

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

## Análise da dinâmica caótica de pêndulos com excitação paramétrica no suporte

Vinícius Santos Andrade

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
<b>EXEMPLAR REVISADO</b>
Data de entrada no Serviço: 18 / 08 / 03
Ass.: <i>[Assinatura]</i>

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Vilma Alves de Oliveira

São Carlos  
2003



DEDALUS - Acervo - EESC



31100044150

Class.	TESE
Cuff.	0343
Tombo	T268/03
Sysno	1328857

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

A553a

Andrade, Vinicius Santos

Análise da dinâmica caótica de pêndulos com  
excitação paramétrica no suporte / Vinicius Santos  
Andrade. -- São Carlos, 2003.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos-Universidade de São Paulo, 2003.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Vilma Alves de Oliveira.

1. Pêndulos.
2. Equação de Lagrange.
3. Bifurcações.
4. Multiplicadores de Floquet.
5. Mapa de Poincaré.
6. Expoentes de Lyapunov.
7. Caos. I. Título.

**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Licenciado **VINÍCIUS SANTOS ANDRADE**

Dissertação defendida e julgada em 08-07-2003 perante a Comissão Julgadora:

*Vilma Alves de Oliveira*

Prof. Assoc. **VILMA ALVES DE OLIVEIRA (Orientadora)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

*José Manoel Balthazar*

Prof. Liv. Doc. **JOSÉ MANOEL BALTHAZAR**  
(UNESP/Campus de Rio Claro)

Aprovado

*Masayoshi Tsuchida*

Prof. Dr. **MASAYOSHI TSUCHIDA**  
(UNESP/São José do Rio Preto)

Aprovado

*Muriilo Araujo Romero*

Prof. Assoc. **MURILO ARAUJO ROMERO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica e Vice-Presidente em Exercício da  
Comissão de Pós-Graduação

*Ao meu grande pai José Pedro  
e irmãos Chris e Léo.*

## **Agradecimentos**

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira pela atenção e apoio dispensado durante toda a elaboração deste projeto. Com respeito e admiração, o meu muito obrigado.

Agradeço o Prof. Dr. José Manoel Balthazar pelo o incentivo e total atenção dispensada para que este trabalho se concretizasse.

Agradeço a minha amiga Natache por ter me ajudado em todos os momentos desse trabalho, ao amigo Nelson Peruzzi pelas discussões e por ter sido fundamental para a realização deste trabalho, ao amigo Lucas por me ajudar na montagem dos modelos, a todos os amigos conquistados no Laboratório de Controle, José R. Rosolen, Daniel Siqueira, Giovanni Gastaldi, Renato Nascimento e ao amigo Josemar por me ajudar na montagem da minha apresentação.

Agradeço aos amigos Bruno Zaniboni, Daniela Barsotti e Mirian Bertoli que me apoiaram em todos os momentos no período que estive em Rio Claro no término desse trabalho.

Agradeço a Vera Lúcia pelo grande apoio e companheirismo ao longo de minha vida.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro através da bolsa de mestrado, sem a qual nenhum dos tópicos apresentados neste trabalho poderia ser desenvolvido.

Agradeço a FAPESP (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo), sendo que parte deste trabalho foi realizada no Laboratório Modelagem Matemática em Dinâmica e Controle, processo: 02/04130-1, sob a coordenação do Prof. Dr. José Manoel Balthazar.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras	i
Resumo	v
Abstract	vi
CAPÍTULO1 – Introdução	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Exemplos de sistema pendulares	5
1.2.1 Robô manipulador	5
1.2.2 Vibração na asa de avião	6
1.2.3 Transporte de líquido	7
1.2.4 Movimento de um dedo mecânico	8
1.3 Objetivos	9
1.4 Organização da Dissertação	9
CAPÍTULO 2 - Instabilidade de sistemas dinâmicos	11
2.1 Conceitos de estabilidade e estabilidade estrutural	12
2.2 Bifurcações locais em sistemas dinâmicos	13
2.3 Transformada de Lyapunov-Floquet	14
2.3.1 Multiplicadores de Floquet	17
2.4 Mapa e seção de Poincaré	21
2.4.1 Sistemas autônomos	22
2.4.2 Sistemas periódicos	23

2.5 Expoentes de Lyapunov	25
2.5.1 Expoentes de Lyapunov em mapas	25
2.5.2 Expoentes de Lyapunov em sistemas autônomos	28
CAPÍTULO 3 - Modelagem matemática de sistemas dinâmicos do tipo pendulares	31
3.1 Equações de movimento	31
3.1.1 Equação de Lagrange	32
3.2 Pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte	34
3.2.1 Lagrangeano do sistema	34
3.2.2 Equações de movimento	38
3.3 Pêndulo com excitação vertical no suporte desconsiderando a elasticidade do pêndulo	40
3.3.1 Sistema Pendular 1	40
3.3.2 Sistema Pendular 2	45
CAPÍTULO 4 - Resultados de simulações numéricas	47
4.1 Sistema Pendular 1	47
4.2 Sistema Pendular 2	55
Conclusões e propostas futuras	64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

APÊNDICE A - Bifurcações estáticas e dinâmicas	69
A.1 Bifurcações estáticas	69
A.1.1 Bifurcação sela-nó	70
A.1.2 Bifurcação transcítica	71
A.1.3 Bifurcação quebra de simetria	73
A.1.3.1 Bifurcação quebra de simetria supercrítica	73
A.1.3.2 Bifurcação quebra de simetria subcrítica	75
A.2 Bifurcações dinâmicas	76
A.2.1 Bifurcação de Hopf	76
A.2.2 Bifurcação de dobra cíclica	78
A.2.3 Bifurcação de duplicação de período	80
APÊNDICE B - Obtenção da matriz de monodromia	81
B.1 Transformada Lyapunov-Floquet	81
B.2 Cálculos para a obtenção da matriz de monodromia	82
B.3 Matrizes da transformada L-F via polinômio de Chebyshev e iteração de Picard	84
B.3.1 Matriz $\hat{T}^T(\tau)$	85
B.3.2 Matriz $L$	86
B.3.3 Matriz $P$	88
APÊNDICE C - Programas utilizados nas simulações	89
C.1 Programa utilizado para o cálculo do expoente de Lyapunov	89
C.2 Programa utilizado para o cálculo do diagrama de bifurcação	95



## Lista de Figuras

- Figura 1 - (a) Representação de um robô manipulador. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo duplo. 5
- Figura 2 - (a) Representação de um avião. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo com uma haste rígida. 6
- Figura 3 - (a) Tanque cheio de água. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo amortecido. 7
- Figura 4 - (a) Quatro formas básicas do movimento de um dedo. (b) Modelo mecânico de um dedo. (c) Modelo correspondente representado por um pêndulo triplo. 8
- Figura 5 - Multiplicadores de Floquet para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. 18
- Figura 6 - Forma como os multiplicadores de Floquet podem sair do círculo de raio unitário. 18
- Figura 7 - Significado geométrico do mapa de Poincaré  $P(x)$  para sistemas autônomos. Observa-se que  $x_0$  é o ponto onde o fluxo  $\rho(x, \tau)$  intercepta  $\Omega$  e  $x_1$  é uma órbita não periódica que corta  $\Omega$  em  $P(x_1) \neq x_1$ . 22

Figura 8 - Significado geométrico do mapa de Poincaré para sistemas periódicos.	23
Figura 9 - Pêndulo elástico com excitação paramétrica do suporte, sendo $u$ a excitação externa que faz movimentar o suporte e $z$ é a deformação da mola.	34
Figura 10 - Representação esquemática das forças do pêndulo em relação a coordenada $x$ para a obtenção da energia cinética.	35
Figura 11 - Representação esquemática do pêndulo para a obtenção da energia potencial do pêndulo.	36
Figura 12 - Representação esquemática do suporte do pêndulo para a obtenção da energia potencial.	37
Figura 13 - Representação esquemática de um oscilador com excitação vertical no suporte e com coeficiente amortecimento $c$ .	40
Figura 14 - Representação das forças do pêndulo em relação ao deslocamento angular $\theta$ para a obtenção da energia cinética.	41
Figura 15 - Representação das forças do pêndulo em relação ao movimento do suporte $u$ para a obtenção da energia cinética.	42

Figura 16 - Representação das forças do pêndulo em relação ao deslocamento angular $\theta$ para a obtenção da energia potencial.	43
Figura 17 - Representação das forças do pêndulo em relação ao suporte $u$ para a obtenção da energia potencial.	44
Figura 18 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	48
Figura 19 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	49
Figura 20 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	50
Figura 21 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	51
Figura 22 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	52
Figura 23 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	53
Figura 24 - Diagrama de bifurcação para diferentes intervalos de $b$ . (a) $b = 1.7$ até $b = 2.2$ . (b) $b = 2.2$ até $b = 3$ .	54
Figura 25 - Diagrama de estabilidade para $0 < a < 6$ e $0 < b < 8$ .	55
Figura 26 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	56
Figura 27 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	57
Figura 28 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	58
Figura 29 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	59

Figura 30 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.	60
Figura 31 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.	61
Figura 32 - Diagrama de bifurcação para diferentes intervalos de $p$ . (a) $p = 0$ até $p = 0.8$ . (b) $p = 0.8$ até $p = 1.3$ .	62
Figura 33 - Diagrama de estabilidade para $0 < p < 2.5$ e $0.5 < \omega < 3$ .	63
Figura 34 - Bifurcação sela-nó.	71
Figura 35 - Bifurcação transcritical.	72
Figura 36 - Bifurcação quebra de simetria supercrítica.	74
Figura 37 - Bifurcação quebra de simetria subcrítica.	75
Figura 38 - Bifurcação de Hopf.	78
Figura 39 - Bifurcação de dobra cíclica para a equação de Duffing.	79
Figura 40 - Um ponto fixo estável sofre uma bifurcação de Hopf $[(a) \rightarrow (b)]$ em seguida uma bifurcação de duplicação de período $[(b) \rightarrow (c)]$ .	80

## Resumo

Andrade, V.S. (2003). *Análise da dinâmica caótica de pêndulos com excitação paramétrica do suporte*. São Carlos, 2003, 108 p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta a modelagem de um problema representado por um pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte e a análise de estabilidade do sistema pendular que se obtém desconsiderando a elasticidade do pêndulo. A modelagem dos pêndulos e a obtenção das equações do movimento são feitas a partir da equação de Lagrange, utilizando as leis de Newton e para a análise de estabilidade do sistema pendular são apresentados os diagramas de bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapas e seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov. O comportamento do sistema pendular com excitação paramétrica vertical do suporte é investigado através de simulação computacional e apresentam-se resultados para diferentes faixas de valores da amplitude de excitação externa.

**Palavras-Chave:** Pêndulos, equação de Lagrange, bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapa e seção de Poincaré, expoentes de Lyapunov, caos.

## Abstract

Andrade, V.S. (2003). *Analysis of chaotic dynamics of pendulums with parametric excitation of the suport*. São Carlos, 2003, 108 p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents the modeling of an elastic pendulum with parametric excitation of the suport and the analysis of the stability of the pendulum that one obtains disregarding the elasticity of the pendulum. The modeling of the pendulum and the equation of motions are obtained from the Lagrange's equations, using Newton's law. The concepts of bifurcation, Floquet's multipliers, Poincaré maps and sections and Lyapunov exponent are presented for the analysis of stability. The behavior of the pendulum with parametric excitation of the suport is investigated through computational simulation and results for different intervals of values of the external excitation amplitude are presented.

**Keywords:** Pendulums, Lagrange's equations, bifurcations, Floquet's multipliers, Poincaré maps and sections, Lyapunov exponents, chaos.

# Capítulo 1

## *Introdução*

### 1.1 Preliminares

Atualmente, a palavra caos, tem um novo significado no meio científico e tecnológico, passando de um termo qualificativo de desordem absoluta à designação de um novo campo de pesquisa. Neste novo campo de pesquisa analisa-se o comportamento dinâmico de sistemas não lineares seguindo determinadas rotas, tais como a duplicação de períodos, caos, etc. [1]-[4]. Os sistemas dinâmicos aparecem em modelagem de estudos populacionais, fenômenos físicos, biológicos, mecânicos além de outros.

No estudo dos sistemas dinâmicos, a teoria não linear tem tido nos últimos anos uma posição de destaque nas mais diversas áreas de pesquisa. Por exemplo, desvendando os enigmas de suas respostas, levando à possibilidade de descrever e explicar o comportamento dos mais diversos processos existentes. A principal característica de sistemas não lineares reside no fato de proporcionar vários tipos de respostas: periódicas, multi-periódicas, quasiperiódicas e caóticas.

O estudo do caos tem ganhado maior ênfase na literatura de dinâmica não linear, principalmente, devido às características de imprevisibilidade de diversos sistemas dinâmicos. A noção de caos não é recente na matemática. As primeiras idéias surgiram

no século passado, especificamente nos trabalhos de Sonja Kovaleivskaia, que influenciaram as conclusões do francês Henry Poincaré (1854-1912) sobre sistemas dinâmicos que, inspirado por problemas de mecânica celeste, estudou estruturas topológicas no espaço de fase de trajetórias dinâmicas [5].

Na década de 60 o meteorologista Edward Lorenz, estudou a possibilidade de prever, por meio de um modelo matemático, a evolução do tempo meteorológico, ou seja, antecipar em semanas o clima que se iria formar em determinado local. Lorenz observou que as soluções encontradas, não eram periódicas, ou seja, não repetiam a sua história passada. Notava-se que elas ficavam confinadas a uma região do espaço de fase descrevendo órbitas circulares em torno de dois pontos. Esta região seria chamada, posteriormente, de atrator estranho. Lorenz observou, ainda, que pequenas modificações nas condições iniciais resultavam em estados completamente distintos, após algumas iterações [4]-[7].

Atualmente, sabe-se que as duas características principais dos sistemas caóticos são a dependência sensível às condições iniciais e o confinamento das soluções do sistema a uma região do espaço de fase. Anteriormente, as instabilidades que apareciam em sistemas mecânicos eram consideradas como sendo obra do acaso ou fruto de ruídos externos que não podiam ser evitados, e seu estudo só era realizado após várias hipóteses simplificadoras, de forma a eliminar a instabilidade.

Com o atual desenvolvimento da informática, pode-se trabalhar com sistemas sem tantas simplificações, tornando os modelos descritos por equações diferenciais mais próximos dos sistemas reais. A utilização de equações diferenciais para modelar sistemas físicos foi descrita por Sir Isaac Newton para estudar o



movimento de sistemas. Ressalta-se que a determinação do movimento resultante do sistema está ligada à obtenção de solução da equação diferencial associada ao modelo do sistema [7]-[9].

Foi Galileu Galilei o primeiro a observar, por volta de 1583, que o período do movimento pendular era constante, ao comparar o movimento de oscilação de uma lâmpada dependurada por um fio no teto da catedral de Pisa com as batidas de seu coração. Observou-se que pêndulo é um corpo pesado, também chamado de prumo, suspenso no extremo inferior de um fio de tal forma que, ao ser afastado de sua posição de equilíbrio, oscila sob a ação da gravidade. A trajetória percorrida pelo prumo é chamada de arco e o tempo que o corpo leva para ir de um lado para outro, ou de um extremo a outro do arco, chama-se período de oscilação [5], [10].

Na literatura corrente existem muitos trabalhos que abordam sistemas pendulares em diferentes situações e com diferentes tipos de análises. Dentre estes trabalhos, citam-se os trabalhos precursores de Dávid e Sinha [11], Bishop e Xu [12], [13], onde utilizaram um pêndulo com excitação paramétrica vertical do suporte. O trabalho de Ge e Lin [14] considera um pêndulo com excitação horizontal do suporte e Flashner e Golat [15] um pêndulo com excitação vertical e horizontal no suporte.

Em geral, utiliza-se das equações de Lagrange para obtenção das equações de movimento do sistema dinâmico. Uma vez obtidas as equações que descrevem o movimento de um determinado sistema, é possível fazer a análise de estabilidade utilizando diagramas de bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapas de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

O diagrama de bifurcação exibe o comportamento do sistema quando ocorre mudança nos parâmetros de controle do sistema como amortecimento, frequência, amplitude, etc. Os fenômenos de bifurcações e caos estão intimamente relacionados e é importante analisá-los conjuntamente, com o objetivo de observar o comportamento geral de um sistema não linear [7].

Os multiplicadores de Floquet servem para identificar o ponto onde se inicia uma bifurcação e classificar o tipo de bifurcação existente.

O mapa de Poincaré é entendido como um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma discreta [1], [2]. Se o comportamento de um sistema for caótico, o mapa de Poincaré terá atratores com pontos espalhados, não se podendo prever como a solução do sistema se comportará. Quando o sistema for não caótico, o mapa de Poincaré, terá atratores com pontos fixos, ou seja, o sistema poderá ser periódico.

O expoente de Lyapunov é utilizado para medir a taxa de divergência de trajetórias e analisar a sensibilidade do sistema às condições iniciais. Um expoente de Lyapunov positivo indica que o sistema está com um comportamento caótico, mas um expoente de Lyapunov negativo indica que o sistema não tem caos. O sinal do expoente de Lyapunov está intimamente ligado ao aparecimento de atratores nos sistemas, como o atrator ponto fixo, ciclo limite, toro e atrator estranho [1], [2], [7].

## 1.2 Exemplos de sistemas pendulares

Com o objetivo de ilustrar a importância dos sistemas pendulares na modelagem de sistemas dinâmicos, são listados abaixo alguns modelos.

### 1.2.1 Robô manipulador

Considere um robô manipulador de posicionamento de ferramentas como mostrado na Fig. 1(a) [27].

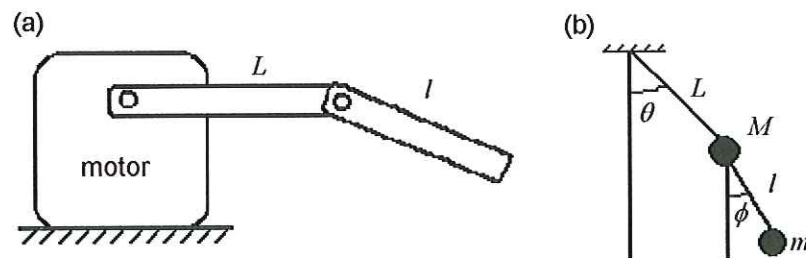


Figura 1 - (a) Representação de um robô manipulador. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo duplo.

O robô manipulador pode ser descrito como um sistema mecânico articulado que tem por objetivo principal executar operações pré-definidas. Um manipulador mecânico consiste de elos, conectados por juntas rotacionais, podendo ser modelado por um sistema de pêndulos como mostrado na Fig.1(b). Do conhecimento das variáveis articulares de um robô determina-se o posicionamento de sua ferramenta no sistema de coordenadas de trabalho. A implementação de um controlador de posição para um robô industrial exige o conhecimento preciso da cinemática do movimento do manipulador. Para estabelecer estratégias de controle de posição de juntas robóticas eficientes e precisas, o movimento do robô é normalmente descrito através de suas equações

diferenciais levando-se em consideração a sua arquitetura construtiva, a massa dos diferentes componentes e as inércias relacionadas com a carga transportada.

### 1.2.2 Vibração na asa de avião

Considere uma asa de avião com um tanque de gasolina localizado em sua ponta, como mostrado na Figura 2(a) abaixo.

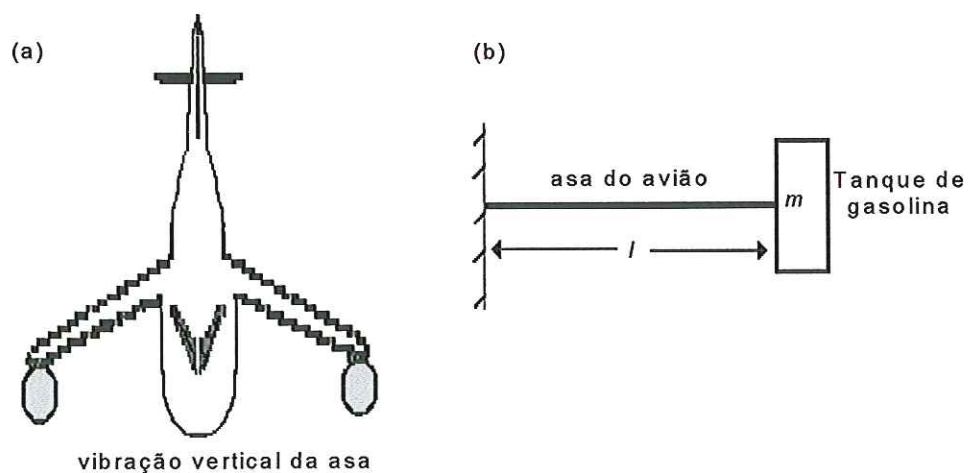


Figura 2 - (a) Representação de um avião. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo com uma haste rígida.

O sistema da Fig.2(a) pode ser representado por um pêndulo com uma haste rígida conectada a uma massa como mostrado na Fig.2(b). Dentre as análises que se pode fazer com este modelo, destaca-se o interesse em saber como se comporta a vibração da asa do avião em relação ao consumo de gasolina. Para fazer este tipo de análise, calcula-se a frequência natural da asa quando o tanque de gasolina está cheio e em seguida calcula-se a frequência natural quando o tanque de gasolina está vazio.

Para a obtenção dos resultados é necessário conhecer os parâmetros do sistema asa-tanque, como o comprimento da viga, módulo de elasticidade e momento de inércia da viga. Conhecendo tais parâmetros consegue-se estabelecer relações entre a vibração da asa e o consumo de gasolina.

### 1.2.3 Transporte de líquido

Considere um tanque de água conduzido por uma esteira como mostrado na Fig. 3(a) [28].

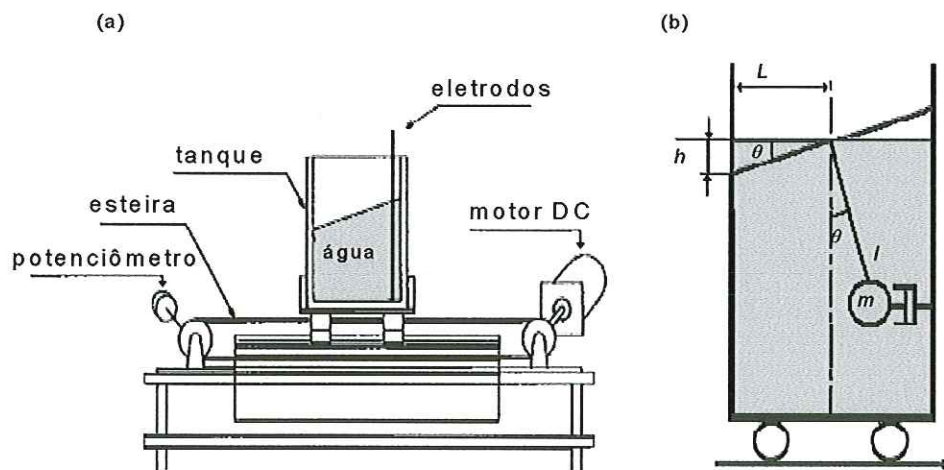


Figura 3 - (a) Tanque cheio de água. (b) Modelo correspondente representado por um pêndulo amortecido.

O tanque é movido por um servo-motor DC com uma correia. A velocidade e a posição do tanque são controladas por meio da tensão aplicada no motor.

O sistema tanque-água pode ser modelado por um sistema de um pêndulo amortecido como mostrado na Fig.3(b). A posição do tanque é detectada por um potenciômetro fixado a uma polia. Deslocamentos do nível de líquido são detectadas através de mudanças na resistência entre dois eletrodos inoxidáveis instalados na parede lateral

do tanque. Utiliza-se esta posição dos eletrodos porque o deslocamento do nível de líquido durante a agitação pode ser observado próximo das paredes laterais do tanque. Os eletrodos têm que estar levemente afastados da parede lateral a fim de evitar os efeitos da parede. Através das equações de movimentos do sistema é possível analisar qual a máxima velocidade que a esteira pode movimentar de forma que a água contida dentro do tanque não transborde.

### 1.2.4 Movimento de um dedo mecânico

Considere os movimentos de um dedo e seus respectivos modelos como ilustrado na Fig.4 [29].

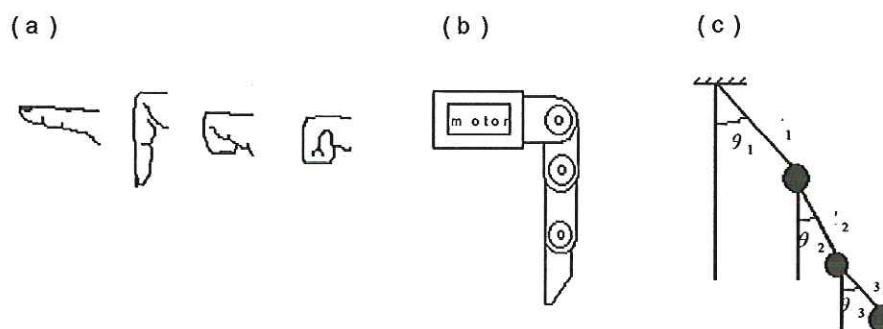


Figura 4 - (a) Quatro formas básicas do movimento de um dedo. (b) Modelo mecânico de um dedo. (c) Modelo correspondente representado por um pêndulo triplo.

O movimento de um dedo mecânico pode ser descrito por um sistema de articulações que têm como objetivo executar movimentos que se aproximem ao máximo dos movimentos de uma pessoa normal. Um dedo mecânico consiste de elos conectados por juntas rotacionais, podendo ser modelado por um sistema de pêndulos como mostrado na Fig.4(c). Na elaboração de uma prótese, deve se considerar todos os

aspectos relacionados com a estrutura, transmissão, ação e controle dos movimentos e o conhecimento das variáveis relacionadas com o movimento do sistema determina como o dedo deve se posicionar de acordo com a situação desejada.

Para fazer o movimento dos dedos mecânicos utiliza-se uma corrente que passa através da prótese, e um motor que ativa as juntas. Na obtenção do controle dos movimentos, utiliza-se o fluxo de corrente que passa dentro das juntas.

### **1.3 Objetivos**

O presente trabalho tem como objetivo a modelagem de um pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte e a análise de estabilidade de um sistema pendular que se obtém desconsiderando as variáveis relacionadas à sua elasticidade, este estudado anteriormente em [11] e [12], para diferentes faixas de valores para amplitude de excitação externa. Com o propósito de analisar a estabilidade do sistema pendular sem elasticidade obteve-se, através de simulação computacional, o histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, os expoentes de Lyapunov e a construção do diagrama de bifurcação e do mapa de estabilidade utilizando os multiplicadores de Floquet.

### **1.4 Organização da dissertação**

A dissertação encontra-se dividida nos seguintes capítulos. No Capítulo 2 apresentam-se algumas ferramentas de análise de estabilidade, como diagramas de bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapas e seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

No Capítulo 3 apresenta-se a modelagem de um pêndulo elástico com excitação vertical do suporte e a validação deste modelo através de sua redução a um pêndulo rígido. No Capítulo 4 apresentam-se os resultados de simulação numérica seguido das conclusões e perspectivas futuras do trabalho. No Apêndice A faz-se um estudo mais detalhado dos tipos de bifurcações que podem ser encontradas em sistemas dinâmicos, no Apêndice B apresenta-se o procedimento para o cálculo da matriz de monodromia e no Apêndice C apresentam-se os códigos dos programas implementados utilizando o software Matlab® 6.5.



## Capítulo 2

### *Instabilidade de sistemas dinâmicos*

Neste capítulo são apresentadas algumas ferramentas usuais em dinâmica não linear, cujo objetivo é o de caracterizar regiões estáveis, instáveis ou caóticas em sistemas dinâmicos.

A análise da estabilidade pode ser feita, através do uso da seguinte técnica: perturba-se o sistema e observa-se o seu comportamento [16]. Entende-se por perturbação, qualquer alteração nos parâmetros do sistema (por ex: amortecimento, amplitude, frequência, etc.). Ressalta-se que dependendo da magnitude da perturbação utilizada, o sistema dinâmico pode ou não perder sua estabilidade.

A motivação para se perturbar um sistema dinâmico é o de analisá-lo quando este sistema passa de um comportamento estável para um comportamento instável ou caótico.

Nas seções que se seguem, apresentam-se os conceitos de estabilidade, estabilidade estrutural, bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapas e seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov. Estas técnicas são consideradas neste trabalho para análise da dinâmica dos pêndulos.

## 2.1 Conceitos de estabilidade e estabilidade estrutural

Seja um sistema dinâmico autônomo descrito na forma

$$\dot{x} = F(x) \tag{2.1}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  e  $F \in \mathfrak{R}^n$ . No equilíbrio tem-se

$$F(x^*) = 0. \tag{2.2}$$

Pode-se dizer que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação aproxima-se de  $x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$  para  $x$  próximo de  $x^*$ . Neste caso, o ponto fixo  $x^*$  é um atrator. Os pontos fixos assintoticamente estáveis são também chamados de sorvedouros (“sinks”).

Diz-se que um ponto de equilíbrio é estável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação permanece pequena.

Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é instável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação cresce conforme a evolução do sistema. Neste caso dizemos que  $x^*$  é um repulsor ou uma fonte (“source”).

Um sistema é denominado estruturalmente estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena nas suas equações a resposta do sistema é topologicamente equivalente àquela do sistema sem perturbação. Quando ocorre perda de estabilidade estrutural no sistema tem-se bifurcação [7], [17], como mostra a seção seguinte.

## 2.2 Bifurcações locais em sistemas dinâmicos

Os modelos matemáticos de sistemas dinâmicos podem conter alguns parâmetros denominados parâmetros de controle. Por exemplo, a frequência natural  $\omega_0^2$  é um parâmetro de controle na equação do pêndulo simples. Nota-se que o comportamento dinâmico do sistema, pode ser bem diferente para certas faixas do parâmetro de controle [1], [2], [18].

Uma bifurcação é usada para indicar mudanças qualitativas nas características de um sistema dinâmico, devido às variações dos parâmetros de controle [1]. Quando um sistema dinâmico apresenta um comportamento caótico, em geral, ocorrerá algum tipo de bifurcação. O espaço formado pelas variáveis de estado e pelos parâmetros de controle é chamado de espaço estado-controle e a variação dos pontos fixos neste espaço de parâmetros resulta no diagrama de bifurcação. Ao se variar um dos parâmetros de controle de um sistema, um ponto fixo estável pode perder estabilidade gerando dois tipos de bifurcações: bifurcações estáticas e dinâmicas.

As bifurcações estáticas são do tipo sela-nó, transcritical, quebra de simetria ou forquilha (*pitchfork*). As bifurcações dinâmicas são do tipo Hopf, quebra de simetria, dobra cíclica, duplicação de período (*flip*). A análise de cada tipo de bifurcação, estática e dinâmica, é apresentada no Apêndice A.

Na seção seguinte, descreve-se um procedimento de análise de estabilidade e instabilidade em sistemas dinâmicos periódicos, utilizando a transformada de Lyapunov-Floquet [1]-[3], [20].

### 2.3 Transformada de Lyapunov-Floquet

Considere um sistema dinâmico não-autônomo e periódico no tempo descrito por

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (2.3)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $t \in \mathfrak{R}$  e  $F \in \mathfrak{R}^n$ .

Deseja-se investigar se a solução de (2.3) é estável e se ela pode ou não perder sua estabilidade. A transformada de Lyapunov-Floquet foi desenvolvida em 1883 para a análise da estabilidade de soluções periódicas [1], [2], [19].

Uma solução periódica é chamada de ciclo limite se não houver outras soluções periódicas suficientes próximas dela. Assim, um ciclo limite é uma solução periódica isolada e corresponde a uma órbita fechada no espaço de estado.

Com o propósito de investigar a estabilidade da solução periódica  $x_s(t)$  de (2.3), considera-se uma pequena perturbação  $\tilde{x}(t)$ , de modo que

$$x(t) = x_s(t) + \tilde{x}(t). \quad (2.4)$$

Isolando-se  $\tilde{x}(t)$  e derivando-a em relação ao tempo tem-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F(x, t) - F(x_s, t). \quad (2.5)$$

Substituindo-se (2.4) em (2.5) tem-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F(x_s + \tilde{x}, t) - F(x_s, t) = \tilde{F}(\tilde{x}, t). \quad (2.6)$$

Expandindo  $\tilde{F}(\tilde{x}, t)$  em série de Taylor em torno de  $x_s(t)$  tem-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) \cong \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \Big|_{x_s(t)} \tilde{x}(t). \quad (2.7)$$

Considerando, somente os termos lineares na expansão efetuada, tem-se um sistema linear de equações diferenciais da forma

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D(t)\tilde{x}(t) \quad (2.8)$$

onde a matriz  $D(t)$  é uma matriz com coeficientes dependentes do tempo dada por

$$D(t) = \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right|_{x_s(t)}. \quad (2.9)$$

Desde que  $x_s(t)$  é uma solução periódica de período  $T$ , a matriz  $D(t)$  é, também, periódica com o mesmo período  $T$ , isto é

$$D(t) = D(t + T). \quad (2.10)$$

Para analisar a estabilidade da solução periódica  $x_s(t)$ , deve-se analisar o comportamento da perturbação  $\tilde{x}(t)$  ao longo do tempo. Sabe-se que  $\tilde{x}(t)$  é obtida a partir da solução do sistema linearizado.

A idéia básica da transformada Lyapunov-Floquet é a suposição de que através da periodicidade da matriz  $D(t)$  pode-se encontrar um sistema de equações com coeficientes constantes, onde a observação do comportamento de  $\tilde{x}(t)$  é feita somente em pontos discretos de tempo, múltiplos de período  $T; t = 0, T, 2T, \dots$

Supondo que (2.8) possui  $n$  soluções linearmente independentes  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ , as quais são chamadas Soluções Fundamentais, sabe-se que se pode escrever qualquer solução  $\tilde{x}(t)$  como uma combinação linear destas soluções, isto é

$$\tilde{x}(t) = c_1 \tilde{x}_1(t) + c_2 \tilde{x}_2(t) + \dots + c_n \tilde{x}_n(t). \quad (2.11)$$

Então, escreve-se (2.11) na forma matricial como sendo

$$\tilde{x}(t) = \phi(t)c, \quad (2.12)$$

onde  $\phi(t) = [\tilde{x}_1(t) \tilde{x}_2(t) \dots \tilde{x}_n(t)]$  é chamada de matriz fundamental e  $c$  é um vetor constante de dimensão apropriada. Se  $\tilde{x}(t)$  for uma solução do sistema (2.8), então por (2.10),  $\tilde{x}(t+T)$  também é solução.

Escolhe-se, então, um sistema de soluções fundamentais  $\varphi_i(t)$ , de modo que as condições iniciais fiquem sobre uma hiper-esfera de raio 1 [1], [2], [20], [21].

A matriz fundamental associada a este conjunto de soluções é dada por

$$\phi(t) = [\varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t)] \quad (2.13)$$

com condição inicial dada por

$$\phi(0) = I. \quad (2.14)$$

A partir da periodicidade do sistema de soluções fundamentais, é possível encontrar uma matriz  $C_{n \times n}$  de modo que a seguinte igualdade seja válida

$$\phi(t+T) = \phi(t)C. \quad (2.15)$$

Tendo em vista as condições iniciais dadas por (2.14), pode-se deduzir que

$$\phi(T) = \phi(0)C = IC = C. \quad (2.16)$$

A matriz  $\phi(T)$  é chamada matriz de monodromia. Geralmente, esta matriz não pode ser determinada analiticamente, desta forma ela é calculada através de métodos numéricos. O procedimento para calcular  $\phi(T)$  é apresentado no Apêndice B. A seguir, discute-se a relação entre os multiplicadores de Floquet e a estabilidade do sistema.

### 2.3.1 Multiplicadores de Floquet

Os autovalores da matriz de monodromia são chamados multiplicadores característicos ou de Floquet. Estes autovalores podem ser reais ou complexos conjugados e fornecem as informações sobre a estabilidade de uma solução periódica  $x_s(t)$ . Se nenhum dos multiplicadores de Floquet estiver sobre a hiper-esfera de raio unitário, a solução periódica será chamada hiperbólica, caso contrário, será chamada não-hiperbólica.

Quanto à estabilidade das soluções periódicas hiperbólicas, tem-se:

- Se todos os multiplicadores de Floquet estiverem dentro da hiper-esfera de raio unitário, a solução periódica é assintoticamente estável e é chamada de ciclo limite ou atrator periódico.
- Se pelo menos um dos multiplicadores de Floquet estiver fora da hiper-esfera de raio unitário, a solução periódica é instável.
- Se todos os multiplicadores de Floquet estiverem fora da hiper-esfera de raio unitário, a solução periódica é instável e é denominada fonte ou repulsor periódico.
- Se alguns multiplicadores de Floquet estiverem fora da hiper-esfera de raio unitário e os outros no interior desta esfera, a solução periódica é do tipo sela.

Na Fig.5 são mostrados os multiplicadores de Floquet no plano complexo para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem e a indicação da estabilidade da solução [22], [23].

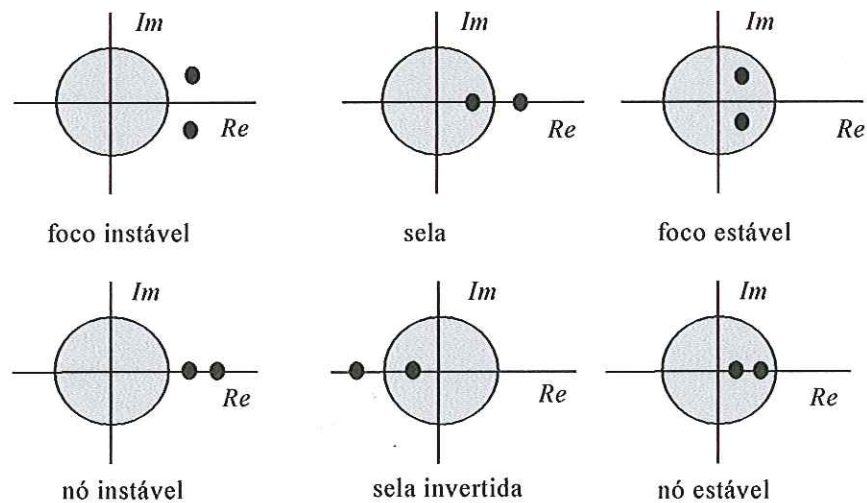


Figura 5 - Multiplicadores de Floquet para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem.

Seja um sistema contínuo com uma solução periódica estável descrita pelo mapa de Poincaré. Quando se varia o parâmetro de controle, a solução periódica pode perder sua estabilidade, sendo que o tipo de bifurcação é dependente da maneira pela qual os multiplicadores de Floquet associados aos pontos fixos do mapa de Poincaré deixam o círculo de raio unitário como mostra a Fig.6 [22].

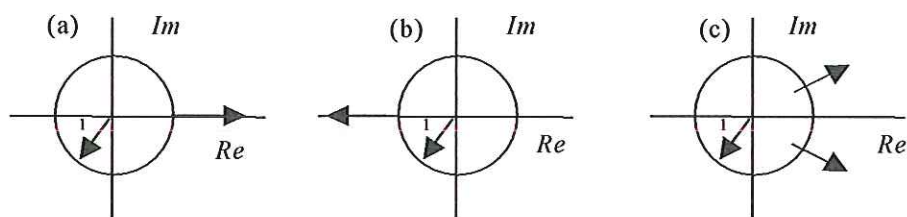


Figura 6 - Forma como os multiplicadores de Floquet podem sair do círculo de raio unitário.

As soluções periódicas podem exibir os seguintes tipos de bifurcação de acordo com os valores obtidos dos multiplicadores de Floquet.



- ***Bifurcação por quebra de simetria***

Esta bifurcação acontece quando o multiplicador de Floquet deixa o círculo de raio unitário através de +1 como mostrado na Fig.6(a). Supondo que a solução periódica anterior à bifurcação seja simétrica, se a bifurcação quebrar a simetria da solução, esta será chamada de bifurcação por quebra de simetria.

- ***Bifurcação por dobra cíclica***

Neste tipo de bifurcação, um multiplicador de Floquet, também deixa o círculo de raio unitário através de +1 como mostrado na Fig.6(a). Na bifurcação por dobras cíclicas, o braço de soluções periódicas estáveis e um braço de soluções instáveis que existem antes do ponto de bifurcação, são criados ou destruídos mutuamente no ponto de bifurcação.

- ***Bifurcação transcritical***

A bifurcação transcritical pode ocorrer quando um multiplicador de Floquet deixa o círculo de raio unitário através de +1 como mostrado na Fig.6(a). Nesta bifurcação os braços de soluções periódicas estáveis passam a ser instáveis após a bifurcação.

- ***Bifurcação de duplicação de período***

Esta bifurcação acontece quando um multiplicador de Floquet deixa o círculo de raio unitário através de -1 como mostrado na Fig.6(b). Nesta bifurcação, o braço de soluções periódicas estáveis que existia antes da bifurcação, continua, mas torna-se um braço de soluções periódicas instáveis após a bifurcação.

A título de ilustração, apresenta-se a seguir um exemplo da obtenção dos multiplicadores de Floquet.

**Exemplo (obtenção dos multiplicadores de Floquet)**

Considere o sistema de equações diferenciais [2].

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x[\eta - (x^2 + y^2)] - y \\ \dot{y} &= y[\eta - (x^2 + y^2)] + x.\end{aligned}\tag{2.17}$$

A solução de (2.17) é periódica e de período  $T = 2\pi$  e é dada por

$$x_s(t) = \sqrt{\eta} \{ \cos(t) \quad \text{sen}(t) \}.\tag{2.18}$$

Deseja-se investigar a estabilidade da solução (2.18) perturbada como abaixo

$$x(t) = x_s(t) + \tilde{x}(t).\tag{2.19}$$

Utilizando (2.6), (2.7) e (2.8) pode-se obter um sistema linear de equações diferenciais da forma

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D(x_s) \tilde{x}\tag{2.20}$$

onde a matriz  $D(t)$  é dada por

$$D(x_s) = \begin{bmatrix} \eta - 3x^2 - y^2 & -(1 + 2xy) \\ (1 - 2xy) & \eta - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}.\tag{2.21}$$

Substituindo (2.18) em (2.21) obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = - \begin{bmatrix} 2\eta \cos^2(t) & \eta \text{sen}(2t) + 1 \\ \eta \text{sen}(2t) - 1 & 2\eta \text{sen}^2(t) \end{bmatrix} \tilde{x}(t).\tag{2.22}$$

Escolhe-se agora um sistema de soluções fundamentais  $\varphi(t)$ , de modo que as condições iniciais fiquem sobre uma hiper-esfera de raio 1 [1], [2].

A matriz fundamental associada a este conjunto de soluções é dada por

$$\varphi_1 = e^{-2\eta t} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \text{sen}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} -\text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}\tag{2.23}$$

com condição inicial dada por

$$\phi(0) = I. \quad (2.24)$$

Utilizando (2.16) pode-se encontrar a matriz de monodromia  $C$  dada por

$$C = \phi(T) = \phi(2\pi) = \begin{bmatrix} e^{-4\pi\eta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

e os multiplicadores de Floquet são então dados por

$$\mu_1 = e^{-4\pi\eta}, \quad \mu_2 = 1. \quad (2.26)$$

Pode-se concluir que a solução periódica é não hiperbólica.

Na seção seguinte, discute-se a construção de mapas e seções de Poincaré.

## 2.4 Mapa e seção de Poincaré

A identificação das órbitas periódicas e o estudo de sua estabilidade nem sempre é tarefa fácil. Para a simplificação deste problema utiliza-se o artifício de reduzir a dimensão do espaço solução transformando o sistema contínuo, descrito por equações diferenciais ordinárias, em um sistema discreto, representado por um mapeamento.

Seja um sistema dinâmico contínuo não linear. O fluxo  $\rho(t)$  a ele associado pode dar origem a um mapa. Um mapa pode ser entendido como um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma discreta [1]-[4]. Os mapas são, em geral, mais simples de analisar que os sistemas de equações diferenciais que lhes deram origem. O conceito de mapa de Poincaré em sistemas autônomos e em sistema periódicos é apresentado a seguir.

### 2.4.1 Sistemas autônomos

Considere um sistema dinâmico autônomo dado por

$$\dot{x} = F(x). \quad (2.27)$$

Seja  $x_0$  uma órbita periódica associada ao fluxo  $\rho(t)$  gerado por (2.27) e considere uma hipersuperfície  $\Omega$  de tal maneira que o fluxo seja transversal a hipersuperfície  $\Omega$ , onde  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ .

Define-se mapa de Poincaré  $P(x)$  para um ponto  $x \in \mathfrak{R}^n$ , como

$$P(x) = \rho(x, \tau) \quad (2.28)$$

sendo que  $\tau$  é o tempo necessário para que o fluxo  $\rho(x, \tau)$ , que parte de  $x_0$ , retorne pela primeira vez à hipersuperfície  $\Omega$ .

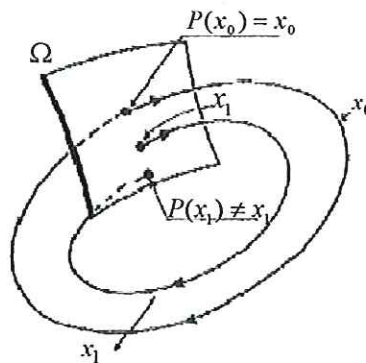


Figura 7 - Significado geométrico do mapa de Poincaré  $P(x)$  para sistemas autônomos. Observa-se que  $x_0$  é o ponto onde o fluxo  $\rho(x, \tau)$  intercepta  $\Omega$  e  $x_1$  é uma órbita não periódica que corta  $\Omega$  em  $P(x_1) \neq x_1$ .

A hipersuperfície  $\Omega$  é chamada de seção de Poincaré, sendo esta transversal ao fluxo  $\rho(x, \tau)$ . O mapa de Poincaré é, portanto a seqüência de pontos nos quais o

fluxo intercepta a seção de Poincaré. Ressalta-se que a dinâmica do sistema original é a mesma da obtida através do mapa [4].

### 2.4.2 Sistemas periódicos

Seja um sistema periódico no tempo com período  $T$ , então a solução periódica do sistema tem um período que é um múltiplo ou um sub-múltiplo inteiro de período  $T$  [1], [2], [7]. Ressalta-se que este período pode ser usado para construir um mapa de Poincaré, como ilustrado na Fig.8.

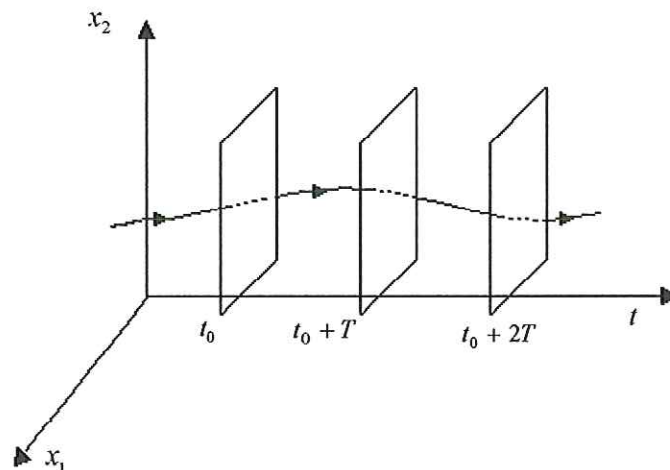


Figura 8 - Significado geométrico do mapa de Poincaré para sistemas periódicos.

Quando no processo de mapeamento os pontos jamais coincidem com algum marcado anteriormente, a órbita é dita aberta e o movimento é não-periódico, mas se os pontos fixos descrevem uma órbita fechada no espaço de fase, tem-se um movimento periódico.

O movimento não-periódico é representado, no mapa de Poincaré, por uma coleção de pontos espalhados dentro de uma região limitada no espaço de fase, sugerindo a existência de um atrator estranho ou caótico.

Vale ressaltar que um sistema não-autônomo, pode ser transformado em um sistema autônomo de dimensão  $n+1$ , considerando o tempo, ou um parâmetro relacionado ao tempo, como uma nova variável de estado.

Os passos para a obtenção do mapa de Poincaré são resumidos a seguir [1], [2].

### **Algoritmo para a construção do mapa de Poincaré**

**Passo 1:** Escolher condições iniciais e fixar um intervalo de tempo de integração  $[t_0, t_f]$  com passo de integração  $T$  ( $T$  é o próprio período do sistema);

**Passo 2:** Encontrar a solução do sistema de equações diferenciais que descreve o

sistema  $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_k), \dots, x(t_f)$ ,  $t_k = t_0 + kT$  ( $k = 1, 2, \dots, \frac{t_f - t_0}{T}$ );

**Passo 3:** Eliminar a parte transiente da solução  $x(t_k)$  para refinar a análise;

**Passo 4:** Plotar no plano  $(x, \dot{x})$  a seqüência de pontos  $x(t_k)$  sem a parte transitória.

No Apêndice B, apresenta-se o código, desenvolvido em Matlab<sup>®</sup> 6.5, para a construção do mapa de Poincaré do sistema analisado em [12].

Para caracterizar o movimento como sendo caótico, utiliza-se de um conceito mais preciso, os expoentes de Lyapunov, sendo este conceito apresentado na seção que segue.

## **2.5 Expoente de Lyapunov**

Para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto analisar a dependência sensível às condições iniciais utiliza-se os expoentes de Lyapunov. Através da análise do sinal do expoente pode-se identificar regiões caóticas e não-caóticas nos sistemas, ou seja, um expoente de Lyapunov positivo indica que existe uma direção característica na qual os atratores tendem a se separar. Por outro lado, um expoente negativo indica que existe uma direção característica na qual os atratores tendem a se aproximar.

O expoente de Lyapunov permite fazer uma análise do comportamento (caótico ou não-caótico) de trajetórias. Na seção seguinte descreve-se o procedimento para calcular o expoente de Lyapunov para um sistema autônomo e para o mapa de Poincaré.

### **2.5.1 Expoente de Lyapunov em mapas**

A sensibilidade às condições iniciais de um sistema dinâmico, define um comportamento caótico. Analisa-se, nesta seção, o comportamento de duas trajetórias muito próximas. Este procedimento tem por objetivo obter uma expressão geral para o cálculo do expoente de Lyapunov, como mostra o desenvolvimento a seguir [24].

Considere a equação de um mapa

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (2.29)$$

onde  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . A seqüência de pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  representa uma órbita do mapa com condição inicial  $x_0$ .

Sejam duas condições iniciais  $x_0$  e  $x_{0r}$  do mapa (2.29), onde o sub-índice  $r$  refere-se a uma trajetória de referência. A distância inicial entre estas é dada por

$$\delta = x_0 - x_{0r}. \quad (2.30)$$

Admita-se que após uma primeira iteração a diferença entre as trajetórias seja dada por

$$\delta' = x_1 - x_{1r}, \quad (2.31)$$

tal que

$$\delta' = e^h \delta, \quad (2.32)$$

sendo  $h$  a taxa de expansão da distância entre as trajetórias.

A diferença entre as órbitas é plotada utilizando uma escala logarítmica. Nota-se que a escala logarítmica é usada para linearizar uma curva e melhorar a visualização.

Usando (2.29) pode-se reescrever (2.31) como sendo

$$\begin{aligned} \delta' &= F(x_0) - F(x_{0r}) \\ &= F(x_{0r} + \delta) - F(x_{0r}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde na última passagem utilizou-se (2.30). Combinando (2.33) e (2.32) obtém-se

$$\delta' = F(x_{0r} + \delta) - F(x_{0r}) = e^h \delta. \quad (2.34)$$

Para obter a segunda iteração do mapa (2.29) utiliza-se o raciocínio apresentado anteriormente.



Após uma segunda iteração a diferença entre as trajetórias é dada por

$$\delta'' = x_2 - x_{2r} \quad (2.35)$$

tal que

$$\delta'' = e^h \delta' \quad (2.36)$$

Usando (2.29) pode-se reescrever (2.35) como

$$\begin{aligned} \delta'' &= F(x_1) - F(x_{1r}) \\ &= F(x_{1r} + \delta') - F(x_{1r}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde na última passagem utilizou-se (2.31). Substitui-se (2.33) e (2.34) em (2.37) e obtém-se (2.38)

$$\delta'' = F(F(x_{0r}) + (F(x_0) - F(x_{0r}))) - F(F(x_{0r})) = e^h (e^h \delta) \quad (2.38)$$

Simplifica-se (2.38) e obtém-se (2.39)

$$\delta'' = F(F(x_{0r} + \delta) - F(F(x_{0r}))) = e^{2h} \delta \quad (2.39)$$

Por indução obtém-se a seguinte relação

$$\delta^N = F^N(x_{0r} + \delta) - F^N(x_{0r}) = e^{Nh} \delta \quad (2.40)$$

com

$F^N(x) = F(F \dots F(x) \dots)$ ,  $N$  vezes. Isolando-se  $h$  obtém-se

$$h = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)}{\delta} \right| \quad (2.41)$$

Como  $h$  depende de  $N$  e  $\delta$ , considera-se então uma distância infinitesimal ( $\delta \rightarrow 0$ ) depois de um número infinito de iterações ( $N \rightarrow \infty$ ).

Desta forma, pode-se obter o seguinte limite

$$\lambda(x_0) \equiv h(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)}{\delta} \right| \quad (2.42)$$

o que fornece a expressão do expoente de Lyapunov de mapas

$$\lambda(x_0) \equiv h(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{dF^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (2.43)$$

Na seção seguinte, descreve-se o procedimento para o cálculo do expoente de Lyapunov a partir das equações de um sistema autônomo.

### 2.5.2 Expoentes de Lyapunov em sistemas autônomos

Considere um sistema autônomo não linear dado por [1]

$$\dot{x} = F(x) \quad (2.44)$$

onde  $x$  é um vetor de  $n$  variáveis de estado. Seja  $y$  o estado linearizado dado por

$$\dot{y} = Ay \quad (2.45)$$

onde

$$A = \left. \frac{\partial(F(x))}{\partial x} \right|_{x=x(t_{nf})} \quad (2.46)$$

e  $x(t_{nf})$  é o último valor da integração do sistema não linear. Para o cálculo do expoente de Lyapunov em sistemas autônomos deve-se inicialmente, integrar o sistema não linear e o sistema linearizado simultaneamente, com os últimos valores dos vetores da solução do sistema não linear  $x(t_{nf})$  usados como pontos de operação para o sistema linearizado.

Os vetores gerados pelo sistema linear são ortonormalizados, utilizando o procedimento de Gram-Schmidt, para que os eixos das soluções permaneçam ortogonais, e por fim integra-se o sistema não linear e o linearizado novamente [24]. A equação utilizada para a obtenção do j-ésimo expoente de Lyapunov é mostrada abaixo

$$\lambda_j = \frac{1}{rt_f} \sum_{k=1}^r \ln N_j^k \quad (2.47)$$

onde

$$N_j^k = \left\| y_j(t_f) - \sum_{k=1}^{r-1} [y_j(t_f) \cdot \hat{y}_k] \hat{y}_k \right\| \quad (2.48)$$

é o denominador obtido através do procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt da solução de (2.45),  $k$  é o passo das iterações,  $r$  é o número de iterações feitas durante o procedimento,  $t_f$  o tempo final de integração do sistema linearizado e  $(\cdot)$  significa o produto escalar de dois vetores. Todos os passos do algoritmo são resumidos no algoritmo abaixo [24], [25]:

### Algoritmo de obtenção dos expoentes de Lyapunov

**Passo 1:** Escolher o intervalo de tempo de integração  $[t_0, t_{nf}]$  para o sistema não linear (2.44) e  $[t_0, t_f]$  para o sistema linearizado (2.45). Fixar um passo de integração  $k$  para (2.44) e (2.45). Adotar uma condição inicial para o sistema não linear (2.44).

**Passo 2:** Integrar o sistema não linear (2.44). Acumular o último valor da solução do sistema não linear  $x(t_{nf})$ .

**Passo 3:** Integrar o sistema linearizado (2.45) no ponto de operação dado pelo último valor da solução do sistema não linear  $x(t_{nf})$ . A condição inicial de integração do sistema linearizado deve ser uma base ortogonal (por exemplo, se  $n = 2$ , utiliza-se  $\hat{y}_1 = [1 \ 0]$ ,  $\hat{y}_2 = [0 \ 1]$ );

**Passo 4:** Ortonormalizar as soluções do sistema linearizado utilizando o procedimento de Gram-Schmidt como mostrado abaixo

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_1 &= \frac{y_1(t_f)}{\|y_1(t_f)\|} \\
 \hat{y}_2 &= \frac{y_2(t_f) - [y_2(t_f) \cdot \hat{y}_1] \hat{y}_1}{\|y_2(t_f) - [y_2(t_f) \cdot \hat{y}_1] \hat{y}_1\|} \\
 &\vdots \\
 \hat{y}_j &= \frac{y_j(t_f) - \sum_{k=1}^{j-1} [y_j(t_f) \cdot \hat{y}_k] \hat{y}_k}{\|y_j(t_f) - \sum_{k=1}^{j-1} [y_j(t_f) \cdot \hat{y}_k] \hat{y}_k\|}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

**Passo 5:** Acumular o denominador  $\hat{y}_j$  de (2.49);

**Passo 6:** Repetir os passos de 1 a 5;

**Passo 7:** Obter o somatório do denominador de (2.49) e substituir os valores finais de  $r$  e  $t_f$  escolhidos em (2.47).

No Apêndice C, apresenta-se o código, desenvolvido em Matlab® 6.5, para a obtenção dos expoentes de Lyapunov para o sistema analisado em [12].

## Capítulo 3

### ***Modelagem matemática de sistemas dinâmicos do tipo pendulares***

Um modelo matemático pode ser definido como uma formulação ou equação que expressa as características essenciais de um sistema, seja este da física, engenharia, biologia, química, etc. Não existe um único modelo matemático para os sistemas, cada um apresenta diferentes graus de aproximação e de validade de acordo com a necessidade do problema.

Ao se iniciar um projeto, seja ele, de engenharia, física, biologia, química, etc. procura-se começar com um modelo matemático o mais simples possível, com o objetivo de adquirir um conhecimento inicial do problema. Entretanto à medida que se deseja obter um modelo matemático mais completo, ou seja, com maior aproximação, torna-se necessário acrescentar novos aspectos do sistema levando a modelos matemáticos mais complexos e de difícil solução.

A seguir, apresenta-se a obtenção das equações de Lagrange, que geralmente são usadas na descrição do movimento, e em particular para sistemas pendulares.

#### **3.1 Equações de movimento**

A equação de Lagrange nos fornece uma forma simples e direta de escrever as equações do movimento utilizando a energia do sistema como conceito fundamental.

A equação de Lagrange é baseada na obtenção das energias cinética ( $T$ ) e

potencial ( $V$ ), as quais podem ser obtidas para um sistema de coordenadas adequadas.

Uma grande dificuldade em modelar problemas de mecânica é escolher um sistema de coordenadas para escrever as equações do movimento [26], [30], [31]. Não existe um caminho imediato para fazer tal escolha, porém a vantagem da equação de Lagrange é a invariância das equações de movimento que se obtém para qualquer sistema de coordenadas [32], [33], como mostra o desenvolvimento a seguir.

### 3.1.1 Equação de Lagrange

A equação que representa o movimento de uma partícula é dada por

$$F_i = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) \quad (3.1)$$

onde

$F_i$  são as componentes da força em relação a cada uma das coordenadas  $x_i$  e  $m$  é a massa da partícula [31].

Da definição de sistema conservativo para pequenos deslocamentos tem-se

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

onde  $V = V(x_i)$  é a energia potencial do sistema considerado.

A energia cinética do sistema é definida como

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2. \quad (3.3)$$

Derivando a energia cinética  $T$  em relação a  $\dot{x}_i$  temos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 2 \frac{1}{2} m \dot{x}_i = m \dot{x}_i. \quad (3.4)$$

Combinando (3.1) e (3.3) tem-se

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (3.5)$$

Substituindo (3.2) em (3.5) obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (3.6)$$

Para simplificar, pode-se definir uma função  $L$  como sendo

$$L = T - V \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.6) pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial(T-L)}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i}. \quad (3.9)$$

Como  $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ , pois a energia potencial não depende da velocidade  $\dot{x}_i$  e a

energia cinética não depende da posição  $x_i$ , obtém-se a equação de Lagrange como abaixo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}. \quad (3.10)$$

A seguir apresenta-se a modelagem de um pêndulo elástico com excitação vertical do suporte e a modelagem deste pêndulo desconsiderando sua elasticidade.

### 3.2 Pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte

O sistema analisado é um pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical no suporte. Nesta seção é apresentada a modelagem matemática utilizando a equação de Lagrange. A modelagem do sistema é desenvolvida a partir do seu Lagrangeano, obtendo-se as energias cinética ( $T$ ) e potencial ( $V$ ) em relação às coordenadas  $x$  e  $y$  como mostrado a seguir.

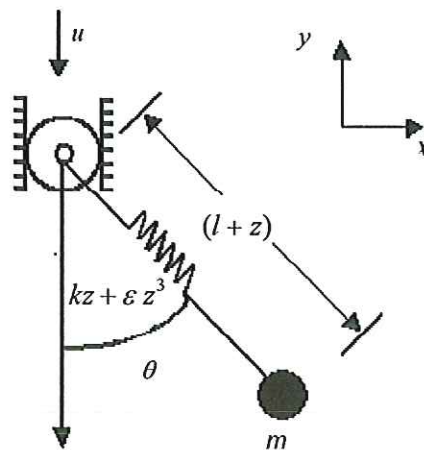


Figura 9 - Pêndulo elástico com excitação paramétrica do suporte, sendo  $u$  a excitação externa que faz movimentar o suporte e  $z$  é a deformação da mola.

#### 3.2.1 Lagrangeano do sistema

Calcula-se a seguir as energias cinéticas e potenciais do sistema representado pela Fig.9, para assim obter o Lagrangeano.



### Energia cinética

A energia cinética total do sistema representado pela Fig.9 é dada por

$$T = T_x + T_y \quad (3.11)$$

onde

$T_x$  é a energia cinética em relação a coordenada  $x$  e

$T_y$  é a energia cinética em relação a coordenada  $y$ .

O diagrama de forças para a obtenção da energia cinética em relação a coordenada  $x$  é mostrado na Fig.10.

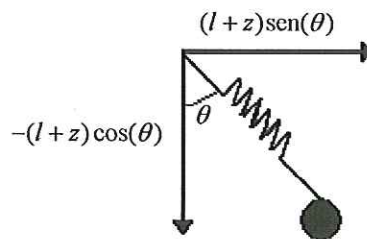


Figura 10 - Representação esquemática das forças do pêndulo em relação a coordenada  $x$  para a obtenção da energia cinética.

A posição do pêndulo em relação a coordenada  $x$  é dada pela seguinte expressão

$$x = (l + z)\text{sen } \theta . \quad (3.12)$$

Derivando (3.12), em relação ao tempo, obtém-se a expressão da velocidade

$$\dot{x} = (l + z)\dot{\theta} \cos \theta + \dot{z} \text{sen } \theta . \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) na expressão da energia cinética tem-se a energia cinética para a coordenada  $x$

$$T_x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m [(l + z)\dot{\theta} \cos \theta + \dot{z} \text{sen } \theta]^2 . \quad (3.14)$$

A expressão para a posição do pêndulo em relação a coordenada  $y$  é dada por

$$y = -(l + z) \cos \theta - u. \quad (3.15)$$

Derivando (3.15), em relação ao tempo, obtém-se a expressão da velocidade

$$\dot{y} = -\dot{z} \cos \theta + (l + z)\dot{\theta} \sin \theta - \dot{u}. \quad (3.16)$$

Finalmente tem-se a energia cinética para a coordenada  $y$

$$T_y = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m (-\dot{z} \cos \theta + (l + z)\dot{\theta} \sin \theta - \dot{u})^2. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.14) e (3.17) em (3.11) obtém-se a energia cinética total do sistema como abaixo

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 + \dot{u}^2 + (l + z)^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{z}\dot{u} \cos \theta - 2\dot{u}(l + z)\dot{\theta} \sin \theta). \quad (3.18)$$

### Energia potencial

A energia potencial total do sistema representado pela Fig.9 é dada por

$$V = V_x + V_y + V_m \quad (3.19)$$

onde

$V_x$  é a energia potencial do pêndulo,

$V_y$  é a energia potencial do suporte e

$V_m$  é a energia potencial da mola.

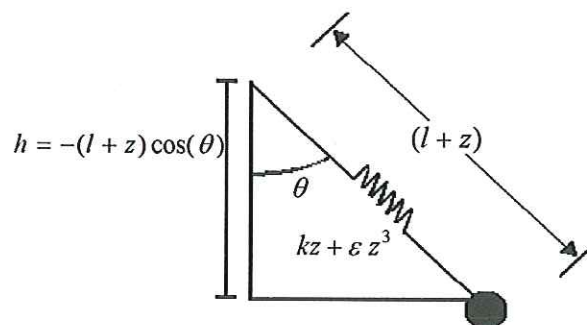


Figura 11 - Representação esquemática do pêndulo para a obtenção da energia potencial do pêndulo.

A partir da Fig.11, a energia potencial do pêndulo pode ser obtida como sendo

$$V_x = mgh \quad (3.20)$$

com  $h = -(l + z) \cos(\theta)$ . Assim

$$V_x = -mg[(l + z) \cos(\theta)]. \quad (3.21)$$

O diagrama de forças para a obtenção da energia potencial do suporte é mostrado na Fig.12.

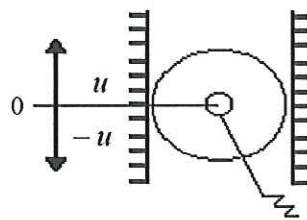


Figura 12 - Representação esquemática do suporte do pêndulo para a obtenção da energia potencial.

A energia potencial, devido a excitação do suporte é dada por

$$V_y = mgh \quad (3.22)$$

com  $h = u$ , pois é  $u$  quem determina a altura da polia.

Finalmente, a energia potencial da mola é

$$\begin{aligned} V_m &= - \int (kz + \varepsilon z^3) dz \\ V_m &= - \left( k \frac{z^2}{2} + \varepsilon \frac{z^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.19) obtém-se

$$V = mg(-(l + z) \cos(\theta) + u) - \left( \frac{k z^2}{2} + \frac{\varepsilon z^4}{4} \right). \quad (3.24)$$

Desta forma, o Lagrangeano  $L = T - V$  é dado por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \dot{u}^2 + (l+z)^2\dot{\theta}^2 + 2z\dot{u}\cos(\theta) - 2\dot{u}(l+z)\dot{\theta}\sin(\theta)) + mg(l+z)\cos(\theta) - mgu + \left(\frac{kz^2}{2} + \frac{\varepsilon z^4}{4}\right). \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Equações de movimento

A seguir, apresentam-se as equações de Lagrange em relação ao deslocamento angular  $\theta$  e à deformação da mola  $z$  para obter as equações do movimento do sistema.

A equação de Lagrange em relação ao ângulo  $\theta$  é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) em (3.26) obtém-se

$$\ddot{\theta} + \frac{2z\dot{\theta}}{(l+z)} - \frac{\ddot{u}\sin(\theta)}{(l+z)} + \frac{g\sin(\theta)}{(l+z)} = 0. \quad (3.27)$$

A equação de Lagrange para a deformação da mola  $z$  é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (3.28)$$

Substituindo (3.25) em (3.28) obtém-se

$$\ddot{z} + \ddot{u}\cos(\theta) - (l+z)\dot{\theta}^2 - g\cos(\theta) - \left(\omega_0^2 z + \frac{\varepsilon z^3}{m}\right) = 0. \quad (3.29)$$

onde  $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$  é a frequência natural e  $\varepsilon$  o parâmetro não linear da mola.

Considerando o suporte parametricamente excitado com  $u = A \text{sen}(\omega t)$ , sendo  $A$  a amplitude de excitação e  $\omega$  a freqüência, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{u} &= A\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{u} &= -A\omega^2 \text{sen}(\omega t).\end{aligned}\tag{3.30}$$

Substituindo (3.30) em (3.27) e (3.29) obtém-se as equações do movimento do sistema representado pela Fig.9

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{z}\dot{\theta}}{(l+z)} + \frac{A\omega^2 \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\theta)}{(l+z)} + \frac{g \text{sen}(\theta)}{(l+z)} = 0.\tag{3.31}$$

$$\ddot{z} - (A\omega^2 \text{sen}(\omega t)) \cos(\theta) - (l+z)\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) - (\omega_0^2 z + \frac{\varepsilon z^3}{m}) = 0.\tag{3.32}$$

Definindo as variáveis de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = z$  e  $x_4 = \dot{z}$   $x_5 = \omega t$  em (3.31) e (3.32) obtém-se a representação espaço estado estendido

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2x_4x_2}{(l+x_3)} - \frac{(A\omega^2 \text{sen}(x_5)) \text{sen}(x_1)}{(l+x_3)} - \frac{g \text{sen}(x_1)}{(l+x_3)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= (A\omega^2 \text{sen}(x_5)) \cos(x_1) + (l+x_3)x_2^2 + g \cos(x_1) + (\omega_0^2 x_3 + \frac{\varepsilon}{m} x_3^3). \\ \dot{x}_5 &= \omega\end{aligned}\tag{3.33}$$

A seguir, apresenta-se a modelagem do sistema representado pela Fig.9 sem a mola não linear, para comparação com o modelo existente na literatura. Este modelo refere-se àquele tratado em [11] e [12].

### 3.3 Pêndulo com excitação vertical no suporte desconsiderando a elasticidade do pêndulo

#### 3.3.1 Sistema Pendular 1

O pêndulo com excitação vertical do suporte tratado em [3] é ilustrado na Fig.13 abaixo.

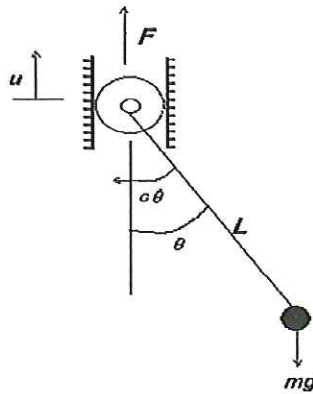


Figura 13 - Representação esquemática de um oscilador com excitação vertical no suporte e com um amortecimento  $c$ .

#### Lagrangeano do sistema

Calcula-se a seguir as energias cinéticas e potenciais do sistema representado pela Fig.13 para a obtenção do Lagrangeano.

#### Energia cinética

A energia cinética total do sistema representado pela Fig.13 é dada por

$$T = T_1 + T_2 \tag{3.34}$$

onde

$T_1$  é a energia cinética em relação a coordenada  $x$  e

$T_2$  é a energia cinética em relação a coordenada  $y$ .

O diagrama de forças para a obtenção da energia cinética em relação a coordenada  $x$  é mostrado na Fig.14.

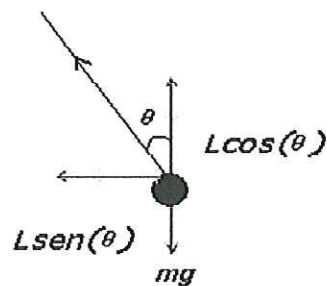


Figura 14 - Representação das forças do pêndulo em relação ao deslocamento angular  $\theta$  para a obtenção da energia cinética.

Para a posição tem-se a seguinte expressão

$$x = L \text{sen}(\theta) . \quad (3.35)$$

Derivando (3.35), em relação ao tempo, obtém-se a expressão da velocidade

$$\dot{x} = L \dot{\theta} \text{cos}(\theta) . \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) na expressão da energia cinética tem-se

$$T_1 = \frac{1}{2} m (L \dot{\theta} \text{cos}(\theta))^2 . \quad (3.37)$$

O diagrama de forças para a obtenção da energia cinética em relação a coordenada  $y$  é mostrado na Fig.15.

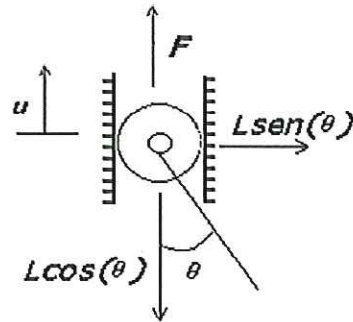


Figura 15 - Representação das forças do pêndulo em relação ao movimento do suporte  $u$  para a obtenção da energia cinética.

Analisando a Fig.15 consegue-se obter a expressão para a posição

$$y = u - L \cos(\theta) . \quad (3.38)$$

Derivando (3.38) em relação ao tempo obtém-se a expressão da velocidade

$$\dot{y} = \dot{u} + L \dot{\theta} \sin(\theta) . \quad (3.39)$$

A energia cinética para a coordenada  $y$  é dada por

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{u} + L \dot{\theta} \sin(\theta))^2 . \quad (3.40)$$

Supõe-se mais tarde uma expressão harmônica para a coordenada  $y$  para o movimento vertical ser oscilatório.

Substituindo (3.37) e (3.40) em (3.34) obtém-se a energia cinética total do sistema representado pela Fig.13

$$T = \frac{1}{2} m (L \dot{\theta} \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u} + L \dot{\theta} \sin(\theta))^2 . \quad (3.41)$$



### Energia potencial

A energia potencial total do sistema representado pela Fig.13 é dada por

$$V = V_1 + V_2, \quad (3.42)$$

onde

$V_1$  é a energia potencial em relação ao deslocamento angular  $\theta$  e  $V_2$  é a energia potencial em relação ao suporte  $u$ .

O diagrama de forças para a obtenção da energia potencial em relação ao deslocamento angular  $\theta$  é mostrado na Fig.16.

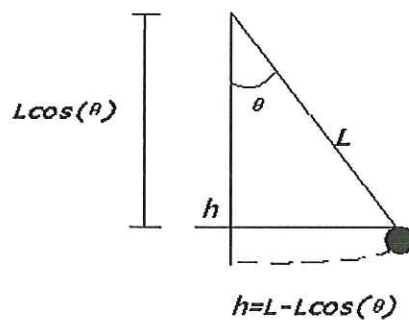


Figura 16 - Representação das forças do pêndulo em relação ao deslocamento angular  $\theta$  para a obtenção da energia potencial.

A energia potencial do esquema da Fig.16 é dada por

$$V_1 = mgh, \quad h = L(1 - \cos(\theta)). \quad (3.43)$$

Substituindo o valor de  $h$  em (3.43) obtém-se

$$V_1 = mg[L(1 - \cos(\theta))]. \quad (3.44)$$

O diagrama de forças para a obtenção da energia potencial em relação ao suporte  $u$  é mostrado na Fig.17.

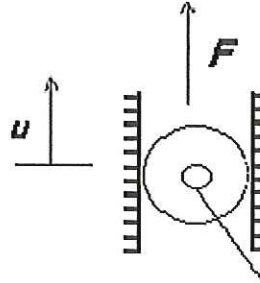


Figura 17 - Representação das forças do pêndulo em relação ao suporte  $u$  para a obtenção da energia potencial.

A energia potencial do esquema da Fig.17 é obtida como segue

$$V_2 = mgu \quad (3.45)$$

sendo  $u$  que determina a altura da polia.

Substituindo (3.44) e (3.45) em (3.42) obtém-se a energia potencial total do sistema representado pela Fig.13

$$V = mg[L(1 - \cos(\theta)) + u]. \quad (3.46)$$

Aplicando a função Lagrangeana  $L = T - V$ , tem-se

$$L = \frac{1}{2}m(L^2\dot{\theta}^2 + 2iL\dot{\theta}\text{sen}\theta + \dot{u}^2) - (mg[L(1 - \cos(\theta)) + u]). \quad (3.47)$$

A equação do movimento em relação ao deslocamento angular  $\theta$  é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -c\dot{\theta}. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.47) em (3.48) obtém-se

$$mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{u}\text{sen}(\theta) + mgL\text{sen}(\theta) = -c\dot{\theta}. \quad (3.49)$$

A equação do movimento em relação a excitação vertical do suporte  $u$  é obtida como segue

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right) = F. \quad (3.50)$$

A componente  $F$  existe, pois depende da coordenada  $u$ .

Substituindo (3.47) em (3.50) obtém-se

$$mL\ddot{\theta} \sin(\theta) + mL\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + m\ddot{u} + mg = F. \quad (3.51)$$

Considerando o suporte parametricamente excitado com  $u = A \sin(\omega t)$ , sendo  $A$  amplitude de excitação externa e  $\omega$  a frequência de excitação externa, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{u} &= -A\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.49) e definindo as variáveis de estado como  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  e  $x_3 = \omega t$  obtém-se (3.49) na forma espaço estado estendido como segue

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mLA\omega^2 \sin(x_3) \sin(x_1) - mgL \sin(x_1) - cx_2}{mL^2} \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (3.53)$$

### 3.3.2 Sistema Pendular 2

O sistema representado pela Fig.13 também foi analisado em [12], porém foram utilizados outros valores dos parâmetros de controle para a análise de estabilidade deste sistema. A equação do movimento em relação ao deslocamento angular  $\theta$  é

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + p \cos(\omega t)) \sin(\theta) = 0 \quad (3.54)$$

onde  $\beta$  é o amortecimento e  $p$  é a amplitude de excitação externa.

Para (3.49) e (3.54) serem equivalentes iguala-se os termos não comuns como segue

$$(1 + p \cos(\omega t)) \text{sen}(\theta) = (\ddot{u} + g) \frac{\text{sen}(\theta)}{L}. \quad (3.55)$$

Esta igualdade será válida se utilizarmos

$$\ddot{u} = -A\omega^2 \cos(\omega t), \quad p = \frac{-A\omega^2}{L} \text{ e } \frac{g}{L} = 1.$$

Considerando (3.54) na forma espaço de estado estendido e definindo as variáveis de estado como  $\theta = x_1$ ,  $\dot{\theta} = x_2$  e  $x_3 = \omega t$  tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_2 - (1 + p \cos(x_3)) \text{sen}(x_1). \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

No capítulo que se segue, são apresentadas as simulações numéricas do modelo analisado em [11] e [12], sendo representado pelas equações (3.53) e (3.56).

## Capítulo 4

### *Resultados de simulações numéricas*

Os resultados apresentados neste capítulo baseiam-se nas simulações numéricas dos sistemas pendulares (3.53) e (3.56) com os mesmos parâmetros usados em [11] e [12]. A amplitude de excitação e a frequência natural são variadas para analisar a perda de estabilidade.

#### 4.1 Sistema pendular 1

Para o sistema pendular (3.53), os parâmetros adotados nas simulações numéricas são os mesmos utilizados em [11]

$$d = \frac{-c}{mL^2} = 0.31623 ; \quad a = \frac{g}{L} = 0.1 \quad \text{e} \quad b = \frac{A\omega^2}{L}, \quad \text{sendo } b \text{ escolhido como variável que}$$

controla a ocorrência de diferentes modos de oscilação do pêndulo.

A análise da estabilidade de (3.53) consiste em verificar para que faixa de parâmetros o sistema perde estabilidade até alcançar um regime caótico.

Os gráficos a serem analisados são histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e o diagrama de estabilidade obtido através dos multiplicadores de Floquet.

Em todos os resultados de simulação apresentados para (3.53), histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e de estabilidade, foram utilizados: condição inicial  $[x_{10}, x_{20}] = [0.01, 0.01]$  e o período usado para a construção do mapa de Poincaré foi  $T = 2\pi$ . O histórico no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para  $b = 1.7$  são apresentados na Fig.18.

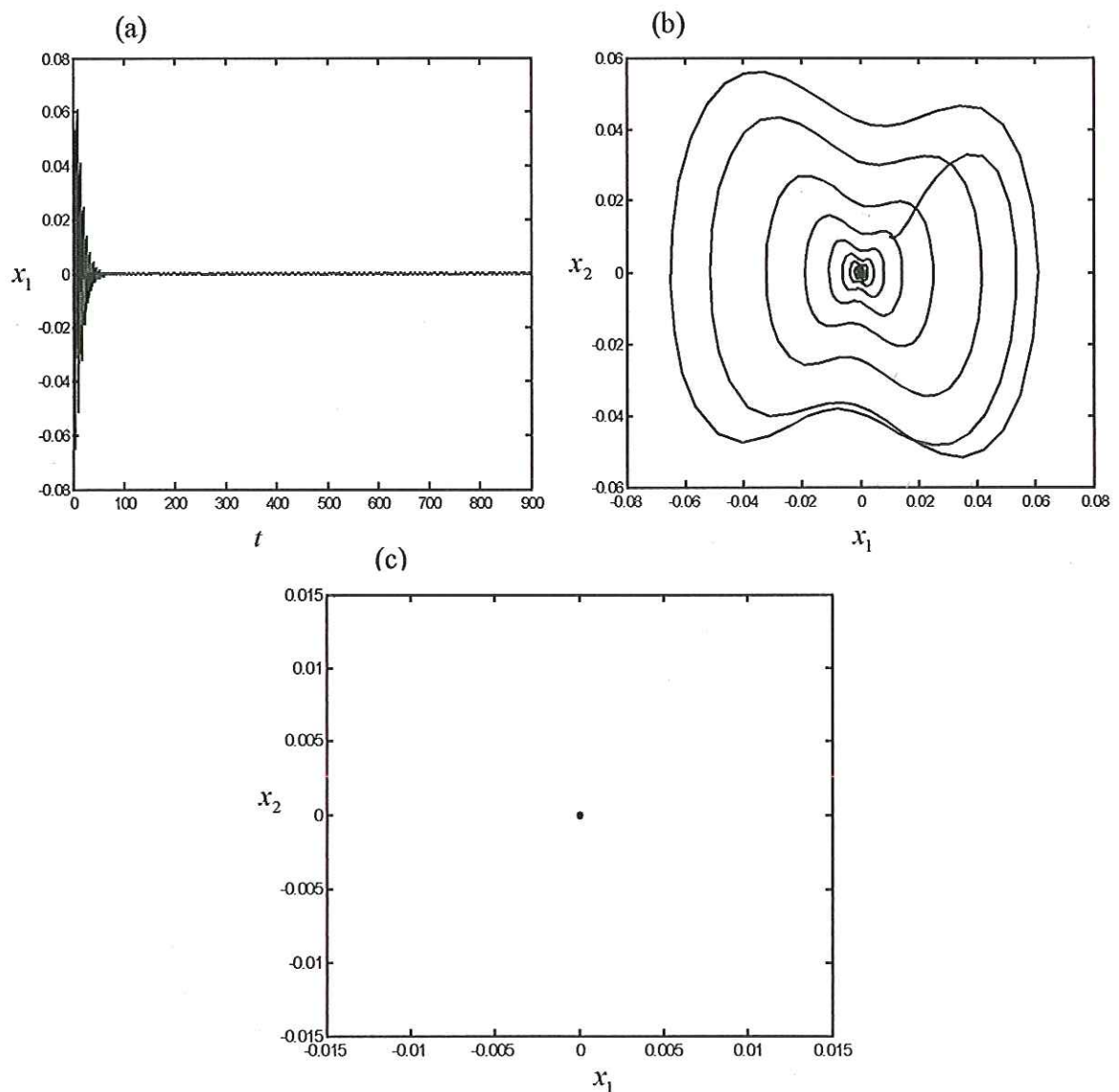


Figura 18 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Observa-se uma oscilação de amplitude muito pequena em torno do zero, o que pode caracterizar uma estabilidade. Para confirmar a estabilidade do sistema para este parâmetro calcula-se, a seguir, os expoentes de Lyapunov.

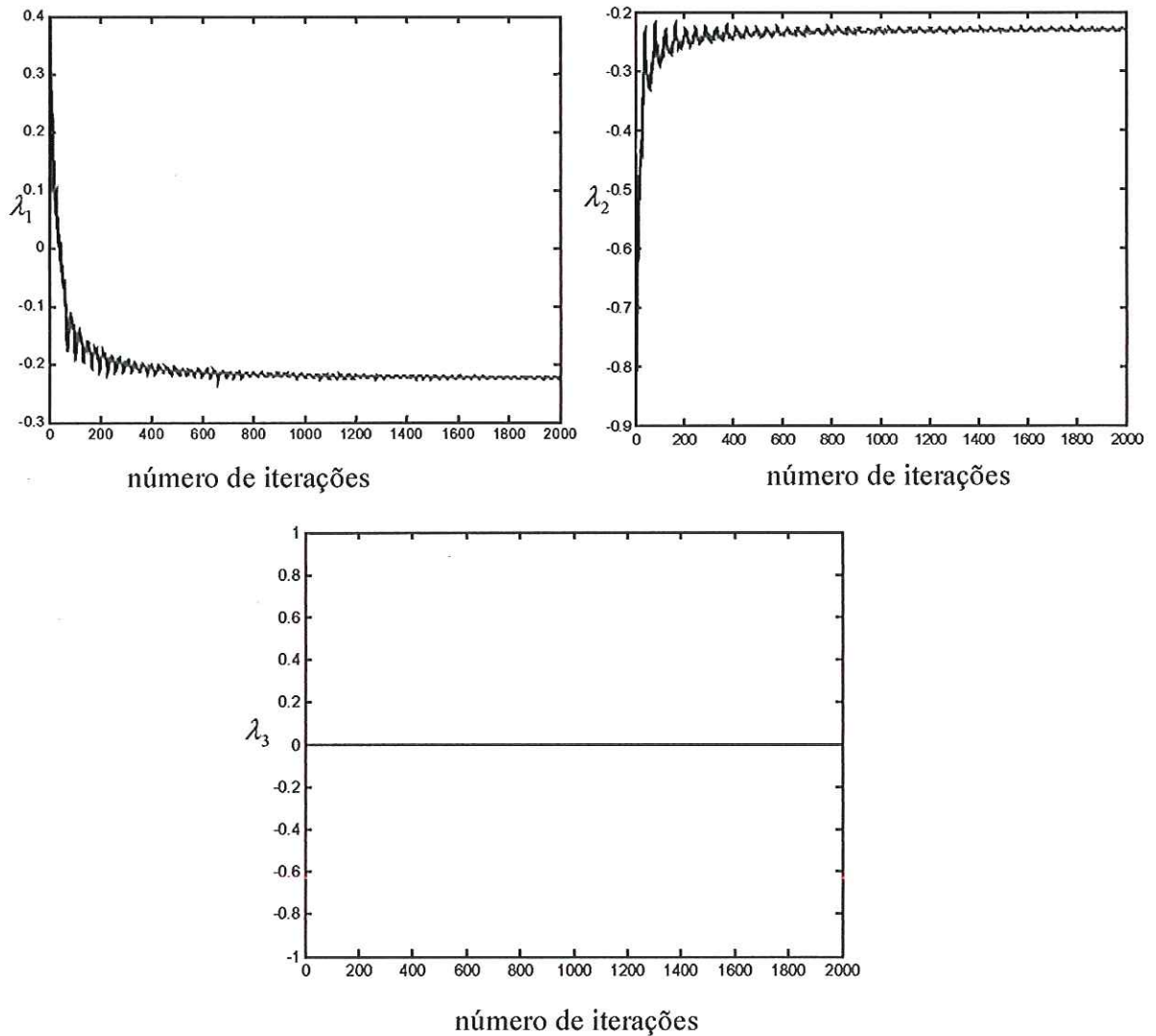


Figura 19 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.

A Fig.19 mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função do número de iterações. Para  $b=1.7$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = -0.2256$ ,  $\lambda_2 = -0.2305$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Na análise seguinte verifica-se o que acontece com o sistema quando o valor da amplitude de excitação é  $b=1.8$ , como mostrado na Fig.20.

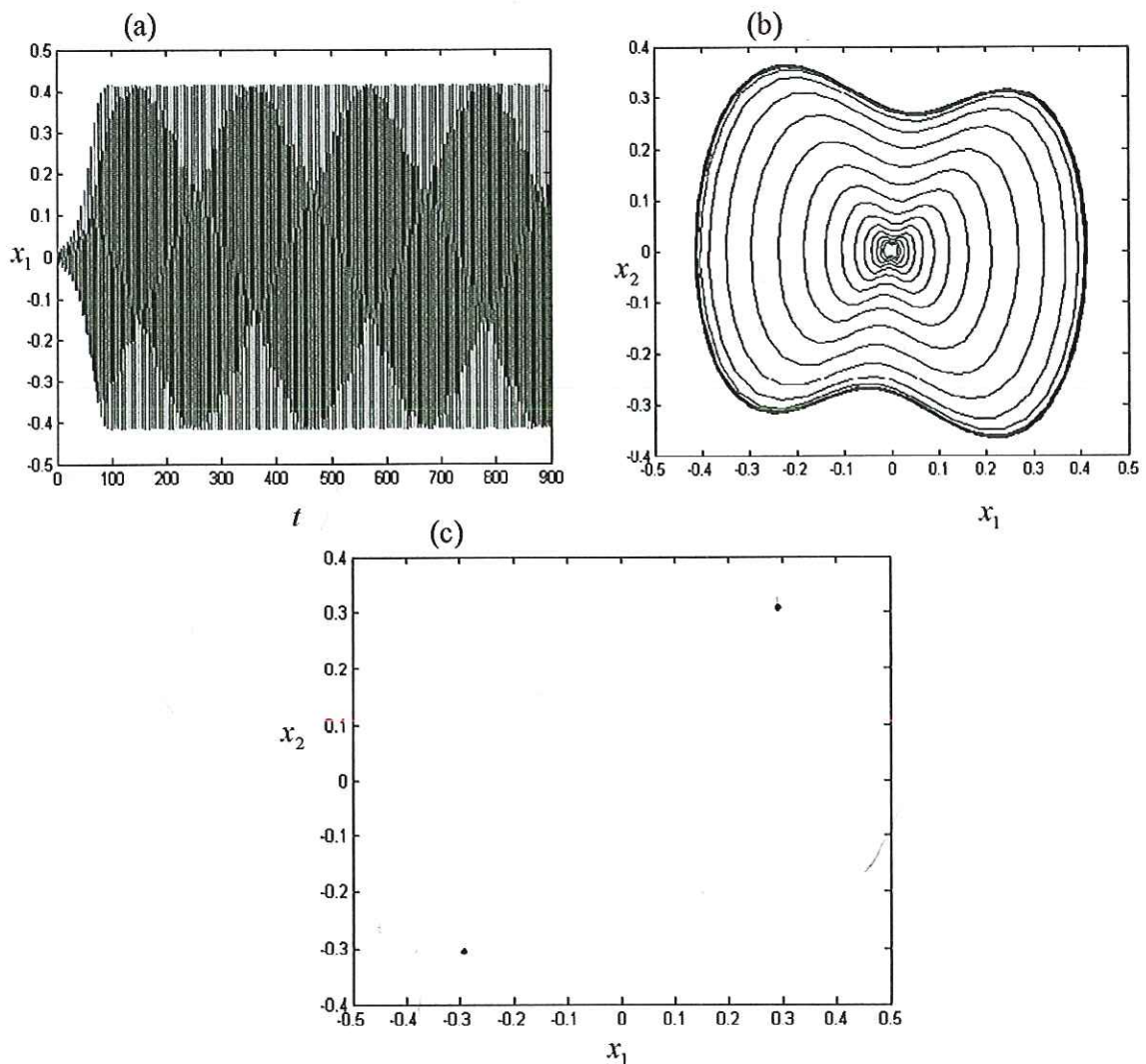


Figura 20 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.



Para o parâmetro  $b = 1.8$ , observa-se na Fig.20 que o ciclo limite do plano de fase e as duas regiões de atração do mapa de Poincaré não estão mais em torno do zero, houve um afastamento devido a um aumento maior da amplitude de excitação  $b$ . O cálculo do expoente de Lyapunov é reproduzido a seguir.

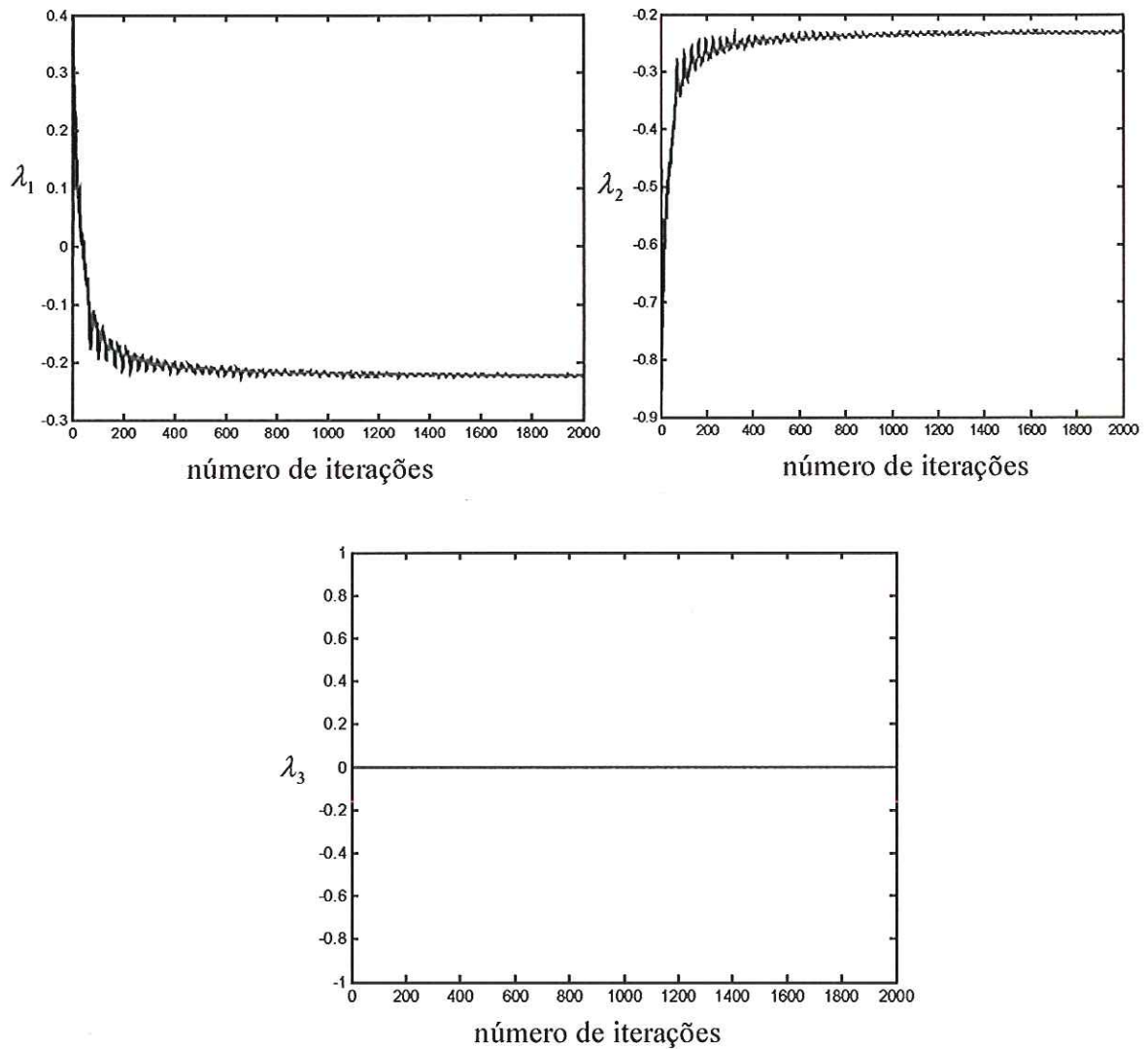


Figura 21 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.

Observa-se na Fig.21 que para  $b=1.8$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = -0.2241$ ,  $\lambda_2 = -0.2320$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema ainda está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Na próxima análise verifica-se o que acontece com o sistema quando o valor da amplitude de excitação é  $b = 2.5$ , como mostrado na Fig.22.

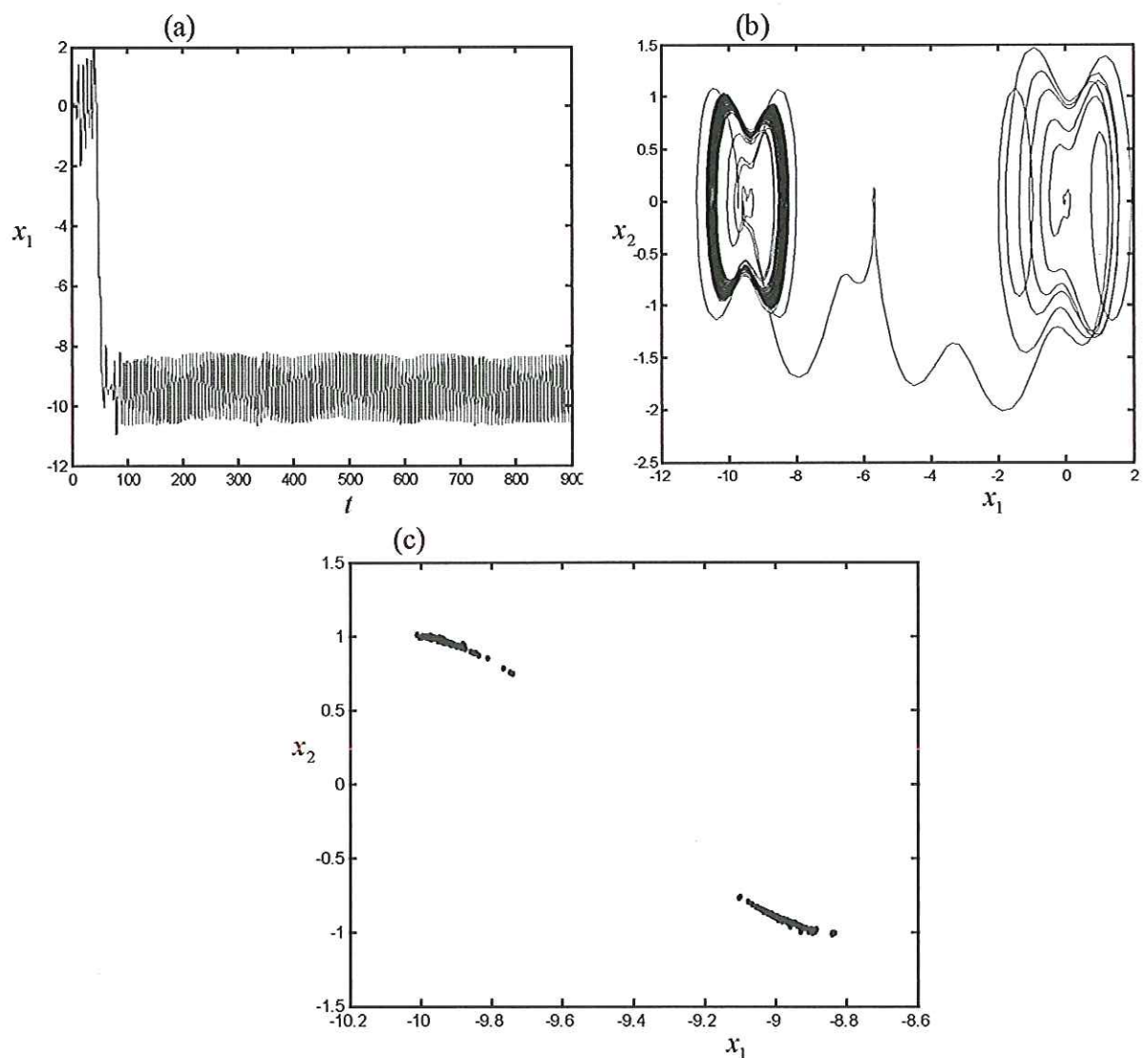


Figura 22 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Na Fig.22(c) observam-se duas regiões com grande concentração de pontos, podendo caracterizar um atrator aperiódico. Para verificar se o sistema está com um comportamento caótico calcula-se os expoentes de Lyapunov como segue.

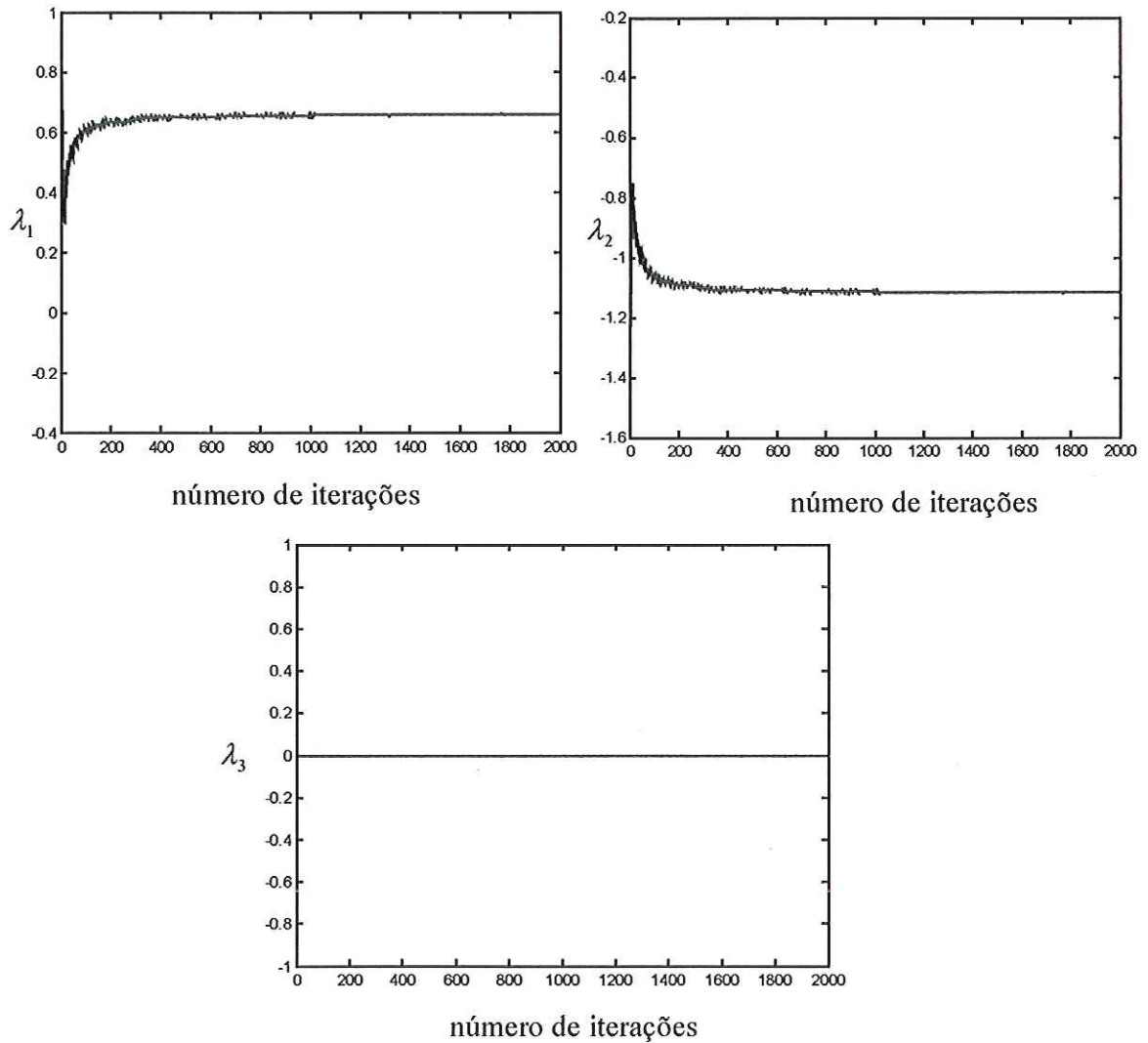


Figura 23 – Evolução dos expoentes de Lyapunov.

Para  $b = 2.5$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = +0.6591$ ,  $\lambda_2 = -1.1159$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema está com um comportamento caótico, pois apresenta um expoente de Lyapunov positivo.

Pode-se observar toda a variação da amplitude de excitação  $b$  ao se construir o diagrama de bifurcação como segue.

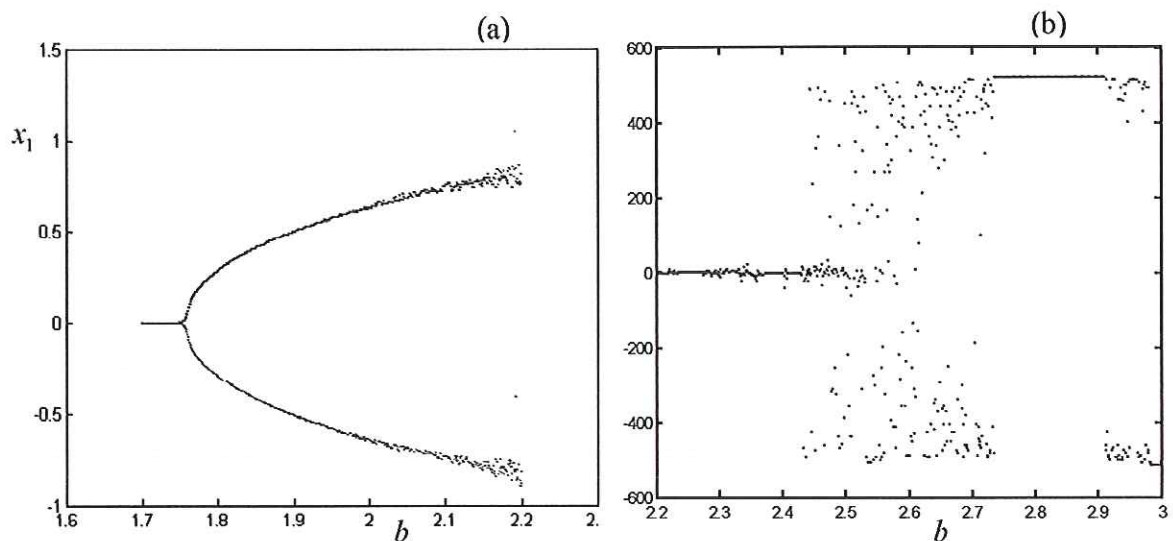


Figura 24 - Diagrama de bifurcação para diferentes intervalos de  $b$ . (a)  $b = 1.7$  até  $b = 2.2$ . (b)  $b = 2.2$  até  $b = 3$ .

No diagrama da Fig.24(a) observamos que a partir de  $b = 1.7$  há um braço de soluções estáveis tornando-se instável após a bifurcação, e originando dois novos braços de soluções estáveis a partir de  $b = 1.75$ . Já no diagrama da Fig.24 (b), observa-se uma nuvem de pontos, caracterizando um comportamento caótico.

Para saber o tipo de bifurcação presente no sistema deve-se analisar como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo raio unitário, desta forma, constrói-se o diagrama de estabilidade como mostrado a seguir.

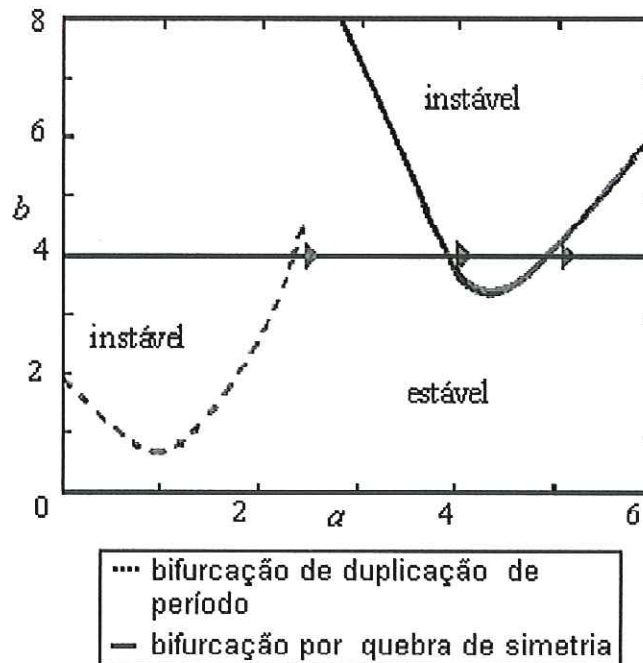


Figura 25 - Diagrama de estabilidade para  $0 < a < 6$  e  $0 < b < 8$ .

Analisando a Fig.25 pode-se verificar fronteiras que determinam para que parâmetros  $a$  e  $b$  o sistema deixa a região de estabilidade e passa para uma região de instabilidade. Considerando os parâmetros  $a=0.1$  e analisando o intervalo  $1.7 < b < 2.5$  observa-se que o ponto de bifurcação se inicia em  $b=1.7538$ , sendo esta bifurcação do tipo duplicação de período, sendo que os valores dos multiplicadores de Floquet obtidos são  $\alpha_1 = -0.370293$  e  $\alpha_2 = -0.999993$ .

#### 4.2 Sistema pendular 2

Analisa-se o sistema (3.56) em termos da amplitude de excitação  $p$ . Para (3.56) os parâmetros adotados nas simulações são:  $\omega=2$ ,  $\beta=0.1$  e  $p$  é escolhido como

parâmetro de controle que para diferentes valores resulta em diferentes modos de oscilação do pendulo. Os gráficos a serem analisados são histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e a construção do diagrama de estabilidade através dos multiplicadores de Floquet. Em todos os resultados de simulação apresentados para (3.56), histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e de estabilidade, foram utilizados: condição inicial  $[x_{10}, x_{20}] = [0.01, 0.01]$  e o período usado para a construção do mapa de Poincaré foi  $T = 2\pi$ . O histórico no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para  $p = 0.1$  são apresentados na Fig.26.

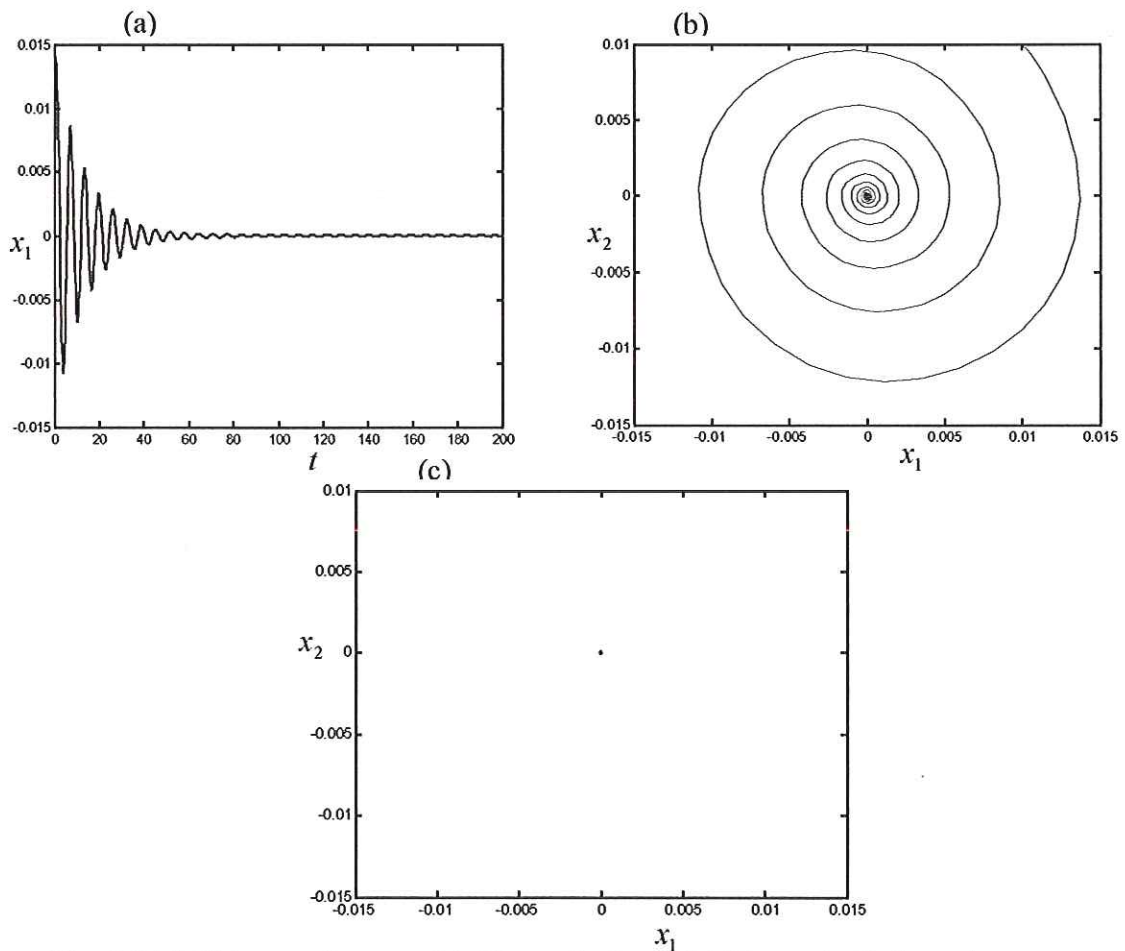


Figura 26 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Observa-se que o sistema converge pra zero, o que pode caracterizar uma estabilidade. Para confirmar a estabilidade do sistema calcula-se o expoente de Lyapunov como segue.

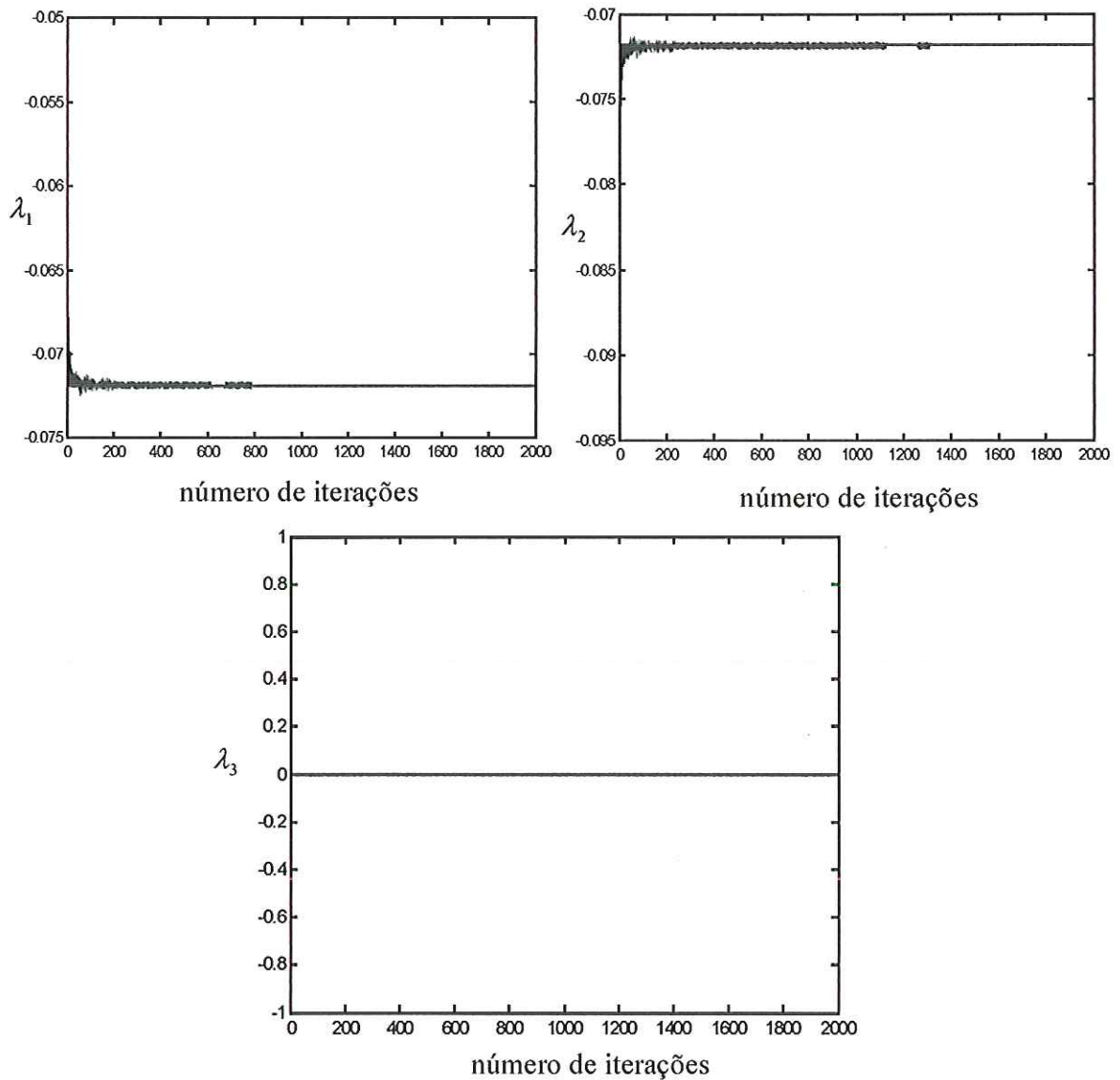


Figura 27 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.

Observa-se na Fig.27 que para  $p=0.1$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = -0.0712$ ,  $\lambda_2 = -0.0723$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema ainda está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos ou zero. Na próxima análise verifica-se o que acontece com o sistema quando o valor da amplitude de excitação é  $p = 0.3$ , como mostrado a seguir.

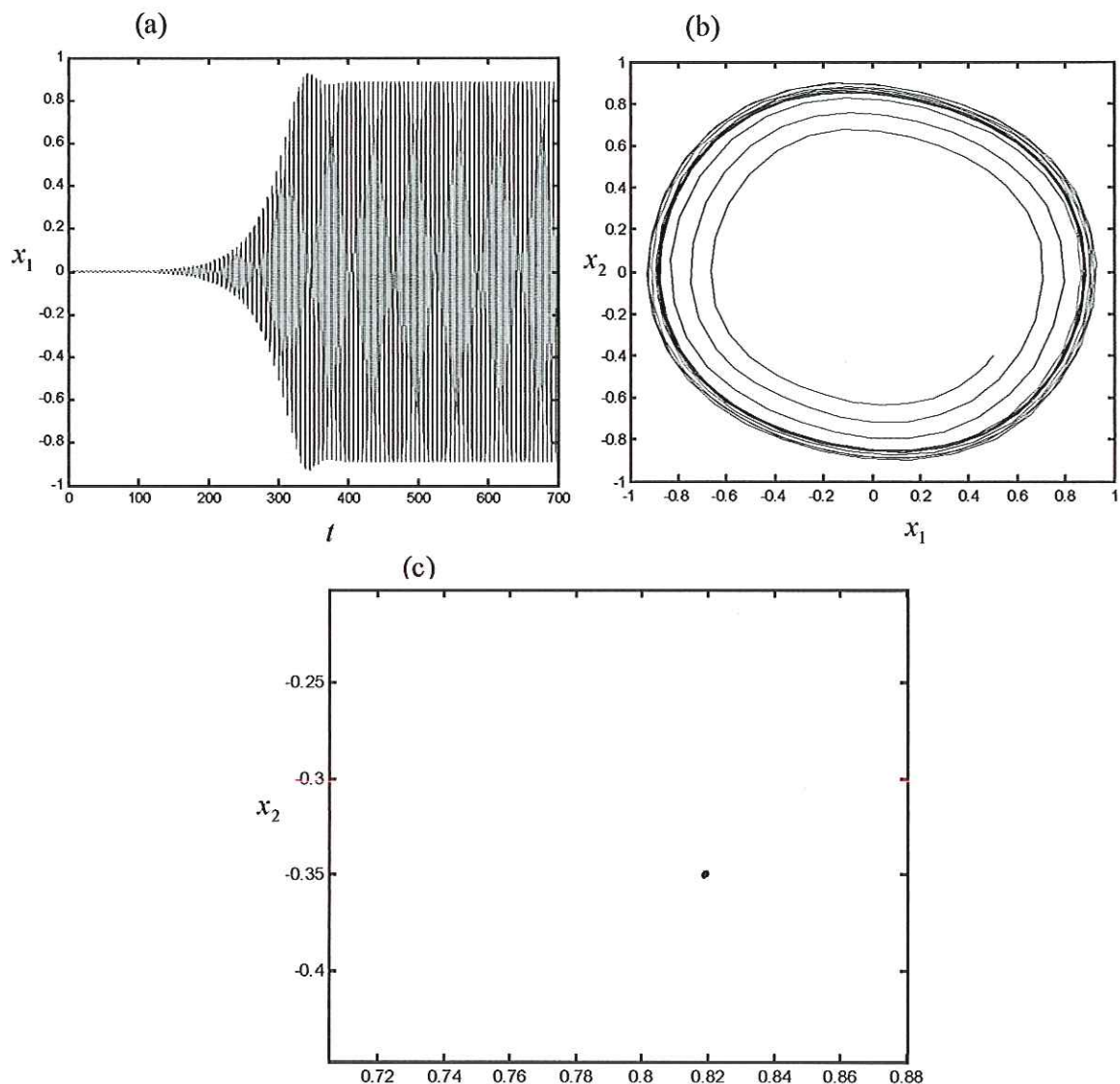


Figura 28 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.



Para o parâmetro  $p = 0.3$ , observa-se na Fig.28 que o sistema não oscila em torno do zero, ocorreu um aparecimento de um ciclo limite no plano de fase e no mapa de Poincaré se observa um atrator de ponto fixo.

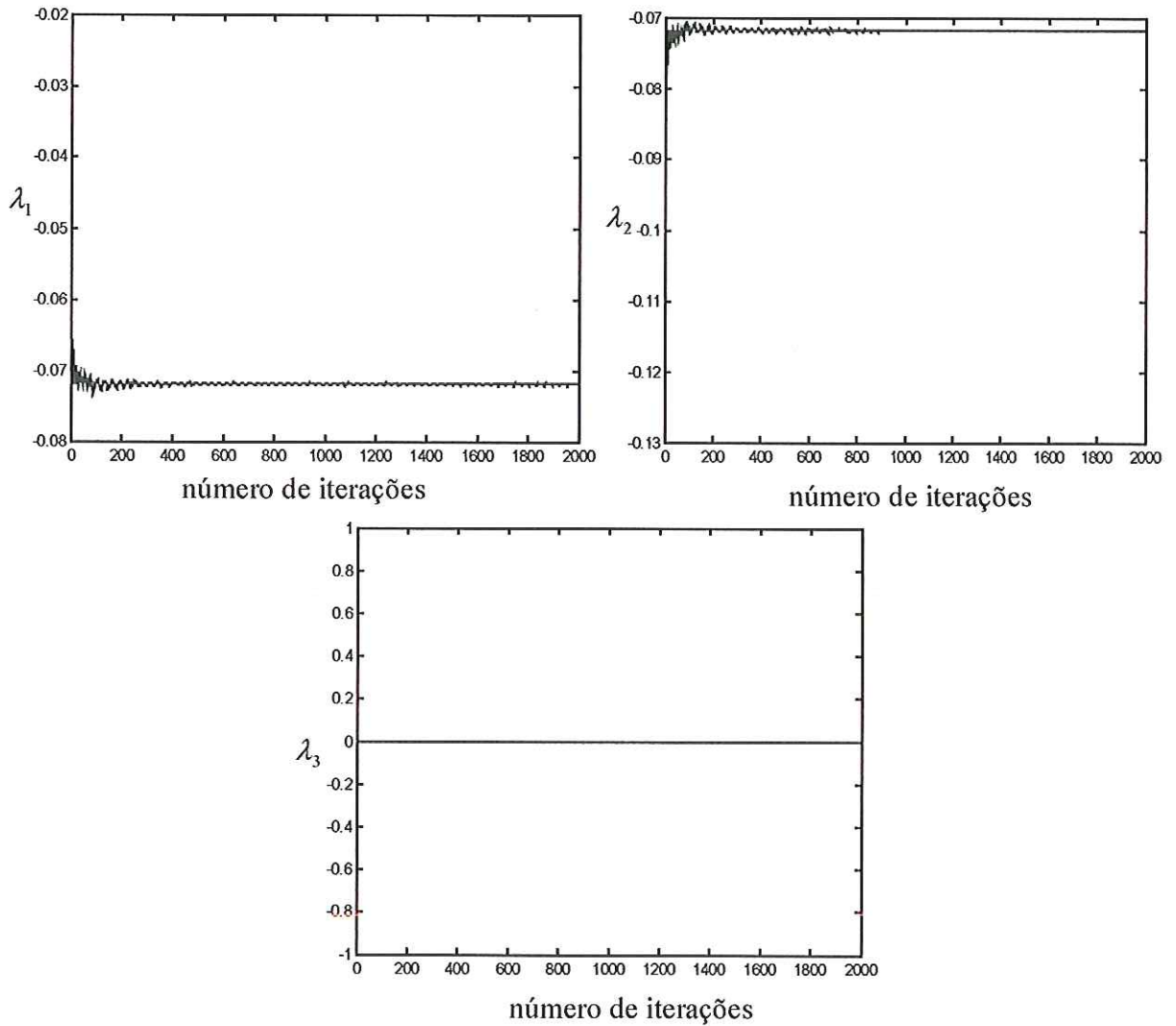


Figura 29 – Evolução dos expoentes de Lyapunov.

Para  $p = 0.3$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = -0.0721$ ,  $\lambda_2 = -0.0715$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Verifica-se a seguir o que acontece com o sistema quando o valor da amplitude de excitação  $p=1$ , como mostrado a seguir.

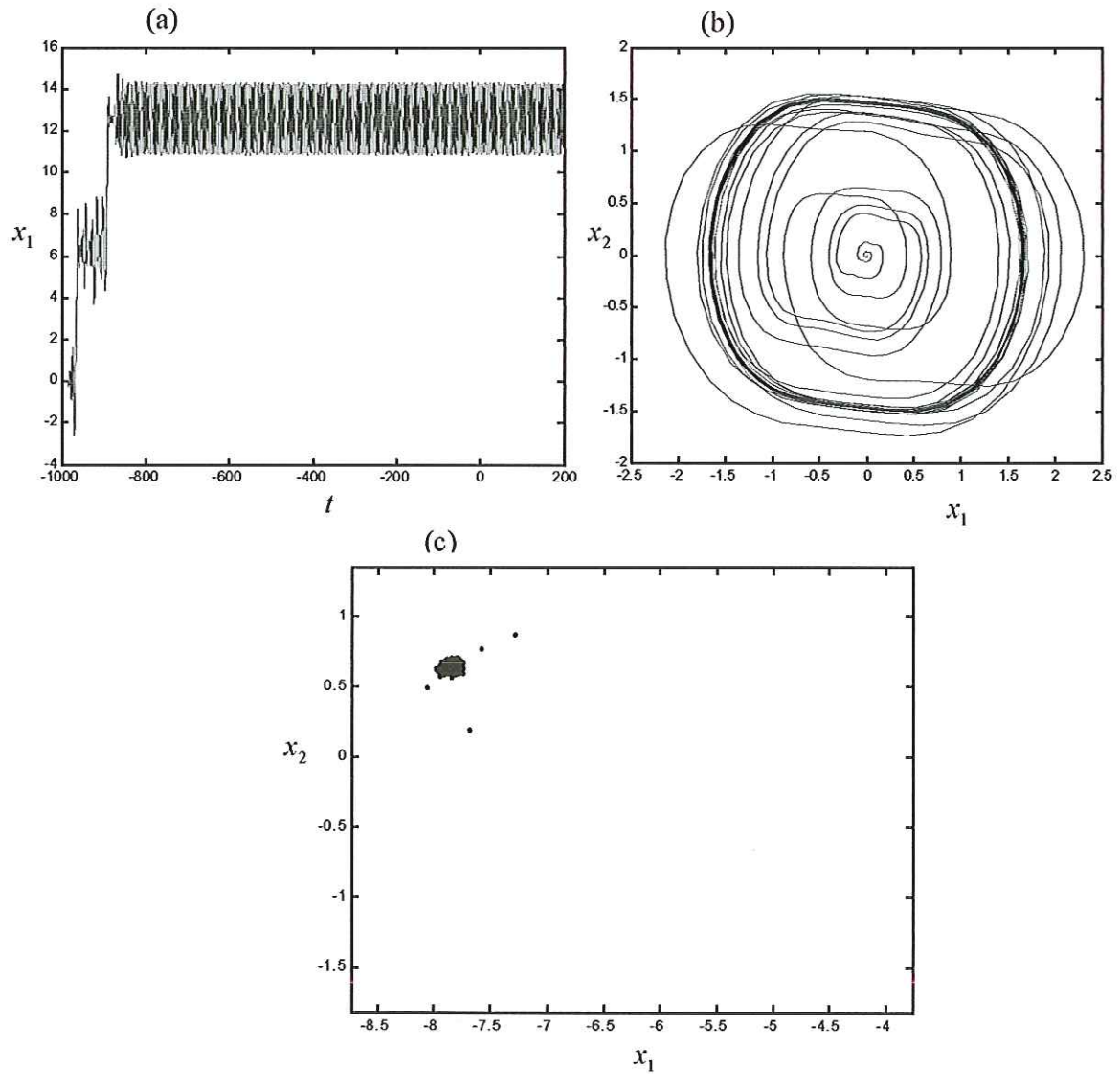


Figura 30 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Para o parâmetro  $p=1$ , observa-se na Fig.30 que o atrator obtido no mapa de Poincaré teve um aumento no número de pontos, não se podendo afirmar que o sistema está em um estado caótico, para esta análise calcula-se o expoente de Lyapunov.

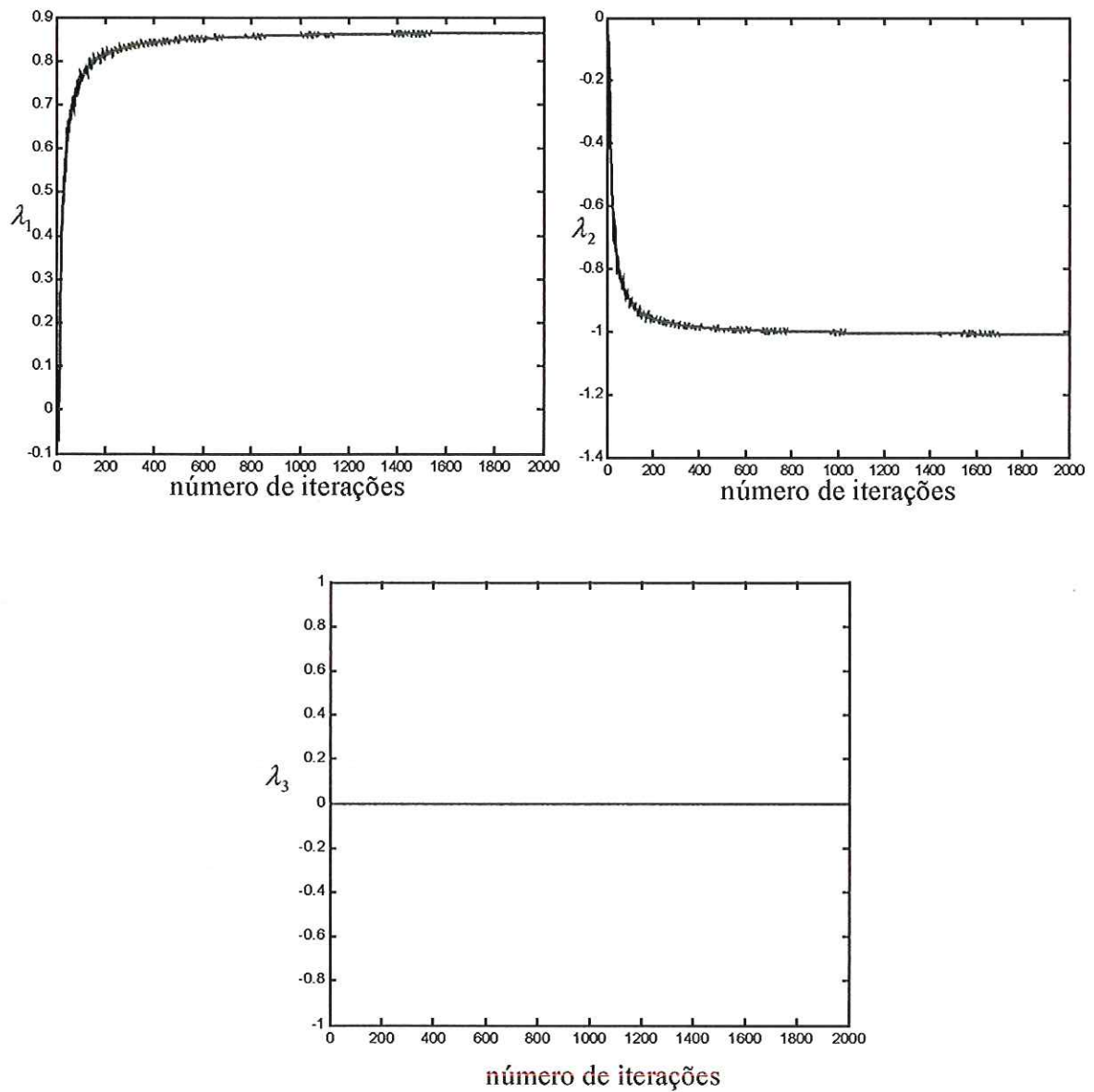


Figura 31 - Evolução dos expoentes de Lyapunov.

Para  $p=1$  os valores dos expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = +0.8641$ ,  $\lambda_2 = -1.0085$  e  $\lambda_3 = 0$ , pode-se afirmar que o sistema está com um comportamento caótico, pois apresenta um expoente de Lyapunov positivo.

Observar-se toda a variação da amplitude de excitação  $p$  construindo-se o diagrama de bifurcação como segue.

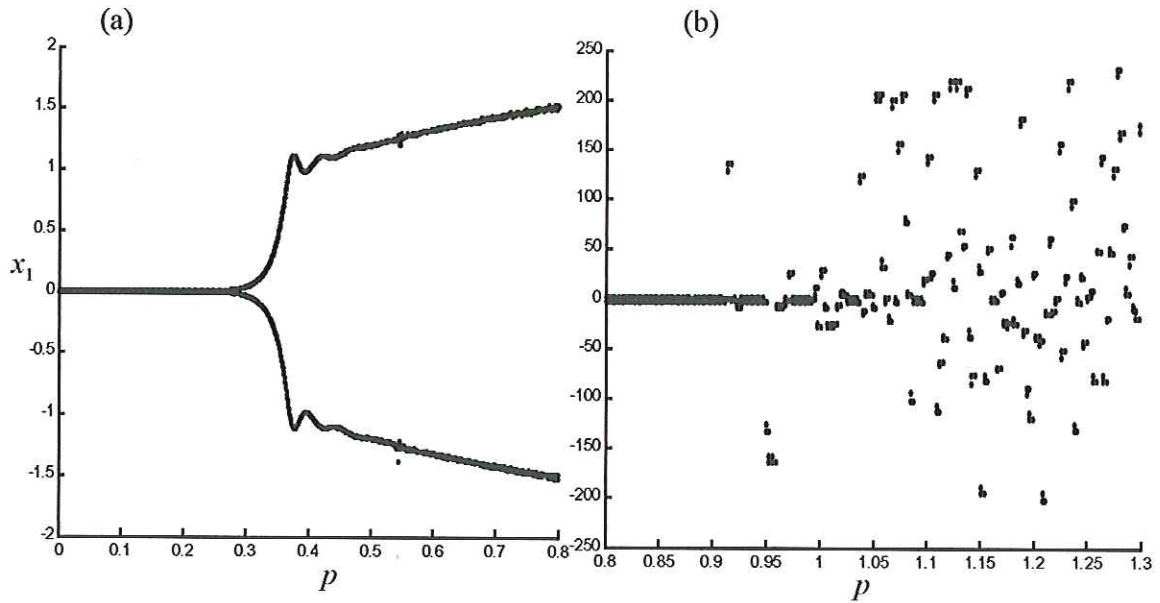


Figura 32 - Diagrama de bifurcação para diferentes intervalos de  $p$ . (a)  $p = 0$  até  $p = 0.8$ . (b)  $p = 0.8$  até  $p = 1.3$ .

No diagrama da Fig.32(a) observamos que entre os valores  $p = [0.2, 0.3]$  ocorre uma bifurcação, e originando-se dois novos braços de soluções estáveis. Já no diagrama da Fig.32(b), observa-se uma nuvem de pontos, caracterizando um comportamento caótico. Para saber o tipo de bifurcação que ocorre no sistema deve-se analisar como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo raio unitário, desta forma, constrói-se o diagrama de estabilidade da Fig.33 como segue.

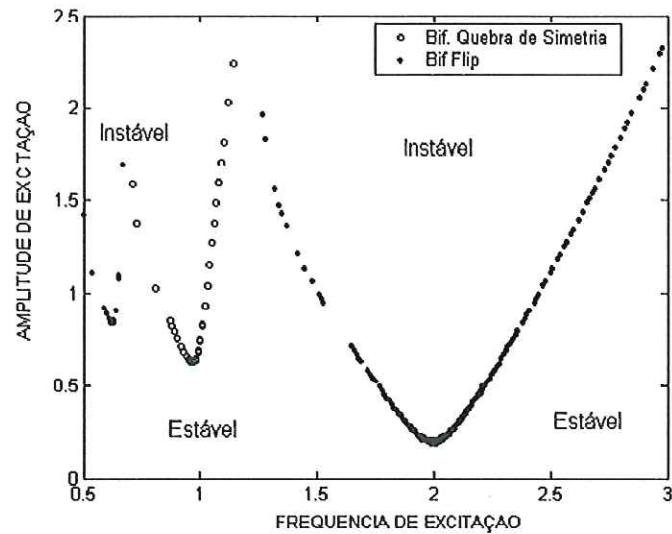


Figura 33: Diagrama de estabilidade para  $0 < p < 2.5$  e  $0.5 < \omega < 3$ .

Analisando o diagrama de estabilidade pode-se observar regiões que determinam para que parâmetros o sistema deixa de ser estável e passa a ser instável, pode-se observar também os pontos de bifurcações e os tipos de bifurcações presentes no sistema, sendo bifurcações do tipo flip e quebra de simetria.

Para os parâmetros  $\omega = 2$  e analisando o intervalo  $0 < p < 2.5$  observa-se que o ponto de bifurcação inicia em  $p = 0.2012$  e o do tipo de bifurcação presente no sistema é do tipo duplicação de período, sendo que os valores dos multiplicadores de Floquet obtidos são  $\alpha_3 = -0.72978$  e  $\alpha_4 = -1.00084$ .

As simulações mostraram concordância com os resultados obtidos em [11] e [12].

## Conclusões e propostas futuras

Neste trabalho desenvolve-se a modelagem matemática de um pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte. Este modelo não se encontra publicado na literatura. Analisa-se também o caso particular do sistema que se obtém desconsiderando as variáveis de estado relacionadas à dinâmica da mola não-linear. Este foi estudado anteriormente por Sinha [11] e Bishop [12], sendo que em cada trabalho utilizaram diferentes faixas de valores para o parâmetro de controle (amplitude de excitação externa). A modelagem dos pêndulos foi feita utilizando as leis de Newton e, para a obtenção das equações do movimento, utilizou-se a equação de Lagrange. Os resultados obtidos por [11] e [12], para a análise de estabilidade, foram reproduzidos via simulação computacional e mostraram como o sistema se comporta quando o parâmetro de controle é alterado. Aos resultados acrescentaram-se, para o sistema [12], o diagrama de estabilidade via multiplicadores de Floquet e para ambos os sistemas, os expoentes de Lyapunov.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho foi estruturada uma série de questões que possibilitarão a continuação das pesquisas relacionadas com este tema, como por exemplo, a análise da dinâmica do pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical do suporte via simulação computacional, bem como a aplicação de uma técnica de estabilização para o referido problema.

## Referências bibliográficas

- [1] Nayefh, A.H., Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley, 1995.
- [2] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., *An Exploration of Chaos*, North-Holland, 1994.
- [3] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [4] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.
- [5] Ricieri, A.P., *Fractais e Caos - A Matemática de Hoje*, Prandiano, 1990.
- [6] Nayefh, A.H., Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 1979.
- [7] Ferrara, N.F., Prado, C.P.C., *Caos uma Introdução*, Edgard Blucher, 1995.
- [8] Moon, F.C., *Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, 1992.
- [9] Filho, R.B., *Caos no Trilho de Ar - Instrumentação para uma Experiência Didática*, Dissertação de mestrado, Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, 1992.
- [10] Symon, K.R., *Mecânica*, Editora Campus Ltda., 1982.
- [11] Dávid, A., Sinha, S.C., Control of Chaos in Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients, *Proceedings of the American Control Conference Chicago, Illinois*, June 2000, p. 764-768.
- [12] Bishop, S.R., Xu, D., Stabilizing the Parametric Excited Pendulum Onto High Order Periodic Orbits, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, p. 287-293.
- [13] Bishop, S.R., Clifford, M.J., Zones of Chaotic Behavior in the Parametrically Excited Pendulum, *Journal of Sound and Vibration*, vol.189, p. 142-147, 1996.

- [14] Ge, Z.M., Lin, T.N., Regular and Chaotic Dynamic Analysis and Control of Chaos of an Elliptical Pendulum on a Vibrating Basement, *Journal of Sound and Vibration*, 2000, p. 1045-1068.
- [15] Flashner, H., Golat, M., An Extended Mapping Approach to the Analysis of Linear Periodics Systems, *Proceedings of the IX DINAME*, Florianópolis, 2001 p. 545-557.
- [16] Nayfeh, A.H., *Problems in Perturbation*. John Wiley & Sons, 1993.
- [17] Macau, E.E.N., Sistemas Caóticos, *1ª Escola de Aplicações em Dinâmica e Controle*, São Carlos, Agosto 2001, p. 65-81.
- [18] Gonçalves, P. B., Del Prado, Z.G.N., Instabilidades de Sistemas Dinâmicos, *1ª Escola de Aplicações em Dinâmica e Controle*, São Carlos, Agosto 2001, p. 1-18.
- [19] Peruzzi, N. J., Cossi, L. V., Andrade, V.S., Oliveira, V.A., Balthazar, J.M., Análise do Pêndulo com Excitação Periódica Vertical via Transformada de Lyapunov-Floquet, *Anais do 1º Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações*, São José do Rio Preto, Agosto 2202, p. 1125-1133.
- [20] D. A. Sinha, S.C., P. Joseph, Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Lyapunov-Floquet Transformation. *Journal of Dynamic, Measurement, and Control*, v.116, p. 650-658, 1994.
- [21] D. A. Sinha, S.C., R. Pandiyan, P.S. Bibb, Lyapunov-Floquet Transformation, *Journal of Vibration and Acoustics* 118, p. 209-219, 1996.
- [22] Thompson, J.M., Stewart, H.B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley, 1986.
- [23] Williams, G., P., *Chaos Theory Tamed*, Taylor & Francis Ltd, 1997.
- [24] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., Determining Lyapunov Exponents From a Time Series, *Physica 16D*, North-Holland, 1985, p. 285-317.
- [25] Parker, T.S., Chua, L.O., *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 1989.



- [26] Meirovitch, L., *Methods of Analytical Mechanics*, McGraw-Hill, 1970.
- [27] Rosário, J.M., Modelagem e Controle de Robôs, *1ª Escola de Aplicações em Dinâmica e Controle*, São Carlos, Agosto 2001, p. 397-419.
- [28] Yano, K., Terashima, K., Robust Liquid Container Transfer Control for Complete Sloshing Suppression, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.9, Maio 2001, p. 483-493.
- [29] Rosário, J.M., Hermini, H.A., Saramago, M., A., P., Modeling, Simulation and Implementation of a Finger Manipulator, *Non Linear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, vol.6, 2002, p. 183-192.
- [30] Leech, J.W., *Mecânica Analítica*, Livro Técnico S.A. e Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- [31] Acheson, D., *From Calculus to Chaos*, Oxford, 1997.
- [32] Hagedorn, P., *Non-Linear Oscillations*, Oxford Science Publications, 1988.
- [33] Pontes, B.R., Oliveira, V.A., Balthazar, J.M., On Stick-Slip Homoclinic Chaos and Bifurcation in a Mechanical System with Dry Friction, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.11, p. 2019-2029, 2001.
- [34] D. A. Sinha, S.C., Wu, Der-Ho, An Efficient Computational Scheme for the Analysis of Periodic Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 151(1), p. 91-117, 1991.
- [35] D. A. Sinha, S.C. Wu, Der-Ho, V. Juneja, P. Joseph, Analysis of Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters via Chebyshev Polynomials. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, p. 96-102, Jan. 1993.
- [36] D. A. Sinha, S.C., P. Joseph, Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Lyapunov-Floquet Transformation. *Journal of Dynamic, Measurement, and Control*, v.116, p.650-658, 1994.

- [37] D. A. Sinha, S.C., R. Pandiyan, P.S. Bibb, Lyapunov-Floquet Transformation: *Journal of Vibration and Acoustics*, 118, p. 209-219, 1996.
- [38] D. A. Sinha, S.C., E.A. Butcher, Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 206(1), p61-85, 1997.
- [39] D. A. Sinha, S.C., E.A. Butcher, Construction of Dynamically Equivalent Time-Invariant Forms for Time-Periodic Systems. *Nonlinear Dynamics*, 16, p. 203-221, 1998.
- [40] P. D. Sparis, S.G. Mouroutsos, A Comparative Study of the Operational Matrices of Integration and Differentiation for Orthogonal Polynomial Series. *International journal of control*, 42(3), p 621-638, 1985.
- [41] M.A. Snyder, *Chebyshev Methods in Numerical Approximations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- [42] D. A. Sinha, S.C., R. Pandiyan, P.S. Bibb, Lyapunov-Floquet Transformation: *Journal of Vibration and Acoustics*, 118, p. 209-219, 1996.
- [43] D. A. Sinha, S.C., E.A. Butcher, Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 206(1), p61-85, 1997.

## Apêndice A

### *Bifurcações estáticas e dinâmicas*

Com o objetivo de completar o estudo na análise de estabilidade em sistemas dinâmicos. Discutem-se, neste apêndice, as bifurcações do tipo estáticas e dinâmicas.

#### A.1 Bifurcações estáticas

Seja a equação diferencial

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{A.1}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  e,  $\mu$  é o parâmetro de controle.

Tem-se uma bifurcação do tipo estática de ponto fixo de (A.1) sob a influência de um parâmetro de controle escalar  $\mu$ . Variando-se  $\mu$  em (A.1), pode-se alterar o comportamento de estável para um comportamento instável quando  $\mu$  atinge um valor crítico  $\mu_c$ . Em  $\mu_c$  (A.1) perdeu estabilidade estrutural. Diz-se que uma bifurcação estática de um sistema autônomo (A.1) acontece num ponto fixo  $(x_0, \mu_c)$  se [9]:

1.  $F(x_0, \mu_c) = 0$
2.  $\frac{\partial F}{\partial x}$  tem um autovalor zero enquanto todos os outros autovalores tem parte real não

nula quando calculada no ponto  $(x_0, \mu_c)$ .

A primeira condição garante que a solução de (A.1) é um ponto fixo, e a segunda condição implica que o ponto fixo é um ponto não-hiperbólico.

Considera-se, a seguir, alguns sistemas unidimensionais (ou aqueles reduzidos à variedade central correspondente) para ilustrar diferentes tipos de bifurcações.

### A.1.1 Bifurcação sela-nó

Considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mu$  é o parâmetro de controle.

O estudo da estabilidade de (A.2) reduz-se à investigação do sinal de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  calculado nos pontos fixos [4].

Os pontos fixos de (A.2) são  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Da propriedade  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} \right] < 0$ , tem-se

que o ponto fixo em  $x = +\sqrt{\mu}$  é estável, e como  $\frac{\partial F}{\partial x} = +2\sqrt{\mu} > 0$ , tem-se que o ponto fixo

em  $x = -\sqrt{\mu}$  é instável.

Nota-se que para  $x = \mu = 0$  em (A.2) tem-se  $F(x, \mu) = F(0, 0) = 0$ , e  $\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{x=\mu=0}$  tem

um autovalor zero, satisfazendo as condições que caracterizam uma bifurcação estática.

A Fig.34 abaixo representa os pontos fixos de (A.2) em função do parâmetro de controle  $\mu$ .

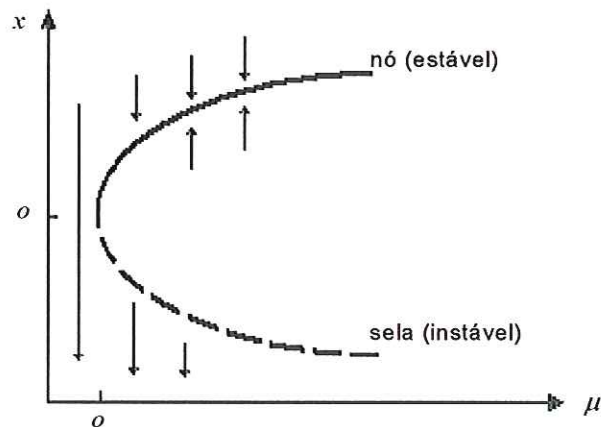


Figura 34 - Bifurcação sela-nó.

Na Fig.34 o equilíbrio estável é um nó (ramo superior), o equilíbrio instável é um ponto de sela hiperbólico (ramo inferior), por isso a bifurcação associada é denominada sela-nó [1], [2].

### A.1.2 Bifurcação transcritical

Considere a equação diferencial abaixo

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^2. \quad (\text{A.3})$$

Os pontos de fixos são  $x=0$  e  $x=\mu$ . Tem-se que  $\frac{\partial F}{\partial x} = \mu - 2x$ . Então como

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x=0} = \mu, \text{ para } \mu < 0, \text{ o ponto fixo em } x=0 \text{ é estável, e para } \mu > 0, \text{ o ponto fixo em}$$

$x = 0$  é instável. Observe que o ramo  $x = 0$  perde a estabilidade no ponto de bifurcação

$(x, \mu) = (0, 0)$ . Por outro lado, para  $x = \mu$  tem-se  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x=\mu} = -\mu$ , para  $\mu > 0$ , o ponto

fixo em  $x = \mu$  é estável, e para  $\mu < 0$ , o ponto fixo em  $x = \mu$  é instável.

Para  $x = \mu = 0$  em (A.3) tem-se  $F(x, \mu) = F(0, 0) = 0$ , e para  $\left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=\mu=0}$  obtém-se um

autovalor zero, o qual satisfaz as condições que caracterizam uma bifurcação como sendo estática. Há troca de estabilidade quando o parâmetro de controle passa por  $\mu = 0$ .

Este tipo de bifurcação é chamado de bifurcação transcritical, a qual é mostrada na Fig.35.

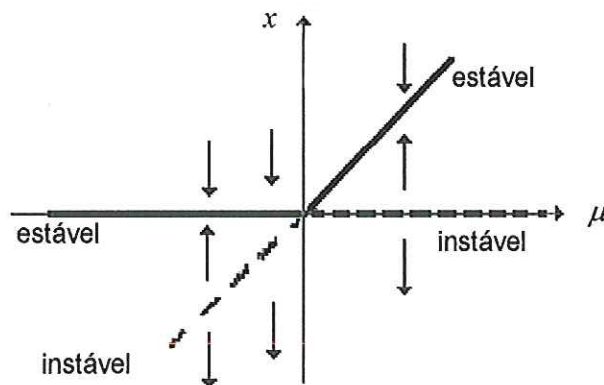


Figura 35 - Bifurcação transcritical.

Na Fig.35 observa-se que para  $x=0$  existe uma perda de estabilidade no ponto de bifurcação  $(x, \mu) = (0,0)$ , e que para  $x=\mu$  o sistema passa a ser estável no ponto de bifurcação  $(x, \mu) = (0,0)$ .

### A.1.3 Bifurcação quebra de simetria

As bifurcações do tipo quebra de simetria ou forquilha (*pitchfork*) ocorrem em sistemas que apresentam simetrias de algum tipo. É exatamente essa simetria que relaciona o novo par de ramos de equilíbrios que aparece no ponto de bifurcação.

As bifurcações do tipo quebra de simetria são divididas em supercrítica e subcrítica. Uma bifurcação é classificada como supercrítica se houver um “ganho” de estabilidade no ponto de bifurcação, e subcrítica se houver uma perda de estabilidade no ponto de bifurcação.

Como forma de ilustração analisam-se os exemplos a seguir.

#### A.1.3.1 Bifurcação quebra de simetria supercrítica

Considere a equação diferencial abaixo

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^3. \tag{A.4}$$

Os pontos fixos de (A.4) são  $x=0$  e  $x=\pm\sqrt{\mu}$ . Tem-se que  $\frac{\partial F}{\partial x} = \mu - 3x^2$ .

Então como  $\left[ \frac{\partial F_\mu}{\partial x} \right]_{x=0} = \mu < 0$ , para  $\mu < 0$ , o ponto fixo em  $x=0$  é estável, e como

$\left[ \frac{\partial F_\mu}{\partial x} \right]_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu < 0$ , para  $\mu > 0$ , o ponto fixo em  $x = \pm\sqrt{\mu}$  continua estável.

Para  $x = \mu = 0$  em (A.4) tem-se  $F(x, \mu) = F(0,0) = 0$ , e  $\left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=\mu=0}$  tem um autovalor zero, satisfazendo as condições que caracterizam uma bifurcação estática. Existe, portanto uma bifurcação na forma de forquilha, daí o nome bifurcação de quebra de simetria ou de forquilha supercrítica (*supercritical pitchfork*), a qual é representada na Fig.36 a seguir.

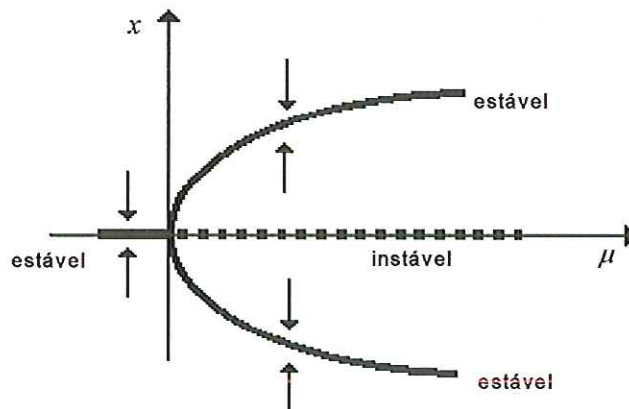


Figura 36 - Bifurcação quebra de simetria supercrítica.

A bifurcação quebra de simetria subcrítica é analisada a seguir.



### A.1.3.2 Bifurcação quebra de simetria subcrítica

Considere a equação diferencial abaixo

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x + x^3. \quad (\text{A.5})$$

Os pontos fixos de (A.5) são agora dados por  $x=0$  e  $x=\pm\sqrt{-\mu}$ . Tem-se que

$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu + 3x^2$ . Então como  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x=0} = \mu < 0$ , para  $\mu < 0$ , o ponto fixo em  $x=0$  é

estável, e como  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x=\pm\sqrt{-\mu}} = -2\mu > 0$ , para  $\mu > 0$ , o ponto fixo em  $x=\pm\sqrt{-\mu}$  passa a ser

instável. Existe perda de estabilidade em  $(x, \mu) = (0, 0)$ , como mostrado abaixo na

Fig.37. Para  $x = \mu = 0$  em (A.5) tem-se  $F(x, \mu) = F(0, 0) = 0$ , e  $\left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=\mu=0}$  tem um

autovalor zero, satisfazendo as condições que caracterizam uma bifurcação estática.

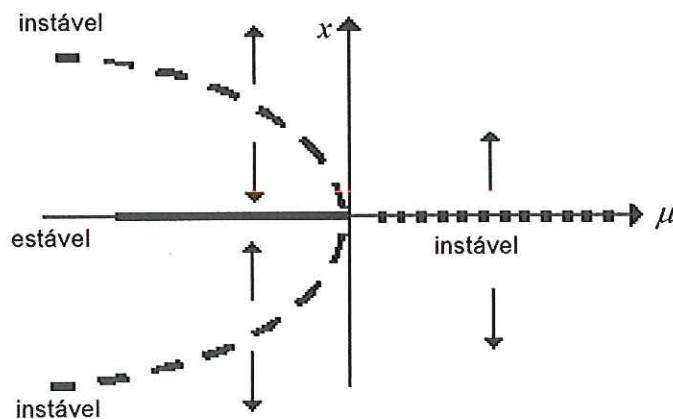


Figura 37 - Bifurcação quebra de simetria subcrítica.

Na seção seguinte analisa-se o comportamento de bifurcações dinâmicas.

## A.2 Bifurcações dinâmicas

As bifurcações analisadas nesta seção são: bifurcação de Hopf, dobra cíclica e duplicação de período. Inicia-se a análise das bifurcações dinâmicas, com a bifurcação de Hopf, como segue [1], [2].

### A.2.1 Bifurcação de Hopf

Quando um parâmetro de controle  $\mu$  for variado, uma bifurcação de Hopf de um ponto fixo  $(x_0, \mu_c)$  de um sistema dado por (A.1) ocorre se as seguintes condições forem satisfeitas:

- 1.-  $F(x_0, \mu_c) = 0$ ,
- 2.- A matriz Jacobiana  $\frac{\partial F}{\partial x}$  tem um par de autovalores imaginários puros enquanto todos os outros autovalores têm partes reais diferentes de zero quando calculada no ponto fixo  $(x_0, \mu_c)$ .
3. - Os autovalores da matriz Jacobiana calculada na vizinhança do ponto de bifurcação  $(x_0, \mu_c)$  requer que  $\frac{d\lambda}{d\mu} \neq 0$ , sendo  $\lambda$  o autovalor da matriz Jacobiana em  $(x_0, \mu_c)$ .

Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = F_\mu(x_1, x_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = G_\mu(x_1, x_2). \quad (\text{A.7})$$

Note que o único ponto fixo para todo  $\mu$  é  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Neste ponto a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, os autovalores de (A.8) são  $\lambda_1 = \mu + i$  e  $\lambda_2 = \mu - i$ . Então, o ponto fixo é estável para  $\mu < 0$  e instável para  $\mu > 0$ . Concluímos que no ponto  $\mu = 0$  ocorre uma perda de estabilidade.

Na região  $\mu > 0$ , usando coordenadas polares, tem-se.

$$x_1 = r \cos \theta \text{ e } x_2 = r \sin \theta.$$

Pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta + r \cos \theta (\mu - r^2) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta + r \sin \theta (\mu - r^2). \quad (\text{A.10})$$

Multiplicando (A.9) por  $\cos \theta$  e (A.10) por  $-\sin \theta$ , e somando-as temos

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\theta} = 1. \quad (\text{A.12})$$

Então, para  $r = \sqrt{\mu}$  temos que  $\dot{r} = 0$ , isso implica a existência de um ciclo limite. Para

$x = \mu = 0$  em (A.6) tem-se  $F(x, \mu) = F(0, 0) = 0$ , e  $\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{x=\mu=0}$  tem um par de

autovalores puramente imaginários e a relação  $\frac{d\lambda}{d\mu} = 1$ , satisfazendo as condições que

caracterizam uma bifurcação de Hopf.

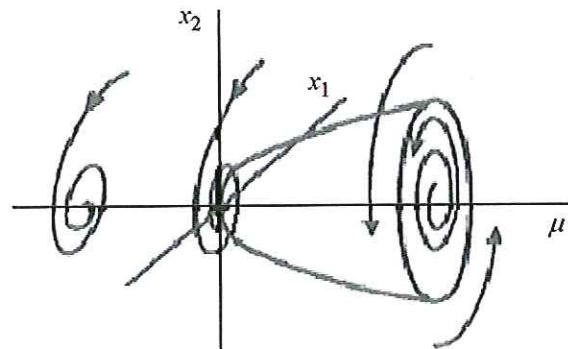


Figura 38 - Bifurcação de Hopf.

Na Fig.38 observa-se que para  $\mu = 0$  houve uma troca de estabilidade. Passou-se de um ponto fixo estável para um ciclo limite estável, sendo que o ciclo limite envolve um ponto fixo instável em  $\mu > 0$ .

Deve-se observar que a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo tem um par de autovalores imaginários.

A bifurcação de um ponto fixo para uma oscilação periódica é chamada de bifurcação de Hopf. A seguir analisa-se a bifurcação de dobra cíclica.

### A.2.2 Bifurcação de dobra cíclica

Para caracterizar uma bifurcação como sendo de dobra cíclica, deve-se associar o fenômeno de salto (*jump*), como mostrado abaixo.

Considere a equação de Duffing

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \alpha x^3 = A \cos \omega t. \quad (\text{A.13})$$

Para  $\alpha$  e  $A$  fixos, seja  $\omega$  o parâmetro de controle. Variando  $\omega$  a amplitude  $A$  associada à equação de Duffing apresenta o comportamento mostrado na Fig.39 a

seguir. Nos pontos P e Q. ocorrem saltos levando a um comportamento instável entre esses pontos, ou seja, na região da curva compreendida entre os pontos P e Q o sistema é instável.

Nesta bifurcação coexistem, para certos valores do parâmetro de controle, dois ciclos limite de estabilidades diferentes que se aproximam à medida que o parâmetro de controle varia.

No ponto de bifurcação os ciclos limite se aproximam, (pontos P e Q da Fig.39) para em seguida cada trajetória afastar-se da vizinhança imediata.

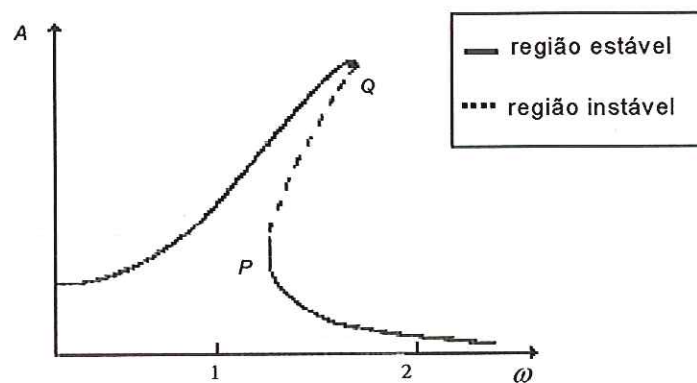


Figura 39 - Bifurcação de dobra cíclica para a equação de Duffing.

Observa-se na Fig.39 que quando a amplitude  $A$  de (A.13) é pequena, então a resposta do sistema também é pequena e o termo cúbico de (A.13) não interfere no sistema, podendo considerar o sistema praticamente linear. Com a amplitude um pouco maior o termo cúbico passa a ser significativo no sistema, fazendo com que o sistema tenha saltos e com um comportamento instável nos pontos P e Q.

A bifurcação de duplicação de período é analisada a seguir.

### A.2.3 Bifurcação de duplicação de período

Um cenário bastante freqüente é quando um ponto fixo estável sofre uma bifurcação de Hopf em um certo valor do parâmetro de controle do sistema.

Aumentando-se o parâmetro de controle o ciclo limite torna-se instável e uma órbita de período duplo aparece.

Em geral pode aparecer uma série de  $n$  duplicações de período depois das quais um ciclo limite de período  $2^n T$  é obtido. Este tipo de bifurcação é chamado de duplicação de período, como mostrado na Fig.40. A bifurcação de duplicação de período não deve ser confundida com a bifurcação quebra de simetria, pois em contraste com esta bifurcação, a bifurcação de duplicação de período é estruturalmente estável sob pequenas perturbações [1], [2].

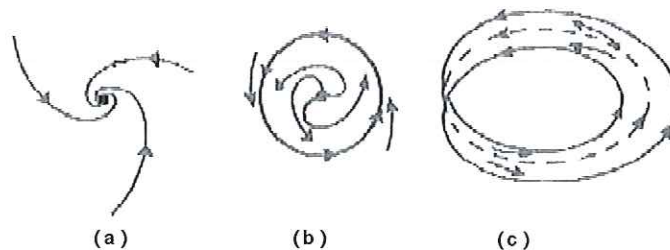


Figura 40 - Um ponto fixo estável sofre uma bifurcação de Hopf [(a)  $\rightarrow$  (b)] em seguida uma bifurcação de duplicação de período [(b)  $\rightarrow$  (c)].

## **Apêndice B**

### ***Obtenção da matriz de monodromia***

Neste apêndice apresentamos os cálculos envolvidos para obtenção da matriz de monodromia para a análise de estabilidade em sistemas dinâmicos periódicos.

#### **B.1 Transformada Lyapunov-Floquet**

A análise de estabilidade via transformada de Lyapunov-Floquet (L-F) pode ser usada em conjunto com técnicas de realimentação de estado para conduzir a solução do sistema periódico para um ponto de equilíbrio ou para uma órbita desejada.

A análise da estabilidade com base na transformada L-F é feita através dos autovalores da Matriz de Transição de Estado (STM) calculada no final do período principal do sistema, a qual é chamada de Matriz de Transição de Floquet (FTM). A transformada L-F tem aplicação também no problema de estabilização de uma órbita periódica quando este leva a um sistema linear com coeficientes periódicos. Recentemente, foram desenvolvidas técnicas para a obtenção da transformada L-F empregando a expansão polinomial de Chebyshev e iteração de Picard [34]-[39] e [40]-[41], viabilizando assim, a utilização da teoria de controle linear realimentado para sistemas não lineares contínuos no tempo com coeficientes periódicos.

A transformada L-F consiste em reduzir a parte periódica de um sistema linear em uma matriz real ou complexa e invariante no tempo, a qual é obtida fatorando a matriz de transição de estados em um produto de termos periódicos com termos constantes no tempo.

## B.2 Cálculos para a obtenção da matriz de monodromia

Considere o sistema não linear T-periódico no tempo

$$\dot{x}(t) = F(t, x) \quad (\text{B.1})$$

sendo  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $t \in \mathfrak{R}$  e  $F \in \mathfrak{R}^n$ . Linearizando (B.1) em torno de um ponto de equilíbrio, obtém-se

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (\text{B.2})$$

onde  $A(t)$  é uma matriz de ordem  $n$ , T-periódica no. Pela teoria de Floquet, no sistema de equação diferencial linear homogêneo (B.2) existem  $n$  escalares (em geral complexos) tais que as  $n$  soluções linearmente independentes de (B.2) são da forma:

$$x_i(t) = \exp(\sigma_i t)v_i(t), i = 1, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

onde  $v_i(t)$  é T-periódico. A solução de (B.2), também, pode ser escrita como

$$x(t) = \phi(t)c \quad (\text{B.4})$$

sendo  $\phi(t)$  é a matriz fundamental do sistema (B.2) referenciada como STM e  $c$  é um vetor constante de dimensão apropriada. Os autovalores  $\mu_i$  da STM  $\phi(t)$ , calculada no final do período T, é referenciada como FTM, determinam a estabilidade ou instabilidade do sistema linear com coeficientes periódicos. Se  $|\mu_i| < 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , o sistema é estável, se  $|\mu_i| > 1$  para algum



$i = 1, \dots, n$ , o sistema é instável.

A seguir será apresentado, resumidamente, os principais resultados da transformada L-F [42]-[43], que serão utilizados na obtenção da STM.

**Teorema 1:** Toda matriz fundamental  $\phi(t)$   $n \times n$  de (B.2) pode ser escrita como o produto de duas matrizes  $n \times n$  da seguinte maneira

$$\phi(t) = P(t)e^{\bar{C}t} \quad (\text{B.5})$$

onde  $P(t)$  é uma matriz complexa T-periódica e  $\bar{C}$  é uma matriz constante.

**Observação 1:** O autovalores da FTM  $\mu_i$  são chamados multiplicadores de Floquet ou multiplicadores característicos.

**Corolário 1:** Toda matriz fundamental  $\phi(t)$  pode também ser fatorada por

$$\phi(t) = L(t)e^{Rt} \quad (\text{B.6})$$

onde  $L(t)$  é real e 2T-periódica e  $R$  é uma matriz real apropriada.

**Observação 2:** As matrizes  $L(t)$  e  $P(t)$  são chamadas matrizes da transformada de Lyapunov-Floquet.

**Corolário 2:** A transformada T-periódica

$$x(t) = P(t)z(t) \quad (\text{B.7})$$

reduz (B.2) a

$$\dot{z}(t) = \bar{C}z(t). \quad (\text{B.8})$$

Além disso, a transformada 2T-periódica

$$x(t) = L(t)z(t) \quad (\text{B.9})$$

produz a representação real dada por

$$\dot{z}(t) = Rz(t). \quad (\text{B.10})$$

A obtenção da transformada L-F resume-se na determinação  $L(t)$  e  $P(t)$ . A seguir descreve-se um procedimento para encontrar numericamente  $L(t)$  e  $P(t)$ .

### B.3 Matrizes da Transformada L-F via Polinômio Chebyshev e Iteração de Picard

A matriz  $A(t)$  em (B.2) pode ser escrita como:

$$A(t) = \sum_{i=1}^q A_i F_i(t) \quad (\text{B.11})$$

onde  $F_i(t)$  são funções T-periódicas.

**Exemplo:** Considere a equação (3.53) não autônoma descrita no Cap.3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(a - b \operatorname{sen}(2t))x_1 - cx_2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde  $a = \frac{g}{l}$ ,  $b = \frac{A\omega^2}{l}$ ,  $c$  é o amortecimento e o período  $T = \pi$ . A decomposição

(B.11) de (B.12) tem a seguinte forma

$$\dot{x} = (A_1 F_1(t) + A_2 F_2(t))x \quad (\text{B.13})$$

onde,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -c \end{bmatrix}$ ,  $F_1(t) = 1$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ,  $F_2(t) = \operatorname{sen}(2t)$ .

Com a transformação  $t = T\tau$  obtém-se o sistema normalizado (B.14) cujo período principal é  $T = 1$ .

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \bar{A}(\tau)x(\tau), \quad \bar{A}(\tau+1) = \bar{A}(\tau) \text{ e } x(0) = x_0 \quad (\text{B.14})$$

onde  $\bar{A}(\tau) = \sum_{i=1}^q \bar{A}_i F_i(\tau)$ ,  $F_i(\tau+1) = F_i(\tau)$  e  $\bar{A}_i = T A_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

Conforme [43], a matriz de transição de estados do sistema normalizado (B.14) pode ser aproximada via polinômio de Chebyshev e o método iterativo de Picard por

$$\phi^{(p,m)}(\tau) = \hat{T}^T(\tau) \left[ \hat{I} + \left( \sum_{k=1}^p [L]^{k-1} \right) P \right] \quad (\text{B.15})$$

onde  $m$  é o grau do polinômio de Chebyshev alterado de primeiro tipo,

$\hat{I} := I_n \otimes \underbrace{(1 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{(m-1)}$  é uma matriz  $nm \times n$  e  $\otimes$  representa o produto de Kronecker e  $p$  o

número da iteração de Picard. As matrizes presentes no segundo membro de (B.15) são apresentadas a seguir.

### B.3.1 Matriz $\hat{T}^T(\tau)$

A matriz  $\hat{T}^T(\tau)$  em (B.15) é obtida por

$$\hat{T}^T(\tau) = \begin{bmatrix} T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_0^*(\tau) & T_1^*(\tau) & \dots & T_{m-1}^*(\tau) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

onde  $T_r^*(t)$ ,  $r = 0, \dots, m-1$ , é o polinômio de Chebyshev alterado de 1º tipo e  $r$  é o número de termos do polinômio de Chebyshev.

Para obter o polinômio de Chebyshev alterado de 1º tipo deve-se substituir a variável  $t$ , do polinômio de Chebyshev não alterado [41], pela expressão  $2t - 1$ , apresentados a seguir.

Polinômio de Chebyshev não alterado

$$T_r(t) = \begin{cases} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = t \\ T_2(t) = 2t^2 - 1 \\ T_3(t) = 4t^3 - 3t \\ T_4(t) = 8t^4 - 20t^2 + 5t \\ \vdots \end{cases}$$

onde  $T_r(t)$  é o polinômio de Chebyshev não alterado [41].

Polinômio de Chebyshev alterado de 1º tipo

$$T_r^*(t) = \begin{cases} T_0^*(t) = 1 \\ T_1^*(t) = 2t - 1 \\ T_2^*(t) = 8t^2 - 8t + 1 \\ T_3^*(t) = 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1 \\ T_4^*(t) = 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1 \\ \vdots \end{cases}$$

### B.3.2 Matriz $L$

A matriz  $L$  em (B.15) é obtida por

$$L = \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}] \tag{B.18}$$

onde  $G$  e  $Q_{d_i}$  são matrizes  $m \times m$ , denominadas, respectivamente, matriz operacional de integração e matriz operacional produto.

A matriz  $G$  é obtida como sendo

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} & \dots & \vdots \\ -\frac{1}{30} & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{4(m-1)} \\ \frac{(-1)^m}{2m(m-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{4(m-2)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

e a matriz  $Q_{d_i}$  é dada por

$$Q_{d_i} = \begin{bmatrix} d_0^i & \frac{d_1^i}{2} & \frac{d_2^i}{2} & \dots & \frac{d_{m-1}^i}{2} \\ d_1^i & d_0^i + \frac{d_1^i}{2} & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & \dots & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) \\ d_2^i & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & d_0^i + \frac{d_4^i}{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-1}^i & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) & \dots & \dots & d_0^i + \frac{d_{2m-2}^i}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

onde  $d_i = [d_0^i \ d_1^i \dots \ d_{m-1}^i]^T$  contém os coeficientes da expansão de Chebyshev alterado de 1º tipo das funções  $F_i$ , dada em (B.14).

Esta expansão tem a forma

$$F_i(t) = \frac{1}{2}d_0^i + \sum_{s=1}^{\infty} d_r^i T_r^*(t) \quad (\text{B.21})$$

e os coeficientes  $d_r^i$  podem ser calculados através:

$$d_r^i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(t)T_s^*(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} F(\cos^2 \phi) \cos(2s\phi) d\phi. \quad (\text{B.22})$$

### B.3.3 Matriz $P$

A matriz  $P$  em (B.15) é obtida por

$$P = \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}]. \quad (\text{B.23})$$

Os passos de obtenção da matriz de transição de estados  $\phi^{(p,m)}(\tau)$  em (B.15) são resumidos no seguinte algoritmo.

#### Algoritmo L-F:

**Passo 1:** Obter o sistema linearizado na forma (B.2);

**Passo 2:** Decompor (B.2) como em (B.11), separando os termos constantes e os T-periódicos;

**Passo 3:** Normalizar o sistema para  $T = 1$ , fazendo  $\bar{A}_i(i) = TA_i$   $i = 1, \dots, q$  como em (B.14);

**Passo 4:** Obter as matrizes  $\hat{T}, \hat{L}$  e  $P$  da decomposição (B.15);

**Passo 4.1:** Os elementos  $T_r^*(t)$  de  $\hat{T}(t)$  em (B.16) são polinômios de Chebyshev e podem ser calculados usando o comando `maple('orthopoly[T]', (m, 2t - 1)')`, com  $m$  o grau do polinômio;

**Passo 4.2:** A matriz  $L$  é obtida via (B.18) usando (B.19) e (B.20). Os elementos  $d_r^i, r = 0, \dots, 2m - 2$ , de  $Q_{d_i}$  em (B.20) podem ser obtidos usando o expressão `int((4/pi)* (F(cos^2 t)* cos(2*r*t)), t = 0...pi/2)` do Maple;

**Passo 5:** Calcular  $P$  usando (B.23).

## Apêndice C

### *Programas utilizados nas simulações*

Neste apêndice são apresentados os códigos dos programas desenvolvidos na obtenção de gráficos apresentados no Capítulo 4, utilizando o software Matlab® 6.5.

#### **C.1 Programa utilizado para o cálculo do expoente de Lyapunov**

Para o desenvolvimento desse programa utilizou-se o algoritmo descrito no Capítulo 2.

```
global xo
% Fazendo x(1)=x, x(2)=y e x(3)=z
format long
k1=0.01;
tfn=1;
tf=4;
% sistema não linear
tempo1 = [0:k1:tfn];           % Intervalo de tempo
x1=[0.01 0.01 0.01]';
[t,x]=ode23s('lyapbishop1',tempo1,x1); % Obtenção do vetor de estados do sistema
```

```

a=x;

a1=(a(length(a),1));

a2=(a(length(a),2));

a3=(a(length(a),3));

% pontos de linearização a serem usados no sistema linearizado

xo=[a1 a2 a3]';

% sistema linear

tempo2 = [0:h1:tf];           % Intervalo de tempo

x4=[1 0 0]';

[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo2,x4);

s=(x);

s1=(s(length(s),1));

s2=(s(length(s),2));

s3=(s(length(s),3));

% sistema linear

x5=[0 1 0]';

[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo2,x5);

q=(x);

q1=(q(length(q),1));

q2=(q(length(q),2));

q3=(q(length(q),3));

```



```

% sistema linear
x6=[0 0 1]';
[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo2,x6);
l1=(l(length(l),1));
l2=(l(length(l),2));
l3=(l(length(l),3));
% últimos valores de cada iteração
z1=[a1 a2 a3]';
y1=[s1 s2 s3]';
y2=[q1 q2 q3]';
y3=[l1 l2 l3]';
% passo
k=0.01;
for i=1:2000
% ortonormalização
N1=norm(y1);
s1n=y1/N1;
% o1 tem que dar 1 para mostrar que esta ortonormalizado
o1=(s1n)'*s1n;
N2=norm(y2-dot(y2,s1n)*s1n);
q1n=(y2-dot(y2,s1n)*s1n)/N2;
% o2 tem que dar 1 para mostrar que esta ortonormalizado
o2=(q1n)'*q1n;

```

*% or2 tem que dar 0 para mostrar que esta ortogonalizado, o angulo entre os vetores é 90°.*

$or2=(s1n)'*q1n$

$N3=norm(y3-dot(y3,q1n)*q1n-dot(y3,s1n)*s1n);$

$d1n=(y3-dot(y3,q1n)*q1n-dot(y3,s1n)*s1n)/N3;$

*% o3 tem que dar 1 para mostrar que esta ortonormalizado*

$o3=(d1n)'*d1n$

*% or3 tem que dar 0 para mostrar que esta ortogonalizado, o angulo entre os vetores e 90°.*

$or3=(q1n)'*d1n$

*% valores acumulados após a ortonormalização*

$x1=z1;$

$x4=s1n;$

$x5=q1n;$

$x6=d1n;$

*% sistema não linear*

$tempo0=tfn+tf*(i-1):k:tfn+i*tf;$

$[t,x]=ode23s('lyapbishop1',tempo0,x1);$

$a=x;$

$a1=(a(length(a),1));$

$a2=(a(length(a),2));$

$a3=(a(length(a),3));$

*% Pontos de linearização para a matriz Jacobiana*

$xo=[a1 a2 a3]';$

```
% Intervalo de tempo

ti=i*tf;

tempo1 =[ti:h:(i+1)*tf];

% sistema linear

[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo1,x4);

s=(x);

s1=(s(length(s),1));

s2=(s(length(s),2));

s3=(s(length(s),3));

% sistema linear

[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo1,x5);

q=(x);

q1=(q(length(q),1));

q2=(q(length(q),2));

q3=(q(length(q),3));

% sistema linear

[t,x]=ode23s('lyapbishop2',tempo1,x6);

l=(x);

l1=(l(length(l),1));

l2=(l(length(l),2));

l3=(l(length(l),3));
```

*% nova CI para a próxima iteração, guarda os valores das últimas iterações e volta no início do for com esses novos valores*

z1=[a1 a2 a3]';

y1=[s1 s2 s3]';

y2=[q1 q2 s3]';

y3=[l1 l2 l3]';

*% Fazendo o somatório*

d1(i)=N1;

d2(i)=N2;

d3(i)=N3;

r=i

lamb1(i)=1/(r\*tf)\*sum(log2(d1));

lamb2(i)=1/(r\*tf)\*sum(log2(d2));

lamb3(i)=1/(r\*tf)\*sum(log2(d3));

lambida= [lamb1(i) lamb2(i) lamb3(i)]

end

te=1:i;

*% Plotagem dos resultados*

figure(1)

plot(te,lamb1)

figure(2)

plot(te,lamb2)

figure(3)

plot(te,lamb3)

### **Function usadas para o cálculo do expoente de Lyapunov**

```
% sistema não linear

function [xdot]=lyapbishop1(t,x)

global xo

w=2;

beta=0.1;

p=1;

% d=-c/m*l^2 ; k=A*w^2/l ; a=g/l

xdot=[x(2);-beta*x(2)-(1+p*cos(w*x(3)))sin(x(1));1];
```

---

```
% sistema linear

function [xdot]=lyapbishop2(t,x)

global xo

w=2;

beta=0.1;

p=1;

xdot=[x(2);-((1+p*cos(w*x(3)))cos(xo(1)))x(1)-
beta*x(2)+(sin(x(1))*(p*w*sin(w*xo(3))))x(3);0];
```

### **C.2 Programa utilizado para o cálculo do diagrama de bifurcação**

A idéia básica deste programa é acumular os valores calculados do parâmetro de controle no intervalo desejado após cada iteração.

```

figure
hold on
p=[2:0.001:4]; % Intervalo do parâmetro de controle
global p % parâmetro que está sendo variado
for i=1:length(p);
p1=px(i);
x1=[0.01 0.01]'; % Condições iniciais
tempo = [0:pi:100*pi]; % Intervalo de tempo
[t,x]=ode45('diagbishop1',tempo,x1); % Obtenção do vetor de estados do sistema
% Eliminação da parte transiente
for i=1:10
j=46+i;
if j<49,
z(i,1)=x(j,1);
z(i,2)=x(j,2);
plot(p1,z(:,1),'k.','markersize',5)
end
end
end
end

```

**A *function* usada na simulação para a obtenção do diagrama de bifurcação**

```

function [xdot] = diagbishop1(t,x)
global p
w=2; beta=0.1;
xdot=[x(2);-beta*x(2)-(1+p*cos(w*t))*sin(x(1))];

```