Campus de São Carlos

UM ESTUDO SOBRE RAIOS E ESTABILIDADE REAL E COMPLEXO
E VALORES SINGULARES ESTRUTURADOS

Autora: Gregoria Magda Ticona Masca

Orientador: Prof.Dr. Marco Henrique Terra

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

Um Estudo Sobre Raios de Estabilidade Real e Complexo e Valores Singulares Estruturados

Gregoria Magda Ticona Masca

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

**São Carlos - SP
1998**

Class.	TESE - EESC
Out.	6023
Tomo	0065/99

S/S 1031826

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

T557e Ticona Masca, Gregoria Magda
Um estudo sobre os raios de estabilidade real e
complexo e valores singulares estruturados / Gregoria
Magda Ticona Masca. -- São Carlos, 1998.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de
São Carlos-Universidade de São Paulo, 1998.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra.

1. Controle robusto. 2. LQG/LTR. 3. LMI. 4. Raio de
estabilidade real e complexo. 5. μ - análises.
6. Sistemas de potência. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidata: Bacharela **GREGORIA MAGDA TICONA MASCA**

Dissertação defendida e aprovada em 08-01-1999
pela Comissão Julgadora:

Prof. Doutor **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Doutor **JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA**
(Pesquisador – FATEC/EESC - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **JOSÉ JAIME DA CRUZ**
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **DENIS VINICIUS COURY**
Coordenador da Área de Engenharia Elétrica

JOSE CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Agradecimentos

A Deus por ter me iluminado nesta longa jornada, possibilitando a concretização de mais uma etapa da minha vida profissional.

Ao professor e orientador Marco Henrique Terra pela orientação, paciência ao longo deste trabalho.

À Fundação de Apoio à pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo suporte financeiro fornecido durante o período da realização deste trabalho, sem o qual o mesmo não seria possível.

A meus amigos da Pós Guilherme de Alencar, Renato Tinós, Arthur Plínio, Marcelo Rosa e Rodrigo A. Ramos pela atenção, amizade e paciência com que me confortaram nos momentos mais difíceis.

A meu esposo Victor Hugo pelo amor, incentivo e meu filho Marco Antonio, pelos momentos que o privei da minha companhia em favor deste trabalho.

Aos funcionários do departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos. A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, duas técnicas de controle robusto (LQG/LTR e DML), aplicadas a um sistema elétrico de potência, são avaliadas através dos raios de estabilidade do sistema. As incertezas estruturadas do modelo nominal são consideradas nos dois controladores. Um conjunto de modelos é gerado considerando as combinações das incertezas paramétricas. Os valores singulares estruturados dos dois sistemas de controle são analisados.

Abstract

In this work, two techniques of robust control (LQG/LTR and LMI), applied to a power electric system, are available via stability radii of the system. The structured uncertainties of the nominal model are considered in both designs. A set of models is generated considering the combinations of the parametric uncertainties. The structured singular values of both systems are analysed.

Key Words– Robust control; LQG/LTR; LMI; real and complex stability radii; μ -analysis and power systems .

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1 - Raio de Estabilidade Real.....	4
1.1 - Introdução	4
1.2 - Cálculo do Raio de Estabilidade Real.....	5
1.3 - Resultado Principal [19]	8
1.3.1 - Caso I - [Quando $\sigma^* = \sigma_2[P(\gamma^*)]$ para $\gamma^* \in (0,1)$]	14
1.3.2 - Caso II - Quando $\gamma^* = 1$. Para $\sigma^* = \sigma_2[P(1)]$	15
1.3.3 - Caso III - Quando $\sigma^* = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2(P(\gamma))$	17
Capítulo 2 - Algoritmos.....	21
2.1 - Introdução	21
2.2 - Algoritmo para o Cálculo da Faixa de Frequências Finita [L. Qiu (1995)].....	21
2.3 - Raio de estabilidade real ($r_R(A,B,C)$) em uma faixa de frequências finita [L. Qiu (1995), [20]].....	22
2.4 - Algoritmo para o Cálculo da Matriz de Perturbação Delta (Δ) L. Qiu, et al., (1995).....	22
2.4.1 - Construção da Matriz Δ	23
Capítulo 3 - Um estudio dos Raios de estabilidade Real e Complexos via Valor Singular Estruturado em um sistema de Potência	28
3.1 - Introdução	28
3.2 - Modelamento da planta do sistema de potência	29
3.3 - Levantamento das faixas de incerteza	31
3.4 - Raios de Estabilidade Real e Complexo	32
3.4.1 - Controlador LQG/LTR	32
3.4.2 - Controlador dml.....	41
Conclusão	46

Apêndice A - Lemas e propriedades do capítulo 1.....	49
Apêndice B - Valor Singular Estruturado e propriedades	60
B.1 - Valor singular estruturado	60
B.2 - Propriedades Básicas de μ Misto.....	62
B.3 - Limites.....	63
Apêndice C - Raio de Estabilidade	64
C.1 - Desenvolvimento do Raio de Estabilidade.....	64
C.1.1 - Raio de estabilidade não estruturado	65
C.1.2 - Raio de estabilidade estruturado	68
C.2 - Método da Bisseção para a medida da distância de uma matriz estável a uma matriz instável [Byers, (1988)]-[2].....	69
C.3 - Método de Bisseção para o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência [S. Boyd. (1989)] [37].....	70
C.4 - Resultados Sobre Regularidade para Valores Singulares de uma Matriz de Transferencia. S. Boy and Balakrishnan [38].....	72
Apêndice D - Programas	75
D.1 - Programa do algoritmo do método da bisseção para o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência	75
D.2 - Programa para o cálculo da faixa de frequência contendo a frequência ω para o máximo da função $\mu(M)$	76
D.3 - Programa do cálculo da função $\mu_R[C(j\omega I-A)^{-1} B]$ em uma frequência ω dada.....	79
D.4 – Raio de Estabilidade Real – inversa da função $\mu_R[C(j\omega I-A)^{-1} B]$	81
D.5 - Algoritmo para o cálculo das matrizes de Perturbação.....	82
Referências Bibliográficas	95

Lista de Símbolos

Capítulo 1:

A, B, C	Matrizes do sistema
$r_K(A, B, C)$	Raio de estabilidade de uma tripla de matrizes em um campo $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Campo dos números complexos
$\mathbb{R}$	Campo dos números reais
$\mathbb{C}_g$	Semi-plano esquerdo aberto do plano complexo
$\mathbb{C}_b$	Semi-plano direito fechado do plano complexo
$\sigma_i(M)$	Valores singulares de uma matriz $M_{p \times m}$ para todo $i=1, \dots, \min\{p, m\}$
$M = [C(j\omega I - A)^{-1}B]$	Matriz de transferência
X	Parte real da matriz M
Y	Parte imaginária da matriz M
$U_n(K)$	Conjunto de matrizes instáveis no campo K
$\partial U_n(K)$	Fronteira do conjunto de matrizes instáveis no campo K
$\delta(A)$	Espectro de uma matriz A
$\lambda_i(A)$	Autovalores de uma matriz $A_{m \times n}$ para $i=1, \dots, n$
γ	Parâmetro que pertence ao intervalo $(0, 1]$
γ^*	Extremo local
$\mu_R(M)$	Valor singular estruturado real da matriz M
$(\cdot)^+$	Inversa generalizada de Moore-Penrose
$\bar{\sigma}(M)$	Máximo valor singular da matriz M
$\underline{\sigma}(M)$	Mínimo valor singular da matriz M
$\text{Im}(M)$	Parte imaginária da matriz M
$\text{Re}(M)$	Parte real da matriz M
$F(\gamma)$	Função matricial analítica

$\tilde{\Sigma}(\gamma)$	Função matricial analítica diagonal
$\tilde{U}(\gamma)$ e $\tilde{V}(\gamma)$	Funções matriciais analíticas ortogonais
$\tilde{\sigma}_i(\gamma)$	Funções de valores singulares de uma função matricial analítica $F(\gamma)$
$V_\varepsilon(\gamma^*)$	Vizinhança de centro γ^* com um raio ε

Capítulo 2:

$[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$	Intervalo de frequências onde encontra-se a frequência que maximiza $\mu[P(\gamma, \omega)]$
σ^*	Denota o $\inf_{\gamma^* \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} X & -\gamma^* Y \\ (\gamma^*)^{-1} Y & X \end{bmatrix} \right)$

Capítulo 3:

LQG/LTR	<i>Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
DML	Desigualdade Matriciais Lineares
vse	Valor singular estruturado
ω_c^* e ω_r^*	Frequências que maximizam o vse complexo e real
$K_{LQG}(\omega)$	Função de transferência do controlador
H_{kf}	Observador projetado via Filtro de Kalman
G_{lqg}	Ganho do controlador Linear Quadrático Gaussiano
K_{dml}	Ganho do controlador projetado via Desigualdades Matriciais Lineares

Apêndice B:

$\rho(M)$	Raio espectral da matriz M $\rho(M) = \max_i \lambda_i(M) $
$\rho_R(M)$	Raio espectral real da matriz M , define-se como: $\rho_R(M) = \max\{ \lambda : \text{se } \lambda \text{ é um autovalor real da matriz } M\}$, ou $\rho_R(M) = 0$ se M não tiver nenhum autovalor real
K	Bloco estruturado de inteiros positivos

X_K	Conjunto de matrizes de perturbação
x	Vetor complexo
x^*	Transposto conjugado de um vetor complexo.
I_k	Matriz identidade de ordem k
0_k	Matriz zero de ordem $k \times k$

Apêndice C:

$L(K^n) \cong K^{n \times n}$	Espaço de transformações lineares de K^n em K^n que é isomorfo a $K^{n \times n}$
$GL_n(K)$	Operadores lineares invertíveis
$r_K(A, B, C)$	Raio de estabilidade estruturado
$r_K(A)$	Raio de estabilidade não estruturado
$\ \cdot\ _{K^n}$	Norma definida em K^n
$\ \cdot\ _{L(K^n)}$	Norma em $L(K^n)$
$\text{tr}(A)$	Traço de uma matriz A
$\kappa(A)$	Número de condição
$\ \cdot\ _F$	Norma de Frobenius
W_c e W_o	Gramianos de controlabilidade e observabilidade
σ_{pi}	Valores singulares do sistema $\{A, B, C, D\}$.

Introdução

A obtenção do raio de estabilidade real é um problema que tem merecido atenção por parte dos pesquisadores da teoria de controle [4], [9], [10], [11], [12], [13], [18], [19], [20], [21], [35], [37], e [41]. O raio de estabilidade real mede a capacidade de uma dada matriz para preservar sua estabilidade apesar da ocorrência de certas perturbações reais.

Em [19] é apresentada uma definição geral do raio de estabilidade no campo K , (i.e. $K=\mathbb{C}$ ou $K=\mathbb{R}$) em função do valor singular estruturado (vse) através da norma H_∞ . Uma maneira de se calcular o raio de estabilidade real de uma determinada matriz é encontrar uma fórmula explícita para o valor singular estruturado real (i.e. $\mu_R(M)$) tal como é feito para o valor singular estruturado complexo (i.e. $\mu_C(M)=\sigma_1(M)$; $\sigma_1(\cdot)$ denota o maior valor singular).

O objetivo fundamental desta dissertação é estudar de forma detalhada a equivalência da fórmula desenvolvida em [19] para o cálculo do valor singular estruturado real com o valor singular estruturado $\mu_K(M)$ definido por J. C. Doyle, (veja [16]), em blocos reais totalmente completos e, também, estudar em detalhes como se calcula uma matriz de perturbação Δ que leva o sistema à instabilidade. Verifica-se que sempre é possível encontrar vetores singulares para se construir a matriz de perturbação realizando-se um mapeamento apropriado, com um determinado parâmetro γ que pertence a um intervalo $(0\ 1]$. Estas são as questões avaliadas no capítulo 1.

No capítulo 2 apresentam-se dois algoritmos: um para a determinação da faixa de frequências onde o supremo dos maiores valores singulares de uma matriz de transferência está contido e o outro para o cálculo da matriz de perturbação. O algoritmo para a determinação desta faixa de frequências, para uma matriz de transferência $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$, calcula, também, a frequência que faz com que a função do valor singular estruturado seja máxima. Assim, pode-se calcular o raio de estabilidade real. O segundo algoritmo, utilizado para o cálculo da matriz de perturbação $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, emprega os vetores singulares de uma determinada matriz real, formada pelas componentes da matriz de transferência M , denotada por $P(\gamma)$.

Para a construção da matriz de incertezas, toma-se a matriz $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$ como $M = X + jY$. Divide-se o problema em três casos diferentes: quando a matriz Y é igual a 0, quando o posto(Y)=1 e o terceiro caso, quando o posto(Y)>1.

No capítulo 3 duas técnicas de projeto de controle robusto aplicadas a um sistema de controle de potência, LQG/LTR e LMI, são avaliadas do ponto de vista dos valores singulares estruturados do sistema. Em [40] os controles de carga e frequência entre duas áreas interligadas de um sistema elétrico de potência foram projetados. Aqui o objetivo é avaliar as incertezas estruturadas da planta na análise dos raios de estabilidade real e complexo deste sistema. Os resultados obtidos valem apenas para os controles desenvolvidos em [40].

As principais contribuições deste capítulo são: análise dos raios de estabilidade, cálculo dos valores singulares estruturados do sistema (análise μ) e das matrizes de perturbação que levam o sistema a instabilidade considerando-se duas metodologias de controle LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery*) e LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), ou desigualdades matriciais lineares, DML, como técnicas de projeto de um sistema de controle automático de carga e frequência. Aqui os controladores projetados em [40] foram avaliados, comparativamente, do ponto de vista da robustez da estabilidade do sistema, levando-se em consideração as variações nos parâmetros da planta para faixas definidas de incertezas do modelo nominal. A questão que se coloca é: qual sistema de controle está mais distante da instabilidade?

No apêndice A as provas dos lemas e propriedades do capítulo 1 são apresentadas. No apêndice B é feito um resumo das propriedades do valor singular estruturado, apresentadas em [30]. No apêndice C citam-se alguns conceitos importantes relacionados com raio de estabilidade, que estão apresentados em [4], [10], [11], [12], [37], [38] e [41]: raio de estabilidade estruturado e não estruturado, método da bisseção para se medir a distância de uma matriz estável a uma matriz instável, método de bisseção para o cálculo da norma H_∞ de uma matriz de transferência e alguns resultados sobre regularidade para valores singulares de uma matriz de transferência. No apêndice C, os programas feitos no Matlab, para validar os estudos feitos, são listados: algoritmo da bisseção para o cálculo da norma H_∞ de uma função de transferência; cálculo da faixa de frequências onde está contido o máximo valor singular estruturado; cálculo da função $\mu_R(M)$ em função da frequência parametrizada em γ ; cálculo do máximo da

função $\mu_R(M)$ em função da frequência e, por fim, cálculos dos raios de estabilidade real e complexo.

Capítulo 1

Raio de Estabilidade Real

1.1 - Introdução

A obtenção do raio de estabilidade real é um problema que tem merecido atenção por parte dos pesquisadores da teoria de controle [4], [9], [10], [11], [12], [13], [18], [19], [20], [21], [35], [37], e [41]. O raio de estabilidade real mede a capacidade de uma dada matriz para preservar sua estabilidade apesar da ocorrência de certas perturbações reais.

Em [19] é apresentada uma definição geral do raio de estabilidade no campo K , (i.e. $K=\mathbb{C}$ ou $K=\mathbb{R}$) em função do valor singular estruturado (vse) através da norma H_∞ . Uma maneira de se calcular o raio de estabilidade real de uma determinada matriz é encontrar uma fórmula explícita para o valor singular estruturado real (i.e. $\mu_R(M)$) tal como é feito para o valor singular estruturado complexo (i.e. $\mu_C(M)=\sigma_1(M)$; $\sigma_1(\cdot)$ denota o maior valor singular).

O objetivo deste trabalho é mostrar de forma detalhada a equivalência da fórmula desenvolvida em [19] para o cálculo do valor singular estruturado real com o valor singular estruturado $\mu_K(M)$ definido por J. C. Doyle, veja [16], em blocos reais totalmente completos, para isto utiliza-se o teorema de Schmitd/Mirsky [39], e mostrar como se calcula uma matriz de perturbação Δ que leva o sistema à instabilidade. Mostra-se também que sempre é possível encontrar vetores singulares para se construir a matriz de perturbação realizando-se um mapeamento apropriado, com um determinado parâmetro γ que pertence a um intervalo $(0 \ 1]$.

1.2 - Cálculo do Raio de Estabilidade Real

Considera-se a partição do plano complexo $\mathbb{C}$ como em dois subconjuntos disjuntos $\mathbb{C} = \mathbb{C}_g \cup \mathbb{C}_b$, de estabilidade e instabilidade, respectivamente, e um conjunto de matrizes instáveis

$$\mathcal{U}_n(\mathbf{K}) = \{U \in \mathbb{K}^{n \times n} : \delta(U) \cap \mathbb{C}_b \neq \emptyset\}.$$

sendo $\delta(U)$ o espectro da matriz U e $\mathbb{C}_b = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) \geq 0\}$. Como $\mathbb{C}_g$ é um conjunto aberto então tem-se que

$$\partial \mathbb{C}_g = \{\lambda \in \delta(U), U \in \mathbb{K}^{n \times n} : \delta(U) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset\}.$$

e

$$\partial \mathcal{U}_n(\mathbf{K}) = \{U \in \mathbb{K}^{n \times n} : \delta(U) \cap \partial \mathbb{C}_g \neq \emptyset\}.$$

Sendo assim, $\partial \mathcal{U}_n(\mathbf{K})$ é o conjunto de matrizes que tem ao menos um autovalor no eixo imaginário.

Definição 1.- O raio de estabilidade é definido em função da distância da matriz A à fronteira do conjunto $\mathcal{U}_n(\mathbf{K})$ como o ínfimo das normas das perturbações i.e

$$r_K(A) = \inf\{\|A - U\| : U \in \partial \mathcal{U}_n(\mathbf{K})\}$$

sendo $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uma matriz estável e $r_K(A)$ depende de uma norma específica. Existe uma matriz de perturbação que leva à instabilidade tal que $U = A + \Delta \in \mathcal{U}_n(\mathbf{K})$ e é dada por:

$$\|A - U\| = \|\Delta\| = r_K(A) \text{ e } \delta(A + \Delta) \cap \partial \mathbb{C}_g \neq \emptyset.$$

Seja o sistema $\dot{x} = Ax$, assume-se uma matriz de perturbação que pode ser representada da seguinte maneira

$$\dot{x} = (A + B\Delta C)x$$

sendo $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a matriz do sistema nominal, e $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{K}^{p \times n}$ são matrizes dadas para definir a estrutura da perturbação $\Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}$. As matrizes B e C não são consideradas matrizes de entrada e saída do sistema, neste momento, mas sim matrizes de escalonamento necessárias para definir a estrutura da perturbação $B\Delta C$ da matriz A .

A norma de uma matriz é igual a seu máximo valor singular i.e. $\|\Delta\| = \sigma_1(\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta)$. A seguir a definição do raio de estabilidade para uma tripla de matrizes (A, B, C) é dada.

Definição 2.- Sejam as matrizes $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{n \times m}$, $C \in K^{p \times n}$. Define-se o raio de estabilidade de uma tripla de matrizes como:

$$r_K(A, B, C) := \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } A + B\Delta C \text{ é instável} \}$$

sendo Δ uma matriz de distúrbio desconhecida e A , B e C são matrizes conhecidas.

O problema do raio de estabilidade consiste em encontrar o ínfimo dos máximos valores singulares da matriz $\Delta \in K^{m \times p}$, tal que $A + B\Delta C$ seja instável. Colocando-se a definição do raio de estabilidade em função do valor singular estruturado (μ), veja apêndice A.

Como $\delta(A + B\Delta C) \cap \partial C_g \neq \emptyset$ tem-se, então, o ínfimo dos valores singulares da matriz Δ e a matriz $A + B\Delta C$ é instável. Assim, pode-se definir o raio de estabilidade como

$$r_K(A, B, C) := \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } A + B\Delta C \text{ tem autovalores na fronteira de } C_g \}$$

Nesta igualdade calcula-se o ínfimo $s \in \partial C_g$ dos autovalores da matriz $A + B\Delta C$ tal que satisfaça $\delta(A + B\Delta C) \cap \partial C_g \neq \emptyset$. Então existe um determinado $s \in \partial C_g$ tal que

$$r_K(A, B, C) := \inf_{s \in \partial C_g} \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det(sI - A - B\Delta C) = 0 \}$$

Como $\det(sI - A) \neq 0$ então existe a inversa $(sI - A)^{-1}$ tal que

$$\det((sI - A) - B\Delta C) \cdot \det[(sI - A)^{-1}] = 0$$

$$\det[(sI - A) - B\Delta C] \cdot \det[(sI - A)^{-1}] = 0$$

$$\det[(I - B\Delta C(sI - A)^{-1})] = \det[I - \Delta C(sI - A)^{-1}B] = 0.$$

Redefinindo o raio de estabilidade, tem-se:

$$r_K(A, B, C) := \inf_{s \in \partial C_g} \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det[I - \Delta C(sI - A)^{-1}B] = 0 \}$$

$$:= \inf_{s \in \partial C_g} \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det[I - \Delta M(s)] = 0 \}$$

sendo $M(s) = C(sI - A)^{-1}B \in \mathbb{C}^{p \times m}$.

O valor singular estruturado $\mu_K(M)$, omite-se o operador s da matriz M apenas por comodidade, é definido da seguinte maneira

$$\mu_K(M) := [\inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det(I - \Delta M) = 0 \}]^{-1} \quad (1)$$

então tem-se

$$\begin{aligned} r_K(A, B, C) &:= \inf_{s \in \partial C_g} [\mu_K(M)]^{-1} \\ &= \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_K(M) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Observa-se que o cálculo do raio de estabilidade real resume-se em encontrar o valor singular estruturado $\mu_K(M)$ no campo dos reais. Resolve-se então o problema através de álgebra linear.

O valor singular estruturado no campo complexo é $\mu_C(M) = \bar{\sigma}(M)$ [6]. Então, define-se o raio de estabilidade complexo da seguinte maneira:

$$r_C(A, B, C) = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_C[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1} = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \bar{\sigma}[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1}$$

então de (2), para o caso em que $K = \mathbb{R}$, o raio de estabilidade real é definido por:

$$r_R(A, B, C) = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_R[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1}$$

O objetivo principal de Li Qiu [19] é obter uma fórmula para a função $\mu_R(M)$, que permitirá simplificar o cálculo do raio de estabilidade real $r_R(A, B, C)$.

1.3 - Resultado Principal [19]

Para se formular o problema do valor singular estruturado no campo dos reais (utiliza-se a notação $\hat{\mu}_R(M)$ até que a equivalência desta fórmula com relação ao vse da eq. 1 seja demonstrada) denota-se a parte real da matriz M , como $\text{Re}(M)$ e a parte imaginária como $\text{Im}(M)$, tal que $\text{Re}(M) + j\text{Im}(M) = M$. Assim:

$$\hat{\mu}_R(M) = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}M & -\gamma \text{Im}M \\ \gamma^{-1} \text{Im}M & \text{Re}M \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

A função $\hat{\mu}_R(M)$ é unimodal no intervalo $(0,1]$ ou seja, qualquer mínimo local é um mínimo global.

Pretende-se agora demonstrar a seguinte igualdade, onde $K=R$ na eq. 1:

$$\mu_R(M) = \hat{\mu}_R(M).$$

A idéia principal é rescrever o problema, que envolve uma matriz complexa, em um problema puramente real.

Dada uma matriz $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$, faz-se $X = \text{Re}(M)$ e $Y = \text{Im}(M)$. Para iniciar a demonstração se considera $Y \neq 0$, já que $Y = 0$ é um caso trivial, tendo $\mu_R(M) = \mu_C(M) = \bar{\sigma}(X)$.

Demonstração do resultado principal:

($\Rightarrow$) Para uma matriz $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tem-se que a matriz $I - \Delta M$ é singular se e somente se existem vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ com $(v_1, v_2) \neq (0,0)$ tal que:

$$[I - \Delta(X + jY)](v_1 + jv_2) = 0. \quad (4)$$

Em termos matriciais tem-se que:

$$\left(I - \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

A forma (4) é equivalente a equação (5). Esta, entretanto, contém apenas matrizes com elementos puramente reais. Por definição $(v_1, v_2) \neq (0,0)$. Então as colunas de

$\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes. O objetivo é obter a singularidade da matriz

$(I-\Delta M)_{2m \times 2m}$. Então, a matriz $(I-\Delta M)_{2m \times 2m}$ será singular quando o $\text{posto}(I-\Delta M) \leq 2m-2$.

Portanto:

$$\text{posto} \left(I - \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \right) \leq 2m-2. \quad (6)$$

Para demonstrar a primeira desigualdade, utiliza-se o lema de Schmidt/Mirsky, que será apresentado a seguir.

Lema 1. [19] Sejam $E \in K^{m \times p}$ e $F \in K^{p \times m}$, para $i=1,2,\dots,\min\{p,m\}$

$$\inf\{\bar{\sigma}(E): \text{posto}(I_m - EF) \leq m-i\} = [\sigma_i(F)]^{-1}$$

Prova: veja apêndice A.

Tendo a ferramenta necessária para demonstrar a primeira desigualdade do resultado principal, passa-se a fazer um escalonamento na condição dada do lema (1), de tal maneira que uma inspeção leva ao cálculo aproximado do $\inf\{\bar{\sigma}(E): \text{posto}(I_m - EF) \leq m-i\} = [\sigma_i(F)]^{-1}$ de forma que a singularidade de $(I_m - EF)$ seja encontrada de modo menos conservador.

Define-se uma matriz Δ e um escalar $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da seguinte maneira:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}; \quad I(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } I(\gamma^{-1}) = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

sendo a matriz identidade I de ordem $m \times m$, e como as matrizes Δ e $I(\gamma)$ são comutativas (i.e. $\Delta I(\gamma) = I(\gamma) \Delta$), então:

$$\begin{aligned} \left(I - \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) &= \left(I - \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(I - \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1} Y & X \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

de (6) tem-se

$$\text{posto} \left(I - \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \text{posto} \left(I - \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1} Y & X \end{bmatrix} \right) \leq 2m-2 \quad (7)$$

denota-se a matriz $P(\gamma)$, para qualquer $\gamma \in (0, 1]$, por:

$$P(\gamma) = \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1} Y & X \end{bmatrix}$$

e as matrizes $E = \Delta$ e $F = P(\gamma)$, e $\bar{\sigma}(\Delta)$ como

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \right).$$

Então, pelo lema 1, o ínfimo do conjunto $\{\bar{\sigma}(\Delta) : \text{posto}(I_m - \Delta P[\gamma]) \leq 2m-2\}$ é igual a $[\sigma_2(P[\gamma])]^{-1}$, e qualquer elemento do conjunto sempre é maior ou igual a $[\sigma_2(P[\gamma])]^{-1}$, i.e.

$$\bar{\sigma}(\Delta) \geq \sigma_2^{-1}[P(\gamma)] \quad \forall \gamma \neq 0$$

$$\bar{\sigma}(\Delta) \sigma_2[P(\gamma)] \geq 1$$

$$\sigma_2[P(\gamma)] \geq [\bar{\sigma}(\Delta)]^{-1}$$

$$\sigma_2[P(\gamma)] \geq [\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det(I - \Delta M) = 0\}]^{-1}$$

$$\inf_{\gamma \in R \setminus \{0\}} \sigma_2[P(\gamma)] \geq \inf_{\gamma \in R \setminus \{0\}} [\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det(I - \Delta M) = 0\}]^{-1}$$

$$= [\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \text{ e } \det(I - \Delta M) = 0\}]^{-1} \geq \mu_R(M)$$

sendo assim, tem-se que:

$$\mu_R(M) \leq \hat{\mu}_R(M) = \inf_{\gamma \in R \setminus \{0\}} \sigma_2[P(\gamma)].$$

Além disso, como os valores singulares das matrizes $P(\gamma)$, $P(-\gamma)$, $P(\gamma^{-1})$ quando $\gamma \in \mathbb{R}$ são iguais, a procura do γ que minimiza a função $\hat{\mu}_R(M)$ está restrita a um intervalo semi-aberto $(0, 1]$, i.e.

$$\hat{\mu}_R(M) = \inf_{\gamma \in R \setminus \{0\}} \sigma_2[P(\gamma)] = \inf_{\gamma \in (0, 1]} \sigma_2[P(\gamma)]$$

logo

$$\mu_R(M) \leq \hat{\mu}_R(M) = \inf_{\gamma \in (0, 1]} \sigma_2[P(\gamma)].$$

($\Leftarrow$) Para se demonstrar a segunda desigualdade

$$\mu_R(M) \geq \hat{\mu}_R(M) = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)] \quad (8)$$

denota-se

$$\inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)] = \sigma^* > 0.$$

A demonstração está baseada em uma construção esquemática da matriz de perturbação (Δ), de tal maneira que a matriz $(I - \Delta M)$ seja singular e

$$\bar{\sigma}(\Delta) = (\sigma^*)^{-1} = \left(\inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}M & -\gamma \text{Im}M \\ \gamma^{-1} \text{Im}M & \text{Re}M \end{bmatrix} \right) \right)^{-1}. \quad (9)$$

O lema a seguir ajudará a demonstrar a segunda desigualdade do resultado principal e denota-se a inversa generalizada Moore-Penrose como $(\cdot)^+$.

Lema 2. [19] Seja $U \in \mathbb{R}^{p \times k}$ e $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$ se $U^T U = V^T V \neq 0$ então $VU^+U = V$ e $\bar{\sigma}(VU^+) = 1$

Prova: veja Apêndice A.

Para se definir a matriz delta Δ , encontra-se primeiramente um gama $\gamma^* \in (0,1]$ que minimize o segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$, (i.e. $\inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)] = \sigma_2[P(\gamma^*)]$)

depois, toma-se os vetores singulares direito e esquerdo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma^*)$ correspondente ao segundo valor singular $\sigma^* = \sigma_2(P(\gamma^*))$, onde $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^p$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, então, a matriz de perturbação Δ é calculada da seguinte maneira:

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+ \quad (10)$$

e os vetores u e v satisfazem a seguinte condição:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Toma-se o maior valor singular da matriz Δ

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \sigma^{*-1} \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+ \right)$$

pelo lema 1 tem-se

$$\bar{\sigma}(\Delta) = (\sigma^*)^{-1}$$

demonstra-se assim a (9).

A matriz Δ faz com que a matriz $I-\Delta M$ seja singular. Como a matriz $M=X+jY$, então, representa-se a matriz $I-\Delta M=I-\Delta(X+jY)$ e por definição existem vetores $(v_1, v_2) \neq (0,0)$, para $\gamma^* \in (0,1]$, tal que

$$[I-\Delta(X+jY)](v_1+j\gamma^* v_2)=0$$

e

$$(X+jY)(v_1+j\gamma^* v_2)=\sigma^*(u_1+j\gamma^* u_2)$$

multiplicando-se a matriz de perturbação Δ na ultima igualdade obtém-se

$$-\Delta(X+jY)(v_1+j\gamma^* v_2)=-\Delta\sigma^*(u_1+j\gamma^* u_2)$$

adiciona-se à igualdade $(v_1+j\gamma^* v_2)$ tal que

$$(v_1+j\gamma^* v_2)-\Delta(X+jY)(v_1+j\gamma^* v_2)=v_1+j\gamma^* v_2-\Delta\sigma^*(u_1+j\gamma^* u_2)$$

$$[I-\Delta(X+jY)](v_1+j\gamma^* v_2)=v_1+j\gamma^* v_2-\Delta\sigma^*(u_1+j\gamma^* u_2)$$

$$\begin{aligned} &= (v_1+j\gamma^* v_2)-(\sigma^*)^{-1}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+ \sigma^*(u_1+j\gamma^* u_2) \\ &= (v_1+j\gamma^* v_2)-(\sigma^*)^{-1}\sigma^*\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}(1+j\gamma^*) \\ &= (v_1+j\gamma^* v_2)-\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}(1+j\gamma^*)=v_1+j\gamma^* v_2-v_1-j\gamma^* v_2=0 \end{aligned}$$

para um $\gamma^* \in (0,1]$ e, sendo a matriz $I-\Delta M$ singular, esta matriz Δ é a desejada. Demonstra-se assim a segunda desigualdade “ $\geq$ ”, conclui-se, então, a demonstração do resultado principal, i.e. $\mu_R(M)=\hat{\mu}_R(M)$.

Para a construção da matriz delta, sempre é possível obter vetores u e v que satisfaça a condição (11), para um $\gamma^* \in (0,1]$. Para se encontrar tais vetores é preciso dividir o problema em três casos. Como a função $\mu_R(M)$ varia no intervalo $(0,1]$, então considera-se: caso I, quando $\gamma^* \in (0,1)$; caso II, $\gamma^*=1$ e caso III para $\gamma^* \rightarrow 0$.

O terceiro caso só acontecerá quando o posto(Y)=1, sendo a construção da matriz delta mais direta, não há a necessidade de se fazer uma minimização da função $\mu_R(M)$.

Para a construção da matriz Δ , precisa-se conhecer duas propriedades importantes de vetores singulares que compõem a matriz delta que serão apresentadas a

seguir e, além disso, a condição (11) deve ser observada. Também, os dois lemas que seguem sobre vetores singulares são úteis para a definição da segunda propriedade.

Propriedade 1. Seja $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, e seja um par de vetores singulares esquerdo e direito de $P(\gamma)$ correspondente a um valor singular diferente de zero σ , então $u_1^T u_2 = v_1^T v_2$

Prova: veja apêndice A.

O seguinte lema garante a diferenciabilidade das funções $\tilde{\Sigma}(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\tilde{U}(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $\tilde{V}(\gamma) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, em um conjunto aberto Γ .

Lema 3. Seja $F(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ uma função matricial analítica sobre um conjunto aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}$. Então existe uma função matricial analítica diagonal

$$\tilde{\Sigma}(\gamma) = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1(\gamma), \tilde{\sigma}_2(\gamma), \dots, \tilde{\sigma}_{\min\{p,m\}}(\gamma)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

e duas funções matriciais analíticas ortogonais

$$\tilde{U}(\gamma) = [\tilde{u}_1(\gamma), \tilde{u}_2(\gamma), \dots, \tilde{u}_p(\gamma)] \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad \text{e} \quad \tilde{V}(\gamma) = [\tilde{v}_1(\gamma), \tilde{v}_2(\gamma), \dots, \tilde{v}_m(\gamma)] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

definidas também no conjunto Γ , tal que

$$\tilde{\Sigma}(\gamma) = \tilde{U}^T(\gamma) F(\gamma) \tilde{V}(\gamma)$$

além disso

$$\frac{d\tilde{\sigma}_i(\gamma)}{d\gamma} = \tilde{u}_i^T(\gamma) \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \tilde{v}_i(\gamma) \quad (12)$$

para $i=1, 2, \dots, \min\{p, m\}$.

Prova: veja apêndice A.

Aparentemente $|\tilde{\sigma}_i(\gamma)|$ para $i=1, 2, \dots, \min\{p, m\}$, são os valores singulares da função matricial analítica $F(\gamma)$, e não guardam uma ordem específica. $\sigma_i(\gamma)$ são ordenados da seguinte maneira: $\sigma_1(\gamma) \geq \sigma_2(\gamma) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p,m\}}(\gamma) \geq 0$, são os valores singulares da função $F(\gamma)$. Há importante diferença com respeito a analiticidade entre $\tilde{\sigma}_i(\gamma)$ e $\sigma_i(\gamma)$.

A primeira é analítica em todo o conjunto Γ , enquanto a segunda não. $\sigma_i(\gamma)$ é contínua e analítica por partes em Γ . Veja maiores detalhes no apêndice C.

O lema anterior ajudará a demonstrar o lema seguinte. Veja maiores detalhes no apêndice A.

Lema 4. Seja uma função matricial analítica $F(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sobre um conjunto aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}$, e seus respectivos valores singulares ordenados $\sigma_1(\gamma) \geq \sigma_2(\gamma) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p,m\}}(\gamma) \geq 0$. $\sigma_i(\gamma)$ tem um extremo local diferente de zero $\gamma^* \in \Gamma$. Então existe um par de vetores singulares $u \in \mathbb{R}^p$ e $v \in \mathbb{R}^m$ de $F(\gamma^*)$ correspondente a $\sigma_i(\gamma^*)$ tal que

$$u^T \frac{dF}{d\gamma}(\gamma^*) v = 0$$

Os vetores singulares direito e esquerdo da função $\sigma_i(\gamma^*)$, para um extremo local em um intervalo aberto, definidos no lema 4 satisfazem a seguinte propriedade:

Propriedade 2. Sejam $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o par de vetores singulares direito e esquerdo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma)$ associados a um valor singular σ diferente de zero. Se a condição

$$u^T \frac{dF}{d\gamma}(\gamma^*) v = 0,$$

é satisfeita, então $u_1^T u_1 = v_1^T v_1$ e $u_2^T u_2 = v_2^T v_2$.

Prova: veja apêndice A.

Com todas estas ferramentas necessárias passa-se à procura de vetores singulares que cumpram a condição (11) para assim poder construir a matriz Δ .

Como foi dito acima toma-se três casos diferentes.

1.3.1 - Caso I - [Quando $\sigma^* = \sigma_2[P(\gamma^*)]$ para $\gamma^* \in (0,1)$].

Pela propriedade 1, sabe-se que para qualquer $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ em especial para o ponto extremo γ^* , os vetores singulares direito e esquerdo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma^*)$ associados ao segundo valor singular, diferente de zero, σ^* , satisfaz a seguinte igualdade $u_1^T u_2 = v_1^T v_2$. E, além disso, o segundo valor singular é analítico e contínuo em

uma vizinhança $(\gamma^* - \varepsilon, \gamma^* + \varepsilon) \subset (0, 1)$, então os vetores correspondentes satisfazem a propriedade 2 i.e., $u_1^T u_1 = v_1^T v_1$ e $u_2^T u_2 = v_2^T v_2$.

Como os vetores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ de $P(\gamma^*)$ associados a um $\sigma^* = \sigma_2[P(\gamma^*)]$

satisfazem a condição (11) por meio das propriedades

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

então, a construção da matriz de perturbação Δ existe para este primeiro caso

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+.$$

1.3.2 - Caso II - Quando $\gamma^* = 1$. Para $\sigma^* = \sigma_2[P(1)]$

Este caso é tratado separadamente porque a propriedade 1 só é válida quando $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Pela simetria da matriz

$$P(1) = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}$$

sabe-se que os valores singulares da matriz são casados i.e., que $\sigma_{2i-1}[P(1)] = \sigma_{2i}[P(1)] = \sigma_i(M)$ para todo i . Em particular, o primeiro e o segundo valor singular da matriz $P(1)$ é igual a σ^* . Sendo preciso considerar duas possibilidades:

- i) a primeira é quando a multiplicidade dos valores singulares de $P(1)$ é dois, i.e. $r=2$ e
- ii) a segunda possibilidade é quando a multiplicidade do segundo valor singular é maior que dois, i.e. $2r > 2$, sempre será par.

Para a primeira possibilidade, assume-se que a multiplicidade do máximo valor singular é dois então, sem perda de generalidade, tem-se que $\sigma_1[P(1)] = \sigma_2[P(1)] = \tilde{\sigma}_1(1) = \tilde{\sigma}_2(1)$, sendo $\tilde{\sigma}_1(\gamma)$ e $\tilde{\sigma}_2(\gamma)$ valores singulares analíticos de $P(\gamma)$. Se $\sigma(\gamma)$ é um valor singular então, $\sigma(\gamma^{-1})$ também será. Dado que $\gamma=1$ é um mínimo local da função $\sigma_2(\gamma) = \min\{\tilde{\sigma}_1(\gamma), \tilde{\sigma}_2(\gamma)\}$, segue que $\gamma=1$ é também um mínimo local das funções $\tilde{\sigma}_1(1)$ e $\tilde{\sigma}_2(1)$. Seja $\begin{bmatrix} u_1(\gamma) \\ u_2(\gamma) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} v_1(\gamma) \\ v_2(\gamma) \end{bmatrix}$ um par de vetores singulares de $P(\gamma)$ associados a $\tilde{\sigma}_2(\gamma)$ então, pela propriedade 1, tem-se

$$u_1^T(\gamma) u_2(\gamma) = v_1^T(\gamma) v_2(\gamma) \quad \text{para } \gamma \neq -1, 0, 1$$

e pela propriedade de continuidade

$$u_1^T(1)u_2(1) = v_1^T(1)v_2(1).$$

Pela relação (12) e pelo lema 4 tem-se $\frac{d\tilde{\sigma}_2}{d\gamma}(1) = 0$. Então vale a propriedade 2 i.e.,

$$u_1^T(1)u_1(1) = v_1^T(1)v_1(1)$$

$$u_2^T(1)u_2(1) = v_2^T(1)v_2(1)$$

e supõe-se que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{bmatrix}$$

encontra-se assim os vetores singulares que satisfazem a condição (11) para o caso 2, em seguida passa-se à construção da matriz delta como já foi dito na definição. Para isto é importante a seguinte observação:

Obs. I - Se (11) resulta para um par de vetores $\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ direito e esquerdo de

$P(1)$ associados a um valor singular $\sigma_i(P(1))$ diferente de zero e de multiplicidade dois então, (11) vale para todo e qualquer par.

Prova: veja apêndice A.

Para a segunda possibilidade, o segundo valor singular σ^* da matriz $P(1)$ tem multiplicidade $2r$, para $r = 2, 3, \dots$ Isto significa que os quatro maiores valores singulares de $P(1)$ são iguais a σ^* , ou seja, os dois maiores valores singulares (ou mais) da matriz $M = X + jY$ são iguais a σ^* . A causa da multiplicidade par do valor singular σ^* da matriz $P(1)$ é a sua simetria. Esta relação entre os valores singulares de M e P é uma extensão do trabalho de Lewkowicz (1992) [18], quando os raios de estabilidade complexo e real são iguais, feita por Li Qiu et al. em [19]. Realiza-se a decomposição de valores singulares da matriz M

$$M = \sigma^*(u_1 v_1^* + u_2 v_2^*) + \sum_{i=3}^{\min\{p,m\}} \sigma_i(M) u_i v_i^* \quad (13)$$

sendo $(.)^*$ a representação da transposta conjugada. Introdúz-se

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \xi$$

para $\xi \in \mathbb{C}^2$, é um vetor unitário. Então, u e v formam o par de vetores singulares da matriz M correspondente a σ^* . Basta encontrar ξ que satisfaça a condição

$$u^T u + v^T v = 0, \text{ tal que}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Im} u \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \operatorname{Re} v \\ \operatorname{Im} v \end{bmatrix},$$

sendo u e v o par de vetores singulares direito esquerdo de $P(1)$ associado ao valor singular diferente de zero σ^* , o qual satisfaz a condição (11) que é equivalente à igualdade

$$u^T u - v^T v = 0.$$

Para demonstrar a existência de ξ , é preciso estudar $u^T u - v^T v$ quando ξ varia. Para isto faz-se uso da seguinte fatoração

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \Xi^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Xi$$

sendo Ξ uma matriz unitária e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Claramente o ξ desejado pode ser determinado como segue:

$$\xi = \begin{cases} \text{qualquer vetor unitário,} & \text{se } \lambda_1 = 0 \\ \Xi^T \begin{bmatrix} j\sqrt{\lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}}, & \text{se } \lambda_1 \neq 0 \end{cases}$$

Tem-se, então, os vetores singulares necessários para a construção da matriz delta, eq. (10).

1.3.3 - Caso III - Quando $\sigma^* = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2(P(\gamma))$

Toma-se a matriz $P(\gamma)$ particionada

$$P(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} X & -\gamma Y \\ \hline \gamma^{-1} Y & X \end{array} \right].$$

Pelo teorema de Stewart and Sum [39] (teorema 4.4, pag. 33), tem-se que $\sigma_i[P(\gamma)] \geq \sigma_i(\gamma^{-1} Y)$. Este caso será relevante somente se o posto(Y) = 1. Para se encontrar os vetores u e v , para este caso, é necessário o seguinte lema.

Lema 5. Seja $F(\gamma) = G(\gamma) + \gamma^{-1}H \in \mathbb{R}^{p \times m}$, sendo $G(\gamma)$ analítica em um intervalo aberto Γ próximo a zero e H uma matriz constante com $\text{posto}(H) = r < \min\{p, m\}$. Sejam $\sigma_1(\gamma) \geq \sigma_2(\gamma) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p, m\}}(\gamma) \geq 0$, valores singulares de $F(\gamma)$ definidos sobre $\Gamma \setminus 0$. Considera-se a seguinte decomposição dos valores singulares da matriz H

$$H = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_1 \quad V_2]^T$$

sendo $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, então

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_{r+i}(F(\gamma)) = \sigma_i [U_2^T G(0) V_2]$$

para $i = 1, 2, \dots, \min\{p, m\}$

Prova: veja apêndice A.

Tomando-se as mesmas notações dadas até agora

$$G(\gamma) = \begin{bmatrix} X & -\gamma & Y \\ 0 & & X \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

e representando-se a decomposição dos valores singulares da matriz Y como

$$U^Y \Sigma^Y (V^Y)^T = [U_1^T \quad U_2^T] \begin{bmatrix} \sigma_1(Y) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_1^Y \quad V_2^Y]^T,$$

e da matriz H como

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ U^Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e aplicando-se o Lema 5, $r=1$ e $i=1$, então:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2[P(\gamma)] &= \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ U_2^Y & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} 0 & (U_2^T)^T X \\ X V_2^Y & 0 \end{bmatrix} \right) = \max \{ \bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X], \bar{\sigma}(X V_2^Y) \}. \end{aligned}$$

Deseja-se demonstrar que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2[P(\gamma)] = \inf_{\gamma \in (0, 1]} \sigma_2[P(\gamma)].$$

Sejam u e v , um par de vetores singulares a direita e a esquerda de $(U_2^Y)^T X$ associados

ao primeiro valor singular $\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X]$ então, a matriz

$$\Delta = \frac{vu^T(U_2^Y)^T}{\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X]}$$

satisfaz $[I+\Delta(X+jY)]v=0$ e $\bar{\sigma}(\Delta)^{-1}=\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X]$. Similarmente u e v formam um par de vetores singulares a direita e a esquerda da matriz XV_2^Y associado ao primeiro valor singular $\bar{\sigma}[XV_2^Y]$ então, escolhe-se uma matriz delta da forma seguinte

$$\Delta = -\frac{V_2^T vu^T}{\bar{\sigma}[XV_2^Y]}$$

sendo que $u^T[I+(X+jY)\Delta]=0$ e $\bar{\sigma}(\Delta)^{-1} = \bar{\sigma}[XV_2^Y]$.

Assim, demonstra-se que

$$\max\{\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X], \bar{\sigma}(XV_2^Y)\} \leq \mu_R(M) \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)] &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2[P(\gamma)] \\ &= \max\{\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X], \bar{\sigma}(XV_2^Y)\} \\ &\leq \mu_R(M) \quad \text{e pela desigualdade (8) tem-se} \\ &\leq \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)] \end{aligned}$$

portanto, a desigualdade acima pode ser substituída pela igualdade

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2[P(\gamma)] = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2[P(\gamma)].$$

Nota-se que, se o posto(H) = r = min{p,m}, que é o posto da matriz Y, for 1 então, r = 1 e os vetores singulares U_2^Y ou V_2^Y serão nulos. Define-se que, se os vetores singulares são nulos então, o valor singular também será.

Para se resumir o resultado principal tem-se o seguinte teorema:

Teorema 1.- Se $X, Y \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $M=X+jY$ então,

$$\mu_R(M) = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}M & -\gamma \text{Im}M \\ \gamma^{-1} \text{Im}M & \text{Re}M \end{bmatrix} \right). \quad (15)$$

Esta função, a ser minimizada, é unimodal sobre um intervalo (0,1]. Se posto(Y)=1 então

$$\begin{aligned}\mu_R(M) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re} M & -\gamma \operatorname{Im} M \\ \gamma^{-1} \operatorname{Im} M & \operatorname{Re} M \end{bmatrix} \right) \\ &= \max \{ \bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X], \bar{\sigma}(X V_2^Y) \}\end{aligned}$$

sendo U_2^Y e V_2^Y obtidas de qualquer decomposição de valor singular de Y :

$$Y = \begin{bmatrix} U_1^Y & U_2^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(Y) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^Y & V_2^Y \end{bmatrix}.$$

Os raios de estabilidade real e complexo serão iguais se e somente se o mínimo valor singular de $\sigma_2[P(\gamma)]$ ocorrer em $\gamma^*=1$.

Em virtude de se ter utilizado o conceito de continuidade nos valores singulares estruturados, algumas considerações com relação às suas propriedades serão citadas a seguir; no cálculo do raio de estabilidade real é importante conhecer como se comporta $\mu_R(M)$ quando a matriz M varia. O exemplo

$$\mu_R(1+j\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon = 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon \neq 0 \end{cases}$$

mostra que $\mu_R(M)$ pode ser descontínua para uma determinada matriz M . A semi-continuidade superior da aplicação $M \rightarrow \mu_R(M)$, segue do argumento geral: que $I-\Delta M$ é invertível para todo $\Delta \in K$, sendo K um conjunto compacto, definido no apêndice B, então, $I-\Delta \bar{M}$ é invertível para todo $\Delta \in K$ e todo $\bar{M}$ em uma vizinhança aberta de M . A aplicação $M \rightarrow \mu_R(M)$ é contínua para qualquer matriz M que tenha $\text{posto}(Y) > 1$.

Proposição 1- Se o $\text{posto}(\operatorname{Im}(M)) > 1$ então para todo $E \in \mathbb{C}^{p \times m}$,

$$\frac{|\mu_R(M+E) - \mu_R(E)|}{\mu_R(M)} \leq \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\operatorname{Im}(M))}.$$

Prova: veja apêndice A.

Capítulo 2

Algoritmos

2.1 - Introdução

Neste capítulo apresentam-se dois algoritmos: um para a determinação da faixa de frequências e outro para o cálculo da matriz de perturbação. O algoritmo para a determinação de uma faixa de frequências denotado por um intervalo $[\omega_m, \omega_M]$, para uma matriz de transferência $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$, calcula o ponto $\omega_{\max}$ que faz com que a função do valor singular estruturado seja máxima. Assim, pode-se calcular o raio de estabilidade real. O segundo algoritmo, utilizado para o cálculo da matriz de perturbação $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, emprega os vetores singulares da matriz $P(\gamma)$.

Para tal construção, seja uma matriz $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$ equivalente a $M = X + jY$. Divide-se em três diferentes casos. Quando a matriz Y é igual a matriz 0 ou quando o posto(Y)=1, a construção da matriz de perturbação é mais direta, não precisando realizar a minimização da função $\mu_R(M)$. Isto ocorre por causa da continuidade do valor singular estruturado real. No terceiro caso, quando o posto(Y)>1, a construção é dividida em três formas diferentes por causa da multiplicidade (denotada por m) do segundo valor singular da matriz $P(\gamma^*)$: quando $m=1,2$, quando $m=2r$ para $r=2,3,4,5,\dots$, e quando $m=2+r$ para $r=0,1,2,3,\dots$

2.2 - Algoritmo para o Cálculo da Faixa de Frequências Finita [L. Qiu (1995)]

É mostrado em [20] o algoritmo para o cálculo do raio de estabilidade. Para se encontrar o intervalo denomina-se $\omega_{\min}$ como o limite mínimo e $\omega_{\max}$ como o limite máximo, toma-se uma constante fixa $\omega_o \in \mathbb{R}^+$.

Passo 1

Se $CA^{-1}B \neq 0$,

Então $\omega_o = 0$

Caso Contrário, toma-se $\omega_o \neq 0$.

Passo 2

Se a função $\mu_R[C(j\omega_0 I - A)^{-1}B] \neq 0$ para o ω_0 escolhido

Então passo3

Caso Contrário, toma-se outro ω_0 diferente .

Passo 3

Monta-se a seguinte matriz P

$$P = \begin{bmatrix} A & \{\mu_R[C(j\omega_0 I - A)^{-1}B]\}^{-2} BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}$$

Passo 4

Calcula-se os autovalores da matriz P onde $\omega_{\max}$ é a maior magnitude entre os autovalores imaginários da matriz P

Passo 5

Se $\sigma_1[CA^{-1}B] \geq \mu_R[C(j\omega_0 I - A)^{-1}B]$

Então $\omega_{\min} = 0$,

Caso Contrario, toma-se $\omega_{\min}$ igual à mínima magnitude dos autovalores imaginários da matriz P.

2.3 - Raio de estabilidade real ($r_R(A,B,C)$) em uma faixa de frequências finita [L. Qiu (1995), [20]]

O raio de estabilidade real para $M=C(j\omega I - A)^{-1}B$ é escrito da seguinte forma:

$$r_R(A,B,C) = \left(\max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \mu_R[C(j\omega I - A)^{-1}B] \right)^{-1}$$

$$= \left(\max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \left(\inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}M & -\gamma \text{Im}M \\ \gamma^{-1} \text{Im}M & \text{Re}M \end{bmatrix} \right) \right) \right)^{-1}.$$

2.4 - Algoritmo para o Cálculo da Matriz de Perturbação Delta (Δ) L. Qiu, et al., (1995)

O objetivo do algoritmo é a construção de um par de vetores singulares direito e esquerdo que satisfaça a condição (11) (capítulo 1) já que a matriz delta está baseada nos vetores singulares da matriz $P(\gamma)$.

A construção da matriz de perturbação (Δ) está baseada na teoria desenvolvida no capítulo 1. Observando-se que a continuidade do valor singular estruturado real só é válida quando o posto da matriz Y é estritamente maior que 1, tem-se três casos diferentes:

Caso I - Quando a matriz Y é igual a matriz zero

Caso II - Quando o posto(Y)=1

Caso III - Quando o posto(Y)>1

2.4.1 - Construção da Matriz Δ

Caso I - Se $Y = 0$, encontra-se um par de vetores singulares reais à direita e à esquerda, v e u , da matriz X correspondentes ao máximo valor singular $\bar{\sigma}(X)$. Define-se a matriz de perturbação delta como

$$\Delta = \frac{vu^T}{\bar{\sigma}(X)}$$

Caso II - Quando $\gamma \rightarrow 0$ então o posto(Y)=1, não envolvendo nenhuma classe de minimização e possibilitando assim uma construção mais direta. Primeiramente calcula-se a decomposição em valores singulares da matriz Y .

$$Y = \begin{bmatrix} U_1^Y & U_2^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(Y) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^Y & V_2^Y \end{bmatrix}^T.$$

pelo lema 5 (no capítulo 1) tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_2[P(\gamma)] &= \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} 0 & (U_2^T)^T X \\ X V_2^Y & 0 \end{bmatrix} \right) = \max \{ \bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X], \bar{\sigma}(X V_2^Y) \}. \end{aligned}$$

Então tem-se dois casos :

- Quando $\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X] \geq \bar{\sigma}(XV_2^Y)$, calculam-se os vetores singulares direito e esquerdo u e v da matriz $(U_2^Y)^T X$ correspondentes à $\mu_R(M)=\sigma_2[P(\gamma^*)]$ e assim

$$\Delta = - \frac{vu^T (U_2^Y)^T}{\bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X]}$$

- Quando $\bar{\sigma}(XV_2^Y) \geq \bar{\sigma}[(U_2^Y)^T X]$, encontra-se o par de vetores singulares direito e esquerdo u e v da matriz (XV_2^Y) correspondente à $\mu_R(M)=\sigma_2[P(\gamma^*)]$ e define-se a matriz de perturbação como

$$\Delta = \frac{V_2^Y vu^T}{\bar{\sigma}(XV_2^Y)}.$$

Caso III - Quando o posto(Y)>1, tem-se quatro casos dependentes da multiplicidade (m) do segundo valor singular da matriz $P(\gamma^*)$, que são os seguintes:

- i) O primeiro é quando a multiplicidade do segundo valor singular da matriz $P(\gamma^*)$, é $m=1$.
- ii) O segundo caso é quando a multiplicidade do segundo valor singular é $m=2$.
- iii) O terceiro é quando a multiplicidade do segundo valor singular da matriz $P(\gamma^*)$ é $m=2+r$ onde $r=0,1,2,..$
- iv) O quarto caso é quando a multiplicidade do segundo valor singular da matriz $P(\gamma^*)$, $m=2r$ onde $r=2,3,4,..$.

Um caso especial é quando a multiplicidade é par e a minimização da função do valor singular estruturado sempre será alcançada em $\gamma^*=1$. Neste caso o raio de estabilidade real e complexo são iguais.

♦ Calcula-se primeiramente o ponto extremo gama $\gamma \in (0,1]$ que minimiza a função do VSE ($\mu_R(M)$) e será denotado como γ^* .

♦ Estuda-se a multiplicidade da matriz $P(\gamma^*)$ ou seja, a multiplicidade do segundo valor

singular da matriz $P(\gamma^*) = \begin{bmatrix} X & -\gamma^* Y \\ (\gamma^*)^{-1} Y & X \end{bmatrix}$

♦ Quando a multiplicidade é 1.

Quando o ponto extremo $\gamma^* \in (0,1)$, obtém-se os vetores singulares direito e esquerdo $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma^*)$ associados ao segundo valor singular $\sigma_2[P(\gamma^*)] = \sigma^*$. Então a matriz de perturbação é

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+$$

♦ Quando a multiplicidade é 2.

Para $\gamma^* = 1 \in (0,1]$ encontrar-se os vetores singulares direito e esquerdo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma^*)$ correspondente ao segundo valor singular $\sigma_2[P(\gamma^*)] = \sigma^*$ e, assim, a matriz de perturbação é

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+$$

♦ Quando a multiplicidade é $2+r$ para $r=0,1,2,\dots$

Este caso só acontecerá para $\gamma^* \in (0,1)$. Realiza-se a decomposição dos valores singulares da matriz $P(\gamma^*)$ da seguinte forma

$$P(\gamma^*) = \begin{bmatrix} U_{2m \times r}^{P(\gamma^*)} & U_{2m \times (2m-r)}^{P(\gamma^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{P(\gamma^*)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2p \times r}^{P(\gamma^*)} & V_{2p \times (2p-r)}^{P(\gamma^*)} \end{bmatrix}^T.$$

Encontrando-se as matrizes $U \in \mathbb{R}^{2m \times r}$ e $V \in \mathbb{R}^{2p \times r}$ com colunas ortonormais tal que

$$P(\gamma^*) V = \sigma_2[P(\gamma^*)] U$$

considere a decomposição de Schur.

$$U^T \frac{dP}{d\gamma}(\gamma^*) V + V^T \frac{dP^T}{d\gamma}(\gamma^*) U = W \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) W^T,$$

pelo lema 4, capítulo 1, tem-se que o produto $\lambda_1 \lambda_r \leq 0$, considera-se, então, um vector unitário

$$w = \begin{cases} \text{- qualquer vetor unitario no } \mathbf{R}^r, & \text{se } \lambda_1 = \lambda_r = 0 \\ \frac{W \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda_r}, 0, \dots, 0, \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix}^T}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_r}} & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_r, \end{cases}$$

sendo os vetores procurados $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Uw$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Vw$ e a matriz perturbação será:

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+.$$

♦ Quando a multiplicidade é $2r > 2$.

Para $\gamma^* = 1$, realiza-se a decomposição de valores singulares da matriz M . Esta possibilidade é considerada por Lewkowicz (1992) [18], quando os raios de estabilidade complexo e Real são iguais. Realiza-se a decomposição dos valores singulares da matriz M em

$$M = \sigma^* (u_1 v_1^* + u_2 v_2^*) + \sum_{i=3}^{\min\{p,m\}} \sigma_i(M) u_i v_i^*$$

por definição de valores singulares tem-se

$$M \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \sigma_2[P(1)] \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Aplica-se a seguinte fatoração [14]

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \Xi^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Xi$$

sendo Ξ uma matriz unitária e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Toma-se o seguinte vetor unitário

$$\xi = \begin{cases} \text{- qualquer vetor unitario no } \mathbf{C}^2, & \text{se } \lambda_1 = 0 \\ - \Xi^H \begin{bmatrix} j\sqrt{\lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}}, & \text{se } \lambda_1 \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \xi$$

sendo,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Im} u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} v \\ \operatorname{Im} v \end{bmatrix}$$

e a matriz perturbação será

$$\Delta = \sigma^{*-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^+.$$

Capítulo 3

Um estudo dos raios de estabilidade real e complexo via valor singular estruturado em um sistema de potência

3.1 - Introdução

Neste capítulo duas técnicas de projeto de controle robusto aplicadas a um sistema de controle de potência, LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery*) e LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), são avaliadas do ponto de vista dos valores singulares estruturados do sistema. Os controles de carga e frequência entre duas áreas interligadas de um sistema elétrico de potência são considerados. As incertezas estruturadas da planta na análise dos raios de estabilidade real e complexo são consideradas.

A interligação dos sistemas elétricos de potência traz vantagens do ponto de vista de operação, como por exemplo a possibilidade de intercâmbio de potência em períodos críticos. Os sistemas de potência estão se interligando cada vez mais, e para que essa operação interligada seja possível é necessário um controle rigoroso da frequência em todo o sistema, através de um processo chamado controle automático de carga e frequência.

Os controladores projetados pelo método clássico têm funcionado de maneira satisfatória. Entretanto, o crescimento da demanda de carga tem feito com que os sistemas operem frequentemente próximos a condições críticas, e com isso surge a necessidade de se utilizarem controladores mais eficientes.

As principais contribuições deste capítulo são: análise dos raios de estabilidade, cálculo dos valores singulares estruturados do sistema (análise μ) e das matrizes de perturbação que levam o sistema a instabilidade considerando-se duas metodologias de controle LQG/LTR e LMIs, ou desigualdades matriciais lineares, DML (que será a notação adotada neste trabalho), como técnicas de projeto de um sistema de controle automático de carga e frequência. Em [40] construiu-se um modelo de um sistema elétrico com duas áreas interligadas e dois controladores foram projetados. Aqui eles serão avaliados do ponto de vista da robustez da estabilidade do sistema, levando-se em

consideração as variações nos parâmetros da planta para faixas definidas de incertezas do modelo nominal.

Nos sistemas de potência, exige-se que as frequências dos geradores permaneçam dentro de certos limites pré-especificados e em torno de um valor nominal. Os controladores projetados devem garantir essa condição frente às variações nas condições de operação do sistema, tais como variações de carga e incertezas nos valores nominais de seus parâmetros. Os controladores foram projetados para um sistema de cinco barras e dois geradores.

3.2 - Modelamento da planta do sistema de potência

Os controladores foram projetados para um sistema de cinco barras e dois geradores, cujo diagrama unifilar pode ser obtido em [40]. Reduzindo este sistema aos nós das f.e.m.'s constantes, obtêm-se as equações dinâmicas não lineares que descrevem seu comportamento :

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2 = \omega_1 - \omega_2 \\ m_1 \dot{\omega}_1 &= p_{m1} - E_1^2 G_{11} + C_{12} \sin \delta + D_{12} \sin \delta - d_1 \omega_1 \\ m_2 \dot{\omega}_2 &= p_{m2} - E_2^2 G_{22} + C_{21} \sin \delta + D_{21} \sin \delta - d_2 \omega_2 \\ \tau_1 \dot{p}_{m1} &= p_{ref1} - \frac{1}{r_1} \omega_1 - p_{m1} \\ \tau_2 \dot{p}_{m2} &= p_{ref2} - \frac{1}{r_2} \omega_2 - p_{m2} .\end{aligned}$$

Admite-se que os geradores e as turbinas são modelados por funções de transferência de primeira ordem, assim como os reguladores de velocidade. Os dados para esse modelo são apresentados na tabela a seguir :

Parâmetro	Símbolo	Valor nominal
Constante de inércia do gerador 1	m_1	0.2650
Constante de inércia do gerador 2	m_2	0.0050
Amortecimento da carga 1	d_1	1.0610
Amortecimento da carga 2	d_2	1.3263
Regulações de velocidade dos geradores	r_1, r_2	0.0400
Constantes de tempo das turbinas	τ_1, τ_2	0.3000

Tabela 1: Valores nominais dos parâmetros do sistema.

Linearizando as equações do sistema, chega-se ao modelo no espaço de estados da planta nominal. Neste modelo da planta, as variáveis de entrada são as potências de referência dos reguladores de velocidade (Δp_{ref1} e Δp_{ref2}), as saídas são velocidade do gerador 2 ($\Delta \omega_2$) e o ângulo de transferência de potência entre os geradores ($\Delta \delta_{12}$), as variáveis de estado são as potências mecânicas de entrada dos geradores (Δp_{m1} e Δp_{m2}), as velocidades ($\Delta \omega_1$ e $\Delta \omega_2$) e o ângulo de transferência de potência entre estes geradores ($\Delta \delta_{12}$). O sistema resultante é melhor compreendido olhando para seu diagrama de blocos, mostrado a seguir.

Figura 1: Diagrama de blocos da planta nominal.

Todas as variáveis do modelo linearizado representam variações em torno de um ponto de operação fixo, e não mais grandezas absolutas. Dessa forma, o objetivo do controlador será manter as variações de velocidades dentro dos limites especificados, em virtude das variações de carga e das incertezas do modelo do sistema.

Para ilustrar a necessidade de haver um controlador neste sistema aumenta-se, por exemplo, a carga conectada ao barramento do gerador 2. Como a potência mecânica de entrada das turbinas permanece constante, este acréscimo da demanda de carga é suprido inicialmente pela energia cinética do rotor da máquina 2, fazendo com que esta tenha uma brusca desaceleração. Após alguns instantes, o ângulo deste barramento começa a variar e, com isso, a potência vinda do barramento 1 aumenta. Dessa forma, o gerador 2, que havia desacelerado, começa a aumentar sua velocidade. Já o gerador 1, que está entregando uma potência maior para a linha, sofre uma diminuição gradual de velocidade. Este processo continua até que as duas velocidades se igualem, fazendo com que os ângulos dos barramentos e consequentemente a potência transmitida fiquem novamente constantes. O sistema atinge, então, uma nova condição operativa.

Entretanto, apesar de estável, esta condição é indesejável, pois houve uma mudança nas velocidades dos geradores, causando alteração na frequência do sistema. Necessita-se, então, de um controlador que atue nas referências de potência mecânica dos reguladores de velocidade, controlando a entrada de potência nas turbinas de modo a garantir a menor variação de velocidade possível nos dois geradores, na ocorrência de um aumento ou diminuição de carga no sistema.

3.3 - Levantamento das faixas de incerteza

As faixas de variação dos parâmetros do modelo foram obtidas a partir dos valores máximos e mínimos (veja [40] para maiores detalhes) para o amortecimento, a regulação de velocidade e as constantes de tempo das turbinas. No caso da potência da linha, admitiu-se uma variação de 10% na potência transmitida, verificando-se em seguida a validade desta faixa de variação através de simulações de fluxo de carga. Não se consideram incertezas nas constantes de inércia das máquinas, pois estas apresentam pouca variação e não têm muita influência no cálculo do erro multiplicativo.

Com esses dados, monta-se a tabela abaixo :

Parâmetro	Valor mínimo	Valor nominal	Valor máximo	Unidade
d_1	1.0000	1.0610	3.0000	p.u. (MVA) / rad/s
d_2	1.0000	1.3263	3.0000	p.u. (MVA) / rad/s
τ_1, τ_2	0.1000	0.3000	0.5000	s
p_{tie}	0.4462	0.4958	0.5454	p.u.
r_1, r_2	0.0394	0.0400	0.0406	p.u.

Tabela 2: Faixas de incertezas dos parâmetros do sistema.

3.4 - Raios de Estabilidade Real e Complexo

3.4.1 - Controlador LQG/LTR

Calculam-se os limites dos vse e os raios de estabilidade real e complexo do sistema elétrico de potência em malha aberta e em malha fechada através de dois controladores projetados através das técnicas de controle LQG/LTR e DML. Mostram-se também as matrizes de perturbação Δ que levam os respectivos sistemas a instabilidade. A planta nominal a ser considerada é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1.8709 & -4.0038 & 0 & 3.7736 & 0 \\ 99.1600 & 0 & -212.000 & 0 & 200.0000 \\ 0 & -83.3333 & 0 & -3.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -83.3333 & 0 & -3.3333 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.3333 & 0 \\ 0 & 3.3333 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Autovalores da matriz A:

$$\lambda_1 = -107.7571 + 76.5340i$$

$$\lambda_2 = -107.7571 - 76.5340i$$

$$\lambda_3 = -0.0376$$

$$\lambda_4 = -3.6593 + 17.7805i$$

$$\lambda_5 = -3.6593 - 17.7805i$$

Adota-se $\omega_0=0$, pois $\sigma_1[CA^{-1}B]=\mu_R[CA^{-1}B]$ e $CA^{-1}B \neq 0$, que é o valor inicial da frequência para se encontrar a faixa de frequências onde está contido o máximo valor singular estruturado (veja cap. 2 para maiores detalhes)

$$\omega_m=0 \text{ e } \omega_M=76.5136 \text{ rad/seg.}$$

Todas as frequências estão em rad/seg, omite-se esta unidade no restante do texto apenas por comodidade. A frequência onde ocorre o máximo vse's complexo e real é $\omega_C^*=\omega_R^*=0$. Raio de estabilidade complexo

$$\begin{aligned} r_C(A,B,C) &= \left(\max_{\omega_C^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \mu_C[C(j\omega_C^* I - A)^{-1}B] \right)^{-1} \\ &= \left(\max_{\omega_C^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \overline{\sigma}[C(j\omega_C^* I - A)^{-1}B] \right)^{-1} = 0.7012. \end{aligned}$$

Valor singular estruturado real

$$\mu_R[C(j\omega_R^* I - A)^{-1}B] = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}M & -\gamma \text{Im}M \\ \gamma^{-1} \text{Im}M & \text{Re}M \end{bmatrix} \right) = 1.4262.$$

Raio de estabilidade real

$$r_R(A,B,C) = \left(\max_{\omega_R^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \mu_R[C(j\omega_R^* I - A)^{-1}B] \right)^{-1} = 0.7012.$$

Apresentam-se todos os dados na seguinte tabela:

VSE's real e complexo e raios de estabilidade reais e complexos do sistema em malha aberta			
ω_C^*	0	ω_R^*	0
$\mu_C[C(j\omega_C^* I - A)^{-1}B]$	1.4262	$\mu_R[C(j\omega_R^* I - A)^{-1}B]$	1.4262
$r_C(A,B,C)$	0.7012	$r_R(A,B,C)$	0.7012

Tabela 3.

Para qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valem as seguintes desigualdades

$$\rho_R(M) \leq \mu_K(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

sendo o limite inferior $\rho_R(M) = 0.9885$ e o limite superior $\bar{\sigma}(M) = 1.4262$ do sistema de potência em malha aberta. As matrizes do sistema e de perturbação, para a frequência mais crítica $\omega_R^* = 0$, que leva o sistema a instabilidade (veja cap. 1), são

$$M = C(j\omega_R^* I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.0085 & -1.0085 \\ 0.0192 & 0.0192 \end{bmatrix} \text{ e } \Delta = \begin{bmatrix} 0.4958 & 0.0000 \\ -0.4958 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Mostram-se a seguir os gráficos dos vse complexo e real, os segundos valores singulares da matriz $P(\gamma)$ e a função do vse da matriz M (i.e. $\mu([C(j\omega I - A)^{-1}B])$, para todo $\omega \in [\omega_m, \omega_M]$ e $\gamma \in (0, 1]$, sistema em malha aberta).

Figura 2: A linha vermelha indica a função do vse real, $\mu_R[C(j\omega I - A)^{-1}B]$, a linha azul indica a função do vse complexo $\mu_C[C(j\omega I - A)^{-1}B]$ e a linha verde indica o intervalo $[\omega_m, \omega_M]$, onde encontra-se o ponto máximo da função dos vse complexo e real.

Figura 3: Gráfico tridimensional do segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$.

A função que descreve o gráfico da figura 3 é:

$$\sigma_2[C\omega jI - A]^{-1}B = \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(C(\omega jI - A)^{-1}B) & -\gamma \text{Im}(C(\omega jI - A)^{-1}B) \\ \gamma^{-1} \text{Im}(C(\omega jI - A)^{-1}B) & \text{Re}(C(\omega jI - A)^{-1}B) \end{bmatrix} \right)$$

$\omega \in [\omega_m, \omega_M]$
 $\gamma \in (0, 1]$

que representa uma dupla varredura tanto na frequência, como para todo $\gamma \in (0, 1]$. Quando $\gamma=1$ tem-se a curva do vse complexo. O gráfico da figura 4 representa um corte da figura 3 onde se considera, para cada frequência, o menor valor singular estruturado real em γ .

Figura 4: Gráfico tridimensional do valor singular estruturado real em função da frequência com minimização em γ .

A função que descreve o gráfico da figura 4 é

$$\mu_R[C\omega jI - A]^{-1}B = \inf_{\omega \in [\omega_m, \omega_M]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(C(\omega jI - A)^{-1}B) & -\gamma \operatorname{Im}(C(\omega jI - A)^{-1}B) \\ \gamma^{-1} \operatorname{Im}(C(\omega jI - A)^{-1}B) & \operatorname{Re}(C(\omega jI - A)^{-1}B) \end{bmatrix} \right).$$

A seguir apresentam-se os raios de estabilidade real e complexo para o sistema controlado com incertezas. O primeiro controlador a ser avaliado é o projetado via metodologia LQG/LTR. Consideram-se a planta nominal com integradores, para um acompanhamento apropriado do sinal de referência, a matriz de incertezas A_{del} , o ganho do observador, projetado via filtro de Kalman, H_{kf} , e o ganho do controlador Linear Quadrático Gaussiano, G_{lqg}

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8709 & -4.0038 & 0 & 3.7736 & 0 \\ 0 & 0 & 99.1600 & 0 & -212.2 & 0 & 200 \\ 3.3333 & 0 & 0 & -83.3333 & 0 & -3.3333 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 0 & 0 & -83.3333 & 0 & -3.3333 \end{bmatrix}$$

$$B_n^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{del} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1873a & -7.3169b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.916c & 0 & -387.7955d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo que a, b, c e d variam no intervalo $[-1, 1]$,

$$H_{kf} = \begin{bmatrix} 119.9979 & 0.0505 \\ -0.0466 & 119.9979 \\ 0.9917 & -0.9917 \\ 4.9483 & 0.0420 \\ 0.0420 & 4.3885 \\ 8.8539 & -0.3892 \\ -0.4351 & 6.3587 \end{bmatrix} \text{ e } G_{lqg} = \begin{bmatrix} 456.9251 & 0.0120 & -15751 & 954800 & 23.1968 & 31317 & 5.3935 \\ 0.0120 & 1492.6 & 166430 & 258.2341 & 517250 & 1.6466 & 334190 \end{bmatrix}.$$

Apresentam-se, a seguir, os raios de estabilidade real e complexo para a função de transferência do controlador (K_{LQG}).

$$K_{LQG}(\omega) = G_{lqg} (\omega I - A_n - A_{del} + B_n G_{lqg} + H_{kf} C_n)^{-1} H_{kf}.$$

Para esta análise realizaram-se 625 combinações das incertezas do sistema (para se conseguir tais combinações fixa-se uma determinada incerteza paramétrica e variam-se as outras, isto foi feito para todas as incertezas, sendo que para cada combinação há um modelo definido) e os seguintes resultados foram obtidos

Figura 5: Raios de estabilidade real (a) e complexo (b) para 625 modelos distintos, em virtude das combinações da incertezas paramétricas, para o controle LQG/LTR do sistema de potência.

O comportamento dos raios para as 625 combinações mostra que o raio real tem mais variações que o raio complexo. O raio de estabilidade complexo é sempre menor que o raio real. O raio real mostra com mais clareza a influência das variações paramétricas na estabilidade do sistema. Nota-se no gráfico da figura 5a que existem várias combinações de parâmetros que proporcionam o menor raio de estabilidade real para a função de transferência K_{LQG} . Um conjunto representativo destas incertezas onde os raios de estabilidade reais são mais críticos é quando $a=0$, $b=-1$, $c=-1$ e $d=-1$ (veja a matriz de incertezas A_{del} acima). Para este caso calculam-se, a seguir, os valores singulares estruturados, os limites do vse e os raios de estabilidade real e complexo. Mostra-se também a matriz de perturbação Δ que leva o sistema à instabilidade

$$A_{lqg} = \begin{bmatrix} -456.9251 & -0.0120 & 15631.0021 & -954800.0000 & -23.2473 & -31317.0000 & -5.3935 \\ -0.0120 & -1492.6000 & -166429.9534 & -258.2341 & -517369.9979 & -1.6466 & -334190.0000 \\ 0 & 0 & -0.9917 & 1.0000 & -0.0083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.8192 & -3.3131 & -0.0420 & 3.7736 & 0 \\ 0 & 0 & 89.2020 & 0 & -171.2070 & 0 & 200.0000 \\ 3.3333 & 0 & -8.8539 & -83.3333 & 0.3892 & -3.3333 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 0.4351 & 0 & -89.6920 & 0 & -3.3333 \end{bmatrix}$$

$$B_{lqg}' = H_{kf}, \quad C_{lqg} = G_{lqg};$$

Autovalores da matriz A_{lqg}

$$\lambda_1 = -500.6527 + 553.4073i$$

$$\lambda_2 = -500.6527 - 553.4073i$$

$$\lambda_3 = -116.0835 + 197.5770i$$

$$\lambda_4 = -116.0835 - 197.5770i$$

$$\lambda_5 = -1.0371$$

$$\lambda_6 = -224.7324$$

$$\lambda_7 = -323.4214$$

VSE's real e complexo e raios de estabilidade real e complexo do sistema realimentado com o ganho LQG			
ω_c^*	256.8650	ω_R^*	319.7072
$\mu_C[C_{lqg}(j\omega_c^* I - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}]$	1.5883e+004	$\mu_R[C_{lqg}(j\omega_R^* I - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}]$	1.4625e+004
$r_C(A_{lqg}, B_{lqg}, C_{lqg})$	6.2962e-005	$r_R(A_{lqg}, B_{lqg}, C_{lqg})$	6.8374e-005

Tabela 4.

Matriz M na frequência ω_R^*

$$M = \begin{bmatrix} 14725 & .5141 & -25.9620 i & 126.1546 & -44.8778 i \\ -5.8840 & +14.4441 i & 16.2713 & +1731.3838 i \end{bmatrix}.$$

Para qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valem as seguintes desigualdades:

$$\rho_R(M) \leq \mu_K(M) \leq \bar{\sigma}(M).$$

$$0 \leq \mu_R(M) = 1.4620e+004 \leq 1.4726e+004 \text{ e}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.000067956592 & -0.000007490390 \\ -0.000007642969 & -0.000067724530 \end{bmatrix}.$$

Figura 6: Valores singulares estruturados reais e complexos para o controlador LQG/LTR.

Segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$:

$$\sigma_2[C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}] = \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) & -\gamma \text{Im}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) \\ \gamma^{-1} \text{Im}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) & \text{Re}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) \end{bmatrix} \right)$$

$\omega \in [\omega_m, \omega_M]$
 $\gamma \in (0,1)$

Figura 7: Gráfico tridimensional do segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$.

Neste gráfico realiza-se uma dupla varredura de $\sigma_2[P(\gamma)]$, tanto no domínio da frequência, como no intervalo $(0,1]$, em γ . Quando $\gamma=1$, forma-se a função do valor singular estruturado complexo.

A seguir mostram-se os ínfimos dos valores singulares, no domínio da frequência, do sistema controlado via metodologia LQG/LTR.

$$\mu_R [C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}] = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) & -\gamma \text{Im}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) \\ \gamma^{-1} \text{Im}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) & \text{Re}(C_{lqg}(\omega jI - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}) \end{bmatrix} \right)$$

Figura 8: Gráfico tridimensional da função do valor singular estruturado para cada frequência - Controle LQG/LTR.

A seguir, apresenta-se um cálculo mais preciso dos raios de estabilidade real e complexo para as seguintes combinações de incertezas: $a=[-1;-0.8]$ e b, c e d assumiram os seguintes valores $[-1;-0.8;-0.6;-0.4;-0.2;0;0.2;0.4;0.6;0.8;1]$. Estas combinações resultaram em 2662 modelos para o sistema $C_{lqg}(\omega I - A_{lqg})^{-1}B_{lqg}$. Obteve-se, então os seguintes resultados:

Figura 9: Raios de estabilidade complexo e real para 2662 possíveis modelos do controlador LQG/LTR.

3.4.2 - Controlador dml

O ganho do controlador projetado via desigualdades matriciais lineares é:

$$K_{dml} = \begin{bmatrix} 40.740 & 0.0016 & -163.75 & 2370.7 & 0.9549 & 494.17 & 0.1755 \\ 0.0016 & 1287.5 & 138520 & 139.23 & 537770 & 0.1078 & 325370 \end{bmatrix}.$$

Calculam-se raios de estabilidade real e complexo para as mesmas combinações dos parâmetros mencionadas acima, para a função de transferência

$$C_{dml}(\omega I - A_{dml})^{-1} B_{dml}$$

Sendo, $A_{dml} = A_n + A_{del} - B_n K_{dml} - H_{kf} C_n$, $B_{dml} = H_{kf}$ e $C_{dml} = K_{dml}$. Têm-se os seguintes gráficos

Figura 10: Raios de estabilidade real e complexo para 625 modelos distintos, em virtude das combinações da incertezas paramétricas, para o controle dml do sistema de potência.

Um conjunto de parâmetros, dentre vários, no qual o raio de estabilidade real é crítico para o controlador dml é $a=1$, $b=-1$, $c=0.5$ e $d=-0.5$. Calculam-se os vse, os limites dos vse e os raios de estabilidade real e complexo para o sistema caracterizado por este conjunto de incertezas. Mostra-se também a matriz de perturbação Δ que leva o sistema à instabilidade

$$A_{dml} = \begin{bmatrix} -40.7400 & -0.0016 & 43.7521 & -2370.7000 & -1.0054 & -494.1700 & -0.1755 \\ -0.0016 & -1287.5000 & -138519.9534 & -139.2300 & -537889.9979 & -0.1078 & -325370 \\ 0 & 0 & -0.9917 & 1.0000 & -0.0083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0065 & 3.3131 & -0.0420 & 3.7736 & 0 \\ 0 & 0 & 104.0760 & 0 & -22.6908 & 0 & 200.0000 \\ 3.3333 & 0 & -8.8539 & -83.3333 & 0.3892 & -3.3333 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 0.4351 & 0 & -89.6920 & 0 & -3.3333 \end{bmatrix}$$

$$B_{dml}' = H_{kf}, \quad C_{dml} = K_{dml};$$

Autovalores da matriz A_{dml} : $\lambda_1 = -371.4357 + 757.7536i$

$$\lambda_2 = -371.4357 - 757.7536i$$

$$\lambda_3 = -8.4446 + 38.4126i$$

$$\lambda_4 = -8.4446 - 38.4126i$$

$$\lambda_5 = -23.4945 \quad \lambda_6 = -1.3686 \quad \lambda_7 = -570.6523$$

VSE's real e complexo e raios de estabilidade real e complexo			
ω_C^*	893	ω_R^*	997.5
$\mu_C[C_{dml} (j \omega_C^* I - A_{dml})^{-1} B_{dml}]$	5.008e+003	$\mu_R[C_{dml} (j \omega_R^* I - A_{dml})^{-1} B_{dml}]$	4.8528e+003
$r_C(A_{dml}, B_{dml}, C_{dml})$	1.9965e-004	$r_R(A_{dml}, B_{dml}, C_{dml})$	2.0607e-004

Tabela 5.

Matriz M na frequência ω_R^*

$$M = \begin{bmatrix} 0.7825 - 20.8895i & -0.0172 - 0.0735i \\ 22.0419 - 6.0551i & 4858.5187 + 0.3810i \end{bmatrix}.$$

Mostra-se a seguir a matriz de perturbação para a frequência ω_R^* . Para qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valem as seguintes desigualdades

$$\rho_R(M) \leq \mu_R(M) \leq \bar{\sigma}(M).$$

$$0 \leq \mu_R(M) = 4.8528e+003 \leq 4.8586e+003$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0.0002046036 & -0.0000109908 \\ -0.0000109053 & -0.0002057741 \end{bmatrix}$$

Gráfico bidimensional do valor singular estruturado $\mu_R(M)$

Figura 11: Valores singulares estruturados reais e complexos para o controlador dml.

Gráfico tridimensional do segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$:

$$\sigma_2[C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}] = \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) & -\gamma \operatorname{Im}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) \\ \gamma^{-1} \operatorname{Im}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) & \operatorname{Re}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) \end{bmatrix} \right)$$

$\omega \in [\omega_m, \omega_M]$
 $\gamma \in (0,1]$

Figura 12: Gráfico tridimensional do segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$.

A seguir mostram-se os ínfimos dos valores singulares, no domínio da frequência, do sistema controlado via metodologia dml.

$$\mu_R[C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}] = \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) & -\gamma \operatorname{Im}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) \\ \gamma^{-1} \operatorname{Im}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) & \operatorname{Re}(C_{dml}(\omega jI - A_{dml})^{-1}B_{dml}) \end{bmatrix} \right)$$

$\omega \in [\omega_m, \omega_M]$

Figura 13: Gráfico tridimensional da função do valor singular estruturado para cada frequência - Controle dml.

Conclusão

Neste trabalho fez-se um estudo detalhado de raios de estabilidade real e complexo e matrizes de perturbação que levam os sistemas à instabilidade. O problema do raio de estabilidade, que consiste em encontrar o ínfimo dos máximos valores singulares de uma dada matriz de perturbação Δ tal que $A+B\Delta C$ seja instável, foi considerado nas referências citadas no capítulo 1 com a utilização apropriada do conceito de valores singulares estruturados. Nesta dissertação vários questionamentos foram levantados e devidamente estudados nas referências citadas. A primeira questão que se coloca é: Qual a função que define os valores singulares estruturados complexo e real de uma determinada matriz? A seguinte função responde a tal questionamento

$$\mu_K(M) := [\inf\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in K^{m \times p} \det(I - \Delta M) = 0\}]^{-1}$$

sendo que K pode ser tanto o campo dos números complexos como o campo dos reais.

A segunda questão é com relação aos raios de estabilidade real e complexo; como calculá-los? Com a eq. 2 do capítulo 2

$$r_K(A, B, C) := \inf_{s \in \partial C_g} [\mu_K(M)]^{-1} = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_K(M) \right\}^{-1}$$

tem-se a base para a realização destes cálculos. O cálculo do raio de estabilidade real resume-se em encontrar o valor singular estruturado $\mu_K(M)$ no campo dos reais

$$r_R(A, B, C) = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_R[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1}.$$

O valor singular estruturado no campo complexo é $\mu_C(M) = \bar{\sigma}(M)$. Então,

$$r_C(A, B, C) = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \mu_C[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1} = \left\{ \sup_{s \in \partial C_g} \bar{\sigma}[C(sI - A)^{-1}B] \right\}^{-1}.$$

O teorema 1 do capítulo 1 sintetiza a relação entre os raios de estabilidade real e complexo, que é um ponto fundamental neste estudo. Quando o raio de estabilidade real será igual ao raio de estabilidade complexo? Para qualquer sistema, qual é o maior raio de estabilidade?

Os raios de estabilidade real e complexo serão iguais se e somente se o mínimo valor singular de $\sigma_2[P(\gamma)]$ ocorrer em $\gamma^*=1$. Para qualquer sistema o raio de estabilidade real será, sempre, maior ou igual ao raio de estabilidade complexo. Os gráficos abaixo ilustram isto; o sistema de potência utilizado no capítulo 3 foi considerado e, as diversas curvas que aparecem nestes gráficos significam frequências distintas.

Figura 14: Comportamento dos $\sigma_1[P(\gamma)]$ e $\sigma_2[P(\gamma)]$ para os controladores projetados via LQG/LTR (a) e DMLs (b).

$\sigma_1[.]$ são as curvas em azul e $\sigma_2[.]$ as curvas em vermelho. Observa-se que o raio de estabilidade complexo está relacionado com $\gamma = 1$ e, para o raio de estabilidade real é necessário fazer uma pesquisa em γ no intervalo $(0 \ 1]$. Os gráficos da figura 14 servem para responder à seguinte indagação: Por que o segundo valor singular da matriz $P(\gamma)$ define o raio de estabilidade real? Observa-se nos gráficos acima que $\sigma_1[P(\gamma)]$ e $\sigma_2[P(\gamma)]$ são desmembramentos de $\sigma_1[M]$ e que a medida mais crítica será dada por $\sigma_2[P(\gamma)]$.

No capítulo 3 foram avaliados dois controladores projetados em [40], LQG/LTR e DML. Os limites dos vse e os raios de estabilidade real e complexo do sistema elétrico de potência em malha aberta e em malha fechada foram calculados. Também, as matrizes de perturbação Δ que levam os respectivos sistemas a instabilidade foram calculadas. A sexta questão que se coloca, neste estudo, é a seguinte: Qual controlador está mais distante da instabilidade? De acordo com os raios real e complexo de ambos controladores, veja gráficos das figuras 9 e 10, o controlador projetado via metodologia DML está mais distante da instabilidade do que o controlador projetado via metodologia LQG/LTR.

Deve-se salientar que esta conclusão em relação a distância da instabilidade destes controladores vale especificamente para o projeto desenvolvido em [40]. Para conclusões mais abrangentes deve-se fazer um estudo mais aprofundado destas metodologias, que é um tema para futuros trabalhos.

Apêndice A

Lemas e propriedades do capítulo 1

Lema 1. [19] Sejam $E \in K^{m \times p}$ e $F \in K^{p \times m}$, para $i=1,2,\dots,\min\{p,m\}$

$$\inf\{\bar{\sigma}(E): \text{posto}(I_m - EF) \leq m-i\} = [\sigma_i(F)]^{-1}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Supõe-se que $\bar{\sigma}(E) < [\sigma_i(F)]^{-1}$. Então (Stewart e Sun, 1990. P 34, teorema 34) tem-se que $\sigma_i(EF) \leq \bar{\sigma}(E)\sigma_i(F) < 1$ e, pelo teorema de Schmidt/Mirsky, tem-se que o $\text{posto}(I_m - EF) > m-i$. Isto contradiz a suposição inicial.

($\Leftarrow$) Para mostrar a outra desigualdade $\leq$, realiza-se uma decomposição singular da matriz F onde $F = U\Sigma V^*$, no qual U e V são matrizes unitárias sobre um campo K , e a diagonal

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1(F), \sigma_2(F), \sigma_3(F), \dots, \sigma_{\min\{p,m\}}(F)\} \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

Define-se a decomposição da matriz E como:

$$E = V \text{diag}\{[\sigma_1(F)]^{-1}, [\sigma_2(F)]^{-1}, [\sigma_3(F)]^{-1}, \dots, [\sigma_i(F)]^{-1}, 0, \dots, 0\} U^*$$

então $\bar{\sigma}(E) = [\sigma_i(F)]^{-1}$ o $\text{posto}(I_m - EF) = m-i$. Isto demonstra a segunda desigualdade " $\leq$ "

□

Lema 2. [19] Seja $U \in \mathbb{R}^{p \times k}$ e $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$, se $U^T U = V^T V \neq 0$ então $VU^+U = V$ e $\bar{\sigma}(VU^+) = 1$.

Prova: Por hipótese tem-se que $U^T U = V^T V \neq 0$, então existe uma W ortogonal tal que $V = WU$ então, obtém-se:

$$VU^+U = WUU^+U = WU = V.$$

Para o segundo caso tem-se

$$\bar{\sigma}(VU^+) = \bar{\sigma}(WUU^+) = \bar{\sigma}(UU^+) = \bar{\sigma}(I) = 1$$

□.

Propriedade 1. [19] Seja $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, e seja um par de vetores singulares esquerdo e direito de $P(\gamma)$ associado a um valor singular diferente de zero σ , então $u_1^T u_2 = v_1^T v_2$

Prova: Pela definição de valores singulares tem-se

$$\begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1}Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

multiplica-se por $\begin{bmatrix} u_2^T & u_1^T \end{bmatrix}$ a eq. (1) e obtém-se:

$$u_2^T X v_1 + \gamma^{-1} u_1^T Y v_1 - \gamma u_2^T Y v_2 + u_1^T X v_2 = \sigma u_2^T u_1 + \sigma u_1^T u_2 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} X^T & \gamma^{-1} Y^T \\ -\gamma Y^T & X^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

e a eq. (3) por $\begin{bmatrix} v_2^T & v_1^T \end{bmatrix}$:

$$v_2^T X^T u_1 - \gamma v_1^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_2^T Y^T u_2 + v_1^T X^T u_2 = \sigma v_2^T v_1 + \sigma v_1^T v_2.$$

Transpondo, temos

$$u_1^T X v_2 + \gamma u_1^T X v_1 + \gamma^{-1} u_2^T Y v_2 + u_2^T X v_1 = \sigma v_1^T v_2 + \sigma v_2^T v_1 \quad (19)$$

e, realiza-se a diferença entre (2) e (4) (sabe-se que $u_2^T u_1 = u_1^T u_2$ e $v_2^T v_1 = v_1^T v_2$)

$$(\gamma + \gamma^{-1})(u_1^T Y v_1 - u_2^T Y v_2) = 2\sigma(u_1^T u_2 - v_1^T v_2). \quad (20)$$

Similarmente realiza-se o produto de $\begin{bmatrix} u_2^T & -u_1^T \end{bmatrix}$ por (1) obtendo-se

$$u_2^T X v_1 - \gamma^{-1} u_1^T Y v_1 - \gamma u_2^T Y v_2 - u_1^T X v_2 = \sigma u_2^T u_1 - \sigma u_1^T u_2 \quad (21)$$

e (3) por $\begin{bmatrix} v_2^T & -v_1^T \end{bmatrix}$

$$v_2^T X^T u_1 + \gamma v_1^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_2^T Y^T u_2 - v_1^T X^T u_2 = \sigma v_2^T v_1 - \sigma v_1^T v_2.$$

Aplica-se a transposta à igualdade e obtém-se

$$u_1^T X v_2 + \gamma u_1^T Y v_1 + \gamma^{-1} u_2^T Y v_2 - u_2^T X v_1 = \sigma v_1^T v_2 - \sigma v_2^T v_1. \quad (22)$$

Realiza-se a soma de (6) e (7)

$$(\gamma - \gamma^{-1})(u_1^T Y v_1 - u_2^T Y v_2) = 0.$$

Como $(\gamma - \gamma^{-1}) \neq 0$ então

$$(u_1^T Y v_1 - u_2^T Y v_2) = 0$$

e substitui-se esta na igualdade (5)

$$2\sigma(u_1^T u_2 - v_1^T v_2) = 0.$$

Como $\sigma \neq 0$ então

$$(u_1^T u_2 - v_1^T v_2) = 0$$

$$\text{logo } u_1^T u_2 = v_1^T v_2$$

□

Lema 3. Seja $F(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ uma função matricial analítica (real) sobre um conjunto aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}$. Então existe uma função matricial analítica diagonal

$$\tilde{\Sigma}(\gamma) = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1(\gamma), \tilde{\sigma}_2(\gamma), \dots, \tilde{\sigma}_{\min\{p,m\}}(\gamma)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

e duas funções matriciais analíticas ortogonais

$$\tilde{U}(\gamma) = [\tilde{u}_1(\gamma), \tilde{u}_2(\gamma), \dots, \tilde{u}_p(\gamma)] \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad \text{e} \quad \tilde{V}(\gamma) = [\tilde{v}_1(\gamma), \tilde{v}_2(\gamma), \dots, \tilde{v}_m(\gamma)] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

definidas também no conjunto Γ , tal que

$$\tilde{\Sigma}(\gamma) = \tilde{U}^T(\gamma) F(\gamma) \tilde{V}(\gamma)$$

além disso

$$\frac{d\tilde{\sigma}_i(\gamma)}{d\gamma} = \tilde{u}_i^T(\gamma) \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \tilde{v}_i(\gamma) \quad (23)$$

para $i=1, 2, \dots, \min\{p, m\}$.

Prova: Para demonstrar a segunda parte, sabe-se pela definição de valores singulares que para um par de vetores direito e esquerdo de $F(\gamma)$, correspondente ao valor singular $\tilde{\sigma}_i(\gamma)$, tem-se

$$F(\gamma) \tilde{v}_i(\gamma) = \tilde{\sigma}_i(\gamma) \tilde{u}_i(\gamma) \quad (24)$$

aplica-se a derivada à igualdade

$$\frac{dF}{d\gamma}(\gamma) \tilde{v}_i(\gamma) + F(\gamma) \frac{d\tilde{v}_i}{d\gamma}(\gamma) = \frac{d\tilde{\sigma}_i}{d\gamma}(\gamma) \tilde{u}_i(\gamma) + \tilde{\sigma}_i(\gamma) \frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma) \quad (25)$$

podendo-se multiplicar (9) por $\tilde{u}_i^T(\gamma)$ pela direita e pela esquerda por $\tilde{v}_i^T(\gamma)$, obtém-se

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)F(\gamma) = \tilde{\sigma}_i(\gamma)\tilde{v}_i^T(\gamma) \quad (26)$$

tomando-se em conta que $\tilde{u}_i^T(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma) = 1$ e $\tilde{v}_i^T(\gamma)\tilde{v}_i(\gamma) = 1$.

Multiplica-se pelo lado direito $\tilde{u}_i^T(\gamma)$ à igualdade (10) tendo-se

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{dF}{d\gamma}(\gamma)\tilde{v}_i(\gamma) + \tilde{u}_i^T(\gamma)F(\gamma)\frac{d\tilde{v}_i}{d\gamma}(\gamma) = \tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{\sigma}_i}{d\gamma}(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma) + \tilde{u}_i^T(\gamma)\tilde{\sigma}_i(\gamma)\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma)$$

e agora substitui-se (11) e obtém-se

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{dF}{d\gamma}(\gamma)\tilde{v}_i(\gamma) + \tilde{\sigma}_i(\gamma)\tilde{v}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{v}_i}{d\gamma}(\gamma) = \frac{d\tilde{\sigma}_i}{d\gamma}(\gamma)\tilde{u}_i^T(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma) + \tilde{\sigma}_i(\gamma)\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma)$$

e como $\tilde{u}_i^T(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma) = 1$ e $\tilde{v}_i^T(\gamma)\tilde{v}_i(\gamma) = 1$

temos que

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma) - \frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma) = 0$$

então,

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma) = -\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma)\tilde{u}_i(\gamma)$$

$$\tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{u}_i}{d\gamma}(\gamma) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{v}_i^T(\gamma)\frac{d\tilde{v}_i}{d\gamma}(\gamma) = 0.$$

Finalmente

$$\frac{d\tilde{\sigma}_i}{d\gamma}(\gamma) = \tilde{u}_i^T(\gamma)\frac{dF}{d\gamma}(\gamma)\tilde{v}_i(\gamma)$$

□

Lema 4. Seja uma função matricial analítica $F(\gamma) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sobre um conjunto aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}$, e seus respectivos valores singulares ordenados $\sigma_1(\gamma) \geq \sigma_2(\gamma) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p, n\}}(\gamma) \geq 0$. Onde $\sigma_i(\gamma)$ tem um extremo local diferente de zero com $\gamma^* \in \Gamma$. Então existe um par de vetores singulares $u \in \mathbb{R}^p$ e $v \in \mathbb{R}^m$ de $F(\gamma^*)$ correspondente a $\sigma_i(\gamma^*)$ tal que

$$u^T \frac{dF}{d\gamma}(\gamma^*)v = 0$$

Prova: Se $\sigma_i(\gamma)$ é uma função analítica em $\gamma^* \in (0, 1)$ então, assume-se sem perda de generalidade que $\sigma_i(\gamma) = \tilde{\sigma}_i(\gamma)$ em uma vizinhança de γ^* . Tem-se um ponto estacionário

de $\tilde{\sigma}_1(\gamma)$. Sejam os vetores singulares analíticos direito e esquerdo $\tilde{u}_1(\gamma)$ e $\tilde{v}_1(\gamma)$ correspondentes a $\tilde{\sigma}_1(\gamma)$. Então, pelo lema 3

$$0 = \frac{d\tilde{\sigma}_1(\gamma^*)}{d\gamma} = \tilde{u}_1^T(\gamma^*) \frac{dF(\gamma^*)}{d\gamma} \tilde{v}_1(\gamma^*).$$

Se $\sigma_i(\gamma)$ não é analítica em γ^* , toma-se uma vizinhança aberta $V_\varepsilon(\gamma^*) \subset \Gamma$ de centro γ^* com um raio ε . Então, para $\gamma \leq \gamma^*$, tem-se que $\sigma_i(\gamma) = \tilde{\sigma}_1(\gamma)$ e para $\gamma \geq \gamma^*$, tem-se que $\sigma_i(\gamma) = \tilde{\sigma}_2(\gamma)$. E seja o par de vetores direito esquerdo $\tilde{u}_k(\gamma)$ e $\tilde{v}_k(\gamma)$ correspondente aos respectivos valores singulares $\tilde{\sigma}_k(\gamma)$, para $k=1,2$. Pelo lema anterior tem-se, para $k=1$ e $\gamma \leq \gamma^*$

$$0 \neq \frac{d\tilde{\sigma}_1(\gamma^*)}{d\gamma} = \tilde{u}_1^T(\gamma^*) \frac{dF(\gamma^*)}{d\gamma} \tilde{v}_1(\gamma^*)$$

para $k=2$, $\gamma^* \geq \gamma$

$$0 \neq \frac{d\tilde{\sigma}_2(\gamma^*)}{d\gamma} = \tilde{u}_2^T(\gamma^*) \frac{dF(\gamma^*)}{d\gamma} \tilde{v}_2(\gamma^*).$$

Geram-se os novos vetores direcionais em combinação aos vetores singulares direcionais de $\tilde{u}_k = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$ e $\tilde{v}_k = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$ de seus respectivos valores singulares $\tilde{\sigma}_k(\gamma)$, para $k=1,2$, de modo que $u_\alpha = \alpha \tilde{u}_1 + (1-\alpha^2)^{1/2} \tilde{u}_2$ e $v_\alpha = \alpha \tilde{v}_1 + (1-\alpha^2)^{1/2} \tilde{v}_2$ para $\alpha \in [0,1]$. Sendo $u_\alpha(\gamma^*)$ e $v_\alpha(\gamma^*)$ o novo par de vetores singulares da matriz $F(\gamma^*)$ definidos para o ponto extremo γ^* , que correspondem ao valor singular $\sigma_i(\gamma^*)$, tem-se assim uma função matricial analítica.

Define-se, pelo lema 3, para o novo par de vetores

$$f(\alpha) = u_\alpha^T(\gamma^*) \frac{dF}{d\gamma}(\gamma^*) v_\alpha(\gamma^*)$$

para um γ^* que é um extremo da função $\sigma_i(\gamma)$, tem-se

$$f(0).f(1) = \frac{d\tilde{\sigma}_1(\gamma^*)}{d\gamma} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_2(\gamma^*)}{d\gamma} \leq 0$$

pela continuidade, $f(\alpha)=0$ terá uma só solução no intervalo $[0,1]$.

□

Propriedade 2. Seja $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o par de vetores singulares direito e esquerdo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ da matriz $P(\gamma)$ que satisfaz o lema 4, i.e.

$$u^T \frac{dF}{d\gamma}(\gamma^*) v = 0,$$

correspondente ao valor singular σ diferente de zero então $u_1^T u_1 = v_1^T v_1$ e $u_2^T u_2 = v_2^T v_2$.

Prova. Os vetores singulares u e v , que satisfazem as condições (1) e (3), satisfazem a seguinte igualdade, pelo lema 4

$$\begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Y \\ -\gamma^{-2}Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

e, resolvendo-se esta equação tem-se:

$$u_1^T Y v_2 + \gamma^{-2} u_2^T Y v_1 = 0 \quad (28)$$

agora multiplicamos $\begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T \end{bmatrix}$ a esquerda de (1), obtendo-se

$$\begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1}Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo-se esta igualdade tem-se

$$u_1^T X v_1 - \gamma^{-1} u_2^T Y v_1 - \gamma u_1^T Y v_2 - u_2^T X v_2 = \sigma (u_1^T u_1 - u_2^T u_2) \quad (29)$$

como (13) é igual a

$$\gamma^{-1} (\gamma u_1^T Y v_2 + \gamma^{-1} u_2^T Y v_1) = 0 \quad (30)$$

e como $\gamma^{-1} \neq 0$, então $\gamma u_1^T Y v_2 + \gamma^{-1} u_2^T Y v_1 = 0$, portanto em (14)

$$u_1^T X v_1 - u_2^T X v_2 = \sigma (u_1^T u_1 - u_2^T u_2),$$

multiplica-se o vetor $\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix}$ a esquerda de (3) obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^T & \gamma^{-1}Y^T \\ -\gamma Y^T & X^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

portanto

$$v_1^T X^T u_1 + \gamma v_2^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_1^T Y^T u_2 - v_2^T X^T u_2 = \sigma (v_1^T v_1 - v_2^T v_2).$$

Aplicando-se a transposição em (15) obtemos

$$\gamma^{-1} (\gamma v_2^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_1^T Y^T u_2) = 0$$

ficando

$$v_1^T X^T u_1 - v_2^T X^T u_2 + (\gamma v_2^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_1^T Y^T u_2) = v_1^T X^T u_1 - v_2^T X^T u_2$$

como $(\gamma v_2^T Y^T u_1 + \gamma^{-1} v_1^T Y^T u_2) = 0$ e como sabemos

$$v_1^T X^T u_1 - v_2^T X^T u_2 = \sigma (v_1^T v_1 - v_2^T v_2)$$

e sendo $\sigma > 0$, isto implica que

$$u_1^T u_1 - u_2^T u_2 = v_1^T v_1 - v_2^T v_2 \quad (31)$$

como

$$u_1^T u_1 + u_2^T u_2 = v_1^T v_1 + v_2^T v_2 = 1 \quad (32)$$

de (16) e (17) temos $u_1^T u_1 = v_1^T v_1$ e $u_2^T u_2 = v_2^T v_2$

□.

Observação 1 .- Para qualquer par de vetores $\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ direito e esquerdo de $P(1)$ correspondente a um valor singular $\sigma_i(P(1))$ diferente de zero e de multiplicidade dois então, $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ satisfazem também a condição (11) do capítulo 1.

Prova. Um par de vetores singulares $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ formam um par de vetores singulares de $P(1)$ correspondente a um valor singular diferente de zero σ , de multiplicidade dois, se e somente se $u_1 + j u_2$ e $v_1 + j v_2$ formam um par de vetores singulares de M correspondente a algum valor singular σ de multiplicidade um, por simetria da matriz $P(1)$. Supõe-se outro par de vetores singulares direito e esquerdo

$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$ e $\tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$, correspondente a um valor singular σ diferente de zero da matriz

M , então tem-se

$$\tilde{u}_1 + j \tilde{u}_2 = (u_1 + j u_2) e^{j\theta} \text{ e } \tilde{v}_1 + j \tilde{v}_2 = (v_1 + j v_2) e^{j\theta}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$. Podemos rescrever matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Como os vetores $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ satisfazem a equação (11) do capítulo 1 então $\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$

também cumprem .

□

Lema 5. [19] Seja $F(\gamma)=G(\gamma)+\gamma^{-1}H \in \mathbb{R}^{p \times m}$, sendo $G(\gamma)$ analítica sobre um intervalo aberto Γ próximo a zero e H uma matriz constante com $\text{posto}(H)=:r < \min\{p,m\}$. Sejam $\sigma_1(\gamma) \geq \sigma_2(\gamma) \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p,m\}}(\gamma) \geq 0$ valores singulares de $F(\gamma)$ definidos sobre $\Gamma \setminus 0$. Assume-se a decomposição de valores singulares da matriz H como

$$H = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T$$

sendo que $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, então

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_{r+i}(F(\gamma)) = \sigma_i \left[U_2^T G(0) V_2 \right]$$

para $i=1,2,\dots,\min\{p,m\}$.

Prova. Sem perda de generalidade, assume-se que a decomposição de valores singulares de $\gamma F(\gamma)$ é analítica

$$\begin{aligned} \gamma F(\gamma) &= \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(\gamma) & \tilde{U}_2(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1(\gamma) & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_2(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(\gamma) & \tilde{V}_2(\gamma) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(\gamma) \tilde{\Sigma}_1(\gamma) & \tilde{U}_2(\gamma) \tilde{\Sigma}_2(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1^T(\gamma) \\ \tilde{V}_2^T(\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{U}_1(\gamma) \tilde{\Sigma}_1(\gamma) \tilde{V}_1^T(\gamma) + \tilde{U}_2(\gamma) \tilde{\Sigma}_2(\gamma) \tilde{V}_2^T(\gamma) \end{aligned}$$

sendo que $\tilde{\Sigma}_1(0) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\tilde{\Sigma}_2(0)=0$. Como

$$\gamma F(\gamma) = \tilde{U}_2(\gamma) \tilde{\Sigma}_2(\gamma) \tilde{V}_2^T(\gamma)$$

$$\gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) = \tilde{U}_2^T(\gamma) F(\gamma) \tilde{V}_2(\gamma)$$

substituindo $F(\gamma)=G(\gamma)+\gamma^{-1}H$ tem-se

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) &= \tilde{U}_2^T(\gamma) (G(\gamma) + \gamma^{-1} H) \tilde{V}_2(\gamma) \\
&= \tilde{U}_2^T(\gamma) G(\gamma) \tilde{V}_2(\gamma) + \gamma^{-1} \tilde{U}_2^T(\gamma) H \tilde{V}_2(\gamma).
\end{aligned} \tag{33}$$

Realizando-se a decomposição de valores singulares da matriz H

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(0) & \tilde{U}_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(0) & \tilde{V}_2(0) \end{bmatrix}^T \\
H &= \tilde{U}_1(0) \tilde{\Sigma}_1(0) \tilde{V}_1^T(0)
\end{aligned}$$

substitui-se a matriz H em (18) e tem-se

$$\gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) = \tilde{U}_2^T(\gamma) G(\gamma) \tilde{V}_2(\gamma) + \gamma^{-1} \tilde{U}_2^T(\gamma) \tilde{U}_1(0) \tilde{\Sigma}_1(0) \tilde{V}_1^T(0) \tilde{V}_2(\gamma)$$

aplica-se o limite

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tilde{U}_2^T(\gamma) G(\gamma) \tilde{V}_2(\gamma) + \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \tilde{U}_2^T(\gamma) \tilde{U}_1(0) \tilde{\Sigma}_1(0) \tilde{V}_1^T(0) \tilde{V}_2(\gamma)$$

então

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \tilde{U}_2^T(\gamma) H \tilde{V}_2(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \tilde{U}_2^T(\gamma) \tilde{V}_2(0) \tilde{\Sigma}_1(0) \tilde{V}_1^T(0) \tilde{V}_2(\gamma) = 0.$$

Tem-se que $\tilde{U}_2^T(\gamma) \tilde{U}_1(0)$ e $\tilde{V}_1^T(0) \tilde{V}_2(\gamma)$ são funções analíticas que anulam-se em $\gamma=0$,

portanto tem-se

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tilde{U}_2^T(\gamma) G(\gamma) \tilde{V}_2(\gamma) = \tilde{U}_2^T(0) G(0) \tilde{V}_2(0),$$

como $\gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_1(\gamma) = \gamma^{-1} \Sigma_1$ converge ao infinito quando $\gamma \rightarrow 0$ e sabendo-se que $F(\gamma) = G(\gamma) + \gamma^{-1} H$

$$F(\gamma) = \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ \gamma^{-1} Y & X \end{bmatrix}, \quad G(\gamma) = \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}.$$

$$F(\gamma) = G(\gamma) + \gamma^{-1} H = \begin{bmatrix} X & -\gamma Y \\ 0 & X \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

(observa-se que a matriz H é constante), tem-se finalmente

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_{r+i}(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma_i \left[\gamma^{-1} \tilde{\Sigma}_2(\gamma) \right] = \sigma_i \left[\tilde{U}_2^T(0) G(0) \tilde{V}_2(0) \right] = \sigma_i \left[U_2^T G(0) V_2 \right].$$

Note que pode-se considerar que $\tilde{U}_2(0) = U_2$ e $\tilde{V}_2(0) = V_2$.

□

Proposição 1.- Se o posto($\text{Im}(M)$) >1 então para todo $E \in \mathbb{C}^{\text{pxm}}$,

$$\frac{|\mu_R(M+E) - \mu_R(E)|}{\mu_R(M)} \leq \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M))}.$$

Prova. Para se demonstrar as duas desigualdade toma-se o parâmetro γ^* que minimiza a função $\sigma_2[P(\gamma)]$ então:

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \mu_R(M+E) &= \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(M+E) & -\gamma^* \text{Im}(M+E) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(M+E) & \text{Re}(M+E) \end{bmatrix} \right) \\ &= \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(M) & -\gamma^* \text{Im}(M) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(M) & \text{Re}(M) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Re}(E) & -\gamma^* \text{Im}(E) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(E) & \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right) \\ &= \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(M) & -\gamma^* \text{Im}(M) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(M) & \text{Re}(M) \end{bmatrix} \right) + \inf_{\gamma \in (0,1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(E) & -\gamma^* \text{Im}(E) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(E) & \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Como $\sigma_1 \geq \sigma_2$ tem-se a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \mu_R(M) + \sigma_1 \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(E) & -\gamma^* \text{Im}(E) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(E) & \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right) &= \mu_R(M) + \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(E) & -\gamma^* \text{Im}(E) \\ (\gamma^*)^{-1} \text{Im}(E) & \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right) \\ &= \mu_R(M) + (\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} \gamma^* \text{Re}(E) & -(\gamma^*)^2 \text{Im}(E) \\ \text{Im}(E) & \gamma^* \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Como $\gamma \in (0,1]$ então,

$$\begin{aligned} &\leq \mu_R(M) + (\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} \text{Re}(E) & -\text{Im}(E) \\ \text{Im}(E) & \text{Re}(E) \end{bmatrix} \right) \\ &= \mu_R(M) + (\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma} (\text{Re}(E) + j\text{Im}(E)) = \mu_R(M) + (\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma}(E) \end{aligned}$$

assim

$$\mu_R(M+E) \leq \mu_R(M) + (\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma}(E) = \mu_R(M) \left(1 + \frac{(\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma}(E)}{\mu_R(M)} \right)$$

Como $(\gamma^*)^{-1} \sigma_2(\text{Im}(M)) \leq \mu_R(M)$ então, tem-se

$$\mu_R(M) \left(1 + \frac{(\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma}(E)}{\mu_R(M)} \right) \leq \mu_R(M) \left(1 + \frac{(\gamma^*)^{-1} \bar{\sigma}(E)}{(\gamma^*)^{-1} \sigma_2(\text{Im}(M))} \right)$$

$$\frac{\mu_R(M+E)}{\mu_R(M)} \leq 1 + \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M))} \quad (34)$$

$$\frac{\mu_R(M+E)}{\mu_R(M)} - 1 \leq \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M))}$$

demonstrando-se assim a primeira desigualdade

$$\frac{\mu_R(M+E) - \mu_R(M)}{\mu_R(M)} \leq \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M))}$$

($\Leftarrow$) Para se demonstrar a segunda desigualdade mudam-se as matrizes M e $M+E$ e depois inverte-se a desigualdade de (19) obtendo-se

$$\frac{\mu_R(M)}{\mu_R(M+E)} \leq 1 + \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M+E))}$$

Invertendo, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\mu_R(M+E)}{\mu_R(M)} &\geq \left(1 + \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2(\text{Im}(M+E))} \right)^{-1} \\ &= \frac{\sigma_2(\text{Im}(M+E))}{\sigma_2(\text{Im}(M+E)) + \bar{\sigma}(E)} \\ &= 1 - \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2[\text{Im}(M+E)] + \bar{\sigma}(E)} \geq 1 - \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2[\text{Im}(M)]} \end{aligned}$$

finalmente tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\mu_R(M+E)}{\mu_R(M)} &\geq 1 - \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2[\text{Im}(M)]} \\ \frac{\mu_R(M+E)}{\mu_R(M)} - 1 &\geq - \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2[\text{Im}(M)]} \\ \frac{\mu_R(M+E) - \mu_R(M)}{\mu_R(M)} &\geq - \frac{\bar{\sigma}(E)}{\sigma_2[\text{Im}(M)]} \end{aligned}$$

□

Apêndice B

Valor Singular Estruturado e propriedades

B.1 - Valor singular estruturado

Para uma matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, para se definir $\mu(\cdot)$ existe uma estrutura básica de blocos de matrizes de incertezas do sistema, que depende do tipo de problema que se quer caracterizar. Três aspectos são importantes nesta definição: o tipo de cada bloco, o número total de blocos e suas dimensões. Aqui, está-se considerando dois tipos de blocos: blocos totais e blocos de escalares repetidos reais e complexos.

Sejam três inteiros positivos m_r , m_c , m_C os quais representam o número de blocos de escalares repetidos reais e complexos e o número de blocos totais, e $m = m_r + m_c + m_C \leq n$. O bloco estruturado de m inteiros positivos é dado por

$$K = (k_1, \dots, k_{m_r}, k_{m_r+1}, \dots, k_{m_r+m_c}, k_{m_r+m_c+1}, \dots, k_m) \quad (35)$$

tal que $\sum_{i=1}^n k_i = n$. Estas dimensões são compatíveis com a matriz M . Determina-se o conjunto

$$X_K = \{\Delta := \text{bloco diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \dots, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+1} \times k_{m_r+m_c+1}}\}$$

sendo que $X_K \in \mathbb{C}^{n \times n}$; este conjunto de blocos permite valores escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e os blocos Δ_i que são completos e complexos. Tem-se ainda que

$$B_{X_K} = \{\Delta \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad \text{e} \quad B_{X_K}^\circ = \{\Delta \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$$

sendo que “o” simboliza uma bola aberta. Pode-se considerar os blocos escalares repetidos (reais ou complexos) de qualquer ordem; os blocos completos podem não ser quadrados.

Definição 1.- O valor singular estruturado, $\mu_K(M)$, de uma matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com respeito a um bloco estruturado $K(m_r, m_c, m_C)$ é definido como:

$$\mu_k(M) = \left(\min_{\Delta \in X_k} \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0 \} \right)^{-1} \quad (36)$$

onde $\mu_k(M) = 0$ se não existe nenhum Δ que satisfaça $\det(I - \Delta M) = 0$.

Quando $m_r = 0$ tem-se o caso puramente complexo que é chamado de valor singular estruturado complexo. Quando $m_c = m_c = m_r \neq 0$ tem-se o valor singular estruturado misto. Quando $m_c = m_c = 0$ tem-se caso puramente real.

A definição geral de raio de estabilidade definida em [19] depende do vse sendo importante revisar suas propriedades. Estudos recentes (veja Doyle [30]) determinaram um limite superior e inferior de μ . O enorme interesse que existe nas propriedades de μ e as implicações destas com a análise de robustez de sistemas lineares, motivam o desenvolvimento de ferramentas para um cálculo prático. Para o cálculo de μ há um resultado auxiliar que define limites superior e inferior para μ . No entanto, pela natureza deste resultado que relaciona raio espectral e valor singular máximo de uma matriz, em alguns casos estes limites podem estar tão distantes que perdem a sua aparente utilidade.

O interesse neste apêndice está voltado para as propriedades de μ e seus limites. Para o desenvolvimento dos limites de μ precisa-se definir um conjunto de blocos os quais dependem do bloco estruturado X_k

$$Q_k = \{ \Delta \in X_k : \delta_i^r \in [-1, 1], \delta_i^{c*} \delta_i^c = 1, \Delta_i^{c*} \Delta_i^c = I_{k(m_r + m_c + 1)} \}$$

$$\mathcal{U}_k = \{ U \in Q_k : U^* U = I_n \}$$

$$\tilde{D} = \{ \text{bloco diag}(D_1, \dots, D_{m_r + m_c}, d_1 I_{k(m_r + m_c + 1)}, \dots, d_m I_{km}) : D_i = D_i^* \in \mathbb{C}^{k(i) \times k(i)}, d_i \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{D}_k = \{ D \in \tilde{D}_k : D > 0 \}$$

$$\mathcal{G}_k = \{ \text{bloco diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, O_{k(m_r + 1)}, \dots, O_{km}) : G_i = G_i^* \in \mathbb{C}^{k(i) \times k(i)} \}.$$

Para qualquer par de vetores $x, y \in \mathbb{C}^n$, a partição dos vetores tem que ser compatível com os blocos estruturados

$$x = \begin{bmatrix} x_{r_1}^T, \dots, x_{r_{m_r}}^T, x_{c_1}^T, \dots, x_{c_{m_c}}^T, x_{C_1}^T, \dots, x_{C_{m_c}}^T \end{bmatrix}^T \quad y = \begin{bmatrix} y_{r_1}^T, \dots, y_{r_{m_r}}^T, y_{c_1}^T, \dots, y_{c_{m_c}}^T, y_{C_1}^T, \dots, y_{C_{m_c}}^T \end{bmatrix}^T$$

onde $x_{r_i}, y_{r_i} \in \mathbb{C}^{k_i}$, $x_{c_i}, y_{c_i} \in \mathbb{C}^{k_{m_r + i}}$, $x_{C_i}, y_{C_i} \in \mathbb{C}^{k_{m_r + m_c + i}}$.

B.2 - Propriedades Básicas de μ Misto

O problema de μ misto herda muitas das propriedades do problema do μ complexo, como também tem aspectos que são fundamentalmente diferentes. Apresentamos a seguir algumas propriedades do problema de μ misto e algumas diferenças com o problema μ complexo (veja [16]).

- a) $\mu_k(\gamma M) = |\gamma| \mu_k(M)$ para todo $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$,
- b) $\mu_k(I_n) = 1$ para qualquer bloco estruturado,
- c) $\mu_k(\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta)$ para todo $\Delta \in X_k$,
- d) $m_r = 0, m_c = 0, m_c = 1 \Rightarrow \mu_k(M) = \bar{\sigma}(M)$,
- e) $m_r = 0, m_c = 1, m_c = 0 \Rightarrow \mu_k(M) = \rho(M)$
- f) $m_r = 1, m_c = 0, m_c = 1 \Rightarrow \mu_k(M) = \rho_R(M)$
- g) Para qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valem as seguintes desigualdades

$$\rho_R(M) \leq \mu_k(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

- h) Para todo $\Delta \in X_k, Q \in Q_k$ então $Q\Delta \in X_k, \Delta Q \in X_k$ com $\bar{\sigma}(Q\Delta) \leq \bar{\sigma}(\Delta), \bar{\sigma}(\Delta Q) \leq \bar{\sigma}(\Delta)$
- i) Para todo $\Delta \in X_k, U \in U_k$ então $U\Delta \in X_k, \Delta U \in X_k$ com $\bar{\sigma}(U\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta), \bar{\sigma}(\Delta U) = \bar{\sigma}(\Delta)$
- j) $D\Delta D^{-1} = \Delta$ para todo $\Delta \in X_k$ e $D \in D_k$.
- k) $\mu_k(QM) = \mu_k(MQ) \leq \mu_k(M)$ para todo $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $Q \in Q_k$
- l) $\mu_k(UM) = \mu_k(MU) = \mu_k(M)$ para todo $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $U \in U_k$
- m) $\mu_k(DMD^{-1}) = \mu_k(M)$ para todo $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $D \in D_k$
- n) Para qualquer $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valem as seguintes desigualdades

$$\max_{U \in U_k} \rho_R(UM) \leq \max_{Q \in Q_k} \rho_R(QM) \leq \mu_k(M) \leq \inf_{D \in D_k} \bar{\sigma}(DMD^{-1}).$$

Na propriedade a) se $\gamma \in \mathbb{C}$ para o problema do μ complexo a propriedade segue sendo verdadeira. A função ρ_R pode ser substituída pelo raio espectral ρ do valor singular estruturado complexo para todas as propriedades em que ela se relaciona.

Note que μ é invariante sobre matrizes U_K (conjunto de matrizes formadas por blocos unitários) mas não em Q_K (conjunto de matrizes unitárias). Isto pela propriedade (l) e (k) respectivamente.

B.3 - Limites

A definição de μ na eq. (2) é uma expressão exata a qual em geral não é convexa. Uma maneira de se obter o limite inferior é redefinir o problema μ com a maximização de autovalores reais (veja [25] para maiores detalhes).

Teorema 1.- Para qualquer matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e qualquer bloco estruturado compatível K

$$\max_{Q \in Q_K} \rho_R(QM) = \mu_K(M). \quad (37)$$

A função $\rho_R(QM)$ é convexa a qual garante o cálculo de um máximo local (todo máximo local, neste caso, é um máximo global), tem-se então o limite inferior.

O próximo teorema nos dá um limite superior que é melhor que a propriedade (n) acima.

Teorema 2. [30] - Para qualquer matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e qualquer bloco estruturado compatível K

$$\mu_K(M) \leq \inf_{D \in D_K, G \in G_K} \min_{0 \leq \beta \in \mathbb{R}} \{ \beta : M^*DM + j(GM - M^*G) - \beta^2 D \leq 0 \}. \quad (38)$$

Como a equação (4) envolve uma minimização e uma desigualdade de matrizes lineares e é quase convexa, então o mínimo local é um mínimo global, isto facilita o problema computacional.

Apêndice C

Raio de estabilidade

C.1 - Desenvolvimento do Raio de Estabilidade

Um conceito geral do raio de estabilidade definido em qualquer campo K (C ou R) é dado em [12]. Nesta definição, calcula-se a distância do sistema estável $\dot{x} = Ax$, $A \in K^{n \times n}$, (que pode ser complexo ou real), a um sistema instável da mesma forma e dimensão.

Suponha que este sistema está sujeito a uma perturbação:

$$\dot{x} = (A + \Delta)x$$

sendo $\Delta \in K^{n \times n}$ uma matriz de distúrbios. O objetivo fundamental é conhecer o limite superior da norma da matriz de distúrbios $\|\Delta\|$, o qual garante a estabilidade do sistema perturbado. Neste caso deve-se conhecer a menor norma da matriz $\Delta \in K^{n \times n}$ que leva a matriz A ao conjunto das matrizes instáveis.

Desta forma, define-se o conjunto de matrizes instáveis como

$$U_n(K) = \{U \in K^{n \times n} : \delta(U) \cap \bar{C}_+ \neq \emptyset\}$$

sendo $\delta(U)$ o espectro da matriz U e $\bar{C}_+ = \{\lambda \in C; \text{Re}(\lambda) \geq 0\}$. Define-se a distância de uma matriz A estável ao conjunto $U_n(K)$ como

$$r_K(A) := \text{dist}(A, U_n(K)) = \min \{\|A - U\| : U \in U_n(K)\} \quad (39)$$

aqui $r_K(A)$ denota o raio de estabilidade de uma matriz A em qualquer campo K . Assim, surge o estudo do raio de estabilidade complexo e o raio de estabilidade real.

Geralmente define-se o raio de estabilidade para um sistema do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B\Delta C)x \\ y &= Cx \end{aligned}$$

$A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{n \times m}$, $C \in K^{p \times n}$, $\Delta \in K^{m \times p}$, como

$$r_K(A; B, C) = \text{dist}(A, U_n(K)) = \min \{\|A - U\| = \|\Delta\| : A + B\Delta C \in U_n(K)\}$$

sendo $r_K(A, B, C)$ o raio de estabilidade estruturado. Em particular quando $m=p=n$ então B, C são matrizes identidade, $r_K(A; I, I)$ é chamado de raio de estabilidade não estruturado que é similar ao raio de estabilidade de uma matriz $r_K(A)$.

A seguir serão dadas algumas diretrizes para o cálculo do raio de estabilidade.

C.1.1 - Raio de estabilidade não estruturado

Considere-se as normas arbitrárias $\|\cdot\|_K$ sobre K^n (i.e. $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\|$ sobre $L(K^n) \cong K^{n \times n}$. Esta norma pode ser diferente de um operador norma $\|\cdot\|_{L(K^n)}$ que é induzido por $\|\cdot\|_K$. Assim, o raio de estabilidade está definido sobre um campo K , i.e. “ $r_K(A)$ ”, dependente de uma norma específica. O raio de estabilidade não estruturado de uma matriz $A \in K^{n \times n} \setminus U_n(K)$ é dado por

$$r_K(A) = \min\{\|A - U\| : U \in U_n(K)\}. \quad (40)$$

Como o conjunto $U_n(K)$ é fechado em $K^{n \times n}$ então, o conjunto $U_n(K)$ é limitado por sua fronteira que é dada por:

$$\partial U_n = \{U \in K^{n \times n} : \operatorname{Re}(\delta(U)) \leq 0 \text{ e } \delta(U) \cap j\mathbb{R} \neq \emptyset\}.$$

Portanto, é suficiente calcular a distância da matriz A até a fronteira $\partial U_n(K)$, sendo o “mínimo” definido na equação (2). Existe uma matriz de perturbação $\Delta \in K^{n \times n}$ que tem a norma mínima tal que:

$$\delta(A + \Delta) \cap j\mathbb{R} \neq \emptyset \text{ e } \|\Delta\| = r_K(A)$$

O raio de estabilidade tem as seguintes propriedades:

- $r_K(\alpha A) = \alpha r_K(A) \quad \forall A \in K^{n \times n}, \alpha \geq 0$
- $A \rightarrow r_K(A)$ é continua em $K^{n \times n}$

Para se obter uma fórmula explícita para cálculo do raio de estabilidade a norma sobre $K^{n \times n}$ tem que estar relacionada com $\|\cdot\|_K$. Para isto tem-se a seguinte definição.

Definição 1.- Seja $\|\cdot\|_K$ uma norma em K^n e a norma $\|\cdot\|$ em $K^{n \times n}$. Se diz que as normas são fortemente compatíveis se as seguintes condições são satisfeitas:

C1.- $\|Ax\|_K \leq \|A\| \|x\|_K \quad A \in K^{n \times n} \text{ e } x \in K^n$

C2.- Para todo par de vetores $x, y \in K^n, x \neq 0$, existe um $T \in K^{n \times n}$ que satisfaz

$$Tx = y \text{ e } \|T\| \|x\|_K = \|y\|_K$$

Lema 1.- Qualquer norma $\|\cdot\|_{K^n}$ sobre K^n associada a um operador norma $\|\cdot\|_{L(K^n)}$ sobre $L(K^n) \cong K^{n \times n}$ é fortemente compatível com $\|\cdot\|_{K^n}$. A prova pode ser encontrada em [11]

Na continuação, apresenta-se um lema que se estende para normas fortemente compatíveis sobre $K^{n \times n}$.

Lema 2.- Seja $\|\cdot\|_{K^n}$ qualquer norma sobre K^n e $\|\cdot\|$ qualquer norma matricial fortemente compatível sobre $K^{n \times n}$. A distância de $A \in GL_n(K)$ ao conjunto de matrizes singulares com respeito a norma $\|\cdot\|$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{dis}(A, U) &= \min \{ \|Q\|, Q \in K^{n \times n}, \det(A-Q)=0 \} \\ &= \min \{ \|Ax\|_{K^n}; x \in K^n, \|x\|_{K^n}=1 \} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_{L(K^n)}} \end{aligned} \quad (41)$$

A prova pode ser encontrada em [11].

Com relação a existência de dois raios de estabilidade associados a uma matriz estável $A \in K^{n \times n}$, o raio de estabilidade real $r_R(A)$ e o raio de estabilidade complexo $r_C(A)$, tem-se que $U_n(\mathbb{C}) \supset U_n(\mathbb{R}) \supset \{S \in \mathbb{R}^{n \times n}; \det(S)=0\}$. Pelo Lema 2 mencionado acima, para toda matriz estável $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ encontra-se um limite para os raios de estabilidade valendo as seguintes desigualdades:

$$0 \leq r_C(A) \leq r_R(A) \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}}.$$

Estas estimativas são válidas com respeito a qualquer norma sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$ que sejam fortemente compatíveis com $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$.

A seguinte proposição dá uma caracterização para o raio de estabilidade complexo.

Proposição 1.- [11] Seja $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$ qualquer norma sobre $\mathbb{C}^n$ e $\|\cdot\|$ uma norma de matriz fortemente compatível sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$, então o raio de estabilidade de uma matriz estável $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com respeito $\|\cdot\|$ é dada por:

$$r_C(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|=1}} \|\omega x - Ax\|_{\mathbb{C}^n} = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\|(i\omega - A)\|_{L(\mathbb{C}^n)}}$$

A prova pode ser encontrada em [11].

Uma conclusão da proposição 1 é que para qualquer norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$ o raio de estabilidade complexo $r_c(A)$ é o mesmo para qualquer norma fortemente compatível $\|\cdot\|$ em $\mathbb{C}^{n \times n}$. Com isto também obtém-se uma característica para norma Euclidiana $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$, onde o problema (2) se reduz a um problema de minimização unidimensional.

Corolário 1.- [11] Suponha-se que a norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$ é fortemente compatível com $\|\cdot\|_2$, então

$$r_c(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_n(i\omega I_n - A) \quad (42)$$

para qualquer matriz estável $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Existem certas caracterizações, via norma Frobenius, que são apresentadas em Van Loan [41], para o cálculo do raio de estabilidade real. A proposição a seguir apresenta uma fórmula para se calcular este raio.

Proposição 2.- [41] Suponha que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é estável e considere a uma norma Frobenius. Se $r_R(A) < \sigma_n(A)$ então

$$r_R(A) = \min_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = 1 \\ \langle x, y \rangle = 0, \{x^T A y\} \{y^T A x\} \leq 0}} \|Ax\|_2^2 + \|Ay\|_2^2 - (x^T A y)^2 - (y^T A x)^2.$$

Um caso interessante no cálculo dos raios de estabilidade é quando $r_R(A) = r_c(A)$, veja [18] para maiores detalhes. Para sistemas bidimensionais tem-se a seguinte proposição:

Proposição 3.- Seja $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ estável. Então o raio de estabilidade real com a norma Euclidiana para sistemas bidimensionais é:

$$r_R(A) = \min\{|\text{tr}(A)|/2; \sigma_2(A)\}.$$

A prova pode ser encontrada em [11].

Outra forma para se calcular os raios de estabilidade real e complexo para sistemas bidimensionais é com a decomposição de valores singulares, denotando-se $A = USV^T$ e sendo $U = [u_1, u_2]$ e $V = [v_1, v_2]$ matrizes ortogonais, $S = \text{diag}\{\sigma_1(A), \sigma_2(A)\}$, o número de condição de uma matriz A como sendo $k(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_2(A)}$, o ângulo entre os

vetores u_1 e v_1 como $\theta = \theta(u_1, v_1)$, apresenta-se a seguinte proposição:

Proposição 4.- Se $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é estável tem-se que

$$r_R(A) = \begin{cases} \sigma_2(A) & \text{Se } k(A) \geq \frac{2}{|\cos(\theta)|} - 1 \\ (\sigma_1(A) + \sigma_2(A)) \frac{|\cos(\theta)|}{2} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$r_C(A) = \begin{cases} \sigma_2(A) & \text{se } k(A) \geq \frac{2}{\cos^2(\theta)} - 1 \\ \left\{ \sigma_1(A)\sigma_2(A) + \left[(\sigma_1(A) + \sigma_2(A)) \frac{\cos^2(\theta)}{2} \right]^2 \right\}^{1/2} & \text{c.c.} \end{cases}$$

a prova pode ser encontrada em [11].

C.1.2 - Raio de estabilidade estruturado

Em muitas aplicações as incertezas sobre a matriz do sistema, A , são estruturadas no sentido de que alguns valores são exatamente conhecidos ao passo que os outros são parâmetros desconhecidos ou são funções que descrevem estes parâmetros. O raio de estabilidade não estruturado $r_K(A)$, descrito acima, não é uma medida de robustez apropriada para sistemas com incertezas estruturadas pois resulta em valores mais elevados.

Considera-se raio de estabilidade estruturado para classes especiais de perturbação estruturada. Assume-se uma equação do sistema perturbado da forma

$$\dot{x} = (A + B\Delta C)x$$

sendo a matriz A estável, $\Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}$ uma matriz de distúrbio desconhecida, $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{K}^{p \times n}$ matrizes conhecidas que descrevem a estrutura das perturbações.

O raio de estabilidade estruturado de uma matriz estável A (com respeito a uma perturbação de uma estrutura dada (B, C)) é definido por

$$r_K(A; B, C) = \inf\{\|\Delta\| : \delta(A + B\Delta C) \cap \bar{C}_+ \neq \emptyset\} \quad (43)$$

se elegemos $m=p=n$ e $B=C=I_n$, substituindo na eq. (5), obtemos o raio de estabilidade não estruturado definido na eq. (2).

A próxima proposição apresenta uma característica mais geral para o raio de estabilidade complexo estruturado.

Proposição 5.- Seja $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$.

$$\text{então} \quad r_c(A;B,C)=\begin{cases} \frac{1}{\max_{\omega \in R} \|G(i\omega)\|} & \text{se } G \neq 0 \\ \infty & \text{se } G \equiv 0 \end{cases}$$

A prova pode ser encontrada em [13].

C.2 - Método da Bissecção para a medida da distância de uma matriz estável a uma matriz instável [Byers, (1988)]-[2]

Byers apresenta um algoritmo via método da bissecção para determinar a distância de uma matriz complexa estável $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ à matriz mais próxima que tenha autovalores no eixo imaginário utilizando a norma de Frobenius, ou a norma-2.

A distância de uma matriz estável a uma matriz instável é definida como

$$\beta(A) = \min_{\omega \in R} \sigma_{\min}(A - \omega i I)$$

sendo $\sigma_{\min}(A - \omega i I)$ o menor valor singular de $A - \omega i I$. Observa-se que $\beta(A)$ está limitado superiormente pelo mínimo valor singular de $A - \omega j I$

$$\beta(A) \leq \sigma_{\min}(A - \omega i I).$$

O passo principal no algoritmo de bissecção é encontrar um limite inferior e superior menor ou igual ao mínimo global da função $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \sigma_{\min}(A - \omega i I)$$

sendo o intervalo $[\alpha, \gamma]$ representa limite inferior e limite superior, respectivamente. Este intervalo pode ser melhorado escolhendo-se um número real $\tau \in [\alpha, \gamma]$, $\tau \geq 0$, satisfazendo o seguinte critério $\beta(A) \in [\alpha, \tau]$ ou $\beta(A) \in [\tau, \gamma]$. Este método reduz o intervalo entre o limite inferior e o limite superior até se chegar a um intervalo tão pequeno quanto se queira.

O desenvolvimento é realizado com a métrica euclidiana (Frobenius) :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}.$$

ou com a norma-2

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

sendo “(.)^H” representa a transposta complexa (hermitiana).

O intervalo $[\alpha, \gamma]$ (α =limite inferior, γ =limite superior) pode ser escolhido da seguinte maneira, considera-se a matriz

$$P(\tau) = \begin{bmatrix} A & -\tau I_n \\ \tau I_n & -A^* \end{bmatrix}$$

sendo $P(\tau)$ uma matriz Hamiltoniana e $\tau \geq 0$. (Uma matriz é dita Hamiltoniana se dadas duas matrizes J, P , então $JPJ = P^*$ com

$$J = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Toma-se os autovalores de $P(\tau)$ para distinguir-se os dois casos que podem acontecer i.e $\tau \geq \beta(A)$ ou $\tau < \beta(A)$, ou seja, se $P(\tau)$ tem autovalores com parte real zero, é equivalente a dizer que σ é maior ou igual a distância de uma matriz complexa estável à matriz mais próxima que tem autovalores no eixo imaginário, $\beta(A)$ (veja teorema 1 de [2]). Com isto pode-se calcular uma sequência de intervalos cuja redução determinará o valor aproximado do raio de estabilidade.

C.3 - Método de Bissecção para o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência [S. Boyd. (1989)] [37]

O método da bissecção para o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência do sistema $\{A, B, C, D\}$, foi elaborado seguindo o método da bissecção de Byer [2] que calcula a distância de uma matriz estável a um conjunto de matrizes instáveis.

Consideram-se as matrizes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{C}^{p \times m}$, e o sistema dinâmico linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

Denomina-se $M(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ como a função de transferência para o sistema $\{A,B,C,D\}$ estável. Define-se a norma H_∞ da matriz de transferência $M(s)$ como

$$\|M\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s)>0} \sigma_{\max}(M(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(M(j\omega)).$$

E seja $\gamma > 0$, define-se

$$\begin{aligned} P_\gamma &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & \gamma I \\ \gamma I & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^TC & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^TS^{-1}C & -A^T + C^TDR^{-1}B^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo $R=(D^TD-\gamma^2I)$ e $S=(DD^T-\gamma^2I)$ e P_γ uma matriz hamiltoniana.

A conexão que existe entre valores singulares de uma matriz de transferência e os autovalores imaginários de uma matriz Hamiltoniana é, se a matriz de transferência $M(j\omega)$ tem um valor singular γ , equivalente a dizer que a matriz $(P_\gamma - j\omega_0 I)$ é singular. Isto é formulado no seguinte teorema onde a prova pode ser encontrada em [37].

Teorema 1.- Assume-se que a matriz A não tem autovalores imaginários, $\gamma > 0$ é diferente dos valores singulares de D , e $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Então γ é um valor singular de $M(j\omega_0)$ se e somente se $(P_\gamma - j\omega_0 I)$ é singular.

O algoritmo da bisseção apresentado em [37] realiza o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência. Toma-se γ_{lb} e γ_{ub} como limites inferior e superior respectivamente para a norma $\|M\|_\infty$,

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sigma_{Pi}\}, \quad \gamma_{ub} = \sigma_{\max}(D) + 2 \sum_i \sigma_{Pi}$$

sendo σ_{Pi} os valores singulares do sistema $\{A,B,C,D\}$.

Algoritmo do Método da Bisseção

$$\gamma_L := \gamma_{lb};$$

$$\gamma_U := \gamma_{ub};$$

Repetir

{

$$\gamma := (\gamma_L + \gamma_U)/2;$$

$$P_{\gamma} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^T C & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A^T + C^T D R^{-1}B^T \end{bmatrix}$$

Se P_{γ} não tem autovalores imaginários,

Então $\gamma_U := \gamma$

Caso Contrario $\gamma_L := \gamma$ }

Até $\{ (\gamma_U - \gamma_L) \leq 2\varepsilon \gamma_L \}$

note sempre que a norma H_{∞} está no intervalo $\gamma_L \leq \|M\|_{\infty} \leq \gamma_U$ durante as simulações. Isto garante a aproximação da norma H_{∞} por $(\gamma_U - \gamma_L)/2$ com uma exatidão dada por ε :

$$|(\gamma_L + \gamma_U)/2 - \|M\|_{\infty}| \leq \varepsilon \|M\|_{\infty}.$$

Os limites γ_{lb} e γ_{ub} do algoritmo são calculados resolvendo-se os gramianos de controlabilidade W_C e observabilidade W_O das equações de Liapunov

$$A^T W_O + W_O A + C^T C = 0$$

$$W_C C + W_C A^T + B B^T = 0$$

desenvolvendo-se a decomposição dos valores singulares do produto $W_C W_O$ e são denotados por σ_{P_i} .

Observação 1 (Cálculo da norma H_{∞} restrita a um intervalo de frequências). [24]-[38]

Algumas extensões para o cálculo da norma H_{∞} de uma matriz de transferência estão restritas à procura de uma faixa de frequências, encontra-se, então, o supremo dos valores singulares de uma matriz de transferencia:

$$\|M\|_{[\alpha, \beta]} = \sup_{\alpha \leq \omega \leq \beta} \sigma_{\max}(M(i\omega))$$

onde $0 \leq \alpha \leq \beta$. A seguir apresenta-se as propriedades de regularidade dos valores singulares.

C.4 - Resultados Sobre Regularidade para Valores Singulares de uma Matriz de Transferencia. S. Boy and Balakrishnan [38]

Em [1] MacFarlane and Hung observam que os valores singulares $\sigma_i(M(j\omega_0)) > 0$ que têm multiplicidade igual a um (i.e. $\sigma_k(M(j\omega_0)) \neq \sigma_i(M(j\omega_0))$ para $k \neq i$), são analíticos em ω_0 .

Equivalentemente, analiticidade real de $\sigma_i(M(j\omega))$ perto de ω_0 pode ser estendida para funções $\Psi(s)$ em alguma vizinhança de $j\omega_0$ no plano complexo. De fato, esta extensão é dado em função da matriz de transferencia:

$$\Psi(s) = \sqrt{\lambda(M(-s)^T M(s))}.$$

Uma observação importante é que $\Psi(s) \neq \sigma_i(M(s))$, mas são iguais quando s assume valores puramente imaginários.

No próximo teorema estabelece-se uma relação dos valores singulares de $M(j\omega)$ com as funções analíticas reais. Isto nos permite afirmar que os valores singulares são analíticos para $\omega \in \mathbb{R}$

Teorema 3.- Há funções analíticas $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$, tal que para todo $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\{\sigma_1(M(j\omega)), \dots, \sigma_m(M(j\omega))\} = \{|f_1(\omega)|, \dots, |f_m(\omega)|\}.$$

Estas funções têm extensões analíticas dentro de uma faixa contida no eixo imaginário.

Corolário 1.- Dado qualquer $\omega_0 \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq m$, existem duas funções f_- e f_+ tal que em uma vizinhança de ω_0 , f_- e f_+ são analíticas e reais

$$\sigma_i(M(j\omega)) = \begin{cases} f_-(\omega), & \omega \leq \omega_0 \\ f_+(\omega), & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

para $i=1$ adiciona-se que $\sigma_1(M(j\omega)) = \max\{f_-(\omega), f_+(\omega)\}$

em outras palavras $f_-(\omega) \geq f_+(\omega)$ para um $\omega \leq \omega_0$

$$f_-(\omega) \leq f_+(\omega) \text{ para um } \omega > \omega_0.$$

Assim f_- e f_+ são funções do teorema 3 assume individualmente a forma f_i ou $-f_i$. Da segunda afirmação do corolário 1 segue o fato que f_- e f_+ são alguns dos valores singulares da função de transferência que está perto a ω_0 ; sendo $\sigma_1(M(j\omega))$ o máximo na vizinhança. Considerando-se agora $\sigma_1(M(j\omega))$ em uma vizinhança do máximo local, tomam-se f_- e f_+ como funções do corolário 1 correspondentes ao valor singular

$\sigma_1(M(j\omega))$ próximo a ω_M i.e. $f(\omega) \rightarrow \sigma_1(M(j\omega))$ quando $\omega \rightarrow \omega_M^-$ e $f_+(\omega) \rightarrow \sigma_1(M(j\omega))$ quando $\omega \rightarrow \omega_M^+$, veja a figura abaixo

$$\begin{array}{c} \sigma_1(M(j\omega)) \\ \hline \circ \\ f_- \rightarrow \omega_M \leftarrow f_+ \end{array} \rightarrow$$

Teorema 4.- Suponha-se que $\sigma_1(M(j\omega))$ tem um máximo local em ω_M . Então próximo a ω_M tem-se

$$\sigma_1(M(j\omega)) = \sigma_1(M(j\omega_M)) - a(\omega - \omega_M)^{2N} + \begin{cases} b_+(\omega - \omega_M)^{2N+1}, & \omega \geq \omega_M \\ b_-(\omega - \omega_M)^{2N+1}, & \omega < \omega_M \end{cases} + o((\omega - \omega_M)^{2N+1}),$$

para $N \geq 1$, $a > 0$, e $b_- \leq b_+$.

Assim, em uma vizinhança do máximo local ω_M garante-se que o máximo valor singular é duas vezes continuamente diferenciável. Este resultado é muito importante para a compreensão da ref. [19], por isto foi reproduzido neste apêndice.

Apêndice D

Programas

D.1 - Programa do algoritmo do método da bisseção para o cálculo da norma H_∞ para uma matriz de transferência

```

clear;
clc;
comini=[];
{A,B,C,D};%Sistema
[U,S,V]=svd(D);
SS1=S(1,1)
Wc=gram(A,B);           % Gramiano de controlabilidade
Wo=gram(A',C');          % Gramiano de controlabilidade
                          %cálculo dos valores singulares

W=Wc*Wo;
a=sqrt(eig(W));
ss2=max(a);
r=length(a);
t=1;
suma=0;
for i=1:1:r
    suma=suma+a(i,1);
end
lamba_ub=2*suma+SS1;      % limite inferior
lamba_lb=max(SS1,ss2);    % limite superior
lamba_L=lamba_lb
lamba_U=lamba_ub
toleran=10e-005;         % tolerância
lamba=(lamba_L+lamba_U)/2;

```

```

while (lamba_U-lamba_L)>=2*toleran*lamba_L;
    A1=[A zeros(size(A));zeros(size(A)) -A'];
    B1=[B zeros(size(B));zeros(size(C')) -C'];
    C1=inv([-D lamba*eye(size(D));lamba*eye(size(D)) -D']);
    D1=[C zeros(size(B'));zeros(size(B')) B'];
    M_lamba=A1+B1*C1*D1;                                % matriz Hamiltoniana
    au=eig(M_lamba);                                     % cálculo dos autovalores da matriz
    hamiltoniana
    au_real=(fix(real(au)*10000))/10000
    t1=length(au_real);
    k=0;
    i=1;
    while i<(t1+1) & k==0
        if au_real(i,1)==0
            k=2;
        else
            k=0;
        end
        i=i+1
    end
    if k==2
        lamba_L=lamba
    else
        lamba_U=lamba
    end
    lamba=(lamba_L+lamba_U)/2
    MIN=lamba_L                                           % limite inferior final
    MAX=lamba_U                                           % limite superior final
end

```

D.2 - Programa para o cálculo da faixa de frequência contendo a frequência ω para o máximo da função $\mu(M)$

```
close all;
```

```

clear;
clc;
j=sqrt(-1);
(A,B,C);
lista_singular = [];
M=C*(inv(A))*B; %M=CA-1B
n=1;
lista_utoov=[];
listak=[];
[U,S,V]=svd(M);
sigA1=S(1,1);
CO=zeros(size(M));
if M~=CO
    wo=0; %se M=CA-1B≠0 então toma-se
    wo=0
end
Mwo=(C*(inv(j.*wo*eye(size(A))-A))*B); %a matriz M=[C(ω0jI-A)-1B]
X1=real(Mwo); %parte real da matriz M
Y1=imag(Mwo); %parte imaginaria da matriz
M
n=1;
listaM = []; %para armazenar σ2[P(γ)]
%cálculo de σ2[P(γ)]

for v=0+eps:0.1:n
    N=[X1 -v*Y1 ;v^(-1)*Y1 X1];
    [U,S,V]=svd(N);
    sigmM2=S(2,2); %valor de σ2[P(γ)]
    listaM=[listaM sigmM2];
end
urMAwo=fix(min(listaM)*1000)/1000; %μR[C(ω0jI-A)-1B]
% Se %μR[C(ω0jI-A)-1B]= 0 então ω0≠0
while urMAwo==0

```



```

wo=wo+0.01;
Mwo=(C*(inv(j.*wo*eye(size(A))-A))*B);
X=real(Mwo);
Y=imag(Mwo);
n=1;
listaM = [];

                                %cálculo de  $\sigma_2[P(\gamma)]$  para um  $\omega_o \neq 0$ 
for v=0+eps:0.1:n
    N=[X -v*Y ;v^(-1)*Y X];
    [U,S,V]=svd(N);
    D=S;
    sigmM2=D(2,2);
    listaM=[listaM sigmM2];
end
urMAwo=fix(min(listaM)*1000)/1000;      % $\mu_R[C(\omega_o j I - A)^{-1}B]$ 
end

                                %calcula-se a matriz  $P$  com  $\mu_R[C(\omega_o j I - A)^{-1}B] \neq 0$ 
P=[A (urMAwo).^(-2)*B*B';-C'*C -A'];
Z=eig(P);
t1=real(Z);
t2=imag(Z);
magni=sqrt(t2.^2);
lista_utov=[lista_utov magni];
punto=[];
m1=length(lista_utov);
for t=1:1:m1
    lista_utov(t,1);
    if lista_utov(t,1) ~= 0
        punto=[punto lista_utov(t,1)];
    end
end
wM=max(punto);
if igA1>=urMAwo
    wm=0;

```

```

else
    wm=min(punto);
end

```

D.3 - Programa do cálculo da função $\mu_R[C(j\omega I - A)^{-1} B]$ em uma frequência ω dada

```

alow=[];                                     %para armazenar todas as
frequências
gma1=[];                                     %para armazenar os primeiros valores singulares da matriz M para
                                         % cada frequência
rwo=[];                                     % para armazenar o ponto máximo da fun. do valor singular estruturado
                                         %para um  $\omega_o$ 
funur=zeros(100,19);
reales=zeros(100,19);
no=1;
t=1;
wM
for w=wm:0.0001:wM
    M=(C*(inv(j.*w.*(eye(size(A))))-A))*B);    %matriz de transferência
    T=svd(M);
    sigma1=T(1,1);
    gma1=[gma1 sigma1];    %armazena no vetor gma1 os valores  $\sigma_1[M]$ 
    H=urMAwo;
    rwo=[rwo H];
    X=real(M);
    Y=imag(M);
    listaM=[];
    listaN=[];
    lamba1=[];                                     % para armazenar os valores de gama
    lamba=[];
    gato=1;
    %cálculo do Valor Singular Estruturado para uma certa frequência  $\omega$ 
    for v=0.1:0.05:1
        v2=v;

```

```

N=[X -v*Y ;v^(-1)*Y X];
D=svd(N);
sigma2=D(2,2);
funur(t,gato)=sigma2;
listaM=[listaM sigma2];           %armazenando para calcular o infimo
lamba1=[lamba1 v2];              %armazenando os valores de gama
gato=gato+1;

end

lamb=lamba1;
listak=listaM;
listaF=funur;
inf=fix(min(listak)*10000)/10000;   %encontrando o infimo
ejej=lamb(find(listak==(min(listak)))); %encontrando os gamas para o infimo
                                     %do segundo valor singular em  $\omega$ 

lamba=[lamba ejej];
alow=[alow w];
lista_singular=[lista_singular inf];
                                     %armazenando para a construção da superfície
QQQQ=length(lamba);
If    length(lamba)==1
    rosi=1;
    for    q=0.1:0.05:1
        if    lamba(1,1)==q
            reales(t,rosi)=inf;
        end
        rosi=rosi+1;
    end
else
    rosi=1;
    for    q=0.1:0.05:1
        sapi=0;
        for    marco=1:1:length(lamba)
            marco=marco;

```

```

            if      lamba(1,marco)==q & sapi==0
                reales(t,rosi)=inf;sapi=1;
            end
        end
        rosi=rosi+1;
    end
end
t=t+1;
end
wmaxC=alow(find(gma1==(max(gma1))));
G=max(lista_singular);
wmaxR=alow(find(lista_singular==(max(lista_singular)))); %ponto onde a função
 $\mu_R(M)$ 

```

%é máxima

D.4 – Raio de Estabilidade Real – inversa da função $\mu_R[C(j\omega I-A)^{-1} B]$

```

raioE=G.^(-1);                                %raio de estabilidade Real
Co=max(gma1);                                  %ponto onde  $\mu_C(M)$  é máximo
raioplexo=Co.^(-1);                            %raio de estabilidade Complexo

```

```

figure(1);
plot(alow,lista_singular,'r',alow,gma1,'b',alow,rwo,'g');
xlabel('Freq. w Rad./Seg. ');
ylabel('VSE_Real_Complexo');
title('VSE-C,R ');

```

```

figure(2);
mesh(lamba1,alow,funur);
title('Sigma_2 da Matriz P(gama)')
xlabel('v Gama ');
ylabel('Freq. w Rad./Seg. ');
zlabel('sigma-2');
view(105,30);

```



```

grid;

figure(3);
mesh(lamba1,alow,reales);
title('A Função do VSE Real - "u(R)')
xlabel('gama min');
ylabel('Freq. w Rad./Seg. ');
zlabel('VSE-u(R)');
grid;
view(105,30);

```

D.5 - Algoritmo para o cálculo das matrizes de Perturbação

```

close all;
clc;
clear;
(Qu,B,C)
wmaxRTRES= wmaxR;
A=C*inv((wmaxRTRES)*j*eye(size(Qu))-Qu)*B
[U,S,V]=svd(A);
upper=S(1,1);
QQ=eig(A);
ind=length(QQ);
especR=[];
for x=1:1:ind
    if imag(QQ(x,1))==0
        especR=[especR real(QQ(x,1))];
    else
        especR=[especR 0];
    end
end
lower=max(especR);
X=real(A);
Y=imag(A);

```

```

r=rank(Y);
lista=[];
gam=[];
m=0.0001;

                                %cálculo da matriz de perturbação quando a matriz Y=0
if    Y==zeros(size(Y))
    r1=size(X);
    [U,S,V]=svd(X);
    sigma=S(1,1);
    u=U(1:r1(1,1),1);
    v=V(1:r1(1,2),1);
    DELTA=(v*u')/sigma;          %a matriz de perturbação é definida diretamente
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A));          %a medida da estabilidade
                                %cálculo da matriz de perturbação quando a matriz Y tem posto(Y)=1
elseif rank(Y)==1
    [U,S,V]=svd(Y);
    FU=U; FV=V;
    r2=size(Y);
    U1=U(1:r2(1,1),1);
    U2=U(1:r2(1,1),2:r2(1,1));
    V1=V(1:r2(1,2),1);
    V2=V(1:r2(1,2),2:r2(1,2));
    UX=(U2)'*X;
    [U,S,V]=svd(UX);
    Uu=U; Vv=V;
    sigma2=S(1,1);
    XV=X*V2;
    [U,S,V]=svd(XV);
    UV=U; VV=V;
    sigma3=S(1,1);
                                %calcula-se diretamente a matriz de perturbação
    if    sigma2>=sigma3          % $\sigma_1(UX) \geq \sigma_1(XV)$ 
        [U,S,V]=svd(UX);

```

```

    U11=U; S11=S; V11=V;
    sigma2=S11(1,1);
    r4=size(UX);
    u1=U11(1:r4(1,1),1);
    v1=V11(1:r4(1,2),1);
    DELTA=(v1*u1'*(U2))/sigma2;    %matriz de perturbação construída
                                    %diretamente
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A)); %medida de estabilidade
else
                                    % $\sigma_1(UX) \leq \sigma_1(XV)$ 
    r3=size(XV);
    u1=UV(1:r3(1,1),1);
    v1=VV(1:r3(1,2),1);
    DELTA=(V2*(v1)*(u1))/sigma3;    %matriz de perturbação construída
                                    %diretamente
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A)); %medida de estabilidade
end
%cálculo da matriz de perturbação quando o posto da matriz Y é maior que 1

    lista=[];
    gam=[];
    m=0.0001;
else
    %cálculo da matriz de perturbação – encontra-se o ponto extremo  $\gamma^* \in (0,1]$ 
    for gama=0+eps:m:1
        vari=gama;
        PGA=[X -(gama)*Y;(1./(gama))*Y X];
        [U,S,V]=svd(PGA);
        sigM2=S(2,2);
        gam=[gam vari];
        lista=[lista sigM2];
    end
    for i=1:1:1./m
        WA=lista(i);

```

```

        WB=gam(i);
    end
    fin=min(lista); %encontra-se o menor  $\sigma_2[P(\gamma)]$  para  $\gamma \in (0,1]$ 
    gam2=gam(find(lista==min(lista))); % $\gamma^*$  que minimiza a  $\sigma_2[(P\gamma)]$ 
        %considera-se dois casos quando  $\gamma \neq 1$  e quando  $\gamma = 1$ 
        %primeiro caso
    if gam2~=1
        %em seguida calcula-se a multiplicidade do  $\sigma_2[(P\gamma)^*]$ 
        a=1;
        P2=[X -(gam2(1,1))*Y;(1./(gam2(1,1)))*Y X];
        [U,S,V]=svd(P2);
        q=rank(S);
        m=[2];
        for t=1:q
            if t~=2
                T11=abs(S(2,2)-S(t,t));
                If T11<=0.001
                    a=a+1; %indicador da multiplicidade
                    m=[m t];
                end
            end
        end
    end
end

MMin=min(m);
MMax=max(m);
%cálculo da matriz de perturbação quando a multiplicidade  $\sigma_2[(P\gamma)^*]$  é 1
if a==1
    P1=[X -(gam2)*Y;(1./(gam2))*Y X];
    [U,S,V]=svd(P1);
    U1=U;V1=V;
    sigma2=S(2,2);
    r1=size(S);
    f1=size(A);

```



```

U1=U;V1=V;
u1=U1(1:r1(1,1)./2,fl(1,1));
u2=U1((r1(1,1)./2)+1:r1(1,1),fl(1,1));
v1=V1(1:r1(1,2)./2,fl(1,2));
v2=V1((r1(1,2)./2)+1:r1(1,2),fl(1,2));
CON=[u1 u2]'*[u1 u2];           %primeiro membro da igualdade (1.11)
DIC=[v1 v2]'*[v1 v2];           %segundo membro da igualdade (1.11)
DIF=abs(CON-DIC);
WW=[0.001 0.001;0.001 0.001];
if    DIF < WW
    vec1=[u1 u2];               %vetor que formará a matriz de perturbação
    vec2=[v1 v2];               %vetor que formará a matriz de perturbação
    F=inv((vec1'*vec1)*vec1';    %inversa generalizada
    DELTA=(1./sigma2).*vec2*F;   %matriz de perturbação
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A)); %medida de
                                     %estabilidade
end
else
    %cálculo da matriz de perturbação quando a multiplicidade  $\sigma_2[P(\gamma)]$  é estritamente
    maior que 1 i.e. ( $r>1$ )
    P3=[X -(gam2(1,1))*Y;(1./(gam2(1,1)))*Y X];
    [U,S,V]=svd(P3);
    U1=U; V1=V;
    r4=size(A);
    m1=MMin;m2=MMax;
    sigma2=S(2,2);
    UU=U1(1:2*(r4(1,2)),m1:m2); %tomando os vetores
    VV=V1(1:2*(r4(1,1)),m1:m2); %correspondentes
    T1=P3*VV;
    T2=sigma2.*UU;
    DP=[zeros(size(X)) -Y;-((gam2(1,1)).^(-2))*Y zeros(size(X))];
    DPT=[zeros(size(X)) -((gam2(1,1)).^(-2))*Y';-Y' zeros(size(X))];
    COM2=UU'*DP*VV+VV'*DPT*UU;

```

```

[U,T]=schur(COM2);
W=U;SC=T;
rr1=rank(eye(size(SC)));
OOO=W*SC*W';
IMPLI=fix(SC(1,1).*SC(rr1,rr1))*100000/100000;
If    IMPLI<=0
    If    SC(1,1)~=SC(rr1,rr1) %quando os valores singulares são
                                %diferentes
        ba=sqrt(SC(1,1)-SC(rr1,rr1));
        UNI=[];
        for    t=1:rr1
            if    t==1 | t==rr1
                if    t==1
                    UNI=[UNI sqrt(-SC(rr1,rr1))];
                else
                    UNI=[UNI sqrt(SC(1,1))];
                end
            else
                UNI=[UNI 0];
            end
        end
    end
    w=(1./ba)*W*UNI';
    uuIN=UU*w;
    vvIN=VV*w;
    r5=size(uuIN);r6=size(vvIN);
    uu1=uuIN(1:r5(1,1)/2,1);
    uu2=uuIN((r5(1,1)/2)+1:r5(1,1),1);
    vv1=vvIN(1:r6(1,1)/2,1);
    vv2=vvIN((r6(1,1)/2)+1:r6(1,1),1);
    vec3=[uu1 uu2];
    vec4=[vv1 vv2];
    CON=[uu1 uu2]'*[uu1 uu2];
    DIC=[vv1 vv2]'*[vv1 vv2];

```

```

DIF=abs(CON-DIC);
r7=size(DIF);
WW=zeros(size(DIF));
For j=1:r7(1,1)
    For i=1:r7(1,2)
        WW(j,i)=0.001;
    end
end
if DIF < WW
    F=inv((vec3)'*vec3)*vec3'; %inversa generalizada
    DELTA=(1./sigma2).*vec4'*F; %matriz de perturbação
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A)); %medida de
                                         %estabilidade
end
end
elseif (SC(1,1)==0) & (SC(rr1,rr1)==0) %caso contrário quando os
                                         %valores singulares são iguais a zero

VeUni=[];
Suma=0;
for q1=1:1:rr1
    quadrado=q1^2;
    Suma=Suma+quadrado;
    VeUni=[VeUni q1];
end
Fins=sqrt(Suma);
w=1/Fins*VeUni;
uuIN=UU*w;
vvIN=VV*w;
r5=size(uuIN);r6=size(vvIN);
uu1=uuIN(1:r5(1,1)/2,1);
uu2=uuIN((r5(1,1)/2)+1:r5(1,1),1);
vv1=vvIN(1:r6(1,1)/2,1);
vv2=vvIN((r6(1,1)/2)+1:r6(1,1),1);

```

```

vec3=[uu1 uu2];
vec4=[vv1 vv2];
CON=[uu1 uu2]*[uu1 uu2];
DIC=[vv1 vv2]*[vv1 vv2];
DIF=abs(CON-DIC);
r7=size(DIF);
WW=zeros(size(DIF));
for j=1:r7(1,1)
    for i=1:r7(1,2)
        WW(j,i)=0.001;
    end
end
if DIF < WW
    vec3=[uu1 uu2];
    vec4=[vv1 vv2];
    F=inv((vec3)'*vec3)*vec3';           %inversa generalizada
    DELTA=(1./sigma2).*vec4*F;           matriz de perturbação
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A)); %medida de
                                           %estabilidade
end
end
end
else
    %cálculo da matriz de perturbação quando a multiplicidade  $\sigma_2[(P1)]$  é estritamente
    maior que 1 i.e. ( $r>1$ )
    %verificando a multiplicidade de  $\sigma_2[P(1)]$ 

    b=1;
    P2=[X -(gam2)*Y;(1./(gam2))*Y X];
    [U,S,V]=svd(P2);
    q=rank(S);
    m=[2];
    for t=1:q
        if t~=2

```



```

        T11=abs(S(2,2)-S(t,t));
        if    T11<=0.001
            b=b+1;          %indicador da multiplicidade de  $\sigma_2[P(1)]$ 
            m=[m t];
        end
    end
end
MMin=min(m);
MMax=max(m);

%cálculo da matriz de perturbação quando a multiplicidade  $\sigma_2[P(1)]$  é 2
if    b==2
    gama=1;                %quando  $\gamma=1$ 
    P2=[X -(gama)*Y;(1./(gama))*Y X]; %a matriz P(1)
    [U,S,V]=svd(P2);
    sigma2=S(1,1);
    r2=size(S);
    f1=size(A);
    U1=U;V1=V;
    u1=U1(1:r2(1,1)/2,f1(1,1));
    u2=U1((r2(1,1)/2)+1:r2(1,1),f1(1,1));
    v1=V1(1:r2(1,2)/2,f1(1,2));
    v2=V1((r2(1,2)/2)+1:r2(1,2),f1(1,2));
    CON=[u1 u2]'*[u1 u2];
    DIC=[v1 v2]'*[v1 v2];
    DIF=abs(CON-DIC);
    WW=[0.01 0.01;0.01 0.01];
    if    DIF < WW
        vec1=[u1 u2];
        vec2=[v1 v2];
        F=inv((vec1)'*vec1)*vec1'; %inversa generalizada
        DELTA=(1./sigma2).*vec2*F; %matriz de perturbação
        ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A));
        %medida de estabilidade
    end
end

```

```

end
else
    %cálculo da matriz de perturbação quando a multiplicidade  $\sigma_2[P(1)]$  é  $2r > 2$ 
    %cálculo da multiplicidade de  $\sigma_2(A)$  da matriz A
    c=1;
    [U,S,V]=svd(A);
    qq=rank(S);
    n=[];
    for tk=1:qq
        if tk~=2
            T11=abs(S(2,2)-S(tk,tk));
            if T11<=0.001
                c=c+1;
                n=[n tk];
            end
        end
    end
    end
    NNin=min(n);
    gama=1;
    P4=[X -(gama)*Y,(1./(gama))*Y X];
    [U,S,V]=svd(P4);
    sigmas4=S(2,2);
    [U,S,V]=svd(A);
    U1=U;V1=V;
    r5=size(A);
    m3=NNin;
    if NNin==1
        MIUN1=U1(1:r5(1,2),1);
        MIUN2=U1(1:r5(1,2),2);
        VIUN1=V1(1:r5(1,1),1);
        VIUN2=V1(1:r5(1,1),2);
    else
        MIUN1=U1(1:r5(1,2),2);

```

```

MIUN2=U1(1:r5(1,2),3);
VIUN1=V1(1:r5(1,1),2);
VIUN2=V1(1:r5(1,1),3);
end
miu1=[MIUN1 MIUN2];
viu1=[VIUN1 VIUN2];
CON3=A*viu1;
DIC3=sigmas4.*miu1;
RO=[0.001 0.001;0.001 0.001];
if abs(CON3-DIC3)<=RO
    u31=[MIUN1 MIUN2;VIUN1 VIUN2];
    p2=size(u31);
    IDENT=eye(p2(1,2),p2(1,2));
    ID3=[IDENT zeros(size(IDENT));zeros(size(IDENT))...
    IDENT];
    JUNT=(u31)'*ID3*u31;
    [U,S,V]=svd(JUNT);
    UU4=U;SS4=S;VV4=V;
    ARRO=UU4;
    IGUAL=ARRO*SS4*(ARRO)';
    %decomposição de Schur
    UNI=ARRO*ARRO';
    uni=ARRO'*ARRO;
    I=eye(size(UNI));
    if JUNT==IGUAL
        if SS4(1,1)>=0 & SS4(2,2)>=0 & UNI==I &
        ...uni==I
            if SS4(1,1)~=0
                i=sqrt(-1);
                k1=i.*sqrt(SS4(2,2));
                k2=sqrt(SS4(1,1));
                VEC=[k1; k2];
                RAA=sqrt(SS4(1,1)+SS4(2,2));

```

```

ee=ARRO'*VEC.*(1/RAA);
FIN=u31*ee;
uu4=FIN(1:r5(1,2),1);
vv4=FIN(r5(1,2)+1:r5(1,1)+...
        r5(1,2),1);
DI=uu4'*uu4-vv4'*vv4;
diez=fix(min(DI)*10000)/10000;
if    diez==0
    vec5=[real(uu4) imag(uu4)];
    vec6=[real(vv4) imag(vv4)];
    F6=inv((vec5)'*vec5)*vec5';
    DELTA=(sigmas4)^(-
        ...1).*vec6*F;
    %matriz de perturbação
    ESTAB=det(((eye(size(A)))-
        ...DELTA*A);
    %medida de estabilidade
end

else
    i=sqrt(-1);
    n1=[1*i;1];
    n2=sqrt((((real(n1(1,1)))^2 | (imag(n1(1,1)))^2)+
        ((real(n1(2,1)))^2 | (imag(n1(2,1)))^2));
    unit=(1./n2)*n1;ee=unit;
    FIN=u31*ee;
    uu4=FIN(1:r5(1,2),1);
    vv4=FIN(r5(1,2)+1:r5(1,1)+r5(1,2),1);
    DI=uu4'*uu4-vv4'*vv4;
    diez=fix(min(DI)*10000)/10000;
    if    diez==0
        vec5=[real(uu4) imag(uu4)];
        vec6=[real(vv4) imag(vv4)];
        F6=inv((vec5)'*vec5)*vec5'

```



```
DELTA=(sigmas4)^(-1).*vec6*F6;  
                                     %medida de estabilidad  
ESTAB=det(((eye(size(A)))-DELTA*A));  
end  
end  
end  
end  
end  
end  
end  
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] A.G.J. MacFarlane and Y.S. Hung, Analytic properties of the singular values of a rational matrix. *Internat. Control* 37 (1983) 221-234
- [2] B. Barmish and P. Khargonekar, Z. Shi, and R. Tempo, "Robustness margin need not be a continuous function of problem data," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 15, pp. 91-98, 1989
- [3] Biernacki, R. M., H. Hwang and S. P. Bhattacharyya. (1987) Robust stability with structured real parameter perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control.*, **AC-32**, 495-505.
- [4] Byers R., A Hamiltonian QR algorithms, *SIAM J. Sci. Statis. Comput.*, 7 (1986), pp. 212-229.
- [5] Byers, R. (1988). A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **9**, 875-881.
- [6] Doyle, J. C. and G. Stein (1981). Multivariable feedback: design concepts for a classical /modern synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control.*, **AC-26**, 4-16.
- [7] Doyle, J. C., K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer (1994). "Mixed H_2 and H_∞ performance objectives H_∞ optimal control." *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 8, pp. 1575-1587.
- [8] Fan, M. K. H. and A L. Tist (1986). "Characterization and efficient computation of the structured singular values," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. AC-31, no. 8, pp. 734-743.
- [9] G. Robel, "On computing the infinity norm." *IEEE Trans. Autom. Control.*, vol. 34, no 8, pp. 882-884, 1989.
- [10] Hinrichsen D., B. Kelb, and A. Linnemann, "An algorithm for the computation of the structured stability radius," *Automatica*, vol. 25, pp. 771-775, 1989.
- [11] Hinrichsen, D. and M. Motscha (1988). Optimization problems in the robustness analysis of linear state space systems. In A. Gómez, F Guerra, M. A. Jiménez and G. López (Eds), "Approximation and optimization, pp. 54-78. *Lecture Notes in Mathematics* No. 1354, Springer-Verlag, Berlin.
- [12] Hinrichsen, D. and A. J. Pritchard (1986a). Stability radii of linear systems. *Syst. Control Lett*, **7**, 1-10.
- [13] Hinrichsen, D. and A. J. Pritchard (1986b). Stability radius for structured perturbation and the algebraic Riccati equation. *Syst. Control Lett.*, **8**, 105-113.

- [14] Horn, R. A. and C. R. Johnson (1985). Matrix Analysis. Cambridge University Press.
- [15] J. Ackermann, "Parameter space design of robust control systems", IEEE Trans. Automat. Control, 25 (1980), pp. 1058- 1080.
- [16] J.C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainty, "IEE Proceedings, Pt. D, vol 129, pp. 242-250, nov, 1982
- [17] J. W. Demmel, A counterexample for two conjecture about stability, IEEE Trans. Automat. Control, 32 (1987), pp. 340- 342.
- [18] Lewkowicz, I. (1992). When are the complex and the real stability radius equal? IEEE Trans. Autom. Control., **AC-37**, 880-883.
- [19] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E. J. Davison, P. M. Young, and J. C. Doyle, (1995) "A formula for computation of the real stability radius," Automatica, Vol. 31, no. 6, pp. 879-890, 1995.
- [20] Li Qiu, André L. Tist, and Yaguang Yang, (1995). "On the Computation of the Real Hurwitz-Stability Radius," IEEE Trans. Autom. Control., vol. 40, no. 8, pp. 1475-1475.
- [21] Martín, J. M. (1987). State-space measure for stability robustness. IEEE Trans. Autom. Control., **AC-32**, 509-512.
- [22] M. K. Fan, ^a L. Tits, and J. C. Doyle, "Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamic," IEEE Trans. Automat. Contr., vol 36, pp. 25-38, 1991.
- [23] Ney Ricardo Moscati, "Projeto de um sistema de controle de atitude (três eixos) de satélite utilizando a metodologia LQG/LTR" INPE Secretaria da Ciência e Tecnologia Instituto Nacional de Pesquisa Espaciais. São José dos Campos Fevereiro-1992
- [24] N. A. Bruinsma and M. Steinbuch, "A fast algorithm to compute the H_{∞} -norm of a transfer function matrix, "Syst. Contr. Lett., vol 14, no. 4, pp. 287-293, 1990.
- [25] P. M. Young, and J.C. Doyle, "Computation of μ with real and complex uncertainties." In Proc. 29th Conf. Decision Contr., 1990, pp. 1230-1235.
- [26] P. M. Young, "Robustness with parametric and dynamic uncertainty." Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, 1993.
- [27] Packard, A. and J. C. Doyle (1993), "The complex structured singular values," Automatica Vol. 29, pp. 71-109.

- [28] Packard, A. and P. Pandey (1993). "Continuity properties of the real/complex structured singular values," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 38 No. 3 pp. 415-428.
- [29] Packard, A., K. Zhou, P. Pandey, Leonhardson, G. Balas (1992). "Optimal, Constant I/O similarity scaling for full information and state feedback control problems," Syst. Contr. Lett., Vol. 19, pp. 311~328.
- [30] Peter M. Young and John C. Doyle (1996). "Properties of the Mixed μ Problem and Its Bounds" IEEE Trans. Automatic Control, vol. 41 No. 1 pp. 155-159.
- [31] Petersen, I. R. (1987). "Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-32, pp. 427-429.
- [32] Postlethwaite, I. and A. G. J. MacFarlane (1981). "Principal gains and principal phases in the analysis of linear multivariable feedback systems," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-26, No. 1, pp. 32-46.
- [33] Qiu, L., and E. J. Davison (1989). A simple procedure for the exact stability robustness computation of polynomials with affine coefficient perturbations. Syst. Control Lett. 13, 413-420.
- [34] Qiu, L., and E. J. Davison (1991). The stability robustness determination of state space models with real unstructured perturbations. Math. Control Signals Syst., 4, 247-267.
- [35] Qiu, L., and E. J. Davison (1992). Bounds on the real stability radius. In M. Mansour, S. Balemi and W. Truol, (Eds), Robustness of Dynamic systems with parameter Uncertainties, pp. 139-145. Birkhauser, Basel.
- [36] Rudin, W. (1973). Functional Analysis. McGraw-Hill, New York.
- [37] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba, "A bisection method for computing the H_∞ -norm of a transfer matrix and related problems," Math. Contr., Sig., Syst., vol. 2, pp. 207-219, 1989.
- [38] S. Boyd and V. Balakrishnan, "A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its L_∞ norm," Syst. Contr. Lett., vol. 15, pp. 1-7, 1990.
- [39] Stewart, G. W. and J. G. Sun (1990). Matrix Perturbation Theory. Academic Press, San Diego.
- [40] Terra, M. T., Rodrigo. Ramos e N. G. Bretas. "Sistemas de controle automático de carga e frequências utilizando as metodologias LQG/LTR e desigualdade matriciais lineares" Congresso Brasileiro de Automática 1998 (aceito)

- [41] Van Loan, C. (1985). How near is a stable matrix to an unstable matrix? *Contemp. Math.*, **47**, 465-477.
- [42] Vidyasagar, M. (1984). "The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 29, pp. 403-417.
- [43] Vinnicombe, G. (1993). "Frequency domain uncertainty and the graph topology," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, No. 9, pp. 1371-1383.
- [44] Zhou, K., K. Glover, B. Bodenheimer, and J. Doyle (1994). "Mixed H_2 and H_∞ performance objectives I: robust performance analysis," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39 No. 8 pp. 1564-1578.