Campus de São Carlos

**CONTROLE MULTIVARIÁVEL APLICADO A
SISTEMAS COM ATRASO**

Autora: Márcia Lissandra Machado Prado

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Vilma Alves de Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 14/09/00

Ass. _____

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE MULTIVARIÁVEL APLICADO A SISTEMAS COM ATRASO

Márcia Lissandra Machado Prado

DEDALUS - Acervo - EESC

31100016777

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

ORIENTADOR: Prof^a. Dr^a. Vilma Alves de Oliveira

São Carlos

Setembro, 2000

Class.	TESE-EESC
Cutt.	4582
Tombo	T0209/00

st 1121508

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

P896c

Prado, Márcia Lissandra Machado

Controle multivariável aplicado a sistemas com
atraso / Márcia Lissandra Machado Prado -- São Carlos,
2000.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de
São Carlos-Universidade de São Paulo, 2000.

Área:Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Vilma Alves de Oliveira

1. Regulador linear quadráticoSIG. 2. Sistemas
multivariáveis. 3. Sistemas com atraso de tempo.
I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidata: Engenheira **MÁRCIA LISSANDRA MACHADO PRADO**

Dissertação defendida e aprovada em 13-07-2000
pela Comissão Julgadora:

Profª. Doutora **VILMA ALVES DE OLIVEIRA (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **BAKER JEFFERSON MASS**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA**
(UNESP – Campus de Ilha Solteira)

Profª. Associada **VILMA ALVES DE OLIVEIRA**
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedico este trabalho à minha Família,
(minha mãe, Lili, meu pai, Remo (*in memoriam*), Madinha; meus irmãos,
Sávio, Sônia e Cristina; meus cunhados, Ivan e Denise; meus sobrinhos,
Daniel, Meriane, Louise, Rodrigo, Larissa e Giovana, e ao meu namorado,
Marquinhos,
por todo o apoio que sempre me deram, mesmo nos momentos mais difíceis

Agradeço

À Professora Vilma pela amizade, incentivo, paciência, orientação e sobretudo por acreditar em nosso trabalho.

Aos amigos especiais de todas as horas, com os quais aprendi e continuo aprendendo a cada dia: Karina, Cristiane, Maristela, Isabella, Breno, Martha e Luciana.

Aos amigos e colegas da Pós-Graduação: Renato e Lúcia, João Bosco e Meire, Guilherme, Arthur, Patrícia, Mário, Hélio, Marcelo, Érika e Régis.

Aos amigos e colegas que tive a oportunidade de conhecer em São Carlos e que muito me ajudaram: às colegas da república, Luciana, Margareth e Célia; pelo companheirismo; e aos colegas que sempre me acolheram nas minhas estadas em São Carlos, Miguel, Gilberto, Val, Beto e Rita, Alexandre e Aline.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC/USP que de algum modo contribuíram para o andamento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa de estudo concedida.

A Deus por minha vida e família.

SUMÁRIO

<i>LISTA DE FIGURAS</i>	<i>i</i>
<i>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</i>	<i>iii</i>
<i>LISTA DE SÍMBOLOS</i>	<i>iv</i>
<i>RESUMO</i>	<i>x</i>
<i>ABSTRACT</i>	<i>xi</i>
<i>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</i>	<i>1</i>
1.1 - INTRODUÇÃO	1
<i>CAPÍTULO 2 - SISTEMAS COM ATRASOS</i>	<i>4</i>
2.1 - Introdução	4
2.2 - Representação dos Atrasos	5
2.2.1 - Aproximações do Atraso	6
2.2.2 - Representação dos Atrasos como Incertezas	14
2.2.3 - Representação de Sistemas Conectados	16
2.3 - Preditor de Smith Multivariável	17
2.4 - Conclusões	20
<i>CAPÍTULO 3 - CONTROLE MULTIVARIÁVEL PARA SISTEMAS COM ATRASOS</i>	<i>21</i>
3.1 - Introdução	21
3.2 - Controle Multivariável no Domínio da Frequência	23
3.2.1 - Valores Singulares	24
3.2.2 - Diagramas de Bode	27
3.3 - Modelos com Incertezas e Robustez	27
3.3.1 - Margem de Ganho e de Fase	28
3.3.2 - Parâmetros de Incertezas	29
3.4 - Metodologia LQG/LTR	32
3.4.1 - Estrutura do Controlador	33
3.4.2 - O Problema LQG	37
3.4.3 - O Procedimento de Recuperação LQG/LTR	44
3.4.4 - A Malha Objetivo na Saída da Planta	49
3.4.5 - Margens de Ganho e Fase da Malha Objetivo	50
3.4.6 - Planta de Fase Não Mínima	51
3.4.7 - Método LQG/LTR Aplicado ao Modelo com Atraso Simples	53

3.5 - Controle H_{∞}	55
3.5.1 - Formulação do Problema	56
3.5.2 - Solução do Problema de Controle H_{∞}	58
3.6 - Conclusões	63
<i>CAPÍTULO 4 – ESTUDO DE CASOS</i>	<i>64</i>
4.1 – Introdução	64
4.2 – Forno Elétrico Industrial	64
4.2.1 - Modelo Dinâmico	65
4.2.2 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com a Aproximação Padé	66
4.2.3 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com os Atrasos como Incertezas	84
4.3 – Planta Da Coluna De Destilação	98
4.3.1 – Modelo Dinâmico	98
4.3.2 – Aplicação da Técnica LQG/LTR ao modelo com a Aproximação Padé	99
4.3.3 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com os Atrasos como Incertezas	99
4.4 - Conclusões	113
<i>CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</i>	<i>115</i>
<i>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i>	<i>118</i>
<i>APÊNDICE 1 - LISTAGENS DOS PROGRAMAS</i>	<i>A1- 1</i>
Listagem do Programa rotina1.m	A1- 1
Listagem do Programa rotina2.m	A1- 3
Listagem do Programa rotina3.m	A1- 9
Listagem do Programa rotina4.m	A1-10
Listagem do Programa rotina5.m	A1-12
Listagem do Programa rotina6.m	A1-17
Listagem do Programa rotina7.m	A1-18
Listagem do Programa rotina8.m	A1-19
Listagem do Programa rotina9.m	A1-24
<i>APÊNDICE 2 - MATRIZES</i>	<i>A2- 1</i>
Matrizes do Programa rotina1.m	A2- 1
Matrizes do Programa rotina2.m	A2- 2
Matrizes do Programa rotina4.m	A2-37
Matrizes do Programa rotina5.m	A2-38
Matrizes do Programa rotina7.m	A2-41
Matrizes do Programa rotina8.m	A2-41
<i>APÊNDICE 3 - DIAGRAMAS DE SIMULAÇÃO</i>	<i>A3- 1</i>
Diagrama de Simulação do Forno Elétrico com o Controlador	A3- 1
Diagrama de Simulação da Coluna de Destilação com o Controlador	A3- 2
<i>APÊNDICE 4 - REALIZAÇÃO DE GILBERT</i>	<i>A4- 1</i>

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1 – Aproximação de ordem 1 para o atraso $T=0.01$ min.	7
Figura 2. 2 – Aproximação de ordem 5 para o atraso $T=0.01$ min.	8
Figura 2. 3 – Aproximação de ordem 1 para o atraso $T=1$ min.	8
Figura 2. 4 – Aproximação de ordem 5 para o atraso $T=1$ min.	9
Figura 2. 5 – Diagrama de bode de $G(s)$	10
Figura 2. 6 – Aproximação Padé para o atraso $T=0.001$ min.	11
Figura 2. 7 – Aproximação Padé para o atraso $T=0.01$ min.	11
Figura 2. 8 – Aproximação Padé para o atraso $T=0.1$ min.	12
Figura 2. 9 – Aproximação Padé para o atraso $T=1$ min.	12
Figura 2. 10 – Aproximação Padé para o atraso $T=10$ min.	13
Figura 2. 11 – Aproximação Padé para o atraso $T=100$ min.	13
Figura 2. 12 – Aproximação Padé para o atraso $T=1000$ min.	14
Figura 2. 13 – Diagrama de blocos do sistema conectado.	16
Figura 2. 14 – Configuração do sistema de controle.	17
Figura 2. 15 – Preditor Smith padrão.	18
Figura 3. 1 – Configuração típica de um sistema de controle.	22
Figura 3. 2 – Diagramas de Bode de Sistema Multivariável	27
Figura 3. 3 – Sistema com realimentação unitária.	28
Figura 3. 4 – Cálculo da margem de ganho.	28
Figura 3. 5 – Cálculo da margem de fase.	29
Figura 3. 6 – Diagrama de blocos do sistema com o observador de estados.	34
Figura 3. 7 – Diagrama de blocos do regulador com observador de estados na malha de controle.	35
Figura 3. 8 – Diagrama de blocos do controlador $K(s)$.	36
Figura 3. 9 – O filtro de Kalman.	38
Figura 3. 10 – Estrutura do controlador LQG.	40
Figura 3. 11 – Diagrama de blocos do LQG.	43
Figura 3. 12 – Diagrama de blocos do LQR.	43
Figura 3. 13 – Diagrama do sistema nominal a malha fechada.	48
Figura 3. 14 – Diagrama para o sistema limite.	48
Figura 3. 15 – Configuração do Problema do Regulador H_{∞}	57
Figura 4.1 – Aproximação pela função padé do atraso $T=1$ min.	67
Figura 4.2 – Aproximação pela função padé do atraso $T=25$ min.	67
Figura 4.3 – $G(s)$ – (verde) e $G'(s)$ – planta aproximada (vermelho tracejado).	68
Figura 4.4 – Valores singulares de $G(s)$ (verde contínuo) e $G_n(s)$ (vermelho tracejado).	70
Figura 4.5 – Gráfico dos pólos e zeros de $G_n(s)$.	71
Figura 4.6 – Gráfico de $G_n(s)$ com os integradores.	73
Figura 4.7 – Gráfico do erro multiplicativo.	74
Figura 4.8 – Valores Singulares de G_n (azul tracejado) e G_r (vermelho contínuo).	75
Figura 4.9 – Limitante de estabilidade (azul tracejado).	76
Figura 4.10 – Gráfico do limitante de desempenho.	77
Figura 4.11 – Limitantes de desempenho (verde traço e ponto) e estabilidade (azul tracejado).	77
Figura 4.12 – Conformação da malha objetivo com a matriz L .	78
Figura 4.13 – Conformação da malha objetivo.	79
Figura 4.14 – Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.	80
Figura 4.15 – Limitante de robustez da estabilidade para o sistema a malha fechada.	80

Figura 4.16 - Pólos e zeros do sistema com o controlador a malha fechada.	81
Figura 4.17 - Resposta a malha fechada: y (azul contínuo) e u (vermelho tracejado).	82
Figura 4.18 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).	83
Figura 4.19 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_d)^{-1}$ (vermelho tracejado).	83
Figura 4.20 - Comparação de $G'(s)$ (contínuo) e $G_n(s)$ (sinal mais).	87
Figura 4.21 - Diagrama de pólos e zeros de $G_n(s)$.	87
Figura 4.22 - Valores Singulares de G_n .	89
Figura 4.23 - Gráfico do erro multiplicativo.	90
Figura 4.24 - Valores singulares de G_n (azul tracejado) e G_r (vermelho contínuo).	91
Figura 4.25 - Limitante de estabilidade (azul tracejado).	91
Figura 4.26 - Limitante de desempenho.	92
Figura 4.27 - Limitantes de desempenho e estabilidade.	92
Figura 4.28 - Conformação da malha objetivo com a matriz L .	93
Figura 4.29 - Conformação da malha objetivo.	94
Figura 4.30 - Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.	94
Figura 4.31 - Limitante de robustez da estabilidade para o sistema a malha fechada.	95
Figura 4.32 - Pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada.	95
Figura 4.33 - Resposta a malha fechada: y (azul contínuo) e u (vermelho tracejado).	96
Figura 4.34 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).	97
Figura 4.35 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_d)^{-1}$ (vermelho tracejado).	97
Figura 4.36 - Comparação de $G'(s)$ (contínuo) com $G_n(s)$ (sinal mais).	101
Figura 4.37 - Pólos e zeros da planta.	101
Figura 4.38 - Valores singulares de G_n .	103
Figura 4.39 - Erro multiplicativo.	104
Figura 4.40 - Valores singulares de G_n (azul contínuo) e G_r (vermelho tracejado).	104
Figura 4.41 - Limitante de estabilidade (azul tracejado).	105
Figura 4.42 - Limitante de desempenho.	106
Figura 4.43 - Limitantes de desempenho e estabilidade.	106
Figura 4.44 - Conformação da malha objetivo com a matriz L .	107
Figura 4.45 - Conformação da malha objetivo.	108
Figura 4.46 - Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.	108
Figura 4.47 - Limitante de robustez da estabilidade para o sistema controlado a malha fechada.	109
Figura 4.48 - Pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada.	109
Figura 4.49 - Resposta a malha fechada: y_1 .	110
Figura 4.51 - Resposta a malha fechada: y_2 .	111
Figura 4.51 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).	112
Figura 4.52 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_d)^{-1}$ (vermelho tracejado).	113

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>SISO</i>	- Single Input Single Output
<i>MIMO</i>	- Multiple Input Multiple Output
<i>LQR</i>	- Linear Quadratic Regulator
<i>LQG</i>	- Linear Quadratic Gaussian
<i>LTR</i>	- Loop Transfer Recovery
<i>LQG/LTR</i>	- Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery
<i>PID</i>	- controlador proporcional, integral ou derivativo
<i>SPE</i>	- semiplano esquerdo do plano s
<i>SPD</i>	- semiplano direito do plano s
<i>ARE</i>	- Algebraic Riccati Equation

LISTA DE SÍMBOLOS

H_∞	- regulador generalizado
$S(s)$	- matriz de sensibilidade
$T(s)$	- matriz de sensibilidade complementar
$r(s)$	- sinal de referência
$e(s)$	- sinal de erro
$u(s)$	- sinal de controle (ou de entrada)
$d(s)$	- perturbação refletida na saída da planta
$y(s)$	- sinal de saída
$n_r(s)$	- erro (ruído) de medida
$p(s)$	- sinal de perturbação
$K(s)$	- matriz de funções de transferência do controlador
$G(s)$	- matriz de funções de transferência da planta
I_i	- matriz identidade de ordem i
m, n	- índices de dimensão das matrizes
C^m	- conjunto de vetores complexos de dimensão m
$C^{m \times n}$	- conjunto de vetores complexos $m \times n$
ω	- frequência angular
$g_{ij}(s)$	- elementos da matriz $G(s)$
i, j	- índices dos elementos da matriz $G(s)$
y_i	- elemento do vetor $y(s)$
u_j	- elemento do vetor $u(s)$
$\ \cdot\ $	- norma de vetor
$\sup$	- supremo
$\square^H$	- conjugado transposto de $\square$
σ_M	- valor singular máximo
σ_i	- i -ésimo valor singular
λ_i	- i -ésimo autovalor
σ_m	- valor singular mínimo
$\ G\ _2$	- norma H_2
$\ G\ _\infty$	- norma H_∞
π	- pi (3.1415)
$\text{tr}(\)$	- traço de matriz

∞	- infinito
L_∞	- espaço de Lebesg
H_∞	- espaço de Hardy
dB	- decibel
θ	- ângulo de fase
μ_i	- ganho da função de transferência
α_i	- polo da função de transferência
a_i, b_i	- coeficientes da função de transferência
β_i, γ_i	- zeros da função de transferência
K_P, K_I, K_D	- ganhos do controlador <i>PID</i>
$\mathbf{p}_{1,2}$	- vetor de parâmetros de incerteza
$\mathbf{x}$	- vetor de parâmetros do controlador
δ	- polinômio característico
$\mathbf{p}$	- vetor de parâmetros globais
ρ_x	- margem de estabilidade paramétrica do sistema com controlador $\mathbf{x}$
Ω	- conjunto de $\mathbf{p}$
$\mathbf{R}$	- conjunto dos números reais
$H_c(s)$	- matriz de transferência malha objetivo
$\mathbf{x}$	- vetor de estados
$\dot{\mathbf{x}}$	- derivada do vetor de estados
A, B, C, D	- matrizes de estado
K_r	- matriz de ganho de realimentação de estado
$\hat{\mathbf{x}}$	- estimativa de estado
t	- tempo
e_y	- sinal do erro de saída
L	- matriz do observador de estados
$\hat{y}$	- estimativa de saída
e_x	- erro da estimativa de saída
$\Delta_s(s)$	- equação característica de um sistema
$\det$	- determinante de matrizes
Q, R	- matrizes de ponderação
W, V	- matrizes de ruídos no estado e na saída
E	- covariância
w, v	- ruídos brancos
K_f	- matriz de ganho do filtro de Kalman
P_f	- covariância do erro de estimação
J	- função custo
Q_c, R_c	- matrizes de ponderação
K_c	- matriz de ganho do regulador quadrático

P_c	- solução de ARE
$\lim$	- limite
$\square^T$	- transposto de $\square$
ρ	- parâmetro
$\phi(s)$	- matriz de transição de estado
$\Psi(s)$	- matriz de transição de estado com o controlador
W_0	- estimativa da covariância do processo de ruído real
q	- parâmetro real positivo
Σ	- solução de equação de Riccati
$p_p(s)$	- polinômio dos pólos da planta
$ \cdot $	- módulo
μ	- parâmetro do controlador
MG	- margem de ganho
MF	- margem de fase
B_0, B_1	- matrizes de estado
h	- atraso
θ_t	- intervalo de tempo
α	- função de cálculo das margens de estabilidade
M_1, M_2	- margens de estabilidade
H	- matriz auxiliar
Σ_s, Θ	- densidade de ruído espectral
Ξ	- intensidade do ruído
F	- operador genérico
P	- planta generalizada
$B_2, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$	- matrizes de estado
z	- sinal a ser regulado
$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$	- sistema particionado
$F_1(P, K_z)$	- sistema a malha fechada
γ	- parâmetro do controlador H_∞
D_1^*	- partição da matriz D
R_h	- matriz auxiliar
$\tilde{R}_h$	- matriz auxiliar
X_∞, Y_∞	- solução da equação de Riccati
F_h, H_h	- matrizes auxiliares
$\rho_r(\cdot)$	- função de raio espectral
K_a	- controlador central
Φ	- racionais pertencentes ao espaço H_∞
Z	- matriz auxiliar

$\hat{P}$	- planta generalizada
γ_0	- valor limite de γ
T_i	- atraso
k	- constante de ganho
τ	- constante de tempo
$G_r(s)$	- planta real
Δ	- variação da incerteza
$W_i(s)$	- matriz de função de ponderação da incerteza
$G_e(s)$	- sistema com atraso
$G_{MF}(s)$	- sistema a malha fechada
$K^*(s)$	- controlador com preditor de Smith
$G_n(s)$	- sistema nominal
$G_{ii}(s)$	- elementos da diagonal principal de $G(s)$
$G_{ij}(s)$	- elementos da linha i e coluna j de $G(s)$
$G'(s)$	- planta aproximada de $G(s)$ pela função padé
$G'_n(s)$	- função aproximada de $G_n(s)$ pela função padé
$G'_{ij}(s)$	- função aproximada de $G_{ij}(s)$ pela função padé
$G''(s)$	- planta aproximada de $G(s)$ sem os atrasos
$G''_n(s)$	- função aproximada de $G_n(s)$ sem atrasos
$G''_{ij}(s)$	- função aproximada de $G_{ij}(s)$ sem atrasos
$F_I(s)$	- função de aproximação de e^{-s}
$F_{2s}(s)$	- função de aproximação de e^{-2s}
J_i	- matriz de ordem i em que os elementos das diagonais imediatamente acima e abaixo da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos iguais a 0
$a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, d_{ii}$	- matrizes espaço de estado para a função $G'_n(s)$
$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$	- matrizes espaço de estado para a função $G'_{ij}(s)$
$A_{ii}, B_{ii}, C_{ii}, D_{ii}$	- matrizes espaço de estado para a matriz de funções de transferência formada apenas por $G'_n(s)$
$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$	- matrizes espaço de estado para a matriz de funções de transferência formada apenas por $G'_{ij}(s)$

- $w_i(s)$ - função de ponderação da incerteza
 $w_p(s)$ - função de ponderação do desempenho
 $W_p(s)$ - matriz de ponderação do desempenho
 A_p, B_p, C_p - sistema espaço de estados sem integradores
 $E_M(s)$ - função de erro multiplicativo
 $e_M(\omega)$ - limite da magnitude do erro
 $p_f(\omega)$ - função de ponderação do desempenho
 α_p - limite para erro das especificações de projeto
 ω_o - limite de frequência para o limitante de desempenho
 ω_n - limite de frequência para o limitante de estabilidade
 L_l - parte superior da matriz L
 L_h - parte inferior da matriz L
 A_c, B_c, C_c, D_c - matrizes espaço de estado do controlador
 $A_{fh}, B_{fh}, C_{fh}, D_{fh}$ - matrizes espaço de estado sistema controlado
 $N_g(s)$ - matriz composta pelos numeradores de $G(s)$
 $d_g(s)$ - polinômio composto pelos denominadores de $G(s)$
 $n_{ii}(s)$ - numerador de $G_{ii}(s)$
 $n_{ij}(s)$ - numerador de $G_{ij}(s)$
 $d_{ii}(s)$ - denominador de $G_{ii}(s)$
 $d_{ij}(s)$ - denominador de $G_{ij}(s)$
 V_i - matriz do numerador de $G(s)$ da expansão em frações parciais
 D_g - parte inteira de $G(s)$ da expansão em frações parciais
 λ_i - autovalores de $G(s)$
 k_i - rank de V_i
 $w_{ii}(s)$ - função de ponderação da incerteza para os elementos da diagonal principal de $G(s)$
 $w_{ij}(s)$ - função de ponderação da incerteza para os elementos da linha i e coluna j de $G(s)$

$w_1(s), w_2(s), w_3(s)$ - funções de ponderação da incerteza para os elementos com de $G(s)$ com os atrasos T_1, T_2 e T_3 , respectivamente.

RESUMO

Uma grande variedade de sistemas multivariáveis pode ser tratada por técnicas de controle monovariável. Os trabalhos encontrados na literatura para sistemas com atrasos são geralmente para sistemas monovariáveis. Neste trabalho a aplicação de técnicas de controle multivariáveis para sistemas dinâmicos com múltiplos atrasos na entrada é explorada. Consideramos a aplicação da técnica LQG/LTR (do inglês *linear quadratic gaussian with loop transfer recovery*) para duas plantas exemplos. A primeira é um forno elétrico industrial usado nos processos de fundição de metal com 6 entradas e 6 saídas e a segunda é um sistema de uma coluna de destilação binária com 2 entradas e 2 saídas. Os dois modelos de planta apresentam múltiplos atrasos na entrada. Apresentamos resultados da simulação do controle LQG/LTR com comparações.

ABSTRACT

In a variety of cases multivariable systems can be treated as single-input, single-output (SISO) systems for control purposes. The works found in the literature for time-delay systems are generally for SISO systems. In this work the application of multivariable control techniques to dynamic systems with multiple time-delays in the input is explored. We consider the application of the linear quadratic Gaussian with loop transfer recovery (LQG/LTR) technique to two study plants. The first is an electrical oven used in metal casting processes with 6 inputs and 6 outputs and the second a column of binary distillation system with 2 inputs and 2 outputs. The two plant models present multiple time-delays in the input. We present the LQG/LTR control simulation results along with comparisons.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

O conceito de controle é intuitivo e faz parte de praticamente todas as atividades dos seres racionais. De fato, onde há vida há controle: nas plantas, nos animais racionais e irracionais.

A Engenharia de Controle tem influência direta e importância capital em praticamente todos os processos industriais. Com o objetivo de se produzir em escala, com uniformidade e com qualidade, é necessário o uso do controle automático na operação de sistemas.

Nos últimos anos, os sistemas de controle têm assumido um papel progressivamente importante no desenvolvimento e avanço da moderna civilização e tecnologia. Praticamente todos os aspectos de nossas atividades diárias são afetados por algum tipo de sistema de controle. Como exemplo, temos o controle automático nos sistemas de aquecimento e de condicionamento de ar que regulam a temperatura e a umidade das casas e edifícios. Para atingir a máxima eficiência no consumo de energia, muitos sistemas modernos de aquecimento e condicionamento de ar em grandes edifícios de escritórios e de fábricas são controlados por computador.

Os sistemas de controle são encontrados em abundância em todos os setores da indústria, tais como controle de qualidade de produtos manufaturados, linha de montagem automática, controle de máquinas operatrizes, tecnologia espacial e

sistemas de armamento e defesa, controle de computadores, sistemas de transporte, sistemas de potência, robótica e muitos outros. Mesmo problemas tais como controle de estoque e controle de sistemas econômicos e sociais podem ser abordados pela teoria de controle automático (KUO, 1985).

Na medida em que as características desejadas se tornam mais rigorosas e os processos a serem controlados, mais complexos, o grau de sofisticação necessário aos sistemas de controle aumenta significativamente. Este é o quadro atual das indústrias, onde as restrições de custo, eficiência, qualidade, produtividade cada vez mais estreitas, tornam os processos cada vez mais complexos. A manutenção da competitividade num mercado globalizado só é possível para as empresas que se mantenham atualizadas com relação aos desenvolvimentos tecnológicos.

Em virtude dos modernos processos com muitas entradas e saídas tornarem-se cada vez mais complexos, a descrição de um sistema de controle moderno requer um grande número de equações. A teoria de controle clássica, que trata apenas de sistemas de entrada simples e saída simples (SISO, em inglês), torna-se impotente para tratar dos sistemas de entrada múltipla e saída múltipla (MIMO, em inglês). Desde 1960, aproximadamente, devido a disponibilidade dos computadores digitais ter tornado possível a análise de sistemas complexos no domínio do tempo, a teoria de controle moderna, baseada na análise e na síntese no domínio do tempo usando variáveis de estado, tem sido desenvolvida para competir com a complexidade crescente de processos modernos e requisitos rigorosos em termos de precisão, peso e custo em aplicações militares, espaciais e industriais (OGATA, 1993).

A maior parte dos processos possui atrasos. Normalmente, estes atrasos são pequenos, podendo ser desprezados. No entanto, alguns se mostram significativos, da ordem de minutos, acarretando divergências na representação do sistema caso não sejam considerados. Neste caso, torna-se necessário representá-los e assim proceder com o projeto do sistema de controle.

Existem algumas maneiras de se trabalhar com estes sistemas com atrasos, utilizando aproximações para as funções exponenciais que representam os atrasos. Outra maneira é simplesmente desconsiderá-los no projeto de controle, e adicioná-los nas condições de estabilidade, tornando porém, o projeto mais conservador.

O presente trabalho tem como objetivo avaliar a aplicabilidade das técnicas de controle multivariável no domínio da frequência disponíveis na literatura em sistemas com atraso. Consideramos o método LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery*, do inglês) e diferentes representações de atrasos.

A dissertação é organizada como segue. O Capítulo 2 introduz técnicas de sistemas de controle multivariável, as ferramentas utilizadas no domínio da frequência, modelagens da incerteza, e as metodologias de projeto LQG/LTR e do regulador generalizado H_∞ . No Capítulo 3, apresentamos representações de sistemas com atrasos visando a utilização de técnicas de controle disponíveis na literatura. No Capítulo 4, descrevemos os modelos de planta considerados para estudo: um forno elétrico industrial e uma coluna de destilação binária, os projetos desenvolvidos, bem como os resultados de simulação.

CAPÍTULO 2 - SISTEMAS COM ATRASOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Na prática, são encontrados vários tipos de sistemas com atrasos, especialmente sistemas com transmissões hidráulicas, pneumáticas, ou mecânicas, e sistemas térmicos. Nestes sistemas a saída não começará a responder a uma entrada antes de transcorrer o atraso. Outros exemplos de atrasos são encontrados nos seres humanos, como sistemas de controle onde a ação e a reação são sempre acompanhadas de atrasos. A operação do dispositivo segurador de amostra de um sistema amostrador de dados é muito parecida com um atraso; às vezes é feita a aproximação por um simples termo de atraso, e^{-Ts} (KUO, 1985). Uma descrição geral de estado de um sistema contendo atrasos é dada pela seguinte equação diferencial na forma matricial:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A_i x(t - T_i) + \sum_{j=1}^q B_j u(t - T_j) \quad (2.1)$$

onde T_i e T_j são atrasos fixos. Neste caso, a equação acima representa uma situação geral onde podem existir atrasos tanto nas entradas quanto nos estados.

Em geral, os sistemas em malha fechada com atrasos nas malhas estão sujeitos a mais problemas de estabilidade do que os sistemas sem atrasos. Como um atraso T_d é modelado pela função de transferência $e^{-T_d s}$, a equação característica do

sistema não mais terá coeficientes constantes, contudo, o critério de Nyquist é prontamente aplicável a estes sistemas (KUO, 1985).

A presença do atraso em uma malha de controle a realimentação pode ser um sério obstáculo para a boa operação do processo. O problema é geralmente mais complicado pela natureza multivariável da maioria das plantas em operação. Malhas entrada-saída em uma planta multivariável geralmente tem diferentes atrasos, e para uma malha particular sua saída poderia ser afetada por todas as entradas através de atrasos provavelmente diferentes. Como resultado, esta planta pode então ser representada por uma matriz de funções de transferências multivariável tendo múltiplos (ou diferentes) atrasos em torno de um ponto de operação (WANG *et al.*, 1998).

A existência de atraso na planta torna mais difícil projetar um controlador para estabilizá-la. Inclusive algumas ferramentas analíticas de projeto de controladores multivariáveis são restritas a matrizes de funções de transferências racionais. Desta forma, neste capítulo, descrevemos algumas abordagens de representação de sistemas com atrasos.

2.2 - REPRESENTAÇÃO DOS ATRASOS

Muitas vezes os sistemas apresentam mais de um atraso. Diversas técnicas de projeto de controladores requerem uma realização $\{A, B, C, D\}$ do sistema. Devido a existência de atrasos, vamos mostrar duas maneiras de se representar o sistema para obter a realização. A primeira seria utilizar uma aproximação dos atrasos por funções racionais em s (por exemplo a aproximação Padé), ou simplesmente utilizar a planta sem atrasos e considerá-los nas incertezas, e então obter a realização do sistema pelos métodos tradicionais (ZHOU *et al.*, 1996) e (CHEN, 1984). A segunda requer a realização de sistemas conectados referentes a cada atraso. Neste último caso, os métodos de projeto existentes devem ser adaptados para tratar de sistemas com atrasos (JEUNG *et al.*, 1996), (MAHMOUD & AL-MUTHAIRI, 1994), (LEE *et al.*, 1994), (SHEN *et al.*, 1991), (FERON *et al.*, 1992), (LI *et al.*, 1996), (GE *et al.*, 1996), (LUO *et al.*, 1998), (MALEK-ZAVEREI & JAMSHIDI, 1987) e (REZA & PETERSEN, 1995).

2.2.1 - Aproximações do Atraso

Nesta seção apresentamos alguns tipos de aproximações que podem ser realizadas para substituir os atrasos da matriz de funções de transferências do sistema multivariável por uma função racional em s , sem deteriorar o comportamento original da planta, e assim não comprometer o projeto do controlador de estabilização. Seguem as aproximações do atraso T

a) Aproximação do atraso para pequenos valores de T

$$e^{-Ts} = I - Ts \quad (2.2)$$

$$e^{-Ts} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.3)$$

Esta aproximação é boa se o atraso for muito pequeno.

b) Aproximação por série de Maclaurin, isto é

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2} \quad (2.4)$$

ou

$$e^{-Ts} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{T^2 s^2}{2}} \quad (2.5)$$

onde apenas três termos da série são usados. Aparentemente, as aproximações não são válidas quando a magnitude de T é grande (KUO, 1995).

c) Aproximação Padé

Uma opção melhor para uma aproximação do atraso é usar a aproximação Padé (TRUXAL, 1955) e (WALL, 1948), que é dada na seguinte expressão para ordem 1:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} \quad (2.6)$$

A característica da aproximação na equação (2.6) é que a função de transferência contém um zero no semi-plano direito de s para que a resposta ao degrau do sistema aproximado possa exibir um sub-sinal negativo pequeno próximo a $t=0$ (KUO, 1995). Este tipo de aproximação pode ser feita diretamente no Matlab com a função *pade*.

Podemos observar o comportamento da aproximação Padé de acordo com os gráficos abaixo (Figuras 2.1 e 2.2: $T=0.01$ min, Figuras 2.3 e 2.4: $T=1$ min).

Figura 2. 1 – Aproximação de ordem 1 para o atraso $T=0.01$ min.

Figura 2. 2 – Aproximação de ordem 5 para o atraso $T=0.01$ min.

Como vemos pelo gráfico da Figura 2.1, a função padé de ordem 1 se aproxima bem até a frequência de 10^2 rad/s. Quando aumentamos a ordem, a banda de frequências em que a aproximação é eficiente, aumenta chegando a 10^3 rad/s, Figura 2.2.

Figura 2. 3 – Aproximação de ordem 1 para o atraso $T=1$ min.

Figura 2. 4 – Aproximação de ordem 5 para o atraso $T=1$ min.

Com o atraso $T=0.01$ min, a função se aproxima bem, mesmo usando uma aproximação de ordem 1, Figuras 2.3 e 2.4. No entanto, para o atraso $T=1$ min, já se tem mais dificuldade em aproximar a função, dependendo do intervalo de frequências que se deseja utilizar.

Caracterização do Atraso pela Aproximação Padé

Considere o sistema de 1ª ordem representado por $G(s)$:

$$G(s) = \frac{ke^{-Ts}}{\tau s + 1} \quad (2.7)$$

onde k é uma constante de ganho, T é o atraso, e τ é a constante de tempo do sistema. O diagrama de magnitude de bode pode ser representado pela Figura 2.5.

Figura 2. 5 – Diagrama de bode de $G(s)$

Considerando a largura de banda de um sistema de primeira ordem do tipo (2.7), a qual corresponde à frequência onde ocorre uma queda de -3db em relação a $20 \log_{10}(k)$, podemos aceitar que a aproximação Padé seja eficiente para a representação dos atrasos em sistemas dinâmicos para efeito de projeto de controlador, nos casos em que se tem

$$\frac{T}{\tau} < 1 \quad (2.8)$$

onde a relação T/τ representa o atraso normalizado. Inclusive, podemos reforçar esta aceitação analisando os gráficos dos testes realizados com a função *pade* do Matlab, com valores de T entre $[0.001 \text{ min e } 1000 \text{ min}]$. Os gráficos estão representados pelas Figuras 2.6 a 2.12.

Figura 2. 6 – Aproximação Padé para o atraso $T=0.001$ min. Figura 2. 7 - Aproximação Padé para o atraso $T=0.01$ min.

Figura 2. 8 - Aproximação Padé para o atraso $T=0.1$ min. Figura 2. 9 - Aproximação Padé para o atraso $T=1$ min.

Figura 2. 10 - Aproximação Padé para o atraso $T=10$ min. Figura 2. 11 - Aproximação Padé para o atraso $T=100$ min.

Figura 2. 12 - Aproximação Padé para o atraso $T=1000$ min.

Deve-se levar em conta o compromisso de obter uma boa aproximação para a faixa de frequências desejada para obter uma ordem baixa para a aproximação, e assim não comprometer o modelo do sistema e não complicar demais o projeto do controlador com ordens muito elevadas da aproximação.

Para utilizar a aproximação Padé nos atrasos de uma planta, as ordens das aproximações devem ser testadas afim de escolher as mais apropriadas.

2.2.2 - Representação dos Atrasos como Incertezas

Para o caso em que uma aproximação do atraso não seja satisfatória, pode-se utilizar como alternativa para resolver o problema de controle, a desconsideração dos atrasos da planta para efeito de projeto, e a sua inclusão no sistema como incertezas. No entanto, isto só deve ser feito se o atraso for relativamente pequeno, pois o projeto pode tornar-se muito conservador. O problema é que incluindo um atraso grande na incerteza impõe-se restrições severas ao controlador, que efetivamente reduzem a banda passante da malha fechada para aproximadamente o inverso do atraso. Se é conhecido que o atraso está em uma certa faixa, por exemplo 60-70 min., incluindo os 70 min. de atraso como uma incerteza obteríamos um projeto conservador desnecessariamente (ABDELRAHMAN & MOORE, 1997).

Modelagem da Incerteza

A modelagem da incerteza pode ser obtida supondo um modelo de erro multiplicativo para o sistema com atraso com o fator do atraso sendo tratado como uma incerteza multiplicativa.

Suponha $G(s)$ a matriz de transferência racional e considere o sistema perturbado da forma

$$G_r(s) = G(s)[I + \Delta W_i(s)] \quad (2.9)$$

com $W_i(s)$ representando a função de ponderação da incerteza, e Δ sendo uma função de transferência estável satisfazendo a condição

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1. \quad (2.10)$$

Além disso, assume-se que nenhum pólo instável de G é cancelado na forma G_r . Portanto, temos a seguinte desigualdade para um sistema SISO

$$\left| \frac{G_r(j\omega)}{G(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_i(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.11)$$

Consideramos $G_r(s) = G(s)e^{-Ts}$. Assim, para tratar o atraso como uma incerteza multiplicativa da planta nominal definimos uma família para G_r

$$\{G(I + \Delta W_i(s)) : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1\}, \quad (2.12)$$

$W_i(s)$ deve ser escolhida de forma que a perturbação normalizada satisfaça a expressão (2.13) (DOYLE, *et al.*, 1992).

$$\left| e^{-Tj\omega} - 1 \right| \leq |W_i(j\omega)|, \quad \forall \omega, T. \quad (2.13)$$

2.2.3 - Representação de Sistemas Conectados

Sistemas com mais de um atraso podem ser separados de acordo com cada atraso, e depois podem ser conectados para formar a representação completa da planta. Um exemplo para o caso de dois atrasos pode ser esquematizado pelo seguinte diagrama

Figura 2. 13 – Diagrama de blocos do sistema conectado.

As equações referentes à Figura 2.13 podem ser vistas como abaixo para descrição entrada-saída

$$y = G_1 e^{-T_1 s} u + G_2 e^{-T_2 s} u \quad (2.14)$$

com $T_1, T_2 \geq 0$, ou para a forma espaço de estado como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t - T_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t - T_2) \quad (2.15)$$

$$y = (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

onde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times k_i}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{k_i \times n}$, com n sendo a ordem da realização e k_i a ordem de $G_i(s)$.

De acordo com o sistema (2.15) e (2.16), podemos encontrar uma realização $\{A, B, C, D\}$ para cada sistema separado, e depois, então, conectar os dois de acordo com as equações (2.15) e (2.16).

2.3 - PREDITOR DE SMITH MULTIVARIÁVEL

O preditor de Smith é uma aproximação para sistemas com atraso significativo (SEBORG *et al*, 1992). Considere a configuração da Figura 2.14 e suponha que a planta seja definida por

$$G_e(s) = G(s)e^{-sT} \quad (2.17)$$

Com um controlador convencional $K(s)$, o sistema resultante a malha fechada torna-se

$$G_{MF}(s) = \frac{K(s)G(s)e^{-Ts}}{1 + K(s)G(s)e^{-sT}} \quad (2.18)$$

Figura 2. 14 - Configuração do sistema de controle.

A presença do termo e^{-sT} no denominador é indesejável e pode algumas vezes tornar difícil o projeto de $K(s)$. O preditor de Smith soluciona este problema através da configuração mostrada na Figura 2.15. Neste caso obtemos

$$G_{MF}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} e^{-sT} \quad (2.19)$$

Figura 2. 15 - Preditor Smith padrão.

O controlador $K^*(s)$ mostrado na Figura 2.15 pode ser projetado usando técnicas convencionais e o atraso é eficientemente removido da malha.

O preditor de Smith foi desenvolvido para sistemas SISO. Contudo, se se supor $K(s)$ e $G_e(s)$ matrizes de transferências com apropriadas dimensões para uma planta dada por

$$G_e(s) = e^{-sT} \begin{bmatrix} G_{11}(s)e^{-T_{11}s} & G_{12}(s)e^{-T_{12}s} \\ G_{21}(s)e^{-T_{21}s} & G_{22}(s)e^{-T_{22}s} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

com

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

pode-se verificar que o sistema a malha fechada torna-se

$$G_{MF}(s) = G_e K^* (I + G K^*)^{-1} \quad (2.22)$$

Então, podemos remover o atraso da malha fechada, como no caso SISO.

No entanto, removendo o atraso para fora da malha, implica atrasar toda a planta, e com isto tornar o controlador muito conservador. Assim, a limitação fundamental do preditor Smith é o compromisso entre rejeição de perturbação e uma boa resposta transitória com um bom seguimento do estado estacionário. Este fato

destaca uma necessidade de investigar novos procedimentos para o projeto de controle de sistemas multivariáveis com atrasos (MOORE *et al.*, 1995).

Pode-se tratar o sistema com atraso combinando um preditor de Smith com um controlador robusto. O preditor de Smith pode incorporar a informação sobre o atraso nominal T no projeto do controlador, quando este atraso nominal for muito maior do que a incerteza no atraso ($T \gg \Delta T$). Então, por uso de um preditor de Smith pode-se reduzir o problema de grandes atrasos com pequenas incertezas ao problema de projetar um controlador robusto para uma planta com pequenos atrasos (ABDELRAHMAN *et al.*, 1996), (ABDELRAHMAN, 1996).

Por exemplo, para um sistema SISO com a função de transferência nominal e real dadas por $G_n e^{-sT}$ e $G_r e^{-sT_r}$, respectivamente, o projeto de um controlador robusto pode ser realizado como segue.

(a) Primeiro, defina um conjunto apropriado de possíveis funções de transferências considerando erro de modelagem multiplicativo. Uma caracterização deste conjunto é dado por

$$\Pi = \left\{ G : \frac{|G_r(j\omega)e^{-sT_r} - G_n(j\omega)e^{-sT_n}|}{|G_n(j\omega)e^{-sT_n}|} \leq \Delta \right\} \quad (2.23)$$

(b) Em seguida estabeleça o desempenho do sistema desejado, tal como o erro de seguimento, as propriedades de rejeição a distúrbios e o custo de controle e características de frequência.

(c) Escolha as funções de transferências ponderadas de forma a obter a resposta em frequência do sistema a malha fechada para atender a robustez e objetivos de desempenho desejados.

(d) Finalmente, obtenha um controlador robusto para resolver o problema conhecido como sensibilidade mista. Se o controlador satisfizer os requerimentos de robustez e desempenho estabelecidos no passo anterior não puder ser encontrado, o procedimento é repetido relaxando-se os requerimentos de desempenho estabelecidos em b.

(e) Finalizado o projeto do controlador, pode-se inseri-lo na estrutura do preditor de Smith (ABDELRAHMAN & MOORE, 1997), Figura 2.15.

2.4 - CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentadas algumas representações de atrasos em sistemas para utilizar em procedimentos de projetos de controladores. Foram vistas aproximações do atraso por funções racionais, em especial a aproximação Padé. Outra maneira de representar o atraso é considerá-lo como incerteza na realização do projeto. Como representar múltiplos atrasos em sistemas conectados para obter as matrizes de estado. Também foi apresentado o preditor de Smith como forma de retirar o atraso para fora da malha fechada do sistema, no caso de atrasos significativos.

Podemos verificar que a aproximação Padé é bastante eficiente para casos em que o atraso é menor do que a constante de tempo do sistema. Utilizar os atrasos como incertezas no projeto pode torná-lo muito conservador, contudo é uma opção para o caso de se ter uma aproximação ineficiente da parte com atraso do sistema.

Foi apresentado também, um procedimento sistemático para a utilização do preditor de Smith no projeto de controladores em sistemas com atrasos.

CAPÍTULO 3 - CONTROLE MULTIVARIÁVEL PARA SISTEMAS COM ATRASOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Devido ao aumento da complexidade dos sistemas e interesse em obter desempenho cada vez melhor, a importância da engenharia de sistema de controle tem crescido muito. Além disso, como os sistemas tornam-se muito complexos, o acoplamento de muitas variáveis controladas deve ser considerado na metodologia de controle.

A importância de obter sistemas de controle robustos já foi reconhecida a muito tempo. Técnicas no domínio da frequência clássicas para sistemas SISO consideram o problema de robustez via métodos gráficos, por exemplo, Bode e Nyquist com medidas de robustez dadas pela margem de fase e ganho. Mais recentemente, o problema de robustez de sistemas multivariáveis vem sendo exhaustivamente estudado. Em particular, o regulador quadrático Gaussiano com recuperação da malha de transferência do sistema com controlador (LQG/LTR, do inglês) (DOYLE & STEIN, 1979) e (DOYLE, 1978), recebeu muita atenção da comunidade de controle. Este método permite a conformação dos valores singulares da malha de transferência aberta na saída ou entrada da planta para conseguir o desempenho desejado já com a estabilidade obtida automaticamente.

Outro método de controle robusto que vem sendo explorado é o regulador generalizado H_∞ . O problema é projetar um controlador estabilizante, que minimize a

norma H_∞ de uma função de transferência a malha fechada entre o sinal de perturbação externa e o sinal de erro.

No projeto de sistema de controle MIMO, especificações de desempenho, isto é, seguimento de referência, rejeição de perturbações, largura de faixa da malha fechada, robustez de estabilidade com relação a incertezas dinâmicas não estruturadas, etc., são naturalmente apresentadas no domínio da frequência em termos da matriz de sensibilidade, S e sensibilidade complementar, T (DOYLE & STEIN, 1979). As funções S e T são relacionadas às matrizes de transferência de malha calculadas abrindo a malha em pontos críticos: entrada ou saída da planta. Tipicamente, o problema é o projeto de sistemas de controle para chegar-se à matriz função de transferência de malha dada.

Neste trabalho utilizamos técnicas de controle no domínio da frequência e o problema de controle pode ser apresentado com o auxílio do diagrama de blocos, como na Figura 3.1.

Figura 3. 1 – Configuração típica de um sistema de controle.

Os sinais, representados na Figura 3.1 são os seguintes:

- $r \in \mathbb{R}^m(s)$: sinal de referência;
- $e \in \mathbb{R}^m(s)$: sinal do erro;
- $u \in \mathbb{R}^m(s)$: sinal de controle (ou de entrada);
- $d \in \mathbb{R}^m(s)$: perturbação refletida na saída da planta;
- $y \in \mathbb{R}^m(s)$: sinal de saída;
- $n_r \in \mathbb{R}^m(s)$: erro (ruído) de medida.
- $p \in \mathbb{R}^m(s)$: sinal de perturbação.

As seguintes matrizes de função de transferência são utilizadas com frequência.

- $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de funções de transferência do controlador;
- $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de funções de transferência da planta;
- $G(s)K(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de funções de transferência de malha para abertura da malha na saída da planta (matriz de função de transferência do ramo direto);
- $I+G(s)K(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de funções de transferência diferença de retorno;
- $S(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de sensibilidade;
- $T(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$: matriz de funções de transferência de malha fechada ou matriz de sensibilidade complementar.

onde $\mathbb{R}^m(s)$ designa o conjunto de vetores racionais de dimensão m e $\mathbb{R}^{m \times n}(s)$ o conjunto de matrizes racionais $m \times n$.

Nas seções seguintes apresentamos as ferramentas para construção da resposta em frequência de sistemas MIMO, descrevemos os modelos de incertezas que podem ser utilizados para descrever os critérios de estabilidade e desempenho; e também os métodos de projeto de controladores multivariáveis que tem sido muito explorados atualmente: LQG/LTR e o regulador generalizado $H\infty$.

3.2 – CONTROLE MULTIVARIÁVEL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A ferramenta utilizada para estender o conceito de resposta em frequência para o caso MIMO são os valores singulares de matrizes. A sua escolha está baseada no fato de que eles representam uma maneira natural e imediata de estender o conceito de ganho para o contexto multivariável. Com isso, é possível construir diagramas de Bode para sistemas MIMO e interpretar especificações de desempenho e estabilidade no domínio da frequência.

Considere o sistema multivariável com matriz de funções de transferência $G(s)$, entrada u e saída y . Em regime estacionário, pode-se mostrar que (OGATA, 1993):

$$y_i(j\omega) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(j\omega) u_j(\omega) \quad (1 \leq i \leq m). \quad (3.1)$$

onde $G(s)$ é formada pelos elementos $[g_{ij}(s)]$ e as várias senóides de entrada têm a mesma frequência ω , que resulta na própria frequência de saída.

A equação (3.1) pode ser escrita em forma matricial como:

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega). \quad (3.2)$$

A seguir, descrevemos as ferramentas utilizadas na análise e projeto de controladores multivariáveis no domínio da frequência: valores singulares e os diagramas de bode.

3.2.1 - Valores Singulares

Em um sistema SISO o desempenho de uma malha realimentada pode ser determinado pela variação do ganho de malha com a frequência; pela rejeição a distúrbios, transmissão de ruído e sensibilidade a variações de parâmetros dependentes do ganho (supondo que a estabilidade é obtida). Se a função de transferência a malha aberta não possuir zeros no SPD (semi-plano direito do plano s), as margens de estabilidade e a resposta transitória a malha fechada são também determinadas pelas características de ganho a malha aberta.

O principal problema para estender esta correlação para sistemas realimentados multivariáveis é que a matriz não possui um único ganho: a norma $\|G(s)u(s)\|$ depende da direção do vetor $u(s)$. Contudo, podemos limitar as relações

$$\frac{\|G(s)u(s)\|}{\|u(s)\|} \text{ e } \frac{\|G^{-1}(s)y(s)\|}{\|y(s)\|} \quad (3.3)$$

usando normas de matrizes. Devemos então substituir a idéia de um único ganho pela noção de uma faixa de ganhos, esta faixa sendo limitada abaixo e acima.

Se $\|u\|$ denota qualquer norma de vetor, então uma norma de matriz induzida é definida por

$$\|G\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \quad (3.4)$$

Em particular, se usamos a norma de vetor Euclidiana (para vetores complexos)

$$\|u\| = \sqrt{(u^H u)} \quad (3.5)$$

então a norma de matriz induzida é a norma de Hilbert ou spectral:

$$\|G\|_s = \sigma_M \quad (3.6)$$

onde σ_M^2 é o máximo autovalor de $G^H G$ (ou GG^H). Aqui, o sobrescrito H denota o transposto conjugado. Se G tiver m linhas e l colunas e $m \geq l$, as raízes quadradas positivas dos autovalores de $G^H G$ são chamadas de valores singulares de G (MACIEJOWSKI, 1993). A definição de valores singulares é de acordo com a expressão abaixo

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.7)$$

onde $\lambda_i(\cdot)$ é o i -ésimo autovalor de $(\cdot)$.

Se ao invés de G , tivermos $G(s)$, com $s = j\omega$ ($0 \leq \omega < \infty$), os valores singulares de $G(j\omega)$ são funções de ω , e podem também ser chamados de ganhos principais de $G(s)$ (MACIEJOWSKI, 1993).

Por simplicidade de notação supõe-se que os valores singulares estejam ordenados de forma que

$$\sigma_1(G) \geq \sigma_2(G) \geq \dots \geq \sigma_m(G) \geq 0.$$

O máximo valor singular $\sigma_l(G)$ será denotado por $\sigma_M(G)$.

Normas $\|G\|_2$ e $\|G\|_\infty$

Mostramos agora duas definições de normas que são muito utilizadas em controle como forma de medir o ganho de funções de transferências em frequências individuais, são as normas $\|G\|_2$ e $\|G\|_\infty$ (MACIEJOWSKI, 1993).

Seja $G(s)$ uma função de transferência própria sem pólos no eixo imaginário, então define-se

$$\|G\|_2 = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[G(j\omega)G'(-j\omega)] d\omega \right\}} \quad (3.8)$$

e

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_M(G(j\omega)) \quad (3.9)$$

Estas normas podem ser aplicadas em funções de transferência a malha fechada tais como a função de sensibilidade $S(s)$ e seu complemento $T(s)$. São geralmente usadas em conexão com problemas de otimização; por exemplo, a teoria LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), onde minimiza-se $\|Q\|_2$ para uma Q adequadamente especificada; a teoria de controle H_∞ , onde obtém-se a melhor função de sensibilidade possível minimizando $\|S\|_\infty$. O conjunto de todas as funções próprias G para que $\|G\|_\infty < \infty$ é denotado por L_∞ (devido ser o espaço de Lebesgue), enquanto o conjunto de todas as funções de transferências que sejam membros de L_∞ , mas que sejam também exponencialmente estáveis, é denotado por H_∞ (devido ser o espaço de Hardy). Para uma discussão destes espaços, e um tratamento mais rigoroso destas normas, veja (VIDYASAGAR, 1985) ou (FRANCIS, 1987).

3.2.2 - Diagramas de Bode

Por definição, os diagramas de Bode para os sistemas multivariáveis consistem nos gráficos de $\sigma_M[G(j\omega)]$ e $\sigma_m[G(j\omega)]$ em função da frequência angular ω . É usual marcar nas ordenadas os valores em dB e, nas abscissas, as frequências em escala logarítmica, conforme ilustra a Figura 3.2.

Figura 3. 2– Diagramas de Bode de Sistema Multivariável

3.3 – MODELOS COM INCERTEZAS E ROBUSTEZ

Os modelos lineares invariantes no tempo que são geralmente aplicados em sistemas de controle são aproximações feitas para possibilitar o projeto e análise dos sistemas complexos. Na realidade, a maioria dos sistemas são não lineares e um modelo linear invariante no tempo é obtido por escolha de um ponto de operação e a linearização das equações do sistema neste ponto. Como o sistema linearizado em pontos de operação pode variar com os parâmetros da aproximação linear correspondente, há incertezas significativas em relação ao modelo real da planta, e se faz necessário um controlador para estabilizar o sistema para as variações esperadas nos parâmetros da planta. Porém, perturbações menos estruturadas no modelo da planta devem também ser toleradas sem destruir a estabilidade da malha fechada. Estas perturbações não estruturadas aparecem tipicamente devido ao truncamento de um modelo complexo por retenção de apenas alguns dos modos dominantes, que geralmente operam em baixa frequência. Além disso, incertezas não estruturadas são

geralmente operacionais em alta frequência. A tolerância a ambos os tipos de incertezas é, qualificadamente falando, o problema de estabilidade robusta.

É costumeiro fixar a estrutura do controlador baseada na existência de restrições de *hardware* e *software* e otimizar o projeto em relação ao número fixo dos parâmetros ajustáveis do controlador e a alguns parâmetros ajustáveis da planta. Então, mais freqüentemente, o controlador projetado é restrito aos tipos: proporcional, integral, ou PID (proporcional, integral ou derivativo), atraso, avanço ou avanço-atraso. Robustez significa que o sistema em malha fechada permanece estável, apesar de haver uma quantidade significativa de incerteza sobre os diagramas nominais de Bode e Nyquist, devido estes representarem o sistema físico (BHATTACHARYYA *et al.*, 1995).

3.3.1 - Margem de Ganho e de Fase

No cálculo da margem de ganho considera-se a malha aberta em m , Figura 3.3 e insere-se um ganho neste ponto. Então, a função de transferência da planta em malha aberta $G(s)$ é trocada por sua versão perturbada $KG(s)$, e determinam o limite da excursão de K sobre seu valor nominal para os quais a estabilidade é preservada, Figura 3.4. No cálculo da margem de fase troca-se $G(s)$ por $e^{j\theta}G(s)$, Figura 3.5, e determina-se o limite de θ para o qual a estabilidade da malha fechada é preservada.

Figura 3. 3 – Sistema com realimentação unitária.

Figura 3. 4 – Cálculo da margem de ganho.

Figura 3. 5 – Cálculo da margem de fase.

A importância destes conceitos existem de fato, por que eles fornecem medidas de robustez de um dado controlador projetado, desde que indiquem a distância da instabilidade ou margem de estabilidade do sistema a malha fechada, sob as perturbações de ganho e de fase da resposta em frequência da planta. Estas margens podem ser facilmente determinadas a partir dos diagramas de Bode ou Nyquist, e são então utilizáveis no projeto. Contudo, enfatiza-se que esta noção de distância de instabilidade não se estende de uma forma clara para o caso real onde diversos parâmetros independentes são simultaneamente sujeitos a perturbações. Observa-se também que perturbações de ganho e de fase simultâneas constituem um problema de perturbação real-complexo misto. Finalmente a análise do desempenho robusto pode ser reduzida a problemas de estabilidade robusta envolvendo perturbações dependendo da frequência que não podem ser capturadas por apenas margens de ganho e de fase (BHATTACHARYYA *et al.*, 1995).

3.3.2 - Parâmetros de Incertezas

Considere a equação (3.10)

$$G(s) = \frac{\mu_i(s - \alpha_i)}{(s - \beta_i)(s - \gamma_i)} = \frac{a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0} \quad (3.10)$$

A incerteza paramétrica no modelo da planta pode ser expressa em termos de ganho μ_i e valores de pólos e zeros α_i , β_i , γ_i . Alternativamente, ela pode ser expressa em termos dos coeficientes da função de transferência a_0 , a_1 , b_0 , b_1 , b_2 . Cada um destes conjuntos de parâmetros da planta estão sujeitos a variações. Suponha um controlador K do tipo PID. Os parâmetros ajustáveis do controlador são os ganhos K_p , K_i e K_D . Então, no primeiro caso, o vetor de parâmetros de incertezas da planta é

$$\mathbf{p}_1 = [\mu_i \quad \alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i], \quad (3.11)$$

o vetor de parâmetros do controlador é

$$\mathbf{x} = [K_p \quad K_I \quad K_D] \quad (3.12)$$

e o polinômio característico do sistema a malha fechada é

$$\delta(s, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}) = s(s-\beta_i)(s-\gamma_i) + \mu_i(s-\alpha_i)(K_p s + K_I + K_D s^2). \quad (3.13)$$

No segundo caso o vetor de parâmetro de incertezas é

$$\mathbf{p}_2 = [a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad (3.14)$$

e o polinômio característico é

$$\delta(s, \mathbf{p}_2, \mathbf{x}) = s(b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + (a_1 s + a_0)(K_p s + K_I + K_D s^2). \quad (3.15)$$

Na maioria dos sistemas de controle o controlador permanece fixo durante a operação enquanto os parâmetros da planta variam em torno de um valor nominal $\mathbf{p}^0$. O termo estabilidade paramétrica robusta refere-se a habilidade de um sistema de controle manter a estabilidade apesar das variações de parâmetros. Robustez com relação a variações de parâmetros é necessária devido às incertezas inerentes à modelagem, e também devido a variações de parâmetros reais que ocorrem durante a operação do sistema. No projeto, os parâmetros $\mathbf{x}$ do controlador são considerados como variáveis ajustáveis, e é também desejável obter estabilidade robusta com relação a estes parâmetros para permitir o ajuste de um projeto nominal para acomodar outras restrições de projeto. Adicionalmente, observa-se que se obtém insensibilidade com relação aos parâmetros da planta. Isto é conseguido à custa do aumento da sensibilidade em relação aos parâmetros do controlador. Então, em

muitos casos, pode ser razoável juntar os parâmetros da planta e do controlador dentro de um vetor $\mathbf{p}$ de parâmetros globais, e avaliar o desempenho do sistema em relação a este vetor.

O limite superior da variação do parâmetro $\mathbf{p}$, medido em uma norma adequada, para que a estabilidade da malha fechada seja preservada é a margem de estabilidade paramétrica, e é uma medida do desempenho do controlador $\mathbf{x}$. Em outras palavras

$$\rho_x := \sup \{ \alpha_i: \delta(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \text{ estável}, \|\mathbf{p} - \mathbf{p}^0\| < \alpha_i \} \quad (3.16)$$

é a margem de estabilidade paramétrica do sistema com o controlador $\mathbf{x}$. Desde que ρ_x represente a perturbação máxima e seja realmente uma medida confiável de desempenho para comparar a robustez dos dois projetos propostos $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Este cálculo é um auxílio importante na análise e projeto.

Considere uma família de polinômios $\delta(s, \mathbf{p})$ de grau n , onde o limite do parâmetro real $\mathbf{p}$ abrange um conjunto conectado Ω . Se sabe-se que algum membro da família é estável, uma técnica útil de verificar estabilidade robusta da família é averiguar se

$$\delta(j\omega, \mathbf{p}) \neq 0, \text{ para todo } \mathbf{p} \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Isto pode ser também escrito como uma condição de exclusão de zero

$$0 \notin \delta(j\omega, \Omega), \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

A condição de exclusão do zero é explicada como uma forma de obter vários tipos de margens de estabilidade e desempenho robustos.

Pode-se notar que os coeficientes do polinômio característico da malha fechada nos exemplos acima, são funções lineares do parâmetro $\mathbf{x}$ do controlador. Por outro lado, no primeiro caso, os coeficientes do polinômio característico são funções

multi-lineares do parâmetro de incerteza $\mathbf{p}_1$, enquanto que na segunda representação, são funções lineares do parâmetro de incerteza $\mathbf{p}_2$.

O problema de determinação do $\mathbf{x}$ para obter a estabilidade e um nível preestabelecido da margem de estabilidade paramétrica ρ_x é o problema de síntese, e no sentido matemático é insolúvel. Contudo, em um sentido de engenharia, existem muitas técnicas efetivas para o projeto do controlador paramétrico robusto. Em particular, o cálculo exato de ρ_x pode, ele mesmo, ser usado em uma malha iterativa para ajustar $\mathbf{x}$ para garantir robustez do sistema (BHATTACHARYYA *et al.*, 1995).

3.4 – METODOLOGIA LQG/LTR

Um dos métodos de projeto de controladores robustos multivariáveis que vem sendo largamente explorado é a técnica LQG/LTR. Entre as características mais importantes deste método, podem ser citadas as seguintes: (a) garantia de robustez do controlador em face de uma ampla classe de erros de modelagem; (b) o procedimento de projeto é de natureza sistemática; (c) a metodologia se baseia numa abordagem freqüencial, aplicando-se assim a sistemas lineares e invariantes no tempo; (d) o número de parâmetros de projeto é relativamente pequeno (CRUZ, 1996).

Essencialmente o método LQG/LTR possui duas etapas. Primeiramente, um projeto padrão de realimentação de estado é feito tal que a função de transferência de malha calculada por exemplo na entrada da planta G , a chamada malha objetivo, $H_c(s)$, satisfaça as especificações dadas. Em seguida, considera-se a configuração de malha fechada e, dadas $G(s)$ e $H_c(s)$ procura-se um controlador $K(s)$ tal que $K(j\omega)G(j\omega)$ seja próximo ou aproximado de $H_c(j\omega)$ na faixa de freqüência sob consideração. Esta segunda etapa é a chamada LTR.

O regulador LQG tem a mesma estrutura do LQR (*linear quadratic regulator*), mas a sua dedução está baseada na formulação de um problema de controle ótimo estocástico. Neste, o objetivo é determinar uma lei de controle que minimiza o valor esperado de um índice de desempenho quadrático através de uma realimentação da saída, apresentando-se tanto esta, como as equações de estado,

afetadas por ruídos brancos gaussianos, de média nula e não correlacionados entre si (MACIEJOWSKI, 1993).

Aqui será estabelecido os principais resultados da teoria LQG/LTR, e para maiores detalhes sobre o método LQG/LTR veja (DOYLE & STEIN, 1979).

Vamos apresentar inicialmente a estrutura do controlador, em seguida apresentamos o problema LQG e o procedimento de recuperação LTR.

3.4.1 - Estrutura do Controlador

Descrevemos como escolher o controlador $K(s)$ para o problema de controle da Figura 3.1 de modo que o sistema em malha fechada seja estável e satisfaça os requisitos desejados de desempenho e estabilidade.

Considere o sistema linear descrito pela equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.17}$$

suponha (A,B) estabilizável e adote

$$u = -K_r x\tag{3.18}$$

Tem-se em (3.18) a lei de controle denominada realimentação de estados. A matriz K_r é chamada de matriz de ganho da realimentação de estados e o sistema em malha fechada resultante é chamado regulador de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK_r)x \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.19}$$

Da teoria de sistemas lineares sabe-se que se o par (A,B) for controlável, então é possível obter uma matriz K_r tal que os autovalores do regulador possam ser alocados arbitrariamente. No entanto, é necessário estimar todas as variáveis de

estado, já que nem todas são passíveis de medição. Assim, precisamos adotar um observador de estados para obter uma estimativa $\hat{x}$ que se aproxime de alguma forma de x quando $t \rightarrow \infty$.

Observador de Estados de Ordem Completa

A solução para o problema de estimar ou gerar o estado $x(t)$ a partir da entrada $y(t)$ conhecendo-se (A, B, C) pode ser obtida construindo-se um sistema semelhante ao sistema dado, com a estrutura representada na Figura 3.6.

Figura 3. 6 – Diagrama de blocos do sistema com o observador de estados.

Para analisar o comportamento do erro de observação, considere a Figura 3.6 e obtenha

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + Le_y(t) \quad (3.20)$$

$$e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.21)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (3.22)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (3.23)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \quad (3.24)$$

onde e_y é o erro de observação.

Definindo o erro da estimativa do estado por

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.25)$$

e considerando as equações (3.20 – 3.25), resulta

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) \quad (3.26)$$

Pode-se concluir então que o erro de estimação de estado tem sua dinâmica governada pela matriz $(A-LC)$. Se todos os autovalores dessa matriz pertencem ao SPE (semi-plano esquerdo do plano s) aberto, a estimativa $\hat{x}(t)$ tende assintoticamente para o estado $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Controlador Baseado em Observador

A combinação de um observador de estados com a realimentação de estado dá origem ao que é costumeiro chamar controlador baseado em observador. Considerando a utilização de um observador de estado, a lei de controle de realimentação de estado torna-se:

$$u = -K_r \hat{x} \quad (3.27)$$

e a seguinte estrutura de controlador pode ser obtida

Figura 3. 7 – Diagrama de blocos do regulador com observador de estados na malha de controle.

Supondo-se o par (A, C) observável, pode-se garantir que os autovalores de $(A-LC)$ podem ser alocados arbitrariamente no SPE. Sendo assim, em princípio, é possível fazer com que $e_x(t)$ se aproxime assintoticamente de zero com velocidade arbitrária. Assim, é natural considerar um regulador operando sobre o estado estimado como na Figura 3.7.

As equações do controlador/observador possuem a representação de estado

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A-LC-BK_r)\hat{x}+Ly \\ u &= -K_r\hat{x}\end{aligned}\quad (3.28)$$

e função de transferência entre y e $-u$:

$$K(s) = K_r(sI-A+BK_r+LC)^{-1}L \quad (3.29)$$

O sistema com controlador e observador combinado é ilustrado abaixo na Figura 3.8.

Figura 3. 8 – Diagrama de blocos do controlador $K(s)$.

As equações do sistema realimentado possuem a representação de estado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK_r & BK_r \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} r \\ y &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

O comportamento do sistema combinado controlador/observador depende da equação característica:

$$\Delta_s(s) = \det(sI - A + BK_r) \det(sI - A + LC) = 0 \quad (3.31)$$

Entretanto, os pólos do sistema de controle e observador são os pólos do sistema de controle sem observador com os pólos do observador. Os pólos do sistema de controle podem ser determinados independentemente uma vez que não são influenciados uns pelos outros. Esta característica é conhecida como Propriedade de Separação.

3.4.2 - O Problema LQG

As matrizes K_r e L podem ser determinadas como soluções do problema LQG (*linear quadratic Gaussian*) a partir da solução de equações de Riccati envolvendo matrizes Q e R de ponderação do estado e do controle para K_r , e matrizes de covariância W e V dos ruídos no estado e na medida para K_f . O problema LQG compõe-se de dois subproblemas. Primeiro obtém-se uma estimativa ótima do estado x (no sentido de minimizar $E(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})$) e depois utiliza-se esta estimativa para resolver o problema de controle linear quadrático como se ela fosse uma medição exata de x . Para maiores detalhes veja: (ANDERSON & MOORE, 1972), (DAVIS & VINTER, 1985), (IEEE, 1971), (ASTRÖM & WITTERNMARK, 1984), (FRANKLIN & POWELL, 1980) e (BANKS, 1986).

O Filtro de Kalman

O problema de estimação de estado é tratado via o filtro de Kalman. Considere a representação da planta na forma espaço de estado,

$$\dot{x} = Ax + Bu + Lw \quad (3.32)$$

$$y = Cx + v \quad (3.33)$$

onde w e v são “ruídos brancos”, isto é, processos estocásticos Gaussianos de média zero que são não correlacionados entre si, tendo covariâncias

$$E\{ww^T\} = W \geq 0, E\{vv^T\} = V > 0 \quad (3.34)$$

e

$$E\{wv^T\} = 0. \quad (3.35)$$

Em (3.32) u representa o vetor do sinal de controle; em (3.33) y é o vetor das saídas medidas (mas corrompido por v).

A Figura 3.9 mostra o diagrama de blocos do filtro de Kalman, que apresenta a estrutura de um observador de estado; ele difere do observador pelo cálculo da matriz de ganho K_f . Note que as entradas para o filtro de Kalman são os vetores da entrada e saída da planta, u e y , e que sua saída é o vetor de estimativa de estado $\hat{x}$.

Figura 3. 9 – O filtro de Kalman.

O filtro de Kalman é dado por:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (3.36)$$

onde $K_f = P_f C^T V^{-1}$ é a matriz de ganho do filtro de Kalman e P_f é a covariância do erro de estimação e satisfaz a ARE (*algebraic Riccati equation*):

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + L W L^T = 0 \quad (3.37)$$

e

$$P_f = P_f^T \geq 0 \quad (3.38)$$

Observação: O filtro de Kalman e o regulador linear quadrático (LQR, em inglês) são duais. A formulação de um problema pode ser obtida a partir da formulação do outro problema.

O Regulador Quadrático

O segundo sub-problema do problema LQG é então conceber uma lei de controle realimentado que minimize a função custo

$$J = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{\tau} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt \right\} \quad (3.39)$$

$$Q_c = Q_c^T \geq 0, \quad (3.40)$$

$$R_c = R_c^T > 0 \quad (3.41)$$

onde Q_c e R_c são matrizes de ponderação.

A solução deste problema é encontrar o sinal de controle u como uma função linear do estado

$$u = -K_c \hat{x} \quad (3.42)$$

onde a matriz de realimentação de estado K_c é dada por

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c \quad (3.43)$$

onde P_c satisfaz a equação algébrica de Riccati

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0 \quad (3.44)$$

e $P_c = P_c^T \geq 0$. (Em geral há muitas soluções para (3.44), mas apenas uma delas é semi-definida positiva). A matriz R_c pode ser da forma

$$R_c = \rho I \quad (\rho > 0) \quad (3.45)$$

Assim, estamos simplesmente projetando um controlador com uma estrutura interna particular. Esta estrutura é a conexão em série de um filtro de Kalman com uma matriz de realimentação de estado; o diagrama de blocos é mostrado na Figura 3.10 (MACIEJOWSKI, 1993).

Figura 3. 10 – Estrutura do controlador LQG.

Observação: As matrizes K_c e K_f existem, e o sistema a malha fechada é internamente estável, se as realizações espaço de estado $(A, B, Q^{1/2})$ e $(A, L W^{1/2}, C)$ forem estabilizáveis e detectáveis – isto é, os modos não controláveis e não observáveis são assintoticamente estáveis.

Como tanto o regulador ótimo quadrático como o filtro de Kalman possuem boas propriedades de robustez e desempenho, pode-se esperar que os compensadores LQG geralmente produzam estas mesmas características. Entretanto, este não é o caso: mostra-se que projetos LQG podem exibir sofríveis margens de estabilidade.

A forma usual de realizar o projeto de controlador baseado em observador é tornar a dinâmica do observador muito mais rápida que a dinâmica da realimentação de estado desejada. Pode-se, além disso, esperar que, se os autovalores de $A - K_f C$ forem alocados suficientemente distantes do SPE, então poder-se-ia obter boas propriedades de realimentação de estado na entrada da planta. Isto também nem sempre é verdadeiro, como já discutido na literatura. Em alguns casos, margens de estabilidade são realmente reduzidas se a dinâmica do observador (filtro) for mais rápida.

Na verdade, existem procedimentos de projetar o filtro de Kalman de forma que as propriedades de realimentação completa de estado sejam recuperadas na entrada da planta. O que é necessário é que alguns dos autovalores do filtro sejam postos no lugar dos zeros da planta, o resto dos autovalores podem tornar-se arbitrariamente rápidos. A propriedade de recuperação foi descoberta por (KWAKERNAAK, 1969). O procedimento de recuperação de (DOYLE & STEIN, 1979, 1981) para obter o filtro, reproduzido no livro do (MACIEJOWSKI, 1993) é apresentado na seção 3.4.3. Como o procedimento se baseia no cancelamento de alguns dos modos da planta (em particular os zeros) pelos modos do filtro, o projeto é aplicável só a plantas de fase mínima. Se existirem zeros da planta no SPD, o procedimento ainda pode ser utilizado, particularmente se estes zeros estiverem aquém da largura da banda de operação do sistema de controle então obtido.

O Problema LQG e Robustez

Em uma série de artigos publicados no final da década de 70, foi mostrado que o sistema de controle via projeto LQG pode até torna-se instável quando mais realismo é adicionado ao modelo nominal do sistema. Tornou-se evidente que o excesso de ênfase em otimização sem a devida atenção à incerteza de modelagem era a principal fraqueza do projeto LQG. Em decorrência disto, nos anos 80 vários trabalhos apareceram para resolver os problemas associados a erro de modelagem.

O propósito do método é minimizar a função custo (3.37), isto é, se o problema de controle a ser resolvido pode ser realmente representado pelas equações (3.30)-(3.39), ou seja, se apenas os processos estocásticos bem definidos são adicionados na planta e na medição; e se o modelo linear disponível for fidedigno. Há incertezas no modelo, não linearidades, vários tipos de distúrbios e muitas possíveis restrições na solução real, nenhuma das quais podem ser facilmente dadas numa representação matemática. Neste caso pode ser ainda interessante usar a teoria LQG como um método para síntese de controladores, mas com as matrizes W , V , Q_c e R_c , as quais aparecem na formulação do problema, consideradas como “parâmetros de sintonização” que são ajustados até um projeto satisfatório ser obtido, ao invés destas como representações dos aspectos do problema real.

Análise de Robustez na Entrada da Planta

Considere os diagramas de blocos das Figuras 3.11 e 3.12. As propriedades de robustez e desempenho na entrada da planta são determinadas pela malha de transferência, a razão de retorno no ponto 1, enquanto a razão de retorno, que é a que se desejaria ter como a dinâmica do sistema compensado, é a razão de retorno no ponto 2. Pode-se considerar a saída da planta em vez da entrada para análise de robustez na saída.

Figura 3. 11 – Diagrama de blocos do LQG.

Figura 3. 12 – Diagrama de blocos do LQR.

Pode ser visto que a razão de retorno no ponto 2 é dada por:

$$-H_e = -K_e(sI - A)^{-1}B \quad (3.46)$$

e no ponto 1 por:

$$K(s)G(s) = -K_e(sI - A + BK_e + K_fC)^{-1}K_fC(sI - A)^{-1}B \quad (3.47)$$

Note que a dinâmica do erro do filtro não é excitada pela entrada de controle u – de fato a dinâmica do filtro não é controlável por u . Se somente o sinal atuando no sistema for u – a malha sendo aberta no ponto 1 – e se as matrizes A , B , e C no filtro correspondem exatamente àsquelas da planta, então, neste caso, o sinal na entrada da matriz ganho K_f é zero e as duas razões de retorno iguais. Em geral, as razões de retorno nos pontos 1 e 2 são completamente diferentes. A recuperação da malha de transferência ou procedimento LTR descreve como a razão de retorno no ponto 1 pode se aproximar daquela no ponto 2.

3.4.3 - O Procedimento de Recuperação LQG/LTR

A técnica conhecida como LQG/LTR utiliza o mesmo esquema de projeto LQG mas com algumas alterações para superar as deficiências da abordagem original LQG.

Seja a razão de retorno no ponto 2:

$$-H_c = -K_c(sI - A)^{-1}B \quad (3.48)$$

e a função de transferência do compensador LQG, $K(s)$. A razão de retorno no ponto 1 é então

$$K(s)G(s) = -K_c(sI - A + BK_c + K_fC)^{-1}K_fC(sI - A)^{-1}B \quad (3.49)$$

Define-se

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.50)$$

e

$$\Psi(s) = (sI - A + BK_c)^{-1} \quad (3.51)$$

então a expressão de $K(s)G(s)$ torna-se, através de manipulação de matrizes:

$$K(s)G(s) = -K_c\Psi K_f[I + C\Psi K_f]^{-1}C\phi B \quad (3.52)$$

Agora suponha que K_f foi obtida através da escolha da matriz de covariância W como

$$W = W_0 + q\Sigma \quad (3.53)$$

onde $\Sigma = \Sigma^T \geq 0$ e q é um parâmetro real positivo. Aqui W_0 poderia ser, por exemplo, uma estimativa da covariância do processo de ruído real $\{w\}$. Para obter LTR precisa-se aumentar q para valores arbitrariamente grandes. Substituindo W na equação de Riccati do filtro, obtém-se

$$\frac{P_f A^T}{q} + \frac{A P_f}{q} - \frac{P_f C^T V^{-1} C P_f}{q} + \frac{L W_0 L^T}{q} + L \Sigma L^T = 0 \quad (3.54)$$

Pode ser mostrado em (KAWAKERNAK & SIVAN, 1972) que, se

$$C(sI - A)^{-1} L W^{1/2}$$

não possuir zeros de transmissão no SPD, e se possuir tantas saídas como o posto(Σ), então

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{P_f}{q} = 0 \quad (3.55)$$

Este resultado pode ser comentado da seguinte forma. A medida que se aumenta q , aumenta-se a proporção da variância da saída devido às variações do estado, e diminui a proporção devido aos erros de medição. Nestas circunstâncias, o filtro é capaz de seguir a trajetória do estado relativamente bem: P_f é a covariância do erro da estimação do estado (a estimação do filtro), e $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{P_f}{q} = 0$ estabelece que a covariância do erro aumenta mais lentamente do que a covariância do processo de ruído W (se as suposições estabelecidas se mantiverem).

Assim, tem-se

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (q L \Sigma L^T)^{1/2} = P_f C^T V^{-1/2} \quad (3.56)$$

Mas

$$K_f = P_f C^T V^{-1} \quad (3.57)$$

então

$$K_f \xrightarrow{q \rightarrow \infty} q^{1/2} L \Sigma^{1/2} V^{-1/2} \quad (3.58)$$

Em particular, escolhe-se

$$L = B; \Sigma = I$$

e se $C(sI-A)^{-1}B$ não tiver zeros no SPD (semi-plano direito do plano s), então

$$K_f \rightarrow q^{1/2} B V^{-1/2} \text{ quando } q \rightarrow \infty$$

Através de manipulações e substituições pode-se escrever

$$K(s)G(s) \rightarrow -K_c \Psi B V^{-1/2} [C \Psi B V^{-1/2}]^{-1} C \phi B \text{ quando } q \rightarrow \infty.$$

Supondo $C \Psi B$ uma matriz quadrada – isto é, a planta possui igual número de entradas e saídas, e observando que

$$\Psi = \phi [I + B K_c \phi]^{-1} \quad (3.59)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) &= -K_c \Psi B (C \Psi B)^{-1} C \phi B \\ &= -K_c \phi B \end{aligned} \quad (3.60)$$

que é a razão de retorno no ponto 2 na figura, como desejado.

Observação: Os autovalores do filtro de Kalman resultante são os zeros de

$$\begin{aligned}\det(sI-A+K_fC) &= \det(sI-A+q^{1/2}BV^{1/2}C) \\ &= \det[(sI-A)(I_n+q^{1/2}(sI-A)^{-1}BV^{1/2}C)] \\ &= \det(sI-A) \det(I_m+q^{1/2}C(sI-A)^{-1}BV^{1/2})\end{aligned}\quad (3.61)$$

onde n é a dimensão do estado da planta e m é o número de entradas ou saídas. Se $|s|$ for limitado, então

$$\begin{aligned}\det(sI-A+K_fC) &\rightarrow q^{m/2} \det(sI-A) \det[G(s)V^{1/2}] \\ &= q^{m/2} p_p(s) \det[G(s)] \det(V^{1/2})\end{aligned}$$

onde $p_p(s)$ é o polinômio dos pólos da planta. Mas $p_p(s) \det[G(s)]$ é justamente o polinômio dos zeros da planta, então pode ser visto que alguns dos autovalores do filtro que mantêm-se limitados são de fato atraídos para os zeros da planta com o aumento de q . Os autovalores restantes tornam-se ilimitados a medida que q cresce para o infinito.

O resultado acima pode ser obtido via o teorema fundamental LTR (DOYLE & STEIN, 1981), para abertura da planta na saída como em (CRUZ, 1996), repetido a seguir.

Teorema fundamental LTR

Se :

1. (A,B) for controlável e (A,C) observável;
2. $G(s)$ for quadrada;
3. Os zeros de transmissão de $G(s)$ localizam-se no semi-plano esquerdo aberto;
4. A matriz de ganhos K_e é calculada como:

$$K_c = \frac{1}{\rho} B^T P_c \quad (3.62)$$

onde $\rho > 0$ e

$$-P_c A - A^T P_c - C^T C + \frac{1}{\rho} P_c B B^T P_c = 0 \quad (3.63)$$

então

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = [C(sI - A)^{-1} B]^{-1} C(sI - A)^{-1} K_f \quad (3.64)$$

com $CC^T = Q$, $R = \rho I$.

Os diagramas do sistema nominal a malha fechada (Figura 3.13) e do sistema limite para $\rho \rightarrow 0$ (Figura 3.14) são repetidos abaixo.

Figura 3. 13 – Diagrama do sistema nominal a malha fechada.

Figura 3. 14 – Diagrama para o sistema limite.

3.4.4 - A Malha Objetivo na Saída da Planta

A malha objetivo e a malha aberta nominal são repetidas abaixo:

$$H_c = C(sI - A)^{-1} K_f \quad (3.65)$$

$$G = C(sI - A)^{-1} L \quad (3.66)$$

Conformação da Malha Objetivo

Com a finalidade de explorar a técnica LTR deve-se ter um procedimento de alterar W e V do filtro para obter as características desejadas em H_c .

As matrizes H_c e G podem ser relacionadas via a identidade de Kalman:

$$[I + H_c(s)]V[I + H_c(-s)]^T = V + G(s)WG^T(-s) \quad (3.67)$$

Para $s=j\omega$, a identidade de Kalman torna-se:

$$[I + H_c(j\omega)]V[I + H_c(j\omega)]^H = V + G(j\omega)WG^H(j\omega) \quad (3.68)$$

Esta identidade pode ser usada para explorar as possibilidades de moldar os valores singulares de funções de transferência.

Tomando as matrizes V e W como:

$$V = \mu I, \mu > 0$$

$$W = I$$

Pode-se escrever:

$$[I + H_c(j\omega)][I + H_c(j\omega)]^H = I + \frac{1}{\mu}G(j\omega)G^H(j\omega) \quad (3.69)$$

e em termos de valores singulares:

$$\sigma_i[I + H_c(j\omega)] = \sqrt{I + \frac{1}{\mu} \lambda_i[G(j\omega)G^H(j\omega)]} \quad (3.70)$$

e portanto:

$$\sigma_i[I + H_c(j\omega)] = \sqrt{I + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2[C(j\omega I - A)^{-1}L]}, \quad \forall \omega \text{ real} \quad (3.71)$$

Resumo do Procedimento de Projeto LQG/LTR na Saída

1. Escolher μ e L adequadamente;

$$\sigma_i[I + H_c(j\omega)] \cong I + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2[C(j\omega I - A)^{-1}L], \quad \mu \ll 1 \text{ e } CL \text{ não singular}$$

2. Com os valores de μ e L obter a matriz do filtro P_f via a ARE (3.37);
3. Calcular a matriz de ganho K_f : $K_f = P_f C^T V^{-1}$;
4. Resolver a ARE (3.44) para algum ρ ($Q=I$ e $R=\rho I$) e calcular o seu ganho K_c equação (3.43);
5. Verificar se as condições de estabilidade e desempenho estabelecidas são satisfeitas. Se não, reduzir ρ e repetir o cálculo do regulador.

Observação: Variações em μ deslocam verticalmente o diagrama de Bode da malha objetivo e variações na matriz L permitem alterar a sua forma.

Observação: Pode-se incluir integradores na malha objetivo simplesmente aumentando a planta com integradores na sua entrada.

3.4.5 - Margens de Ganho e Fase da Malha Objetivo

Pode-se mostrar via identidade de Kalman que

$$\sigma_m[I + H_c(j\omega)] \geq 1, \quad \forall \omega \in R$$

Caso SISO

$$|I + H_c(j\omega)| \geq 1, \quad \forall \omega \in R$$

Isto significa que o diagrama de Nyquist de $H_c(j\omega)$ não pode penetrar no círculo unitário de centro $-1+j0$. E obtém-se as seguintes margens:

$$MG \subset (1/2, +\infty)$$

$$MF \subset (-60^\circ, 60^\circ)$$

O que significa que o ganho pode ser reduzido à metade ou aumentado indefinidamente e a fase defasada de $\pm 60^\circ$ em cada canal de entrada.

Caso MIMO

$$\sigma_m[I + H_c(j\omega)] \geq 1, \quad \forall \omega \in R$$

E para o pior caso pode-se obter as margens acima.

3.4.6 - Planta de Fase Não Mínima

O procedimento LTR pode ser aplicado com sucesso a plantas instáveis desde que os pólos instáveis sejam deslocados para a esquerda por realimentação e nenhum cancelamento polo-zero instável ocorra. Entretanto, recuperação LQG/LTR não pode ser obtida para plantas de fase não mínima. As razões desta impossibilidade são comentadas a seguir.

1. Recuperação de uma malha objetivo arbitrária em geral requer cancelamento polo-zero, o que é introduzido pelo controlador. Mas, o controlador LQG não faz isto (LQG garante estabilidade interna da malha fechada).
2. A malha do controlador $-K_c(sI-A)^{-1}B$ e a malha do filtro $C(sI-A)^{-1}K_f$ têm todos os zeros a esquerda uma vez que estas malhas possuem margem de ganho infinitas. Entretanto, uma malha objetivo a qual não envolve cancelamento polo-zero instável não pode aproximar-se da malha do regulador ou da malha do filtro.

O segundo ponto sugere que o projeto LQG/LTR pode ser viável naquela faixa de frequência onde a resposta da planta é muito próxima daquela da planta de fase mínima, isto é, desconsiderando-se os seus zeros a direita. Em outras palavras, se os zeros a direita estiverem fora da faixa de frequência sob consideração pode-se recuperar as características ideais (ATHANS, 1984).

Portanto, antes de proceder com o método LQG/LTR, é necessário verificar se a planta é de fase mínima ou não mínima. Caso o sistema seja de fase não mínima, deve-se analisar os seus zeros de transmissão, se os mesmos estão em frequências mais altas que as de interesse, para que o método possa recuperar as características ideais do sistema.

Normalmente, observa-se que, à medida que ρ decresce, os valores singulares de $G(j\omega)K(j\omega)$ vão se aproximando dos valores singulares de $H_c(j\omega)$ da região de baixas frequências para a de altas. Se existem um ou mais zeros de fase não mínima na região de baixas frequências, então é de se esperar que os valores singulares de $G(j\omega)K(j\omega)$ não se aproximem dos valores singulares de $H_c(j\omega)$ nessas frequências e, portanto, que o desempenho do sistema de controle resulte comprometido. Algumas considerações adicionais sobre zeros de fase não mínima podem ser encontradas em (STEIN & ATHANS, 1987). Pode-se mostrar (FREUDENBERG, 1985) que a existência de zeros de fase não mínima acarreta limitações no desempenho do sistema de controle, independentemente da técnica de projeto utilizada (CRUZ, 1996).

3.4.7 - Método LQG/LTR Aplicado ao Modelo com Atraso Simples

O método LQG/LTR pode ser aplicável em sistemas com apenas um atraso na entrada como método de controlador robusto. O sistema considerado é da forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (3.72)$$

com condição inicial

$$u(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \quad (3.73)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$; A , B_0 e B_1 são matrizes constantes com dimensões apropriadas, sendo que $B_0 \neq 0$.

Se o sistema (3.73) for estável em malha aberta, o regulador LQG garante as seguintes margens de estabilidade na presença de perturbações não interativas na entrada da planta quando a matriz de peso R da entrada for diagonal

$$\text{Margem de ganho} = \left(1 - \frac{1}{2 + \alpha}, 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (3.74)$$

$$\text{Margem de fase} = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2(1 + \alpha)^2} \right] \quad (3.75)$$

onde

$$\alpha = m \sigma_M(R^{-1}) \frac{\sigma_M(R^{1/2})}{\sigma_m(R^{1/2})} \int_{-h}^0 \{ \sigma_M[M_1(\theta)] + \sigma_M[M_2(\theta)] \} d\theta \quad (3.76)$$

$$M_1(\theta) = \begin{bmatrix} B_0^T K B_0 & B_0^T \phi^T(h + \theta) K B_1 \\ B_1^T K \phi(h + \theta) B_0 & B_1^T K B_1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$M_2(\theta) = \begin{bmatrix} B_1^T K B_1 & B_1^T \phi^T(-\theta) K B_1 \\ B_1^T K \phi(-\theta) B_0 & B_1^T K B_1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$K = \int_0^{\infty} \phi^T(t) Q \phi(t) dt \quad (3.79)$$

$$\phi = (sI - A)^{-1} \quad (3.80)$$

se a dinâmica do filtro de Kalman satisfizer a seguinte igualdade

$$H[I + C\phi(s)H]^I = B_1^T [C\phi(s)B_1]^I \quad (3.81)$$

para todos os valores da variável complexa s , onde

$$H = \Sigma_s C^T \Theta^I \quad (3.82)$$

e Σ_s é a solução da ARE

$$A\Sigma_s + \Sigma_s A^T - \Sigma_s C^T \Theta^I C \Sigma_s + \Xi = 0 \quad (3.83)$$

com Θ é a densidade de ruído espectral de $v(t)$ e Ξ , a intensidade de ruído de $w(t)$.

Além disso, se o sistema for de fase mínima e inversível pela esquerda

$$\frac{1}{q} H = \frac{1}{q} \Sigma C^T \Theta^{-1} \rightarrow B_1^T W \Theta^{-1/2} \quad \text{quando } q \rightarrow \infty \quad (3.84)$$

onde W é uma matriz unimodular, isto é, $WW^T = I$. Se a propriedade (3.81) for verdadeira, a condição (3.84) é satisfeita assintoticamente.

Pode-se notar que α em (3.76) é uma função de A , B_0 , B_1 , Q , R e do atraso h . Portanto as margens de estabilidade garantidas diferem de sistema para sistema. Podemos dizer, contudo, que estas margens aumentam com o aumento de $\sigma_m(R)$. Como os parâmetros de projeto no regulador LQG são as matrizes Q e R , podemos encontrar margens de estabilidade garantidas para sistemas a malha fechada maiores

selecionando uma matriz de peso R maior, ou seja, seu valor singular mínimo maior (LEE *et al.*, 1988).

3.5 - CONTROLE H_∞

Nesta seção abordamos o problema do regulador generalizado H_∞ . No caso do regulador generalizado LQG a síntese é obtida via decomposição, ou separação, em um problema de controle de realimentação de estado ótimo e um problema de estimação de estado. No caso do H_∞ , o controlador de realimentação de estado ótimo é dado em termos da solução de uma ARE. O estimador de estado ótimo é o filtro de Kalman, e o ganho do filtro é dado em termos da solução de uma segunda ARE.

Embora haja muitas similaridades entre a solução do problema LQG e do problema do regulador generalizado H_∞ , existem também bastantes diferenças em diversos aspectos. Dois fatos são a fonte destas diferenças:

- Os controladores H_∞ dependem da forma com que o sinal externo entra no sistema dinâmico, isto é, em B_I . No controle LQG, B_I não afeta o controlador ótimo, apenas o custo ótimo.
- Um filtro H_∞ que estime $-F\hat{x}$ é $-F\hat{x}$, onde $\hat{x}$ depende de F . O caso do filtro de Kalman, a estimativa ótima de $-F\hat{x}$ é $-F\hat{x}$, onde $\hat{x}$, a estimativa de estado ótimo, não depende de F .

As AREs associadas com o controle H_∞ e problemas de filtragem nem sempre possuem solução, diferentes das do controle LQG.

Pode-se mostrar que todas as soluções do problema do regulador generalizado H_∞ tem a forma de um filtro H_∞ que estime a lei de controle H_∞ de informação completa. Isto produz condições necessárias e suficientes para a existência dos controladores em termos das duas AREs. A segunda ARE depende da solução da primeira. Manipulações envolvendo as AREs podem mostrar que o problema do regulador generalizado tem solução se e somente se:

- 1 – A ARE associada com o problema de controle tem solução;
- 2 – A ARE associada com a estimação H_∞ de $C_I x$ tem uma solução; e
- 3 – Uma condição de acoplamento seja satisfeita.

Se existem soluções, existe um conjunto de controladores que solucionam o problema, e o controlador central é dado em termos dos dados do problema e das soluções das duas AREs (GREEN & LIMEBEER, 1995).

3.5.1 - Formulação do Problema

Considere a planta generalizada P representada pelo sistema espaço de estado

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.85)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (3.86)$$

em que $w \in \mathbb{R}^l$ é a entrada externa, $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $y \in \mathbb{R}^q$ é a saída, e $z \in \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser regulado, e $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado. Assume-se que

$$D_{12}^T D_{12} = I_m \text{ e } D_{21} D_{21}^T = I_q \quad (3.87)$$

Considere o sistema particionado como abaixo

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Com $P_{11}=W$, $P_{12}=-WG$, $P_{21}=I$ e $P_{22}=-G$. Onde W é uma matriz de ponderação, e G é a matriz de transferência nominal do sistema. Podemos eliminar u e y , usando $u=Ky$ para obter

$$z=[P_{11}+P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21}]w \quad (3.89)$$

A expressão acima ocorre com frequência, então é conveniente utilizar uma notação convencional

$$z=F_I(P,K)w \quad (3.90)$$

A Figura 3.15 abaixo representa a configuração do regulador generalizado

Figura 3. 15 – Configuração do Problema do Regulador H_∞

O problema de otimização H_∞ pode ser formulado como: obter o controlador K de modo que o sistema a malha fechada $F_I(P,K)$, seja minimizado de acordo com a expressão abaixo

$$\|F_I(P,K)\|_\infty < \gamma \quad (3.91)$$

onde a minimização é feita sobre todos os controladores realizáveis $K(s)$ que estabilizem internamente o sistema a malha fechada, sujeito a restrições impostas pelo próprio sistema.

3.5.2 - Solução do Problema de Controle H_∞

Existem algumas suposição para resolver o problema de controle H_∞ :

1. (A, B_2, C_2) seja estabilizável e detectável.
2. $\text{posto}(D_{12})=m$ e $\text{posto}(D_{21})=q$, e D_{12} e D_{21} satisfazendo a equação (3.87).
3. $\text{posto} \begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = m + n$ para todo ω real.
4. $\text{posto} \begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = q + n$ para todo ω real.

Agora seguem os passos do algoritmo de resolução do problema H_∞ generalizado.

Algoritmo de Glover-Doyle para Problemas Gerais de H_∞ :

O algoritmo produz uma família de controladores estabilizantes K , tais que

$$\|F_I(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (3.92)$$

para algum valor escolhido de γ , se quaisquer tais controladores existirem. Supõe-se

$$P_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.93)$$

e que as dimensões de P_{11} , P_{12} , P_{21} e P_{22} sejam $p_1 \times m_1$, $p_1 \times m_2$, $p_2 \times m_1$ e $p_2 \times m_2$, respectivamente. Além disso, assume-se que (A, B_2, C_2, D_{22}) seja estabilizável e detectável, para que controladores estabilizantes existam, e que $\text{posto}(D_{12})=m_2$ e $\text{posto}(D_{21})=p_2$.

Assume-se que D_{11} seja particionado como

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix} \quad (3.954)$$

onde D_{1122} possui m_2 linhas e p_2 colunas.

Por enquanto assume-se que a planta é estritamente própria, isto é que

$$D_{22} = 0 \quad (3.95)$$

Finalmente assume-se que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2 \quad (3.96)$$

e

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2 \quad (3.97)$$

para todo ω real, onde A tem dimensões $n \times n$.

É útil introduzir a notação

$$D_{1*} = [D_{11} \quad D_{12}] \quad \text{e} \quad D_{*1} = [D_{11}^T \quad D_{21}^T]^T \quad (3.98)$$

e pode-se definir

$$R_h = D_{1*}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 \text{Im}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

e

$$\tilde{R}_h = D_{*1} D_{*1}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Define-se X_∞ e Y_∞ como as soluções estabilizantes das seguintes equações de Riccati:

$$X_\infty (A - BR^{-1} D_{1*}^T C_1) + (A - BR^{-1} D_{1*}^T C_1)^T X_\infty - X_\infty BR^{-1} B^T X_\infty + C_1^T (I - D_{1*} R^{-1} D_{1*}^T) C_1 = 0 \quad (3.101)$$

$$Y_\infty (A - B_1 D_{*1}^T \tilde{R}^{-1} C)^T + (A - B_1 D_{*1}^T \tilde{R}^{-1} C) Y_\infty - Y_\infty C^T \tilde{R}^{-1} C Y_\infty + B_1 (I - D_{*1}^T \tilde{R}^{-1} D_{*1}) B_1^T = 0 \quad (3.102)$$

Por soluções "estabilizantes" queremos dizer que $X_\infty = X_\infty^T$ e $Y_\infty = Y_\infty^T$, e as matrizes $A + BF_h$ e $A + H_h C$ possuem todos os seus autovalores no semi-plano esquerdo aberto, onde F_h e H_h são definidas por (3.103) e (3.104) abaixo.

$$F_h = -R_h^{-1} (D_{1*}^T C_1 + B^T X_\infty) \quad (3.103)$$

$$H_h = -(B_1 D_{*1}^T + Y_\infty C^T) \tilde{R}_h^{-1} \quad (3.104)$$

particionando-as

$$F_h = [F_{11}^T \quad F_{12}^T \quad F_2^T]^T \quad (3.105)$$

$$H_h = [H_{11} \quad H_{12} \quad H_2] \quad (3.106)$$

com F_{11} , F_{12} e F_2 tendo $m_1 - p_2$, p_2 e m_2 linhas, respectivamente, e H_{11} , H_{12} e H_2 tendo $p_1 - m_2$, m_2 e p_2 colunas, respectivamente.

Agora podemos estabelecer o resultado principal (em que $\rho_r(\cdot)$ denota o raio espectral, definido pela equação (3.107) (ZHOU, *et al*, 1996)):

$$\rho_r(A) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (3.107)$$

com λ autovalor de A .

Teorema 3.1 – Glover e Doyle, 1988

(1) Um controlador estabilizante existe, tal que $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$, se e somente se

$$(a) \gamma > \max\{\bar{\sigma}[D_{1111}, D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1111}^T, D_{1121}^T]\} \quad (3.108)$$

(b) existem soluções $X_\infty \geq 0$ e $Y_\infty \geq 0$ de (3.101) e (3.102), respectivamente, tais

que

$$\rho_r(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (3.109)$$

(2) Se (a) e (b) acima forem satisfeitas, então todos os controladores estabilizantes (racionais) K , para os quais $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$, são dados por

$$K = F_l(K_a, \Phi), \quad (3.110)$$

para qualquer racional $\Phi \in H_\infty$ tal que $\|\Phi\|_\infty < \gamma$ onde K_a tem a realização

$$K_a : \left(\hat{A}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} \right), \begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

e

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121} D_{1111}^T (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} - D_{1122} \quad (3.112)$$

$\hat{D}_{12}$ e $\hat{D}_{21}$ são quaisquer matrizes (de tamanho $m_2 \times m_2$ e $p_2 \times p_2$, respectivamente) tais que

$$\hat{D}_{12} \hat{D}_{12}^T = I - D_{1121} (\gamma^2 I - D_{1111}^T D_{1111})^{-1} D_{1121}^T \quad (3.113)$$

$$\hat{D}_{21}^T \hat{D}_{21} = I - D_{1112}^T (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} \quad (3.114)$$

estas podem ser obtidas por fatorização *cholensky*, por exemplo - veja (GOLUB & VAN LOAN, 1983); as matrizes restantes em (3.111) são dadas por

$$\hat{B} = (B_2 + H_{12})\hat{D}_{12} \quad (3.115)$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21}(C_2 + F_{12})Z \quad (3.116)$$

$$\hat{B}_1 = -H_2 + \hat{B}_2\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11} \quad (3.117)$$

$$\hat{C}_1 = F_2Z + \hat{D}_{11}\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2 \quad (3.118)$$

$$\hat{A} = A + HC + \hat{B}_2\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_1 \quad (3.119)$$

onde

$$Z = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (3.120)$$

Um membro da família de soluções é obtido tomando $\Phi=0$, e isto é chamado de controlador central ou de entropia máxima. Ele tem a realização.

$$K : (\hat{A}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_{11})$$

e então tem a mesma dimensão de estado como da realização usada por P .

O algoritmo acima assume que $D_{22}=0$, isto é, que a planta é estritamente própria. Caso contrário, pode-se fazer o seguinte: aplicar o algoritmo para resolver

$$\hat{P} = P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

e obter um controlador $\hat{K}$. Assim o controlador fica com a forma

$$K = \hat{K}(I + D_{22}\hat{K})^{-1} \quad (3.122)$$

Para obter um controlador que minimize $\|F_l(P,K)\|_\infty$ é necessário usar o algoritmo iterativamente, reduzindo γ até o valor limite γ_0 ser alcançado, tal que $\rho_i(X_\infty Y_\infty) = \gamma_0^2$ ou até que uma das duas equações de Riccati (3.101) e (3.102) falhem em obter uma solução semi-definida positiva (MACIEJOWSKI, 1993).

3.6 - CONCLUSÕES

Neste capítulo vimos as ferramentas utilizadas no domínio da frequência, os modelos de incertezas, e os métodos de projeto multivariáveis LQG/LTR e H_∞ . Mostramos também uma condição para realizar o procedimento LQG/LTR para sistemas com um atraso simples na entrada, ou seja, se o sistema a ser considerado para o projeto do controlador possuir atraso na entrada, mas for estável a malha aberta, de fase mínima e inversível pela esquerda, o método convencional LQG/LTR pode ser aplicado ao mesmo, com as margens de estabilidade expressas por (3.77) e (3.78).

Para o caso de múltiplos atrasos no sistema, podemos fazer uma aproximação da parte com atraso por uma função racional, ou considerar os atrasos como incertezas para utilizar o procedimento LQG/LTR.

Para o controle H_∞ para sistemas com atraso, pode-se utilizar os procedimentos de projeto encontrados em (GE *et al.*, 1996), (LEE *et al.*, 1994) e (LI & SOUZA, 1996), como também proceder como no caso LQG/LTR.

CAPÍTULO 4 – ESTUDO DE CASOS

4.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo descrevemos os exemplos de aplicação dos métodos de controladores multivariáveis para sistemas com múltiplos atrasos. O primeiro exemplo de planta é de um forno elétrico industrial, e o objetivo de controle é regular o perfil de temperatura da saída do sistema (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996). O segundo exemplo é uma planta de coluna de destilação binária destinada a separar uma mistura de água e metanol em dois produtos relativamente puros (WOOD & BERRY, 1973). O objetivo é controlar a composição dos produtos finais.

O exemplo do forno elétrico já foi estudado com métodos de controle monovariável (ARAÚJO, 1995). A planta da coluna de destilação também foi estudada com métodos SISO em ARAÚJO (1995), tendo sido também explorada em ZHOU *et al* (1995) com a técnica LQG/LTR e a função padé, e em diversos outros trabalhos. O nosso objetivo neste trabalho é utilizar técnicas de controle multivariável.

4.2 – FORNO ELÉTRICO INDUSTRIAL

A maioria dos fornos industriais incluem diversas zonas de aquecimento com sensores e atuadores individuais para controlar o perfil da temperatura de saída. Contudo, devido ao fluxo de calor entre estas zonas, há uma interação cruzada entre sensores e atuadores. Como em outros casos de sistemas MIMO, esta interação pode

tornar-se relevante e dificultar a utilização de técnicas de controle monovariáveis. Por outro lado, esta interação é desejada para melhorar a suavidade do perfil de temperatura.

Utilizamos como exemplo para o estudo de técnicas de controle o modelo de um forno elétrico de formato tubular com 6 entradas e 6 saídas, e 6 medidores (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996). O objetivo do controle é regular o perfil da temperatura de saída.

4.2.1 - Modelo Dinâmico

As características de saturação da fonte de potência e das diferentes constantes de tempo para refrigeração e aquecimento introduzem grandes não-linearidades ao sistema. Contudo, em certas condições o sistema pode permitir análises e projetos lineares. O forno elétrico pode ser modelado como um sistema multivariável de primeira ordem com dois atrasos diferentes na entrada (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996). A relação entrada-saída do sistema pode ser descrita por

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (4.1)$$

com

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{32}(s) & G_{33}(s) & G_{34}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{43}(s) & G_{44}(s) & G_{45}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{54}(s) & G_{55}(s) & G_{56}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65}(s) & G_{66}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$G_{ii}(s) = \frac{10.8e^{-T_1s}}{68.7s + 1} \quad \text{e} \quad G_{ij}(s) = \frac{5.25e^{-T_2s}}{108.33s + 1} \quad (4.3)$$

com $T_1=1$ min, $T_2=25$ min e os vetores de entrada e saída, respectivamente

$$y(s)=[y_1(s) \ y_2(s) \ y_3(s) \ y_4(s) \ y_5(s) \ y_6(s)]^T \quad (4.4)$$

$$u(s)=[u_1(s) \ u_2(s) \ u_3(s) \ u_4(s) \ u_5(s) \ u_6(s)]^T \quad (4.5)$$

4.2.2 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com a Aproximação Padé

Modelo Nominal

No Capítulo 3 apresentamos representações do atraso por funções racionais em s , entre estas funções exploramos em mais detalhes a função padé. Devido a vantagens apresentadas naquele capítulo, utilizaremos esta função para aproximar os atrasos de $G(s)$ apresentada em 4.2. As ordens das aproximações da função padé mais apropriadas para cada atraso no modelo 4.1 foram escolhidas através de testes. As Figuras 4.1 e 4.2 ilustram as aproximações obtidas para os dois atrasos. Como podemos ver, as ordens escolhidas para as aproximações foram: ordem 3 para o atraso $T_1=1$ min., e ordem 11, para o atraso $T_2=25$ min. A função *pade* do MATLAB foi utilizada. As funções obtidas, com alguns arredondamentos, estão mostradas abaixo:

$$F_1(s) = \frac{-s^3 + 12s^2 - 60s + 120}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120} \quad (4.6)$$

$$F_{25}(s) = \frac{-s^{11} + 5s^{10} - 14s^9 + 23s^8 - 28s^7 + 25s^6 - 17s^5 + 9s^4 - 3s^3 + 1s^2 - 0.15s + 0.01}{s^{11} + 5s^{10} + 14s^9 + 23s^8 + 28s^7 + 25s^6 + 17s^5 + 9s^4 + 3s^3 + 1s^2 + 0.15s + 0.01} \quad (4.7)$$

Com estas aproximações, as novas funções $G_{ii}'(s)$ e $G_{ij}'(s)$, como em (3.6) tornam-se:

$$G'_{ii}(s) = \frac{10.8}{68.7s + 1} F_1(s) \quad (4.8)$$

$$G'_{ij}(s) = \frac{5.25}{108.33s + 1} F_{25}(s) \quad (4.9)$$

Figura 4.1 – Aproximação pela função padé do atraso $T=1$ min.

Figura 4.2 – Aproximação pela função padé do atraso $T=25$ min.

Podemos comparar os gráficos dos valores singulares de $G(s)$ com $G'(s)$, este obtido com a aproximação, Figura 4.3.

Figura 4.3 - $G(s)$ – (verde) e $G'(s)$ – planta aproximada (vermelho tracejado).

Como vemos, a aproximação é bastante satisfatória até a frequência de 10^0 rad/min. Nesse caso, podemos trabalhar na faixa de $(10^{-3}$ rad/min- 10^1 rad/min) para a realização do procedimento de projeto LQG/LTR. A expressão de $G'(s)$ pode ser descrita como

$$G'(s) = \begin{bmatrix} G'_{11}(s) & G'_{12}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G'_{21}(s) & G'_{22}(s) & G'_{23}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G'_{32}(s) & G'_{33}(s) & G'_{34}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'_{43}(s) & G'_{44}(s) & G'_{45}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G'_{54}(s) & G'_{55}(s) & G'_{56}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G'_{65}(s) & G'_{66}(s) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Podemos obter uma realização para o sistema (4.10). As matrizes A , B , C , D foram obtidas da seguinte forma:

Considere $G'(s)$ particionada como a equação abaixo:

$$G'(s) = G'_i(s)I_6 + G'_{ij}(s)J_6 \quad (4.11)$$

onde I_6 é a matriz identidade de ordem 6, e J_6 está representada como abaixo

$$J_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Com $G_{ii}'(s)$ e $G_{ij}'(s)$ definidas em (4.8) e (4.9) respectivamente. Obtivemos uma realização no MATLAB para $G_{ii}'(s)$ como $(a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, d_{ii})$ e para $G_{ij}'(s)$ como $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$ contidas no Apêndice 2 (Matrizes do Programa rotina1.m). O sistema representado em variáveis de estado fica como nas equações (4.13) e (4.14):

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{ii}] & [B_{ii}] \\ [C_{ii}] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [B_{ij}] \\ [C_{ij}] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} A_{ii} &= a_{ii}I_6, B_{ii} = b_{ii}I_6, C_{ii} = c_{ii}I_6 \text{ e } D_{ii} = 0_6 \\ A_{ij} &= a_{ij}I_6, B_{ij} = b_{ij}J_6, C_{ij} = c_{ij}I_6 \text{ e } D_{ij} = 0_6 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Com o comando *parallel* do MATLAB obtivemos o sistema final com ordem 96. A listagem do programa pode ser vista no Apêndice 1 (rotina1.m). O gráfico da Figura 4.4 ilustra os valores singulares de $G(s)$ e os valores de $G_n(s)$ com o sistema obtido da realização acima.

Figura 4.4 – Valores singulares de $G(s)$ (verde contínuo) e $G_n(s)$ (vermelho tracejado).

Também obtivemos uma outra realização pelo próprio MATLAB utilizando os comandos *tf*, *ss* e *ssdata*. Contudo, a realização resultante apresentou ordem 100. Assim, preferimos a realização obtida passo a passo por ter uma ordem menor.

Observação: Antes de proceder com o método LQG/LTR, é necessário verificar se a planta é de fase mínima ou não mínima. Pois se o sistema for de fase não mínima, deve-se analisar os seus zeros de transmissão, se os mesmos estão em frequências mais altas que as de interesse. Para verificar se o sistema é de fase não-mínima, ou seja, se possui pelo menos um zero no SPD do diagrama de pólos e zeros (OGATA, 1993) precisamos descobrir quais são os zeros de transmissão de $G_n(s)$. Para isso, podemos obtê-los diretamente através da função *pzmap* do MATLAB.

Figura 4.5 - Gráfico dos pólos e zeros de $G_n(s)$.

Observando o gráfico obtido com a função *pzmap* (Figura 4.5), vemos que existem bastantes zeros no SPD. Os zeros de fase não mínima de $G_n(s)$ são:

(3.4912, 3.6654, 3.1712±1.8066j, 4.1041, 3.3993±1.9564j, 1.7032±3.9174j, 3.9622±2.6804j, 2.1988±4.0224j, 3.1023±3.8934j, 6.2793, 13.7735, 22.7070)

Como vemos, os valores ainda estão dentro da faixa de frequências de interesse, contudo acima da frequência de cruzamento. De acordo com ATHANS (1984), quando há zeros de fase não mínima, mas situados em frequências superiores à de cruzamento, o procedimento de recuperação geralmente conduz a resultados satisfatórios (CRUZ, 1996).

Modelagem da Incerteza

A modelagem da incerteza é realizada considerando uma ponderação de erro multiplicativo de acordo com a equação (4.15), a variação de ganho do sistema deve ser menor do que 15 % (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996).

$$w_i(s) = 1.5 \frac{s+1}{s+10} \quad (4.15)$$

A matriz de ponderação da incerteza fica

$$W_I = w_I(I_6 + J_6) \quad (4.16)$$

Com J_6 como em (4.12).

Ponderação do Desempenho

Para distribuir os distúrbios nas baixas frequências e obter um bom seguimento para a entrada degrau, a planta deve ser do tipo 1 e no caso atender a especificação: acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e sensibilidade a variações na planta não superior a 10% para $\omega_o < 0.01$ rad/min. Então uma função de ponderação de desempenho pode ser definida como (4.17), esta definida da mesma forma que em GÁLVEZ & ARAÚJO (1996).

$$w_p(s) = 0.1 \frac{s + 0.01}{s} \quad (4.17)$$

A matriz de ponderação do desempenho fica

$$W_p = w_p I_6 \quad (4.18)$$

Preparação da Planta para o Procedimento de Projeto LQG/LTR

Inclusão de Integradores na Planta

Quando o modelo nominal da planta não apresenta integradores, isto é, pólo em $s=0$, a malha objetivo apresenta erros estacionários para sinais de referência ou perturbações em degrau. O mesmo ocorre, portanto, com a malha de controle nominal do sistema que está sendo projetada (CRUZ, 1996).

Podemos verificar a existência de pólos em $s=0$ com a função *pzmap* do Matlab. O gráfico de pólos e zeros já foi apresentado na Figura 4.5. Obtendo os valores dos pólos do gráfico da Figura 4.5, observamos que não existem pólos em $s=0$. Assim precisamos incluir integradores na entrada da planta antes de prosseguir com o projeto.

As novas matrizes de estado ficam de acordo com a equação (4.19).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & C_p \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A planta nominal fica como na equação (4.20), com seu gráfico ilustrado na Figura 4.6

$$G_n(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.20)$$

Figura 4.6 - Gráfico de $G_n(s)$ com os integradores.

sendo as matrizes A , B e C como na equação (4.13).

Obtenção dos Limitantes de Robustez do Desempenho e da Estabilidade

A planta real é representada por (4.21), com $G(s)$ representada como em (4.2) e (4.3), e considerando o pior caso na equação (3.9) do Capítulo 3, isto é $\|\Delta\|_\infty=1$.

$$G_r(s)=G(s)(I+W_l) \quad (4.21)$$

A expressão do erro é dada pela equação (4.22) e o gráfico, pela Figura 4.7.

$$E_M(s)=(G_r(s)-G_n(s))G_n^{-1}(s) \quad (4.22)$$

Figura 4.7 - Gráfico do erro multiplicativo.

A Figura 4.8 mostra os valores singulares de G_n e G_r

Figura 4.8 - Valores Singulares de G_n (azul tracejado) e G_r (vermelho contínuo).

Na Figura 4.9 temos o limitante de robustez da estabilidade considerando a condição da equação (4.23) (CRUZ, 1996).

$$\frac{I}{e_M(\omega) + I} > \sigma_M(T(j\omega)) \quad (4.23)$$

Esta condição é estabelecida a partir da frequência $\omega_n=1$ rad/min, e $e_M(\omega)$ é utilizado como limite da magnitude do erro e definido como na equação (4.24) (CRUZ, 1996).

$$\|E_M(j\omega)\| \leq e_M(\omega) \quad (4.24)$$

Com isso, considera-se a pior direção para definir o limite para o erro, o que pode introduzir um certo grau de conservadorismo na representação.

Figura 4.9 - Limitante de estabilidade (azul tracejado).

O limitante de robustez do desempenho é dado pela equação (4.25) (CRUZ, 1996).

$$\sigma_m(G_n(j\omega)K(j\omega)) \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (4.25)$$

Onde pode-se escolher $p_f(\omega)$ para satisfazer a função de ponderação (4.17)

$$p_f(\omega) = \frac{I}{\alpha_p} \quad (4.26)$$

com α_p igual a 0.1, para $\omega_o < 0.01$ rad/min. Esta especificação é representada pela Figura 4.10.

Figura 4.10 - Gráfico do limitante de desempenho.

Os limites de desempenho e estabilidade em $G_n(s)$ juntamente com os valores singulares de $G_n(s)$ são mostrados na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Limitantes de desempenho (verde traço e ponto) e estabilidade (azul tracejado).

Aplicação da Metodologia LQG/LTR:

Conformação da Malha Objetivo: a primeira parte do procedimento LQG/LTR é o levantamento da malha objetivo. Procuramos conformar a malha

objetivo a partir de uma matriz auxiliar L e um parâmetro μ . Primeiro escolhemos a matriz L representada como sugerido em CRUZ (1996), pelas equações (4.27) a (4.29).

$$L_l = -(C_p(A_p)^{-1}B_p)^{-1} \quad (4.27)$$

$$L_h = -(A_p)^{-1}B_p L_l \quad (4.28)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_l \\ L_h \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Com isto tentamos alguns valores de μ para transladar os valores singulares da malha objetivo e atender as barreiras de robustez da estabilidade e do desempenho. Obtivemos $\mu=80$.

Figura 4.12 - Conformação da malha objetivo com a matriz L .

Partimos para a solução da equação algébrica de Riccati (4.30) para obter o controlador ótimo:

$$0 = AP_f + P_f A^T + LL^T - (1/\mu)P_f C^T C P_f \quad (4.30)$$

Utilizamos a função *lqr2* para obter a matriz K_f da malha objetivo

$$K_f = \frac{I}{\mu} P_f C^T \quad (4.31)$$

Precisamos verificar as condições de estabilidade e desempenho para a malha objetivo. Como vemos pela Figura 4.13, as condições estão atendidas.

Figura 4.13 - Conformação da malha objetivo.

Recuperação da Malha Objetivo: passamos para o procedimento de recuperação LTR. Já vimos que existem zeros de fase não mínima na planta, contudo os mesmos estão localizados aquém da frequência de cruzamento.

Escolhemos $\rho = 3 \times 10^{-8}$ por tentativa e aplicamos a função *lqr2* do Matlab para obter a matriz do controlador final:

$$K_c = \frac{I}{\rho} B^T P_c \quad (4.32)$$

A Figura 4.14 apresenta o sistema controlado a malha aberta atendendo ao limitante de robustez do desempenho (CRUZ, 1996).

Figura 4.14 - Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.

Verificamos a robustez da estabilidade (CRUZ, 1996) e os pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada pelas Figuras 4.15 e 4.16, respectivamente.

Figura 4.15 - Limitante de robustez da estabilidade para o sistema a malha fechada.

Figura 4.16 - Pólos e zeros do sistema com o controlador a malha fechada.

As matrizes obtidas no projeto são:

- Matrizes do Controlador: $[A_c, B_c, C_c, D_c]$ – Apêndice 2 (Matrizes do Programa rotina2.m)
- Sistema Controlado: $[A_f, B_f, C_f, D_f]$

A listagem do programa do projeto está no Apêndice 1 (rotina2.m).

Simulação

A simulação do sistema controlado consiste em montar o diagrama de blocos do sistema com o controlador em um *software* de simulação. No caso, utilizamos o SIMULINK do Matlab. O diagrama de blocos da simulação do sistema com o controlador está no Apêndice 3 (Diagrama de Simulação do Forno Elétrico com o Controlador).

Executamos a simulação utilizando como parâmetros: tempo=200 min, passo variável, máximo tamanho de passo igual a 10, tamanho de passo inicial *auto*, tolerância relativa e absoluta igual a 1×10^{-2} , método *ode 45 (dormand-prince)*. Utilizamos as matrizes do controlador obtidas no projeto descrito anteriormente.

A resposta ao degrau para o sistema com o controlador a malha fechada está na Figura 4.17.

Figura 4.17 - Resposta a malha fechada: y (azul contínuo) e u (vermelho tracejado).

Análise dos Resultados

Primeiro analisamos os resultados através da resposta ao degrau unitário do sistema controlado a malha fechada com o gráfico da Figura 4.17. Observa-se que o sistema atinge a acomodação (5%) em $t=26.6327$ min.

Também podemos analisar os resultados das aplicações do método LQG/LTR através dos valores singulares das matrizes de sensibilidade $S(s)$ e sensibilidade complementar $T(s)$, comparadas às condições de desempenho e robustez da estabilidade, respectivamente, dadas pelas equações abaixo: critérios de desempenho (4.33) e critério de estabilidade (4.34):

$$\sigma_M(S(s)) < \sigma_M(W_p^{-1}(s)) \quad (4.33)$$

$$\sigma_M(T(s)) < \sigma_M(W_i^{-1}(s)) \quad (4.34)$$

Os critérios podem ser comprovados de acordo com as Figuras 4.18 e 4.19. A listagem do programa das curvas abaixo estão no Apêndice 1 (rotina3.m).

Figura 4.18 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).

Figura 4.19 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_t)^{-1}$ (vermelho tracejado).

De acordo com as Figuras 4.18 e 4.19, podemos ver que o sistema satisfaz a ambas as condições de desempenho e estabilidade como em (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996).

Desta forma, podemos concluir que o projeto foi bem sucedido embora a planta possuísse zeros de fase não mínima na sua representação nominal.

A oscilação diminui se diminuirmos o ganho, contudo o sistema fica mais lento.

4.2.3 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com os Atrasos como Incertezas

Modelo Nominal

Para os atrasos $T_1=1$ min. e $T_2=25$ min., o pior caso de atraso normalizado, definido como a relação atraso/constante de tempo, é para T_2 que é $25/108.33=0.23$ rad/min. Assim podemos retirar os atrasos da planta e considerá-los como incertezas sem deteriorar os resultados. Portanto, a matriz de transferência nominal torna-se:

$$G''_{ii}(s) = \frac{10.8}{68.7s + 1} \quad (4.35)$$

$$G''_{ij}(s) = \frac{5.25}{108.33s + 1} \quad (4.36)$$

A expressão de $G''(s)$ pode ser descrita como em (4.37)

$$G''(s) = \begin{bmatrix} G''_{11}(s) & G''_{12}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G''_{21}(s) & G''_{22}(s) & G''_{23}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G''_{32}(s) & G''_{33}(s) & G''_{34}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G''_{43}(s) & G''_{44}(s) & G''_{45}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G''_{54}(s) & G''_{55}(s) & G''_{56}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G''_{65}(s) & G''_{66}(s) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A realização $\{A, B, C, D\}$ para o sistema (4.37) foi obtida pelo método de Gilbert (ZHOU *et al.*, 1996), e a ordem resultante é igual a 16. Abaixo descrevemos a obtenção da mesma, no Apêndice 4 (Realização de Gilbert) apresentamos um resumo da realização de Gilbert, e no Apêndice 1 (rotina4.m) apresentamos a listagem do programa.

Considere $G''(s)$ descrita pela equação abaixo:

$$G''(s) = \frac{N_g(s)}{d_g(s)} \quad (4.38)$$

$$N_g(s) = \begin{bmatrix} n_{ii}d_{ij}(s) & n_{ij}d_{ii}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{ij}d_{ii}(s) & n_{ii}d_{ij}(s) & n_{ij}d_{ii}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{ij}d_{ii}(s) & n_{ii}d_{ij}(s) & n_{ij}d_{ii}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{ij}d_{ii}(s) & n_{ii}d_{ij}(s) & n_{ij}d_{ii}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{ij}d_{ii}(s) & n_{ii}d_{ij}(s) & n_{ij}d_{ii}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{ij}d_{ii}(s) & n_{ii}d_{ij}(s) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$d_g(s) = d_{ii}(s)d_{ij}(s) \quad (4.40)$$

onde $n_{ii}(s)=0.1572$, $d_{ii}(s)=(s+0.0146)$, $n_{ij}(s)=0.0485$ e $d_{ij}(s)=(s+0.0092)$.

Então $G''(s)$ tem a seguinte expansão em frações parciais:

$$G''(s) = D_g + \sum_{i=1}^r \frac{V_i}{s - \lambda_i} \quad (4.41)$$

$$D_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.1572 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1572 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1572 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1572 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1572 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1572 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0.0485 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0485 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0485 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0485 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Os autovalores são $\lambda_1=0.0146$, $\lambda_2=0.0092$, e as ordens são $k_1=\text{rank}(V_1)=6$, $k_2=\text{rank}(V_2)=6$

Temos que $V_1=C_1B_1$ e $V_2=C_2B_2$, considerando

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

assim, $C_1=V_1$ e $C_2=V_2$. E a realização para $G''(s)$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & \\ & \lambda_2 I_{k_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2] \quad (4.46)$$

No Apêndice 2 (Matrizes do programa rotina4.m) temos os valores das matrizes obtidas.

Na Figura 4.20 temos a comparação das curvas de $G''(s)$ e $G_n''(s)$, mostrando que os valores são iguais, ou seja, a realização representa com fidelidade a expressão da matriz de funções de transferências.

Figura 4.20 – Comparação de $G''(s)$ (contínuo) e $G_n(s)$ (sinal mais).

Agora vamos verificar se a planta é de fase mínima ou não, através do diagrama de pólos e zeros. A Figura 4.21 apresenta o diagrama plotado a partir da função *pzmap* do Matlab.

Figura 4.21 – Diagrama de pólos e zeros de $G_n(s)$.

Como podemos ver pela Figura 4.21 não há zeros no semi-plano direito do plano s , assim não teremos problemas para projetar o controlador com o método LQG/LTR.

Modelagem da Incerteza

A modelagem da incerteza é realizada considerando uma ponderação de erro multiplicativo de acordo com as equações (4.47) e (4.48), as quais representam a incerteza relativa ao atraso de cada elemento de $G''(s)$, ou seja, $G_{ii}''(s)$ e $G_{ij}''(s)$

$$w_{ii}(s) = \frac{2.2s}{s+1} \quad (4.47)$$

$$w_{ij}(s) = \frac{30s}{11.5s+1} \quad (4.48)$$

Assim, a matriz de ponderação da incerteza pode ser escolhida como

$$W_I = w_{ii}I_6 + w_{ij}J_6 \quad (4.49)$$

Ponderação do Desempenho

Para distribuir os distúrbios nas baixas frequências e obter um bom seguimento para a entrada degrau, a planta deve ser do tipo 1. Então uma função de ponderação de desempenho pode ser definida como anteriormente.

$$w_p(s) = 0.1 \frac{s+0.01}{s} \quad (4.50)$$

A matriz de ponderação do desempenho fica

$$W_p = w_p I_6 \quad (4.51)$$

Preparação da Planta para o Procedimento de Projeto LQG/LTR

Com a Figura 4.21 do diagrama de pólos e zeros do sistema, verificamos que não existem pólos em 0 no plano s , assim precisamos incluir integradores na entrada da planta. As novas matrizes de estado ficam como na equação (4.52).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & C_p \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

e a planta nominal fica como na equação (4.53) e o gráfico como na Figura 4.22

$$G_n = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.53)$$

Figura 4.22 - Valores Singulares de G_n .

sendo as matrizes A , B e C como na equação (4.52).

Obtenção dos Limitantes de Robustez de Desempenho e da Estabilidade

A planta real é representada por (4.54), com $G''(s)$ representada em (4.37), e considerando o pior caso de incertezas, ou seja $\|\Delta\|_\infty = 1$.

A planta real fica

$$G_r = G''(I + Wi) \quad (4.54)$$

A expressão do erro é dada pela equação (4.55) e o gráfico pela Figura 4.23.

$$E = (G_r - G_n)G_n^{-1} \quad (4.55)$$

Figura 4.23 – Gráfico do erro multiplicativo.

A Figura 4.24 mostra os valores singulares de G_n e G_r :

Figura 4.24 - Valores singulares de G_n (azul tracejado) e G_r (vermelho contínuo).

Na Figura 4.25 temos o limitante de estabilidade considerando a condição da equação (4.23) a partir da frequência $\omega_n=1$ rad/min.

Figura 4.25 - Limitante de estabilidade (azul tracejado).

O limitante de robustez do desempenho é dado pelas equações (4.25), (4.26) e com α_p igual a 0.1, isto é considerando acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e sensibilidade a variações na planta não superior a 10% para $\omega_o < 0.01$ rad/min. Seu gráfico é dado pela Figura 4.26.

Figura 4.26 - Limitante de desempenho.

Os limites de desempenho e estabilidade em $G_n(s)$ juntamente com os valores singulares de $G_n(s)$ são mostrados na Figura 4.27.

Figura 4.27 - Limitantes de desempenho e estabilidade.

Aplicação da Metodologia LQG/LTR

Conformação da Malha Objetivo: o procedimento LQG/LTR segue os mesmos passos apresentados na seção anterior, portanto só apresentamos os parâmetros utilizados.

A matriz auxiliar L foi escolhida de acordo com as equações (4.56) a (4.58)

$$L_l = -(C_p(A_p)^{-1}B_p)^{-1} \quad (4.56)$$

$$L_h = (A_p)^{-1}B_p L_l \quad (4.57)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_l \\ L_h \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

e o parâmetro $\mu=80$;

Figura 4.28 - Conformação da malha objetivo com a matriz L .

A Figura 4.29 apresenta os limitantes na malha objetivo para verificar as condições de robustez da estabilidade e do desempenho para o sistema em malha aberta.

Figura 4.29 - Conformação da malha objetivo.

Recuperação da Malha Objetivo: escolhemos $\rho=1 \times 10^{-4}$ por tentativa e obtivemos o sistema com o controlador a malha aberta da Figura 4.30, onde podemos comprovar a robustez do desempenho (CRUZ, 1996).

Figura 4.30 - Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.

Verificamos a robustez da estabilidade e os pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada de acordo com as Figuras 4.31 e 4.32, respectivamente.

Figura 4.31 - Limitante de robustez da estabilidade para o sistema a malha fechada.

Figura 4.32 - Pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada.

As matrizes são:

- Controlador: $[A_c, B_c, C_c, D_c]$, Apêndice 2 (Matrizes do Programa rotina5.m);
- Sistema Controlado: $[A_f, B_f, C_f, D_f] = \text{series}(A, B, C, D, A_c, B_c, C_c, D_c)$;

A listagem do arquivo do programa do projeto está no Apêndice 1 (rotina5.m).

Simulação

A simulação foi realizada como no projeto anterior, e o diagrama de simulação é apresentado no Apêndice 3 (Diagrama de Simulação do Forno Elétrico com o Controlador).

O gráfico da resposta ao degrau para o sistema com o controlador a malha fechada está na Figura 4.33.

Figura 4.33 - Resposta a malha fechada: y (azul contínuo) e u (vermelho tracejado).

Análise dos Resultados

A análise dos resultados é realizada da mesma forma como no projeto anterior. Primeiro analisamos os resultados através da resposta ao degrau unitário do sistema controlado a malha fechada com o gráfico da Figura 4.33. Vemos que ambos os sinais atingem a acomodação antes de $t=100$ min, precisamente em $t=92.5801$ min.

Também podemos analisar os resultados das aplicações do método LQG/LTR através dos valores singulares das matrizes de sensibilidade $S(s)$ e sensibilidade complementar $T(s)$, comparadas às condições de desempenho e robustez da estabilidade, respectivamente, dadas pelas equações (4.33) e (4.34).

A listagem do programa se encontra no Apêndice 1 (rotina6.m).

Figura 4.34 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).

Figura 4.35 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_e)^{-1}$ (vermelho tracejado).

De acordo com os gráficos das Figuras 4.34 e 4.35, podemos ver que o sistema satisfaz as condições para todos os casos, exceto o critério de estabilidade que fica ligeiramente comprometido em baixa frequência por volta da frequência 0,1 rad/min.

4.3 – PLANTA DA COLUNA DE DESTILAÇÃO

Um sistema de uma coluna de destilação binária é usado para separar uma mistura de água e metanol em dois produtos relativamente puros (WOOD & BERRY, 1973). Isto é um clássico exemplo em sistemas multivariáveis (LUYBEN, 1972), (NIEDERLINSKI, 1971), (WALLER, 1982), já que o mesmo possui uma forte interação entre as malhas (ARAÚJO, 1995).

4.3.1 – Modelo Dinâmico

Considere o modelo da coluna de destilação como em WOOD & BERRY (1973). O modelo linear é obtido em relação a um ponto de operação, e é como segue:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (4.59)$$

com

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Os vetores de entrada e de saída são respectivamente,

$$y(s) = [y_1(s) \ y_2(s)]^T \quad (4.61)$$

$$u(s) = [u_1(s) \ u_2(s)]^T \quad (4.62)$$

onde os seus significados físicos e pontos de operação são: y_1 é a composição do produto destilado, 96.25 mol %; y_2 é a composição na base da coluna, 0.5 mol %; u_1 é o fluxo, 1.95 lb/min; u_2 é o vapor, 1.71 lb/min e o tempo é dado em minutos.

4.3.2 – Aplicação da Técnica LQG/LTR ao modelo com a Aproximação Padé

A coluna de destilação (4.59)-(4.62), apresenta três diferentes atrasos na entrada. Em ZHOU *et al.* (1995) é apresentado o projeto de um controlador para esta planta utilizando a metodologia LQG/LTR e a aproximação dos atrasos pela função padé. Os resultados da aplicação demonstram eficiência considerável da metodologia LQG/LTR, em comparação com métodos SISO, embora a função padé proporcione adição de zeros de fase não mínima no sistema.

4.3.3 – Aplicação da Técnica LQG/LTR com os Atrasos como Incertezas

Para os atrasos $T_1=1$ min., $T_2=3$ min. e $T_3=7$ min, o pior caso de atraso normalizado, definido como a relação atraso/constante de tempo, é para T_3 que é $7/10.9=0.64$ rad/min. Portanto podemos desconsiderá-los na realização da planta e colocá-los como incertezas sem deteriorar os resultados. Logo, a matriz de transferência nominal torna-se:

$$G' = \begin{bmatrix} \frac{-12.8}{16.7s+1} & \frac{-18.9}{21s+1} \\ \frac{6.6}{10.9s+1} & \frac{-19.4}{14.4s+1} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Uma realização $\{A,B,C,D\}$ é obtida com o método de Gilbert (ZHOU *et al.*, 1996) resultando numa realização de ordem 6.

Abaixo descrevemos a obtenção da mesma, e no Apêndice 1 (rotina7.m) apresentamos a listagem do programa.

Considere $G'(s)$ descrita pela equação abaixo:

$$G'(s) = \frac{N_g(s)}{d_g(s)} \quad (4.64)$$

$$N_g(s) = \begin{bmatrix} -0.7663(s+0.0476)(s+0.0917)(s+0.0694) & -0.9(s+0.0599)(s+0.0917)(s+0.0694) \\ 0.6053(s+0.0599)(s+0.0476)(s+0.0694) & -1.3473(s+0.0599)(s+0.0476)(s+0.0917) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$d_g(s) = [(s+0.0599)(s+0.0476)(s+0.0917)(s+0.0694)] \quad (4.66)$$

Então $G'(s)$ tem a seguinte expansão em frações parciais:

$$G'(s) = D_g + \sum_{i=1}^r \frac{V_i}{s - \lambda_i} \quad (4.67)$$

$$D_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.6055 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.3472 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0.7665 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -0.0917$, $\lambda_2 = -0.0694$, $\lambda_3 = -0.0599$, $\lambda_4 = -0.0476$, e as ordens são $k_1 = \text{rank}(V_1) = 1$, $k_2 = \text{rank}(V_2) = 1$, $k_3 = \text{rank}(V_3) = 1$, $k_4 = \text{rank}(V_4) = 1$

Temos que $V_1 = C_1 B_1$, $V_2 = C_2 B_2$, $V_3 = C_3 B_3$ e $V_4 = C_4 B_4$ considerando

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

assim, $C_1 = V_1$, $C_2 = V_2$, $C_3 = V_3$ e $C_4 = V_4$. E a realização para $G'(s)$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{k_2} & & \\ & & \lambda_3 I_{k_3} & \\ & & & \lambda_4 I_{k_4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2] \quad (4.71)$$

As matrizes podem ser visualizadas no Apêndice 2 (Matrizes do Programa rotina7.m).

Na Figura abaixo temos a comparação das curvas de $G'(s)$ e $G_n(s)$, mostrando que os valores são iguais, ou seja, a realização representa com fidelidade a expressão da matriz de funções de transferências.

Figura 4.36– Comparação de $G(s)$ (contínuo) com $G_n(s)$ (sinal mais).

Agora vamos verificar se a planta é de fase mínima ou não, através do diagrama de pólos e zeros. A Figura 4.37 apresenta o diagrama obtido a partir da função *pzmap* do Matlab.

Figura 4.37 - Pólos e zeros da planta.

Como vemos pelo gráfico da Figura 4.37 a planta não possui zeros no SPD do plano s , ou seja, a planta é de fase mínima, portanto podemos prosseguir com o procedimento LQG/LTR sem maiores problemas.

Modelagem da Incerteza

A modelagem da incerteza é executada considerando o modelo de erro multiplicativo e as funções w_1 , w_2 e w_3 representam os atrasos T_1 , T_2 e T_3 , respectivamente.

$$w_1(s) = \frac{2.2s}{s+1} \quad (4.72)$$

$$w_2(s) = \frac{4.5s}{2s+1} \quad (4.73)$$

$$w_3(s) = \frac{9s}{5s+1} \quad (4.74)$$

A matriz de ponderação da incerteza é dada pela equação (4.75)

$$W_i(s) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_2 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Ponderação do Desempenho

Como função de ponderação do desempenho, usamos (4.76).

$$w_p(s) = 0.2 \frac{s+0.07}{s} \quad (4.76)$$

Assim, a matriz de ponderação do desempenho fica

$$W_p = w_p I_2 \quad (4.77)$$

Preparação da Planta para o Procedimento de Projeto LOG/LTR

Com a Figura 4.37 do diagrama de pólos e zeros do sistema, verificamos que não existem pólos em 0 no plano s , assim precisamos incluir integradores na entrada da planta. As novas matrizes de estado ficam como na equação (4.78).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & C_p \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

a planta nominal fica

$$G_n = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.79)$$

Figura 4.38 - Valores singulares de G_n

sendo as matrizes A , B e C como na equação (4.78).

Obtenção dos Limitantes de Robustez de Desempenho e da Estabilidade

A planta real é representada por (4.80), com $G'(s)$ representada em (4.63), e considerando o pior caso de incertezas, ou seja $\|\Delta\|_\infty = 1$.

$$G_r = G'(I + Wi) \quad (4.80)$$

A expressão do erro está representada por (4.81) e a Figura 4.39

$$E_M = (G_r - G_n) G_n^{-1} \quad (4.81)$$

Figura 4.39 - Erro multiplicativo.

As figuras abaixo mostram os valores singulares de G_n e G_r :

Figura 4.40 - Valores singulares de G_n (azul contínuo) e G_r (vermelho tracejado).

Na Figura 4.41 abaixo temos o limitante de robustez da estabilidade considerando a condição como barreira a expressão (4.23) a partir da frequência $\omega_n=10$ rad/min.

Figura 4.41 - Limitante de estabilidade (azul tracejado).

O limitante de desempenho é expresso por (4.25) e (4.26) com α_p igual a 0.2, isto é considerando acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e sensibilidade a variações na planta não superior a 20% para $\omega_o < 0.07$ rad/min. Seu gráfico é representado pela Figura 4.10.

Figura 4.42 - Limitante de desempenho.

Os limitantes de desempenho e estabilidade em $G_n(s)$ juntamente com os valores singulares de $G_n(s)$ são mostrados na Figura 4.43.

Figura 4.43 - Limitantes de desempenho e estabilidade.

Aplicação da Metodologia LQG/LTR

Conformação da Malha Objetivo: o procedimento é aplicado da mesma forma como nos projetos anteriores. A da malha objetivo é obtida com a matriz L e o parâmetro μ

$$L_l = -(C_p(A_p)^{-1}B_p)^{-1} \quad (4.82)$$

$$L_h = (A_p)^{-1}B_p L_l \quad (4.83)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_l \\ L_h \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mu = 5 \quad (4.85)$$

Verificamos as condições de robustez da estabilidade e do desempenho para o sistema em malha aberta na Figura 4.44 com a matriz L , e na Figura 4.45, o sistema da malha objetivo.

Figura 4.44 - Conformação da malha objetivo com a matriz L .

Figura 4.45 - Conformação da malha objetivo.

Recuperação da Malha Objetivo: escolhemos $\rho=1 \times 10^{-3}$ por tentativa e aplicamos a função *lqr2* do Matlab para obter o controlador final. A Figura 4.46 representa o sistema a malha aberta a verificação da robustez do desempenho (CRUZ, 1996)

Figura 4.46 - Valores singulares do sistema controlado a malha aberta.

Verificamos a robustez da estabilidade e os pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada pelas Figuras 4.47 e 4.48 respectivamente.

Figura 4.47 - Limitante de robustez da estabilidade para o sistema controlado a malha fechada.

Figura 4.48 - Pólos e zeros do sistema controlado a malha fechada.

As matrizes são:

- Controlador: $[A_c, B_c, C_c, D_c]$, Apêndice 2 (Matrizes do Programa rotina8.m);
- Sistema Controlado: $[A_f, B_f, C_f, D_f] = \text{series}(A, B, C, D, A_c, B_c, C_c, D_c)$;

A listagem do programa está no Apêndice 1 (rotina8.m).

Simulação

A simulação foi realizada como no projeto anterior, e o diagrama de simulação é apresentado no Apêndice 3 (Diagrama de Simulação da Coluna de Destilação com o Controlador). As Figuras 4.49 a 4.52 apresentam a resposta do sistema a malha fechada a variação da referência do ponto de operação de $y_1=96.25$ mol% para 97 mol%, e $y_2=0.5$ mol%, seguindo ZHOU *et al* (1995).

Figura 4.49 - Resposta a malha fechada: y_1 .

Figura 4.50 - Sinal de controle para a saída y_1

Figura 4.51 - Resposta a malha fechada: y_2 . Figura 4.52 - Sinal de controle para a saída y_2

Análise dos Resultados

A análise dos resultados é realizada da mesma forma como no projeto anterior. Primeiro analisamos os resultados através da resposta ao degrau unitário do sistema controlado a malha fechada com o gráfico da Figura 4.17, Vemos que ambos

os sinais atingem a acomodação (5%) bem antes de $t=50$ min, precisamente em $t=8.5915$ min.

Quando comparamos as Figuras 4.49 e 4.50 com as figuras equivalentes em ZHOU *et al.* (1995), verificamos que ambas as respostas mostradas nas Figuras 4.49 e 4.50 comparam-se em termos do tempo de resposta com as respostas apresentadas de y_1 e em ZHOU *et al.* (1995), porém com vantagens em relação a y_2 na medida que esta não apresenta oscilação.

Também podemos analisar os resultados das aplicações do método LQG/LTR através dos valores singulares das matrizes de sensibilidade $S(s)$ e sensibilidade complementar $T(s)$, comparadas às condições de desempenho e robustez da estabilidade, respectivamente, dadas pelas equações (4.33) e (4.34):

A listagem do programa se encontra no Apêndice 1 (rotina9.m).

Figura 4.51 - Valores singulares de S (azul contínuo) e $(W_p)^{-1}$ (vermelho tracejado).

Figura 4.52 - Valores singulares de T (azul contínuo) e $(W_i)^{-1}$ (vermelho tracejado).

De acordo com as Figuras 4.51 e 4.52, podemos ver que o sistema satisfaz as condições para toda a faixa de frequências do projeto.

4.4 - CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos os procedimentos realizados para aplicar a metodologia LQG/LTR a sistemas multivariáveis com atrasos. Estudamos dois casos de plantas, um forno elétrico industrial e uma coluna de destilação binária. Utilizamos duas maneiras de representar o atraso, com a função padé e com incertezas.

No primeiro projeto, o da planta do forno elétrico com a função padé, nos deparamos com alguns problemas relativos a aproximação padé devido a um dos atrasos ser de 25 min. Neste caso, o atraso normalizado, definido como a relação atraso/constante de tempo, é $25/108.33=0.23$ rad/min, satisfazendo a condição (3.2). Contudo, o atraso foi aproximado por uma função padé de ordem de ordem muito elevada, 11, para não comprometer a representação da planta. Evidentemente, a expressão da função padé para esta ordem trouxe diversas complicações para a

execução do projeto, principalmente para obter uma realização fiel do sistema com a menor ordem possível.

Outro problema deste projeto é o aparecimento dos zeros de fase não mínima. Pode-se mostrar em FREUDENBERG & LOOZE (1985) que a existência de zeros de fase não mínima acarreta limitações no desempenho do sistema de controle, independentemente da técnica de projeto utilizada. No entanto, apesar da existência destes zeros, o desempenho do projeto mostrou-se satisfatório.

No projeto do controlador para o forno elétrico utilizando incertezas para representar os atrasos, o procedimento foi bem mais fácil de implementar pois a ordem da realização da planta nominal foi bem menor. Aproximamos os atrasos por funções de incertezas e utilizamos as mesmas nas condições de robustez de desempenho e de estabilidade. Devido às fortes restrições das incertezas e consequentemente de estabilidade, o projeto se mostrou com um desempenho menos satisfatório que o projeto utilizando a aproximação *padé* para representar os atrasos. Isto fica evidente pelo tempo de acomodação (5%) obtido para o projeto com os atrasos como incertezas, $t=92.5801$ min., enquanto no outro, o tempo de acomodação é de apenas $t=26.6327$.

No projeto do controlador da coluna de destilação, não utilizamos a aproximação por função *padé*, já que o projeto nesta linha foi realizado em ZHOU *et al.* (1995). Aproximamos os atrasos por funções de restrições e inserimos nas incertezas. O projeto mostrou-se satisfatório. De acordo com as comparações das respostas do sistema a malha fechada para um determinado ponto de operação, e os obtidos em ZHOU *et al.* (1995), percebemos que o projeto do controlador aqui realizado mostrou-se mais eficiente que naquele. Isto se deve não a metodologia de projeto, já que a mesma foi aplicada a ambos os projetos, e sim, a maneira de se representar o sistema e especificações de projeto.

CAPÍTULO 5 – COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O propósito deste trabalho foi considerar métodos de controle robusto multivariáveis aplicáveis a sistemas com atrasos. Os métodos estudados foram o LQG/LTR e Controle H_∞ . Ambos os métodos têm sido muito explorados pela comunidade de controle. São métodos no domínio da frequência e utilizam os sistemas representados em variáveis espaço de estado.

As técnicas SISO são procedimentos de projeto mais simples de se realizar, que as técnicas MIMO. Além disso são mais fáceis de serem entendidos por utilizarem conceitos familiares aos métodos clássicos (MACIEJOWSKI, 1993). Contudo, as técnicas MIMO são mais eficientes em manter a estabilidade em face a falhas de atuadores e sensores (DOYLE & STEIN, 1981) pois consideram modelos mais realistas para a planta, tratando com mais precisão as incertezas e especificações de projeto, sendo também técnicas com procedimentos mais sistemáticos.

A grande vantagem da metodologia LQG/LTR é sua sistemática relativamente simples de procedimento de projeto. Basicamente o maior esforço de projeto deve-se à construção das barreiras de robustez (CRUZ, 1996). Já a metodologia de controle H_∞ apresenta a vantagem de considerar os valores de pico dos valores singulares de T e S , ou seja, o pior caso. Contudo, uma diferença mais aparente entre os dois métodos é que o H_∞ utiliza uma aproximação a malha fechada, enquanto o LQG/LTR, utiliza a aproximação a malha aberta. Esta característica do controle H_∞ requer muito mais cuidados na escolha das funções de ponderação, já

que as mesmas entram na sistemática de decisão do projeto (MACIEJOWSKI, 1993).

Escolhemos como método a metodologia LQG/LTR, devido sua simplicidade de aplicação. Assim mesmo, algumas dificuldades foram surgindo no momento de se aplicar a metodologia em sistemas com atrasos. Primeiro, nos deparamos com a questão de como tratar os atrasos para representar a planta em variáveis de estado. Inicialmente resolvemos utilizar uma aproximação do atraso por uma função adequada. Devido sua relativa eficácia, dependendo do valor do atraso e das faixas de frequência a serem utilizadas, decidimos utilizar a função padé (TRUXAL, 1955) e (WALL, 1948).

Uma das grandes desvantagens da aproximação padé é que a mesma inclui zeros de fase não mínima no sistema. Os zeros de fase não mínima são de considerável relevância na execução de um projeto de controlador, pois a presença dos mesmos proporciona limitações no desempenho do sistema de controle, independentemente da técnica de projeto utilizada (STEIN & ATHANS, 1987). Além disso, tem o fato de que em alguns casos torna-se necessário utilizar uma ordem relativamente elevada da função padé para se obter uma boa representação do sistema. Outra maneira de se trabalhar com os atrasos é tratá-los como incertezas. No caso utiliza-se uma curva de aproximação do atraso para funcionar como limitante de incerteza, e utiliza-se a planta sem atrasos na metodologia de projeto.

Outra dificuldade apresentada é a obtenção de uma realização espaço de estados que seja fiel à planta e que seja de ordem mínima. Experimentamos vários tipos de realizações: como Hankel, por decomposição em valores singulares, e outras em CHEN (1984) e Gilbert (ZHOU, 1996). A própria realização direta pelo Matlab só foi possível na sua versão 5.2. Contudo esta realização nem sempre é mínima.

Escolhemos dois exemplos para estudo: um forno elétrico industrial (GÁLVEZ & ARAÚJO, 1996), e uma coluna de destilação binária (WOOD & BERRY, 1973). Ambos os exemplos possuem atrasos significantes, ou seja, que não podem simplesmente ser desprezados na metodologia de projeto.

O projeto de controle do forno foi realizado tanto representando os atrasos com a aproximação padé, como também fizemos uma outra versão do projeto utilizando os atrasos como incertezas. O projeto com a aproximação padé foi bem

mais complicado de ser realizado devido a necessidade de ordens muito elevadas para a aproximação padé. No entanto o projeto mostrou-se eficiente, embora possuisse zeros de fase não mínima, os mesmos estavam situados aquém da frequência de cruzamento, não comprometendo a eficiência do projeto (ATHANS, 1984). Com as incertezas o projeto ficou mais prático realizar, contudo muito mais conservador, tornando-se até um pouco mais lento que o projeto anterior.

O projeto de controle da coluna de destilação só foi realizado considerando os atrasos como incertezas, pois a consideração da aproximação com a função padé já foi realizada em ZHOU (1995). Aqui o projeto foi eficiente e não apresentou problemas na sua execução.

Podemos sintetizar as representações dos atrasos da seguinte forma: com a função padé, se tem uma representação mais fidedigna da planta, no entanto com zeros de fase não mínima que podem prejudicar o projeto de controle; no caso dos atrasos como incertezas, restringe-se mais a solução do problema de controle, podendo prejudicar o desempenho do sistema controlado.

Um problema inerente destas metodologias de projeto multivariáveis é que se considera o pior caso das incertezas, isto proporciona um conservadorismo muito grande do projeto, fazendo com que o mesmo, em algumas situações precise comprometer o desempenho em prol do atendimento a restrições de incertezas que raramente vão acontecer. Podemos dizer que isto foi o que aconteceu quando utilizamos os atrasos como incertezas no projeto de controle do forno elétrico. Uma sugestão seria utilizar um meio termo, por exemplo, o atraso, uma parte sendo aproximada no modelo nominal e outra sendo considerada como incerteza.

De qualquer forma, para realizar um projeto de controle deve-se analisar a estrutura do controlador. Se é possível dividir o controlador em pequenos problemas multivariáveis, ou considerá-lo como um misto de problemas SISO e MIMO, ou melhor ainda, como um conjunto de problemas SISO. A solução depende não só da planta como das especificações de projeto (MACIEJOWSKI, 1993).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELRAHMAN, M. A. and MOORE, K. L., "Robust Control of Cupola Iron Furnaces", in *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Albuquerque, NM, June, 1997.
- ABDELRAHMAN, M. A., *Model Motivated Advanced Control Strategies for Nuclear Reactors*, PhD. Disserttion, Idaho State University, 1996.
- ABDELRAHMAN, M. A., MOORE, K. L. and NAIDU, D. S., "Generalized Smith Predictor for Robust Control of Nuclear Reactors with Time Delays", in *Proceedings of the 1996 American Nuclear Society Topical Meeting on Nuclear Plant Instrumentation, Control and Uman-Machine Interface Tecnologies*, Pensylvania, May 6 –9, 1996.
- ANDERSON, B. D. O. and MOORE, J. B., *Linear Optimal Control*. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1972.
- ARAÚJO, L. P., *Análise e Síntese de Controladores Multivariáveis no Domínio da Freqüência*, M. Sc. Tese, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, 1995.
- ASTRÖM, K. J. and WITTERNMARK, B., *Computer-Controlled Systems*. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1984.
- ATHANS, M., 6.232 – *Multivariable Control Systems: Lecture Notes*. MIT, 1984.
- BANKS, S. P., *Control Systems Engineering*. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1986.
- BHATTACHARRYA, S. P., CHAPELLAT, H. and KEEL, L. H., *Robust Control – The Parametric Approach*. Pretice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ 07458, 1995.
- CHEN, C. T., *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- CRUZ, J. J., *Controle Robusto Multivariável*. Ed. USP, São Paulo, SP, 1996.
- DAVIS, M. H. A. and VINTER, R. B., *Stochastic Modelling and Control*. London: Chapman & Hall, 1985.

- DOYLE, J. C. and STEIN, G., "Multivariate Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, pp. 4-16, 1981.
- DOYLE, J. C. and STEIN, G., "Robustness with Observers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, pp. 607-611, 1979.
- DOYLE, J. C., "Guaranteed Margins for LQG Regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 23, pp. 756-757, 1978.
- DOYLE, J. C., FRANCIS, B. A. and TANNENBAUM, A. R., *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- FERON, E., BALAKRISHNAM, V. and BOYD, S., "Design of Stabilizing State Feedback for Delay Systems via Convex Optimization". In *Proceedings 31th Conference Decision Control*, pp. 147-148, Tuscon, Dec. 1992.
- FRANCIS, B. A., "A Course in H_∞ Control Theory", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88. Berlin: Sprinsson-Verlag. 1987.
- FRANKLIN, G. F. and POWELL, J. D., *Digital Control of Dynamic Systems*. Reading MA: Addison-Wesley, 1980.
- FREUDENBERG, J. S. and LOOZE, D. P., "Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems", In *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. Vol. 30, pp. 555-561, jun. 1985.
- GÁLVEZ, J. M. and ARAÚJO, L. P., "Frequency Domain Control Design for a Multiple Input-Multiple Output Electrical Oven", in *XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo, SP, vol. 3, pp. 1549-1554, 1996.
- GÁLVEZ, J. M. and ARAÚJO, L. P., "Multivariable Control Design in the Frequency Domain for na Industrial Electrical Tubular Oven", *IEEE 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Rio de Janeiro, Brazil, August, 1995.
- GE, J. H., FRANK, P. M. and LIN, C. F., " H_∞ Control via Output Feedback for State Delayed Systems", *International Journal of Control*, Vol. 64, N° 1, pp. 1-7, 1996.
- GLOVER, K. and DOYLE, J. C., "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy na H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity". *Systems and Control Letter*, 11, 167-72, (1988).

- GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F., *Matrix Computations*. Baltimore MD: Johns Hopkins University Press. 1983.
- GREEN, M. and LIMEBEER, D. J. N., *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- IEEE, "Special Issue on the LQG Problem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, pp. 527-869, 1971.
- JEUNG, E. T., OH, D. C., KIM, J. H. and PARK, H. B., "Robust Controller Design for Uncertain Systems with Time Delays: LMI Approach". *Automatica*, Vol. 32, No. 8, pp. 1229-1231, 1996.
- KUO, B. C., *Automatic Control Systems*, 7th ed. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
- KUO, C., *Sistemas de Controle Automático*, 4^a Edição. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ, 1985.
- KWAKERNAAK, H. and SIVAN, R., *Linear Optimal Control*. New York, Wiley, 1972.
- KWAKERNAAK, H., "Optimal Low Sensitivity Linear Feedback Systems", *Automatica*, Vol. 5, pp. 279-86, 1969.
- LEE, J. H., LEE, II. and KWON, W. H., " H_∞ Controllers for Input Delayed Systems". In *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 870-871, December, 1994.
- LEE, S. J., KWON, W. H. and KIM, S. W., "LQG/LTR Methods for Linear Input-Delay Systems". *International Journal of Control*, Vol. 47, N^o 5, pp. 1179-1194, 1988.
- LI, X. and SOUZA, C. E., "Robust Stabilization and H_∞ Control of Uncertain Linear Time-Delay Systems". In *13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA, pp. 113-118, 1996.
- LUO, J. S., VAN DEN BOSCH, P. P. J., Weiland, S. and Goldenberge, A., "Design of Performance Robustness for Uncertain Linear Systems with State and Control Delays". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, N^o 11, pp. 1593-1596, 1998.
- LUYBEN, W. L. and VINANTE, C., "Experimental Studies of Distillation Decoupling", *Kem. Teollisuus*, Vol. 29, pág. 499, 1972.

- MACIEJOWSKI, J. M., *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- MAHMOUD, M. S. and AL-MUTHAIRI, N. F., "Design of Robust Controllers for Time-delay System". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, pp. 995-999, 1994.
- MALEK-ZAVAREI, M. and JAMSHIDI, M., *Time Delay Systems: Analysis Optimization and Application*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1987.
- MOORE, K. L., ABDELRAHAMAN, M. A., CLARK, D., LARSEN, E., SMARTT, H. and EINERSON, C., "A Multivariable Smith Predictor for Intelligent Control of a Cupola Furnace", in *Proceedings of the American Control conference, Seattle, Washington, June 21-23, 1995*.
- NIEDERLINSKI, A., "A Heuristic Approach to the Design of Linear Multivariable Interacting Control Systems", *Automatica*, Vol. 7, pág. 691, 1971.
- OGATA, K., *Engenharia de Controle Moderno*. 2ª Edição, Editora Prentice/Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ, 1993.
- REZA, S. O. and PETERSEN, I. R., "Optimal Quadratic Guaranteed Cost Control of a Class of Uncertain Time-delay Systems", in *Proceedings 34th CDC*, New Orleans, LA, Dec., pp. 1513-1518. 1995.
- SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., and MELICHAMP, D. A., *Process Dynamics and Control*. New York, New York: John Wiley and Sons, 1992.
- SHEN, J. C., CHEN, B. S. and KUNG, F. C., "Memoryless Stabilization of Uncertain Dynamic Delay Systems: Riccati Equation Approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, pp. 638-640, 1991.
- STEIN, G. and ATHANS, M., "The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, Nº 2, pp. 105-114, fev. 1987.
- TRUXAL, J. G., *Automatic Feedback Control Systems Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
- VIDYASAGAR, M., *Control Systems synthesis: A Factorization Approach*. Boston MA: MIT Press., 1985.

- WALL, H. S., *Continued Fractions*, Chapter 20, D. Van Nostrand Co., New York, 1948.
- WALLER, K. V., WILKMAN, K. and GUSTADSON, S. E. "Design and Tuning of Dual-Composition Distillation Control Systems by the Inverse Nyquist Array Method", in *Proceedings of the 32nd Canadian Chemical Engineering Conference*, Vancouver, British Columbia, pag. 9-19., 1982.
- WANG, Q. G., ZHANG, Y. and CHIU, M. S., "Decoupling Internal Model Control For Multivariable Systems with Multiple Time Delays". AACC, 1998.
- WOOD, R. K. and BERRY, M. W., "Terminal Composition Control of a Binary Distillation Column". *Chemical Engineering Science*, 28, p. 1707, 1973.
- ZHOU, C., WHITELEY J. R., MISAWA, E. A. and GASEM, K. A. M., "Application of Enhanced LQG/LTR for Distillation Control". *IEEE Control Systems*, pag. 56-63, August, 1995.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. and GLOVER, K., *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

APÊNDICE 1 - LISTAGENS DOS PROGRAMAS

Listagem do programa rotinal.m

```

clear all;
[n1,d1]=pade(1,3);
[n25,d25]=pade(25,11);
nii=10.8*n1;
nij=5.25*n25;
dii=conv([68.7 1],d1);
dij=conv([108.33 1],d25);
gii=tf(nii,dii);
gij=tf(nij,dij);
sysii=ss(gii);
sysij=ss(gij);
[aii,bii,cii,dii]=ssdata(sysii)
[aij,bij,cij,dij]=ssdata(sysij)
kii=length(aii);
kij=length(aij);
Aii=[aii zeros(4,20);zeros(4,4) aii zeros(4,16);zeros(4,8) aii
zeros(4,12);zeros(4,12) aii zeros(4,8);zeros(4,16) aii
zeros(4,4);zeros(4,20) aii];
Bii=[bii zeros(4,5);zeros(4,1) bii zeros(4,4);zeros(4,2) bii
zeros(4,3);zeros(4,3) bii zeros(4,2);zeros(4,4) bii
zeros(4,1);zeros(4,5) bii];
Cii=[cii zeros(1,20);zeros(1,4) cii zeros(1,16);zeros(1,8) cii
zeros(1,12);zeros(1,12) cii zeros(1,8);zeros(1,16) cii
zeros(1,4);zeros(1,20) cii];
Aij=[aij zeros(kij,5*kij);zeros(kij,kij) aij
zeros(kij,4*kij);zeros(kij,2*kij) aij
zeros(kij,3*kij);zeros(kij,3*kij) aij
zeros(kij,2*kij);zeros(kij,4*kij) aij
zeros(kij,kij);zeros(kij,5*kij) aij];
Bij=[zeros(kij,1) bij zeros(kij,4);bij zeros(kij,1) bij
zeros(kij,3);zeros(kij,1) bij zeros(kij,1) bij
zeros(kij,2);zeros(kij,2) bij zeros(kij,1) bij
zeros(kij,1);zeros(kij,3) bij zeros(kij,1) bij;zeros(kij,4) bij
zeros(kij,1)];
Cij=[cij zeros(1,5*kij);zeros(1,kij) cij
zeros(1,4*kij);zeros(1,2*kij) cij zeros(1,3*kij);zeros(1,3*kij) cij
zeros(1,2*kij);zeros(1,4*kij) cij zeros(1,kij);zeros(1,5*kij) cij];
Dii=zeros(6);
Dij=zeros(6);
Sysii=ss(Aii,Bii,Cii,Dii);
Sysij=ss(Aij,Bij,Cij,Dij);
[Sys]=parallel(Sysii,Sysij);
[A,B,C,D]=ssdata(Sys);
save matfp A B C D;
clear all;

% Gráficos

w=logspace(-3,1);
for j=1:50
    Giie(j)=(10.8*exp(-w(j)*i))/(68.7*(w(j)*i)+1);

```

```

Gije(j)=(5.25*exp(-25*(w(j)*i)))/(108.33*(w(j)*i)+1);
Num1(j)=-1*(w(j)*i)^3+12*(w(j)*i)^2-60*(w(j)*i)+120;
Den1(j)=1*(w(j)*i)^3+12*(w(j)*i)^2+60*(w(j)*i)+120;
F1(j)=Num1(j)/Den1(j);
Num2(j)=-1*(w(j)*i)^11+5.28*(w(j)*i)^10-
13.728*(w(j)*i)^9+23.063*(w(j)*i)^8-
27.6756*(w(j)*i)^7+24.7974*(w(j)*i)^6-
16.8622*(w(j)*i)^5+8.672*(w(j)*i)^4-
3.2954*(w(j)*i)^3+0.8788*(w(j)*i)^2-0.1476*(w(j)*i)+0.0118;

Den2(j)=1*(w(j)*i)^11+5.28*(w(j)*i)^10+13.728*(w(j)*i)^9+23.063*(w(j)*i)^8+
27.6756*(w(j)*i)^7+24.7974*(w(j)*i)^6+16.8622*(w(j)*i)^5+8.672*(w(j)*i)^4+
3.2954*(w(j)*i)^3+0.8788*(w(j)*i)^2+0.1476*(w(j)*i)+0.0118;
F25(j)=Num2(j)/Den2(j);
Gii(j)=(10.8*F1(j))/(68.7*(w(j)*i)+1);
Gij(j)=(5.25*F25(j))/(108.33*(w(j)*i)+1);
end
figure(1)
semilogx(w,20*log10(abs(Giie)), 'r', w, 20*log10(abs(Gii)), 'b');
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('giie-r e gii-b');
pause

figure(2)
semilogx(w,20*log10(abs(Gije)), 'r', w, 20*log10(abs(Gij)), 'b');
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('gije-r e gij-b');
pause

for j=1:50
    jwN=w(j)*1i*(eye(6));
    jwR=w(j)*1i*(eye(6));
    giie=(10.8*exp(-w(j)*i))/(68.7*(w(j)*i)+1);
    gije=(5.25*exp(-25*(w(j)*i)))/(108.33*(w(j)*i)+1);
    GNe=[giie gije 0 0 0 0;gije giie gije 0 0 0;0 gije giie gije 0
0;0 0 gije giie gije 0;0 0 0 gije giie gije;0 0 0 0 gije giie];
    GNec=conj(GNe');
    AutvGNe=eig(GNec*GNe);
    num1=-1*(w(j)*i)^3+12*(w(j)*i)^2-60*(w(j)*i)+120;
    den1=1*(w(j)*i)^3+12*(w(j)*i)^2+60*(w(j)*i)+120;
    f1=num1/den1;
    num2=-1*(w(j)*i)^11+5.28*(w(j)*i)^10-
13.728*(w(j)*i)^9+23.063*(w(j)*i)^8-
27.6756*(w(j)*i)^7+24.7974*(w(j)*i)^6-
16.8622*(w(j)*i)^5+8.672*(w(j)*i)^4-
3.2954*(w(j)*i)^3+0.8788*(w(j)*i)^2-0.1476*(w(j)*i)+0.0118;

    den2=1*(w(j)*i)^11+5.28*(w(j)*i)^10+13.728*(w(j)*i)^9+23.063*(w(j)*i)^8+
27.6756*(w(j)*i)^7+24.7974*(w(j)*i)^6+16.8622*(w(j)*i)^5+8.672*(w(j)*i)^4+
3.2954*(w(j)*i)^3+0.8788*(w(j)*i)^2+0.1476*(w(j)*i)+0.0118
    ;
    f25=num2/den2;
    gii=(10.8*f1)/(68.7*(w(j)*i)+1);
    gij=(5.25*f25)/(108.33*(w(j)*i)+1);

```



```

GN=[gii gij 0 0 0 0;gij gii gij 0 0 0;0 gij gii gij 0 0;0 0 gij
gii gij 0;0 0 0 gij gii gij;0 0 0 0 gij gii];
GNC=conj(GN');
AutvGN=eig(GNC*GN);
wi=1.5*(w(j)*i+1)/(w(j)*i+10);
Wi=wi*(eye(6));
GRe=GNe*(eye(6)+Wi);
GR=GN*(eye(6)+Wi);
VSGNe=sqrt(AutvGNe);
VSGN=sqrt(AutvGN);
for k=1:6
    VsingGNe(k,j)=abs(VSGNe(k));
    VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
end
VSmínGNe(j)=min(VsingGNe(:,j));
VSmáxGNe(j)=max(VsingGNe(:,j));
VSem1GNmine(j)=1/VSmínGNe(j);
VSem1GNmaxe(j)=1/VSmáxGNe(j);
VSem2GNmine(j)=1/(1+VSmínGNe(j));
VSem2GNmaxe(j)=1/(1+VSmáxGNe(j));
VSmínGN(j)=min(VsingGN(:,j));
VSmáxGN(j)=max(VsingGN(:,j));
VSem1GNmin(j)=1/VSmínGN(j);
VSem1GNmax(j)=1/VSmáxGN(j);
VSem2GNmin(j)=1/(1+VSmínGN(j));
VSem2GNmax(j)=1/(1+VSmáxGN(j));
end

load matfp;
figure(3)
sigma(A,B,C,D,w);hold on;grid;
semilogx(w,20*log10(VsingGNe),'g');hold off;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('VS de G(vermelho) e GN(azul)- atraso 1: ordem 3, atraso
25: ordem 11');

figure(4)
semilogx(w,20*log10(VSmínGNe),'r',w,20*log10(VSmáxGNe),'r',w,20*log10(VSmínGN),'b--',w,20*log10(VSmáxGN),'b--');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('VS Max e Min de G(vermelho) e GN(azul)- atraso 1: ordem 3,
atraso 25: ordem 11');

```

Listagem do programa rotina2.m

```

% Projeto do Controlador do Forno Eletrico com o metodo LQG/LTR
% Considera os atrasos com Pade

clear all;
load matfp;
figure(1)
pzmap(A,B,C,D);grid;

```



```

% Como todos os zeros e polos estão no SPE, logo, precisamos incluir
integradores na entrada da planta.
% A=[0 0;Bp Ap]; B=[I;0]; C=[0 Cp];

Ap=A; Bp=B; Cp=C;
A=[zeros(6,102);Bp Ap];
B=[eye(6);zeros(96,6)];
C=[zeros(6) Cp];
save matfpn A B C D;
figure(2)
    pzmap(A,B,C,D);grid;

w=logspace(-3,1);
for j=1:50
    jwN=w(j)*i*(eye(102));

    % Planta Nominal
    GN=C*(inv(jwN-A))*B;

    % G(s)
    giie=(10.8*exp(-w(j)*i))/(68.7*(w(j)*i)+1);
    gije=(5.25*exp(-25*(w(j)*i)))/(108.33*(w(j)*i)+1);
    Ge=[giie gije 0 0 0 0;gije giie gije 0 0 0;0 gije giie gije 0 0;0
0 gije giie gije 0;0 0 0 gije giie gije;0 0 0 0 gije giie];

    % Planta Real
    wi=1.5*(w(j)*i+1)/(w(j)*i+10);
    Wi=wi*([1 1 0 0 0 0;1 1 1 0 0 0;0 1 1 1 0 0;0 0 1 1 1 0;0 0 0 1 1
1;0 0 0 0 1 1]);
    GR=Ge*(eye(6)+Wi);

    % Erro
    E=(GR-GN)*inv(GN);

    % Conjugados
    Gnc=conj(GN');
    GRc=conj(GR');
    Ec=conj(E');

    % Autovalores
    AutvGN=eig(GNc*GN);
    AutvGR=eig(GRc*GR);
    AutvE=eig(Ec*E);

    % Valores Singulares
    VSGN=sqrt(AutvGN);
    VSGR=sqrt(AutvGR);
    VSE=sqrt(AutvE);

    % Modulo dos Valores Singulares
    for k=1:6
        VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
        VsingGR(k,j)=abs(VSGR(k));
        VsingE(k,j)=abs(VSE(k));
    end

    % Valores Singulares Minimos
    VSminGN(j)=min(VsingGN(:,j));

```

```

VSminGR(j)=min(VsingGR(:,j));
VSminE(j)=min(VsingE(:,j));

% Valores Singulares Maximos
VSmaxGN(j)=max(VsingGN(:,j));
VSmaxGR(j)=max(VsingGR(:,j));
VSmaxE(j)=max(VsingE(:,j));

% Valores Singulares Minimos e Maximos de 1/em
VSem1Emin(j)=1/VSminE(j);
VSem1Emax(j)=1/VSmaxE(j);

% Valores Singulares Minimos e Maximos de 1/(1+em)
VSem2Emin(j)=1/(1+VSminE(j));
VSem2Emax(j)=1/(1+VSmaxE(j));
end

figure(3)
semilogx(w,20*log10(VsingGN),'b');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares de GN');

figure(4)
semilogx(w,20*log10(VSminGN),'b--',w,20*log10(VSmaxGN),'b--',w,20*log10(VSminGR),'r',w,20*log10(VSmaxGR),'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares');

% Barreira de Estabilidade

figure(5)
semilogx(w,20*log10(VsingE));
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares do Erro');

figure(6)
semilogx(w,20*log10(VSem1Emin),'b',w,20*log10(VSem1Emax),'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares Max e Min do Erro - 1/em');

figure(7)
semilogx(w,20*log10(VSem2Emin),'b',w,20*log10(VSem2Emax),'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares Max e Min do Erro - 1/(1+em)');

% A Barreira de Estabilidade sera a mais restritiva
% Barreira de 1/(1+em)

for j=1:50

```

```

    if(w(j)<1)
        Barreiral(j)=100;
    else
        Barreiral(j)=20*log10(VSem2Emax(j));
    end
end

figure(8)
    semilogx(w,20*log10(VSminGN),'r',w,20*log10(VSmaxGN),'r',w,Barreiral,'b--');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitante de Estabilidade 1/(1+eM)');

% Barreira de Desempenho

alfa=0.1;
for j=1:50
    if(w(j)<=0.01)
        Barreira2(j)=(20*log10(1/alfa))/(1-20*log10(VsingE(j)));
    else
        Barreira2(j)=-200;
    end
end

figure(9)
    semilogx(w,Barreira2,'g');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitante de Desempenho');

% Envoltoria

wn=1;
for j=1:50
    if(w(j)<wn)
        Barreira(j)=Barreira2(j);
    end
    if (w(j)>=wn)
        Barreira(j)=Barreiral(j);
    end
end

figure(10)
    semilogx(w,Barreiral,'b--',w,20*log10(VSminGN),'r',w,20*log10(VSmaxGN),'r',w,Barreira2,'g-');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitantes');

% Procedimento LQG/LTR

% 1 - Levantamento da Malha Objetivo

% Primeira Tentativa de obter L:

```

```

Ll=-inv(Cp*inv(Ap)*Bp);
Lh=inv(Ap)*Bp*inv(Cp*inv(Ap)*Bp);
L=[Ll;Lh];
mi=80;
mil=1/sqrt(mi);

%1b

for j=1:50
    jwN=w(j)*1i*eye(102);
    S=mil*C*inv(jwN-A)*L;
    Sc=conj(S');
    AutvS=eig(Sc*S);
    VSS=sqrt(AutvS);
    for k=1:6
        VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
    end
end

VsinS=20*log10(VsingS);

for j=1:50
    if(w(j)<0.01)
        Bd1(j)=Barreira2(j);
    else
        Bd1(j)=-100;
    end
end

figure(11)
semilogx(w,Bd1,'g-.',w,VsinS,'r',w,Barreiral,'b--');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Matriz L');

% 2a
% Solucao da Equacao Algebrica de Riccati
% 0=A*Pf+Pf*A'+L*L'-(1/mi)*Pf*C'*C*Pf

Ak=A';
Bk=C';
[K,Pf]=lqr2(Ak,Bk,L*L',mi);

%2b

Kf=(1/mi)*Pf*C';

%2c

figure(12)
sigma(A,H,C,D,w,'r');
title('Malha Objetivo');hold on;
plot(w,Bd1,'g-.',w,Barreiral,'b--');hold off;

% 2d

% Procedimento de Recuperacao LTR

```



```

% 3a
% Polos e Zeros de GN

figure(13)
    pzmap(A,B,C,D);grid;
    title('Polos e Zeros de GN');
% pause;

% Como vemos, os zeros de GN estao no SPE

% 3b
% Recuperacao

ro=0.00000003;
[Kl,Pc]=lqr2(A,B,C'*C,ro);
Kc=(1/ro)*B'*Pc;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=reg(A,B,C,D,Kc,Kf);
save matGcl Ac Bc Cc Dc;

%3c

[Aft,Bft,Cft,Dft]=series(A,B,C,D,Ac,Bc,Cc,Dc);

%3d

figure(14)
    sigma(A,Kf,C,D,w);hold on;
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w);hold off;

% 3g
% Verificacao da Estabilidade e do Desempenho para o Sistema

figure(15)
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w,'r');hold on;
    semilogx(w,Barreira2,'g-.',w,Barreiral,'b--');
    title('Robustez do Desempenho');hold off;

Aftmf=Aft-Bft*Cft;
Bftmf=Bft;
Cftmf=Cft;
Dftmf=Dft;

figure(16)
    sigma(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf,w,'r');hold on;
    semilogx(w,Barreira2,'g-.',w,Barreiral,'b--');
    title('Robustez da Estabilidade');hold off;

% Polos e Zeros em Malha Fechada

figure(17)
    pzmap(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf);grid;
    title('Polos e Zeros de Malha Fechada');

save matGfpl Aft Bft Cft Dft;

```

Listagem do programa rotina3.m

```
% Validação do Projeto

clear all;
load matfpn;
load matGc1;
w=logspace(-3,1);
n=size(A);

for j=1:50

% Y(s)=T(s)*P(s)*r(s)
% S(s)=inv[I+G(s)*K(s)]      Matriz de Sensibilidade
% G(s)=GN(s)*[I+Wi(s)]
% Wi(s)=wi(s)*I;   wi(s)=1.5*(s+1)/(s+10)

    jwN=w(j)*i*eye(n);
    GN=C*inv(jwN-A)*B+D;
    wi=1.5*(w(j)*i+1)/(w(j)+10);
    Wi=wi*([1 1 0 0 0 0;1 1 1 0 0 0;0 1 1 1 0 0;0 0 1 1 1 0;0 0 0 1 1
1;0 0 0 0 1 1]);
    Wiinv=inv(Wi);
    wp=0.1*(w(j)*i+0.01)/(w(j)*i);
    magwp(j)=20*log10(abs(1/wp));
    Wp=wp*eye(6);
    Wpinv=inv(Wp);
    G=GN*(eye(6)+Wi);
    K=Cc*inv(jwN-Ac)*Bc+Dc;
    S=inv(eye(6)+G*K);

% T(s)=inv[I+G(s)*K(s)]*G(s)*K(s)=S(s)*G(s)*K(s)      Função de
Sensibilidade Complementar

    T=S*G*K;

% Wp(s)=wp(s)*I;   wp(s)=(50s+1)/(100s)=nump/denp

% Criterio de Desempenho
% VsingmaxS<1/wp(s)

    Wpinvc=conj(Wpinv');
    AutvWpinv=eig(Wpinvc*Wpinv);
    VSWpinv=sqrt(AutvWpinv);
    Sc=conj(S');
    AutvS=eig(Sc*S);
    VSS=sqrt(AutvS);
    for k=1:6
        VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
        VsingWpinv(k,j)=abs(VSWpinv(k));
    end
    VSmagS(j)=max(VsingS(:,j));
    VSmagWpinv(j)=max(VsingWpinv(:,j));

% Criterio de Estabilidade
% Vsingmax(T(s))<1/wi(s)
```

```

Wiinvc=conj(Wiinv');
AutvWiinv=eig(Wiinvc*Wiinv);
VSWiinv=sqrt(AutvWiinv);
Tc=conj(T');
AutvT=eig(Tc*T);
VST=sqrt(AutvT);
for k=1:6
    VsingT(k,j)=abs(VST(k));
    VsingWiinv(k,j)=abs(VSWiinv(k));
end
VSmxT(j)=max(VsingT(:,j));
VSmxWiinv(j)=max(VsingWiinv(:,j));
end

figure(1)
semilogx(w,20*log10(VSmxS),'b',w,{VsmxWpinv},'r--');
grid;
title('Critério de Desempenho')
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

figure(2)
semilogx(w,20*log10(VSmxT),'b',w,20*log10(VSmxWiinv),'r--');
grid;
title('Critério de Estabilidade')
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

```

Listagem do programa rotina4.m

```

% Realizacao de Gilbert

clear all;
w=logspace(-2,2);
nii=0.1572;
nij=0.0485;

% G=[gii gij;gij gii];

W1=[nii 0 0 0 0 0;0 nii 0 0 0 0;0 0 nii 0 0 0;0 0 0 nii 0 0;0 0 0 0 nii 0 0;0 0 0 0 0 nii];
W2=[0 nij 0 0 0 0;nij 0 nij 0 0 0;0 nij 0 nij 0 0;0 0 nij 0 nij 0;0 0 0 nij 0 0];
k1=rank(W1)
k2=rank(W2)
pause;
lambda1=-0.0146;
lambda2=-0.0092;

% A, B, C, D

A=[lambda1*eye(6) zeros(6);zeros(6) lambda2*eye(6)]
B=[eye(6);eye(6)]
C=[W1 W2]
D=zeros(6)

```

```

pause;

% Graficos

for j=1:50
    % Planta Nominal
    GN=C*(inv(w(j)*i*eye(12)-A))*B;

    % G(S)
    dii=w(j)*i+0.0146;
    dij=w(j)*i+0.0092;
    gii=nii/dii;
    gij=nij/dij;
    G=[gii gij 0 0 0 0;gij gii gij 0 0 0;0 gij gii gij 0 0;0 0 gij
gii gij 0;0 0 0 gij gii gij;0 0 0 0 gij gii];

    % Conjugados
    GNc=conj(GN');
    Gc=conj(G');

    % Autovalores
    AutvGN=eig(GNc*GN);
    AutvG=eig(Gc*G);

    % Valores Singulares
    VSGN=sqrt(AutvGN);
    VSG=sqrt(AutvG);

    % Modulo dos Valores Singulares
    for k=1:6
        VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
        VsingG(k,j)=abs(VSG(k));
    end

    % Valores Singulares Minimios
    VSminGN(j)=min(VsingGN(:,j));
    VSminG(j)=min(VsingG(:,j));

    % Valores Singulares Maximos
    VSmaxGN(j)=max(VsingGN(:,j));
    VSmaxG(j)=max(VsingG(:,j));

end

figure(1)
semilogx(w,20*log10(VsingGN),'+',w,20*log10(VsingG),'r');grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares de G(vermelho)e GN(sinal de +)');
pause;

save matG A B C D;

```


Listagem do programa rotina5.m

```
% Projeto do Controlador do Forno Eletrico com o metodo LQG/LTR
% Considera os atrasos como Incertezas

% Planta Nominal

clear all;
load matG;
figure(1)
    pzmap(A,B,C,D);grid;

% Como todos os zeros e polos estão no SPE, logo, precisamos incluir
integradores na entrada da planta.
% A=[0 0;Bp Ap]; B=[I;0]; C=[0 Cp];

Ap=A; Bp=B; Cp=C;
A=[zeros(6,18);Bp Ap];
B=[eye(6);zeros(12,6)];
C=[zeros(6) Cp];
save matGp A B C D;
figure(2)
    pzmap(A,B,C,D);grid;

w=logspace(-3,1);
for j=1:50
    jwN=w(j)*i*(eye(18));

    % Planta Nominal
    GN=C*(inv(jwN-A))*B;

    % Ge(s)
    giie=(10.8)/(68.7*(w(j)*i)+1);
    giije=(5.25)/(108.33*(w(j)*i)+1);
    Ge=[giie giije 0 0 0 0;giije giie giije 0 0 0;0 giije giie giije 0 0;0
0 giije giie giije 0;0 0 0 giije giie giije;0 0 0 0 giije giie];

    % Planta Real
    wii=2.2*(w(j)*i)/(w(j)*i+1);
    wij=30*(w(j)*i)/(11.5*w(j)*i+1);
    J=[0 1 0 0 0 0;1 0 1 0 0 0;0 1 0 1 0 0;0 0 1 0 1 0;0 0 0 1 0 1;0
0 0 1 0];
    Wi=wii*(eye(6))+wij*J;
    GR=Ge*(eye(6)+Wi);

    % Erro
    E=(GR-GN)*inv(GN);

    % Conjugados
    GNc=conj(GN');
    GRc=conj(GR');
    Ec=conj(E');

    % Autovalores
    AutvGN=eig(GNc*GN);
    AutvGR=eig(GRc*GR);
    AutvE=eig(Ec*E);
```

```

% Valores Singulares
VSGN=sqrt(AutvGN);
VSGR=sqrt(AutvGR);
VSE=sqrt(AutvE);

% Modulo dos Valores Singulares
for k=1:6
    VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
    VsingGR(k,j)=abs(VSGR(k));
    VsingE(k,j)=abs(VSE(k));
end

% Valores Singulares Minimios
VSminGN(j)=min(VsingGN(:,j));
VSminGR(j)=min(VsingGR(:,j));
VSminE(j)=min(VsingE(:,j));

% Valores Singulares Maximios
VSmaxGN(j)=max(VsingGN(:,j));
VSmaxGR(j)=max(VsingGR(:,j));
VSmaxE(j)=max(VsingE(:,j));

% Valores Singulares Minimios e Maximios de 1/em
VSemlEmin(j)=1/VSminE(j);
VSemlEmax(j)=1/VSmaxE(j);

% Valores Singulares Minimios e Maximios de 1/(1+em)
VSem2Emin(j)=1/(1+VSminE(j));
VSem2Emax(j)=1/(1+VSmaxE(j));
end

figure(3)
semilogx(w,20*log10(VsingGN),'b');grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares de GN');

figure(4)
semilogx(w,20*log10(VSminGN),'b--',w,20*log10(VSmaxGN),'b--',w,20*log10(VSminGR),'r',w,20*log10(VSmaxGR),'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares');

% Barreira de Estabilidade

figure(5)
semilogx(w,20*log10(VsingE));grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares do Erro');

figure(6)
semilogx(w,20*log10(VSemlEmin),'b',w,20*log10(VSemlEmax),'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

```

```

    title('Valores Singulares Max e Min de 1/em');

figure(7)
semilogx(w, 20*log10(VSem2Emin), 'b', w, 20*log10(VSem2Emax), 'r');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Valores Singulares Max e Min de 1/(1+em)');

% A Barreira de Estabilidade sera a mais restritiva
% Barreira de 1/(1+em)

for j=1:50
    if(w(j)<1)
        Barreiral(j)=100;
    else
        Barreiral(j)=20*log10(VSem2Emax(j));
    end
end

figure(8)
semilogx(w, 20*log10(VSminGN), 'r', w, 20*log10(VSmaxGN), 'r', w, Barreiral, 'b--');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Limitante de Estabilidade 1/(1+em)');

% Barreira de Desempenho

alfa=0.1;
for j=1:50
    if(w(j)<=0.01)
        Barreira2(j)=20*log10(1/alfa)/(1-20*log10(VsingE(j)));
    else
        Barreira2(j)=-200;
    end
end

figure(9)
semilogx(w, Barreira2, 'g-.');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Limitante de Desempenho');

% Envoltoria

wn=10;
for j=1:50
    if(w(j)<wn)
        Barreira(j)=Barreira2(j);
    end
    if (w(j)>=wn)
        Barreira(j)=Barreiral(j);
    end
end

figure(10)

```

```

    semilogx(w, Barreiral, 'b--', w, Barreira2, 'g-
    ', w, 20*log10(VSminGN), 'r', w, 20*log10(VSmaxGN), 'r');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitantes');

% Procedimento LQG/LTR

% 1 - Levantamento da Malha Objetivo

% Primeira Tentativa de obter L:

Ll=-inv(Cp*inv(Ap)*Bp);
Lh=inv(Ap)*Bp*inv(Cp*inv(Ap)*Bp);
L=[Ll;Lh];
mi=70;
mil=1/sqrt(mi);

%1b

for j=1:50
    jwN=w(j)*1i*eye(18);
    S=mil*C*inv(jwN-A)*L;
    Sc=conj(S');
    AutvS=eig(Sc*S);
    VSS=sqrt(AutvS);
    for k=1:6
        VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
    end
end

VsinS=20*log10(VsingS);

for j=1:50
    if(w(j)<0.01)
        Bd1(j)=Barreira2(j);
    else
        Bd1(j)=-200;
    end
end

figure(11)
    semilogx(w, Bd1, 'g-', w, VsinS, 'r', w, Barreiral, 'b--');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Matriz L');

% 2a
% Solucao da Equacao Algebrica de Riccati
%  $0=A*P_f+P_f*A'+L*L'-(1/mi)*P_f*C'*C*P_f$ 

Ak=A';
Bk=C';
[K, Pf]=lqr2(Ak, Bk, L*L', mi);

%2b

```



```

Kf=(1/mi)*Pf*C';

%2c

figure(12)
    sigma(A,Kf,C,D,w);
    title('Malha Objetivo');hold on;
    plot(w,Bd1,'g-.',w,Barreiral,'b--');hold off;

% Procedimento de Recuperacao LTR
% 3a
% Polos e Zeros de GN

figure(13)
    pzmap(A,B,C,D);grid;
    title('Polos e Zeros de GN');

% Como vemos, os zeros de GN estao no SPE

% 3b
% Recuperacao

ro=10e-4
[Kl,Pc]=lqr2(A,B,C'*C,ro);
Kc=(1/ro)*B'*Pc;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=reg(A,B,C,D,Kc,Kf);
save matGcl Ac Bc Cc Dc;

%3c

[Aft,Bft,Cft,Dft]=series(A,B,C,D,Ac,Bc,Cc,Dc);

%3d

figure(14)
    sigma(A,H,C,D,w);hold on;
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w);hold off;

% 3g
% Verificacao da Estabilidade e do Desempenho para o Sistema

figure(15)
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w);hold on;
    semilogx(w,Barreira2,'g-.',w,Barreiral,'b--');
    title('Robustez do Desempenho');hold off;

Aftmf=Aft-Bft*Cft;
Bftmf=Bft;
Cftmf=Cft;
Dftmf=Dft;

figure(16)
    sigma(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf,w);hold on;
    semilogx(w,Barreiral,'b--');
    title('Robustez da Estabilidade');hold off;

% Polos e Zeros em Malha Fechada

figure(17)

```

```

pzmap(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf);grid;
title('Polos e Zeros de Malha Fechada');

save matGfp1 Aft Bft Cft Dft;

```

Listagem do programa rotina6.m

```

% Validação do Projeto

clear all;
load matgp;
load matGc1;
w=logspace(-3,1);
n=size(A);

for j=1:50

% y(s)=T(s)*P(s)*r(s)
% S(s)=inv[I+G(s)*K(s)]      Matriz de Sensibilidade
% G(s)=GN(s)*[I+Wi(s)]
% Wi(s)=wi(s)*I;   wi(s)=1.5*(s+1)/(s+10)

    jwN=w(j)*i*eye(n);
    GN=C*inv(jwN-A)*B+D;
    wii=2.2*(w(j)*i)/(w(j)+1);
    wij=30*w(j)*i/(11.5*w(j)*i+1);
    J=[0 1 0 0 0 0;1 0 1 0 0 0;0 1 0 1 0 0;0 0 1 0 1 0;0 0 0 1 0 1;0
0 0 0 1 0];
    Wi=wii*eye(6)+wij*J;
    Wiinv=inv(Wi);
    wp=0.1*(w(j)*i+0.01)/(w(j)*i);
    Wp=wp*eye(6);
    Wpinv=inv(Wp);
    G=GN*(eye(6)+Wi);
    K=Cc*inv(jwN-Ac)*Bc+Dc;
    S=inv(eye(6)+G*K);

% T(s)=inv[I+G(s)*K(s)]*G(s)*K(s)=S(s)*G(s)*K(s)      Função de
Sensibilidade Complementar

    T=S*G*K;

% Wp(s)=wp(s)*I;   wp(s)=(50s+1)/(100s)=nump/denp

% Critério de Desempenho
% VsingmaxS<1/wp(s)

    Wpinvc=conj(Wpinv');
    AutvWpinv=eig(Wpinvc*Wpinv);
    VSWpinv=sqrt(AutvWpinv);
    Sc=conj(S');
    AutvS=eig(Sc*S);
    VSS=sqrt(AutvS);
    for k=1:6
        VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
        VsingWpinv(k,j)=abs(VSWpinv(k));
    end
end

```

```

end
VSmxS(j)=max(VsingS(:,j));
VSmxWpinv(j)=max(VsingWpinv(:,j));

% Critério de Estabilidade
% Vsmx(T(s)) < 1/wi(s)

Wiinv=conj(Wiinv');
AutvWiinv=eig(Wiinv*Wiinv);
VSWiinv=sqrt(AutvWiinv);
Tc=conj(T');
AutvT=eig(Tc*T);
VST=sqrt(AutvT);
for k=1:6
    VsingT(k,j)=abs(VST(k));
    VsingWiinv(k,j)=abs(VSWiinv(k));
end
VSmxT(j)=max(VsingT(:,j));
VSmxWiinv(j)=max(VsingWiinv(:,j));
end

figure(1)
semilogx(w,20*log10(VSmxS),'b',w,20*log10(VSmxWpinv),'r--');
grid;
title('Critério de Desempenho');
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

figure(2)
semilogx(w,20*log10(VSmxT),'b',w,20*log10(VSmxWiinv),'r--');
grid;
title('Critério de Estabilidade');
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

```

Listagem do programa rotina7.m

```

% Realizacao de Gilbert para G(s) da coluna de destilcao

clear all;
n11=12.8/16.7;
d11=(1/16.7)*[16.7 1];
n12=-18.9/21;
d12=(1/21)*[21 1];
n21=6.6/10.9;
d21=(1/10.9)*[10.9 1];
n22=-19.4/14.4;
d22=(1/14.4)*[14.4 1];
save coefG n11 n12 n21 n22 d11 d12 d21 d22;

d=conv(conv(d11,d12),conv(d21,d22));
N11=n11*conv(conv(d12,d21),d22);
N12=n12*conv(conv(d11,d21),d22);
N21=n21*conv(conv(d11,d12),d22);
N22=n22*conv(conv(d11,d12),d21);
p=roots(d);

```

```

A=[p(1) 0 0 0;0 p(2) 0 0;0 0 p(3) 0;0 0 0 p(4)]
B=[1 0;0 1;1 0;0 1]
C=[0 0 n11 n12;n21 n22 0 0]
D=zeros(2)

w=logspace(-1,4);
figure(1)
    sigma(A,B,C,D,w);
    grid;

% G(s)
for j=1:50
    s=w(j)*i;
    GN=C*inv(s*eye(4)-A)*B;
    g11=12.8/(16.7*s+1);
    g12=-18.9/(21*s+1);
    g21=6.6/(10.9*s+1);
    g22=-19.4/(14.4*s+1);
    G=[g11 g12;g21 g22];
    Gc=conj(G');
    Gnc=conj(GN');
    autvG=eig(Gc*G);
    autvGN=eig(Gnc*GN);
    VSG=sqrt(autvG);
    VSGN=sqrt(autvGN);
    for k=1:2
        VsingG(k,j)=abs(VSG(k));
        VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
    end
end

figure(2)
    semilogx(w,20*log10(VsingG),'+',w,20*log10(VsingGN),'r');
    grid;

save matABC1 A B C D;

```

Listagem do programa rotina8.m

```

% Projeto do Controlador da coluna de Destilação com o metodo
LQG/LTR
% Considera os atrasos como incertezas

% Planta Nominal

clear all;
load matABC;
figure(1)
    pzmap(A,B,C,D);grid;

% Como todos os zeros e polos estão no SPE, logo, precisamos incluir
integradores na entrada da planta.
% A=[0 0;Bp Ap]; B=[I;0]; C=[0 Cp];

Ap=A; Bp=B; Cp=C;

```



```

A=[zeros(2,6);Bp Ap];
B=[eye(2);zeros(4,2)];
C=[zeros(2) Cp];
save matGp A B C D;
figure(2)
    pzmap(A,B,C,D);grid;

w=logspace(-2,2);
for j=1:50
    jwN=w(j)*i*(eye(6));

    % Planta Nominal
    GN=C*(inv(jwN-A))*B;

    % Ge(s)
    g11e=(12.8)/(16.7*(w(j)*i)+1);
    g12e=(-18.9)/(21*(w(j)*i)+1);
    g21e=(6.6)/(10.9*(w(j)*i)+1);
    g22e=(-19.4)/(14.4*(w(j)*i)+1);
    Ge=[g11e g12e;g21e g22e];

    % Planta Real
    w1=(2.2*w(j)*i)/(w(j)*i+1);
    w2=(4.5*w(j)*i)/(2*w(j)*i+1);
    w3=(9*w(j)*i)/(5*w(j)*i+1);
    Wi=[w1 w2;w3 w2];
    GR=Ge*(eye(2)+Wi);
    %GR=Ge;

    % Erro
    E=(GR-GN)*inv(GN);

    % Conjugados
    GNc=conj(GN');
    GRc=conj(GR');
    Ec=conj(E');

    % Autovalores
    AutvGN=eig(GNc*GN);
    AutvGR=eig(GRc*GR);
    AutvE=eig(Ec*E);

    % Valores Singulares
    VSGN=sqrt(AutvGN);
    VSGR=sqrt(AutvGR);
    VSE=sqrt(AutvE);

    % Modulo dos Valores Singulares
    for k=1:2
        VsingGN(k,j)=abs(VSGN(k));
        VsingGR(k,j)=abs(VSGR(k));
        VsingE(k,j)=abs(VSE(k));
    end

    % Valores Singulares Minimos
    VSminGN(j)=min(VsingGN(:,j));
    VSminGR(j)=min(VsingGR(:,j));
    VSminE(j)=min(VsingE(:,j));

```

```

% Valores Singulares Maximos
VSmagGN(j)=max(VsingGN(:,j));
VSmagGR(j)=max(VsingGR(:,j));
VSmagE(j)=max(VsingE(:,j));

% Valores Singulares Minimos e Maximos de 1/em
VSemlEmin(j)=1/VSmagE(j);
VSemlEmax(j)=1/VSmagE(j);

% Valores Singulares Minimos e Maximos de 1/(1+em)
VSem2Emin(j)=1/(1+VSmagE(j));
VSem2Emax(j)=1/(1+VSmagE(j));
end

figure(3)
    semilogx(w,20*log10(VsingGN),'b');grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Valores Singulares de Gn');

figure(4)
    semilogx(w,20*log10(VsmagGN),'b--',w,20*log10(VsmagGR),'b--',w,20*log10(VsmagGR),'r',w,20*log10(VsmagGR),'r');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Valores Singulares de Gn e Gr');

% Barreira de Estabilidade

figure(5)
    semilogx(w,20*log10(VsingE));grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Valores Singulares do Erro');

figure(6)
    semilogx(w,20*log10(VSemlEmin),'b',w,20*log10(VSemlEmax),'r');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Valores Singulares Max e Min de 1/em');

figure(7)
    semilogx(w,20*log10(VSem2Emin),'b',w,20*log10(VSem2Emax),'r');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Valores Singulares Max e Min de 1/(1+em)');

% A Barreira de Estabilidade sera a mais restritiva
% Barreira de 1/(1+em)

for j=1:50
    if(w(j)<10)
        Barreiral(j)=100;
    else
        Barreiral(j)=20*log10(VSem2Emax(j));
    end
end

```

```

end

figure(8)
    semilogx(w,20*log10(VSminGN),'r',w,20*log10(VSmaxGN),'r',w,Barreir
    ral,'b--');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitante de Estabilidade 1/(1+eM)');

% Barreira de Desempenho

alfa=0.2;
for j=1:50
    if(w(j)<=0.07)
        Barreira2(j)=20*log10(1/alfa)/(1-20*log10(VsingE(j)));
    else
        Barreira2(j)=-160;
    end
end

figure(9)
    semilogx(w,Barreira2,'g-.');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('dB');
    title('Limitante de Desempenho');

% Envoltoria

figure(10)
    semilogx(w,Barreiral,'b--',w,Barreira2,'g-
    .',w,20*log10(VSminGN),'r',w,20*log10(VSmaxGN),'r');
    grid;
    xlabel('rad/min');
    ylabel('rad/min');
    title('Limitantes');

% Procedimento LQG/LTR

% 1 - Levantamento da Malha Objetivo

% Primeira Tentativa de obter L:

Ll=-inv(Cp*inv(Ap)*Bp);
Lh=-inv(Ap)*Bp*Ll;
L=[Ll;Lh];
mi=5;
mil=1/sqrt(mi);

%lb

for j=1:50
    jwN=w(j)*1i*eye(6);
    S=mil*C*inv(jwN-A)*L;
    Sc=conj(S');
    AutvS=eig(Sc*S);
    VSS=sqrt(AutvS);
    for k=1:2

```

```

        VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
    end
end

VsinS=20*log10(VsingS);

for j=1:50
    if(w(j)<0.07)
        Bdl(j)=Barreira2(j);
    else
        Bdl(j)=-150;
    end
end

figure(11)
semilogx(w,Bdl,'g-.',w,VsinS,'r',w,Barreiral,'b--');
grid;
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');
title('Matriz L');

% 2a
% Solucao da Equacao Algebrica de Riccati
%  $0=A*P_f+P_f*A'+L*L'-(1/m_i)*P_f*C'*C*P_f$ 

Ak=A';
Bk=C';
[K,Pf]=lqr2(Ak,Bk,L*L',mi);

%2b

Kf=(1/mi)*Pf*C';

%2c

figure(12)
sigma(A,Kf,C,D,w);
title('Malha Objetivo');hold on;
plot(w,Bdl,'g-.',w,Barreiral,'b--');hold off;

% Procedimento de Recuparacao LTR
% 3a
% Polos e Zeros de GN

figure(13)
pzmap(A,B,C,D);grid;
title('Polos e Zeros de GN');

% Como vemos, os zeros de GN estao no SPE

% 3b
% Recuperacao

ro=10e-3;
[K1,Pc]=lqr2(A,B,C'*C,ro);
Kc=(1/ro)*B'*Pc;
[Ac,Bc,Cc,Dc]=reg(A,B,C,D,Kc,Kf);
save matGc Ac Bc Cc Dc;

```



```
%3c
```

```
[Aft,Bft,Cft,Dft]=series(A,B,C,D,Ac,Bc,Cc,Dc);
```

```
%3d
```

```
figure(14)
    sigma(A,H,C,D,w);hold on;
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w);grid;hold off;
```

```
% 3g
```

```
% Verificacao da Estabilidade e do Desempenho para o Sistema
```

```
figure(15)
    sigma(Aft,Bft,Cft,Dft,w);hold on;
    semilogx(w,Bdl,'g-');
    title('Robustez do Desempenho');hold off;
```

```
Aftmf=Aft-Bft*Cft;
Bftmf=Bft;
Cftmf=Cft;
Dftmf=Dft;
```

```
figure(16)
    sigma(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf,w);hold on;
    semilogx(w,Barreiral,'b--');
    title('Robustez da Estabilidade');hold off;
```

```
% Polos e Zeros em Malha Fechada
```

```
figure(17)
    pzmap(Aftmf,Bftmf,Cftmf,Dftmf);grid;
    title('Polos e Zeros de Malha Fechada');
```

```
save matGfp1 Aft Bft Cft Dft;
```

Listagem do programa rotina9.m

```
% Validação do Projeto
```

```
clear all;
load matgp;
load matGc;
w=logspace(-3,1);
n=size(A);
```

```
for j=1:50
```

```
    %  $y(s)=T(s)*P(s)*r(s)$ 
    %  $S(s)=inv[I+G(s)*K(s)]$  Matriz de Sensibilidade
    %  $G(s)=GN(s)*[I+Wi(s)]$ 
    %  $Wi(s)=wi(s)*I$ ;  $wi(s)=1.5*(s+1)/(s+10)$ 
```

```
    jwN=w(j)*i*eye(n);
    GN=C*inv(jwN-A)*B+D;
    wl=1.2*(w(j)*i)/(w(j)+1);
```

```

w3=1.5*w(j)*i/(2*w(j)*i+1);
w7=4*w(j)*i/(5*w(j)*i+1);
Wi=[w1 w3;w7 w3];
Wiinv=inv(Wi);
wp=0.2*(w(j)*i+0.1)/(w(j)*i);
Wp=wp*eye(2);
Wpinv=inv(Wp);
G=GN*(eye(2)+Wi);
K=Cc*inv(jwN-Ac)*Bc+Dc;
S=inv(eye(2)+G*K);

% T(s)=inv[I+G(s)*K(s)]*G(s)*K(s)=S(s)*G(s)*K(s)   Função de
Sensibilidade Complementar

T=S*G*K;

% Wp(s)=wp(s)*I;   wp(s)=(50s+1)/(100s)=nump/denp

% Critério de Desempenho
%   VsingmaxS<1/wp(s)

Wpinvc=conj(Wpinv');
AutvWpinv=eig(Wpinvc*Wpinv);
VSWpinv=sqrt(AutvWpinv);
Sc=conj(S');
AutvS=eig(Sc*S);
VSS=sqrt(AutvS);
for k=1:2
    VsingS(k,j)=abs(VSS(k));
    VsingWpinv(k,j)=abs(VSWpinv(k));
end
VSmxS(j)=max(VsingS(:,j));
VSmxWpinv(j)=max(VsingWpinv(:,j));

% Critério de Estabilidade
%   Vsingmax(T(s))<1/wi(s)

Wiinvc=conj(Wiinv');
AutvWiinv=eig(Wiinvc*Wiinv);
VSWiinv=sqrt(AutvWiinv);
Tc=conj(T');
AutvT=eig(Tc*T);
VST=sqrt(AutvT);
for k=1:2
    VsingT(k,j)=abs(VST(k));
    VsingWiinv(k,j)=abs(VSWiinv(k));
end
VSmxT(j)=max(VsingT(:,j));
VSmxWiinv(j)=max(VsingWiinv(:,j));
end

figure(1)
semilogx(w,20*log10(VSmxS),'b',w,20*log10(VSmxWpinv),'r--');
grid;
title('Critério de Desempenho')
xlabel('rad/min');
ylabel('dB');

figure(2)

```

```
semilogx(w,20*log10(VSmaxT),'b',w,20*log10(VSmaxWiinv),'r--');  
grid;  
title('Critério de Estabilidade')  
xlabel('rad/min');  
ylabel('dB');
```


Matrizes do Programa rotina2.m

Ac

Ac(1:14,1:42) = 1.0e+003 *

Columns 1 through 14

-0.0429	-0.0026	-0.0003	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.8929
-0.0026	-0.0432	-0.0025	-0.0003	0.0001	-0.0000	-0.1824
-0.0003	-0.0025	-0.0432	-0.0025	-0.0003	0.0001	0.0140
0.0001	-0.0003	-0.0025	-0.0432	-0.0025	-0.0003	0.0058
-0.0000	0.0001	-0.0003	-0.0025	-0.0432	-0.0026	-0.0001
-0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0003	-0.0026	-0.0429	0.0000
0.0010	0	0	0	0	0	-0.0120
0	0	0	0	0	0	0.0080
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0.0010	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000

-1.3266	-1.6775	-3.4010	-0.1824	0.0792	0.0957	-0.0002
0.0792	0.0957	-0.0002	-0.8789	-1.2926	-1.6543	-3.4007
0.0340	0.0231	0.0003	-0.1767	0.0850	0.0986	-0.0002
0.0058	0.0029	0.0000	0.0139	0.0340	0.0231	0.0003
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0058	0.0058	0.0029	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0075	-0.0038	-0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0040	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0001	0.0011	-0.0002	-0.0000	0.0001	-0.0001	0.0001
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0120	-0.0075	-0.0038	-0.0001
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0080	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0040	-0.0000	0.0000
0.0001	-0.0001	0.0001	0.0001	-0.0001	0.0011	-0.0003

Columns 15 through 28

0.0140	0.0340	0.0231	0.0003	0.0058	0.0058	0.0029
-0.1767	0.0850	0.0986	-0.0002	0.0139	0.0340	0.0231
-0.8790	-1.2926	-1.6544	-3.4007	-0.1766	0.0850	0.0986
-0.1766	0.0850	0.0986	-0.0002	-0.8790	-1.2926	-1.6544
0.0139	0.0340	0.0231	0.0003	-0.1767	0.0850	0.0986
0.0058	0.0058	0.0029	0.0000	0.0140	0.0340	0.0231

0.0000	-0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0003	0.0058	0.0058	0.0029	0.0000	-0.0001	0.0000
-0.0002	0.0139	0.0340	0.0231	0.0003	0.0058	0.0058
-3.4007	-0.1767	0.0850	0.0986	-0.0002	0.0140	0.0340
-0.0002	-0.8789	-1.2926	-1.6543	-3.4007	-0.1824	0.0792
0.0003	-0.1824	0.0792	0.0957	-0.0002	-0.8929	-1.3266

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0001	0.0001	-0.0001	0.0002	0.0000	-0.0001	0.0001	-0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000

Columns 29 through 42

-0.0000	0.0000	0.1464	0.1219	0.0798	-0.0580	0.0935	-0.0925	0.0855	-0.0972	0.0869	-0.1016	0.1518	-0.2114
-0.0000	0.0000	-0.0612	-0.0170	-0.0077	-0.0137	-0.0005	-0.0053	0.0003	-0.0025	0.0003	-0.0010	0.0002	-0.0000
0.0029	0.0000	-0.0057	-0.0022	-0.0014	-0.0013	-0.0004	-0.0004	-0.0001	-0.0002	-0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0000
0.0231	0.0003	-0.0005	-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0957	-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-1.6775	-3.4010	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Ac(1:14,43:102)=

Columns 43 through 56

-61.2128	-16.9519	-7.7395	-13.6860	-0.4563	-5.3153	0.2960	-2.4591	0.2811	-1.0143	0.1721	-0.0346	-5.7470	-2.1644
140.6540	119.6894	78.3869	-59.2769	93.1483	-92.8939	85.4074	-97.3770	86.8396	-101.6587	151.7844	-211.4478	-61.7621	-17.1468
-61.7621	-17.1468	-7.8209	-13.8137	-0.4652	-5.3598	0.2965	-2.4783	0.2826	-1.0218	0.1731	-0.0346	140.5487	119.6197

-5.8523	-2.2341	-1.4738	-1.3342	-0.3761	-0.4337	-0.1270	-0.1761	-0.0507	-0.0657	-0.0233	-0.0050	-61.7677	-17.1587
-0.5550	-0.2068	-0.0981	-0.1307	-0.0156	-0.0446	-0.0023	-0.0189	0.0002	-0.0073	0.0003	0.0000	-5.8523	-2.2341
-0.1052	-0.0697	-0.0666	-0.0300	-0.0232	-0.0072	-0.0094	-0.0021	-0.0043	-0.0006	-0.0020	-0.0003	-0.5493	-0.1949
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0221	0.0146	-0.0190	0.0159	-0.0096	0.0086	-0.0058	0.0060	-0.0046	0.0049	-0.0065	0.0083	0.0163	-0.0108
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0454	-0.0300	0.0390	-0.0328	0.0197	-0.0176	0.0120	-0.0123	0.0094	-0.0100	0.0134	-0.0172	-0.0336	0.0222

Columns 57 through 70

-1.4072	-1.3041	-0.3529	-0.4265	-0.1176	-0.1740	-0.0464	-0.0652	-0.0213	-0.0047	-0.5493	-0.1949	-0.0814	-0.1277
-7.8209	-13.8137	-0.4652	-5.3598	0.2965	-2.4783	0.2826	-1.0218	0.1731	-0.0346	-5.8523	-2.2341	-1.4738	-1.3342
78.3203	-59.3069	93.1250	-92.9011	85.3980	-97.3791	86.8354	-101.6593	151.7824	-211.4482	-61.7677	-17.1587	-7.8376	-13.8167
-7.8376	-13.8167	-0.4718	-5.3599	0.2937	-2.4780	0.2813	-1.0216	0.1724	-0.0346	140.5487	119.6197	78.3203	-59.3069
-1.4738	-1.3342	-0.3761	-0.4337	-0.1270	-0.1761	-0.0507	-0.0657	-0.0233	-0.0050	-61.7621	-17.1468	-7.8209	-13.8137
-0.0814	-0.1277	-0.0090	-0.0446	0.0005	-0.0192	0.0015	-0.0075	0.0010	-0.0000	-5.7470	-2.1644	-1.4072	-1.3041
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0140	-0.0118	0.0071	-0.0063	0.0043	-0.0044	0.0034	-0.0036	0.0048	-0.0062	-0.0115	0.0076	-0.0099	0.0083
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0288	0.0242	-0.0145	0.0130	-0.0088	0.0091	-0.0069	0.0074	-0.0099	0.0127	0.0236	-0.0156	0.0203	-0.0170

Columns 71 through 84

-0.0090	-0.0446	0.0005	-0.0192	0.0015	-0.0075	0.0009	-0.0000	-0.1052	-0.0697	-0.0666	-0.0300	-0.0232	-0.0072
-0.3761	-0.4337	-0.1270	-0.1761	-0.0507	-0.0657	-0.0233	-0.0050	-0.5550	-0.2068	-0.0981	-0.1307	-0.0156	-0.0446

-0.4718	-5.3599	0.2937	-2.4780	0.2813	-1.0216	0.1724	-0.0346	-5.8523	-2.2341	-1.4738	-1.3342	-0.3761	-0.4337
93.1250	-92.9011	85.3980	-97.3791	86.8354	-101.6593	151.7824	-211.4482	-61.7621	-17.1468	-7.8209	-13.8137	-0.4652	-5.3598
-0.4652	-5.3598	0.2965	-2.4783	0.2826	-1.0218	0.1731	-0.0346	140.6540	119.6894	78.3869	-59.2769	93.1483	-92.8939
-0.3529	-0.4265	-0.1176	-0.1740	-0.0464	-0.0652	-0.0213	-0.0047	-61.2128	-16.9519	-7.7395	-13.6860	-0.4563	-5.3153
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0050	0.0045	-0.0030	0.0031	-0.0024	0.0025	-0.0034	0.0043	0.0073	-0.0048	0.0063	-0.0053	0.0032	-0.0028
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0102	-0.0092	0.0062	-0.0064	0.0049	-0.0052	0.0070	-0.0089	-0.0150	0.0099	-0.0129	0.0108	-0.0065	0.0058

Columns 85 through 98

-0.0094	-0.0021	-0.0043	-0.0006	-0.0020	-0.0003	-0.0057	-0.0119	-0.0167	-0.0030	-0.0066	-0.0000	-0.0028	0.0003
-0.0023	-0.0189	0.0002	-0.0073	0.0003	0.0000	-0.1052	-0.0697	-0.0666	-0.0300	-0.0232	-0.0072	-0.0094	-0.0021
-0.1270	-0.1761	-0.0507	-0.0657	-0.0233	-0.0050	-0.5493	-0.1949	-0.0814	-0.1277	-0.0090	-0.0446	0.0005	-0.0192
0.2965	-2.4783	0.2826	-1.0218	0.1731	-0.0346	-5.7470	-2.1644	-1.4072	-1.3041	-0.3529	-0.4265	-0.1176	-0.1740
85.4074	-97.3770	86.8396	-101.6587	151.7844	-211.4479	-61.2128	-16.9519	-7.7395	-13.6860	-0.4563	-5.3153	0.2960	-2.4591
0.2960	-2.4591	0.2811	-1.0143	0.1721	-0.0346	146.4010	121.8538	79.7941	-57.9728	93.5012	-92.4675	85.5250	-97.2029
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0019	-0.0020	0.0015	-0.0016	0.0022	-0.0028	-0.0036	0.0023	-0.0031	0.0026	-0.0015	0.0014	-0.0009	0.0010
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0040	0.0041	-0.0031	0.0033	-0.0044	0.0057	0.0073	-0.0048	0.0063	-0.0053	0.0032	-0.0028	0.0019	-0.0020

Columns 99 through 102

-0.0013	0.0002	-0.0007	0.0000
---------	--------	---------	--------


```

-0.0043 -0.0006 -0.0020 -0.0003
0.0015 -0.0075 0.0009 -0.0000
-0.0464 -0.0652 -0.0213 -0.0047
0.2811 -1.0143 0.1721 -0.0346
86.8861 -101.5935 151.8058 -211.4432
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
-0.0007 0.0008 -0.0010 0.0013
-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0015 -0.0016 0.0022 -0.0028

```

Ac(15:28,1:102)=

Columns 1 through 14

```

0 0 1.0000 0 0 0 -0.0000
0 0 0 0 0 0 0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0000
0 0 0 0 0 0 0.0265
0 0 0 1.0000 0 0 0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0186
0 0 0 0 1.0000 0 0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0000
0 0 0 0 0 0 0.0000
0 0 0 0 0 0 0.0119
0 0 0 0 0 1.0000 -0.0000
0 0 0 0 0 0 -0.0000

```

```

0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
-0.0397 0.0496 -0.0993 -0.0545 0.0817 -0.1021 0.2043
-0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
0.0280 -0.0349 0.0699 0.0383 -0.0575 0.0719 -0.1438
-0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
-0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0178 0.0222 -0.0445 -0.0244 0.0366 -0.0458 0.0915
0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000

```

Columns 15 through 28

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0349	0.0699	0.0163	-0.0108	0.0140	-0.0118	0.0071
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0496	-0.0993	-0.0115	0.0076	-0.0099	0.0083	-0.0050
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0672	0.1344	0.0073	-0.0048	0.0063	-0.0053	0.0032
-3.7773	-0.0546	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0063	0.0043	-0.0044	0.0034	-0.0036	0.0048	-0.0062
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0045	-0.0030	0.0031	-0.0024	0.0025	-0.0034	0.0043
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0028	0.0019	-0.0020	0.0015	-0.0016	0.0022	-0.0028
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 29 through 42

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0336	0.0222	-0.0288	0.0242	-0.0145	0.0130	-0.0088
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0236	-0.0156	0.0203	-0.0170	0.0102	-0.0092	0.0062
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0150	0.0099	-0.0129	0.0108	-0.0065	0.0058	-0.0040
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0091	-0.0069	0.0074	-0.0099	0.0127	0.0528	-0.0348
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0064	0.0049	-0.0052	0.0070	-0.0089	-0.0371	0.0245
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0041	-0.0031	0.0033	-0.0044	0.0057	0.0236	-0.0156
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000

-0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000

Columns 85 through 98

0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0062 -0.0064 0.0049 -0.0052 0.0070 -0.0089 -0.0115
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000
 -0.0088 0.0091 -0.0069 0.0074 -0.0099 0.0127 0.0163
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000
 0.0120 -0.0123 0.0094 -0.0100 0.0134 -0.0172 -0.0221
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0076 -0.0099 0.0083 -0.0050 0.0045 -0.0030 0.0031
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0108 0.0140 -0.0118 0.0071 -0.0063 0.0043 -0.0044
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0146 -0.0190 0.0159 -0.0096 0.0086 -0.0058 0.0060
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000

Columns 99 through 102

-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0024 0.0025 -0.0034 0.0043
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0034 -0.0036 0.0048 -0.0062
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0046 0.0049 -0.0065 0.0083


```

-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000

```

Ac(29:42,1:102)=

Columns 1 through 14

```

 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.0058
 0  0.5000  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.0000
 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0  0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.0000
 0  0  0  0  0  0 -0.2803

```

```

-0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0087 -0.0108  0.0216  0.0119 -0.0178  0.0222 -0.0445
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.4205 -0.5256  1.0512  0.5766 -0.8650  1.0812 -2.1624

```

Columns 15 through 28

```

 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0186  0.0280 -0.0349  0.0699  0.0265 -0.0397  0.0496
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000

```

```

 0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  4.0000
-0.0993 -0.0358  0.0537 -0.0672  0.1344  0.0472 -0.0708
-0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000

```


0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.3555	-0.2347	0.3050	-0.2562	0.1537	-0.1378	0.0937	-0.0963	0.0732	-0.0781	0.1050	-0.1344	-0.2627	0.1734

Columns 57 through 70

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0099	0.0083	-0.0050	0.0045	-0.0030	0.0031	-0.0024	0.0025	-0.0034	0.0043	0.0163	-0.0108	0.0140	-0.0118
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.2254	0.1894	-0.1136	0.1018	-0.0692	0.0712	-0.0541	0.0577	-0.0776	0.0993	0.1849	-0.1221	0.1587	-0.1333

Columns 71 through 84

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0071	-0.0063	0.0043	-0.0044	0.0034	-0.0036	0.0048	-0.0062	-0.0221	0.0146	-0.0190	0.0159	-0.0096	0.0086
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0800	-0.0717	0.0487	-0.0501	0.0381	-0.0406	0.0546	-0.0699	-0.1177	0.0777	-0.1010	0.0848	-0.0509	0.0456

Columns 85 through 98

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0058	0.0060	-0.0046	0.0049	-0.0065	0.0083	0.0291	-0.0192	0.0250	-0.0210	0.0126	-0.0113	0.0077	-0.0079
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0310	0.0319	-0.0242	0.0259	-0.0348	0.0445	0.0572	-0.0378	0.0491	-0.0412	0.0247	-0.0222	0.0151	-0.0155

Columns 99 through 102

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0060	-0.0064	0.0086	-0.0110
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0118	-0.0126	0.0169	-0.0216

Ac(43:56,1:102)=

Columns 1 through 14

0.5000	0	0.5000	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.5766
0	0.5000	0	0.5000	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.8650	1.0812	-2.1624	-0.7064	1.0597	-1.3246	2.6491
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 15 through 28

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000

-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	2.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.4356	0.2875	-0.3737	0.3139	-0.1884	0.1688	-0.1148
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.5000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.2500	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.1180	-0.0897	0.0957	-0.0661	0.1646	0.5405	-0.3567
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-5.2892	-1.7221
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	8.0000	0.0000

Columns 57 through 70

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.4637	-0.3895	0.2337	-0.2094	0.1424	-0.1465	0.1113
-1.4494	-0.8715	-0.3915	-0.2670	-0.1379	-0.1055	-0.0568
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.1187	0.1596	-0.2043	-0.3805	0.2511	-0.3264	0.2742
-0.0389	-0.0263	-0.0035	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 71 through 84

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
--------	---------	--------	---------	--------	---------	--------

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
---------	--------	---------	--------	---------	--------	---------

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0242	0.0259	-0.0348	0.0445
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Ac(57:70,1:102)=

Columns 1 through 14

0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.4261
0	0	0.5000	0	0.5000	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.6392	-0.7990	1.5980	0.8766	-1.3149	1.6436	-3.2873
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0 0 0 0 0 0 0.0000

-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000

Columns 15 through 28

-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.8974 1.3461 -1.6826 3.3651 0.9694 -1.4541 1.8177
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000

0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000
 -3.6353 -0.6171 0.9256 -1.1570 2.3140 0.3000 -0.4499
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000

Columns 29 through 42

-0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.5624 -1.1248 -0.2627 0.1734 -0.2254 0.1894 -0.1136
 0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000

0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
 0.1018 -0.0692 0.0712 -0.0541 0.0577 -0.0776 0.0993
 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000
 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 43 through 56

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.5405	-0.3567	0.4637	-0.3895	0.2337	-0.2094	0.1424
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.1465	0.1113	-0.1187	0.1596	-0.2043	-0.5533	0.3652
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 57 through 70

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
2.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.2500
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.4747	0.3988	-0.2393	0.2144	-0.1458	0.1499	-0.1140
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.1250	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.1216	-0.1009	0.2091	0.5977	-0.3945	0.5128	-0.4308
-0.0000	0.0000	-0.0000	-5.2892	-1.7221	-1.4494	-0.8715

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

-0.0000	0.0000	-0.0000	8.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	2.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000

Columns 71 through 84

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.2585	-0.2316	0.1575	-0.1620	0.1231	-0.1313	0.1765
-0.3915	-0.2670	-0.1379	-0.1055	-0.0568	-0.0389	-0.0263
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.2259	-0.3805	0.2511	-0.3264	0.2742	-0.1645	0.1474
-0.0035	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 85 through 98

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.1002	0.1031	-0.0784	0.0836	-0.1123	0.1438	0.1849

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.1221	0.1587	-0.1333	0.0800	-0.0717	0.0487	-0.0501

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 99 through 102

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0381	-0.0406	0.0546	-0.0699
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Ac(71:84,1:102)=

Columns 1 through 14

0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0	0	0	0	0	0	0.3000
0	0	0	0.5000	0	0.5000	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000

-0.4499	0.5624	-1.1248	-0.6171	0.9256	-1.1570	2.3140
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 15 through 28

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.9694	-1.4541	1.8177	-3.6353	-0.8974	1.3461	-1.6826
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
3.3651	0.8766	-1.3149	1.6436	-3.2873	-0.4261	0.6392
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 29 through 42

[illegible][illegible]

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.5128	-0.4308	0.2585	-0.2316	0.1575	-0.1620	0.1231	-0.1313	0.1765	-0.2259	-0.5533	0.3652	-0.4747	0.3988
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 71 through 84

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
1.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.2500	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.2393	0.2144	-0.1458	0.1499	-0.1140	0.1216	-0.1009	0.2091	0.5405	-0.3567	0.4637	-0.3895	0.2337	-0.2094
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-5.2892	-1.7221	-1.4494	-0.8715	-0.3915	-0.2670
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	8.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	2.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	2.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	1.0000	0.0000

Columns 85 through 98

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.1424	-0.1465	0.1113	-0.1187	0.1596	-0.2043	-0.2627
-0.1379	-0.1055	-0.0568	-0.0389	-0.0263	-0.0035	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.1734	-0.2254	0.1894	-0.1136	0.1018	-0.0692	0.0712
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Columns 99 through 102

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0541	0.0577	-0.0776	0.0993
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

Ac(85:98,1:102)

Columns 1 through 14

0	0	0	0	0	0	-0.0000
---	---	---	---	---	---	---------

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
--------	---------	--------	---------	--------	---------	--------

0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.1909
0	0	0	0	0.5000	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.2864	-0.3580	0.7160	0.3928	-0.5892	0.7364	-1.4729
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 15 through 28

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.6171	0.9256	-1.1570	2.3140	0.8766	-1.3149	1.6436
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-3.2873	-0.7064	1.0597	-1.3246	2.6491	0.5766	-0.8650
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 29 through 42

Columns 85 through 98

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.5000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.5000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.2500	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.1250	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.1148	0.1180	-0.0897	0.0957	-0.0661	0.1646	0.3555	-0.2347	0.3050	-0.2562	0.1537	-0.1378	0.0937	-0.0963
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-5.2892	-1.7221	-1.4494	-0.8715	-0.3915	-0.2670	-0.1379	-0.1055
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	8.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	2.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	1.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5000	-0.0000

Columns 99 through 102

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0732	-0.0781	0.1050	-0.1344
-0.0568	-0.0389	-0.0263	-0.0035
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Ac(99:102,1:102)=

Columns 1 through 14

0	0	0	0	0	0	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0928	-0.1392	0.1740	-0.3481	-0.1909	0.2864	-0.3580	0.7160

Columns 15 through 28

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.3000	-0.4499	0.5624	-1.1248	-0.4261	0.6392	-0.7990	1.5980	0.5766	-0.8650	1.0812	-2.1624	-0.2803	0.4205

Columns 29 through 42

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.5256	1.0512	0.0572	-0.0378	0.0491	-0.0412	0.0247	-0.0222	0.0151	-0.0155	0.0118	-0.0126	0.0169	-0.0216

Columns 43 through 56

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.1177	0.0777	-0.1010	0.0848	-0.0509	0.0456	-0.0310	0.0319	-0.0242	0.0259	-0.0348	0.0445	0.1849	-0.1221

Columns 57 through 70

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.1587	-0.1333	0.0800	-0.0717	0.0487	-0.0501	0.0381

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0406	0.0546	-0.0699	-0.2627	0.1734	-0.2254	0.1894

Columns 71 through 84

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.1136	0.1018	-0.0692	0.0712	-0.0541	0.0577	-0.0776

-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0993	0.3555	-0.2347	0.3050	-0.2562	0.1537	-0.1378

Columns 85 through 98

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0937	-0.0963	0.0732	-0.0781	0.1050	-0.1344	-0.1728

-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.5000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.1141	-0.1483	0.1246	-0.0747	0.0670	-0.0455	0.0468

Columns 99 through 102

0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.2500	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.1250	-0.0000	0.0000
-0.0356	0.0380	0.0115	0.0653

Bc =

0.0164	-0.0124	0.0092	-0.0065	0.0041	-0.0020
-0.0124	0.0256	-0.0189	0.0133	-0.0085	0.0041
0.0092	-0.0189	0.0297	-0.0209	0.0133	-0.0065
-0.0065	0.0133	-0.0209	0.0297	-0.0189	0.0092
0.0041	-0.0085	0.0133	-0.0189	0.0256	-0.0124
-0.0020	0.0041	-0.0065	0.0092	-0.0124	0.0164
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3005	-0.2279	0.1684	-0.1186	0.0755	-0.0367
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.2279	0.4689	-0.3465	0.2439	-0.1553	0.0755
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.1684	-0.3465	0.5444	-0.3832	0.2439	-0.1186
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.1186	0.2439	-0.3832	0.5444	-0.3465	0.1684
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0755	-0.1553	0.2439	-0.3465	0.4689	-0.2279
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0367	0.0755	-0.1186	0.1684	-0.2279	0.3005
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-1.7831	3.6681	-2.7106	1.9081	-1.2145	0.5904
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
3.6681	-4.4937	5.5762	-3.9252	2.4985	-1.2145
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-2.7106	5.5762	-5.7083	6.1666	-3.9252	1.9081
-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
1.9081	-3.9252	6.1666	-5.7083	5.5762	-2.7106
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-1.2145	2.4985	-3.9252	5.5762	-4.4937	3.6681
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.5904	-1.2145	1.9081	-2.7106	3.6681	-1.7831

Cc =

1.0e+003 *

Columns 1 through 7

0.0429	0.0026	0.0003	-0.0001	0.0000	0.0000	0.8929
0.0026	0.0432	0.0025	0.0003	-0.0001	0.0000	0.1824
0.0003	0.0025	0.0432	0.0025	0.0003	-0.0001	-0.0140
-0.0001	0.0003	0.0025	0.0432	0.0025	0.0003	-0.0058
0.0000	-0.0001	0.0003	0.0025	0.0432	0.0026	0.0001

0.0000	0.0000	-0.0001	0.0003	0.0026	0.0429	-0.0000
--------	--------	---------	--------	--------	--------	---------

Columns 8 through 14

1.3266	1.6775	3.4010	0.1824	-0.0792	-0.0957	0.0002
-0.0792	-0.0957	0.0002	0.8789	1.2926	1.6543	3.4007
-0.0340	-0.0231	-0.0003	0.1767	-0.0850	-0.0986	0.0002
-0.0058	-0.0029	-0.0000	-0.0139	-0.0340	-0.0231	-0.0003
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0058	-0.0058	-0.0029	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 15 through 21

-0.0140	-0.0340	-0.0231	-0.0003	-0.0058	-0.0058	-0.0029
0.1767	-0.0850	-0.0986	0.0002	-0.0139	-0.0340	-0.0231
0.8790	1.2925	1.6544	3.4007	0.1766	-0.0850	-0.0986
0.1766	-0.0850	-0.0986	0.0002	0.8790	1.2925	1.6544
-0.0139	-0.0340	-0.0231	-0.0003	0.1767	-0.0850	-0.0986
-0.0058	-0.0058	-0.0029	-0.0000	-0.0140	-0.0340	-0.0231

Columns 22 through 28

-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0003	-0.0058	-0.0058	-0.0029	-0.0000	0.0001	-0.0000
0.0002	-0.0139	-0.0340	-0.0231	-0.0003	-0.0058	-0.0058
3.4007	0.1767	-0.0850	-0.0986	0.0002	-0.0140	-0.0340
0.0002	0.8789	1.2926	1.6543	3.4007	0.1824	-0.0792
-0.0003	0.1824	-0.0792	-0.0957	0.0002	0.8929	1.3266

Columns 29 through 35

0.0000	-0.0000	-0.1464	-0.1219	-0.0798	0.0580	-0.0935
0.0000	-0.0000	0.0612	0.0170	0.0077	0.0137	0.0005
-0.0029	-0.0000	0.0057	0.0022	0.0014	0.0013	0.0004
-0.0231	-0.0003	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-0.0957	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
1.6775	3.4010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 36 through 42

0.0925	-0.0855	0.0972	-0.0869	0.1016	-0.1518	0.2114
0.0053	-0.0003	0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000
0.0004	0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Columns 43 through 49

0.0612	0.0170	0.0077	0.0137	0.0005	0.0053	-0.0003
-0.1407	-0.1197	-0.0784	0.0593	-0.0931	0.0929	-0.0854
0.0618	0.0171	0.0078	0.0138	0.0005	0.0054	-0.0003
0.0059	0.0022	0.0015	0.0013	0.0004	0.0004	0.0001
0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 50 through 56

0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000	0.0057	0.0022
0.0974	-0.0868	0.1017	-0.1518	0.2114	0.0618	0.0171
0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000	-0.1405	-0.1196
0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0618	0.0172
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0059	0.0022
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0002

Columns 57 through 63

0.0014	0.0013	0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	0.0000
0.0078	0.0138	0.0005	0.0054	-0.0003	0.0025	-0.0003
-0.0783	0.0593	-0.0931	0.0929	-0.0854	0.0974	-0.0868
0.0078	0.0138	0.0005	0.0054	-0.0003	0.0025	-0.0003
0.0015	0.0013	0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	0.0001
0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

Columns 64 through 70

0.0001	0.0000	0.0000	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
0.0010	-0.0002	0.0000	0.0059	0.0022	0.0015	0.0013
0.1017	-0.1518	0.2114	0.0618	0.0172	0.0078	0.0138
0.0010	-0.0002	0.0000	-0.1405	-0.1196	-0.0783	0.0593
0.0001	0.0000	0.0000	0.0618	0.0171	0.0078	0.0138
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0057	0.0022	0.0014	0.0013

Columns 71 through 77

0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
0.0005	0.0054	-0.0003	0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002
-0.0931	0.0929	-0.0854	0.0974	-0.0868	0.1017	-0.1518
0.0005	0.0054	-0.0003	0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002
0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0000

Columns 78 through 84

0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
0.0000	0.0059	0.0022	0.0015	0.0013	0.0004	0.0004
0.2114	0.0618	0.0171	0.0078	0.0138	0.0005	0.0054
0.0000	-0.1407	-0.1197	-0.0784	0.0593	-0.0931	0.0929
0.0000	0.0612	0.0170	0.0077	0.0137	0.0005	0.0053

Columns 85 through 91

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0005
-0.0003	0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000	0.0057
-0.0854	0.0974	-0.0868	0.1017	-0.1518	0.2114	0.0612
-0.0003	0.0025	-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000	-0.1464

Columns 92 through 98

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0022	0.0014	0.0013	0.0004	0.0004	0.0001	0.0002

0.0170	0.0077	0.0137	0.0005	0.0053	-0.0003	0.0025
-0.1219	-0.0798	0.0580	-0.0935	0.0925	-0.0855	0.0972

Columns 99 through 102

0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0001	0.0000	0.0000
-0.0003	0.0010	-0.0002	0.0000
-0.0869	0.1016	-0.1518	0.2114

Dc =

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Matrizes do Programa rotina4.m**A =**

Columns 1 through 7

-0.0146	0	0	0	0	0	0
0	-0.0146	0	0	0	0	0
0	0	-0.0146	0	0	0	0
0	0	0	-0.0146	0	0	0
0	0	0	0	-0.0146	0	0
0	0	0	0	0	-0.0146	0
0	0	0	0	0	0	-0.0092
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 12

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-0.0092	0	0	0	0
0	-0.0092	0	0	0
0	0	-0.0092	0	0
0	0	0	-0.0092	0
0	0	0	0	-0.0092

B=

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

C=

Columns 1 through 7

0.1572	0	0	0	0	0	0
0	0.1572	0	0	0	0	0.0485
0	0	0.1572	0	0	0	0
0	0	0	0.1572	0	0	0
0	0	0	0	0.1572	0	0
0	0	0	0	0	0.1572	0

Columns 8 through 12

0.0485	0	0	0	0
0	0.0485	0	0	0
0.0485	0	0.0485	0	0
0	0.0485	0	0.0485	0
0	0	0.0485	0	0.0485
0	0	0	0.0485	0

D=

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Matrizes do Programa rotina5.m**Ac=**

Columns 1 through 7

-3.0978	-0.5015	0.0422	-0.0072	0.0016	-0.0004	-4.9262
-0.5015	-3.0556	-0.5087	0.0438	-0.0076	0.0016	-0.0059
0.0422	-0.5087	-3.0541	-0.5091	0.0438	-0.0072	0.0004
-0.0072	0.0438	-0.5091	-3.0541	-0.5087	0.0422	0.0006
0.0016	-0.0076	0.0438	-0.5087	-3.0556	-0.5015	-0.0006

-0.0004	0.0016	-0.0072	0.0422	-0.5015	-3.0978	0.0003
1.0000	0	0	0	0	0	-0.2073
0	1.0000	0	0	0	0	0.1495
0	0	1.0000	0	0	0	-0.1126
0	0	0	1.0000	0	0	0.0805
0	0	0	0	1.0000	0	-0.0519
0	0	0	0	0	1.0000	0.0254
1.0000	0	0	0	0	0	-0.3058
0	1.0000	0	0	0	0	0.2373
0	0	1.0000	0	0	0	-0.1788
0	0	0	1.0000	0	0	0.1278
0	0	0	0	1.0000	0	-0.0823
0	0	0	0	0	1.0000	0.0403

Columns 8 through 14

-0.0059	0.0004	0.0006	-0.0006	0.0003	-0.0009	-1.5254
-4.9258	-0.0053	-0.0002	0.0009	-0.0006	-1.5254	-0.0016
-0.0053	-4.9263	-0.0050	-0.0002	0.0006	-0.0007	-1.5257
-0.0002	-0.0050	-4.9263	-0.0053	0.0004	-0.0003	-0.0003
0.0009	-0.0002	-0.0053	-4.9258	-0.0059	0.0004	-0.0005
-0.0006	0.0006	0.0004	-0.0059	-4.9262	-0.0002	0.0004
0.1495	-0.1126	0.0805	-0.0519	0.0254	0.0461	-0.0942
-0.3200	0.2301	-0.1645	0.1059	-0.0519	-0.0942	0.1171
0.2301	-0.3718	0.2555	-0.1645	0.0805	0.0710	-0.1450
-0.1645	0.2555	-0.3718	0.2301	-0.1126	-0.0508	0.1037
0.1059	-0.1645	0.2301	-0.3200	0.1495	0.0327	-0.0668
-0.0519	0.0805	-0.1126	0.1495	-0.2073	-0.0160	0.0327
0.2373	-0.1788	0.1278	-0.0823	0.0403	0.0640	-0.1495
-0.4846	0.3651	-0.2611	0.1681	-0.0823	-0.1495	0.1766
0.3651	-0.5669	0.4054	-0.2611	0.1278	0.1126	-0.2301
-0.2611	0.4054	-0.5669	0.3651	-0.1788	-0.0805	0.1645
0.1681	-0.2611	0.3651	-0.4846	0.2373	0.0519	-0.1059
-0.0823	0.1278	-0.1788	0.2373	-0.3058	-0.0254	0.0519

Columns 15 through 18

-0.0007	-0.0003	0.0004	-0.0002
-1.5257	-0.0003	-0.0005	0.0004
-0.0012	-1.5259	-0.0003	-0.0003
-1.5259	-0.0012	-1.5257	-0.0007
-0.0003	-1.5257	-0.0016	-1.5254
-0.0003	-0.0007	-1.5254	-0.0009
0.0710	-0.0508	0.0327	-0.0160
-0.1450	0.1037	-0.0668	0.0327
0.1498	-0.1610	0.1037	-0.0508
-0.1610	0.1498	-0.1450	0.0710
0.1037	-0.1450	0.1171	-0.0942
-0.0508	0.0710	-0.0942	0.0461
0.1126	-0.0805	0.0519	-0.0254
-0.2301	0.1645	-0.1059	0.0519
0.2285	-0.2555	0.1645	-0.0805
-0.2555	0.2285	-0.2301	0.1126
0.1645	-0.2301	0.1766	-0.1495
-0.0805	0.1126	-0.1495	0.0640

$$B_c =$$

0.0179	-0.0139	0.0105	-0.0075	0.0048	-0.0024
-0.0139	0.0284	-0.0214	0.0153	-0.0098	0.0048
0.0105	-0.0214	0.0332	-0.0237	0.0153	-0.0075
-0.0075	0.0153	-0.0237	0.0332	-0.0214	0.0105
0.0048	-0.0098	0.0153	-0.0214	0.0284	-0.0139
-0.0024	0.0048	-0.0075	0.0105	-0.0139	0.0179
1.2260	-0.9511	0.7165	-0.5124	0.3300	-0.1616
-0.9511	1.9425	-1.4635	1.0465	-0.6740	0.3300
0.7165	-1.4635	2.2725	-1.6250	1.0465	-0.5124
-0.5124	1.0465	-1.6250	2.2725	-1.4635	0.7165
0.3300	-0.6740	1.0465	-1.4635	1.9425	-0.9511
-0.1616	0.3300	-0.5124	0.7165	-0.9511	1.2260
1.9456	-1.5093	1.1371	-0.8131	0.5237	-0.2564
-1.5093	3.0827	-2.3225	1.6608	-1.0695	0.5237
1.1371	-2.3225	3.6064	-2.5789	1.6608	-0.8131
-0.8131	1.6608	-2.5789	3.6064	-2.3225	1.1371
0.5237	-1.0695	1.6608	-2.3225	3.0827	-1.5093
-0.2564	0.5237	-0.8131	1.1371	-1.5093	1.9456

$$\mathbf{C}_c =$$

Columns 1 through 7

3.0978	0.5015	-0.0422	0.0072	-0.0016	0.0004	4.9234
0.5015	3.0556	0.5087	-0.0438	0.0076	-0.0016	0.0081
-0.0422	0.5087	3.0541	0.5091	-0.0438	0.0072	-0.0021
0.0072	-0.0438	0.5091	3.0541	0.5087	-0.0422	0.0006
-0.0016	0.0076	-0.0438	0.5087	3.0556	0.5015	-0.0002
0.0004	-0.0016	0.0072	-0.0422	0.5015	3.0978	0.0000

Columns 8 through 14

0.0081	-0.0021	0.0006	-0.0002	0.0000	0.0016	1.5240
4.9213	0.0087	-0.0022	0.0006	-0.0002	1.5240	0.0033
0.0087	4.9211	0.0087	-0.0022	0.0006	0.0017	1.5236
-0.0022	0.0087	4.9211	0.0087	-0.0021	-0.0004	0.0018
0.0006	-0.0022	0.0087	4.9213	0.0081	0.0001	-0.0005
-0.0002	0.0006	-0.0021	0.0081	4.9234	-0.0000	0.0001

Columns 15 through 18

0.0017	-0.0004	0.0001	-0.0000
1.5236	0.0018	-0.0005	0.0001
0.0034	1.5235	0.0018	-0.0004
1.5235	0.0034	1.5236	0.0017
0.0018	1.5236	0.0033	1.5240
-0.0004	0.0017	1.5240	0.0016

$$D_c =$$
[illegible]

Matrizes do Programa rotina7.m**A =**

-0.0917	0	0	0
0	-0.0694	0	0
0	0	-0.0599	0
0	0	0	-0.0476

B =

1	0
0	1
1	0
0	1

C =

0	0	0.7665	-0.9000
0.6055	-1.3472	0	0

D =

0	0
0	0

Matrizes do Programa rotina8.m**Ac =**

-3.2176	1.6755	0.7345	-1.7284	-7.3270	8.6769
1.6755	-5.0681	5.7518	-12.9391	1.1631	-1.3485
1.0000	0	0.3597	-1.0044	-0.5865	0.6887
0	1.0000	0.4039	-0.9681	-0.2636	0.3095
1.0000	0	0.6916	-1.5388	-0.9585	1.0552
0	1.0000	0.5890	-1.3105	-0.3844	0.4038

Bc =

0.0702	-0.0684
0.0239	-0.0463
0.7652	-0.7455
0.3439	-0.6670
1.1724	-1.1422
0.5016	-0.9727

Cc =

3.2176	-1.6755	-0.6930	1.6363	7.2732	-8.6137
-1.6755	5.0681	-5.7237	12.8767	-1.1814	1.3700

Dc =

0	0
0	0

APÊNDICE 3 - DIAGRAMAS DE SIMULAÇÃO

Diagrama de Simulação do Forno Elétrico com o Controlador

Diagrama de Simulação da Coluna de Destilação com o Controlador

APÊNDICE 4 - REALIZAÇÃO DE GILBERT

A realização de Gilbert é um procedimento de fatorização que resulta em uma realização mínima por uso de expansão de frações parciais.

Seja $G(s)$ uma matriz de funções de transferência pxm e escrita da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{d_g(s)}$$

com $d_g(s)$ um polinômio escalar. Por simplicidade, assumiremos que $d_g(s)$ tem apenas raízes reais e distintas $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e

$$d_g(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_r).$$

Então $G(s)$ tem a seguinte expansão em frações parciais:

$$G(s) = D_g + \sum_{i=1}^r \frac{V_i}{s - \lambda_i}.$$

Suponha

$$\text{rank } V_i = k_i$$

e $B_i \in \mathbb{R}^{k_i \times m}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{p \times k_i}$ sejam duas matrizes constantes tais que

$$V_i = C_i B_i.$$

Então uma realização para $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 I_{k_1} & & & B_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_r I_{k_r} & B_r \\ \hline C_1 & \dots & & C_r & D \end{array} \right]$$

Segue imediatamente dos testes PBH que esta realização é controlável e observável. Portanto, é mínima.

Uma consequência imediata desta realização mínima é que uma matriz de transferência com um denominador polinomial de ordem r não necessariamente possui realização espaço de estados de ordem r a menos que V_i para cada i seja uma matriz unitária de rank 1.

Esta aproximação pode, de fato, ser generalizada para casos mais complicados onde $d_g(s)$ pode ter raízes complexas e/ou repetidas (ZHOU *et al.*, 1996).