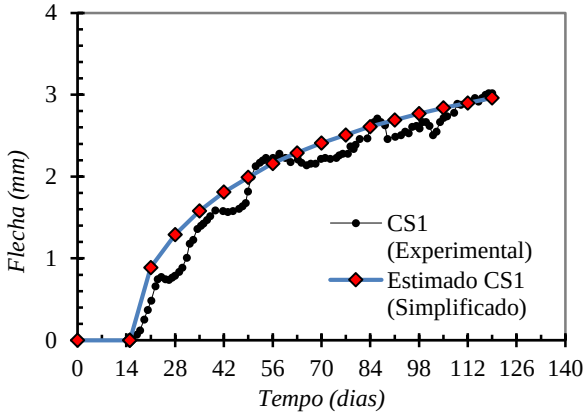
Fôrma:
- Reentrante DW65-510-170
- Espessura: 1,20 mm
- Área de aço: 2353 $mm^2/m$
- Altura do centróide: 21 mm
- Inércia da fôrma: 1.520.000 $mm^4/m$ ($E_s = 199{,}7\ GPa$)

Concreto de agregado reciclado:
$f_{c28} = 29{,}00\ MPa$
$E_c = 26{,}30\ MPa$
$f_{ct,f} = 3{,}10\ MPa$

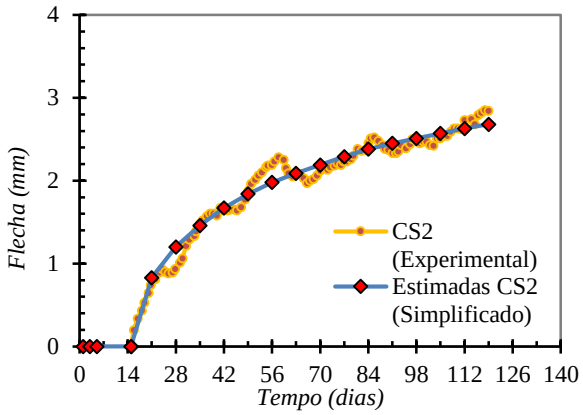
| | |
|---|---|
| CS-120-100%-SH | - (7 a 268 d) |
| CS-120-100% | 8,80 (28 a 268d) |
| CS-180-100%-SH | - (7 a 268 d) |
| CS-180-100% | 17,60 (28 a 268d) |

Fonte: Autor (2019)

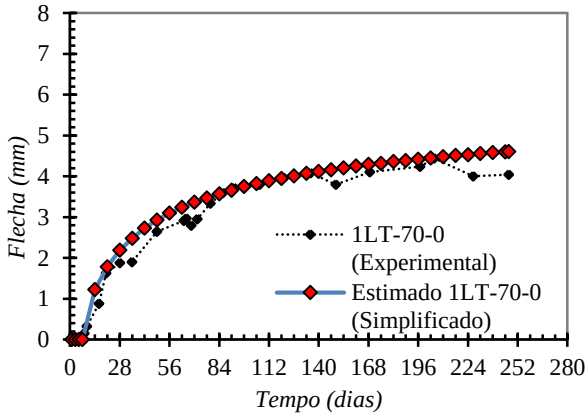
Figura 8.5 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método simplificado de Ranzi (2017)



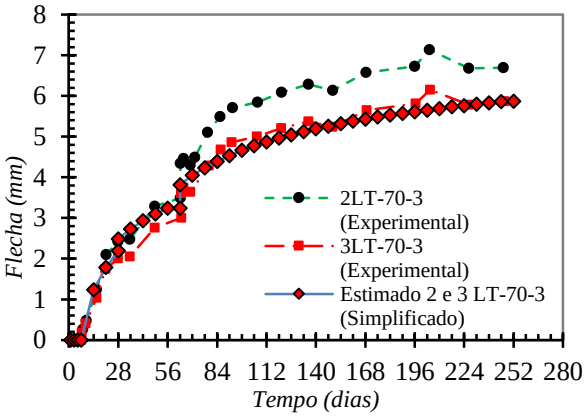

*(a) CS 1*



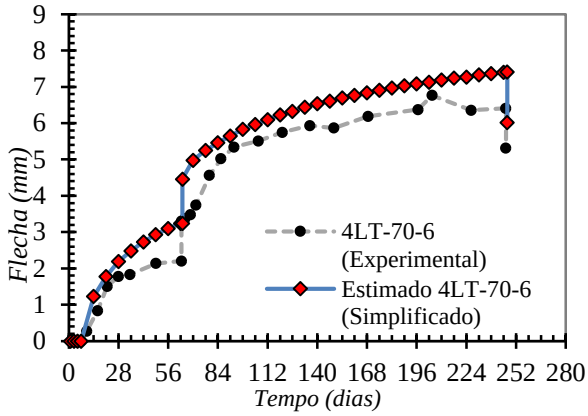

*(b) CS 2*



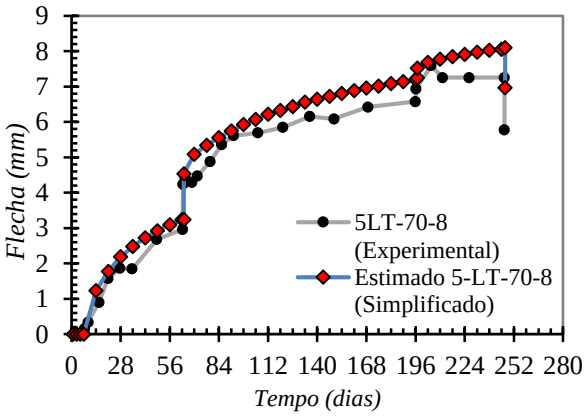

*(c) 1LT-70-0*



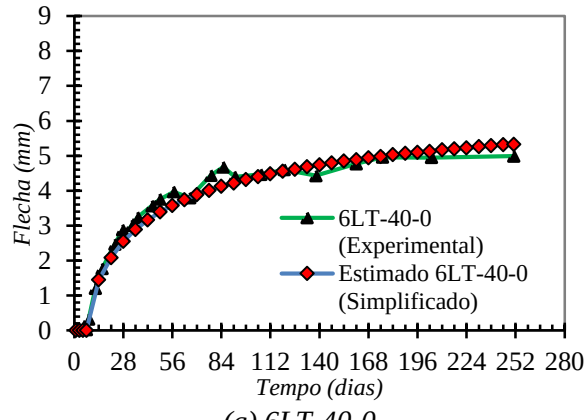

*(d) 2 e 3 LT-70-3*



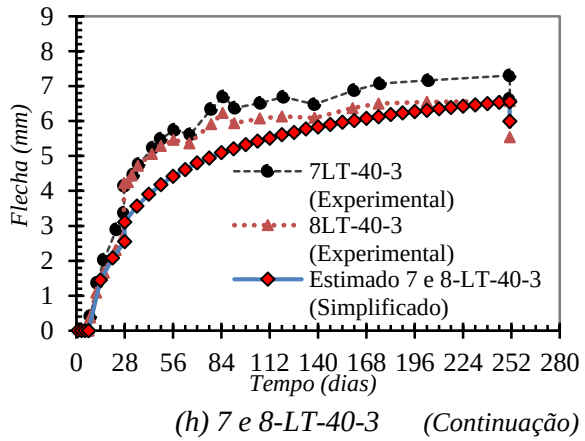

*(e) 4LT-70-6*




*(f) 5LT-70-8*

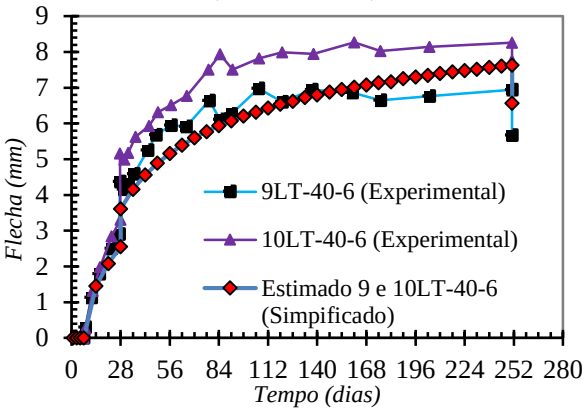



*(g) 6LT-40-0*

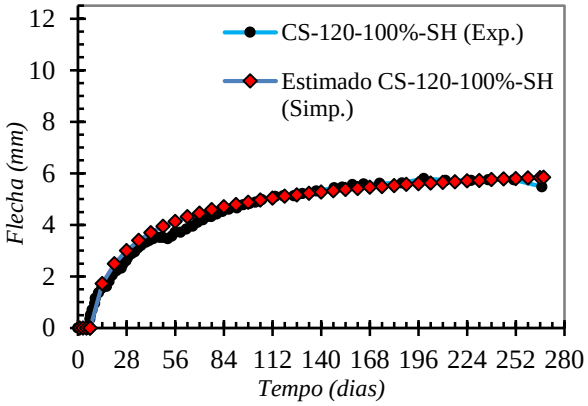



*(h) 7 e 8-LT-40-3* *(Continuação)*

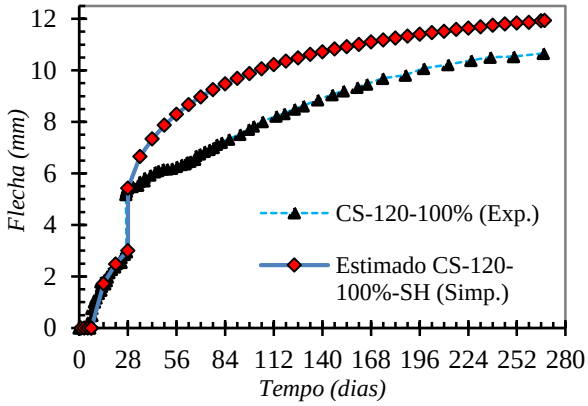
Figura 8.5 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método simplificado de Ranzi (2017) *(Continuação)*



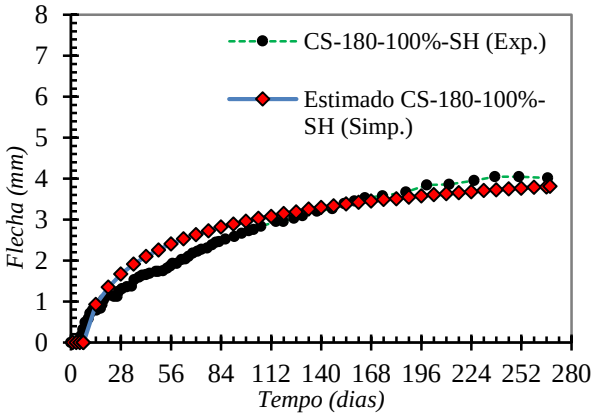

*(i) 9 e 10-LT-40-6*



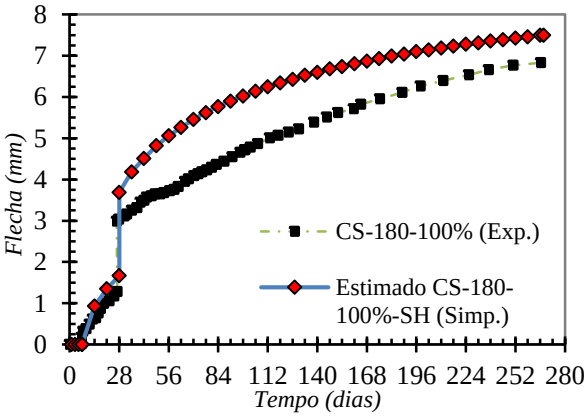

*(j) CS-120-100%-SH*




*(k) CS-120-100%*




*(l) CS-180-100%-SH*




*(m) CS-180-100%*

Fonte: Autor (2019)

Adotando as mesmas considerações de cálculo e utilizando, no entanto, a norma australiana AS 3600 (2008) na estimativa dos coeficientes de fluência e retração, cuja formulação é apresentada no Apêndice A2 foram obtidas a evolução das flechas para as lajes mistas de outros ensaios experimentais presentes na literatura.

De maneira geral, o método simplificado estimou com acurácia os resultados experimentais das lajes mistas de diferentes tipos de fôrmas.

## 8.5 Avaliação pela abordagem refinada com perfil de retração proposto por Gholamhoseini (2014)

Para a aplicação do método dito refinado na previsão das flechas das lajes mistas, foi realizada a discretização da seção e vão e obtenção das flechas por meio da integração das curvaturas das seções, utilizando diferenças finitas, como exposto no item 5.3.2.

O perfil de retração adotado foi o perfil de retração parabólico proposto por Gholamhoseini (2014), como apresentado no item 4.3.2. A consideração da espessura fictícia também foi feita conforme proposta do autor, mas utilizando as previsões de retração e coeficiente de fluência conforme prescrições da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014).

O cálculo das parcelas de rigidez usadas no método para análise da seção transversal, com obtenção da deformação de referência $\varepsilon_r$ e curvatura $\kappa$, seguem a disposição do item 5.4. A discretização da seção foi a mesma usada para o método simplificado de Ranzi (2017), apresentado no item anterior.

Dessa forma, apresentam-se os principais passos para o cálculo das flechas: imediatas e diferidas no tempo.

- **Análise da resposta imediata**

As curvaturas das seções devidas aos carregamentos aplicados são calculadas e integradas ao longo do comprimento da peça. Na ocorrência de fissuração da peça ($M_s > M_{cr}$), utiliza-se o método apresentado no Eurocode 2 (2004) na ponderação da curvatura, apresentado no item 4.4.2. Como exemplo será demonstrada a resposta da seção de meio-vão para o carregamento de peso próprio da laje mista *L1-MD125-LT* na idade de 8 dias ( $p_{0,8} = 2{,}40\ kPa$).

A deformação de referência $\varepsilon_{r,0}$ e a curvatura $\kappa_0$, tomadas com base no eixo de referência adotado como sendo a face inferior da laje mista, para combinação de força normal externa $N_{e,0}$ e momento fletor externo $M_{e,0}$ é dada por:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{r,0}\\ \kappa_0\end{bmatrix} = \frac{1}{R_{A,0}R_{I,0} - R_{B.0}^2}\begin{bmatrix}R_{I,0} & R_{B,0}\\ R_{B,0} & R_{A,0}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}N_{e,0}\\ M_{e,0}\end{bmatrix}$$

- Seção não-fissurada

Para o carregamento $p_{0,8} = 2{,}40$ kPa, a laje mista está sujeita a $N_{e,0} = 0$ N e $M_{e,0} = 2{,}70 \times 10^6$ Nmm. As rigidezes são calculadas da mesma forma apresentada no item 8.4. Como a seção não apresenta fissura para o carregamento na idade de 8 dias $M_s = 2{,}70\ kNm < M_{cr}$, adota-se as rigidezes da seção não-fissurada.

$$R_{A,0} = 3.139 \times 10^6\ \text{N};\ R_{B,0} = 2.219 \times 10^8\ \text{Nmm};\ \ R_{I,0} = 1.948 \times 10^{10}\text{Nmm}^2$$

Dessa forma,

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{r,0}\\ \kappa_0\end{bmatrix}_{uncr} = \frac{1}{3.139\times10^{6}\cdot 1.948\times10^{10} - (2.219\times10^{8})^2}\begin{bmatrix}1.948\times10^{10} & 2.219\times10^{8}\\ 2.219\times10^{8} & 3.139\times10^{6}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0{,}00\\ 2{,}70\times10^{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50{,}4\times10^{-6}\ \text{mm/mm}\\ 0{,}713\times10^{-6}\ \text{mm}^{-1}\end{bmatrix}$$

Obtida a deformação de referência $\varepsilon_{r,0}$, a tensão é dada por $\sigma_{c,inf} = \varepsilon_{r,0}E_c = 50{,}4\times10^{-6}\cdot 30.000\ \text{N/mm}^2 = 1{,}50\ \text{MPa}$ e a deformação do concreto no topo da laje é $\varepsilon_{0,sup} = \varepsilon_r - y\cdot\kappa_0 = 50{,}4\times10^{-6} - 125\cdot 0{,}713\times10^{-6} = -38{,}6\times10^{-6}$ e a deformação na fibra superior do concreto correspondente a $\sigma_{c,sup} = -1{,}16\ MPa$. A deformação na fôrma de aço calculada é $\sigma_{Sd} = 6{,}28\ \text{MPa}$.

- Seção fissurada

Se ocorresse a fissuração, o cálculo das propriedades e deformações da seção fissurada toma como base apenas as áreas comprimidas, como simplificação. Para o mesmo carregamento, tem-se ($y_{cr(0)} = 95{,}07\ \text{mm}$).

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{r,0}\\ \kappa_0\end{bmatrix}_{cr} = \frac{1}{1.113{,}3\times10^{6}\cdot 1.135\times10^{10} - (1.058\times10^{8})^2}\begin{bmatrix}1.135\times10^{10} & 1.058{,}4\times10^{8}\\ 1.058\times10^{8} & 1.113{,}3\times10^{6}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0{,}00\\ 2{,}70\times10^{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}198{,}7\times10^{-6}\ \text{mm/mm}\\ 2{,}09\times10^{-6}\ \text{mm}^{-1}\end{bmatrix}$$

Com correspondentes tensões nos materiais: na fibra inferior do concreto $\sigma_{c,inf} = \varepsilon_{r,0}E_c = 198{,}7\times10^{-6}\cdot 30.000\ \text{N/mm}^2 = 5{,}96\ \text{MPa}$ e deformação do concreto no topo da laje (fibra superior) é $\varepsilon_{0,sup} = \varepsilon_r - y\cdot\kappa_0 = 198{,}7\times10^{-6} - 125\cdot 2{,}09\times10^{-6} = -62{,}6\times10^{-6}$ e tensão na fibra superior do concreto correspondente a $\sigma_{c,sup} = -1{,}88\ MPa$. A tensão na fôrma de aço calculada é $\sigma_{Sd} = 28{,}8\ \text{MPa}$.

A curvatura para a seção do meio vão corresponde a $\kappa_{0,unc} = 0{,}713\times10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$ (não-fissurada) e $\kappa_{0,cr} = 2{,}09\times10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$ (seção fissurada). Ao realizar o cálculo das curvaturas para todas as seções discretizadas, obtém-se os dados para a integração pelas diferenças finitas.

Caso ocorra fissuração na seção, calcula-se as rigidezes da seção para a seção fissurada e aplica-se a ponderação, obtendo uma curvatura equivalente:

$$\kappa = \zeta\kappa_{cr} + (1-\zeta)\kappa_{uncr},\ \ onde\ \zeta = 1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2$$

Dessa maneira, fica demonstrado como calcular as curvaturas para análise da resposta imediata.

❖ **Análise da resposta de longa duração**

A análise da resposta em uma idade t utiliza a formulação do AEMM (Método do Módulo Efetivo Ajustado à Idade), com coeficiente de envelhecimento adotado conforme proposta de Gholamhoseini (2014) de $\chi_i(t,t_o) = 0{,}65$. Toda a análise da seção é tomada com base no módulo efetivo do concreto $\bar{E}_{e(i),t}$.

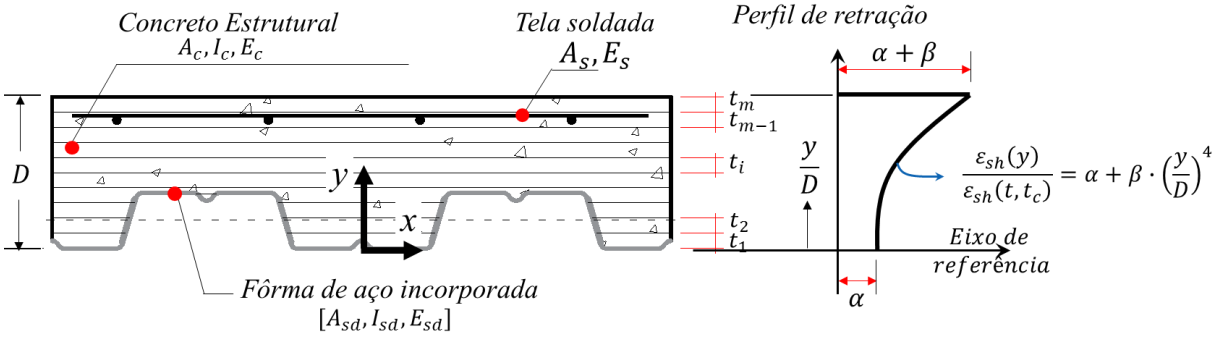
A retração $\varepsilon_{sh,t}$ e o coeficiente de fluência $\varphi_i(t,t_o)$ são calculados com base em uma espessura fictícia única $t_h{}^*$ proposta por Gholamhoseini (2014). Aplicada à laje *L1-MD125-L*, com área de concreto $A_g = 97.454{,}4\ mm^2$ por largura unitária $u_e = 1000\ mm$:

$$t_{ave} = \frac{A_g}{u_e} = 97{,}454\ mm \Rightarrow t_h{}^* = 50 + \frac{t_{ave}}{2} = 98{,}7mm$$

Utilizando as prescrições da norma ABNT NBR 6118 (2014) com base na espessura fictícia $t_h{}^* = 98{,}7\ mm$ foram calculados os coeficiente de fluência e deformação de retração para o método refinado com perfil parabólico, de maneira semelhante à apresentada na Tabela 8.3.

Como observações verificadas da adoção do perfil de retração parabólico de Gholamhoseini (2014) na adequação aos resultados experimentais, observa-se o seguinte perfil que descreve o gradiente de retração, disposto na Figura 8.6.

Figura 8.6 – Sistema de eixo de referência e gradiente de retração parabólico de Gholamhoseini(2014)




Fonte: Autor (2019)

Os valores de $\alpha$ e $\beta$ foram adotados conforme recomendações de Gholamhoseini (2014). O valor de $\alpha = 0{,}20$ foi adotado e para o valor de $\beta$ uma adaptação foi realizada à proposta inicial, tomando para a proposta o valor de $\beta = 1{,}7 - 2{,}25 \cdot r_d$. Onde $r_d$ é um fator de forma dado por $r_d$ , definido como pela razão entre a altura total da laje $h_s$ e a altura do perfil $h_f$.

Para a laje *MD125-LT*, foram definidos os valores de $\alpha = 0{,}20$ e $\beta = 0{,}80$ que descrevem o perfil de retração parabólico. Dessa maneira, a partir da retração estimada, a parte inferior da laje possui uma retração de $0{,}20 \cdot \varepsilon_{sh,t}$ e na parte superior uma retração igual a $1{,}00 \cdot \varepsilon_{sh,t}$.

Dessa maneira, para exemplificação apresentam-se os principais cálculos para a idade $t = 260$ dias.

A retração obtida é de $\varepsilon_{sh(260,7)} = -400 \times 10^{-6}$ e os coeficiente de fluência $\varphi_0(260{,}8) = 2{,}734$ (carregamento de peso próprio), $\varphi_1(260{,}28) = 1{,}766$ (sobrecarga 1) e $\varphi_2(260{,}134) = 0{,}724$ (sobrecarga 2).

Calculam-se as parcelas dos vetores devidas à fluência $\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}}$ para cada parcela do carregamento. Demonstra-se aqui os cálculos para a parcela devido apenas ao carregamento de peso próprio. Calculam-se as parcelas devidas à retração com o vetor $\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}$.

Desse modo, para avaliação da retração e da fluência devido ao peso próprio:

$$\bar{E}_{e(i),t} = \frac{E_{c(i),0}}{1 + \chi_i(t,t_o)\varphi_i(t,t_o)} = \frac{30000\ \mathrm{N/mm^2}}{1 + 0{,}65 \cdot \mathbf{2{,}734}} = 10.803\ \mathrm{N/mm^2}$$

As deformações e curvaturas são obtidas incluindo as parcelas devidas à retração e fluência, conforme item 5.4:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{r,t} \\ \kappa_t \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{A,t}R_{I,t} - R_{B.t}^2} \begin{bmatrix} R_{I,t} & R_{B,t} \\ R_{B,t} & R_{A,t} \end{bmatrix} \times \left(\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}\right)$$

Onde:

$$\boldsymbol{r}_{e,t} = \begin{bmatrix} N_{e,t} \\ M_{e,t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \bar{F}_{e(i),0}\ E_{c(i),0} \begin{bmatrix} A_{c(i)}\varepsilon_{r,0} - B_{c(i)}\kappa_0 \\ -B_{c(i)}\varepsilon_{r,0} + I_{c(i)}\kappa_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \begin{bmatrix} A_{c(i)} \\ -B_{c(i)} \end{bmatrix} \bar{E}_{e(i),t}\ \varepsilon_{sh(i),t}$$

O carregamento total na seção para a idade de 260 dias deve ser avaliado para observar a ocorrência da fissuração. Desse modo, como já observado no item referente aos cálculos simplificados de Ranzi (2017), para essa idade, a laje está sob fissuração. Devem ser calculadas as parcelas referentes às seções não-fissuradas e fissuradas para posterior ponderação.

❖ **Seção não fissurada**

Os cálculos para obtenção das rigidezes são semelhantes aos já apresentados, tomando agora $\bar{E}_{e(0),260} = 10.803\ MPa$.

➢ Parcela relativa à fluência

A parcela do vetor $\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}}$ leva em conta o fator de fluência ajustado à idade $\bar{F}_{e(i),0}$, para a fluência devido ao peso próprio é:

$$\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{e(i),0}} = \varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathrm{t_o})\frac{[\chi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathrm{t_o})-1]}{[1+\chi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathrm{t_o})\varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathrm{t_o})]} = 2{,}734\frac{[0{,}65-1]}{[1+0{,}65\cdot 2{,}734]} = -0{,}345$$

Essa parcela toma como base a resposta imediata da seção não-fissurada ($\varepsilon_{r,0,uncr}$ e $\kappa_{0,uncr}$) (calculada anteriormente), para a seção do meio do vão:

$$\mathrm{f}_{\mathrm{cc,260,uncr}} = -0{,}345\cdot 30000\begin{bmatrix} 97.454{,}4\cdot 50{,}4\times 10^{-6} - (7.163{,}7\times 10^{-6})\cdot 0{,}7125\times 10^{-6} \\ 7.163{,}7\times 10^{-6}\cdot 50{,}4\times 10^{-6} + 635{,}6\times 10^{-6}\cdot 0{,}7125\times 10^{-6}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.011{,}7\ \mathrm{N} \\ -950.712{,}7\ \mathrm{Nmm}\end{bmatrix}$$

➢ Parcela relativa à retração

A parcela do vetor $\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}$ é calculada com base no perfil parabólico com base nas camadas discretizadas. A Tabela 8.10 apresenta a área, posição e deformação correspondente para a idade analisada de 260 dias.

Tabela 8.10 – Área, posição e deformação de retração para as camadas discretizadas do concreto

| Camada | $A_{c(i)}$(mm²) | $y_{c(i)}$ (mm) | $\varepsilon_{sh(i)}$ | $A_{c(i)}\varepsilon_{sh(i)}$ | $A_{c(i)}y_{c(i)}\varepsilon_{sh(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5.327,20 | 6,25 | $-8{,}000\times 10^{-6}$ | -0,426 | -2,664 |
| **2** | 6.037,47 | 18,75 | $-8{,}016\times 10^{-6}$ | -0,484 | -9,075 |
| **3** | 6.377,90 | 31,25 | $-8{,}125\times 10^{-6}$ | -0,518 | -16,194 |
| **4** | 6.697,27 | 43,75 | $-8{,}480\times 10^{-6}$ | -0,568 | -24,847 |
| **5** | 10.514,65 | 56,25 | $-9{,}312\times 10^{-6}$ | -0,979 | -55,077 |
| **6** | 12.500 | 68,75 | $-10{,}928\times 10^{-6}$ | -1,366 | -93,914 |
| **7** | 12.500 | 81,25 | $-13{,}712\times 10^{-6}$ | -1,714 | -139,264 |
| **8** | 12.500 | 93,75 | $-18{,}125\times 10^{-6}$ | -2,266 | -212,402 |
| **9** | 12.500 | 106,25 | $-24{,}704\times 10^{-6}$ | -3,088 | -328,102 |
| **10** | 12.500 | 118,75 | $-34{,}064\times 10^{-6}$ | -4,258 | -505,639 |
| $\sum$ | 97.454,37 | | | -15,667 | -1387,178 |

Fonte: Autor (2019)

$$\mathbf{f_{sh,260,uncr}} = \sum_{i=1}^{m_c}\begin{bmatrix} A_{c(i)} \\ -B_{c(i)}\end{bmatrix}\bar{E}_{e(i),t}\ \varepsilon_{sh(i),t} = 10.803\ \cdot\begin{bmatrix} -15{,}667 \\ -(1387{,}178)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -169.245\ \mathrm{N} \\ 14.985.182\ \mathrm{Nmm}\end{bmatrix}$$

❖ **Seção fissurada**

As considerações para seção fissurada são iguais à seção não fissurada, no entanto, leva-se em conta apenas a porção de concreto comprimida. Para a laje analisada na idade de 260 dias com $\bar{E}_{e(0),260} = 10.803\ MPa$, as parcelas de contribuição da fluência e da retração são:

➢ Parcela relativa à fluência

Toma como base a resposta imediata da seção fissurada ($\varepsilon_{r,0,cr}$ e $\kappa_{0,cr}$) (calculada anteriormente), para a seção do meio do vão:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \bar{F}_{e(i),0}\, E_{c(i),0} \begin{bmatrix} A_{c(i)}\varepsilon_{r,0} - B_{c(i)}\kappa_0 \\ -B_{c(i)}\varepsilon_{r,0} + I_{c(i)}\kappa_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{cc,260,cr}} = -0{,}345 \cdot 30000 \begin{bmatrix} 29933{,}4 \cdot 198{,}7 \times 10^{-6} - (3.293{,}7 \times 10^{-6}) \cdot 2{,}09 \times 10^{-6} \\ 3.293{,}7 \times 10^{-6} \cdot (198{,}7 \times 10^{-6}) + (364{,}6 \times 10^{-6}) \cdot 2{,}09 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9680{,}7\ \mathrm{N} \\ -1.113.492\ \mathrm{Nmm} \end{bmatrix}$$

➢ Parcela relativa à retração

A parcela do vetor $\mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}$ é calculada com base no perfil parabólico com retração apenas nas camadas sob compressão, com base nas camadas discretizadas. A Tabela 8.11 apresenta a área, posição e deformação correspondente para a idade analisada de 260 dias. Para fibras abaixo da linha neutra apresentada pela resposta imediata $y_{\mathrm{cr(0)}} = 95{,}07$ mm, adota-se retração zero para levar em conta a região sob tração.

Tabela 8.11 – Dados para a parcela do vetor de retração para a seção fissurada

| Camada | $A_{c(i)}$(mm²) | $y_{c(i)}$ (mm) | $\varepsilon_{sh(i)}$ | $A_{c(i)}\varepsilon_{sh(i)}$ | $A_{c(i)}y_{c(i)}\varepsilon_{sh(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5.327,20 | 6,25 | - | - | - |
| **2** | 6.037,47 | 18,75 | - | - | - |
| **3** | 6.377,90 | 31,25 | - | - | - |
| **4** | 6.697,27 | 43,75 | - | - | - |
| **5** | 10.514,65 | 56,25 | - | - | - |
| **6** | 12.500 | 68,75 | - | - | - |
| **7** | 12.500 | 81,25 | - | - | - |
| **8** | **4.930** | **97,5** | $-19{,}845 \times 10^{-6}$ | -0,979 | -95,454 |
| **9** | 12.500 | 106,25 | $-24{,}704 \times 10^{-6}$ | -3,088 | -328,102 |
| **10** | 12.500 | 118,75 | $-34{,}064 \times 10^{-6}$ | -4,258 | -505,639 |
| $\sum$ | 97.454,37 | | | -8,325 | -929,196 |

Fonte: Autor (2019)

$$\mathbf{f}_{\mathbf{sh,t}} = \sum_{i=1}^{m_c} \begin{bmatrix} A_{c(i)} \\ -B_{c(i)} \end{bmatrix} \bar{E}_{e(i),t}\, \varepsilon_{sh(i),t} = 10.803 \cdot \begin{bmatrix} -8{,}325 \\ -(929{,}196) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -89.933\ \mathrm{N} \\ 10.037.762\ \mathrm{Nmm} \end{bmatrix}$$

❖ **Cálculo da curvatura total e deformação de referência**

➢ Seção não-fissurada

$$R_{A,260,uncr} = \sum_{i=1}^{m_c} A_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{A,s} + R_{A,sd} = 1.270 \times 10^6 \text{ N}$$

$$R_{B,260,uncr} = \sum_{i=1}^{m_c} B_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{B,s} + R_{B,sd} = 846 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

$$R_{I,260,uncr} = \sum_{i=1}^{m_c} I_{c(i)}\bar{E}_{e(i),t} + R_{I,s} + R_{I,sd} = 729{,}8 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

Portanto, o cálculo das curvaturas e da deformação de referência para a laje avaliada:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{r,t}\\ \kappa_t\end{bmatrix} = \frac{1}{R_{A,t}R_{I,t} - R_{B.t}^2}\begin{bmatrix}R_{I,t} & R_{B,t}\\ R_{B,t} & R_{A,t}\end{bmatrix} \times \left(\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1.270 \times 10^6 \cdot 729{,}8 \times 10^{10} - (846 \times 10^8)^2}\begin{bmatrix}729{,}8 \times 10^{10} & 846 \times 10^8\\ 846 \times 10^8 & 1.270 \times 10^6\end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix}0{,}00\\ 2{,}70 \times 10^6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2.011{,}7\\ -950.712{,}7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-169.245\\ 14.985.182\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}154{,}8 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}\\ 4{,}349 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}\end{bmatrix}$$

➢ Seção fissurada

De maneira similar, calculam-se as deformações para seção fissurada. Por simplificação, adota-se que a posição da linha neutra não mudou com tempo, sendo a mesma observada na análise imediata, como indicado por Gholamhoseini (2014).

$$R_{A,260} = 540{,}6 \times 10^6 \text{ N};\ R_{B,260} = 428 \times 10^8 \text{ Nmm};\quad R_{I,260} = 437{,}1 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

Portanto, o cálculo das curvaturas e da deformação de referência para a laje avaliada:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{r,t}\\ \kappa_t\end{bmatrix} = \frac{1}{R_{A,t}R_{I,t} - R_{B.t}^2}\begin{bmatrix}R_{I,t} & R_{B,t}\\ R_{B,t} & R_{A,t}\end{bmatrix} \times \left(\mathbf{r}_{\mathrm{e,t}} - \mathbf{f}_{\mathrm{cc,t}} + \mathbf{f}_{\mathrm{sh,t}}\right) =$$

$$= \frac{1}{540{,}6 \times 10^6 \cdot 437{,}1 \times 10^{10} - (428 \times 10^8)^2}\begin{bmatrix}437{,}1 \times 10^{10} & 428 \times 10^8\\ 428 \times 10^8 & 540{,}6 \times 10^6\end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix}0{,}00\\ 2{,}70 \times 10^6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}9680{,}7\\ -1.113.492\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-89.933\\ 10.037.762\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}296{,}1 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}\\ 6{,}068 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}\end{bmatrix}$$

O momento de fissuração correspondente a idade de 260 dias é $\mathrm{M_{cr(260)}} = 7{,}72\ kNm$. O momento em serviço é de $M_{s,260} = 7{,}875\ kNm$. Dessa forma, fica definido o coeficiente $\zeta$ para a ponderação e encontra-se a curvatura equivalente.

$$\zeta = 1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 = 1 - \left(\frac{7{,}72}{7{,}875}\right)^2 = 0{,}038$$

$$\kappa = \zeta\kappa_{cr} + (1-\zeta)\kappa_{uncr} = 0{,}038 \cdot\ 4{,}349 \times 10^{-6} + (1 - 0{,}038) \cdot 6{,}068 \times 10^{-6} = \\ =\ 4{,}414\ \times 10^{-6}\ \mathrm{mm^{-1}}$$

Desse modo, a curvatura equivalente, dada a ocorrência da fissuração aumenta a curvatura da seção, pela diminuição da rigidez da seção.

❖ **Cálculo das flechas totais**

A partir do cálculo das curvaturas das várias seções discretizadas para os carregamentos (parcelas de curvaturas imediata e devidas à fluência) e devidas à retração, superpõem-se os efeitos. O cálculo de cada parcela de carregamento foi avaliada separadamente. Se tiver ocorrido a fissuração no instante da aplicação da carga realizou-se a ponderação conforme procedimento do Eurocode 2 (2004). Na análise da resposta de longa duração, a retração foi calculada conjuntamente com a parcela do primeiro carregamento, que coincide com idade de início da secagem.

Dessa maneira, um resumo das curvaturas devidas à resposta imediata e as curvaturas da resposta ao longo do tempo até idade de 260 dias, para seção do meio do vão é apresentado na Tabela 8.12. Foram discretizadas 10 seções até o meio do vão ($\Delta z = 150\ mm$).

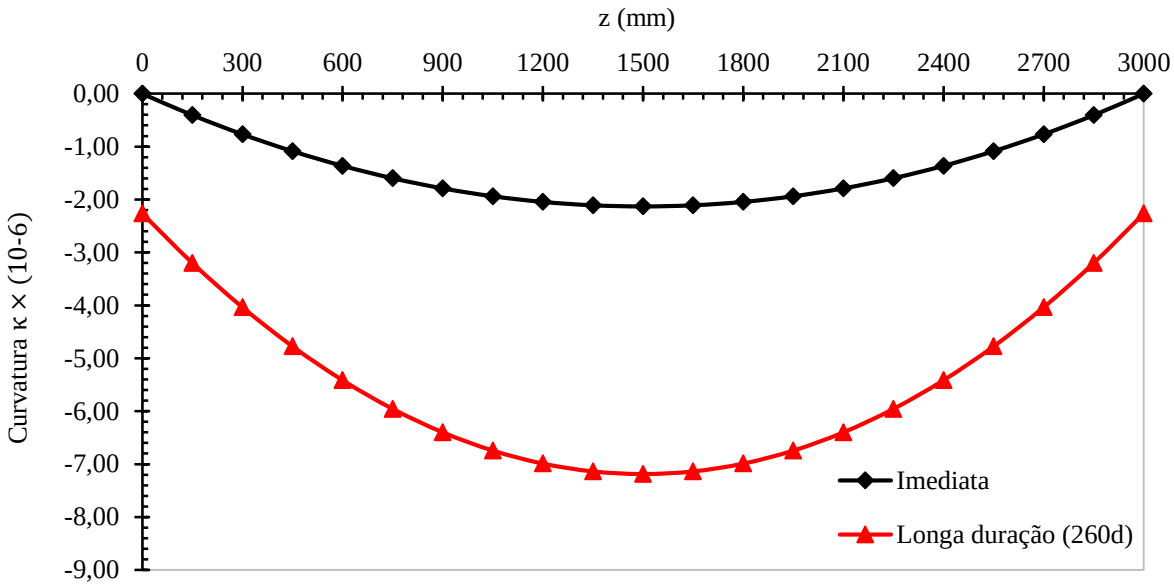
Tabela 8.12 – Parcelas das curvaturas imediata e de longa duração

| Seção (i) | $z_i$ (mm) | Resposta imediata $\kappa_0 \times 10^{-6}\ (mm^{-1})$ | | | | Resposta a longa duração $\kappa_{260} \times 10^{-6}\ (mm^{-1})$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Peso próprio | Sobrecarga 01 | Sobrecarga 02 | Total | Peso próprio + retração + fluência | Sobr. 01 + fluência | Sobr. 02 + fluência | Total |
| 0 | 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 2,261 | 0,000 | 0,000 | 2,261 |
| 1 | 150 | 0,135 | 0,127 | 0,142 | 0,405 | 2,670 | 0,307 | 0,219 | 3,196 |
| 2 | 300 | 0,256 | 0,242 | 0,268 | 0,766 | 3,036 | 0,582 | 0,415 | 4,033 |
| 3 | 450 | 0,363 | 0,342 | 0,380 | 1,086 | 3,359 | 0,824 | 0,589 | 4,772 |
| 4 | 600 | 0,456 | 0,429 | 0,477 | 1,363 | 3,639 | 1,035 | 0,739 | 5,412 |
| 5 | 750 | 0,534 | 0,503 | 0,559 | 1,597 | 3,876 | 1,213 | 0,866 | 5,954 |
| 6 | 900 | 0,598 | 0,564 | 0,626 | 1,788 | 4,069 | 1,358 | 0,969 | 6,397 |
| 7 | 1050 | 0,648 | 0,611 | 0,679 | 1,938 | 4,220 | 1,471 | 1,050 | 6,741 |
| 8 | 1200 | 0,684 | 0,644 | 0,716 | 2,044 | 4,328 | 1,552 | 1,108 | 6,988 |
| 9 | 1350 | 0,705 | 0,664 | 0,738 | 2,108 | 4,392 | 1,600 | 1,142 | 7,135 |
| **10** | **1500** | **0,713** | 0,671 | 0,746 | **2,129** | **4,414** | 1,617 | 1,154 | **7,185** |

Fonte: Autor (2019)

A Figura 8.7 apresenta a variação das curvaturas calculadas para a laje mista *L1-MD125-LT* para as curvaturas imediatas e de longa duração na idade de 260 dias, utilizando método refinado com o gradiente de retração pelo perfil parabólico de Gholamhoseini (2014).

Figura 8.7 – Curvaturas (κ) calculadas na laje mista L1-MD125-LT




Fonte: Autor (2019)

A partir das curvaturas, realiza-se a integração ao longo do vão da laje mista. Foi utilizado o método das diferenças finitas (MDF). Como exemplo, apresenta-se os resultados do procedimento aplicado, conforme item 5.3.2.

Realizando o procedimento, tem-se a discretização do vão de 3000 mm, com 20 partições: $\lambda_i = \kappa_i \cdot (l/20)^2 = \kappa_i \cdot 22.500$, monta-se o sistema apresentado (Figura 8.8) e obtém-se a solução. Abaixo é mostrado como foi feito o cálculo das flechas totais na idade de 260 dias.

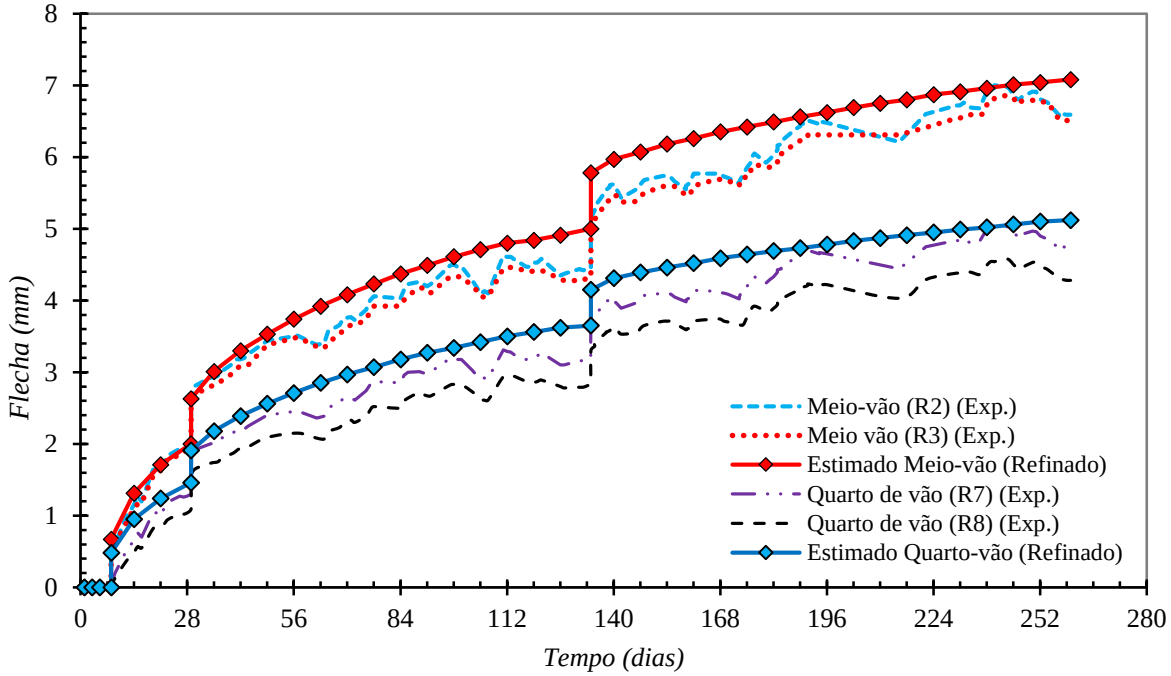
Figura 8.8 – Sistema de solução pelo MDF para deslocamentos verticais totais na idade de 260 dias

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7{,}19\times10^{-2} \\ 9{,}07\times10^{-2} \\ 10{,}74\times10^{-2} \\ 12{,}18\times10^{-2} \\ 13{,}40\times10^{-2} \\ 14{,}39\times10^{-2} \\ 15{,}17\times10^{-2} \\ 15{,}72\times10^{-2} \\ 16{,}05\times10^{-2} \\ 16{,}17\times10^{-2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}22 \\ -2{,}37 \\ -3{,}42 \\ -4{,}37 \\ -5{,}20 \\ -5{,}90 \\ -6{,}45 \\ -6{,}85 \\ -7{,}09 \\ -7{,}17 \end{Bmatrix} (mm)$$

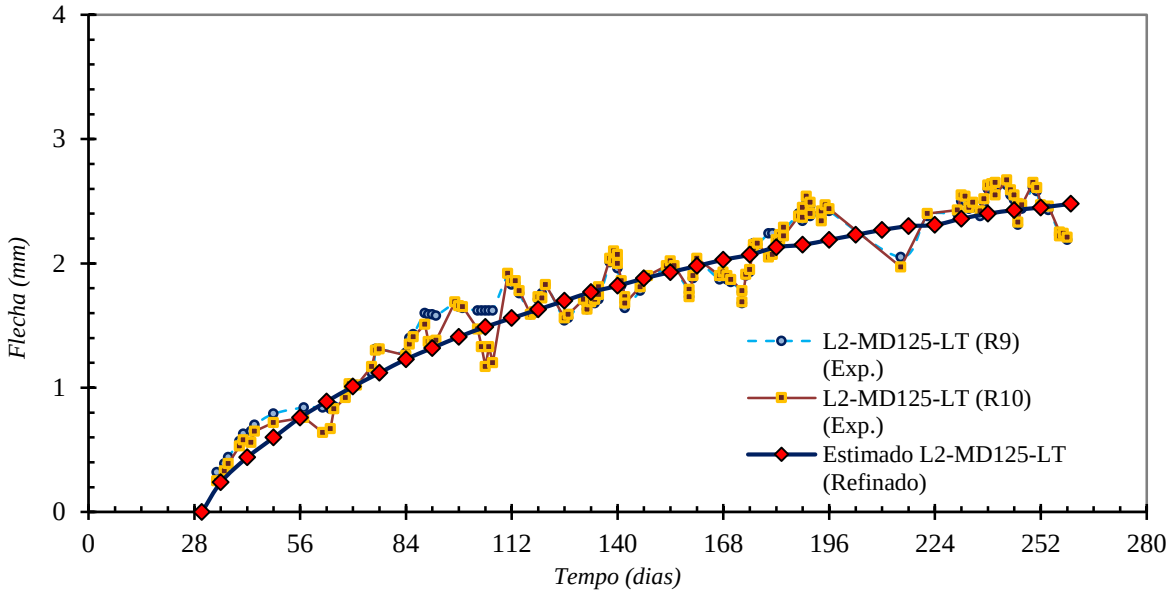
Fonte: Autor (2019)

O sinal negativo indica sentido da flecha contrário ao sistema de eixo, como esperado. A flecha máxima é de 7,17 mm (meio do vão). A parcela de flecha imediata calculada é de 1,98 mm. O deslocamento vertical no quarto do vão é 5,20 mm. A Figura 8.9 (a) apresenta os resultados da laje mista *L1-MD125-LT* na seção do meio do vão e para o quarto do vão, comparativamente aos resultados experimentais. A Figura 8.9 (b) apresenta os resultados da laje mista *L2-MD125-LT*, ambas utilizando o método refinado por meio das curvaturas.

Figura 8.9 – Resultados das previsões das flechas para lajes mistas ensaiadas pelo método refinado




*(a) Laje mista L1-MD125-LT (sujeita ao carregamento de peso próprio e sobrecargas)*

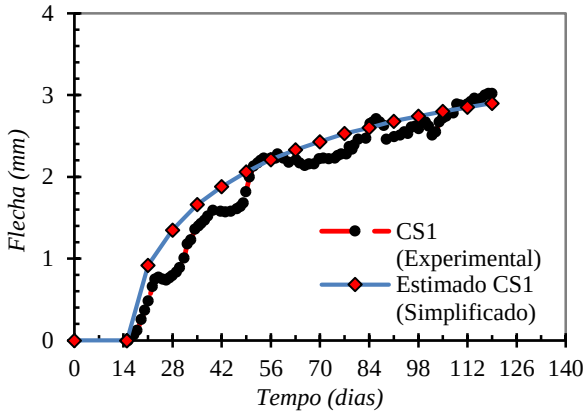



*(b) Laje mista L2-MD125-LT (sujeita apenas ao peso próprio)*

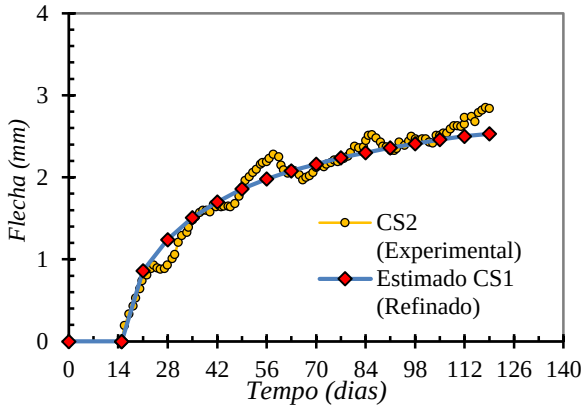
Fonte: Autor (2019)

Para as lajes mistas presentes na literatura, a análise foi realizada utilizando espessura fictícia e gradiente de retração conforme Gholamhoseini (2014). A previsão da fluência e retração foi feita conforme norma australiana AS 3600 (2018), dado os experimentos terem sido realizados nessa região. A Figura 8.10 apresenta os resultados para as lajes de Al-Deen, Ranzi e Uy (2015) e Gholamhoseini (2014). Nas lajes de Wang et al. (2016) o parâmetro de fôrma $r_d$ superou os limites validados para a aplicação do método e não obteve resultados satisfatórios, provavelmente devido ao tipo e espessura da fôrma de aço diferentes da calibrada ao modelo.

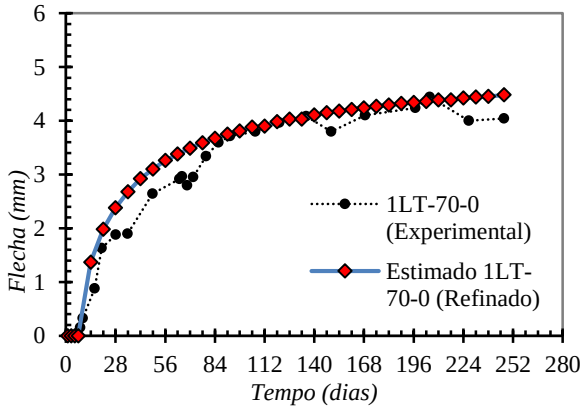
Figura 8.10 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método refinado com perfil de retração parabólico de Gholamhoseini (2014)



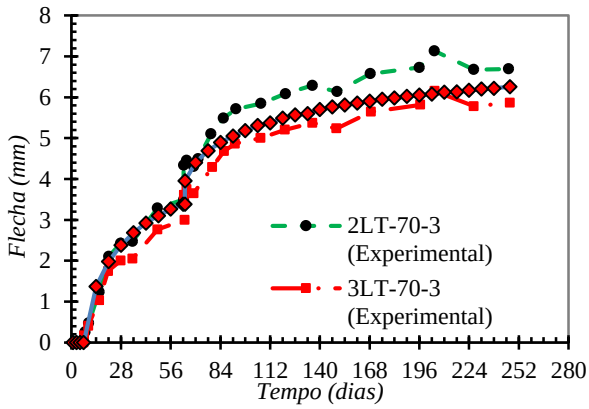

(a) CS 1



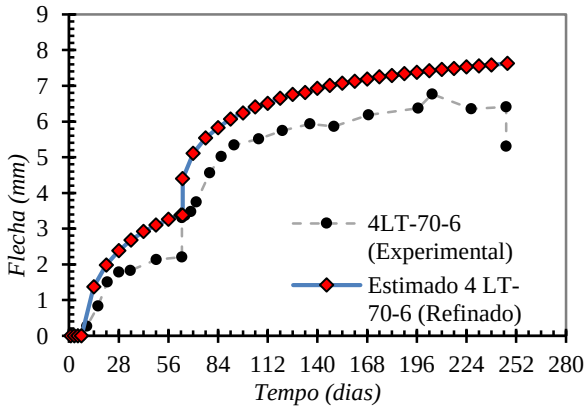

(b) CS 2



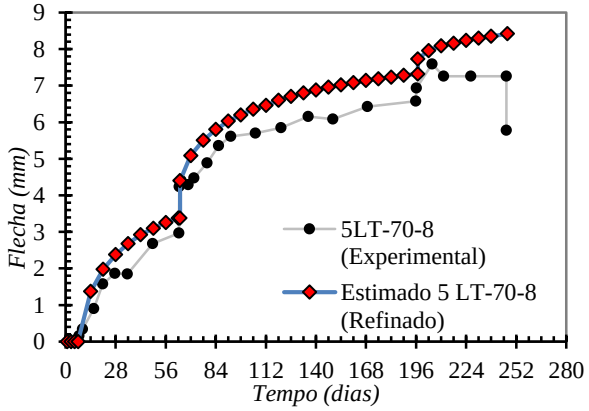

(c) 1LT-70-0




(d) 2 e 3 LT-70-3



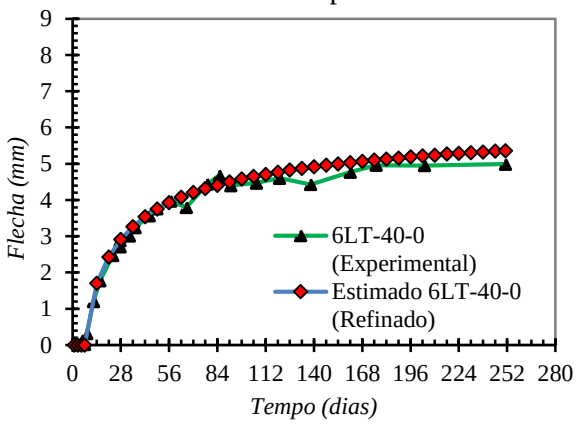

(e) 4LT-70-6



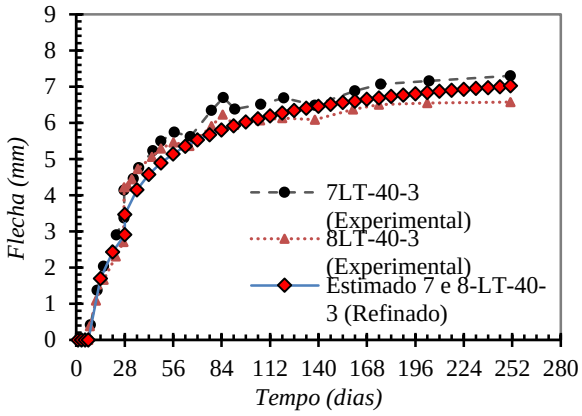

(f) 5LT-70-8

(Continuação)

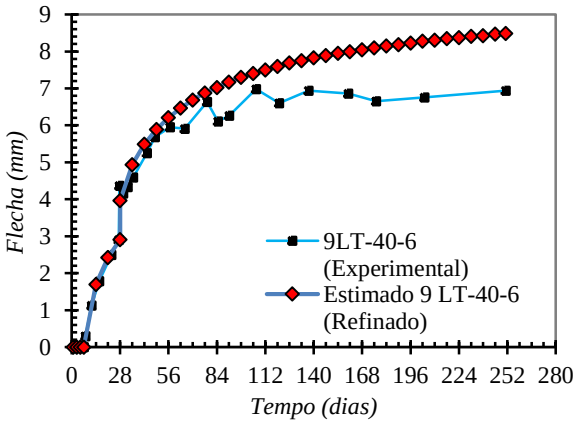
Figura 8.10 – Resultados para lajes mistas da literatura pelo método refinado com perfil de retração parabólico de Gholamhoseini (2014)*(Continuação)*



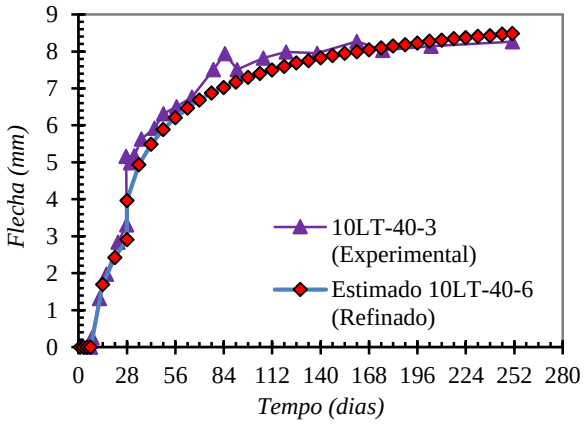

*(g) 6LT-40-0*




*(h) 7 e 8-LT-40-3* *(Continuação)*




*(g) 9LT-40-6*




*(g) 10LT-40-6*

Fonte: Autor (2019)

Os resultados analíticos encontrados para as lajes mistas são muito próximos aos obtidos experimentalmente. Para as outras lajes da literatura, onde se incluem as de Gholamhoseini (2014), que embasaram a calibração do perfil parabólico, o procedimento descrito apresentou resposta com acurácia similar ao do autor.

Alguns pontos a destacar da metodologia são:

- Cálculo de um coeficiente de fluência e retração a partir de uma espessura fictícia única;
- Gradiente de retração baseado no perfil parabólico proposto por Gholamhoseini (2014);
- Análise em função da homogeneização da seção por meio das parcelas de rigidez;
- Consideração da não ocorrência de deslizamentos relativos entre os materiais e comportamento elástico linear dos mesmos e cinemática de viga de *Euler-Bernoulli*.
- Obtenção das curvaturas das seções discretizadas ao longo do vão, com consideração da fissuração, por meio da ponderação das curvaturas, usando modelo do Eurocode 2 (2004);
- Utilização do método das diferenças finitas para cálculo dos deslocamentos verticais dos pontos ao longo da laje mista.

De maneira semelhante à realizada para a metodologia simplificada da AS/NZS 2327 (2017)/Ranzi (2017), compararam-se os resultados em termos quantitativos, como mostra a Tabela 8.13, entre os resultados do método simplificado e refinado desenvolvidos. Os números em parênteses abaixo das medidas estimadas se referem à razão flecha estimada/experimental.

Tabela 8.13 – Medidas das flechas (meio do vão) da laje L*1-MD125-LT*

| Medida | Flechas totais (mm) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 dias | | 28 dias | | 134 dias | | 240 dias | 260 dias | ∞ |
| Atividade (*) | Antes *R.E.* *(a)* | Após *R.E.* *(b)* | Antes *SC1* *(c)* | Após *SC1* *(d)* | Antes *SC2* *(e)* | Após *SC2* *(f)* | Máx. *(g)* | Fim Ensaio *(h)* | Tempo infinito |
| Experimental | 0 | 0,36 | 2,00 | 2,59 | 4,40 | 5,09 | **6,88** | 6,55 | - |
| Método simplificado | 0 | 0,67 *(1,861x)* | 1,61 *(0,805x)* | 2,24 *(0,865x)* | 4,54 *(1,032x)* | 5,22 *(1,026x)* | 6,95 *(1,010x)* | **7,14** *(1,09x)* | ***10,22*** |
| Método Refinado | 0 | 0,67 *(1,861x)* | 2,00 *(1,00x)* | 2,63 *(1,015x)* | 5,00 *(1,136x)* | 5,78 *(1,136x)* | 6,96 *(1,012x)* | **7,08** *(1,08x)* | ***9,52*** |

(*) Atividades: *(a) Antes da retirada do escoramento central (R.E.);(b)Após retirada do escoramento; (c) Antes do primeiro carregamento (sobrecarga SC1);(d) Após o primeiro carregamento (SC1); (e) Antes da aplicação do segundo carregamento (SC2); (f) Após aplicação do segundo carregamento (SC2); (g) Valor máximo obtido no ensaio; (h) Fim do ensaio aos 260 dias.*

Fonte: Autor (2019)

As flechas teóricas diferidas no tempo na idade de 260 dias resultaram iguais a 5,17 mm e as imediatas iguais a 1,98 mm. Em um tempo infinito, a flecha total é estimada em 9,52 mm (abordagem refinada), frente aos 10,22 mm (abordagem simplificada), diferença da ordem de 7,0%. Teoricamente, as flechas diferidas totais (7,54 mm) são 3,80 vezes as flechas imediatas (1,98 mm) devido aos carregamentos aplicados.

Observa-se que o gradiente de retração linear comparado ao perfil parabólico tiveram na espessura da laje mista tiveram efeitos semelhantes sobre a resposta ao longo do tempo. Dado que ambos os modelos utilizam-se de adaptações dos perfis de retração não-uniforme para representar o fenômeno, cujas calibrações foram feitas por meio dos resultados experimentais, mostram-se como alternativa para a consideração dos efeitos diferidos no tempo.

## 8.6 Comparação dos resultados das diferentes abordagens

Para a comparação das diferentes abordagens apresentadas de avaliação das flechas em lajes mistas de aço e concreto, com fôrma de aço incorporada, foi aplicado os procedimentos de abordagem para as lajes analisadas. A Tabela 8.14 reúne as flechas máximas previstas nas lajes mistas, em um tempo infinito, arbitrado como 10.000 dias.

Tabela 8.14 – Resumo das estimativas das flechas pelas diferentes abordagens para as lajes mistas ensaiadas e presentes na literatura

| Laje mista | Eurocode 4 (2004) | BS 5950 (1994) | ANSI-ASCE 3 (1992) | ANSI-SDI C (2011) | CSSBI 03 (2008) | Método de Ranzi (2017) | Método refinado (Item 8.5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L1-MD125-LT[(a)] | 4,61 | 3,84 | 5,84 | 5,84 | 8,76 | **10,22** | **9,52** |
| L2-MD124-LT[(a)] | 1,57 | 1,31 | 1,34 | 1,34 | 2,01 | **6,19** | **5,77** |
| CS-1 [(b)] | 0,81 | 0,67 | 1,00 | 1,00 | 1,50 | **5,17** | **4,10** |
| CS-2 [(b)] | 0,78 | 0,65 | 0,98 | 0,98 | 1,47 | **4,48** | **3,45** |
| 1LT-70-0 [(c)] | 1,22 | 1,01 | 1,52 | 1,52 | 2,28 | **6,11** | **5,64** |
| 2LT-70-3 [(c)] | 2,60 | 2,15 | 3,26 | 3,26 | 4,89 | **7,40** | **7,66** |
| 3LT-70-3 [(c)] | 2,60 | 2,15 | 3,26 | 3,26 | 4,89 | **7,40** | **7,66** |
| 4LT-70-6 [(c)] | 3,65 | 3,03 | 4,58 | 4,58 | 6,87 | **10,86** | **9,23** |
| 5LT-70-8 [(c)] | 4,42 | 3,67 | 5,54 | 5,54 | 8,31 | **10,97** | **10,25** |
| 6LT-40-0 [(c)] | 1,24 | 1,04 | 1,58 | 1,58 | 2,37 | **7,24** | **6,78** |
| 7LT-40-3 [(c)] | 2,56 | 2,14 | 3,24 | 3,24 | 4,86 | **8,75** | **8,64** |
| 8LT-40-3 [(c)] | 2,56 | 2,14 | 3,24 | 3,24 | 4,86 | **8,75** | **8,64** |
| 9LT-40-6 [(c)] | 3,73 | 3,11 | 4,72 | 4,72 | 7,08 | **10,06** | **10,28** |
| 10LT-40-6 [(c)] | 3,73 | 3,11 | 4,72 | 4,72 | 7,08 | **10,06** | **10,28** |
| CS-120-100% -SH[(d)] | 1,30 | 1,10 | 1,70 | 1,70 | 2,55 | **8,93** | - |
| CS-120-100%[(d)] | 5,26 | 4,43 | 6,90 | 6,90 | 10,35 | **14,80** | - |
| CS-180-100% -SH[(d)] | 0,65 | 0,54 | 0,84 | 0,84 | 1,26 | **5,23** | - |
| CS-180-100%[(d)] | 3,30 | 2,76 | 4,24 | 4,24 | 6,36 | **9,21** | - |

*(a) Lajes mistas ensaiadas experimentalmente cujos resultados são deste trabalho;(b)Lajes de Al-Deen, Ranzi e Uy (2015);(c) Lajes de Gholamhoseini (2014); d) Lajes mistas de Wang et al. (2016).*

Fonte: Autor (2019)

Os cálculos das flechas levaram em conta o peso próprio das lajes e os carregamentos nos respectivos ensaios, como mostra a Tabela 8.3. As lajes mistas *L2-MD124-LT, CS-1, CS-2, 1LT-70-0, 6LT-40-0, CS-120-100% -SH e CS-180-100% -SH* foram ensaiadas somente com seu peso próprio, enquanto as demais foram sujeitas a sobrecargas na simulação de carregamentos em situação de serviço. De modo geral, o método de Ranzi (2017) presente na AS/NZS 2327 (2017) (gradiente linear de retração) e o método refinado (com gradiente de retração parabólico de Gholamhoseini (2014) apresentaram resultados de previsão de flechas semelhantes.

A diferença de complexidade dos cálculos, quando da comparação das diferentes abordagens é evidente. No entanto, observa-se que as simplificações dos modelos normativos sem consideração explícita da parcela de flechas devida à retração, subestimam as previsões das flechas. Tal fato está relacionado a estimar as flechas com base na resposta da seção aos carregamentos impostos. No entanto, a parcela devida à retração é, em geral, de maior relevância, e não depende diretamente do carregamento. Tal evidência fica clara quando comparados os valores teóricos com os experientais, mesmo para idades de 18 a 40 semanas. Dessa maneira, fica clara a necessidade de abordagens com a consideração dos efeitos diferidos no tempo (fluência e retração não-uniforme) nas avaliações dos deslocamentos verticais.

# 9 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos no estudo do comportamento das lajes mistas em serviço ao longo do tempo demonstram a partir da revisão bibliográfica a necessidade da incorporação do efeito da retração não-uniforme das lajes com fôrma incorporada. A análise experimental exploratória das lajes mistas simplesmente apoiadas possibilitou confirmar os efeitos do comportamento em serviço diferido no tempo com a avaliação de 260 dias.

O estudo da capacidade resistente mostra que o ensaio realizado nas lajes mistas com 28 dias e 260 dias não apresentou mudanças na capacidade resistente das lajes. No entanto, o comportamento Força $\times$ flecha apresentado pelas lajes mudou significativamente. Entre as análises de uma mesma idade, resultados distintos de comportamento foram observados. Um aumento expressivo da resistência à tração do concreto foi observado na idade de 260 dias em comparação aos 28 dias.

A partir dos resultados experimentais e dos presentes na literatura, aplicaram-se os modelos teórico-analíticos para a análise da resposta imediata e de longa duração. Comparação dos resultados das diferentes abordagens de avaliação dos deslocamentos verticais (flechas) mostram a importância de levar em conta a parcela devida o gradiente de retração na seção transversal.

Os resultados obtidos pela metodologia simplificada de Ranzi (2017) já incorporada pela AS/NZS 2327 (2017), com o gradiente de retração linear, foram muito semelhantes aos obtidos pela abordagem refinada, com gradiente de retração parabólico de Gholamhoseini (2014). O equacionamento da primeira apresenta maior simplicidade para avaliação das lajes mistas, como demonstrado para as lajes mistas simplesmente apoiadas sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos. No entanto, a abordagem refinada apresenta-se como uma alternativa para os cálculos com a consideração de carregamentos diversos e avaliação de gradiente de retração com função qualquer e com fim ao maior conhecimento da resposta estrutural ao longo do comprimento da laje mista.

As abordagens simplificadas presentes nas principais normas tendem a subestimar as flechas totais, apresentadas nas investigações experimetais e comparativamente aos modelos que levam em conta a retração. As abordagens recentes de consideração das parcelas das flechas devidas à retração não-uniforme representam de maneira apropriada o comportamento verificado experimentalmente e com adequada acurácia.

Ampliando o estudo, a ocorrência da retração não-uniforme devido à impermeabilidade da face inferior da laje por conta da presença da fôrma, também ocorre em outros novos sistemas como o *Steel Truss Deck* e os sistema de *lajes treliçadas com fôrma de aço*. Com relativa semelhança às lajes treliçadas convencionais, esses novos sistemas apresentam um *deck* metálico ao fundo, funcionando como fôrma à concretagem. Esses sistemas merecem atenção, devido ao aumento das flechas com o desenvolvimento da retração não-uniforme.

Com a industrialização e desenvolvimentos futuros de fôrmas de aço incorporadas de maior capacidade ao cisalhamento longitudinal, vãos maiores serão possíveis. No entanto, com respeito aos limites de aceitabilidade de deslocamentos máximos das lajes, as parcelas de flechas devidas aos efeitos diferidos no tempo devem ser previstas ainda com um maior rigor, na garantia de conforto e funcionalidade adequados.

Diante das considerações feitas ao longo do trabalho, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros a fim de aperfeiçoar as abordagens de avaliação em serviço das lajes mistas e dar continuidade ao tema de estudo:

- Estudo experimental abrangente em outras diferentes lajes mistas com ensaios de longa duração;
- Avalição das flechas em lajes mistas contínuas;
- Análise das flechas em lajes mistas protendidas;
- Evolução das flechas em lajes mistas com uso de agregado leve;
- Estudo de modelos para o fenômeno da retração não-uniforme e da fluência, como os modelos de difusão de umidade do concreto;
- Realizar análise paramétrica das variáveis mais influentes na evolução das flechas;
- Desenvolver métodos simplificados para cálculos diretos das parcelas devidas à retração e aos carregamentos impostos;
- Analisar a influência dos conectores de cisalhamento usualmente utilizados nas vigas mistas sobre a restrição oferecida à retração nas lajes mistas.

# REFERÊNCIAS


AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. AASHTO – LRFD Bridge Design Specifications. Washington, DC, 2014.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI COMMITTEE 318**: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. Detroit, 2014.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 209**: Shrinkage Strain Profile of Concrete. Michigan, 2008.

AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE/AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **ANSI/ASCE 3-91**: Standard for the structural design of composite slabs. New York, 1992.

AMERICAN NATIONAL STANDARDS INTITUTE/STEEL DECK INSTITUTE. **ANSI/SDI C-2011**: Standard for composite steel floor deck-slabs. Ohio, 2011.

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE. North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. **AISI-S100**. Washington, 2007.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. **ASTM C 469**: Standard Test Method for Static Modulus of Elasticity and Poisson's Ratio of Concrete in Compression. West Conshohocken, 2002.

AUSTRALIAN STANDARD/NEW ZEALAND STANDARD. **AS/NZS 4600**: Cold-formed steel structures. Wellington, 2018.

AUSTRALIAN STANDARD. **AS/NZS 3600**: Concrete structures. Wellington, 2018.

AUSTRALIAN STANDARD/NEW ZEALAND STANDARD. **AS/NZS 2327**: Composite structures-composite steel-concrete construction in buildings. Wellington, 2017.

AUSTRALIAN STANDARD/NEW ZEALAND STANDARD. **AS/NZS 1170.0:** Structural design actions - Part 1: General principles. Wellington, 2002.

AL-DEEN, D. Hydro-mechanical analysis of non0-uniform shrinkage development and its effects on steel-concrete composite slabs. **Steel and Composite Structures**. v. 26, n.3, p.303-413, 2018.

AL-DEEN, S.; RANZI, G. Effects of Non-uniform Shrinkage on the Long-term Behavior of Composite Steel-Concrete Slabs. **International Journal of Steel Structures**. v.15, n.2, p.415-162, 2015.

AL-DEEN, S.; RANZI, G.; UY, B. Non-uniform shrinkage in simply-supported composite steel-concrete slabs. **Steel and Composite Structures**: An International Journal. v.18, n.2, p. 375 – 394, 2015.

AL-DEEN, S. RANZI, G.; VRCELJ, Z. **Full-scale long-term and ultimate experiments of simply-supported composite beams with steel deck**. Journal of Constructional Steel Research. v. 67, n. 10, p.1658–1676, 2011.

ALTOUBAT, S.; RIEDER, K. A.; JUNAID, M. T. **Short-and long-term restrained shrinkage cracking of fiber reinforced concrete composite metal decks: an experimental study**. Materials and Structures. v.50, n.2, p.1-15, 2017.

ANDRADE, T. **Sobre as lajes mistas de aço e concreto em situação de incêndio**. 2012. 183p. Iniciação Científica – Escola Politécnica de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

ARAÚJO, G. S. **Análise do Comportamento e da Resistência de um Sistema de Lajes Mistas pelo Método da Interação Parcial**. 2008. 116p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

ARAÚJO, J. M. **Estruturas de concreto**: Modelos de previsão da fluência e da retração do concreto. n.4. Rio Grande: Dunas, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14323**: Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios em Situação de Incêndio — Procedimento. Rio de Janeiro, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16421**: Telha-fôrma colaborante para laje mista de aço e concreto – requisitos e ensaios. Rio de Janeiro, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522**: Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão. Rio de Janeiro, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14762**: Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. Rio de Janeiro, 2010.

BAZANT, Z. P. Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. **American Concrete Institute Journal**. v. 69, p. 212-217, 1972.

BAŽANT, Z. P.; RILEM. RILEM Draft Recommendation: TC-242-MDC Multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multidecade applicability. **Materials and Structures**. v. 48, n. 4, p. 753-770, 2015.

BAŽANT, Z.P.; BAWEJA, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures (Model B3). **In:** Adam Neville Symposium: Creep And Shrinkage Of Concrete - Structural and Design Effects, ACI Special Publication SP194, Michigan, USA: Farmington Hills,2000.

BAIÃO FILHO, O. T. **Estudo comparativo de respostas estruturais antes da cura do concreto de fôrmas metálicas incorporadas às lajes**. 2003. 150p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

BELTRÃO, A. J. N. **Comportamento Estrutural de Lajes-mistas com Corrugações na Alma de Perfis de Chapa Dobrada**. 2003. 124p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

BISCHOFF, P. H. Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber-reinforce polymer bars. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 131, n.5, p.752-767, 2005.

BRADFORD, M. Generic modelling of composite steel-concrete slabs subjected to shrinkage, creep and thermal strains including partial interaction. **Engineering Structures**. n. 32, p. 1459-1465, 2010.

BRADFORD, M.; GILBERT. R. I.; ZEUNER, R.; BROCK, G. Shrinkage Deformations of Composite Slabs with Open Trapezoidal Sheeting. **Procedia Engineering**. n. 14, p. 52-61, 2011.

BRANSON, D.E. Design procedures for computing deflections. **Journal of American Concrete Institute**. v.65, n.9, p.730-42, 1968.

BRANSON, D. E. Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. **HPR Report**. n. 7, 1965.

BRANSON, D. E.; CHRISTIASON, M. L. Time-Dependent Concrete Properties Related to Design-Strength and Elastic Properties, Creep and Shrinkage. Designing for Effects of Creep, Shrinkage and Temperature in Concrete Structures. **(ACI) American Concrete Institute**. p. 257-278, 1971.

BRENDOLAN, G. **Análise do comportamento e da resistência de um sistema de lajes com fôrma de aço incorporada**. 2007. 149 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

BRITISH STANDARD. **BS5950-3:** Structural use of steelwork in buildings – Part 3: Code of practice for design of simple and continuous composite beams. London, 1982.

BRITISH STANDARD. **BS5950-4:** Structural use of steelwork in buildings – Part 4: Code of practice for design of composite slabs with profiled steel sheeting. London, 1982.

BRITISH STANDARD. **BS5950-4:** Structural use of steelwork in buildings – Part 4: Code of practice for design of composite slabs with profiled steel sheeting. London, 1994.

BRITISH STANDARD. **BS5950-8:** Structural use of steelwork in buildings – Part 8: Code of practice for fire resistant design. London, 2003.

BRITO JUNIOR, G. F. **Análise experimental do cisalhamento longitudinal de lajes mistas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

CALADO, L.; SANTOS, J. **Estruturas Mistas de Aço e Betão**. 2 ed. Lisboa: IST Press, 2013.

CALIXTO, J. M. et al. Comportamento de lajes mistas com fôrma de aço incorporada com armaduras de reforço. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DA CONSTRUÇÃO METÁLICA, 3, 2006, Ouro Preto. **Resumos**... Ouro Preto, 2006.

CANADIAN SHEET STEEL BUILDING INSTITUTE. **CSSBI S3-2008**: Criteria for the design of composite slabs. Cambridge, Ontario, 2008.

CAMPOS, P. C. **Efeito da continuidade no comportamento e na resistência de lajes mistas com fôrma de aço incorporada**. 2001. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

CARVALHO, F. S**. Fôrma metálica profunda, com alma corrugada, para incorporação a lajes de concreto – comportamento na fase antes da cura do concreto**. 2005.104 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005.

CBCA. **Lajes em steel deck** (2014, 2015). Centro Brasileiro de Construção em Aço. Disponível em: <http://www.cbca-acobrasil.org.br>. Acesso em: 27 set. 2017.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Model Code MC90-99**. CEB Design manual on structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Thomas Telford, Londres, 1990.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Model Code 2010**. fib Model Code for Concrete Structures 2010. Suíca, 2013.

CORDEIRO, L. C. S. **Sobre as lajes mistas de aço e concreto em situação de incêndio**. 2014. 262p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

COSTA, R. S. **Análise de um sistema de lajes mistas considerando a influência do atrito dos apoios e a avaliação do momento de inercia efetivo**. 2009. 217p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

CRISINEL, M; MARIMON, F. A new simplified method for the design of composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**, n. 60, p. 481-491, 2004.

DILGER, W. NEVILLE, A. M. Method for creep analysis of structural members. **ACI Journal**. v.27, p. 349-372, 1971.

DUJMOVIC, D.; ANDROIC, B.; LUKACEVIC, I. **Composite Structures according to Eurocode 4: Worked Examples**. Croácia: Ernst & Sohn, 2015.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1994-1-1:** Eurocode 4 – Design of composite steel and concrete structures – Part 1-1: General rules for buildings. Bruxelas, Bélgica, 2004.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-1-3:** Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-3: General rules for cold-formed members and sheeting. Bruxelas, Bélgica, 2006.

FABER, O. Plastic yield, shrinkage and other problems of concrete and their effects on design. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**. v. 225, part I, pp. 27–73, 1927.

GARDNER, N. J.; LOCKMAN, M. J. Design Provisions for Drying Shrinkage and Creep of Normal Strength Concrete. **ACI Materials Journal**. p.159-167, 2001.

GHALI, A.; FAVRE, R. Stress and deformations of composite members. **IABSE Proceedings**. p.1-16, 1986.

GALAMBOS, T. U; ELLINGWOOD, B. Serviceability limit states: deflection. **Journal of Structural Engineering**, ASCE. n.1, v.112, p. 67-84, 1986.

GHOLAMHOSEINI, A. **Time-Dependent Behaviour os Composite Concrete Slabs**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia Civil e Ambiental, University of New South Wales, Sydney, Austrália, 2014.

GHOLAMHOSEINI, A. Modified creep and shrinkage prediction model B3 for serviceability limit state analysis of composite slabs. **International Journal of Advanced Structural Engineering.** v.8, n.1, p.87-101, 2016a.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. Calculation of Time-Dependent Deflection of Composite Concrete Slabs: Simplified Design Approach. **Journal of Structural Design and Construction**. v.20, n.1, 11p, 2015.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. Long-term Behavior of Continuous Composite Concrete Slabs with Steel Decking. **ACI Structural Journal**. v. 115, n.2, p.439-449, 2018.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. Long-term deformations in continuous composite concrete slabs. **Australian Journal of Structural Engineering**. v. 17, n.3, p.192-212, 2016b.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. Time-dependent deflection of composite concrete slabs: A simplified design approach. **Australian Journal of Structural Engineering**. v. 15, n.3, p. 287-298, 2014b.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M.; CHANG, Z. T. Evaluation of time-dependent behavior of composite concrete slabs with steel decking (An experimental study). **In:** VIII INTERNATIONAL CONFERENCE ON FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES, 2014c.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M.; CHANG, Z. T. Long-term deformation of composite concrete slabs. **Concrete in Australia**. v. 38, n.4, p.25-32, 2014b.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, R. I.; BRADFORD, M.; CHANG, Z. T. Time-dependent deflection of composite concrete slabs. **ACI Structural Journal**. v. 111, n.4, p.765-776, 2014a.

GILBERT, R. I. Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs. **Journal Structural Engineering**, v. 133, n. 6, p. 899-903, 2007.

GILBERT, R. I. Time-Dependent Analysis of Composite Steel-Concrete Sections. **Journal Structural Engineering**, v. 115, n. 11, p. 2687-2705, 1989.

GILBERT, R. I. Time-Dependent Stiffness of Cracked Reinforce and Composite Concrete Slabs. **Procedia Engineering**, n. 57, p. 19-34, 2013.

GILBERT, R. I.; BRANDFORD, M. A.; GHOLAMHOSEINI, A.; CHANG, Z. T. Effects of shrinkage on the long-term stress and deformations of composite concrete slabs. **Engineering Structures**. n. 40, p. 9-19, 2012.

GILBERT, R. I.; RANZI, G. **Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures**. New York: Spon Press, 2011.

GOMES, L. C**. Estudo do sistema de lajes mistas com fôrma de aço incorporada empregando concreto estrutural leve**. 2001. 165 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

GROSSI, L. G. F. **Sobre o comportamento estrutural e o dimensionamento de lajes mistas de aço e concreto com armadura adicional**. 2016. 279p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

HICKS, S. Composite Slabs. **In:** WORKSHOP DA EN 1994 -EUROCODE 4: DESIGN OF COMPOSITE STEEL AND CONCRETE STRUCTURES. Bruxelas, 2008.

HICKS, S. J.; UY, B. AS/NZS 2327 Composite Structures – A New Standard for Steel-Concrete – Composite Buildings. **Steel Innovations Conference**, Aukland, 2015.

INTERNACIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 1920**: Test of concrete – Part 10: Determination of static modulus of elasticity in compression. 2010.

INTERNACIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 4356**: Bases for design of structures – Deformations of buildings at the serviceability limit states. 1997.

ISAIA, G. C. **Concreto: ciência e tecnologia**. v. I e v. II, São Paulo: IBRACON, 2011.

JACINTO, L. **Pesos próprios e sobrecargas em edifícios segundo o EC1**. Disponível em: <http://pwp.net.ipl.pt/dec.isel/ljacinto/ensino/eurocodigos/SobrecargasEdificios.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2017.

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **JSCE 2010**. Guidelines for Concrete. nº15: Standard Specifications for Concrete Structures, 2011.

JAYASINGHE, T. **Prediction of Time-dependent Deformations in Post-tensioned Concrete Suspended Beams and Slabs in Tall Buildings**. 2011. 304p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia Civil, Ambiental e Química, Universidade do Instituto Real de Tecnologia de Melbourne, Melbourne, 2011.

JOHNSON, R. P. **Composite Structures of Steel and Concrete: Beams, Slabs, Columns, and Frames for Buildings**. v.1, 3ed. Londres: Blackwell Scientific Publications, 2013.

JOHNSON, R. P.; ANDERSON, D. **Designers' Guide to EN 1994-1-1 Eurocode 4:** Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings. Londres: Thomas Telford, 2004.

KATAOKA, L. T. **Análise da deformabilidade por fluência e retração e sua utilização na monitoração de pilares de concreto.** 2010. 228p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

KATAOKA, L. T. **Estudo Experimental da Deformação ao Longo do Tempo de Lajes Contínuas e Simplesmente Apoiadas Executadas com Vigotas Pré-Moldadas de Concreto.** 2005. 200p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

KATAOKA, M. N. ; FRIEDRICH, J. ; EL DEBS, A. L. H. C. **Experimental investigation of longitudinal shear behavior for composite floor slab**. Steel and Composite Structures. v. 23, p. 351-362, 2017.

LAMPORT, W. B.; PORTER, M. L.; **Deflections for Composite Steel Deck Floors**. IN: TENTH INTERNATIONAL SPECIALITY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES. Missouri, 1990.

LEON, R. T. Serviceability Criteria for LRFD Composite Floors. **American Institute of Steel Construction**. p. 1-22, 1990.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. **Construções de Concreto: verificações da capacidade de utilização**. v.4. Rio e Janeiro: Interciência, 1979.

LUZZI, R. **Behaviour and design of composite steel-concrete slabs**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Ambiental e Territorial, Politécnica de Milano, Milano, 2015.

MARK LAWSON. **(Correspondência pessoal).** Guidance on Long Span Composite Floors. Data: 12 de out. 2018.

MARTINS, A. G. **Estudo comparativo de respostas estruturais, após a cura do concreto, de algumas fôrmas metálicas incorporadas às lajes, disponíveis nos mercados nacional e internacional**. 2001. 128p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. Berkeley: McGraw-Hill, 2014.

MELO, C. B. **Análise do comportamento e da resistência do sistema de lajes mistas**. 1999. 168p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

MIRZA, O.; UY, B. Experimental Studies on Short and Long Term Behaviour for Composite Steel-Concrete Slabs. **In:** Proceedings of the 10th International Conference on Advances in Steel Comcrete Composites and Hybrid Structures. p.485-492, 2012.

MODULAR. (Catálogo) Modular Sistemas Construtivos: Modular Deck MD 55. 2014.

MONTGOMERY, C. J.; KULAK, G.L.; SHWARTSBURD, G. Deflections of composite floor system. **Canadian Journal Engineering**, n.10, p. 192-204, 1983.

MONTOYA, P. J.; MESENGUER, A.G.; CABRÉ, F.M. **Hormigón Armado**. Barcelona: Gustavo Gili, 1979.

MOUSSA, A. E. Concrete Slabs in Composite Floor Systems. Tese (Doutorado) – The University of Arizona, Arizona, 1984.

NEJADI, S. Time-Dependent Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete Structures. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia Civil e Ambiental, University of New South Wales, Sydney, Austrália, 2005.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. São Paulo: Pini, 1997.

NEW ZEALAND STANDARD. **NZS 3101**: Concrete structures standard – the design of concrete structures. 2006.

PARK, Y-S.; LEE, Y-K.; LEE, Y. Description of Concrete Creep under Time-Varying Stress Using Parallel Creep Curve. **Advances in Materials Science and Engineering**. v. 2016, 13p, 2016.

PRASADA RAO. Time-Dependent Analysis of Composite Steel-Concrete Sections. **Journal Structural Engineering**. v. 118, n. 2, p. 618-621, 1992.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R.; J; MARTINS, A. G. **Estruturas mistas**. v.1, 68p. Rio de Janeiro: Instituto Aço Brasil/Centro Brasileiro da Construção em Aço (CBCA), 2012.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R.; J. **Elementos das estruturas mistas aço-concreto**. 336p. Belo Horizonte: O Lutador, 2001.

RACHHAM, J. W.; COUCHMAN, G. H.; HICKS, S. J. **Composite slabs and beams using steel decking: best practice for design and construction**. The Metal Cladding & Roofing Manufacturers Association e Steel Construction Institute (SCI) Publication. n.13, 2009.

RANZI, G. Service design approach for composite steel-concrete floors. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**. v. 171, n.1, p. 38-49, 2017.

RANZI, G. A new approach for serviceability limit state design of composite steel-concrete slabs. **Eurosteel 2017**. n.2 e 3, Denmark, 2017b.

RANZI, G. An overview of service design of composite steel-concrete slabs. In: **CONGRESS ON ADVANCES IN STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS**. 2017. Seoul, Korea, 2017c.

RANZI, G.; AL-DEEN, S.; AMBROGI, L.; UY, B. Long-term behaviour of simply-supported post-tensioned composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**. n.88, p. 172 – 180, 2013a.

RANZI, G.; AL-DEEN, S.; HOLLINGUM, G.; HONE, T.; GOWRIPALAN, S.; UY, B. An experimental study on the ultimate behaviour of simply-supported post-tensioned composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**. n.89, p. 293 – 306, 2013b.

RANZI, G.; LEONI, G.; ZANDONINI, R. State of the art on the time-dependent behaviour for composite steel-concrete structures (Review). **Journal of Constructional Steel Research.** n. 80, p. 252-263, 2013.

RANZI, G.; VRCERJ, Z. Closed form solutions for the long-term behaviour analysis of composite steel-concrete members subject to non-uniform shrinkage distributions. **Proceedings of Sixth International Conference on Advances in Steel Structures and Progress in Structural Stability and Dynamics**. p. 552-559, 2009.

REIS, L. V. N. **Lajes mistas com forma de aço incorporada: aplicações, dimensionamento e metodologia de análise numérica**. 2012. 79p. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SANCHES, L. C. F. **Análise Estática e Dinâmica de um Modelo de Folhas Poliédricas e o Estudo de Lajes com Fôrma de Aço Incorporada Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2002. 342p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

SHAYAN, S.; AL-DEEN, S.; RANZI, G.; VRCELJ, Z. Long-term behavior of composite concrete slabs: an experimental study. **In:** Proceedings of the 4th International Conference in Steel and Composite Structures (ICSCS'10). p.21-23, Sydney, 2010.

SIEG, A. P. A. **Estudo de um sistema de laje com fôrma de aço incorporada**. 2015. 143p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

SILVA, H. J. F. **Análise do sistema de laje mista com fôrma incorporada aplicado a estruturas prediais em concreto armado.** 1999. 149p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

SILVA, P. B. **Análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada**. 2018. 117p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

SOMMER, R. M. R. **Análise de vibrações em pisos mistos aço/concreto**. 2002. 140 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

SOUZA, D. A. **Estruturas mistas de aço e concreto**. Gerdau Aços Brasil. In: 56 CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO. Natal, 2014.

SOUZA NETO, A. S. **Análise do comportamento e da resistência de um sistema de lajes mistas com ancoragem de extremidade com considerações sobre a fôrma de aço isolada e atrito nos apoios**. 2001. 211 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

SPÍNDOLA, C. C. **Dimensionamento de pisos mistos em situação de incêndio com proteção apenas das vigas principais**. 2002. 146 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

TAKEY, T. H. **Sistemas de Laje Mista para Edificações com uso de Perfis de Chapa Metálica**. 2001. 181p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

TARANATH, B. S. **Structural Analysis and Design of Tall Buildings: steel and composite construction**. Boca Raton: CRC Press, 2012.

TECHNE. **Construção rápida: sistema de laje mistas de aço e concreto**. Disponível em: <http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/179/construcao-rapida-sistema-misto-que-dispensa-parcial-ou-totalmente-287917-1.aspx>. Acesso em: 28 set. 2017.

TROST, H. The implications of the principle of superposition for creep and relaxation problems of concrete and prestressed concrete. **Beton- und Stahlbetonbau**. v.10, p.230–238 (in German), 1967.

UY, B. Long-term service-load behaviour of simply supported profiled composite slabs. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings**. v. 123, p.193-208, 1997.

VIANNA, J. C. **Sistema de laje-mista para edificações residenciais com o uso de perfis embossados de chapa dobrada**. 2005. 189p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

VIEIRA, J. D. **Estudo teórico-experimental do comportamento de lajes mistas com perfis incorporados de aço. Rio de Janeiro.** 2003. 121p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

VITORRIO, S. **Time-Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Slabs.** 2011. 161p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade de Bolonha, Bolonha, 2011.

WANG, Y.; GENG, Y.; WANG, Q.; RANZI, G. Long-term behaviour of simply supported composite slabs with recycled coarse aggregate. **Magazine of Concrete Research**. v.68, n.24, p. 1278-1293, 2016.

WRIGHT, H. D.; VITEK, M. J. L.; RAKIB, S. N. Long-term creep and shrinkage in composite beams with partial connection. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings**. v. 94, p.187-198, 1992.

# APENDICÊ A - MODELOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA

## *A1. Modelo do ACI 209-2R (2008)*

O modelo ACI Commitee 209-2R (2008) é um método empírico desenvolvido em 1971 por Branson e Christiason (1971) e vem sendo atualizado com pequenas modificações. As equações para previsão do coeficiente de fluência e a deformação por retração a qualquer idade, inclui valores últimos, aplicado a concreto de peso normal e leve (usando cura úmida ou a vapor e cimentos tipo I ou III).

O modelo tem como dados de entrada:

- Idade do concreto quando iniciado a secagem, usualmente tomado como a idade de fim de cura;
- Idade de carregamento do concreto;
- Método de cura;
- Umidade relativa do ambiente, em porcentagem (%);
- Relação volume/área ou espessura média;
- Consumo de cimento (kg/m³)
- Teor de ar do concreto, expresso em porcentagem (%) e,
- Tipo de cimento.

**a) Coeficiente de fluência ($\varphi_{cr}$)**

O modelo de fluência tem duas parcelas que determina o valor assintótico e o tempo de desenvolvimento da fluência. O modelo geral é dado pela Equação A1.

$$\varphi_{cr}(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^{\Psi}}{d + (t - t_0)^{\Psi}} \cdot \varphi_{cr}(\infty, t_0) \qquad (A1)$$

Onde:

$\varphi_{cr}(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência na idade $t$ devido o carregamento aplicado na idade $t_0$, $d$ (em dias) e $\Psi$ é considerado constante para um dada forma e tamanho que define parte da relação de tempo, $(t - t_0)$ é o tempo desde a aplicação do carregamento e $\varphi_{cr}(\infty, t_0)$ é o coeficiente de fluência último.

O ACI 209-2R (2008) recomenda os valores de 10 e 0,6 para $d$ e $\Psi$, respectivamente. O efeito da forma e o tamanho pode ser considerado na relação de tempo, substituindo $\Psi = 1$ e $d = f$, dado pela Equação A2, em que $V/S$ é a relação volume/área em mm.

$$f = 26{,}0 \cdot e^{\{1{,}42 \times 10^{-2}(V/S)\}} \qquad (A2)$$

Para condições diferentes da padrão, é necessário fatores de correção. Como é mostrado na Equação A3 e A4, composto por seis fatores.

$$\varphi_{cr}(\infty, t_0) = 2{,}35 \cdot \gamma_c \qquad (A3)$$

$$\gamma_c = \gamma_{c,t0} \cdot \gamma_{c,RH} \cdot \gamma_{c,vc} \cdot \gamma_{c,s} \cdot \gamma_{c,\Psi} \cdot \gamma_{c,\alpha} \qquad (A4)$$

Para idades de aplicação de carregamento maior que 7 dias para concreto com cura úmida ou maior que 1 a 3 dias para concreto curado a vapor, o fator de idade do carregamento $\gamma_{c,t0}$ é estimado pela Equação A5 e A6, sendo $t_0$ a idade do carregamento, em dias.

$$\gamma_{c,t0} = 1{,}25 \cdot {t_0}^{-0{,}118} \ \ para\ cura\ úmida \qquad (A5)$$

$$\gamma_{c,t0} = 1{,}13 \cdot {t_0}^{-0{,}094}\ para\ cura\ a\ vapor \qquad (A6)$$

O fator relativo a umidade relativa do ar (h) $\gamma_{c,RH}$ é dado pela Equação A7.

$$\gamma_{c,RH} = 1{,}27 - 0{,}67h \ \ (para\ h \geq 0{,}40) \qquad (A7)$$

O coeficiente $\gamma_{c,vc}$ permite para um tamanho do elemento definir em termos da razão volume/área, com razão para espessura média entre 38 mm e 150mm. Dado pela Equação A8.

$$\gamma_{c,vc} = \frac{2}{3} \cdot (1 + 1{,}13 \cdot e^{\{-0{,}0213 \cdot (V/S)\}}) \qquad A8)$$

Onde $V$ é o volume do elemento em mm³ e $S$ é a área em mm².

Alternativamente, o método permite usar espessura média entre 150 mm e 380 mm, tem-se as Equações A9 e A10. Para membros com espessura média menor que 150 mm ou razão volume/áreas menor que 37,5 mm usa-se os fatores dados pela Tabela A1. Onde $d = 4(V/S)$é a espessura média em mm do elemento em consideração.

- Para valores de $(t - t_0) \leq 1\ ano$:

$$\gamma_{c,d} = 1{,}14 - 0{,}00092d \qquad ou$$

$$\gamma_{c,d} = 1{,}14 - 0{,}0036\ (V/S)\ , Para\ (t - t_0) \leq 1\ ano \qquad (A9)$$

Tabela A1 – Fator de correção para espessura de elementos ($\gamma_{c,d}$)

| **Espessura média d (mm)** | **Relação volume/área $(V/S)$ (mm)** | **Fator de fluência $(\gamma_{c,d})$** | **Fator de retração $(\gamma_{sh,d})$** |
|---|---|---|---|
| 51 | 12,5 | 1,30 | 1,35 |
| 76 | 19 | 1,17 | 1,25 |
| 102 | 25 | 1,11 | 1,17 |
| 127 | 31 | 1,04 | 1,08 |
| 152 | 37,5 | 1,00 | 1,00 |

- Para valores de $(t - t_0) > 1\ ano$:

$$\gamma_{c,d} = 1{,}10 - 0{,}00067d \qquad ou$$

$$\gamma_{c,d} = 1{,}10 - 0{,}00268\ (V/S)\ , Para\ (t - t_0) > 1\ ano \qquad (A10)$$

Os fatores que levam em conta a composição do concreto são:

- Fator do abatimento (*slump*) $\gamma_{c,s}$, onde s é a medida do abatimento do concreto em mm, dado pela Equação A11.

$$\gamma_{c,s} = 0{,}82 + 0{,}00264 \cdot s \qquad (A11)$$

- Fator agregado fino $\gamma_{c,\Psi}$, dado pela Equação A12, onde Ψ é a razão dos agregados finos em relação ao total de agregado em peso, expresso em porcentagem.

$$\gamma_{c,\Psi} = 0{,}88 + 0{,}0024 \cdot \Psi \qquad (A12)$$

- Fator do teor de ar $\gamma_{c,\alpha}$, Equação A13, onde a é o teor de ar no concreto, em porcentagem.

$$\gamma_{c,\mathrm{a}} = 0{,}46 + 0{,}09 \cdot \alpha \qquad (A13)$$

**b) Retração**

A deformação de retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ na idade do concreto $t$, medida do início da secagem em $t_c$ é calculada pela Equação A14.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \frac{(t - t_c)^{\alpha}}{f + (t - t_c)^{\alpha}} \cdot \varepsilon_{sh}(\infty, t_c) \qquad (A14)$$

Onde $f$ (em dias) e $\alpha$ são consideradas constantes para uma dada forma e tamanho, $\varepsilon_{sh}(\infty, t_c)$ é a deformação de retração última e $(t - t_c)$ é o tempo desde o final da cura inicial.

O ACI 209-2R (2008) recomenda um valor médio de $f$ igual a 35 e 55 para 7 dias de cura úmida e 1 a 3 dias para cura a vapor, respectivamente. Além disso, recomenda um valor de $\alpha = 1$. Desse modo, observa-se que não há distinção de parcelas de retração por secagem, autógena e carbonatação. De maneira similar ao confidente de fluência, o efeito da forma e o tamanho pode ser considerado na relação de tempo, substituindo $\alpha = 1$ e $f$, conforme Equação A15, em que $V/S$ é a relação volume/área em mm.

$$f = 26{,}0 \cdot e^{\{1{,}42 \times 10^{-2}(V/S)\}} \qquad (A15)$$

Para condições diferentes da padrão, é necessário fatores de correção da deformação de retração última $\varepsilon_{sh}(\infty, t_c)$. Como é mostrado na Equação A16 e A17, composto por sete fatores que formam o fator correção $\gamma_{sh}$ .

$$\varepsilon_{sh}(\infty, t_c) = 780 \cdot \gamma_{sh} \times 10^{-6}\, mm/mm \qquad (A16)$$

Com

$$\gamma_{sh} = \gamma_{sh,tc} \cdot \gamma_{sh,RH} \cdot \gamma_{sh,VS} \cdot \gamma_{sh,s} \cdot \gamma_{sh,\Psi} \cdot \gamma_{sh,c} \cdot \gamma_{sh,\alpha} \qquad (A17)$$

Desse modo, tem-se os fatores correção dados por:

- Coeficiente de cura úmida inicial $\gamma_{sh,tc}$ para tempos de cura diferentes de 7 dias, pode ser expresso pela Equação A18. Para cura a vapor com tempo de 1 a 3 dias, usa-se $\gamma_{sh,tc} = 1$.

$$\gamma_{sh,tc} = 1{,}202 - 0{,}2337 \log(t_c) \qquad (A18)$$

- Coeficiente de correção umidade relativa do ar $\gamma_{sh,RH}$, conforme Equação A19. Onde h é a umidade relativa do ar, em decimal.

$$\gamma_{sh,RH} = \begin{cases} 1{,}40 - 1{,}02h \;\; para \; 0{,}40 \leq h \leq 0{,}80 \\ 3{,}00 - 3{,}0h \quad para \; 0{,}80 \leq h \leq 1 \end{cases} \qquad (A19)$$

- Coeficiente $\gamma_{sh,VS}$, conforme Equação A20, dado em função do tamanho do elemento em termos da razão volume/área, para elementos com relação $(V/S)$ diferente de 38 mm ou espessura média diferente de 150 mm. A espessura média de um elemento é definida como quatro vezes a relação volume/área, ou seja, $d = 4(V/S)$, que coincide com o dobro da espessura real no caso de lajes de concreto convencionais.

$$\gamma_{sh,VS} = 1{,}2e^{\{-0{,}00472(V/S)\}} \qquad (A20)$$

Alternativamente, de mesmo modo que o coeficiente de fluência, para espessura média menores 150 mm ou razão volume/área menores que 37,5mm, usa-se os valores $\gamma_{sh,d}$ apresentado na Tabela A1. Para espessura média de elementos maiores que 150 mm e até 380 mm, conforme Equação A21 e A22.

- Para primeiro ano de secagem $(t - t_c) \leq 1 \; ano$:

$$\gamma_{sh,d} = 1{,}23 - 0{,}0015 \cdot d$$
$$\gamma_{sh,d} = 1{,}23 - 0{,}006 \cdot (V/S) \qquad (A21)$$

- Para valores finais $(t - t_c) > 1 \; ano$:

$$\gamma_{sh,d} = 1{,}17 - 0{,}00114 \cdot d$$
$$\gamma_{sh,d} = 1{,}17 - 0{,}00456 \cdot (V/S) \qquad (A22)$$

Para qualquer um dos métodos, o ACI209-2R (2008) cita que $\gamma_{sh}$ não deve ser considerado menor que 0,2. Além disso, indica que se use $\varepsilon_{sh}(\infty, t_c) \geq 100 \times 10^{-6} \, mm/mm$ se o concreto estiver sob umidade sazonal e ciclos de secagem e $\varepsilon_{sh}(\infty, t_c) \geq 150 \times 10^{-6} \, mm/mm$ quando o concreto estiver sob condições de secagem permanente.

Os fatores que levam em conta a composição do concreto são:

- Fator do abatimento (*slump*) $\gamma_{sh,s}$, onde s é a medida do abatimento do concreto em mm, dado pela Equação A23.

$$\gamma_{sh,s} = 0{,}89 + 0{,}00161 \cdot s \qquad (A23)$$

- Fator agregado fino $\gamma_{c,\Psi}$, dado pela Equação A24, onde Ψ é a razão dos agregados finos em relação ao total de agregado em peso, expresso em porcentagem.

$$\gamma_{sh,\Psi} = 0{,}30 + 0{,}014 \cdot \Psi \ \ para \quad \Psi \leq 50\%$$
$$\gamma_{sh,\Psi} = 0{,}90 + 0{,}002 \cdot \Psi \ \ para \quad \Psi > 50\% \qquad (A24)$$

- Fator consumo de cimento $\gamma_{sh,c}$, Equação A25, onde c é consumo em kg/m³:

$$\gamma_{sh,c} = 0{,}75 + 0{,}00061 \cdot c \qquad (A25)$$

- Fator do teor de ar $\gamma_{sh,\alpha}$, Equação A26, onde a é o teor de ar no concreto, em porcentagem.

$$\gamma_{c,\mathrm{a}} = 0{,}95 + 0{,}008 \cdot \alpha \ \geq 1 \qquad (A26)$$

## *A2. Modelo AS 3600 (2018)*

Os modelos de fluência e retração do AS 3600 (2018) incluem fatores de correção para o tipo de ambiente, maturidade do concreto e tempo. O fator ambiental considera climas que variam de árido a tropical e próximo ao litoral.

**a) Fluência**

O modelo usa o coeficiente de fluência $\varphi_{cr}\ (t, t_0)$ para o concreto de qualquer idade $t$, em dias, que pode ser calculado pelo coeficiente de fluência básica $\varphi_{cr,b}$, com a Equação A27.

$$\varphi_{cr}\ (t, t_0) = k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 \varphi_{cr,b} \qquad (A27)$$

O coeficiente de fluência básica é dado em função da resistência característica à compressão aos 28 dias. A Tabela A2 apresenta os coeficientes de fluência associado a cada resistência.

Tabela A2 – Coeficientes de fluência básica

| **Resistencia característica $f_{ck}$ (MPa)** | **20** | **25** | **32** | **40** | **50** | **65** | **80** | **100** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficiente de fluência básica ($\varphi_{cr,b}$) | 5,2 | 4,2 | 3,4 | 2,8 | 2,4 | 2,0 | 1,7 | 1,5 |

Fonte: AS3600 (2017)

Onde $k_2$ pode ser obtido pela Equação A28 e $t$, expresso em dias.

$$k_2 = \frac{\alpha_2 t^{0,8}}{t^{0,8} + 0{,}15 t_h} \quad e \quad \alpha_2 = 1{,}0 + 1{,}12 e^{(-0{,}008 t_h)} \qquad (A28)$$

O parâmetro $t_h$ é chamado de espessura fictícia do elemento e é usada para determinar o coeficiente de fluência e a deformação devida a retração, é definida pela Equação A29.

$$t_h = \frac{2A_g}{u_e} \qquad (A29)$$

Onde $A_g$ é área bruta da seção transversal do elemento e $u_e$é o perímetro da seção transversal exposta a secagem mais metade do perímetro de quaisquer espaços vazios contidos dentro da seção transversal (Gholamhoseini, 2014).

O parâmetro $k_3$ depende da idade do concrete $t$ no tempo de carregamento, dado pela Equação A30.

$$k_3 = \frac{2{,}7}{1 + log(t)} \qquad (A30)$$

O parâmetro $k_4$ depende do tipo de clima e tem como valor os abaixo:

- 0,70 para ambiente árido;
- 0,65 para ambientes internos;
- 0,60 para ambiente interno temperado e,
- 0,50 para ambiente tropical ou costeiro.

O termo $k_5$ é um fator de modificação para concretos de alta resistência, tomado conforme Equação A31.

$$\begin{aligned} &k_5 = 1{,}0 \qquad para \quad f_{ck} \leq 50\ MPa;\ ou \\ &k_5 = (2{,}0 - \alpha_3) - 0{,}02(1{,}0 - \alpha_3)f_{ck} \quad para \quad 50\ MPa \leq f_{ck} \leq 100\ MPa \\ &\alpha_3 = 0{,}7/(k_4\alpha_2) \end{aligned} \qquad (A31)$$

O fator $k_6$ contabiliza a fluência não linear desenvolvida para níveis de carregamentos acima de $0{,}45f_{cm}$, dado pela Equação A32.

$$\begin{aligned} &k_6 = 1{,}0 \qquad para \quad \sigma_o \leq 0{,}45f_{cm}\ ; \\ &k_6 = e^{1{,}5\left(\frac{\sigma_o}{f_{cmi}} - 0{,}45\right)} \quad para \quad \sigma_o > 0{,}45f_{cm} \end{aligned} \qquad (A32)$$

A norma AS 3600 (2018) indica que o intervalo de confiança do cálculo do coeficiente de fluência é de aproximadamente de 30%. Cita ainda que para períodos prolongados de temperatura acima de 25ºC, é provável que esse intervalo seja maior.

**b) Retração**

A deformação devido a retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ pode ser determinada de medições de concretos iguais ou por testes de oito semanas de secagem modificada por valores de longa duração, conforme traz AS 3600 (2018). Na falta desses dados, a retração $\varepsilon_{sh}$ pode ser obtida como a soma da deformação da retração química (autógena) $\varepsilon_{sh,au}$ e a retração por secagem $\varepsilon_{sh,d}$, como apresentado na Equação A33.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,au}(t, t_c) + \varepsilon_{sh,dr}(t, t_c) \qquad (A33)$$

A deformação devido a retração autógena é dada pela Equação A34:

$$\varepsilon_{sh,au}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,au\infty} \times (1{,}0 - e^{-0{,}07t}) \qquad (A34)$$

Onde t é o time (em dias) após a concretagem e $\varepsilon_{sh,au\infty}$ é a retração autógena dada pela Equação A35.

$$\varepsilon_{sh,au\infty} = (0{,}07 f_{ck} - 0{,}5) \times 50 \times 10^{-6} \quad Para\ f_{ck} \leq 50\ MPa$$
$$\varepsilon_{sh,au\infty} = (0{,}08 f_{ck} - 1{,}0) \times 50 \times 10^{-6} \quad Para\ f_{ck} > 50\ MPa \qquad (A35)$$

A parcela de retração por secagem $\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c)$ após $t$ dias do início da secagem, pode ser obtida pela Equação A36.

$$\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c) = k_1 k_4 \varepsilon_{sh,dr,b} \qquad (A36)$$

Onde $k_1$ é obtido pela Equação A37 e o parâmetro $k_4$ depende do clima e é obtido conforme já tabelado anteriormente para o coeficiente de fluência.

$$k_1 = \frac{\alpha_1 t^{0,8}}{t^{0,8} + 0{,}15 t_h} \quad e \quad \alpha_1 = 0{,}8 + 1{,}2 e^{(-0{,}005 t_h)} \qquad (A37)$$

A fluência por secagem básica $\varepsilon_{sh,dr,b}$ é dada pela Equação A38.

$$\varepsilon_{sh,dr,b} = (0{,}9 - 0{,}005 f_{ck}) \times 800 \times 10^{-6} \qquad (A38)$$

A norma AS 3600 (2018) ainda indica o fato que os valores obtidos tem intervalo de confiança de 30%.

## *A.3 Modelo Eurocode 2 (2004)*

**a) Fluência**

O coeficiente de fluência pode ser calculado pela Equação A39.

$$\varphi_{cr}(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \qquad (A39)$$

Onde $\varphi_0$ é coeficiente de fluência nocional e obtido pela Equação A40.

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \qquad (A40)$$

Sendo as parcelas:

- $\varphi_{RH}$ é o fator que inclui o feito da umidade relativa do ar (RH) (Equação A41):

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0{,}1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \qquad para\ f_{cm} \leq 35\ MPa \quad ou$$

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH/100}{0{,}1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right] \cdot \alpha_2 \qquad para\ f_{cm} > 35\ MPa \qquad (A41)$$

$h_0$ é a espessura fictícia do elemento em mm, dado por $h_0 = 2A_c/u$, $A_c$ é a área da seção transversal e $u$ é o perímetro exposto a atmosfera.

- $\beta(f_{cm})$ é o fator que inclui o efeito da resistência do concreto (Equação A42):

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16{,}8}{\sqrt{f_{cm}}} \qquad (A42)$$

- $\beta(t_0)$ é o fator que leva em conta o efeito da idade do carregamento (Equação A43):

$$\beta(t_0) = \frac{1}{\left(0{,}1 + t_0^{0{,}20}\right)} \qquad (A43)$$

O coeficiente $\beta_c(t, t_0)$ descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo depois do carregamento e, pode ser estimado pela Equação A44.

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)}\right]^{0{,}3} \qquad (A44)$$

Onde $t$ é idade do concreto, em dias; $t_0$ é a idade do primeiro carregamento; $\beta_H$ é o coeficiente que depende da umidade relativa do ar, em porcentagem, e da espessura fictícia, em mm. Pode ser estimada pela Equação A45.

$$\beta_H = 1{,}5 \cdot [1 + (0{,}012 \cdot RH)^{18}]h_0 + 250 \leq 1500\ para\ f_{cm} \leq 35\ MPa \quad ou$$

$$\beta_H = 1{,}5 \cdot [1 + (0{,}012 \cdot RH)^{18}]h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3\ para\ f_{cm} \geq 35\ MPa \qquad (A45)$$

Os coeficientes $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ consideram a influência da resistência a compressão do concreto, conforme o conjunto de expressões da Equação A46.

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0{,}7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0{,}2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0{,}5} \qquad (A46)$$

O efeito do tipo de cimento pode ser contabilizado modificando a idade de carregamento $t_0$ no cálculo de $\beta(t_0)$, conforme Equação A47.

$$t_{0,aju} = t_{0,T}\left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1\right]^{\alpha} \geq 0{,}5\ dias \qquad (A47)$$

O fator $\alpha$ dependente do tipo de cimento é dado como: $\alpha = -1$ para classe S (cimentos de endurecimento lento); $\alpha = 0$ para classe N (endurecimento normal) e $\alpha = 1$ para classe R (cimentos de alta resistência). O efeito de temperaturas no intervalo de 0-80ºC na maturidade do concreto pode ser contabilizado levando em conta o ajuste a idade do concreto, expressa pela Equação A48, $\Delta t_i$ é o número de dias em que a temperatura T atuante e $T(\Delta t_i)$ é a temperatura em ºC durante esse período.

$$t_T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot exp\left[13{,}65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)}\right] \qquad (A48)$$

O coeficiente médio de variação dos resultados da estimativa de fluência, deduzidos a partir de um banco de dados de resultados de testes laboratoriais é da ordem de 20%.

Quando a tensão no concreto na idade $t_0$ supera $0{,}45 f_{ck}(t_0)$, a fluência não linear $\varphi_{cr,nl}(t, t_0)$ deve ser considerada. Tais situações ocorrem como resultado de protensão, em elementos de concreto pré-moldado, por exemplo. Desse modo, o coeficiente de fluência não linear pode ser estimado pela Equação A49.

$$\varphi_{cr,nl}(t, t_0) = \varphi_{cr}(t, t_0) \cdot exp\big(1{,}5 \cdot (k_\sigma - 0{,}45)\big) \qquad (A49)$$

$k_\sigma$ é a razão entre tensão e a resistência à compressão $\sigma_c / f_{ck}(t_0)$ na idade do carregamento.

**b) Retração**

A retração total $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ é composta pelas parcelas de retração autógena $\varepsilon_{sh,au}(t, t_c)$ e retração por secagem $\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c)$. A retração autógena desenvolve durante o endurecimento do concreto, a maior parte, se desenvolve nos primeiros dias após lançamento e, é dado como uma função linear com a resistência do concreto. O Eurocode 2 (2004) orienta que deve ser considerado em específico quando um concreto novo é moldado sobre um concreto endurecido. A retração por secagem desenvolve lentamente, como função da migração da água através do concreto endurecido. A deformação devido a retração por ser expressa conforme Equação A50.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,au}(t) + \varepsilon_{sh,dr}(t, t_c) \qquad (A50)$$

A retração autógena é estimada pela Equação A51.

$$\varepsilon_{sh,au}(t, t_c) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{\varepsilon_{sh,au}}(\infty) \qquad (A51)$$

Cujas parcelas são calculadas pela Equação A52 E A53.

$$\varepsilon_{sh,au\infty}(t,t_c) = 2{,}5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} \quad (A52)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - exp(-0{,}2 \cdot t^{0{,}5}) \quad (A53)$$

O desenvolvimento da retração por secagem no tempo é dado pela Equação A54.

$$\varepsilon_{sh,dr}(t,t_c) = \beta_{ds}(t,t_c) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{sh,dr0}(t,t_c) \quad (A54)$$

A parcela $\beta_{ds}(t,t_c)$ é calculada de acordo com a Equação A55.

$$\beta_{ds}(t,t_c) = \frac{(t-t_c)}{(t-t_c) + 0{,}04\sqrt{h_0^3}} \quad (A55)$$

Onde $t$ é idade do concreto, em dias; $t_c$ é a idade do concreto (em dias) no início da secagem, usualmente definido a partir do fim da cura.

O coeficiente $k_h$ depende da espessura fictícia $h_0$, dada pelos valores apresentados na Tabela A3.

Tabela A3 - Valores de $k_h$ na Equação A54.

| $h_0(mm)$ | $k_h$ |
|---|---|
| 100 | 1,0 |
| 200 | 0,85 |
| 300 | 0,75 |
| ≥500 | 0,70 |

Fonte: Eurocode 2 (2004)

A retração por secagem básica $\varepsilon_{sh,dr0}(t,t_c)$ é calculada pela Equação A56.

$$\varepsilon_{sh,dr0}(t,t_c) = 0{,}85 \cdot \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right)\right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (A56)$$

O parâmetro $\beta_{RH}$ inclui a relação com a umidade relativa do ar, dado pela Equação A57.

$$\beta_{RH} = 1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3\right] \quad (A57)$$

Onde $f_{cm}$ é a resistência média a compressão do concreto (MPa), $f_{cmo} = 10\ MPa$, $RH$ é a umidade relativa do ar (%) e $RH_0 = 100\%$. Os coeficientes $\alpha_i$ depende do tipo de cimento, conforme apresentado na Tabela A4.

Tabela A4 - Valores de $\alpha_i$ dependentes do tipo de cimento.

| Parâmetro | Tipo de cimento | | |
|---|---|---|---|
| | *S* | *N* | *R* |
| $\alpha_{ds1}$ | 3 | 4 | 6 |
| $\alpha_{ds2}$ | 0,13 | 0,12 | 0,11 |

Fonte: Eurocode 2 (2004)

O Eurocode 2 (2004) não deixa claro a consideração do efeito da temperatura na maturidade do concreto na formulação para estimativa da deformação de retração. Mas dado a influência na maturidade, considera a sua inclusão no cálculo de $\beta_{ds}(t, t_c)$.

A estimativa dos valores médios de retração quando comparados com valores de testes experimentais podem apresentar coeficiente de variação de cerca de 30%.

## *A.4 Modelo ABNT NBR 6118 (2014)*

**a) Fluência**

A deformação por fluência do concreto pode ser obtida através do coeficiente de fluência $\varphi_{cr}$ que segundo a ABNT NBR 6118 (2014) é composta de duas partes, uma rápida e outra lenta. A deformação rápida é irreversível $\varphi_{cr,a}$ e ocorre durante as primeiras 24h após a aplicação da carga que originou. A deformação lenta é, por sua vez, composta de outras duas parcelas: a deformação lenta irreversível $\varphi_{cr,f}$ e a deformação lenta reversível $\varphi_{cr,d}$.

O coeficiente de fluência $\varphi_{cr}(t, t_0)$ é dado pela Equação A58, válido também para a tração.

$$\varphi_{cr}(t, t_0) = \varphi_{cr,a} + \varphi_{cr,f\infty} \cdot [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{cr,d\infty} \cdot \beta_d \qquad (A58)$$

Onde t é a idade fictícia do concreto no instante do carregamento, em dias; $t_0$ é a idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento único, em dias.

Dessa forma, tem-se o cálculo de cada parcela:

- Parcela do coeficiente de fluência rápida $\varphi_{cr,a}$ determinada pela Equação A59.

$$\varphi_{cr,a} = 0{,}8 \cdot \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}\right], \quad para\ 20 \leq f_{ck} \leq 45\ MPa$$

$$\varphi_{cr,a} = 1{,}4 \cdot \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}\right], \quad para\ 50 \leq f_{ck} \leq 90\ MPa \qquad (A59)$$

A parcela $f_c(t_0)/f_c(t_\infty)$ é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade, que pode ser obtida por $\beta_1$.

- Parcela do coeficiente de fluência lenta irreversível $\varphi_{cr,f\infty}$ (Equação A60 e A61)

$$\varphi_{cr,f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c}\,, \quad para\ 20 \leq f_{ck} \leq 45\ MPa \qquad (A60)$$

$$\varphi_{cr,f\infty} = 0{,}45 \cdot \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c}\,, \quad para\ 50 \leq f_{ck} \leq 90\ MPa \qquad (A61)$$

Onde:

$\varphi_{1c}$ é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente U, expresso em porcentagem (%) e da consistência do concreto, dado pela Tabela A5.

$\varphi_{2c}$ é o coeficiente dependente da espessura fictícia $h_{fic}$ da peça, em centímetros, conforme Equação A62.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (A62)$$

Tabela A5 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração

| Ambiente | Umidade U (%) | Fluência $\varphi_{1c}$ | | | Retração $\varepsilon_{s1} \times (10^{-4})$ | | | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Abatimento (ABNT NBR NM 67) | | | | | | |
| | | 0-4 | 5- 9 | 10-15 | 0-4 | 5-9 | 10-15 | |
| Na água | - | 0,6 | 0,8 | 1,0 | +1,0 | +1,0 | +1,0 | 30,0 |
| Ambiente úmido (acima da água) | 90 | 1,0 | 1,3 | 1,6 | -1,9 | -2,5 | -3,1 | 5,0 |
| Ar livre, em geral | 70 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | -3,8 | -5,0 | -6,2 | 1,5 |
| Em ambiente seco | 40 | 2,3 | 3,0 | 3,8 | -4,7 | -6,3 | -7,9 | 1,0 |

$\varphi_{1c} = 4{,}45 - 0{,}035 \cdot U$ para abatimento entre 5 cm e 9 cm e $U \leq 90\%$.
Os valores de $\varphi_{1c}$ e $\varepsilon_{s1}$ para $U \leq 90\%$ e abatimento entre 0-4 cm são 25% menores e, para abatimentos entre 10-15 cm, são 25% maiores.
$\gamma = 1 + exp(-7{,}8 + 0{,}1 \cdot U)$ para $U \leq 90\%$.
$\varepsilon_{s1} = -8{,}09 + (U/15) - (U^2/2284) - (U^3/133765) + (U^4/7608150)$ para abatimentos de 5-9 cm e $40\% \leq U \leq 90\%$.
Nota: A consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço, sem adição de superplastificante e superfluidificantes.

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014)

O coeficiente relativo a deformação lenta reversível, função da idade do concreto $\beta_f(t)$ ou $\beta_f(t_0)$, dado pela Equação A63.

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 - A \cdot t + B}{t^2 + C \cdot t + D} \quad (A63)$$

Cujas parcelas são obtidas conforme Equações A64 a A68.

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \quad (A64)$$
$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \quad (A65)$$
$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \quad (A66)$$
$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 \quad (A67)$$

$h$ é a espessura fictícia, expressa em metros (m) e para valores de $h$ fora do intervalo $0{,}05 \leq h \leq 1{,}6$, adotam-se os extremos correspondentes.

- O coeficiente relativo a deformação lenta reversível $\varphi_{cr,d\infty}$ é considerado igual a 0,4. O coeficiente relativo a deformação lenta reversível $\beta_d(t)$ função do tempo decorrido após o carregamento é dado pela Equação A69.

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (A69)$$

**b) Retração**

A deformação devido a retração do modelo da ABNT NBR 6118 (2014) depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e a espessura fictícia da peça. A retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ pode ser estimada pela Equação A70.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh\infty} \cdot [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (A70)$$

O valor final de retração $\varepsilon_{sh\infty}$ dado pela Equação A71.

$$\varepsilon_{sh\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} \quad (A71)$$

Onde o coeficientes $\varepsilon_{1s}$ é dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto, conforme Tabela A5. O coeficiente $\varepsilon_{2s}$ é dependente da espessura fictícia da peça, expressa em centímetros (cm), dado pela Equação A72.

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2 \cdot h_{fic}}{20{,}8 + 3 \cdot h_{fic}} \quad (A72)$$

O coeficiente $\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ pode ser obtido graficamente na ABNT NBR 6118 (2014) ou estimada pela Equação A73.

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (A73)$$

Onde os termos A até E são calculados conforme Equação A74 a A78, respectivamente.

$$A = 40 \quad (A74)$$
$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4{,}8 \quad (A75)$$
$$C = 2{,}5h^3 - 8{,}8h + 40{,}7 \quad (A76)$$
$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6{,}8 \quad (A77)$$
$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0{,}8 \quad (A78)$$

A espessura fictícia $h$ é expresso em metros (m), para valores de $h$ fora do intervalo $0{,}05 \leq h \leq 1{,}6$, adotam-se os extremos correspondentes e o tempo $t$, em dias ($t \geq 3$ dias).

A espessura fictícia das peças $h_{fic}$ ou $h$ pode ser calculado de acordo com a Equação A79.

$$h_{fic} = \gamma \cdot \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (A79)$$

Onde $A_c$ é a área da seção transversal da peça e $u_{ar}$ é o perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar. O coeficiente $\gamma$ depende da umidade relativa do ar, em porcentagem, dado pela Equação A80.

$$\gamma = 1 + exp(-7{,}8 + 0{,}1 \cdot U) \quad (A80)$$

De modo a considerar o efeito da temperatura na maturidade do concreto, considera-se uma idade fictícia $t$, não aplicado para quando houver cura a vapor, pode ser expressa pela Equação A81.

$$t = \alpha \sum_{i} \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \qquad (A81)$$

$T_i$ é a temperatura média diária do ambiente, expressa em graus Celsius (ºC) e $\Delta t_{ef,i}$ é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente $T_i$, pode ser admitida constante. O parâmetro $\alpha$ depende da velocidade de endurecimento do cimento e, na falta de dados experimentais, adota-se os valores da Tabela A6.

Tabela A6 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração.

| **Cimento Portland (CP)** | $\alpha$ | |
|---|---|---|
| | **Fluência** | **Retração** |
| Endurecimento lento (CPIII e CPIV, todas as classes de resistência) | 1 | 1 |
| Endurecimento normal (CPI e CPII, todas as classes de resistência) | 2 | |
| Endurecimento rápido (CPV-ARI) | 3 | |
| Legenda:<br>CP I e CP II-S – Cimento Portland comum<br>CP II-E, CP II-F e CP II-Z – Cimento Portland composto<br>CP III – Cimento Portland de alto forno<br>CP IV – Cimento Portland pozolânico<br>CP V-ARI – Cimento Portland de alta resistência | | |

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014)

## *A.5 Modelo Model Code (2010)*

**a) Fluência**

O coeficiente de fluência é calculado a partir da soma da fluência básica e fluência por secagem, conforme Equação A82.

$$\varphi_{cr}\,(t, t_0) = \varphi_{cr,b}\,(t, t_0) + \varphi_{cr,d}\,(t, t_0) \qquad (A82)$$

Onde $\varphi_{cr,b}\,(t, t_0)$ é a parcela de fluência básica e $\varphi_{cr,d}\,(t, t_0)$ é a parcela de fluência por secagem. $t$ é a idade do concreto em dias no momento avaliado e $t_0$ é a idade do concreto na idade do carregamento em dias ajustada de acordo $(t_{0,aju})$ com Equação A83 para levar em conta o efeito do cimento e temperatura da cura.

$$t_{0,aju} = t_{0,T}\left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1\right]^{\alpha} \geq 0{,}5\ dias \qquad (A83)$$

Onde $t_{0,T}$ é a idade do concreto de carregamento em dias ajustada par levar em conta a maturidade do concreto em função da temperatura, quando é diferente de 20ºC, expressa pela Equação A84, $\Delta t_i$ é o número de dias em que a temperatura T esteve atuante e $T(\Delta t_i)$ é a temperatura em ºC durante esse período

$$t_T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot exp\left[13{,}65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)}\right] \qquad (A84)$$

O fator $\alpha$ é o coeficiente que depende do tipo de cimento dado como: $\alpha = -1$ para classe 32,5 N (cimentos de endurecimento lento); $\alpha = 0$ para classe 32,5 R e 42,5 N (endurecimento normal) e $\alpha = 1$ para classe 42,5 R e 52,5 N e 52,5 R (cimentos de alta resistência).

O coeficiente de fluência básica $\varphi_{cr,b}\ (t, t_0)$ é estimada de acordo com Equação A85 e suas parcelas, pelas Equação A86 e A87.

$$\varphi_{cr,b}\ (t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0) \qquad (A85)$$

Com parcelas dadas pela Equação A86 e A87:

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1{,}8}{(f_{cm})^{0{,}7}} \qquad (A86)$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = ln\left(\left(\frac{30}{t_{0,aju}} + 0{,}035\right)^2 \cdot (t - t_0) + 1\right) \qquad (A87)$$

O parâmetro $f_{cm}$ é a resistência média à compressão na idade de 28 dias, que pode ser avaliada como $f_{cm} = f_{ck} + 8\ MPa$.

O coeficiente de fluência por secagem $\varphi_{cr,d}\ (t, t_0)$ pode ser estimado pela Equação A88.

$$\varphi_{cr,d}\ (t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t_0) \cdot \beta_{dc}(t, t_0) \qquad (A88)$$

Cujas parcelas são dadas conforme Equações A89 a A91.

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1{,}4}} \qquad (A89)$$

$$\beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0{,}1 \cdot \frac{h}{100}}} \qquad (A90)$$

$$\beta_{dc}(t_0) = \frac{1}{0{,}1 + {t_{0,aju}}^{0{,}2}} \qquad (A91)$$

O desenvolvimento da fluência por secagem com tempo é descrito pela Equação A92.

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_h + (t - t_0)}\right]^{\gamma(t_0)} \qquad (A92)$$

Com $\gamma(t_0)$ e $\beta_h$ dados pelas Equação A93 e A94.

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2{,}3 + \frac{3{,}5}{\sqrt{t_{0,aju}}}} \qquad (A93)$$

$$\beta_h = 1{,}5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{cm}} \;\; e \;\; \alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0{,}5} \qquad (A94)$$

Onde $RH$ é a umidade relativa do ar em porcentagem e $h = 2\,A_c/u$ é a espessura fictícia, em que $A_c$ é a área da seção transversal (mm²) e $u$ é o perímetro (mm) em contato com a atmosfera.

Para concretos leves o coeficiente de fluência pode ser calculado pela Equação A95.

$$\varphi_{cr}(t, t_0)_{leve} = \eta_E \cdot \varphi_{cr}\,(t, t_0) \qquad (A95)$$

Onde $\eta_E = (\rho/2200)^2$, sendo $\rho$ a massa especifica do concreto leve em kg/m³ e $\varphi_{cr}\,(t, t_0)$ como calculado para concreto peso normal.

Para o caso de níveis de tensão $0{,}4 f_{cm}(t_0) < |\sigma_c| < 0{,}4 f_{cm}(t_0)$ a não linearidade da fluência pode ser contabilizada pela Equação A96.

$$\varphi_{cr}(t, t_0)_{\sigma} = \varphi_{cr}\,(t, t_0) \cdot e^{1{,}5(k_\sigma - 0{,}4)} \quad para \;\; 0{,}4 < k_\sigma < 0{,}6 \qquad (A96)$$

Onde $k_\sigma = |\sigma_c|/f_{cm}$ é a razão tensão/resistência média a compressão

Para levar em conta o efeito da temperatura no modelo de retração, calibrado com temperatura de 20ºC, aplicam-se correções nas parcelas de fluência.

- Efeito da temperatura no desenvolvimento do tempo de fluência é tomado usando $\beta_{h,T}$ (Equação A97), onde substitui $\beta_h$.

$$\beta_{h,T} = \beta_h \cdot \beta_T \quad e \quad \beta_T = exp[1500/(273 + T) - 5{,}12] \qquad (A97)$$

- Efeito da temperatura no coeficiente de fluência básica (Equação A98) $\varphi_{cr,b}\,(t, t_0, T)$, substitui $\varphi_{cr,b}\,(t, t_0)$.

$$\varphi_{cr,b}\,(t, t_0, T) = \varphi_{cr,b}\,(t, t_0) \cdot \varphi_T \;\; e \;\; \varphi_T = exp[0{,}015(T - 20)] \qquad (A98)$$

- Efeito da temperatura na fluência por secagem $\varphi_{cr,d}\,(t, t_0, T)$ (Equação A99), substituindo $\varphi_{cr,d}\,(t, t_0)$.

$$\varphi_{cr,d}\,(t, t_0, T) = \varphi_{cr,d}\,(t, t_0) \cdot {\varphi_T}^{1,2} \qquad (A99)$$

- Para um aumento de temperatura enquanto o elemento está carregado, há uma parcela decorrente da fluência térmica transiente $\Delta\varphi_{T,tran}$ que pode ser avaliado pela Equação A100.

$$\varphi_{cr}\,(t, t_0, T) = \varphi_{cr}\,(t, t_0) + \Delta\varphi_{T,tran} \quad e \quad \Delta\varphi_{T,tran} = 0{,}0004(T - 20)^2 \qquad (A100)$$

**b) Retração**

A deformação total devido a retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ pode ser obtida pela Equação A101, em que é subdividida em retração autógena $\varepsilon_{sh,au}(t, t_c)$ e retração por secagem $\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c)$.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,au}(t, t_c) + \varepsilon_{sh,dr}(t, t_c) \quad (A101)$$

A parcela de retração autógena $\varepsilon_{sh,au}(t, t_c)$pode ser obtida pela Equação A102.

$$\varepsilon_{sh,au}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,au,0}(f_{cm}) \cdot \beta_{au}(t) \quad (A102)$$

Onde os termos $\varepsilon_{sh,au,0}(f_{cm})$ é o coeficiente e retração autógena e $\beta_{au}(t)$ é a função do tempo, dada pelas Equações A103 e A104, respectivamente.

$$\varepsilon_{sh,au,0}(f_{cm}) = -\alpha_{au}\left(\frac{f_{cm}/10}{6 + f_{cm}/10}\right)^{2,5} \cdot 10^{-6} \quad (A103)$$

$$\beta_{au}(t) = 1 - exp\left(-0{,}2 \cdot \sqrt{t}\right) \quad (A104)$$

Em que $t$ é a idade do concreto em dias, $t_c$ é a idade do concreto desde o início da secagem, em dias, $f_{cm}$ é a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias em MPa e o coeficiente $\alpha_{au}$ é dependente do tipo de cimento, dado pela Tabela A7.

Tabela A7 – Coeficientes $\alpha$ dependentes do tipo de cimento

| Tipo de cimento | $\alpha_{au}$ | $\alpha_{ds1}$ | $\alpha_{ds2}$ |
|---|---|---|---|
| 32,5 N | 800 | 3 | 0,013 |
| 32,5R, 42,5N | 700 | 4 | 0,012 |
| 42,5R, 52,5N, 52,5R | 600 | 6 | 0,012 |

Fonte: Model Code (2010)

A parcela de retração por secagem $\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c)$ *(drying)* é dada pela Equação A105.

$$\varepsilon_{sh,dr}(t, t_c) = \varepsilon_{sh,dr0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_c) \quad (A105)$$

Cujas parcelas são formadas pelo coeficiente de retração pro secagem $\varepsilon_{sh,dr0}(f_{cm})$, coeficiente $\beta_{RH}(RH)$, leva em conta o efeito da umidade relativa do ar e a função $\beta_{ds}(t - t_c)$ descreve o desenvolvimento no tempo, dados pelas Equações A106-109, respectivamente.

$$\varepsilon_{sh,dr0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (A106)$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right] & para\ 40 \le RH \le 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0{,}25 & para\ RH \ge 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (A107)$$

$$\beta_{ds}(t - t_c) = \left(\frac{(t - t_c)}{0{,}035 \cdot h^2 + (t - t_c)}\right)^{0,5} \quad (A108)$$

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,1} \le 1{,}0 \quad (A109)$$

Onde $RH$ é a umidade relativa do ar em porcentagem, $h$ é a espessura fictícia dada por $h = 2A_c/u$ em mm, com $A_c$ é a área da seção transversal em mm² e $u$ é o perímetro exposto com a atmosfera em mm.

Para a retração de concretos com agregados leves ($\varepsilon_{sh,l}(t, t_c)$) pode ser estimada pela Equação A110, baseado na retração de concreto normal $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ .Onde $\eta$ é um fator de acordo com a resistência característica dos concretos leves, dado igual a $\eta = 1{,}5$ para classe $8 \leq f_{ck} \leq 16\ MPa$ e $\eta = 1{,}2$ para classe $f_{ck} \geq 20\ MPa$.

$$\varepsilon_{sh,l}(t, t_c) = \eta \cdot \varepsilon_{sh}(t, t_c) \tag{110}$$

De maneira semelhante à fluência, o equacionamento é feito par condição padrão de temperatura de 20ºC. Para levar em conta temperaturas diferentes faz-se necessários fatores de correção. Para a retração autógena a idade do concreto no cálculo de $\beta_{au}(t)$ deve levar em conta a idade ajustada dada pela equação $t_T$.

O feito da temperatura no desenvolvimento da retração por secagem é levando em conta pelo termo $\alpha_{sT}$ dado pela Equação A111 e que substitui o termo $0{,}035 \cdot h^2$ da equação do termo $\beta_{ds}(t - t_c)$.

$$\alpha_{sT}(T) = 0{,}035 \cdot h^2 \cdot exp[-0{,}06(T - 20)] \tag{A111}$$

O efeito da temperatura na magnitude da retração por secagem é dado pelo fator de correção $\beta_{RH,T}$, dado pela Equação A112, e substitui o termo $\beta_{RH}$.

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \cdot \beta_{sT} \tag{A112}$$

As parcelas $\beta_{RH}$ e $\beta_{sT}$ são calculadas pelas Equações A113-A117.

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right] & para \ \ 40 \leq RH \leq RH_T \\ 0{,}25 & para\ RH \geq RH_T \end{cases} \tag{A113}$$

$$RH_T = 99 \cdot \beta_{s1} + \beta_{s1,T} \leq 100\% \tag{A114}$$

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0{,}1} \leq 1{,}0 \tag{A115}$$

$$\beta_{s1,T} = \left(\frac{T - 20}{25}\right)^3 \tag{A116}$$

$$\beta_{sT} = 1 + \left(\frac{4}{103 - RH}\right) \cdot \left(\frac{T - 20}{40}\right) \tag{A117}$$

## *A.6 Modelo de Bazant e Rilem B4 (2015)*

O modelo B4 representa uma melhoria do modelo B3 desenvolvido por Bazant e Baweja (2000), baseado na descrição matemática de dez fenômenos físicos que afetam a fluência e a retração, que foi calibrado com base em uma série de dados. O modelo foi desenvolvido para ser aplicado tanto a estruturas simples quanto complexas. O modelo tem como principal fonte de erros o efeito da composição do concreto e a solicitação de projeto nos parâmetros do modelo. Para o modelo foram utilizadas funções de conformidade $J(t, t_0)$ a fim de reduzir o risco dos erros causados por valores imprecisos do módulo de elasticidade do concreto. O modelo ainda separa claramente a fluência básica e a de secagem. Uma das principais mudanças foi que a expansão da base de dados também possibilitou incluir no modelo a retração autógena, e ainda considerar outras influências como o tipo de agregado (mineralogia), e estender a aplicabilidade aos concretos modernos (BAZANT e RILEM, 2015).

O modelo tem como fatores de entrada:

- Idade do concreto e idade de carregamento do concreto;
- Quantidade de agregados e quantidade de cimento
- Tipo de cimento e agregado
- Resistência a compressão do concreto
- Condições de cura
- Umidade relativa
- Geometria do elemento estrutural
- Relação volume/superfície
- Relação a/c

De acordo com Bazant e Rilem (2015), o equacionamento do modelo é apresentado para previsão da fluência com a função de conformidade $J\ (t, t_0)$ e deformações devidas a retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$. O modelo apresenta conjunto de equações e tabelas dos seus parâmetros, como o método geral. Destaca-se que o modelo ainda permite incluir parâmetros de misturas como adições minerais e aditivos. Além disso, possui método simplificado para quando se conhece apenas a resistência a compressão do concreto. Apresenta-se o método geral para previsão das deformações devidos fluência e retração do concreto, maiores informações podem ser obtidas junto a Bazant e Rilem (2015).

Os chamados tempos equivalentes são introduzidos para permitir capturar os efeitos da temperatura. Como são baseados em ensaios padrão, busca-se capturar os efeitos de aceleração e desaceleração governados pelas energias de ativação $U$. Os fatores de correção são dados por $\beta_{Th}$ (Equação A118)

$$t_c = t_{c,real} \cdot \beta_{Th}\,, \quad \beta_{Th} = exp\left[\frac{U_h}{R}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T_{cur}+273}\right)\right] \qquad (A118)$$

$T_{cur}$ é a temperatura de cura, expressa em ºC, entre 20 e 30ºC; $U_h$ é a energia de ativação de hidratação. De modo semelhante, a duração de secagem $(t - t_c)_{real}$ e a duração do carregamento permanente $(t - t_0)$ é dado pela Equação A119-A120.

$$t_c = t_{c,real} \cdot \beta_{Ts}\,, \quad \beta_{Ts} = exp\left[\frac{U_s}{R}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T_{cur}+273}\right)\right] \qquad (A119)$$

$$t' = t_{real} \cdot \beta_{Th}\, e\, t = t' + (t - t_0)\beta_{Tc}\,, \beta_{Tc} = exp\left[\frac{U_c}{R}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T_{cur}+273}\right)\right] \qquad (A120)$$

Em que $t, t_0\, e\, t_c$ são, respectivamente, a idade do concreto, a idade do carregamento e a idade a partir do início da secagem ou do fim da cura. $U_s$ e $U_c$ são energias de ativação da difusão de umidade e de fluência, respectivamente. Na falta de dados para um dado concreto, usa-se apenas um valor para $U/R = 4000\ K$.

**a) Fluência**

O coeficiente de fluência $\varphi_{cr}\ (t, t_0)$ é definido pela Equação A121 em função da função de conformidade de fluência $J\ (t, t_0)$ e o módulo de elasticidade $E\ (t_0)$ na idade do carregamento $t_0$.

$$\varphi_{cr}\ (t, t_0) = E\ (t) \cdot J\ (t, t_0) - 1 \qquad (A121)$$

No modelo B4 a função de conformidade é decomposta, conforme Equação A122.

$$J\ (t, t_0) = q_1 + R_T C_0(t, t_0) + C_d(t, t_0, t_c) \qquad (A122)$$

No qual $q_1$ é a função relacionada a resposta instantânea, $C_0(t, t_0)$ é a função de fluência básica e $C_d(t, t_0, t_c)$ parte da função de conformidade devido a fluência por secagem. A função $q_1$ é dada pela função aproximada, dada pela Equação A123.

$$q_1 = \frac{1}{E_0} = \frac{p_1}{E_{28}} \qquad (A123)$$

Onde $p_1$é um fator dependente do tipo de cimento, definido pela Tabela 3, o valor de $E_{28}$ pode ser calculado a partir de equações normativas. Bazant e Rilem (2015) apresentam a Equação A124 para sua previsão.

$$E_{28} = 4734\sqrt{f_{cm28}}(MPa) \qquad (A124)$$

Os efeitos da temperatura são contabilizados no fator $R_T$, expresso pela Equação A125.

$$R_T = exp\left[\frac{U'_c}{R}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T_{cur} + 273}\right)\right] \quad (A125)$$

A função de fluência básica $C_0(t, t_0)$ pode ser escrita de acordo com Equação A126.

$$C_0(t, t_0) = q_2 Q(t, t_0) + q_3 ln\left[1 + \left(\frac{t - t_0}{1\ dia}\right)^{0,1}\right] + q_4 ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (A126)$$

De acordo com Bazant e Rilem (2015), $Q(t, t_0)$ é uma integral binomial que não pode ser expressa analiticamente, mas pode ser calculada pelas formula explícita aproximada da Equação A127-A130.

$$Q(t, t_0) = Q_f(t_0)\left(1 + \left(\frac{Q_f(t_0)}{Z(t, t_0)}\right)^{r(t_0)}\right)^{-\frac{1}{r(t_0)}} \quad (A127)$$

$$Q_f(t_0) = \left[0{,}086\left(\frac{t_0}{1\ dia}\right)^{2/9} + 1{,}21\left(\frac{t_0}{1\ dia}\right)^{4/9}\right]^{-1} \quad (A128)$$

$$Z(t, t_0) = \left(\frac{t_0}{1\ dia}\right)^{-0,5} ln\left[1 + \left(\frac{t - t_0}{1\ dia}\right)^{0,1}\right] \quad (A129)$$

$$r(t_0) = 1{,}7\left(\frac{t_0}{1\ dia}\right)^{0,12} + 8 \quad (A130)$$

Por fim a função de fluência por secagem $C_d(t, t_0, t_c)$ é dada pela Equação A131.

$$C_d(t, t_0, t_c) = q_5\langle exp[-p_{5H} H(t, t_c)] - exp[-p_{5H} H_c(t'_0, t_c)]\rangle^{0,5} \quad (A131)$$

Onde $t'_0 = \max(t_0, t_c)\ se\ t \geq t'_0, se\ não\ C_d(t, t_0, t_c) = 0$. Os parâmetros $H(t, t_c)$ e $H_c(t'_0, t_c)$ são obtidos pelas Equações A131 e A132, respectivamente.

$$H(t, t_c) = 1 - (1 - h)tanh\sqrt{\frac{t - t_c}{\tau_{sh}}} \quad (A131)$$

$$H_c(t'_0, t_c) = 1 - (1 - h)tanh\sqrt{\frac{t'_0 - t_c}{\tau_{sh}}} \quad (A132)$$

Os parâmetros $q_2$, $q_3$, $q_4$ e $q_5$ foram calibrados com relações semi-empíricas, sendo dadas pelas Equações A133 a A136, correlacionadas a seguintes fatores:

- Fluência por envelhecimento visco-elástico (*aging viscoelastic creep)*:

$$q_2 = \frac{p_2}{1\ GPa}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{2w}} \quad (133)$$

- Fluência visco-elástica não envelhecida (*non-aging viscoelastiv creep):*

$$q_3 = p_3 q_2 \left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{3a}} \left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{3w}} \quad (A134)$$

- Fluidez (*flow)*:

$$q_4 = \frac{p_4}{1\ GPa}\left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{4a}}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{4w}} \quad (A135)$$

- Fluência por secagem (*drying creep)*:

$$q_5 = \frac{p_5}{1\ GPa}\left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{5a}}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{5w}} |k_h \epsilon_{sh\infty}(t_c)|^{p_{5\epsilon}} \quad (A136)$$

Os parâmetros $p_i$ dependentes do tipo de cimento e são obtidos a partir da Tabela A8.

Tabela A8 – Parâmetros do modelo de retração dependentes do tipo de cimento

| Parâmetro | Tipo de cimento | | |
|---|---|---|---|
| | R | RS | SL |
| $p_1$ | 0,70 | 0,60 | 0,80 |
| $p_2$ | $58{,}6 \times 10^{-3}$ | $17{,}4 \times 10^{-3}$ | $40{,}5 \times 10^{-3}$ |
| $p_3$ | $39{,}3 \times 10^{-3}$ | $39{,}3 \times 10^{-3}$ | $39{,}3 \times 10^{-3}$ |
| $p_4$ | $3{,}4 \times 10^{-3}$ | $3{,}4 \times 10^{-3}$ | $3{,}4 \times 10^{-3}$ |
| $p_5$ | $777 \times 10^{-3}$ | $94{,}6 \times 10^{-3}$ | $496 \times 10^{-3}$ |
| $p_{5H}$ | 8,00 | 1,00 | 8,00 |
| $p_{2w}$ | 3,0 | 3,00 | 3,00 |
| $p_{3a}$ | -1,10 | -1,10 | -1,10 |
| $p_{3w}$ | 0,40 | 0,40 | 0,40 |
| $p_{4a}$ | -0,90 | -0,90 | -0,90 |
| $p_{4w}$ | 2,45 | 2,45 | 2,45 |
| $p_{5\epsilon}$ | -0,85 | -0,85 | -0,85 |
| $p_{5a}$ | -1,00 | -1,00 | -1,00 |
| $p_{5w}$ | 0,78 | 0,78 | 0,78 |

Fonte: Bazant e Rilem (2015)

**a) Retração**

A deformação por retração $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ para uma idade $t$ $(dias)$, medida a partir do início da secagem em $t_c$ $(dias)$ é calculada pela Equação A137

$$\varepsilon_{sh,total}(t, t_c) = \varepsilon_{sh}(t, t_c) + \varepsilon_{au}(t, t_c) \quad (A137)$$

Em que $\varepsilon_{au}(t, t_c)$ é a deformação devido a retração autógena e a deformação devido a retração por secagem $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$.

**b-1) Retração por secagem**

A deformação devido a retração por secagem $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ é calculada pela Equação A138.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = -\varepsilon_{sh\infty}(t_c) \cdot k_h \cdot S(t - t_c) \quad (A138)$$

Em que $k_h$ é um coeficiente dependente da umidade $h$, dado pela Equação A140.

Os termos $\varepsilon_{sh\infty}$ e $S(t-\ t_c)$ são expressos pela Equação A139 e A141, respectivamente.

$$\varepsilon_{sh\infty}(\ t_c) = -\varepsilon_0 k_{\varepsilon a}\frac{E(7\beta_{Th}+600\beta_{Ts})}{E(t_c+\tau_{sh}\beta_{Ts})} \quad (A139)$$

$$k_h = \begin{cases} 1-h^3 & h \le 0{,}98 \\ 12{,}94(1-h)-0{,}2 & 0{,}98 \le h \le 1 \end{cases} \quad (A140)$$

$$S(t-\ t_c) = tanh\sqrt{\frac{(t-\ t_c)}{\tau_{sh}}} \quad (A141)$$

A evolução do módulo de elasticidade pode ser obtida pela Equação A142 (Bazant e Rilem, 2015).

$$E(t) = E_{28}\sqrt{\frac{t}{4\ dias+(6/7)t}} \quad (A142)$$

Em que $k_{\varepsilon a}$ é um fator relacionado ao tipo de agregado presente no concreto, apresentado na Tabela A9, que pode ser assumido igual a 1 se não existir informações do tipo de agregado. O parâmetro $\tau_{sh}$ é o intervalo de retração, dado pela equação A143, $\beta_{Th}$ e $\beta_{Ts}$ são parâmetros relacionados à umidade e temperatura e, $\varepsilon_0$ (Equação A144) é um parâmetros relacionado à proporção dos materiais presentes no concreto.

$$\tau_{sh} = \tau_0 \cdot k_{\tau a}\left(k_s\frac{D}{1mm}\right)^2 \quad (A143)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{cem}\left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{\epsilon a}}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{\epsilon w}}\left(\frac{6{,}5c}{\rho}\right)^{p_{\epsilon c}}, \rho = 2350\ kg/m^3 \quad (A144)$$

Onde a espessura efetiva $D = 2\,V/S$ e $\tau_0$, conforme Equação A145:

$$\tau_0 = \tau_{cem}\left(\frac{a/c}{6}\right)^{p_{\tau a}}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{p_{\tau w}}\left(\frac{6{,}5c}{\rho}\right)^{p_{\tau c}} \quad (A145)$$

O parâmetro $k_{\tau a}$ é definido na Tabela como correção dependente do tipo de agregado e pode ser tomado igual a 1 quando não houver informações. A geometria do elemento é capturada pelo parâmetro de forma $k_s$.

$$\mathrm{k_s} = \begin{cases} 1{,}00\ (\text{lajes infintas}) \\ 1{,}10\ (\text{cilindros infinitos}) \\ 1{,}25\ (\text{prisma quadrado infinito}) \\ 1{,}30\ (\text{esfera}) \\ 1{,}55\ (\text{cubo}) \end{cases}$$

Os parâmetros $\varepsilon_{cem}, p_{\epsilon a}, p_{\epsilon w}, p_{\epsilon c}$ são dependentes do tipo de cimento e são especificado de acordo com a Tabela A10.

Tabela A9 – Fatores dependentes do tipo de agregado para modelo de retração B4

| Tipo de agregado | $k_{\tau a}$ | $k_{\varepsilon a}$ | Módulo de elasticidade $E_{agg}(GPa)$ | Densidade $\rho_{agg}(g/cm^3)$ |
|---|---|---|---|---|
| Diabásio | 0,06 | 0,76 | 70-90 | 2,8-3,0 |
| Quartzo | 0,59 | 0,71 | 50-90 | 2,5-2,8 |
| Calcário | 1,80 | 0,95 | 10-70 | 1,8-2,9 |
| Arenito | 2,30 | 1,60 | 10-50 | 2,0-2,8 |
| Granito | 4,00 | 1,05 | 30-70 | 2,5-2,8 |
| Diorito de quartzo | 15,0 | 2,20 | 50-100 | 2,7-3,1 |

Fonte: Bazant e Rilem (2015)

Tabela A10 – Parâmetros do modelo de retração dependentes do tipo de cimento

| Parâmetro | Tipo de cimento | | |
|---|---|---|---|
| | R | RS | SL |
| $\tau_{cem}$ (dias) | 0,016 | 0,080 | 0,010 |
| $p_{\tau a}$ | -0,33 | -0,33 | -0,33 |
| $p_{\tau w}$ | -0,06 | -2,40 | 3,55 |
| $p_{\tau c}$ | -0,10 | -2,70 | 3,80 |
| $\varepsilon_{cem}$ | $360 \times 10^{-6}$ | $860 \times 10^{-6}$ | $410 \times 10^{-6}$ |
| $p_{\epsilon a}$ | -0,80 | -0,80 | -0,80 |
| $p_{\epsilon w}$ | 1,10 | -0,27 | 1,00 |
| $p_{\epsilon c}$ | 0,11 | 0,11 | 0,11 |

Fonte: Bazant e Rilem (2015)

**b-2) Retração autógena**

A retração autógena pode ser obtida pela Equação A146.

$$\varepsilon_{au}(t,t_c) = \varepsilon_{au\infty}\left[1+\left(\frac{\tau_{au}}{t+\ t_c}\right)^{\alpha}\right]^{r_t}, \qquad \alpha = r_a\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right) \tag{A146}$$

Em que $w/c$ é a relação água/cimento, $\varepsilon_{au\infty}$ e $\tau_{au}$ são expressas pelas Equações XX

$$\varepsilon_{au\infty} = -\varepsilon_{au,cem}\left(\frac{a/c}{6}\right)^{r_{\varepsilon a}}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{r_{\varepsilon w}} \tag{A147}$$

$$\tau_{au} = \tau_{au,cem}\left(\frac{w/c}{0{,}38}\right)^{r_{\tau w}} \tag{A148}$$

Em que $a/c$ é a relação agregado/cimento, $r_t$, $r_a$, $r_{\varepsilon a}$,$r_{\varepsilon w}$, $\varepsilon_{au,cem}$, $\tau_{au,cem}$ são parâmetros relacionados ao tipo de cimento e dados pela Tabela A11.

Tabela A11 – Parâmetros dependentes do cimento para a retração autógena

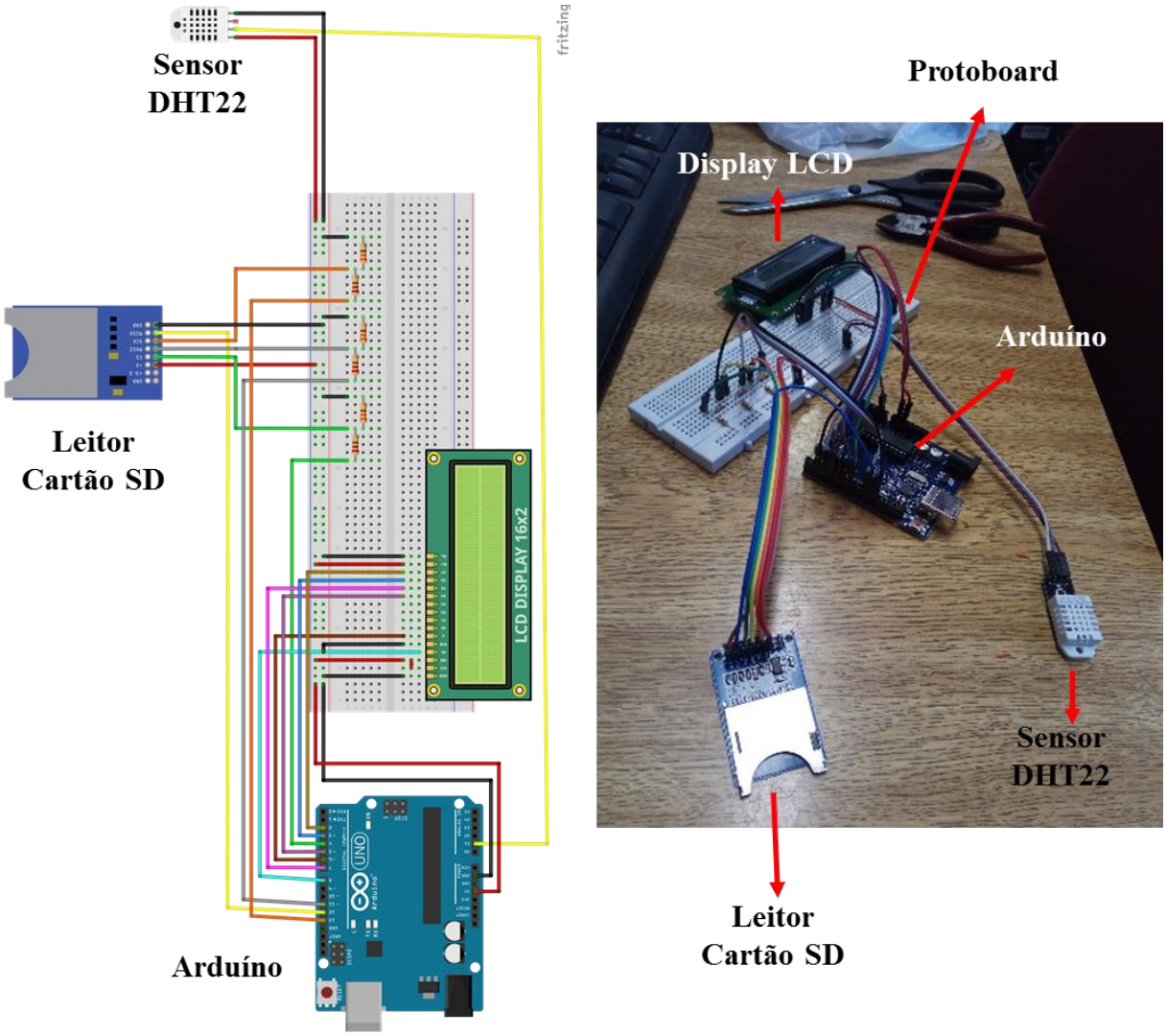
| Parâmetro | Tipo de cimento | | |
|---|---|---|---|
| | R | RS | SL |
| $\tau_{cem}$ (dias) | 1,00 | 41,0 | 1,00 |
| $p_{\tau w}$ | 3,00 | 3,00 | 3,00 |
| $r_t$ | -4,50 | -4,50 | -4,50 |
| $r_\alpha$ | 1,00 | 1,40 | 1,00 |
| $\varepsilon_{au,cem}$ | $210 \times 10^{-6}$ | $-84 \times 10^{-6}$ | $0{,}00 \times 10^{-6}$ |
| $r_{\epsilon a}$ | -0,75 | -0,75 | -0,75 |
| $r_{\epsilon w}$ | -3,50 | -3,50 | -3,50 |

Fonte: Bazant e Rilem (2015)

Um aspecto de destaque é a classificação dos tipos de cimento, conforme Model Code (2010), em cimentos tipo R-*normal*, RS-*rapid hardening* (endurecimento rápido) e SL-*slow hardening* (endurecimento lento), dado em função da reatividade da reação de hidratação do concreto. Bazant e Rilem (2015) indicam uma correlação: ASTM I pode ser considerar como do tipo R, ASTM II – Tipo SL e ASTM III – Tipo RS. Quanto aos outros tipos de cimento, indicam realizar um estudo sobre sua reatividade.

# APÊNDICE B – SENSOR PARA MONITORAMENTO DO AMBIENTE

Figura B.1 – Circuito do sensor DHT22 para monitoramento do ambiente




Fonte: Autor (2019)

# APÊNDICE C – PADRÃO DE FISSURAS DO ENSAIO DE FLEXÃO

Figura C.1 – Fissuras da Laje Mista L1-MD125-LT após ensaio de flexão a quatro pontos

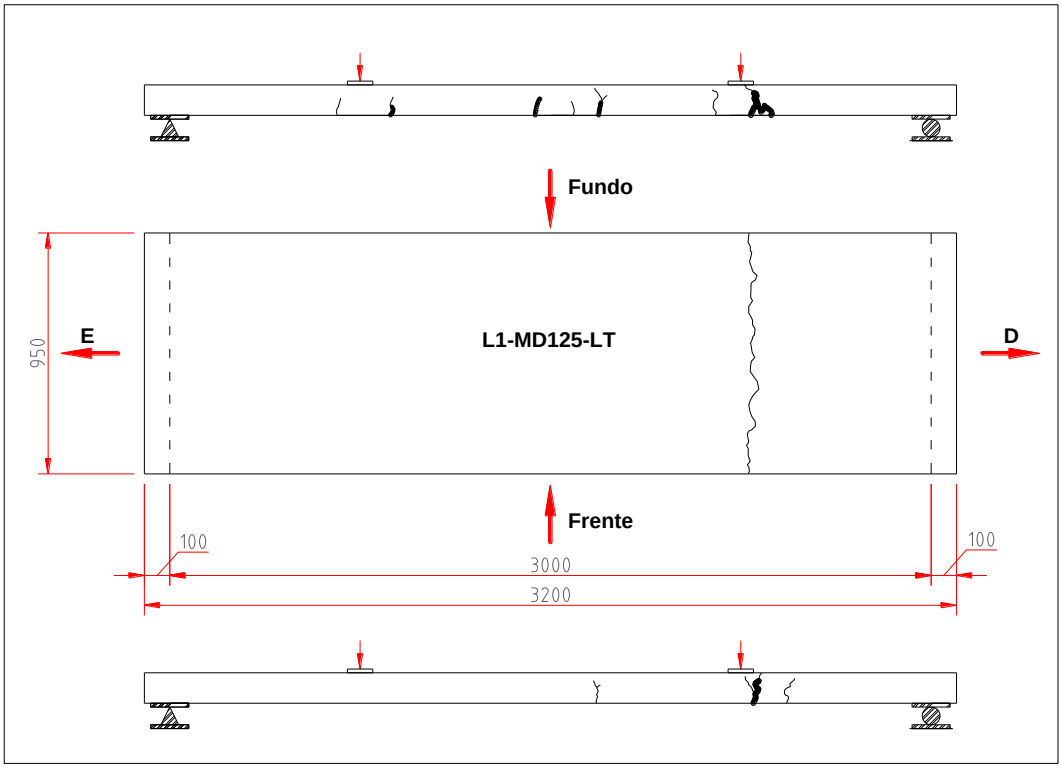
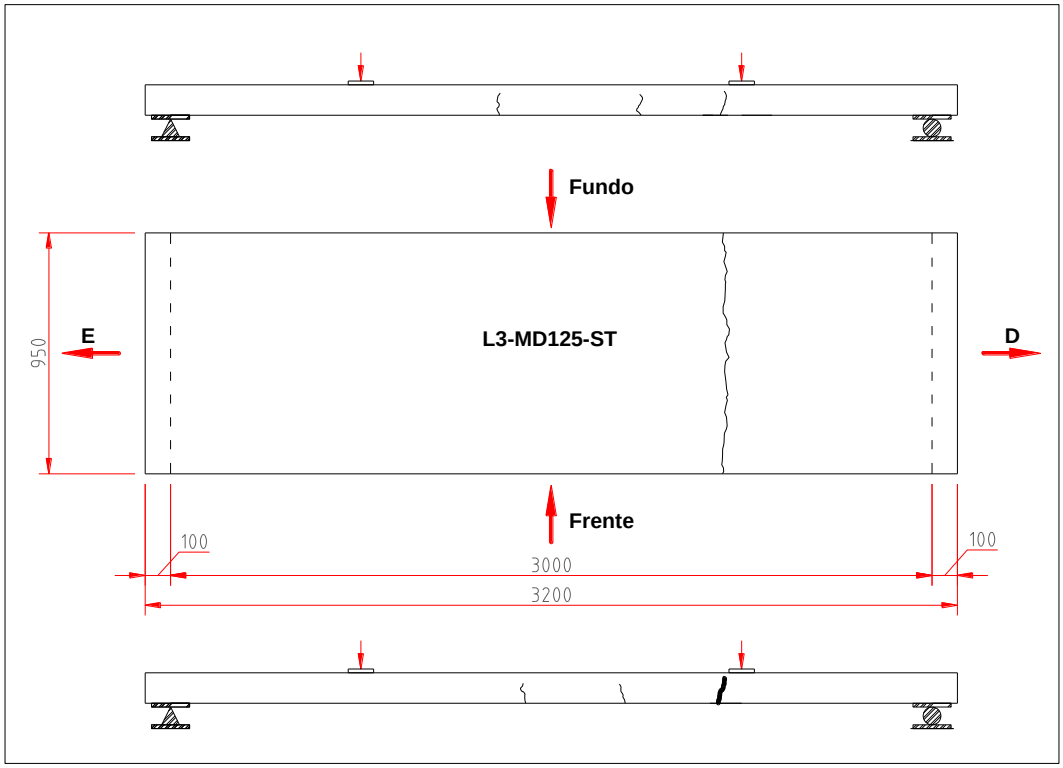



Figura C.2 – Fissuras da Laje Mista L3-MD125-ST após ensaio de flexão a quatro pontos




Fonte: Autor (2019)

Figura C.3 – Fissuras da Laje Mista L2-MD125-LT após ensaio de flexão a quatro pontos

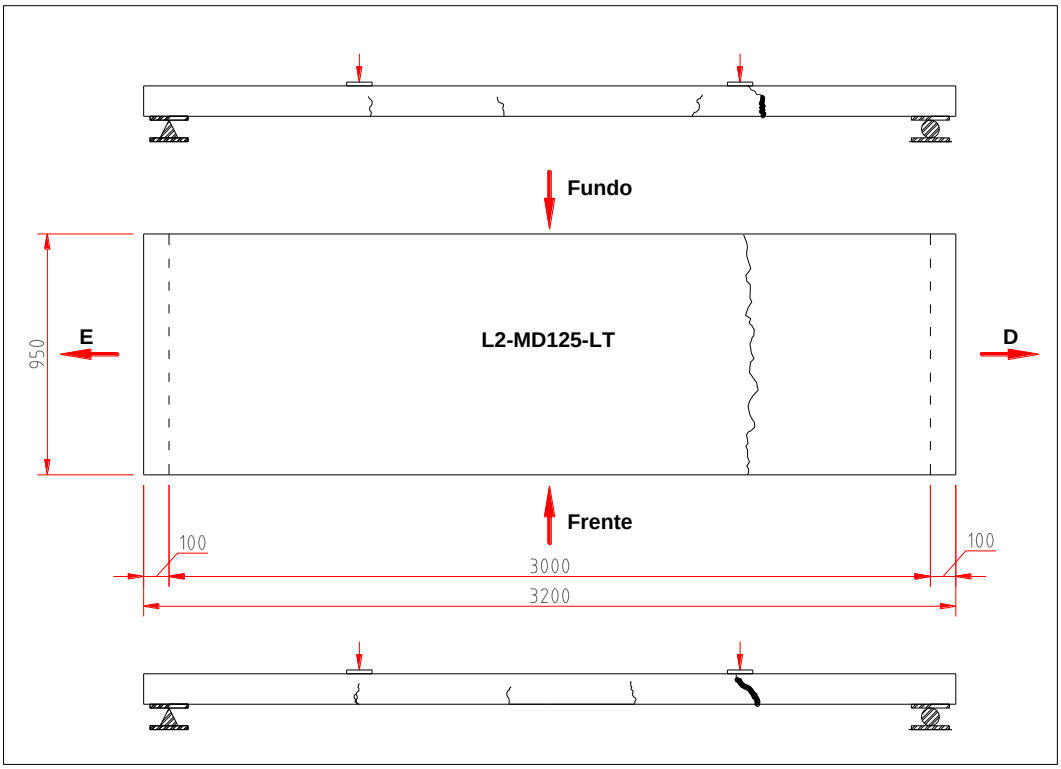
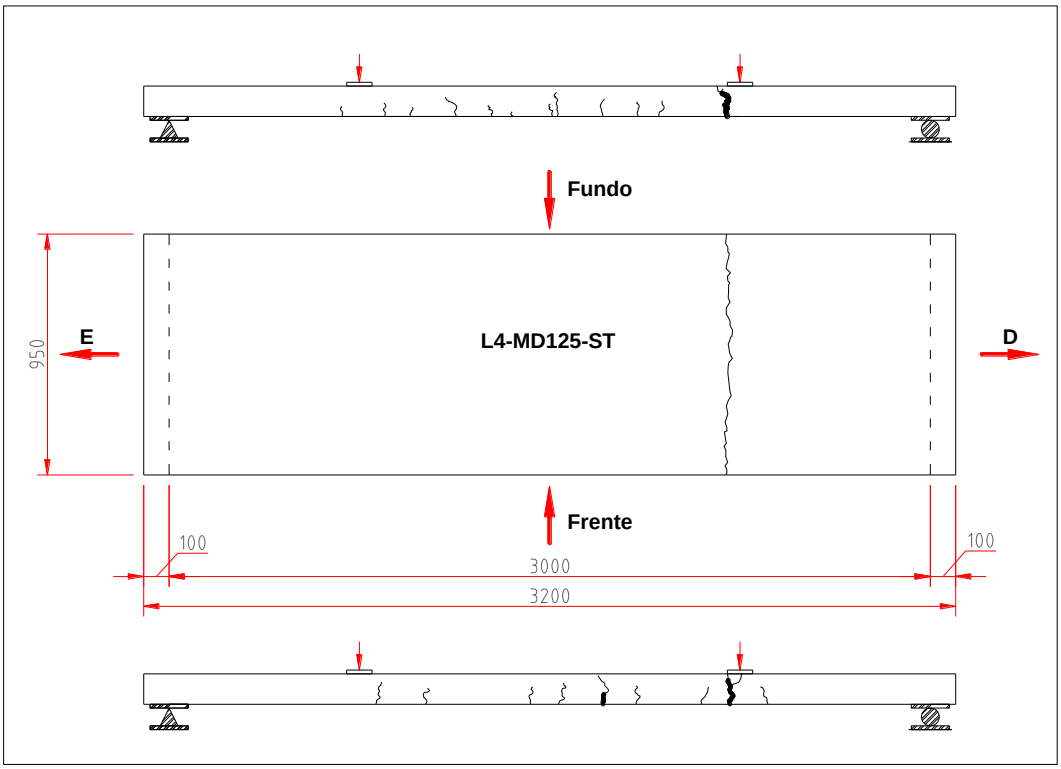



Figura C.4 – Fissuras da Laje Mista L4-MD125-ST após ensaio de flexão a quatro pontos




Fonte: Autor (2019)