

**Rodolfo André Kuche Sanches**

***Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o  
Método dos Elementos Finitos***

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

Orientador:

Prof. Assoc. Humberto Breves Coda

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S211s Sanches, Rodolfo André Kuche  
Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método  
dos elementos finitos/ Rodolfo André Kuche Sanches ;  
orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2011.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação e Área de  
Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
2011.

1. Interação fluido-estrutura. 2. Método dos elementos  
finitos. 3. Análise não linear geométrica. 4. Casca.  
5. Descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária.  
6. Contorno imerso. I. Título.


**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro RODOLFO ANDRÉ KUCHE SANCHES.

Tese defendida e julgada em 30/03/2011 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA** - (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **LEANDRO FRANCO DE SOUZA**  
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **FLAVIO DONIZETI MARQUES**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)


APROVADO

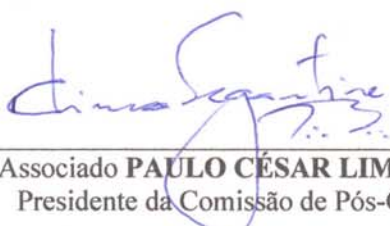
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ROBERTO SILVA CORRÊA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **EDUARDO DE MORAIS BARRETO CAMPELLO**  
(Escola Politécnica/USP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **PAULO CÉSAR LIMA SEGANTINE**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



*Dedico carinhosamente este trabalho à minha amada esposa Leila e aos meus pais Carlos e Neuza*



# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos:

A Deus pela vida, pelo seu incrível amor e por ter estado ao meu lado durante todos os momentos.

À minha esposa Leila, a quem tanto amo, pela paciência, companheirismo, ajuda e amor a mim dedicados. Sem a sua participação esse trabalho não seria possível.

Aos meus pais Carlos e Neuza, não só pelo apoio, incentivo e amor que me dispensaram durante este trabalho, mas pela educação que me proporcionaram, meu pai me fazendo despertar curiosidade e gosto pela ciência e pela natureza desde criança e minha mãe sempre me incentivando e me cobrando nos estudos.

Ao meu Orientador Humberto Breves Coda pela atenção extraordinária, por sua disposição em ajudar sempre que preciso e pela amizade.

Aos professores Leandro F. de Souza e Flávio D. Marques pela participação no exame de qualificação ao Doutorado.

À Pós-Doutora do SET Célia L. O. Kawabata pela ajuda com processamento paralelo.

Ao Analista de Sistemas do SET Masaki Kawabata Neto pelo suporte técnico computacional.

Aos meus irmãos, o engenheiro e colega montanhista Rafael e o futuro engenheiro e colega de pescarias Ricardo pela amizade e incentivo.

Aos colegas do SET pelo companheirismo e amizade.

Ao professor Fehmi Cirak da Universidade de Cambridge por me receber para o estágio de Doutorado sanduíche e por compartilhar seu conhecimento e experiência.

Aos colegas do Departamento de Engenharia da Universidade de Cambridge Thomas Rüberg e Quan Long pelos bons momentos que passamos trabalhando juntos.

Ao professor Rodrigo Paccola do SET pela amizade e ajuda com pré e pós processamento.

Ao professor Venturini, que deixou muitas saudades, pelos momentos que conversamos nos

corredores do SET, pelo interesse demonstrado por este trabalho e por sua disposição em ajudar os alunos sempre que preciso.

Aos demais funcionários do SET que muito contribuíram para a minha formação pessoal e profissional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro dado sem o qual este trabalho não seria possível.



*“Quando [Deus] regulou o peso do vento, e fixou a medida das águas; quando prescreveu leis para a chuva e caminho para o relâmpago dos trovões; então viu Ele a sabedoria e a manifestou; estabeleceu-a, e também a esquadrinhou.”*

***Jó 28:25-27***



# *Resumo*

SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2011. 228 p. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

Este trabalho consiste no desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise não linear geométrica de interação fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O algoritmo para dinâmica dos fluidos é explícito e a integração temporal é baseada em linhas características. O código computacional é capaz de simular as equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis tanto na descrição Euleriana como na descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária (ALE), na qual é possível prescrever movimentos para a malha do fluido. A estrutura é modelada em descrição Lagrangeana total através de uma formulação de MEF para análise dinâmica não linear geométrica de cascas baseada no teorema da mínima energia potencial total escrito em função das posições nodais e vetores generalizados e não em deslocamentos e rotações. Essa característica evita o uso de aproximações de grandes rotações. Dois modelos de acoplamentos são desenvolvidos. O primeiro modelo, ideal para problemas onde a escala de deslocamentos não é muito grande comparada com as dimensões do domínio do fluido, é baseado na descrição ALE e o acoplamento entre as duas diferentes malhas é feito através do mapeamento das posições locais dos nós do contorno do fluido sobre os elementos de casca e vice-versa, evitando a necessidade de coincidência entre os nós da casca e do fluido. A malha do fluido é adaptada dinamicamente usando um procedimento simples baseado nas posições e velocidades nodais da casca. O segundo modelo de acoplamento, ideal para problemas com grande escala de deslocamentos tais como estruturas infláveis, considera a casca imersa na malha do fluido e consiste em um procedimento robusto baseado em curvas de nível da função distância assinalada do contorno, o qual integra o algoritmo Lagrangeano de casca com o Fluido em descrição Euleriana, sem necessidade de movimentação da malha do fluido, onde a representação computacional do fluido se resume a uma malha não estruturada maior ou igual ao domínio inicial do fluido e a interface fluido-casca dentro da malha do fluido é identificada por meio de curvas de nível da função distância assinalada do contorno. Ambos os modelos são testados através de exemplos numéricos mostrando robustez e eficiência. Finalmente, como uma sugestão para o futuro desenvolvimento desta pesquisa, iniciaram-se estudos relativos a funções B-Splines. O uso desse tipo de funções deverá resolver problemas de estabilidade relativos a oscilações espúrias devidas ao uso de polinômios de Lagrange para a representação de descontinuidades.

**Palavras-chave** Interação fluido-estrutura. Método dos Elementos finitos. Análise não linear geométrica. Casca. Descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária. Contorno imerso.



# *Abstract*

SANCHES, R. A. K. **On fluid-shell coupling using the Finite Element Method** 2011. 228 p. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

This work consists of the development of computational tools for nonlinear geometric fluid-shell interaction analysis using the Finite Element Method (FEM). The fluid solver is explicit and its time integration based on characteristics. The computational code is able to simulate the Navier-Stokes equations for compressible flows written in the Eulerian description as well as in the arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description, enabling movements prescription for the fluid mesh. The structure is modeled in a total Lagrangian description, using a FEM formulation to deal with geometrical nonlinear dynamics of shells based on the minimum potential energy theorem written regarding nodal positions and generalized unconstrained vectors, not displacements and rotations, avoiding the use of large rotation approximations. Two partitioned coupling models are developed. The first model, ideal for simulations where the displacements scale is not very large compared to the fluid domain, is based on the ALE description and the coupling between the two different meshes is done by mapping the fluid boundary nodes local positions over the shell elements and *vice-versa*, avoiding the need for matching fluid and shell nodes. The fluid mesh is adapted using a simple approach based on shell nodal positions and velocities. The second model, ideal for problems with large scales of displacements such as inflatable structures, is based on immersed boundary and consists of a robust level-set based approach that integrates the Lagrangian shell finite and the Eulerian finite element high speed fluid flow solver, with no need for mesh adaptation, where the fluid representation relies on a fixed unstructured mesh larger or equal to the initial fluid domain and the fluid-shell interface inside the fluid mesh is tracked with level sets of a boundary signed distance function. Both models are tested with numerical examples, showing efficiency and robustness. Finally, as a suggestion for future development of this research, we started studies relatives to B-Spline functions. The use of this kind of functions should solve stability problems related to spurious oscillations due to the use of Lagrange polynomials for representing discontinuities.

**Keywords** Fluid-structure interaction. Finite element method. Geometric non linear analysis. Shell. Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description. Immersed boundary.



# *Lista de Figuras*

1.1	Algoritmo do programa de cascas . . . . .	52
1.2	Algoritmo do programa de dinâmica dos fluidos . . . . .	52
1.3	Algoritmo do acoplamento ALE-Lagrangeano . . . . .	52
1.4	Algoritmo do acoplamento Euleriano-Lagrangeano . . . . .	53
2.1	Diagrama de Collar . . . . .	56
2.2	Reversão de comando em asa de aeronave . . . . .	57
2.3	Aerofólio sofrendo divergência aeroelástica . . . . .	58
2.4	Estrutura submetida a <i>buffeting</i> . . . . .	59
2.5	Flutter em aerofólio . . . . .	59
3.1	Volume de controle infinitesimal . . . . .	62
3.2	Força atuando sobre o tetraedro de Cauchy . . . . .	66
3.3	Cinemática adotada na descrição ALE . . . . .	72
4.1	Mudança de configuração de um corpo . . . . .	77
4.2	Mudança de área . . . . .	78
4.3	Forças de superfície . . . . .	81
5.1	Distribuição Gaussiana transportada com dissipação . . . . .	90
5.2	Curvas características para equação linear . . . . .	91
5.3	Curva característica para convecção não linear . . . . .	93
5.4	Variações espúrias . . . . .	103
5.5	Variações espúrias em função do número de Peclet . . . . .	104
5.6	Comparação entre Galerkin clássico e descontínuo . . . . .	105
5.7	Funções de forma para os elementos finitos 3D de fluido . . . . .	109

5.8	Canal com diferença de pressão . . . . .	110
5.9	Malha para o canal . . . . .	110
5.10	Propagação da onda de pressão - primeira parte . . . . .	111
5.10	Propagação da onda de pressão - continuação . . . . .	112
5.11	Geometria e malha do canal com degrau . . . . .	113
5.12	Distribuição de densidade - primeira parte. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985) . . . . .	114
5.12	Distribuição de densidade - continuação. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985) . . . . .	115
5.13	Distribuição de pressão - primeira parte. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985) . . . . .	116
5.13	Distribuição de pressão - continuação. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985) . . . . .	117
5.14	Malha para o aerofólio NACA 0012 . . . . .	120
5.15	Grupos de elementos de mesmo $\Delta t$ . . . . .	121
5.16	$t = 13,01$ (a) Distribuição de pressão (b) Distribuição de massa específica, (c) Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade, (d) Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade . . . . .	121
5.17	Coeficientes de pressão ao longo da corda em vários instantes - primeira parte .	122
5.17	Coeficientes de pressão ao longo da corda em vários instantes - continuação . .	123
5.18	Distribuição de massa específica (a) com subciclos de tempo e (b) sem subciclos de tempo . . . . .	123
5.19	Discretização da placa . . . . .	124
5.20	Resultados para o problema da placa - (a) linhas de corrente (b) massa es- pecífica, (c) pressão, (d) temperatura . . . . .	125
5.21	Contornos de massa específica (a) e pressão (b) obtidos por Zienkiewicz et al. (1999) . . . . .	125
5.22	Distribuição de pressão sobre a placa segundo diversos autores . . . . .	126
5.23	Geometria do problema da barragem rompida . . . . .	128



5.24	Barragem no instante $t = 2 s$ . . . . .	129
5.25	Barragem no instante $t = 4 s$ . . . . .	130
5.26	Barragem no instante $t = 6,1 s$ . . . . .	131
5.27	Deslocamento horizontal relativo vs. tempo adimensional . . . . .	131
6.1	Mapeamento posicional (CODA; PACCOLA, 2007) . . . . .	133
6.2	Mapeamento da superfície média . . . . .	136
6.3	Vetores de posição generalizados . . . . .	137
6.4	Elemento finito de casca . . . . .	139
6.5	Geometria, velocidade inicial e discretização . . . . .	143
6.6	Energia e deslocamento no balanço vs. tempo . . . . .	144
6.7	Casca cilíndrica - Geometria e discretização . . . . .	145
6.8	Deslocamento no ápice vs. tempo . . . . .	146
6.9	Deslocamento no ápice vs. tempo adaptado de Argyris et al. (2003) . . . . .	146
7.1	Pontos para aplicação de condições de contorno . . . . .	148
7.2	Movimentação da malha . . . . .	151
7.3	Esquema de acoplamento . . . . .	152
7.4	Malhas para o canal com degrau e parede flexível . . . . .	153
7.5	Contornos de pressão e deslocamentos sobre o degrau com parede flexível . . . . .	154
7.6	Posição vertical em $x = 1,8 m$ vs. tempo . . . . .	155
7.7	Malha para a análise da esfera sob onda de choque . . . . .	156
7.8	Pressão normalizada vs. ângulo . . . . .	157
7.9	Schlieren numérico do presente trabalho - esquerda vs. imagens experimentais por Tanno et al. (2003) - direita . . . . .	158
7.10	Reação no nó vinculado (força de arrasto sobre a esfera) pelo presente trabalho e força de arrasto medida experimentalmente por Tanno et al. (2003) . . . . .	159
7.11	Discretização do problema de flutter de painel . . . . .	159

7.12	Deslocamento vertical vs. tempo em $x = 0,35m$ considerando $v = 0,0$ e $Mach = 2,3$ . . . . .	160
7.13	Deslocamento vertical em $x = 0,35$ para diferentes números de $Mach$ . . . . .	160
7.14	Deslocamento vertical vs. tempo em $x = 0,35$ para $Mach = 2.0$ - comparação com outros trabalhos . . . . .	161
7.15	Escoamento a $Mach 2,3$ - comparações do deslocamento vertical vs. tempo em $x = 0,35$ com outros trabalhos e diferentes condições de vínculo . . . . .	161
7.16	Escoamento a $Mach 2,3$ - comparações do deslocamento vertical vs. tempo em $x = 0,35$ em análise não linear geométrica com Rifai et al. (1999) e com Teixeira e Awruch (2005) . . . . .	162
7.17	Diagrama de fase para os deslocamentos verticais na posição $x = 0,35m$ e $Mach = 2,3$ . . . . .	162
7.18	Distribuição de pressão e deslocamentos na estrutura para $Mach = 2,3$ - escala 1 : 1 . . . . .	163
7.19	Distribuição de tensões normais na direção do eixo da placa, na face inferior, para a placa deformada no intervalo de $0,055 - 0,06s$ - escala 10 : 1 . . . . .	164
7.20	Painel elástico em um tubo de choque - esquema experimental (adaptado de Giordano et al. (2005)) . . . . .	164
7.21	Discretização para o problema da placa submetida a choque . . . . .	165
7.22	Schlieren numérico vs. imagens experimentais obtidas por Giordano et al. (2005) - primeira parte . . . . .	165
7.22	Schlieren numérico vs. imagens experimentais obtidas por Giordano et al. (2005) - continuação . . . . .	166
7.23	Distribuição de pressão e deslocamento no instante $t=140 \mu s$ . . . . .	167
7.24	Deslocamento no topo da placa vs. tempo - comparação com Giordano et al. (2005) . . . . .	167
7.25	Pressão no topo do canal à 10 mm antes da posição da placa - comparação com Giordano et al. (2005) . . . . .	168
7.26	Geometria do reator adaptada de Casadei e Halleux (1995) . . . . .	168
7.27	Discretização do reator . . . . .	169

7.28	Distribuição de pressão: presente trabalho à esquerda e Soria e Casadei (1997) à direita . . . . .	171
7.29	Vetores de velocidade: presente trabalho à esquerda e Soria e Casadei (1997) à direita . . . . .	172
7.30	Deslocamento vertical no topo e radial na parede em $z = 41,3$ m . . . . .	173
7.31	Reator deformado . . . . .	174
8.1	Representação do contorno da estrutura para o domínio fluido . . . . .	177
8.2	Classificação dos elementos . . . . .	178
8.3	Imposição de condição de contorno imersa . . . . .	180
8.4	Discretização do tubo . . . . .	181
8.5	Distribuição de pressão (Acima) e módulo de deslocamentos na casca (Abaixo) - primeira parte . . . . .	182
8.5	Distribuição de pressão (Acima) e módulo de deslocamentos na casca (Abaixo) - continuação . . . . .	183
8.6	Deslocamento radial vs. tempo em $x = 0,34$ m . . . . .	184
8.7	Geometria do <i>airbag</i> (adaptado de Cirak e Radovitzky (2005)) . . . . .	184
8.8	Discretização do <i>airbag</i> . . . . .	185
8.9	Deslocamento no topo vs. tempo . . . . .	185
8.10	Distribuição de pressão no <i>airbag</i> deformado . . . . .	186
9.1	b-splines de vários graus. . . . .	190
9.2	geração de uma b-spline cúbica 2D. . . . .	191
9.3	Função distância assinalada para um corpo definido por uma malha triangular . . . . .	193
9.4	Classificação das células . . . . .	194
9.5	(a) B-splines cúbicas e função ponderadora ativa 1D. (b) Funções de forma baseadas em B-splines cúbicas 1D. . . . .	196
9.6	Construção das funções de forma para o espaço 2D. . . . .	197
9.7	Pontos para aproximação iso-paramétrica da geometria . . . . .	199
9.8	Aproximação iso-paramétrica de um modelo 1D . . . . .	199

9.9	Geometria e dimensões. . . . .	200
9.10	Contornos de Tensão para $\sigma_{\theta\theta}$ (esq.) e $\sigma_{rr}$ (dir.). . . . .	201
9.11	Influência do número de pontos de quadratura . . . . .	201
9.12	Influência do comprimento de transição $\delta$ . . . . .	202
9.13	(a) Deslocamento radial (b) Tensões normais radiais e anelares. . . . .	202
9.14	Análise de convergência . . . . .	203
9.15	Condicionamento do sistema durante o movimento do disco. . . . .	204
9.16	—Cilindro aquecido momendo-se em um domínio quadrado. . . . .	204
9.17	Distribuição de temperatura para quatro diferentes posições . . . . .	205
9.18	Pino de Boliche . . . . .	206
9.19	Deslocamentos verticais em diferentes cortes . . . . .	206
9.20	Deslocamentos na direção $x$ . . . . .	207
9.21	Procedimento Lagrangeano: as linhas tracejadas referem-se à representação do contorno para o domínio computacional do fluido . . . . .	209

# *Lista de símbolos importantes*

1

## **Capítulo 3 Fundamentos da mecânica dos fluidos**

$\vec{V}(x,y,z)$  – Vetor velocidade no ponto de coordenadas  $(x,y,z)$  do espaço euclidiano;

$u, v$  e  $w$  – Componentes do vetor velocidade nas respectivas direções  $x, y$  e  $z$ ;

$\cdot$  – Produto interno;

$t$  – Tempo infinitesimal;

$\rho$  – Massa específica do fluido

$dA$  – Área infinitesimal;

$m$  – Massa;

$\vec{F}_s$  – Vetor força de superfície;

$\vec{F}_c$  – Vetor força de campo;

$g$  – Constante de forças de campo;

$\tau$  – Tensão tangencial;

$p$  – Pressão;

$E$  – Energia específica;

$Q$  – Fluxo de calor;

$W$  – Trabalho realizado;

$k$  – Coeficiente de condutividade térmica;

$T$  – Temperatura;

$\vec{t}$  – Vetor de Cauchy;

---

<sup>1</sup>Deve-se notar que, devido à amplitude de assuntos abordados, símbolos semelhantes ou até mesmo iguais são adotados em diferentes capítulos com diferentes significados, necessitando o autor estar atento à descrição dada pelo texto.

$\vec{n}$  – Vetor normal ao plano de corte;

$\sigma$  – Tensor das tensões de Cauchy e representado;

$\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  – Tensões normais de Cauchy;

$\tau$  – Tensor desviador;

$\sigma_m$  – Tensor médio;

$\delta_{ij}$  – Delta de Kronecker;

$\lambda$  – Coeficiente obtido pela hipótese de Stokes;

$\mu$  – Viscosidade dinâmica;

$i$  e  $j$  – Índices que indicam soma, variando de 1 a 3, correspondendo aos eixos cartesianos  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = 3$ ;

$\mathcal{V}$  – Volume;

$n$  – Número de mols;

$r$  – Constante universal dos gases perfeitos em relação ao número de mols;

$R$  – Constante universal dos gases perfeitos em relação à massa;

$C(t_0)$  – Configuração inicial;

$C(t)$  – Configuração atual;

$R$  – Domínio de referência;

$\xi$  – Vetor posição no domínio de referência;

$a$  – Vetor posição na configuração inicial;

$J$  – Determinante Jacobiano do mapeamento do domínio de referência para a configuração inicial;

$w$  – Vetor velocidade do domínio de referência  $R$ ;

$F(a_i, t)$  – Escalar na configuração inicial;

$f(\xi_i, t)$  – Escalar na configuração de referência;

$w_i$  – Componente  $i$  de velocidade do domínio de referência.

#### **Capítulo 4 Fundamentos de mecânica dos sólidos cinematicamente não linear**

$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  – Vetor posição na configuração inicial;

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – Vetor posição na configuração atual;  
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  – Versores dos eixos coordenados no espaço euclidiano;  
 $\dot{x}_i$  e  $\dot{X}_i$  Componentes  $i$  de velocidade respectivamente nas configurações inicial e final;  
 $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{X}_i$  Componentes  $i$  de aceleração respectivamente nas configurações inicial e final;  
 $\chi$  – Função mudança de configuração;  
 $\vec{U}$  – Campo de deslocamentos;  
 $A$  – Matriz gradiente da mudança de configuração;  
 $J$  – Determinante Jacobiano dado por  $J = \det A$ ;  
 $d\mathcal{V}_o$  – Volume de elemento infinitesimal na configuração inicial;  
 $d\mathcal{V}$  – Volume de elemento infinitesimal na configuração atual;  
 $dA$  – Área de elemento plano infinitesimal na configuração inicial;  
 $dA$  – Área de elemento plano infinitesimal na configuração atual;  
 $C$  – Tensor alongamento à direita de Cauchy-Green;  
 $I$  – Tensor identidade;  
 $E$  – Tensor das deformações de Green;  
 $\lambda(U)$  – Alongamento relativo;  
 $\varepsilon_{eng}$  – Pseudo-tensor das deformações de engenharia;  
 $\vec{T}$  e  $\vec{t}$  – Força de superfície respectivamente de Piola-Kirchhoff e de Cauchy;  
 $\sigma$  – Tensor das tensões reais de Cauchy;  
 $P$  – Tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie  $P$ ;  
 $\Omega_0$  – Domínio na configuração inicial;  
 $\Omega$  – Domínio na configuração atual;  
 $t$  – Tempo;  
 $\vec{n}$  – Vetor normal à superfície na configuração atual;  
 $\vec{N}$  – Vetor normal à superfície na configuração inicial;  
 $\vec{Q}(t)$  – Quantidade de movimento linear de um corpo;

$\vec{G}$  – Força de campo no sólido na configuração inicial;

$\vec{\delta x}$  – Vetor deslocamento virtual;

$\rho_0$  – Massa específica na configuração inicial;

$\rho$  – Massa específica na configuração atual;

$S$  – Tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie;

$:$  – Contração de segunda ordem, ou produto escalar entre tensores de segunda ordem;

$tr$  – Traço de um tensor;

$\Pi$  – Funcional de energia potencial total;

$E$  – Módulo de elasticidade, ou módulo de Young;

$\nu$  – Coeficiente de Poisson.

## **Capítulo 5 Análise numérica de dinâmica dos fluidos**

$\phi$  – Escalar que sofre convecção/difusão;

$t$  – Tempo;

$x$  – coordenadas iniciais;

$y$  – coordenadas atuais;

$\frac{\partial}{\partial}$  – Indica derivada parcial;

$u_i$  – Componente  $i$  do vetor de velocidade;

$N_i$  – Função de forma correspondente ao nó  $i$ ;

$\rho$  – Massa específica;

$E$  – Energia por unidade de massa;

$\tau_{ij}$  – Tensão tangencial  $ij$ ;

$p$  – Pressão;

$w_i$  – Componente  $i$  da velocidade da malha;

$h$  – Tamanho do elemento finito;

$c$  – Velocidade do Som;

$T$  – Temperatura;



$c_p$  – Calor específico à pressão constante;

$c_v$  – Calor específico à volume constante;

$\gamma$  – Taxa de calor específico tal que  $\gamma = c_p/c_v$ ;

$\mathbf{N}$  – Vetor das funções aproximadoras;

$\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{T}$  – Vetores coluna dos valores nodais respectivamente de quantidade de movimento específica na direção  $i$ , componente  $i$  de velocidade, massa específica, energia específica, pressão e temperatura;

$\nabla$  – Operador divergência;

$f_{\mu_a}$  – Termo dissipativo numérico;

$mu_a$  – Viscosidade artificial;

$q_{dif}$  – Coeficiente de difusão;

$Pr$  – Número de Prandt;

$T_e$  – Temperatura de estagnação;

$\alpha$  – Ângulo de ataque;

$t^*$  – Tempo adimensionalizado segundo  $t^* = t\sqrt{2g/L_0}$ ;

## **Capítulo 6 Análise de dinâmica das estruturas**

$t$  – Tempo;

$X_i$  – Componente  $i$  do vetor posição na configuração inicial;

$x_i$  – Componente  $i$  do vetor posição na configuração atual;

$N_j$  – Função de forma correspondente ao nó  $j$

$X_{ji}$  – Parâmetro nodal referente ao nó  $j$  da posição na direção  $i$ , na configuração inicial;

$x_{ji}$  – Parâmetro nodal referente ao nó  $j$  da posição na direção  $i$ , na configuração atual;

$f_i^0$  – Componente  $i$  do vetor mapeamento da configuração de referência para a inicial;

$f_i^1$  – Componente  $i$  do vetor mapeamento da configuração de referência para a atual;

$\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  – Coordenadas adimensionais da configuração de referência;

$g^0$  – Vetor generalizado na configuração inicial;

$g^1$  – Vetor generalizado na configuração atual;

$h_0$  – Espessura inicial;

$h$  – Espessura atual;

$e$  – Vetor unitário generalizado;

$\overline{G_{ij}}$  – Valor nodal referente ao nó  $j$  da componente  $i$  do vetor generalizado na configuração atual;

$\dot{x}$  – Velocidade na configuração atual;

$\ddot{x}$  – Aceleração na configuração atual;

$x_s$  – Posição atual no instante  $s$ ;

$\dot{x}_s$  – Velocidade na configuração atual no instante  $s$ ;

$\ddot{x}_s$  – Aceleração na configuração atual no instante  $s$ ;

$Q$  – Quantidade de movimento linear;

$\omega$  – Velocidade angular;

$dV_o$  – Volume de elemento infinitesimal na configuração inicial;

$dA$  – Área de elemento plano infinitesimal na configuração inicial;

$J$  – Quantidade de movimento angular;

$\times$  – Produto vetorial;

$a_j$  – Parâmetro nodal referente ao nó  $j$  de variação linear da espessura ao longo da espessura da casca;

$\gamma$  e  $\beta$  – Constantes do integrador de Newmark;

$\mathcal{F}$  – Primeira variação do funcional de energia potencial total;

$A^0$  – Matriz gradiente do mapeamento de configuração inicial;

$A^1$  – Matriz gradiente do mapeamento de configuração atual;

$A$  – Matriz gradiente da mudança de configuração;

$\mathbf{F}$  – Vetor das forças externas;

$U_e$  – Energia de deformação;

$\mathbf{C}$  – Matriz de amortecimento;

$\mathbf{M}$  – Matriz de massa;

$\Delta x$  – Correção da posição atual;

$\rho$  – Massa específica na configuração atual;

$\Pi$  – Funcional de energia potencial total;

$E$  – Módulo de elasticidade, ou módulo de Young;

$\nu$  – Coeficiente de Poisson.

## **Capítulo 7 Acoplamento com fluido em descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária**

$\Gamma_s$  – Contorno do fluido definido pela casca;

$\Omega_s$  – Domínio discretizado por elementos de casca;

$\mathbf{x}$  – vetor posição;

$k$  – Nós da casca;

$Pf_k$  – Ponto pertencente ao contorno  $\Gamma_s$  da malha do fluido;

$i$  – Nós da malha do fluido, situado no contorno  $\Gamma_s$ ;

$N_k$  – Função de forma do elemento de casca referente ao nó  $k$ ;

$Ps_i$  — Ponto pertencente ao contorno  $\Omega_s$  da malha da casca em aproximação plana;

$s_i$  — Ponto pertencente ao contorno  $\Omega_s$  da malha da casca em aproximação curva;

$\vec{\xi}$  – Vetor posição local em coordenadas triangulares ou tetraedricas;

$\mathbf{u}_s$  – Vetor velocidade em um dado ponto da casca;

$\mathbf{u}_f$  – Vetor velocidade em um dado ponto do fluido;

$\cdot$  – Produto interno;

$\mathbf{n}$  – Vetor normal ao contorno do fluido;

$p$  – Pressão;

$\tau$  – Tensão tangencial.

$q_j(k)$  – Componente  $j$  de força atuando no nó  $k$  da casca;

$w_i$  – Componente  $i$  de velocidade ou de deslocamento da malha;

$\Delta t_s$  – Intervalo do passo de tempo para a casca;

$\Delta t_f$  – Intervalo do passo de tempo para o fluido;

$isf$  – Sub-ciclo para o passo atual de tempo do fluido;

$nsf$  – Número de sub-ciclos de passos no tempo para o fluido;

$Mach$  – Número de Mach, relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som;

$M_S$  – Número de  $Mach$  da onda de choque dado pela velocidade da onda de choque dividida pela velocidade do som;

## **Capítulo 8 Acoplamento Imerso**

$\Gamma_s$  – Contorno da estrutura;

$\Omega_f$  – Domínio físico do fluido;

$SD$  – Função distância assinalada;

$N_I$  – Função de forma referente ao nó  $I$ ;

$\Omega_{ef}$  – Domínio de 1 elemento finito de fluido;

$\nabla$  – Gradiente;

$\phi$  – Grandeza escalar;

$\mathbf{d}$  – Vetor que vai do ponto  $m$  até o ponto  $i$ .

$\mathbf{u}_s$  – Vetor velocidade em um dado ponto da casca;

$\mathbf{u}_f$  – Vetor velocidade em um dado ponto do fluido;

$\cdot$  – Produto interno;

$\mathbf{n}$  – Vetor normal ao contorno do fluido;

$\delta$  – Largura da faixa de imposição das condições de contorno;

$q_j(k)$  – Componente  $j$  de força atuando no nó  $k$  da casca;

$p$  – Pressão;

$\tau$  – Tensão tangencial.

## **Capítulo 9 Proposta para continuidade da pesquisa: uso de uma nova técnica de B-splines imersas**

$s(x)$  – Função spline;

$B$  – Função B-spline;

$SD$  – Função de distância assinalada;

$RF$  – Função de Rvachev;

$\delta$  – Largura da faixa de transição;

$w_i$  – Função ponderadora da B-spline  $i$ ;

$N$  – Função de forma  $i$  – *spline*;

$\bigcirc$  – Domínio paramétrico do corpo;

$\mathcal{V}^r$  – Espaço teste;

$\mathcal{S}_N$  –  $i$ -splines semi-ativas com condições de Neumann;

$\mathcal{A}$  –  $i$ -splines ativas;

$\mathcal{U}^r$  – Espaço tentativa de deslocamentos;

$\mathcal{S}_D$  –  $i$ -splines semi-ativas com condições de Dirichlet;

$\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$  – Vetor coordenadas no espaço paramétrico;

$\mathbf{X} = X_1, X_2, X_3$  – Vetor coordenadas no espaço físico;

$e_{L^2}^r, e_{H^1}^r$  – Erros  $L^2$  e  $H^1$ .



# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>37</b>
1.1	Apresentação da tese . . . . .	39
1.2	Estado da arte . . . . .	40
1.2.1	A mecânica dos fluidos computacional e o MEF . . . . .	41
1.2.2	A mecânica das estruturas computacional . . . . .	43
1.2.3	Análise computacional de interação fluido-estrutura . . . . .	46
1.3	Objetivos e delimitações . . . . .	49
1.3.1	Metodologia . . . . .	49
1.4	Justificativa . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Aspectos gerais dos problemas de interação fluido - estrutura</b>	<b>55</b>
2.1	Fenômenos estáticos . . . . .	57
2.1.1	Fenômenos estáticos de resposta . . . . .	57
2.1.2	Fenômenos estáticos de estabilidade . . . . .	57
2.2	Fenômenos dinâmicos . . . . .	58
2.2.1	Fenômenos dinâmicos de resposta . . . . .	58
2.2.2	Fenômenos dinâmicos de estabilidade . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Fundamentos de mecânica dos fluidos</b>	<b>61</b>
3.1	As equações governantes na descrição Euleriana . . . . .	61
3.1.1	Equação da conservação da massa . . . . .	61
3.1.2	Equação da Quantidade de Movimento . . . . .	63

3.1.3	Equação da Conservação da Energia . . . . .	64
3.1.4	O Tensor das Tensões, as Tensões Desviadoras e a Hipótese de Stokes .	66
3.1.5	A Lei dos Gases Ideais . . . . .	70
3.1.6	Notação Indicial . . . . .	71
3.2	Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária das Equações da Mecânica dos Fluidos . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Fundamentos de mecânica não linear geométrica dos sólidos</b>	<b>75</b>
4.1	Cinemática e deformações . . . . .	76
4.1.1	Mudança de configuração – definições e equacionamento . . . . .	76
4.1.2	Medidas de deformação . . . . .	79
4.2	Tensões . . . . .	80
4.3	Lei da conservação da massa . . . . .	81
4.4	Balanço da quantidade de movimento - primeira lei do movimento de Euler . .	82
4.5	Princípio dos trabalhos virtuais . . . . .	83
4.6	Lei constitutiva . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Análise numérica de dinâmica dos fluidos</b>	<b>89</b>
5.1	Discretização no tempo . . . . .	89
5.1.1	Aspectos matemáticos dos problemas transientes em mecânica dos fluidos	89
5.1.2	Solução numérica explícita de problemas de transporte . . . . .	91
5.1.3	Discretização das equações governantes da mecânica dos fluidos . . . .	95
5.1.4	Estabilidade . . . . .	97
5.2	Discretização espacial e procedimento para solução . . . . .	97
5.2.1	Forma fraca . . . . .	97
5.2.2	Procedimentos para solução . . . . .	100
5.3	Condições de contorno . . . . .	101
5.4	O problema das variações espúrias . . . . .	102



5.4.1	Convecção . . . . .	102
5.4.2	Captura de choque . . . . .	107
5.5	Elemento utilizado . . . . .	108
5.6	Aplicações - Testes preliminares . . . . .	109
5.6.1	Propagação da onda de pressão em um canal . . . . .	109
5.6.2	Escoamento invíscido transiente em um canal com degrau . . . . .	110
5.6.3	Uso explícito de passos de tempo Locais para problemas transientes através de sub-ciclos de tempo . . . . .	113
5.6.4	Escoamento viscoso com condução de temperatura sobre uma placa aquecida - malha 3D . . . . .	122
5.6.5	Uso do algoritmo explícito para simulação incompressível . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Análise numérica de dinâmica das estruturas</b>	<b>133</b>
6.1	A formulação posicional . . . . .	133
6.2	A aplicação em elementos de casca . . . . .	135
6.2.1	O elemento de casca . . . . .	138
6.3	Integração temporal . . . . .	139
6.3.1	Processo de solução via Newton-Raphson . . . . .	141
6.4	Exemplos do programa de casca . . . . .	143
6.4.1	Carga transversal sobre uma viga engastada - Checagem da conserva- ção da energia . . . . .	143
6.4.2	Casca cilíndrica com <i>Snap Through</i> dinâmico . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Acoplamento com fluido em descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária</b>	<b>147</b>
7.1	Transferência de forças e velocidades . . . . .	147
7.2	Movimentação dinâmica da malha do domínio fluido . . . . .	150
7.3	Processo dinâmico de acoplamento . . . . .	151
7.4	Aplicações do acoplamento ALE . . . . .	153

7.4.1	Canal com degrau e parede flexível . . . . .	153
7.4.2	Choque sobre esfera . . . . .	154
7.4.3	Flutter de painel . . . . .	156
7.4.4	Choque sobre placa vertical . . . . .	162
7.4.5	Invólucro de reator submetido à explosão . . . . .	166
<b>8</b>	<b>Acoplamento imerso</b>	<b>175</b>
8.1	Representação implícita do contorno . . . . .	176
8.2	Condições de contorno de Dirichlet para o fluido . . . . .	178
8.2.1	Condições de contorno de Neumann para a casca . . . . .	180
8.3	Exemplos numéricos . . . . .	180
8.3.1	Tubo inflável . . . . .	180
8.3.2	Acionamento de um <i>airbag</i> . . . . .	183
<b>9</b>	<b>Proposta para continuidade da pesquisa: uso de uma nova técnica de B-splines imersas</b>	<b>187</b>
9.1	Sobre as funções Splines . . . . .	187
9.2	B-splines Univariáveis . . . . .	189
9.3	B-splines multivariáveis . . . . .	190
9.4	Uma nova base abstrata para elementos finitos a partir de splines . . . . .	192
9.4.1	Definição do domínio físico . . . . .	192
9.4.2	B-splines ponderadas normalizadas . . . . .	193
9.4.3	Representação geométrica iso-paramétrica do domínio imerso . . . . .	198
9.5	Aplicações das i-splines . . . . .	200
9.5.1	Disco com condições de contorno mistas Dirichlet e Neumann . . . . .	200
9.5.2	Pino de Boliche . . . . .	205
9.5.3	Coração humano . . . . .	206
9.6	Sugestões para aplicação das i-splines para interação fluido-estrutura . . . . .	207

<b>10 Conclusão</b>	<b>211</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>215</b>
<b>Anexo A – Forma adimensional das equações de Navier-Stokes</b>	<b>227</b>



# 1 *Introdução*

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes nas mais diversas áreas de engenharia, em obras de engenharia civil, mecânica, aeronáutica, naval, e até mesmo em problemas de biomecânica. Como exemplos, citam-se o efeito do vento sobre edificações, flutter em aeronaves ou em pontes suspensas e, até mesmo, a dilatação das artérias devido à circulação sanguínea.

Um dos exemplos mais clássicos de falha estrutural devido a problema de interação fluido-estrutura é o caso da ponte de Tacoma Narrows, uma estrutura suspensa construída nos Estados Unidos, em Puget Sound, Washington, que ruiu em novembro de 1940, devido ao efeito dinâmico provocado pelo escoamento durante a utilização. O problema que provocou a falha dessa ponte é conhecido como *flutter* (BILLAH; SCANLAN, 1991).

Um problema muito comum envolvendo fluido e estrutura consiste na ação do vento sobre estruturas expostas à atmosfera. Para as obras civis mais comuns, costuma-se considerar a pressão do vento sobre a estrutura como um carregamento estático, porém as vibrações da estrutura, combinadas às variações do escoamento podem levá-la ao colapso (BATHE; ZHANG, 2004; ANTUNES et al., 2005).

Uma maneira um pouco mais elaborada de se analisar problemas de interação fluido-estrutura consiste em considerar primeiro o carregamento dinâmico do escoamento calculado sobre a estrutura considerada rígida e em seguida analisar-se dinamicamente a estrutura com os carregamentos obtidos na primeira etapa. Essa forma de análise desacoplada, no entanto, pode implicar em erros deixando as estruturas super-dimensionadas ou sub-dimensionadas (BATHE; ZHANG, 2004; TEIXEIRA, 2001).

Com o primeiro voo de um objeto mais denso que o ar alçado por meios próprios, o vôo de Santos Dumont com o 14-Bis em 1906, inaugurou-se o desenvolvimento acelerado da aeronáutica. Ainda quando ocorriam os primeiros vôos ou as primeiras tentativas de vôos auto-propelidos no período de 1903 até 1919, desenvolveram-se os primeiros estudos teóricos dos fenômenos de interação fluido-estrutura (DE MARQUI JR et al., 2001). Desde então, os estu-

dos de mecânica dos fluidos, aerodinâmica, dinâmica das estruturas e aeroelasticidade obtiveram grandes avanços.

Nos tempos atuais, a tendência de se construir estruturas cada vez mais leves e esbeltas, e portanto, mais susceptíveis aos efeitos do meio fluido em que estão imersas, vêm exigindo mais atenção a esse tema.

Devido à complexidade e o número elevado de operações de cálculo envolvidos na análise de problemas mecânicos dinâmicos, o emprego de técnicas computacionais para sua resolução é de fundamental importância, de forma que, atualmente, os trabalhos científicos nessas áreas estão concentrados principalmente no desenvolvimento de ferramentas computacionais baseadas em métodos numéricos.

O presente trabalho apresenta-se como o primeiro desenvolvido sobre esse tema dentro do SET - Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC - Escola de Engenharia de São Carlos da USP Universidade de São Paulo. Com a motivação básica resumida no que foi exposto nos parágrafos anteriores, desenvolve-se este trabalho, que consiste no emprego do Método dos Elementos Finitos para a modelagem de interação fluido-estrutura (mais especificamente fluido-casca) com uso de formulação não linear geométrica baseada em posições para a análise de cascas, introduzindo uma nova linha de pesquisas no SET.

Em síntese durante o presente trabalho, foi desenvolvido e implementado um programa para análise transiente de dinâmica de fluidos. Na sequência estudou-se o algoritmo baseado em formulação posicional para análise dinâmica não linear geométrica de cascas. Então foram propostos dois modelos de acoplamento particionados entre o programa de cascas e o programa de fluido, um com movimentação da malha do fluido e outro que consiste em um novo modelo com malha fixa na qual o acoplamento é feito considerando-se contorno imerso definido em um bloco de malha com base em superfícies de nível (*level-sets*) de uma função de distância assinalada, sendo este modelo ideal para problemas de interação fluido-estrutura em grande escala. Finalmente foi desenvolvido um novo espaço tentativa para o método dos elementos finitos baseado em B-splines imersas ponderadas e racionalizadas, o qual é sugerido para ser aplicado na análise de interação fluido-estrutura e que vêm sendo estudado como continuidade da presente pesquisa.

Como contribuições importantes desta tese, destacam-se o uso da formulação baseada em posições para dinâmica não linear geométrica de cascas, a técnica desenvolvida para acoplamento considerando contorno imerso e a nova técnica de B-splines imersas.

## 1.1 Apresentação da tese

Em suma este texto está dividido em 3 partes: *introdução*, que consiste no capítulo 1, *desenvolvimento*, que compreende os capítulos de 2 a 9, sendo que os capítulos 2, 3 e 4 fornecem ao leitor informações relevantes para os desenvolvimentos descritos nos capítulos 5, 6, 7, 8 e 9, e *conclusão*, que consiste no capítulo 10.

Os assuntos desenvolvidos nos capítulos deste texto podem ser resumidos da seguinte forma:

- *Capítulo 1 - Introdução*: O trabalho é apresentado, sendo primeiramente oferecido ao leitor uma revisão do *Estado da Arte* do tema abordado. Em seguida, baseado nas informações do *Estado da Arte*, são traçados os objetivos, delimitações e a metodologia adotada e o trabalho é justificado. Finalmente, apresenta-se ao leitor os fundamentos físicos dos problemas de interação fluido-estrutura.
- *Capítulo 2 – Aspectos gerais de interação fluido-estrutura*: A motivação da tese é apresentada através de uma descrição do problema físico e dos principais fenômenos de interação fluido-estrutura.
- *Capítulo 3 - Fundamentos de mecânica dos fluidos*: São apresentados os fundamentos da mecânica dos fluidos imprescindíveis ao entendimento e desenvolvimento da pesquisa e por fim são deduzidas as equações governantes da mecânica dos fluidos em descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária.
- *Capítulo 4 - Fundamentos de mecânica não linear geométrica dos sólidos*: São mostrados os fundamentos da mecânica não linear geométrica dos sólidos, imprescindíveis ao entendimento e desenvolvimento da pesquisa.
- *Capítulo 5 – Análise numérica de dinâmica dos fluidos*: Os estudos e desenvolvimentos em mecânica dos fluidos que resultam no código computacional desenvolvido são discutidos, acompanhados de exemplos de aplicação, que são validados por comparação com exemplos da literatura.
- *Capítulo 6 – Análise numérica de dinâmica das estruturas*: A formulação posicional não linear geométrica do código utilizado na pesquisa para a análise estrutural e o elemento de casca utilizado são apresentados e brevemente discutidos juntamente com exemplos de aplicações que são validados por comparação com exemplos através da literatura.

- *Capítulo 7 – Acoplamento com fluido em descrição Lagrangeana Euleriana arbitrária:* O modelo de acoplamento ALE entre os dois códigos é desenvolvido e a terminologia empregada é discutida. Por fim, exemplos de aplicação são apresentados com objetivo de verificação do código computacional.
- *Capítulo 8 – Acoplamento imerso:* É desenvolvida uma técnica de acoplamento nova e simples considerando fronteira imersa com base em superfícies de nível (*level-sets*) de uma função de distância assinalada. A nova técnica é aplicada para o caso de estruturas infláveis.
- *Capítulo 9 - Proposta para continuidade da pesquisa: uso de uma nova técnica de B-splines imersas:* É desenvolvida e validada uma técnica de método dos elementos finitos baseada em B-splines, a qual representa uma importante contribuição para o Estado da Arte do MEF baseado em Splines e é sugerida uma forma de aplicação para problemas de interação fluido estruturas.
- *Capítulo 10 – Conclusão:* São feitas considerações sobre o desenvolvimento do trabalho, apresentando as conclusões extraídas e sugerindo temas específicos que podem ser estudados futuramente.

## 1.2 Estado da arte

Este trabalho explora duas áreas da mecânica: a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos. Ambas estão baseadas nos mesmos princípios, uma vez que para a grande maioria dos problemas físicos de engenharia são válidos o princípio da conservação da massa, as três leis de Newton e o princípio da conservação da Energia. Os meios para os quais seus estudos são dirigidos possuem muitas características comuns: tanto no meio fluido como no meio sólido ocorrem tensões e deslocamentos. Também existem particularidades, que separam essas duas áreas, sendo a principal delas o fato de que o fluido (Newtoniano) não resiste a nenhum valor de tensões desviadoras, ou seja, se deforma continuamente quando submetido a qualquer valor de tensão desviadora (MUNSON et al., 2002).

Tanto a mecânica dos fluidos como a mecânica dos sólidos são atividades que vêm sendo desenvolvidas há muitos séculos, tendo ambas a participação de grandes gênios da antiguidade, como Aristóteles, Arquimedes e Leonardo da Vinci. A descrição matemática dessas disciplinas obteve grande avanço após o enunciado dos princípios fundamentais da física e o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Isaac Newton e Gottfried Leibniz no século XVII,



contando nos séculos XVIII e XIX com o auxílio de cientistas importantes, tal como Leonard Euler, Simeon Poisson, Claude Navier, George Stokes e Joseph Lagrange (TIMOSHENKO, 1953; FORTUNA, 2000).

O refinamento matemático dado ao tratamento dos problemas mecânicos, devido à sua complexidade, vem sendo melhor aproveitado a partir da invenção e evolução dos computadores eletrônicos após a II Guerra Mundial, o que possibilitou o emprego de métodos numéricos para a resolução de equações algébricas. Surge então a mecânica computacional, que no início do século XXI vem tendo seu desenvolvimento acelerado e ganhando cada vez mais popularidade com o aumento do poder de processamento e armazenamento de dados dos computadores, especialmente dos computadores pessoais (PCs).

### 1.2.1 A mecânica dos fluidos computacional e o MEF

Na Mecânica dos Fluidos Computacional, os métodos numéricos das Diferenças Finitas e dos Volumes Finitos são largamente utilizados, como pode ser visto em Anderson (1995) e Fortuna (2000). O Método dos Elementos Finitos (MEF), embora ainda não o mais utilizado, também vem encontrando o seu espaço nesse campo.

O MEF começou a ser aplicado na mecânica dos fluidos há menos de 40 anos, sendo aplicado pela primeira vez à análise de escoamentos viscosos incompressíveis na década de 1970 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c). Teixeira (2001) destaca ainda que a introdução do MEF à análise de escoamentos compressíveis deve-se principalmente à extensão do método de Lax-Wendroff, do contexto do Método das Diferenças Finitas.

Com o tempo, mais algoritmos baseados no MEF foram desenvolvidos, ou algoritmos que haviam sido inicialmente desenvolvidos para Diferenças Finitas ou para Volumes Finitos foram estendidos e adaptados ao MEF, que é investigado como uma técnica alternativa de discretização para problemas gerais de dinâmica dos fluidos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c; ZIENKIEWICZ; CODINA, 1994; TEIXEIRA, 2001; CHUNG, 2002)

Muitos autores de trabalhos referentes ao uso do MEF para dinâmica dos fluidos computacional, a exemplo de Zienkiewicz e Taylor (2000c), Zienkiewicz e Codina (1994), Teixeira (2001) e Chung (2002), discretizam as equações governantes da mecânica dos fluidos no tempo através de algum integrador numérico explícito ou implícito e, em seguida, aplicam o método de resíduos ponderados através do processo de Galerkin clássico (Bubnov-Galerkin) ou de alguma variação deste como o processo de Petrov-Galerkin.

Muitos problemas de dinâmica dos fluidos apresentam convecção dominante, o que gera

oscilações espúrias nos resultados quando da aplicação do esquema clássico de Galerkin sobre uma descrição Euleriana (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c; TEIXEIRA, 2001; CHUNG, 2002; STRANG; FIX, 2008). Para se alcançar resultados consistentes por meio do MEF, e ainda, obter ganhos esperados para o mesmo em relação ao método dos volumes finitos, que pode ser entendido como uma particularização do MEF com funções aproximadoras constantes (DEVLOO; FORTI, 2005), foram sugeridas algumas alterações no processo de Galerkin, que em suma consistem em adicionar ao problema uma difusividade artificial capaz de suprimir as variações espúrias (CHUNG, 2002; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c; TEIXEIRA, 2001).

O problema das oscilações espúrias também é observado quando é empregado o Método das Diferenças Finitas com diferenças centrais e pode ser solucionado tomando-se as derivadas atrasadas na direção do escoamento, o que é denominado “upwinding” (STRANG; FIX, 2008).

Segundo Teixeira (1996), os primeiros métodos “upwind” para emprego no Método dos Elementos Finitos consistem em utilizar funções de peso de ordem maior que as funções de interpolação (processo de Petrov-Galerkin). Atualmente o tratamento para as variações espúrias mais encontrado na literatura, consiste no emprego de uma viscosidade numérica, cuja constante viscosa artificial é inserida pelo usuário, na finalidade de causar amortecimento, ou, através do processo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* - SUPG, introduzida por Brooks e Hughes (1982), que consiste no emprego do processo de Petrov-Galerkin, escolhendo funções ponderadoras que adicionem difusividade na direção das linhas de corrente.

A aplicação do Método de Galerkin Descontínuo (ODEN et al., 1998; DEVLOO; FORTI, 2005; CALLE et al., 2005) também reduz as variações espúrias, porém com os inconvenientes de não ser diretamente aplicável a equações não lineares, necessitando a introdução de fluxos numéricos e de aumentar o número de graus de liberdade, elevando o custo computacional.

Outra forma interessante é o emprego de coordenadas móveis (FARMER; NORMAN, 1986; ZIENKIEWICZ et al., 1985) com valores interpolados para uma malha de coordenadas fixas. Esse processo surgiu nos anos 1980 e foi considerado uma alternativa para os problemas com alto número de Peclet, porém, nos anos posteriores a 1986 pouco foi publicado sobre o assunto. Alguns autores, tal como Teixeira (1996), o consideram anti-econômico e de difícil aplicação.

Um ponto relevante quando da análise numérica de escoamentos viscosos, são os efeitos da vorticidade em escoamentos turbulentos. Em princípio as equações de Navier-Stokes podem simular tanto os escoamentos laminares como turbulentos, porém, durante a simulação numérica a malha deve ser refinada o suficiente para captar as escalas de turbulência, o que conduz a tempos de processamento elevadíssimos (TEIXEIRA, 2001). Para contornar tal problema, surgiram

alguns “modelos de turbulência” algébricos, que podem ser baseados na hipótese de Reynolds (LAUNDER; SPALDING, 1972, 1974; WILCOX, 1993), e também, para números de Reynolds elevados, modelos como os de captura de estruturas coerentes (FERZIGER, 1993).

Não fazem parte do enfoque deste trabalho os modelos de análise numérica da turbulência, sendo a viscosidade desprezada na maioria das aplicações estudadas. No entanto as equações de Navier-Stokes são implementadas na forma completa, sendo possível análise de problemas em regime turbulento desde que a malha seja adequadamente refinada, e ao mesmo tempo, sendo facilitada uma futura implementação de modelos de turbulência.

### 1.2.2 A mecânica das estruturas computacional

A utilização de métodos computacionais na análise estrutural é uma atividade relativamente antiga e remonta os anos 1960. Tal como ocorreu com a mecânica dos fluidos o Método das Diferenças Finitas teve grande impulso no início dos desenvolvimentos computacionais, porém com o tempo, o MEF se destacou como alternativa viável e mais versátil para a solução de problemas de análise estrutural (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a).

A formulação fraca em elementos finitos, para a equação do movimento da mecânica dos sólidos, pode ser facilmente obtida a partir da aplicação do método dos resíduos ponderados, ou através de uma forma variacional, minimizando-se o funcional de energia potencial total (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a; ASSAN, 2003), que é a forma mais comum na mecânica dos sólidos computacional e evita complicações que podem surgir em situações específicas com a aplicação do método de Galerkin, conforme mostrado por Strang e Fix (2008).

O MEF se desenvolveu de forma tão efetiva na mecânica dos sólidos que hoje, apesar de existirem técnicas alternativas de análise estrutural, este é o método mais difundido nesse contexto. Os trabalhos de Belytschko et al. (1977), Argyris et al. (1978), Argyris et al. (1979), Bathe et al. (1975) e Crisfield (1991) são apenas uma mostra da intensa atividade científica em torno do desenvolvimento do MEF para a análise de estruturas em regime de grandes deslocamentos, destacando-se o desenvolvimento da formulação co-rotacional, uma das mais difundidas até os dias de hoje para a solução deste tipo de problema. Trabalhos de Simo e colaboradores (SIMO et al., 1984, 1986; SIMO; LAURSEN, 1992) não podem deixar de ser mencionados pelo grande impulso ao estudo da dinâmica não linear de estruturas via MEF em descrição Lagrangeana.

Os Elementos Finitos estruturais de maior interesse para o presente trabalho são os elementos de cascas, uma vez que com os mesmos é possível simular a maioria dos problemas estruturais bi ou tri-dimensionais a custos bem menores do que empregando-se elementos de

sólidos.

O desenvolvimento dos elementos de placa e casca iniciou-se na década de 60, destacando-se autores como Clough e Tocher (1965), Adini e Clough (1960), Melosh (1961), Tocher (1962), entre outros, que geraram inicialmente muitos tipos de elementos não conformes para análise linear.

À medida que as propriedades de conformidade e compatibilidade entre elementos foram sendo melhor compreendidas, diversos melhoramentos foram sendo implementados. Com o emprego das hipóteses discretas de Kirchoff por exemplo, foram conseguidos bons resultados em elementos de placas delgadas com funções de forma contínuas de classe  $C^0$ , mas restritas pela imposição da condição de deformações cisalhantes nulas em pontos discretos do elemento.

Um elemento finito de placas desenvolvido com base nessa aproximação, e que é um dos elementos mais empregados para análise de placas, é o elemento finito triangular denominado DKT (Discrete Kirchoff Triangle) (BATOZ et al., 1980), que associado com o elemento CST (Constant Strain Triangle), desenvolvido para a análise de chapas, e rotacionado no espaço, sendo um elemento para análise de cascas muito utilizado.

No que diz respeito ao método dos elementos finitos na análise não linear geométrica de elementos de casca, os trabalhos de Hughes e Carnoy (1983), Hughes e Liu (1981b) e Hughes e Liu (1981a) também merecem ser destacados.

Atualmente, elementos finitos isoparamétricos de alta ordem também vêm sendo utilizados para análise de placas e cascas, com o auxílio de métodos de integração numérica (pontos de gauss ou hammer), tal como em Coda e Paccola (2007).

Casos de estruturas com grandes deslocamentos ou em que os efeitos de membrana sejam relevantes são comuns em problemas de interação fluido estrutura, tais como *flutter* com grandes amplitudes, estruturas com grandes deslocamentos impostos, sistemas de desaceleração (para-quedas) ou estruturas infláveis. Para que tais situações sejam corretamente analisadas, é necessário uma análise não linear geométrica. Várias formulações Lagrangeanas foram e vêm sendo propostas para tal análise através do MEF, como exemplo tem-se Mondkar e Powell (1977), Surana (1983), Simo et al. (1984, 1986), Simo e Laursen (1992) e Schulz e Filippou (2001).

Muitos trabalhos sobre análise não linear geométrica de cascas, placas ou pórticos, consideram a rotação em torno de cada eixo dentre os parâmetros nodais interpolados sobre os elementos, a exemplo de Teixeira (2001), Battini e Pacoste (2006), Battini (2008). Tal procedimento é muito eficiente para pequenos deslocamentos, no entanto, em muitas destas formulações não

se pode aplicar a comutatividade de rotações em grandes deslocamentos. Desta forma, nas formulações corrotacionais aplicam-se por exemplo as fórmulas de Euler-Rodrigues linearizadas para giro finito, ver Coda e Paccola (2010) para maiores detalhes.

Como alternativa Cirak et al. (2000) e Cirak e Ortiz (2001) apresentam uma formulação baseada em subdivisão para casca fina, de acordo com a teoria de Kirchhoff-Love, onde os elementos finitos utilizados são triangulares com 3 nós. Nesse caso, a rotação não é interpolada como parâmetro nodal e o campo de deslocamentos da casca é interpolado dos valores nodais, sendo que a base gerada pelo processo de subdivisão é uma base não local, ou seja, o campo de deslocamentos sobre um dado elemento depende, além dos valores nodais dos nós do elemento, dos valores dos nós imediatamente vizinhos a eles, definindo uma superfície limite conforme.

Bonet et al. (2000) e Coda (2003) introduzem a formulação posicional baseada no MEF para a análise não linear geométrica de sólidos e estruturas. Esta utiliza posições finais e inclinações finais de vetores inicialmente normais como parâmetros nodais ao invés de deslocamentos e rotações, sendo bastante robusta e de simples implementação.

A formulação posicional vem se desenvolvendo de maneira bastante satisfatória como atestam os trabalhos de Greco e Coda (2004), Coda e Paccola (2007), Maciel (2008), Coda (2009b) e Coda (2009a). Esta é didaticamente simples e apresenta solução independente do caminho de rotação, condição imprescindível para este tipo de aplicação.

No contexto do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC, até o trabalho de Greco e Coda (2004), a formulação posicional foi estudada para análise estática não linear geométrica de estruturas unidimensionais (barras, vigas e pórticos) submetidas a pequenas ou grandes rotações. Greco e Coda (2006) introduziram a análise dinâmica não linear geométrica através da formulação posicional, onde graças à matriz de massa constante, utilizaram o integrador de Newmark, considerando uma estabilização do integrador para casos com não linearidade muito forte, como casos de impacto.

A análise não linear geométrica de cascas com a formulação posicional foi apresentada no trabalho de Coda e Paccola (2007), onde foram empregados elementos isoparamétricos triangulares com 10 nós e 6 parâmetros nodais por nó, sendo eles 3 direções de posição e 3 componentes do vetor inicialmente normal à superfície do elemento. Coda e Paccola (2008) adicionaram mais um parâmetro nodal, admitindo comportamento linear para a casca ao longo da espessura, evitando-se assim travamento pelo efeito de Poisson.

A análise dinâmica para elementos de casca foi introduzida com os trabalhos Coda (2009b) e Coda e Paccola (2009) com bons resultados, sendo essa formulação aplicada neste trabalho.

### 1.2.3 Análise computacional de interação fluido-estrutura

Dentre as disciplinas que estudam interação fluido-estrutura, destaca-se a aeroelasticidade, que concentra-se no estudo dos efeitos da interação mútua entre as forças aerodinâmicas e corpos deformáveis, com atenção especial aos projetos de aviões e veículos espaciais (BISPLINGHOFF et al., 1996). Este é um dos campos onde existem muitos trabalhos sobre desenvolvimentos numéricos aplicados a problemas de interação fluido-estrutura, especialmente a partir da década de 90. Como exemplo, citam-se trabalhos como os de Edwards e Malone (1992), Farhat et al. (1995), Cebral e Löhner (1997), Kobbus e Farhat (1999) e Bismarck-Nasr (1996).

No entanto, os problemas de interação fluido-estrutura também se encontram presentes em muitas outras áreas. Muitos dispositivos de plantas industriais contêm ou estão contidos em meios fluidos (líquidos ou gasosos) geralmente de tal forma que o fluido tem um papel importante no comportamento da estrutura, como é apresentado por Morand e Ohayon (1995) no estudo sobre modelagem de vibrações de estruturas elásticas lineares com escoamento interno de fluido. Interações importantes também acontecem em barragens ou estruturas “off-shore” (TEIXEIRA, 2001).

Outro campo onde os efeitos de interação fluido-estrutura também se manifestam exigindo estudos é o da biomecânica, tendo como exemplos os trabalhos de Canic et al. (2005) e Hron e Mádlík (2007), nos quais são estudados problemas de hemodinâmica com paredes flexíveis.

No caso muito comum de interação fluido-estrutura, que é o efeito do vento sobre estruturas, os efeitos básicos como *flutter*, *galloping*, *buffeting*, etc. são bastante observados. Por outro lado, a tendência é de se projetar estruturas cada vez mais esbeltas e leves, ou seja, mais sensíveis aos efeitos do vento, e ainda com geometrias cada vez mais ousadas, o que exige uma análise bastante criteriosa da interação fluido-estrutura (GLÜCK et al., 2001).

Segundo Teixeira (2001), um modelo numérico para análise de interação fluido-estrutura que venha a atender todas as áreas de interesse deve ser capaz de, no que se refere à mecânica dos fluidos, simular fluidos compressíveis e incompressíveis, newtonianos ou não, viscosos e não viscosos, levando em conta os efeitos de turbulência e de variação da temperatura. No que se refere à análise estrutural, deve contemplar o comportamento elástico, elasto-plástico, visco-elástico e visco-elasto-plástico das estruturas, com não linearidade geométrica para casos de grande deslocamentos e considerar também os efeitos termo-mecânicos.

Na última década muitos autores empregaram esforços no sentido de desenvolver programas genéricos, que atendam as áreas citadas, tal como Teixeira (2001), que apresentou um

programa para análise computacional tri-dimensional de interação fluido-estrutura baseado no MEF, Bathe e Zhang (2004) que apresentaram uma nova forma de análise, via MEF, para fluidos incompressíveis, baseada em condições de escoamento e uma análise baseada em volumes finitos para fluidos compressíveis, ambos acoplados com o MEF para análise estrutural.

A interação fluido-estrutura, assim como outros problemas multi-físicos, pode ser tratada por uma abordagem monolítica como nos trabalhos de Blom (1998) e Hron e Mádlík (2007) ou particionada, como nos trabalhos de Felippa et al. (2001) e Teixeira e Awruch (2005). Nos métodos particionados, as equações governantes do fluido e da estrutura são integradas no tempo separadamente e as condições de contorno são transferidas de um meio para o outro, sendo geralmente as condições de Dirichlet do fluido, obtidas a partir dos deslocamentos do sólido, e as condições de Neumann para a estrutura, obtidas a partir da pressão e tensões desviadoras no fluido. Já nos métodos monolíticos, ambos os domínios sólido e fluido são tratados como uma única entidade, sendo integrados simultaneamente no tempo.

Vários pesquisadores vêm estudando o assunto através do modelo particionado, acoplando algoritmos para Dinâmica dos Fluidos a algoritmos para Dinâmica dos Sólidos, como Teixeira (2001), Bathe e Zhang (2004), Cirak e Radovitzky (2005) e Sanches e Coda (2008). Este método facilita muito a análise quando o deslocamento relativo entre fluido e sólido é muito grande.

Segundo Felippa et al. (2001), o esquema particionado apresenta aspectos que justificam a sua implementação. Teixeira (2001) destaca como vantagem deste esquema o fato de que cada subdomínio pode ser tratado pela técnica de discretização e pelo algoritmo de solução mais eficiente de forma individual. Além disso, fica facilitada a construção de malhas sem necessidade de coincidência nas interfaces.

Como desvantagem desse esquema, cita-se a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando da atualização explícita das condições na interface fluido-estrutura, o que não ocorre nos esquemas monolíticos (BLOM, 1998).

Os métodos monolíticos são os mais adequados para problemas onde os deslocamentos relativos não são muito grandes, tal como no trabalho desenvolvido por Blom (1998) em que é estudado o problema de um pistão contendo gás e com um êmbolo vinculado a uma mola.

Para modelar matematicamente os problemas da mecânica, primeiro se escolhe o referencial e, então, se aplica os três princípios básicos da física clássica. O referencial pode ser fixo, resultando em uma descrição Lagrangeana ou móvel, definindo uma descrição Euleriana. A descrição Lagrangeana, também conhecida como material, expressa o movimento de um meio

contínuo em termos da configuração inicial e do tempo (referência fixa) sendo muito eficiente em problemas onde se deseja determinar os deslocamentos dos pontos de um corpo ou sistema de partículas a partir de sua forma inicial. A descrição Euleriana também conhecida como espacial, por outro lado, é definida em termos da configuração deformada e do tempo, sendo muito aplicada em problemas onde as variáveis geralmente são velocidades e não deslocamentos, ver por exemplo Valiappan (1981). O fato de que o fluido não resiste a tensões desviadoras faz com que a descrição Euleriana seja a mais adequada para a sua descrição, tendo como variáveis principais as velocidades, já para o sólido o mais adequado é forma Lagrangeana, tendo os deslocamentos como variáveis principais. Isso implica em malhas computacionais fixas para análise do escoamento, e malhas computacionais deformáveis para análise da estrutura. Para se analisar a interação entre ambos, tradicionalmente tem sido empregada uma formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária – ALE, conforme apresentada por Donea et al. (1982). A formulação ALE é obtida pela inserção de um domínio de referência no espaço euclidiano, de forma que este domínio de referência possua movimento com campo de velocidade arbitrário. As equações governantes da mecânica dos fluidos são então escritas tendo este domínio móvel como referência.

Um detalhe a ser considerado durante a análise de interação fluido-estrutura em descrição ALE, é a movimentação da malha do domínio fluido, a qual deve apresentar a mínima distorção. Dentre as técnicas para movimentação de malha apresentadas na literatura, destacam-se duas: A primeira trata a malha como um sistema estrutural (DEGAND; FARHAT, 2002) composto por barras de treliça, rotuladas nos nós da malha, a segunda consiste na movimentação dos nós através de uma média ponderada da distância do nó em relação aos nós dos contornos fixo e móvel (DONEA et al., 1982; TEIXEIRA, 2001). Em ambas as técnicas, os efeitos da velocidade de movimentação da malha são levados em consideração pela formulação ALE.

Segundo Farhat (1995), é desejável que todo o método usado para a integração das equações governantes dos fluidos proporcione solução exata para um escoamento uniforme, o que garante melhores condições de convergência. Esse requisito é satisfeito somente quando o esquema numérico de solução adotado e o algoritmo de movimento da malha satisfazem ao que se denomina “lei da conservação da geometria”. No entanto, Kobbus e Farhat (1999) afirmam que a lei da conservação da geometria pode ser violada sem maiores problemas quando se utiliza passos no tempo suficientemente pequenos. Nos esquemas explícitos, os passos no tempo já são pequenos, limitados pela condição de estabilidade, o que implica em pouco ou nenhum acréscimo de custo computacional.

Cirak e Radovitzky (2005) apresentam uma nova forma de acoplamento Euleriano-Lagran-



geano, em que a malha do fluido é mantida fixa e as condições de contorno se movem sobre ela à medida em que a estrutura se deforma. No trabalho citado, é empregado o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos baseado em subdivisão para a estrutura, sendo o contorno identificado através das curvas de nível de uma função distância assinalada (*level-sets*).

Essa forma de acoplamento se mostra muito adequada aos casos com grandes mudanças de posição da estrutura em relação ao domínio inicial do fluido, tais como estruturas infláveis, onde na formulação ALE, a malha do fluido pode adquirir grandes distorções, podendo chegar a assumir, em alguns pontos, valores negativos para o determinante Jacobiano.

## **1.3 Objetivos e delimitações**

O objetivo material deste trabalho consiste no desenvolvimento de código computacional capaz de análise tridimensional transiente de interação fluido-estrutura, visando introduzir uma nova linha de pesquisas do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC).

Dentro do objetivo material, destacam-se três objetivos específicos, sendo estes:

- 1) O desenvolvimento de um algoritmo eficiente para a resolução da dinâmica dos fluidos tridimensional que permita acoplamento.
- 2) O estudo aprofundado da formulação posicional para elementos finitos de casca com não linearidade geométrica.
- 3) O estudo e desenvolvimento de modelos de acoplamento fluido-estrutura que efetue de forma adequada a combinação do código computacional para dinâmica dos fluidos, com o programa para análise não linear geométrica de cascas.

### **1.3.1 Metodologia**

No que se refere à mecânica dos fluidos computacional, escolhe-se trabalhar com o método dos elementos finitos. Tal escolha é justificada pelo fato de o mesmo ser um tema bastante atual em se tratando de mecânica dos fluidos, ganhado cada vez mais espaço, e por possuir qualidades de aproximação que podem ser muito superiores às do método dos volumes finitos.

Para a análise estrutural é empregada a formulação posicional não linear geométrica para elementos de casca, conforme apresentada por Coda (2009a), dando continuidade aos trabalhos da Área.

É desenvolvido um estudo sobre as variações espúrias do MEF que surgem quando se aplica o método de Galerkin à análise de escoamentos assim como o problema de descontinuidade das ondas de choque. Tal estudo visa à busca de uma forma adequada e consistente de conter essas variações.

Partindo-se do trabalho de Sanches (2006), são feitos alguns testes bidimensionais para mecânica dos fluidos com contornos móveis, e então é construído um código computacional para mecânica dos fluidos tridimensional de integração temporal explícita em formulação ALE. Em seguida o modelo é testado com ênfase em problemas transientes.

Estudos relativos ao mapeamento posicional são intensificados com supervisão direta do orientador, desenvolvendo-se uma técnica de acoplamento que compatibilize os dois algoritmos. Neste caso, a determinação das derivadas parciais em relação às direções cartesianas é feita de maneira indireta utilizando-se, numericamente, o gradiente do mapeamento da posição inicial e atual, o que é igualmente aplicado na formulação de fluido, a partir do espaço tetraédrico adimensional, principalmente quando das redefinições de malha devido a mudanças de posição da estrutura.

É desenvolvido um modelo particionado de acoplamento, ALE-Lagrangeano, que permite usar intervalos de tempo diferentes para fluido e estrutura. Este modelo, que permite a movimentação da malha do fluido, é então testado.

Com base em limitações do modelo anterior (dificuldade em contemplar problemas com grandes escalas de deslocamentos tais como estruturas infláveis), é desenvolvido um segundo modelo particionado de acoplamento chamado imerso, o qual mantém a malha do fluido fixa enquanto a casca se move dentro da malha do fluido.

Por fim, desenvolve-se um novo espaço de funções aproximadoras para o Método dos Elementos Finitos baseado em B-splines o qual é sugerido para ser aplicado na análise de interação fluido-estrutura na continuidade desta pesquisa.

## **Implementação computacional**

Os avanços no campo da modelagem numérica das últimas décadas têm proporcionado aos cientistas e aos engenheiros a oportunidade de solucionar problemas de complexidade cada vez maior. Frequentemente, tais problemas requerem a solução de sistemas muito grandes que envolvem grande quantidade de equações, da ordem de  $10^6$  ou mais (KAWABATA et al., 2009b, 2009a).

A solução de tais sistemas, além de ser demorada, é repetida milhares de vezes. Esse é

o caso de muitos problemas de engenharia onde há a necessidade de análises não lineares dependentes do tempo. Nesse sentido, um grande esforço tem sido dedicado ao desenvolvimento e otimização desses algoritmos. Por outro lado, novas tecnologias de hardware demandam códigos especializados para se obter um maior desempenho de técnicas usuais.

Os algoritmos são implementados nas linguagens de programação Fortran 77 e C++. Para que o processamento de simulações muito pesadas seja possível, emprega-se a computação paralela, através do uso de um computador pessoal de 8 processadores com memória compartilhada e um cluster de 48 processadores com memória distribuída, sendo utilizado o padrão de comunicação MPI - *Message Passing Interface*.

Códigos paralelos de elementos finitos podem ser implementados em plataformas de memória distribuída, memória compartilhada ou com as duas abordagens. Sistemas que usam memória compartilhada fazem uso de *threads* na paralelização do código, e em memória distribuída cada processador possui sua própria memória. Nessa categoria estão os *clusters*, *grids*, *supercomputadores*, etc. A comunicação entre os processadores é feita com alguma biblioteca de passagem de mensagem como o *Message Passing Interface* (MPI), que é a biblioteca utilizada no presente trabalho dentro da linguagem FORTRAN 77.

Não é o foco do presente trabalho o estudo, desenvolvimento e otimização de programa de elementos finitos em processamento paralelo. No entanto, devido ao alto uso de memória e contínuas repetições de integração numérica e de solução de sistemas, é imprescindível o emprego de processamento paralelo. Análises de desempenho do programa de cascas utilizado são apresentadas por Kawabata et al. (2009b) e Kawabata et al. (2009a).

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi possível acompanhar e contribuir com o processo de paralelização do programa de análise de cascas implementado inicialmente de forma serial por Coda e Paccola (2008) e paralelizado por Kawabata et al. (2009a). O programa para análise de dinâmica dos fluidos foi implementado diretamente em paradigma paralelo, empregando MPI, assim com o algoritmo para acoplamento.

Em ambos os programas adotou-se o esquema mestre-escravos, onde o processador mestre gerencia as informações globais, divide as tarefas e envia para os escravos. O programa de análise de cascas é paralelizado dividindo-se as tarefas relativas aos nós da estrutura para os processadores escravos, como pode ser observado na Fig. 1.1.

Já o algoritmo de dinâmica dos fluidos é implementado de forma que as tarefas relativas aos elementos são divididas pelos processadores escravos, conforme a Fig. 1.2.

Uma vez prontos os códigos paralelos para mecânica dos fluidos e para mecânica das estru-

**Algoritmo (casca dinâmico paralelo)**

1. Leitura e inicialização dos dados
2. Para cada fase de carga
3. | Para cada passo de tempo
4. | | Enquanto não atingiu a norma ou máximo de iterações
5. | | | Distribuição dos nós entre os escravos
6. | | | Cada escravo faz a integração dos elementos dos nós
7. | | | Cada escravo monta a sua parte da matriz
8. | | Mestre calcula condições de contorno e atualiza escravos
9. | | Resolve sistema linearizado pela matriz Hessiana
10. | Escreve resultados parciais obtidos
11. Escreve resultados finais

Figura 1.1: Algoritmo do programa de cascas

**Algoritmo (fluido dinâmico paralelo)**

1. Leitura e inicialização dos dados
2. Para cada passo de tempo
3. | Distribuição dos elementos entre os escravos
4. | | Cada escravo calcula a matriz de massa e do lado direito dos sistema 1 e 4 para cada elemento
5. | | Mestre recebe os dados e monta o sistema
6. | | Mestre aplica condições de contorno e resolve os sistemas 1 e 4 e atualiza os escravos
7. | | Cada escravo calcula a matriz de massa e do lado direito dos sistema 2 e 3 para cada elemento
8. | | Mestre recebe os dados e monta o sistema
9. | | Mestre aplica condições de contorno e resolve os sistemas 2 e 3
10. | Escreve resultados parciais obtidos
11. Escreve resultados finais

Figura 1.2: Algoritmo do programa de dinâmica dos fluidos

turas, pode-se construir os algoritmos para acoplamento ALE (fluido ALE - casca Lagrangeana) e imerso (fluido Euleriano - casca Lagrangeana) conforme as Figs. 1.3 e 1.4.

**Algoritmo (interação ale paralelo)**

1. Leitura e inicialização dos dados
2. Para cada passo de tempo da estrutura
3. | Resolve algoritmo de casca dinâmico passos 4 – 9 (programa paralelo)
4. | Para cada passo de tempo do fluido
5. | | Resolve a malha (programa paralelo)
6. | | Mestre define as condições de contorno do fluido e atualiza os escravos
7. | | Resolve o algoritmo de fluido passos 3 – 9 (programa paralelo)
8. | Mestre aplica condições de contorno da casca
10. | Escreve resultados parciais obtidos
11. Escreve resultados finais

Figura 1.3: Algoritmo do acoplamento ALE-Lagrangeano

```
Algoritmo (interação contorno imerso paralelo)
1.  Leitura e inicialização dos dados
2.  Para cada passo de tempo
3.  |  Resolve algoritmo de casca dinâmico passos 4 – 9 (programa
    |  paralelo)
4.  |  Calcula função distância assinalada e identifica pontos para
    |  transferência das condições de contorno na casca e no
    |  fluido(programa paralelo)
5.  |  Calcula os valores a serem aplicados como condição de contorno no
    |  fluido
6.  |  Resolve o algoritmo de fluido passos 3 – 9 (programa
    |  paralelo)
7.  |  Escreve resultados parciais obtidos
8.  Escreve resultados finais
```

Figura 1.4: Algoritmo do acoplamento Euleriano-Lagrangeano

Quando uma modelagem computacional utiliza um número elevado de componentes do programa (subprogramas, subrotinas ou procedimentos), como nos problemas multi-físicos de interação fluido-estrutura, uma eficiente e robusta interface entre cada parte do programa ganha muita importância (CIRAK; CUMMINGS, 2008).

Os programas desenvolvidos nos capítulos 5 ao 8 são escritos em um estilo procedural usando a linguagem Fortran com encapsulamento pobre de dados, o que embora produza um programa bastante eficiente, dificulta a implementação de novos modelos matemáticos ou outras alterações sobre a mesma estrutura de dados. Uma maneira de suavizar o uso de tais problemas é o emprego de paradigmas de programação orientados a objetos (OOP) (CIRAK; CUMMINGS, 2008).

Na continuação da pesquisa (capítulo 9) opta-se por utilizar a linguagem computacional C++, e fazer uso de classes *wrapper* e *containers* de alto nível. Essas classes possibilitam melhor encapsulamento de dados e ao mesmo tempo um meio simples de se criar um protótipo para novas aplicações. Ainda, este procedimento permite fazer uso de tipos genéricos de *containers* e algoritmos providos pela biblioteca de *templates* padrão (STL).

Tal mudança foi viável devido à continuação da pesquisa necessitar de um recomeço na programação do algoritmo de fluido por se tratar de um espaço de elementos finitos totalmente diferente ao anterior, e também, ao fato de que começou a ser realizada durante o estágio de Doutorado Sanduíche na Universidade de Cambridge, onde este paradigma de programação é adotado.

## 1.4 Justificativa

Dada a importância dos problemas em estudo para a engenharia, aliada ao fato de que a tendência é projetar estruturas cada vez mais esbeltas e leves, ou seja, mais sensíveis aos efeitos do meio fluido, e ainda com geometria cada vez mais ousada, torna-se necessária uma análise bastante criteriosa durante o projeto. Sendo a análise experimental dos problemas de interação fluido-estrutura bastante dispendiosa, e sendo o emprego de métodos numéricos para mecânica estrutural e dos fluidos um tema bastante atual, todo estudo ou avanço no referido objeto de estudo é de grande importância para a área de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - EESC.

O método dos elementos finitos ainda vem sendo estudado como alternativa aos métodos de volumes finitos e diferenças finitas, tradicionalmente empregados na mecânica dos fluidos, e que ainda têm sido os preferidos de muitos devido ao fato de o MEF ser naturalmente instável para muitos dos problemas dessa disciplina quando baseado no método clássico de Bubnov-Galerkin.

Atualmente, entretanto, inúmeros trabalhos vêm surgindo como formas de se estabilizar o MEF e adequá-lo em tais análises, tais como: Nithiarasu et al. (1998), Tezduyar e Senga (2006), Akin e Tezduyar (2004), Catabriga e Coutinho (2002) e Li e Duan (2006). Com os últimos desenvolvimentos, o MEF vem conquistando espaço aceleradamente na mecânica dos fluidos, de forma que, com a escolha deste método para um primeiro trabalho nessa área desenvolvido dentro do grupo de pesquisas, coloca-se o grupo mais próximo das discussões atuais no tema.

Ao se estudar formas de acoplamento fluido-estrutura, por exemplo, a adaptação da malha do escoamento através de descrição Lagrangeana Euleriana Arbitrária (DONEA et al., 1982; TEIXEIRA, 2001), ou alguma técnica Euleriana-Lagrangeana com malha do escoamento fixa (CIRAK; RADOVITZKY, 2005), aliados às novas técnicas de análise não linear geométrica de Sólidos e cascas (CODA; PACCOLA, 2008; CODA, 2009a), pretende-se introduzir no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), uma linha de pesquisas geral e atual no tema.

Com os novos computadores de processamento paralelo de memória compartilhada e distribuída disponíveis no SET, será possível simular uma grande variedade de problemas importantes da engenharia, tais como: análise de escoamento tridimensional de fluidos compressíveis viscosos ou não ao redor de corpos rígidos ou flexíveis, efeito do escoamento transiente sobre corpos flexíveis, e também o estudo de estruturas infláveis e escoamentos internos. Isso garante a possibilidade de continuidade dessa pesquisa, tanto numérica como prática.

## 2 *Aspectos gerais dos problemas de interação fluido - estrutura*

A mecânica dos fluidos possibilita o estudo da distribuição e propagação das tensões no fluido durante um escoamento, o que depende de entre outros, da geometria dos corpos sobre os quais o escoamento acontece. A mecânica dos sólidos possibilita o estudo das deformações, dos deslocamentos e as tensões desenvolvidos em um corpo devido à esforços aplicados no contorno do mesmo ou que sejam aplicados ao domínio devido à atuação de algum campo.

O estudo da interação fluido-estrutura consiste em combinar a mecânica dos fluidos com a mecânica dos sólidos de forma que o movimento do corpo sólido seja levado em conta durante a análise do escoamento e as forças devidas ao escoamento sejam levadas em consideração durante a análise do sólido.

Antes de proceder com o estudo numérico do acoplamento entre a análise das dinâmicas do escoamento e da estrutura, faz-se necessário um estudo geral sobre o problema físico, a fim de se trabalhar numericamente de forma adequada.

Zienkiewicz e Bettess (1978) classificam os problemas de interação fluido-estrutura segundo a diferença entre a magnitude de deslocamentos do fluido e do sólido em três categorias, que são:

1. *Problemas com grande movimento relativo*: São governados pelo fluido, podendo os efeitos de compressibilidade serem importantes. Ex. Efeitos dinâmicos do vento sobre estruturas;
2. *Problemas com deslocamentos do fluido limitados e de curta duração*: Ocorrem usualmente em situações de explosão ou impacto;
3. *Problemas com deslocamentos de fluido limitados porém de longa duração*: Ex. Vibrações acústicas e ação de ondas sobre estruturas “*off-shore*”.

A análise numérica pode ser particularizada para cada uma dessas categorias, e assim, facilitada.

Um dos campos com muitos trabalhos em relação à interação fluido estrutura é o da aeroelasticidade, disciplina essa que combina a aerodinâmica com a dinâmica dos sólidos.

A aeroelasticidade apresenta desde soluções simples para alguns problemas específicos, onde as aproximações da aerodinâmica (sustentação, arrasto e momentos em função da circulação e etc.) sejam válidas, combinadas com análises também simplificadas de elementos estruturais, até soluções mais elaboradas baseadas em modelos aerodinâmicos e estruturais mais complexos (ver por exemplo: Theodorsen e Garrick (1940) e Bisplinghoff et al. (1996)).

Foi nos estudos de aeroelasticidade que Collar (1946) propôs um diagrama (Fig. 2.1), onde os problemas que surgem da interação entre as forças ficam claros. A Dinâmica (forças inerciais), Mecânica dos Fluidos (forças aerodinâmicas) e a Mecânica dos Sólidos (forças elásticas) são os vértices do triângulo, enquanto os lados que ligam os vértices são os problemas surgidos da interação entre estas disciplinas.

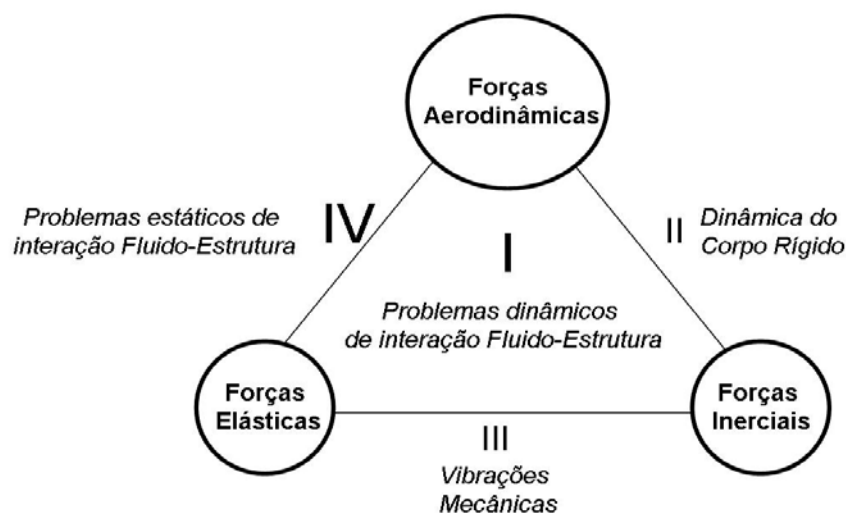


Figura 2.1: Diagrama de Collar

Nas regiões IV e I do diagrama da Fig. 2.1, situam-se os problemas de maior interesse em se tratando de interação fluido-estrutura. Na região IV, embora os efeitos que ocorrem no meio fluido sejam dinâmicos, os efeitos no sólido podem ser considerados estáticos, ou seja, a aceleração da massa do sólido pode ser desprezada. Já na região I, os efeitos dinâmicos na estrutura são importantes, sendo o acoplamento entre as vibrações da estrutura e o escoamento que definem a história do problema.



## 2.1 Fenômenos estáticos

Tanto os fenômenos estáticos como os dinâmicos podem ser subdivididos em dois subgrupos, sendo estes o dos fenômenos de resposta, onde o fenômeno ocorre a qualquer velocidade de escoamento, mudando apenas de intensidade, e o dos fenômenos de estabilidade, onde o problema ocorre a partir de uma determinada velocidade crítica de escoamento (BISPLINGHOFF et al., 1996).

### 2.1.1 Fenômenos estáticos de resposta

Entendem-se estes fenômenos como aqueles em que a estrutura, submetida a um determinado escoamento, apresenta deformações estáticas que impedem que a mesma desempenhe corretamente o papel para o qual foi projetada.

Um exemplo é o caso de *reversão de comando* de ailerão em aeronaves (SOUZA, 1991), onde ao ser inclinado o aileron com a finalidade de aumentar a sustentação em uma das asas, surge um momento que tende a torcer a asa no sentido de diminuir o ângulo de ataque, assim, dependendo da rigidez da estrutura pode haver perda de sustentação ao invés de ganho com a inclinação do aileron, como mostra a Fig. 2.2. Outro exemplo é o fenômeno da *distribuição de carregamento* em asas, gerando sustentação diferente da calculada para a asa não deformada.

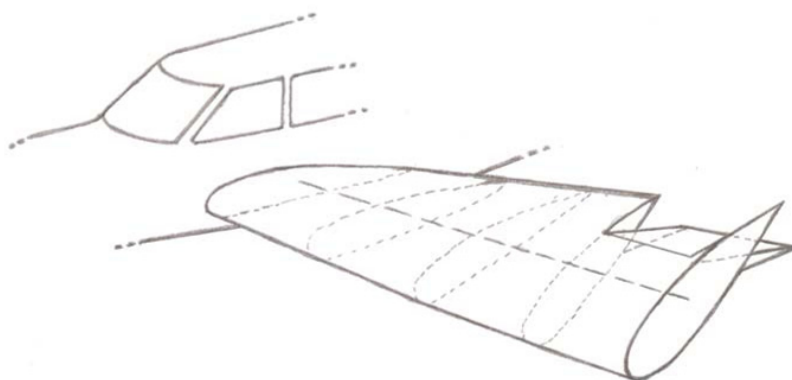


Figura 2.2: Reversão de comando em asa de aeronave

### 2.1.2 Fenômenos estáticos de estabilidade

Um fenômeno de interação fluido-estrutura estático de estabilidade é aquele que, em condições críticas de acoplamento, pode levar a estrutura à falha devido unicamente ao efeito estático

imposto à estrutura, isso é, sem envolver as “forças inerciais”.

O fenômeno de interação fluido estrutura estático de estabilidade mais comum é o fenômeno da *divergência*. A divergência é um fenômeno aeroelástico que pode ocorrer em partes de uma aeronave onde, a partir de certa velocidade, a rigidez é insuficiente para suportar o aumento dos esforços que ocorrem com a mudança de forma devido às deformações elásticas que o corpo sofre. É ilustrado na Fig. 2.3 o caso de divergência em um aerofólio com centro aerodinâmico à frente do eixo elástico (SOUZA, 1991).

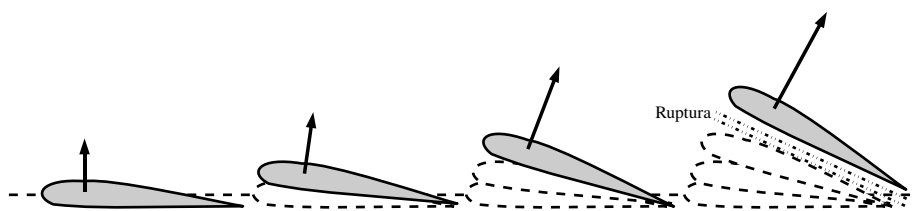


Figura 2.3: Aerofólio sofrendo divergência aeroelástica

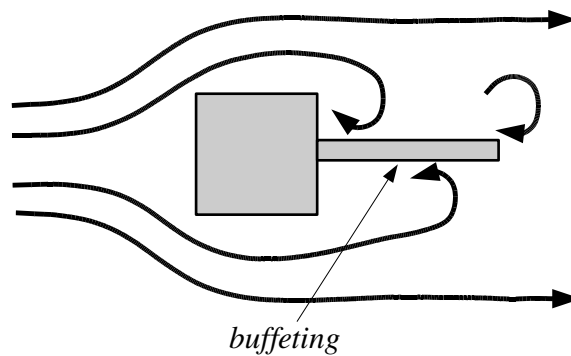
## 2.2 Fenômenos dinâmicos

### 2.2.1 Fenômenos dinâmicos de resposta

Os fenômenos de interação fluido-estrutura dinâmicos de resposta são aqueles em que os esforços devidos ao escoamento podem levar a estrutura à ruína ou ao desempenho abaixo do requerido devido à resposta dinâmica da estrutura.

Como exemplo tem-se o *buffeting*, ou martelamento, que consiste no surgimento de cargas transientes na estrutura devido a flutuações de velocidade do escoamento (TEIXEIRA, 2001), sendo este um fenômeno bastante comum em edificações expostas a turbulências atmosféricas.

*Buffeting*, segundo Hirsch (1994), pode ocorrer em estruturas situadas atrás de obstáculos (ver Fig. 2.4), onde o escoamento apresenta turbulência aumentada, podendo ser de maneira estocástica ou regular, tal como esteira de vórtices periódicos que podem ser gerados atrás de obstáculos cilíndricos. Estes vórtices provocam um carregamento dinâmico nas estruturas sujeitas aos mesmos, que produz vibrações, podendo gerar ressonância quando a frequência dos vórtices for igual a alguma frequência natural da estrutura. Quando o carregamento não é periódico o principal problema é a fadiga.

Figura 2.4: Estrutura submetida a *buffeting*

### 2.2.2 Fenômenos dinâmicos de estabilidade

Os fenômenos de interação fluido-estrutura dinâmicos de estabilidade são aqueles que podem levar a estrutura à falha devido ao acoplamento da resposta dinâmica da estrutura com o fluido a partir de determinadas condições críticas do escoamento.

Um problema dinâmico de interação fluido-estrutura que geralmente impressiona os estudantes de engenharia é o *flutter*, que ocorre geralmente em aeronaves e em pontes. O *flutter* ocorre devido a um acoplamento dos modos de vibrar da estrutura, geralmente de torção e de flexão, com o efeito dinâmico do escoamento (HIRSCH, 1994), de forma que a uma certa velocidade crítica, a vibração da estrutura faz com que o escoamento gere esforços cada vez maiores que contribuem para aumentar a amplitude de vibração.

A figura 2.5 ilustra o surgimento de *flutter* em um aerofólio.

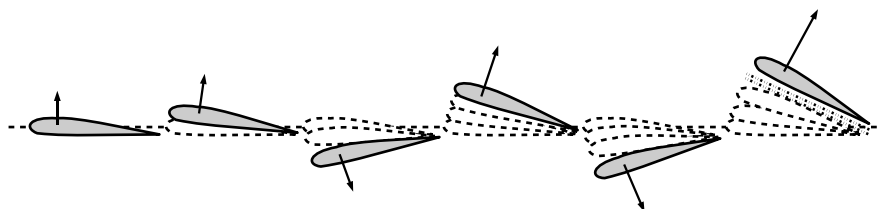


Figura 2.5: Flutter em aerofólio



## 3 *Fundamentos de mecânica dos fluidos*

As grandezas de interesse durante a análise de um escoamento são: as componentes do tensor das tensões (do qual se obtém as tensões desviadoras e a pressão), as componentes de velocidade, a temperatura ou a massa específica em determinado ponto. Assim, se com a presença de massa e tensões pode haver aceleração, recorre-se à segunda Lei de Newton, se pode haver variação da temperatura, ou fluxo de calor, recorre-se à primeira lei da termodinâmica e assim por diante, conforme é apresentado neste capítulo.

Inicialmente adota-se a hipótese de que o fluido consiste num meio contínuo, ou seja, não existem espaços com ausência de matéria sobre toda a região de interesse. Em seguida aplicam-se os princípios da física a um volume de controle, definido por uma superfície de controle permeável à massa porém com forma e volume constantes.

### 3.1 *As equações governantes na descrição Euleriana*

#### 3.1.1 *Equação da conservação da massa*

Baseando-se no princípio da conservação da massa, faz-se o balanço do fluxo de massa no volume de controle infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  iguais conforme a Fig. 3.1, fixo no espaço e permeável à matéria, submetido a um escoamento de velocidade  $\vec{V}(x,y,z)$ , de componentes  $u$  em  $x$ ,  $v$  em  $y$  e  $w$  em  $z$ , considerando-se a massa que entra positiva e a que sai negativa. Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , tem-se que tal balanço deve ser igual à variação da massa no mesmo intervalo conforme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = & -((\rho \vec{V}) \cdot \vec{dA}_{x_1} + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{dA}_{y_1} + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{dA}_{z_1} + \\ & (\rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial x} dx) \cdot \vec{dA}_{x_2} + (\rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial y} dy) \cdot \vec{dA}_{y_2} + (\rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial z} dz) \cdot \vec{dA}_{z_2}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\vec{dA}_{x_1}$ ,  $\vec{dA}_{x_2}$ ,  $\vec{dA}_{y_1}$ ,  $\vec{dA}_{y_2}$ ,  $\vec{dA}_{z_1}$  e  $\vec{dA}_{z_2}$ , são respectivamente os vetores áreas referentes à primeira e a segunda face ortogonal aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

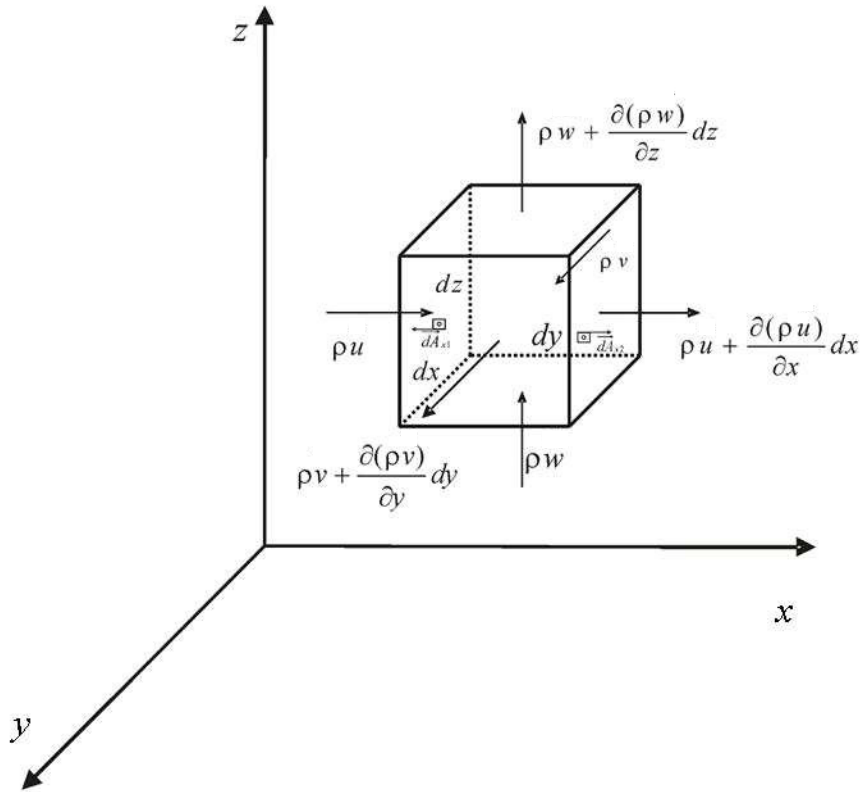


Figura 3.1: Volume de controle infinitesimal

Resolvendo-se os produtos internos na Eq. (3.1) e considerando-se que os vetores de área têm apenas a componente da direção normal à sua face não nula, de valor  $dA$  quando tiver o mesmo sentido do eixo normal à face e  $-dA$  quando tiver sentido contrário ao do eixo normal à face, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = & (\rho u + \rho v + \rho w)(-dA) \\ & + (\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx + \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy + \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz) dA. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dividindo-se a Eq. (3.1) pelo volume e eliminado os termos que se anulam, escreve-se a forma final da Equação da Conservação da Massa, ou Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}. \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Equação da Quantidade de Movimento

Da segunda Lei de Newton têm-se que a soma das forças externas que atuam em um sistema infinitesimal é igual à variação temporal (Derivada Substancial no tempo) da quantidade de movimento do mesmo (força igual a massa vezes aceleração):

$$\frac{D(m \cdot \vec{V})}{Dt} = \sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_c, \quad (3.4)$$

sendo que as forças externas podem ser dadas pelas forças aplicadas ao contorno  $\vec{F}_s$ , somadas às forças de campo  $\vec{F}_c$ .

Fazendo-se o agora o balanço da quantidade de movimento para o volume de controle infinitesimal da Fig. 3.1, num intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  apenas na direção do eixo  $x$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D(mu)}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dx dy dz + (\rho u)(\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{x_1}) + \rho u(\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{y_1}) + \rho u(\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{z_1}) \\ & + (\rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial x} dx) \cdot \overrightarrow{dA}_{x_2} + (\rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial y} dy) \cdot \overrightarrow{dA}_{y_2} \\ & + (\rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial z} dz) \cdot \overrightarrow{dA}_{z_2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Resolvendo os produtos internos em (3.5), excluindo os termos que se anulam e dividindo-se pelo volume, da segunda lei de Newton (3.4), tem-se que:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = \frac{1}{dxdydz} (\sum F_{c_x} + \sum F_{s_x}), \quad (3.6)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes de velocidade.

Chamando de  $g$  a constante de forças de campo, sabendo-se que as forças externas devem estar em equilíbrio com as internas (pela terceira lei de Newton), pode-se escrever a soma das componentes na direção  $x$  das forças externas dividido pelo volume infinitesimal resultando:

$$\frac{1}{dxdydz} (\sum F_{c_x} + \sum F_{s_x}) = g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.7)$$

onde  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  são as tensões desviadoras e  $p$  é a pressão.

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.6), chega-se à forma final da equação da quantidade de movimento na direção  $x$ :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Repetindo-se o processo para os demais eixos cartesianos, chega-se às equações:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho v)}{\partial z} = g_y\rho + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho w)}{\partial z} = g_z\rho + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Equação da Conservação da Energia

De todas as equações já expostas neste capítulo, adiantando-se que as tensões desviadoras são função das velocidades, nota-se que as variáveis independentes são as componentes de velocidade, a pressão e a densidade.

Da primeira Lei da termodinâmica (trabalho iguala-se ao calor menos a variação da energia interna), tem-se que a energia interna do sistema é a soma de todas as energias (cinética, potencial, etc.) de todas as partículas que o constituem. Como tal sendo uma propriedade do sistema, a variação da energia interna só depende dos estados inicial e final da transformação considerada (MUNSON et al., 2002).

No caso do escoamento, a energia interna do sistema pode variar devido à troca de energia e trabalho com a vizinhança de acordo com:

$$\Delta(mE) = Q - W, \quad (3.11)$$

onde  $E$  é a energia específica total,  $Q$  é o fluxo de calor e  $W$  é o trabalho realizado.

Logo, para o sistema em análise pode afirmar-se que:

$$\frac{D(mE)}{Dt} = Q - W. \quad (3.12)$$

Escrevendo-se o balanço de energia interna para o volume de controle da Fig. 3.1 num intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D(mE)}{Dt} = \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dx dy dz - ((\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{x_1}} + (\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{y_1}} + (\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{z_1}}) \\ - ((\rho E \vec{V} + \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial x} dx) \cdot \overrightarrow{dA_{x_2}} + (\rho E \vec{V} + \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial y} dy) \cdot \overrightarrow{dA_{y_2}} \\ + (\rho E \vec{V} + \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial z} dz) \cdot \overrightarrow{dA_{z_2}}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Em seguida, dividindo-se (3.13) pelo volume, resolvendo-se os produtos internos e igua-



lando-se a (3.12) têm-se:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - \frac{Q}{dxdydz} + \frac{W}{dxdydz} = 0. \quad (3.14)$$

Do balanço da quantidade de calor no volume de controle, encontra-se:

$$\frac{Q}{dxdydz} = k \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3.15)$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica e  $T$  é a temperatura.

O trabalho pode ser dividido em 3 parcelas: a primeira, que pode ser chamada de trabalho de escoamento, é a parcela referente às forças normais (pressão); a segunda, age em sentido contrário ao escoamento ocasionando a chamada perda de carga, deve-se às tensões tangenciais geradas pela viscosidade; e a terceira parcela refere-se ao trabalho realizado pelas forças de campo. Fazendo o balanço de trabalho sobre o volume de controle e dividindo pelo volume, chega-se à (3.16):

$$\begin{aligned} \frac{W}{dxdydz} = & \frac{\partial(-pu)}{\partial x} + \frac{\partial(-pv)}{\partial y} + \frac{\partial(-pw)}{\partial z} + \left( \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \right) + \rho g_x u \\ & + \rho g_y v + \rho g_z w. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Das equações (3.14), (3.15) e (3.16), chega-se à forma final da equação da conservação da energia,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - k \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial T}{\partial y} - k \frac{\partial T}{\partial z} \\ & - \frac{\partial(pu)}{\partial x} - \frac{\partial(pv)}{\partial y} - \frac{\partial(pw)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} \\ & + \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \\ & + \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Têm-se agora as equações governantes da mecânica dos fluidos escritas na forma Euleriana: equação da conservação da massa (3.3), equação da quantidade de movimento (3.8), (3.9) e (3.10) e equação da energia (3.17), totalizando 15 incógnitas, para 5 equações, sendo as incógnitas: pressão, massa específica, 3 componentes de velocidade, 9 tensões desviadoras e

temperatura, considerando-se que a energia específica pode ser calculada a partir dessas outras variáveis.

Assim, para que o sistema de equações possa ser resolvido são necessárias maiores considerações que são feitas a seguir.

### 3.1.4 O Tensor das Tensões, as Tensões Desviadoras e a Hipótese de Stokes

Para que se possa dar continuidade ao equacionamento da mecânica dos fluidos é necessário que se faça um estudo sobre as principais propriedades do tensor das tensões, conforme segue, através da definição de tensões de Cauchy apresentadas em vários livros de mecânica do contínuo, tais como Valiappan (1981).

Tomando-se o sistema fluido da Fig. (3.2), uma força  $\vec{F}_s$  atuando sobre a face não coincidente com os planos cartesianos. Esta força pode ser entendida como sendo aplicada pelo restante do contínuo complementar ao plano. Assim, ao se decompor essa força e fazer o equilíbrio, a componente de reação normal ao plano de corte necessariamente existe e possui sentido de dentro para fora do sistema. Já as componentes tangenciais, se existirem, podem ter sentido qualquer. Assim, uma força pode gerar um estado com 9 componentes de tensão não nulas.

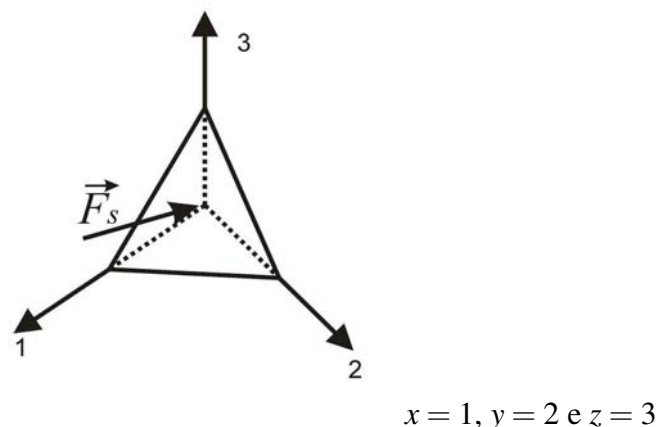


Figura 3.2: Força atuando sobre o tetraedro de Cauchy

Por um postulado da mecânica define-se o vetor de Cauchy  $\vec{t}$ , que representa a influência do restante do corpo sobre o tetraedro da figura 3.2. O mesmo pode ser melhor compreendido analisando-se um ponto  $P$  situado no plano de corte, o vetor  $\vec{t}$  para este caso particular é dado

por:

$$\vec{t} = -\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_s}{\Delta A}, \quad (3.18)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal ao plano de corte. O vetor  $\vec{t}$  tem dimensão de pressão.

Cauchy representou  $\vec{t}$  como uma função linear do vetor,  $\vec{n}$ , normal unitário externo ao plano de corte, no ponto em estudo. Tal aplicação linear, que leva um elemento do espaço de vetores tipo  $\vec{n}$  a um elemento do espaço de vetores tipo  $\vec{t}$ , é denominada tensor das tensões de Cauchy e representado por  $\sigma$ . Assim, é válida a relação:

$$\vec{t} = \sigma \vec{n}. \quad (3.19)$$

Para um dado estado de forças e restrições do contínuo, há um só valor do tensor tensão  $\sigma$ , associado a um dado ponto  $P$  do sólido. Em função dos eixos Cartesianos, o tensor  $\sigma$  pode ser expresso por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Uma propriedade importante que o tensor das tensões de Cauchy apresenta é a simetria, a qual pode ser facilmente demonstrada fazendo-se o somatório de momento em torno de cada um dos eixos, o que já reduz o número de incógnitas das equações governantes da mecânica dos fluidos, conforme enunciadas no item anterior, de 15 para 12.

Dependendo do plano considerado, os valores das tensões normais e tangenciais se alteram, sendo possível achar um plano que tenha o máximo valor para a tensão normal, no qual as tensões tangenciais serão nulas, e as tensões normais são chamadas tensões principais.

Conhecendo-se o estado de tensões em um ponto, é possível calcular as forças de superfície  $\vec{t}$  em um plano qualquer que passe por este ponto, multiplicando-se o tensor das tensões pelo

vetor dos cossenos diretores do referido plano e em seguida o valor de tensão normal ao plano:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \sigma_{nn} &= \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Partindo-se do tensor das tensões em um sistema de coordenadas, pode-se conhecer o tensor em qualquer outro sistema de coordenadas obtido pela rotação do primeiro:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aplicando-se a equação (3.21) ao estado principal de tensões, chamando-se as tensões principais de  $\sigma$ , e em seguida substituindo-se em (3.22), obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.23)$$

o qual admite solução trivial quando o determinante constituinte é não nulo e ou não trivial quando seu determinante é nulo.

Assim, chega-se à equação característica

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{xy}^2 - \sigma_{yy}\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

na qual as 3 raízes correspondem a 3 tensões principais e os 3 coeficientes das variáveis devem

ser invariantes tal que:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{xy}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pode-se afirmar qualitativamente que para um fluido estático as tensões normais em um ponto são constantes e independem da direção do plano de análise, que as flutuações que possam ocorrer são devidas à existência de escoamento viscoso, e por fim, que as flutuações são de ordem de grandeza menor que o valor das tensões normais, adota-se um tensor médio, com valores médios  $\sigma_m$ , e sobre esses valores se adiciona o incremento de perturbação  $\tau_{ij}$ , com  $i$  e  $j$  podendo ser  $x, y$ , ou  $z$ , devido ao escoamento, de forma a ter-se um tensor médio diagonal  $\sigma_m$ , cujas componentes não nulas são iguais à pressão termodinâmica no caso de gases e iguais à pressão mecânica no caso de escoamentos incompressíveis, e um tensor desviador  $\tau$ :

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

tal que o tensor das tensões é a soma dos dois.

A Lei da viscosidade de Newton estabelece que a tensão tangencial para fluidos escoando paralelamente a uma superfície com uma velocidade  $\vec{V}$  de componentes cartesianas  $u$ ,  $v$  e  $w$ , ou em uma notação indicial:  $\mathbf{u}$  de componentes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ para } i \neq j, \quad (3.28)$$

onde  $\mu$  é uma propriedade do fluido chamada viscosidade dinâmica (ver por exemplo Fox e McDonald (2001)) e os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 a 3, sendo os eixos cartesianos  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = 3$ .

Pelo primeiro invariante (3.25), tem-se que o traço de  $\tau$  deve ser nulo. Deve-se então estabelecer a relação entre os termos da diagonal de  $\tau$  e a velocidade.

Assim, define-se  $\tau_{ii}$  através de:

$$\tau_{ii} = 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (3.29)$$

onde  $\lambda$  é um coeficiente que deve fazer satisfazer o primeiro invariante. Fazendo uso do delta de Kronecker, pode-se unir as equações 3.28 e 3.29:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (3.30)$$

Embora para escoamentos incompressíveis o valor de  $\lambda$  não tenha significado, pois o divergente da velocidade é nulo, para os escoamentos compressíveis ele se faz necessário.

A hipótese de Stokes consiste na seguinte relação:

$$3\lambda + 2\mu = 0. \quad (3.31)$$

Assim, das equações (3.30) e (3.31), escreve-se o tensor desviador para escoamentos compressíveis de fluidos Stokesianos em notação cartesiana, conforme:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Substituindo-se a Eq. (3.32) nas Eqs. (3.8), (3.9), (3.10) e (3.17), tem-se as equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos em formulação Euleriana e o número de incógnitas cai agora de 12 para 6, sendo incógnitas agora as 3 componentes de velocidade  $u$ ,  $v$  e  $w$ , a pressão  $p$ , a massa específica  $\rho$  e a temperatura  $T$ . Porém, como existem somente 5 equações, ainda existe a necessidade de se eliminar mais uma incógnita, ou encontrar mais uma equação.

### 3.1.5 A Lei dos Gases Ideais

Se o fluido em análise for considerado um gás perfeito, ou ideal, isto é, um gás que obedece às leis de Boyle-Mariotte, Charles e Gay Lussac (RESNICK; HALLIDAY, 1965). Destas Leis, pode-se escrever a Equação de Clapeyron conforme:

$$pV = nrT, \quad (3.33)$$

ou diretamente em função da massa específica:

$$p = \rho RT, \quad (3.34)$$

onde  $\mathcal{V}$  é o volume do gás,  $n$  é o número de mols do gás,  $r$  ou  $R$  são respectivamente a constante universal dos gases perfeitos adaptadas a cada uma das equações e  $T$  é a temperatura.

Assim, obtém-se uma relação entre temperatura e pressão, de forma que o sistema final pode ser resolvido, pois conta-se com 6 equações e 6 incógnitas. As equações são (3.8), (3.9) e (3.17) com (3.32), (3.3), e (3.16) com (3.33). As incógnitas são  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$  e  $T$ .

Para escoamentos incompressíveis, onde a massa específica é uma constante, diminui-se uma incógnita e a equação (3.33) não é aplicável. Além disso, as equações de quantidade de movimento e energia passam a ficar desacopladas uma da outra, podendo ser resolvidas independentemente.

### 3.1.6 Notação Indicial

Por simplicidade, no desenvolvimento da formulação numérica será feito o uso de uma notação indicial, na qual os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  correspondem respectivamente aos índices 1, 2 e 3, e as componentes dos vetores são representadas pelo símbolo do vetor com o índice subscrito. Vetores e matrizes completos serão representados em negrito.

Tomando-se as equações governantes ((3.3), (3.8)-(3.10) e (3.17)) observa-se que as mesmas podem ser reescritas indicialmente, onde os índices  $i$  e  $j$  indicam soma, conforme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i, \quad (3.36)$$

e

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j \rho E)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial(u_j p)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j} + \rho g_i u_i, \quad (3.37)$$

onde  $u_i$  é a componente na direção  $i$  do vetor velocidade e  $g_i$  é a componente na direção  $i$  do vetor das constantes das forças de campo.

### 3.2 Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária das Equações da Mecânica dos Fluidos

Como já mencionado, a formulação ALE é obtida introduzindo-se um domínio de referência com movimento arbitrário e independente dos pontos materiais, conforme a Fig. 3.3 onde  $R$ ,  $C(t_0)$  e  $C(t)$  são respectivamente os domínios de referência e contínuo no tempo inicial  $t_0$  e final  $t$ . O domínio  $R$  será melhor entendido posteriormente, quando da aplicação dos métodos numéricos, como o domínio computacional.

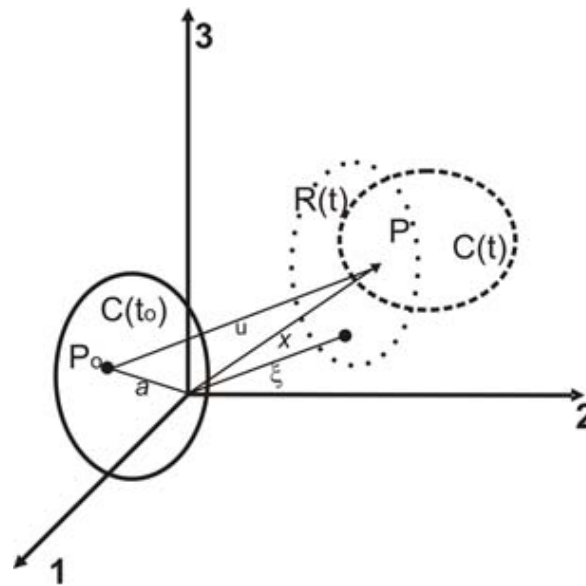


Figura 3.3: Cinemática adotada na descrição ALE

Da mesma forma que na formulação Lagrangeana, uma partícula na formulação ALE é definida nas suas coordenadas materiais na configuração inicial do contínuo, mas o processo de definição é indireto e feito sobre o vetor posição  $\xi$  que está ligado à partícula  $a$  e à variável  $t$ , de acordo com a lei que rege o movimento do domínio de referência (DONEA et al., 1982).

Assim, a formulação ALE pode ser vista como um mapeamento da configuração inicial do contínuo para a configuração atual escrito com respeito ao domínio de referência  $R$ , sendo o Jacobiano  $J$  que liga o domínio de referência e o domínio material dado por:

$$J = \det(A) \text{ onde } A_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} \text{ com } i \text{ e } j = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (3.38)$$

Trabalhando-se algebricamente (ver Donea et al. (1982)), obtém-se a relação:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (3.39)$$



onde  $\mathbf{w}$  é o vetor velocidade do domínio de referência  $R$ .

Seja uma propriedade física  $f(\xi_i, t)$ , expressa na representação de referência igual a  $F(a_i, t)$ , visto que  $\xi_i$ , componente de  $\xi$  com  $i=1, 2$  ou  $3$ , é dependente de  $a_i$ , que é a componente  $i$  de  $a$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial F(a_i, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial t} \Big|_{\xi} + \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right) \quad (3.40)$$

Das regras de diferenciação aplicadas à  $\nabla(f\mathbf{w})$ , tendo em vista (3.39) obtém-se a equação:

$$J\nabla \cdot (f\mathbf{w}) = \frac{\partial J}{\partial t} f + J\mathbf{w} \cdot \nabla f \quad (3.41)$$

Observando-se que  $w_i$  é dado por  $\left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)$ , de (3.41) e (3.40), pode-se extrair finalmente a cinemática da propriedade  $f$  representada por:

$$\frac{\partial (Jf)}{\partial t} = J \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{w}) \right]. \quad (3.42)$$

Fazendo  $f = \rho$  em (3.41) e levando-se em conta (3.35), obtém-se:

$$\frac{\partial (\rho J)}{\partial t} = J \frac{\partial (\rho(w_i - u_i))}{\partial x_j} \quad (3.43)$$

Com o auxílio de (3.40) e (3.41), pode-se reescrever (3.43) como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} (w_i - u_i) - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (3.44)$$

ou ainda, conforme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (3.45)$$

A equação (3.45) representa a equação da conservação da massa na descrição ALE.

Analogamente, para (3.36) e (3.37), obtém-se a formulação ALE das equações da conservação da quantidade de movimento e da energia:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = w_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j} \quad (3.46)$$

e

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho E)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial (u_j p)}{\partial x_j} - \frac{\partial (\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j} - \rho g_i u_i = w_i \frac{\partial (\rho E)}{\partial x_i}. \quad (3.47)$$

Observa-se nas equações (3.45), (3.46) e (3.47), que quando a velocidade  $w$  for nula, a formulação é a Euleriana, e quando a velocidade  $w$  for igual à velocidade  $u$  a formulação é a

Lagrangeana (DONEA et al., 1982).

## ***4 Fundamentos de mecânica não linear geométrica dos sólidos***

Tal como no equacionamento da Mecânica dos Fluidos apresentado no capítulo 2, para se modelar matematicamente a mecânica dos sólidos é feito uso da hipótese de que o sólido consiste em meio contínuo.

Os sólidos apresentam rigidez tanto à imposição de tensões normais quanto desviadoras até certo limite (até a ruptura em materiais frágeis ou escoamento em materiais dúcteis) e portanto apresentam valores finitos de deslocamentos relativos (deformações). Isto implica que os deslocamentos ou posições podem ser considerados as variáveis principais do problema, sendo a formulação Lagrangeana adequada para tal análise (VALIAPPAN, 1981).

O equacionamento é obtido ao se aplicar as leis da mecânica sobre um sistema com massa constante (obedecendo ao princípio da conservação da massa), porém com forma e volume variável.

No que diz respeito à geometria de deformação dos corpos, o estudo da mecânica dos sólidos pode ser dividido em linear e não linear.

A mecânica dos sólidos com modelagem geometricamente linear considera que o equilíbrio de forças se faz em relação à configuração inicial (indeslocada e indeformada) do corpo estudado, sendo uma aproximação limitada da realidade, mas que resulta em técnicas de solução linear simples e úteis para diversas aplicações da engenharia (CODA, 2003).

Por outro lado, a análise não linear geométrica (NLG) considera o equilíbrio na configuração final, ou atual, do corpo (deformada e deslocada), conduzindo a resultados adequados mesmo em situações de grandes deformações e deslocamentos, onde a configuração final do sólido é bem diferente da configuração inicial. Isto, entretanto, termina por levar a mecânica NLG a um equacionamento mais complexo, requerendo geralmente solução numérica.

## 4.1 Cinemática e deformações

### 4.1.1 Mudança de configuração – definições e equacionamento

Considerando que um corpo sólido pode ser descrito como um conjunto de pontos materiais, define-se configuração deste corpo como uma região do espaço definida por uma função contínua que faz o mapeamento, correspondência única, entre os pontos materiais e sua coordenada no espaço pontual Euclidiano (COIMBRA, 1978). Assim, indica-se a posição de um ponto na configuração inicial por meio de:

$$\vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3, \quad (4.1)$$

e na configuração final através de:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad (4.2)$$

onde  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são os versores dos eixos coordenados no espaço euclidiano.

É chamada mudança de configuração, ou movimento, à uma função inversível  $\chi$  que associa a posição inicial e atual de um ponto material em um determinado instante  $t$  (OGDEN, 1984; CODA, 2003), tal que pode ser escrita a equação:

$$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t) = \chi_t(\vec{X}). \quad (4.3)$$

Da definição de mudança de configuração, pode-se afirmar que o movimento de corpo rígido é um caso particular de mudança de configuração que não causa alteração na forma do corpo e na posição relativa de seus pontos materiais.

À diferença entre as configurações final e a inicial é dado o nome da campo de deslocamentos, representado por  $\vec{U}$ , podendo ser expresso na descrição Lagrangeana da seguinte forma:

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}. \quad (4.4)$$

Seja a mudança de configuração representada na Fig. 4.1. Através de expansão por série de Taylor para a função  $\chi$  em torno de  $X_0$ , pode-se expressar o vetor  $\vec{\Delta x}$  como:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x} &= \vec{x} - \vec{x}_0 = \left[ \vec{x}_0 + \frac{\partial \chi(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \Delta \vec{X} + O^2(\Delta X) \right] - \vec{x}_0 \\ &= \left[ \vec{x}_0 + \nabla \chi(\vec{X}, t) \Delta \vec{X} + O^2(\Delta X) \right] - \vec{x}_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

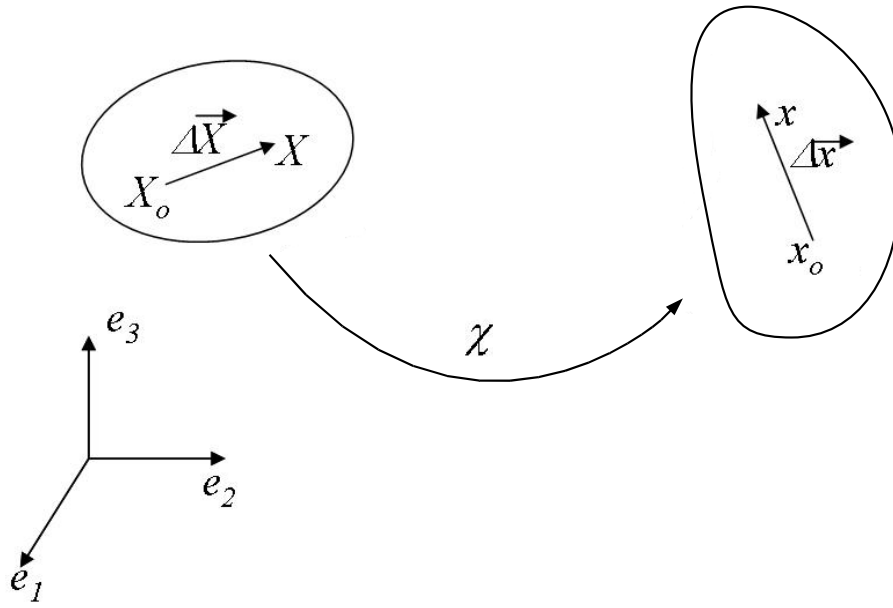


Figura 4.1: Mudança de configuração de um corpo

Quando  $\Delta\vec{X}$  é infinitesimal, os termos de ordem superior de (4.5) se anulam, resultando:

$$d\vec{x} = \nabla\chi(\vec{X}, t)d\vec{X} = \nabla x(\vec{X}, t)d\vec{X}. \quad (4.6)$$

Sendo  $A$  a matriz gradiente da função mudança de configuração, as suas componentes são escritas como:

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial \chi_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} \quad (\text{para } i, j = 1, 2, 3), \quad (4.7)$$

devendo ser observado que a menos que  $d\vec{X}$  seja nulo,  $d\vec{x}$  jamais será nulo, ou seja,  $A$  não é singular, concluindo-se a seguinte propriedade para o jacobiano  $J$ :

$$d\vec{x} = A \cdot d\vec{X} \neq \vec{0}, \forall d\vec{X} \neq \vec{0} \Rightarrow \det(A) = J \neq 0. \quad (4.8)$$

Uma informação importante que pode ser obtida do gradiente  $A$  é a variação de volume entre a configuração inicial e atual. Para tal, considera-se um sistema infinitesimal nas configurações inicial e atual, conforme a figura 4.1. Na configuração inicial tem-se o volume  $dV_o$  de um cubo infinitesimal de dimensões  $dX_1$ ,  $dX_2$  e  $dX_3$  calculado por:

$$dV_o = (d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2) \cdot d\vec{X}_3 = \det([d\vec{X}_1, d\vec{X}_2, d\vec{X}_3]), \quad (4.9)$$

e na configuração final o elemento possui volume  $V$  dado por:

$$d\mathcal{V} = (\vec{dx}_1 \times \vec{dx}_2) \cdot \vec{dx}_3 = \det([\vec{dx}_1, \vec{dx}_2, \vec{dx}_3]). \quad (4.10)$$

Como  $\vec{dx} = A\vec{dX}$ , das propriedades de determinantes é obtida a relação entre os volumes nas configurações inicial e final:

$$d\mathcal{V} = \det(A) \det([\vec{dX}_1, \vec{dX}_2, \vec{dX}_3]) = \det(A) d\mathcal{V}_o = J d\mathcal{V}_o. \quad (4.11)$$

Outra expressão importante é a relação entre áreas, visualizada na Fig. 4.2 Seja a área infinitesimal  $dA_o$  na configuração inicial e  $dA$  na configuração final, tal que:

$$\vec{dA}_o = \vec{N} dA_o \quad (4.12)$$

e

$$\vec{dA} = \vec{n} dA, \quad (4.13)$$

onde  $\vec{N}$  e  $\vec{n}$  são respectivamente os versores normais à porção de área infinitesimal na configuração inicial e atual. Os volumes infinitesimais da figura 4.2 são calculados por:

$$d\mathcal{V}_o = \vec{dU}^T \cdot \vec{N} dA_o \quad (4.14)$$

e

$$d\mathcal{V} = \vec{u}^T \vec{n} dA. \quad (4.15)$$

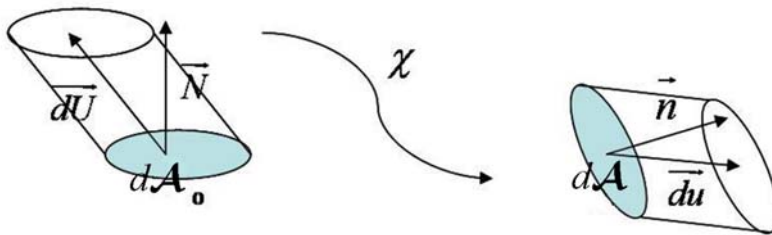


Figura 4.2: Mudança de área

Com base em (4.11), escreve-se a relação:

$$d\mathcal{V} = \vec{u}^T \vec{n} dA \vec{U}^T \vec{N} dA_o J, \quad (4.16)$$

ou ainda, de (4.8),

$$\vec{U}^T A^T \vec{n} dA = \vec{U}^T \vec{N} dAJ, \quad (4.17)$$

que implica na expressão:

$$dA \vec{n} = JB \vec{N} dA_o. \quad (4.18)$$

onde  $B = (A^T)^{-1}$ . Essa expressão é conhecida como fórmula de Nanson.

### 4.1.2 Medidas de deformação

Considerando-se a capacidade dos sólidos de mudarem de forma ao serem submetidos a forças externas, são necessárias medidas de deformação para que se possa analisar o equilíbrio. A deformação num ponto deve ser entendida como a alteração da forma de uma vizinhança do ponto pela função mudança de configuração (4.3).

Da definição de módulo aplicada ao vetor  $\vec{dx}$ , e de (4.8), obtém-se:

$$|\vec{dx}|^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = (A \vec{dX}) \cdot (A \vec{dX}) = \vec{dX} \cdot (A^T A \vec{dX}) = \vec{dX} \cdot C \vec{dX} > 0 \quad (4.19)$$

O tensor  $C = A^T \cdot A$  que aparece em (4.19) é positivo definido e conhecido como tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Fazendo a diferença entre os quadrados dos módulos dos vetores  $\vec{dx}$  e  $\vec{dX}$ , tem-se:

$$|\vec{dx}|^2 - |\vec{dX}|^2 = \vec{dX} \cdot C \vec{dX} - \vec{dX} \cdot \vec{dX} = \vec{dX} \cdot (C - I) \vec{dX} = \vec{dX} \cdot 2E \vec{dX} \quad (4.20)$$

onde  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem e  $E$  é conhecido como tensor de deformação de Green-Lagrange, com seus componentes  $i$  e  $j$  definidos por (4.21), onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (\text{para } i \text{ e } j = 1, 2 \text{ ou } 3) \quad (4.21)$$

Entende-se por alongamento relativo Lagrangeano  $\lambda(U)$ , a razão entre os comprimentos final e inicial de uma fibra  $dX$ , inicialmente na direção de  $\vec{U}$ . Partindo-se das definições já vistas o alongamento relativo é expresso como:

$$\lambda(U) = \frac{dx}{dX} = \sqrt{\vec{U}^T A^T A \vec{U}} = \sqrt{\vec{U}^T C \vec{U}} \quad (4.22)$$

Sendo  $X_i$  as coordenadas na configuração inicial e  $x_i$  as coordenadas na configuração atual, define-se que a deformação longitudinal de engenharia aplicada a grandes deformações no sentido de  $X$  pode ser entendida como a taxa de variação da mudança de comprimento de uma fibra

em relação ao comprimento inicial, conforme:

$$\varepsilon(X) = \frac{dx - dX}{dX} = \lambda(X) - 1. \quad (4.23)$$

Para se definir a distorção, tomam-se duas direções quaisquer com ângulo de  $90^\circ$  entre si,  $i$  e  $i'$ , na configuração inicial. Sendo  $dX$  e  $dX'$  fibras infinitesimais nestas direções, tal que:

$$\vec{dX} = \vec{i} dX \quad \vec{dX}' = \vec{i}' dX'. \quad (4.24)$$

Seja  $\theta$  o ângulo entre as novas direções  $j$  e  $j'$  na configuração final. A distorção é dada por:

$$\gamma_{ii'} = \pi/2 - \theta \quad (4.25)$$

Assim como a deformação de engenharia, a distorção pode ser escrita em função do alongamento, (4.27), resultando no pseudo tensor das deformações de engenharia:

$$\varepsilon_{eng} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_2 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

com

$$\gamma_{12} = \arccos \left( \frac{\vec{e}_1^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{e}_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - \frac{\pi}{2}. \quad (4.27)$$

A matriz da Eq. (4.26) é dita um pseudo tensor, pois não respeita as leis de giro tensorial e serve apenas como ilustração sensível de uma medida de deformação. Dessa forma, a medida de deformação adotada neste trabalho é a deformação de Green-Lagrange (Eq. (4.21)).

## 4.2 Tensões

Tomando-se um corpo no qual estejam atuando forças externas, seccionando-o em duas partes conforme a figura 4.3, surgem forças internas distribuídas na secção de forma a garantir o equilíbrio.

O vetor  $\vec{df}$  é a resultante de força que atua numa área superficial infinitesimal na superfície da secção do corpo e é calculado por

$$\vec{df} = \vec{t} dA = \vec{T} dA_0, \quad (4.28)$$

onde  $\vec{T} = \vec{T}(\vec{X}, t, \vec{N})$  é chamado vetor de forças de superfície de Piola-Kirchhoff de primeira



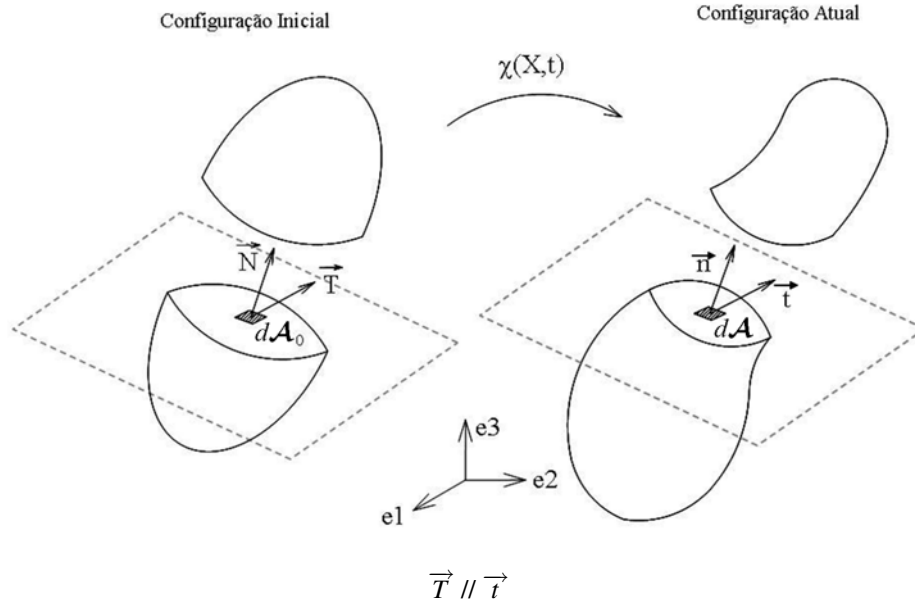


Figura 4.3: Forças de superfície

espécie, e  $\vec{t} = \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n})$  é chamado vetor de força de superfície de Cauchy.

Os tensores das tensões reais de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  e das tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie  $\mathbf{P}$  podem ser obtidos como:

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T(\vec{x}, t) \vec{n} \Rightarrow t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (4.29)$$

e

$$\vec{T}(\vec{X}, t, \vec{N}) = \mathbf{P}^T(\vec{X}, t) \vec{N} \Rightarrow T_i = P_{ji} N_j. \quad (4.30)$$

Com base na fórmula de Nanson Eq. (4.18), é estabelecida a relação entre o tensor das tensões reais de Cauchy e o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie:

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^{-T} \Rightarrow P_{ki} = \mathbf{J} \sigma_{ij} B_{jk}. \quad (4.31)$$

### 4.3 Lei da conservação da massa

Para um sistema com fronteira impermeável à massa, a variação da mesma durante a mudança de configuração deve ser nula, o que implica no balanço apresentado nas equações (4.32)-(4.34):

$$\rho_0 d\mathcal{V}_0 = \rho d\mathcal{V} \text{ (forma diferencial ou local)} \quad (4.32)$$

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega} \rho d\mathcal{V} \text{ (forma integral ou global)} \quad (4.33)$$

$$\int_{\Omega_0} (\rho_0 - \rho J) d\mathcal{V}_0 = 0, \text{ para qualquer } \mathcal{V}_0 \quad (4.34)$$

Com base nas equações (4.32)-(4.34), escreve-se a forma local final da equação da conservação da massa:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J} \Rightarrow \rho_0 = J\rho. \quad (4.35)$$

Com base nesse princípio, Ogden (1984) mostra o seguinte colorálio:

$$\int_{\Omega(t)} \rho(t)f(t)d\mathcal{V} = \int_{\Omega_0} \rho(t)J(t)f(t)d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 f(t)d\mathcal{V}_0, \quad (4.36)$$

onde  $\Omega$  e  $\Omega_0$  correspondem respectivamente ao domínio físico nas configurações inicial e atual e  $f$  pode ser uma função contínua qualquer, e assim:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t)f(t)d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 f(t)d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{d}{dt} f(t)d\mathcal{V}_0. \quad (4.37)$$

## 4.4 Balanço da quantidade de movimento - primeira lei do movimento de Euler

Seja  $\vec{Q}(t)$  a quantidade de movimento de um corpo, calculada conforme a equação

$$\vec{Q}(t) = \int_{\Omega} \rho \vec{x} d\mathcal{V}, \quad (4.38)$$

onde  $\vec{x}$  é a variação da posição atual  $x$  no tempo  $t$  (velocidade).

Chamando-se a resultante das forças atuantes no sistema de  $\vec{R}$ , da segunda lei de Newton (OGDEN, 1984) e com base nas equações (4.37) e (4.38) resulta:

$$\vec{R} = \frac{d}{dt} \vec{Q}(t) = \int_{\Omega} \rho \vec{x} d\mathcal{V}, \quad (4.39)$$

onde  $\vec{x}$  é aceleração dada pela segunda derivada no tempo da posição  $x$ .

Considerando-se  $\vec{g}$  as forças de domínio,  $\vec{t}$  as forças de superfície, e adotando-se uma notação indicial, a expressão (4.39) fica:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{x}_i d\mathcal{V} = \int_{\Omega} g_i d\mathcal{V} + \int_{\Gamma} t_i dA \quad (4.40)$$

Do teorema das tensões de Cauchy (4.30), e fazendo uso do teorema da divergência de Gauss, chega-se a

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{x}_i d\mathcal{V} = \int_{\Omega} g_i d\mathcal{V} + \int_{\Omega} \sigma_{ji,j} d\mathcal{V}, \quad (4.41)$$

onde o índice  $,j$  indica derivada em relação à direção  $j$ .

Considerando a arbitrariedade de  $\mathcal{V}$ , a forma local de (4.41) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ji,j} + g_i = \rho \ddot{x}_i. \quad (4.42)$$

A equação (4.41) considera o movimento na configuração atual, sendo assim uma versão Euleriana da equação da quantidade de movimento.

Com o emprego da fórmula de Nanson (4.18) em (4.40), escreve-se a versão Lagrangeana desta equação:

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{x}_i d\mathcal{V}_o = \int_{\Omega_o} g_i J d\mathcal{V}_o + \int_{\Gamma_o} J \sigma_{ij} B_{jk} N_k d\mathcal{A}_o \quad (4.43)$$

onde  $B=A^{-T}$ .

Com base em (4.31), a equação (4.43) pode ainda ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{x}_i d\mathcal{V}_o = \int_{\Omega_o} G_i d\mathcal{V}_o + \int_{\Gamma_o} P_{ki} N_k d\mathcal{A}_o \quad (4.44)$$

onde  $G_i$  é a componente de força de campo na configuração inicial, na direção  $i$ .

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss no último termo de (4.44), chega-se à forma final da equação da quantidade de movimento em descrição Lagrangeana:

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{x}_i d\mathcal{V}_o = \int_{\Omega_o} G_i d\mathcal{V}_o + \int_{\Omega_o} P_{ki,k} d\mathcal{V}_o \quad (4.45)$$

que, a partir da arbitrariedade de  $\mathcal{V}_o$ , pode ser expressa localmente como:

$$P_{ki,k} + G_i = \rho_o \ddot{x}_i. \quad (4.46)$$

## 4.5 Princípio dos trabalhos virtuais

Uma técnica alternativa de se analisar o equilíbrio muito utilizada em análises numéricas de estruturas é o princípio dos trabalhos virtuais (PTV).

O carregamento provoca um deslocamento  $\vec{\delta x}$  em determinado ponto da estrutura. Não havendo nenhuma transferência de calor, pela primeira Lei da Termodinâmica fica evidente que o trabalho do carregamento (forças externas) deve ser igual à energia de deformação das tensões

internas.

Seja um deslocamento virtual  $\vec{\delta x}$  compatível, isto é, que atende às condições de contorno essenciais impostas, que são deslocamentos prescritos em certas regiões do corpo, e é admissível quando a função que o descreve possui a continuidade desejada.

Ponderando-se a forma local da Equação da quantidade de movimento (4.42) Euleriana por  $\vec{\delta x}$ , tem-se:

$$\sigma_{ji,j} \delta x_i + g_i \delta x_i = \rho_o \ddot{x}_i \delta x_i. \quad (4.47)$$

Integrando-se (4.47) na configuração final têm-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta x_i dV + \int_{\Omega} g_i \delta x_i dV = \int_{\Omega} \rho_o \ddot{x}_i \delta x_i dV, \quad (4.48)$$

que com a aplicação do teorema da divergência, assume a forma:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \delta x_i n_j dA + \int_{\Omega} g_i \delta x_i dV = \int_{\Omega} \rho \ddot{x} \delta x_i dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta x_{i,j} dV. \quad (4.49)$$

Ou pode-se escrever a equação (4.49) vetorialmente como:

$$\int_{\Gamma} \vec{t} \cdot \vec{\delta x} dA + \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{\delta x} dV = \int_{\Omega} \rho \vec{\ddot{x}} \cdot \vec{\delta x} dV + \int_{\Omega} tr(\boldsymbol{\sigma}^T \nabla(\vec{\delta x})) dV, \quad (4.50)$$

onde o último termo é conhecido como variação da energia de deformação.

Para se obter uma forma Lagrangeana, a equação (4.46) é ponderada por  $\vec{\delta x}$  e integrada em relação à configuração inicial, ao mesmo tempo em que aplica-se o teorema da divergência no termo do tensor das tensões, resultando em:

$$\int_{\Gamma_o} T_i \delta x_i dA_o + \int_{\Omega_o} G_i \delta x_i dV_o = \int_{\Omega_o} \rho \ddot{X}_i \delta x_i dV_o + \int_{\Omega_o} P_{ki} \delta x_{i,k} dV_o. \quad (4.51)$$

Com base em (4.7), pode-se dizer que  $\delta x_{i,k} = \delta A_{ik}$ , e portanto conclui-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_o} \vec{T} \cdot \vec{\delta x} dA_o + \int_{\Omega_o} \vec{G} \cdot \vec{\delta x} dV_o &= \int_{\Omega_o} \rho \vec{\ddot{X}} \cdot \vec{\delta x} dV_o + \int_{\Omega_o} tr(\mathbf{P}^T \delta A) dV_o \\ &= \int_{\Omega_o} \rho \vec{\ddot{X}} \cdot \vec{\delta x} dV_o + \int_{\Omega_o} \mathbf{P}^T : \delta A dV_o, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde observa-se que a tensão  $\mathbf{P}^T$  é conjugado energético de  $A$  e  $:$  definem a contração de segunda ordem.

Define-se o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $S$ , tal que:

$$P^T = AS. \quad (4.53)$$

Substituindo (4.53) em (4.31) é possível escrever a equação:

$$\sigma = \frac{1}{J}ASA^T. \quad (4.54)$$

Da substituição de (4.53) na equação (4.52), resulta:

$$\int_{\Gamma_o} \vec{T} \cdot \vec{\delta x} dA_o + \int_{\Omega_o} \vec{G} \cdot \vec{\delta x} dV_o = \int_{\Omega_o} \rho \vec{X} \cdot \vec{\delta x} dV_o + \int_{\Omega_o} AS : \delta A dV_o. \quad (4.55)$$

Observando-se que:

$$\delta E = \frac{1}{2} \delta C, \quad (4.56)$$

é fácil demonstrar pelas propriedades tensoriais que:

$$\delta E = A^T Grad(\delta \vec{u}) = A^T \delta A \quad (4.57)$$

e

$$P^T : Grad(\delta \vec{u}) = S : \delta E. \quad (4.58)$$

Então, sendo  $S$  conjugado de  $E$ , a equação (4.55) pode finalmente ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_o} \vec{T} \cdot \vec{\delta x} dA_o + \int_{\Omega_o} \vec{G} \cdot \vec{\delta x} dV_o = \int_{\Omega_o} \rho_0 \vec{X} \cdot \vec{\delta x} dV_o + \int_{\Omega_o} S : \delta E dV_o. \quad (4.59)$$

Assumindo-se forças conservativas, pode-se afirmar que (CODA, 2003):

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{x} = \delta (\vec{G} \cdot \vec{x}), \quad (4.60)$$

$$(\vec{P}^T \vec{N}) \cdot \delta \vec{x} = \vec{T} \cdot \delta \vec{x} = \delta (\vec{T} \cdot \vec{x}) \quad (4.61)$$

e

$$\vec{x} \cdot \delta \vec{x} = \frac{1}{2} \delta (\vec{x} \cdot \vec{x}). \quad (4.62)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, a equação (4.59) pode ser reescrita em:

$$\delta \Pi = \delta \left[ \int_{\Omega_o} \vec{G} \cdot \vec{x} dV_o + \int_{\Gamma_o} \vec{T} \cdot \vec{x} dA_o - \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \rho_0 \vec{x} \cdot \vec{x} dV_o - \int_{\Omega_o} w dV_o \right] = 0, \quad (4.63)$$

donde conclui-se:

$$\Pi = \int_{\Omega_0} \vec{G} \cdot \vec{x} d\mathcal{V}_0 + \int_{\Gamma_0} \vec{T} \cdot \vec{x} d\mathcal{A}_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{x} \cdot \vec{x} d\mathcal{V}_0 - \int_{\Omega_0} w d\mathcal{V}_0, \quad (4.64)$$

onde  $\delta w = tr(\mathbf{S}\delta\mathbf{E}) = tr(\mathbf{P}^T \mathbf{A})$ , seguindo a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff,  $w = \frac{1}{2}tr(\mathbf{SE})$ .

Para forças conservativas, a expressão (4.64) quantifica a energia mecânica total do sistema considerado para uma configuração  $x$  e a expressão (4.63) representa a condição de estacionariedade da energia total do sistema.

Pelo princípio da mínima energia potencial total, uma estrutura encontra-se em equilíbrio quando, dado um deslocamento virtual  $\delta x$ , a primeira variação do funcional  $\Pi$ , representada por  $\delta\Pi$ , é igual a zero.

A primeira variação de um funcional  $f$  é definida por

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial Y_1} \delta Y_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \delta Y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Y_n} \delta Y_n, \quad (4.65)$$

onde  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  são as variáveis das quais o funcional  $f$  é dependente (LANCZOS, 1986).

Assim, o corpo sólido está em equilíbrio quando satisfaz às relações:

$$\Pi = \Pi(\vec{Y}) \Rightarrow \delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \delta\vec{Y} = \vec{0}, \forall \vec{Y} \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial Y_K} \delta Y_K = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial Y_K} = 0 \text{ com } k = 1, n. \quad (4.66)$$

Embora o equacionamento desenvolvido seja de grande utilidade para a descrição do equilíbrio na configuração atual, a determinação dessa configuração, geralmente, só é possível com uso de métodos aproximados ou numéricos, devido à complexidade matemática das equações não lineares envolvidas.

Quando problemas não conservativos são considerados, ainda valem as expressões (4.50), (4.51) e (4.56)

## 4.6 Lei constitutiva

Conhecer uma lei constitutiva que relacione as deformações com tensões adequadamente para o caso em estudo é condição necessária para se solucionar as equações de equilíbrio de corpos flexíveis. A lei constitutiva empregada neste trabalho é a de Saint-Venant-Kirchhoff.

Para a deformação de Green-Lagrange, pode-se propor a seguinte expressão para a energia

de deformação específica:

$$w = \frac{1}{2} E_{ij} D_{ijkl} E_{kl} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E}, \quad (4.67)$$

onde  $\mathbf{D}$  é um tensor de quarta ordem, chamado tensor dos modos elásticos de rigidez.

Pela derivada da expressão (4.67) em relação ao tensor de deformações de Green-Lagrange obtém-se:

$$\mathbf{S} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\text{tr}(\mathbf{E})] \mathbf{I} + 2\mathbf{G}\mathbf{E}, \quad (4.68)$$

onde  $\mathbf{S}$  é o tensor da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie,  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange,  $E$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\nu$  são respectivamente o módulo de elasticidade, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material.

A lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff trata-se de uma generalização da lei de Hooke e representa relação linear entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green-Lagrange. Embora a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff seja uma generalização da Lei de Hooke que visa contemplar materiais hiperelásticos, a mesma só pode ser aplicada com segurança no domínio das pequenas deformações (ver Pascon (2008)).





## 5 *Análise numérica de dinâmica dos fluidos*

A sequência adotada neste trabalho consiste em primeiro discretizar as equações no tempo, para em seguida aplicar o método dos resíduos ponderados e estabelecer o procedimento de solução.

### 5.1 Discretização no tempo

#### 5.1.1 Aspectos matemáticos dos problemas transientes em mecânica dos fluidos

Os problemas de interesse são transientes, ou seja, envolvem a variação temporal das grandezas físicas. A partir dos valores iniciais dessas grandezas, pode-se encontrar uma solução numérica, ou em alguns casos analítica, da Equação Diferencial Parcial que rege o problema. As soluções numéricas são obtidas a partir de uma marcha no tempo com passos de duração  $\Delta t$  até atingir o instante final desejado (FORTUNA, 2000).

Ainda, segundo Fortuna (2000), os fenômenos transientes são modelados por equações diferenciais parabólicas ou hiperbólicas. Os fenômenos dissipativos (efeito da viscosidade, por exemplo) são descritos por equações parabólicas. Se não houver dissipação de energia, as equações são hiperbólicas.

A equação modelo do problema hiperbólico é a equação de convecção, que para o caso unidimensional linear, ou seja, quando existe relação linear entre o deslocamento e tempo, é escrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (5.1)$$

A equação (5.1) representa o transporte de  $\phi$  sem dissipação, no sentido positivo de  $x$ , com velocidade  $u$ . Em um problema real  $\phi$  pode ser massa, quantidade de movimento, energia, etc.

Caso o processo de convecção possua mecanismos dissipativos, esse obedece à equação parabólica de convecção-difusão, que para o caso de convecção linear é representada através da expressão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (5.2)$$

onde  $\Gamma$  é o coeficiente de difusão. A equação (5.2) também é denominada equação de transporte.

A figura 5.1 ilustra um exemplo de solução da equação de transporte (5.2).

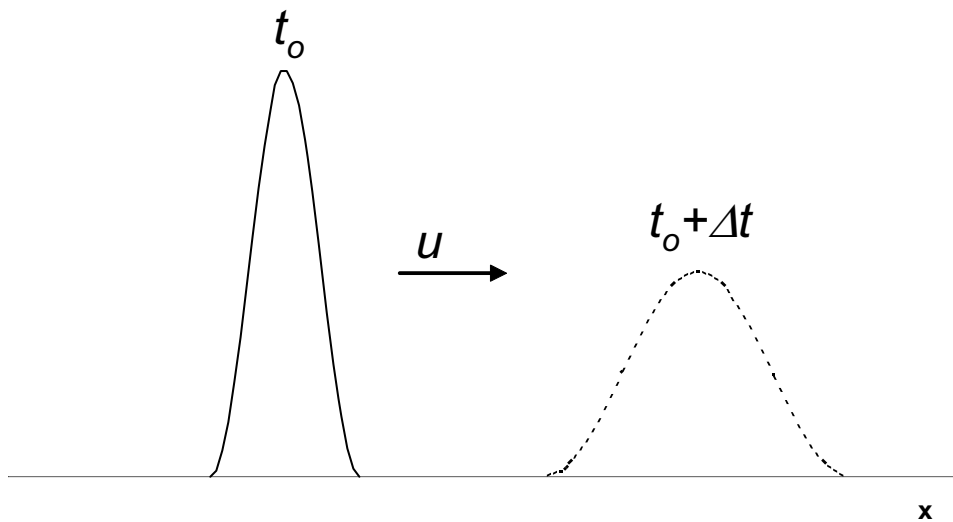


Figura 5.1: Distribuição Gaussiana transportada com dissipação

Os problemas transientes consistem em problemas de valores iniciais (PVI's), exigindo para a sua solução a imposição de condições iniciais (condições conhecidas em algum instante passado no tempo). Quando os problemas transientes necessitam também de condições de contorno (condições que durante todo o intervalo de tempo são conhecidas sobre determinada região do espaço que delimita o domínio da análise), também constituem problemas de valor de contorno. Quando são governados por uma equação diferencial hiperbólica, os problemas transientes apresentam região aberta e podem admitir solução descontínua. Por outro lado, quando as equações governantes são parabólicas, os problemas transientes apresentam região fechada e não admitem solução descontínua.

### 5.1.2 Solução numérica explícita de problemas de transporte

Sejam chamadas características as curvas que indicam as posições no espaço pelas quais ocorre o transporte de informações, conforme pode ser visto em Fortuna (2000). De posse desse conceito, por simplicidade, primeiro será descrito o processo para o problema linear sem difusão, e em seguida, expandido para o não linear com difusão.

Se uma partícula com a informação escalar  $\phi$  se propaga por uma determinada característica, com determinada velocidade constante  $u$ , idêntica à velocidade de convecção para problemas escalares, a posição final  $y$  adquirida por esta partícula após um intervalo de tempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , para um caso unidimensional linear, é expressa por:

$$y = x + u(t_{n+1} - t_n). \quad (5.3)$$

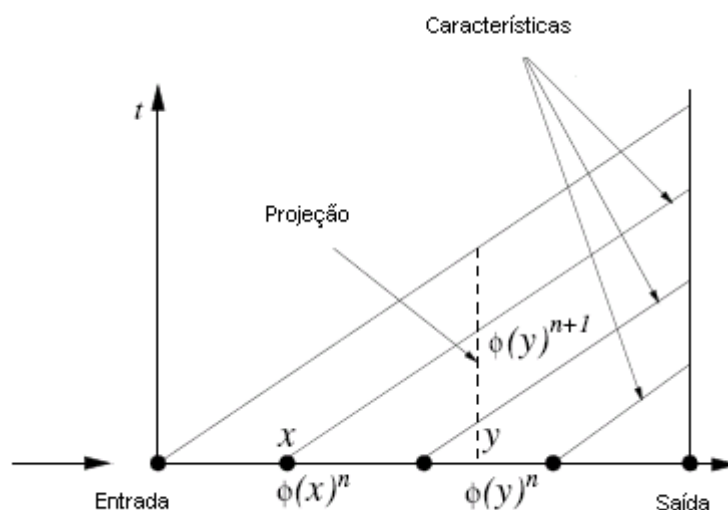


Figura 5.2: Curvas características para equação linear

Como pode ser observado na figura 5.2, o valor da grandeza escalar  $\phi$ , na posição  $y$  e no instante  $t = n + 1$ , é igual ao valor de  $\phi$  na posição  $x$  e no instante  $t = n$ , ou seja:

$$\phi(x)_n = \phi(y)_{n+1}. \quad (5.4)$$

É possível obter uma forma fraca de (5.4) ponderando-se a mesma e integrando sobre o domínio espacial  $\Omega$ . Observando que as funções ponderadoras correspondentes a  $x$  ou a  $y$  podem ser aplicadas para tal, portanto, opta-se pela função ponderadora  $N(y)$ :

$$\int_{\Omega} \phi(x)_n N(y) d\Omega = \int_{\Omega} \phi(y)_{n+1} N(y) d\Omega. \quad (5.5)$$

Efetuada também a aproximação no espaço (empregando o método de Galerkin) é obtido:

$$\int_{\Omega} N_i(x)\phi(x)_{n(i)}N_j(y)d\Omega = \int_{\Omega} N_i(y)\phi(y)_{n+1(i)}N_j(y)d\Omega. \quad (5.6)$$

No entanto, como  $N_i(x)$  e  $N_i(y)$  estão em diferentes posições no espaço, não é possível integração exata, porém esta pode ser viabilizada se  $\phi(x)_n$  for representado em função dos valores em  $y$ . Para tal, o processo pode se iniciar com a expansão local por série de Taylor:

$$\phi(x)_n = \phi(y)_n - (y-x)\frac{\partial\phi(y)_n}{\partial x} + \frac{(y-x)^2}{2}\frac{\partial^2\phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{(y-x)^3}{6}\frac{\partial^3\phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (5.7)$$

Calculando-se variação de posição,  $(y-x)$ , a partir da equação (5.3) e substituindo na equação (5.7), chega-se a:

$$\phi(x)_n = \phi(y)_n - \Delta t u \frac{\partial\phi(y)_n}{\partial x} + \frac{(\Delta t u)^2}{2}\frac{\partial^2\phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{(\Delta t u)^3}{6}\frac{\partial^3\phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (5.8)$$

Observa-se que a variação temporal de  $\phi$  sobre uma característica de coordenadas  $x'$  é nula por definição, ou seja:

$$\frac{d\phi}{dt}(x',t) = 0, \quad (5.9)$$

cuja forma numérica em diferenças finitas de primeira ordem é expressa por

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(x)_n}{\Delta t} = 0, \quad (5.10)$$

com resultado exato para o caso de velocidade constante.

Da substituição de (5.8) em (5.10), conclui-se:

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n}{\Delta t} = -u \frac{\partial\phi(y)_n}{\partial x} + \frac{\Delta t u^2}{2}\frac{\partial^2\phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2 u^3}{6}\frac{\partial^3\phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (5.11)$$

Ou, assumindo uma velocidade média calculada no passo atual para o caso de transporte com velocidade variável tal que:

$$y - x = \bar{u}\Delta t, \quad (5.12)$$

é possível escrever:

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n}{\Delta t} = -\bar{u} \frac{\partial\phi(y)_n}{\partial x} + \frac{\Delta t \bar{u}^2}{2}\frac{\partial^2\phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2 \bar{u}^3}{6}\frac{\partial^3\phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (5.13)$$

Deve-se notar que, para uma convecção linear, não são necessárias maiores aproximações, bastando truncar a expressão (5.11) na ordem de precisão desejada e efetuar aplicação do método de Galerkin para se obter a forma fraca e resolver o problema. A equação (5.13) é

a forma não conservativa da convecção, diretamente aplicável a problemas incompressíveis ou com as aproximações de não existência de divergência (NITHIARASU et al., 2006).

Para se obter a forma conservativa da equação de convecção com propagação não linear, do tipo representado pela expressão:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial u\phi}{\partial x}, \quad (5.14)$$

cuja curva característica é representada na Fig. 5.3, Nithiarasu et al. (2006) sugere o uso da seguinte aproximação para  $u\phi(x)$ :

$$u\phi(x)_n = u\phi(y)_n - (y-x) \frac{\partial(u\phi(y))_n}{\partial x} + \frac{(y-x)^2}{2} \frac{\partial^2(u\phi(y)_n)}{\partial x^2} - \frac{(y-x)^3}{6} \frac{\partial^3(u\phi(y))_n}{\partial x^3} + \dots \quad (5.15)$$

Assumindo a aproximação  $\Delta t = (y-x)/u$  na equação (5.15), chega-se à:

$$\begin{aligned} \phi(x)_n = \phi(y)_n - \Delta t \frac{\partial}{\partial x}(u\phi(y))_n + u \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u\phi(y)_n) \\ - u^2 \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3}(u\phi(y))_n + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (5.16)$$

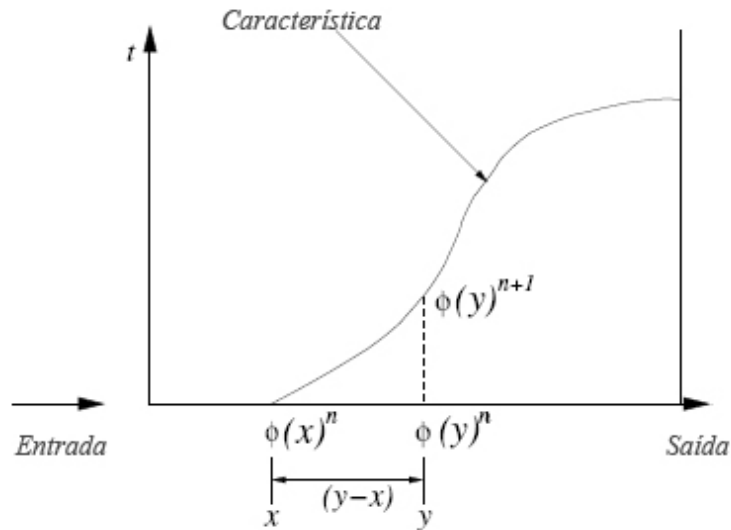


Figura 5.3: Curva característica para convecção não linear

Da substituição de (5.16) em (5.10), chega-se à forma final do procedimento explícito, para a equação de convecção escalar conservativa como sendo:

$$\begin{aligned} \phi(y)_{n+1} = \phi(y)_n - \Delta t \frac{\partial}{\partial x}(u\phi(y))_n + u \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u\phi(y)_n) \\ - u^2 \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3}(u\phi(y))_n + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (5.17)$$

A maioria dos problemas de transporte no entanto, a exemplo das equações de Navier-Stokes, além dos termos que representam a convecção, possuem outros termos tais como os de difusão. Assim, sobre uma linha característica  $x'$ , ao invés de (5.9), têm-se:

$$\frac{\partial \phi(x', t)}{\partial t} - Q(x') = 0, \quad (5.18)$$

onde  $Q(x')$  compreende todos os termos que não os de convecção. Escreve-se então a seguinte aproximação (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b), ao invés de (5.10):

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(x)_n}{\Delta t} \approx \theta(Q(y)_{n+1}) + (1 - \theta)(Q(x)_n), \quad (5.19)$$

onde  $\theta$  é igual a zero para formas explícitas e varia entre zero e 1 para formas semi-implícitas ou implícitas.

Seja  $Q(x)$  aproximado pela expansão por série de Taylor:

$$Q(x)_n = Q(y)_n - (y - x) \frac{\partial Q(y)_n}{\partial x} + O(\Delta t^2). \quad (5.20)$$

Substituindo-se na equação (5.19)  $\phi(x)_n$  por (5.15) truncado nos termos de terceira ordem e dividido por  $u$ , substituindo-se também  $Q(x)_n$  pela equação (5.20) e, ainda, assumindo  $\theta = 0$  (forma explícita), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n + \frac{(y-x)}{u} \frac{\partial(u\phi(y))_n}{\partial x} - \frac{(y-x)^2}{2u} \frac{\partial^2(u\phi(y)_n)}{\partial x^2} \right) = \\ Q(y)_n - (y-x) \frac{\partial Q(y)_n}{\partial x} + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Fazendo uso da aproximação  $\Delta t = (y-x)/u$  e reorganizando a equação (5.21), chegamos à forma final:

$$\begin{aligned} \phi(y)_{n+1} = \phi(y)_n - \Delta t \left( \frac{\partial(u\phi(y))_n}{\partial x} - Q(y)_n \right) \\ + \frac{(\Delta t)^2}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(u\phi(y)_n)}{\partial x} - Q(y)_n \right) + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Diferentes procedimentos podem resultar na equação (5.22), diferindo apenas os termos de alta ordem (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b).

Observa-se que os termos de segunda ordem das equações (5.13), (5.17) e (5.22), obtidos devido à discretização temporal sobre as linhas características, introduzem dissipação na direção das linhas de corrente, que, conforme mostrado por Zienkiewicz e Taylor (2000b) são equivalentes aos esquemas SUPG quando o intervalo de tempo é igual ao crítico, e diminui à

medida em que o intervalo de tempo diminui. Isto é melhor discutido na seção 5.4. Nithiarasu et al. (2006) afirmam, ainda, que esse esquema de integração ao longo das linhas características é superior aos esquemas Taylor Galerkin.

Tal equacionamento pode facilmente ser estendido para grandezas em mais dimensões.

### 5.1.3 Discretização das equações governantes da mecânica dos fluidos

Considerando que a variável transportada se transforma em uma variável característica, e que a velocidade de convecção se transforma na velocidade característica, o procedimento discutido na seção 5.1.2 pode ser diretamente aplicado às equações governantes da Mecânica dos Fluidos em versão ALE.

O algoritmo baseado na discretização temporal vista em 5.1.2, conforme originalmente proposto por Zienkiewicz e Codina (1994) em versão explícita e semi-implícita, consiste em quatro passos dentro de cada passo no tempo:

1. resolver a equação da quantidade de movimento sem os termos de pressão;
2. calcular a pressão a partir de uma equação de Poisson baseada na equação da Conservação da massa;
3. corrigir as velocidades;
4. resolver a equação da energia e calcular as variáveis secundárias para o próximo passo no tempo.

Neste trabalho, é empregada uma versão puramente explícita para a solução de fluidos compressíveis, com os 3 passos descritos a seguir:

1. calcular a variação da quantidade de movimento;
2. calcular a variação da densidade
3. calcular a variação da energia e as variáveis secundárias para o próximo passo no tempo.

Reescrevendo-se a equação da quantidade de movimento ALE (3.46) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = - \frac{\partial (u_j (\rho u_i))}{\partial x_j} + Q_i, \quad (5.23)$$

onde  $Q_i$  é dado por:

$$Q_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + w_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j}, \quad (5.24)$$

, pode-se facilmente aplicar o procedimento que levou à equação (5.22) substituindo-se  $\phi$  por  $\rho u_i$ , resultando em:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho u_i)_{n+1} = \Delta t \left( -\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \right)_n + \\ \frac{\Delta t^2}{2} \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \right)_n, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde os termos de ordem superior foram desprezados e todos os termos do lado direito da igualdade são conhecidos no instante  $t=n$ .

Com base na equação da conservação da massa Euleriana (3.3), Zienkiewicz e Taylor (2000b) sugerem a seguinte equação para a variação da massa específica:

$$\Delta \rho_{n+1} = -\Delta t \frac{\partial (\rho u_i)_{n+\theta}}{\partial x_i} = -\Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)_n + \theta \frac{\partial (\Delta(\rho u_i))_{n+1}}{\partial x_i} \right), \quad (5.26)$$

onde  $\theta$  é um valor arbitrado entre 0.5 e 1.

Para o caso ALE, pode-se manter o mesmo esquema, apenas acrescentando-se os termos devidos à movimentação da malha:

$$\begin{aligned} \Delta \rho_{n+1} = -\Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)_n + \theta \frac{\partial (\Delta(\rho u_i))_{n+1}}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) + \\ \frac{\Delta t^2}{2} \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \right)_n, \end{aligned} \quad (5.27)$$

Finalmente, aplicando o mesmo procedimento utilizado para a equação da quantidade de movimento, agora para a equação da energia (3.47), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho E)_{n+1} = \Delta t \left( -\frac{\partial(u_i \rho E)}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right)_n + \\ \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \rho g_i u_i \right) + \\ \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial(u_i \rho E)}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right) + \\ \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} + \rho g_i u_i \right)_n \end{aligned} \quad (5.28)$$

As equações (5.25), (5.27) e (5.28) representam a discretização temporal das equações go-



vernantes da mecânica dos fluidos.

### 5.1.4 Estabilidade

O algoritmo proposto é condicionalmente estável, sendo o intervalo de tempo crítico limitado a que a onda não percorra mais que o tamanho  $h$  de 1 elemento finito, ou seja, assumindo os efeitos da difusão desprezíveis, para que o algoritmo permaneça estável:

$$\Delta t \leq \frac{h}{c + |u|}, \quad (5.29)$$

onde  $c$  é a velocidade do som e  $|u|$  é o módulo da velocidade do escoamento.

## 5.2 Discretização espacial e procedimento para solução

Após a discretização no tempo, aplica-se o método de Bubnov-Galerkin às equações (5.25), (5.27) e (5.28), de forma a obter uma solução fraca. Nota-se que, para o caso de fluidos compressíveis, não é necessário o emprego de formulação híbrida ou mista (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a, 2000b), assim sendo, todas as variáveis podem ser aproximadas no mesmo espaço, pelas mesmas funções aproximadoras.

### 5.2.1 Forma fraca

As variáveis podem ser aproximadas pelas funções de forma  $N$  tal que:

$$\rho u_i = \mathbf{N} \mathbf{U}_i, \quad (5.30)$$

$$u_i = \mathbf{N} \mathbf{u}_i, \quad (5.31)$$

$$\rho = \mathbf{N} \rho, \quad (5.32)$$

$$p = \mathbf{N} \mathbf{p}, \quad (5.33)$$

$$\Delta \rho E = \mathbf{N} \mathbf{E} \quad (5.34)$$

e

$$T = \mathbf{N} \mathbf{T}, \quad (5.35)$$

onde  $\mathbf{N}$  é o vetor das funções aproximadoras,  $\mathbf{N} = \{N_1 N_2 \dots N_n\}$  e os vetores  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{T}$  são os vetores coluna dos valores nodais respectivamente de quantidade de movimento específica na direção  $i$ , componente  $i$  de de velocidade, massa específica, energia específica,

pressão e temperatura. O valores nodais incógnitas no presente algoritmo no entanto são  $\mathbf{U}_i$ ,  $\rho$  e  $\mathbf{E}$ .

Com a aplicação do método de resíduos ponderados em (5.25), segundo o processo de Galerkin, escreve-se a forma fraca da equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_l \Delta(\rho u_i)_{n+1} d\Omega = \Delta t \left[ \int_{\Omega} N_l \left( -\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \right) d\Omega \right]_n \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \int_{\Omega} N_l u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) d\Omega \right]_n. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Aplicando-se o teorema da divergência nos termos das tensões desviadoras e pressão na primeira integral após a igualdade e em toda a segunda integral e desprezando-se a parcela de integral sobre o contorno dos termos de alta ordem (essa última simplificação pode ser justificada pelo fato de que geralmente o fluxo é prescrito no contorno) resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_l \Delta(\rho u_i)_{n+1} d\Omega = \Delta t \left[ \int_{\Omega} N_l \left( -\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} + \rho g_i \right) d\Omega \right]_n \\ - \Delta t \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \delta_{ij} p) d\Omega + \int_{\Gamma} N_l (\tau_{ij} n_j - p n_i) d\Gamma \right]_n \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial(N_l u_k)}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) - w_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) d\Omega \right]_n. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Com base nas equações (5.30)-(5.35) e na lei da viscosidade de Newton, pode-se escrever matricialmente a equação (5.37):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Delta \mathbf{U}_i)_{n+1} = \Delta t \left[ -\mathbf{C} \mathbf{U}_i + \mathbf{C}_w \mathbf{U}_i - \mathbf{K}_{visc(u_i)} \mathbf{u}_i - \mathbf{K}_{visc(u_j)} \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_i \right]_n, \\ + \Delta t^2 \left[ \mathbf{K} \mathbf{U}_i + \mathbf{K}_w \mathbf{U}_i + \mathbf{P} \mathbf{p} + \mathbf{f}_{si} \right]_n \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde as matrizes de massa  $\mathbf{M}$ , de convecção  $\mathbf{C}$  e demais matrizes e vetores são descritos nas equações:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial(u_i \mathbf{N})}{\partial x_i} d\Omega, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{C}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T w_i \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{K}_{visc(u_i)} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \right) d\Omega, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{K}_{visc(u_j)} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho g_i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\tau_{ij} n_j - p n_i) d\Gamma, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla(\mathbf{uN}))^T (\nabla(\mathbf{uN})) d\Omega, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{K}_w = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla(\mathbf{uN}))^T (\mathbf{w}^T \nabla(\mathbf{N})) d\Omega, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla(\mathbf{uN}))^T (\nabla \mathbf{N}) d\Omega, \quad (5.47)$$

e

$$\mathbf{f}_{si} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \mathbf{N}^T) \rho g_i d\Omega, \quad (5.48)$$

onde  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$   $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$  e  $\nabla$  é o operador divergência  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ .

Aplicando-se o processo de Galerkin em (5.27) e em seguida fazendo uso do teorema da divergência, escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_l (\Delta \rho)_{n+1} d\Omega &= \Delta t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x_i} ((\rho u_i)_n + \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1}) - \frac{\partial (N_l w_i)_n}{\partial x_i} \rho_n \right) d\Omega + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial (N_l u_k)}{\partial x_k} w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_n d\Omega - \\ &\quad \Delta t \int_{\Gamma} N_l \left( (\rho u_i)_n + \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1} - (\rho w_i)_n + \frac{\Delta t}{2} \left( w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_n \right) n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.49)$$

que pode ser escrito matricialmente como:

$$\mathbf{M} \Delta \rho = \Delta t \left[ \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{C}_{w_i} \rho + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_{w_i} \rho \right] + \Delta t \mathbf{G}_i (\theta (\Delta \mathbf{U}_i)_{n+1}) - \mathbf{f}_\rho, \quad (5.50)$$

onde

$$\mathbf{G}_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{C}_{w_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial (w_i \mathbf{N}^T)}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{K}_{w_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial (u_k \mathbf{N}^T)}{\partial x_k} w_i \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.53)$$

e

$$\mathbf{f}_\rho = \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( \rho u_i - \rho w_i + \frac{\Delta t}{2} w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_n n_i d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{N} \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1} n_i d\Gamma. \quad (5.54)$$

Observa-se que o vetor  $\mathbf{f}_\rho$  da equação (5.54) representa o fluxo através do contorno  $\Gamma$  durante o

intervalo  $\Delta t$ , assim, anula-se para as paredes, onde  $\mathbf{w}^T \mathbf{n} = \mathbf{u}^T \mathbf{n}$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$ .

Finalmente, seguindo-se o mesmo processo que foi aplicado para a equação da quantidade de movimento gerando (5.24), agora para a equação da energia, (5.28), escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_l \Delta(\rho E)_{n+1} d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} N_l \left( -\frac{\partial(u_i(\rho E + p))}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right)_n d\Omega - \\ \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_n d\Omega + \\ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(u_j N_l)}{\partial x_j} \left( \frac{\partial(-u_i(\rho E + p))}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right)_n d\Omega + \\ \Delta t \int_{\Gamma} N_l \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_n n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.55)$$

cuja forma matricial pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \mathbf{E}_{n+1} = -\Delta t [\mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{p}) - \mathbf{C}_w \mathbf{E} + \mathbf{K}_T \mathbf{T} + \mathbf{K}_{\tau E i} \mathbf{u}_i + \mathbf{f}_e]_n + \\ \frac{\Delta t^2}{2} [\mathbf{K}_u(\mathbf{E} + \mathbf{p}) + \mathbf{K}_w(\mathbf{E})]_n, \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde as novas matrizes e o novo vetor são:

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} (\nabla^T \mathbf{N})^T k (\nabla^T \mathbf{N}) d\Omega, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{K}_{\tau E i} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \tau_{ij} \phi d\Omega \quad (5.58)$$

e

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma. \quad (5.59)$$

Observa-se que a matriz de massa  $\mathbf{M}$  pode ser substituída pela sua forma concentrada. Isto é muito desejável em métodos explícitos para se evitar a resolução de sistemas e também possibilita impor as condições de contorno essenciais como condições iniciais a cada passo de tempo.

## 5.2.2 Procedimentos para solução

Após serem determinadas a quantidade de movimento específica e a massa específica no instante atual por (5.38) e (5.50), calculam-se as velocidades no instante atual por meio de:

$$u^{n+1} = \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^{n+1}}. \quad (5.60)$$

Após a obtenção da energia específica por (5.56), a pressão, temperatura e velocidade do som são determinadas com o uso das equações auxiliares da termodinâmica:

$$T = \frac{1}{c_v} \left( E - \frac{1}{2} u_i u_i \right), \quad (5.61)$$

$$c^2 = (\gamma - 1) T c_p \text{ com } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (5.62)$$

e

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right), \quad (5.63)$$

onde  $c_p$  é o calor específico à pressão constante e  $c_v$  é o calor específico a volume constante.

Tendo sido determinadas todas as variáveis, passa-se para o próximo passo no tempo.

### 5.3 Condições de contorno

Os problemas de fluido podem ter um domínio cuja extensão real seja infinita, ou pelo menos possa ser considerada infinita (problemas na atmosfera por exemplo). Por outro lado, também existem problemas onde o domínio é bem definido em todo o contorno. Assim, é possível dividir as condições de contorno em: i) condições fictícias e ii) condições Reais, (NITHIARASU, 2002; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b).

#### i) Condições Fictícias

Ocorrem por exemplo em escoamentos em domínios abertos, para os quais é necessário criar um contorno com características consideradas no infinito. Esse contorno é apenas uma delimitação da área de computação, por isso, essas condições são ditas condições fictícias. Na determinação deste contorno, e dos valores especificados sobre o mesmo, considerando-se que, à medida em que a distância a um contorno impermeável cresce, o escoamento tende ao escoamento não perturbado (escoamento no infinito) na entrada e nos lados, porém na saída os efeitos causados por um contorno impermeável podem continuar por uma longa distância.

Assim, para escoamento subsônico, a especificação de todas as quantidades, exceto a densidade pode ser feita nos lados e na entrada do contorno. Na saída existem várias possibilidades para se impor as condições de contorno. Zienkiewicz e Taylor (2000b) apresentam as seguintes:

1. Aplicação de suposições no que diz respeito à força de superfície e às velocidades.
2. Uma condição de gradiente de força de superfície nulo e tensões existentes.

Para escoamento supersônico, todas as variáveis podem ser prescritas na entrada, mas na saída não são especificadas condições de contorno, uma vez que as perturbações causadas pelas condições de contorno não podem viajar tão rápido como a velocidade do som. Matematicamente, o equacionamento passa de predominantemente parabólico à predominantemente hiperbólico (fronteira fechada para fronteira livre).

### ii) *Condições Reais*

Estas condições são devidas aos limites fisicamente definidos do domínio do fluido. Na parte do contorno que faz fronteira com sólido, tem-se a velocidade normal igual à componente de velocidade do sólido na mesma direção, o que também é válido para a velocidade tangencial caso seja tratado de um escoamento viscoso com condição de aderência, porém a tensão tangencial é nula caso o escoamento seja invíscido e a velocidade é livre.

Como condições reais, ainda se têm as condições de contorno com força de superfície prescrita. Para o caso de superfícies livres a força de superfície é nula.

## 5.4 O problema das variações espúrias

Embora o estudo das variações espúrias não seja o tema central deste trabalho, o mesmo se faz necessário quando a intenção é desenvolver um programa para fluidos baseado no Método dos Elementos Finitos.

No caso de escoamentos compressíveis, surgem variações devidas à convecção e também à presença de choque da onda de pressão (descontinuidades).

### 5.4.1 Convecção

Ao se aplicar o método clássico de Galerkin às equações na descrição Euleriana ou mesmo ALE, para cada nó são consideradas contribuições das derivadas tanto à jusante como à montante, o que acaba por acarretar nas variações espúrias devido à convecção. O mesmo problema é observado ao se considerar derivadas por diferenças centrais de segunda ordem no método das diferenças finitas quando empregado a forma Euleriana.

Observa-se também que as matrizes geradas para os termos convectivos, com uso do método de Galerkin, a exemplo de (5.40), são assimétricas.

Para uma melhor compreensão do problema, emprega-se o caso ilustrado na Fig. 5.4, o qual consiste no transporte de  $\phi$ , cuja distribuição inicial é representada pela linha em negrito,

com uma velocidade constante  $u$ .

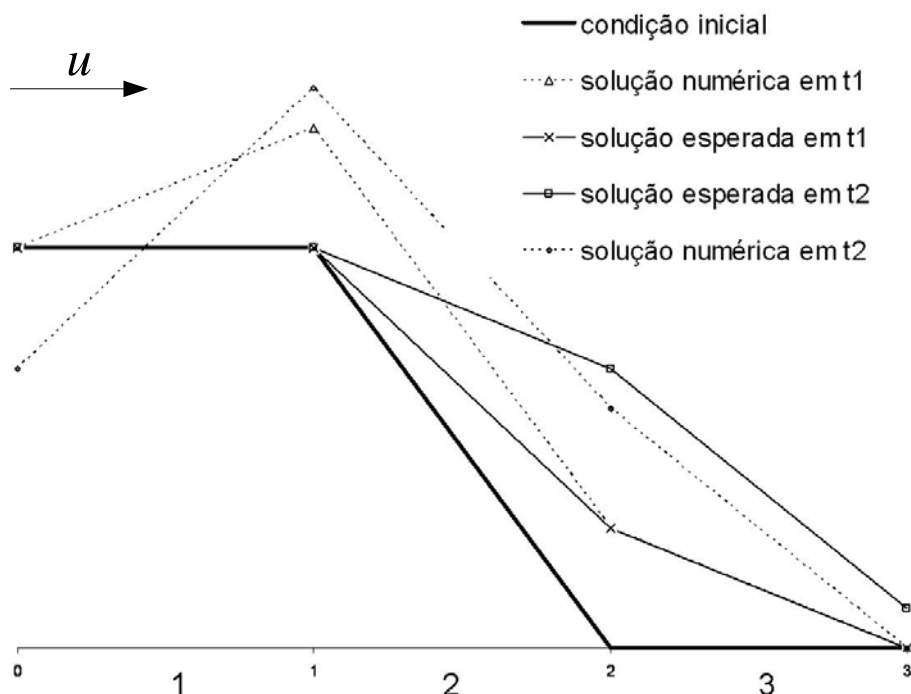


Figura 5.4: Variações espúrias

O problema é regido pela equação:

$$\Delta\phi = -\mathbf{M}^{-1}\Delta t u \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{\partial\phi}{\partial x} d\Omega. \quad (5.64)$$

Resolvendo-se com elementos de aproximação linear, observa-se que apesar da derivada à esquerda do nó 1 ser nula, o termo convectivo  $u \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{\partial\phi}{\partial x} d\Omega$  para o referido nó continua diferente de zero, devido à parcela que vem do elemento à direita, fazendo com que haja variação não condizente com o problema real.

Para o problema de convecção-difusão, as variações espúrias diminuem à medida que o termo dissipativo se torna mais dominante e o mesmo comportamento é observado quando a malha é refinada ou a função ponderadora aumenta de ordem em relação à função de forma (Petrov-Galerkin), conforme o estudo apresentado por Zienkiewicz e Taylor (2000b) (figura 5.5), em função do número de *Peclét*:

$$Pe = \frac{uh}{2k}, \quad (5.65)$$

tal que  $u$  é a velocidade de convecção  $h$  é o tamanho do elemento e  $k$  é o coeficiente de difusão.

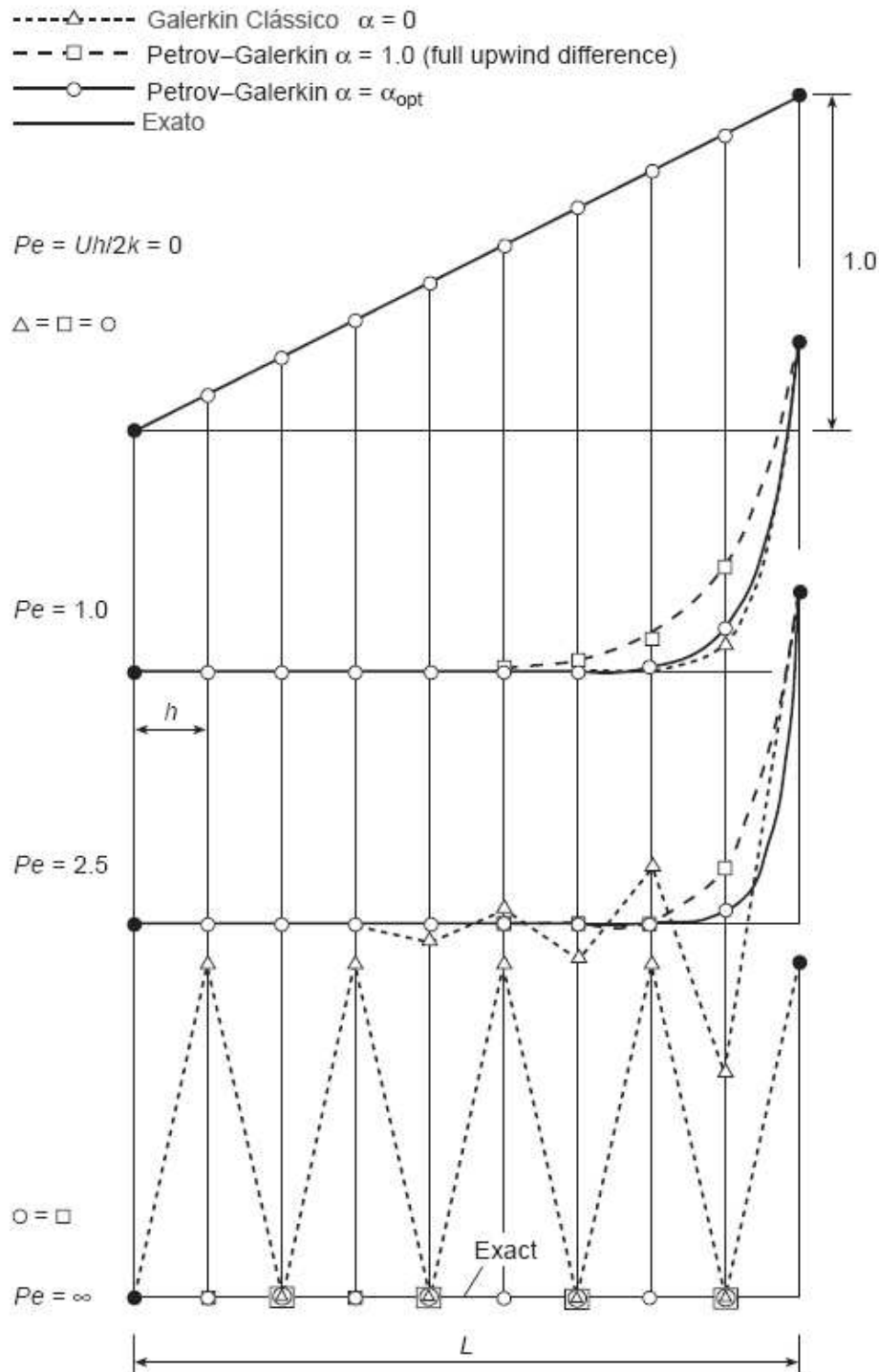


Figura 5.5: Variações espúrias em função do número de Peclet

Uma forma muito simples de diminuir o problema das variações espúrias é resolver descontinua, elemento por elemento, no sentido da característica, impondo-se o resultado obtido na saída do elemento anterior como condição de contorno para a entrada do elemento posterior.



Para alguns problemas, esse processo pode ser equivalente ao *Processo de Galerkin Descontínuo*.

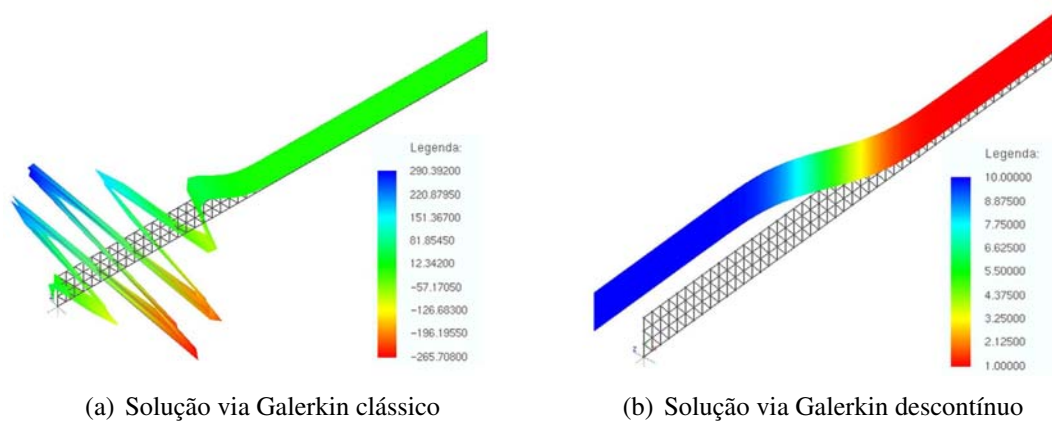


Figura 5.6: Comparação entre Galerkin clássico e descontínuo

A figura 5.6(a) apresenta a solução no instante  $t=5$  segundos para o transporte de uma grandeza escalar de valor 10 sobre uma malha de elementos finitos triangulares com aproximação linear. O comprimento de total do domínio analisado é de 10 m de comprimento, sendo o valor inicial da grandeza de 1, e a velocidade de convecção constante sobre todo o domínio e igual a 1m/s, segundo o processo clássico de Galerkin e a figura 5.6(b) segundo o processo descontínuo.

O método de Galerkin Descontínuo, apesar de apresentar excelentes resultados, e de garantir às equações hiperbólicas soluções descontínuas, não pode ser diretamente aplicado à equações não lineares. Para que este método sirva à resolução de equações não lineares, foram propostas algumas alterações, como a introdução de fluxos numéricos nos contornos como fizeram Cockburn et al. (1989), Calle et al. (2005) e Santos (2004). Esses autores também utilizaram difusividade artificial ou um limitador de inclinação conforme sugerido por Cockburn et al. (1989) para suprimir variações espúrias que ainda persistem no método de Galerkin Descontínuo.

A maior desvantagem do Método de Galerkin Descontínuo é o grande aumento do número de graus de liberdade, elevando o custo de processamento, embora o mesmo seja mais facilmente paralelizado.

Outro processo que merece ser considerado, é o emprego de coordenadas móveis com valores interpolados a cada passo no tempo para uma malha de coordenadas fixas, como trabalhado por Farmer e Norman (1986) e Zienkiewicz et al. (1985). Esse processo surgiu nos anos 1980

e foi considerado uma boa alternativa para os problemas com alto número de Peclet, porém foi muito pouco difundido, talvez devido ao fato de ser muito dispendioso para os computadores da época.

Atualmente, um processo de estabilização muito empregado é o processo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* - SUPG, introduzido por Brooks e Hughes (1982) e que consiste no emprego do processo de Petrov-Galerkin escolhendo-se funções ponderadoras que adicionem difusão na direção das linhas de corrente, tal como a função  $W$ :

$$W = N + \frac{\alpha h u_i}{2 |u|} \frac{\partial N}{\partial x_i}, \quad (5.66)$$

com  $\alpha = \coth(Pe) - 1/Pe$  (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b), onde  $Pe$  é o número de *Peclet*.

Conforme demonstrado por Zienkiewicz e Taylor (2000b), os termos de segunda ordem obtidos com a discretização temporal ao longo das linhas características fornecem difusão no sentido das linhas de corrente equivalente ao emprego de SUPG quando o intervalo de tempo tende ao intervalo crítico.

Os problemas estacionários podem ser eficientemente analisados utilizando-se o intervalo crítico para cada elemento nos termos de segunda ordem, porém para problemas transientes, que são o objeto deste trabalho, faz-se necessário emprego de  $\Delta t$  menor e igual para todos os elementos.

Zienkiewicz e Taylor (2000b) também mostram que as variações espúrias que não são contidas por se utilizar  $\Delta t$  pequenos no método das características podem ser evitadas simplesmente utilizando-se matriz de massa consistente.

Para ainda assim evitar a necessidade de sub-rotinas pesadas para solução de sistema, emprega-se uma metodologia iterativa baseada na matriz de massa concentrada expressa por:

$$(\Delta\phi)_l = (\Delta\phi)_{l-1} + \mathbf{M}_L^{-1} [\mathbf{B} - \mathbf{M}(\Delta\phi)_{l-1}], \quad (5.67)$$

onde  $\Delta\phi$  é o vetor incógnita do sistema,  $l$  é a iteração,  $\mathbf{M}_L$  é a matriz de massa concentrada,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa consistente e  $\mathbf{B}$  é o vetor independente do sistema.

Esse processo converge rapidamente para a solução obtida com a matriz de massa consistente. Assim sendo, os sistemas (5.38), (5.50) e (5.56) são resolvidos no presente trabalho por esse processo iterativo.

### 5.4.2 Captura de choque

Para solucionar o problema das variações causadas por descontinuidades devidas a choques, adiciona-se às equações um termo viscoso.

Dentre os modelos de captura de choque, destaca-se o processo baseado na segunda derivada, conforme sugerido por Zienkiewicz e Taylor (2000b) e usado também por Teixeira (2001) e Nithiarasu et al. (2006). Tal processo consiste em introduzir nas equações o termo dissipativo numérico  $f_{\mu_a}$ , calculado por:

$$f_{\mu_a} = \Delta t \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right), \quad (5.68)$$

onde  $\mu_a$  é a viscosidade artificial.

A viscosidade artificial deve ser nula longe da ocorrência de descontinuidade e máxima sobre a descontinuidade, ou nula onde o gradiente de pressão for nulo e máxima onde a variação do gradiente de pressão for máxima. Assim, Zienkiewicz e Taylor (2000b) sugerem a seguinte fórmula para a viscosidade artificial:

$$\mu_a = q_{dif} h^3 \frac{(|\mathbf{u}| + c)}{p_{med}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right|_e, \quad (5.69)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $p_{med}$  é a média da pressão sobre o elemento,  $q_{dif}$  é um coeficiente que permite ao operador do programa calibrar a viscosidade artificial, sendo recomendado na literatura (ver por exemplo Zienkiewicz e Taylor (2000b) e Nithiarasu et al. (1998)) variar numa faixa entre 0 e 2,  $c$  é a velocidade do som e  $h$  é o tamanho do elemento.

Para elementos com aproximação linear não é possível obtenção direta da segunda derivada da pressão, assim, é feito uso da aproximação em função da diferença entre as matrizes de massa consistente e concentrada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b):

$$h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \phi. \quad (5.70)$$

Dessa forma, chega-se à equação:

$$\bar{\mu}_a = q_{dif} h \frac{(|\mathbf{u}| + c)}{p_{med}} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \mathbf{p} \quad (5.71)$$

onde  $\bar{\mu}_a$  e  $\mathbf{p}$  são respectivamente o vetor dos valores nodais da viscosidade artificial e o vetor dos valores nodais da pressão.

Ainda cabe a aproximação proposta por Zienkiewicz e Taylor (2000b) para se obter um valor de viscosidade artificial constante sobre cada elemento:

$$\mu_{ae} = q_{dif} h (|u| + c) S_e, \quad (5.72)$$

onde  $S_e$  é a média dos valores  $S_i$  calculados para cada nó do elemento, conforme:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|}, \quad (5.73)$$

onde  $\sum_e$  indica soma sobre todos os elementos aos quais o nó  $i$  está relacionado e  $k$  os nós destes elementos.

De (5.68), (5.70) e (5.72), chega-se à expressão que representa a variável amortecida na região de choque:

$$\phi_s(t = n + 1) = \phi(t = n + 1) + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \frac{q_{dif} S_e}{h} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \phi(t = n) \quad (5.74)$$

Neste trabalho aplica-se essa técnica para a quantidade de movimento específica (5.38), para a massa específica (5.50) e para a energia específica (5.56).

Para casos em que o número de *Mach* é muito pequeno, e portanto os gradientes de pressão diminuem, a viscosidade artificial calculada em função da segunda derivada da pressão pode ser insuficiente para solucionar o problema. Nesse caso, adota-se para tais casos o amortecimento sugerido por Nithiarasu et al. (2006), que consiste na equação:

$$\phi_s(t = n + 1) = \frac{1}{1 + 0.5\alpha} \phi + \frac{\alpha}{1 + 0.5\alpha} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_D) \mathbf{M}^{-1} \phi(t = n), \quad (5.75)$$

onde  $\mathbf{M}_D$  é a matriz de massa consistente sem os termos não diagonais, e  $\alpha$  é uma variável de amortecimento com valor entre 0 e 0,05, especificada pelo operador do programa.

## 5.5 Elemento utilizado

Para o fluido utilizou-se o elemento tetraédrico da figura 5.7, com 4 nós e funções de forma  $N_i$  referentes ao nó  $i$ , polinomiais de ordem 1 (lineares) e que observam a partição da unidade, sendo estas iguais às funções ponderadores (método de Bubnov-Galerkin)

A integração das matrizes e vetores é feita numericamente através de pontos de quadratura em coordenadas tetraédricas para o domínio e em coordenadas triangulares para o contorno (ver Soriano (2003)). Isto é justificado pelo fato de que, embora tenham sido utilizadas funções de forma lineares, cuja integração analítica não é muito complicada, a utilização de integrais numéricas facilita a futura elevação da ordem das funções de forma tanto como alterações no algoritmo.

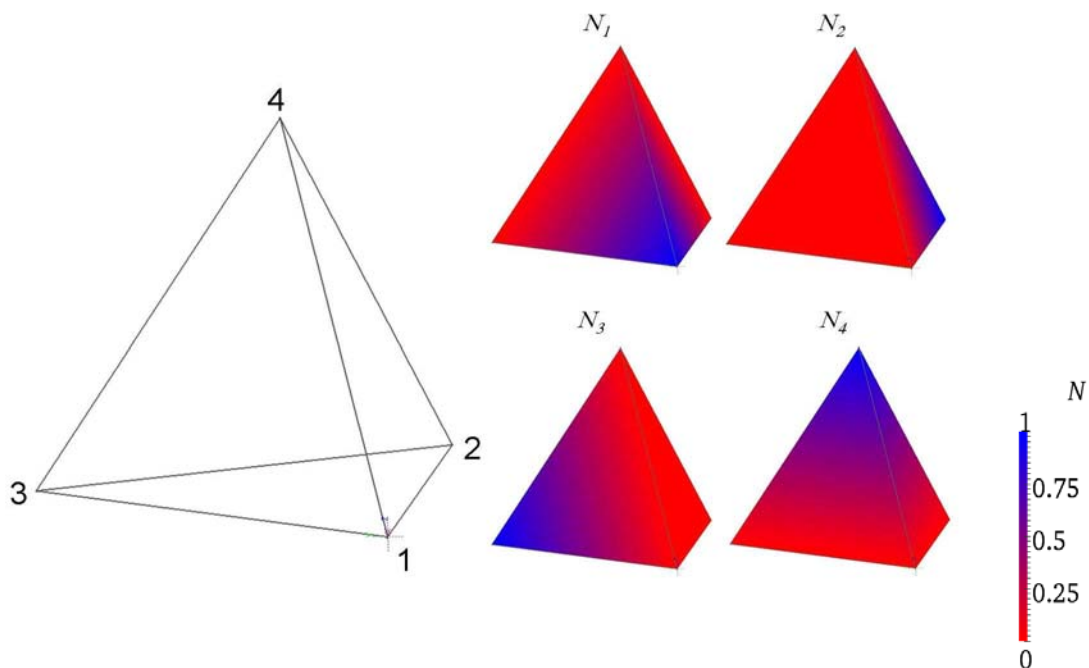


Figura 5.7: Funções de forma para os elementos finitos 3D de fluido

## 5.6 Aplicações - Testes preliminares

Algumas aplicações simples são propostas para testar o algoritmo para análise transiente de escoamentos. Ao mesmo tempo em que o programa é enriquecido com mais opções que também são testadas.

### 5.6.1 Propagação da onda de pressão em um canal

Um teste importante para um algoritmo numérico de análise transiente de escoamentos compressíveis é a verificação da propagação da onda de pressão.

É sabido que, para pequenas diferenças de pressão, onde os efeitos térmicos são muito pequenos, assim como a velocidade de escoamento, a onda de pressão deve propagar-se na velocidade do som. Assim, alguns autores como Teixeira (1996) e Kawahara e Hirano (1983) adotam este teste como parte da validação de seus códigos.

O canal da Fig. 5.8, com 10 m de comprimento e 0,8 m de diâmetro encontra-se inicialmente cheio de um fluido a uma pressão de 11 kPa na primeira metade e 10 kPa na segunda metade. Adota-se velocidade do som  $c = 1000$  m/s, e relação entre calores específicos  $\gamma = 1,4$ .

O problema foi discretizado em 3212 elementos tetraédricos e 930 nós, como se observa

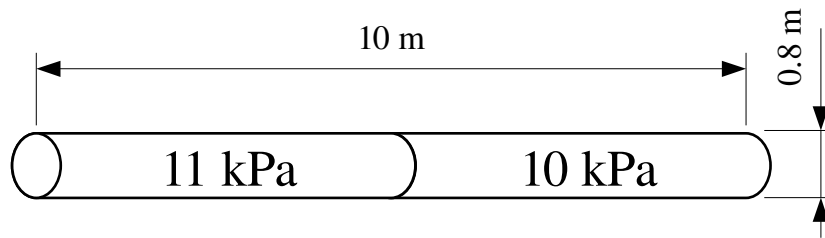


Figura 5.8: Canal com diferença de pressão

na Fig. 5.9, sendo adotado o modelo de captura de choque da equação (5.74) com coeficiente  $q_{dif} = 1$ .

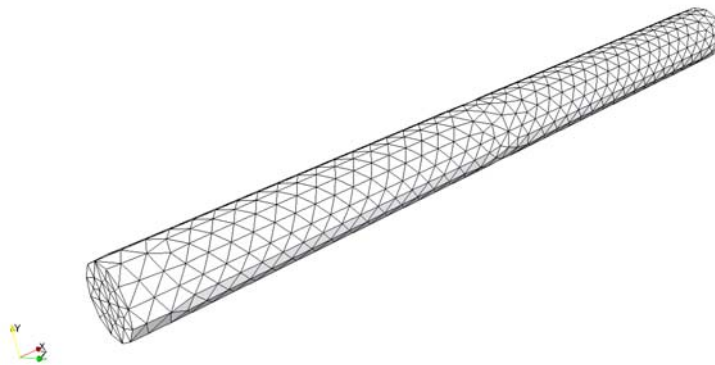


Figura 5.9: Malha para o canal

No instante inicial da análise a divisão entre as duas metades é instantaneamente aberta e uma onda de pressão propaga-se pelo canal. A distribuição de pressão para vários instantes é apresentada na Fig. 5.10, onde é também comparada com a solução analítica.

Observa-se coerência entre as respostas analítica e numérica, além de uma difusão numérica pequena considerando-se a malha empregada.

### 5.6.2 Escoamento invíscido transiente em um canal com degrau

Segundo Soria e Casadei (1997), este problema se tornou um teste clássico para modelos numéricos de fluidos compressíveis, sendo proposto primeiramente por Woodward e Colella

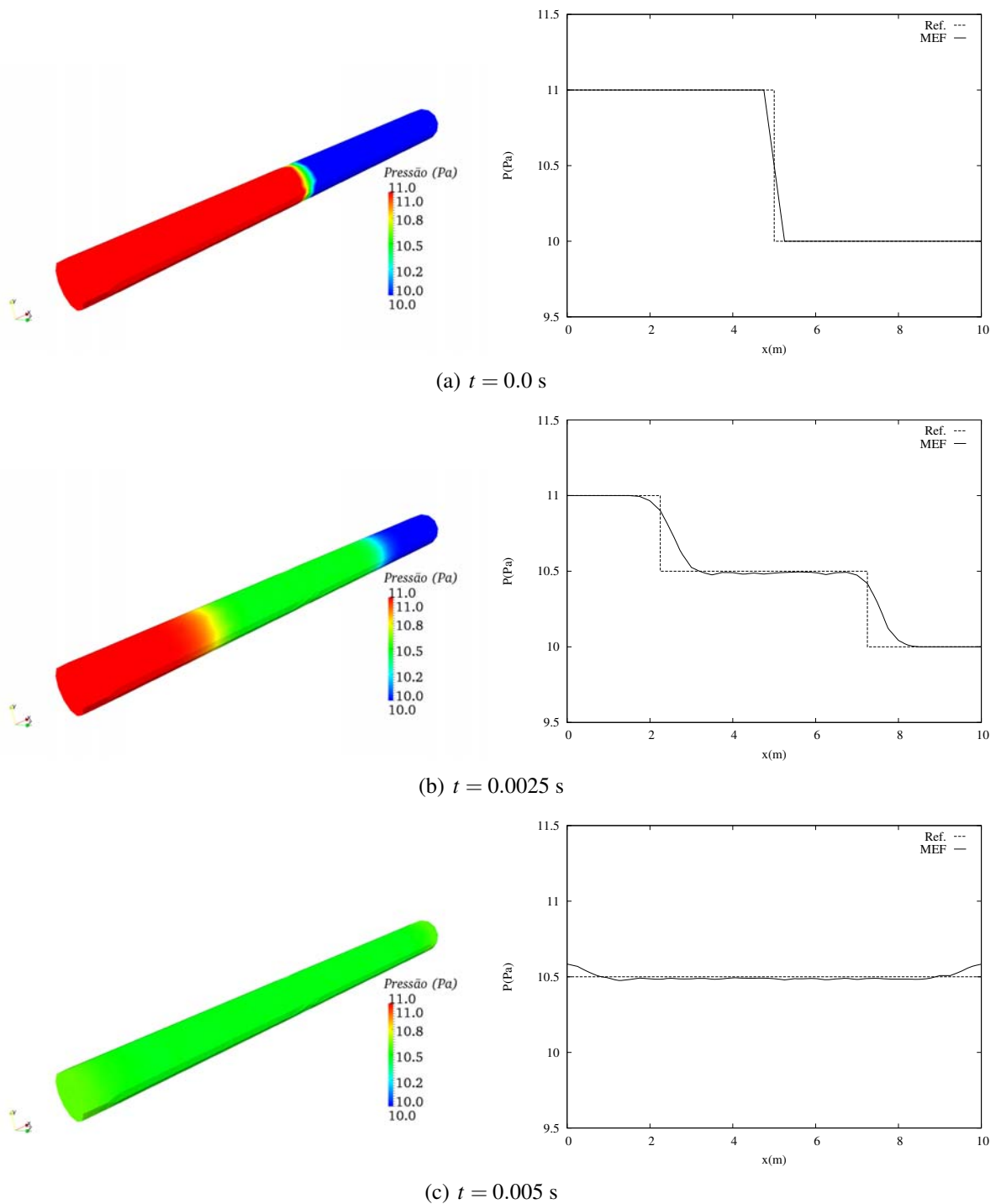


Figura 5.10: Propagação da onda de pressão - primeira parte

(1984) e utilizado por vários autores para validação de algoritmos para análises transientes.

O fluido está em escoamento supersônico não perturbado, então no instante inicial da análise são impostas as restrições de velocidade nas paredes com a geometria da Fig. 5.11, onde também é apresentada a malha utilizada com elementos e nós.

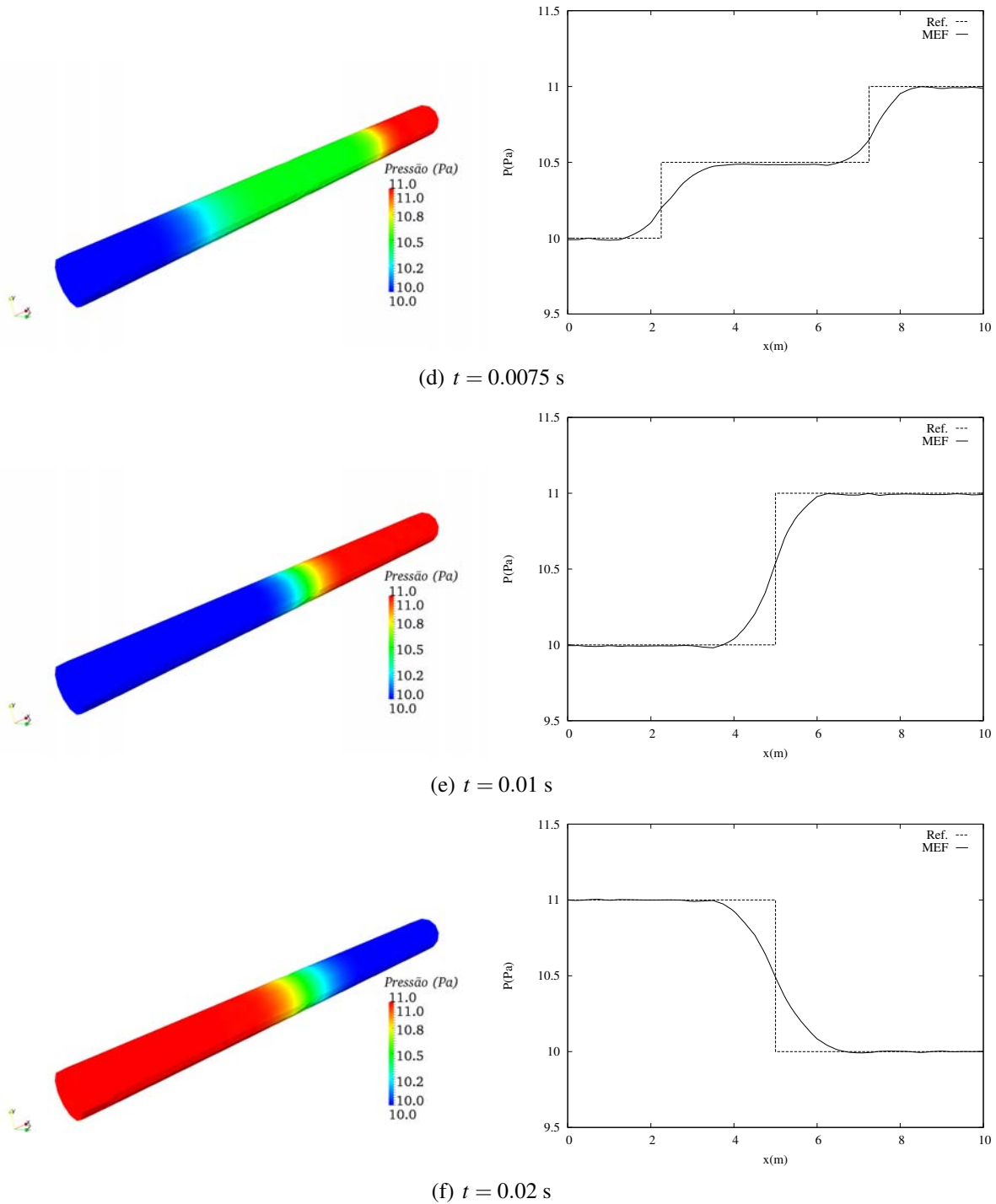


Figura 5.10: Propagação da onda de pressão - continuação

As variáveis foram tratadas de forma adimensional (ver Anexo A) e as condições de contorno impostas na entrada foram de escoamento não perturbado (componente horizontal de velocidade adimensional  $u = 1$ , número de *Mach* 3, e densidade  $\rho = 1$ ), nas paredes se restringiu o fluxo na direção normal e na saída não se aplicou condições de contorno. A relação entre



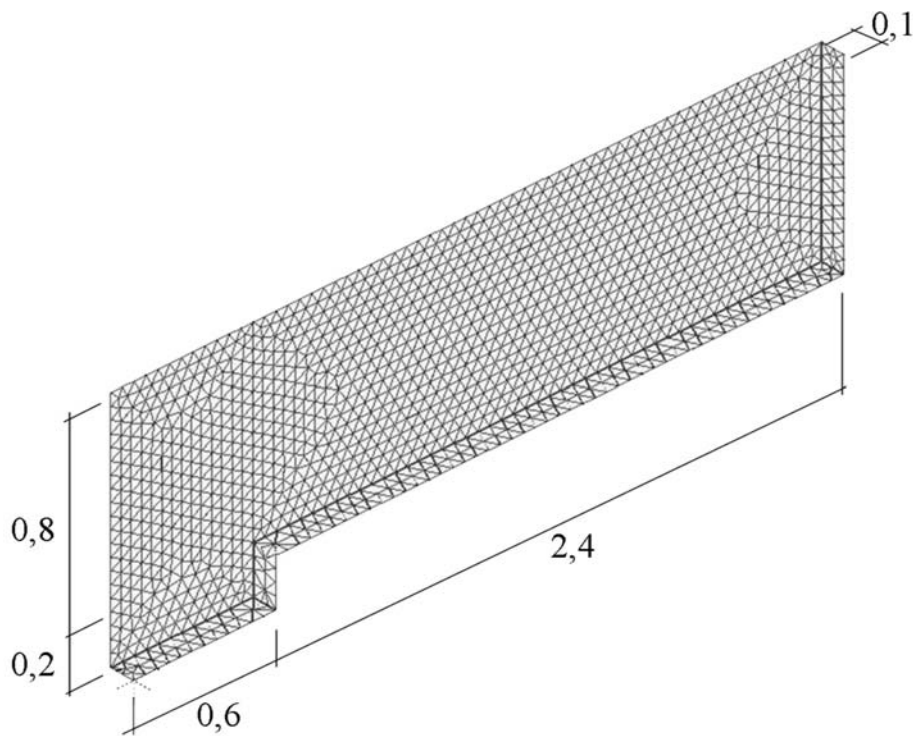


Figura 5.11: Geometria e malha do canal com degrau

os valores específicos adotada foi  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$  e o coeficiente de captura de choque empregado foi  $q_{dif} = 1,2$ .

Nas figuras 5.12 e 5.13, as distribuições de massa específica e de pressão são mostradas a cada 0,5 unidades adimensionais de tempo até que se atinja o instante adimensional  $t = 4,0$ . Nas mesmas figuras, os resultados podem ser comparados com iso-linhas de pressão e densidade obtidas por Löhner et al. (1985).

Embora não haja dados disponíveis sobre os valores máximos e mínimos na referência, nota-se a coerência entre os dois trabalhos uma vez que as curvas de nível de pressão e densidade ao longo do tempo se mostram muito parecidas.

### 5.6.3 Uso explícito de passos de tempo Locais para problemas transientes através de sub-ciclos de tempo

De acordo com Teixeira (2001), as técnicas de integração no tempo em esquemas explícitos de solução, utilizando passo de tempo variável, são muito úteis em simulações numéricas de problemas de engenharia. O método de passo de tempo variável estudado neste tópico é uma técnica de integração mista no tempo, usando-se para tanto o mesmo integrador, mas com dife-

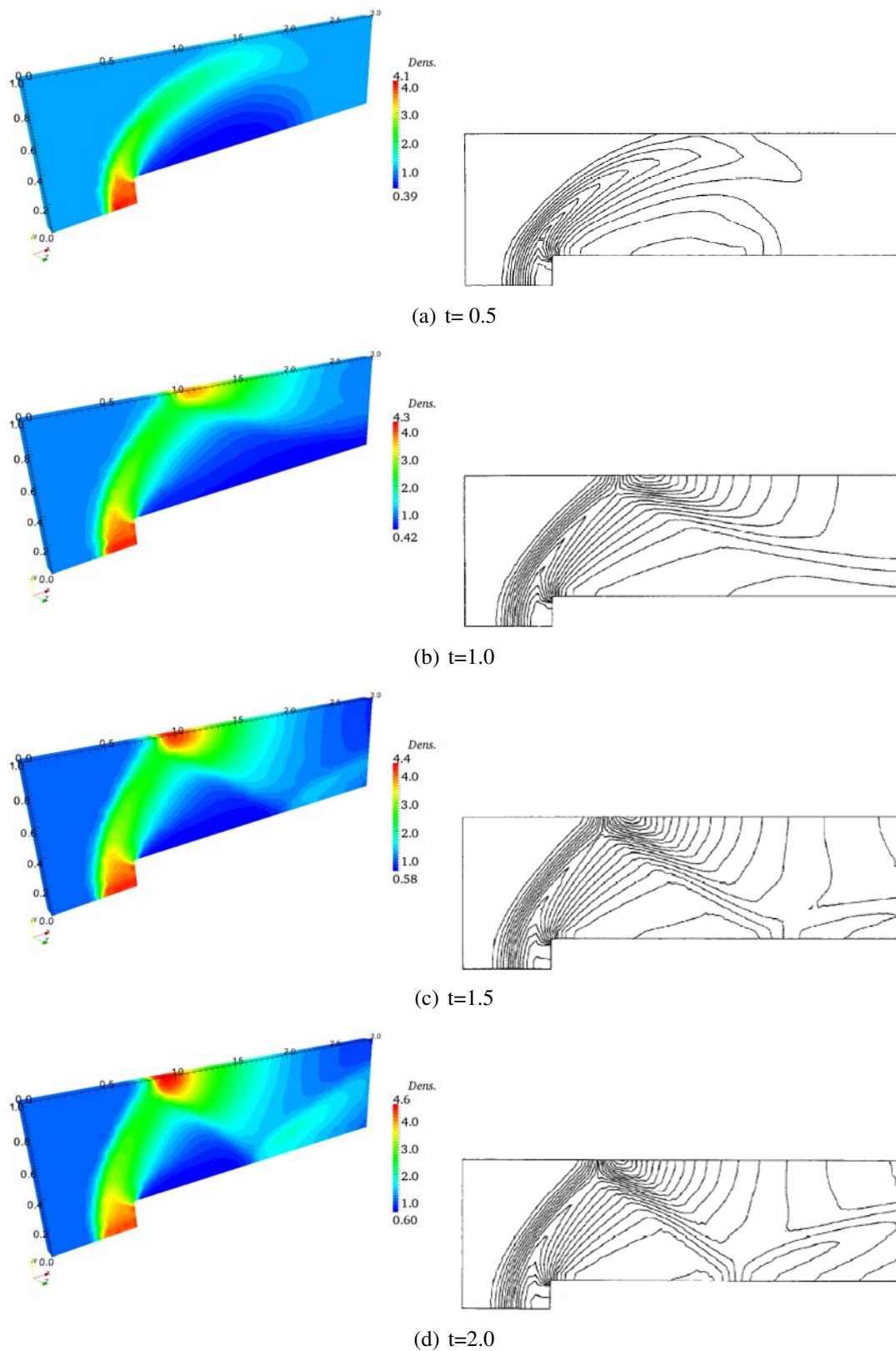


Figura 5.12: Distribuição de densidade - primeira parte. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

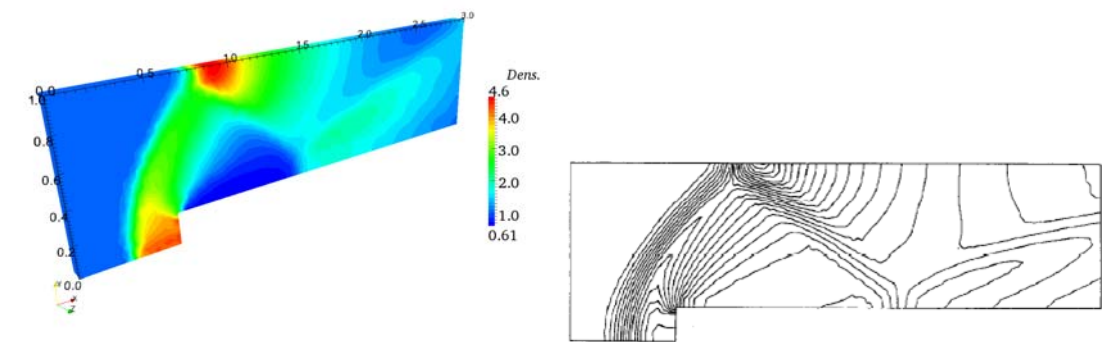
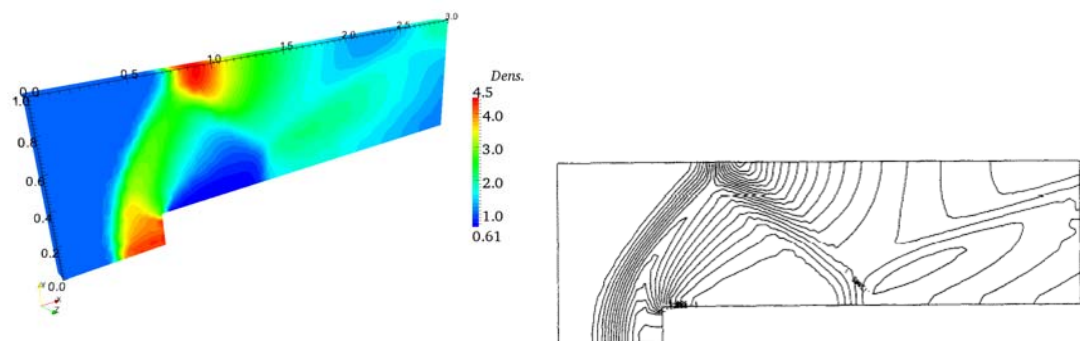
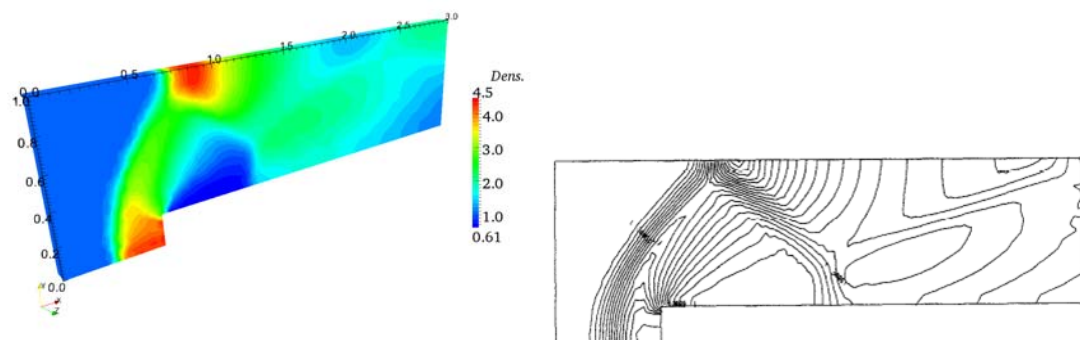
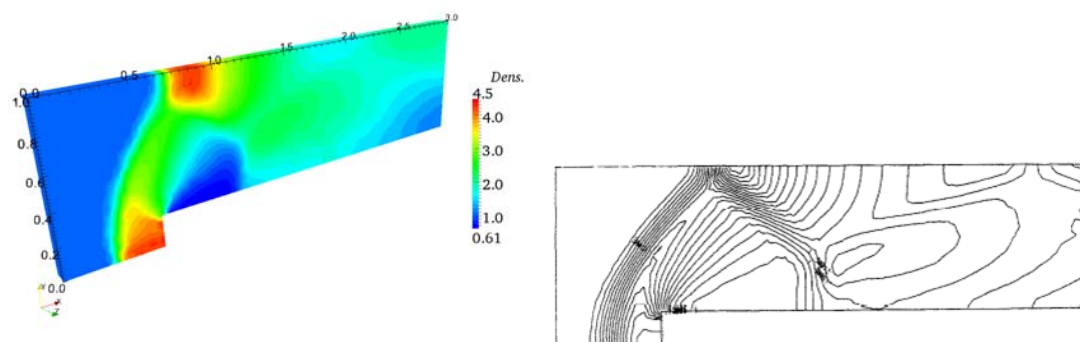
(e)  $t=2.5$ (f)  $t=3.0$ (g)  $t=3.5$ (h)  $t=4.0$ 

Figura 5.12: Distribuição de densidade - continuação. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

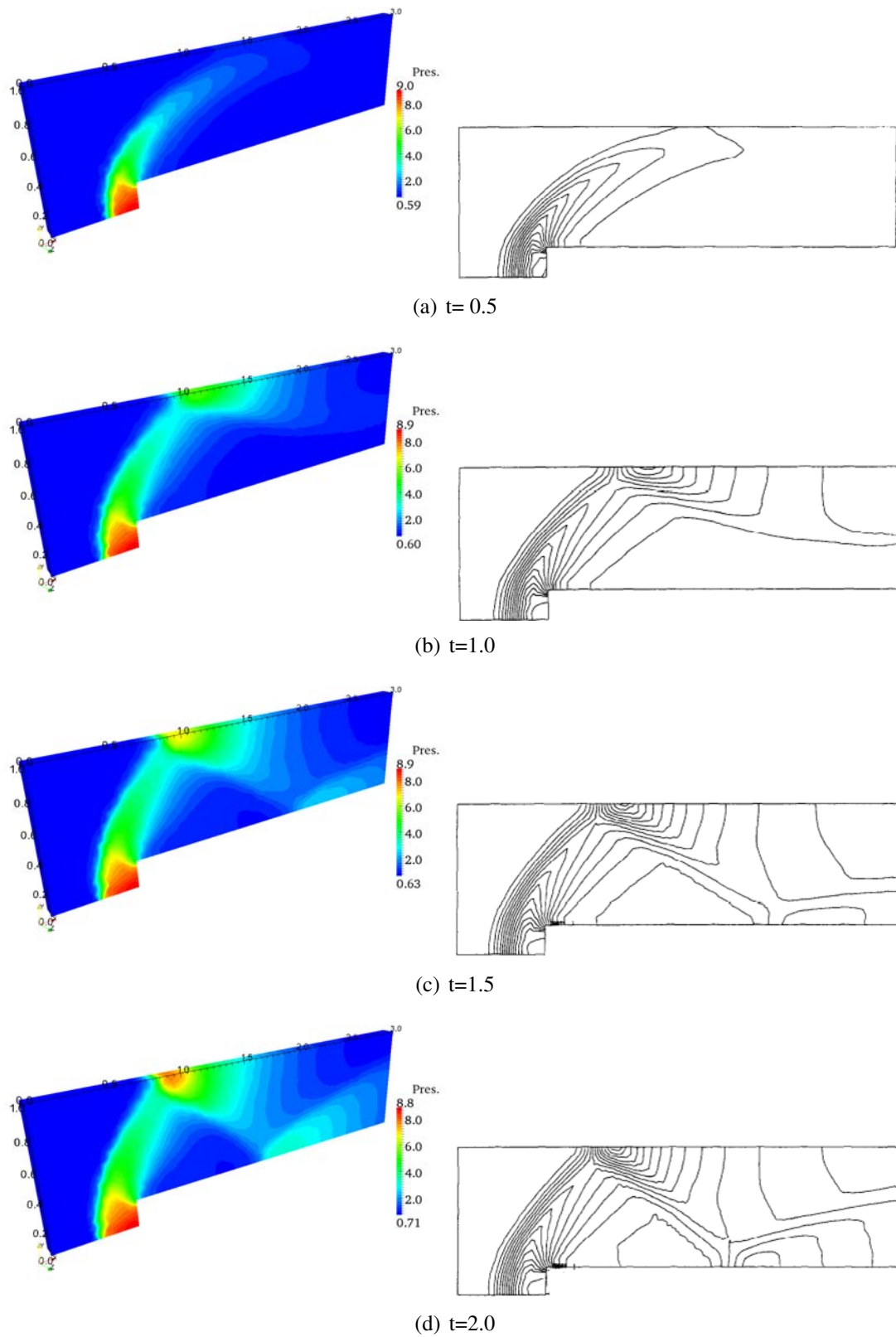


Figura 5.13: Distribuição de pressão - primeira parte. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

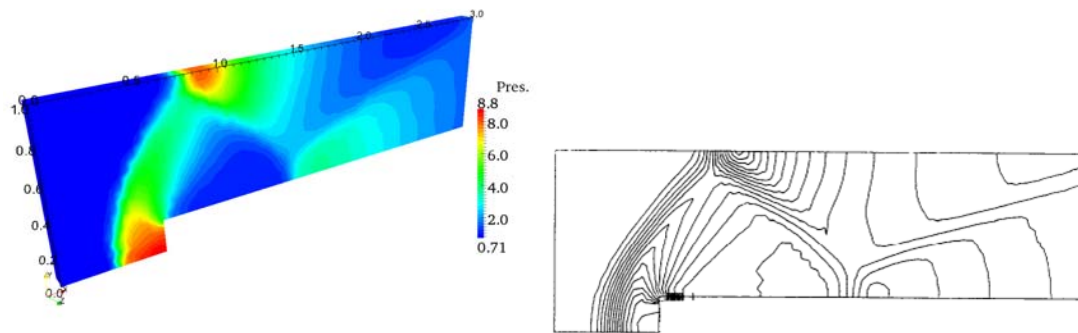
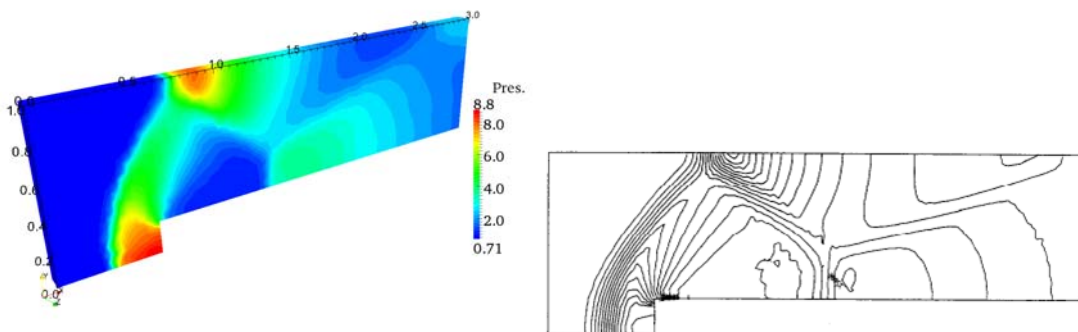
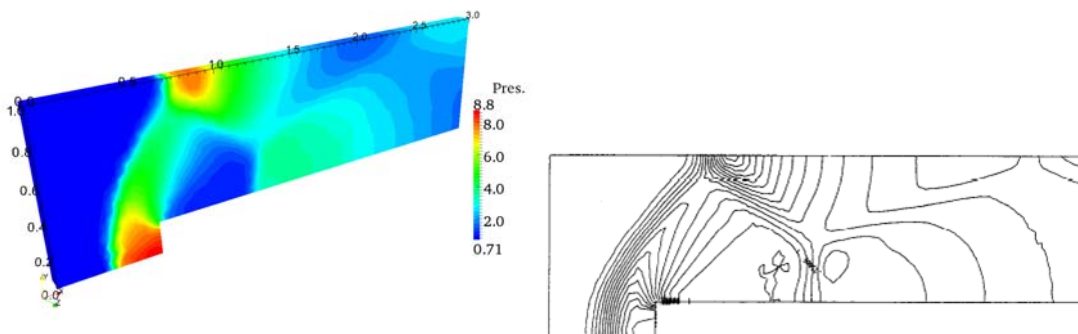
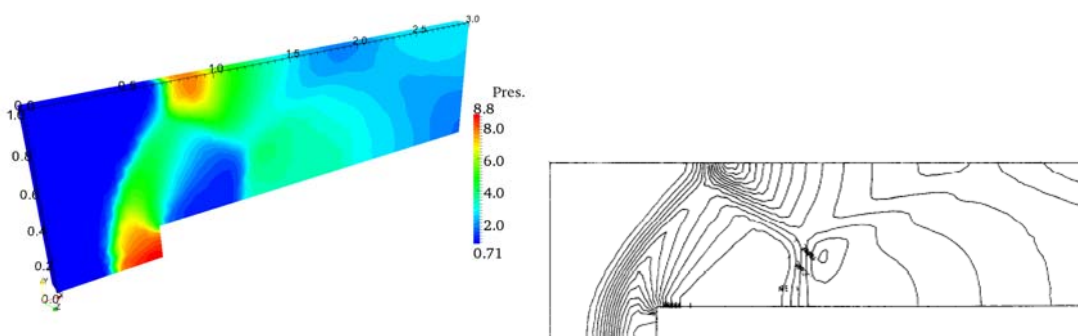
(e)  $t=2.5$ (f)  $t=3.0$ (g)  $t=3.5$ (h)  $t=4.0$ 

Figura 5.13: Distribuição de pressão - continuação. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

rentes passos de tempo para diferentes partes do domínio.

Essa técnica permite que cada elemento ou grupo de elementos seja integrado usando um passo de tempo mais próximo do seu passo de tempo crítico conforme definido pela equação 5.29, que é o maior passo de tempo que mantém a estabilidade de solução.

O uso da técnica do passo de tempo variável proporciona um aumento substancial na eficiência computacional, principalmente em problemas que possuem tamanhos e propriedades de elementos muito diversificados. Em problemas de escoamentos de fluidos, por exemplo, necessita-se de uma discretização mais refinada em regiões próximas de superfícies de corpos, implicando no uso de elementos finitos de vários tamanhos. Em síntese, emprego de intervalos de tempo locais evita que a solução venha a convergir para um resultado errado devido ao uso de intervalo muito pequenos para elementos muito grandes em malhas com alta variação no tamanho dos elementos, conforme pode ser visto na figura 5.18 e também pode produzir ganhos em tempo de processamento conforme mostrado por Teixeira (2001).

Nos métodos explícitos com sub-ciclos de tempo para solução transiente, adotam-se passos de tempo tal que relação entre esses seja inteira, assim, se um grupo de elementos ou de nós possui um passo de tempo  $\Delta t$ , o próximo grupo de intervalo de tempo maior terá um passo  $n\Delta t$ , onde  $n$  é um número inteiro positivo. De acordo com Teixeira (2001), embora esta restrição limite a divisão da malha em grupos, ela permite que o código seja vetorizado, o que não acontece em outros métodos sem esta restrição.

Belytschko e Gilbertsen (1992) aplicaram a técnica de passo de tempo variável com a relação entre passos de tempo inteira, utilizando os recursos de paralelização e vetorização para problemas de dinâmica estrutural e Teixeira (2001) aplica a mesma técnica em problemas de escoamento de fluidos 3-D. Aproveitando o ambiente de programação utilizado nesta pesquisa, adota-se a proposta de Teixeira (2001).

### Descrição da técnica adotada

Inicialmente escolhe-se um passo de tempo básico  $\Delta t$ , o qual deve ser inferior ao menor passo de tempo crítico da malha, e então divide-se os elementos e nós em grupos de passo de tempo local  $\Delta t_e$ , tal que  $\Delta t_e$  seja menor que o intervalo de tempo crítico do elemento e seja calculado por  $\Delta t_e = n\Delta t$  com  $n$  um número inteiro e positivo que indica o grupo ao qual o elemento pertence. Em seguida, determina-se o passo de tempo local para cada nó,  $\Delta t_N$ , tal que este seja igual ao menor passo de tempo dos elementos aos quais o nó está conectado.

Um ciclo global de avanço no tempo corresponde a um passo global no tempo de  $NSUB\Delta t$ ,

onde  $NSUB$  é o número de sub-ciclos. Isso ocorrerá quando todos os nós terão as variáveis do problema no mesmo tempo. Para controlar a atualização dos elementos e dos nós no tempo, é gerado um vetor que indica quais os grupos que serão atualizados a cada instante ou sub-ciclo, até completar um ciclo. No primeiro sub-ciclo, todos os grupos de elementos e de nós são atualizados. Em seguida, esses serão atualizados somente se o instante local do elementos  $t_e$  for menor ou igual ao instante global  $t$ .

Para os nós que pertencem a elementos com diferentes passos de tempo, a cada atualização do elemento  $e$  com menor intervalo de tempo, considera-se a contribuição deste elemento e interpola-se linearmente a contribuição dos demais elementos para o instante  $t_e$  referente ao elemento  $e$ .

O ganho de tempo teórico de processamento, de acordo com Belytschko e Gilbertsen (1992) pode ser estimado por:

$$ganho = \frac{t^{ns}}{t^s} = \frac{NSUB}{\sum_{i=1}^{NSUB} PEAS_i/100}, \quad (5.76)$$

onde  $t^{ns}$  e  $t^s$  são os tempos de processamentos requeridos para a solução do problema, utilizando um passo de tempo uniforme e passos de tempo variáveis, respectivamente.  $PEAS_i$  é a porcentagem de elementos atualizados no subciclo  $i$ .

### Exemplo com sub-ciclos de tempo - Análise 2D de um aerofólio com movimento oscilatório

Além de buscar uma verificação do algoritmo com subciclos de tempo, com esta aplicação também busca-se verificar o desempenho de pequenos passos de tempo em uma malha com variação muito grande de tamanhos de elementos.

Este exemplo consiste na aplicação do algoritmo apresentado para a análise do escoamento transiente invíscido do ar ( $\gamma = 1,4$ ) a  $Mach$  0,755, velocidade sobre um aerofólio de perfil NACA 0012 com movimento oscilatório de rotação em torno do ponto situado na linha média, a 25% da corda. O ciclo de oscilação é definido por:

$$\alpha = 0,016^\circ + 2,51^\circ \text{sen}(\omega t), \quad (5.77)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de ataque,  $t$  é o tempo adimensional (ver Anexo A) e  $\omega$  é a frequência circular do movimento de pitch, calculada em rad/unidade de tempo adimensional por:

$$\omega = k \frac{2u_\infty}{c_\infty}, \quad (5.78)$$



com  $k$  sendo o valor da frequência reduzida com base na corda tomado como  $k=0,0814$  e  $L$  a corda do aerofólio, tomada como 1.

Este é um ensaio padrão AGARD (LANDON, 1982), cujos resultados experimentais são usados para comparação com os do presente trabalho.

A malha utilizada para este problema é a mesma utilizada por Nithiarasu et al. (2006) para a resolução do problema estacionário a um ângulo de ataque nulo, contendo 3753 nós e 7351 elementos triangulares com aproximação linear (ver Fig. 5.14). A malha possui forma circular no contorno fictício, com raio de 125. O aerofólio possui corda unitária e seu bordo de ataque é situado no centro da malha, sendo a malha na vizinhança do aerofólio apresentada na Fig. 5.14.

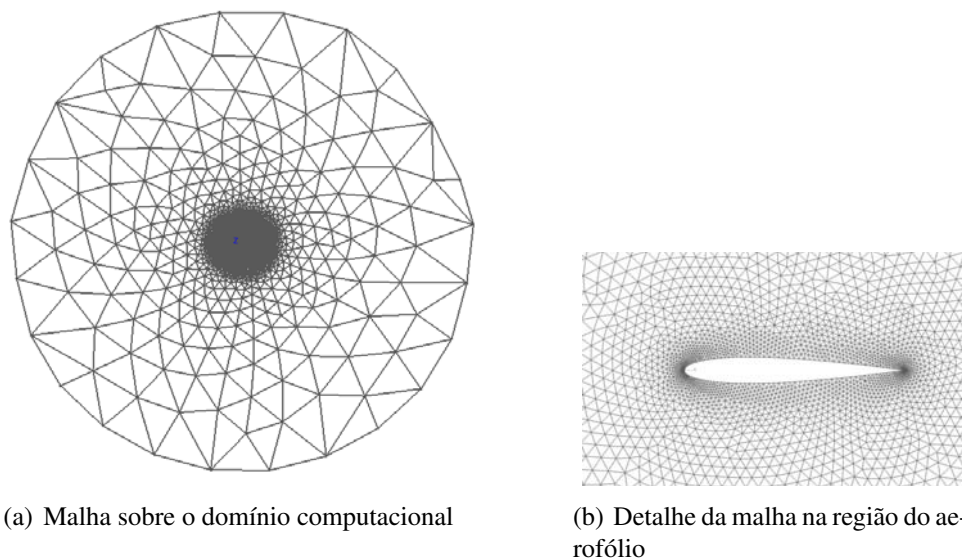


Figura 5.14: Malha para o aerofólio NACA 0012

Para este exemplo utilizou-se 12 grupos com passos de tempo adimensionais múltiplos: 0,00001, 0,00002, 0,00004, 0,00008, 0,00016, 0,00032, 0,00064, 0,00128, 0,00256, 0,00512, 0,01024 e 0,02048, como pode ser visto na Fig. 5.15.

Primeiro resolveu-se o problema estacionário para um ângulo de ataque  $0,016^\circ$ , à partir de então ( $t = 0$ ), impôs-se a oscilação ao aerofólio.

As distribuições de pressão, massa específica e velocidade adimensionais no instante adimensional  $t = 13,01$  são mostradas na Fig. 5.16.

Os resultados numéricos da distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do aerofólio em vários instantes são apresentados na Fig. 5.17 e comparados com os resultados experimentais AGARD (LANDON, 1982).



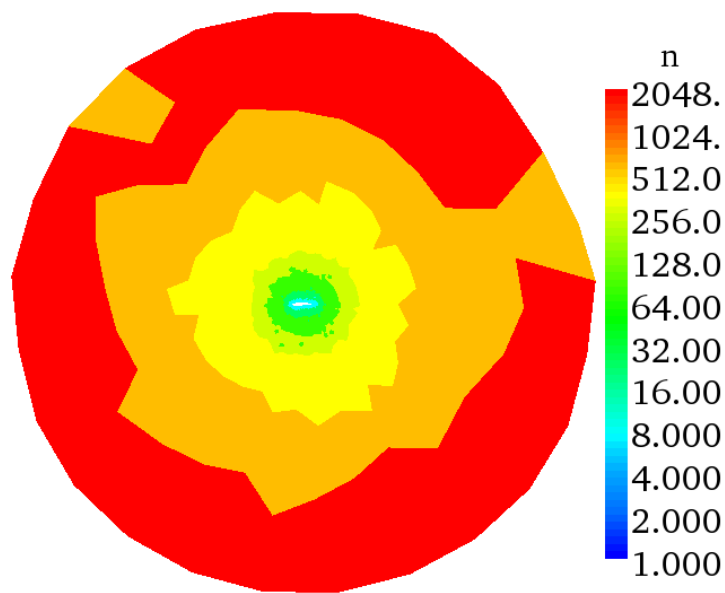
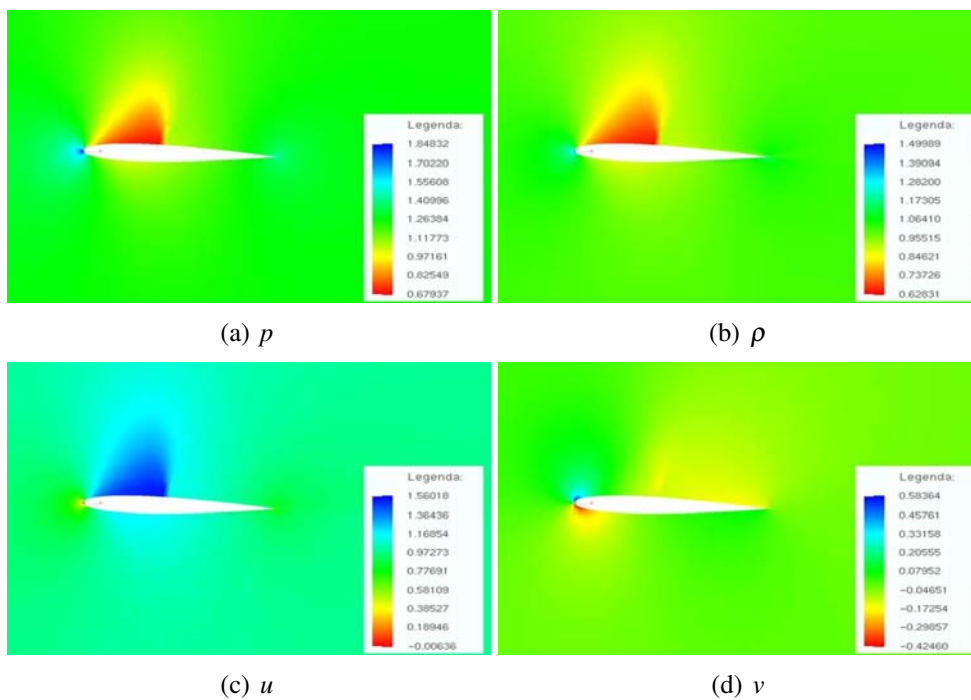
Figura 5.15: Grupos de elementos de mesmo  $\Delta t$ 

Figura 5.16:  $t = 13,01$  (a) Distribuição de pressão (b) Distribuição de massa específica, (c) Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade, (d) Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade

Observa-se nos resultados apresentados que o uso de subciclos de tempo conduziu a uma solução coerente, enquanto, devido à grande diferença de tamanho dos elementos, o uso de um passo de tempo único  $\Delta t = 0,00001$  levou a uma solução errada, como pode ser observado na Fig 5.18.

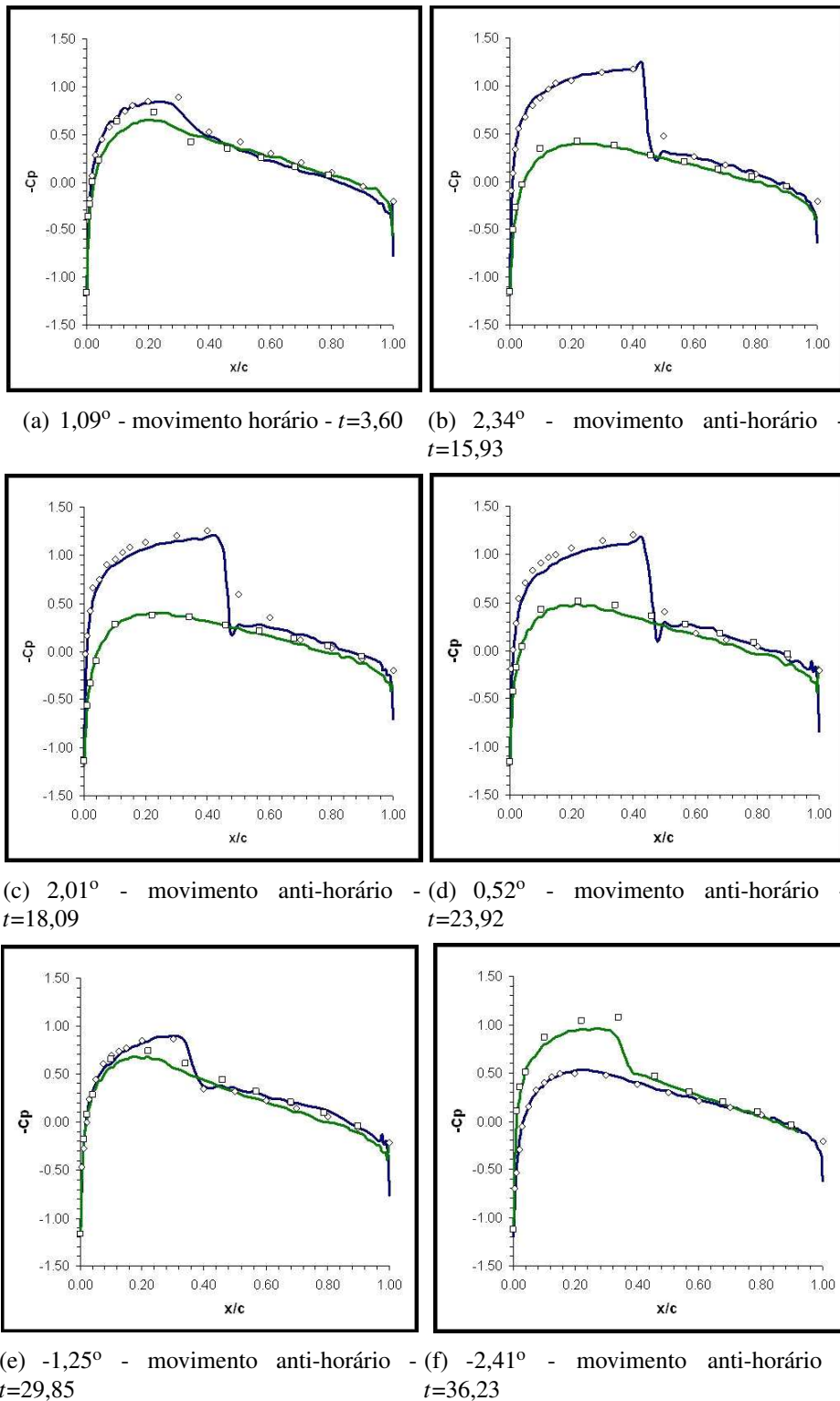


Figura 5.17: Coeficientes de pressão ao longo da corda em vários instantes - primeira parte

### 5.6.4 Escoamento viscoso com condução de temperatura sobre uma placa aquecida - malha 3D

Este problema consiste no escoamento viscoso, supersônico sobre uma placa plana, a *Mach* 3, com uma velocidade adimensional (Ver Anexo A) na direção horizontal do fluxo não pertur-

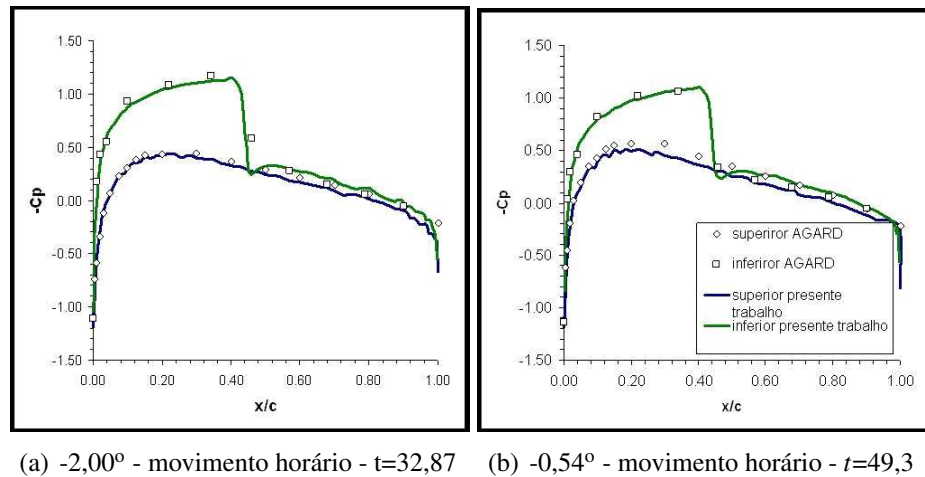


Figura 5.17: Coeficientes de pressão ao longo da corda em vários instantes - continuação

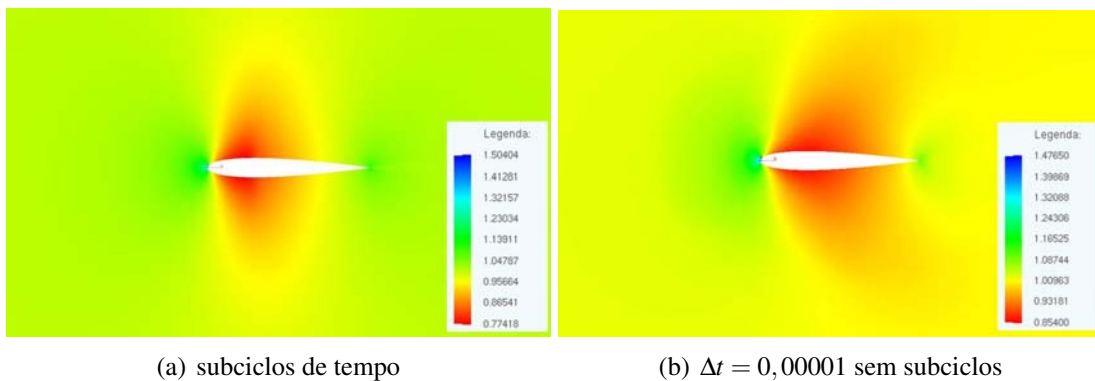


Figura 5.18: Distribuição de massa específica (a) com subciclos de tempo e (b) sem subciclos de tempo

bado  $u_\infty = 1$ , número de Reynolds  $Re=1000$ , massa específica adimensional  $\rho=1$ , relação entre calor específico à pressão constante e calor específico a volume constante  $\gamma = 1,4$  e número de Prandt  $Pr=0,72$ . O comprimento de referência tomado foi o comprimento da placa igual a 1,0. Foi adotado o coeficiente de captura de choque  $q_{dif} = 1$ .

As condições de contorno aplicadas foram de escoamento livre na entrada, velocidade nula e temperatura constante e igual à de estagnação  $T_e$  no contorno da placa, e valores extrapolados do domínio nas saídas (contorno superior e da direita) a fim de evitar reflexão da onda de choque.

A temperatura de estagnação é calculada por:

$$T_e = T_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right), \quad (5.79)$$

onde  $T_\infty$  e  $M_\infty$  são respectivamente temperatura e número de Mach do escoamento não perturbado.

Para a viscosidade, considerou-se a Lei de Sutherland para o ar, conforme eq. (5.80), onde os índices 0 indicam valores iniciais.

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left( \frac{T_0 + 110,4}{T + 110,4} \right) \quad (5.80)$$

A geometria do problema e a malha utilizada com 20383 elementos e 5651 nós, são apresentadas na Fig. 5.19(a) e 5.19(b).

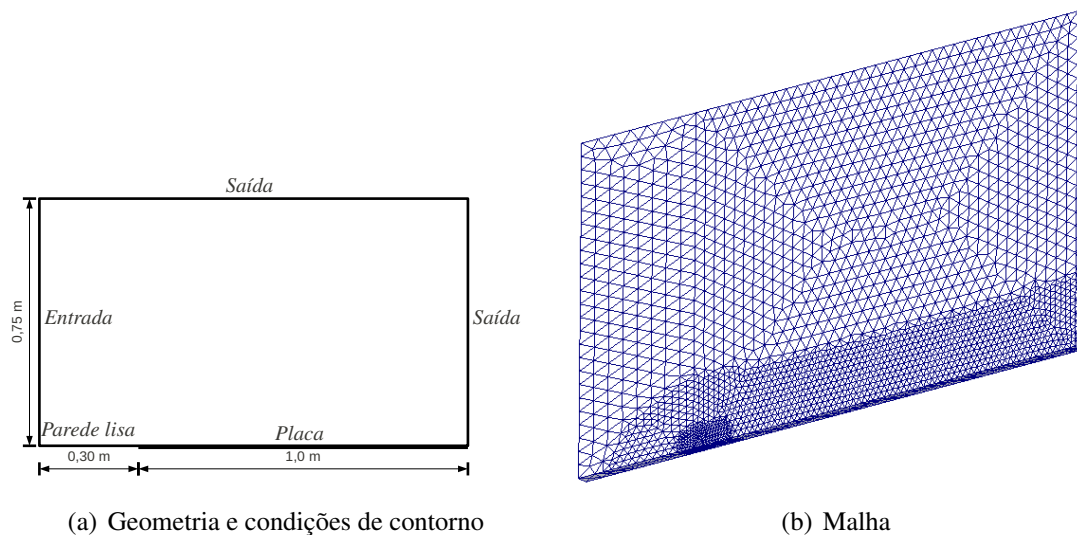


Figura 5.19: Discretização da placa

Na Figura 5.20 apresentam-se as linhas de corrente e os contornos de pressão, densidade e temperatura obtidos pelo presente trabalho e que podem ser comparados com os resultados obtidos por Zienkiewicz et al. (1999), reproduzidos na Fig. 5.21, sendo possível notar bastante semelhança entre os resultados.

Finalmente, no gráfico da Fig. 5.22 apresenta-se a distribuição sobre a placa de pressão normalizada em relação à pressão na entrada ( $P/P_{inf}$ ), e compara-se com os resultados obtidos por Carter (1972), Kubota e Ko (1967) e Nithiarasu et al. (2006). Observa-se que os resultados do presente trabalho se mostram mais suaves que os obtidos por Nithiarasu et al. (2006), o que ocorre devido à malha 2D empregada pela referência ser muito mais refinada. Assim, conclui-se que o algoritmo se mostra adequado a análises envolvendo tanto ondas de choque, como escoamento viscoso e transferência de calor.

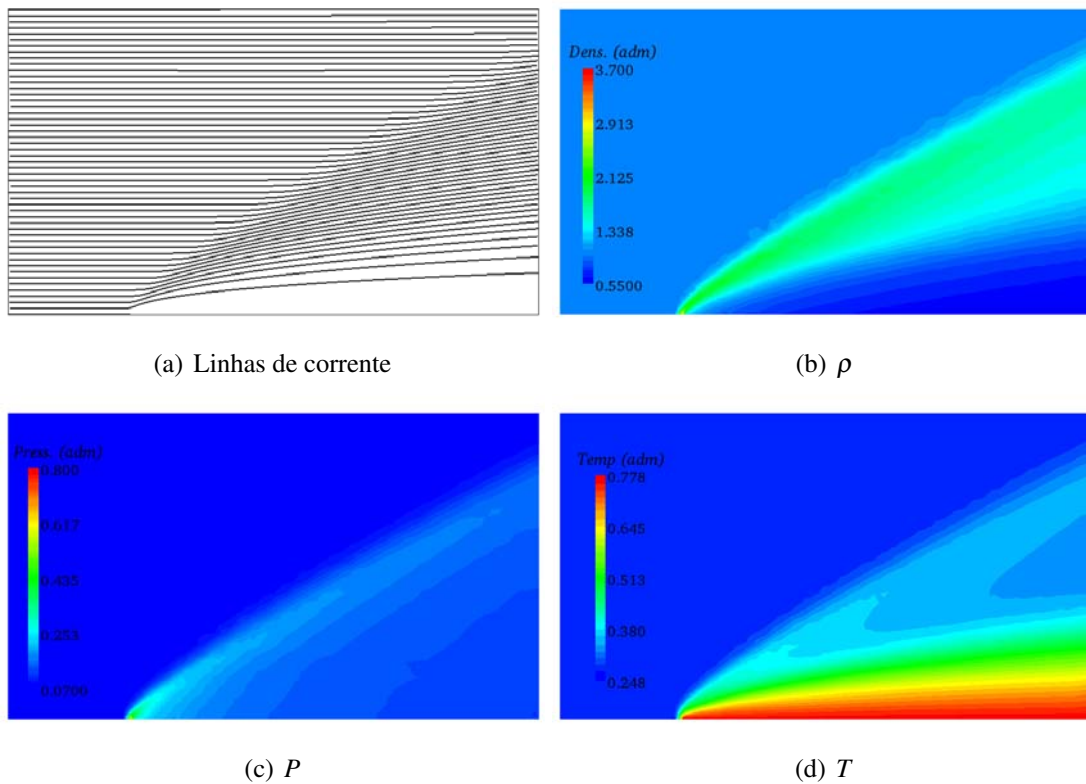


Figura 5.20: Resultados para o problema da placa - (a) linhas de corrente (b) massa específica, (c) pressão, (d) temperatura

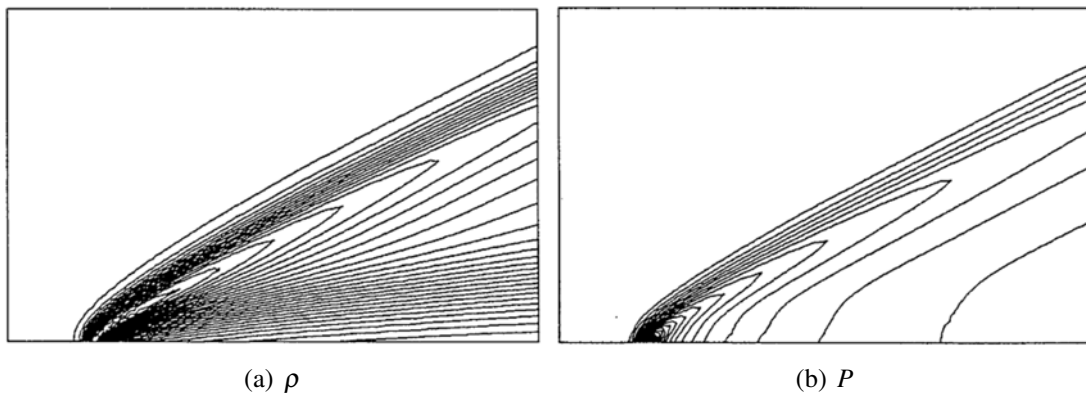
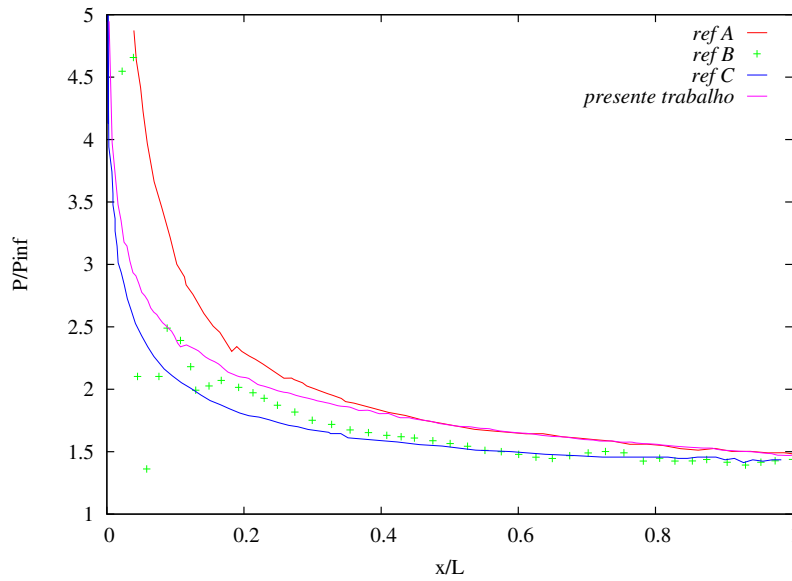


Figura 5.21: Contornos de massa específica (a) e pressão (b) obtidos por Zienkiewicz et al. (1999)

### 5.6.5 Uso do algoritmo explícito para simulação incompressível

À medida que a compressibilidade do fluido diminui, a velocidade de onda  $c$  tende ao infinito. Como essa velocidade determina o intervalo de tempo estável para a análise numérica explícita apresentada aqui, são necessários passos no tempo tendendo a zero à medida que o flui-



*refA* - Kubota e Ko (1967), *refB* - Carter (1972) e *refC* - Nithiarasu et al. (2006)

Figura 5.22: Distribuição de pressão sobre a placa segundo diversos autores

do fica menos compressível, dificultando que escoamentos incompressíveis sejam diretamente analisados pelo método explícito. Por isso, adota-se um procedimento baseado em inicialmente adotar uma compressibilidade artificial para o fluido.

Seja válida a seguinte relação para a propagação de ondas no fluido:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (5.81)$$

Com o auxílio da regra da cadeia, de (5.81) e (5.26), considerando a massa específica constante, extrai-se a equação de Poisson:

$$\frac{\Delta p}{c^2} = -\Delta t \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_{i+1}} \quad (5.82)$$

Trocando-se a equação 5.27 pela equação 5.82 e considerando a massa específica constante, obtém-se um algoritmo para simulação de fluidos pouco compressíveis no qual a equação da energia fica desacoplada e pode ser dispensada.

No entanto, à medida que a compressibilidade diminui, a velocidade de onda  $c$  aumenta tendendo ao infinito quando o fluido é incompressível. Isto exige que se adote um intervalo de tempo  $\Delta t$  muito pequeno para que a estabilidade do algoritmo fique garantida.

Uma alternativa para contornar este problema consiste em substituir a velocidade de onda real por uma artificial  $\beta$  menor, conforme utilizado por alguns autores, a exemplo de Nithiarasu

e Liu (2006) e Shapiro e Drikakis (2005) e ainda resolver o problema utilizando localmente o intervalo de tempo crítico de cada elemento.

Para que a solução transiente permaneça consistente, corrige-se a variação da quantidade de movimento da seguinte maneira (NITHIARASU, 2003):

$$\Delta \bar{\rho} u_i = \Delta \bar{\rho} u_i - \Delta t \frac{\Delta \bar{\rho} u_{i\tau}}{\Delta \tau}, \quad (5.83)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo interno e  $\Delta \tau$  é o passo de tempo real. Para que seja obtida uma solução com aproximação de segunda ordem no tempo real,  $\Delta \bar{\rho} u_{i\tau}$  é aproximado por meio de:

$$\Delta \bar{\rho} u_{i\tau} = \frac{3\bar{\rho} u_{in+1} - 4\bar{\rho} u_{in} + \bar{\rho} u_{in-1}}{2}. \quad (5.84)$$

Nessa equação  $\bar{\rho} u_{in-1}$  é o valor da quantidade de movimento no n-ésimo passo interno de tempo. Os outros dois valores,  $\bar{\rho} u_{in}$  e  $\bar{\rho} u_{in-1}$ , devem ser guardados dos respectivos passos de tempo reais.

Em cada passo de tempo real, um resíduo de pressão previamente prescrito deve ser alcançado, o que equivale a achar uma resposta estacionária a cada passo real no tempo.

Em síntese o que se altera no algoritmo é o emprego de passos de tempo internos, troca da equação da densidade pela equação de Poisson para pressão e a adição da correção para o tempo real.

Nota-se ainda que as condições de Babuska-Brezzi podem ser contornadas no presente algoritmo (ver Zienkiewicz e Taylor (2000b)).

### Exemplo de problema 2D incompressível

Esse exemplo consiste em um tanque de dimensões 0,35 m de largura e 0,7 m de altura, contendo fluido com massa específica  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ , viscosidade  $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$ , aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , sendo as paredes consideradas sem atrito com o fluido (ver Fig. 5.23). No instante  $t = 0 \text{ s}$  o fluido está em repouso e a distribuição de pressão é hidrostática, então a comporta do tanque é instantaneamente aberta.

A malha utilizada possui 424 nós e 766 elementos triangulares de aproximação linear, sendo a velocidade da malha imposta igual à do fluido.

São apresentadas as configurações deformadas da malha e as distribuições de velocidades nos instantes 2 s, 4 s e 6,1 s nas Figs. 5.24 - 5.26.

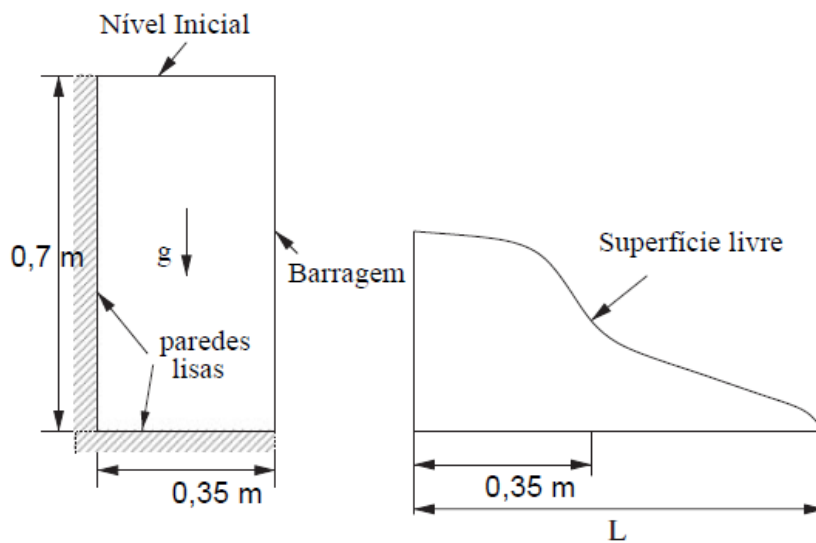
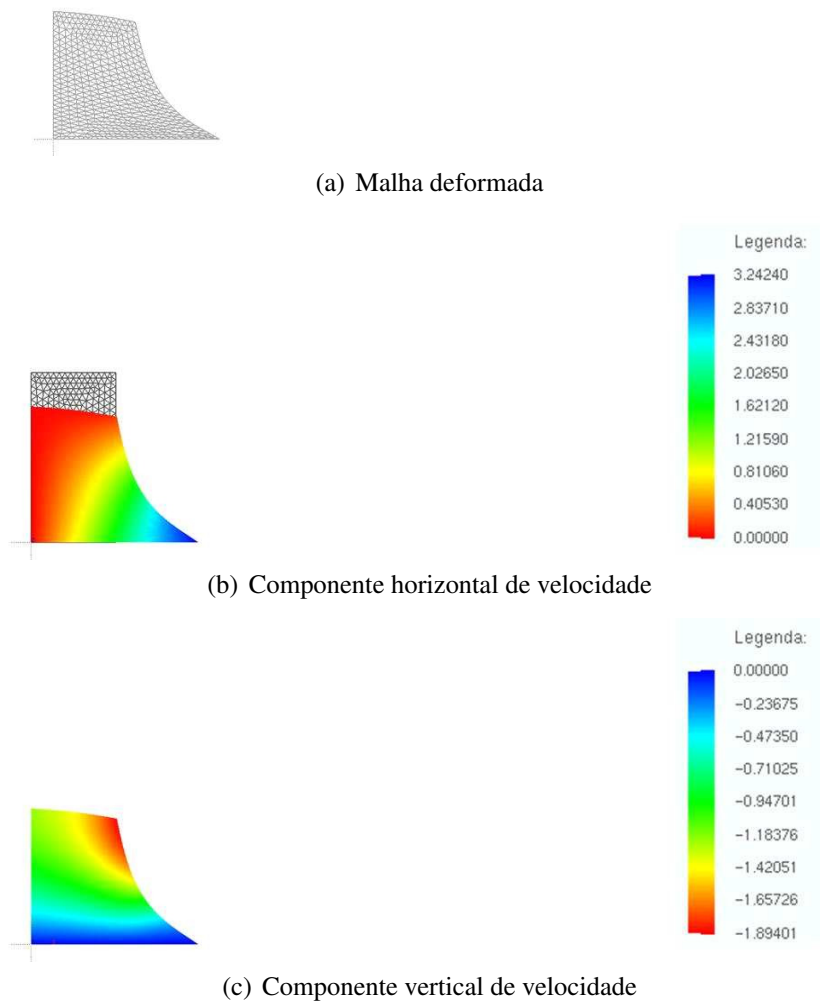


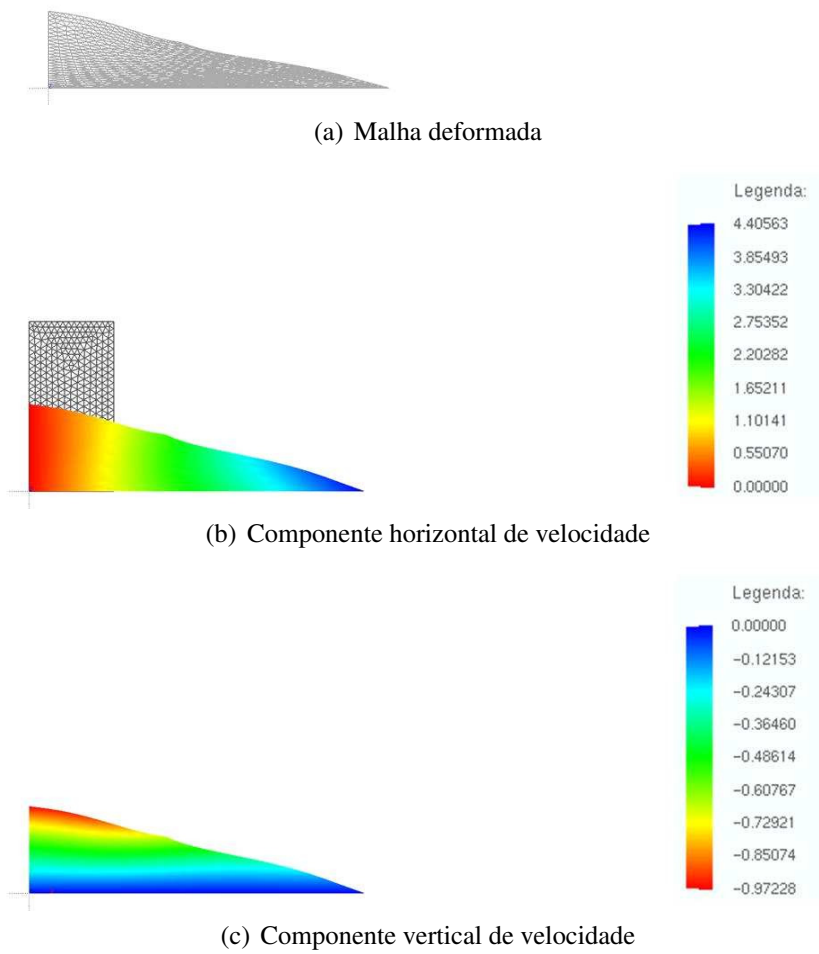
Figura 5.23: Geometria do problema da barragem rompida

A figura 5.27 compara a posição extrema da superfície livre do fluido na direção horizontal obtida pelo presente trabalho, com os resultados numéricos obtidos por Nithiarasu (2005) e os resultados experimentais obtidos por Hirt e Nichols (1981), onde nota-se boa aproximação.  $L$  é a largura final da barragem,  $L_0$  é a largura inicial da barragem (0,3 m) e  $t^*$  é o tempo adimensional, tal que  $t^* = t\sqrt{2g/L_0}$ .

Embora os resultados tenham sido bastante coerentes com as referências, o método da compressibilidade artificial empregado conforme empregado aqui se mostrou de convergência muito lenta e estudos futuros devem ser feitos para melhorar a eficiência do processo ou mesmo para a implementação de modelos implícitos ou semi-implícitos, sendo que no restante deste trabalho analisou-se apenas escoamentos compressíveis.



Figura 5.24: Barragem no instante  $t = 2 \text{ s}$

Figura 5.25: Barragem no instante  $t = 4$  s

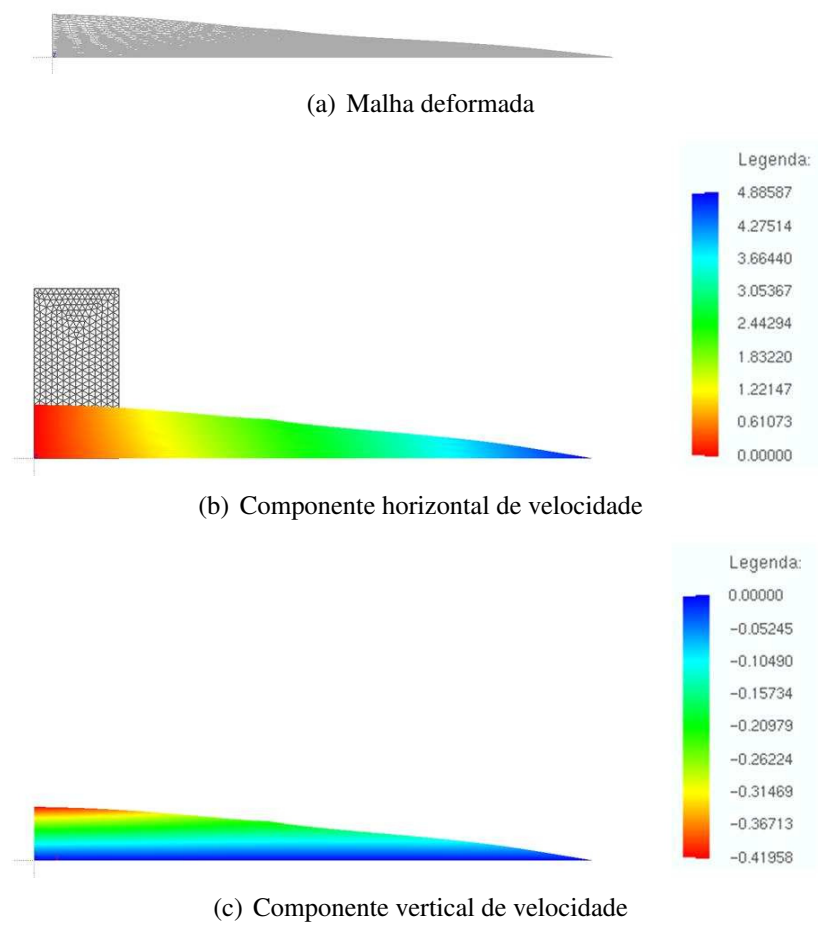


Figura 5.26: Barragem no instante  $t = 6,1 s$

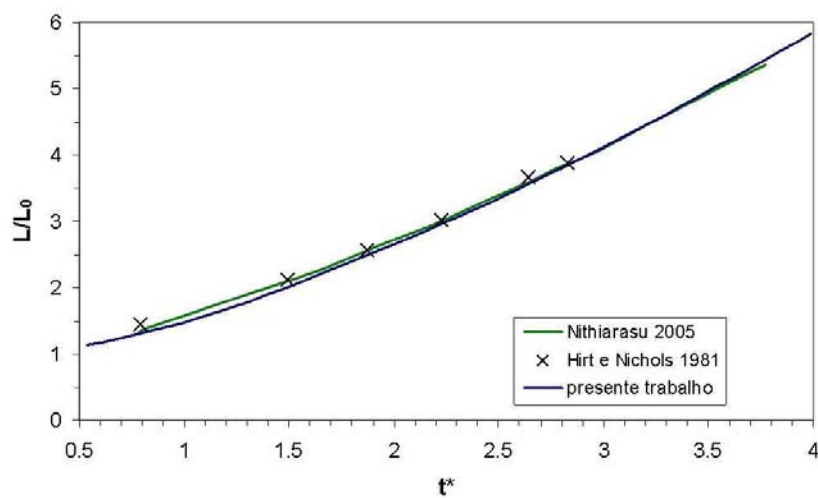


Figura 5.27: Deslocamento horizontal relativo vs. tempo adimensional



## 6 *Análise numérica de dinâmica das estruturas*

Neste capítulo o procedimento geral do Método dos Elementos Finitos baseado em posições é explicado e aplicado à cinemática dos elementos de casca.

### 6.1 A formulação posicional

Como já citado na seção 1.2, na formulação Lagrangeana posicional introduzida por Bonet et al. (2000) e Coda (2003), as incógnitas são as posições na configuração atual (final) da estrutura. Após a determinação destas, as tensões e deformações podem ser calculadas com relação à configuração inicial (de referência).

Seja o elemento finito  $B_0$  na configuração inicial e  $B_1$  na configuração atual (Fig. 6.1). Para que possam ser medidas as deformações, é necessário que se tenha uma aproximação para a função mudança de configuração  $f$ .

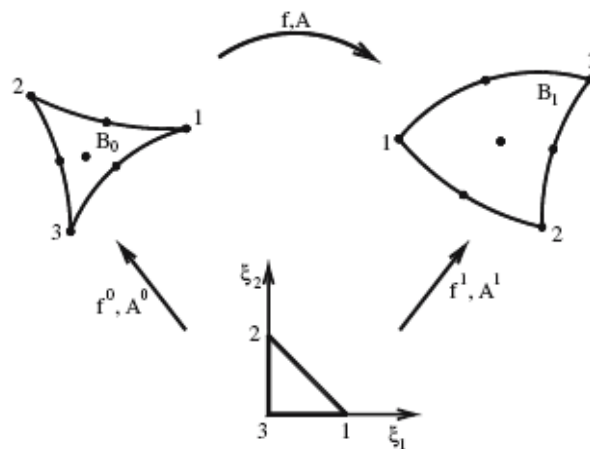


Figura 6.1: Mapeamento posicional (CODA; PACCOLA, 2007)

Com relação a uma referência auxiliar adimensional,  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ , determina-se a aproxima-

ção para a função  $f^0$  que leva à configuração inicial conforme a expressão:

$$\begin{aligned}\vec{f}^0 &= \vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_i^0 &= X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{ji},\end{aligned}\quad (6.1)$$

onde  $X_i$  é componente  $i$  do vetor posição inicial,  $X_{ji}$  é o valor nodal da coordenada inicial  $i$  para o nó  $j$  e  $N_j$  é a função aproximadora associada ao nó  $j$ .

A função  $f^0$  pode ser entendida como uma mudança fictícia de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial (CODA; PACCOLA, 2007). Analogamente se escreve a função  $f^1$  que representa uma mudança fictícia de configuração do espaço adimensional para a configuração atual conforme:

$$\begin{aligned}\vec{f}^1 &= \vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_i^1 &= x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{ji},\end{aligned}\quad (6.2)$$

onde  $x_i$  é a componente  $i$  do vetor das posições atuais e  $x_{ji}$  é o valor nodal da coordenada atual  $i$  para o nó  $j$ .

Assim, o mapeamento real  $f$  da configuração inicial para a configuração final é dado por:

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}) = \left(\vec{f}^1\right) \circ \left(\vec{f}^0\right)^{-1}.\quad (6.3)$$

Da definição do gradiente mudança de configuração  $A$  no capítulo 4, pode-se escrever para  $A^0$ :

$$A^0 = A^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \nabla \left[ \vec{f}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right],\quad (6.4)$$

ou:

$$(A^0)_{ij} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j},\quad (6.5)$$

e para  $A^1$ :

$$A^1 = A^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \nabla \left[ \vec{f}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right],\quad (6.6)$$

ou:

$$(A^1)_{ij} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j}\quad (6.7)$$

e, finalmente, o gradiente da mudança de configuração  $f$  como:

$$A = \nabla \left( \vec{f} \right) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{X}} = (A^1) (A^0)^{-1}.\quad (6.8)$$

Com o auxílio das funções aproximadoras,  $A^0$  e  $A^1$  podem ser expressos por:

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = N_{k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_{ki} \quad (6.9)$$

e

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = N_{k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_{ki}, \quad (6.10)$$

onde  $(,)$  indica derivada parcial.

Após calculado o gradiente de deformação, os tensores alongamento à direita de Cauchy-Green  $C$  e deformação de Green-Lagrange  $E$  podem ser obtidos por:

$$C = A^T A = \left[ (A^1) (A^0)^{-1} \right]^T \left[ (A^1) (A^0)^{-1} \right] \quad (6.11)$$

e

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ (A^1) (A^0)^{-1} \right]^T \left[ (A^1) (A^0)^{-1} \right] - I \right\}, \quad (6.12)$$

onde  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem.

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que é conjugada energética da deformação de Green-Lagrange, é obtida através da Lei Constitutiva do material. Tal relação pode ser expressa pela energia específica de deformação (PASCON, 2008). Assim, é possível determinar a desejada tensão através da seguinte fórmula:

$$S = \frac{\partial w}{\partial E} \Rightarrow S_{ij} = \frac{\partial w}{\partial E_{ij}}. \quad (6.13)$$

A partir deste ponto, todos os termos do funcional de energia potencial total da equação (4.64), que são: energia de deformação, energia das forças externas e energia cinética, podem ser calculados para uma posição tentativa. Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial através da minimização do funcional em relação aos parâmetros nodais, que são as posições atuais, associado com algum integrador temporal, é possível solucionar o problema de equilíbrio dinâmico.

## 6.2 A aplicação em elementos de casca

As estruturas denominadas cascas consistem em sólidos com uma dimensão muito menor que as outras. Assim é proposta uma aproximação para o mapeamento da superfície média, conforme ilustrado na figura 6.2.

Os mapeamentos das configurações inicial e final dos pontos da superfície média, dados em

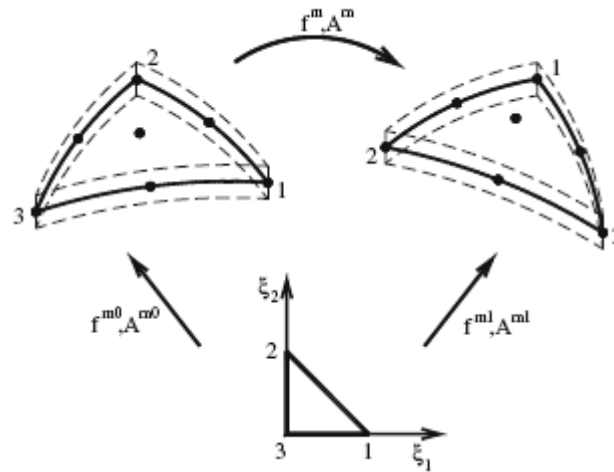


Figura 6.2: Mapeamento da superfície média

função da combinação linear das funções aproximadoras são respectivamente:

$$f_i^{m0} = X_i^m(\xi_1, \xi_2, X_{ji}) = N_j(\xi_1, \xi_2)X_{ji} \quad (6.14)$$

e

$$f_i^{m1} = x_i^m(\xi_1, \xi_2, x_{ji}) = N_j(\xi_1, \xi_2)x_{ji}, \quad (6.15)$$

onde  $N_j(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de forma referentes ao nó  $j$ ,  $X_{ji}$  são os valores nodais das coordenadas iniciais, na direção  $i$ , do nó  $j$  e  $x_{ji}$  são os valores nodais das coordenadas atuais.

Ainda se faz necessário que todos os pontos da casca sejam mapeados. Usando a descrição simples apresentada por Coda e Paccola (2009), a diferença entre um ponto fora da superfície média e um ponto correspondente pertencente à superfície média gera um vetor posição generalizado  $g^0$  na configuração inicial ou  $g^1$  na configuração atual, de forma que um ponto qualquer na casca pode ser definido adicionando-se o vetor posição generalizado ao ponto correspondente na superfície média, tal que:

$$X_i = X_i^m + g_i^0 \quad (6.16)$$

e

$$x_i = x_i^m + g_i^1. \quad (6.17)$$

Os vetores  $g^0$  e  $g^1$  também devem ser escritos em função das coordenadas adimensionais. Considerando-se inicialmente que a deformação ao longo da espessura seja constante, escreve-se:

$$g_i^0 = \frac{h_0(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^0(\xi_1, \xi_2) \xi_3 \quad (6.18)$$



e

$$g_i^1 = \frac{h(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^1(\xi_1, \xi_2) \xi_3, \quad (6.19)$$

onde  $h^0$  e  $h$  são respectivamente a espessura inicial e atual e  $e_i^0$  e  $e_i^1$  são as componentes  $i$  dos vetores unitários respectivamente normal à superfície média inicial e não necessariamente normal à superfície média atual (ver figura 6.3).

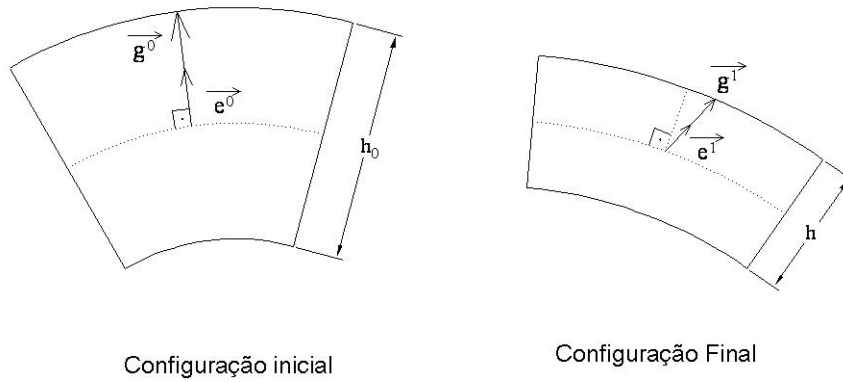


Figura 6.3: Vetores de posição generalizados

O vetor  $e_i^0$  é aproximado pelas funções de forma da seguinte maneira:

$$e_i^0(\xi_1, \xi_2) = N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0, \quad (6.20)$$

onde  $e_{ij}^0$  é o valor nodal do vetor unitário normal à superfície média no nó  $j$  na configuração inicial.

Para a configuração final, Coda e Paccola (2007) propõem a aproximação:

$$h(\xi_1, \xi_2) e_i^1(\xi_1, \xi_2) = h_0 \bar{g}_i(\xi_1, \xi_2), \quad (6.21)$$

onde  $\bar{g}_i$  é um vetor não unitário, também chamado vetor generalizado.

Sendo a espessura atual variando sobre o elemento de casca tal que:

$$h(\xi_1, \xi_1) = h_0 \sqrt{\bar{g}_i(\xi_1, \xi_1) \bar{g}_i(\xi_1, \xi_1)} \quad (6.22)$$

e o vetor unitário  $e_i^1$  dado por:

$$e_i^1 = \frac{\bar{g}_i(\xi_1, \xi_1)}{\sqrt{\bar{g}_i(\xi_1, \xi_1) \bar{g}_i(\xi_1, \xi_1)}}, \quad (6.23)$$

os vetores de posição generalizados são finalmente escritos como:

$$g_i^0 = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0 \quad (6.24)$$

e

$$g_i^1 = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) \bar{G}_{ij} \quad (6.25)$$

onde  $\bar{G}_{ij}$  são os valores nodais (incógnitas) do vetor generalizado no nó  $j$  para a configuração atual.

O fato de a cinemática definida até o momento considerar deformação constante ao longo da espessura da casca implica em aumento da rigidez para problemas com coeficiente de Poisson não nulo, podendo provocar o travamento da casca quando submetida à flexão.

A variação da deformação ao longo da espessura da casca é introduzida através do chamado enriquecimento transversal, e o valor deste enriquecimento para as análises pode ser observado nos exemplos apresentados posteriormente em que são comparados elementos sem o parâmetro devido ao enriquecimento com elementos com enriquecimento. Para tal, chama-se a variável  $a$  de taxa de variação linear da deformação ao longo da espessura tal que:

$$a(\xi_1, \xi_2) = N_j(\xi_1, \xi_2) a_j, \quad (6.26)$$

onde  $a_j$  é valor dessa taxa no ponto correspondente ao nó  $j$ .

Assim, as equações (6.16) e (6.17) ficam:

$$f_i^0 = X_i = N_j(\xi_1, \xi_2) X_{ji} + \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0 \quad (6.27)$$

e

$$f_i^1 = x_i = N_j(\xi_1, \xi_2) x_{ji} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + N_j(\xi_1, \xi_2) a_j \xi_3^2] N_j(\xi_1, \xi_2) \bar{G}_{ij}. \quad (6.28)$$

Com as funções  $f_i^0$  e  $f_i^1$  expressas em (6.27) e (6.28), obtém-se os gradientes  $A^0$  e  $A^1$ . À partir desses valores, é possível obter o gradiente de mudança de configuração  $A = A^1(A^0)^{-1}$  e com o auxílio das equações definidas na seção 6.1, calcular todos os termos do funcional de energia para posições tentativa do processo iterativo de solução.

## 6.2.1 O elemento de casca

O elemento finito utilizado consiste em um elemento isoparamétrico triangular com 10 nós e 7 parâmetros nodais por nó (figura 6.4).

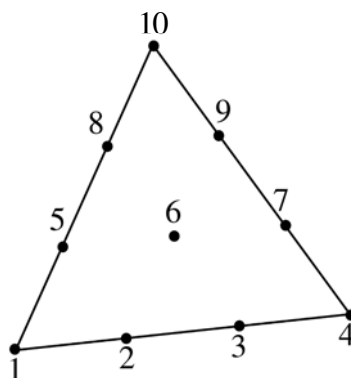


Figura 6.4: Elemento finito de casca

Os parâmetros nodais, incógnitas de um nó  $j$ , são: 3 coordenadas  $i$  da posição atual  $x_{ji}$ , 3 componentes  $i$  do vetor generalizado  $\bar{G}_{ij}$ , e o parâmetro nodal de variação linear da deformação segundo a espessura  $a_j$  (CODA; PACCOLLA, 2007).

A integração sobre o elemento é feita com o uso da quadratura de Hammer sobre a superfície média e quadratura de Gauss ao longo da espessura.

### 6.3 Integração temporal

O integrador temporal empregado para a análise da estrutura é o integrador de Newmark  $\beta$ , o qual, embora largamente utilizada na análise de estruturas de comportamento linear pode apresentar problemas quando aplicado à estruturas não lineares devido à não conservação do momento e da energia. No entanto, Coda e Paccola (2009) mostraram que para uma formulação posicional Lagrangeana total, com matriz de massa constante, o integrador mantém-se conservativo para a maioria dos problemas de casca.

As aproximações do processo de Newmark  $\beta$  para a descrição posicional (CODA; PACCOLLA, 2009) são:

$$x_{S+1} = x_S + \Delta t \dot{x}_S + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_S + \beta \ddot{x}_{S+1} \right] \quad (6.29)$$

e

$$\dot{x}_{S+1} = \dot{x}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{x}_S + \gamma \Delta t \ddot{x}_{S+1}. \quad (6.30)$$

A equação do momento linear, ou quantidade de movimento linear, para a descrição La-

grangeana total é dada por:

$$Q = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{x} d\mathcal{V}_0. \quad (6.31)$$

Se o corpo não desenvolve nenhuma deformação e as forças externas são nulas, então o momento linear não varia no tempo, isto é,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{x} d\mathcal{V}_0 = 0. \quad (6.32)$$

Pela hipótese de meio contínuo aplicada ao corpo (OGDEN, 1984), conclui-se que a seguinte equação é válida:

$$\ddot{x} = 0. \quad (6.33)$$

Fazendo uso de (6.33) em (6.30) duas vezes, uma para o instante  $t_s$  e uma para o instante  $t_s + 1$ , resulta:

$$\dot{x}_{s+1} = \dot{x}_s, \quad (6.34)$$

ou na forma integral, considerando a continuidade:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{x}_{s+1} d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega_{V_0}} \rho_0 \dot{x}_s d\mathcal{V}_0. \quad (6.35)$$

Assim, Coda e Paccola (2009) concluem que o momento linear é conservado para qualquer intervalo de tempo e constantes  $\beta$  e  $\gamma$  desde que não ocorram deformações.

Para provar a conservação do momento angular, mais passos são necessários. A expressão Lagrangeana para momento angular é:

$$J = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{x} \times x d\mathcal{V}_0, \quad (6.36)$$

onde  $\times$  indica produto vetorial.

O momento angular é constante quando um corpo rígido desenvolve velocidade angular constante sobre um eixo dito fixo. Como o corpo é considerado rígido, não há transferência de energia cinética para energia de deformação, como consequência a conservação do momento implica na conservação da energia para uma situação isotérmica.

Assumindo essa hipótese, escreve-se:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \int_{\Omega_0} \rho_0 (\ddot{x} \times x + \dot{x} \times \dot{x}) d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 (\ddot{x} \times x) d\mathcal{V}_0 = 0, \quad (6.37)$$

ou, assumindo continuidade, a igualdade

$$\ddot{x} \times x = 0 \quad (6.38)$$

deve ser válida para qualquer ponto do contínuo. Isto ocorre ou na situação trivial ( $\ddot{x} = 0$ ) ou quando:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (6.39)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular do corpo e, sem perda de generalidade,  $\vec{x}$  é o vetor posição relativo à sua projeção sobre o eixo de rotação. Usando (6.39) para o instante  $t_{s+1}$  nas equações (6.29) e (6.30), escreve-se:

$$x_{s+1} = x_s + \Delta t \dot{x}_s - \Delta t^2 (1/2 - \beta) \omega^2 x_s - \Delta t^2 \beta \omega^2 x_{s+1} \quad (6.40)$$

e

$$\Delta t \dot{x}_{s+1} = \Delta t \dot{x}_s - \Delta t^2 (1 - \gamma) \omega^2 x_s - \Delta t^2 \gamma \omega^2 x_{s+1} \quad (6.41)$$

Partindo-se de (6.40) e (6.41), conclui-se que:

$$(\dot{x}_{s+1} \times x_{s+1} - \dot{x}_s \times x_s) = \Delta t \omega^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) (x_{s+1} \times x_s), \quad (6.42)$$

ou, por continuidade, obtém-se a forma integral:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{x}_{s+1} \times x_{s+1} d\mathcal{V}_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{x}_s \times x_s d\mathcal{V}_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \Delta t \omega^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) (x_{s+1} \times x_s) d\mathcal{V}_0 \quad (6.43)$$

Observa-se em (6.43) que o momento angular é conservado quando o último termo desta for nulo, ou seja, sempre que a constante  $\gamma$  assumir valor  $\gamma = 1/2$ , independentemente do intervalo de tempo e parâmetro  $\beta$  adotados. Obviamente que quanto menor o intervalo de tempo melhor estará representado o movimento angular por qualquer integrador temporal.

### 6.3.1 Processo de solução via Newton-Raphson

Dos desenvolvimentos precedentes, pode-se escrever a minimização do funcional (4.64) para o equilíbrio dinâmico em um instante qualquer, em uma forma matricial como:

$$\mathcal{F} = \frac{\partial U_e}{\partial x} - \mathbf{F} + \mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{C}\dot{x} = 0, \quad (6.44)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças externas,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento e  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa, constante na formulação desenvolvida.

No instante  $t_{S+1}$ , tem-se o equilíbrio dado por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{S+1} - \mathbf{F}_{S+1} + \mathbf{M}\ddot{x}_{S+1} + \mathbf{C}\dot{x}_{S+1} = 0. \quad (6.45)$$

Substituindo-se as aproximações do método de Newmark  $\beta$  (6.29) e (6.30) em (6.45), resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_{S+1}) &= \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{S+1} \\ &= \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{S+1} - \mathbf{F}_{S+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} x_{S+1} - \mathbf{M}Q_S + \mathbf{C}R_S + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} x_{S+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C}Q_S = 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

onde os vetores  $Q_S$  e  $R_S$  representam a contribuição dinâmica no passado e são dados por:

$$Q_S = \frac{x_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{x}_S}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_S \quad (6.47)$$

e

$$R_S = \dot{x}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{x}_S. \quad (6.48)$$

Devido ao caráter não linear do equacionamento, é difícil encontrar sua solução exata. Assim, é necessário usar uma estratégia numérica para resolver o problema. Opta-se então por fazer uso do processo de Newton-Raphson dentro do processo de marcha no tempo.

A segunda variação do funcional de energia é dado por:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right|_{S+1} = \nabla \mathcal{F}(x_{S+1}) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} \right|_{S+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (6.49)$$

Uma aproximação de primeira ordem por série de Taylor pode ser escrita como

$$0 = \mathcal{F}(x) \cong \mathcal{F}(x^0) + \nabla \mathcal{F}(x^0) \Delta x. \quad (6.50)$$

O processo de Newton-Raphson em cada passo no tempo se resume a estimar-se um valor por  $x_{S+1}^0$  para posição final  $x_{S+1}$ , normalmente estimada como sendo a posição inicial  $x_{S+1}^0 = x_S$ , e então recorrer-se ao processo iterativo:

$$\nabla \mathcal{F}(x_s^l) \Delta x = -\mathcal{F}(x_s^l) \quad (6.51)$$

$$x_{S+1}^{l+1} = x^l + \Delta x, \quad (6.52)$$

onde  $l$  é o número de interações, levado até que seja atingido o erro mínimo admissível para a

análise.

## 6.4 Exemplos do programa de casca

### 6.4.1 Carga transversal sobre uma viga engastada - Checagem da conservação da energia

Este exemplo adota o elemento de casca não linear proposto para analisar a vibração transversal de uma viga engastada sujeita a um campo inicial de velocidade (ver Fig. 6.5). A intenção é mostrar o comportamento de transferência das energias cinética e de deformação em um corpo deformável. A viga possui módulo de Young  $E = 0,2 \times 10^9$  Pa, massa específica  $\rho_0 = 500 \text{ kg/m}^3$ , comprimento  $L = 1$  m, espessura  $h = 0,01$  m, largura  $b = 0,20$  m e coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ . A velocidade aplicada é proporcional à distância do engaste e possui um valor máximo  $v_0 = 1$  m/s, ver Fig. 6.5. O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,001$  s e a energia total exata do sistema é  $k_0 = 0,16667$  J. Quarenta elementos e 217 nós são empregados na discretização.

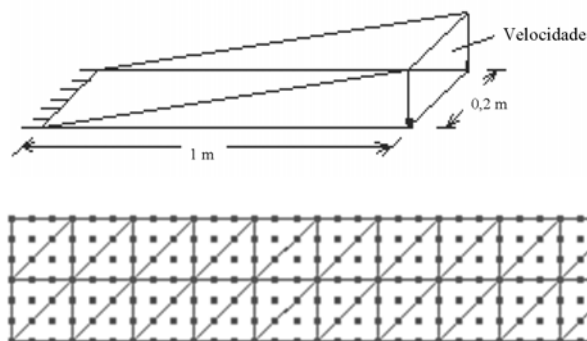


Figura 6.5: Geometria, velocidade inicial e discretização

Na Fig. 6.6, as energias cinéticas, de deformação e total são apresentadas em função do tempo, assim como o deslocamento vertical na borda livre. Como pode-se observar, a energia é completamente conservada para situações deformadas. É importante mencionar que em aplicações não lineares os movimentos verticais e horizontais são acoplados (CODA; PACCOLA, 2009), sendo esta a razão pela qual os picos da análise não se repetem com a mesma forma, também não existe necessariamente um instante para o qual a energia cinética seja nula, como é esperado em uma análise linear.

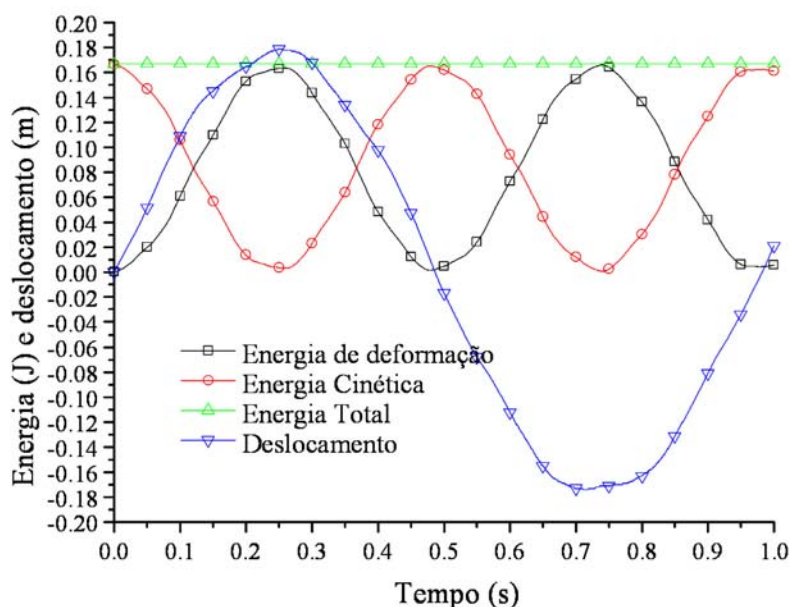


Figura 6.6: Energia e deslocamento no balanço vs. tempo

#### 6.4.2 Casca cilíndrica com *Snap Through* dinâmico

Segundo Argyris et al. (2003), este exemplo é uma casca cilíndrica com *snap through* dinâmico, uma não linearidade severa. Estudos teóricos importantes, relativos às não linearidades severas são apresentados por Breslavsky et al. (2008) e outros por este citados. Este é um *benchmark* típico que tem sido extensivamente usado como um teste para formulações não lineares aplicadas em dinâmica de cascas. Problemas de *snap through* em cascas produzem modos dinâmicos de alta ordem e essa é a razão pela qual é acreditado que esquemas clássicos de integração, tal como o método de Newmark não são adequados para produzir uma solução estável e precisa, e que somente algoritmos com difusão numérica e esquemas com decaimento de energia ou algoritmos que conservem a energia mesmo com variação na matriz de massa podem ser aplicados com um passo de tempo aceitável. Apesar desta crença comum, Coda e Paccola (2009) mostram que usando o presente elemento de casca, é possível obter soluções estáveis e precisas com o integrador de Newmark e com um passo de tempo razoável. Os resultados para este exemplo serão comparados com os resultados para o elemento TRIC e com uma solução obtida pelo programa ABAQUS, ambos apresentados por Argyris et al. (2003).

A geometria da casca cilíndrica é apresentada na Fig. 6.7(a). As duas bordas retas da casca são simplesmente apoiadas, enquanto os dois lados curvos são completamente livres. Uma carga concentrada é aplicada ao nó central da casca. O valor da carga aumenta linearmente de 0 até  $50 \times 10^6$  em um tempo de 0,2, após a carga de  $50 \times 10^6$  é mantida constante. Para evitar



qualquer distorção nos resultados, a estrutura é totalmente discretizada e a malha usada na análise é mostrada na Fig. 6.7(b) e consiste de 32 elementos finitos curvos resultando num total de 169 nós e 1183 graus de liberdade. Os parâmetros de Newmark são  $\beta = 0.25$  e  $\gamma = 0.5$ .

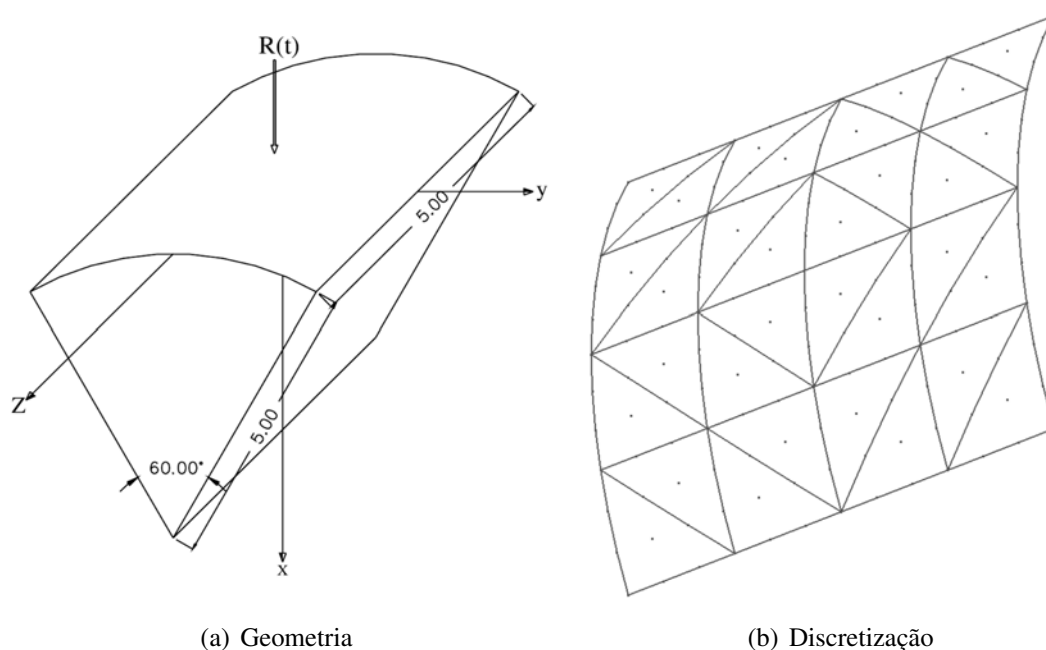


Figura 6.7: Casca cilíndrica - Geometria e discretização

Usando a formulação proposta, varia-se o passo de tempo de  $\Delta t = 0,0625 \times 10^{-3}$  até  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  e não foram encontradas instabilidades para a formulação Lagrangeana total. As propriedades físicas adotadas são  $E = 200 \times 10^9$ ,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 10000$  e espessura  $h = 0,1$

A Fig. 6.8 apresenta os deslocamentos no ápice em função do tempo. Como é possível notar, os resultados convergem para o menor passo de tempo, enquanto para o maior passo, a precisão é perdida, mas a estabilidade é mantida. Os resultados podem ser comparados com os obtidos por Argyris et al. (2003), reproduzidos na Fig. 6.9.

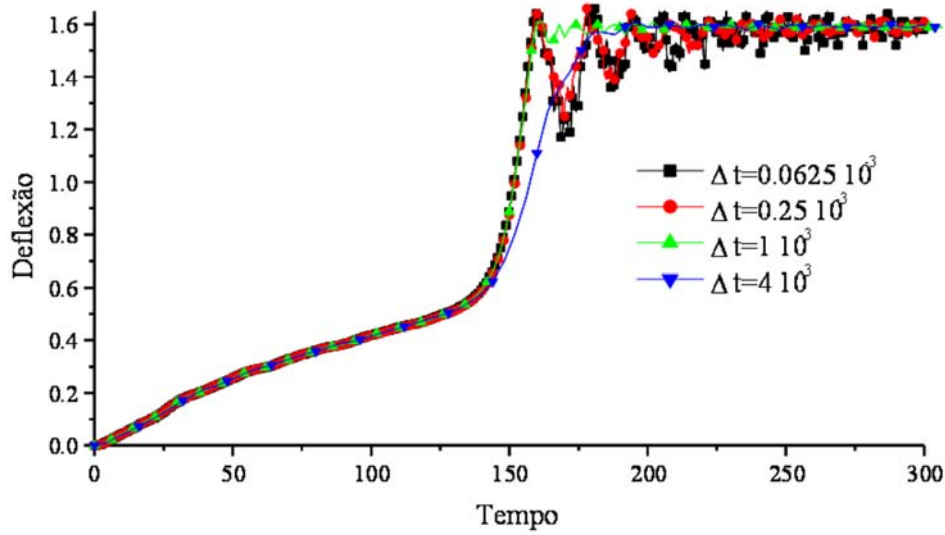


Figura 6.8: Deslocamento no ápice vs. tempo

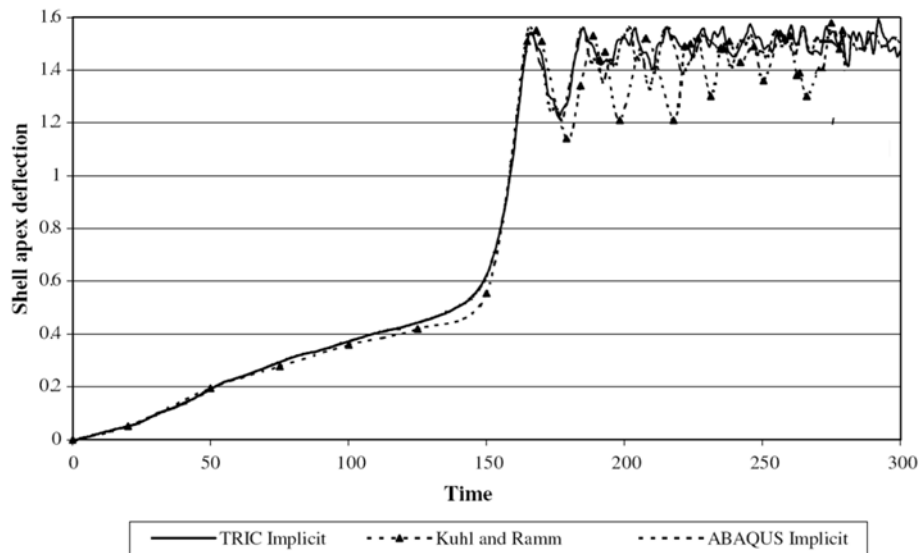


Figura 6.9: Deslocamento no ápice vs. tempo adaptado de Argyris et al. (2003)

## 7 *Acoplamento com fluido em descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária*

Neste trabalho é utilizado o esquema de acoplamento particionado, sendo tal escolha baseada nas vantagens destacadas na literatura, conforme apresentadas na seção 1.2, e baseada em especial no fato de que ao se construir um esquema particionado de acoplamento, pode-se alterar a parte do código referente à análise de dinâmica dos fluidos, mantendo-se a parte referente à dinâmica das estruturas e vice versa, permitindo que inovações em cada uma dessas áreas sejam implementadas separadamente e garantindo a possibilidade de evolução da pesquisa sobre um mesmo código computacional.

### 7.1 **Transferência de forças e velocidades**

As velocidades no contorno do fluido devem ser aplicadas por nó, já a força externa sobre a estrutura pode ser calculada sobre os nós e então interpolada para os pontos de quadratura, ou diretamente sobre os pontos de quadratura. Neste trabalho encontra-se o valor da força devido ao escoamento em cada nó da estrutura e então utiliza-se as funções de forma para interpolar a força nos pontos de quadratura, o que acaba sendo muito mais econômico do que encontrar o valor da força de superfície devido ao escoamento para cada ponto de quadratura.

Seja  $\Gamma_s$  a fronteira fluido/estrutura discretizada em elementos finitos e  $\Omega_s$  o domínio da estrutura discretizado por elementos de casca.

Como se trabalha com malhas diferentes e deseja-se que o acoplamento seja possível sem a necessidade de coincidência dos nós, durante o pré processamento deve-se conhecer para cada nó da estrutura  $k$ , o ponto  $Pf_k$  pertencente ao contorno  $\Gamma_s$  da malha do fluido tal que  $Pf_k$  ocupe a mesma posição que o nó  $k$ , ou seja:

$$\mathbf{x}(Pf_k) = \mathbf{x}(k) \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das coordenadas cartesianas.

Igualmente, para cada nó  $i$  da malha do fluido, situado no contorno  $\Gamma_s$  deve ser conhecido o ponto  $P_{S_i} \in \Omega_s$  tal que:

$$\mathbf{x}(P_{S_i}) = \mathbf{x}(i) \quad (7.2)$$

No entanto, o fato de as duas malhas serem geradas separadamente implica que nós da estrutura possam estar situados ligeiramente fora do contorno do fluido, e também que nós do fluido possam estar ligeiramente fora do domínio discretizado da estrutura de casca. Assim, assume-se que  $P_{f_k}$  seja o ponto pertencente à malha do fluido mais próximo ao nó  $k$ , e que  $P_{S_i}$  seja o ponto pertencente à malha da estrutura mais próximo ao nó  $i$ , como ilustrado na figura 7.1.

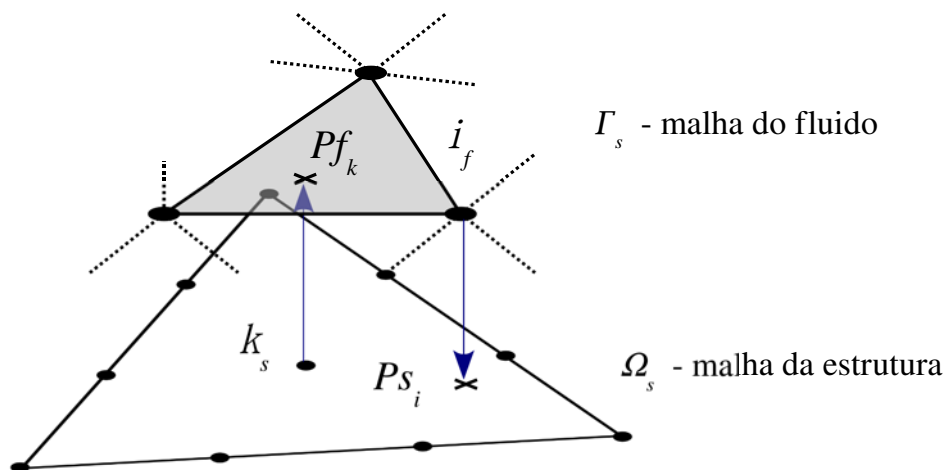


Figura 7.1: Pontos para aplicação de condições de contorno

- Assume-se inicialmente uma aproximação na qual os elementos de casca são considerados planos, definidos pelos nós dos vértices. Então identificam-se os pontos mais próximos a cada nó do contorno da malha do fluido calculando-se a distância entre cada elemento de casca plano e os nós do contorno da malha do fluido, guardando para cada nó  $i$  o vetor das coordenadas locais triangulares e o elemento de casca em que o ponto  $P_{S_i}$  se encontra:

$$\vec{\xi}_i(P_{S_i}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (7.3)$$

- Em seguida, ajusta-se a malha do fluido fazendo com que cada nó  $i$  da malha do fluido assuma a posição do ponto  $S_i$  referente às coordenadas locais  $\vec{\xi}_i(Ps_i) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , porém considerando-se o elemento curvo, ou seja:

$$\mathbf{x}(S_i) = \mathbf{x}(Ps_i) = \sum_{k=1}^{10} (N_k \mathbf{x}_k), \quad (7.4)$$

onde  $k$  são os nós do elemento de casca referente à função de forma  $N_k$  e  $\mathbf{x}_k$  é o vetor das coordenadas cartesianas de  $k$ .

- Por fim, encontra-se para cada nó  $k_s$  da malha estrutural o ponto mais próximo,  $Pf_k$ , pertencente à malha do fluido e guarda-se o vetor das coordenadas locais tetraédricas e o elemento de fluido em que este se encontra:

$$\vec{\xi}_k(Pf_k) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4). \quad (7.5)$$

As condições de Dirichlet do nó  $i$  são obtidas da estrutura, no ponto  $Ps_i$ . O vetor velocidade  $u_s$  da estrutura no ponto  $Ps_i$  é calculado por:

$$\mathbf{u}_s(S_i) = \sum_{k=1}^{10} (N_k \mathbf{u}_{s_k}). \quad (7.6)$$

Para o caso de escoamento viscoso com condição de aderência iguala-se o vetor velocidade do nó  $i$ ,  $\mathbf{u}_f(i)$ , ao vetor velocidade  $\mathbf{u}_s(S_i)$  calculado por (7.6), já para o caso de escoamento em superfície lisa sem aderência, prescreve-se somente a velocidade normal:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s + [(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (7.7)$$

As condições de Neuman do nó  $k$  são obtidas do fluido, no ponto  $Pf_k$ . A atualização das cargas sobre a estrutura no tempo  $t$  consiste em fazer as componentes de carga normais à casca, iguais às componentes da força de superfície do fluido no contorno que o fluido faz fronteira com a estrutura, assim tem-se:

$$q_j(k) = [\tau_{jl} n_l - p n_j]_{Pf_k}. \quad (7.8)$$

onde os índices  $j$  e  $l$  representam a direção cartesiana e  $n$  as componentes do vetor normal ao contorno.

## 7.2 Movimentação dinâmica da malha do domínio fluido

A Formulação ALE permite a imposição de uma velocidade arbitrária para a malha do domínio do fluido. Deve-se então impor uma velocidade que seja compatível com os deslocamentos e velocidades do sólido, de maneira que a distorção da malha seja a mínima possível.

Neste trabalho adotou-se como critério principal para a deformação da malha, que a mesma tenha mínimas alterações na forma (ângulos) dos elementos na região da estrutura (onde em geral requer-se uma discretização bem mais detalhada pois é um lugar susceptível a choques e vorticidade). Assim, a técnica de movimentação deve fazer com que quanto mais próximos à estrutura os nós estiverem situados, esses tenham velocidade mais próxima à da estrutura, tornando o movimento próximo ao de corpo rígido. A medida em que os pontos se afastam da estrutura, os deslocamentos da malha diminuem sendo nulos no contorno fixo.

Um modelo que atende bem a essas características é a equação de Laplace (ver por exemplo Jasak e Tukovic (2007)):

$$\nabla^2 w_i = 0, \quad (7.9)$$

onde  $w_i$  pode ser a velocidade ou o deslocamento da malha do fluido na direção  $i$ . Esta equação pode ser facilmente resolvida usando elementos finitos, sendo aplicado valores de  $w$  em todo o contorno. O mesmo processo pode ser aplicado aos deslocamentos da malha ao invés das velocidades.

Embora os resultados com a equação de Laplace tenham se mostrado eficientes, como pode ser notado no trabalho de Jasak e Tukovic (2007) para se aplicar diretamente ao método dos elementos finitos, existe a necessidade de resolver um sistema a mais, e por isso buscou-se um modelo que produz resultados semelhantes sem essa necessidade.

O método utilizado é semelhante ao utilizado por Teixeira (2001), e consiste na distribuição das velocidades  $w_i^k$  dos pontos  $k$  da malha, na direção do eixo  $i=x, y$  ou  $z$ , variando de acordo com a distância aos pontos no contorno da estrutura, onde  $w_i^k$  assume o valor da velocidade  $u_{S_i}^k$  do ponto da estrutura  $S_k$ , e com a distância aos pontos do contorno fixo, onde a velocidade  $w_i^k$  é nula. Assim, escreve-se:

$$w_i^k = \frac{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} u_{S_j}^j}{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} + \sum_{l=1}^{nf} b_{kl}}, \quad (7.10)$$

onde  $ne$  é o número de nós da estrutura,  $nf$  é o número de nós no contorno fixo  $\Gamma_f$ ,  $a_{kj}$  são os coeficientes de influência dos nós da estrutura  $\Gamma_s$  no ponto  $k$  e  $b_{kl}$  são os coeficientes de

influência dos nós do contorno fixo no ponto  $k$  dados por:

$$a_{kj} = \frac{1}{d_{kj}^{e1}} \quad (7.11)$$

e

$$b_{kl} = \frac{1}{d_{kl}^{e2}}, \quad (7.12)$$

onde  $d_{kj}$  é a distância entre o nó  $k$  e o nó  $j$  (ver figura 7.2) e  $e1$  e  $e2$  são expoentes referentes à influência dos contornos móvel e fixo, arbitrados pelo operador do programa.

O mesmo procedimento pode ser utilizado para calcular os deslocamentos da malha, bastando apenas substituir as componentes de velocidade por componentes de deslocamento.

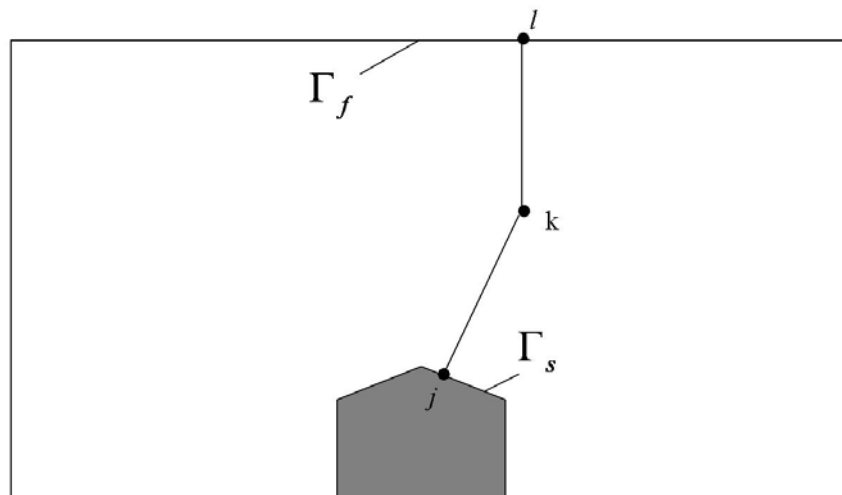


Figura 7.2: Movimentação da malha

Os expoentes  $e1$  e  $e2$  permitem ajustes para que a malha fique com a geometria mais ou menos preservada próximo aos contornos. Neste trabalho foi adotado o valor 4 para tais expoentes.

### 7.3 Processo dinâmico de acoplamento

Como se utiliza um processo implícito para a estrutura e um explícito para o fluido, é interessante que seja permitido o uso de sub-ciclos de tempo entre a resolução da estrutura e do fluido, proporcionando ganhos computacionais.

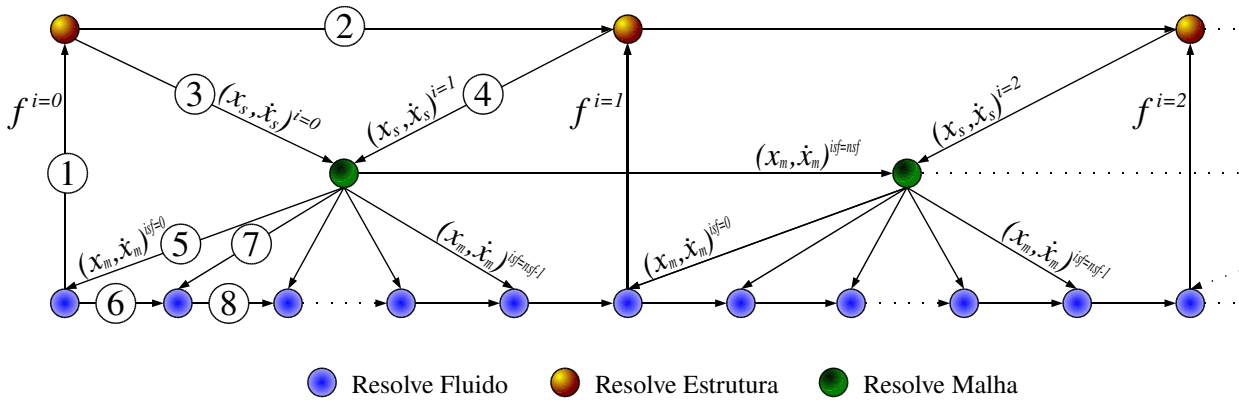


Figura 7.3: Esquema de acoplamento

Desenvolve-se para o acoplamento o algoritmo ilustrado na figura 7.3 e que pode ser resumido nos seguintes passos:

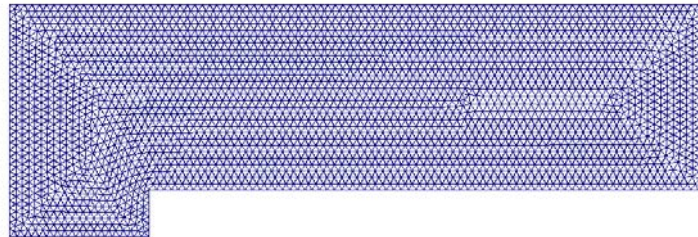
1. Num instante  $t_s = i$ , resolver-se a estrutura com as cargas impostas pelo escoamento e utilizando-se o intervalo de tempo  $\Delta t_s$ , encontrando-se, assim, a velocidade e posições finais no instante  $t_s = i + 1$ .
2. Consideram-se as posições dos nós da malha do fluido variando dentro de cada intervalo  $\Delta t_s$  segundo um polinômio de grau 3. Este polinômio é obtido facilmente, uma vez que se conhece as posições e velocidades da estrutura tanto no instante  $t_s = i$ ,  $x_s(i)$  e  $\dot{x}_s(i)$ , como no instante  $t_s = i + 1$ ,  $x_s(i + 1)$  e  $\dot{x}_s(i + 1)$  e logo determinam-se as velocidades e deslocamentos da malha para os referidos instantes através da equação Eq. (7.10). Assim, sendo  $\Delta t_f = (\Delta t_s)/nsf$  o intervalo de tempo do fluido, com  $nsf$  divisões do intervalo de tempo da estrutura  $\Delta t_s$ , pode-se aproximar com bastante precisão a velocidade da malha do fluido em cada passo de tempo para o fluido (instantes  $t_f = (i - 1)nsf + isf$  com  $isf > 1 \leq nsf$ ).
3. Aplica-se as condições de contorno sobre o fluido e resolve-se o mesmo com um intervalo de tempo  $\Delta t_f$  até que se atinja o instante  $t_f = i * nsf$ , quando as cargas são transferidas para a estrutura e recomeça o processo.



## 7.4 Aplicações do acoplamento ALE

### 7.4.1 Canal com degrau e parede flexível

No primeiro exemplo busca-se verificar qualitativamente o algoritmo, em especial a movimentação da malha. Este exemplo consiste no mesmo problema 5.6.2, porém agora com a parede inferior flexível à frente do degrau e com a malha do fluido um pouco mais refinada, contendo 12720 nós e 56753 elementos conforme apresentado na Fig. 7.4, onde também é apresentada a malha da estrutura, contendo 637 nós e 120 elementos.



(a) malha do fluido



(b) malha da estrutura

Figura 7.4: Malhas para o canal com degrau e parede flexível

O escoamento não perturbado possui velocidade  $u_\infty = 1020$  m/s, massa específica  $\rho_{f\infty} = 2710$  kg/m<sup>3</sup> e velocidade do som  $c_\infty = 340$  m/s. As dimensões do problema são tomadas como sendo as mesmas da Fig. 5.11, porém tomadas em metros.

A parede flexível possui espessura  $e = 0,00135$  m, modulo de Young  $E = 77,28$  GPa e massa específica  $\rho_s = 2710$  kg/m<sup>3</sup>. Os contornos de pressão e os deslocamentos na parede flexível para os instantes 0,002 s, 0,004 s, 0,006 s e 0,01 s são mostrados na Fig. 7.5.

A Fig. 7.6 apresenta a posição no centro da parede flexível em função do tempo.

Os resultados deste exemplo se mostram bastante coerentes, o que indica bom funcionamento da técnica proposta.

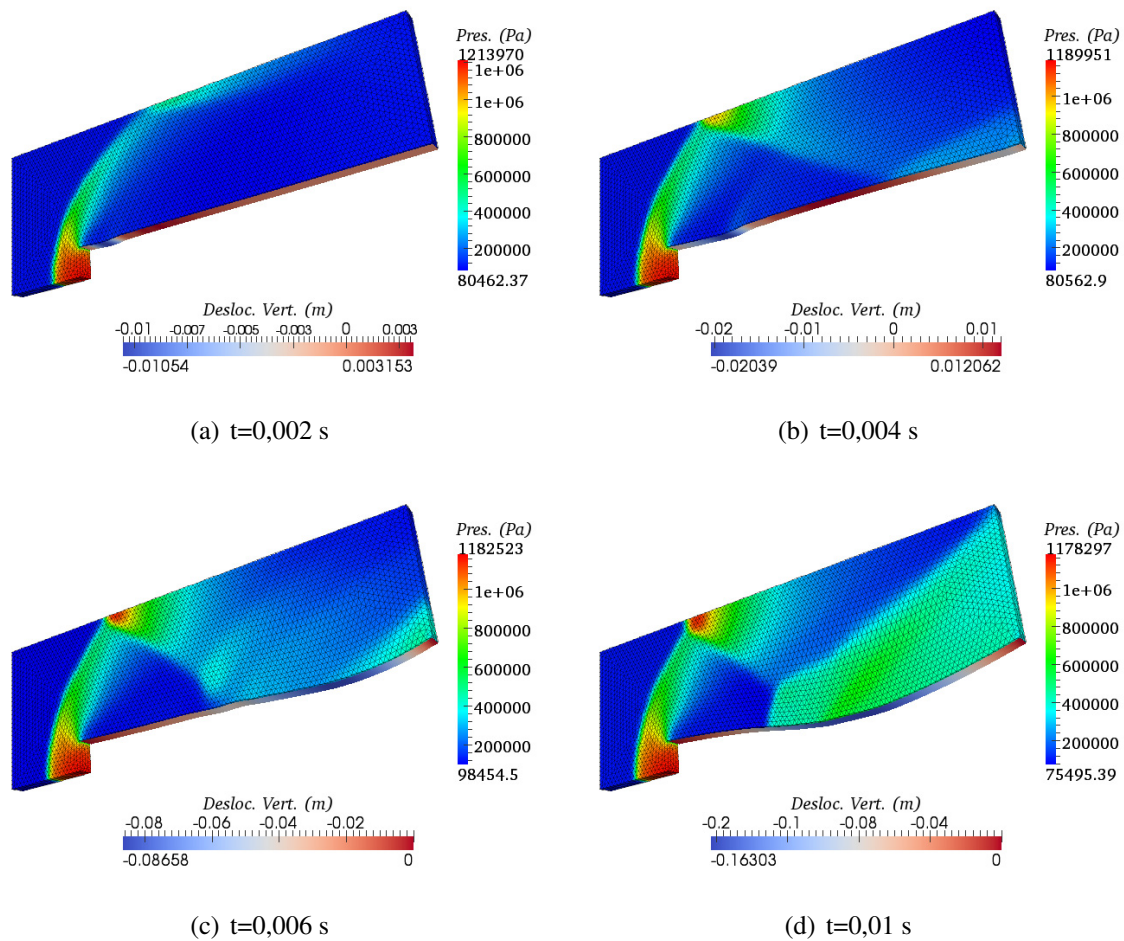


Figura 7.5: Contornos de pressão e deslocamentos sobre o degrau com parede flexível

## 7.4.2 Choque sobre esfera

A interação de uma onda de choque com uma esfera é, de acordo com Tanno et al. (2003), um dos *benchmark* em dinâmica de choques. Este exemplo consiste na simulação de um caso experimental proposto por Tanno et al. (2003), através do qual busca-se verificar a transmissão transiente de forças do fluido para a estrutura.

Nesse exemplo, uma onda de choque se propaga em um tubo de choque com seção de ensaio de seção transversal quadrada de 300 mm x 300 mm e com comprimento de 1000 mm. No meio da seção de ensaio está uma esfera de 80 mm de diâmetro, fixa por um ponto na parte superior.

Devido à falta de dados sobre os materiais empregados no ensaio, despreza-se os efeitos inerciais, ou seja, adota-se matriz de massa nula para a estrutura, e ainda um elevado módulo de elasticidade, a fim de se obter pequenos deslocamentos.

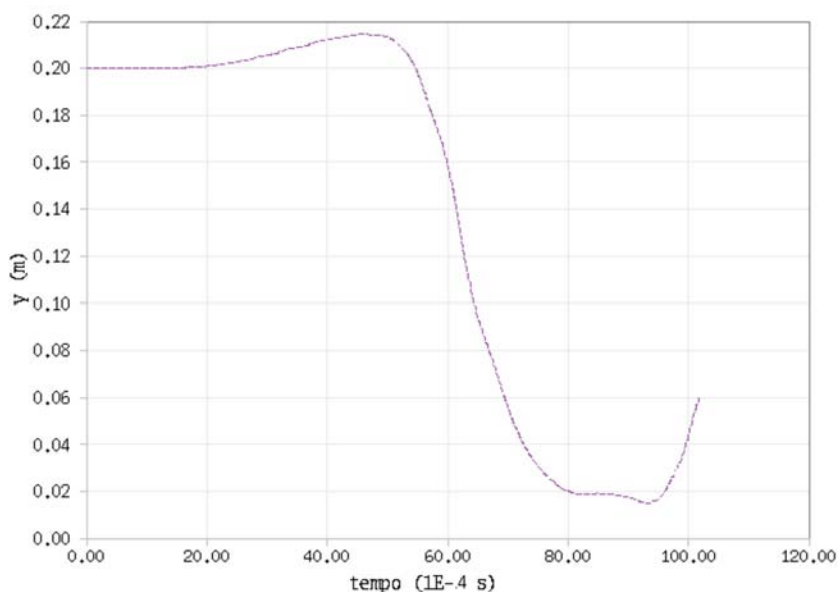


Figura 7.6: Posição vertical em  $x = 1,8$  m vs. tempo

As condições do fluido não perturbado são: pressão  $p_\infty = 101$  kPa, temperatura  $T_\infty = 293$  K e relação entre calor específico a pressão constante e volume constante  $\gamma = 1,4$ . As condições após a onda de choque são: pressão  $p = 159$  kPa, temperatura  $T_\infty = 334$  K, massa específica  $\rho = 1,66$  kg/m<sup>3</sup> e velocidade vertical  $w = 114$  m/s. Estas condições, conforme o modelo de Rankine–Hugoniot produzem uma onda de choque com número de Mach  $M_s = 1,22$ . A onda se propaga a partir do topo da seção de ensaio, onde são prescritas as condições do escoamento após a onda de choque.

A esfera possui espessura de 5,5 mm e é constituída por um material fictício de módulo de Young de  $E = 21 \times 10^6$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e massa específica desprezível.

O problema é considerado com dupla simetria, sendo discretizado apenas 1/4 do domínio. As malhas empregadas para o fluido, contendo 684227 nós e 121221 elementos, e para a estrutura, contendo 823 nós e 168 elementos são mostradas na figura 7.7. O refinamento da malha do fluido foi limitado por questões computacionais.

São feitas duas análises, uma com o fluido modelado pelas equações de Euler (invíscido) e outra com o fluido modelado pelas equações de Navier-Stokes (considerando a viscosidade). A viscosidade do ar é de  $19 \times 10^{-6}$  Pa · s para a temperatura  $T_\infty$ .

As imagens Schlieren do presente trabalho, obtidas pela magnitude do gradiente de massa específica, se mostram bastante semelhantes às imagens experimentais obtidas também por Tanno et al. (2003) (Fig. 7.9), assim como a distribuição de pressão sobre a esfera, a qual

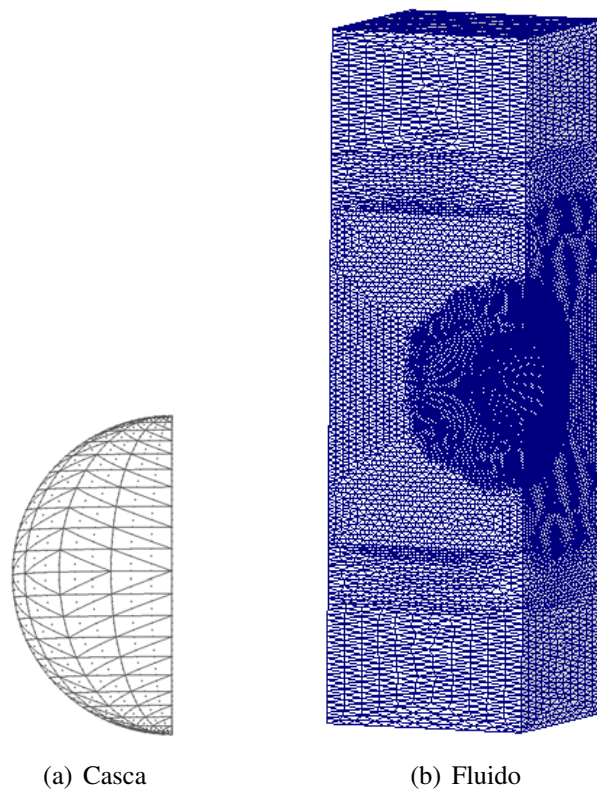


Figura 7.7: Malha para a análise da esfera sob onda de choque

pode ser analisada na Fig. 7.8 onde é expressa graficamente a pressão normalizada em relação a pressão do ponto de estagnação ( $P_s$ ) vs. o ângulo em relação à vertical no instante  $t = 92\mu$  s.

A força de arrasto, medida pela reação no nó da estrutura vinculado, se mostra bastante próxima dos valores medidos experimentalmente por Tanno et al. (2003) após deconvolução como pode ser observado na Fig. 7.10. Nessa figura compara-se os resultados do presente trabalho considerando-se os termos viscosos e impondo-se condição de aderência sobre a esfera e resultados do presente trabalho considerando-se o escoamento invíscido com os resultados experimentais de Tanno et al. (2003) sem tratamento (“cru”) e também após deconvolução.

### 7.4.3 Flutter de painel

Neste exemplo o comportamento de um painel inicialmente plano, engastado em ambas as extremidades e submetido a um escoamento supersônico de ar é analisado. O escoamento é considerado invíscido, sendo que o escoamento não perturbado apresenta massa específica  $\rho_\infty = 0,339 \text{ kg/m}^3$ , pressão  $p_\infty = 28 \text{ KPa}$ , relação entre calor específico à pressão constante e volume constante  $\gamma = 1,4$  e velocidade do som  $c = 340 \text{ m/s}$ . O painel, de comprimento 0,5 m, largura 0,025 m e espessura 1,35 mm, é constituído de um material elástico com massa

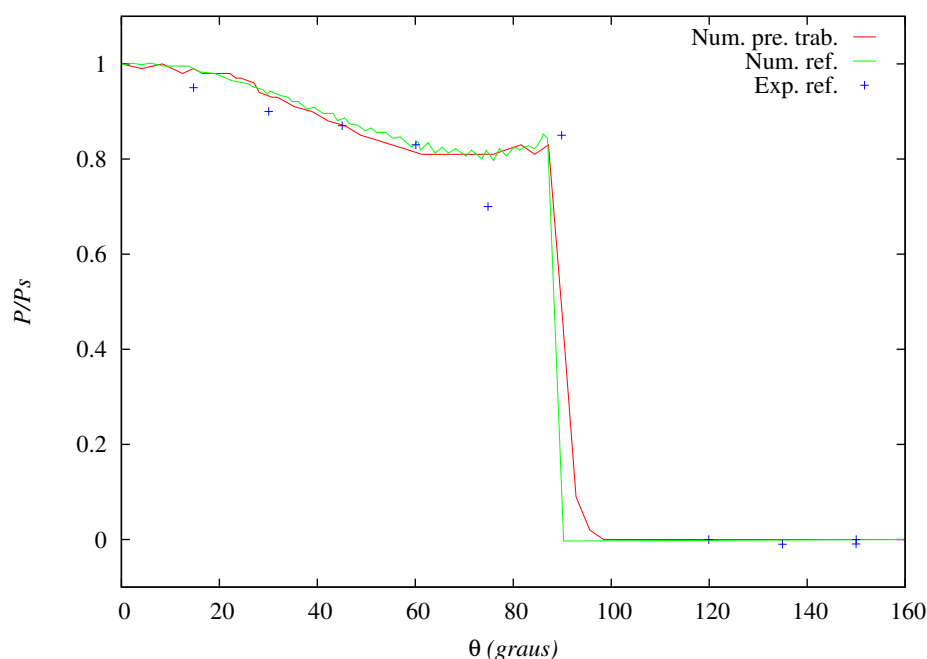


Figura 7.8: Pressão normalizada vs. ângulo

específica  $\rho_s = 2710 \text{ kg/m}^3$ , módulo de Young  $E = 77,28 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$ .

São aplicadas condições de contorno de simetria em relação ao plano  $xy$  em  $z = 0$  e  $z = 0,025\text{m}$  (componente de velocidade  $u_z = 0$  para o fluido e deslocamentos  $\Delta_z = 0$  e componente do vetor generalizado  $g_z = 0$ ).

No instante  $t = 0$  a pressão na face inferior do painel é reduzida em 0,1 %, introduzindo uma perturbação. Tal condição é mantida durante os primeiros 4 ms, quando o valor da pressão na face inferior é reestabelecido a  $p_\infty$ .

O painel é modelado por uma malha com 60 elementos e 484 nós, enquanto o fluido é discretizado em 30294 elementos e 8584 nós (ver Fig. 7.11).

Para verificar o intervalo de tempo adequado para a análise, inicialmente é executada uma análise não linear, com coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  e  $Mach = 2.3$  para se obter maiores deslocamentos. O intervalo de tempo do fluido é fixado em  $\Delta t_f = 10^{-7}\text{s}$ , enquanto varia-se o número de sub-ciclos entre fluido e estrutura. Dos resultados apresentados na Fig. 7.12, conclui-se que um intervalo de tempo para a estrutura  $\Delta t_s = 10^{-6}\text{s}$  deve produzir resultados adequados.

Para que seja possível comparar os resultados com soluções lineares disponíveis na literatura, ainda que limitado a pequenas magnitudes de deslocamentos, o efeito de membrana é

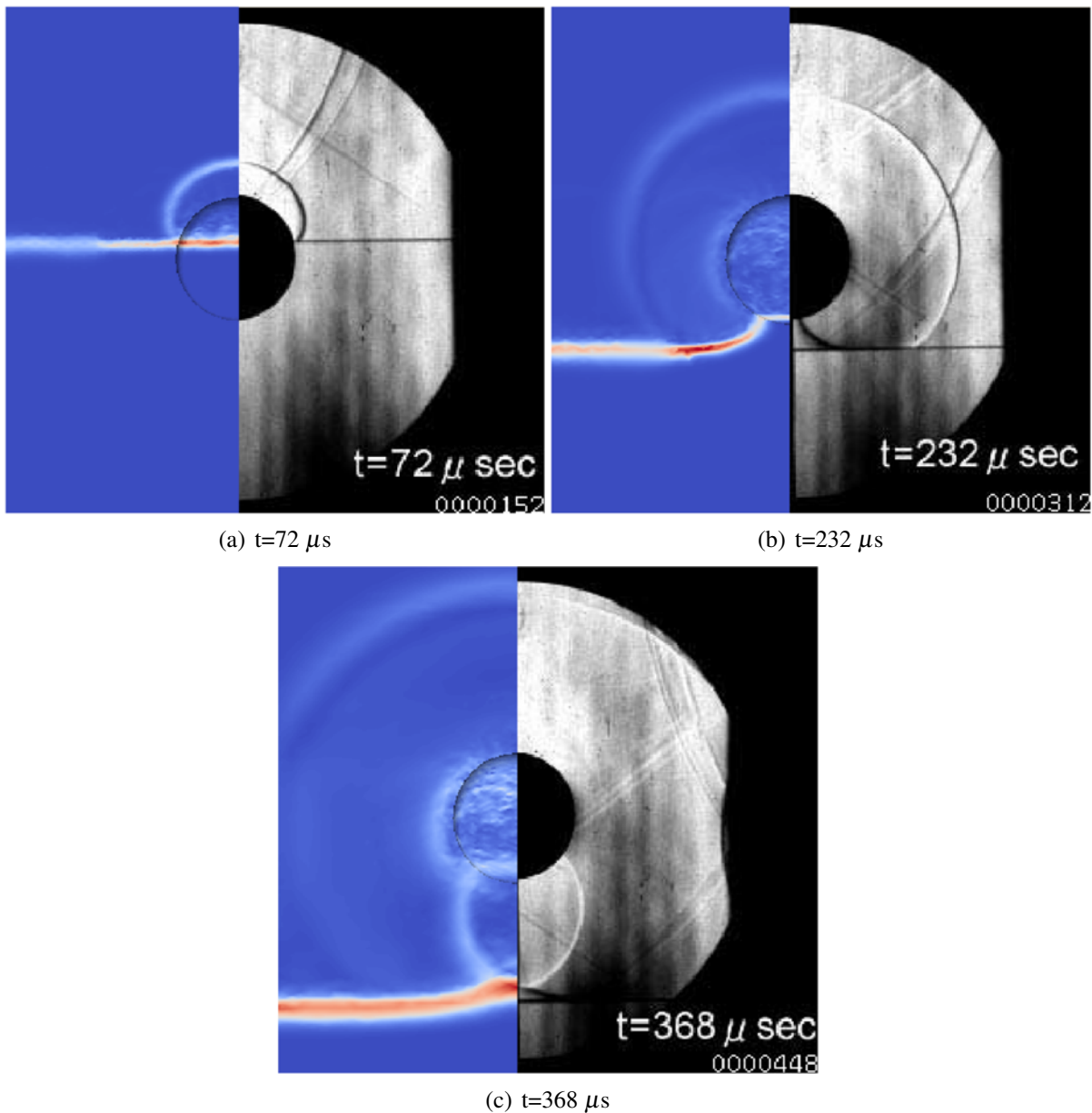


Figura 7.9: Schlieren numérico do presente trabalho - esquerda vs. imagens experimentais por Tanno et al. (2003) - direita

eliminado prescrevendo-se deslocamento horizontal livre na borda final do painel ( $x = 0,5 m$ ).

O comportamento do painel em termos de deslocamentos verticais em  $x = 0.35 m$  para números de *Mach* 1,90, 1,95, 2,00 and 2,05 é mostrado na Fig. 7.13. Desta figura pode-se observar que os resultados para *Mach* = 2.0 se mostram criticamente amortecidos, o que está em concordância com a solução aeroelástica linear usando a teoria de pistão (*Mach* = 2.0 segundo Teixeira e Awruch (2005) e *Mach* = 1.98 segundo Rifai et al. (1999)).

O resultado para *Mach* = 2.00 é comparado com soluções lineares obtidas por outros auto-



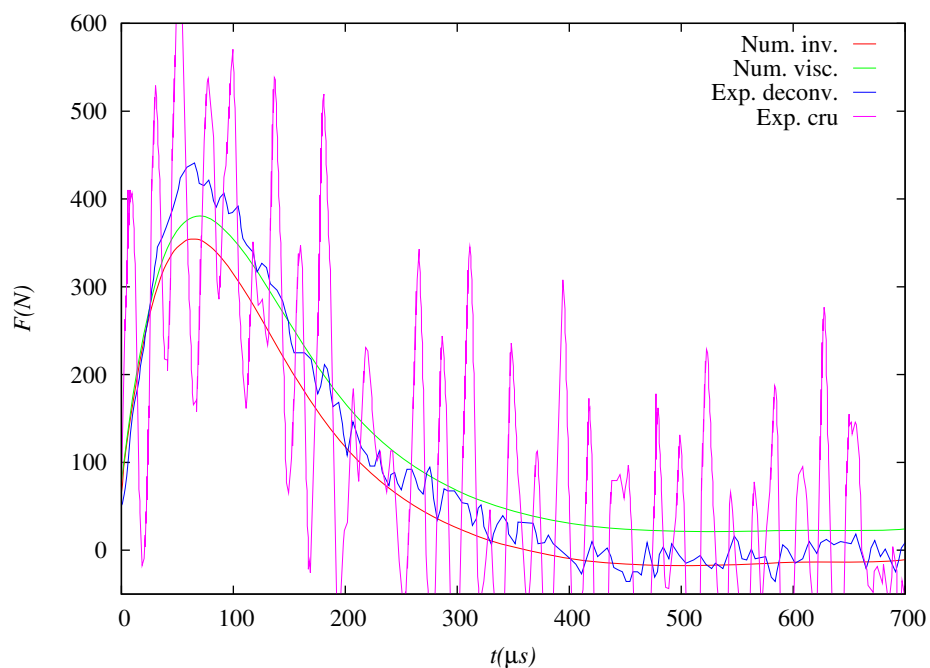
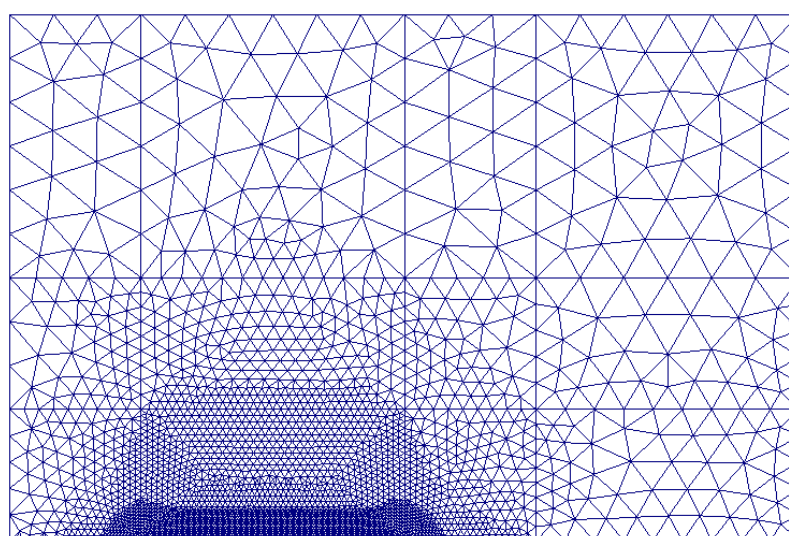


Figura 7.10: Reação no nó vinculado (força de arrasto sobre a esfera) pelo presente trabalho e força de arrasto medida experimentalmente por Tanno et al. (2003)



(a) Malha do fluido - vista xy



(b) Malha da casca - vista xz

Figura 7.11: Discretização do problema de flutter de painel

res (ver Fig. 7.14) mostrando boa concordância.

Uma análise não linear para o painel completamente engastado nas duas extremidades para

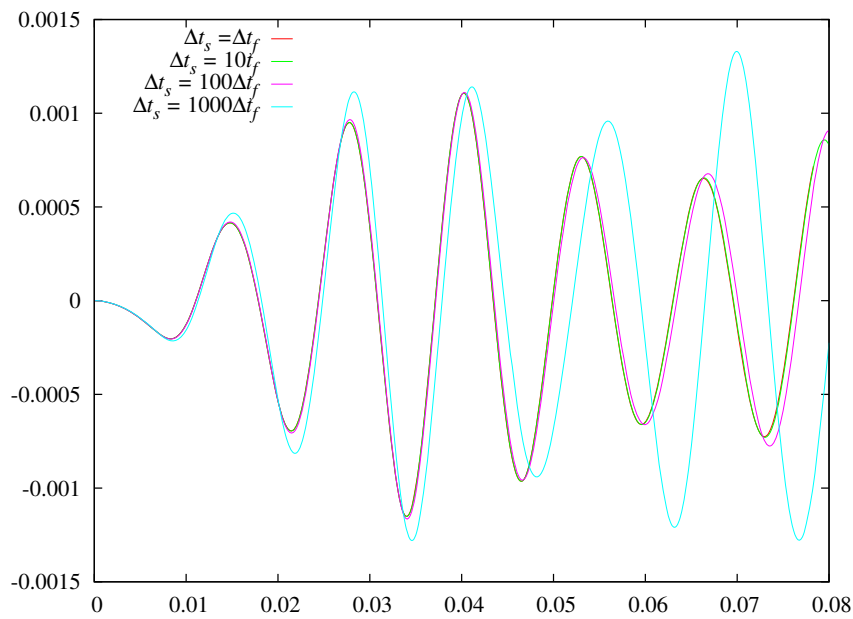


Figura 7.12: Deslocamento vertical vs. tempo em  $x = 0,35m$  considerando  $v = 0,0$  e  $Mach = 2,3$

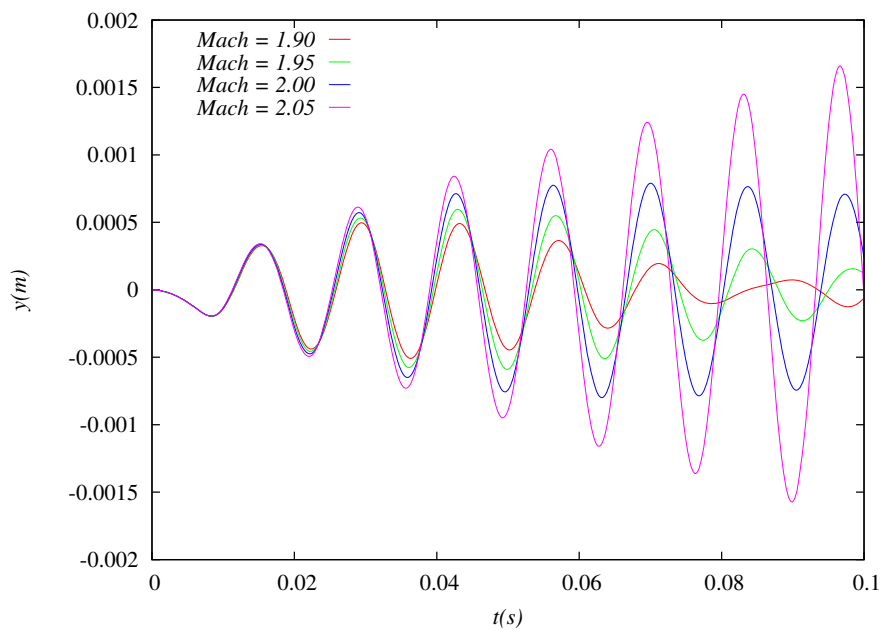


Figura 7.13: Deslocamento vertical em  $x = 0,35$  para diferentes números de  $Mach$

$Mach = 2.30$  é comparada com uma análise empregando as condições de contorno anteriores e com os resultados obtidos por Teixeira e Awruch (2005) (Fig. 7.15) e comparada na Fig. 7.16 com a solução não linear obtida por Rifai et al. (1999) e com uma solução obtida pela formulação proposta considerando  $\Delta t_s$  550 vezes maior.



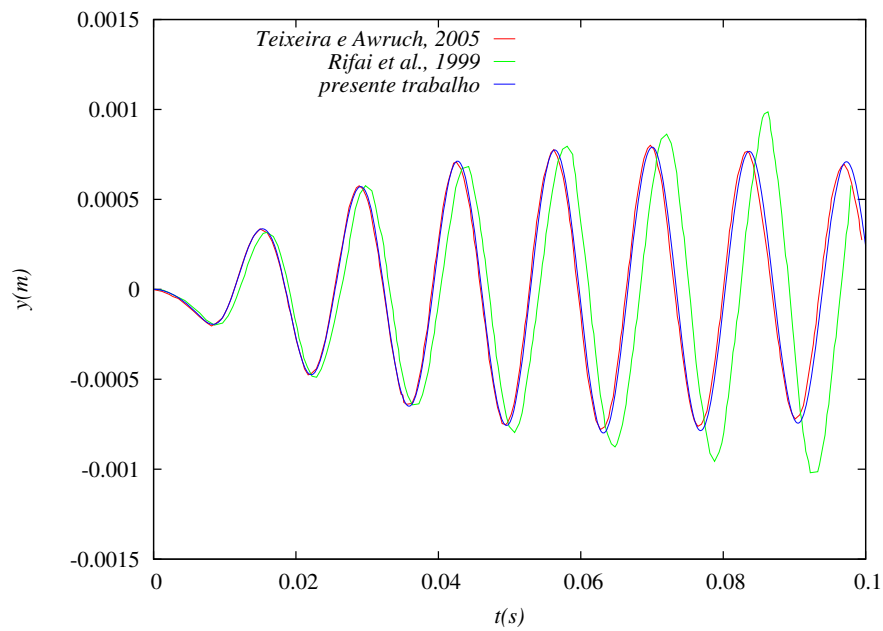


Figura 7.14: Deslocamento vertical vs. tempo em  $x = 0,35$  para  $Mach = 2.0$  - comparação com outros trabalhos

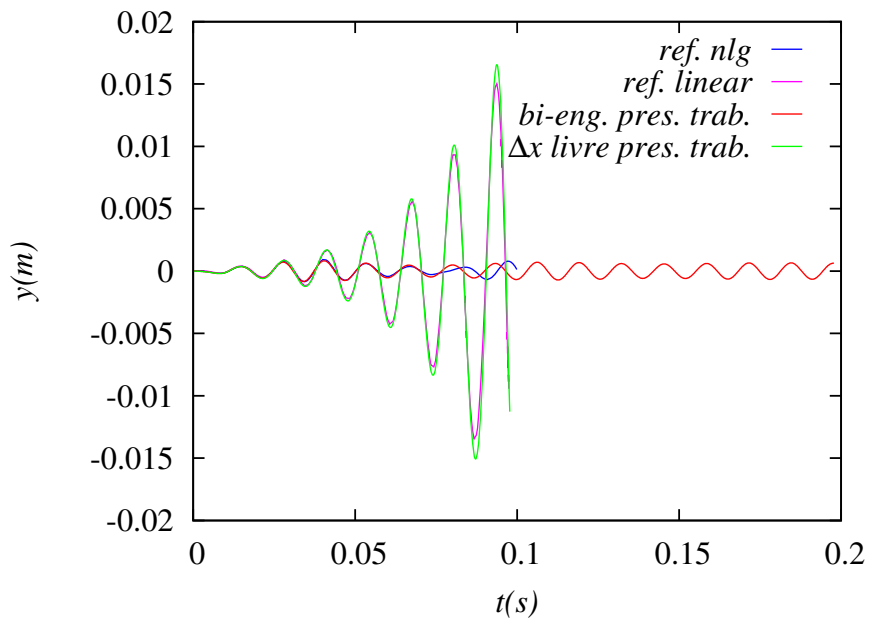


Figura 7.15: Escoamento a  $Mach 2,3$  - comparações do deslocamento vertical vs. tempo em  $x = 0,35$  com outros trabalhos e diferentes condições de vínculo

Pode-se observar na Fig. 7.15 que na análise não linear, o efeito de membrana leva a estrutura a apresentar ciclo limite de oscilações ao invés de apresentar uma amplitude continuamente aumentada, isso pode ser observado também no diagrama de fase mostrado da Fig. 7.17.

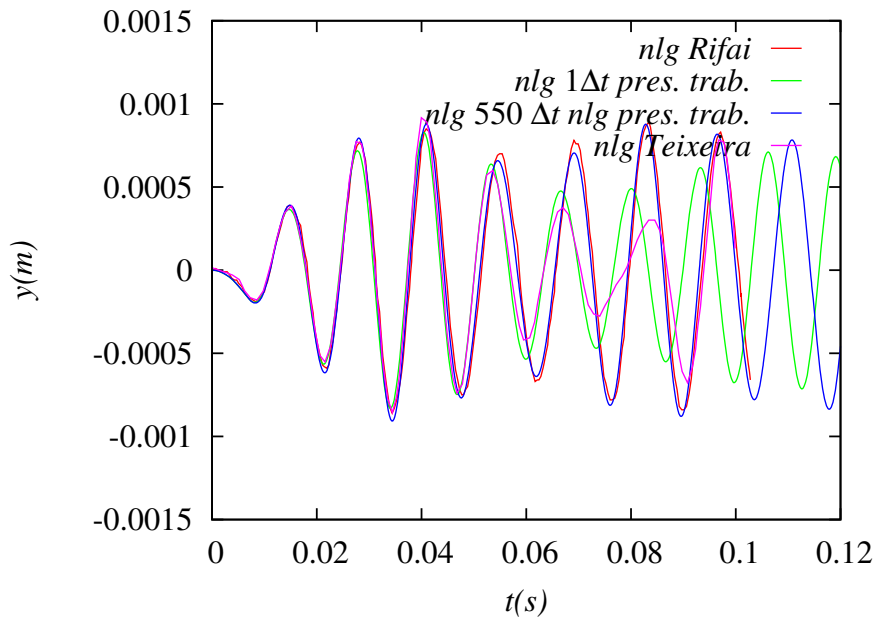


Figura 7.16: Escoamento a  $Mach 2,3$  - comparações do deslocamento vertical vs. tempo em  $x = 0,35$  em análise não linear geométrica com Rifai et al. (1999) e com Teixeira e Awruch (2005)

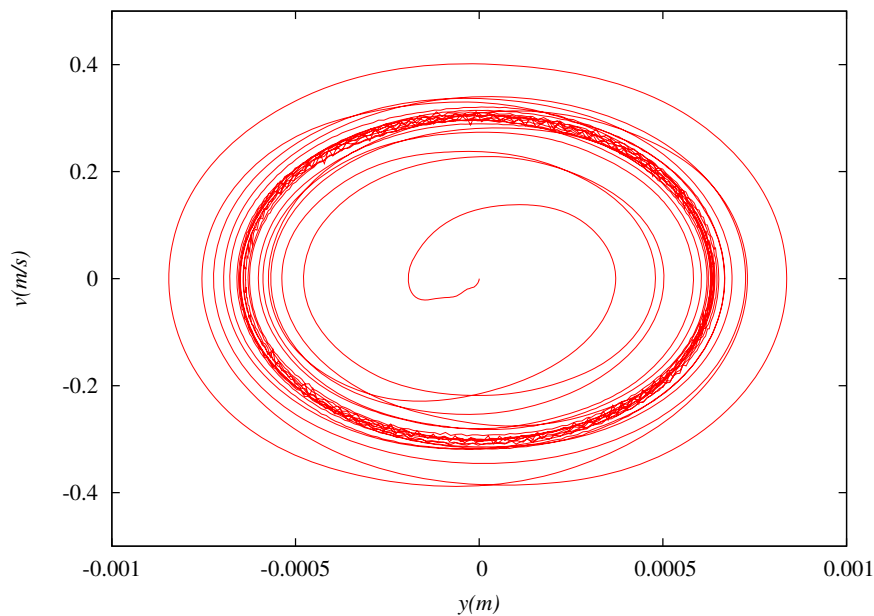


Figura 7.17: Diagrama de fase para os deslocamentos verticais na posição  $x = 0,35m$  e  $Mach = 2,3$

#### 7.4.4 Choque sobre placa vertical

Esse exemplo compara um caso experimental, desenvolvido pelo laboratório de pesquisas do *Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels* - IUSTI (GIORDANO et al.,

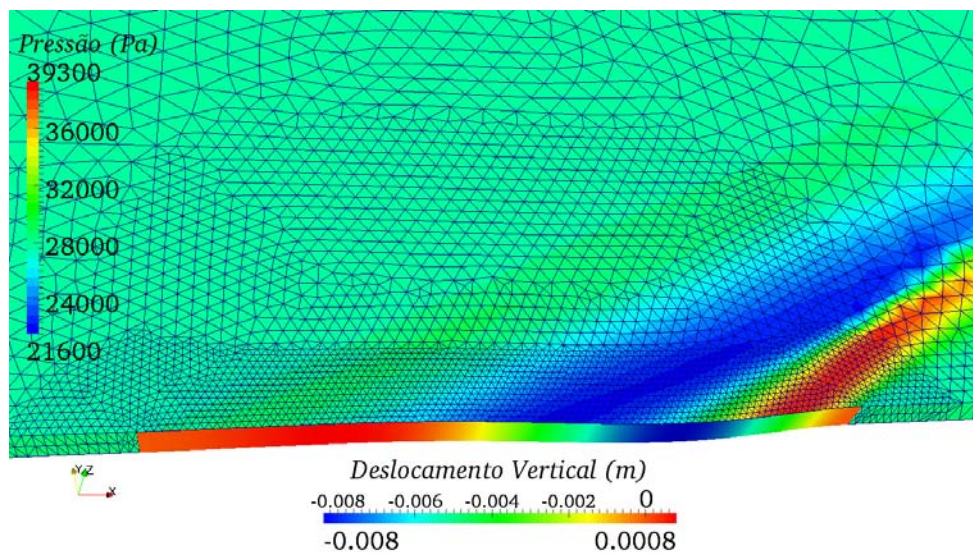
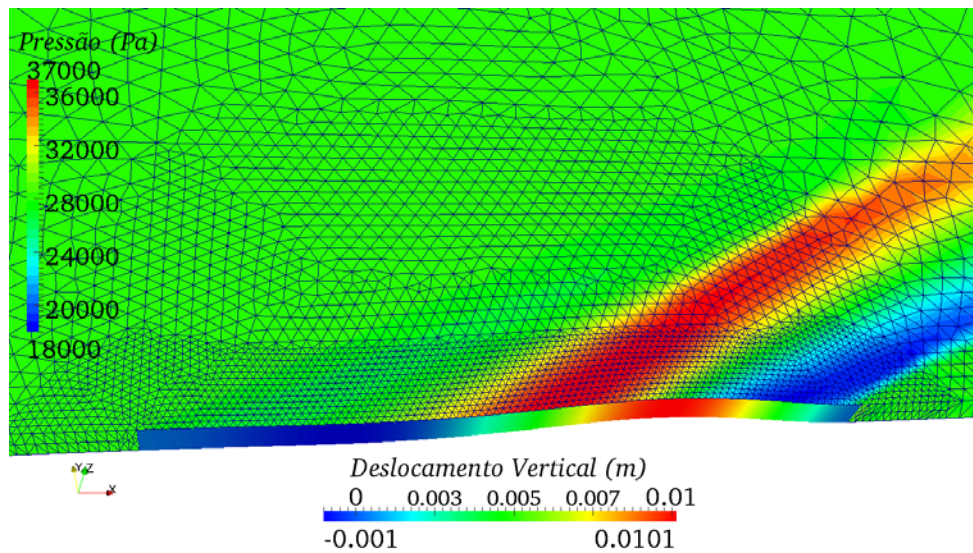
(a)  $t = 0.074 \text{ s}$ (b)  $t = 0.0805 \text{ s}$ 

Figura 7.18: Distribuição de pressão e deslocamentos na estrutura para  $Mach = 2,3$  - escala 1 : 1

2005) com os resultados computacionais obtidos pelo modelo numérico proposto. O experimento consiste na análise de um painel flexível imerso em um tubo de choque e submetido a uma onda de choque. O esquema experimental é apresentada na Fig. 7.20. O painel é fixo em uma base que pode ser considerada rígida, e o choque se desloca da esquerda para a direita.

A simulação acoplada é realizada considerando um painel elástico linear com um módulo de Young  $E = 220 \text{ GPa}$  e densidade  $\rho_s = 7600 \text{ kg/m}^3$  com altura de 50 mm, largura de 2,5 mm e espessura de 1 mm. Considerando a curta duração da análise experimental, a turbulência é negligenciada. O ar encontra-se inicialmente em condições de atmosfera padrão ( $p_\infty =$

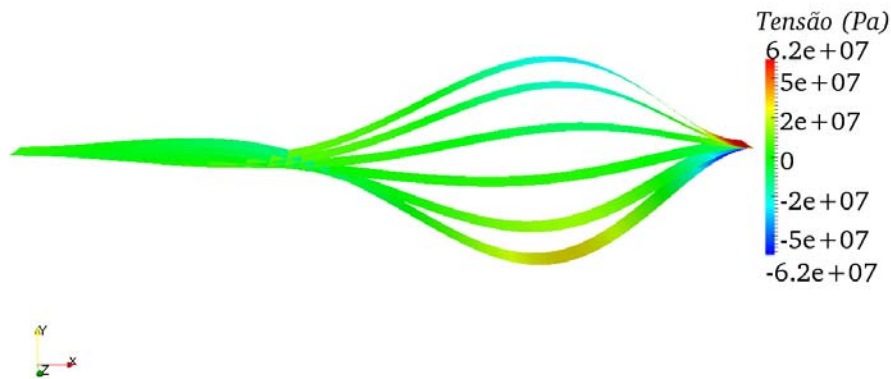


Figura 7.19: Distribuição de tensões normais na direção do eixo da placa, na face inferior, para a placa deformada no intervalo de 0,055 – 0,06s - escala 10 : 1

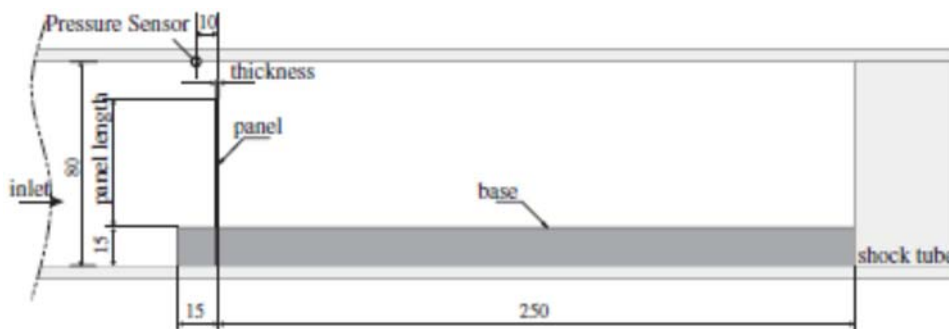


Figura 7.20: Painel elástico em um tubo de choque - esquema experimental (adaptado de Giordano et al. (2005))

105 kPa and  $T_{\infty} = 293\text{K}$ ), e a onda de choque é produzida aplicando-se condições de contorno de entrada obtidas através das condições de Rankine–Hugoniot para um número de *Mach* da onda de choque  $M_s = 1,2$ .

O painel é dividido em 40 elementos e 244 nós, enquanto o fluido é discretizado em 72945 elementos e 20617 nós. O detalhe da malha do fluido próximo da placa bem como a discretização da estrutura, são apresentados na Fig. 7.21.

A captura do campo de escoamento é qualitativamente analisada na Fig. 7.22 através de comparação de imagens numéricas do tipo Schlieren, obtidas pela magnitude do gradiente de massa específica, com imagens ombrosópicas experimentais extraídas de Giordano et al. (2005), mostrando boa concordância.

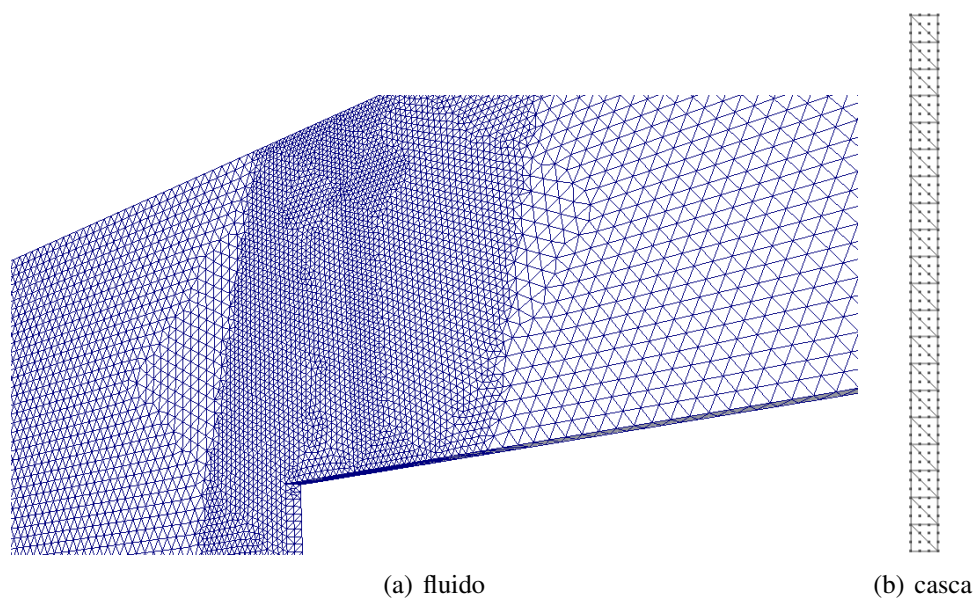


Figura 7.21: Discretização para o problema da placa submetida a choque

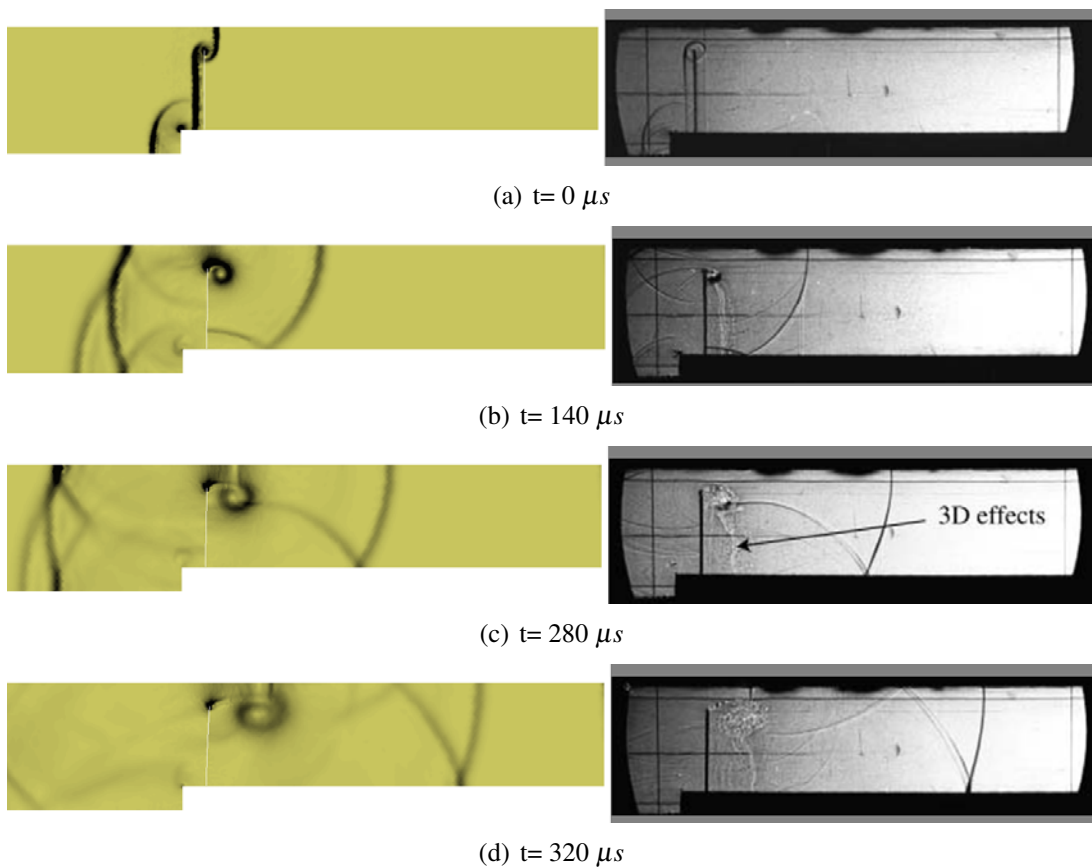


Figura 7.22: Schlieren numérico vs. imagens experimentais obtidas por Giordano et al. (2005) - primeira parte



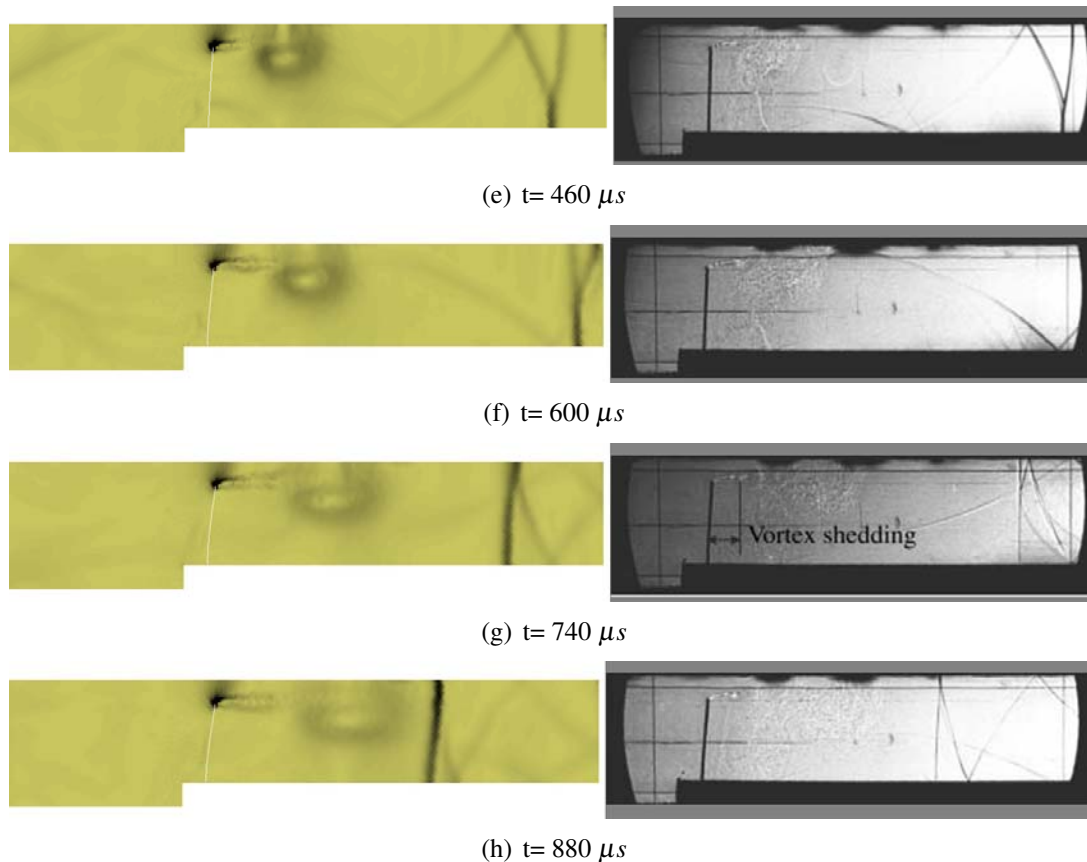


Figura 7.22: Schlieren numérico vs. imagens experimentais obtidas por Giordano et al. (2005)  
- continuação

As distribuições de pressão no fluido e de deslocamentos no painel durante o instante  $t = 140 \mu s$  é apresentada na Fig. 7.23.

Uma avaliação quantitativa é apresentada na Fig. 7.24 pela comparação do deslocamento horizontal no topo do painel com resultados numéricos obtidos por Giordano et al. (2005), e na Fig. 7.25 através da comparação entre a pressão no ponto indicado na Fig. 7.20 obtida pelo presente trabalho e experimentalmente e numericamente segundo Giordano et al. (2005). Observa-se novamente boa concordância entre os resultados.

#### 7.4.5 Invólucro de reator submetido à explosão

Este exemplo é importante por verificar qualitativamente o desempenho do método proposto na análise de estruturas submetidas a explosões e consiste na simulação de uma explosão hipotética de gás contido em um invólucro de reator com a mesma geometria usada por Casadei e Halleux (1995) (ver Fig. 7.26).

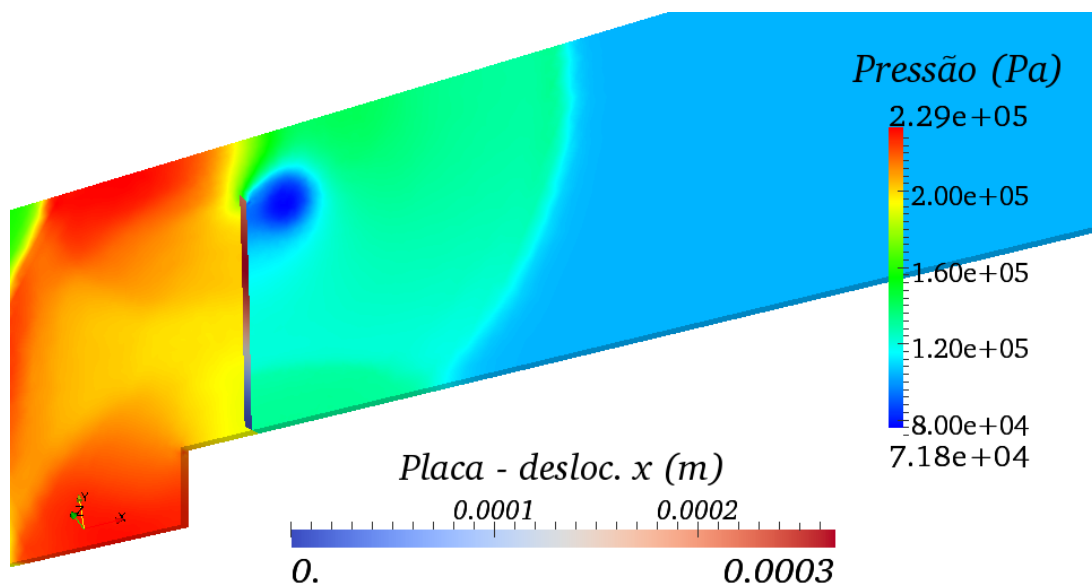


Figura 7.23: Distribuição de pressão e deslocamento no instante  $t=140 \mu s$

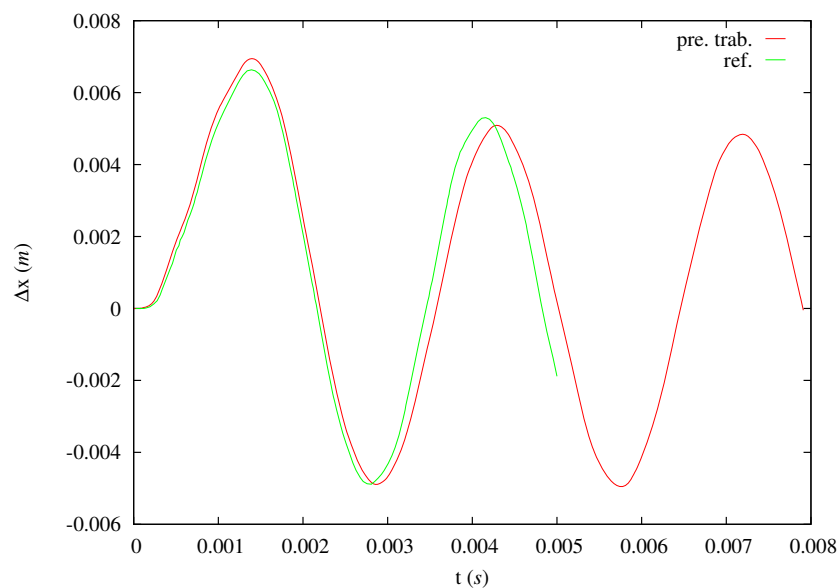


Figura 7.24: Deslocamento no topo da placa vs. tempo - comparação com Giordano et al. (2005)

A parte inferior da estrutura é bastante espessa, assim é modelada como um contorno rígido. O invólucro está inicialmente cheio de ar com massa específica  $\rho_f = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , razão entre calor específico à pressão constante e volume constante  $\gamma = 1,4$ , pressão  $p = 10^5 \text{ Pa}$  e velocidade de som  $c = 341,57 \text{ m/s}$ . As propriedades da estrutura são: módulo de Young  $E = 21 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e massa específica  $\rho_s = 2500 \text{ kg/m}^3$ . Apesar de ser um problema com pequenos deslocamentos, o efeito de membrana se faz presente acoplado com o efeito de

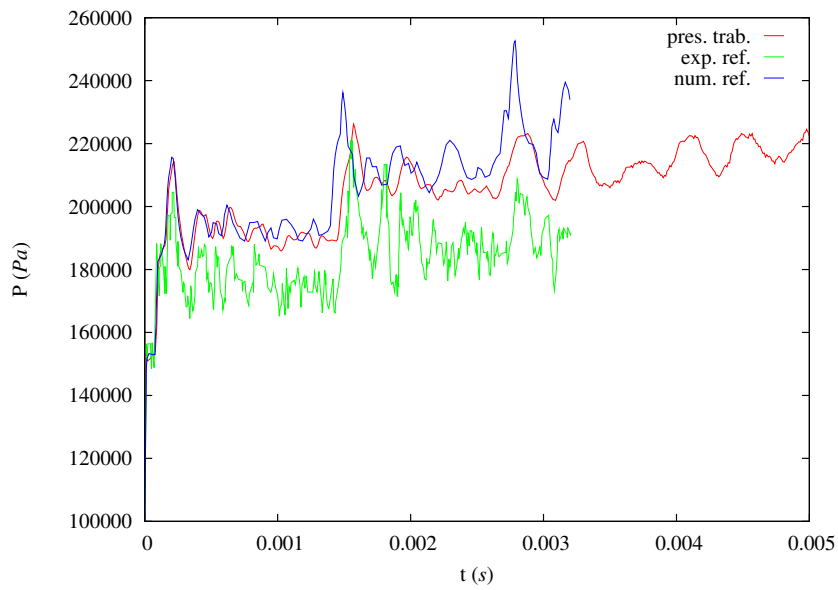


Figura 7.25: Pressão no topo do canal à 10 mm antes da posição da placa - comparação com Giordano et al. (2005)

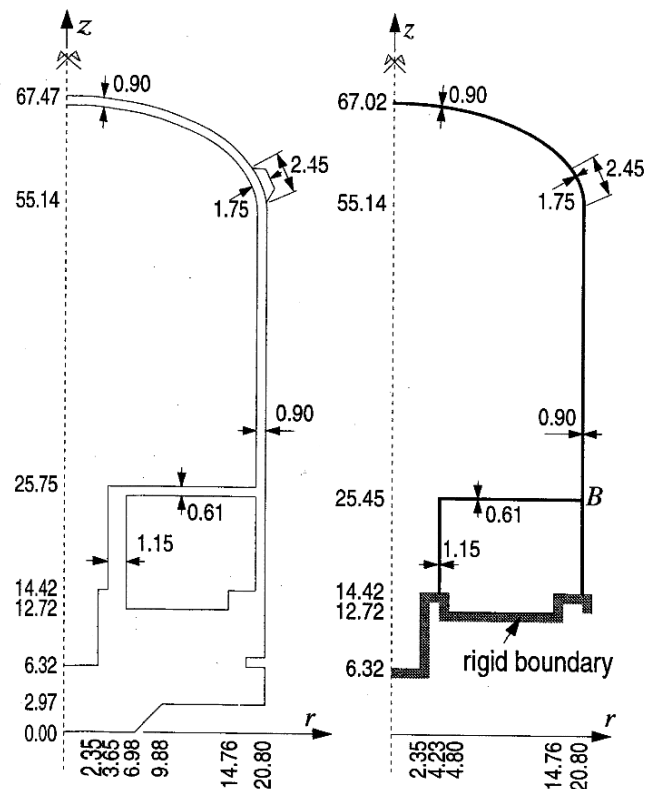


Figura 7.26: Geometria do reator adaptada de Casadei e Halleux (1995)



flexão, sendo importante o emprego de uma análise não linear geométrica.

Como a parte inferior onde ocorre a explosão é bastante rígida, desprezam-se os efeitos sobre a mesma, de forma que o problema possa ser simulado simplesmente considerando-se que no instante inicial ( $t = 0$ ) a parte da estrutura com coordenadas  $z < 14,42$  m contém um gás sob pressão  $p_{exp} = 5692,7$  kPa e com massa específica  $\rho_{exp} = 21,527$  kg/m<sup>3</sup> e pressão , que gera uma onda de choque, a qual se propaga pela estrutura.

A estrutura do reator é discretizada em 2323 nós e 487 elementos, e o fluido em 23585 nós e 125470 elementos conforme apresentado na Fig. 7.27.

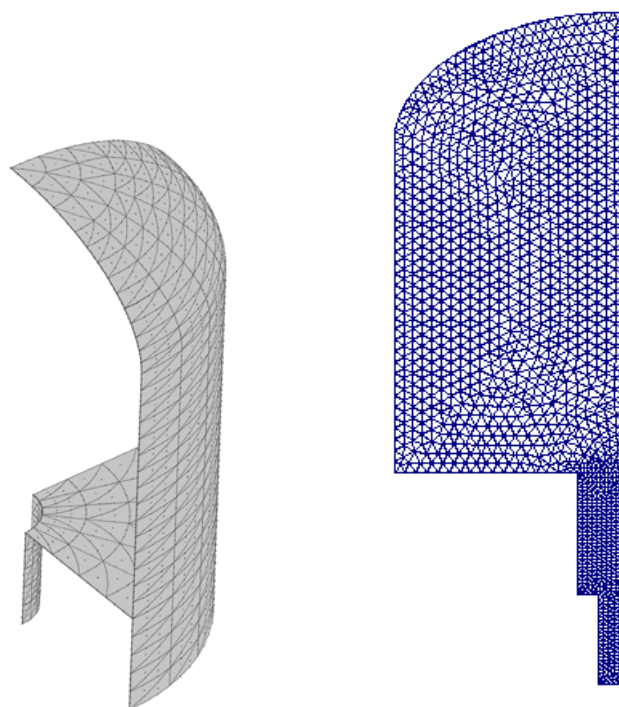


Figura 7.27: Discretização do reator

A propagação de pressão é mostrada na 7.28, onde também é reproduzida a solução obtida por Soria e Casadei (1997) em simulação bi-dimensional considerando escoamento axi-simétrico. Observa-se a semelhança entre os dois resultados, mesmo empregando algoritmos, elementos e malhas totalmente diferentes.

Na figura 7.29 são apresentados os vetores de velocidade para os instantes 0,05 e 0,11 s, onde observa-se mais uma vez semelhança com os resultados de Soria e Casadei (1997).

O deslocamento vertical no topo da estrutura e o deslocamento radial em  $z = 41,3$  m são mostrados na Fig. 7.30.

Por fim, na Fig. 7.31 apresenta-se o módulo do deslocamento sobre a estrutura deformada em escala ampliada, em 10 diferentes instantes.

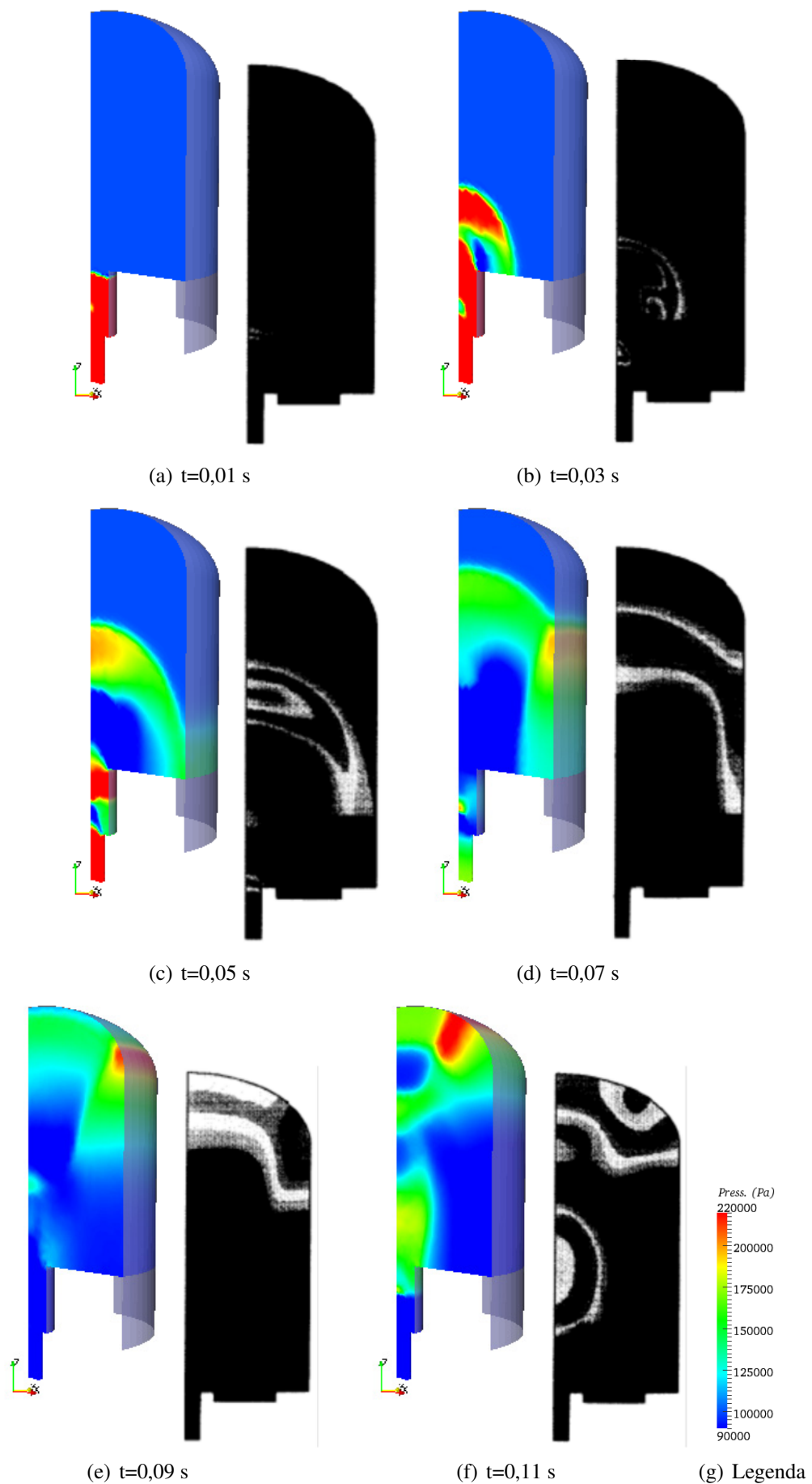


Figura 7.28: Distribuição de pressão: presente trabalho à esquerda e Soria e Casadei (1997) à direita

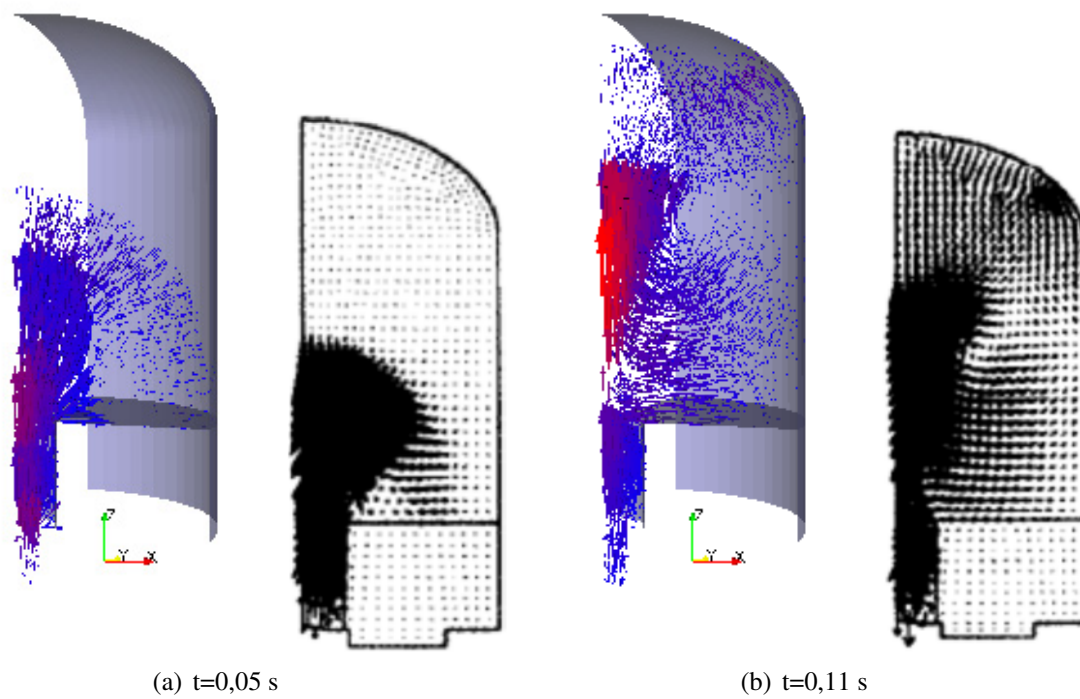
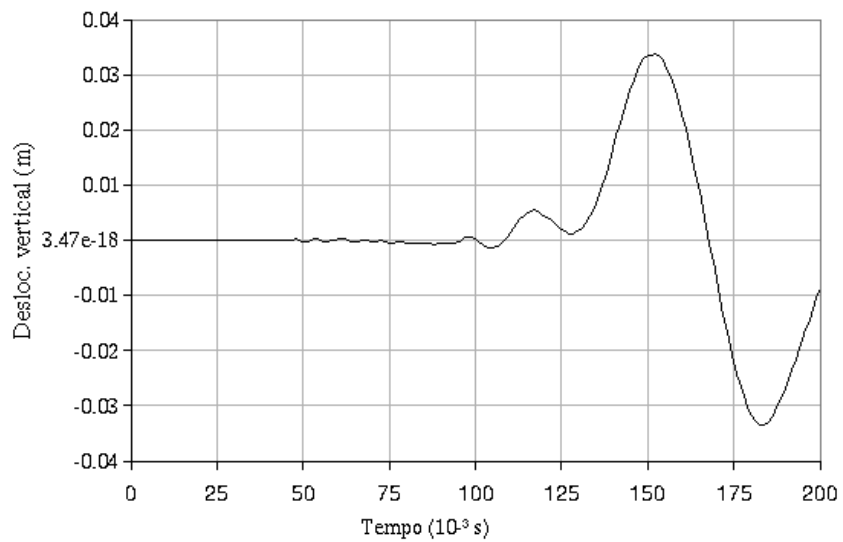
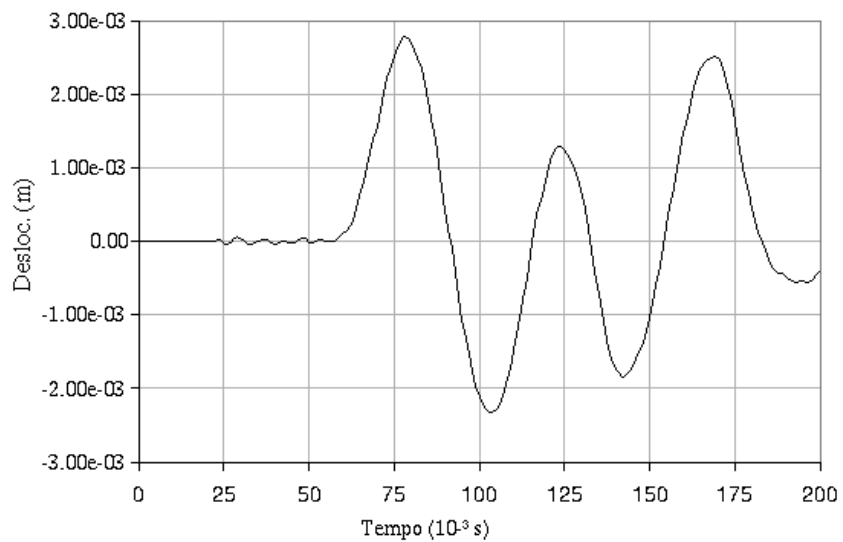


Figura 7.29: Vetores de velocidade: presente trabalho à esquerda e Soria e Casadei (1997) à direita



(a) Topo

(b) Parede  $z = 41,3m$ Figura 7.30: Deslocamento vertical no topo e radial na parede em  $z = 41,3 m$

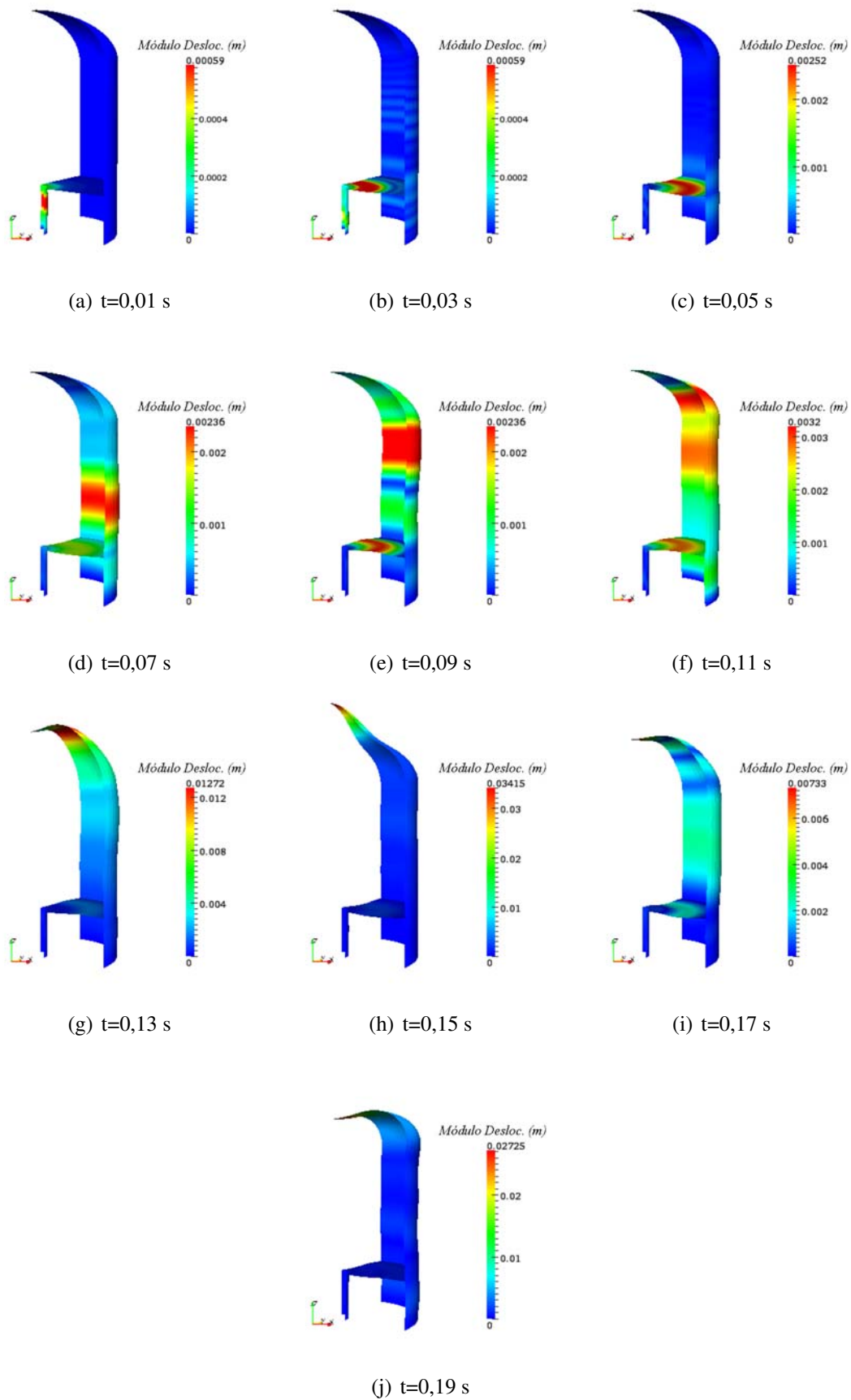


Figura 7.31: Reator deformado

## 8 *Acoplamento imerso*

O uso da descrição ALE para as equações de Navier-Stokes juntamente com alguma técnica de movimentação da malha é uma metodologia capaz de modelar muitos problemas de interação fluido-estrutura conforme apresentado nos capítulos anteriores. Entretanto, alguns problemas com deslocamentos em larga escala, tais como desdobramento de para-quedas ou airbags, requerem também o emprego contínuo de alguma técnica de reconstrução da malha se a descrição ALE é empregada, o que encarece a solução, especialmente em problemas tridimensionais.

Alguns autores propuseram alguns métodos para possibilitar um acoplamento Euleriano-Lagrangeano considerando contorno imerso em uma malha estruturada, sendo que a maioria desses métodos são desenvolvidos no contexto das diferenças finitas (CIRAK; RADOVITZKY, 2005; HABBAL, 2009; ARIENTI P. HUNG; SHEPHERD, 2008).

A técnica originalmente proposta aqui é baseada no método do escoamento fantasma (FED-KIW et al., 1999), adaptada para ser aplicada em elementos finitos com malha não estruturada. Esta técnica acopla a casca Lagrangeana com o fluido Euleriano considerando que o contorno gerado pela casca move-se dentro de um bloco de malha não estruturada de elementos de fluido. As leis de conservação e continuidade na interface fluido estrutura são impostas aplicando condições de contorno adequadas para o fluido e para a estrutura no início de cada passo de tempo.

A posição da casca é rastreada sobre a malha do fluido por meio das curvas de nível de uma função distância assinalada do contorno (*Level Sets*). Uma vez identificado o posicionamento da casca, as condições de contorno de Dirichlet para o fluido são aplicadas por meio da imposição de um escoamento fantasma sobre os nós imediatamente fora do contorno da casca. Ao mesmo tempo emprega-se um limitador de inclinação das velocidades o qual é construído com base na função distância assinalada. Esse limitador também muda os valores de velocidade nos nós internos muito próximos do contorno, evitando problemas com estabilidade quando a maior parte do elemento estiver situada fora do domínio do fluido.

## 8.1 Representação implícita do contorno

Antes da discussão sobre a prescrição das condições de contorno imersas, faz-se necessário um estudo sobre a representação do domínio físico imerso em uma malha não estruturada.

O método proposto requer a identificação de todos os elementos de fluido próximos ao contorno da estrutura ( $\Gamma_s$ ) e se esses se encontram dentro ou fora do domínio físico do fluido ( $\Omega_f$ ). Para tal, um procedimento computacionalmente eficiente consiste em usar uma função distância assinalada  $SD$  tal que:

$$SD(x, \Gamma) = \begin{cases} \text{distância}(x, \Gamma) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Gamma \\ -\text{distância}(x, \Gamma) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.1)$$

Uma representação discreta da função distância assinalada pode ser obtida fazendo a combinação linear das funções de forma multiplicadas pelos valores da distância assinalada calculadas sobre os respectivos nós  $SD_I$ .

$$SD = \sum N_I SD_I \quad (8.2)$$

Nota-se que as funções de forma  $N_I$  não necessitam conformar com o contorno físico, uma vez que são apenas usadas para interpolar um campo escalar  $SD$ . A curva de nível 0 (*Level-Set* 0) da função distância assinalada resultante descreve a forma do corpo imerso na malha.

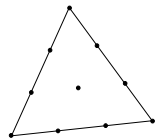
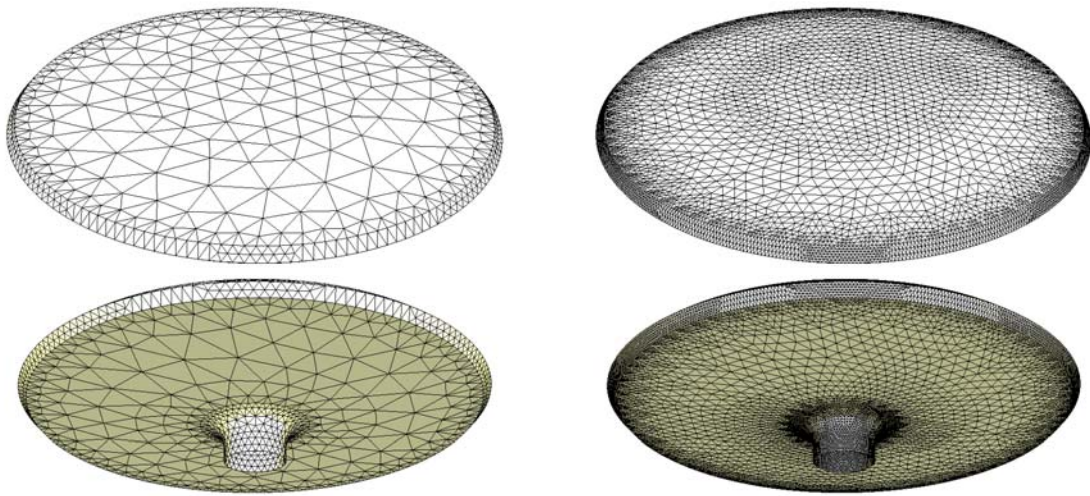
Em contraste com a representação paramétrica usual do contorno, onde as faces ou segmentos da malha se adaptam ao contorno, as representações usando *Level-Sets* são mais adequadas para problemas com grandes deformações e mudanças na topologia (CIRAK; RADOVITZKY, 2005; SANCHES et al., 2009).

A forma mais simples de se determinar a função distância assinalada para um corpo definido por uma malha de elementos triangulares imersa em uma malha tridimensional consiste em, a cada passo no tempo, calcular para cada nó  $k$  pertencente à malha do fluido, a distância do mesmo a cada elemento da malha da estrutura e tomar o mínimo valor. O sinal é calculado com base no vetor normal à superfície da casca.

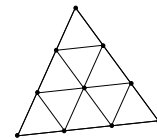
Para uma malha de elementos triangulares curvos de alta ordem, como os empregados neste trabalho, fica difícil calcular uma função distância. Por essa razão, uma malha para a representação do domínio do fluido é obtida pela divisão de cada elemento de casca em 9 ele-



mentos triangulares com aproximação linear, como mostrado na figura 8.1.



(a) Malha da estrutura



(b) Malha para representação do contorno do fluido

Figura 8.1: Representação do contorno da estrutura para o domínio fluido

Embora não tenham sido empregados no presente acoplamento, atualmente existem algoritmos eficientes para calcular a função distância assinalada para um corpo cuja superfície seja representada parametricamente em uma malha de elementos planos (corpo 3D) ou elementos de linha (corpo 2D), imersa em uma malha 3D ou 2D, tais como o *Closest Point Transform* (CPT) (MAUCH, 2003), que possibilitam otimização do programa em trabalhos futuros.

Após definir a forma da estrutura através da função distância assinalada, faz-se necessário identificar cada elemento cortado pela estrutura para então impor as condições de contorno. Assim, os elementos são classificados como elementos *físicos*, elementos *fictícios* ou elementos de *contorno*.

Para tal, calcula-se para cada elemento do fluido  $\Omega_{ef}$  o mínimo e o máximo valor da função distância assinalada  $\min SD(\Omega_{ef})$  e  $\max SD(\Omega_{ef})$ , então a classificação é feita como (ver Fig. 8.2):

- elemento físico:  $\min SD(\Omega_e) > 0$
- elemento fictício:  $\max SD(\Omega_e) \leq 0$

- elemento de contorno: nem um elemento físico e nem um elemento fictício

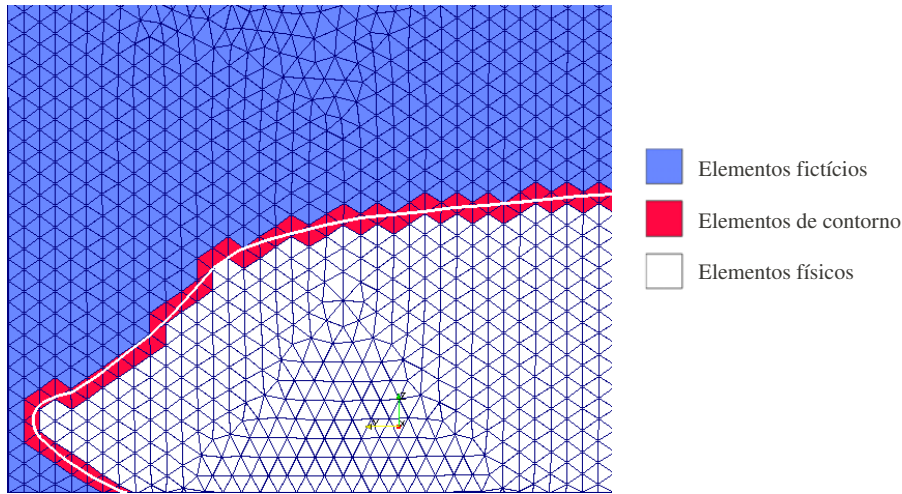


Figura 8.2: Classificação dos elementos

Essa classificação é única e baseada na função distância assinalada. O propósito de tal classificação dos elementos é identificar onde os parâmetros nodais do fluido devem ser modificados para que as condições de Dirichlet sejam propriamente impostas sobre a posição do contorno.

Para esse mesmo propósito, todos os nós da malha do fluido são classificados como *ativos* ou *inativos*. Um nó  $k$  é ativo se  $SD(k) > 0$  ou se  $k$  pertence a algum elemento de fluido de contorno (no segundo caso será aplicado um fluxo fantasma que deverá impor as condições de contorno sobre a casca). Caso contrário o nó  $k$  é classificado como inativo.

Essa classificação de elementos e nós é feita a cada passo de tempo, sendo que os nós inativos e os elementos fictícios são desativados da análise.

## 8.2 Condições de contorno de Dirichlet para o fluido

Para cada nó  $k$  da malha do fluido, determina-se o ponto  $l$  tal que esse seja o ponto pertencente à malha da casca mais próximo de  $k$ . Guarda-se para cada nó  $k$  as coordenadas cartesianas de  $l$ , o elemento de casca  $\Omega_{se}$  que contém  $l$  e as coordenadas adimensionais  $(\xi_1, \xi_2)$  de  $l$  no elemento de casca.

Os nós ativos fora do domínio físico (com  $SD < 0$ ) necessitam ser povoados. Para tal, cada nó ativo  $i$  com  $SD(i) < 0$  é projetado sobre o elemento físico mais próximo, determinando-se

um ponto  $m$  de onde os valores de densidade, energia específica e quantidade de movimento específica são linearmente extrapolados para  $k$  da seguinte forma:

$$\phi_k = \phi_m + (\nabla\phi_m)^T \mathbf{d} \quad (8.3)$$

onde  $\phi$  representa uma grandeza escalar a ser extrapolada e  $\mathbf{d}$  é o vetor que vai do ponto  $m$  até o ponto  $i$ .

Uma forma de prescrever a velocidade sobre a posição do contorno é alterar os valores nodais das componentes de velocidade dos nós ativos com distância assinalada  $SD < 0$ , de forma que o valor das componentes de velocidade interpoladas sobre o contorno seja alterado tornando-se compatível com o movimento da casca. Isto equivale a prescrever um escoamento *fantasma* na região fora do domínio. No entanto este procedimento pode implicar em valores muito elevados de velocidade à medida que a distância do nó ativo externo ao contorno se aproxima do tamanho do elemento.

Para evitar esse problema e ainda manter a velocidade prescrita corretamente sobre o contorno deve-se alterar também os valores nodais das componentes de velocidade dos nós internos muito próximos ao contorno. Assim, modifica-se os valores nodais de velocidade para todos os nós ativos internos dentro de uma faixa de largura  $\delta$  partindo do contorno, de acordo com:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f + \left(1 - \frac{SD}{\delta}\right) [(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (8.4)$$

para escoamento invíscido, ou de acordo com:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f + \left(1 - \frac{SD}{\delta}\right) [\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f] \quad (8.5)$$

para escoamento viscoso, onde  $\mathbf{u}_f$  é o vetor nodal de velocidade do fluido,  $\mathbf{u}_s$  é o vetor nodal de velocidade da casca no ponto mais próximo ao nó do fluido. Este procedimento é ilustrado para um caso unidimensional através da Fig. 8.3.

O termo  $\left(1 - \frac{SD}{\delta}\right)$  limita a inclinação da velocidade na direção normal ao contorno impedindo que seja necessário aplicar aos nós ativos externos valores de velocidade tendendo ao infinito à medida em que tais nós se aproximam da casca, no entanto, da mesma forma que o aumento do tamanho dos elementos pode deixar o problema mais rígido a largura  $\delta$  também pode introduzir uma rigidez artificial ao problema. Entretanto, adotando-se uma faixa de largura  $\delta$  igual ao tamanho do elemento, essa rigidez artificial é idêntica à naturalmente produzida por uma malha de mesmo tamanho de elementos, adaptada ao contorno.

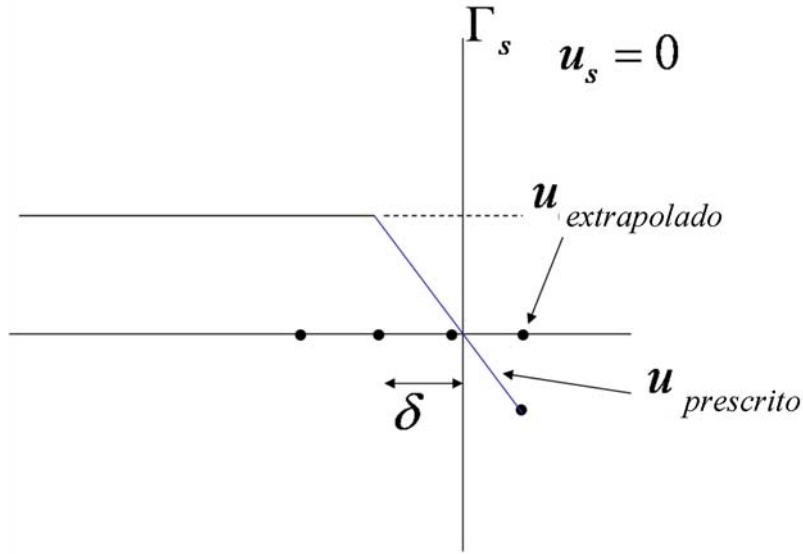


Figura 8.3: Imposição de condição de contorno imersa

### 8.2.1 Condições de contorno de Neumann para a casca

Sejam os nós da casca determinados por  $k$ , tomando vantagem das funções de forma do fluido, o tensor das tensões pode ser determinado diretamente sobre a posição de cada nó de casca  $k$  ou ainda diretamente sobre os pontos de quadratura. Com respeito aos eixos Cartesianos, as cargas para a estrutura são dadas por:

$$q(k)_j = [-\tau_{jl}(Pf(k))n_l - p(Pf(k))n_j], \quad (8.6)$$

onde os índices  $j$  e  $l$  representam a direção cartesiana,  $n_l$  é a componente  $l$  do vetor normal à  $\Gamma_s$ ,  $p$  é a pressão,  $\tau_{jl}$  é a componente  $jl$  de tensão distorcional e  $Pf(k)$  é o ponto imerso na malha do fluido que ocupa a mesma posição do nó  $k$ .

## 8.3 Exemplos numéricos

### 8.3.1 Tubo inflável

Para que seja possível comparar o procedimento proposto neste capítulo como o procedimento baseado na descrição ALE (capítulo 7), propõe-se um problema consistindo em um tubo elástico com comprimento  $L = 0,7$  m ao longo do eixo  $x$ , diâmetro  $D = 0,12$  m e espessura  $e = 0,0025$ , com todos os nós de coordenadas  $x \leq 0,05$  m ou  $x \geq 0,65$  m completamente

engastados.

O tubo contém inicialmente um gás ideal em repouso com densidade  $\rho_f = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , pressão  $p = 99 \text{ kPa}$  e relação entre calor específico à pressão constante e a volume constante  $\gamma = 1,4$ . Pela esquerda do tubo entra um gás ideal com densidade  $\rho_{fi} = 2 \text{ kg/m}^3$  e pressão  $p_{fi} = 200 \text{ kPa}$ , produzindo uma onda de choque. No lado direito e ao longo das paredes do tubo, são aplicadas condições de parede lisa. Essa condição é mantida constante até o instante  $t = 0,0025 \text{ s}$ , quando a entrada é fechada e a condição de parede lisa é aplicada sobre todo o contorno.

O tubo é discretizado por 760 elementos e 3468 nós (Fig. 8.4(b)) e é composto por um material elástico com módulo de Young's modulus  $E = 10 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poison  $\nu = 0,4$  e massa específica  $\rho_s = 470 \text{ kg/m}^3$ .

A malha do fluido na qual o tubo é imerso é mostrada na Fig. 8.4(a), com 211585 elementos e 38147 nós. Para a simulação ALE, emprega-se uma malha com aproximadamente o mesmo tamanho de elementos.

A figura 8.5 apresenta quadros de distribuição de pressão e deslocamentos para ambos os casos, ALE e contorno imerso em vários instante. Deve-se notar que para o acoplamento imerso não foram omitidos da ilustração os nós e elementos que atravessam o contorno, devendo-se comparar apenas a porção correspondente ao domínio representado pela casca na parte inferior de cada sub-figura. Observa-se que as duas soluções apresentam resultados que podem ser considerados idênticos.

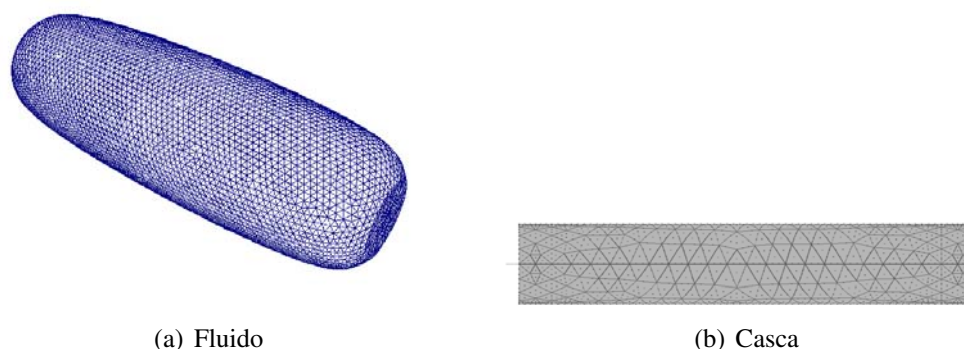


Figura 8.4: Discretização do tubo

Na Fig. 8.6, uma comparação da solução em deslocamento radial ao longo do tempo na posição  $x = 0,34 \text{ m}$ , mostrando comportamento bastante semelhante entre as duas técnicas de acoplamento. Isso, aliado à avaliação qualitativa apresentada na Fig. 8.5 mostra a eficácia do

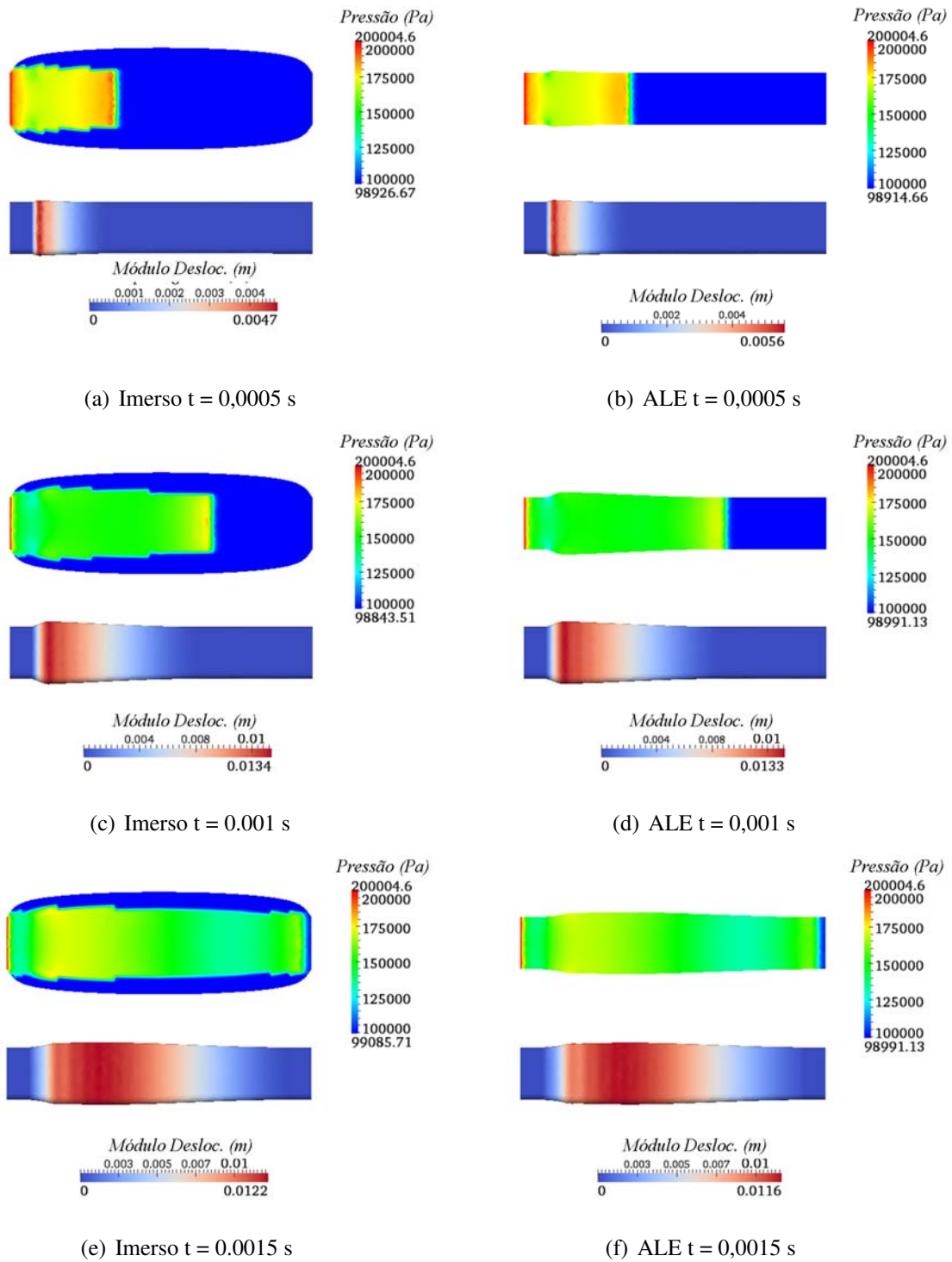


Figura 8.5: Distribuição de pressão (Acima) e módulo de deslocamentos na casca (Abaixo) - primeira parte

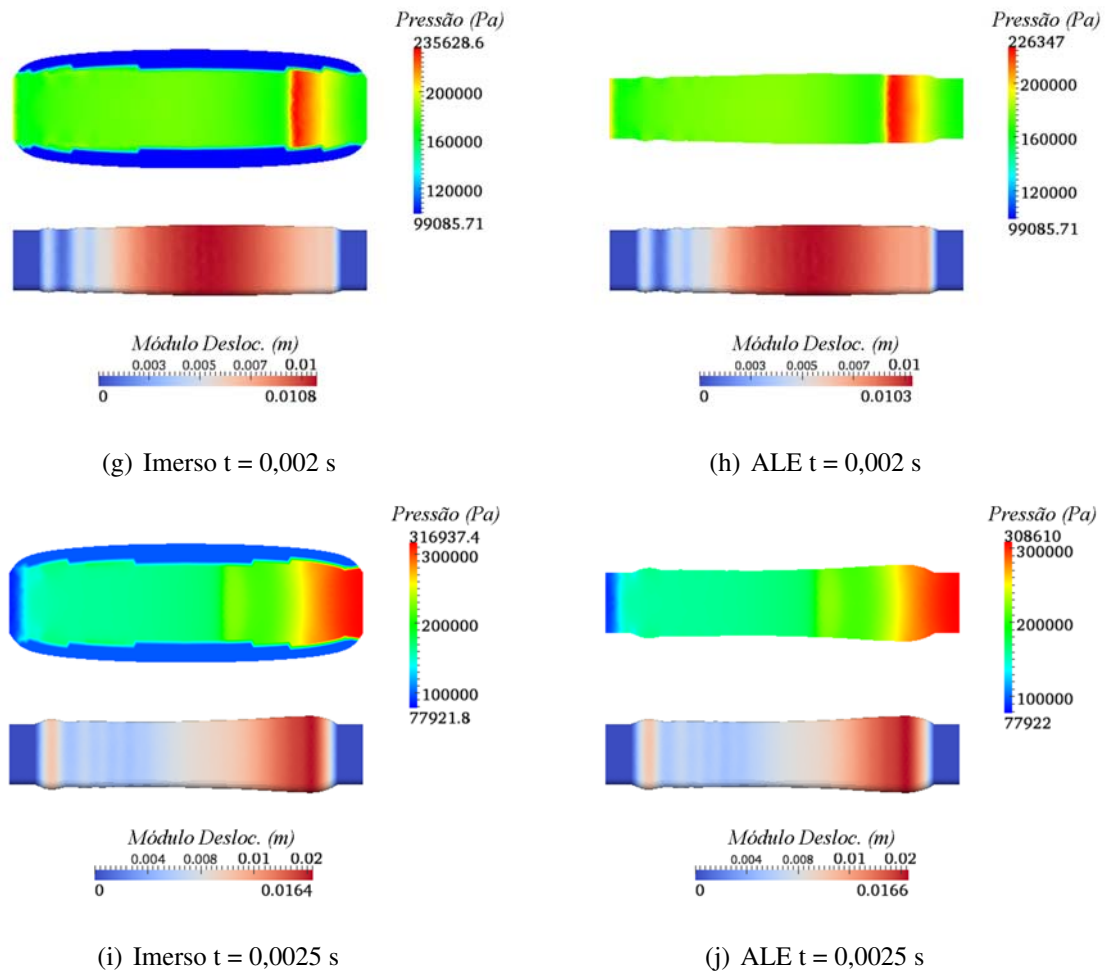


Figura 8.5: Distribuição de pressão (Acima) e módulo de deslocamentos na casca (Abaixo) - continuação

procedimento de acoplamento com contorno imerso.

### 8.3.2 Acionamento de um *airbag*

Como um exemplo qualitativo, propõe-se simular a deflagração de um *airbag* com a geometria representada na Fig. 8.7.

Esse é considerado como sendo somente um exemplo qualitativo, uma vez que, devido a razões computacionais, a malha do *airbag* não é refinada o suficiente para representar adequadamente o enrugamento que ocorre em alta frequência, e também o programa de dinâmica de cascas empregado ainda não contempla análise de auto-contato. Entretanto, a imposição de condições de contorno e os demais procedimentos adotados são os mesmos de uma situação real.



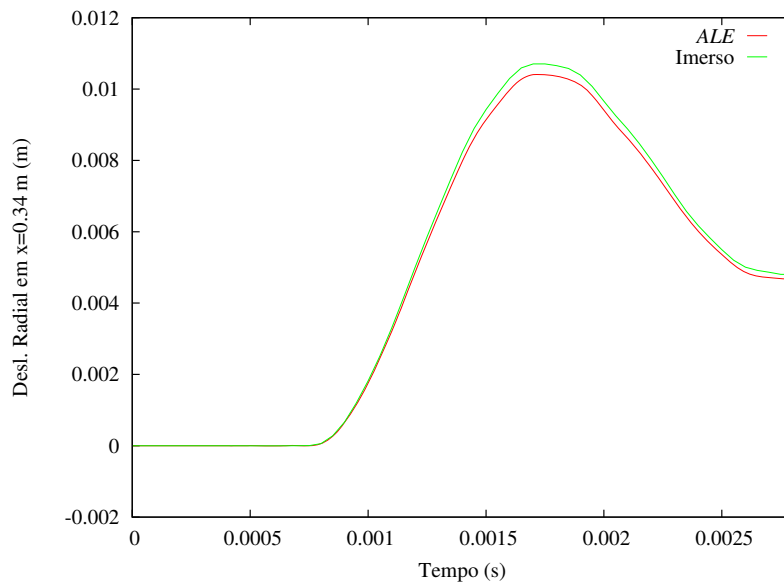


Figura 8.6: Deslocamento radial vs. tempo em  $x = 0,34$  m

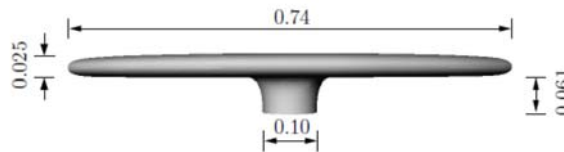


Figura 8.7: Geometria do *airbag* (adaptado de Cirak e Radovitzky (2005))

O *airbag* em sua configuração inicial contém um gás em repouso com densidade  $\rho_f = 1,3 \text{ kg/m}^3$  pressão  $p = 107 \text{ kPa}$  e índice adiabático  $\gamma = 1,4$ . Pela parte inferior, entra um gás com massa específica  $\rho_{fi} = 10 \text{ kg/m}^3$ , velocidade do som  $c = 370 \text{ m/s}$  e índice adiabático  $\gamma = 1,4$  o que produz uma onda de choque.

As condições de entrada são mantidas constante até o instante  $t = 0,004$  s, quando a entrada é fechada e as condições aplicadas passam a ser de parede lisa.

Aceita-se certa simetria para o problema, discretizando-se apenas 1/4 do problema. O *airbag* é discretizado por 258 elementos e 1237 nós (Fig. 8.8(b)) e o material constituinte é considerado como sendo um tecido com módulo de Young  $E = 3 \text{ GPa}$ , massa específica  $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$  e espessura  $e = 1,5 \text{ mm}$ . O *airbag* é engastado em toda a região de entrada e condições de contorno de simetria são aplicadas nos planos  $xz$  e  $yz$ .

A malha do fluido, onde o *airbag* é imerso é apresentada na Fig. 8.8(a), contendo 263667 elementos e 47491 nós.



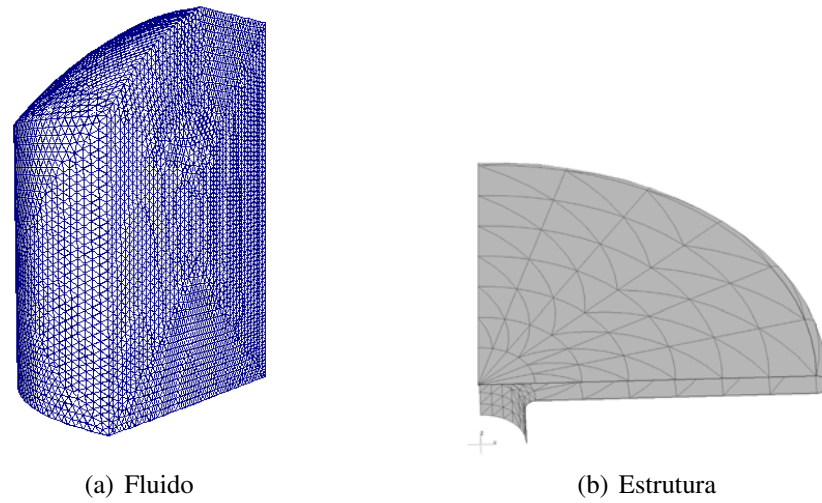


Figura 8.8: Discretização do airbag

Na Figura 8.9, é apresentado o gráfico de deslocamentos no ponto central do topo do *airbag* ao longo do tempo e na figura 8.10 são apresentados quadros da distribuição de pressão e do *airbag* deformado a cada 0,12 ms.

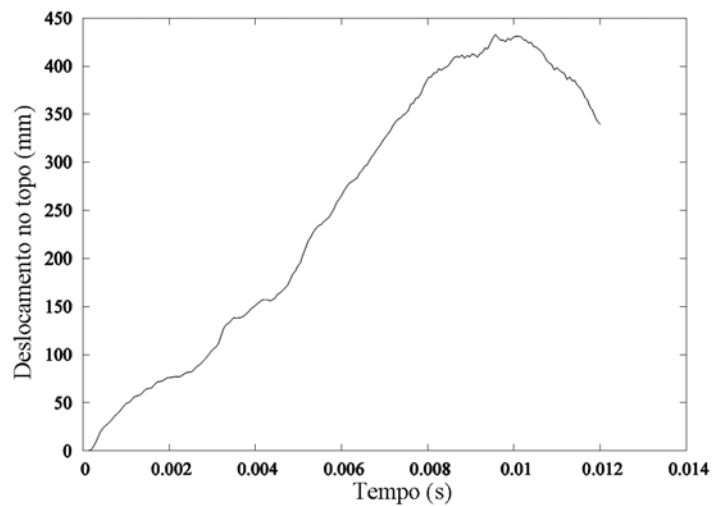
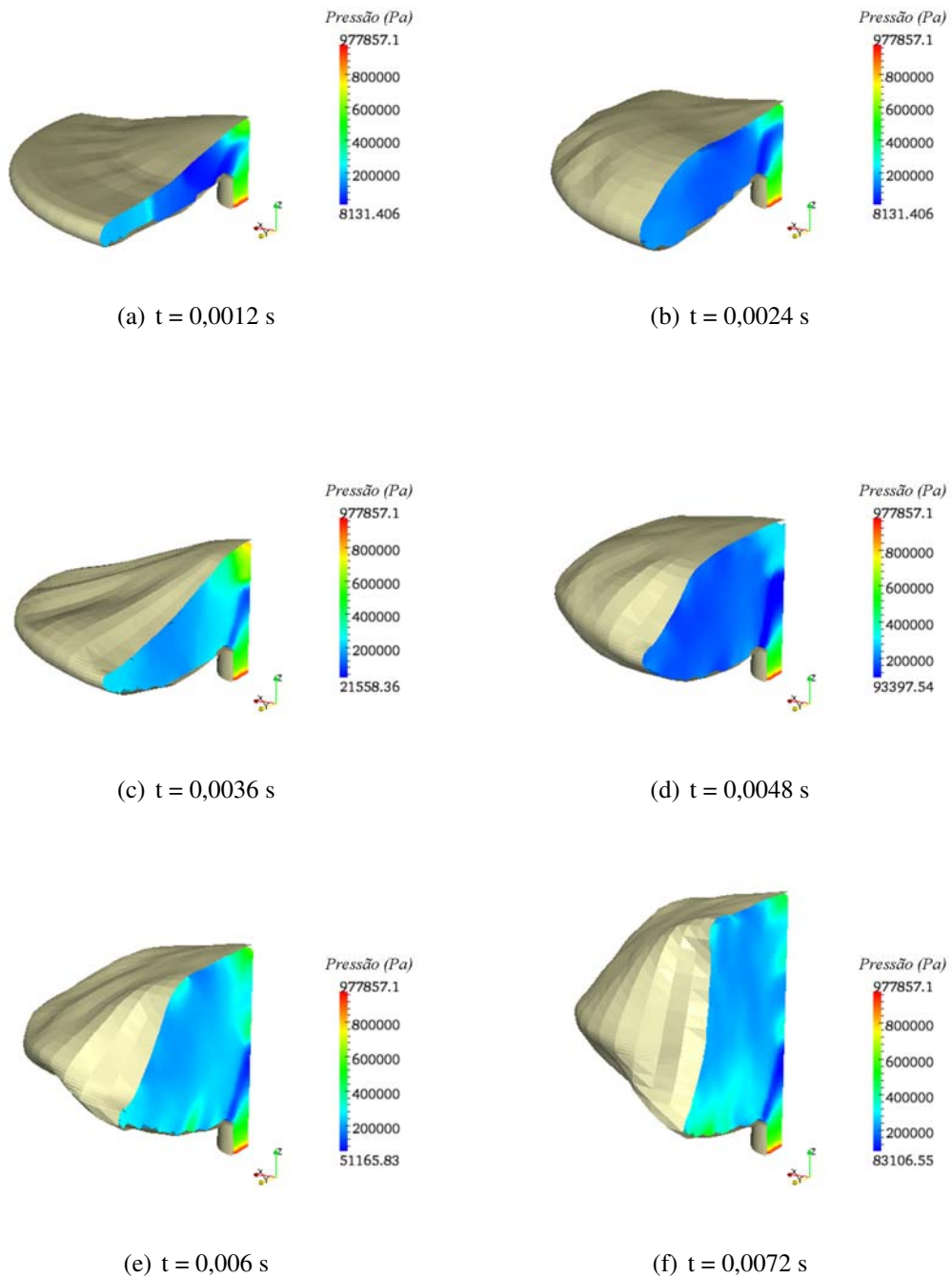


Figura 8.9: Deslocamento no topo vs. tempo

Os resultados deixam qualitativamente claro que o procedimento proposto é um método bastante robusto para análise de estruturas infláveis.

Figura 8.10: Distribuição de pressão no *airbag* deformado

## ***9 Proposta para continuidade da pesquisa: uso de uma nova técnica de B-splines imersas***

Uma característica interessante do MEF é a possibilidade de aumentar a ordem das funções aproximadoras. Quando se trata de problemas com descontinuidades, tais como ondas de choque, é interessante que as mesmas possam ser aproximadas pelas funções de forma sem produzir grandes perturbações na vizinhança, como ocorre quando da utilização de polinômios de Lagrange. Por fim, técnicas de acoplamento fluido-estrutura que não exijam movimentação da malha, como a apresentada no capítulo 8 são muito interessantes para a simulação de problemas com grandes escalas de deslocamentos.

Buscando atender todas essas características, e propor continuidade dessa pesquisa, desenvolve-se de maneira original um novo espaço para elementos finitos baseados em B-splines de alta ordem imersas. Essa parte do trabalho foi desenvolvida durante estágio na Universidade de Cambridge, com auxílio do professor Fhemi Cirak, e está sendo atualmente estudada para ser aplicada à análise de interação fluido-estrutura, dando continuidade a esta pesquisa.

### **9.1 Sobre as funções Splines**

Splines e suas funções correlacionadas, como as B-splines não uniforme racionalizadas (NURBS), são amplamente empregadas na engenharia em sistemas de projeto assistido por computador (CAD). Em contraste, nas análises por método dos elementos finitos as splines têm sido somente esporadicamente usadas. Recentemente, dois trabalhos baseados em splines, chamados *subdivision finite elements* (CIRAK et al., 2000) e *isogeometric analysis* (HUGHES et al., 2005) foram introduzidos para modelagem geométrica baseada em spline e análise pelo MEF. Considerando que o conceito original de análise isogeométrica foi desenvolvido com base em NURBS, subdivisão de elementos finitos caem nas funções base de subdivisão, que são historicamente motivadas por splines e são considerados como um superconjunto de splines

(PETERS; REIF, 2008; WARREN; WEIMER, 2001). Uma motivação chave para o uso de funções base spline no processo de modelagem e análise é a promessa de diminuição do erro que pode surgir de uma etapa para a outra, especialmente erros devidos à geração de malha de elementos finitos baseada em modelos NURBS, o que é frequentemente guiado pelo usuário. Em adição, o uso das mesmas funções base possibilita rápida troca de dados entre projeto e análise, o que é, por exemplo, crucial para otimização de projeto.

Em adição ao encadeamento projeto e análise, MEF baseado em spline são em muitas formas mais versáteis e eficientes que a interpolação por polinômios de Lagrange presentemente usada em elementos finitos. Por exemplo, em malhas de produto tensorial (também conhecidas como Cartesianas), funções de maior ou menor ordem são diretamente definidas sobre a mesma malha, sem necessidade de adição de nós, aumentando ou diminuindo a continuidade e suavidade global. A maioria dessas operações podem ser executadas sem alterar a forma do objeto.

Uma das principais vantagens das funções base splines é que elas são pontualmente positivas. Isso significa, por exemplo, que todos os elementos da matriz de massa são sempre positivos, e, assim, a correspondente matriz de massa concentrada é sempre positiva definida. Uma vantagem adicional é a propriedade de diminuição de variação das funções de forma spline, que faz as mesmas menos propensas a oscilações numéricas tipicamente encontradas em outras funções de forma polinomiais de alta ordem. A maior vantagem no uso de b-splines como base para o MEF, de acordo com Strang e Fix (2008), é que a continuidade extra reduz a dimensão do espaço teste, sem destruir o grau de aproximação.

Apesar dessas vantagens, as B-splines não permitem o cumprimento das condições de contorno essenciais (várias funções podem ser diferentes de zero em um ponto do contorno, e o número dessas funções depende do grau das b-splines), e também não se adaptam diretamente à forma do contorno. Isso implica que os MEFs b-splines requerem algum tratamento especial para resolver problemas de Dirichlet.

Esses fatos permitiram Strang e Fix (2008) afirmarem que os métodos nodais (MEF tradicional) devem continuar a dominar sobre o uso de b-splines, colocando o uso de b-spline como conveniente quando em uma malha regular, desde que a propriedade interpoladora não seja parte essencial da análise, porque assim pode-se utilizar descrições mais gerais em termos de funções.

Funções base splines e a maioria das teorias relacionadas estão estritamente amarradas com as malhas de produto tensorial. Isto resulta da natureza não local das funções spline, que não permitem uma extensão direta para malhas não estruturadas. Somente para o caso bidimensio-

nal com padrão *manifold*, existem esquemas de subdivisão que generalizam splines para malhas não estruturadas. Entretanto, um processo equivalente não está disponível para o caso tridimensional. Para muitas geometrias relevantes na prática, as malhas Cartesianas não são flexíveis o suficiente, e para algumas geometrias, como objetos esféricos, impossível. Assim, parece auto-evidente combinar funções base spline com métodos de contorno imerso. Em geral os processos de contornos imersos publicados usam malhas Cartesianas que não são compatíveis com os contornos do domínio físico. Próximo aos contornos, algoritmos auxiliares derivados dos métodos tradicionais de imposição de condições de contorno em problemas variacionais, como Multiplicadores de Lagrange, Penalidades ou método de Nitsche, são empregados (WRIGGERS, 2002; NITSCHKE, 1971).

Os algoritmos convencionais para aplicação de condições de contorno em métodos de contornos imersos não são entretanto diretamente aplicáveis ao MEF baseado em B-splines. Devido à natureza não-local das funções de forma b-spline, um grande número de funções de forma próximas ao contorno podem possuir somente uma pequena parte dentro do domínio físico. Isso usualmente causa um efeito de detrimento da estabilidade do problema discretizado, que tem um impacto negativo na robustez e precisão do método como um todo. No método chamado Web-spline, proposto por (HÖLLIG et al., 2002), o qual consiste em um método baseado em b-splines imersas com uso a técnica de multiplicação por função ponderadora, proposta por (KANTOROWITSCH, 1964), esse assunto da estabilidade é resolvido acoplando-se b-splines com pouca influência no domínio com B-splines internas através de polinômios de Lagrange. Embora possa-se mostrar que as Web-splines formem uma base do MEF que apresenta convergência, essa base não cumpre o *patch test*, além de romper a propriedade da positividade ao empregar os polinômios de Lagrange.

## 9.2 B-splines Univariáveis

Uma spline univariável de grau  $n$ , é uma função polinomial por partes de ordem  $n$ , com uma única variável, definida em um intervalo  $D$ , e a cuja sua derivada de ordem mais alta possui saltos de descontinuidade em  $N$  pontos  $i$ , com  $i \in D$ .

Concentrando-se no caso onde os  $i$  pontos são igualmente espaçados (grid uniforme), uma spline de grau  $\leq n$  e grid de espessura  $h$  é  $(n - 1)$ -vezes continuamente diferenciável e equivalente a um a polinômio de ordem  $\leq n$  em cada intervalo do grid  $[i, i + 1]h$  de  $D$  (HÖLLIG, 2003).

Como splines são funções polinomiais por parte, uma spline  $s(x)$  de grau  $n$  pode ser conve-

nientemente descrita pela combinação linear de  $N$  funções menores  $B_j$ , de mesmo grau  $n$ :

$$s(x) = \sum_{j=1}^N s_j B_j^n(x), \quad (9.1)$$

onde  $s_j$  é um escalar que escala a função  $B_j$ .

As funções  $B_j$ 's são chamadas b-splines, e consistem em uma base para o espaço de funções splines particularmente conveniente. Uma b-spline uniforme de grau  $n$ ,  $B_j^n$ , é definida entre dois pontos  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , por recorrência de (ver figura 9.1):

$$B^n(x) = \int_{x_i}^x B^{n-1}(x) dx. \quad (9.2)$$

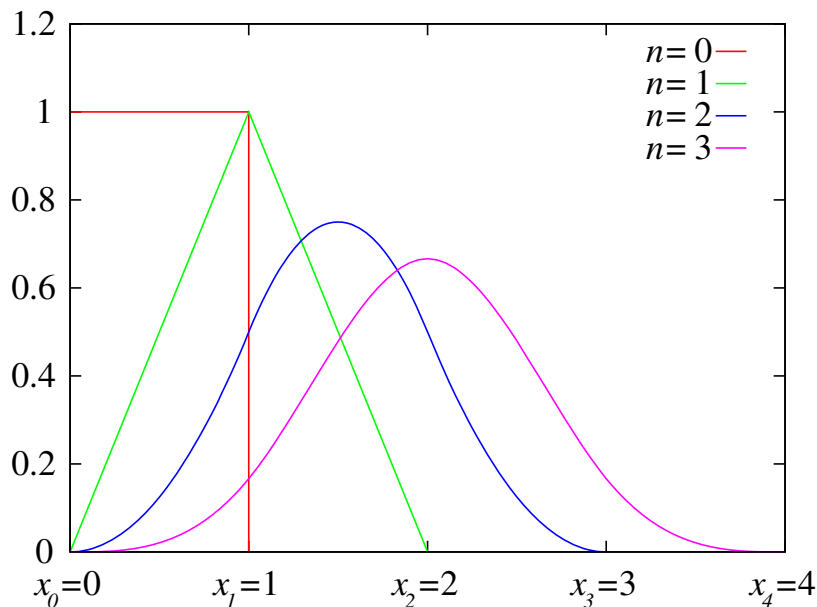


Figura 9.1: b-splines de vários graus.

### 9.3 B-splines multivariáveis

A aproximação sobre domínios espaciais com mais de uma dimensão é facilmente feito utilizando-se o produto tensorial uniforme:

$$B_k^n(x_1, \dots, x_m) = \prod_{d=1}^m B_{k_d}^n(x_d), \quad (9.3)$$

onde  $B_k^n(x)$  é a  $m$ -variável b-spline e  $B_{k_d}^n(x_d)$  é a univariável b-spline na variável  $x_d$ .

A figura 9.2 mostra uma b-spline cúbica  $B_k^3$  para o espaço bidimensional.

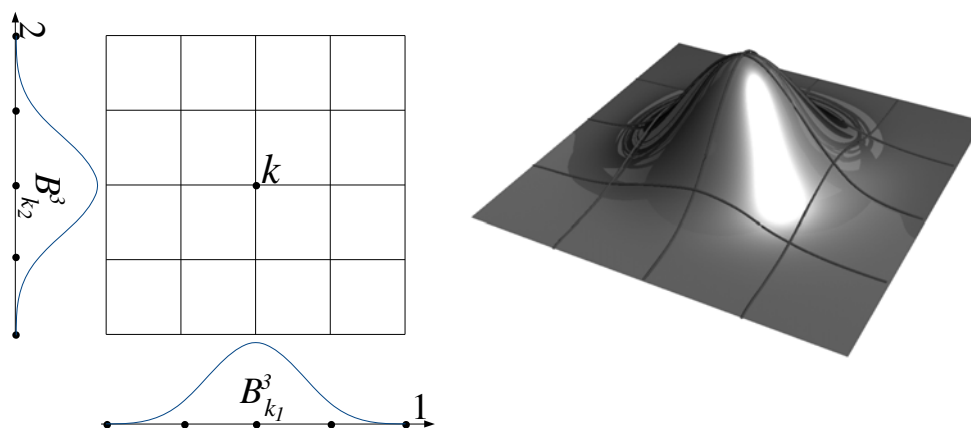


Figura 9.2: geração de uma b-spline cúbica 2D.

Uma base para o MEF pode ser construída transladando uma b-spline e ponderando-a por um fator de escala sobre um grid Cartesiano regular. Focando o caso unidimensional, a B-spline univariável padrão B-spline  $B^n$  que possui suporte em um grid auxiliar com pontos  $i \in [0, n + 1]$  e células de comprimento 1, é transportada de seu suporte inicial para as células do grid, e ponderada de acordo com o tamanho  $h$  das células, de forma que o suporte está agora sobre os pontos  $i \in [k, k + n + 1]h$  do grid. Isto significa que para um grid de espessura  $h$ , splines cardinais de grau  $\leq n$  são combinações lineares de  $B_{k,h}^n$ , sendo  $k$  um inteiro que define a posição da B-spline.

As splines construídas como uma combinação linear destas b-splines são chamadas splines Cardinais. As propriedades atrativas das splines cardinais para métodos numéricos, facilmente encontradas na literatura (Höllig (2003) e Strang e Fix (2008)), são:

- *Independência Linear:* Para um dado grau  $n$  e espessura de grid  $h$ , em qualquer célula do grid  $D = [l, l + 1]h, l \in \mathbb{Z}$ , as B-splines  $B_{k,h}^n$  que possuem algum suporte nesta célula são linearmente independente.
- *Partição da unidade:* Para uma dada célula  $D$ , em qualquer ponto  $i \in D$ , a soma de todas as b-splines com suporte em  $D$  é igual à unidade.
- *Positividade e suporte compacto:*  $B_{k,h}^n$  é positiva em  $]l; l + 1[h$ .
- *Suavidade:*  $B_{k,h}^n$  é  $(n - 1)$ -vezes continuamente diferenciável com descontinuidades da  $n$ -ésima derivada nos contornos das células.
- *Estrutura polinomial por partes:*  $B_{k,h}^n$  é um polinômio de grau  $n$  em cada intervalo  $D$ .

- *Simetria e Monotonicidade*: As b-splines de grau  $n$  são simétricas e estritamente monótonas em  $[0; (n+1)/2]$  e  $[(n+1/2); n+1]$ .

## 9.4 Uma nova base abstrata para elementos finitos a partir de splines

### 9.4.1 Definição do domínio físico

Como o método é baseado em um grid Cartesiano regular, são necessárias algumas técnicas para identificar o domínio físico, o qual pode possuir qualquer forma sólida. Isso é feito com base em curvas de nível *LS* (*level-sets*), de uma função de distância assinalada,  $SD$  calculada conforme Eq. 8.1.

Considerando-se que a superfície apresenta vetor normal orientado para fora  $\vec{n}$ , e sendo  $\vec{d}$  o vetor do ponto do contorno mais próximo de  $p$ , então  $p \in \Omega$  se o produto interno  $\vec{d} \cdot \vec{n}$  é negativo e então  $SD$  é positivo. Isso implica que o contorno vai ser definido pela curva de nível zero de  $SD$ , com  $SD$  positivo dentro do domínio e negativo fora.

Para domínios compostos pela intersecção de diferentes entidades geométricas, uma forma fácil de definir o domínio físico é calcular a função de distância assinalada separadamente para cada uma das entidades e então combiná-las usando as funções booleanas de Rvachev, conhecidas como funções-r (HÖLLIG, 2003). O resultado é uma nova função que ainda possui valores positivos dentro do domínio físico, negativos fora e zero no contorno.

A equação 9.4 mostra como obter a função de Rvachev,  $RF$ , para a intersecção e para a união de dois diferentes domínios.

$$RF(x, \Gamma) = \begin{cases} SD_1 + SD_2 + \sqrt{SD_1^2 + SD_2^2}, & \text{se } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ SD_1 + SD_2 - \sqrt{SD_1^2 + SD_2^2}, & \text{if } \Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \end{cases} \quad (9.4)$$

Uma opção para obter a função distância assinalada para formas complexas, quando uma equação analítica não é definida para a forma sólida, consiste em discretizar o contorno em elementos finitos, criando uma superfície orientada definida por uma equação paramétrica. A figura 9.3 mostra a função distância assinalada para uma geometria definida por elementos finitos triangulares, imersos em uma malha Cartesiana.



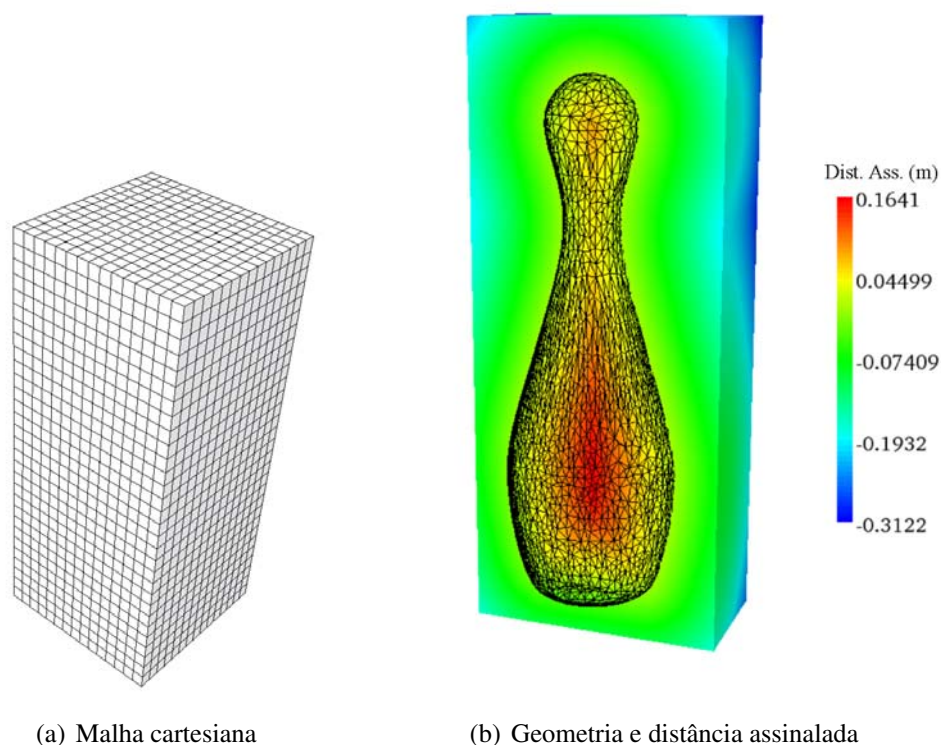


Figura 9.3: Função distância assinalada para um corpo definido por uma malha triangular

### 9.4.2 B-splines ponderadas normalizadas

Quando da aplicação de qualquer técnica de resíduos ponderados, exige-se que as funções de forma satisfaçam alguns aspectos gerais para que haja convergência. Isto inclui que as funções de forma seja homogêneas com respeito a satisfazerem as condições de contorno essenciais, ou de Dirichlet. Essa condição é obviamente não satisfeita pelas B-splines cardinais, que além disso, não se adaptam à forma de domínios não retangulares.

As B-splines ponderadas racionalizadas, apresentadas aqui, buscam resolver esses problemas, mantendo a maioria das propriedades das B-splines cardinais. Para tal, o processo inicia-se com a escolha de uma função ponderadora adequada para cada B-spline, segue com a normalização das funções e termina com a construção de elementos finitos isoparamétricos.

#### Classificação das células e das B-splines

Para definição da função ponderadora, primeiramente as células são classificadas como células de contorno, células de domínio ou células externas, e as B-splines são classificadas como ativas, semi-ativas ou inativas. Esta classificação é feita de acordo com sua posição em relação ao domínio físico.

As células de domínio são aquelas completamente dentro do domínio físico ( $SD \geq 0$  sobre toda a célula). As células de contorno são as células cortadas pelo contorno ( $SD < 0$  para alguns pontos sobre a célula). As células externas são aquelas completamente fora do domínio físico ( $SD < 0$  sobre toda a célula).

As B-splines com o ponto de máximo dentro do domínio físico ( $SD > 0$  no ponto de máximo) são classificadas como ativas. As B-splines com ponto de máximo no contorno ou fora dele, porém sobre alguma célula de contorno, ou sobre o contorno de alguma célula de contorno são classificadas como semi-ativas. Finalmente, as b-splines com o ponto de máximo sobre células externas são classificadas como inativas.

Um exemplo 2D de classificação de células e b-splines cúbicas é apresentado na figura 9.6(a), e a classificação das células e B-splines cúbicas para o problema da Fig. 9.3 é mostrada na figura 9.4.

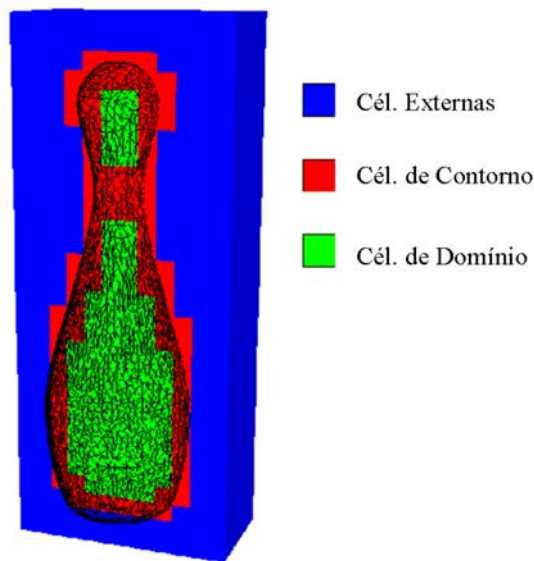


Figura 9.4: Classificação das células

### Função ponderadora

As b-splines inativas com algum suporte sobre o domínio físico podem levar a sistemas mal condicionados e problemas de estabilidade, uma vez que seu suporte sobre o domínio físico pode ser muito pequeno (ver figura 9.6(a)). Para se evitar esse problema, as b-splines inativas são eliminadas, fazendo suas funções ponderadoras  $w = 0$ .

Como é possível observar na Fig. 9.6(a), as B-splines semi-ativas são a melhor escolha para representar valores no contorno, o que faz da função ponderadora constante  $w = 1$  uma boa escolha.

Para as b-splines ativas, a escolha de  $w$  não é tão trivial. As funções ponderadoras devem fazer as B-splines nulas sobre o contorno, mas deve também não interferir na ordem de continuidade.

Assim, para o caso das b-splines ativas, uma adaptação da função ponderadora usada por Höllig (2003) parece perfeita.  $w$  é tomado como uma função da distância assinalada, com o mesmo grau que as b-splines, para a área que vai do contorno até uma distância  $\delta$ , e  $w = 1$  após essa distância:

$$w(x) = 1 - \left(1 - \frac{SD(x)}{\delta}\right)^n, \text{ se } SD(x) \leq \delta. \quad (9.5)$$

Um valor recomendável para  $\delta$  é a metade do comprimento do domínio  $D$  de uma B-spline, entretanto, comprimentos maiores também podem produzir bons resultados podendo ser adotados quando a geometria permitir (ver Fig. 9.12).

Finalmente, a função ponderadora é escrita como:

$$w_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } B_i^n \text{ é inativa} \\ 1, & \text{se } B_i^n \text{ é semi-ativa} \\ 1 - \left(1 - \frac{SD(x)}{\delta}\right)^n, & \text{se } B_i^n \text{ é ativa e } SD(x) \leq \delta \\ 1, & \text{se } B_i^n \text{ é ativa e } SD(x) > \delta \end{cases}. \quad (9.6)$$

onde  $n$  é o grau da b-spline  $B_i^n$ .

### As novas funções de forma

A nova base para elementos finitos consiste nas funções de forma  $N$  obtidas pela normalização das B-spline ponderadas como segue:

$$N_i(x) = \frac{w_i B_i^n(x)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i B_i^n(x)}, \quad (9.7)$$

A normalização não só garante a imposição de condições de contorno de Dirichlet não homogêneas como também garante às novas funções de forma propriedade da partição da unidade.

O espaço teste gerado pelas funções B-splines imersas ponderadas normalizadas (i-splines),

no domínio paramétrico  $\mathcal{O}$  do corpo consiste em:

$$\mathcal{V}^r = \{v^r \in C^{n-1}(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m) | v^r(x) = \sum_{i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{S}_N} N_i(x)v_i\} \tag{9.8}$$

onde  $\mathcal{S}_N$  são as i-splines semi-ativas com condições de Neumann e  $\mathcal{A}$  são as i-splines ativas, observando-se que as condições de contorno homogêneas de Dirichlet são satisfeitas.

O espaço tentativa de deslocamentos é dado por:

$$\mathcal{U}^r = \mathcal{V}^r \oplus \{u^r \in C^{n-1}(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m) | u^r(x) = \sum_{i \in \mathcal{S}_D} N_i(x)u_i\} \tag{9.9}$$

onde  $\mathcal{S}_D$  são as i-splines semi-ativas com condições de Dirichlet, sendo estas condições satisfeitas, sendo elas homogêneas ou não.

As figuras 9.5 e 9.6, mostram a construção das novas funções de forma  $N$  usando B-splines cúbicas, respectivamente para o espaço unidimensional e para o espaço bidimensional.

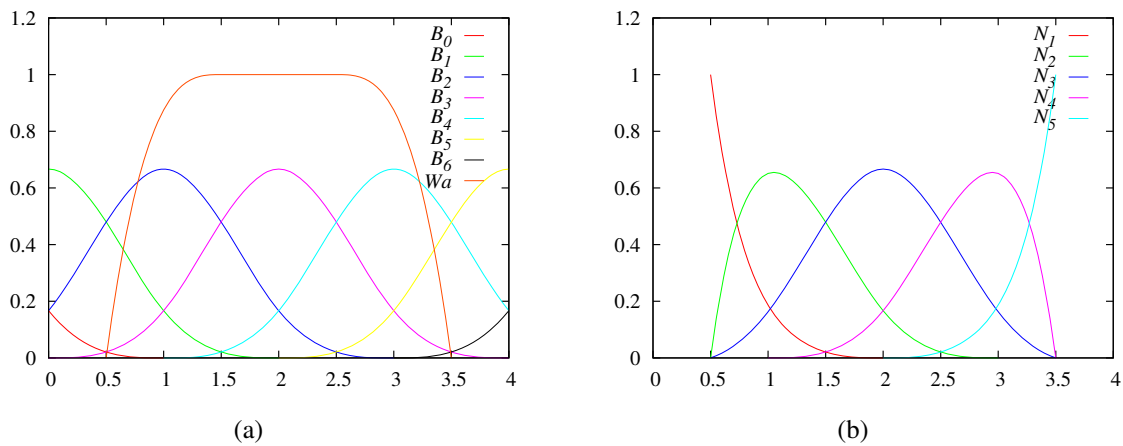
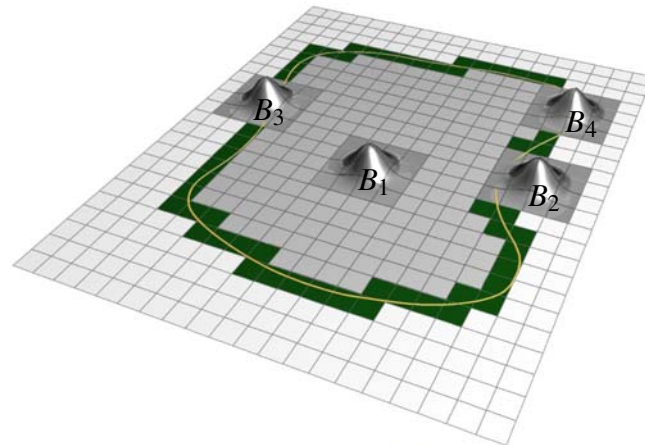


Figura 9.5: (a) B-splines cúbicas e função ponderadora ativa 1D. (b) Funções de forma baseadas em B-splines cúbicas 1D.

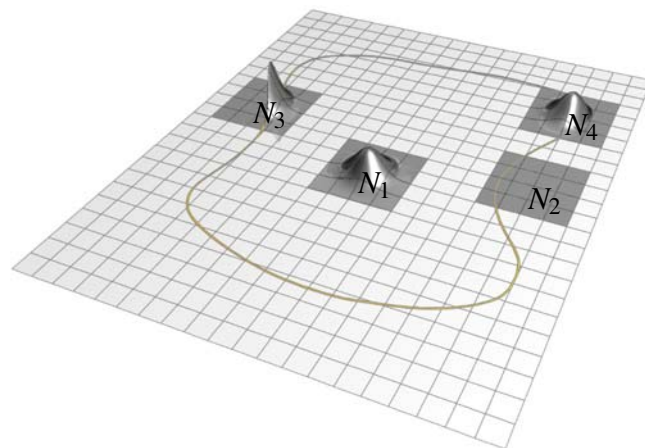
As novas funções de forma conservam as seguintes propriedades das B-splines cardinais:

- *Independência linear:* Como as b-splines são linearmente independentes, e  $w_i \neq a \frac{w_j B_j}{B_i}$  para  $i$  e  $j = 1..nf$ , onde  $nf$  é o número de funções  $N_i$  não nulas sobre uma dada célula, as funções  $N_i$  também são linearmente independentes.
- *Partição da unidade:* A partição da unidade é cumprida devido à normalização.
- *Positividade e suporte compacto:* Como  $w_i$  e  $B_i$  são sempre positivas dentro de um domínio físico, esta propriedade é cumprida.



celulas externas: □ celulas cont.: ■ celulas dom.: ■  
 B-splines Ativas:  $B_1$  e  $B_4$ . B-Spline Semi-ativa:  $B_3$ . B-spline Inativa:  $B_2$ .

(a) Classificação das b-splines 2D.



(b) Funções de forma 2D baseadas em b-splines cúbicas.

Figura 9.6: Construção das funções de forma para o espaço 2D.

- *Suavidade*: Como  $w_i^n$  ou possui a mesma ordem de continuidade das b-splines de grau  $n$ ,  $B_i^n$ , ou é constante, as funções  $N_i^n$ , construídas com base nestas b-splines, formam uma base  $(n - 1)$ -vezes continuamente diferenciável, com descontinuidades na  $n$ -ésima derivada entre os intervalos do grid.

As propriedades das B-splines cardinais que não estão presentes nas funções de forma  $N_i$  são *Estrutura polinomial por partes* e *Simetria e monotonicidade*, já que elas mudam nos contornos, se tornando funções racionais.

### 9.4.3 Representação geométrica iso-paramétrica do domínio imerso

Devido às funções serem racionais próximo ao contorno, a nova base não pode representar exatamente funções lineares sobre o espaço de coordenadas  $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$ , porém, isso é possível em outro espaço de coordenadas  $\mathbf{X} = X_1, X_2, X_3$ , desde que esse espaço possa ser escrito como combinação das funções  $N_i$ .

Tomando uma função linear  $f(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{a}\mathbf{X} + b$  (com  $\mathbf{a}$  sendo um vetor de escalares:  $\mathbf{a}^t = a_1, a_2, a_3$ ), e escrevendo sua aproximação como a combinação linear das funções de forma:  $fap = \sum_{i=1}^{nf} f_i N_i(x_1, x_2, x_3)$ , com  $f_i = \mathbf{a}\mathbf{x}_i + b$ , pode-se provar que  $f = fap$ , primeiro assumindo:

$$f(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{a}\mathbf{X} + b = \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{a}(\mathbf{x}_i N_i(x)) + b N_i(x). \quad (9.10)$$

Substituindo-se  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{x}_i N_i(x)$  em 9.10, e considerando que  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{x}_i * N_i(x)$ , é possível verificar que a equação 9.10 é verdadeira.

O contorno do espaço físico  $(X_1, X_2, X_3)$  deve coincidir com o contorno do domínio paramétrico  $(x_1, x_2, x_3)$ . Assim, para as funções  $N_i$  ativas, geradas pela racionalizações das funções b-splines  $B_i$  ativas, os valores  $x_{j_i}$ , com  $j = 1, 2$  ou  $3$ , podem ser tomados como as posições paramétricas dos pontos de máximo para a b-spline  $B_i$ . Entretanto, o mesmo não é possível para as funções  $N_i$  semi-ativas, uma vez que o valor  $x_{j_i}$  deve ser tomado sobre o contorno.

Duas diferentes opções são propostas para tal.

#### Opção 1: projetar os pontos de máximo da B-spline semi-ativa sobre o contorno

Tomar  $x_{j_i}$  como a projeção do ponto de máximo de  $B_i$  sobre o contorno é mais fácil, entretanto, é necessário cuidado especial para evitar Jacobiano nulo sobre o domínio, o que, devido à suavidade e positividade, será raro acontecer. Uma vantagem desse processo é a facilidade de integrar numericamente sobre a porção do domínio  $\odot$  pertencente às células de contorno.

Isso também pode ser feito com base na função distância assinalada e seu gradiente. Nesse caso, o valor de  $x_{j_i}$  é tomado como a coordenada  $j$  do ponto de máximo da b-spline  $B_i$ ,  $xb_{ij}$ , mais a distância ao contorno na direção  $j$ :

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{b_j} + \frac{SD(xb_1, xb_2, xb_3)}{\|\nabla SD(xb_1, xb_2, xb_3)\|} \nabla SD(xb_1, xb_2, xb_3). \quad (9.11)$$

Esse procedimento é ilustrado na Fig. 9.7.

#### Opção 2: procurar pelo ponto de máximo

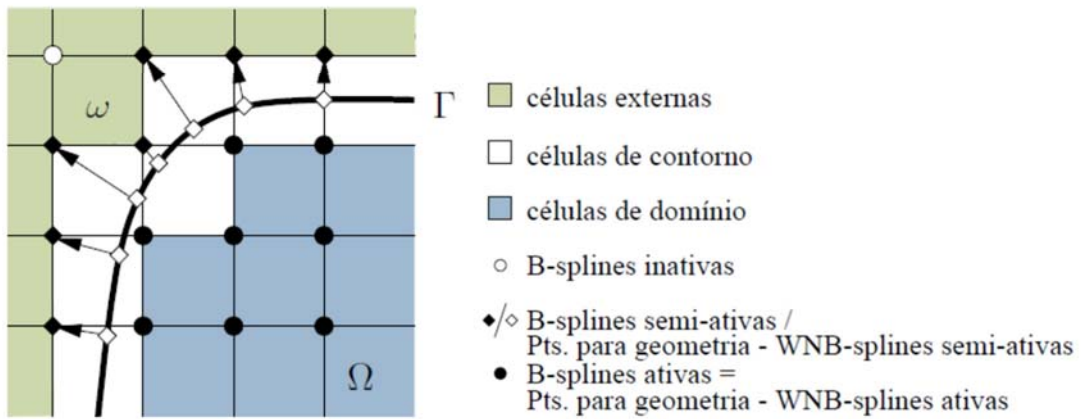


Figura 9.7: Pontos para aproximação iso-paramétrica da geometria

Uma forma muito conveniente seria tomar  $x_{j_i}$  como a posição do ponto de máximo valor da função  $N_i$  semi-ativa. O máximo de uma i-Spline pode ser facilmente encontrado, observando-se a priori que cada função  $N_i$  possui somente um máximo dentro do domínio  $\Omega$ .

Para comparar o desempenho das duas técnicas, fez-se um estudo unidimensional o qual mostra que a projeção dos pontos de máximo das funções  $B$  semi-ativa sobre o contorno distorce menos o domínio durante a mudança de configuração do espaço paramétrico  $x$  para o espaço físico  $X$  (ver Fig. 9.8).

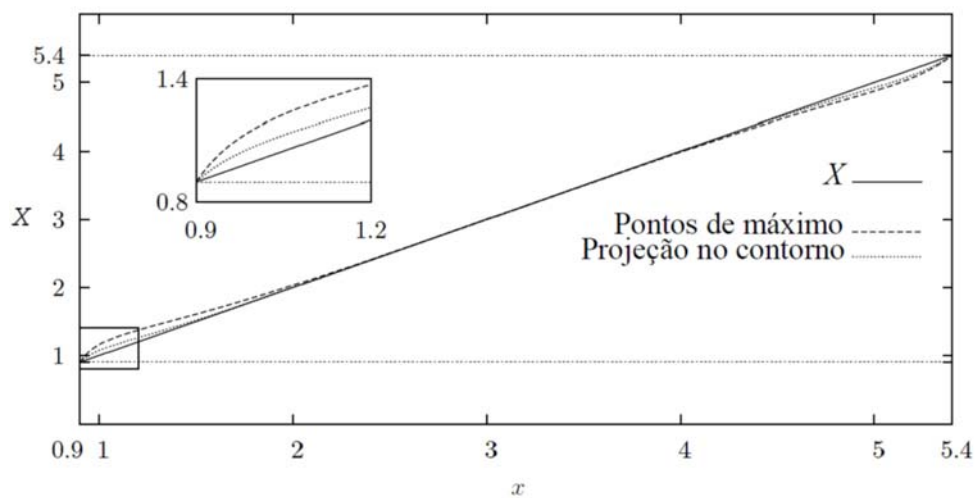


Figura 9.8: Aproximação iso-paramétrica de um modelo 1D

## 9.5 Aplicações das i-splines

Para a validação da nova técnica proposta, estuda-se problemas de valor de contorno lineares de segunda ordem, especificamente problemas de elasticidade linear e problemas potenciais. Maiores detalhes podem são apresentados por Sanches et al. (2011).

As normas de erro utilizadas para análise são as seguintes:

$$e_{L^2}^r = \|u^r - u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (u^r - u) \cdot (u^r - u) d\Omega} \quad (9.12)$$

e

$$e_{H^1}^r = \|u^r - u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (\nabla u^r - \nabla u) : (\nabla u^r - \nabla u) d\Omega} \quad (9.13)$$

### 9.5.1 Disco com condições de contorno mistas Dirichlet e Neumann

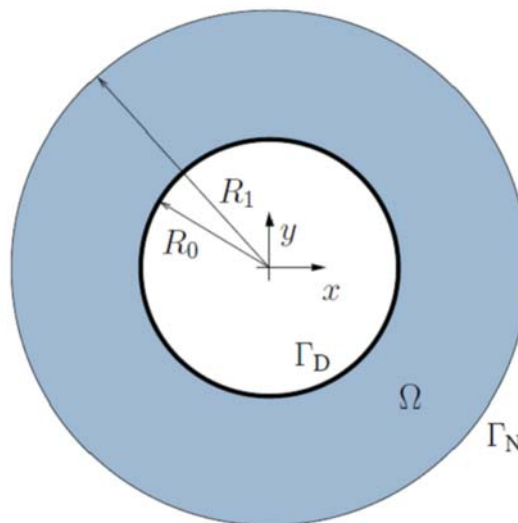


Figura 9.9: Geometria e dimensões.

Como um primeiro exemplo, considera-se o caso simples de um disco elástico com raio externo  $R_1 = 1$  e raio interno  $R_0 = 0,5$  (Fig. 9.9). O disco é submetido a um deslocamento radial interno  $\bar{u}_r = 0,1$  e condição de contorno de força de superfície nula no contorno externo. O material que constitui o disco possui módulo de Young  $E = 10000$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , sendo aplicadas as condições de estado plano de tensões. A solução analítica para o problema axi-simétrico pode ser encontrada nos livros de elasticidade, tais como (TIMOSHENKO, 1970).

O grid Cartesiano escolhido mede  $2,5 \times 2,5$ , sendo pouco maior que o diâmetro do disco. Para discretização, 3 diferentes malhas com  $30 \times 30$ ,  $40 \times 40$  e  $80 \times 80$  células e B-splines



cúbicas foram utilizadas. Os contornos de tensão radial e tensão tangencial para a malha  $30 \times 30$  são apresentados na figura 9.10, que claramente mostra que a solução numérica reproduz a solução com simetria radial.

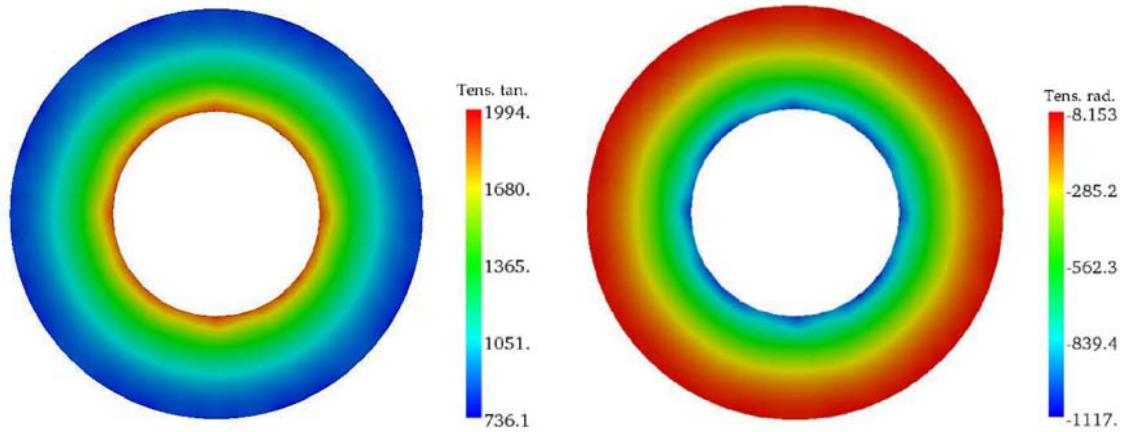


Figura 9.10: Contornos de Tensão para  $\sigma_{\theta\theta}$  (esq.) e  $\sigma_{rr}$  (dir.)

A influência do número de pontos de quadratura de Gauss na solução é estudada na Fig. 9.11. Uma série de diferentes pontos de Gauss–Legendre variando de  $1 \times 1$  a  $10 \times 10$  é empregada juntamente com diferentes refinamentos de malha. O comprimento  $\delta$  de transição da função ponderadora foi fixo em duas vezes o tamanho das células,  $\delta = 2h$ . Poucos pontos de integração resultaram em um aumento no erro  $L^2$ . Entretanto, o erro encontrou um patamar mínimo a partir de  $3 \times 3$  pontos de Gauss para todos os refinamentos de malha empregados.

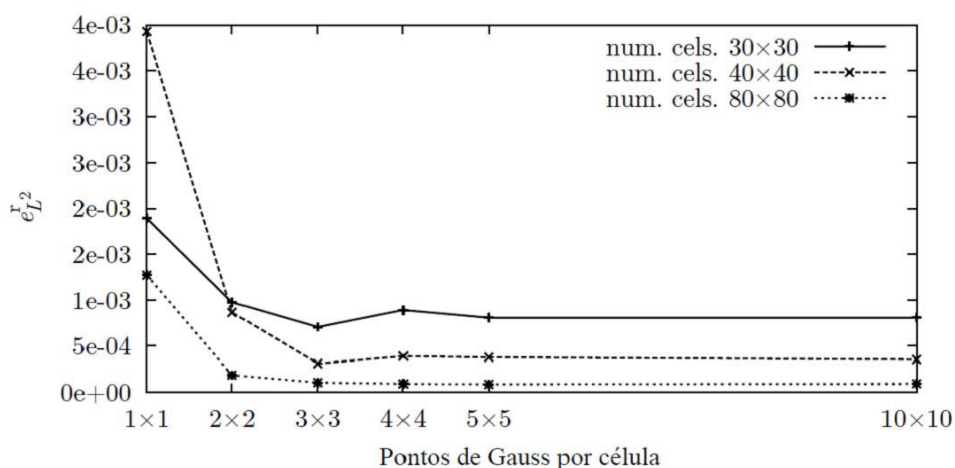


Figura 9.11: Influência do número de pontos de quadratura

Um ponto chave das *i*-splines é a função ponderadora  $w$ , a qual especificamente força as funções de forma a se modificarem sobre o contorno. A função ponderadora (Eq. (9.6)) possui

dois parâmetros, a potência  $n$  e o comprimento de transição  $\delta$ . A potência é escolhida como sendo  $n = 3$ , garantindo a suavidade das splines cúbicas. Nesta análise o comprimento de transição é alterado em função do tamanho  $h$  das malhas Cartesianas e o erro na solução é monitorado para diferentes malhas. Os resultados são apresentados na Fig. 9.12. O erro diminui com aumento do comprimento de transição  $\delta$  diminui-se o erro. Observa-se que após  $\delta/h = 2$  o erro fica praticamente estável, o que confirma esse valor como um valor ótimo para a escolha de  $\delta$ .

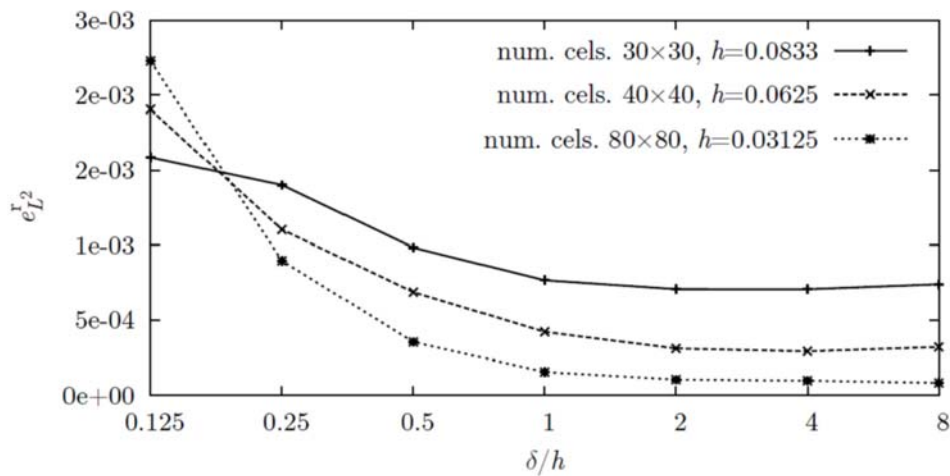


Figura 9.12: Influência do comprimento de transição  $\delta$

Na figura 9.13, observa-se a convergência do deslocamento radial e tensões radiais e tangenciais ao longo do raio. As soluções se mostram bastante coerentes.

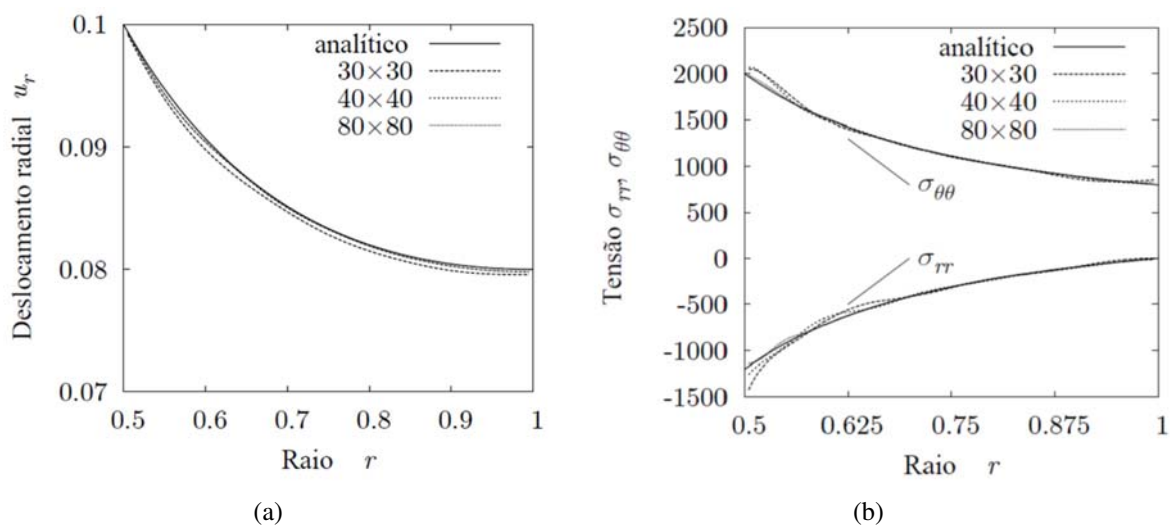


Figura 9.13: (a) Deslocamento radial (b) Tensões normais radiais e anelares.

Uma série de diferentes refinamentos de malha são empregados para estudar a taxa de convergência nos erros  $L^2$  e  $H^1$  (Fig. 9.14). A malha mais pobre possui  $20 \times 20$  células e tamanho das células  $h = 0,125$  e a malha mais fina possui  $140 \times 140$ . O comprimento de transição adotado foi de  $\delta = 1h$  e foram empregados  $4 \times 4$  pontos de quadratura. A Fig 9.14 apresenta a evolução dos erros  $L^2$  e  $H^1$  versus  $h$ . O erro  $e_{H^1}^r$  apresenta comportamento com ordem menor que  $O(h)$ , enquanto o erro  $e_{L^2}^r$  apresenta convergência aproximadamente de ordem  $O(h^3)$  para malhas pouco refinadas e fica estável para malhas muito refinadas. A causa da discrepância entre  $e_{L^2}^r$  e  $e_{H^1}^r$  deve ser motivo para futuros trabalhos.

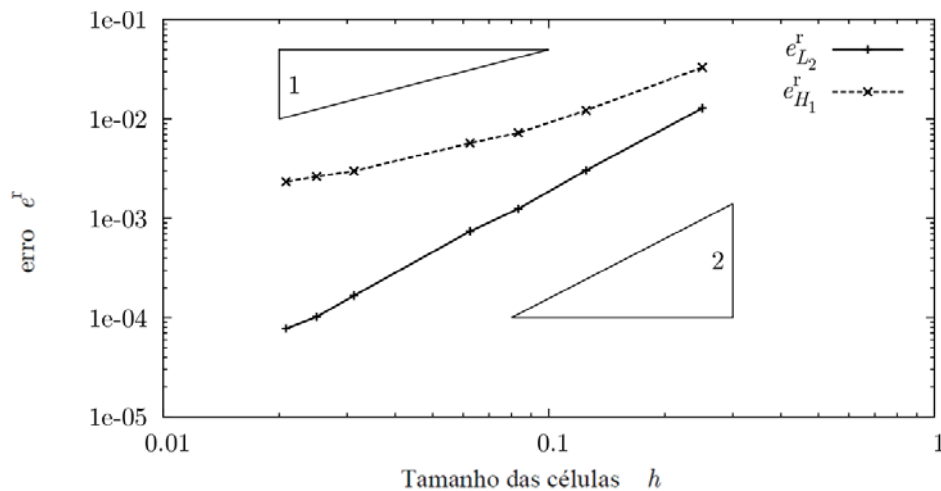


Figura 9.14: Análise de convergência

Um problema presente em muitos dos métodos de elementos finitos baseado em B-splines imersas é a ocorrência de instabilidades numéricas devido às células cortadas pelo contorno. Para estudar a susceptibilidade da técnica proposta a tais instabilidades, o condicionamento do sistema é estudado mantendo-se a malha fixa e variando-se a posição do disco. Para tal estudo é utilizada uma malha com  $30 \times 30$  células e o disco é movido sobre uma linha inclinada de  $30^\circ$  em relação à horizontal. A posição inicial é a origem e 10 incrementos de 0,0125 são adicionados. O condicionamento é estimado com a biblioteca *SuperLU* (DEMMEL et al., 1999), seguindo Higham (2002). Observa-se que tanto o condicionamento do sistema como o erro  $e_{L^2}^r$  variam muito pouco com a mudança de posição (ver Fig. 9.15).

### Cilindro aquecido com movimento

Nesse exemplo, um cilindro com temperatura  $T = 1$  prescrita em sua superfície é imerso em um canal de forma quadrada com condições homogêneas de Dirichlet em suas paredes ( $T = 0$ ). O cilindro move-se segundo uma trajetória senoidal prescrita, enquanto o domínio

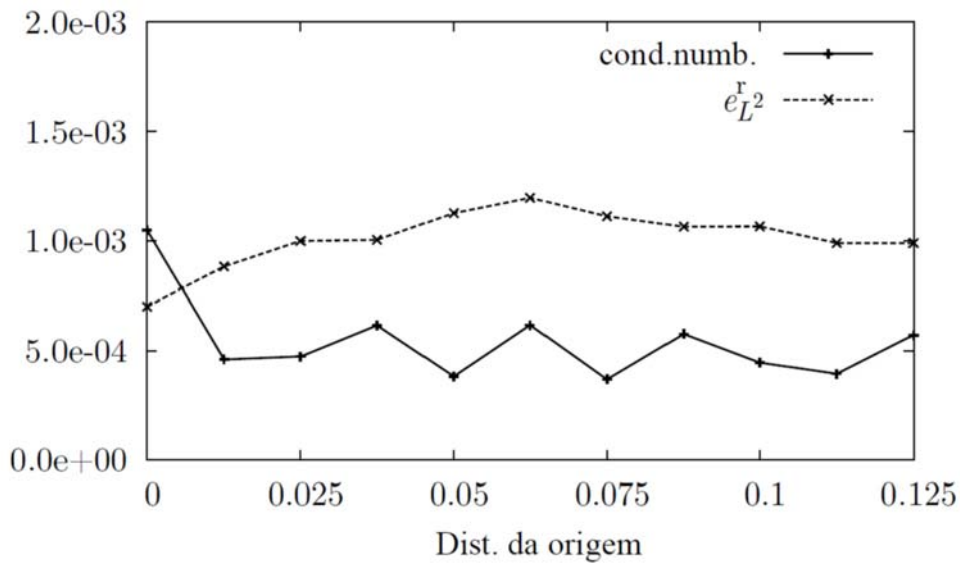


Figura 9.15: Condicionamento do sistema durante o movimento do disco.

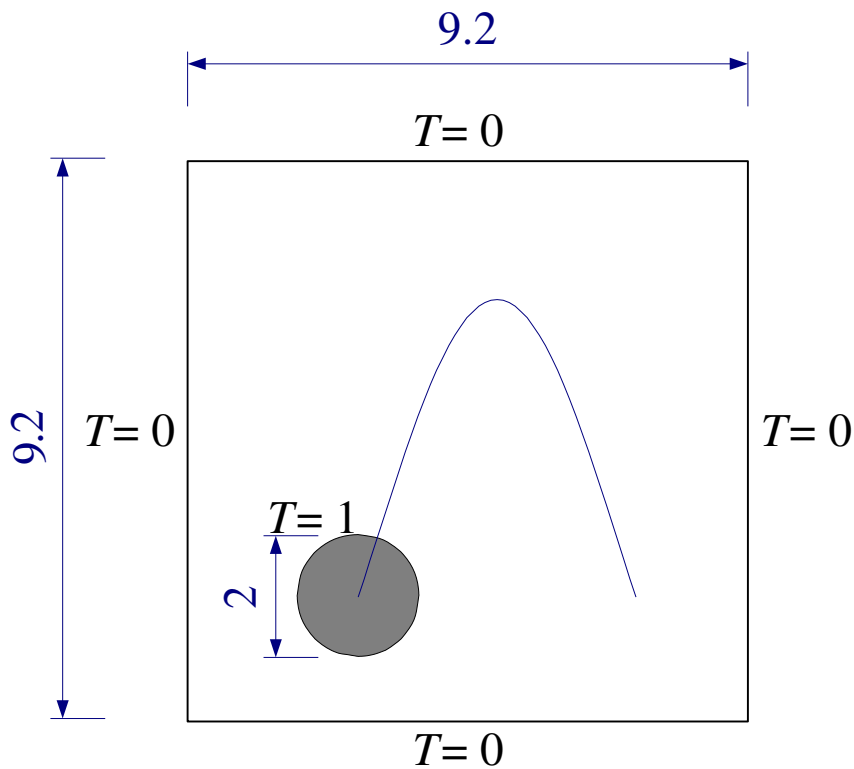


Figura 9.16: —Cilindro aquecido movendo-se em um domínio quadrado.

quadrado permanece fixo, assim como o grid utilizado (ver figura 9.16). Para propósitos de discretização, o domínio físico, consistindo do cilindro e do canal quadrado, é imerso em uma malha cartesiana de dimensões  $10 \times 10$  e é discretizado com  $50 \times 50$  células. Na figura 9.17, apresenta-se a distribuição de temperatura para quatro diferentes posições ao longo da trajetória.

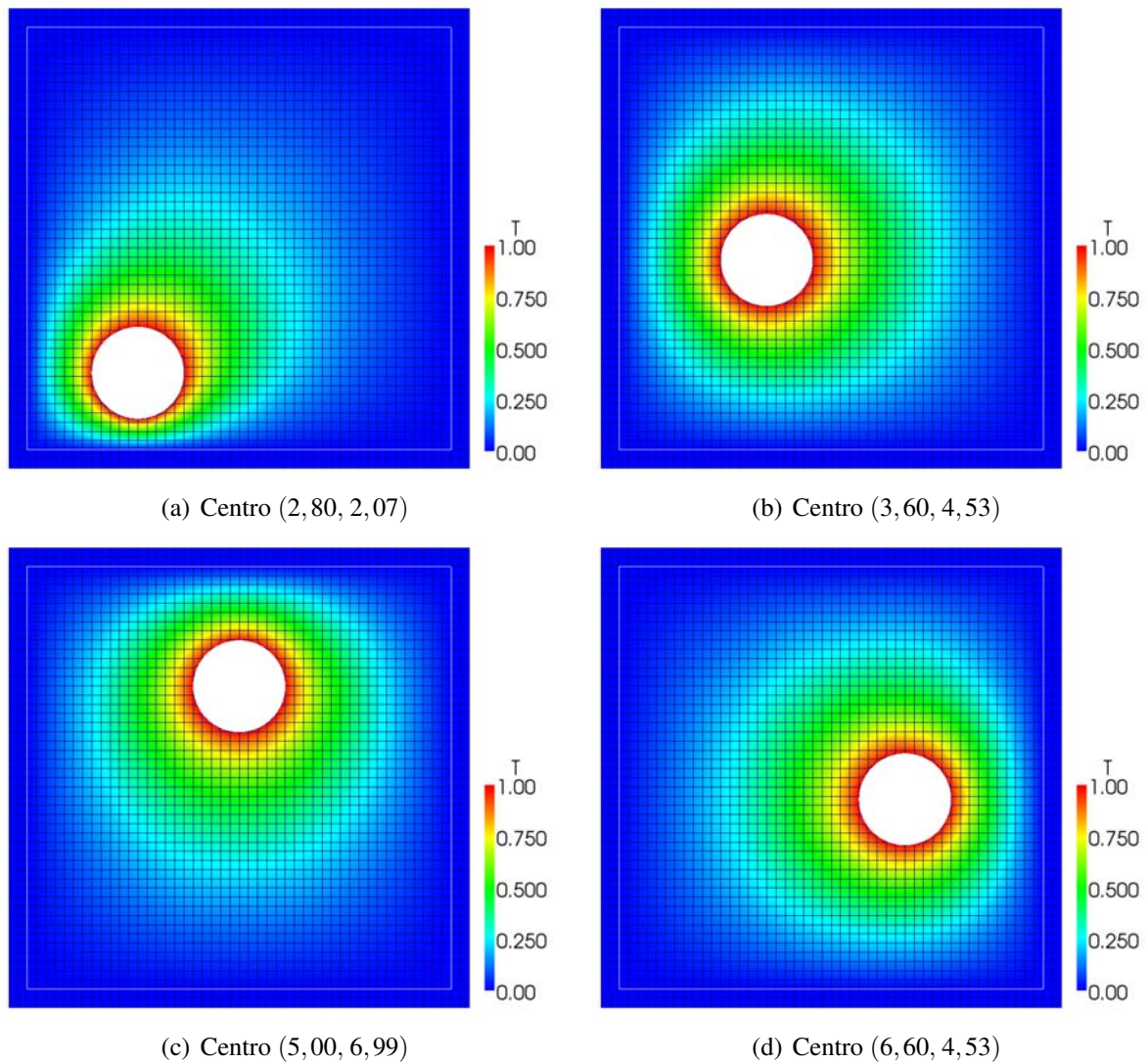


Figura 9.17: Distribuição de temperatura para quatro diferentes posições

### 9.5.2 Pino de Boliche

O caso de um pino de boliche com comportamento elástico, submetido a um deslocamento vertical, provê um exemplo de aplicação do método proposto para formas 3D complexas.

A altura do pino de boliche é  $h = 1$  e seu máximo diâmetro é  $D_{max} = 0.33$ . O módulo de Young tem valor  $E = 10000$  e o coeficiente de Poisson vale  $\nu = 0.05$ .

O domínio Cartesiano possui dimensões  $0.5 \times 0.5 \times 1.1$  e consiste de  $15 \times 15 \times 30$  células. A função distância assinalada para o pino é computada de uma malha triangular da superfície, como mostrado na figura 9.18(a), onde a área azul na parte inferior do pino é onde os deslocamentos verticais foram prescritos  $\bar{u} = 0$  e a área vermelha no topo é a área do pino onde os deslocamentos verticais foram prescritos  $\bar{u} = 0.1$ .



Na figura 9.19, o campo de deslocamento no pino são mostrados para três diferentes cortes.

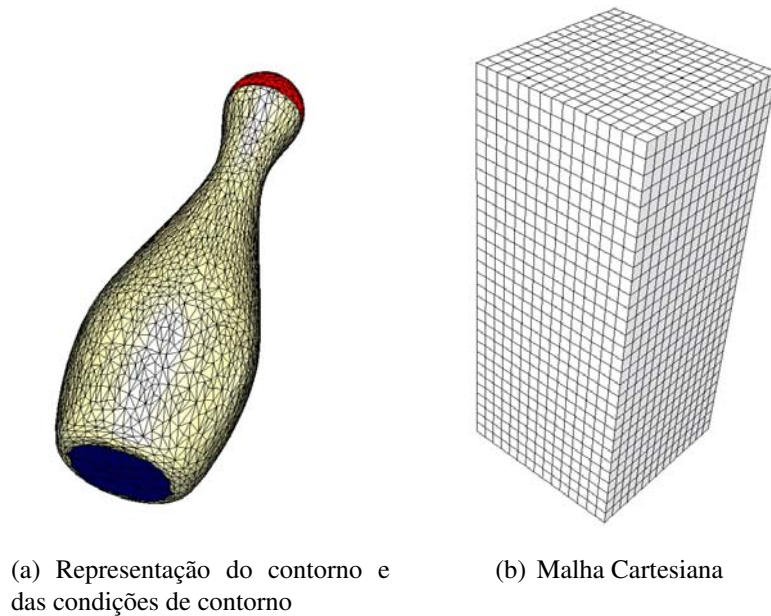


Figura 9.18: Pino de Boliche

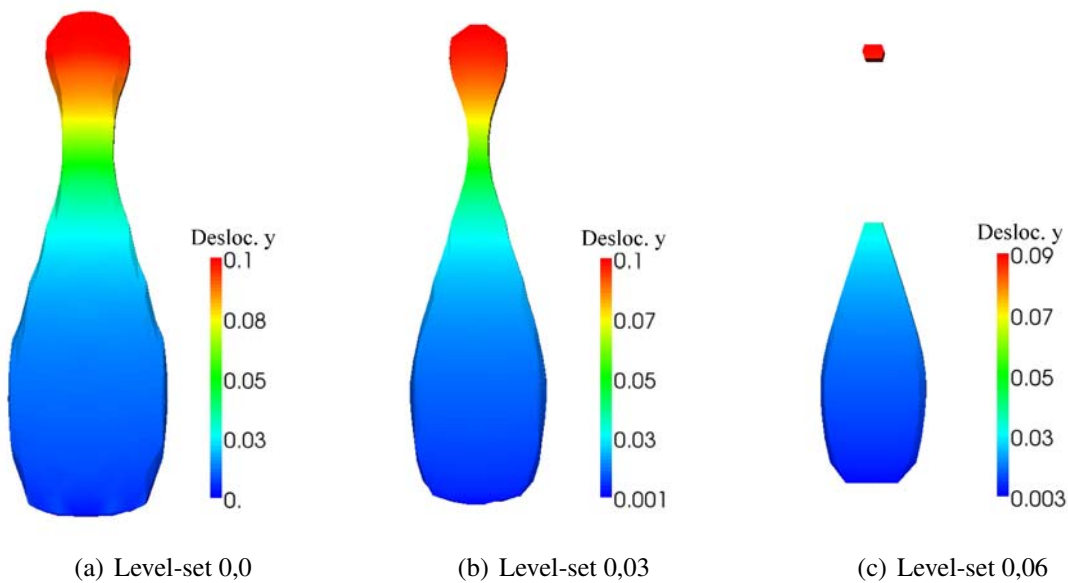


Figura 9.19: Deslocamentos verticais em diferentes cortes

### 9.5.3 Coração humano

Outra geometria interessante é a parte inferior do coração humano, provida por van Oostrom e van Dam (2007) (ver Fig. 9.20). A parte analisada consiste do Endocárdio, Epicárdio e conexão com a base. A geometria é definida por 16334 triângulos.

As dimensões físicas de um ortoedro regular, de faces paralelas aos eixos cartesianos, que contém a parte inferior do coração inscrita na posição analisada são  $96,3 \times 109,7 \times 99,3$  mm. A malha cartesiana adotada é definida com vértices nos pontos possui  $40 \times 45$  células e possui vértices nos pontos  $(-10, 90)$ ,  $(-43, 72)$  e  $(-68, 37)$ . As *i-splines* são definidas sobre 7601 células de domínio e 10116 células de contorno. A conexão na base foi mantida fixa e a parede no fim da 'ponte' foi deslocada na direção  $x$  para fora.

É suposto um material com módulo de Young  $E = 100$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Na Fig. 9.20 são apresentados os deslocamentos na direção  $x$ . A imagem da direita é obtida com base em curvas de nível da função distância assinalada e a imagem da direita com base na representação iso-paramétrica. As caixas indicam a malha cartesiana.

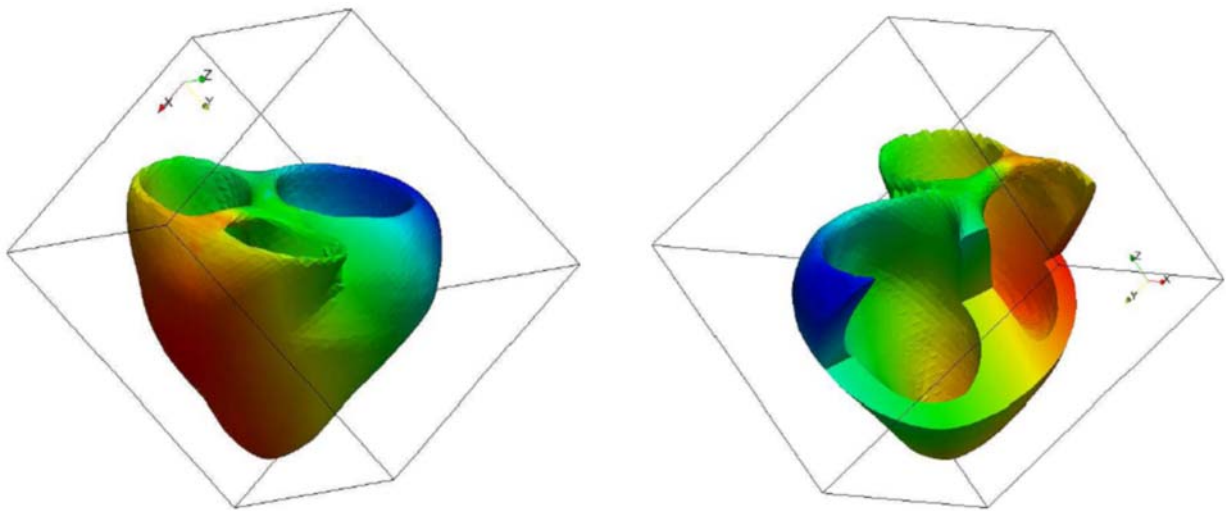


Figura 9.20: Deslocamentos na direção  $x$ .

## 9.6 Sugestões para aplicação das *i-splines* para interação fluido-estrutura

O mesmo algoritmo posicional para análise dinâmica de cascas deve ser empregado.

A representação total do contorno consiste em uma malha triangular que deve conter o contorno da estrutura, contorno da entrada, contorno da saída e contornos com paredes rígidas.

Dois diferentes algoritmos devem ser testados e estudados em futuros trabalhos. No primeiro, o fluido deve ser descrito na forma Euleriana enquanto o sólido na forma Lagrangeana de forma semelhante ao acoplamento descrito no capítulo 8, porém com a forma de aplicação

de condições de contorno efetuada com uso das B-spline ponderadas racionalizadas.

Já no segundo algoritmo para dinâmica dos fluidos permanece explícito, porém baseado em uma descrição Lagrangeana. O domínio computacional baseado na representação do contorno imerso definido no tempo  $n$  pode se deformar durante um intervalo de tempo  $\Delta(t)$  (ver Fig. 9.21), então os pontos de quadratura no novo domínio computacional, definido pela representação do contorno imersa no instante  $n + 1$  é projetado no domínio deformado, para se tomar os valores para integrar o lado direito do sistema e então resolver o problema seguindo o mesmo procedimento, chegando-se ao instante  $n + 2$  e assim sucessivamente. Se a projeção dos pontos de quadratura é encontrada fora da região do domínio, isso significa que está sobre a região de entrada (Fig.9.21(b)), e então, as condições de entrada são consideradas para integração.

Embora as células no domínio deformado não correspondem às células no domínio computacional, como as b-splines possuem alta ordem de continuidade, é possível integrar numericamente com erro muito pequeno, ou mesmo sem erro, baseado em técnicas como as introduzidas por Hughes et al. (2008).

Esse procedimento automaticamente acopla o fluido à estrutura sem a necessidade de nenhuma técnica para movimentação da malha, e também evita os termos convectivos que produzem variações espúrias quando empregado o método clássico de Galerkin (Bubnov-Galerkin).



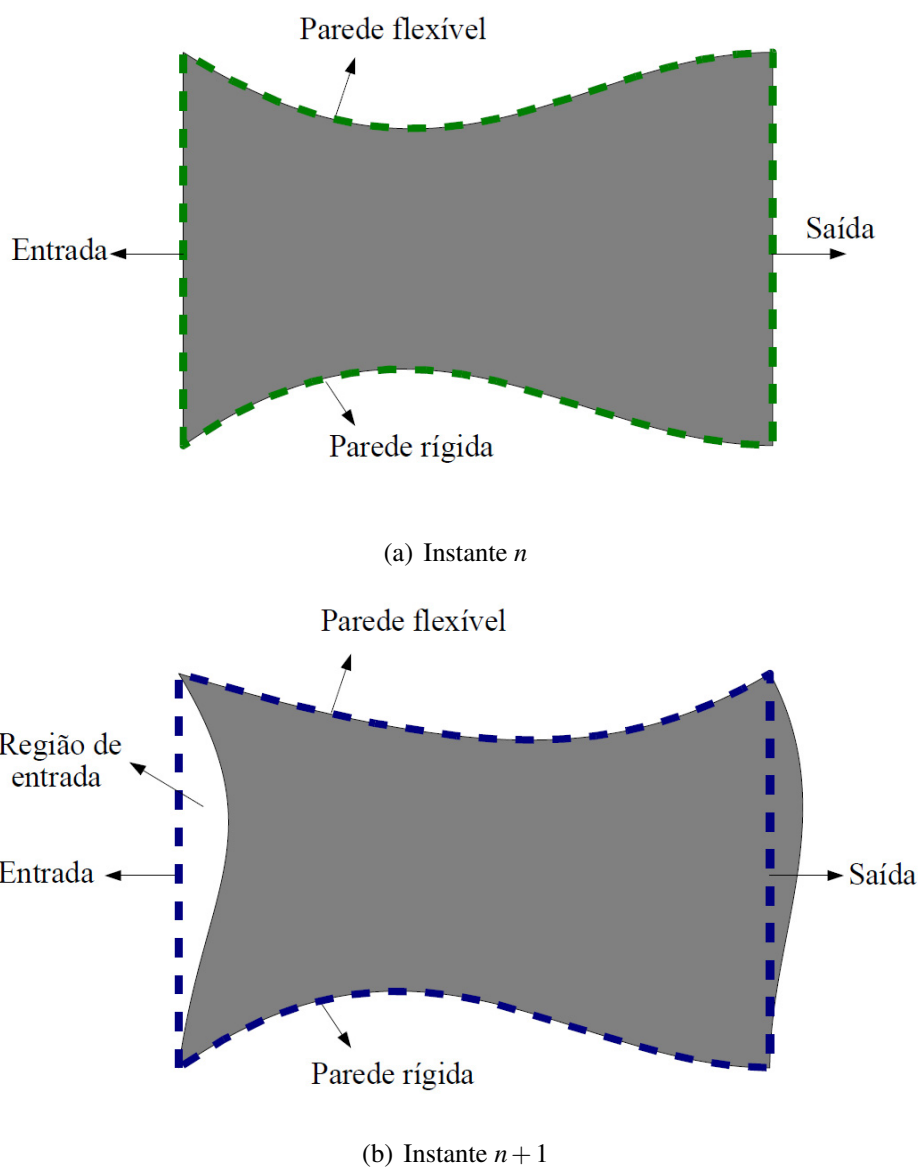


Figura 9.21: Procedimento Lagrangeano: as linhas tracejadas referem-se à representação do contorno para o domínio computacional do fluido



## *10 Conclusão*

Este trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de ferramentas computacionais baseadas no Método dos Elementos Finitos para aplicações em análise de interação fluido-estrutura com o emprego da formulação posicional para análise dinâmica não linear geométrica de cascas. A análise numérica de interação fluido-estrutura ocupa lugar de destaque entre as pesquisas atuais em mecânica computacional nas principais instituições do mundo. O presente trabalho introduz a pesquisa interação fluido-estrutura no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo por meio deste trabalho.

Inicialmente foi desenvolvido e implementado um programa para análise transiente de dinâmica de fluidos, o qual foi testado através de exemplos. Na sequência estudou-se o algoritmo baseado em formulação posicional para análise dinâmica não linear geométrica de cascas. Então foram propostos dois modelos de acoplamento particionados entre o programa de cascas e o programa de fluido, um com movimentação da malha do fluido e outro com a malha do fluido fixa, originalmente aplicado neste trabalho. Ambos os modelos foram testados por meio de exemplos. Finalmente foi desenvolvido um novo espaço tentativa para o método dos elementos finitos baseado em B-splines imersas ponderadas e racionalizadas, o qual é sugerido para ser aplicado na análise de interação fluido-estrutura e que vêm sendo estudado como continuidade da presente pesquisa.

O programa de dinâmica dos fluidos considera o escoamento compressível e pode simular tanto as equações de Euler como de Navier-Stokes, tanto em descrição Euleriana como Lagrangeana-Euleriana arbitrária (ALE), permitindo assim movimentação arbitrária da malha de elementos finitos. Nesse programa são empregados elementos finitos tetraédricos com aproximação linear. A integração temporal é explícita e feita ao longo de linhas características, o que naturalmente introduz termos dissipativos na direção das linhas de corrente, estabilizando as variações espúrias que surgem quando empregado o método clássico de Galerkin devido à presença dos termos de convecção. As discontinuidades fortes devidas a ondas de choque são tratadas através da introdução de uma viscosidade artificial calculada como função da segunda

derivada da pressão. A resolução do sistema de equações discretizadas da mecânica dos fluidos é feita através de um balanço de massa, no qual a solução é inicialmente aproximada com o emprego da matriz de massa concentrada e, por um processo iterativo, busca-se a solução obtida considerando-se a matriz de massa consistente.

A partir dos resultados obtidos, foi possível concluir que o programa para análise de dinâmica dos fluidos é bastante robusto e eficiente. A integração ao longo de características apresentou bons resultados quanto à estabilização dos termos convectivos, porém, como já referenciado por outros autores, nota-se que à medida que o passo de tempo diminui a mesma perde eficiência e o uso da matriz de massa consistente se faz necessário para que sejam obtidos resultados coerentes. Outra forma de se manter a eficiência dos termos de segunda ordem na estabilização é o emprego de sub-ciclos de tempo, conforme estudado no exemplo 5.6.3. A captura de choque, feita através da introdução de viscosidade artificial se mostrou bastante adequada, uma vez que não se observou comportamentos espúrios na presença de choques. A resolução dos sistemas com uso do balanço de massa se mostrou bastante eficiente, convergindo em poucas iterações. Também observou-se que o método da compressibilidade artificial empregado na análise de fluidos incompressíveis é de convergência muito lenta e estudos devem ser feitos para a implementação de modelos implícitos ou semi-implícitos.

Através do estudo do algoritmo implícito para análise de dinâmica de casca, foi possível observar que o elemento finito posicional de cascas com 7 parâmetros nodais por nós é totalmente adequado para análise de problemas de interação fluido-estrutura, uma vez que o mesmo possui cinemática exata e não apresenta problemas de travamento devido à consideração da variação linear da deformação ao longo da espessura, apresentando ainda bons resultados tanto para problemas com flexão dominante como para problemas com efeito de membrana dominante.

No primeiro modelo de acoplamento proposto, o fluido é descrito na forma ALE, sendo que cada nó da malha do fluido é deslocado dinamicamente em função da movimentação da casca e das distâncias do nó até os nós do contorno referente à casca e até os nós do contorno fixo. Nesse modelo não existe necessidade de que os nós das malhas do fluido e da casca sejam coincidentes, sendo que durante o pré processamento é feito um mapeamento das posições locais dos nós da casca na malha do fluido e dos nós do fluido na malha da casca e, sobre estas posições, são efetuadas as transferências de cargas e velocidades. Dentro de cada passo no tempo para a casca são permitidos passos menores para o fluido formando-se um sub-ciclo de tempo a cada passo da estrutura, sendo equação horária das posições da malha aproximada por um polinômio de ordem 3 conforme mencionado no item 7.3, obtido com base nos valores de velocidade e posição da casca no início e no final do intervalo de tempo da estrutura.

O modelo de acoplamento ALE-Lagrangeano se mostrou bastante eficiente e robusto. A técnica empregada para movimentação da malha produziu resultados muito bons para os exemplos estudados, apresentando uma deformação bastante suave da malha. O emprego de sub-ciclos de tempo entre fluido e estrutura também se mostrou bastante eficiente permitindo emprego de intervalos de tempo para casca bastante superior ao intervalo de tempo explícito para o fluido mantendo a solução consistente. O uso de malhas sem coincidência de nós permitiu grande flexibilidade para geração de malhas bem como emprego de malhas com tamanhos de elementos bastante diferentes.

O segundo modelo de acoplamento, chamado imerso, destina-se a estudo de problemas com elevada escala de deslocamento e mudanças de forma tais como estruturas infláveis e consiste em acoplar o fluido em descrição Euleriana com a casca em descrição Lagrangeana considerando contorno imerso. Nesse modelo a casca é imersa em um bloco de malha tetraédrica não estruturada usada para análise do fluido. A técnica baseia-se em descrever a forma da superfície de nível zero de uma função distância assinalada e posteriormente alterar os valores nodais de velocidade dos nós imediatamente externos ao contorno e dos nós internos situados dentro de uma faixa de largura pré-definida de forma a impor os valores a serem prescritos sobre a posição do contorno. Esta técnica de imposição das condições de contorno foi utilizada originalmente neste trabalho.

Dois problemas são propostos a fim de estudar o acoplamento imerso. O primeiro exemplo que consiste em um tubo inflável e é comparado com os resultados segundo o modelo de acoplamento baseado na descrição ALE, mostrando ótima concordância. O segundo exemplo consiste na simulação da deflagração de um air-bag, e mostra a robustez do modelo para problemas com grande escala de deslocamentos e geometria e mudanças de forma bastante complexas. Com a conclusão da montagem do cluster do Departamento, será possível no futuro efetuar análise de convergência para exemplos mais complexos como este.

Como propostas para futuros desenvolvimentos desta pesquisa, iniciou-se estudos relativos a funções B-Splines. A utilização deste tipo de funções deverá resolver problemas de instabilidade associados a movimentações espúrias resultantes de propagação indevida de ondas pelas aproximações em polinômios de Lagrange.

O novo procedimento de elementos finitos baseado em B-splines com contorno imerso em um bloco de malha estruturada desenvolvido neste trabalho e sugerido para aplicação em análise de interação fluido-estrutura em trabalhos futuros satisfaz exatamente as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. O novo método possibilita isso através da separação das funções de forma no contorno de Dirichlet das demais, tornando o espaço de elementos finitos similar

aos bem conhecidos espaços Lagrangeanos. A separação é baseada em uma combinação da introdução de uma função ponderadora para cada b-spline e normalização das B-splines, o que faz o método herdar a maioria das propriedades das funções de forma B-spline. Além disso, foi demonstrado que o método satisfaz o *patch test* para tensões constantes. Embora as funções de forma não sejam necessariamente polinomiais, uma descrição iso-paramétrica da geometria torna possível a interpolação exata de funções lineares. O método baseado em B-splines foi aplicado a problemas de valor de contorno elípticos de segunda ordem a fim de se obter sua validação, o que provou as características esperadas para a nova técnica.

A partir de um apanhado geral, é possível destacar três contribuições originais importantes nesta tese. A primeira é o emprego da formulação posicional de análise dinâmica de cascas em análise de interação fluido estrutura, o que, juntamente com o trabalho de Coda e Paccola (2009) demonstram a eficácia e robustez dessa formulação para problemas dinâmicos. A segunda é o desenvolvimento de um método de acoplamento que admite contorno imerso em uma malha não estruturada de elementos finitos e a terceira é o desenvolvimento e validação de uma nova técnica de elementos finitos baseada em B-splines com contorno imerso (i-splines) em uma malha cartesiana.

Como temas para trabalhos futuros sugerem-se o estudo de um algoritmo implícito ou semi-implícito para simulação de escoamentos incompressíveis, um estudo numérico quantitativo completo da técnica de acoplamento Euleriano-Lagrangeano com contorno imerso, a implementação de acoplamento com emprego da nova técnica de B-splines imersas proposta, o estudo aprofundado de algoritmos para cálculo da função distância assinalada para otimizar o desempenho computacional tanto da técnica de acoplamento Euleriano-Lagrangeano com contorno imerso como para a continuidade da pesquisa com as B-splines ponderadas racionalizadas e o desenvolvimento de um espaço a partir da nova técnica de B-splines imersas que seja estável quanto às restrições Babuska-Brezzi.

## *Referências Bibliográficas*

ADINI, A.; CLOUGH, R. W. *Analysis of shel structures by the finite element method*. Washington D. C., 1960. National Science Foundation Report.

AKIN, J. E.; TEZDUYAR, T. E. Calculation of the advective limit of the supg stabilization parameter for linear and higher-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 21-22, p. 1909 – 1922, 2004. ISSN 0045-7825.

ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamics - the basics with applications*. 1st. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.

ANTUNES, A. R. E.; LYRA, P. R. M.; WILLMERSDORF, R. B. A methodology and computational system for the simulation of fluid-structure interaction problem. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*, v. 03, p. 225–265, 2005.

ARGYRIS, J. et al. Finite element method – the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 17-18, n. Part 1, p. 1 – 106, 1979. ISSN 0045-7825.

ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element tric. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 26-27, p. 3005 – 3038, 2003. ISSN 0045-7825.

ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; SCHARPF, D. W. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 14, n. 3, p. 401 – 451, 1978. ISSN 0045-7825.

ARIENTI P. HUNG, E. M. M.; SHEPHERD, J. *A Level Set Approach to Eulerian-Lagrangian Coupling*. Pasadena, California, 2008. Caltech ASCI technical report 136.

ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos*. 2a.. ed. Campinas, SP, Brasil: Editora Unicamp, 2003. 298 p.

BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deromation dynamic analysis. *International journal for numerical methodods in engineering*, 9, p. 353–386, 1975.

BATHE, K. J.; ZHANG, H. Finite element developments for general fluid flows with structural interactions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 60, p. 213–232, 2004.

BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. A study of theree-node triangular plate bending elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 15, p. 1771–1812, 1980.

BATTINI, J.-M. A non-linear corotational 4-node plane element. *Mechanics Research Communications*, v. 35, n. 6, p. 408 – 413, 2008. ISSN 0093-6413.

BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362 – 6377, 2006. ISSN 0045-7825.

BELYTSCHKO, T.; GILBERTSEN, N. D. Implementation of mixed time integration techniques on a vectorized computer with shared memory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, n. 1, p. 1803–1828, 1992.

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, n. 1, p. 65–84, 1977. ISSN 0029-5981.

BILLAH, K. Y.; SCANLAN, R. H. Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 59, n. 2, p. 118–124, 1991.

BISMARCK-NASR, M. N. Finite elements in aeroelasticity of plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, ASME, v. 49, n. 10S, p. S17–S24, 1996.

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. Nova York, USA: Dover Publications, 1996.

BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369 – 391, 1998. ISSN 0045-7825.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579 – 595, 2000. ISSN 0045-7825.

BRESLAVSKY, I. et al. Nonlinear modes of snap-through motions of a shallow arch. *Journal of Sound and Vibration*, v. 311, n. 1-2, p. 297 – 313, 2008. ISSN 0022-460X.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199 – 259, 1982. ISSN 0045-7825.

CALLE, J. L. D.; DEVLOO, P. R. B.; GOMES, S. M. Stabilized discontinuous galerkin method for hyperbolic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 17, p. 1861 – 1874, 2005. ISSN 0045-7825.

CANIC, S.; MIKELIC, A.; TAMBACA, J. A two-dimensional effective model describing fluid-structure interaction in blood flow: analysis, simulation and experimental validation. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 333, n. 12, p. 867 – 883, 2005. ISSN 1631-0721.

CARTER, J. *Numerical solutions of the supersonic, laminar flow over a two-dimensional compression corner*. [S.l.], 1972. NASA: National Aeronautics and Space Administration - Langley Research Center Report.

CASADEI, F.; HALLEUX, J. P. An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 128, n. 3-4, p. 231 – 289, 1995. ISSN 0045-7825.



- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. A. Implicit supg solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477 – 3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CEBRAL, J. R.; LÖHNER, R. Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35, p. 687–692, 1997.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK; ORTIZ, M. Fully  $c^1$ -conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 51, p. 813–833, 2001.
- CIRAK, F.; CUMMINGS, J. C. Generic programming techniques for parallelizing and extending procedural finite element programs. *Eng. with Comput.*, Springer-Verlag, London, UK, v. 24, p. 1–16, January 2008. ISSN 0177-0667.
- CIRAK, F.; ORTIZ, M.; SCHRÖDER, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 47, p. 2039–2072, 2000.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A lagrangian-eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, n. 6-7, p. 491 – 498, 2005. ISSN 0045-7949. Frontier of Multi-Phase Flow Analysis and Fluid-Structure.
- CLOUGH, R. W.; TOCHER, J. L. Finite element stiffness matrixes for the analysis of plate bending. In: *Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Ohio, USA: Wright-Patterson AFB, 1965. pp. 515–545.
- COCKBURN, B.; LIN, S.-Y.; SHU, C.-W. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iii: One-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, v. 84, n. 1, p. 90 – 113, 1989. ISSN 0021-9991.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. 168 p. Tese (Tese para concurso de professor titular) — Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, n. 47-48, p. 3712–3722, OCT 1 2009. ISSN 0045-7825.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Latin American Journal of Solids and Structures, 6, n. 3, p. 187–212, Sep 2009. ISSN 1679-7817.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, 40, n. 1, p. 185–200, Jun 2007. ISSN 0178-7675.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5, n. 3, p. 205–223, Sep 2008. ISSN 1679-7817.

- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. *Mathematical problems in engineering*, 2009. ISSN 1024-123X.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107 – 1137, 2010. ISSN 0307-904X.
- CODA, H. B.; PACCOLLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, p. 185–200, 2007.
- COIMBRA, A. L. *Lições de Mecânica do Contínuo*. São Paulo, Brasil: EDUSP/Edgard Blucher, 1978.
- COLLAR, A. R. The Expanding Domain of Aeroelasticity. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1946.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. England: John Wiley & Sons, 1991.
- DE MARQUI JR, C.; BENINI, G. R.; BELO, E. M. Uma revisão histórica do fenômeno flutter. In: *Anais do XVI Congresso brasileiro de engenharia mecânica (COBEM)*. Uberlândia, MG, Brasil: ABCM, 2001. v. 6, p. 136–147.
- DEGAND, C.; FARHAT, C. A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computers & Structures*, v. 80, n. 3-4, p. 305 – 316, 2002. ISSN 0045-7949.
- DEMMEL, J. W.; GILBERT, J. R.; LI, X. S. *SuperLU Users' Guide*. Berkeley, California, 1999.
- DEVLOO, P. R. B.; FORTI, T. Método de elementos finitos contínuo e descontínuo combinados aplicado a problema de convecção-difusão. In: *XXVI Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*. Guarapari - ES, Brazil: [s.n.], 2005.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689 – 723, 1982. ISSN 0045-7825.
- EDWARDS, J.; MALONE, J. Current status of computational methods for transonic unsteady aerodynamics and aeroelastic applications. *Computing Systems in Engineering*, v. 3, n. 5, p. 545 – 569, 1992. ISSN 0956-0521.
- EVANS, J. et al. n-widths, sup-infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometric finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 1726–1741, 2009.
- FARHAT, C. Advanced course on computational fluid dynamics. In: *Computation in sciences, methods and algorithms on supercomputing for engineering - COSMASE*. Lausanne, Switzerland: [s.n.], 1995.

- FARHAT, C.; LESOINNE, M.; MAMAN, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: 3-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *International journal Numerical methods in Engineering*, 21, n. 10, p. 807–835, nov 30 1995. ISSN 0271-2091.
- FARMER, C. L.; NORMAN, R. A. The implementation of moving point methods for convection-diffusion equations. *Methods for Fluid Dynamics II*, p. 635–644, 1986.
- FEDKIW, R. P. et al. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.*, San Diego, CA, USA, v. 152, n. 2, p. 457–492, 1999. ISSN 0021-9991.
- FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247 – 3270, 2001. ISSN 0045-7825.
- FERZIGER, J. Simulation of complex turbulent flows: recent advances and prospects in wind engineering. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 46-47, p. 195 – 212, 1993. ISSN 0167-6105. Proceedings of the 1st International on Computational Wind Engineering.
- FORTUNA, O. A. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. São Paulo, Brasil: EDUSP, 2000.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 2001.
- GIORDANO, J. et al. Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction. *Shock Waves*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 14, p. 103–110, 2005. ISSN 0938-1287.
- GLÜCK, M. et al. Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 89, n. 14-15, p. 1351 – 1368, 2001. ISSN 0167-6105.
- GRECO, M.; CODA, H. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, n. 3-5, p. 1141 – 1174, 2006. ISSN 0022-460X.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- HABBAL, F. *The Optimal Transportation Meshfree Method for General Fluid Flows and Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*. 120 p. Tese (PhD thesis) — California Institute of Technology, Pasadena, California, 2009.
- HIGHAM, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Second. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. xxx+680 p. ISBN 0-89871-521-0.
- HIRSCH, G. H. Damping measures to control wind-induced vibrations. In: SOCKEL, H. (Ed.). *Wind-excited vibrations of structures*, CISM Course. Wien - New York: Springer-Verlag, 1994. p. 1–51.

- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 39, n. 1, p. 201 – 225, 1981. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4DD1MDG-2W/2/71b2bb665647e3c34323e9523c1aad08>>.
- HÖLLIG, K. *Finite Element Methods with B-Splines*. [S.l.]: SIAM, 2003.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2002.
- HRON, J.; MÁDLÍK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431 – 1458, 2007. ISSN 1468-1218.
- HUGHES, T.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135–4195, 2005.
- HUGHES, T. J. R.; CARNOY, E. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, n. 1, p. 69 – 82, 1983. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-47X7BSP-2T/2/7c74e7dbc0cf150bfbf3222ad7c2e840>>.
- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331 – 362, 1981. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-47X8730-8S/2/f7e76e6fba5f0ecd19a0246ff68bdf1c>>.
- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells-part ii. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167 – 181, 1981. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-4808X05-5G/2/a4274d0becc0d6ca937ea386377d506b>>.
- HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for nurbs-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Accepted Manuscript, p. In Press, 2008.
- JASAK, H.; TUKOVIC, Z. Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method. *Transactions of FAMENA*, v. 30, n. 2, 2007.
- KANTOROWITSCH, W. I. K. L. W. *Approximate Methods of Higher Analysis*. translated from the 4th russian edition. [S.l.]: Interscience Publishers (New York), 1964.
- KAWABATA, C. L. O. et al. Desenvolvimento e implementação de um método de elementos finitos paralelo para análise não linear de estruturas. In: *30<sup>o</sup> Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*. Búzios, Brazil: [s.n.], 2009.

- KAWABATA, C. L. O. et al. Finite Element Nodal Approach for Parallel Processing of Non Linear Shell Analysis. In: *Proceedings of 21st International Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing*. [S.l.: s.n.], 2009. (International Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing), p. 109–116. ISSN 1550-6533.
- KAWAHARA, M.; HIRANO, H. A finite element method for high reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, n. 2, p. 137–163, 1983.
- KOBBUS, B.; FARHAT, C. Secon-order time-accurate and geometrically conservative implicit shemes for flow computations on unstructured dynamicmeshes. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering*. [S.l.]: Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999. v. 170, p. 103–129.
- KUBOTA, T.; KO, D. R. S. A second-order weak interaction expansion for moderately hypersonic flow past a flat plate. *AIAA Journal*, v. 5, n. 10, p. 1915–1917, 1967.
- LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. 4th. ed. New York: Dover, 1986.
- LANDON, R. H. Naca 0012 oscilatory and transient pitching. *AGARD R-702 Compendium of unsteady aerodynamic measurements*, p. 3–1 – 3–25, 1982.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbelent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 3, p. 269–289, 1974.
- LI, X.; DUAN, Q. Meshfree iterative stabilized taylor-galerkin and characteristic-based split (cbs) algorithms for incompressible n-s equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6125 – 6145, 2006. ISSN 0045-7825.
- LÖHNER, R. et al. An adaptative finite element procedure for compressible high speed flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, p. 441–465, 1985.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. 180 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2008.
- MAUCH, S. P. *Efficient algorithms for solving static Hamilton-Jacobi equations*. 264 p. Tese (PhD thesis) — California Institute of Technology, Pasadena, California, 2003.
- MELOSH, R. L. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. *Journal of Aeronautical Sciensces*, 28, n. , p. 34–42, 1961.
- MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, p. 499–520, 1977.
- MORAND, H. J. P.; OHAYON, R. *Fluid structure interaction*. Paris, França: John Wiley & Sons e Masson, 1995.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentals of fluid mechanics*. 4th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc., 2002.

NITHIARASU, P. On boundary conditions of the characteristic based split (CBS) algorithm for fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, n. 4, p. 523–536, Jun 10 2002. ISSN 0029-5981.

NITHIARASU, P. An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, p. 1815–1845, 2003.

NITHIARASU, P. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48, n. 12, p. 1415–1428, Aug 30 2005. ISSN 0271-2091.

NITHIARASU, P.; CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. The Characteristic-Based Split (CBS) scheme - a unified approach to fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66, n. 10, p. 1514–1546, Jun 4 2006. ISSN 0029-5981.

NITHIARASU, P.; CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. C. The characteristic-based split (cbs) scheme - a unified approach to fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 66, n. 10, p. 1514–1546, 2006.

NITHIARASU, P.; LIU, C.-B. An artificial compressibility based characteristic based split (cbs) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 23-24, p. 2961 – 2982, 2006. ISSN 0045-7825.

NITHIARASU, P. et al. Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, n. 9, p. 1325–1353, Dec 15 1998. ISSN 0271-2091.

NITSCHKE, J. Über ein variationsprinzip zur lösung von Dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 36, p. 9–15, 1971.

ODEN, J.; BABUSKA, I.; BAUMANN, C. A discontinuous hp finite element method for diffusion problems. *Journal of Computational Physics*, 146, n. 2, p. 491–519, Nov 1 1998. ISSN 0021-9991.

OGDEN, R. Non-linear elastic deformations. *Engineering Analysis*, v. 1, n. 2, p. 119 – 119, 1984. ISSN 0264-682X.

PASCON, J. P. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Tese (Dissertação de Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2008.

PETERS, J.; REIF, U. *Subdivision Surfaces*. [S.l.]: Springer Verlag, 2008. (Springer Series in Geometry and Computing).

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física - Parte I*. Rio de Janeiro, Brasil: Ao livro Técnico S. A., 1965.

- RIFAI, S. M. et al. Multiphysics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 174, n. 3-4, p. 393 – 417, 1999. ISSN 0045-7825.
- SANCHES, R.; BORNEMANN, P.; CIRAK, F. Immersed b-spline (i-spline) finite element method for geometrically complex domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 13-16, p. 1432 – 1445, 2011. ISSN 0045-7825.
- SANCHES, R. A. K. *Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código computacional*. Tese (Dissertação de Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2006.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Formulação bidimensional alternativa para a interação fluido-estrutura através do mef. In: *XXIX Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*. Maceió, Brazil: [s.n.], 2008.
- SANCHES, R. A. K.; LONG, Q.; CIRAK, F. Immersed b-spline finite element method for complex domains. In: *30<sup>o</sup> Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*. Búzios, Brazil: [s.n.], 2009.
- SANTOS, E. S. R. *Desenvolvimento de método implícito para simulador numérico tridimensional de escoamentos compressíveis invíscidos*. Tese (Dissertação de Mestrado) — UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil, 2004.
- SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, n. 4, p. 761–785, Feb 10 2001. ISSN 0029-5981.
- SHAPIRO, E.; DRIKAKIS, D. Artificial compressibility, characteristics-based schemes for variable density, incompressible, multi-species flows. part i. derivation of different formulations and constant density limit. *Journal of Computational Physics*, v. 210, n. 2, p. 584 – 607, 2005. ISSN 0021-9991.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42, n. 3, p. 301–330, 1984. ISSN 0045-7825.
- SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42, n. 1, p. 97–116, Jan 1992. ISSN 0045-7949.
- SIMO, J. C. et al. Finite deformations postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, n. 5, p. 779–800, May 1986. ISSN 0029-5981.
- SORIA, A.; CASADEI, F. Arbitrary Lagrangian-Eulerian multicomponent compressible flow with fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25, n. 11, p. 1263–1284, 1997.
- SORIANO, H. L. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo, SP, Brasil: EdUSP, 2003. 578 p.
- SOUZA, H. A. F. *Manual de instruções - Fundamentos de aeronáutica*. São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1991. Manual da EMBRAER.

- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2nd. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- SURANA, K. S. Geometrically non-linear formulation for 2 dimensional curved beam elements. *Computers & Structures*, 17, n. 1, p. 105–114, 1983. ISSN 0045-7949.
- TANNO, H. et al. Interaction of a shock with a sphere suspended in a vertical shock tube. *Shock Waves*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 13, p. 191–200, 2003. ISSN 0938-1287.
- TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica de escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis Aplicando o Método de Elementos Finitos*. Tese (Dissertação de Mestrado) — UFRGS, Rio Grande do Sul, Brasil, 1996.
- TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*. 237 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- TEIXEIRA, P. R. F. E.; AWRUCH, A. M. Numerical Simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, 34, p. 249–273, 2005.
- TEZDUYAR, T. E.; SENGA, M. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 13-16, p. 1621 – 1632, 2006. ISSN 0045-7825. A Tribute to Thomas J.R. Hughes on the Occasion of his 60th Birthday.
- THEODORSEN, T.; GARRICK, I. E. *Mechanism of flutter. a theoretical and experimental investigation of the flutter problem*. Hampton, Virginia, USA, 1940. NASA: National Aeronautics and Space Administration - Langley Research Center Report.
- TIMOSHENKO, S. *History of the strength of materials*. 1st. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1953.
- TIMOSHENKO, S. *Theory of elasticity*. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 1970.
- TOCHER, J. L. *Analysis of plate bending using triangular elements*. Tese (PhD Thesis) — Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1962.
- VALIAPPAN, S. *Continuum mechanics fundamentals*. [S.l.]: A. A. BALKEMA, Rotterdam, 1981. 227 p.
- VAN OOSTEROM, A.; VAN DAM, P. Triangulated torso and heart geometry. In: . [s.n.], 2007. Disponível em: <<http://www.physionet.org/challenge/2007/data/case0003-tri/>>.
- WARREN, J.; WEIMER, H. *Subdivision methods for geometric design: A constructive approach*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2001.
- WILCOX, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.
- WOODWARD, P.; COLELLA, P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, v. 54, n. 1, p. 115 – 173, 1984. ISSN 0021-9991.



WRIGGERS, P. *Computational Contact Mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 2002.

ZIENKIEWICZ, O. et al. The characteristic-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31, p. 359–392, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; BETTESS, P. Fluid-structure dynamic interactions and wave-forces - Introductions to numerical treatment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, n. 1, p. 1–16, 1978. ISSN 0029-5981.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. Search for a general fluid mechanics algorithm. *Frontiers of computational fluid dynamics*, John Wiley & Sons Inc., p. 101–113, 1994.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. High speed compressible flow and other advection-dominated problems of fluid dynamics. *Finite Elements in Fluids*, 6, p. 41–88, 1985.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v1: The Basis*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000. 689 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v2: Solid Mechanics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000. 459 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v3: Fluid Dynamics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000. 334 p.



## *ANEXO A – Forma adimensional das equações de Navier-Stokes*

Frequentemente é interessante o emprego das equações de Navier-Stokes em uma forma adimensional. Os parâmetros de escala empregados para adimensionalizar essas equações podem variar dependendo da natureza do escoamento. Neste trabalho são empregadas as seguintes escalas:

1. Tempo:

$$\bar{t} = \frac{tu_{\infty}}{L} \quad (\text{A.1})$$

2. Espaço:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad (\text{A.2})$$

3. Massa específica:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \quad (\text{A.3})$$

4. Pressão:

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_{\infty} u_{\infty}^2} \quad (\text{A.4})$$

5. Velocidade:

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{u_{\infty}} \quad (\text{A.5})$$

6. Energia específica:

$$\bar{E} = \frac{E}{u_{\infty}^2} \quad (\text{A.6})$$

7. Temperatura:

$$\bar{T} = \frac{T c_p}{u_{\infty}^2} \quad (\text{A.7})$$

8. Velocidade do som:

$$\bar{c}^2 = \frac{c^2}{u_{\infty}^2} \quad (\text{A.8})$$

onde a barra sobrescrita indica uma quantidade adimensional, o subscrito  $\infty$  representa valores de escoamento não perturbado e  $L$  é um comprimento de referência. Aplicando as escalas acima às equações governantes na forma ALE, chega-se as seguintes expressões:

Conservação da massa

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{x}_i} = \bar{w}_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}_i}. \quad (\text{A.9})$$

Conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{x}_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{v} \bar{\tau}_{ij}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} - \bar{\rho} \bar{g}_i = \bar{w}_j \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial \bar{x}_j}, \quad (\text{A.10})$$

onde

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad (\text{A.11})$$

é o número de Reynolds,

$$\bar{g}_i = \frac{g_i L}{u_\infty^2} \quad (\text{A.12})$$

é a constante das forças de campo e

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{\nu_{ref}} \quad (\text{A.13})$$

é a viscosidade cinemática adimensional.

Conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{E})}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{\rho} \bar{E})}{\partial \bar{x}_j} - \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left( k^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \right) + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{p})}{\partial \bar{x}_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial (\bar{v} \bar{\tau}_{ij} \bar{u}_j)}{\partial \bar{x}_j} - \bar{\rho} \bar{g}_i \bar{u}_i \\ = \bar{w}_i \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{E})}{\partial \bar{x}_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde  $Pr$  é o número de Prandtl dado por:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k_{ref}}, \quad (\text{A.15})$$

e  $k^*$  é a taxa de condutividade expresso por:

$$Pr = \frac{k}{k_{ref}}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $k_{ref}$  é a taxa de condutividade térmica de referência.

Equação de estado

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} R \bar{T}}{c_p} = \bar{\rho} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \bar{T}, \quad (\text{A.17})$$

Onde  $R$  é dado pela diferença entre o calor específico à pressão constante e o calor específica a volume constante  $R = c_p - c_v$ .