TATIANA DE FIGUEIREDO PEREIRA ALVES TAVEIRA PAZELLI

Controladores adaptativos não-lineares com critério $\mathcal{H}_\infty$ aplicados a robôs espaciais

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

Dedicatória

A meu filho Marcelo,

A meu marido Henrique,

A meus pais Luís Carlos e Maria Beatriz,

E a meus irmãos Rafael e Cairo,

Com amor e gratidão.

Agradecimentos

A Deus pela constante iluminação.

Ao meu filho Marcelo por dar significado à minha vida.

Ao meu marido Henrique pelo amor incondicional e pelos debates de idéias que contribuíram todos os dias para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Luís Carlos e Maria Beatriz pelo empenho na minha educação, por todo amor, compreensão e incentivo que sempre guiaram os meus passos.

Aos meus irmãos Rafael e Cairo pelo suporte e carinho que me motivaram a prosseguir, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Marco Henrique Terra por me apresentar o mundo científico e, pela orientação, dedicação e paciência em todas as fases deste trabalho.

Ao Professor Adriano Almeida Gonçalves Siqueira pelo apoio constante e pelas discussões enriquecedoras, que contribuíram significativamente para que este trabalho fosse concluído.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos pela contribuição efetiva na minha formação como engenheira e como pessoa em todos estes anos.

Aos meus amigos do LASI pela amizade, alegria, presença e participação sempre que necessária, colaborando para um ambiente de trabalho harmonioso.

À FAPESP pelo suporte financeiro que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa.

Resumo

PAZELLI, T. F. P. A. T. (2006). *Controladores Adaptativos Não-Lineares com Critério $\mathcal{H}_\infty$ Aplicados a Robôs Espaciais*. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Neste trabalho, o equacionamento dinâmico de um manipulador espacial de base livre flutuante é descrito a partir do conceito do Manipulador Dinamicamente Equivalente para que as técnicas de controle desenvolvidas sejam experimentalmente validadas em um manipulador convencional de base fixa. Dois tipos de controle de movimento são considerados. O primeiro foi desenvolvido no espaço das juntas e realiza o comando direto de posicionamento das juntas do manipulador; o segundo foi desenvolvido no espaço inercial e o controle é direcionado para o posicionamento do efetuador no espaço Cartesiano. Nos dois casos, o problema de acompanhamento de trajetória de um manipulador espacial com base livre flutuante sujeito a incertezas na planta e perturbações externas é proposto e solucionado sob o ponto de vista do critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Considerando métodos de controle para sistemas subatuados, três técnicas adaptativas foram desenvolvidas a partir de um controlador $\mathcal{H}_\infty$ não-linear baseado na teoria dos jogos. A primeira técnica foi proposta considerando a estrutura do modelo bem definida, porém calculada com base em parâmetros incertos. Uma lei adaptativa foi aplicada para estimar esses parâmetros utilizando parametrização linear. Redes neurais artificiais são aplicadas nas outras duas abordagens adaptativas. A primeira utiliza uma rede neural para aprender o comportamento dinâmico do sistema robótico, considerado totalmente desconhecido. Nenhum dado cinemático ou dinâmico da base é utilizado neste caso. A segunda abordagem considera a estrutura do modelo nominal do manipulador bem definida e a rede neural é aplicada para estimar o comportamento das incertezas paramétricas e da dinâmica não-modelada da base. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado nas três técnicas para atenuar o efeito dos erros de estimativa. Resultados experimentais foram obtidos com um robô manipulador de base fixa subatuado (UArmII) e apresentaram melhor desempenho no acompanhamento da trajetória e no consumo de energia para as abordagens baseadas em redes neurais.

Palavras-chave: Manipuladores espaciais, controle $\mathcal{H}_\infty$, controle adaptativo, redes neurais.

Abstract

PAZELLI, T. F. P. A. T. (2006). *Adaptive Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Controllers Applied to Free-Floating Space Manipulators*. Dissertation (Master), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

In the present work, the dynamics of a free-floating space manipulator is described through the Dynamically Equivalent Manipulator approach in order to obtain experimental results in a planar fixed base manipulator. Control in joint and Cartesian spaces are considered. The first acts directly on joints positioning; the second control scheme acts on positioning the end-effector in some inertially fixed position. In both cases, the problem of tracking control with a guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ performance for free-floating manipulator systems with plant uncertainties and external disturbances is proposed and solved. Considering control methods for underactuated systems, three adaptive techniques were developed from a nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ controller based on game theory. The first approach was proposed considering a well defined structure for the plant, however it was computed based on uncertain parameters. An adaptive law was applied to estimate these parameters using linear parametrization. Artificial neural networks were applied in the two other approaches. The first one uses a neural network to learn the dynamic behaviour from the robotic system, which is considered totally unknown. No kinematics or dynamics data from the spacecraft is necessary in this case. The second approach considers the nominal model structure well defined and the neural network is applied to estimate the behaviour of the parametric uncertainties and of the spacecraft non-modeled dynamics. The $\mathcal{H}_\infty$ criterion was applied to attenuate the effect of estimation errors in the three techniques. Experimental results were obtained with an underactuated fixed-base planar manipulator (UArmII) and presented better performance in tracking and energy consumption for the neural based approaches.

Keywords: *Free-floating space manipulators, $\mathcal{H}_\infty$ control, adaptive control, neural networks.*

Publicações

1. TAVEIRA, T. F. P. A.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H.(2006). Adaptive Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Controllers Applied to a Free-Floating Space Manipulator. In: *IEEE International Conference on Control Applications*, p.1476-1481, Munique, Alemanha.
2. PAZELLI, T. F. P. A. T.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H.(2006). Controle Robusto de Manipuladores Espaciais nos Espaço das Juntas e no Espaço Cartesiano. In: *Congresso Brasileiro de Automática, XVI*, p.2957-2962, Salvador, Brasil.

Lista de Figuras

1.1	Manipulador espacial e seu modelo de corpos rígidos	6
1.2	Manipulador de base fixa com n elos	7
1.3	Parâmetros do manipulador de base fixa	8
1.4	Manipulador espacial com n elos	11
1.5	Parâmetros do manipulador espacial	12
1.6	Manipulador espacial e o Manipulador Virtual correspondente	13
1.7	ME e seu respectivo MDE	16
2.1	Rede neural	40
4.1	UArmII	75
4.2	Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais	77
4.3	Estrutura de código do ASCM-E	78
4.4	Distúrbios externos aplicados às juntas ativas	81
4.5	Posição das juntas - MDE, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear	82
4.6	Torques - MDE, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear	82
4.7	Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	83
4.8	Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	83
4.9	Atualização de parâmetros - MDE	84

4.10	Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais	86
4.11	Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais . . .	86
4.12	Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo	86
4.13	Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo	86
4.14	Posição das juntas - ME, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear	88
4.15	Torques - ME, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear	88
4.16	Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	88
4.17	Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	88
4.18	Atualização de parâmetros - ME	89
4.19	Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais	90
4.20	Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais	90
4.21	Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo	90
4.22	Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo	90
B.1	Diagrama de blocos para análise quantitativa do erro	111
B.2	Erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE} \times (m_2, m_3)$	112
B.3	Erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE} \times l_{c1}$	112
B.4	Suporte e peso utilizados para modificar as propriedades dinâmicas do UAr-mII	112

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do UArmII	76
4.2	Parâmetros do Manipulador Espacial	76
4.3	Coordenadas generalizadas do UArmII	77
4.4	Condições iniciais e finais para as simulações e os experimentos	81
4.5	Valores iniciais e finais de $\bar{\varphi}$ - MDE	83
4.6	Valores iniciais e finais de $\bar{\varphi}$ - ME	89
4.7	Índices de desempenho - MDE	91
4.8	Índices de desempenho - ME	91
B.1	Parâmetros do UArmII	113
B.2	Parâmetros do Manipulador Espacial	113

Lista de Abreviaturas

ASCM	Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores
ASCM-E	Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais
MDE	Manipulador Dinamicamente Equivalente
ME	Manipulador Espacial de base livre flutuante
MV	Manipulador Virtual
UArmII	Underactuated Arm II

Sumário

Resumo	vii
<i>Abstract</i>	ix
Publicações	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviaturas	xvii
Introdução	1
1 Modelagem de Manipuladores Robóticos	5
1.1 Manipulador de Base Fixa	6
1.2 Manipulador Espacial	10
1.3 Manipulador Virtual	12
1.4 Manipulador Dinamicamente Equivalente	15
1.4.1 Equivalência Cinemática	17
1.4.2 Equivalência Dinâmica	17
1.5 Manipulador Subatuado	20
2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear	23
2.1 Formulação do Problema	24
2.1.1 Espaço das Juntas	25
2.1.2 Espaço Inercial	27
2.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear (Teoria dos Jogos)	30
2.3 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear	35
2.4 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais	37

3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear Aplicado a Manipuladores Espaciais	45
3.1	Formulação do Problema	45
3.1.1	Espaço das Juntas	46
3.1.2	Espaço Inercial	51
3.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear (Teoria dos Jogos)	58
3.2.1	Espaço das Juntas	58
3.2.2	Espaço Inercial	59
3.3	Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear	60
3.3.1	Espaço das Juntas	61
3.3.2	Espaço Inercial	63
3.4	Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais	64
3.4.1	Espaço das Juntas	64
3.4.2	Espaço Inercial	66
3.5	Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais Baseado em Modelo	68
3.5.1	Espaço das Juntas	69
3.5.2	Espaço Inercial	70
4	Implementação e Análise de Resultados	73
4.1	Underactuated Arm II (UArmII)	74
4.2	Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais (ASCM-E)	76
4.3	Trajetória Desejada e Índices de Desempenho	78
4.4	Controle no Espaço das Juntas	80
4.4.1	Experimentos no MDE	80
4.4.2	Simulações no ME	87
4.4.3	Análise dos Resultados	89
	Conclusão	93
4.5	Trabalhos Futuros	95
	Referências Bibliográficas	97
A	Modelos Dinâmicos	101
B	Ajuste Estrutural do UArmII para Assegurar a Equivalência	109

Introdução

Esforços consideráveis de pesquisa vêm sendo direcionados a manipuladores para aplicações espaciais, tais como o transporte de materiais, e a inspeção e a manutenção da estação espacial e de satélites, substituindo astronautas em atividades extra-veiculares. Devido à dinâmica distinta e complexa encontrada em muitas dessas aplicações, problemas de modelagem e de controle são exclusivos dessa área.

Dubowsky e Papadopoulos consideraram tipos representativos de sistemas robóticos espaciais em (DUBOWSKY & PAPADOPOULOS (1993)), identificando alguns de seus problemas característicos de trajetória e controle. A característica principal dos manipuladores espaciais é a influência dos movimentos do braço no movimento da base, e vice-versa, devido ao acoplamento dinâmico existente. A posição e a orientação da base espacial podem ser ativamente controladas por jatos propulsores ou rodas de reação, simplificando a síntese de controladores para o manipulador. Neste caso, leis de controle para robôs manipuladores terrestres podem ser diretamente aplicadas (XU et al. (1994)), (WOERKOM et al. (1996)), (SHOU & JAN (2005)). No entanto, como as rodas de reação ou os jatos propulsores aumentam o consumo de combustível seja adicionando peso e complexidade ou por utilizarem o combustível diretamente, a maioria das técnicas de controle desenvolvidas para esse tipo de sistema busca o planejamento de trajetória

para otimizar o consumo de combustível, (SAKAWA (1999)). Por outro lado, manipuladores espaciais com base livre flutuante são sistemas que permitem que a base espacial se mova livremente em resposta aos movimentos do manipulador, evitando a adição de perturbações e conservando combustível e energia elétrica, uma necessidade no ambiente espacial.

A dificuldade de recriar as condições do espaço em laboratórios terrestres e a necessidade de simulações precisas para o conhecimento do comportamento dos sistemas espaciais fazem de sua modelagem dinâmica um recurso importante. Um método analítico de modelagem para manipuladores espaciais chamado Manipulador Virtual foi desenvolvido em (VAFA & DUBOWSKY (1990)). O Manipulador Virtual é um robô com base fixa no espaço inercial cuja primeira junta é esférica e passiva, representando a natureza flutuante da base espacial. No entanto, somente a equivalência cinemática é considerada. GU & XU (1993) propuseram um modelo de robô estendido para manipuladores espaciais composto por um pseudo-braço com seis juntas passivas, representando o movimento da base, e o manipulador. No entanto, assumiram que a posição, a orientação, a velocidade e a aceleração da base espacial são todas mensuráveis. Com base no conceito do Manipulador Virtual, LIANG et al. (1996) mapearam um manipulador espacial em um manipulador convencional, com base fixa, e mostraram que as propriedades cinemáticas e dinâmicas do manipulador espacial são preservadas neste mapeamento. Este manipulador é chamado Manipulador Dinamicamente Equivalente. O Manipulador Dinamicamente Equivalente vai além do conceito do Manipulador Virtual, pois modela o sistema espacial tanto cinematicamente quanto dinamicamente. Esquemas de controle adaptativo foram aplicados a um manipulador espacial com base no modelo de robô estendido e no conceito do Manipulador Dinamicamente Equivalente em (GU & XU (1993)) e (PARLAKTUNA & OZKAN

(2004)), respectivamente.

Em sistemas robóticos reais, variáveis que não podem ser exatamente conhecidas *a priori* são inevitáveis (por exemplo, a carga do efetuador pode variar no desempenho de diferentes tarefas, os coeficientes de atrito podem se modificar em diferentes configurações, e algumas não-linearidades negligenciadas podem aparecer como uma perturbação na entrada de controle), e o robô pode receber interferências imprevisíveis do ambiente. Considerando a existência de incertezas paramétricas no manipulador, perturbações modeladas e não-modeladas, e não-linearidades não-modeladas, poucos projetos de controladores para manipuladores espaciais com base livre flutuante foram encontrados na literatura, (GU & XU (1993)), (PARLAKTUNA & OZKAN (2004)). Para compensar tais incertezas, estratégias de controle, baseadas principalmente nas técnicas de controle robusto e controle adaptativo, têm sido propostas para sistemas robóticos convencionais, (CHEN et al. (1994)), (CHEN et al. (1997)), (CHANG & CHEN (1997)), (CHEN et al. (1994)), (SIQUEIRA et al. (2003)), (SIQUEIRA & TERRA (2004)), (PETRONILHO et al. (2005)). Estratégias adaptativas baseadas na propriedade de parametrização linear do modelo ou em sistemas inteligentes, como redes neurais e lógica nebulosa, vêm sendo aplicadas para estimar o comportamento do modelo desconhecido, das incertezas e das perturbações. No entanto, os algoritmos adaptativos usuais não atacam o problema de atenuação dos efeitos do erro de estimativa no procedimento de acompanhamento de trajetória. Uma abordagem interessante para solucionar esse problema é baseada no critério $\mathcal{H}_\infty$, que busca atenuar os efeitos dos distúrbios no desempenho do sistema.

Sob essa motivação, este trabalho trata do desenvolvimento, implementação e análise de controladores adaptativos $\mathcal{H}_\infty$ não-lineares atuando sobre um manipulador espacial de base livre flutuante visando atenuar os efeitos de incertezas paramétricas e perturbações

externas. Dois tipos de controle de movimento são considerados. O primeiro é desenvolvido no espaço das juntas e realiza o comando direto de posicionamento das juntas do manipulador; o segundo é desenvolvido no espaço Cartesiano e o controle é direcionado para o posicionamento do efetuador no espaço inercial. Utilizando o conceito do Manipulador Dinamicamente Equivalente, e técnicas de controle para manipuladores subatuados (SIQUEIRA & TERRA (2004)), estende-se o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos diferenciais, apresentado em (CHEN et al. (1994)), para robôs manipuladores com base livre flutuante. Essa estratégia é utilizada como base de comparação. Da mesma forma, considera-se os controladores adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear (CHEN et al. (1997)) e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais (CHANG & CHEN (1997)). O controlador adaptativo baseado em redes neurais é abordado de duas formas: 1) as redes neurais são utilizadas para estimar o modelo completo do manipulador e 2) somente os distúrbios e a dinâmica da base espacial são estimados pelas redes neurais. Esse último procedimento é bastante interessante, pois os parâmetros nominais são completamente conhecidos.

A seqüência desta dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta a modelagem matemática para robôs manipuladores de base fixa e robôs manipuladores espaciais, assim como os conceitos de equivalência cinemática e dinâmica para esses sistemas; o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear nas três técnicas que são aplicadas: controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais, é apresentado no Capítulo 2 abordando as formulações para o espaço das juntas e para o espaço inercial; o Capítulo 3 apresenta a extensão dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ para aplicação no robô manipulador espacial; e, finalmente, resultados experimentais para um manipulador espacial de base livre flutuante com dois elos são mostrados no Capítulo 4.

Capítulo 1

Modelagem de Manipuladores

Robóticos

Um braço robótico ou manipulador é composto por um conjunto de juntas separadas entre si por elos. Neste trabalho, assume-se que o manipulador efetuará movimentos suficientemente lentos tais que a flexibilidade de seus elos e juntas pode ser desconsiderada e, portanto, admite-se que os manipuladores são compostos por corpos rígidos. As massas desses corpos rígidos são invariantes no tempo, e a posição do centro de massa de cada corpo é fixa. Dessa forma, o sistema pode ser representado por um conjunto de corpos rígidos conectados, (VAFA & DUBOWSKY (1990)), como na Figura 1.1. O espaço de trabalho do manipulador é dado pelo volume total varrido pelo efetuador quando o robô executar todos os movimentos possíveis.

Considerando o desenvolvimento de técnicas de controle, é necessário, a princípio, um modelo matemático que represente o comportamento dinâmico do sistema. Nesse Capítulo são deduzidas as equações dinâmicas de movimento para robôs manipuladores de base fixa

Figura 1.1: Manipulador espacial e seu modelo de corpos rígidos

e robôs manipuladores espaciais. São apresentados também os conceitos que relacionam as duas modelagens e que são utilizados no desenvolvimento do trabalho proposto.

1.1 Manipulador de Base Fixa

Considere um manipulador rígido, de base fixa, composto por n elos. Cada elo é relacionado a um eixo de coordenadas, Eixo 1, $\dots$, n , como na Figura 1.2, e a origem do eixo de coordenadas inercial (Eixo 0) é definida em J_1 . O i -ésimo elo, representado pelo vetor W_i , conecta as juntas J_i e J_{i+1} , C_i representa seu centro de massa e o vetor l_{ci} conecta J_i a C_i , Figura 1.3.

Pela representação de Denavit-Hartenberg a configuração geométrica de um manipulador robótico com n elos pode ser determinada por n variáveis. Sejam estas variáveis as entradas de um vetor coluna $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ definidas por coordenadas generali-

Figura 1.2: Manipulador de base fixa com n elos

zadas. A equação de Lagrange fornece as equações dinâmicas do movimento:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right), \quad (1.1)$$

sendo $\tau \in \mathbb{R}^n$ o vetor de forças generalizadas exercidas sobre as juntas relacionadas às coordenadas generalizadas q , e $L(q, \dot{q})$ o Lagrangiano do sistema definido por

$$L(q, \dot{q}) =: K(q, \dot{q}) - U(q), \quad (1.2)$$

com $K(q, \dot{q})$ sendo a energia cinética do sistema e $U(q)$ a energia potencial.

Sejam m_i a massa, v_i a velocidade linear do centro de massa, ω_i a velocidade angular do centro de massa e I_i o tensor de inércia do i -ésimo elo do manipulador e R_i^0 a matriz de rotação do eixo de coordenadas sobre o centro de massa do i -ésimo elo, Eixo i , em

Figura 1.3: Parâmetros do manipulador de base fixa

relação ao eixo de coordenadas inercial, Eixo 0. Para sistemas robóticos rígidos, a energia cinética

$$K(q, \dot{q}) =: \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i^0 I_i R_i^{0T} \omega_i \right), \quad (1.3)$$

é uma função quadrática do vetor $\dot{q}$ na forma

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left(m_i J_{v_i}^T(q) J_{v_i}(q) + J_{\omega_i^0}^T(q) R_i^0 I_i R_i^{0T} J_{\omega_i^0}(q) \right) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (1.4)$$

sendo J_{v_i} a Jacobiana entre as velocidades das coordenadas das juntas e a velocidade do centro de massa do elo i e $J_{\omega_i^0}$ a Jacobiana entre as velocidades das coordenadas das juntas e a velocidade angular do elo i , ou seja,

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v_i}(q) \\ J_{\omega_i^0}(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_i(q) \dot{q}. \quad (1.5)$$

Assim, as equações de movimento para tais sistemas vêm de (1.1) como

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (K(q, \dot{q}) - U(q)) - \frac{\partial}{\partial q} (K(q, \dot{q}) - U(q)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \\
 &= [M(q)\ddot{q}] + \left[\dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{q}^T M(q) \dot{q})}{\partial q} \right] + \left[\frac{\partial U(q)}{\partial q} \right] \\
 \tau &= M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

com

$$\begin{aligned}
 h(q, \dot{q}) &= \left[\dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{q}^T M(q) \dot{q})}{\partial q} \right], \\
 G(q) &= \left[\frac{\partial U(q)}{\partial q} \right].
 \end{aligned}$$

A matriz simétrica definida positiva $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é denominada matriz de inércia. O vetor $h(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é composto pelas forças de Coriolis e centrípetas e o vetor $G(q) \in \mathbb{R}^n$ expressa as forças gravitacionais. As coordenadas generalizadas das juntas, q_i , podem ser ângulos (θ_i , no caso de junta rotacional), ou deslocamentos (d_i , no caso de junta prismática). As forças generalizadas, τ_i , são os torques e forças aplicados às juntas.

Pode-se escrever o vetor das forças de Coriolis na forma

$$h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q}, \tag{1.7}$$

tal que a matriz

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (1.8)$$

seja anti-simétrica, (JOHANSSON (1990)).

Uma característica interessante para o controle de manipuladores é a propriedade de parametrização linear da equação dinâmica, ou seja, é possível encontrar uma matriz $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, chamada matriz de regressão, tal que:

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta, \quad (1.9)$$

sendo $\theta \in \mathbb{R}^m$ um vetor de parâmetros do manipulador.

1.2 Manipulador Espacial

Considere um manipulador rígido com n elos montado sobre uma base livre flutuante. A combinação base-manipulador forma o sistema manipulador espacial (ME), com $n + 1$ corpos rígidos conectados por n juntas. Admitindo que nenhuma força ou torque externo atuem no sistema, o centro de massa C'_0 do ME mantém-se fixo no espaço inercial e pode ser selecionado como a origem do eixo de coordenadas inercial (Eixo $0'$), Figura 1.4. O elo 1 refere-se à base, o manipulador é composto pelos elos 2 até $n + 1$, e a junta conectando os elos $i - 1$ e i é J'_i . O centro de massa do i -ésimo corpo é referenciado C'_i , e os vetores L_i e R_i conectam J'_i a C'_i e C'_i a J'_{i+1} , respectivamente. A base do manipulador espacial é considerada um único corpo rígido, cuja massa não precisa ser necessariamente muito maior comparada com as massas do manipulador.

Considerando que o Lagrangiano de um sistema manipulador espacial é igual somente

Figura 1.4: Manipulador espacial com n elos

à sua energia cinética, admitindo que o sistema não apresenta componentes flexíveis e não atua sob a ação de forças gravitacionais, a equação de Lagrange pode ser escrita como em (1.1), com $\tau'_i = [0 \quad \tau'_2 \quad \dots \quad \tau'_{n+1}]^T$ para o caso do manipulador espacial com base livre flutuante. A energia cinética total do sistema manipulador espacial é dada também por (1.3)-(1.4), e assim, o modelo dinâmico do ME é dado por

$$M'(q')\ddot{q}' + h'(q', \dot{q}') = \tau'. \quad (1.10)$$

A matriz de inércia $M'(q')$ é simétrica definida positiva e depende somente dos parâmetros físicos do sistema e das variáveis relacionadas às juntas do manipulador, q'_i ($i = 2, \dots, n+1$). Sendo assim, a matriz de inércia $M'(q')$ apresenta as mesmas características estruturais da matriz de inércia $M(q)$ correspondente a um manipulador de base fixa. O vetor $h'(q', \dot{q}')$ contém as forças de Coriolis e centrípetas. É interessante ressaltar que as variáveis relacionadas ao posicionamento e à orientação da base espacial não aparecem na equação

Figura 1.5: Parâmetros do manipulador espacial

dinâmica (1.10). Esse resultado vem do fato de a energia cinética do sistema, $K'(q', \dot{q}')$, não depender da orientação da base espacial para o cálculo das velocidades linear ou angular quando o momento angular inicial é nulo e o sistema está livre de forças ou torque externos. A contribuição da base espacial à energia cinética do sistema entra através da massa m'_1 e do tensor de inércia I'_1 , (PAPADOPOULOS & DUBOWSKY (1991)).

1.3 Manipulador Virtual

(VAFA & DUBOWSKY (1990)) desenvolveram um método analítico de modelagem para manipuladores espaciais chamado *Manipulador Virtual* (MV). O MV é uma cadeia cinemática ideal que parte de uma base, a *Base Virtual*, e se conecta a um ponto arbitrário no manipulador real. A *Base Virtual* é definida no centro de massa do sistema do manipulador real. No caso em que forças externas não atuam no sistema é possível selecionar um eixo de coordenadas inercial no qual o centro de massa do ME é estacionário.

Nesses casos, refere-se à *Base Virtual* como *Terra Virtual*. O *Terra Virtual* se mantém estacionário neste eixo inercial durante os movimentos do manipulador e de atuação das forças internas do sistema. Quando o manipulador real se move, a extremidade do MV se mantém coincidente com o ponto selecionado no manipulador real, e sua base se mantém fixa no *Terra Virtual*, Figura 1.6. Assim, o MV permite a representação de um manipulador com base livre flutuante através de um sistema fixo mais simples, possibilitando a aplicação de algoritmos de controle desenvolvidos para robôs manipuladores de base fixa.

Figura 1.6: Manipulador espacial e o Manipulador Virtual correspondente

A partir de (VAFA & DUBOWSKY (1990)) e (DUBOWSKY & PAPADOPOULOS (1993)), foi desenvolvida neste trabalho a construção analítica do Manipulador Virtual apresentada em (LIANG et al. (1996)). Seja um robô manipulador espacial com $n+1 = N$ corpos rígidos, Figura 1.4. O vetor $L_1 = 0$, visto que a junta J_1 do MV é referente ao centro de massa, C'_1 , da base do robô espacial. O vetor R_N conecta C'_N ao efetuador, Figura 1.5.

Considerando (LIANG et al. (1996)), seja H_k o MV cuja extremidade esteja ligado ao

centro de massa do k -ésimo elo, C'_k , do ME:

$$H_k = \begin{bmatrix} H_k(1) \\ H_k(2) \\ \dots \\ H_k(N) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

sendo que cada componente de H_k é definida por

$$\begin{aligned} H_k(j) &= r_j + l_j & 1 < j < k, \\ H_k(j) &= r_k + l_k - R_k & j = k, \\ H_k(j) &= r_j + l_j - R_j - L_j & j > k, \end{aligned} \quad (1.12)$$

com

$$r_i = R_i \sum_{p=1}^i m'_p / M'_t, \quad (1.13)$$

$$l_i = L_i \sum_{p=1}^{i-1} m'_p / M'_t, \quad (1.14)$$

$$M'_t = \sum_{p=1}^N m'_p. \quad (1.15)$$

O primeiro elo do MV corresponde à base do ME, e sua orientação é correspondente à orientação da base. Esse elo é conectado ao *Terra Virtual* através de uma junta esférica J_1 que permite as três rotações em relação ao espaço inercial. A i -ésima junta do MV será rotacional ou prismática de acordo com a i -ésima junta, J'_i , do manipulador espacial real. Os deslocamentos das juntas do manipulador real e os deslocamentos das juntas do MV são idênticos para juntas rotacionais, $\theta_i = \theta'_i$, e apresentam uma relação bem simples

para juntas prismáticas:

$$d_i = d'_i \sum_{p=1}^{i-1} m'_p / M'_t.$$

O eixo de rotação P_i de uma junta rotacional é paralelo ao eixo da respectiva junta no ME. Da mesma forma, o eixo de translação P_i das juntas prismáticas no MV são paralelas aos eixos das correspondentes juntas prismáticas no ME. Estas propriedades permitem que os movimentos de um manipulador espacial sejam descritos pelos movimentos de uma representação de Manipulador Virtual que tem sua base no *Terra Virtual*. Com sua base fixa, o MV pode ser usado para simplificar a cinemática inversa do manipulador de base livre flutuante, calcular seu espaço de trabalho, auxiliar na análise de planejamento de trajetória, na síntese do projeto de controle, e na formulação das equações de movimento.

Um MV construído como modelo de um manipulador espacial, com extremidade coincidente com o centro de massa do último elo, N , é descrito por:

$$H'_N = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 + l_2 & \cdots & r_i + l_i & \cdots & r_N + l_N - R_N \end{bmatrix}^T. \quad (1.16)$$

1.4 Manipulador Dinamicamente Equivalente

O conceito do *Manipulador Dinamicamente Equivalente* (MDE) proposto em (LIANG et al. (1996)) vai além do conceito do MV no sentido em que representa um manipulador espacial tanto do ponto de vista cinemático quanto dinâmico. O MDE é um robô manipulador de base fixa que pode ser fisicamente construído e experimentalmente utilizado para estudo do comportamento dinâmico de um ME. A dinâmica do MDE sob ação de qualquer lei de controle mapeia a dinâmica de um ME de forma idêntica, possibilitando

um entendimento completo do comportamento de um manipulador espacial e sua base através de experimentos com um robô de base fixa convencional.

Seja um manipulador de base fixa, com primeira junta esférica e passiva (sem atuação), com extremidade coincidente com o centro de massa do último elo, N , descrito por:

$$H_N = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_i & \cdots & l_{cN} \end{bmatrix}^T. \quad (1.17)$$

As matrizes das equações dinâmicas e as Jacobianas de um manipulador espacial com base livre flutuante e de um manipulador de base fixa convencional apresentam a mesma estrutura, isto é, são de mesma ordem, apresentam as mesmas propriedades simétricas e dependem das mesmas variáveis. Comparando os modelos dinâmicos de um ME e de um manipulador de base fixa com uma junta esférica passiva na base, de (LIANG et al. (1996)) foram obtidas as condições para equivalência cinemática e dinâmica entre o MDE e o ME, Figura 1.7.

Figura 1.7: ME e seu respectivo MDE

1.4.1 Equivalência Cinemática

Os eixos de coordenadas do MDE são paralelos aos correspondentes eixos de coordenadas do ME, e sua base é coincidente com o centro de massa total do ME. Conseqüentemente, o MDE pode ser representado por um MV cuja extremidade coincide com o centro de massa do elo N do ME e, portanto herda todas as suas boas propriedades. Sendo $R_i^{0'}$ a matriz de rotação do eixo de coordenadas sobre o centro de massa do i -ésimo elo do MDE em relação ao eixo de coordenadas inercial do ME, matematicamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} q' &= q, \\ \omega' &= \omega, \\ R_i^{0'} &= R_i^{0'} = R_i^0, \\ P_i' &= P_i, \\ J_{vN}' &= J_{vN}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Além disso, considerando (1.16) e (1.17), temos a condição:

$$H_N' = H_N \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} W_1 = r_1, \\ W_i = r_i + l_i, \quad 1 < i < N, \\ l_{cN} = l_N. \end{cases} \tag{1.19}$$

1.4.2 Equivalência Dinâmica

Para estabelecer a equivalência dinâmica entre o MDE e o ME, (LIANG et al. (1996)) analisaram separadamente as contribuições das componentes linear e angular da energia cinética no Lagrangiano dos sistemas. Admite-se que o MDE opera no mesmo ambiente

que o ME, ou seja, na ausência de gravidade, e, portanto, a energia potencial do sistema do manipulador de base fixa é nula e o Lagrangiano do MDE é também igual somente à energia cinética. A energia total do ME é dada por

$$L'(q', \dot{q}') = K'(q', \dot{q}') = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m'_i v_i'^T v'_i + \frac{1}{2} \omega_i'^T R_i'^0 I'_i R_i'^{0T} \omega'_i \right). \quad (1.20)$$

A energia total do MDE é dada por

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i^0 I_i R_i^{0T} \omega_i \right). \quad (1.21)$$

Recorrendo às propriedades da equivalência cinemática citadas na seção anterior e ao fato de $I'_i = I_i$, é simples verificar que as componentes angulares são idênticas:

$$\frac{1}{2} \omega_i'^T R_i'^0 I'_i R_i'^{0T} \omega'_i = \frac{1}{2} \omega_i^T R_i^0 I_i R_i^{0T} \omega_i.$$

Considerando que o centro de massa do *i-ésimo* elo do ME está sobre a reta que conecta as juntas J'_i e J'_{i+1} , então os vetores r_i , l_i , R_i e L_i , no ME, e W_i e l_{ci} , no MDE, são colineares e, portanto, a norma de H'_i , $\|H'_i\|$, é igual à soma das magnitudes das parcelas em (1.16) e a norma de H_i , $\|H_i\|$, é igual à magnitude dos vetores em (1.17). Assim, resta

considerar a componente linear das energias cinéticas, K'_l e K_l , dadas por

$$\begin{aligned} K'_l &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m'_i v_i'^T v'_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^T v_i \right) = K_l, \\ K'_l &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m'_i \sum_{k=1}^3 J'_{hk} H'_i H_i'^T J_{hk}'^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{k=1}^3 J_{hk} H_i H_i^T J_{hk}^T = K_l, \\ K'_l &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 J'_{hk} E'_l J_{hk}'^T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 J_{hk} E_l J_{hk}^T = K_l. \end{aligned}$$

Da equivalência cinemática $J'_h = J_h$, então, para estabelecer a equivalência dinâmica, as matrizes simétricas E'_l e E_l devem ser idênticas:

$$E'_l = \sum_{i=1}^N m'_i H'_i H_i'^T = \sum_{i=1}^N m_i H_i H_i^T = E_l. \quad (1.22)$$

Sendo assim, a equivalência cinemática e dinâmica entre o MDE e o ME é assegurada sob as seguintes condições:

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{M_t'^2 m'_i}{\sum_{k=1}^{i-1} m'_k \sum_{k=1}^i m'_k}, \quad i = 2, \dots, N, \\ I_i &= I'_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ W_1 &= r_1, \\ W_i &= r_i + l_i, \quad i = 2, \dots, N, \\ l_{c1} &= 0, \\ l_{ci} &= l_i, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.23)$$

É interessante observar que essa equivalência não depende do valor da massa do primeiro elo do MDE, m_1 .

Sob o ponto de vista contrário, os parâmetros do ME que asseguram a equivalência

com o MDE, dada a massa total do manipulador espacial, são dados por

$$\begin{aligned}
m'_1 &= \frac{M_t'^2}{M_t' + \sum_{k=2}^N m_k}, \\
m'_i &= \frac{M_t'^2 m_i}{\left(M_t' + \sum_{k=1}^N m_k\right) \left(M_t' + \sum_{k=i+1}^N m_k\right)}, \quad i = 2, \dots, N-1, \\
m'_N &= \frac{M_t' m_N}{M_t' + m_N}, \\
I'_i &= I_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
R_i &= (W_i - l_{ci}) \frac{M_t' + \sum_{k=i+1}^N m_k}{M_t'}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\
R_N &= (W_N - l_{cN}), \\
L_i &= l_{ci} \frac{M_t' + \sum_{k=i}^N m_k}{M_t'}, \quad i = 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

1.5 Manipulador Subatuado

Robôs manipuladores subatuados são sistemas mecânicos com menos atuadores do que graus de liberdade. Por esta razão, o controle de posição das juntas passivas é feito com base no acoplamento dinâmico entre elas e as juntas ativas (SIQUEIRA & TERRA (2004)). Isto significa que o movimento das juntas ativas afeta a dinâmica das juntas passivas, e assim, é possível obter um comportamento desejado para as juntas passivas atuando somente sobre as juntas ativas. O MDE descrito na seção anterior é um manipulador subatuado, pois apresenta a primeira junta passiva, referente à base do manipulador espacial.

Considere um manipulador subatuado com n juntas e seja q o vetor de coordenadas generalizadas. Para analisar as características cinemáticas e dinâmicas do manipulador, divide-se o vetor q em três componentes, referentes às posições das juntas atuadas (juntas ativas), q_a , às posições das juntas subatuadas que não estão freiadas (juntas passivas), q_u ,

e às posições das juntas subatuadas freiadas (juntas freiadas), q_l , na forma

$$q = \begin{bmatrix} q_a^T & q_u^T & q_l^T \end{bmatrix}^T.$$

O modelo dinâmico de um manipulador subatuado também pode ser particionado para refletir as contribuições de cada tipo de junta (ativa, passiva ou freiada) ao movimento:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_u \\ \tau_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} & M_{al} \\ M_{ua} & M_{uu} & M_{ul} \\ M_{la} & M_{lu} & M_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \\ b_l \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

com $b = h(q, \dot{q}) + G(q)$.

Observando que $\tau_u = 0$, pois não existem torques aplicados às juntas passivas, e $\ddot{q}_l = 0$, pois as juntas freiadas não se movem, a equação (1.24) pode ser simplificada como

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} \\ M_{ua} & M_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

A segunda linha de (1.25) representa uma restrição não holonômica que, em geral, não pode ser integrada para gerar uma relação entre as velocidades ou posições das juntas ativas e passivas:

$$M_{ua}\ddot{q}_a + M_{uu}\ddot{q}_u + b_u = 0. \quad (1.26)$$

Oriolo e Nakamura¹ *apud* (BERGERMAN et al. (2000)), provaram que a equação

¹ ORIOLO, G.; NAKAMURA, Y. (1991). Free-joint Manipulators: motion control under second-order nonholonomic constraints. *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, p.1248-1253.

(1.26) é integrável para a forma $f(\dot{q}, q, t) = 0$ se e somente se a matriz $M(q)$ não depender de q_u e se os torques gravitacionais atuando nas juntas passivas forem constantes.

Isolando $\ddot{q}_a$ em (1.26) e substituindo o resultado na primeira linha de (1.25), obtém-se

$$\tau_a = (M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu})\ddot{q}_u - M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a, \quad (1.27)$$

sendo $\ddot{q}_u$ a aceleração necessária nas juntas passivas obtida através da aplicação de torque nas juntas ativas, τ_a .

Neste trabalho, no entanto, ao considerarmos um manipulador com base livre flutuante, não temos o intuito de controlar a junta passiva, no caso J_1 no MDE referente à base espacial no ME, mas sim o objetivo de controlar as juntas do manipulador (ativas). Porém, devemos considerar o efeito dinâmico da base livre flutuante no movimento do manipulador espacial. Dessa forma, isolamos $\ddot{q}_u$ em (1.26) e substituímos o resultado na primeira linha de (1.25) para obter

$$\tau_a = (M_{aa} - M_{au}M_{uu}^{-1}M_{ua})\ddot{q}_a - M_{au}M_{uu}^{-1}b_u + b_a, \quad (1.28)$$

sendo $(-M_{au}M_{uu}^{-1}b_u + b_a)$ a interferência do movimento da base, o qual é gerado pelo movimento do manipulador, no movimento do manipulador.

Capítulo 2

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

Em sistemas robóticos reais os parâmetros do sistema dificilmente são conhecidos com exatidão (por exemplo, a carga pode variar de acordo com a tarefa realizada, os coeficientes de atrito podem ser diferentes para diferentes configurações, algumas não-linearidades desprezadas na modelagem podem interferir na entrada de controle, etc), gerando interferências imprevisíveis no manipulador. Dessa forma, é necessário considerar esses efeitos devido a incertezas paramétricas e perturbações externas. Existem basicamente duas estratégias para o controle de sistemas incertos: controle adaptativo e controle robusto. Controladores adaptativos com leis de adaptação de parâmetros tentam estimar e compensar as dinâmicas não-modeladas do sistema. Por outro lado, a abordagem do controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo tem sido amplamente discutida tanto por sua robustez de estabilidade quanto por sua capacidade de atenuação de distúrbios.

Este capítulo apresenta na Seção 2.1 a formulação do problema em espaço de estados para dois tipos de controle de movimento: no espaço das juntas e no espaço inercial. O desenvolvimento da técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear proposta em (CHEN et al. (1994))

é apresentada na Seção 2.2 e suas derivações adaptativas baseadas na parametrização linear e em redes neurais nas Seções 2.3 e 2.4, respectivamente.

2.1 Formulação do Problema

O modelo dinâmico de um manipulador de base fixa totalmente atuado é dado em (1.6). Incertezas paramétricas são inseridas no modelo dividindo as matrizes $M(q)$, $h(q, \dot{q})$ e $G(q)$ em uma parte nominal e uma parte com perturbação:

$$\begin{aligned} M(q) &= M_0(q) + \Delta M(q), \\ h(q, \dot{q}) &= h_0(q, \dot{q}) + \Delta h(q, \dot{q}), \\ G(q) &= G_0(q) + \Delta G(q), \end{aligned}$$

sendo $M_0(q)$, $h_0(q, \dot{q})$ e $G_0(q)$ as matrizes nominais, e $\Delta M(q)$, $\Delta h(q, \dot{q})$ e $\Delta G(q)$ as incertezas paramétricas. Um distúrbio finito externo, τ_d , pode também ser introduzido. Assim, a equação (1.6) passa a ser:

$$\tau + \delta = M_0(q)\ddot{q} + h_0(q, \dot{q}) + G_0(q), \quad (2.1)$$

com

$$\delta = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta h(q, \dot{q}) + \Delta G(q) - \tau_d).$$

Nessa formulação, os efeitos das incertezas paramétricas e dos distúrbios externos são agrupados sob o ponto de vista de que as incertezas paramétricas atuam como perturbações internas.

2.1.1 Espaço das Juntas

Sejam q^d e $\dot{q}^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada e a velocidade correspondente, respectivamente. O vetor de estados é definido como o erro de acompanhamento da trajetória:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}^d \\ q - q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Admite-se que as variáveis q^d , $\dot{q}^d$ e $\ddot{q}^d$, com a última sendo a aceleração desejada, estão dentro dos limites físicos do objeto controlado.

Com o objetivo de eliminar redundâncias, mas mantendo a ordem do sistema no espaço de estados, define-se a seguinte transformação de estado, (JOHANSSON (1990)):

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

sendo T_{11} e $T_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes a serem determinadas. Assume-se que T_{11} é diagonal, ou seja, $T_{11} = t_{11}I$ e que $h(q, \dot{q})$ está na forma dada pela equação (1.7). Como o considerado neste trabalho é o desempenho do erro de acompanhamento de trajetória $\tilde{x}$, a equação dinâmica do erro modificada por (2.3) se torna:

$$\dot{\tilde{z}} = T_0^{-1} \dot{\tilde{z}} = A_T(q, \dot{q}) \tilde{x} + B_T(q) T_{11} (-F(x_e) + \tau) + B_T(q) w, \quad (2.4)$$

com

$$A_T(q, \dot{q}) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C_0(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0,$$

$$B_T(q) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_0^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w = T_{11}\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d),$$

$$x_e = [q^T \ \dot{q}^T \ (q^d)^T \ (\dot{q}^d)^T \ (\ddot{q}^d)^T]^T,$$

e

$$F(x_e) = M_0(q)(\ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}) + C_0(q, \dot{q})(\dot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}) + G_0(q). \quad (2.5)$$

A entrada de controle é escolhida como $u = T_{11}(-F(x_e) + \tau)$, um torque aplicado seletivo que afeta somente a energia cinética, (CHEN et al. (1994)). Considerando que as matrizes paramétricas $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$ e $G_0(q)$ são bem conhecidas e disponíveis, é possível calcular exatamente o termo $F(x_e)$ e aplicar a lei de controle

$$\tau = F(x_e) + T_{11}^{-1}u. \quad (2.6)$$

De outra forma, a relação entre os torques aplicados nas juntas e a entrada de controle também pode ser dada por:

$$\tau = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + G_0(q) \quad (2.7)$$

com

$$\ddot{q} = \ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}} - T_{11}^{-1}M_0^{-1}(C_0B^T T_0\tilde{x} - u), \quad (2.8)$$

sendo $B = [I \ 0]^T$. As equações acima apresentam um tipo de linearização por re-

alimentação de estados, contendo um termo não linear na aceleração de controle (2.8), (SIQUEIRA (2004)).

2.1.2 Espaço Inercial

A posição e a orientação inercial do efetuador de um manipulador robótico, $p = [x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef} \ \theta_{ef} \ \phi_{ef} \ \psi_{ef}]^T$, é função das coordenadas generalizadas de suas juntas, q . Seja $J_N(q)$ a matriz Jacobiana dada em (1.5) que relaciona as velocidades das coordenadas das juntas, $\dot{q}$, e a velocidades linear e angular do efetuador, $\dot{p}$, admitindo que o centro de massa do N -ésimo elo, C_N , está localizado no efetuador. Aplicando (1.5) e sua respectiva derivada, $\ddot{p} = \dot{J}_N(q)\dot{q} + J_N(q)\ddot{q}$, em (1.6), obtém-se a equação dinâmica para o controle do movimento no espaço inercial:

$$\tau = M_{ef}(q)\ddot{p} + C_{ef}(q, \dot{q})\dot{p} + G_0(q), \quad (2.9)$$

com

$$M_{ef}(q) = M(q)J_N^{-1}(q),$$

$$C_{ef}(q, \dot{q}) = (C(q, \dot{q}) - M(q)J_N^{-1}(q)\dot{J}_N(q, \dot{q}))J_N^{-1}(q).$$

No entanto, a matriz $M_{ef}(q)$ não é simétrica definida positiva e a matriz $N_{ef}(q, \dot{q}) = \dot{M}_{ef}(q, \dot{q}) - 2C_{ef}(q, \dot{q})$ não é anti-simétrica. Para que a equação dinâmica do sistema no espaço inercial preserve as características da dinâmica formulada no espaço das juntas, uma transformação de forças é aplicada a (2.9), (LEWIS et al. (1993)):

$$F = J_N^{-T}(q)\tau,$$

sendo F o vetor de forças generalizadas do efetuador no espaço inercial. Portanto,

$$F = \bar{M}_{ef}(q)\ddot{p} + \bar{C}_{ef}(q, \dot{q})\dot{p} + \bar{G}_{ef}(q), \quad (2.10)$$

com

$$\bar{M}_{ef}(q) = J_N^{-T}(q)M_{ef}(q) = J_N^{-T}(q)M(q_m)J_N^{-1}(q),$$

$$\bar{C}_{ef}(q, \dot{q}) = J_N^{-T}(q)C_{ef}(q, \dot{q}) = J_N^{-T}(q)(C(q_m, \dot{q}) - M(q_m)J_N^{-1}(q)\dot{J}_N(q, \dot{q}))J_N^{-1}(q),$$

$$\bar{G}_{ef}(q) = J_N^{-T}(q)G_0(q).$$

Nesse formato a equação dinâmica do sistema formulada no espaço inercial mantém a estrutura e as propriedades encontradas no espaço das juntas. A matriz $\bar{M}_{ef}(q)$ é simétrica definida positiva e a matriz $\bar{N}_{ef}(q, \dot{q}) = \dot{\bar{M}}_{ef}(q, \dot{q}) - 2\bar{C}_{ef}(q, \dot{q})$ é anti-simétrica.

A lei de controle fornecerá o valor necessário de $\ddot{p}$ para o acompanhamento da trajetória desejada no espaço inercial. Aplicando a inversa da transformação de força obtemos o valor dos torques nas juntas do manipulador na forma:

$$\tau = J_N^T(q)F. \quad (2.11)$$

Sejam p^d e $\dot{p}^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada e a correspondente velocidade para o efetuador, respectivamente. Admite-se que as variáveis p^d , $\dot{p}^d$, e $\ddot{p}^d$, a aceleração desejada, fazem parte da região do espaço de trabalho do manipulador, ou seja, estão dentro de seus limites físicos e cinéticos e que $\det(J_N(q)) \neq 0$ durante todo o caminho

percorrido evitando qualquer singularidade. O erro de acompanhamento é definido por

$$\tilde{x} = \tilde{x}_{ef} = \begin{bmatrix} \dot{p} - \dot{p}^d \\ p - p^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

e, considerando a inserção de distúrbios, $\delta_{ef} = -(\Delta\bar{M}_{ef}(q)\ddot{p} + \Delta\bar{C}_{ef}(q, \dot{q})\dot{p} + \Delta\bar{G}_{ef}(q) - \tau_d)$, no modelo e a transformação (2.3) aplicada a $\tilde{x}_{ef}$, a representação em espaço de estado para o controle no espaço inercial é dada por

$$\dot{\tilde{x}} = T_0^{-1}\dot{\tilde{z}} = A_T(q, \dot{q})\tilde{x} + B_T(q)T_{11}(-F(x_e) + F) + B_T(q)w, \quad (2.13)$$

com

$$\begin{aligned} A_T(q, \dot{q}) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{M}_{ef}^{-1}(q)\bar{C}_{ef}(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\ B_T(q) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} \bar{M}_{ef}^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w &= T_{11}\delta_{ef}(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d), \\ x_e = x_{ef} &= [q^T \ \dot{q}^T \ p^T \ \dot{p}^T \ (p^d)^T \ (\dot{p}^d)^T \ (\ddot{p}^d)^T]^T, \end{aligned}$$

e

$$F(x_e) = \bar{M}_{ef}(q)(\ddot{p}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}) + \bar{C}_{ef}(q, \dot{q})(\dot{p}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{p}) + \bar{G}_{ef}(q). \quad (2.14)$$

A entrada de controle é escolhida como $u = T_{11}(-F(x_e) + F)$. Considerando que as matrizes paramétricas $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $G_0(q)$ e $J_{N_0}(q)$ são bem conhecidas e disponíveis, é possível calcular exatamente o termo $F(x_e)$ e aplicar a lei de controle

$$F = F(x_e) + T_{11}^{-1}u. \quad (2.15)$$

De outra forma, a relação entre as forças aplicadas no efetuador e a entrada de controle também pode ser dada por:

$$F = \bar{M}_{ef}(q)\ddot{p} + \bar{C}_{ef}(q, \dot{q})\dot{p} + \bar{G}_{ef}(q), \quad (2.16)$$

com

$$\ddot{p} = \ddot{p}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}} - T_{11}^{-1}\bar{M}_{ef}^{-1}(q)(\bar{C}_{ef}(q, \dot{q})B^T T_0 \tilde{x} - u). \quad (2.17)$$

2.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear (Teoria dos Jogos)

A teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear de robôs manipuladores totalmente atuados apresentada nesta seção é fundamentada em (CHEN et al. (1994)). Nesta abordagem, o problema $\mathcal{H}_\infty$ de atenuação de distúrbios é transformado em um problema não linear de controle de custo sujeito a uma restrição *minimax*. A teoria dos jogos diferenciais é utilizada para tratar o problema *minimax* através da solução de uma equação de Bellman-Isaacs, levando a uma condição suficiente para a solução do problema de controle baseado em modelo com desejado nível de atenuação de distúrbios. A estratégia proporciona uma solução ótima para o problema de acompanhamento de trajetória na ausência de perturbações, além de ser capaz de limitar o efeito do pior caso de perturbação durante o acompanhamento de trajetória a um nível desejado γ .

Considera-se nesta seção que o termo $F(x_e)$ é bem determinado e está disponível para o controle. Os efeitos do distúrbio combinado no sistema, w , devem ser minimizados pela estratégia de controle $\mathcal{H}_\infty$ através de uma realimentação de estado da forma $u = K(x)x$. Com essa intenção, e sujeito à dinâmica do erro de acompanhamento, o seguinte critério

de desempenho é proposto, (CHEN et al. (1994)):

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \max_{0 \neq w(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^T R u \right) dt}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} w^T w \right) dt} \leq \gamma^2, \quad (2.18)$$

sendo $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, $u = u(t)$ e $w = w(t)$, γ o nível desejado de atenuação dos distúrbios e $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$ e $P_0 = P_0^T > 0$ matrizes de ponderação.

De acordo com a teoria dos jogos, a solução do problema *minimax*, (2.18), é encontrada se existe uma função de Lyapunov contínua e diferenciável $V(\tilde{x}, t)$, que satisfaça a seguinte equação de Bellman-Isaacs:

$$-\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \min_{u(\cdot)} \max_{w(\cdot)} \left\{ L(\tilde{x}, u, w) + \left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{x} \right\},$$

com a condição final $V(\tilde{x}(\infty), \infty) = 0$ e sendo $L(\tilde{x}, u, w)$ o Lagrangiano dado por

$$L(\tilde{x}, u, w) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T(t) w(t).$$

Escolhendo a função de Lyapunov

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (2.19)$$

sendo $P(\tilde{x}, t)$ uma matriz simétrica positiva definida para todo $\tilde{x}$ e t , a equação de Bellman-Isaacs torna-se a seguinte equação de Riccati:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tilde{x}, t) + P(\tilde{x}, t) A_T(q, \dot{q}) + A_T^T(q, \dot{q}) P(\tilde{x}, t) + \\ - P(\tilde{x}, t) B_T(q) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B_T(q) P(\tilde{x}, t) + Q = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para que (2.20) satisfaça (2.18), a lei de controle ótima u^* e o pior caso de distúrbio w^* são dados por

$$u^* = -R^{-1}B_T^T(q)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}, \quad (2.21)$$

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2}B_T^T(q)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}. \quad (2.22)$$

Admitindo as condições, para o controle no espaço das juntas:

- $M_0(q)$ é simétrica definida positiva, e
- $N_0(q, \dot{q}) = \dot{M}_0(q, \dot{q}) - 2C_0(q, \dot{q})$ é anti-simétrica,

e, para o controle no espaço inercial:

- $\bar{M}_{ef}(q)$ é simétrica definida positiva, e
- $\bar{N}_{ef}(q, \dot{q}) = \dot{\bar{M}}_{ef}(q, \dot{q}) - 2\bar{C}_{ef}(q, \dot{q})$ é anti-simétrica,

com a escolha apropriada da matriz $P(\tilde{x}, t)$, a equação de Riccati pode ser simplificada para uma equação matricial algébrica. Considerando a transformação (2.3) envolvida no processo de otimização, a matriz $P(\tilde{x}, t)$ escolhida é dada por

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0(q) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0, \quad (2.23)$$

para o caso do controle no espaço das juntas (CHEN et al. (1994)), e por

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} \bar{M}_{ef}(q) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0. \quad (2.24)$$

para o caso do controle no espaço inercial. A matriz K é constante, simétrica e definida positiva representando a rigidez na oscilação em torno da posição de referência desejada, enquanto os termos $M_0(q)$ e $\bar{M}_{ef}(q)$ representam a energia cinética. Pode-se entender $V(\tilde{x}, t)$ dessa forma como uma função da energia total do estado $\tilde{x}$ no tempo t . A condição final $V(\tilde{x}(\infty), \infty) = 0$ também é satisfeita para esta escolha de $P(\tilde{x}, t)$, nos dois casos.

Assim, a lei de controle ótima u^* e o pior caso de distúrbio w^* podem ser reescritos

$$u^* = -R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}, \quad (2.25)$$

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T T_0 \tilde{x}. \quad (2.26)$$

Utilizando (2.23), a equação (2.20) torna-se a equação algébrica

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 + Q = 0. \quad (2.27)$$

O mesmo procedimento é válido para o controle no espaço inercial. Então, para resolver o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, deve-se encontrar matrizes K e T_0 que solucionem a equação (2.27).

Considerando a matriz Q simétrica definida positiva fatorada na forma

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

a equação (2.27) fornece quatro equações distintas:

$$Q_1^T Q_1 - T_{11}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{11} = 0, \quad (2.29)$$

$$K + Q_{12}^T - T_{12}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{11} = 0, \quad (2.30)$$

$$K + Q_{12} - T_{11}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{12} = 0, \quad (2.31)$$

$$Q_2^T Q_2 - T_{12}^T \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) T_{12} = 0. \quad (2.32)$$

Sendo R_1 o resultado da fatoração de Cholesky:

$$R_1^T R_1 = \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1}, \quad (2.33)$$

a solução da equação (2.27) é dada por:

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$K = \frac{1}{2} (Q_1^T Q_2 - Q_2^T Q_1) - \frac{1}{2} (Q_{21}^T + Q_{12}). \quad (2.35)$$

Como $Q_1^T Q_1$ e $Q_2^T Q_2$ são definidas positivas, de (2.29) e (2.32), a matriz $\left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)$ deve ser definida positiva, e portanto, $R < \gamma^2 I$. Observa-se que o valor de γ é limitado pela norma da matriz de ponderação da entrada de controle R , ou seja, um valor muito baixo de γ levará a um controle de alto ganho.

2.3 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos descrito acima assume que os valores das matrizes $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $G_0(q)$ e $J_{N_0}(q)$ estão disponíveis para o cálculo do termo $F(x_e)$, ou seja, os parâmetros nominais devem ser exatamente conhecidos. Porém, em muitas aplicações práticas, os valores de alguns parâmetros do sistema podem ser imprecisos ou desconhecidos.

A técnica apresentada nesta seção, fundamentada em (CHEN et al. (1997)), aplica a propriedade de parametrização linear de $F(x_e)$ para a obtenção de uma lei de controle adaptativa que estime os valores dos parâmetros desconhecidos (ou incertos) enquanto o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para atenuação de distúrbios envolve as perturbações não modeladas. Assim, o termo $F(x_e)$ definido na seção anterior pode ser expresso na seguinte forma:

$$F(x_e) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}^d - T_{11}T_{12}\ddot{q}, \ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}})\varphi \quad (2.36)$$

para o caso do controle adaptativo no espaço das juntas, e

$$F(x_e) = Y(q, \dot{q}, \ddot{p}^d - T_{11}T_{12}\ddot{p}, \ddot{p}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{p}})\varphi \quad (2.37)$$

para o caso do controle adaptativo no espaço inercial, sendo $Y \in \mathbb{R}^{n \times r}$ uma matriz de funções conhecidas e $\varphi \in \mathbb{R}^r$ um vetor com componentes incertos que dependem de parâmetros do manipulador.

Nesta seção será apresentada uma lei adaptativa de atualização dos parâmetros, com a intenção de aprender o comportamento dos parâmetros incertos. Dado um nível de atenuação γ , o problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ tem solução se existir um controlador

dinâmico de realimentação de estados

$$\dot{\hat{\varphi}} = \alpha(t, \tilde{x}), \quad (2.38)$$

$$\tau = \tau(t, \hat{\varphi}, \tilde{x}), \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.39)$$

$$F = F(t, \hat{\varphi}, \tilde{x}), \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.40)$$

tal que a malha fechada satisfaça os seguintes critérios, para qualquer condição inicial:

1) Atenuação de distúrbios:

$$\int_0^T (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u) dt \leq \tilde{x}^T(0) P_0 \tilde{x}(0) + \tilde{\varphi}^T(0) S_0 \tilde{\varphi}(0) + \gamma^2 \int_0^T (w^T w) dt \quad (2.41)$$

para $\forall w = w(t) \in \mathcal{L}_2[0, T]$ e matrizes $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$, $P_0 = P_0^T > 0$, e $S_0 = S_0^T > 0$, sendo que $\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}$ representa o erro de estimativa dos parâmetros.

2) Acompanhamento assintótico: Se o distúrbio for limitado e com energia finita, isto é, $w(t) \in \mathcal{L}_\infty[0, T] \cap \mathcal{L}_2[0, T]$, para todo $T \geq 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} [q(t) - q^d(t)] = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{q}(t) - \dot{q}^d(t)] = 0$ para o controle no espaço das juntas e $\lim_{t \rightarrow \infty} [p(t) - p^d(t)] = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{p}(t) - \dot{p}^d(t)] = 0$ para o controle no espaço inercial.

Utilizando a análise de estabilidade de Lyapunov verifica-se que o erro $\tilde{x}$ é assintoticamente estável com a escolha apropriada da lei de adaptação. Escolhendo a função de Lyapunov

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}^T S \tilde{\varphi},$$

com $P(\tilde{x}, t)$ sendo a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati (2.20) definida como em (2.23) ou (2.24), dependendo do caso, a solução do problema de controle

adaptativo, para qualquer matriz simétrica definida positiva S , é dada por

$$\dot{\hat{\varphi}} = -S^{-1}Y^T T_{11} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (2.42)$$

$$\tau = Y\hat{\varphi} - T_{11}^{-1} R^{-1} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.43)$$

$$F = Y\hat{\varphi} - T_{11}^{-1} R^{-1} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}. \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.44)$$

Como na Seção 2.2, uma solução simplificada pode ser dada para as equações (2.42) a (2.44) como função das matrizes soluções da equação algébrica (2.27):

$$\dot{\hat{\varphi}} = -S^{-1}Y^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}, \quad (2.45)$$

$$\tau = Y\hat{\varphi} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}, \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.46)$$

$$F = Y\hat{\varphi} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}. \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.47)$$

2.4 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais

A estratégia de controle apresentada na Seção 2.2 torna-se pouco eficiente se as incertezas do modelo são muito significativas. Por outro lado, o procedimento descrito na Seção 2.3 considera que os parâmetros são constantes ou variam lentamente. Além disso, para calcular a matriz de regressão $Y(\cdot)$, o modelo dinâmico do sistema deve representá-lo satisfatoriamente, exigindo também um conhecimento preciso da estrutura do modelo completo do robô. O cálculo da matriz de regressão consome bastante tempo computacional e dinâmicas não modeladas geralmente estão presentes, o que invalida a

parametrização linear. Uma abordagem envolvendo redes neurais artificiais oferece a vantagem de melhorar seu desempenho através de aprendizagem utilizando processamento paralelo e distribuído. Estas redes são implementadas através de massivas conexões entre unidades de processamento e são atrativas para diversas aplicações em identificação, processamento de sinais e controle. Há alguns anos, algoritmos de rede neural vêm sendo utilizados para solucionar problemas de controle altamente não lineares.

A técnica apresentada nesta seção, fundamentada em (CHANG & CHEN (1997)), introduz um sistema de redes neurais para aprender a dinâmica desconhecida (ou incerta) definida no termo $F(x_e) - \delta$ através de um algoritmo adaptativo, enquanto o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado para atenuar os efeitos do erro de aproximação do conjunto de redes neurais. Dessa forma, a lei de controle proposta é formada por duas partes. A primeira, o algoritmo adaptativo via redes neurais, pode ser visto como um ajuste grosseiro, e a segunda, o algoritmo de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear, um ajuste fino.

Considere a equação (2.4) escrita na forma

$$\dot{\tilde{x}} = A_T(q, \dot{q})\tilde{x} + B_T(q)T_{11}(\tau - F(x_e) + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)), \quad (2.48)$$

e a equação (2.13) na forma

$$\dot{\tilde{x}} = A_T(q, \dot{q})\tilde{x} + B_T(q)T_{11}(F - F(x_e) + \delta_{ef}(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d)). \quad (2.49)$$

Um conjunto de redes neurais, $F(x_e, \Theta)$, sendo Θ o vetor contendo os parâmetros ajustáveis da rede, é utilizado para aproximar o termo desconhecido $F(x_e) - \delta$ em (2.48)

ou (2.49). O conjunto de redes é definido por:

$$F(x_e, \Theta) = \begin{bmatrix} F_1(x_e, \theta_1) \\ \vdots \\ F_n(x_e, \theta_n) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Independente da abordagem, quanto mais camadas de neurônios, melhor é o desempenho da rede neural pois aumenta a capacidade de aprendizado, melhorando a precisão com que ela delimita regiões de decisão. Estas regiões de decisão são intervalos fixos onde a resposta pode estar. A camada de entrada possui um neurônio especial chamado *bias* que aumenta os graus de liberdade, permitindo uma melhor adaptação, por parte da rede neural, ao conhecimento a ela fornecido. As redes neurais $F_k(x_e, \theta_k)$, para $k = 1, \dots, n$ são compostas por q_k neurônios lineares nas camadas de entrada (sendo q_k o tamanho do vetor de entrada x_e), p_k neurônios não lineares em suas respectivas camadas intermediárias, e 1 neurônio linear nas camadas de saída, Figura 2.1.

Tais redes neurais são da forma:

$$F_k(x_e, \theta_k) = \sum_{i=1}^{p_k} \theta_{ki} G \left(\sum_{j=1}^{q_k} w_{ij}^k x_{ej} + b_i^k \right) = \xi_k^T \theta_k \quad (2.51)$$

com

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \theta_{k1} \\ \vdots \\ \theta_{kp_k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi_k = \begin{bmatrix} G \left(\sum_{j=1}^{q_k} w_{1j}^k x_{ej} + b_1^k \right) \\ \vdots \\ G \left(\sum_{j=1}^{q_k} w_{p_k j}^k x_{ej} + b_{p_k}^k \right) \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, os pesos ajustáveis θ_k são colocados na camada de saída. Os pesos

Figura 2.1: Rede neural

w_{ij}^k da camada de entrada e o *bias* b_i^k para $1 \leq i \leq p_k$, $1 \leq j \leq q_k$ e $1 \leq k \leq n$ são admitidos constantes e especificados pelo projetista. A função de ativação dos neurônios não lineares da camada intermediária, $G(\cdot)$, que de acordo com o teorema de aproximação via redes neurais multi-camadas (HAYKIN (2001)), deve ser uma função contínua, não-constante, limitada e monotonicamente crescente, foi escolhida em (CHANG & CHEN (1997)) como a função tangente hiperbólica

$$G_i(x_e) = \tanh \left(\sum_{j=1}^{q_k} w_{ij}^k x_{ej} + b_i \right).$$

Assim, define-se o sistema de redes neurais completo da seguinte forma:

$$F(x_e, \Theta) = \begin{bmatrix} F_1(x_e, \theta_1) \\ \vdots \\ F_n(x_e, \theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^T \theta_1 \\ \vdots \\ \xi_n^T \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2^T & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \Xi \Theta. \quad (2.52)$$

Seja $\Theta^* = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\theta} \max_{x_e \in \Omega_{x_e}} |F(x_e, \Theta) - (F(x_e) - \delta)|_2$ o vetor de pesos ótimo.

Considerando a equação (2.6) escrita na forma

$$\tau = F(x_e, \Theta) + T_{11}^{-1}u, \quad (2.53)$$

a equação de erro modificada (2.48) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_T(q, \dot{q})\tilde{x} + B_T(q)T_{11}(F(x_e, \Theta) + T_{11}^{-1}u - F(x_e, \Theta^*) + F(x_e, \Theta^*) - F(x_e) + \delta) \\ &= A_T(q, \dot{q})\tilde{x} + B_T(q)T_{11}(F(x_e, \Theta) - F(x_e, \Theta^*) + T_{11}^{-1}u) + B_T(q)w, \end{aligned} \quad (2.54)$$

redefinindo $w = T_{11}(F(x_e, \Theta^*) - F(x_e) + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d))$ como o erro de aproximação da rede neural.

Analogamente, para o controle no espaço inercial, o mesmo procedimento é aplicado às equações (2.15) e (2.49), redefinindo $w = T_{11}(F(x_e, \Theta^*) - F(x_e) + \delta_{ef}(q, \dot{q}, p, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d))$ como o erro de aproximação da rede neural para este caso.

O problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear baseado em redes neurais tem

solução se existir um controlador dinâmico de realimentação de estados

$$\dot{\Theta} = \beta(\tilde{x}, t), \quad (2.55)$$

$$\tau = F(x_e, \Theta) + u(\tilde{x}, t), \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.56)$$

$$F = F(x_e, \Theta) + u(\tilde{x}, t), \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.57)$$

tal que o sistema em malha fechada satisfaça o seguinte critério de desempenho:

$$\int_0^T (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u) dt \leq \tilde{x}^T(0) P_0 \tilde{x}(0) + \tilde{\Theta}^T(0) Z_0 \tilde{\Theta}(0) + \gamma^2 \int_0^T (w^T w) dt, \quad (2.58)$$

sendo $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$, $P_0 = P_0^T > 0$, e $Z_0 = Z_0^T > 0$ matrizes de ponderação e $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$ o erro de estimativa dos parâmetros da rede neural. Além disso, se o erro de aproximação tiver energia finita, isto é, $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, T]$, para todo $T \geq 0$, então as variáveis $\tilde{x}(T)$, $\Theta(T)$ e $\tau(T)$ são limitadas.

O critério de estabilidade de Lyapunov é satisfeito se escolhermos a função de Lyapunov

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T Z \tilde{\Theta},$$

com $P(\tilde{x}, t)$ sendo a solução simétrica positiva definida da equação de Riccati (2.20) e, considerando (2.52), a lei de controle adaptativo, para qualquer matriz $Z = Z^T > 0$, for dada por

$$\dot{\Theta} = -Z^{-T} \Xi^T T_{11} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (2.59)$$

$$\tau = \Xi \Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.60)$$

$$F = \Xi \Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B_T^T(q) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}. \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.61)$$

A solução do problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais simplificada fica:

$$\dot{\Theta} = -Z^{-1}\Xi^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}, \quad (2.62)$$

$$\tau = \Xi\Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}, \quad (\text{Espaço das juntas}) \quad (2.63)$$

$$F = \Xi\Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}. \quad (\text{Espaço inercial}) \quad (2.64)$$

Capítulo 3

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear Aplicado a Manipuladores Espaciais

3.1 Formulação do Problema

As técnicas de controle apresentadas no Capítulo 2 são estendidas neste capítulo para manipuladores espaciais com base livre flutuante levando em consideração os conceitos desenvolvidos no Capítulo 1. Dessa forma, considera-se um manipulador de base fixa com $(n + 1)$ elos e a primeira junta esférica passiva dinamicamente equivalente a um manipulador espacial com n elos e base livre flutuante. A extensão das técnicas de controle consiste em aplicá-las ao manipulador de base fixa subatuado (MDE), sujeito à ação de algum sistema que simule a ausência de gravidade, contudo, sem o objetivo de controlar a junta passiva e ainda considerando que esta junta não está freiada e que, portanto, sua dinâmica interfere no controle das juntas ativas do manipulador.

3.1.1 Espaço das Juntas

Seja $q = [\phi \ \theta \ \psi \ \theta_1 \ \dots \ \theta_n]^T = [q_b^T \ q_m^T]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas do MDE, com $q_b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ e $q_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, sendo que os índices b e m estabelecem referência à base espacial (junta esférica passiva) e às juntas do manipulador, respectivamente. Particionando a equação dinâmica do MDE como em (1.25) para o caso em questão, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{bb}(q_m) & M_{bm}(q_m) \\ M_{mb}(q_m) & M_{mm}(q_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_b(q_m, \dot{q}) \\ h_m(q_m, \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

com $M_{bb}(q_m) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $M_{bm}(q_m) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, $M_{mb}(q_m) \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, $M_{mm}(q_m) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h_b(q_m, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $h_m(q_m, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\tau_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

É interessante observar que a equação dinâmica (3.1) é dependente apenas das coordenadas generalizadas referentes ao manipulador, q_m , e ainda que nenhuma junta no manipulador ou a base, sofre ação de torques gravitacionais modelados.

A primeira linha de (3.1) estabelece a restrição não-holonômica de 2ª ordem imposta ao sistema pela base livre flutuante (junta passiva no MDE):

$$M_{bb}(q_m)\ddot{q}_b + M_{bm}(q_m)\ddot{q}_m + h_b(q_m, \dot{q}) = 0. \quad (3.2)$$

Isolando $\ddot{q}_b$ em (3.2) e substituindo o resultado na segunda linha de (3.1), obtém-se o torque nas juntas do manipulador:

$$\tau_m = \bar{M}(q_m)\ddot{q}_m + \bar{h}(q_m, \dot{q}), \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{M}(q_m) &= M_{mm}(q_m) - M_{mb}(q_m)M_{bb}^{-1}(q_m)M_{bm}(q_m), \\ \bar{h}(q_m, \dot{q}) &= -M_{mb}(q_m)M_{bb}^{-1}(q_m)h_b(q_m, \dot{q}) + h_m(q_m, \dot{q}).\end{aligned}$$

Convém observar que a matriz $\bar{M}(q_m)$ não é simétrica, nem definida positiva e que, ainda, escrevendo o vetor $\bar{h}(q_m, \dot{q}) = \bar{C}(q_m, \dot{q})\dot{q}$ a propriedade de anti-simetria da matriz $\bar{N}(q_m, \dot{q}) = \dot{\bar{M}}(q_m, \dot{q}_m) - 2\bar{C}(q_m, \dot{q})$ não se verifica. Dessa forma, para aplicar as técnicas de controle do Capítulo 2, é preciso enxergar o problema sob o ponto de vista das juntas ativas somente, (SIQUEIRA (2004)). Portanto, a equação (3.1) é montada de forma que a matriz de inércia relacionada às juntas controladas, $M_{mm}(q_m)$, seja simétrica e definida positiva e que o vetor $h(q_m, \dot{q}) = [h_b(q_m, \dot{q}) \quad h_m(q_m, \dot{q})]^T$ seja escrito na forma

$$h(q_m, \dot{q}) = C(q_m, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} C_{bb}(q_m, \dot{q}) & C_{bm}(q_m, \dot{q}) \\ C_{mb}(q_m, \dot{q}) & C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

tal que a matriz

$$N_{mm}(q_m, \dot{q}_m) = \dot{M}_{mm}(q_m, \dot{q}_m) - 2C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) \quad (3.5)$$

seja anti-simétrica.

Considerando as incertezas paramétricas e a introdução de um distúrbio externo finito,

a equação (3.1) fica:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_b(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_m(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{bb}(q_m) & M_{bm}(q_m) \\ M_{mb}(q_m) & M_{mm}(q_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{bb}(q_m, \dot{q}) & C_{bm}(q_m, \dot{q}) \\ C_{mb}(q_m, \dot{q}) & C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com

$$\begin{bmatrix} \delta_b(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_m(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} \Delta M_{bb}(q) \ddot{q}_b + \Delta M_{bm}(q) \ddot{q}_m + \Delta C_{bb}(q, \dot{q}) \dot{q}_b + \Delta C_{bm}(q, \dot{q}) \dot{q}_m \\ \Delta M_{mb}(q) \ddot{q}_b + \Delta M_{mm}(q) \ddot{q}_m + \Delta C_{mb}(q, \dot{q}) \dot{q}_b + \Delta C_{mm}(q, \dot{q}) \dot{q}_m \end{bmatrix} - \tau_d \right)$$

Por simplicidade de notação, o índice 0 referente ao sistema nominal foi suprimido.

Sejam q_m^d e $\dot{q}_m^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada para as juntas do manipulador e a velocidade correspondente, respectivamente. O erro de acompanhamento da trajetória é definido como segue:

$$\tilde{x}_m = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_m \\ \tilde{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_m - \dot{q}_m^d \\ q_m - q_m^d \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Admite-se que as variáveis q_m^d , $\dot{q}_m^d$ e $\ddot{q}_m^d$, estão dentro dos limites físicos do ME (e do MDE). A equação dinâmica do erro de acompanhamento em espaço de estados, utilizando a segunda linha de 3.6, fica:

$$\dot{\tilde{x}}_m = A\tilde{x}_m + B_0 + BM_{mm}^{-1}\tau_m + BM_{mm}^{-1}\delta_m \quad (3.8)$$

com

$$A(q_m, \dot{q}_m) = \begin{bmatrix} -M_{mm}^{-1}(q_m)C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0(q_m, \dot{q}, \ddot{q}_m^d, \dot{q}_m^d) = \begin{bmatrix} -M_{mm}^{-1}(q_m)(M_{mm}(q_m)\ddot{q}_m^d + C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m^d + M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b + C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Utilizando a transformação em (2.3) aplicada a $\tilde{x}_m$, a entrada de controle é escolhida como:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} M_{mm}(q_m) & C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= M_{mm}(q_m)T_1\dot{\tilde{x}}_m + C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)T_1\tilde{x}_m \\ &= T_{11}(-M_{mm}(q_m)(\ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_m) - C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)(\dot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_m) + \\ &\quad - M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b - C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b + \tau_m). \end{aligned}$$

Define-se

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau_m - M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b - C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b \\ &= T_{11}^{-1}\bar{u} + M_{mm}(q_m)(\ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_m) + C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)(\dot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_m) \\ &= T_{11}^{-1}\bar{u} + \bar{F}(x_{e_m}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aplicando (3.10) em (3.8), obtemos a equação dinâmica do erro modificada:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_m &= \bar{A}_T(q_m, \dot{q}_m)\tilde{x}_m + \bar{B}_T(q_m)T_{11}(-\bar{F}(x_{e_m}) + \tau_m - M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b - C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b + \delta_m) \\
&= \bar{A}_T(q_m, \dot{q}_m)\tilde{x}_m + \bar{B}_T(q_m)T_{11}(-\bar{F}(x_{e_m}) + \bar{\tau}) + \bar{B}_T(q_m)\bar{w} \\
&= \bar{A}_T(q_m, \dot{q}_m)\tilde{x}_m + \bar{B}_T(q_m)\bar{u} + \bar{B}_T(q_m)\bar{w},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

com

$$\bar{F}(x_{e_m}) = M_{mm}(q_m)(\ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_m) + C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)(\dot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_m), \tag{3.12}$$

sendo

$$x_{e_m} = \begin{bmatrix} q_m^T & \dot{q}_m^T & (q_m^d)^T & (\dot{q}_m^d)^T & (\ddot{q}_m^d)^T \end{bmatrix}^T,$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{A}_T(q_m, \dot{q}_m) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_{mm}^{-1}(q_m)C_{mm}(q_m, \dot{q}_m) & 0 \\ & T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\
\bar{B}_T(q_m) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_{mm}^{-1}(q_m) \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\bar{w} = T_{11}\delta_m,$$

$$x_{e_m} = \begin{bmatrix} q_m^T & \dot{q}_m^T & (q_m^d)^T & (\dot{q}_m^d)^T & (\ddot{q}_m^d)^T \end{bmatrix}^T.$$

De (3.9) vem a expressão para a aceleração necessária para as juntas do manipulador acompanharem a trajetória de referência:

$$\ddot{q}_m = \ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_m - T_{11}^{-1}M_{mm}^{-1}(q_m)(C_{mm}(q_m, \dot{q}_m)B^T T_0 \tilde{x}_m - \bar{u}). \tag{3.13}$$

Os torques nas juntas podem ser calculados aplicando (3.13) em (3.3).

3.1.2 Espaço Inercial

A posição e a orientação inercial do efetuador de um ME,

$$p' = [\phi_{ef} \quad \theta_{ef} \quad \psi_{ef} \quad x_{ef} \quad y_{ef} \quad z_{ef}],$$

é função da posição e orientação de sua base espacial e das coordenadas generalizadas das juntas do manipulador, q' . Segundo (PAPADOPOULOS & DUBOWSKY (1991)), a dependência das coordenadas do efetuador com a posição da base pode ser eliminada escrevendo a cinemática do sistema em relação ao centro de massa do sistema e integrando sua equação de momento linear. A modelagem baseada no MV segue essa técnica, uma vez que a origem do eixo inercial, referência nesta abordagem, está localizada no centro de massa do sistema espacial. A dependência com a orientação da base não pode ser eliminada pois o momento angular do sistema não pode ser integrado analiticamente de forma a fornecer a orientação da base como função das variáveis das juntas do manipulador. Seja $J(q)$ a matriz Jacobiana que relaciona as velocidades das coordenadas das juntas, $\dot{q}$, e as velocidades do efetuador do MDE, $\dot{p}$:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q}. \tag{3.14}$$

Aplicando (3.14) e sua respectiva derivada, $\ddot{p} = \dot{J}(q)\dot{q} + J(q)\ddot{q}$, na equação dinâmica

do MDE, considerando que $J(q)$ é não-singular, obtém-se

$$\tau = M_{ef}(q)\ddot{p} + C_{ef}(q, \dot{q})\dot{p}, \quad (3.15)$$

com

$$\begin{aligned} M_{ef}(q) &= M(q_m)J^{-1}(q), \\ C_{ef}(q, \dot{q}) &= (C(q_m, \dot{q}) - M(q_m)J^{-1}(q)\dot{J}(q, \dot{q}))J^{-1}(q). \end{aligned}$$

Nesta estratégia de controle de movimento, os valores de orientação da base espacial, q_b , estão presentes nas matrizes da equação dinâmica do sistema, pois foram inseridos pela Jacobiana $J(q)$.

Uma característica do controle de manipuladores subatuados, que na formulação em espaço das juntas foi absorvida de forma natural, deve, agora, ser explicitada para o problema no espaço inercial: em um manipulador com n_a atuadores, somente n_a graus de liberdade podem ser controladas por vez, (SIQUEIRA & TERRA (2004)). O MDE apresenta n juntas ativas e, portanto $n_a = n$. Sendo assim, seja $p = [p_u^T \ p_a^T]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas do sistema, com $p_u \in \mathbb{R}^{(6-n) \times 1}$ e $p_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, sendo os índices u e a referentes às variáveis de p que estarão passivas (livres) durante o procedimento de controle e às variáveis de p a serem controladas, respectivamente. Particionando a equação (3.15) como em (1.25), temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{efuu}(q) & M_{efua}(q) \\ M_{efau}(q) & M_{efaa}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_u \\ \ddot{p}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{efuu}(q, \dot{q}) & C_{efua}(q, \dot{q}) \\ C_{efau}(q, \dot{q}) & C_{efaa}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_u \\ \dot{p}_a \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

com $M_{efuu} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times (6-n)}$, $M_{efua} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times n}$, $M_{efau} \in \mathbb{R}^{n \times (6-n)}$, $M_{efaa} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_{efuu} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times (6-n)}$, $C_{efua} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times n}$, $C_{efau} \in \mathbb{R}^{n \times (6-n)}$, $C_{efaa} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tau_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

É preciso atentar para o fato de que $M_{ef}(q)$ não é simétrica definida positiva e que a matriz $N_{ef}(q, \dot{q}) = \dot{M}_{ef}(q, \dot{q}) - 2C_{ef}(q, \dot{q})$ não é anti-simétrica. Para que a equação dinâmica do sistema no espaço inercial preserve as características da dinâmica formulada no espaço das juntas, uma transformação de forças é aplicada a (3.15), (LEWIS et al. (1993)):

$$\tau = J^T(q)F, \quad (3.17)$$

sendo F o vetor de forças generalizadas do efetuador no espaço inercial. Portanto,

$$F = \bar{M}_{ef}(q)\ddot{p} + \bar{C}_{ef}(q, \dot{q})\dot{p}, \quad (3.18)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ef}(q) &= J^{-T}(q)M_{ef}(q) = J^{-T}(q)M(q_m)J^{-1}(q), \\ \bar{C}_{ef}(q, \dot{q}) &= J^{-T}(q)C_{ef}(q, \dot{q}) = J^{-T}(q)(C(q_m, \dot{q}) - M(q_m)J^{-1}(q)\dot{J}(q, \dot{q}))J^{-1}(q). \end{aligned}$$

Nesse formato a equação dinâmica do sistema formulada no espaço inercial mantém a estrutura e as propriedades encontradas no espaço das juntas. A matriz $\bar{M}_{ef}(q)$ é simétrica definida positiva e a matriz $\bar{N}_{ef}(q, \dot{q}) = \dot{\bar{M}}_{ef}(q, \dot{q}) - 2\bar{C}_{ef}(q, \dot{q})$ é anti-simétrica.

A equação (3.18) é particionada como em (3.16):

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ef_{uu}}(q) & \bar{M}_{ef_{ua}}(q) \\ \bar{M}_{ef_{au}}(q) & \bar{M}_{ef_{aa}}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_u \\ \ddot{p}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{ef_{uu}}(q, \dot{q}) & \bar{C}_{ef_{ua}}(q, \dot{q}) \\ \bar{C}_{ef_{au}}(q, \dot{q}) & \bar{C}_{ef_{aa}}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_u \\ \dot{p}_a \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

com $\bar{M}_{ef_{uu}} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times (6-n)}$, $\bar{M}_{ef_{ua}} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times n}$, $\bar{M}_{ef_{au}} \in \mathbb{R}^{n \times (6-n)}$, $\bar{M}_{ef_{aa}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{C}_{ef_{uu}} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times (6-n)}$, $\bar{C}_{ef_{ua}} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times n}$, $\bar{C}_{ef_{au}} \in \mathbb{R}^{n \times (6-n)}$, $\bar{C}_{ef_{aa}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_u \in \mathbb{R}^{(6-n) \times 1}$ e $F_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

$\mathbb{R}^{n \times 1}$. Essa partição deve preservar as propriedades da equação dinâmica para as matrizes

$\bar{M}_{efaa}(q)$ e $\bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})$:

- $\bar{M}_{efaa}(q) = \bar{M}_{efaa}^T(q) > 0$ e
- $\bar{N}_{efaa}(q, \dot{q}) = \dot{\bar{M}}_{efaa}(q, \dot{q}) - 2\bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})$ é anti-simétrica.

Considerando as incertezas paramétricas e a introdução de um distúrbio externo finito, a equação (3.19) fica:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d) \\ \delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{efuu}(q) & \bar{M}_{efua}(q) \\ \bar{M}_{efau}(q) & \bar{M}_{efaa}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_u \\ \ddot{p}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{efuu}(q, \dot{q}) & \bar{C}_{efua}(q, \dot{q}) \\ \bar{C}_{efau}(q, \dot{q}) & \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_u \\ \dot{p}_a \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

com

$$\begin{bmatrix} \delta_u(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d) \\ \delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d) \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} \Delta \bar{M}_{efuu}(q) \ddot{p}_u + \Delta \bar{M}_{efua}(q) \ddot{p}_a + \Delta \bar{C}_{efuu}(q, \dot{q}) \dot{p}_u + \Delta \bar{C}_{efua}(q, \dot{q}) \dot{p}_a \\ \Delta \bar{M}_{efau}(q) \ddot{p}_u + \Delta \bar{M}_{efaa}(q) \ddot{p}_a + \Delta \bar{C}_{efau}(q, \dot{q}) \dot{p}_u + \Delta \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q}) \dot{p}_a \end{bmatrix} - \tau_d \right)$$

Por simplicidade de notação, o índice 0 referente ao sistema nominal foi suprimido.

Sejam p_a^d e $\dot{p}_a^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada e a correspondente velocidade para o efetuador, respectivamente. Admite-se que as variáveis p_a^d , $\dot{p}_a^d$, e $\ddot{p}_a^d$, a aceleração desejada, fazem parte da região do espaço de trabalho do ME que é independente da trajetória, (PAPADOPOULOS & DUBOWSKY (1991)), e, portanto, não levarão a nenhuma singularidade dinâmica, ou seja, $\det(J) \neq 0$ durante todo o caminho percorrido. O erro

de acompanhamento é definido por

$$\tilde{x}_{ef} = \begin{bmatrix} \dot{p}_a - \dot{p}_a^d \\ p_a - p_a^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}}_a \\ \tilde{p}_a \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A equação dinâmica do erro de acompanhamento em espaço de estados fica:

$$\dot{\tilde{x}}_{ef} = A_{ef}\tilde{x}_{ef} + B_{0_{ef}} + B\bar{M}_{efaa}^{-1}F_a + B\bar{M}_{efaa}^{-1}\delta_a \quad (3.22)$$

com

$$A_{ef}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\bar{M}_{efaa}^{-1}(q)\bar{C}_{efaa}(q, \dot{q}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{0_{ef}}(q, \dot{q}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u, \ddot{p}_a^d, \dot{p}_a^d) =$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{M}_{efaa}^{-1}(q)(\bar{M}_{efaa}(q)\ddot{p}_a^d + \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})\dot{p}_a^d + \bar{M}_{efau}(q)\ddot{p}_u + \bar{C}_{efau}(q, \dot{q})\dot{p}_u) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Utilizando a transformação em (2.3) aplicada a $\tilde{x}_{ef}$, a entrada de controle é escolhida como:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_{efaa}(q) & \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} \\ &= \bar{M}_{efaa}(q)T_1\dot{\tilde{x}}_{ef} + \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})T_1\tilde{x}_{ef} \end{aligned}$$

E, portanto, substituindo $\dot{\tilde{x}}_{ef}$,

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= T_{11}(-\bar{M}_{efaa}(q)(\ddot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a) - \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})(\dot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a) + \\
&\quad - \bar{M}_{efau}(q)\ddot{p}_u - \bar{C}_{efau}(q, \dot{q})\dot{p}_u + F_a) \\
&= T_{11}(-\bar{F}(x_{ef}) + \bar{F}_a),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

com

$$\bar{F}(x_{ef}) = \bar{M}_{efaa}(q)(\ddot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a) + \bar{C}_{efaa}(q, \dot{q})(\dot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a),$$

$$\bar{F}_a = -\bar{M}_{efau}(q)\ddot{p}_u - \bar{C}_{efau}(q, \dot{q})\dot{p}_u + F_a,$$

$$\text{sendo } x_{ef} = \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T & p_a^T & \dot{p}_a^T & (p_a^d)^T & (\dot{p}_a^d)^T & (\ddot{p}_a^d)^T \end{bmatrix}^T.$$

Aplicando (3.23) em (3.22), obtemos a equação dinâmica do erro modificada:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_{ef} &= \bar{A}_{T_{ef}}(q, \dot{q})\tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}}(q)T_{11}(-\bar{F}(x_{ef}) + \bar{F}_a) + \bar{B}_{T_{ef}}(q)\bar{w} \\
&= \bar{A}_{T_{ef}}(q, \dot{q})\tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}}(q)\bar{u} + \bar{B}_{T_{ef}}(q)\bar{w},
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{T_{ef}}(q, \dot{q}) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{M}_{efaa}^{-1}(q)\bar{C}_{efaa}(q, \dot{q}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} T_0, \\
\bar{B}_{T_{ef}}(q) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} \bar{M}_{efaa}^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{w} &= T_{11}\delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d),
\end{aligned}$$

O vetor de forças generalizadas referente às variáveis ativas F_a é dado pela segunda

linha de (3.19):

$$F_a = \bar{M}_{ef_{au}}(q)\ddot{p}_u + \bar{M}_{ef_{aa}}(q)\ddot{p}_a + \bar{C}_{ef_{au}}(q, \dot{q})\dot{p}_u + \bar{C}_{ef_{aa}}(q, \dot{q})\dot{p}_a. \quad (3.25)$$

A primeira linha de (3.16) estabelece a restrição não-holonômica de 2ª ordem imposta ao sistema pela base livre flutuante (junta passiva no MDE).

$$M_{ef_{uu}}(q)\ddot{p}_u + M_{ef_{ua}}(q)\ddot{p}_a + C_{ef_{uu}}(q)\dot{p}_u + C_{ef_{ua}}(q)\dot{p}_a = 0. \quad (3.26)$$

Isolando $\ddot{p}_u$ em (3.26) e substituindo o resultado em (3.25), obtém-se

$$F_a = M_{F_a}(q)\ddot{p}_a + C_{F_a}(q, \dot{q})\dot{p}_a, \quad (3.27)$$

com

$$M_{F_a}(q) = \bar{M}_{ef_{aa}}(q) - \bar{M}_{ef_{au}}(q)M_{ef_{uu}}^{-1}(q)M_{ef_{ua}}(q),$$

$$C_{F_a}(q, \dot{q}) =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{ef_{au}}(q, \dot{q}) - \bar{M}_{ef_{au}}(q)M_{ef_{uu}}^{-1}(q)C_{ef_{uu}}(q, \dot{q}) & \bar{C}_{ef_{aa}}(q, \dot{q}) - \bar{M}_{ef_{au}}(q)M_{ef_{uu}}^{-1}(q)C_{ef_{ua}}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}.$$

O valor do vetor de forças referente às variáveis passivas F_u não é conhecido. O controlador aplicado à equação dinâmica do estado, (3.24), fornece o valor de $\ddot{p}_a$ necessário para o cálculo de F_a que leve ao acompanhamento da trajetória desejada:

$$\ddot{p}_a = \ddot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a - T_{11}^{-1}\bar{M}_{ef_{aa}}^{-1}(q)(\bar{C}_{ef_{aa}}(q, \dot{q})B^T T_0 \tilde{x}_e f - \bar{u}). \quad (3.28)$$

Aplicando a transformação de força (3.17) obtemos o valor dos torques nas juntas do manipulador na forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{uu}(q) & J_{ua}(q) \\ J_{au}(q) & J_{aa}(q) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_u \\ F_a \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Admitindo $J_{uu}(q)$ invertível, isolamos F_u na primeira linha de (3.29):

$$F_u = -J_{uu}^{-T}(q)J_{au}^T(q)F_a,$$

e substituímos na segunda linha de (3.29), levando a

$$\tau_a = (-J_{ua}^T(q)J_{uu}^{-T}(q)J_{au}^T(q) + J_{aa}^T(q))F_a. \quad (3.30)$$

3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear (Teoria dos Jogos)

Nesta seção, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear desenvolvido na Seção 2.2 é aplicado ao MDE, considerando os parâmetros físicos e dinâmicos que determinam as matrizes $M_0(q_m)$, $C_0(q_m, \dot{q})$ e $J_0(q)$ bem definidos e a estrutura do modelo bem determinada. Portanto, é possível calcular os termos $\bar{F}(x_{em})$ e $\bar{F}(x_{ef})$ exatamente. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado para atenuar os efeitos de quaisquer perturbações que interfiram no controle do sistema.

3.2.1 Espaço das Juntas

Considere a equação em espaço de estados (3.11). Lembrando que $M_{mm}(q_m)$ é simétrica definida positiva e que (3.5) é anti-simétrica, o critério de estabilidade de Lyapunov (2.19),

proposto pela teoria dos jogos como solução do problema *minimax* (2.18), é satisfeito se a matriz $P(\tilde{x}, t) = P(\tilde{x}_m, t)$, solução da equação de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tilde{x}_m, t) + P(\tilde{x}_m, t)\bar{A}_T(q_m, \dot{q}_m) + \bar{A}_T^T(q_m, \dot{q}_m)P(\tilde{x}_m, t) + \\ - P(\tilde{x}_m, t)\bar{B}_T(q_m) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) \bar{B}_T^T(q_m)P(\tilde{x}_m, t) + Q = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

for escolhida como

$$P(\tilde{x}_m, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_{mm}(q_m) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0,$$

para a entrada de controle ótima dada por:

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= -R^{-1}\bar{B}_T^T(q_m)P(\tilde{x}_m, t)\tilde{x}_m \\ &= -R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_m. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os torques nas juntas podem ser calculados aplicando (3.32) em (3.13) e então, aplicando (3.13) em (3.3).

3.2.2 Espaço Inercial

Considere a equação em espaço de estados (3.24). Lembrando que $\bar{M}_{efaa}(q)$ é simétrica definida positiva e que $\bar{N}_{efaa}(q, \dot{q})$ é anti-simétrica, o critério de estabilidade de Lyapunov (2.19), proposto pela teoria dos jogos como solução do problema *minimax* (2.18), é

satisfeito se a matriz $P(\tilde{x}, t) = P(\tilde{x}_{ef}, t)$, solução da equação de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tilde{x}_{ef}, t) + P(\tilde{x}_{ef}, t)\bar{A}_{T_{ef}}(q, \dot{q}) + \bar{A}_{T_{ef}}^T(q, \dot{q})P(\tilde{x}_{ef}, t) + \\ - P(\tilde{x}_{ef}, t)\bar{B}_{T_{ef}}(q) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) \bar{B}_{T_{ef}}(q)P(\tilde{x}_{ef}, t) + Q = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

for escolhida como

$$P(\tilde{x}_{ef}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} \bar{M}_{efaa}(q) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0,$$

para a entrada de controle ótima dada por:

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= -R^{-1}\bar{B}_{T_{ef}}^T(q)P(\tilde{x}_{ef}, t)\tilde{x}_{ef} \\ &= -R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_{ef}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

As forças referentes às variáveis ativas são calculadas aplicando (3.34) em (3.28), e então aplicando (3.28) em (3.27). Os torques nas juntas são calculados por (3.30).

3.3 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

Nesta seção, o controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear desenvolvido na Seção 2.3 é aplicado ao MDE, considerando a estrutura do modelo bem determinada mas, incertos (ou desconhecidos) os parâmetros físicos e dinâmicos que determinam as matrizes $M_0(q_m)$, $C_0(q_m, \dot{q})$ e $J_0(q)$. Os termos $\bar{F}(x_{e_m})$ e $\bar{F}(x_{e_{ef}})$ são estimados com base na propriedade de parametrização linear do modelo. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado para atenuar os efeitos do erro de estimação da lei adaptativa, de perturbações externas e de dinâmicas não-modeladas, que interfiram no desempenho do sistema.

3.3.1 Espaço das Juntas

Para calcular o torque nas juntas do manipulador pode-se diretamente considerar a equação (3.10) na forma:

$$\tau_m = T_{11}^{-1}\bar{u} + \bar{F}(x_{e_m}) + M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b + C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b. \quad (3.35)$$

Admite-se a propriedade de parametrização linear do termo

$$E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) = \bar{F}(x_{e_m}) + M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b + C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b, \quad (3.36)$$

tal que

$$E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) = Y(q_m, \dot{q}_m, \dot{q}_m^d - T_{11}T_{12}\ddot{q}_m, \ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_m, \ddot{q}_b, \dot{q}_b)\varphi, \quad (3.37)$$

sendo $Y \in \mathbb{R}^{n \times r}$ uma matriz de funções conhecidas e $\varphi \in \mathbb{R}^r$ um vetor de componentes incertos que dependem de parâmetros do manipulador.

A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_m$ é obtida com a escolha adequada da lei de adaptação, considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.1, com base na Seção 2.3. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $S = S^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\hat{\varphi}} = -S^{-1}Y^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_m, \quad (3.38)$$

$$\tau_m = Y\hat{\varphi} - T_{11}^{-1}R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_m. \quad (3.39)$$

No entanto, observa-se que a matriz de regressão $Y(\cdot)$ é dependente da aceleração

da base, $\ddot{q}_b$, o que é bastante inconveniente, pois é um dado difícil de ser obtido em experimentos reais. Dessa forma, define-se uma lei de controle adaptativa diferente, com base em $\bar{\tau}$, definido na equação (3.10):

$$\dot{\hat{\varphi}} = -\bar{S}^{-1}\bar{Y}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_m, \quad (3.40)$$

$$\bar{\tau} = \bar{Y} \hat{\varphi} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_m, \quad (3.41)$$

tal que $\bar{F}(x_{e_m})$ é linearmente parametrizável na forma

$$\bar{F}(x_{e_m}) = \bar{Y}(q_m, \dot{q}_m, \dot{q}_m^d - T_{11} T_{12} \tilde{q}_m, \ddot{q}_m^d - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{q}}_m) \bar{\varphi}. \quad (3.42)$$

A relação entre $\bar{\tau}$ e τ_m é dada através da aceleração de controle

$$\ddot{q}_m = -\hat{M}_{mm}^{-1}(q_m)(\hat{C}_{mm}(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m - \bar{\tau}), \quad (3.43)$$

aplicada a

$$\tau_m = \hat{M}(q_m)\ddot{q}_m + \hat{h}(q_m, \dot{q}), \quad (3.44)$$

sendo que $\hat{M}(q_m)$, $\hat{C}_{mm}(q_m, \dot{q}_m)$ e $\hat{h}(q_m, \dot{q})$ são calculados utilizando os parâmetros estimados $\hat{\varphi}$.

Algebricamente,

$$\tau_m = E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + T_{11}^{-1} \bar{u} = \hat{M}(q_m)\ddot{q}_m + \hat{h}(q_m, \dot{q}).$$

No entanto, no primeiro caso há a necessidade do valor explícito da aceleração da base

$\ddot{q}_b$, difícil de ser obtido, enquanto no segundo caso o valor de $\ddot{q}_b$ está implícito no equacionamento, e, portanto, o controlador adaptativo utiliza apenas o valor da velocidade da base, $\dot{q}_b$.

3.3.2 Espaço Inercial

Com base nas considerações da seção anterior, uma lei de controle adaptativa é determinada para o vetor

$$\bar{F}_a = T_{11}^{-1}\bar{u} + \bar{F}(x_{ef}), \quad (3.45)$$

definido em (3.23).

Dessa forma, admite-se a propriedade de parametrização linear do termo $\bar{F}(x_{ef})$ tal que

$$\bar{F}(x_{ef}) = Y_{ef}(q, \dot{q}, \dot{p}_a^d - T_{11}T_{12}\tilde{p}_a, \ddot{p}_a^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{p}}_a)\varphi_{ef}, \quad (3.46)$$

sendo $Y_{ef} \in \mathbb{R}^{n \times v}$ uma matriz de funções conhecidas e $\varphi_{ef} \in \mathbb{R}^v$ um vetor de componentes incertos que dependem de parâmetros do manipulador e da base espacial.

A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_{ef}$ é obtida com a escolha adequada da lei de adaptação, considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.2, com base na Seção 2.3. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $S_{ef} = S_{ef}^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\varphi}_{ef} = -S_{ef}^{-1}Y_{ef}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}, \quad (3.47)$$

$$\bar{F}_a = Y_{ef} \hat{\varphi}_{ef} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}. \quad (3.48)$$

A relação entre $\bar{F}_a$ e F_a é dada através da aceleração de controle

$$\ddot{p}_a = -\hat{M}_{efaa}^{-1}(q)(\hat{C}_{efaa}(q, \dot{q})\dot{p}_a - \bar{F}_a), \quad (3.49)$$

aplicada a

$$F_a = \hat{M}_{Fa}(q)\ddot{p}_a + \hat{C}_{Fa}(q, \dot{q})\dot{p}_a, \quad (3.50)$$

sendo que $\hat{M}_{efaa}(q)$, $\hat{C}_{efaa}(q, \dot{q})$, $\hat{M}_{Fa}(q)$ e $\hat{C}_{Fa}(q, \dot{q})$ são calculadas utilizando os parâmetros estimados $\hat{\varphi}_{ef}$. O torque nas juntas é dado por (3.30).

3.4 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais

Nesta seção, o controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais desenvolvido na Seção 2.4 é aplicado ao MDE, considerando a estrutura do modelo e os parâmetros físicos e dinâmicos que determinam as matrizes $M_0(q_m)$, $C_0(q_m, \dot{q})$ e $J_0(q)$ totalmente desconhecidos. Os termos $\bar{F}(x_{e_m})$ e $\bar{F}(x_{e_{ef}})$, o movimento da base espacial e eventuais distúrbios são estimados por um conjunto de redes neurais. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado para atenuar os efeitos dos erros de estimação da rede neural sobre o desempenho do sistema.

3.4.1 Espaço das Juntas

Para calcular o torque nas juntas do manipulador considera-se a equação (3.35) na forma:

$$\tau_m = T_{11}^{-1}\bar{u} + E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b). \quad (3.51)$$

Um conjunto de redes neurais, $E(\bar{x}_e, \bar{\Theta})$ contendo n redes neurais de saída única, sendo $\bar{\Theta}$ o vetor com os parâmetros ajustáveis da rede, é utilizado para aproximar o termo desconhecido $E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) - \delta_m(q_m, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)$ em (3.11). O conjunto de redes neurais é definido por:

$$E(\bar{x}_e, \bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} E_2(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_2) \\ \vdots \\ E_{n+1}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{n+1}) \end{bmatrix},$$

com o vetor de entrada $\bar{x}_e = \begin{bmatrix} q_m^T & \dot{q}_m^T & \dot{q}_b^T & \ddot{q}_b^T & (q_m^d)^T & (\dot{q}_m^d)^T & (\ddot{q}_m^d)^T \end{bmatrix}^T$.

Com essa definição de $\bar{x}_e$ enfrentamos, mais uma vez, a necessidade de se utilizar o valor da variável $\ddot{q}_b$. No entanto, pelas teorias de redes neurais (HAYKIN (2001)), não é necessário fornecer todas as entradas exigidas pelo sistema para que a rede neural consiga aproximá-lo com eficiência, e, em não raras vezes, as redes neurais são utilizadas justamente porque não é possível acessar todas as variáveis que definem o sistema a ser estimado. Dessa forma, o conjunto de redes neurais $E(\bar{x}_e, \bar{\Theta})$ é redefinido $E(x_{e_m}, \bar{\Theta})$, com o vetor de entrada

$$x_{e_m} = \begin{bmatrix} q_m^T & \dot{q}_m^T & (q_m^d)^T & (\dot{q}_m^d)^T & (\ddot{q}_m^d)^T \end{bmatrix}^T.$$

Assim, o conjunto de redes neurais modela o sistema do manipulador espacial sem utilizar qualquer dado dinâmico da base livre flutuante.

As redes neurais $E_k(x_{e_m}, \bar{\Theta}_k)$, para $k = 2, \dots, n + 1$ são da forma dada em (2.51),

admitindo a mesma topologia. O sistema completo é dado por:

$$E(x_{e_m}, \bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} E_2(x_{e_m}, \bar{\Theta}_2) \\ \vdots \\ E_{n+1}(x_{e_m}, \bar{\Theta}_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_2^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\xi}_{n+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\Theta}_{n+1} \end{bmatrix} = \bar{\Xi} \bar{\Theta}. \quad (3.52)$$

Redefinindo

$$\bar{w} = T_{11}(E(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*) - E(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + \delta_m(q_m, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d))$$

em (3.11) como o erro de aproximação da rede neural, o critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado na atenuação dos efeitos de $\bar{w}$. A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_m$ é obtida com a escolha adequada da lei de ajuste dos pesos $\bar{\Theta}$, considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.1, com base na Seção 2.4. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $\bar{Z} = \bar{Z}^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\bar{\Theta}} = -\bar{Z}^{-1} \bar{\Xi}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_m, \quad (3.53)$$

$$\tau_m = \bar{\Xi} \bar{\Theta} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_m. \quad (3.54)$$

3.4.2 Espaço Inercial

Considere a equação (3.23) escrita na forma:

$$\begin{aligned} F_a &= T_{11}^{-1} \bar{u} + \bar{F}(x_{ef}) + \bar{M}_{efau}(q) \ddot{p}_u + \bar{C}_{efau}(q, \dot{q}) \dot{p}_u \\ &= T_{11}^{-1} \bar{u} + E(x_{ef}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Um conjunto de redes neurais, $E(\bar{x}_e, \Theta_{ef})$ contendo n redes neurais de saída única, sendo Θ_{ef} o vetor com os parâmetros ajustáveis da rede, é utilizado para aproximar o termo desconhecido $E(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) - \delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d)$ em (3.24). O conjunto de redes neurais é definido por:

$$E(\bar{x}_e, \Theta_{ef}) = \begin{bmatrix} E_2(\bar{x}_e, \Theta_{ef_2}) \\ \vdots \\ E_{n+1}(\bar{x}_e, \Theta_{ef_{n+1}}) \end{bmatrix},$$

com o vetor de entrada $\bar{x}_e = \begin{bmatrix} q_m^T & \dot{q}_m^T & p_a^T & \dot{p}_a^T & (p_a^d)^T & (\dot{p}_a^d)^T & (\ddot{p}_a^d)^T \end{bmatrix}^T$. Com base na discussão apresentada na Seção 3.4.1, os valores de q_u , $\dot{q}_u$, $\dot{p}_u$ e $\ddot{p}_u$ foram desprezados na definição do vetor $\bar{x}_e$. Portanto, o conjunto de redes neurais estima o modelo do sistema sem utilizar qualquer dado dinâmico da base espacial ou referente às variáveis passivas.

As redes neurais $E_k(\bar{x}_e, \Theta_{ef_k})$, para $k = 2, \dots, n+1$ são da forma dada em (2.51), admitindo a mesma topologia. O sistema completo é dado por:

$$E(\bar{x}_e, \Theta_{ef}) = \begin{bmatrix} E_2(\bar{x}_e, \Theta_{ef_2}) \\ \vdots \\ E_{n+1}(\bar{x}_e, \Theta_{ef_{n+1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{ef_2}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi_{ef_{n+1}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{ef_2} \\ \vdots \\ \Theta_{ef_{n+1}} \end{bmatrix} = \Xi_{ef} \Theta_{ef}. \quad (3.56)$$

Redefinindo

$$\bar{w} = T_{11}(E(\bar{x}_e, \Theta_{ef}^*) - E(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) + \delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d))$$

em (3.24) como o erro de aproximação da rede neural, o critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado na atenuação dos efeitos de $\bar{w}$. A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_{ef}$ é obtida com a escolha

adequada da lei de ajuste dos pesos Θ_{ef} , considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.2, com base na Seção 2.4. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $Z_{ef} = Z_{ef}^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\Theta}_{ef} = -Z_{ef}^{-1}\Xi_{ef}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}, \quad (3.57)$$

$$F_a = \Xi_{ef} \Theta_{ef} - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}. \quad (3.58)$$

O torque nas juntas é dado por (3.30).

3.5 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Redes Neurais Baseado em Modelo

Considerando que bastante trabalho vem sendo empregado há anos para o desenvolvimento de modelos cada vez mais fiéis de manipuladores robóticos, uma nova abordagem para a aplicação das redes neurais no procedimento de controle robusto é aplicada nesta seção. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais desenvolvido na Seção 2.4 é aplicado ao MDE, considerando a estrutura do modelo bem determinada e os parâmetros físicos e dinâmicos que determinam as matrizes $M_0(q_m)$, $C_0(q_m, \dot{q})$ e $J_0(q)$ bem definidos. Portanto, é possível calcular os termos nominais de $\bar{F}(x_{em})$ e $\bar{F}(x_{ef})$ exatamente. Um conjunto de redes neurais é aplicado para estimar incertezas paramétricas, dinâmicas não-modeladas e distúrbios externos, que porventura estejam presentes no ambiente de controle. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é utilizado para atenuar os efeitos dos erros de estimativa do conjunto de redes neurais, (PETRONILHO et al. (2005)).

3.5.1 Espaço das Juntas

Seja, então, a equação (3.51) reescrita na forma:

$$\begin{aligned}\tau_m &= T_{11}^{-1}\bar{u} + \bar{F}_0(x_{e_m}) + \Delta\bar{F}(x_{e_m}) + M_{mb}(q_m)\ddot{q}_b + C_{mb}(q_m, \dot{q})\dot{q}_b \\ &= T_{11}^{-1}\bar{u} + \bar{F}_0(x_{e_m}) + \bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b).\end{aligned}\tag{3.59}$$

Um conjunto de redes neurais $\bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}) = \bar{\Xi}\bar{\Theta}$, com a mesma topologia e as mesmas propriedades de $E(x_{e_m}, \bar{\Theta})$ (Seção 3.4.1), é aplicado para estimar o termo desconhecido $\bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) - \delta_m(q_m, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)$ na equação (3.11) reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_m &= \bar{A}_T\tilde{x}_m + \bar{B}_T T_{11}(\tau_m - \bar{F}_0(x_{e_m}) - \Delta\bar{F}(x_{e_m}) - M_{mb}\ddot{q}_b - C_{mb}\dot{q}_b + \delta_m) \\ &= \bar{A}_T\tilde{x}_m + \bar{B}_T T_{11}(\tau_m - \bar{F}_0(x_{e_m}) - \bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + \delta_m).\end{aligned}\tag{3.60}$$

Aplicando $\bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta})$ em (3.60):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_m &= \bar{A}_T\tilde{x}_m + \bar{B}_T T_{11}(\tau_m - \bar{F}_0(x_{e_m}) - \bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + \delta_m + \bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*) - \bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*)) \\ &= \bar{A}_T\tilde{x}_m + \bar{B}_T T_{11}(\tau_m - \bar{F}_0(x_{e_m}) - \bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*)) + \bar{B}_T T_{11}(-\bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + \\ &\quad + \delta_m + \bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*)) \\ &= \bar{A}_T\tilde{x}_m + \bar{B}_T\bar{u} + \bar{B}_T\bar{w},\end{aligned}\tag{3.61}$$

sendo $\bar{\Theta}^*$ o vetor de pesos ótimo, redefine-se $\bar{w} = T_{11}(-\bar{E}(x_{e_m}, \ddot{q}_b, \dot{q}_b) + \delta_m + \bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}^*))$ como sendo o erro de aproximação da rede neural. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado na atenuação dos efeitos de $\bar{w}$ sobre o desempenho do sistema.

A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_m$ é obtida com a escolha adequada da lei de ajuste dos pesos $\bar{\Theta}$, considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.1, com base na Seção 2.4. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $\bar{Z} = \bar{Z}^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\bar{\Theta}} = -\bar{Z}^{-1}\bar{\Xi}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_m, \quad (3.62)$$

$$\tau_m = \bar{\Xi}\bar{\Theta} + \bar{F}_0(x_{e_m}) - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_m. \quad (3.63)$$

3.5.2 Espaço Inercial

Seja a equação (3.55) reescrita na forma:

$$\begin{aligned} F_a &= T_{11}^{-1} \bar{u} + \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) + \Delta \bar{F}(x_{e_{ef}}) + \bar{M}_{efau}(q) \ddot{p}_u + \bar{C}_{efau}(q, \dot{q}) \dot{p}_u \\ &= T_{11}^{-1} \bar{u} + \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) + \bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Um conjunto de redes neurais $\bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}) = \bar{\Xi}_{ef} \bar{\Theta}_{ef}$, com a mesma topologia e as mesmas propriedades de $E(\bar{x}_e, \Theta_{ef})$ é aplicado para estimar o termo desconhecido $\bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) - \delta_a(q, \dot{q}, \dot{p}, \ddot{p}, \tau_d)$ na equação (3.24) reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{ef} &= \bar{A}_{T_{ef}} \tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}} T_{11} (F_a - \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) - \Delta \bar{F}(x_{e_{ef}}) - \bar{M}_{efau} \ddot{p}_u - \bar{C}_{efau} \dot{p}_u + \delta_a) \\ &= \bar{A}_{T_{ef}} \tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}} T_{11} (F_a - \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) - \bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) + \delta_a). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Aplicando $\bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef})$ em (3.65):

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_{ef} &= \bar{A}_{T_{ef}} \tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}} T_{11} (F_a - \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) - \bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) + \delta_a + \bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}^*) - \bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}^*)) \\
&= \bar{A}_{T_{ef}} \tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}} T_{11} (F_a - \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) - \bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}^*)) \\
&\quad + \bar{B}_{T_{ef}} T_{11} (-\bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) + \delta_a + \bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}^*)) \\
&= \bar{A}_{T_{ef}} \tilde{x}_{ef} + \bar{B}_{T_{ef}} \bar{u} + \bar{B}_{T_{ef}} \bar{w},
\end{aligned} \tag{3.66}$$

sendo $\bar{\Theta}_{ef}^*$ o vetor de pesos ótimo, redefine-se $\bar{w} = T_{11}(-\bar{E}(x_{e_{ef}}, \ddot{p}_u, \dot{p}_u) + \delta_a + \bar{E}(\bar{x}_e, \bar{\Theta}_{ef}^*))$ como sendo o erro de aproximação da rede neural. O critério $\mathcal{H}_\infty$ é aplicado na atenuação dos efeitos de $\bar{w}$ sobre o desempenho do sistema.

A estabilidade assintótica do estado $\tilde{x}_{ef}$ é obtida com a escolha adequada da lei de ajuste dos pesos $\bar{\Theta}_{ef}$, considerando também as condições apresentadas na Seção 3.2.2, com base na Seção 2.4. A lei de controle adaptativa, na forma simplificada, para qualquer matriz $\bar{Z}_{ef} = \bar{Z}_{ef}^T > 0$, é dada por:

$$\dot{\bar{\Theta}}_{ef} = -\bar{Z}_{ef}^{-1} \bar{\Xi}_{ef}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}, \tag{3.67}$$

$$F_a = \bar{\Xi}_{ef} \bar{\Theta}_{ef} + \bar{F}_0(x_{e_{ef}}) - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_{ef}. \tag{3.68}$$

O torque nas juntas é dado por (3.30).

Capítulo 4

Implementação e Análise de Resultados

Esforços significativos vêm sendo aplicados no projeto e construção de mesas de teste que possam ser utilizadas na validação de projetos e técnicas de controle para robôs espaciais (DUBOWSKY & PAPADOPOULOS (1993)), (MENON et al. (2004)). O principal problema consiste na criação das condições de gravidade nula. A maioria das montagens experimentais emprega robôs planares flutuando sobre colchões de ar ou suspensos por cabos. Em testes 3D, o efeito da gravidade é eliminado em tanques de água, ou estimados e subtraídos de alguma forma, por outros manipuladores, cabos de suspensão, ou ainda durante vôos parabólicos.

4.1 Underactuated Arm II (UArmII)

O UArmII é um manipulador planar horizontal com 3 elos rígidos em série conectados por juntas rotacionais. Cada junta é composta por um motor DC *brushless*, um freio pneumático e um encoder óptico com decodificador de quadratura. O encoder fornece as posições e a velocidade da junta é obtida por diferenciação numérica e filtragem. As juntas e elos são numerados de 1 a 3, sendo a junta 1 e o elo 1 os mais próximos à base do manipulador, que é fixa a uma mesa de granito, horizontal e plana, Figura 4.1. Um sistema de ar comprimido produz um filme de ar entre a mesa e a base das juntas e do efetuador, fazendo com que estes componentes flutuem sobre a mesa, reduzindo consideravelmente o atrito entre estas partes além de anular o efeito da gravidade. Os motores podem ser configurados para girar livremente, caracterizando uma junta passiva. Assim, o UArmII foi construído especialmente para a aplicação de técnicas de controle com subatuação e pode se apresentar nas seguintes configurações:

- AAA - Três juntas ativas;
- PAA - Junta 1 passiva, juntas 2 e 3 ativas;
- APA - Junta 2 passiva, juntas 1 e 3 ativas;
- AAP - Junta 3 passiva, juntas 1 e 2 ativas;
- PPA - Juntas 1 e 2 passivas, junta 3 ativa;
- APP - Juntas 2 e 3 passivas, junta 1 ativa;
- PAP - Juntas 1 e 3 passivas, junta 2 ativa;

Figura 4.1: UArmII

Aplicando a configuração PAA, o manipulador UArmII pode ser utilizado como manipulador dinamicamente equivalente a um ME de 2 elos. Dessa forma, o elo 1 (junta passiva) é referente à base espacial no ME e os elos 2 e 3 correspondem ao manipulador espacial. Alguns ajustes estruturais (Apêndice B) foram necessários para assegurar a condição $l_{c1} = 0$ em (1.23). O modelo do robô manipulador UArmII é definido nesta aplicação pela equação (3.6) e os experimentos apresentadas neste capítulo foram realizadas com base neste modelo. A Tabela 4.1 apresenta os valores dos parâmetros físicos do UArmII, e a Tabela 4.2 apresenta os respectivos parâmetros do manipulador espacial segundo (1.24). As matrizes $M_0(q)$, $h_0(q, \dot{q})$ e $J_0(q)$ referentes ao modelo nominal do MDE e $M'_0(q')$, $h'_0(q', \dot{q}')$ e $J'_0(q')$ referentes ao modelo nominal do ME podem ser vistas no Apêndice A. A Tabela 4.3 mostra o particionamento das coordenadas generalizadas do UArmII a ser aplicado nas simulações e nos experimentos apresentados neste capítulo.

Tabela 4.1: Parâmetros do UArmII

i	m_i (kg)	I_i (kgm ²)	W_i (m)	lc_i (m)
Junta 1	1.932	0.015251	0.203	0
Junta 2	0.850	0.0075	0.203	0.096
Junta 3	0.850	0.006	0.203	0.077

Tabela 4.2: Parâmetros do Manipulador Espacial

i	m_i (kg)	I_i (kgm ²)	R_i (m)	L_i (m)
Base	4.816	0.015251	0.253	0
Junta 1	0.618	0.0075	0.118	0.12
Junta 2	0.566	0.006	0.126	0.085

4.2 Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais (ASCM-E)

A interface entre as técnicas de controle desenvolvidas no Capítulo 3 e o modelo de um robô manipulador de base livre flutuante ou o UArmII é definida pelo Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais (ASCM-E). Adaptado sobre a estrutura do Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores (ASCM), (SIQUEIRA et al. (1999)), pelo aluno de iniciação científica Eduardo Lussari, sob a orientação dos Professores Marco H. Terra e Adriano A. G. Siqueira, o ASCM-E contempla a implementação de um ME de 2 elos baseado no UArmII. O ambiente apresenta a possibilidade da comparação visual entre o comportamento do manipulador de base fixa e o comportamento do manipulador espacial modelado segundo (LIANG et al. (1996)).

A plataforma possui em sua interface diversas funcionalidades que permitem ao usuário

Tabela 4.3: Coordenadas generalizadas do UArmII

Controle	Coord. generalizadas	Passivas	Ativas
Espaço das juntas	$q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$	$q_b = \theta_1$	$q_m = [\theta_2 \ \theta_3]^T$
Espaço inercial	$q = [\theta_{ef} \ x_{ef} \ y_{ef}]^T$	$p_u = \theta_{ef}$	$p_a = [x_{ef} \ y_{ef}]^T$

Figura 4.2: Ambiente de Simulação e Controle de Manipuladores Espaciais

configurar o sistema e entender melhor o comportamento do experimento. Sua interface é dividida em três áreas distintas, Figura 4.2. Na parte superior estão os comandos que definem os parâmetros da simulação e da interface, comandos para atuação no UArmII, dados e resultados numéricos do experimento. Abaixo está a janela gráfica que mostra em tempo real o movimento do manipulador. À direita existem três janelas gráficas que apresentam os resultados gráficos da simulação ou experimento real. O simulador está implementado em linguagem nativa do Matlab (*m-file*), e sua funcionalidade é descrita pelo

diagrama da Figura 4.3. As funções diretamente relacionadas à interface com o UArmII são escritas em linguagem C para assegurar a comunicação em tempo real. A estrutura do ASCM-E é claramente modular (inclusive o código) e a mais intuitiva possível, garantindo a facilidade para o pesquisador inserir o sistema de controle em teste.

Figura 4.3: Estrutura de código do ASCM-E

4.3 Trajetória Desejada e Índices de Desempenho

Neste trabalho, define-se a trajetória de referência para a junta i , $q_i^d(t)$, como um polinômio de quinto grau descrito por:

$$q_i^d(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + a_5(t - t_0)^5 \quad (4.1)$$

satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned}
q_i^d(t_0) &= q_{i_0}, & q_i^d(t_f) &= q_{i_f}, & q_i^d(t_f/2) &= q_{i_f}/2; \\
\dot{q}_i^d(t_0) &= 0, & \dot{q}_i^d(t_f) &= 0; & & \text{(Velocidades inicial e final nulas)} \\
\ddot{q}_i^d(t_0) &= 0, & \ddot{q}_i^d(t_f) &= 0; & & \text{(Acelerações inicial e final nulas)}
\end{aligned}$$

sendo t_0 o tempo inicial, t_f o tempo final desejado, q_{i_0} a condição inicial da posição e q_{i_f} o valor final desejado para a posição da junta. De acordo com as restrições impostas, os coeficientes do polinômio foram determinados:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_{i_0} \\
a_1 &= a_2 = 0 \\
a_3 &= 10(q_{i_f} - q_{i_0})/t_f^3 \\
a_4 &= 15(q_{i_0} - q_{i_f})/t_f^4 \\
a_5 &= 6(q_{i_f} - q_{i_0})/t_f^5
\end{aligned}$$

A referência para a velocidade e a aceleração desejadas são dadas pelas derivadas de $q_i^d(t)$ no tempo, $\dot{q}_i^d(t)$ e $\ddot{q}_i^d(t)$ respectivamente.

A mesma função rege a trajetória de referência para o efetuador, $p^d(t)$, fazendo as devidas associações com p_0 e p_f . A referência para a velocidade e a aceleração do efetuador também é dada pelas derivadas de $p^d(t)$ no tempo, $\dot{p}^d(t)$ e $\ddot{p}^d(t)$ respectivamente.

Para uma comparação quantitativa dos resultados simulados e experimentais os seguintes índices de desempenho, amplamente utilizados na literatura (WHITCOMB et al. (1993)), (BERGHUIS et al. (1995)), (JARITZ & SPONG (1996)), (REYES & KELLY (2001)), serão empregados:

1) Norma $\mathcal{L}_2$ do vetor de estados:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{x}] = \left(\frac{1}{(t_r - t_0)} \int_{t_0}^{t_r} \|\tilde{x}(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo t_r o tempo gasto pelo manipulador para alcançar a posição final desejada dentro de uma faixa de tolerância de erro aceitável.

2) Somatório das áreas dos torques:

$$E[\tau_m] = \sum_{i=2}^{n+1} \left(\int_{t_0}^{t_r} |\tau_{m_i}(t)| dt \right),$$

diretamente relacionado com o consumo de energia do manipulador.

4.4 Controle no Espaço das Juntas

4.4.1 Experimentos no MDE

A aplicação dos controladores adaptativos no UArmII tem a função de validar o controlador desenvolvido para que seja aplicado em um manipulador espacial dinamicamente equivalente ao seu modelo. Para cada controlador, foram realizados 5 experimentos e calculados os valores médios de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau_m]$, como sugerido em (BERGHUIS et al. (1995)). Os gráficos apresentados neste trabalho correspondem aos experimentos que mais se aproximam dos valores médios.

Na Tabela 4.4 estão listadas as condições iniciais e finais para as simulações e os experimentos apresentados neste capítulo. A duração da trajetória desejada é definida $t_f = 3.0s$ para todas as coordenadas.

Tabela 4.4: Condições iniciais e finais para as simulações e os experimentos

Controle	Condição inicial	Posição final
Espaço das juntas	$q_m(0) = [0^\circ \quad 0^\circ]^T$	$q_m(t_f) = [30^\circ \quad -30^\circ]^T$

É interessante observar que o sistema real apresenta incertezas paramétricas próprias, atritos não-modelados e outras perturbações desconhecidas. Além disso, para os quatro controladores, distúrbios externos do tipo senóide amortecida, iniciando em $t = 0.5s$, foram introduzidos artificialmente nos motores das juntas ativas. Os distúrbios são dados por:

$$\tau_d = \begin{bmatrix} 0.035e^{-2t} \sin(2\pi t) \\ 0.015e^{-2t} \sin(2\pi t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e mostrados na Figura 4.4. Seus valores máximos representam aproximadamente 50% dos valores máximos dos torques observados nas simulações sem a introdução desse distúrbio.

Figura 4.4: Distúrbios externos aplicados às juntas ativas

O nível de atenuação definido para os quatro controladores é $\gamma = 2$.

4.4.1.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Teoria dos Jogos

As matrizes de ponderação empiricamente selecionadas para a aplicação da técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos são

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix},$$

$Q_2 = 4I_2$, $Q_{12} = 0$, e $R = 2I_2$, satisfazendo todas as condições apresentadas na Seção 2.2.

Os resultados experimentais, posição angular das juntas e torques, são mostrados nas Figuras 4.5 e 4.6, respectivamente.

Figura 4.5: Posição das juntas - MDE, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Figura 4.6: Torques - MDE, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear

4.4.1.2 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

Para aplicar a técnica de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, os parâmetros $\bar{\varphi}$ foram definidos como combinações dos parâmetros dinâmicos (massa, momento de inércia, etc.)

para obter a parametrização linear de $\bar{F}(x_{em})$, dada por $\bar{Y}(\cdot)\bar{\varphi}$:

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} I_2 & I_3 & m_2lc_2^2 & m_3lc_3^2 & m_3W_2^2 & m_3W_2lc_3 \end{bmatrix}^T$$

Dessa forma, variações em qualquer parâmetro físico do modelo são representadas. A matriz de regressão $\bar{Y}(\cdot)$ está no Apêndice A. As Figuras 4.7 e 4.8 mostram os resultados para o controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, considerando $\bar{S} = 120$, $R = 3.2I_2$, $Q_1 = 0.123I_2$, e $Q_2 = 4I_2$. Na Tabela 4.5 estão os valores nominais, os valores iniciais e os valores finais de $\bar{\varphi}$ e na Figura 4.9 é mostrado o comportamento do vetor $\bar{\varphi}$ durante a atualização.

Figura 4.7: Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Figura 4.8: Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Tabela 4.5: Valores iniciais e finais de $\bar{\varphi}$ - MDE

$\bar{\varphi}$	$\bar{\varphi}(\text{nominal})$	$\bar{\varphi}(\mathbf{t_0})$	$\bar{\varphi}(\mathbf{t_f})$
$\bar{\varphi}_1$	0.0075	0.0075	0.0189
$\bar{\varphi}_2$	0.0060	0.0060	0.0076
$\bar{\varphi}_3$	0.0078	0.0078	0.0193
$\bar{\varphi}_4$	0.0037	0.0037	0.0053
$\bar{\varphi}_5$	0.0258	0.0258	0.0372
$\bar{\varphi}_6$	0.0098	0.0098	0.0222

Figura 4.9: Atualização de parâmetros - MDE

4.4.1.3 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear com Redes Neurais

O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais foi caracterizado pelas seguintes variáveis:

- $R = 3.2I_2$, $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 4I_2$, e $Z = 64$,
- $n = 2$ - juntas ativas no MDE,
- $q_2 = q_3 = \dim(x_{em}) = 10$,
- $p_2 = p_3 = 7$ - neurônios na camada oculta,
- $b^2 = b^3 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,
- $[\omega_j^2] = [\omega_j^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$

Com base na discussão realizada na Seção 3.4, neste experimento o conjunto de redes neurais não utiliza qualquer dado dinâmico da base livre flutuante e, portanto, o vetor de entrada da rede é composto apenas por x_{em} definindo q_k . Quanto maior o número p_k

de neurônios na camada oculta, em geral, melhor é o desempenho esperado do sistema neural. Portanto, existe sempre uma negociação entre a complexidade e a precisão na escolha da ordem da rede neural. Essa escolha é, geralmente, subjetiva e baseada em experimentações. Como estamos interessados em obter um sistema neural preciso para aproximar a dinâmica desconhecida na vizinhança do ponto de equilíbrio zero, é intuitivamente evidente que os *bias* devam se concentrar em torno da vizinhança de zero. E ainda, os coeficientes ω_{ij} são, por conveniência, definidos constantes. Dessa forma, o ajuste das redes neurais se concentra apenas na atualização dos componentes de $\bar{\Theta}$.

Os parâmetros $\bar{\Theta}$ são definidos como $\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$ com

$$\Theta_1 = [\Theta_{11} \ \Theta_{12} \ \Theta_{13} \ \Theta_{14} \ \Theta_{15} \ \Theta_{16} \ \Theta_{17}]^T,$$

$$\Theta_2 = [\Theta_{21} \ \Theta_{22} \ \Theta_{23} \ \Theta_{24} \ \Theta_{25} \ \Theta_{26} \ \Theta_{27}]^T.$$

A matriz $\bar{\Xi}$ pode ser montada como

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix},$$

com $\xi_1 = [\xi_{11}, \dots, \xi_{17}]$ e $\xi_2 = [\xi_{21}, \dots, \xi_{27}]$. Dessa forma, o conjunto de redes neurais é definido por:

$$\bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta}) = \bar{\Xi} \bar{\Theta}.$$

Nesta abordagem, o modelo dinâmico do UArmII é considerado totalmente desconhecido e o conjunto de redes neurais, $\bar{E}(x_{e_m}, \bar{\Theta})$, modela o sistema. Os resultados para o controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ via redes neurais são mostrados nas Figuras 4.10 e 4.11.

Figura 4.10: Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais

Figura 4.11: Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais

4.4.1.4 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear com Redes Neurais Baseado em Modelo

Essa abordagem considera o modelo nominal do manipulador bem determinado e o conjunto de redes neurais é utilizado para estimar somente as incertezas e a dinâmica desconhecida da base livre. Neste caso, rede neural mais modelo, os resultados são mostrados nas Figuras 4.12 e 4.13.

Figura 4.12: Posição das juntas - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo

Figura 4.13: Torques - MDE, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo

4.4.2 Simulações no ME

Os controladores validados no UArmII, desenvolvidos com base no modelo desse manipulador de base fixa, são aplicados ao manipulador espacial em simulação. Um erro multiplicativo $\delta = 0.7$ foi introduzido nos parâmetros de forma que a lei de controle tenha acesso aos parâmetros estimados que são iguais a δ vezes os parâmetros verdadeiros:

$$m_{est} = 0.7m \quad I_{est} = 0.7I \quad W_{est} = 0.7W \quad lc_{est} = 0.7lc$$

Além disso, para os quatro controladores, os mesmos distúrbios introduzidos nos experimentos no UArmII, Figura 4.4 também foram aplicados nas simulações. O mesmo nível de atenuação, $\gamma = 2$, foi definido para os quatro controladores.

4.4.2.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Teoria dos Jogos

Para o caso do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos as matrizes de ponderação ajustadas no experimento da Seção 4.4.1 precisaram ser modificadas para que um resultado satisfatório fosse alcançado na aplicação ao manipulador espacial simulado. Dessa forma, têm-se $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 4I_2$, $Q_{12} = 0$, e $R = 3I_2$, satisfazendo todas as condições apresentadas na Seção 2.2. Os resultados simulados, posição angular das juntas e torques, são mostrados nas Figuras 4.14 e 4.15, respectivamente.

4.4.2.2 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear validado no UArmII foi diretamente aplicado no manipulador espacial simulado. As Figuras 4.16 e 4.17 mostram os resultados. Na

Figura 4.14: Posição das juntas - ME, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Figura 4.15: Torques - ME, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Tabela 4.6 estão os valores nominais, iniciais e finais de $\bar{\varphi}$ e na Figura 4.18 é mostrado o comportamento de $\bar{\varphi}$ durante a atualização.

Figura 4.16: Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Figura 4.17: Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

4.4.2.3 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear com Redes Neurais

O controladores adaptativos $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais validados no UArmII também foram diretamente aplicados ao manipulador espacial simulado. Os resultados são mostrados nas Figuras 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22.

Tabela 4.6: Valores iniciais e finais de $\bar{\varphi}$ - ME

$\bar{\varphi}$	$\bar{\varphi}(\text{nominal})$	$\bar{\varphi}(\mathbf{t}_0)$	$\bar{\varphi}(\mathbf{t}_f)$
$\bar{\varphi}_1$	0.0075	0.0052	0.0053
$\bar{\varphi}_2$	0.0060	0.0042	0.0043
$\bar{\varphi}_3$	0.0078	0.0027	0.0027
$\bar{\varphi}_4$	0.0037	0.0013	0.0014
$\bar{\varphi}_5$	0.0258	0.0088	0.0089
$\bar{\varphi}_6$	0.0098	0.0034	0.0035

Figura 4.18: Atualização de parâmetros - ME

4.4.3 Análise dos Resultados

Considerando que o valor de γ utilizado foi o mesmo em todos os controladores, que as equações em espaço de estados e os funcionais utilizados no projeto de cada controlador são diferentes, dois índices de desempenho foram aplicados para possibilitar uma comparação quantitativa entre as técnicas desenvolvidas: a norma $\mathcal{L}_2$ do erro de acompanhamento e o somatório das áreas dos torques aplicados. A Tabela 4.7 apresenta uma média dos resultados obtidos em 5 experimentos no UArmII e a Tabela 4.8 apresenta os resultados obtidos com o manipulador espacial simulado.

Figura 4.19: Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais

Figura 4.20: Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais

Figura 4.21: Posição das juntas - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo

Figura 4.22: Torques - ME, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear via redes neurais baseado em modelo

Uma análise qualitativa dos gráficos mostra que todos os controladores reagiram aos distúrbios, tanto na simulação quanto nos experimentos reais. Os procedimentos adaptativos apresentaram resultados melhores do que o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear puro e, além disso, as duas abordagens que aplicam redes neurais apresentaram os melhores resultados no acompanhamento da trajetória, principalmente nos experimentos realizados no UArmII. O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais que considera o modelo bem definido e estima as incertezas paramétricas e as dinâmicas não modeladas da base, a segunda abordagem, apresentou o melhor resultado em relação ao consumo de energia se

Tabela 4.7: Índices de desempenho - MDE

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}_m]$	$E[\tau_m](\text{Nms})$
$\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via Teoria dos Jogos	0.1483	0.2974
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear	0.0930	0.3636
Adap. $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via RN	0.0533	0.2663
Adap. $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via RN+Modelo	0.0874	0.2500

Tabela 4.8: Índices de desempenho - ME

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}_m]$	$E[\tau_m](\text{Nms})$
$\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via Teoria dos Jogos	0.1539	0.0298
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear	0.0214	0.0070
Adap. $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via RN	0.0181	0.0067
Adap. $\mathcal{H}_\infty$ Não-Linear via RN+Modelo	0.0157	0.0059

comparado com a primeira abordagem, que apresentou o melhor índice de desempenho $\mathcal{L}_2$ no caso do experimento real. Ainda, considerando que o modelo do manipulador espacial simulado não compreende qualquer tipo de atrito, estático ou dinâmico, perturbações presentes nos experimentos com o UArmII, explica-se a diferença no nível dos valores do índice $E[\tau_m]$ entre as Tabelas 4.7 e 4.8. É interessante observar, que, embora os valores do vetor $\bar{\varphi}$ não tenham se aproximado dos valores nominais, Tabelas 4.5 e 4.6, a lei de adaptação foi eficiente em ajustar o efeito dessas combinações de parâmetros no problema de acompanhamento da trajetória. Para que os parâmetros incertos sejam ajustados a seus valores nominais é necessário aplicar ao sistema uma trajetória de referência do tipo excitação persistente, o que não foi o caso apresentado.

Conclusão

Neste trabalho, o problema de acompanhamento de trajetória de um robô manipulador espacial com base livre flutuante sujeito a incertezas na planta e perturbações externas foi proposto e solucionado sob o ponto de vista do critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$. A modelagem do robô manipulador espacial com base livre flutuante foi desenvolvida a partir do conceito do *Manipulador Dinamicamente Equivalente* apresentado em [LIANG et al. (1996)]. Dessa forma, as técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ foram estendidas considerando a subatuação da junta referente à base e sua interferência dinâmica no procedimento de acompanhamento de trajetória.

Dois tipos de controle de movimento são considerados. O primeiro foi desenvolvido no espaço das juntas e realiza o comando direto de posicionamento das juntas do manipulador; o segundo foi desenvolvido no espaço inercial e o controle é direcionado para o posicionamento do efetuador no espaço Cartesiano. Neste último a formulação é desenvolvida diretamente sobre as variáveis de posicionamento do efetuador, visto que, sendo a base livre, não é possível aplicar um procedimento de cinemática inversa para então aplicar o controle no espaço das juntas, pois, este levaria a um sistema indeterminado, ou seja, com infinitas soluções. Dessa forma, os controladores são desenvolvidos no espaço inercial tal que forneçam os torques necessários para as juntas ativas, considerando o aco-

plamento dinâmico da base livre flutuante, conduzirem o acompanhamento da trajetória especificada para o efetuador.

O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos foi aplicado considerando o modelo da planta bem definido e o critério $\mathcal{H}_\infty$ foi utilizado para atenuar os efeitos das incertezas paramétricas e de distúrbios externos. O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear foi proposto para um modelo de planta conhecido, porém construído com base em parâmetros incertos. Uma lei adaptativa foi aplicada para aproximar esses parâmetros através da propriedade de parametrização linear do modelo do MDE e o critério $\mathcal{H}_\infty$ foi utilizado para atenuar os efeitos do erro de aproximação e dos distúrbios externos. O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ baseado em rede neural proposto, considera, em sua primeira abordagem, que o modelo da planta é desconhecido e, portanto, pode ser aplicado diretamente no ME pois não exige a propriedade de parametrização linear do modelo. Uma rede neural foi utilizada para aprender o comportamento da dinâmica desconhecida do sistema robótico nesse caso. Em outra abordagem, considerando a estrutura do modelo nominal bem definida, a rede neural é aplicada na estimação do comportamento das incertezas paramétricas e da dinâmica não modelada da base. O critério $\mathcal{H}_\infty$ foi aplicado, nas duas abordagens, para atenuar o efeito dos erros de aprendizagem.

Os experimentos realizados no UArmII validaram com eficiência os controladores desenvolvidos e as simulações executadas para o manipulador espacial ratificaram esses resultados. É interessante salientar que as abordagens baseadas em redes neurais não utilizam qualquer dado cinemático ou dinâmico da base livre flutuante, visto que valores como a velocidade ou aceleração da base não são fáceis de obter em aplicações reais.

4.5 Trabalhos Futuros

Com base na fundamentação teórica desenvolvida nesta dissertação e nos resultados obtidos propõe-se sua extensão nos tópicos:

- aplicação experimental do procedimento de controle no espaço inercial em um MDE;
- aplicação experimental em um ME;
- desenvolvimento das técnicas abordadas nesta dissertação para o ME sujeito a restrição de força;
- controle híbrido para situações em que haja saltos entre base controlada e base livre flutuante; etc.

Referências Bibliográficas

- BERGERMAN, M.; TERRA, M. H.; XU, Y. (2000). Position control of underactuated manipulators: a state-of-the-art review and the road ahead. In *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, pages 361–369, Dordrecht, Holanda. Kluwer Academic Publishers.
- BERGHUIS, H.; ROEBBERS, H.; NIJMEIJER, H. (1995). Experimental Comparison of Parameter Estimation Methods in Adaptive Robot Control. *Automatica*, 31(9):1275–1285.
- CHANG, Y. C.; CHEN, B. S. (1997). A Nonlinear Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control Design in Robotic Systems via Neural Networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(1):13–29.
- CHEN, B. S.; CHANG, Y. C.; LEE, T. C. (1997). Adaptive control in robotic systems with $\mathcal{H}_\infty$ tracking performance. *Automatica*, 33(2):227–234.
- CHEN, B. S.; LEE, T. S.; FENG, J. H. (1994). A nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance. *International Journal of Control*, 59(2):439–461.
- DUBOWSKY, S.; PAPADOPOULOS, E. (1993). The Kinematics, Dynamics, and Control

of Free-Flying and Free-Floating Space Robotic Systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5):531–543.

GU, Y. L.; XU, Y. (1993). A Normal Form Augmentation Approach to Adaptive Control of Space Robot Systems. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 731–737.

HAYKIN, S. (2001). *Redes Neurais: Princípios e Prática*. Bookman, Porto Alegre, Brasil, 2 edition. Traduzido por Paulo Martins Engel.

JARITZ, A.; SPONG, M. W. (1996). An Experimental Comparision of Robust Control Algorithms on a Direct Drive Manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(6):627–640.

JOHANSSON, R. (1990). Quadratic Optimization of Motion Coordination and Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(11):1197–1208.

LEWIS, F. L.; ABDALLAH, C. T.; DAWSON, D. M. (1993). *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Company, New York.

LIANG, B.; XU, Y.; BERGERMAN, M. (1996). Mapping a Space Manipulator to a Dynamically Equivalent Manipulator. Technical report, Carnegie Mellon University - The Robotics Institute. (<http://www.ri.cmu.edu/pubs>).

MENON, C.; BUSOLO, S.; COCUZZA, S.; ABOUDAN, A.; BULGARELLI, A.; BETTANINI, C.; ANGRILLI, F. (2004). Issues and New Solutions for Testing Free-Flying Robots. In *International Astronautical Congress*, 55, Vancouver, Canada.

PAPADOPOULOS, E.; DUBOWSKY, S. (1991). On the Nature of Control Algorithms for

-
- Free-Floating Space Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(6):750–758.
- PARLAKTUNA, O.; OZKAN, M. (2004). Adaptive Control of Free-Floating Space Manipulators Using Dynamically Equivalent Manipulator Model. *Robotics and Automation*, 46:185–193.
- PETRONILHO, A.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2005). Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ tracking control design via neural networks of a constrained robot system. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 44th, pages 5528–5533, Seville, Spain.
- REYES, F.; KELLY, R. (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, 11:267–282.
- SAKAWA, Y. (1999). Trajectory planning of a free-flying robot by using the optimal control. *Optimal Control Applications and Methods*, 20(5):235–248.
- SHOU, H.; JAN, Y. (2005). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ for Spacecraft Attitude Control. In *IFAC World Congress (International Federation of Automatic Control)*, 16, Prague, Czech Republic.
- SIQUEIRA, A. A. G. (2004). *Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear de Robôs Manipuladores Subatados*. Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos. 239p.
- SIQUEIRA, A. A. G.; BERGERMAN, M.; TERRA, M. H. (1999). Underactuated manipulator control system development environment. In *International Conference on CAD/CAM Robotics*, volume 2 of 15, Águas de Lindóia, Brasil.

- SIQUEIRA, A. A. G.; PETRONILHO, A.; TERRA, M. H. (2003). Adaptive nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ applied to a robot manipulator. In *IEEE Conference on Control Applications*, Istambul, Turquia.
- SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). Nonlinear and Markovian $\mathcal{H}_\infty$ Controls of Underactuated Manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(6):811–826.
- VAFA, Z.; DUBOWSKY, S. (1990). The Kinematics and Dynamics of Space Manipulators: The Virtual Manipulator Approach. *International Journal of Robotics Research*, 9(4):3–21. MIT Press.
- WHITCOMB, L. L.; RIZZI, A. A.; KODISTSCHEK, D. E. (1993). Comparative Experiments with a New Adaptive Controller for Robot Arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(1):59–70.
- WOERKOM, P. L. M.; GUELMAN, M.; EHRENWALD, L. (1996). Integrated Adaptive Control for Space Manipulators. *Acta Astronautica*, 38(3):161–174.
- XU, Y.; SHUM, H.; KANADE, J. (1994). Parametrization and Adaptive Control of Space Robot Systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 30(2):435–451.

Apêndice A

Modelos Dinâmicos

1. Modelo dinâmico de um manipulador espacial com 2 elos

Sejam as variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} S_{aa} &= \frac{1}{M_t} m'_1 (m'_2 + m'_3) R_1^2, \\ S_{bb} &= \frac{1}{M_t} [m'_1 (m'_2 + m'_3) L_2^2 + (m'_1 + m'_2) m'_3 R_2^2 + 2m'_1 m'_3 L_2 R_2], \\ S_{cc} &= \frac{1}{M_t} (m'_1 + m'_2) m'_3 L_3^2, \\ S_{ab} &= \frac{1}{M_t} m'_1 [(m'_2 + m'_3) L_2 + m'_3 R_2] R_1, \\ S_{ac} &= \frac{1}{M_t} m'_1 m'_3 R_1 L_3, \\ S_{bc} &= \frac{1}{M_t} [m'_1 L_2 + (m'_1 + m'_2) R_2] m'_3 L_3. \end{aligned}$$

A matriz de inércia é dada por

$$M'_0(q') = M'_0(q_m) = \begin{bmatrix} M'_{11}(q_m) & M'_{12}(q_m) & M'_{13}(q_m) \\ M'_{21}(q_m) & M'_{22}(q_m) & M'_{23}(q_m) \\ M'_{31}(q_m) & M'_{32}(q_m) & M'_{33}(q_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M'_{11}(q_m) &= I'_1 + I'_2 + I'_3 + S_{aa} + S_{bb} + S_{cc} + 2S_{ab} \cos(q'_2) + 2S_{ac} \cos(q'_2 + q'_3) + \\ &+ 2S_{bc} \cos(q'_3), \end{aligned}$$

$$M'_{12}(q_m) = I'_2 + I'_3 + S_{bb} + S_{cc} + S_{ab} \cos(q'_2) + S_{ac} \cos(q'_2 + q'_3) + 2S_{bc} \cos(q'_3),$$

$$M'_{13}(q_m) = I'_3 + S_{cc} + S_{ac} \cos(q'_2 + q'_3) + S_{bc} \cos(q'_3),$$

$$M'_{21}(q_m) = M_{12}(q_m),$$

$$M'_{22}(q_m) = I'_2 + I'_3 + S_{bb} + S_{cc} + 2S_{bc} \cos(q'_3),$$

$$M'_{23}(q_m) = I'_3 + S_{cc} + S_{bc} \cos(q'_3),$$

$$M'_{31}(q_m) = M_{13}(q_m),$$

$$M'_{32}(q_m) = M_{23}(q_m),$$

$$M'_{33}(q_m) = I'_3 + S_{cc},$$

e o vetor de torques não-inerciais é dado por

$$h'_0(q', \dot{q}') = h'_0(q_m, \dot{q}') = \begin{bmatrix} h'_1(q_m, \dot{q}') \\ h'_2(q_m, \dot{q}') \\ h'_3(q_m, \dot{q}') \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h'_1(q_m, \dot{q}') &= (-S_{ab} \sin(q'_2) - S_{ac} \sin(q'_2 + q'_3))(2\dot{q}'_1 + \dot{q}'_2)\dot{q}'_2 + \\
&\quad + (-S_{bc} \sin(q'_3) - S_{ac} \sin(q'_2 + q'_3))(2\dot{q}'_1 + 2\dot{q}'_2 + \dot{q}'_3)\dot{q}'_3, \\
h'_2(q_m, \dot{q}') &= (S_{ab} \sin(q'_2) + S_{ac} \sin(q'_2 + q'_3))(\dot{q}'_1)^2 + (-S_{bc} \sin(q'_3))(2\dot{q}'_1 + 2\dot{q}'_2 + \dot{q}'_3)\dot{q}'_3, \\
h'_3(q_m, \dot{q}') &= (S_{bc} \sin(q'_3) + S_{ac} \sin(q'_2 + q'_3))(\dot{q}'_1)^2 + (S_{bc} \sin(q'_3))(2\dot{q}'_1 + \dot{q}'_2)\dot{q}'_2.
\end{aligned}$$

2. Modelo dinâmico de um manipulador de base fixa com 3 elos

Sejam as variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -m_2 W_1 l c_2 \sin(q_2), \\
t_2 &= -m_3 W_1 W_2 \sin(q_2), \\
t_3 &= -m_3 W_1 l c_3 \sin(q_2 + q_3), \\
t_4 &= -m_3 W_2 l c_3 \sin(q_3).
\end{aligned}$$

A matriz de inércia é dada por

$$M_0(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}(q) &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l c_1^2 + m_2 (W_1 + l c_2^2 + 2W_1 l c_2 \cos(q_2)) + \\
&\quad + m_3 (W_1^2 + W_2^2 + l c_3^2 + 2W_1 W_2 \cos(q_2) + 2W_2 l c_3 \cos(q_3) + \\
&\quad + 2W_1 l c_3 \cos(q_2 + q_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12}(q) &= I_2 + I_3 + m_2(lc_2^2 + W_1lc_2 \cos(q_2)) + \\
&\quad + m_3(W_2^2 + lc_3^2 + W_1W_2 \cos(q_2) + 2W_2lc_3 \cos(q_3) + W_1lc_3 \cos(q_2 + q_3)), \\
M_{13}(q) &= I_3 + m_3(lc_3^2 + W_2lc_3 \cos(q_3) + W_1lc_3 \cos(q_2 + q_3)), \\
M_{21}(q) &= M_{12}(q), \\
M_{22}(q) &= I_2 + I_3 + m_2lc_2^2 + m_3(W_2^2 + lc_3^2 + 2W_2lc_3 \cos(q_3)), \\
M_{23}(q) &= I_3 + m_3(lc_3^2 + W_2lc_3 \cos(q_3)), \\
M_{31}(q) &= M_{13}(q), \\
M_{32}(q) &= M_{23}(q), \\
M_{33}(q) &= I_3 + m_3lc_3^2,
\end{aligned}$$

e o vetor de torques não-inerciais é dado por

$$h_0(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \\ h_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h_1(q, \dot{q}) &= 2(t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2(t_3 + t_4)\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2(t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_2\dot{q}_2 + \\
&\quad + 2(t_3 + t_4)\dot{q}_2\dot{q}_3 + (t_3 + t_4)\dot{q}_3\dot{q}_3, \\
h_2(q, \dot{q}) &= -(t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_1\dot{q}_1 + 2t_4\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2t_4\dot{q}_2\dot{q}_3 + t_4\dot{q}_3\dot{q}_3, \\
h_3(q, \dot{q}) &= -(t_3 + t_4)\dot{q}_1\dot{q}_1 - 2t_4\dot{q}_1\dot{q}_2 - t_4\dot{q}_2\dot{q}_2.
\end{aligned}$$

Escrevendo $h_0(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q})\dot{q}$ tem-se:

$$C_0(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = 2(t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_2 + 2(t_3 + t_4)\dot{q}_3,$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = (t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_2 + 2(t_3 + t_4)\dot{q}_3,$$

$$C_{13}(q, \dot{q}) = (t_3 + t_4)\dot{q}_3,$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = -(t_1 + t_2 + t_3)\dot{q}_1 + 2t_4\dot{q}_3,$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = t_4\dot{q}_3,$$

$$C_{23}(q, \dot{q}) = t_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3),$$

$$C_{31}(q, \dot{q}) = -(t_3 + t_4)\dot{q}_1 - 2t_4\dot{q}_2,$$

$$C_{32}(q, \dot{q}) = -t_4\dot{q}_2,$$

$$C_{33}(q, \dot{q}) = 0.$$

3. Matriz Jacobiana para um manipulador espacial com 2 elos

Sejam as variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{R_1 m'_1}{Mt}, \\ r_2 &= \frac{R_2(m'_1 + m'_2)}{Mt}, \\ r_3 &= \frac{R_3(m'_1 + m'_2 + m'_3)}{Mt}, \end{aligned}$$

$$l_2 = \frac{L_2 m'_1}{Mt},$$

$$l_3 = \frac{L_3(m'_1 + m'_2)}{Mt}.$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$J'_0(q') = \begin{bmatrix} J'_{11}(q') & J'_{12}(q') & J'_{13}(q') \\ J'_{21}(q') & J'_{22}(q') & J'_{23}(q') \\ J'_{31}(q') & J'_{32}(q') & J'_{33}(q') \end{bmatrix}$$

$$J'_{11}(q') = J'_{12}(q') = J'_{13}(q') = 1,$$

$$J'_{21}(q') = -r_1 \sin(q'_1) - (r_2 + l_2) \sin(q'_1 + q'_2) - (r_3 + l_3) \sin(q'_1 + q'_2 + q'_3),$$

$$J'_{22}(q') = -(r_2 + l_2) \sin(q'_1 + q'_2) - (r_3 + l_3) \sin(q'_1 + q'_2 + q'_3),$$

$$J'_{23}(q') = -(r_3 + l_3) \sin(q'_1 + q'_2 + q'_3),$$

$$J'_{31}(q') = r_1 \cos(q'_1) + (r_2 + l_2) \cos(q'_1 + q'_2) + (r_3 + l_3) \cos(q'_1 + q'_2 + q'_3),$$

$$J'_{32}(q') = (r_2 + l_2) \cos(q'_1 + q'_2) + (r_3 + l_3) \cos(q'_1 + q'_2 + q'_3),$$

$$J'_{33}(q') = (r_3 + l_3) \cos(q'_1 + q'_2 + q'_3).$$

4. Matriz Jacobiana para um manipulador de base fixa com 3 elos

A matriz Jacobiana é dada por

$$J_0(q) = \begin{bmatrix} J_{11}(q) & J_{12}(q) & J_{13}(q) \\ J_{21}(q) & J_{22}(q) & J_{23}(q) \\ J_{31}(q) & J_{32}(q) & J_{33}(q) \end{bmatrix}$$

$$J_{11}(q) = J_{12}(q) = J_{13}(q) = 1,$$

$$J_{21}(q) = -W_1 \sin(q_1) - W_2 \sin(q_1 + q_2) - W_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{22}(q) = -W_2 \sin(q_1 + q_2) - W_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{23}(q) = -W_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{31}(q) = W_1 \cos(q_1) + W_2 \cos(q_1 + q_2) + W_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{32}(q) = W_2 \cos(q_1 + q_2) + W_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{33}(q) = W_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3).$$

5. Matriz de regressão linear para o controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear - Espaço das Juntas

Sejam as variáveis auxiliares:

$$y_{11} = \ddot{q}_2^d - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{\tilde{q}}_2,$$

$$y_{12} = \ddot{q}_3^d - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{\tilde{q}}_3,$$

$$y_{21} = \dot{q}_2^d - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{q}}_2,$$

$$y_{22} = \dot{q}_3^d - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{q}}_3.$$

A matriz de regressão é dada por

$$\bar{Y}(\cdot) = \begin{bmatrix} Y_{11}(\cdot) & Y_{12}(\cdot) & Y_{13}(\cdot) & Y_{14}(\cdot) & Y_{15}(\cdot) & Y_{16}(\cdot) \\ Y_{21}(\cdot) & Y_{22}(\cdot) & Y_{23}(\cdot) & Y_{24}(\cdot) & Y_{25}(\cdot) & Y_{26}(\cdot) \end{bmatrix}$$

$$Y_{11}(\cdot) = Y_{13}(\cdot) = Y_{15}(\cdot) = y_{11},$$

$$Y_{12}(\cdot) = Y_{14}(\cdot) = Y_{22}(\cdot) = Y_{24}(\cdot) = y_{11} + y_{12},$$

$$Y_{16}(\cdot) = 2y_{11} \cos(q_3) + y_{12} \cos(q_3) - y_{21} \dot{q}_3 \sin(q_3) - y_{22}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_3),$$

$$Y_{21}(\cdot) = Y_{23}(\cdot) = Y_{25}(\cdot) = 0,$$

$$Y_{26}(\cdot) = y_{11} \cos(q_3) + y_{21} \dot{q}_2 \sin(q_3).$$

Apêndice B

Ajuste Estrutural do UArmII para Assegurar a Equivalência

O conjunto de condições para a equivalência cinemática e dinâmica (1.23) entre o manipulador espacial e o manipulador de base fixa especifica $lc_1 = 0$. Essa condição vem da derivação do modelo de equivalência, quando a igualdade entre as energias cinéticas dos dois manipuladores leva a $m_1lc_1^2 = 0$. Como $m_1 \neq 0$, então $lc_1 = 0$.

O termo $m_1lc_1^2$ aparece na matriz inercial do modelo do base fixa e, quando diferente de zero, gera um modelo falso em relação ao espacial. O robô UArmII possui $lc_1 = 96mm$ e $m_1 = 0,86Kg$, gerando uma inconsistência a ser resolvida para o procedimento experimental.

O erro provocado por lc_1 só tem efeito sobre o termo

$$\begin{aligned} M_{11}(q) = & I_1 + I_2 + I_3 + m_1 lc_1^2 + m_2(W_1 + lc_2^2 + 2W_1 lc_2 \cos(q_2)) + \\ & + m_3(W_1^2 + W_2^2 + lc_3^2 + 2W_1 W_2 \cos(q_2) + 2W_2 lc_3 \cos(q_3) + \\ & + 2W_1 lc_3 \cos(q_2 + q_3)), \end{aligned}$$

pois é sua única ocorrência no modelo dinâmico do UArmII. Observa-se que o termo $m_1 lc_1^2$ é apenas parte do valor de $M_{11}(q)$. Uma solução seria aumentar as outras parcelas para que $m_1 lc_1^2$ não cause tanto efeito no valor final. As outras parcelas são os momentos de inércia e expressões multiplicadas por m_i , dessa forma, um acréscimo de massa no segundo e terceiro elos faria com que $m_1 lc_1^2$ fosse menos importante no resultado. Outra opção é diminuir diretamente o termo problemático. Diminuir m_1 exigiria alterações significativas no robô, além disso, lc_1 aparece ao quadrado na equação, portanto alterar seu valor implica em maior impacto no resultado final.

Para ambos os robôs

$$\tau = M\ddot{q}(q, \dot{q}) + h(q, \dot{q}),$$

então, pode-se analisar numericamente o erro resultante no torque τ provocado por uma entrada de aceleração $\ddot{q}$ normalizada constante e um posicionamento q e velocidade $\dot{q}$ qualquer. Um programa em Matlab foi implementado para produzir resultados provenientes de uma equivalência imperfeita. Como o modelo matemático é altamente não-linear, um levantamento numérico baseado em entradas aleatórias foi realizado. Aplicou-se o seguinte procedimento¹, Figura B.1:

¹Procedimento e análise realizados por Eduardo Lussari.

1. Fixa os parâmetros do base fixa;
2. Calcula os parâmetros de um Espacial Equivalente;
3. Gera posição e velocidade aleatoriamente;
4. Obtém os torques das duas plantas;
5. Calcula diferença entre torques;
6. Volta para 2, repete-se muitas vezes (máximo de combinações possível);
7. Calcula a média do erro e o erro máximo;
8. Volta para 1, tenta outro parâmetro para o base fixa.

Figura B.1: Diagrama de blocos para análise quantitativa do erro

O gráfico B.2 mostra a variação do erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE}$ em relação à variação das massas dos elos 2 e 3, $m_2 = m_3 = 850g$ (valor do robô) até $m_2 = m_3 = 1,85kg$, considerando também a variação dos momentos de inércia I_2 e I_3 devido à variação da massa. O gráfico B.3 mostra a variação do erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE}$, obtido através da variação de $lc_1 = 96mm$ (valor real do UArmII) até $lc_1 = 0$ (valor ideal).

Essa análise quantitativa revela que o esforço deve ser concentrado na redução de lc_1 ,

Figura B.2: Erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE} \times (m_2, m_3)$

Figura B.3: Erro relativo $(\tau_{MDE} - \tau_{ME})/\tau_{MDE} \times l_{c1}$

pois leva a um melhor desempenho na redução do erro de modelagem.

A fim de obter um robô planar com o centro de massa do primeiro elo coincidente com o eixo de rotação da primeira junta ($l_{c1} = 0$), foi confeccionado um suporte em *MDF* para adaptar um peso em forma de anilha de $m_a = 1kg$ que possibilitasse alterar o valor de l_{c1} , Figura B.4. Naturalmente essa adição de peso altera massa e momento de inércia do elo, entretanto, por se tratar de uma junta passiva, não haverá nenhuma sobrecarga no motor.

Figura B.4: Suporte e peso utilizados para modificar as propriedades dinâmicas do UArmII

Considerando $l_{c1} = 96mm$, $m_1 = 850g$ e $I_1 = 7 \times 10^{-3}kg.m^2$, a massa adicional

$m_a = 1kg$ deve ser posicionada a uma distância d tal que:

$$\bar{l}c_1 = \frac{m_1lc_1 + m_ad}{m_1 + m_a} = 0.$$

Portanto, $d = -81mm$ em relação ao eixo de rotação da primeira junta. O momento de inércia adicionado I_a é calculado:

$$I_a = I_d + m_ad^2,$$

sendo $I_d = \frac{m_a(R_1^2 - R_2^2)}{2} = \frac{1 \times (0,06^2 - 0,015^2)}{2} = 1,69 \times 10^{-3} kg.m^2$ o momento de inércia da anilha de peso. E assim, $I_a = 0,008251$. Dessa forma, os novos parâmetros do UArmII e do ME equivalente são dados por

Tabela B.1: Parâmetros do UArmII

i	m_i (kg)	I_i (kgm ²)	W_i (m)	lc_i (m)
Junta 1	1.932	0.015251	0.203	0
Junta 2	0.850	0.0075	0.203	0.096
Junta 3	0.850	0.006	0.203	0.077

Tabela B.2: Parâmetros do Manipulador Espacial

i	m_i (kg)	I_i (kgm ²)	R_i (m)	L_i (m)
Base	4.816	0.015251	0.253	0
Junta 1	0.618	0.0075	0.118	0.12
Junta 2	0.566	0.006	0.126	0.085