

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP  
EXEMPLAR REVISADO  
Data de entrada no Serviço: 05/11/01  
Ass.: *Guilherme*

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS À  
ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELÉTRICOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos,  
da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para  
obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

DEDALUS - Acervo - EESC



31100036810

Candidato: Engenheiro Eletricista WAHIB ATIQUE JÚNIOR  
Orientador: Prof. Dr. DIÓGENES PEREIRA GONZAGA

São Carlos, 05 de Outubro de 2.001



Class.	TESE
Cutt.	0525
Tombo	T0263/01

1213030

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

A872a Atique Júnior, Wahib  
Aplicação do método dos elementos finitos à análise  
de dispositivos elétricos / Wahib Atique Júnior. --  
São Carlos, 2001.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.

Área: Engenharia Elétrica.


Orientador: Prof. Dr. Diógenes Pereira Gonzaga.

1. Elementos finitos. 2. Malhação. 3. Cálculo  
variacional. I. Título.


FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro WAHIB ATIQUE JUNIOR

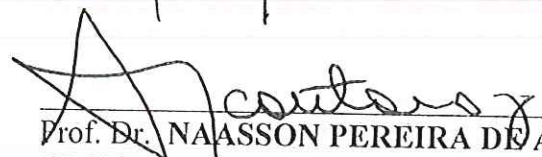
Dissertação defendida e julgada em 05-10-2001 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. DIÓGENES PEREIRA GONZAGA (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)


Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Tit. RUY ALBERTO CORRÊA ALTAFIM  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. NAASSON PEREIRA DE ALCÂNTARA JUNIOR  
(UNESP - Campus de Bauru)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doutor MURILO ARAUJO ROMERO  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

  
\_\_\_\_\_  
JOSÉ CARLOS A. CINTRA  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

## Dedicatória

---

Ao meu pai Wahib , e à minha  
mãe Maria Lúcia pelo eterno  
amor , dedicação e apoio!

## Agradecimentos

---

Ao Professor Dr. Diógenes Pereira Gonzaga , pela orientação e amizade durante a orientação deste trabalho.

Ao Professor Dr. Ruy A.C. Altafim pelo apoio e colaboração em termos de laboratório.

Ao Professor Dr. João Lirani pela colaboração em laboratório e uso de softwares.

À Mestra em Engenharia Elétrica Cacilda R. Murakami pelo apoio prestado.

## Sumário

LISTA DE FIGURAS	I
LISTA DE TABELAS	IV
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	IV
LISTA DE SÍMBOLOS	V
RESUMO	VII
ABSTRACT	VIII
1 GENERALIDADES	1
1.1 Introdução	1
1.2 Estado da Arte do Método dos Elementos Finitos	2
1.3 Por que usar o Método dos Elementos Finitos	3
1.4 Como é aplicado o Método dos Elementos Finitos	4
2 DESENVOLVIMENTO	6
2.1 Teoria dos Elementos Finitos	6
2.1.1 Introdução	6
2.1.2 Formulação Matemática	8
2.1.2.1 Eletrostática	9
2.1.2.2 Campos de Correntes Estacionárias	16
2.1.2.3 Magnetostática	17
2.1.3 Continuidade entre Elementos	19
2.2 Materiais Não Uniformes e Fontes sem Homogeneidade	25
2.2.1 Equação de Poisson	26
2.2.2 Modelagem do Termo Fonte	28
2.2.3 Materiais não homogêneos	31
2.2.4 Condições de Interface Natural	31
2.2.5 Energia e Avaliação de Capacitância	34
3 O Uso do MEF	36
3.1 Exemplos de Programação no MEF em FORTRAN	37
3.2 Exemplos de Programação do MEF usando o ANSYS™	44
4 Aplicações do ANSYS™	47
4.1 Interface AUTOCAD™-R14 com ANSYS™	48

4.2 Descrição da Resina de Óleo de Mamona	49
4.3 Relações de Fronteira {ver em [16]}	50
4.4 Aplicação do ANSYS ao Isolador externo 13,8kV	53
4.5 “Malhação” com 8.496 elementos e 13.622 nós	59
4.6 Introdução de Bolhas de Ar no Isolador externo...	61
4.7 “Malhação” com 8496 elementos e 13622 nós com Bolhas de Ar	64
4.8 Análise do Isolador Interno com o ANSYS, com “malhação” de 3209 elementos e 5894 nós	66
4.9 – Mapeamento de um Transformador de Força utilizando o ANSYS	72
4.10 – Mapeamento de Um Reator Magnético	80
5 – Comentários e Conclusões	86
ANEXO A	89
ANEXO B	103
ANEXO C	117
ANEXO D	130
Referências Bibliográficas	132

### Lista de Figuras

- Figura 1.1 – Mapeamento do fluxo magnético no entreferro de um gerador de corrente contínua de 300kW, 900 r.p.m. [KUHLMANN].
- Figura 2.1 – Domínio bidimensional dividido em elementos triangulares, [CARDOSO, [2]]
- Figura 2.2 – Região de Controle envolvendo os nós, [CARDOSO, [2]].
- Figura 2.3 – Partes das regiões de controle internas ao elemento, [CARDOSO, [2]].
- Figura 2.4 – Elemento Genérico, [CARDOSO, [2]].
- Figura 2.5 – Interpretação Geométrica, [CARDOSO, [2]].
- Figura 2.6 – União de dois elementos - (a) Par de elementos considerados eletricamente disjuntos; (b) Os mesmos elementos com potenciais contínuos e nós reenumerados, [SILVESTER, [1]].
- Figura 2.7 – (a) Modelo de 1/4 de uma linha coaxial retangular, mostrando o problema de condição de contorno; (b) Malha de elementos finitos para análise da linha, [SILVESTER, [1]].
- Figura 2.8 – Contorno equipotencial para o problema da linha coaxial da FIGURA 2.7. Note o formato das curvas na ligação dos interelementos, [SILVESTER, [1]].
- Figura 2.9 – (a) Ranhura do rotor de máquina elétrica, com condutores carregados. (b) Malha de elementos finitos para análise dos campos na ranhura e no entreferro de ar perto da ranhura, [SILVESTER, [1]].
- Figura 2.10 – Solução dos problemas de ranhuras de máquinas elétricas da FIGURA 2.9. As equipotenciais de A correspondem a linhas de fluxo magnético, [SILVESTER, [1]].
- Figura 2.11 – Blindagem de linha micro-lâmina . A blindagem mais externa está no mesmo potencial do plano terra.
- Figura 2.12 – Dois elementos adjacentes com permissividades diferentes, [SILVESTER], [1]].
- Figura 3.1 – Corte transversal reto de um *guia de ondas*, [6]
- Figura 3.2 – Corte transversal reto de um *dente de máquina elétrica*: ranhura no rotor e (b) esboço da “malhação” da região, [SILVESTER], [1]].
- Figura 3.3 – Distribuição da malha construída manualmente, para o *guia de ondas*
- Figura 3.4 – Distribuição dos potenciais na “malhação” do *guia de ondas*



- Figura 3.5 – Potenciais Magnéticos finais do *dente de máquina elétrica*, gerado pelo programa SATURMAT
- Figura 3.5a – *Guia de ondas* com a distribuição de equipotenciais
- Figura 3.6 – Potenciais Magnéticos finais do *dente de máquina*, gerado pelo programa ANSYS™
- Figura 4.1 – *Isolador externo* classe 15 kV
- Figura 4.2 – *Isolador interno* classe 15kV
- Figura 4.3 – Campo Elétrico tangencial é contínuo através de uma fronteira
- Figura 4.4 – A componente normal da densidade de fluxo é contínua através de uma fronteira desprovida de cargas
- Figura 4.5 – Fronteira entre dois meios dielétricos, mostrando a refração, ou mudança na direção, da linha de campo
- Figura 4.6 – Aplicação de cargas no isolador, potenciais: parte superior 13,8kV, parte inferior 0V
- Figura 4.7 – Equipotenciais aplicadas em corte de 90°, para demonstrar importância da cabeça do isolador
- Figura 4.8 – Equipotenciais na cabeça do isolador
- Figura 4.9 – Equipotenciais na cabeça do isolador (Detalhe)
- Figura 4.10 – Campo Elétrico na cabeça do isolador
- Figura 4.11 – Campo Elétrico na cabeça do isolador (Detalhe)
- Figura 4.12 – Nova “malhação” com 1129 elementos e 2182 nós
- Figura 4.13 – Equipotenciais para 1129 elementos e 2182 nós na “malhação”
- Figura 4.14 – Campo elétrico para 1129 elementos e 2182 nós na “malhação”, (valores x1000)
- Figura 4.15 – Nova “malhação” do isolador com 8.496 elementos e 13.622 nós
- Figura 4.16 – Equipotenciais do isolador
- Figura 4.17 – Campo elétrico em que é atingida uma grande precisão
- Figura 4.18 – Aplicação de tensão no isolador: parte superior 13,8kV e inferior 0V
- Figura 4.19 (a) – Equipotenciais no isolador com bolhas de ar cilíndricas
- Figura 4.19 (b) – Equipotenciais no isolador com bolhas de ar cilíndricas (Detalhes)
- Figura 4.20 – Campo Elétrico na cabeça do isolador com bolhas cilíndricas
- Figura 4.21 – Campo Elétrico na cabeça do isolador com bolhas cilíndricas (Detalhe)

Figura 4.22 – Cabeça do isolador com bolhas de ar e “malhação” de 8.496 elementos e 13.622 nós

Figura 4.22(a) – Equipotenciais para a nova “malhação”

Figura 4.23 – Campo elétrico para a nova “malhação”

Figura 4.24 – Campo elétrico para a nova “malhação” (Detalhes)

Figura 4.25: Isolador interno, mostrado em 3 dimensões, em perspectiva

Figura 4.26: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90°

Figura 4.27: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90° (Detalhe)

Figura 4.28: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°

Figura 4.29 : Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°(Detalhe)

Figura 4.30: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar

Figura 4.31: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar (Detalhe)

Figura 4.32: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar

Figura 4.33: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar (Detalhe)

Figura 4.34 – Dimensões do Núcleo e das Bobinas do Transformador de 1.000kVA.

Figura 4.35 – “Malhação” do Transformador - Vermelho: Ar / Roxo: Cobre / Azul: Núcleo.

Figura 4.36 – Densidade de Fluxo Magnético (Tesla), (fases: 240°, 0°e 120°)

Figura 4.37 – Fluxo Magnético no Núcleo (Weber).

Figura 4.38 – Núcleo e Bobina do Reator.

Figura 4.39 – Curva de Magnetização do Aço –Silício 4%.

Figura 4.40 – Desenho da Malhação do Reator – Roxo: Cobre / Vermelho: Ar / Azul: Aço.

Figura 4.41 – Densidade de Fluxo Magnético B, do Reator (Tesla)

Figura 4.42 – Fluxo Magnético do Reator (Weber)

Figura 4.43 – Representação Vetorial da Indução Magnética (Tesla)

Figura 5.1: “Cabeça” do isolador onde é visível o rompimento do dielétrico, num isolador de resina poliuretana derivada de óleo de mamona.

### **Lista de Tabelas**

Tabela 3.1 – Dados de entrada do SIMPLE2D

Tabela 3.2 – Especificação de cargas no SIMPLE2D

Tabela 3.3 – Entrada dos potenciais no SIMPLE2D

Tabela 3.4 – Saída do SIMPLE2D (resultados)

Tabela 3.5 - Coordenadas cartesianas dos pontos em um *dente de máquina elétrica* mostrado na figura 3.5

Tabela 3.6 Montagem da malha , em que é colocado o tipo de material codificado e a densidade de carga, para execução posterior no programa SATURMAT. Ponto em que coloca-se tensão

Tabela 3.7 Entrada de potenciais prescritos no SATURMAT

Tabela 3.8 Saída de dados no programa SATURMAT

Tabela 4.1 : Características elétricas da resina sólida de óleo de mamona

### **Lista de Abreviaturas e Siglas**

MEF: Método dos Elementos Finitos

EPUSP: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

GRUCAD-UFSC: Grupo de CAD da Universidade Federal de Santa Catarina

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

CAD/CAE: Computer Aided Design / Computer Aided Engineering

EFSUM: Electric Field Sum

PCG: Pre-Conditioned Conjugated Gradient

JCG: Jacobi Conjugated Gradient

MXWF: Maxwell Force

INF: Infinite

CHRGD: Charge Density

2D: bi-dimensional

3D: tri-dimensional

**Lista de Símbolos**

$A$  ou  $\vec{A}$ : Vetor potencial magnético, [Weber/m].

$V$ : Tensão, ou Potencial, ou diferença de potencial [Volt].

$I$ : Intensidade de Corrente, [Ampère].

$B$  ou  $\vec{B}$ : Vetor Densidade de Fluxo Magnético, [Tesla].

$D$  ou  $\vec{D}$ : Vetor Densidade de Fluxo Elétrico: [Coulomb/m<sup>2</sup>].

$H$  ou  $\vec{H}$ : Vetor Intensidade de Campo magnético, [Ampère/m].

$E$  ou  $\vec{E}$ : Vetor Intensidade de Campo Elétrico, [N/C].

$\nabla$ : Operador Vetorial Nabla, no sistema de coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z$$

$Q_i$ : Quantidade total de cargas internas a uma superfície fechada, [C].

$\epsilon$ : Permissividade dielétrica do meio, [Farad/m].

$\alpha_i$ : Funções da tensão, numérico.

$N_i$ : Funções de forma do elemento, numérico.

$\delta_{ij}$ : Símbolo de Kronecker, numérico.

$\Delta$ : Área do triângulo, numérico.

$\Delta V$ : Diferença de Potencial

$\rho$ : Densidade de cargas volumétrica, [C/m<sup>3</sup>]

[C]: Matriz geométrica conexão, numérica.

$J$  ou  $\vec{J}$ : Vetor Densidade de corrente, [Ampère/m<sup>2</sup>]

[G]: Matriz geométrica conexão, numérica.

[S]: Matriz geométrica conexão, numérica.

$\mu$ : Permeabilidade Magnética do meio, [H/m].

$\mu_0$ : Permeabilidade Magnética do Vácuo, [H/m].

$\nu$ : Relutividade do meio, [m/H].

$l$ : Comprimento, [m].

$a, b, c$ : Combinação de coordenadas cartesianas, numérico.

$x, y, z$ : Coordenadas cartesianas, numérico.

$W$ : Energia total, [Joule].

$h$ : Função Erro diferenciável.

$\theta$ : Parâmetro numérico.

$F(u)$ : Funcional.

$C$ : Capacitância, [F].

$L$ : Indutância, [H].

$v$ : Velocidade de propagação, [m/s].

$Z_0$ : Impedância característica de linha, [ $\Omega$ ].

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar a aplicação de programas computacionais, que utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF), visando a análise de problemas e dispositivos na Engenharia Elétrica, podendo com seus resultados fazer previsões relativamente a suas soluções e desempenhos, muito difíceis de se obter sem esses programas. Assim comparou-se, do ponto de vista do usuário não especialista em programação computacional, as vantagens da aplicação do MEF, seja utilizando programas com base em uma linguagem tradicional, FORTRAN, seja utilizando um *software* profissional, no caso o ANSYS™.

Como exemplos de aplicação, analisou-se o desempenho de isoladores, classe 15kV, construídos de resina de poliuretano à base de óleo de mamona, nos quais foram mapeados potencial e campo elétricos e, também, um transformador de distribuição de 1.000kVA e um reator de 2,3Henry, nos quais foram mapeados fluxo e densidade de fluxo magnéticos.

**Abstract**

The objective of this work is to show the application of Finite-Element Method (FEM) computer programs for analyzing problems and devices on Electrical Engineering; the results permit to realize some previsions about their solutions and performances. So, it had compared advantages of the use of FEM either by using FORTRAN programs or by using ANSYS<sup>TM</sup>, a professional software, by the point of view of a non-specialist programmer.

It was made a performance analysis of castor-oil polyurethane-resin class 15kV insulators, by mapping potential and electric field in their bodies. By other side, it was made the mapping of magnetic flux and magnetic flux density in a 1000kVA distribution transformer and in a 2.3Henry magnetic reactor.

## 1-Generalidades

### 1.1 Introdução

O engenheiro electricista, desde os primórdios desta profissão, sempre teve a necessidade de “conhecer” os campos elétricos e magnéticos envolvidos em dispositivos, sistemas e situações sob estudo.

Livros de projetos de transformadores e máquinas elétricas, como é o caso de KUHLMANN [19], editado pela primeira vez em 1929, mostram os métodos numéricos então utilizados para o fim de mapeamento da densidade de fluxo magnético,  $\mathbf{B}$ , no entreferro de ar de uma máquina, como é mostrado na Figura 1.1, utilizando os *quadrados curvilíneos*, onde eram calculados os valores do fluxo magnético a partir do eixo da sapata polar, o que permitia uma aproximação razoável para a época.

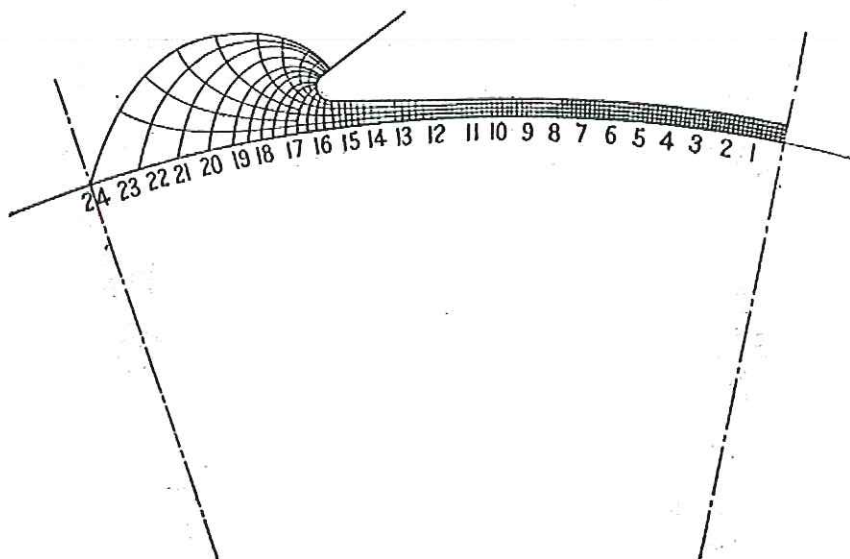


Figura 1.1 - Mapeamento do fluxo magnético no entreferro de um gerador de corrente contínua de 300kW, 900 r.p.m. [KUHLMANN]

Hoje, a utilização de métodos numéricos baseados em matemática superior, como é tratado em [1], [3] e [4], que é o caso do Método dos Elementos Finitos baseado em cálculo



variacional, associados à crescente qualidade dos equipamentos computacionais, cada vez mais rápidos, de maiores capacidades de processamento e armazenamento de dados, bem como de elevada qualidade nas saídas gráficas, permitindo o mapeamento de campos cada vez mais próximos do contínuo, em todas as áreas do conhecimento, que apresentem modelagem matemática convenientemente análogas.

## 1.2. Estado da Arte do Método dos Elementos Finitos

É sabido que em outras áreas da engenharia, bem como em estudos teóricos realizados por especialistas em métodos numéricos, o MEF já vem sendo considerado e utilizado há mais tempo que na engenharia elétrica; nesta área a referência pioneira de peso considerável foi apresentada por SILVESTER & CHIARI, [17], em 1970. Entretanto, apenas na década de 80, paralelamente ao grande desenvolvimento computacional que se mantém até hoje, nos aspectos *software* e *hardware*, é que o MEF passou a interessar e ser usado intensamente, de uma maneira mais formal, na resolução de trabalhos científicos e industriais.

No Brasil, JANIZEWSKY em 1978 na EPUSP apresentou formalmente o trabalho pioneiro, mapeando campos eletromagnéticos estáticos, [18]. A partir de então surgiram grupos de trabalho na própria EPUSP, na UFSC e na UFMG, como pioneiros nos estudos e aplicações do MEF em fenômenos eletromagnéticos. Na EESC/USP, onde já havia uma base de estudos na área de engenharia civil, o trabalho pioneiro em engenharia elétrica usando o MEF foi desenvolvido por ALCÂNTARA Jr. em 1985, [20].

Simultaneamente ao aparecimento destes grupos, uma série de empresas do setor elétrico, impulsionadas pela exigência de qualidade em seus produtos e pela exigência de redução de custos de produção, começaram a implementar, em seus setores de pesquisa e desenvolvimento, estas ferramentas com o objetivo de atingir um grau de precisão superior em seus projetos.

Observa-se, atualmente, uma constante tendência no parque industrial nacional, bem como nas empresas geradoras e concessionárias de energia elétrica, à utilização de *softwares*, com tecnologia CAD/CAE, baseados no Método dos Elementos Finitos, para análise do desempenho dos mais diversos componentes elétricos, tais como: motores/geradores elétricos, transformadores, linhas de transmissão, sistemas de aterramento, atuadores eletromagnéticos, cabos elétricos, dispositivos eletrônicos, etc...

Devemos salientar que, tal como no exterior, foi por meio das universidades brasileiras que se iniciaram os trabalhos utilizando o MEF no Brasil, a exemplo do que ocorreu nos países desenvolvidos, elas foram as responsáveis pelo lançamento no mercado nacional dos primeiros programas, visando atender às necessidades da comunidade acadêmica, no sentido de suprir as pesquisas neste setor, bem como assessorar o setor industrial em suas necessidades de estudos e projetos.

### 1.3 Por que usar o Método dos Elementos Finitos?

Ainda que todos os fenômenos eletromagnéticos conhecidos sejam explicados e modelados através das Equações de Maxwell, em muitos problemas práticos que envolvam situações e dispositivos que apresentem geometrias complexas, as soluções analíticas daquelas equações ficam impraticáveis. Resta, então, a utilização de métodos de cálculo numérico, para que se obtenham soluções aproximadas, porém satisfatórias.

O Método dos Elementos Finitos é um, entre os vários métodos conhecidos de cálculo numérico para fenômenos eletromagnéticos. Ele pode ser aplicado sem as limitações ou dificuldades de implementação que existem em alguns outros métodos, notadamente aqueles de uso já consagrado quando o método dos elementos finitos foi desenvolvido, como o método das diferenças finitas, segundo Anniger, B. S. e Tseng, K., [21], ou outros mais limitados ainda.

Mesmo alguns métodos numéricos mais recentes, como por exemplo o Método dos Elementos de Fronteira, segundo Smith, G. D., [22], apresentam mais dificuldades de

aplicação que o método dos Elementos Finitos, quer no cálculo dos coeficientes dos sistemas de equações, quer no tratamento de meios não lineares ou na exploração dos resultados obtidos.

O maior problema inicial do método dos elementos finitos, a geração da malha, aqui também chamada de “malhação”, cuja necessidade será explicada a seguir, tem sido otimizado com o desenvolvimento e divulgação de vários métodos e implementações para a geração automática por computador segundo George, P. L., [23], por exemplo.

Neste trabalho foi utilizado o modelo 3D, pois trata o dispositivo sob análise de uma forma realista, usando seu formato e medidas reais. Foram aproveitadas as simetrias dos tipos planissimétrica e axissimétrica, visando otimizar a análise, bem como os recursos de processamento e memória computacional.

#### 1.4 Como é aplicado o Método dos Elementos Finitos?

Para utilizar o MEF, o objeto de estudo deve ter sua geometria dividida em inúmeras partes, que são os elementos finitos. Essa subdivisão é chamada malha, sendo geralmente constituída elementarmente, no caso bidimensional, de triângulos ou quadriláteros e, no caso tridimensional, de tetraedros, cujos vértices são denominados nós da malha. É através dela que se monta um sistema de equações, cuja solução permite determinar as grandezas de interesse no fenômeno analisado. No caso eletromagnético, essa solução é o potencial vetor magnético ( $\mathbf{A}$ ) ou o potencial escalar elétrico ( $V$ ), no caso da eletrostática, em cada nó da malha, a partir dos quais é possível determinar os campos magnéticos ( $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ ) ou elétricos ( $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ ) no interior dos elementos finitos e proceder os cálculos de energia, força, torque, parâmetros (indutâncias, capacitâncias e resistências elétricas), etc...

Em geral, todo programa para utilização do método dos elementos finitos são divididos em três fases: **pré-processamento, processamento e pós-processamento** como,

entre outros, Rockey, K. C., Evans, H. R., Griffiths, D. W. & Nethercot, D. A., [24], descrevem em seu trabalho.

O **pré-processamento** engloba o desenho da geometria do objeto estudado, a geração da malha, a imposição das propriedades físicas dos meios envolvidos, isto é, dos materiais que constituem o objeto (Ferro, Cobre, Imãs Permanentes, Ar, etc...) e a imposição dos valores das fontes de campo no objeto (densidade de corrente elétrica nas bobinas, ou densidade de carga elétrica nos materiais) e a imposição das condições de contorno pertinentes ao fenômeno e ao objeto analisados, como potenciais elétricos, por exemplo.

O **processamento** inclui a montagem do sistema de equações, com base nos dados do **pré-processamento**, e a sua resolução, que pode ser efetuada através de métodos diretos ou iterativos, podendo ser linear ou não-linear e com coeficientes reais ou complexos e que, via-de-regra, trata da minimização do funcional da energia nos elementos finitos *quase pontuais*, como é visto na literatura.

O **pós-processamento**, com informações decorrentes das fases anteriores, é que permite a utilização dos resultados do método dos elementos finitos, por meio de vários procedimentos para cálculo e apresentação das grandezas do fenômeno estudado. Assim, os algoritmos que traçam linhas de campo ou equipotenciais sobre a geometria fornecida, os que calculam energia, força, torque e parâmetros, os que traçam gráficos de campos e potenciais sobre segmentos definidos no objeto, ou outros mais específicos para alguns fenômenos ou grandezas, são os membros constituintes do **pós-processamento**.

## 2-Desenvolvimento

### 2.1 Teoria dos Elementos Finitos

#### 2.1.1 Introdução

Na nossa área, basicamente, o MEF fornece como resultados primários o mapeamento de campos, visando suas utilizações em problemas específicos de eletromagnetismo ou de engenharia elétrica em geral, sendo que os nossos campos mais importantes são o campo vetorial elétrico ( $\mathbf{E}$ ) ou o potencial escalar elétrico ( $V$ ) e o campo vetorial densidade de fluxo magnético ( $\mathbf{B}$ ) ou o potencial vetor magnético ( $\mathbf{A}$ ).

Em qualquer campo de estudos, a aplicação do MEF exige uma fase de pré-processamento. Para isso, baseando-se em [1], [2], [3] e [4], é necessário que a geometria do objeto, ou fenômeno, sob estudos seja bem definido. Essa geometria, que é chamada de domínio, é subdividida em inúmeros subdomínios, que na sua forma mais simples são triângulos no caso 2D, e tetraedros no caso 3D. Existem várias técnicas, já automatizadas, pôr meio das quais esta operação é realizada.

A Figura 2.1 mostra um domínio 2D, dividido em elementos, ou sub-domínios, sobre os quais elaborar-se-á um estudo com o objetivo de se determinar a distribuição de potenciais escalares elétricos ( $V$ ), ou potenciais vetores magnéticos ( $\mathbf{A}$ ), visando a obtenção de grandezas e parâmetros elétricos ou magnéticos tais como: indutâncias, capacitâncias, resistências, energias, fluxos, etc..., partindo dos valores de campos específicos dentro dos pequenos subdomínios.

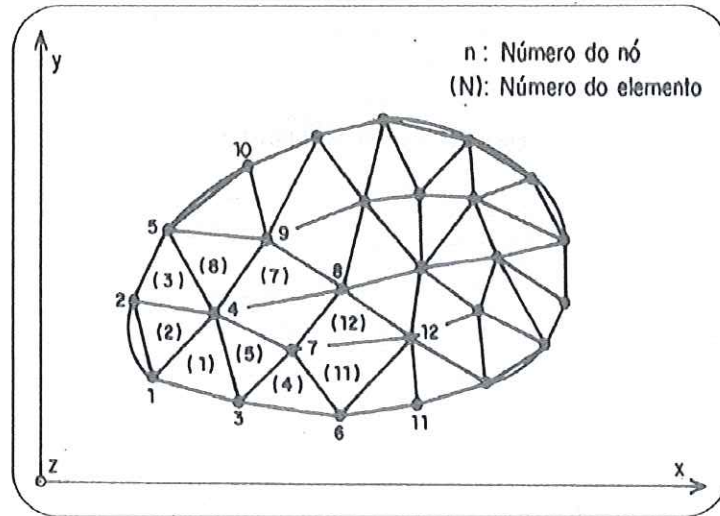


Figura 2.1: Domínio bidimensional dividido em elementos triangulares [CARDOSO, [2]]

Após o domínio em estudo ser dividido, são definidas regiões de controle, conforme [2], envolvendo cada um de seus nós, construídas por segmentos de reta que passam pelos pontos médios das arestas ligadas ao nó e pelos baricentros dos triângulos que admitem o referido nó como vértice.

A Figura 2.2 mostra duas regiões de controle, uma envolvendo um nó interno ao domínio, e a outra envolvendo um nó da sua fronteira.

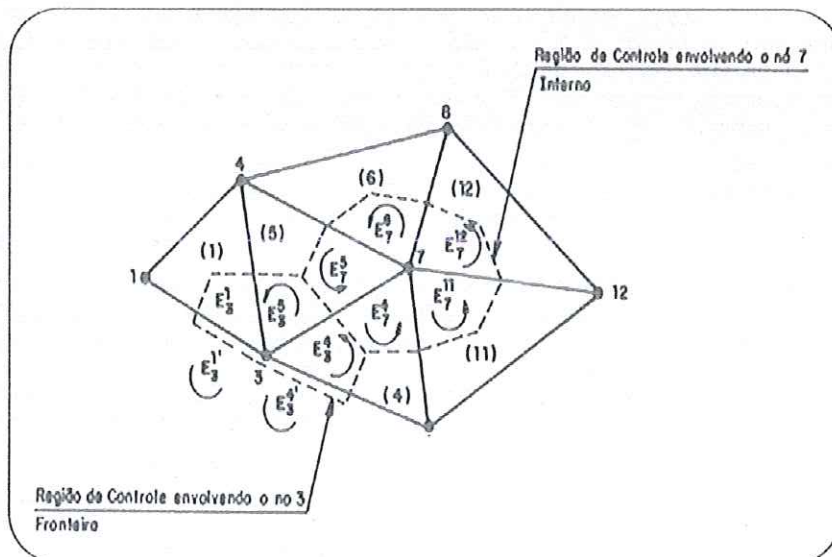


Figura 2.2: Região de Controle envolvendo os nós [CARDOSO, [2]] (\*)

A Figura 2.3 mostra um elemento genérico do domínio: o ponto O é seu baricentro, os pontos P, S e G são os pontos médios de suas arestas. Os segmentos PO e OS são partes da região de controle que envolve o nó número 1. Analogamente, os segmentos PO e OG são partes da região que envolve o nó número 2, e os segmentos GO e OS são partes da região de controle que envolve o nó 3, como pode ser visto em [2].

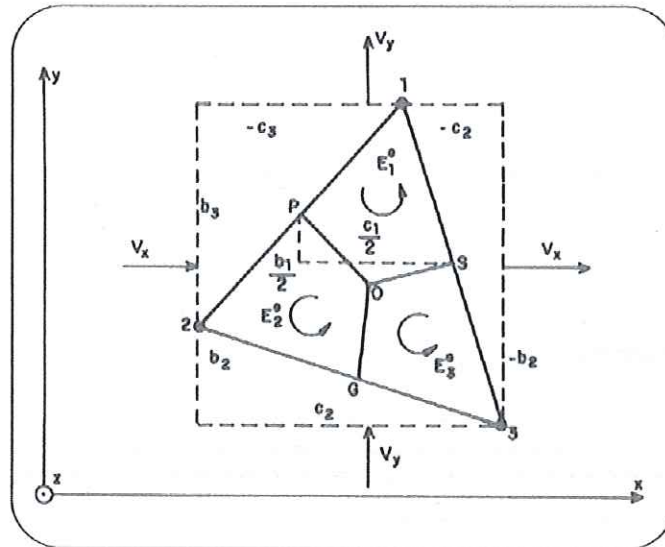


Figura 2.3 : Partes das regiões de controle internas ao elemento [CARDOSO,[2]] (\*).

(\* Observação: nas figuras 2.2 e 2.3, os símbolos  $E_i^j$  podem vir a ser confundidos com o tradicional símbolo do campo elétrico E, assim, à frente neste nosso texto usamos, em lugar deles,  $K_i^j$ .

### 2.1.2 Formulação Matemática

Os casos a serem mostrados nesta seção do trabalho serão, a priori, em 2D, ou seja, os campos envolvidos apresentam uma distribuição plana, que se repetem em planos paralelos, não variando transversalmente ao plano, que seria o caso de uma máquina elétrica, se a fôssemos analisar.

Trabalharemos, aqui, com elementos triangulares, em cujos vértices são avaliados os potenciais elétricos ou magnéticos. As grandezas serão consideradas apenas em regime permanente.

Assim sendo, há três situações a analisar, como é feito em [2]:

- Eletrostática
- Campo de Correntes (Eletrocinética)
- Magnetostática

Como pode ser visto em [13], [15] e [16], nos dois primeiros casos o campo elétrico age em meios lineares, isto é, as permissividades ou condutividades presentes não são afetadas pela intensidade do campo elétrico, ao passo que na magnetostática, da presença de meios ferromagnéticos decorrem não linearidades, já que a intensidade de campo magnético afeta a permeabilidade magnética.

### 2.1.2.1 Eletrostática

A Lei de Gauss rege a aplicação do MEF na eletrostática, apresentada na forma da quarta equação de Maxwell:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_i \quad \text{Eq2.1}$$

onde:

**D** é o vetor deslocamento elétrico, ou densidade de fluxo elétrico, (C/m<sup>3</sup>)

$Q_i$  é a quantidade total de cargas elétricas internas à superfície fechada  $S$  (C)

O vetor deslocamento **D** e o vetor campo elétrico **E** estão relacionados através da relação constitutiva:

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad \text{Eq2.1a}$$

na qual  $\epsilon$  é a permissividade dielétrica do meio, que na maioria das aplicações pode ser admitida constante. Já o vetor campo elétrico **E** e a função potencial escalar  $V$  são associados por meio do operador vetorial gradiente:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{Eq2.1b}$$

Desta equação podemos obter a Equação de Laplace, numa região onde não há cargas elétricas:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{Eq2.1c}$$

Assim, considerando-se o elemento triangular genérico de um domínio discretizado, que é mostrado na FIGURA 2.4, sejam  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  os potenciais elétricos dos seus vértices 1, 2 e 3, respectivamente. Tendo em vista que a função potencial é contínua, calcula-se o



potencial elétrico num ponto  $R(x,y)$  qualquer no interior do elemento, através de uma interpolação linear dos potenciais de seus vértices, sempre segundo [2].

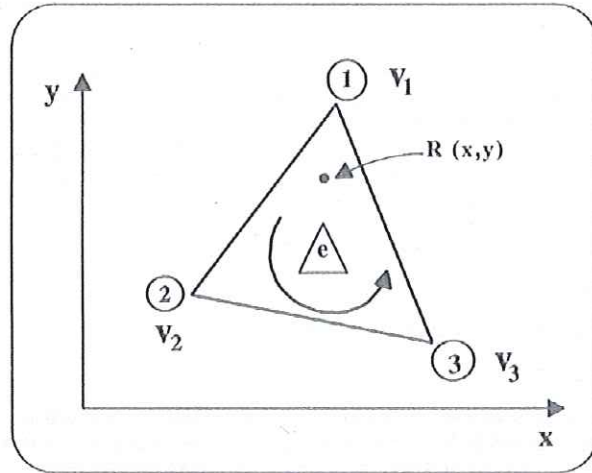


FIGURA 2.4: Elemento genérico [CARDOSO, [2]].

O potencial do ponto  $R$  pode ser expresso, então, pela uma função linear a seguir:

$$V(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot X + \alpha_3 \cdot Y \quad \text{Eq2.2}$$

onde os coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são funções de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ .

Para determiná-los, basta aplicar a Eq2.2 aos vértices do elemento da Figura 2.4, chegando ao seguinte sistema de equações:

$$V_i = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot X_i + \alpha_3 \cdot Y_i \quad (i \in \{1,2,3\}) \quad \text{Eq2.3}$$

A solução da Eq. 2.3 fornece os valores dos coeficientes da Eq2.2, resultando:

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2 \cdot \Delta}\right)(a_1 \cdot V_1 + a_2 \cdot V_2 + a_3 \cdot V_3) \quad \text{(a)}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \Delta}\right)(b_1 \cdot V_1 + b_2 \cdot V_2 + b_3 \cdot V_3) \quad \text{(b)}$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{1}{2 \cdot \Delta}\right)(c_1 \cdot V_1 + c_2 \cdot V_2 + c_3 \cdot V_3) \quad \text{(c)} \quad \text{Eqs2.4}$$

onde:

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad ; \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad e \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad ; \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad e \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad ; \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad e \quad c_3 = x_2 - x_1$$

e

$$\Delta = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{2}$$

Substituindo as Eqs.2.4 na Eq.2.2, obtemos a expressão do potencial num ponto qualquer no interior do elemento, por meio de uma interpolação linear dos potenciais em seus vértices, como segue:

$$V(x, y) = N_1.V_1 + N_2.V_2 + N_3.V_3 \quad \text{Eq2.5}$$

onde  $N_i = \frac{1}{2.\Delta} (a_i + b_i.X + c_i.Y)$

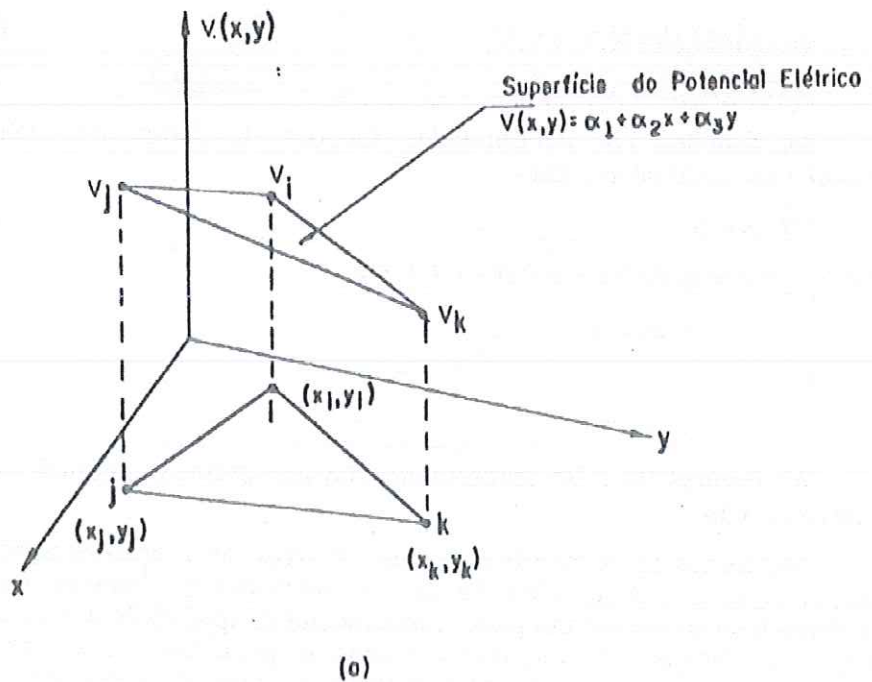
As funções  $N_i$  são denominadas funções de forma do elemento e verificam a seguinte propriedade:

$$N_i(x, y) = \delta_{ij} \quad \text{Eq2.6}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

As Figuras 2.5 (a) e (b) apresentam uma interpretação geométrica para esta aproximação. É importante notar que os erros desta aproximação serão menores na medida em que sejam mais reduzidas as dimensões do elemento, assim a discretização exerce um papel fundamental na qualidade dos resultados e exige um compromisso entre a quantidade de elementos, a capacidade do sistema computacional utilizado e a precisão requerida.



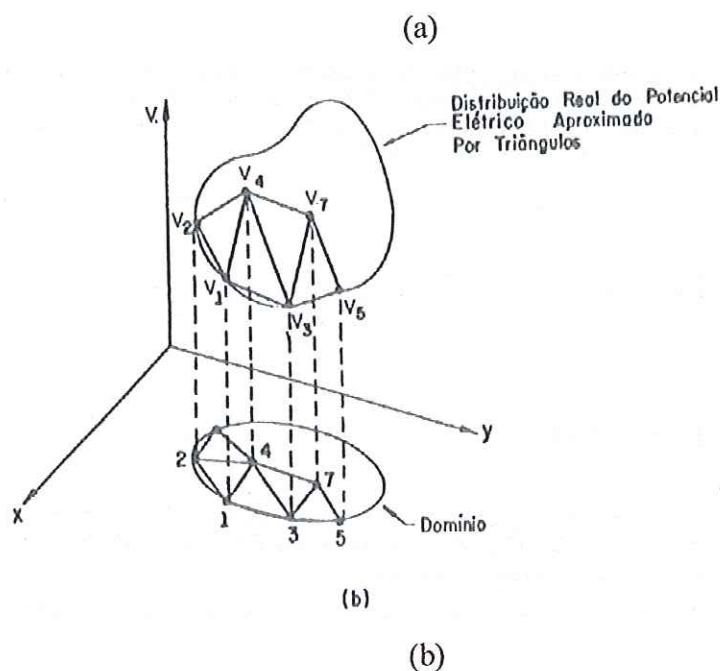


FIGURA 2.5: Interpretação Geométrica [CARDOSO, [2]].

A construção do algoritmo de geração automática de elementos, discretização, não pode ser estanque ao usuário, para que numa interação deste como o programa computacional haja a possibilidade de correções de rotas, mantendo um respeito à geometria e às características do fenômeno físico, de fundamental importância para o engenheiro eletricitista.

Da Eq2.1b, podemos escrever para cada uma das componentes do campo elétrico:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2\Delta}(b_1.V_1 + b_2.V_2 + b_3.V_3) \quad (a)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{2\Delta}(c_1.V_1 + c_2.V_2 + c_3.V_3) \quad (b) \quad \text{Eqs2.7}$$

A análise das Eqs 2.7 mostra que o campo elétrico no interior do elemento resulta constante, no caso da aproximação linear da função potencial.

A aplicação da quarta equação de Maxwell, Eq2.1, às superfícies fechadas constituídas por um prisma de profundidade unitária e secção transversal idêntica às das regiões de controle, como mostradas na FIGURA 2.2, é calculada por partes seguindo o seguinte processo:

Para a superfície que envolve o nó 7, temos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = K_7^4 + K_7^{12} + K_7^6 + K_7^5 \quad \text{Eq2.8}$$

onde as parcelas K possuem a dimensão de carga elétrica e cada  $K_i^e = \int_{S_i} \vec{D} \cdot d\vec{s}$  representa o fluxo do vetor deslocamento, na porção da superfície S que envolve o nó (i) pertencente ao elemento (e). No caso do nó 3, que pertence à fronteira do domínio, resulta:

$$\oint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} = K_3^4 + K_3^5 + K_3^1 + K_3^{1'} + K_3^4' \quad \text{Eq2.9}$$

Uma condição adicional é considerarmos o campo elétrico nulo além da fronteira, ou tangente à mesma, assim sendo as duas últimas parcelas se anulam.

Assim sendo, para cada elemento finito podemos calcular 3 parcelas de integrais de superfície: uma parcela da integral de superfície que envolve o nó 1 ( $K_1^e$ ), uma que envolve o nó 2 ( $K_2^e$ ) e outra que envolve o nó 3 ( $K_3^e$ ), como mostrado na FIGURA 2.3.

O cálculo de ( $K_1^e$ ) sobre aquele elemento genérico pode ser facilmente obtido, levando-se em conta que o campo elétrico em seu interior seja constante. Portanto, na face POS de  $S_1$  (FIGURA 2.3) podemos escrever:

$$K_1^e = \oint_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad \text{Eq2.10}$$

Como sabemos,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \cdot E_x \cdot \vec{u}_x + \varepsilon \cdot E_y \cdot \vec{u}_y \\ d\vec{s} &= -\Delta y \cdot \vec{u}_x - \Delta x \cdot \vec{u}_y \end{aligned}$$

onde  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  são versores nas direções x e y da FIGURA 2. 3, resulta então:

$$K_1^e = -\varepsilon \cdot E_x \cdot \Delta y - \varepsilon \cdot E_y \cdot \Delta x \quad \text{Eq2.11}$$

Substituindo-se  $E_x$  e  $E_y$  por seus valores da Eq. 2.7 e notando que:

$$\Delta x = X_s - X_p = \left[ \frac{(x_3 - x_2)}{2} \right] = c_1/2$$

$$\Delta y = Y_p - Y_s = \left[ \frac{(y_2 - y_3)}{2} \right] = b_1/2$$

temos que

$$K_1^e = \left( \frac{\varepsilon}{4\Delta} \right) \cdot [(b_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot c_1) \cdot V_1 + (b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2) \cdot V_2 + (b_1 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_3) \cdot V_3] \quad \text{Eq2.12}$$

O cálculo de  $(K_2^e)$ , que representa o fluxo do vetor deslocamento elétrico na parte da superfície S, que envolve o nó 2 ( $S_2$ ) pertencente ao elemento (e), é calculado de forma semelhante a  $(K_1^e)$ , fazendo

$$K_2^e = \varepsilon \cdot E_x \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot E_y \cdot \Delta x$$

onde:

$$\Delta x = X_g - X_p = \frac{(X_3 - X_1)}{2} = -\frac{c_2}{2}$$

$$\Delta y = Y_p - Y_g = \frac{(Y_1 - Y_3)}{2} = -\frac{b_2}{2}$$

Resultando:

$$K_2^e = \left( \frac{\varepsilon}{4 \cdot \Delta} \right) \left[ (b_2 b_1 + c_2 c_1) V_1 + (b_2 b_2 + c_2 c_2) V_2 + (b_2 b_3 + c_2 c_3) V_3 \right] \quad \text{Eq2.13}$$

analogamente, vem:

$$K_3^e = \left( \frac{\varepsilon}{4 \cdot \Delta} \right) \left[ (b_3 b_1 + c_3 c_1) V_1 + (b_3 b_2 + c_3 c_2) V_2 + (b_3 b_3 + c_3 c_3) V_3 \right] \quad \text{Eq2.14}$$

Numa forma matricial, resumimos as contribuições dos fluxos do vetor deslocamento, através das porções das superfícies que envolvem os nós 1, 2 e 3 do elemento (e), como segue:

$$\begin{bmatrix} K_1^e \\ K_2^e \\ K_3^e \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{4 \Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot c_1 & b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 & b_1 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_3 \\ & b_2 \cdot b_2 + c_2 \cdot c_2 & b_2 \cdot b_3 + c_2 \cdot c_3 \\ \text{Simétrico} & & b_3 \cdot b_3 + c_3 \cdot c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.15}$$

A matriz quadrada da Eq2.15 é denominada matriz dos elementos, tendo as características de simetria e singularidade (determinante nulo).

O segundo membro da Eq2.1 é a própria carga interna à superfície S. Assim sendo, para a superfície fechada que envolve o nó 7 (FIGURA 2.2), podemos escrever :

$$Q_7 = Q_7^4 + Q_7^{11} + Q_7^{12} + Q_7^6 + Q_7^5$$

onde  $Q_i^e$  é a parcela da carga total contida no interior da superfície S que envolve o nó(i) pertencente ao elemento (e).

Voltando ao elemento genérico da FIGURA 2.3, as linhas PO, OS, e OG (onde O é o baricentro do elemento triangular) dividem-no em 3 polígonos de áreas iguais a 1/3 da área total do elemento, da geometria plana. Admitindo que as cargas elétricas neles contidas são distribuídas uniformemente no volume, delimitado pelo prisma de base

triangular e altura unitária e com densidade volumétrica de carga  $\rho$ , podemos então escrever:

$$Q_1^e = Q_2^e = Q_3^e = \rho \cdot \Delta / 3$$

E na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cdot \Delta / 3 \\ \rho \cdot \Delta / 3 \\ \rho \cdot \Delta / 3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.16}$$

Finalmente, da aplicação da Eq2.1 numa superfície fechada envolvendo o nó (i), resultará:

$$\sum_{e=1}^{NE} K_i^e = \sum_{e=1}^{NE} Q_i^e \quad i \in \{1, 2, \dots, NN\} \quad \text{Eq2.17}$$

com:

NE = número total de elementos no domínio;

NN = o número total de nós do domínio.

É importante notar que os termos das somatórias indicadas em Eq2.17 só terão valor não nulo nos elementos (e) que admitirem o nó (i) como vértice. Esta expressão também gera um sistema de NN equações com NN incógnitas, que são os potenciais elétricos dos nós. Assim sendo, podemos escrever:

$$[C][V] = [Q] \quad \text{Eq3.18}$$

Como a matriz [C] é montada a partir das matrizes dos elementos, e sendo estas singulares, resulta que a referida matriz também é singular. Esta singularidade é levantada após a introdução das condições de contorno, como será discutido no capítulo apropriado.

A resolução do sistema de equações, à qual se chega após a introdução das condições de contorno, fornece os potenciais em todos os nós do domínio o que permite calcular a intensidade de campo elétrico no interior de todos os elementos e as demais grandezas de interesse, tais como: capacitâncias, energia elétrica armazenada, forças e conjugados de natureza eletrostática, etc..., o que já foi dito.

## 2.1.2.2 Campo de Correntes Estacionárias - Eletrocinética

A mesma técnica utilizada na formulação do MEF na Eletrostática é também aplicada aos estudos do campo de correntes estacionárias. Neste caso, a equação que descreve o fenômeno é a equação da continuidade:

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{Eq2.19}$$

A relação constitutiva a ser considerada é a lei de Ohm:  $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ , onde  $\sigma$  é a condutividade do meio, em conjunto com a Eq.2.1b.

As deduções das integrais de superfície  $K_1^e$ ,  $K_2^e$  e  $K_3^e$  são obtidas, para este caso, seguindo-se procedimento análogo ao desenvolvido na eletrostática, com  $\mathbf{J}$  no lugar de  $\mathbf{D}$  e  $\sigma$  no de  $\epsilon$ :

$$\begin{bmatrix} K_1^e \\ K_2^e \\ K_3^e \end{bmatrix} = \frac{\epsilon}{4 \cdot \Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot c_1 & b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 & b_1 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_3 \\ & b_2 \cdot b_2 + c_2 \cdot c_2 & b_2 \cdot b_3 + c_2 \cdot c_3 \\ \text{Simétrico} & & b_3 \cdot b_3 + c_3 \cdot c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.20}$$

Finalmente, da aplicação da equação da continuidade numa superfície fechada envolvendo o nó (i) resultará:

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = 0 \quad \text{Eq2.21}$$

$$i = 1, 2, \dots, NN$$

A expressão Eq2.21 a exemplo da Eq2.17 pode ser expressa na forma matricial a seguir:

$$[G][V] = 0 \quad \text{Eq2.22}$$

A indeterminação deste sistema é levantada com a introdução das condições de contorno inerentes ao problema. A resolução do sistema de equações, após a introdução destas condições, fornecerá os potenciais elétricos em todos os nós do domínio, a partir dos quais são determinadas as intensidades do campo elétrico em cada elemento e as demais grandezas de interesse tais como: resistência ôhmica, potência dissipada, etc...

## 2.1.2.3 Magnetostática

Ainda com base em [2], na magnetostática, a segunda equação de Maxwell (Lei Circuital de Ampère) rege o fenômeno físico, ou seja, a circuitação de  $\mathbf{H}$  em  $c$  é igual ao fluxo de  $\mathbf{J}$  através da superfície  $S$  limitada pelo caminho fechado  $c$ , resultando na intensidade de corrente nessa região:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{Eq2.23}$$

A relação constitutiva a ser considerada é a que relaciona o vetor intensidade de campo magnético  $\mathbf{H}$  e o vetor densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{H} = \nu \cdot \mathbf{B} \quad \text{Eq2.23a}$$

onde  $\nu = 1/\mu$  é a relutividade magnética do meio e sua inversa é mais utilizada sendo a conhecida permeabilidade magnética do meio,  $\mu$ .

A partir da terceira equação de Maxwell, que envolve o operador vetorial divergente de  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Eq2.23b}$$

define-se o vetor potencial magnético  $\mathbf{A}$  tal, que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{Eq2.24a}$$

cujo rotacional iguala a  $\mathbf{B}$ , ficando evidente que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \text{Eq2.24b}$$

considerando-se ainda que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{Eq2.24c}$$

Nos fenômenos que envolvem campos bidimensionais (planos) na magnetostática, é admitido que as correntes fluem na direção normal ao domínio de estudo, assim sendo, supondo-se que este domínio seja definido no plano (x,y), o vetor densidade de corrente será tal que:

$$\mathbf{J} = J \vec{u}_z \quad \text{Eq2.24d}$$

com  $J$  constante no elemento.

Como as direções de  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{A}$  são idênticas resulta que:

$$\mathbf{A} = A(x, y) \cdot \vec{u}_z \quad \text{Eq2.24e}$$



Assim, a equação 2.24 pode ser escrita como segue:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} \vec{u}_y \quad \text{Eq2.25}$$

Sejam  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  os valores da componente em z do vetor potencial magnético nos vértices 1, 2 e 3, respectivamente, do elemento triangular da figura 2.4; calculamos o potencial magnético no interior do elemento por meio de uma interpolação linear de seus valores nos vértices, analogamente ao que foi feito na eletrostática e na eletrocinética, chegamos então a:

$$\vec{A}(x, y) = N_1 \cdot \vec{A}_1 + N_2 \cdot \vec{A}_2 + N_3 \cdot \vec{A}_3 \quad \text{Eq2.26}$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} H_x &= \left(\frac{v}{2 \cdot \Delta}\right)(c_1 \cdot A_1 + c_2 \cdot A_2 + c_3 \cdot A_3) \quad (a) \\ H_y &= -\left(\frac{v}{2 \cdot \Delta}\right)(b_1 \cdot A_1 + b_2 \cdot A_2 + b_3 \cdot A_3) \quad (b) \end{aligned} \quad \text{Eq2.27}$$

Neste ponto aplicaremos a 2ª equação de Maxwell, Eq2.23, aos contornos fechados como aqueles mostrados na FIGURA 2.2, que envolvem os nós do domínio, e calculando a integral de linha no caminho orientado no sentido anti-horário, vem:

$$K_1^e = \int_{pos} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_x \cdot \Delta x - H_y \cdot \Delta y \quad \text{Eq2.28}$$

Levando os valores de  $H_x$ ,  $H_y$  da Eq.2.27 à Eq.2.28, obteremos:

$$K_1^e = \left(\frac{v}{4 \cdot \Delta}\right) [(b_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot c_1) \cdot A_1 + (b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2) \cdot A_2 + (b_1 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_3) \cdot A_3] \quad \text{Eq2.29}$$

Analogamente para a parcela da circuitação ao redor do nó 2 do e-ésimo elemento, temos:

$$K_2^e = H_x \cdot \Delta x + H_y \cdot \Delta y \quad \text{Eq2.30}$$

com:

$$\begin{aligned} \Delta x &= X_p - X_g = \frac{c_2}{2} \\ \Delta y &= Y_p - Y_g = -\frac{b_2}{2} \end{aligned}$$

Substituindo-se  $H_x$ ,  $H_y$  por seus valores na Eq2.30, resulta:

$$K_2^e = \left(\frac{v}{4 \cdot \Delta}\right) [(b_2 \cdot b_1 + c_2 \cdot c_1) \cdot A_1 + (b_2 \cdot b_2 + c_2 \cdot c_2) \cdot A_2 + (b_2 \cdot b_3 + c_2 \cdot c_3) \cdot A_3] \quad \text{Eq2.31}$$

E, finalmente, de forma análoga para a parcela da circuitação ao redor do nó 3, obteremos :

$$K_3^e = \left(\frac{v}{4.\Delta}\right) [(b_3.b_1 + c_3.c_1).A_1 + (b_3.b_2 + c_3.c_2).A_2 + (b_3.b_3 + c_3.c_3).A_3] \quad \text{Eq2.32}$$

Estes resultados, na forma matricial, permite-nos chegar à *matriz do elemento* para a magnetostática:

$$\begin{bmatrix} K_1^e \\ K_2^e \\ K_3^e \end{bmatrix} = \frac{v}{4.\Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_1.b_1 + c_1.c_1 & b_1.b_2 + c_1.c_2 & b_1.b_3 + c_1.c_3 \\ & b_2.b_2 + c_2.c_2 & b_2.b_3 + c_2.c_3 \\ \text{Simétrico} & & b_3.b_3 + c_3.c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.33}$$

Cada elemento recebeu contribuições de três contornos diferentes. Com a condição da densidade de corrente ser uniforme dentro deles, resulta que:

$$\begin{bmatrix} I_1^e \\ I_2^e \\ I_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J.\Delta/3 \\ J.\Delta/3 \\ J.\Delta/3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.34}$$

Assim, a segunda equação de Maxwell aplicada a um contorno fechado envolvendo o nó (i) resultará:

$$\sum_{e=1}^{NE} K_i^e = \sum_{e=1}^{NE} I_i^e \quad (i \in \{1, 2, \dots, NN\}) \quad \text{Eq2.35}$$

Expressando matricialmente temos:

$$[S].[A]=[I] \quad \text{Eq2.36}$$

### 2.1.3 Continuidade entre elementos

Neste ponto é fundamental a compreensão da interligação de elementos; assim, como SILVESTER faz em [1], mostramos a seguir a construção deste processo.

Dado um elemento triangular como já mostrado, ele será a unidade de um *mosaico* composto de um número muito grande de elementos triangulares; em cada um o valor aproximado da energia nele armazenada pode ser calculado a partir do que foi mostrado nos parágrafos anteriores. A energia total armazenada igualar-se-á à soma das energias de todos os elementos:

$$W = \sum_e W^{(e)} \quad \text{Eq2.37}$$

Este processo é mais bem observado considerando inicialmente apenas dois triângulos e posteriormente generalizando para montagens de maior número de elementos.



$$[S]_{dis} = \begin{bmatrix} S^1 & 0 \\ 0 & S^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.40b}$$

Nos problemas físicos, os potenciais precisam ser contínuos através das ligações de interelementos. Devido ao potencial em cada triângulo ser aproximado por uma função linear de  $x$  e  $y$ , seus valores variam linearmente com a distância ao longo de qualquer um dos lados dos triângulos, então a necessidade de continuidade nos potenciais é satisfeita e os potenciais dos correspondentes vértices são idênticos. Portanto, os potenciais na FIGURA 2.6a serão contínuos em qualquer lugar, se os potenciais nos vértices 1 e 6 são forçados a serem exatamente iguais, tanto quanto para os potenciais nos vértices 2 e 4. Assim, esta igualdade de potenciais está implícita na numeração de nós da região quadrangular da FIGURA 2.6b. Naturalmente, não precisa haver qualquer relação particular entre os números dos nós para os triângulos disjuntos e o quadrilátero, ambos conjuntos de números nas FIGURAS 2.6a e b são arbitrários. A obrigação de igualdade nos vértices pode ser expressa na forma de matriz, como uma matriz retangular  $C$ , relacionando potenciais do grupo de elementos *disjuntos*, com potenciais do grupo de elementos *conjuntos* (também chamado sistema conectado):

$$[U]_{dis} = [C] \cdot [U]_{con} \quad \text{Eq2.41}$$

onde os subscritos *dis* e *con* denotam grupo, ou conjunto, de elementos *disjuntos* e *conjuntos*, respectivamente. Com os pontos numerados e mostrados nas FIGURAS 2.6a e b esta equação torna-se:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}_{dis} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}_{con} \quad \text{Eq2.42}$$

Para reduzir o peso da notação, todos os elementos zeros da matriz foram omitidos na Eq2.42, os quais representariam as não-conexões entre os vértices correspondentes. Em seguida, substituindo a Eq2.41 na Eq2.39, a energia para os problemas conectados torna-se:

$$W = \left(\frac{1}{2}\right) [U]_{con}^T [S] \cdot [U]_{con} \quad \text{Eq2.43}$$

onde:  $S = C^T \cdot S_{dis} \cdot C$  Eq2.44

que representa a matriz de coeficientes de montagem do problema conectado. Para a montagem do elemento da figura 2.6, vem:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}^1 + S_{66}^2 & S_{12}^1 + S_{64}^2 & S_{13}^1 & S_{65}^2 \\ S_{21}^1 + S_{46}^2 & S_{22}^1 + S_{44}^2 & S_{23}^1 & S_{45}^2 \\ S_{31}^1 & S_{32}^1 & S_{33}^1 & 0 \\ S_{56}^2 & S_{54}^2 & 0 & S_{55}^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.45}$$

As numerações *disjunta* e *conjunta* são freqüentemente nomeadas *local* e *global*, respectivamente. Para a montagem de dois triângulos tudo que é requerido é somar elementos de matriz correspondentes.

#### 2.1.4 Solução do problema conectado

Em passos anteriores, a energia de uma distribuição de potencial, aproximadamente contínua, foi formulada como uma forma quadrática envolvendo o vetor coluna de potenciais de nós. Para obter uma solução aproximada da equação de Laplace, resta minimizar o estoque de energia no modelo de elemento finito conectado. Desde que a expressão de energia da Eq2.43 é quadrática em potenciais nodais, precisa ter um mínimo único com respeito a cada componente do vetor U potencial. Então, para minimizá-la é suficiente que:

$$\frac{\partial W}{\partial U_k} = 0 \quad \text{Eq2.46}$$

onde o índice k refere-se ao número do nó no modelo conectado. A diferenciação em relação a cada e todo k corresponde a uma minimização desobrigada com o potencial, sendo permitido variar em todo nó. Este, entretanto, não corresponde a um problema de fronteira, como originalmente fixado na figura 2.7, onde todos os potenciais da condição de contorno de Dirichlet foram fixados em alguns valores prescritos. Na verdade, a mínima energia é trivialmente zero, com exatamente potencial zero em todo lugar. Claramente, que o subconjunto dos potenciais contidos em U, os quais correspondem a valores de potencial fixo, não precisam variar na minimização. Suponha que a numeração dos nós no modelo conectado é tal que todos os nós, os quais possuem potencial livre para variar, são numerados primeiro; todos os nós com valor de potencial prescrito são numerados por

último. Por exemplo, os nós localizados nas superfícies dos condutores têm seus potenciais fixos (subscrito p de prescritos) são numerados primeiro; já os nós internos (no dielétrico) são os potenciais livres (subscrito f de free) e são numerados em seguida, para serem calculados pelo MEF.

$$\frac{\partial W}{\partial U_k} = \frac{\partial}{\partial [U_f]_k} [U_f^T U_p^T] \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Eq2.47}$$

Note que a diferenciação é levada apenas com respeito a componente k-ésima de  $U_f$ , nunca com respeito a qualquer componente de  $U_p$ , para o subvetor  $U_p$  há apenas potenciais prescritos os quais não podem variar. Diferenciando com respeito ao potencial livre apenas, resulta a equação matricial:

$$[S_{ff} S_{fp}] \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Eq2.48}$$

A matriz coeficiente nesta equação é retangular. Ela contém tantas colunas quantas variáveis livres desvinculadas, e tantas linhas quanto potenciais nodais. Reescrevendo para todos os potenciais prescritos e, portanto, os conhecidos na direita, a Eq2.48 torna-se:

$$S_{ff} U_f = -S_{fp} U_p \quad \text{Eq2.49}$$

Aqui a matriz de coeficiente do lado esquerdo é quadrada e não singular; uma solução formal de todo o problema é portanto dada por:

$$U = \begin{bmatrix} -S_{ff}^{-1} \cdot U_f \cdot S_{fp} \\ U_p \end{bmatrix} \quad \text{Eq2.50}$$

A solução aproximada, da forma como foi calculada, assume a forma de um conjunto de valores de potenciais nodais. Entretanto, é importante notar que a solução no elemento finito é única e precisamente definida em qualquer lugar, não apenas nos vértices dos triângulos, porque a minimização de energia assumiu a superfície de solução para ter uma forma particular. O conjunto de valores de potenciais nodais é meramente uma representação compacta da superfície de solução planar por partes, adiantando uma energia mínima.

Dentro de cada triângulo o valor de potencial local é prescrito pela Eq2.2. Logo, nenhuma nova aproximação é necessária para se obter contornos de valores equipotenciais,

para calcular o total de energia armazenada, ou para realizar qualquer outra manipulação desejada.

Desde que neste método o potencial em cada elemento é levado a ser linearmente interpolado em relação a seus valores nos vértices, uma curva eqüipotencial consistirá necessariamente de segmentos de retas. Por exemplo, a FIGURA 2.7 apresenta um problema prático, ela representa a seção transversal de uma linha coaxial retangular.

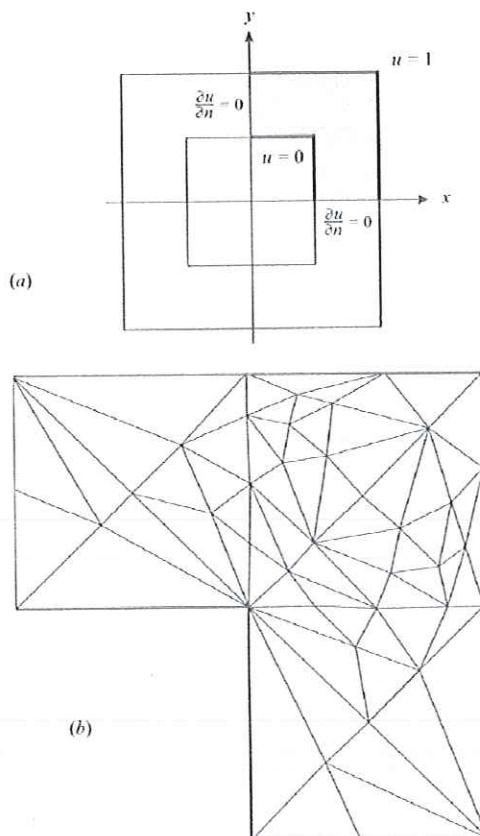


FIGURA 2.7: (a) Modelo de 1/4 de uma linha coaxial retangular, mostrando o problema de condição de contorno, (b) Malha de elementos finitos para análise da linha [SILVESTER, [1]].

Já a FIGURA 2.8 mostra contornos eqüipotenciais para o problema da figura 2.7, em um quarto da linha coaxial, [SILVESTER, [1]].

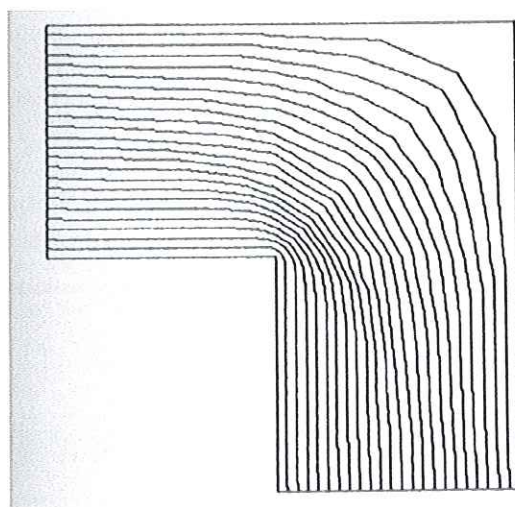


FIGURA 2.8 : Contorno equipotencial para o problema da linha coaxial da FIGURA 2.7. Note o formato das curvas na ligação dos interelementos, [SILVESTER, [1]].

É importante notar que a condição de contorno de Dirichlet é exatamente satisfeita, porque os valores dos potenciais nos nós de ligação são explicitamente especificados quando as Eq2.48 e Eq2.49 são estabelecidas. Por outro lado, a condição de contorno homogênea de Neumann (derivada normal zero) não é satisfeita exatamente, mas apenas em um certo sentido de valor médio. Esta condição de contorno poderia naturalmente ser rigidamente imposta, porém, a energia de campo estocada seria aumentada, o que levaria a precisão da solução ser piorada. Mais à frente alguns detalhes serão considerados. Grosseiramente falando, o procedimento seguido aqui leva a incorrer-se em erros ao longo das condições de contorno de Neumann, para um aumento global da precisão.

## 2.2. Materiais não uniformes e fontes sem homogeneidade.

Muitos problemas de campo prático envolvem fontes distribuídas, ou são, por outro lado, mais gerais que a equação de Laplace. Eles podem ser tratados usando técnicas similares. Esta seção abandona o escopo de problemas resolvíveis e inclui fontes distribuídas e material sem homogeneidade.



### 2.2.1 Equação de Poisson

A equação de Poisson apresenta certa similaridade com a de Laplace, já que relaciona potenciais, ou escalar elétrico ou vetorial magnético, porém apresentando fontes, nas formas de cargas (fluxo eletrostático) ou de correntes (fluxo de densidade de corrente).

De [1] veremos um exemplo simples: a FIGURA 2.9 mostra um condutor depositado em uma ranhura do rotor de uma máquina elétrica. O rotor e o estator da máquina são separados por um entreferro (*gap*) de ar, a superfície do rotor possui ranhuras e cada ranhura contém condutores energizados. Tanto o ar, quanto o material dos condutores, são isolantes magnéticos.

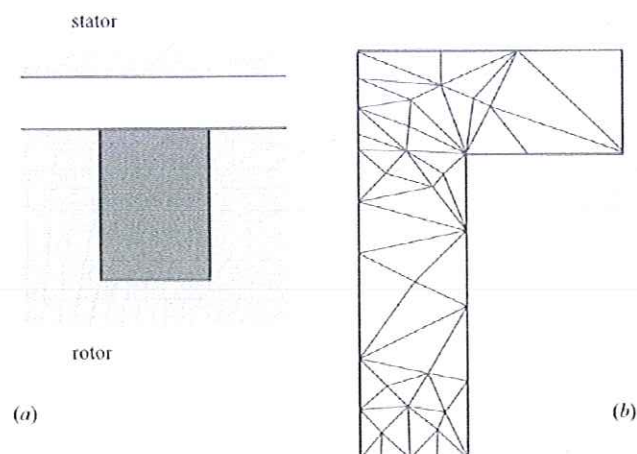


FIGURA 2.9: (a) ranhura do rotor de máquina elétrica, com condutores carregados. (b) malha de elementos finitos para análise dos campos na ranhura e no entreferro de ar perto da ranhura [SILVESTER, [1]].

Consideramos que o condutor preenche totalmente a ranhura e que a corrente é distribuída uniformemente na seção transversal do condutor.

O campo magnético na região pode ser descrito pelo potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , na forma vetorial da equação de Poisson. Se a ranhura e o condutor são considerados muito longos, então o vetor densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e o vetor potencial magnético  $\mathbf{A}$ , possuem apenas componentes direcionais longitudinais, como é visto nas equações 2.24a e b, assim, a Equação Vetorial de Poisson degenera para a sua forma escalar, como será usada logo à frente:

$$\nabla^2 A = -\mu_0 \cdot J \quad \text{Eq2.51}$$

Considera-se que o núcleo de ferro da máquina apresenta permeabilidade infinita, uma condição comumente levada em conta, já que o valor de sua permeabilidade relativa está, em geral, na faixa de  $10^3$  a  $10^4$ . Com esta condição a derivada normal de  $A$ , seja na linha central da ranhura por questão de simetria, seja em toda a superfície de ferro, deve ser nula. A uma distância curta da ranhura, linhas de fluxo atravessam ortogonalmente o entreferro de ar; então a borda direita da região de formato L invertido da FIGURA 2.9b representa uma linha de fluxo. Assim, as condições de contorno do problema ficam bem definidas.

O problema variacional correspondente, em cuja obtenção não entraremos em detalhes, para resolver a equação de Poisson, é aquele de minimizar o funcional relacionado à energia.

$$F(u) = \left(\frac{1}{2}\right) \int |\nabla u|^2 dS - \mu_0 \int u J dS \quad \text{Eq2.52}$$

Para se ver que  $F(u)$  atinge um mínimo para a solução verdadeira da Eq2.51, é necessário supor-se  $A$  sendo a solução correta e  $h$  uma função erro diferenciável, que se anula em todos os pontos da fronteira, onde  $A$  é definido. A expressão  $F(A+\theta h)$  deve, então, ser avaliada e  $\theta$  é um parâmetro numérico:

$$F(A + \theta h) = F(A) + \theta \int \nabla A \cdot \nabla h dS - \theta \mu_0 \int h J dS + \left(\frac{1}{2}\right) \theta^2 \int |\nabla h|^2 dS \quad \text{Eq2.53}$$

onde o vetor  $dS$  é alinhado com  $A$  e  $J$  e, portanto, tomado escalarmente também.

Usando o teorema de Green, ver o Apêndice 2 de [1], a segunda parcela no membro da direita pode ser mudada para:

$$\int \nabla A \cdot \nabla h dS = \oint h \frac{\partial A}{\partial n} dS - \int h (\nabla^2 A) dS \quad \text{Eq2.54}$$

A integral de superfície fechada no lado direito desaparece, já que a derivada na direção normal de  $A$  é zero em todos pontos da fronteira. Considerando que  $A$  seja a solução correta da Eq2.1, o termo mais à direita da Eq2.54 pode ser escrito:

$$- \int_S h (\nabla^2 A) dS = \mu_0 \int_S h J dS \quad \text{Eq2.55}$$

O funcional da Eq2.53 é simplificado para:

$$F(A + \theta h) = F(A) + \frac{1}{2} \theta^2 \int_S |\nabla h|^2 dS \quad \text{Eq 2.56}$$

Tendo em vista que a integral na direita é sempre positiva, é evidente que um mínimo será alcançado quando  $\theta$  tiver valor zero e, ao invés disso, que  $F(h)$  atinge seu valor mínimo para  $h=A$ , que é a solução da Eq2.51.

Observe-se que a energia do campo é calculável pela expressão geral:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S |\nabla A|^2 dS \quad \text{Eq2.57}$$

Ou pela avaliação da expressão equivalente:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_S AJ dS \quad \text{Eq2.58}$$

em seu valor mínimo  $F(A)$ ,  $F$  apresenta um valor negativo igual em módulo à energia total armazenada

Neste valor mínimo  $F(A)$ , o funcional  $F$  evidentemente tem um valor negativo igual em magnitude à energia total estocada e o termo de erro na Eq2.56 depende do quadrado do parâmetro  $\theta$ . Nas vizinhanças da solução correta,  $\theta$  é pequeno. A exatidão com a qual a energia armazenada pode ser obtida é, portanto, muito alta, mesmo se os valores dos potenciais sejam pontualmente pouco exatos.

### 2.2.2 Modelagem do termo fonte

Para construir um modelo de elemento finito para o problema da equação de Poisson, o procedimento empregado é similar àquele usado para equação de Laplace. Como há termos análogos nas duas equações, o processo de discretização leva aos mesmos resultados do problema *conectado*.

Utiliza-se o mesmo modelo para  $J(x,y)$  que foi utilizado para o potencial, considerando um triângulo típico:

$$J = \sum_{i=1}^3 J_i \alpha_i(x, y) \quad \text{Eq2.59}$$

Onde os coeficientes  $J_i$  são valores da densidade de corrente nos vértices do triângulo. Estes valores são conhecidos, já que a densidade de corrente é uma função prescrita, por si mesma. A integral do termo fonte na Eq2.52 pode então ser escrita:

$$\int A J dS = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (A_i \int \alpha_i \alpha_j dS) J_j \quad \text{Eq2.60}$$

onde, apenas os valores de potenciais aproximados nos vértices,  $A_i$ , são desconhecidos. Para cada elemento consideremos uma outra matriz de ordem 3 a ser definida por:

$$[T^{(e)}] = T_{ij}^{(e)} = \int \alpha_i \alpha_j dS \quad \text{Eq2.61}$$

Tal, que

$$\int A J dS = [A]^T [T^{(e)}] [J] \quad \text{Eq2.62}$$

Para o conjunto de elementos triangulares disjuntos, o funcional da Eq2.52 torna-se agora:

$$F(A) = \frac{1}{2} [A_{dis}]^T [S_{dis}] [A_{dis}] - \mu_0 [A_{dis}]^T [T_{dis}] [J_{dis}] \quad \text{Eq2.63}$$

Na interconexão de elementos, a continuidade de potencial é fundamental, portanto vale a relação da Eq 2.41. Então:

$$F(A) = \frac{1}{2} [A]^T [S] [A] - \mu_0 [A]^T [C]^T [T_{dis}] [J_{dis}] \quad \text{Eq2.64}$$

A minimização de  $F(A)$  em relação a todos os potenciais dos vértices não condicionados, é obtida colocando:

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_k} = 0 \quad \text{Eq2.65}$$

O que conduz à equação matricial:

$$[S'] [A] = \mu_0 [C]^T [T_{dis}] [J_{dis}] \quad \text{Eq2.66}$$

da mesma forma que no modelo de elementos finitos do problema de valor de contorno. A principal diferença é que no lado direito, ao invés de zero, há uma expressão função de  $J$ .

Já que, a diferenciação da Eq2.65 não pode ser realizada em relação aos potenciais fixos, a matriz  $S'$  da Eq2.66 é retangular. Ela possui tantas linhas quantos nós não condicionados no problema e há tantas colunas quantos são os nós no modelo. Assim, a matriz  $S'$  é particionada, considerando-se nós com potenciais livres e prescritos, levando a:

$$\begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_f \\ A_p \end{bmatrix} = \mu_0 [C]^T [T_{dis}] [J_{dis}] \quad \text{Eq2.67}$$

Como antes, os subscritos f e p referem-se aos potenciais livres e prescritos, respectivamente. Desde que mais tarde sejam conhecidos, eles serão movidos para o lado direito:

$$S_{ff} A_f = \mu_0 [C]^{tr} [T_{dis}] [J_{dis}] - S_{fp} A_p \quad \text{Eq2.68}$$

A solução desta equação determina os potenciais de nós desconhecidos resolvendo, assim, o problema.

É interessante notar que o lado direito da Eq2.68 combina o termo com fonte, J, da equação diferencial (a parte não homogênea desta equação) com o efeito dos valores de fronteira prescritos (a parte não homogênea da condição de contorno). Assim, não há distinção fundamental entre a representação da equação diferencial homogênea, com as condições de contorno não homogêneas em um lado, e a equação diferencial não-homogênea com a condição de contorno homogênea no outro lado.

A solução do problema da ranhura com condutor, usando a mais simples triangularização da FIGURA 2.9, aparece na FIGURA 2.10. Como no caso da equação de Laplace, as condições de contorno de Dirichlet (condições de contorno de linha de fluxo) são rigidamente impostas, enquanto as condições de contorno de Neumann não o são. Como pode ser visto na FIGURA 2.10, a condição mais tarde é violada localmente, mas satisfeita neste meio.

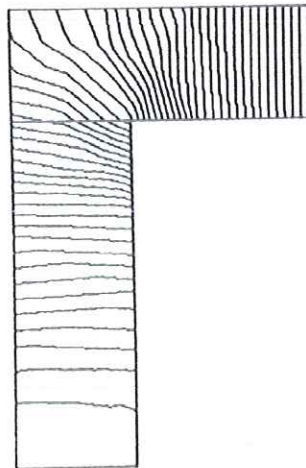


FIGURA 2.10: Solução dos problemas de ranhuras de máquinas elétricas da FIGURA 2.9. As equipotenciais de A correspondem a linhas de fluxo magnético, [SILVESTER,[1]].

### 2.2.3 Materiais não homogêneos

Possivelmente a maioria dos problemas de engenharia, envolve múltiplos meios físicos. Um exemplo é fornecido pela blindagem da linha micro-lâmina da FIGURA 2.11. É similar ao problema da linha coaxial da FIGURA 2.7, mas contém dois meios dielétricos, tipicamente um cerâmico, ou substrato termoplástico, para suportar o condutor e o ar.

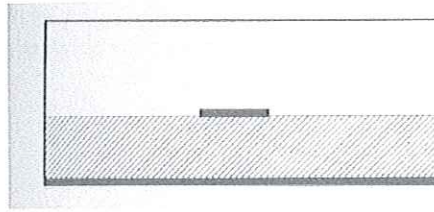


FIGURA 2.11 : Blindagem de linha micro-lâmina . A blindagem mais externa esta no mesmo potencial do plano terra.

Não há realmente muita diferença, em princípios, entre o método usado para o problema dos dois meios e o método desenvolvido para a linha coaxial de dielétrico simples da FIGURA 2.7. Em ambos os casos, o princípio de operação é aquele da minimização da energia armazenada. Sem considerar as conseqüências do meio dielétrico envolvido, a energia armazenada é dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} ds = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 ds \quad \text{Eq2.69}$$

ou, ainda, em termos do potencial elétrico  $V$  como:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon [\nabla V]^2 ds \quad \text{Eq2.70}$$

Considerando que a subdivisão do elemento é tal, que as suas bordas sempre seguem as fronteiras médias, a matriz de Dirichlet  $S^{(e)}$  e todos os elementos são obtidos como antes, porém, multiplicados pela permissividade  $\epsilon$ .

### 2.2.4 Condições de interface natural

O procedimento de minimização de energia para meio heterogêneo é simples, mas uma questão básica permanece não respondida: não é necessário impor a bem conhecida

condição de contorno da eletrostática, que precisa sempre prevalecer na interface entre os meios? Estes requerem que (1ª) o campo elétrico,  $E_t$ , tangencial precisa ser contínuo através da interface entre dois materiais quaisquer, (2ª) a densidade de fluxo elétrico,  $D_n$ , normal pode ser descontínua se houver qualquer carga na superfície, mas precisa, na ausência de carga, ser contínua. A primeira condição é equivalente a requerer a continuidade do potencial, e é, entretanto, obtida por qualquer solução de elemento finito. O segundo não é satisfeito.

Para verificar, a minimização de energia agora será seguida em detalhes. Como no caso dielétrico homogêneo, seja  $U=u+\theta h$  uma solução aproximada,  $u$  o valor de potencial correto, e  $h$  uma função de erro que desaparece em todos os pontos de contorno de Dirichlet, onde, o valor correto do potencial é conhecido desde o começo. Então a energia armazenada  $W(U)$  pode ser escrita:

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) + \theta \int \epsilon \nabla u \cdot \nabla h \, ds \quad \text{Eq2.71}$$

Suponha, por simplicidade, que a malha contém apenas dois elementos,  $L$  à esquerda e  $R$  à direita, como na figura 2.12. A integral na Eq2.71 é, então, melhor avaliada pela integração sobre os dois elementos separadamente:

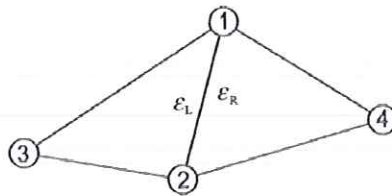


FIGURA 2.12: Dois elementos adjacentes com permissividades diferentes, [SILVESTER],[1]].

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) + \theta \left( \int_L \epsilon_L \nabla u \cdot \nabla h \, ds + \int_R \epsilon_R \nabla u \cdot \nabla h \, ds \right) \quad \text{Eq2.72}$$

Recorremos ao teorema de Green, o que permite que a integral seja reescrita:

$$\int \nabla u \cdot \nabla h \, ds = \oint h \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int h (\nabla^2 u) \, ds \quad \text{Eq2.73}$$

O segundo termo na direita da Eq2.73 desaparece porque  $u$  é a solução correta da equação de Laplace,  $\nabla^2 u = 0$ . Então a Eq2.72 pode ser reescrita:

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) + \theta \left( \oint_L \varepsilon_L h \frac{\partial u}{\partial n} ds + \oint_R \varepsilon_R h \frac{\partial u}{\partial n} ds \right) \quad \text{Eq2.74}$$

Em todo contorno externo, as integrais de contorno na Eq2.74 tem integrandos se anulando, por  $h=0$  em todos contornos de Dirichlet, enquanto que a derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial n}$  desaparece nos outros segmentos dos contornos. Isto, entretanto, é suficiente para levar a integração ao longo da fronteira interna 2-1 na figura 2.12, então:

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) + \theta \left( \oint_{21} \varepsilon_L h \frac{\partial u}{\partial n} ds + \oint_{12} \varepsilon_R h \frac{\partial u}{\partial n} ds \right) \quad \text{Eq2.75}$$

Ou desde que o caminho da integração seja exatamente o mesmo em ambas integrais:

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) + \theta \int h \left( \varepsilon_L \frac{\partial u}{\partial n} - \varepsilon_R \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad \text{Eq2.76}$$

O termo da integral de contorno é apenas uma expressão envolvendo uma energia, função ímpar de  $\theta$ . No MEF, um mínimo é achado, não meramente um ponto de inflexão; isto implica que os termos da energia ímpar em  $\theta$  precisam se anular (note que a integral precisa se anular, não necessariamente o integrando). Assim,

$$\varepsilon_L \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_L = \varepsilon_R \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_R \quad \text{Eq2.77}$$

O significado físico desta igualdade é fácil de se ver. A derivada normal pode ser escrita como projeção do gradiente para dentro da superfície normal, então:

$$\varepsilon_L \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_L = \varepsilon_L (\nabla u \cdot \vec{n}) = -\varepsilon_L E_L \quad \text{Eq2.78}$$

Isto é, nada mais, que a componente normal da densidade de fluxo elétrico:

$$\varepsilon_L \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_L = -D_L = D_L \vec{n} \quad \text{Eq2.79}$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário. Conseqüentemente, forçando a integral em Eq2.76 a se anular para impor a restrição que:

$$\int_{21} h (D_R - D_L) \vec{n} ds = 0 \quad \text{Eq2.80}$$

Para toda função de erro  $h$  possível com a malha de elementos finitos usada, então a regra da continuidade do fluxo normal é satisfeita aproximadamente sobre a fronteira entre meios diferentes, mas não é identicamente satisfeita para todos os pontos. Tal como uma



condição de contorno, é usualmente chamada uma condição natural do MEF, ela vem a ser satisfeita naturalmente no processo de minimização sem necessitar ser explicitamente imposto.

### 2.2.5 Energia e avaliação de capacitância

Para avaliar a energia armazenada por unidade de comprimento da linha de transmissão das FIGURAS 2.7 ou 2.11, é fácil proceder elemento por elemento, que é calcular a energia para cada elemento e somar todos os elementos:

$$W = \sum_e W^e = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_e [U^{(e)}]^T [S^{(e)}] [U^{(e)}] \quad \text{Eq2.81}$$

Este é um cálculo que não demanda muitas dificuldades, porque cada passo apenas envolve a matriz  $S^{(e)}$  de um elemento simples. A capacitância de uma linha com dois condutores é então obtida da energia armazenada:

$$C = \left( \frac{2W}{(\Delta V)^2} \right) \quad \text{Eq2.82}$$

onde  $\Delta V$  é a diferença de potencial entre os dois condutores.

As grandezas de maior importância na análise de linhas de transmissão, TEM, incluem primeiro: a velocidade de propagação,  $v$ , na linha e a impedância característica da linha  $Z_0$ . Em termos da capacitância e indutância por unidade de comprimento, estes são dados por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Eq2.83}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad \text{Eq2.84}$$

Sua determinação requer resolver dois problemas de campo associados com a linha de transmissão: (1<sup>o</sup>) o problema eletrostático e (2<sup>o</sup>) o problema magnetostático. Suponha que o material do substrato na FIGURA 2.11 tenha sido trocado pelo ar e o problema eletrostático seja resolvido novamente, conduzindo a capacitância  $C_0$ . A velocidade de propagação neste caso é  $c$  (velocidade da luz no vácuo).

Da Eq.2.83, a indutância é então:

$$L = \frac{1}{c^2 C_0} \quad \text{Eq.2.85}$$

E este mesmo valor de indutância precisa ser ajustado para ambas: linhas carregadas com dielétrico verdadeiro e a linha hipotética preenchida com ar; pois nenhum contém qualquer material magnético. Substituindo 2.83 e 2.84:

$$v = c \cdot \sqrt{C_0 / C} \quad \text{Eq2.86}$$

$$Z_0 = \frac{1}{(c \cdot \sqrt{C_0 \cdot C})} \quad \text{Eq2.87}$$

Este problema não apresenta dificuldades em sua resolução, demandando apenas uma simples programação computacional.

### 3 - O Uso do MEF

Neste capítulo trataremos de comparar “caminhos computacionais” possíveis para a utilização do MEF, justificando a opção por aquele que é usado neste trabalho. Assim, trabalharemos, inicialmente, em dois casos físicos: um *guia de ondas* e um *dente de máquina elétrica*:

- Apresentação do caso do *guia de ondas*

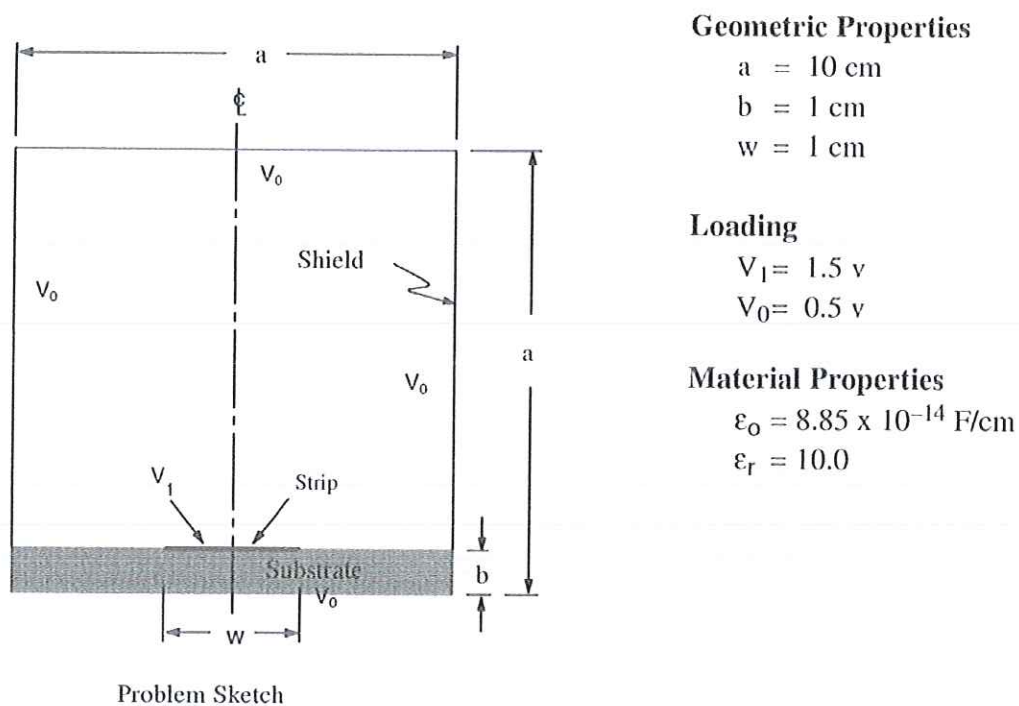


Figura 3.1 – Corte transversal reto de um *guia de ondas* [6].

Apresentação do caso *dente de máquina elétrica*:

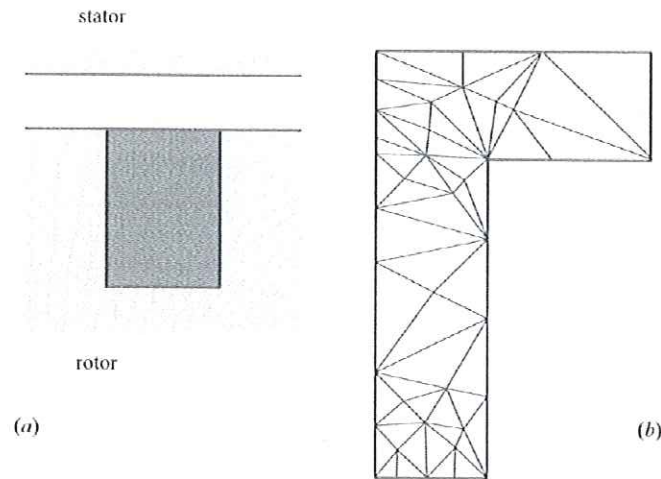


Figura 3.2 – Corte transversal reto de um *dente de máquina elétrica*:  
(a) ranhura no rotor e (b) esboço da “malhação” da região, [SILVESTER], [1]].

### 3.1- Exemplo de Programação no MEF em FORTRAN

#### Caso 1) Guia de ondas

Com base em Silvester & Ferrari, [1], foi estudado um programa em FORTRAN para simular um *guia de ondas*, problema esse que é também resolvido, em seguida, lançando mão do “pacote computacional” ANSYS<sup>TM</sup>, com a finalidade de se comparar os graus de dificuldades com que se deparam usuários eventuais do MEF.

O esboço da geração de malhas (“malhação”) do *guia de ondas* pode ser visto abaixo, mostrando a divisão do mesmo em elementos triangulares, e a fixação das coordenadas dos vértices.

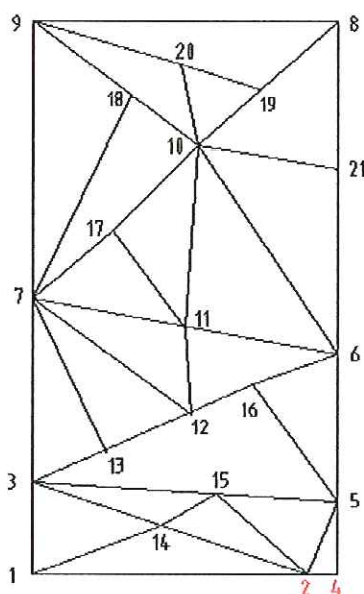


Figura 3.3 – Distribuição das malhas construídas manualmente, para o *guia de ondas*

Após a confecção do desenho, foi processado o programa SIMPLE2D, mostrado no Apêndice D, o qual teve como dados de entrada as coordenadas cartesianas de cada ponto das malhas, as densidades de cargas e os potenciais prescritos em pontos específicos. Depois foi processado o programa SATURMAT, também no Apêndice D, em que os materiais podem ser especificados, e que gera como saída o potencial vetorial magnético (A).

O programa SIMPLE2D é montado em FORTRAN77, não possui interface gráfica, portanto apresenta uma certa pobreza de recursos e é dividido em diversas subrotinas, como é visto no Apêndice D.

Abaixo seguem os dados de entrada para o problema do guia de ondas em que são colocados 21 pontos e 22 elementos:

Tabela 3.1 – Dados de entrada do SIMPLE2D

Ponto	Coordenadas Cartesianas
1	(0; 0)
2	(4,5; 0)
3	(0; 1,5)
4	(5; 0)

5	(5; 1,2)
6	(5; 3,6)
7	(0; 4,5)
8	(5; 9)
9	(0; 9)
10	(2,7; 7)
11	(2,5; 4)
12	(2,6; 2,6)
13	(1,2; 2)
14	(2,1; 0,8)
15	(3; 1,4)
16	(3,6; 3,1)
17	(1,3; 5,6)
18	(1,6; 7,8)
19	(3,7; 7,9)
20	(2,4; 8,3)
21	(5; 6,6)

Tabela 3.2 – Especificação de cargas no SIMPLE2D

Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Densidade de Carga
1	14	2	0
1	6	3	0
2	4	5	0
14	15	2	0
2	5	15	0
3	15	14	0
3	16	5	0
5	6	16	0
3	7	13	0
7	12	13	0

7	11	12	0
6	11	12	0
7	11	17	0
11	17	10	0
6	10	11	0
6	10	21	0
7	9	18	0
7	10	18	0
21	10	8	0
9	10	20	0
10	20	19	0
9	8	19	0

Entrada dos pontos de potenciais prescritos:

Tabela 3.3 – Entrada dos potenciais no SIMPLE2D

Ponto	Potencial prescrito (Volt)
2	1,5
4	1,5
1	0,5
3	0,5
7	0,5
9	0,5
8	0,5

Após a entrada dos dados, o programa calcula as matrizes geométricas, e resolve o problema, gerando as seguintes saídas de dados:

Tabela 3.4 – Saída do SIMPLE2D (resultados)

Ponto	Potencial (Volt)
1	0,5
2	1,5
3	0,5
4	1,5
5	1,15968
6	0,70993
7	0,5
8	0,5
9	0,5
10	0,53264
11	0,58098
12	0,57311
13	0,5275
14	0,98347
15	1,14400
16	0,90053
17	0,54619
18	0,51500
19	0,50548
20	0,52205
21	0,56762

Assim a distribuição ficará:



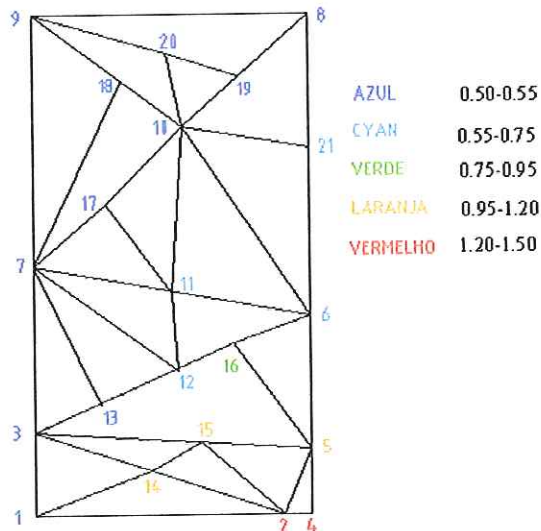


Figura 3.4 – Distribuição dos potenciais na “malhação” do *guia de ondas*

### Caso 2) Dente da Máquina Elétrica

Agora mostraremos o segundo caso, rodado primeiramente com o programa SATURMAT, um programa em que os materiais ferromagnéticos podem ser especificados, e gera como saída o potencial vetor magnético, onde foi tratado o *dente de uma máquina elétrica*, dentro da estrutura ferromagnética.

O programa SATURMAT possui como entrada de dados os seguintes:

TABELA 3.5 Coordenadas cartesianas dos pontos em um *dente de máquina elétrica* mostrado na figura 3.5.

Coordenada cartesiana X	Coordenada cartesiana Y
0,000	0,000
1,000	0,000
0,000	4,000
1,000	4,000
0,000	4,500
3,000	4,500
3,000	4,000

Depois da entrada das coordenadas dos pontos entra-se os triângulos, densidade de corrente, material (1 para metal ferromagnético, 0 para cobre e ar):

TABELA 3.6 Montagem da malha, em que é colocado o tipo de material codificado e a densidade de carga, para execução posterior no programa SATURMAT.  
Ponto em que se coloca tensão:

Triângulo			Densidade de Cargas	Material
1	2	3	1,000	1
2	4	3	1,000	1
3	4	5	0,000	0
4	7	6	0,000	0
4	6	5	0,000	0

TABELA 3.7 Entrada de potenciais prescritos no SATURMAT.

Ponto	Potencial Prescrito
6	0
7	0

A saída será como mostrado abaixo:

TABELA 3.8 Saída de dados no programa SATURMAT.

Ponto	Potencial (Volt)
1	2.226,77
2	2.230,63
3	1.209,23
4	1.049,77
5	1.369,15
6	0,000
7	0,000

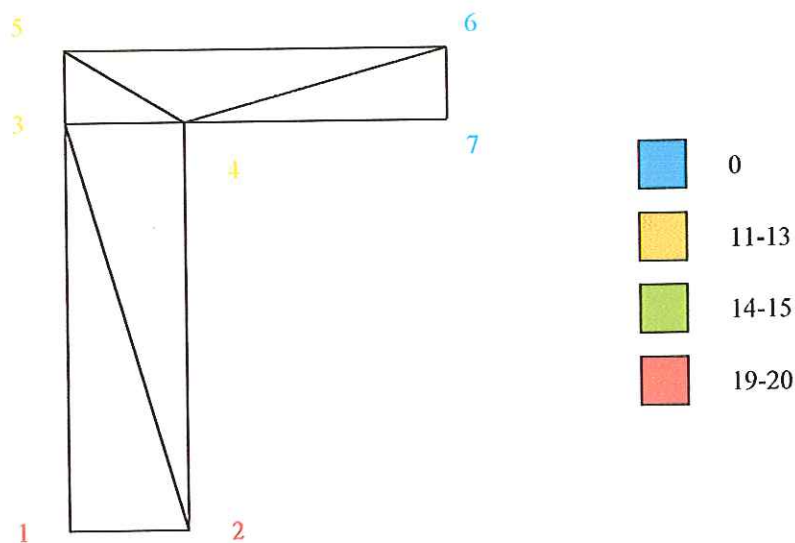


FIGURA 3.5 Potenciais Magnéticos finais do *dente de máquina elétrica*, gerado pelo programa SATURMAT.

### 3.2 - Exemplos de Programação no MEF usando o ANSYS™

#### Caso 1) Guia de onda

O pacote de programas baseados no Método dos Elementos Finitos ANSYS 5.6 (ANSYS™), foi utilizado para resolver o problema do *guia de ondas*, permitindo assim que se fizessem comparações com aquilo já realizado no parágrafo anterior.

Ao iniciar o ANSYS™, forneceu-se ao mesmo as informações relativas ao dispositivo em estudo, que é submetido à análise eletrostática, uma das opções claras do pacote, passando dados relativos às características elétricas do material (permissividade dielétrica), em seguida fixa-se as cargas prescritas, na forma de densidades de carga.

Após a completa descrição do *guia de ondas*, o programa é processado e no pós-processamento visualizamos o *guia de ondas* juntamente com suas equipotenciais, na figura 3.4, evidenciando a capacidade de saída gráfica do ANSYS.

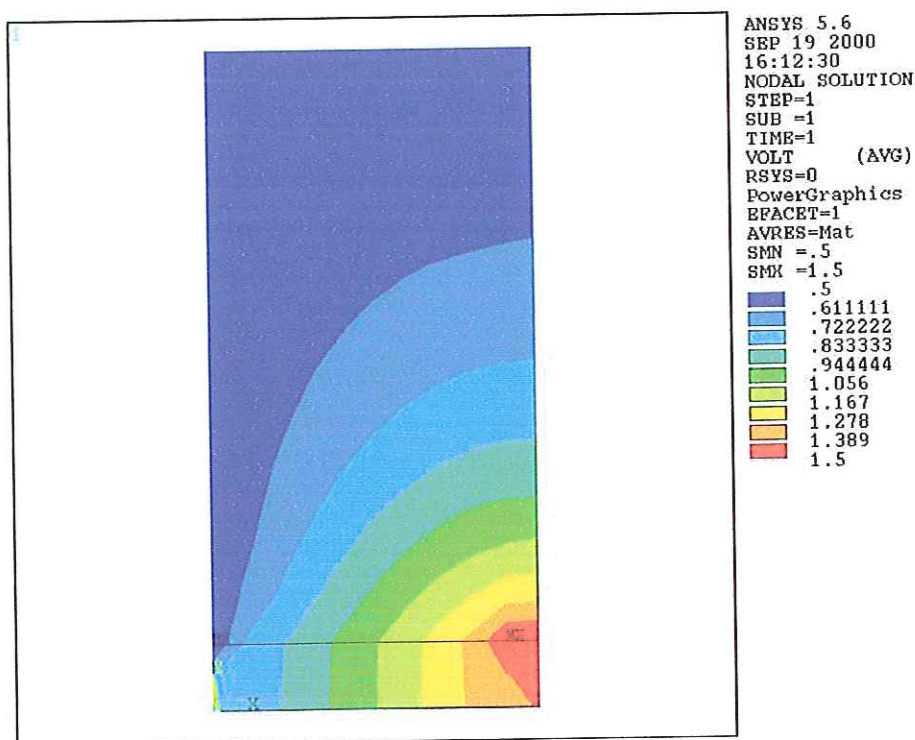


Figura 3.4 – Guia de ondas com a distribuição de equipotenciais

### Caso 2 – Dente da Máquina Elétrica

Com o uso do ANSYS, novamente é seguido o mesmo procedimento descrito anteriormente, com a diferença na mudança do elemento adequado para uma análise magnetostática, há uma mudança de propriedades de material, em que não trataremos mais de um dielétrico, mas sim de um material magnético, logo colocaremos a relutividade do meio. Assim colocamos os potenciais magnéticos prescritos, e as densidades de corrente. O programa processa os dados, e finalmente obtemos uma visualização do dente da máquina em que são mostradas equipotenciais do vetor campo magnético.

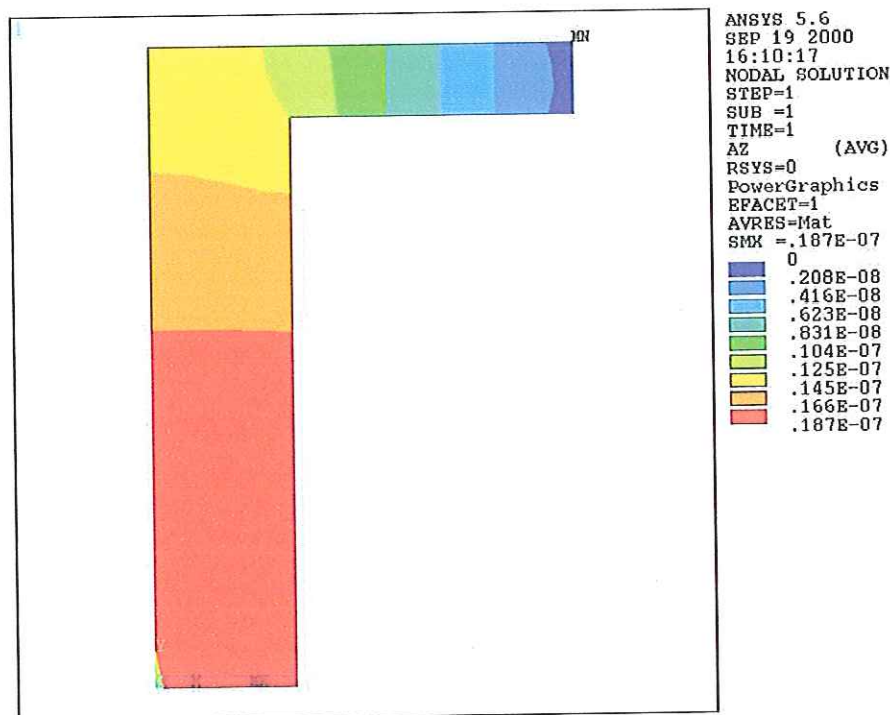


FIGURA 3.6 – Potenciais Magnéticos finais do *dente de máquina elétrica*, gerado pelo programa ANSYS™.

Assim, ficam evidentes as vantagens de se utilizar um pacote profissional, como o ANSYS, em relação a um programa implementado por parte pessoas não especializadas no desenvolvimento de trabalhos computacionais em MEF, como é o caso da maioria dos engenheiros eletricitas. O que justifica a nossa escolha do ANSYS.

#### 4 – Aplicações do ANSYS

Para utilizarmos o ANSYS procederemos como consta do Anexo C. Diversas aplicações, em Engenharia Elétrica, foram consideradas neste capítulo, no entanto centramos a atenção em um dispositivo simples, quando considerado dentro de um sistema de potência, mas de importância fundamental do ponto de vista de detalhes do mesmo sistema, que é o isolador que está presente, desde na mais simples linha telefônica, passando por linhas de distribuição, até nas linhas de média, alta e extra-altas tensões. Justifica-se esta análise, considerando-se o desenvolvimento de isoladores à base de resina poliuretana derivada do óleo de mamona, devido a MURAKAMI, como se vê em [11] e em [26]. São também mostradas as aplicações do ANSYS em um transformador de força e em um reator magnético.

O isolador representado na figura 4.1 é do tipo que se usa no tempo, ou seja, é submetido às intempéries, ao Sol, à poluição, etc..., assim ele é definido como um *isolador externo*.

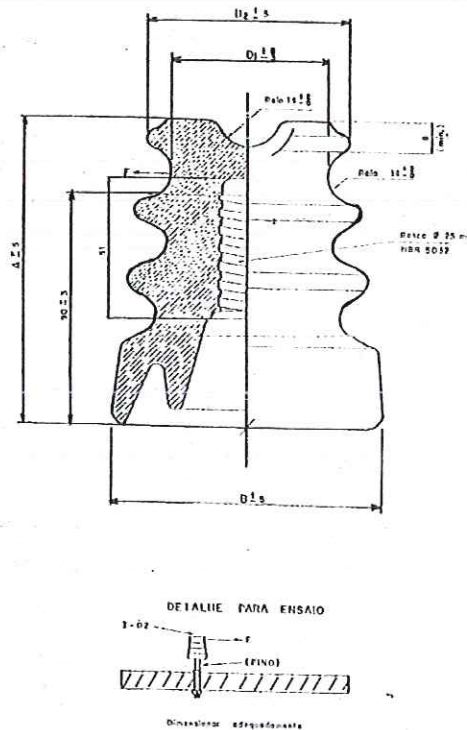


Figura 4.1 – Isolador externo classe 15 kV

Na figura 4.2 é mostrado o isolador que é utilizado de forma protegida dentro de cabines e cubículos, ou seja, é um *isolador interno*.

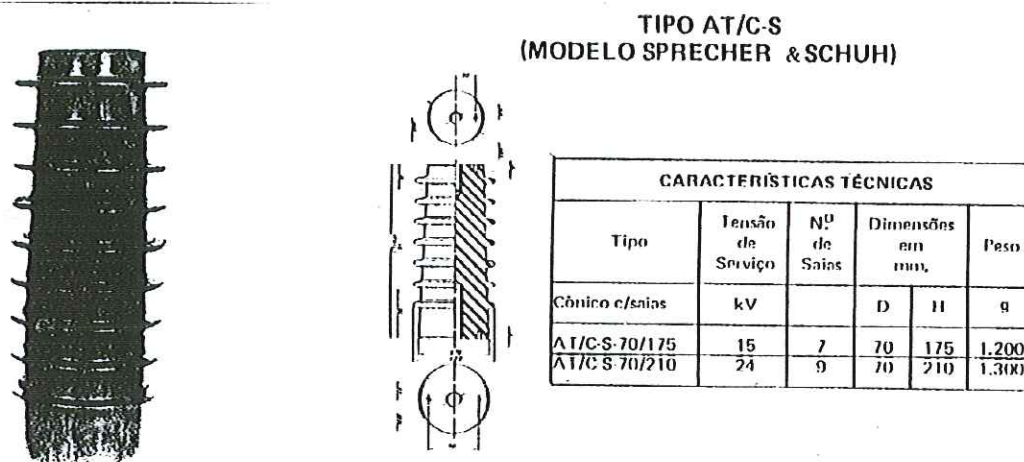


Figura 4.2 – Isolador interno classe 15kV

#### 4.1 Interface AUTOCAD™-R14 com ANSYS™52

Ainda que o ANSYS possua um bom editor gráfico, ele reconhece, através de uma *interface*, os desenhos e seus arquivos construídos no *software* gráfico AUTO-CAD, o que se constitui numa excelente opção de trabalho, já que a difusão desse último é muito grande no ambiente de engenharia e universitário em geral.

Todos os desenhos de isoladores feitos nesta dissertação foram realizados e apresentados segundo a norma da ABNT pertinente.

Esses desenhos executados no software AUTOCAD-R14 foram feitos em escala 1:1 (Cotas em milímetros).

Durante a interface do AUTOCAD-R14 com o software de elementos finitos, houve a necessidade do uso de um terceiro software: Mechanical Desktop™.

Com a abertura do desenho do AUTOCAD, no Mechanical Desktop, não houve mudança alguma no desenho, cujo arquivo era do tipo (.dwg). No Mechanical houve a exportação dos respectivos desenhos para o arquivo no formato (.igs); usou-se o comando import do ANSYS, o que gerou a aquisição dos *Keypoints* e *lines* do desenho original em

AUTOCAD para o ambiente ANSYS. Assim, possuíamos um esboço do isolador que seria analisado a posteriori.

Outro problema observado foi a geração defeituosa da área dos isoladores no ANSYS, devido a defeitos de traçado ocorridos no AUTOCAD, não admitidos no ANSYS. A solução consistiu em uma análise apurada em cada *Keypoint* e *line* do desenho importado.

Sanados os problemas dos *Keypoints* e *lines*, foi-se gerando normalmente as secções dos isoladores o que, por sua vez, gerou a condição de “malhação” das secções transversais. Assim houve a simulação dos isoladores com o método dos elementos finitos. Foram feitas análises estáticas, na tensão de 13,8kV. Depois desta etapa foram introduzidos nos desenhos bolhas de ar, para análise computacional do que ocorria com o isolador caso este as possuísse (situação comum nesta resina). Deve ser observado que no final das simulações foi usada a versão ANSYS 5.6, nada mudando de forma gritante em relação ao ANSYS 5.2.

Outra questão interessante enfrentada na importação do desenho, foi a mudança das medidas originais em (mm) para (m) no ANSYS. A solução consistiu em, dentro do ANSYS, fazer uma redução de 1000x em cada dimensão (Comando SCALE), o que fez o desenho ficar em tamanho natural.

Através da rotação das respectivas secções transversais pelo comando de geração de sólido, foi gerado um sólido do isolador, o que forneceu mais resultados de análise, porém houve necessidade de procedimentos mais exigentes descritos adiante.

Para completar esta seção deve ser mencionado que foi feita uma análise de campo elétrico, o que foi feito usando os elementos determinados pelo capítulo 3.

#### 4.2. Descrição da resina de óleo de mamona

Segundo MURAKAMI {[11]}, as características elétricas da resina de óleo de mamona podem ser resumidas no quadro abaixo:



Tabela 4.1 : Características elétricas da resina sólida de óleo de mamona

Características Elétricas	Unidade (S.I)	Resina A249+B25 015	Resina A253+B3 51
Rigidez Dielétrica	kV/mm	28,9	31,2
Resistividade Volumétrica	$\Omega \cdot \text{cm}$	$4,21 \times 10^{15}$	$4,19 \times 10^{15}$
Resistividade Superficial	$\Omega$	$1,40 \times 10^{15}$	$1,47 \times 10^{15}$
Condutividade Volumétrica	$\Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$	$2,38 \times 10^{-16}$	$2,40 \times 10^{-16}$
Condutividade Superficial	$\Omega^{-1}$	$7,26 \times 10^{-16}$	$6,86 \times 10^{-16}$
Permissividade Dielétrica (1.5V)	-----	2,80	3,03
Permissividade Dielétrica (2.0kV)	-----	2,84	2,97
Fator de Dissipação (1.5V)	%	1,73	3,37
Fator de Dissipação (2kV)	%	1,04	2,79
Índice de perdas (1.5V)	%	4,84	10,2
Índice de perdas (2kV)	%	2,95	8,29

#### 4.3 Relações de Fronteira {ver em [16]}

Neste ponto é importante recordar este assunto, tendo em vista que a resina utilizada na confecção dos isoladores nunca se apresenta isenta de bolhas de ar, caracterizando assim zonas de fronteira entre a resina e o ar, com permissividades dielétricas diferentes. Assim, é de se esperar certas alterações entre os cálculos de campos elétricos em condições com e sem bolhas de ar, na resina.

Sabemos pelo estudo do campo elétrico do fenômeno das relações de fronteira, o qual consiste em que as componentes do campo elétrico tangentes à fronteira entre dois meios são iguais, como esquematizado na figura 4.3:

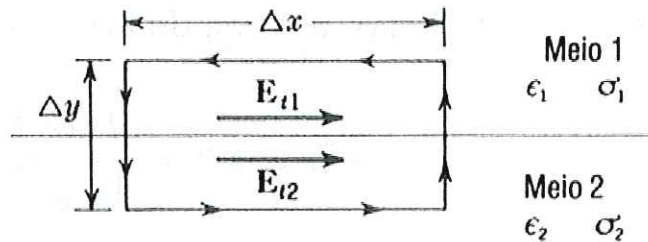


Figura 4.3 - Campo elétrico tangencial é contínuo através de uma fronteira

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad \text{Eq.4.1}$$

Já para as componentes do campo elétrico normais à fronteira, consideremos dois meios dielétricos de permissividades  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , separados por um plano  $xy$  como mostra a figura 4.4:

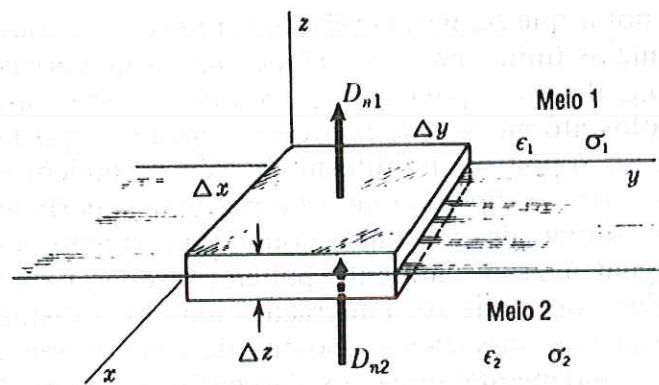


Figura 4.4 - A componente normal da densidade de fluxo é contínua através de uma fronteira desprovida de cargas.

É suposto que ambos os meios sejam isolantes perfeitos ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ). Consideremos que se construa uma caixa imaginária, metade em cada meio, de área  $\Delta x \cdot \Delta y$  e altura  $\Delta z$  que tende a zero, a contribuição dos lados na integral de superfície será zero. O fluxo total sobre a caixa é, então, devido inteiramente ao fluxo sobre as superfícies do topo e do fundo. Se a densidade superficial média de cargas sobre a fronteira for  $\rho_s$ , teremos então, aplicando a Lei de Gauss (figura 4.5):

$$\mathbf{D}_{n1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \mathbf{D}_{n2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad \text{Eq.4.2 (a)}$$

$$\therefore \mathbf{D}_{n1} - \mathbf{D}_{n2} = \rho_s \quad \text{Eq.4.2 (b)}$$

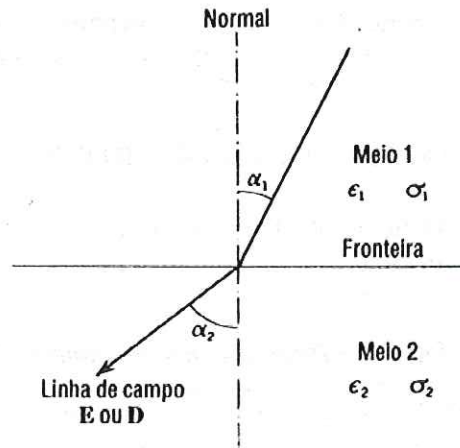


Figura 4.5- Fronteira entre dois meios dielétricos, mostrando a refração, ou mudança na direção, da linha de campo.

A partir da Eq.4.1 temos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \alpha_1} \quad \text{Eq.4.3}$$

Pela Eq.4.2(b), partindo da hipótese de que  $\rho_s$  seja nula (não há cargas na região), temos:

$$D_{n1} - D_{n2} = 0 \rightarrow \epsilon_1 E_1 \cos 0^\circ - \epsilon_2 E_2 \cos 0^\circ = 0 \rightarrow \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{E_2}{E_1} \quad \text{Eq.4.4}$$

Isto significa que os campos elétricos são inversamente proporcionais às permissividades das regiões.

Considerando o isolador construído com a resina poliuretana, a qual possui uma permissividade relativa 2,9 e o analisarmos com uma inserção de bolhas de ar (permissividade relativa aproximadamente unitária), teremos um caso de relações de fronteira, em que devemos verificar os resultados dos mapeamentos.

## 4.4 – Aplicação do ANSYS ao Isolador Externo 13,8kV

Esta seção do trabalho gerou parte da referência [26], artigo de nossa co-autoria, que foi apresentado e publicado no **2001 IEEE – International Conference on Solid Dielectrics, em Eindhoven/The Netherlands**, entre os dias 25 e 29 de Junho de 2001.

Neste primeiro cálculo no isolador externo, considerando-se, como condições de contorno, a aplicação de 13,8kV no leito onde vai o condutor e 0V na abertura onde vai o pino de ancoragem, é visível a grande concentração da malha na sua região superior (cabeça do isolador) mesmo tendo sido utilizada uma “malhação” de apenas 983 elementos e 1992 nós, na figura 4.6. Os resultados, em termos de equipotenciais estão nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9.

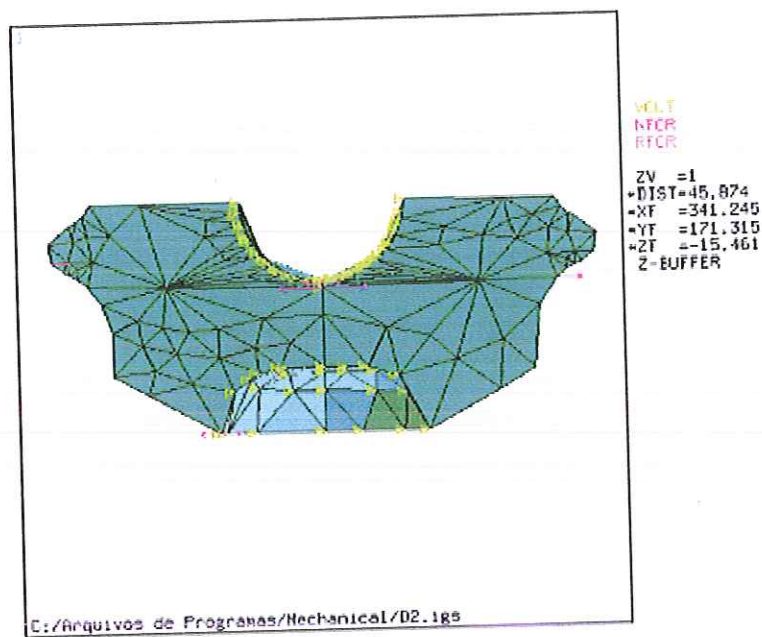


Figura 4.6: Aplicação de cargas no isolador, potenciais: parte superior 13,8kV, parte inferior 0V

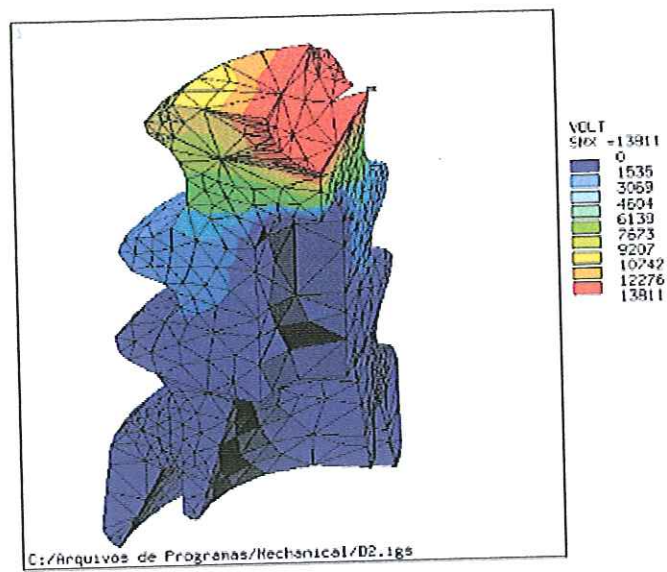


Figura 4.7: Equipotenciais aplicadas em corte de 90°, para demonstrar importância da cabeça do isolador.

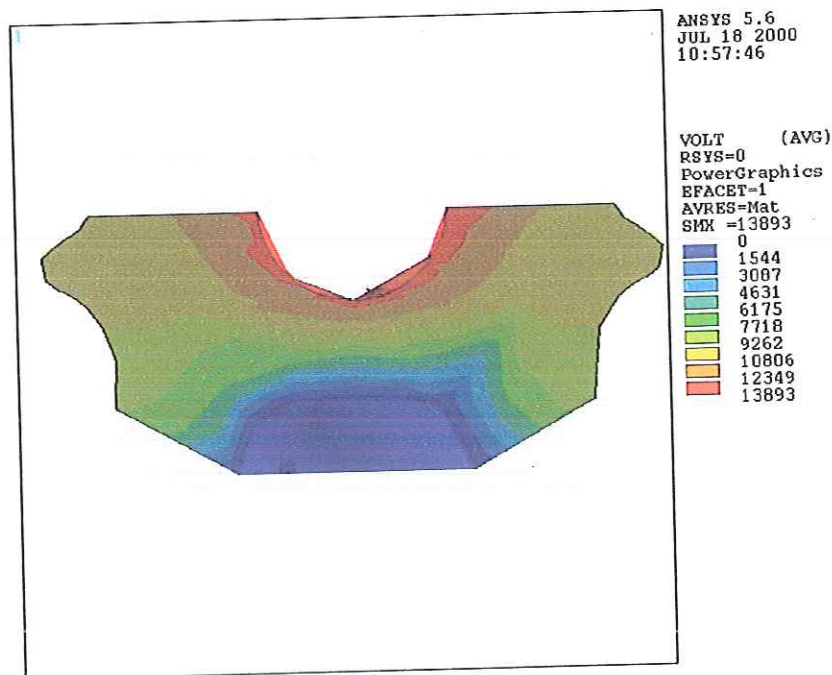


Figura 4.8: Equipotenciais na cabeça do isolador

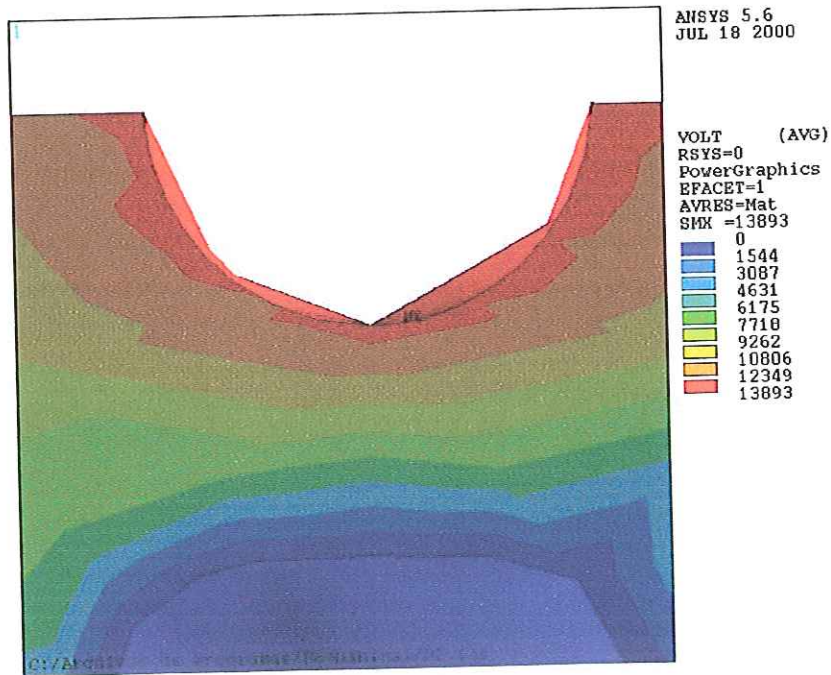


Figura 4.9: Equipotenciais na cabeça do isolador (Detalhe)

Nas figuras 4.10 e 4.11 são mostradas as distribuições de campo elétrico.

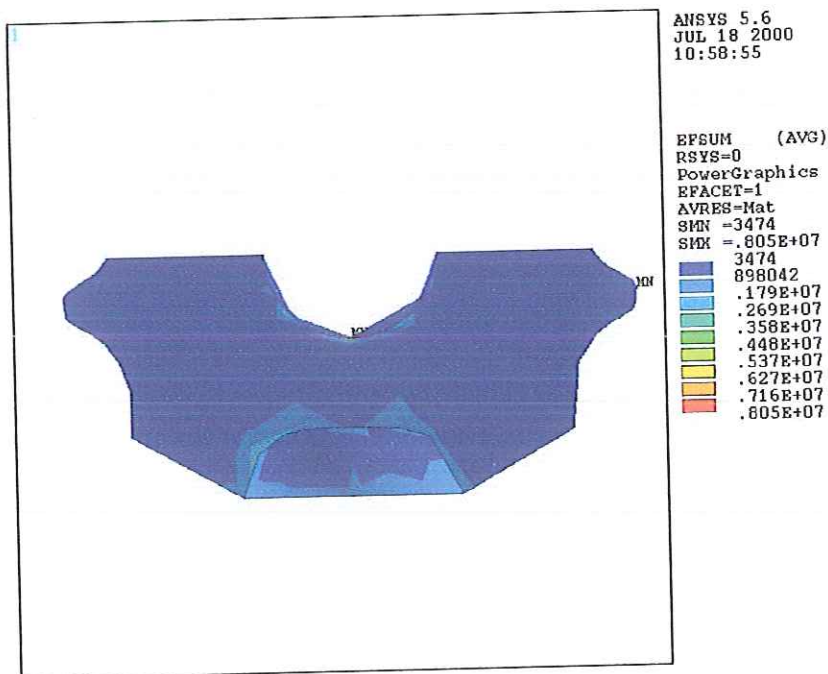


Figura 4.10 : Campo Elétrico na cabeça do isolador

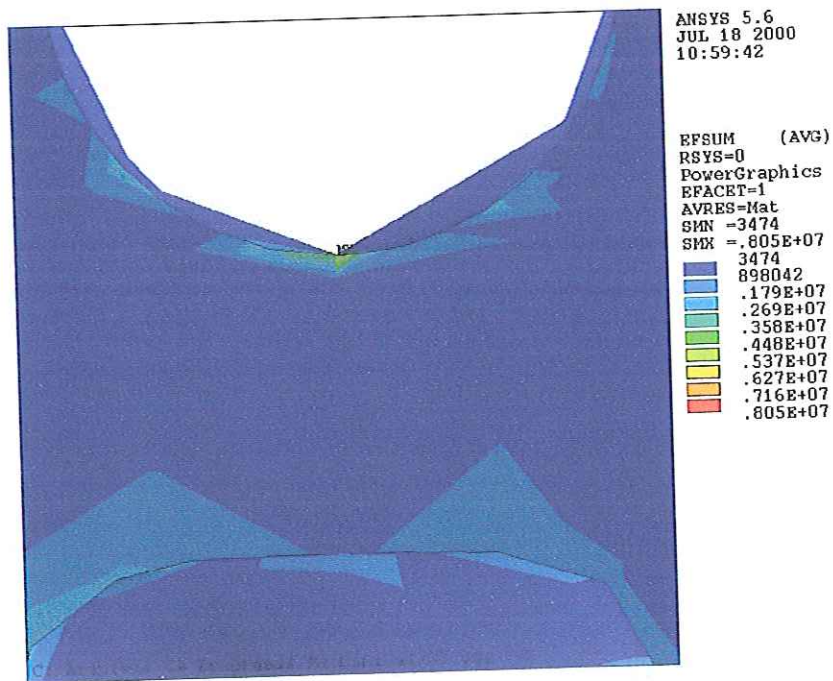


Figura 4.11: Campo Elétrico na cabeça do isolador (Detalhe)

Neste ponto introduzimos, para o mesmo isolador, uma “malhação” de 1.129 elementos e 2.182 nós, mantidas as condições elétricas.

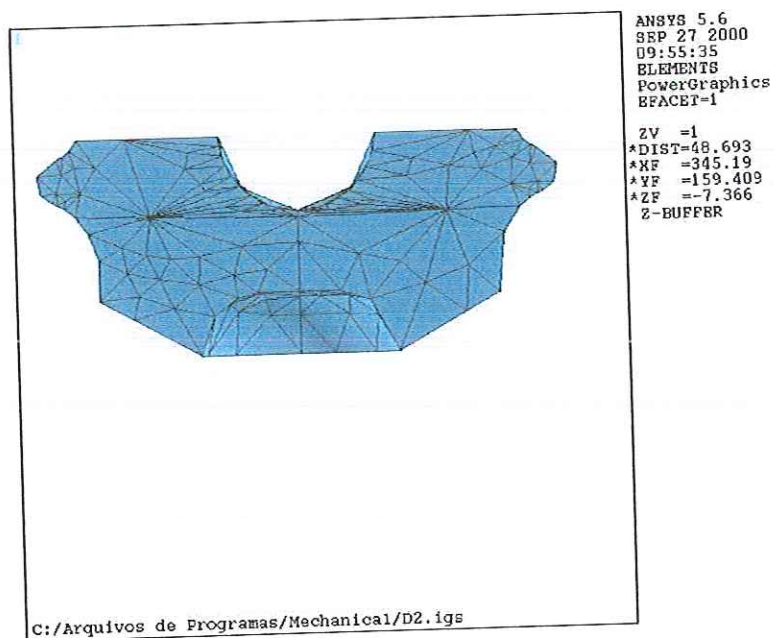


Figura 4.12: Nova “malhação” com 1129 elementos e 2182 nós.

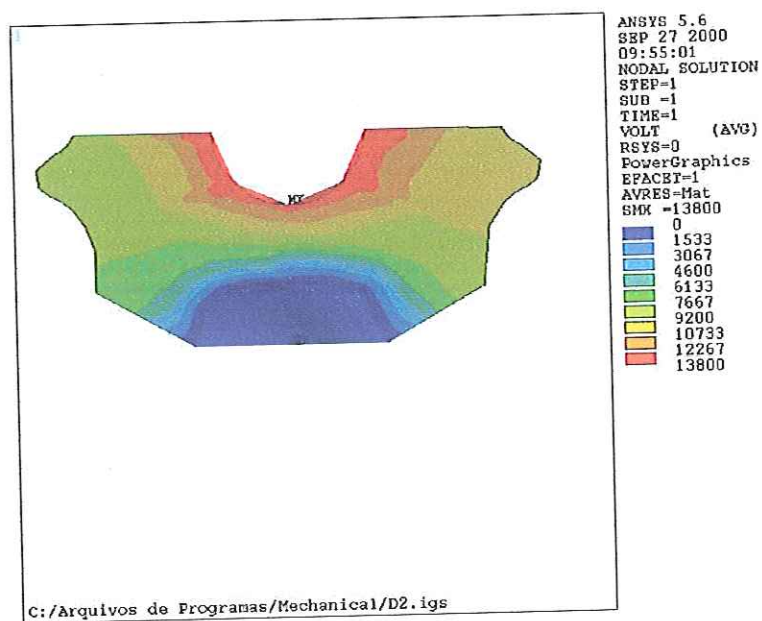


Figura 4.13: Equipotenciais para 1129 elementos e 2182 nós na “malhação”.



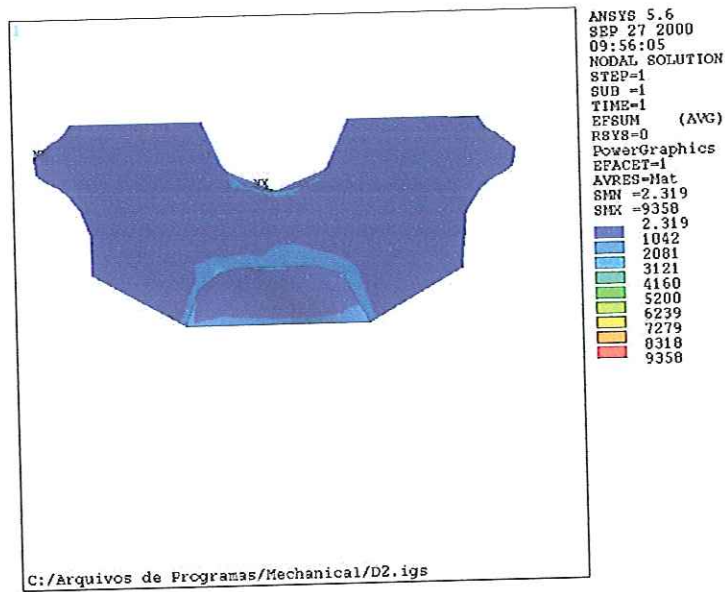


Figura 4.14: Campo elétrico para 1129 elementos e 2182 nós na “malhação”,  
(valores x1000).

Não houve alterações sensíveis, tanto nos valores do campo elétrico, quanto nos valores das equipotenciais.

## 4.5 – “Malhação” com 8.496 elementos e 13.622 nós

Neste ponto trataremos de um caso em que simulamos o isolador, mas a malha terá 8.496 elementos e 13.622 nós, a qual apresentará maior precisão nos cálculos. Tal simulação foi feita no ANSYS 5.6, nova versão, que inclui geração automática de malhas, economizando tempo de malhação, possui maior confiabilidade dos resultados, e menor número de falhas. Já a simulação anterior foi feita no ANSYS 5.2, o que levou a uma grande demora na malhação devido às necessidades de redimensionamento dos elementos e menor precisão.

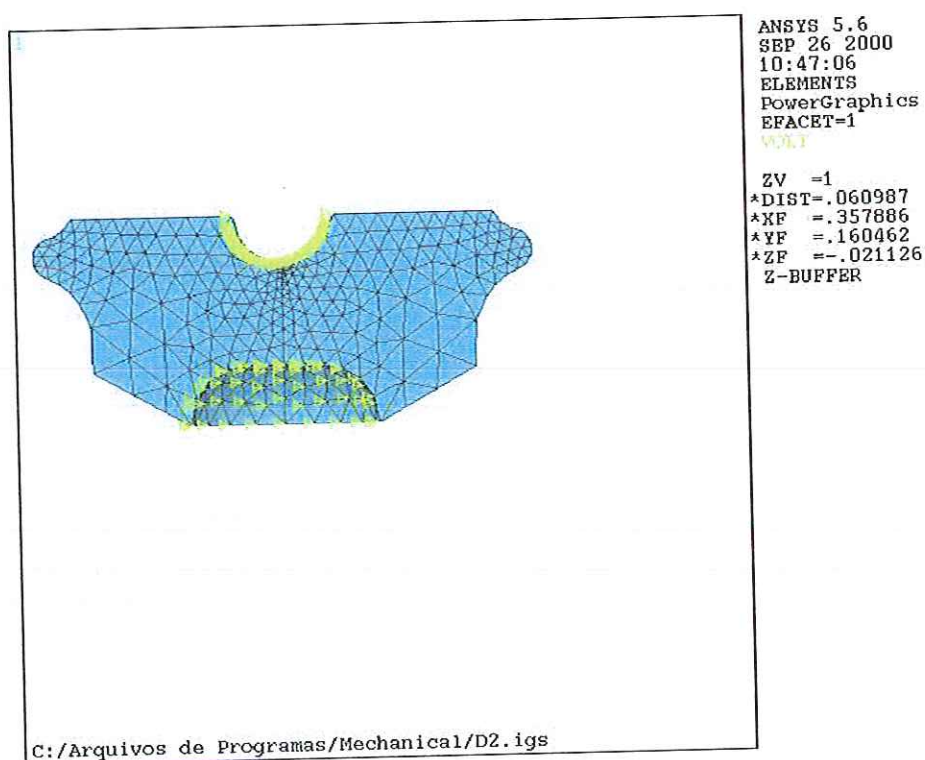


Figura 4.15: Nova “malhação” do isolador com 8.496 elementos e 13.622 nós.

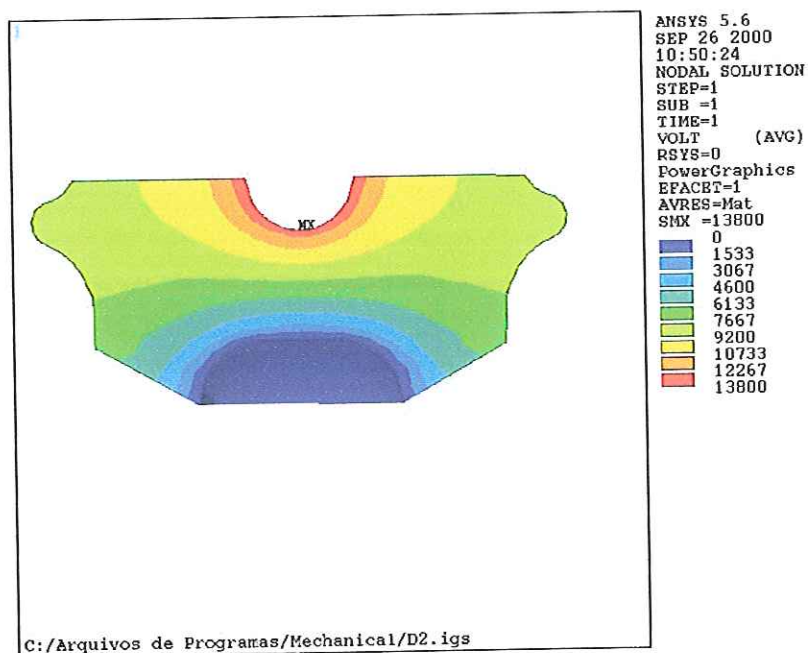


Figura 4.16: Equipotenciais do isolador.

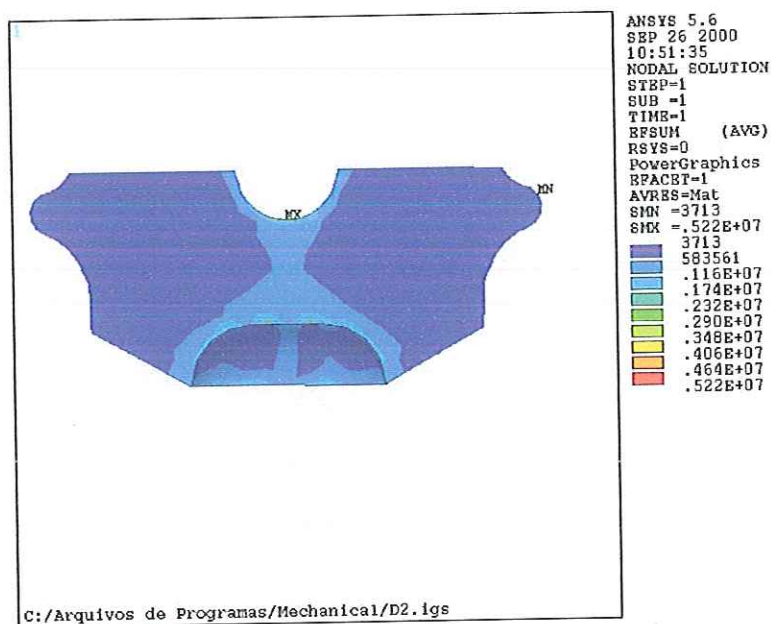


Figura 4.17: campo elétrico em que é atingida uma grande precisão.

Se compararmos os resultados da figura 4.17 com os da figura 4.10, é visível a diferença da distribuição do campo elétrico, ficando bem definido o “canal” entre o pino e o leito do condutor.

4.6 – Introdução de bolhas de ar no isolador externo, no “canal” entre o pino e o leito do condutor, de acordo com as localizações abaixo, nas mesmas condições elétricas, utilizando a “malhação” de 983 elementos e 1992 nós:

Coordenadas das bolhas cilíndricas:

1ª Bolha (Cima): Wpx: 341,5; Wpy: 175,05;

Raio:1mm; Profundidade: -20mm

2ª Bolha (Meio)

Wpx:341,5; Wpy:171,25;

Raio:1mm; Profundidade: -20mm

3ª Bolha (Baixo)

Wpx:341,5; Wpy:167,8;

Raio:1mm; Profundidade: -20mm

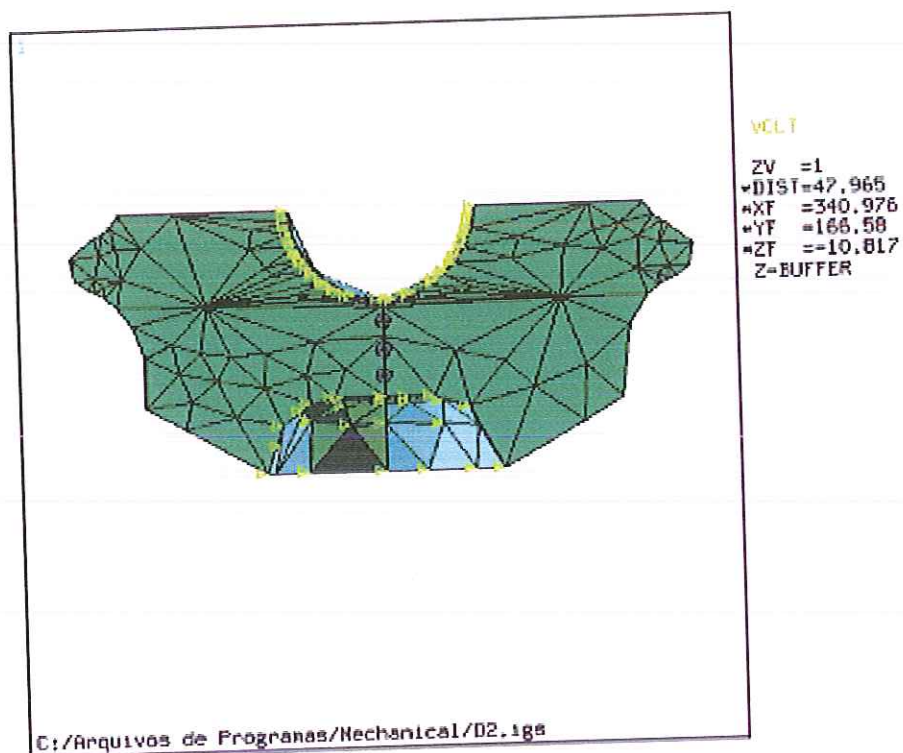


Figura 4.18 : Aplicação de tensão no isolador, parte superior 13.8kV e parte inferior 0V (Isolador com bolhas cilíndricas de ar ).

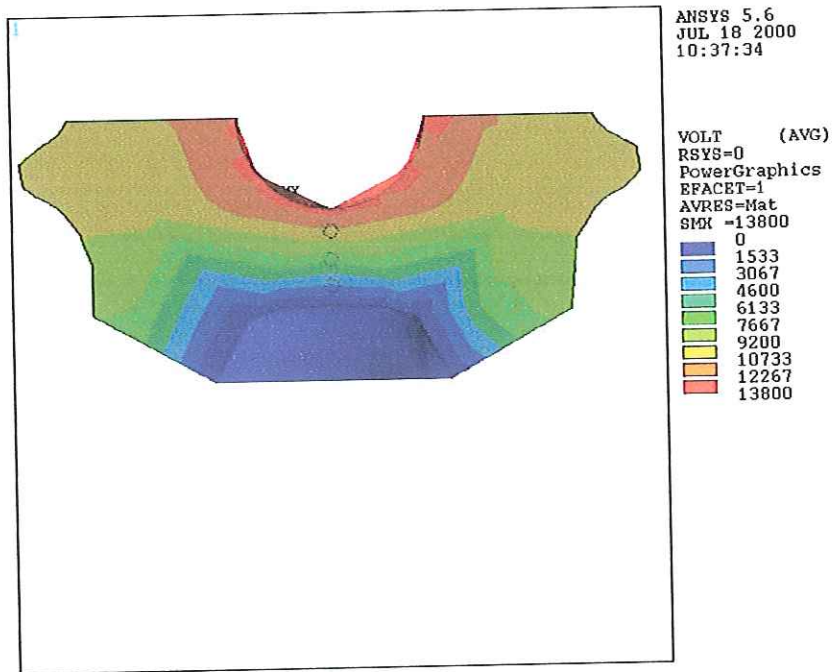


Figura 4.19 (a): Equipotenciais no isolador com bolhas de ar cilíndricas

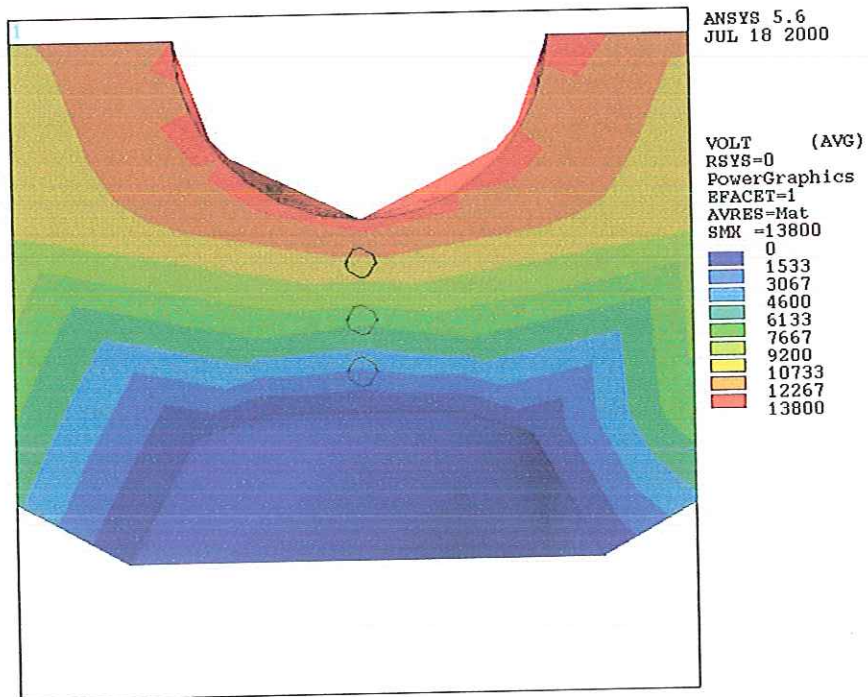


Figura 4.19 (b): Equipotenciais no isolador com bolhas de ar cilíndricas (Detalhes)

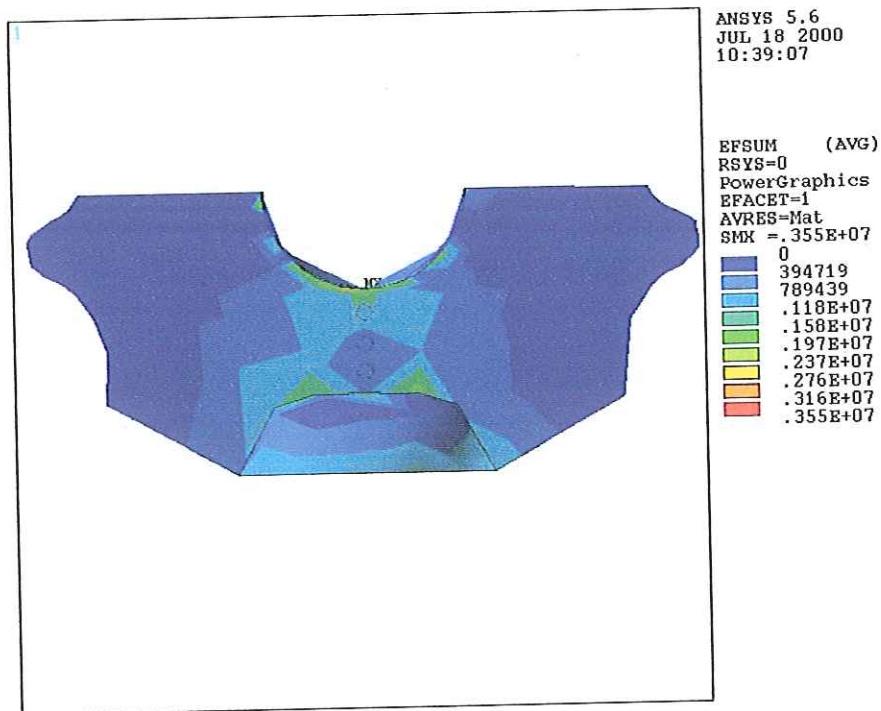


Figura 4.20: Campo Elétrico na cabeça do isolador com bolhas cilíndricas

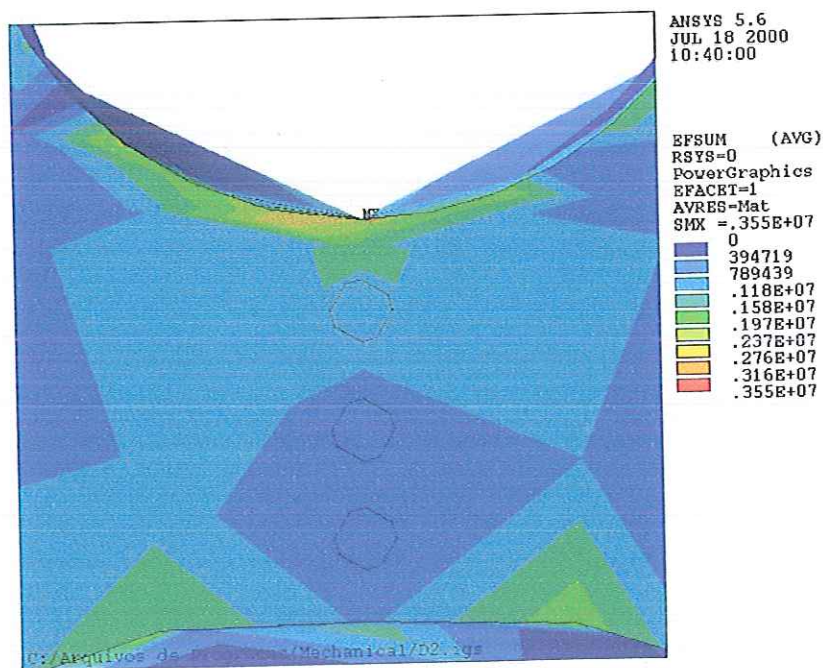


Figura 4.21: Campo Elétrico na cabeça do isolador com bolhas cilíndricas (Detalhe)

4.7 – “Malhação” com 8496 elementos e 13622 nós com Bolhas de Ar.

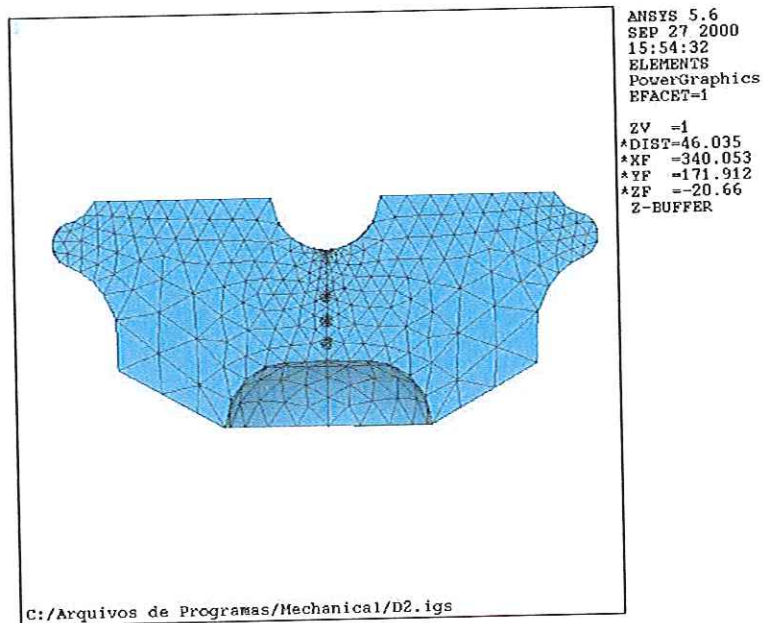


Figura 4.22: Cabeça do isolador com bolhas de ar e “malhação” de 8.496 elementos e 13.622 nós

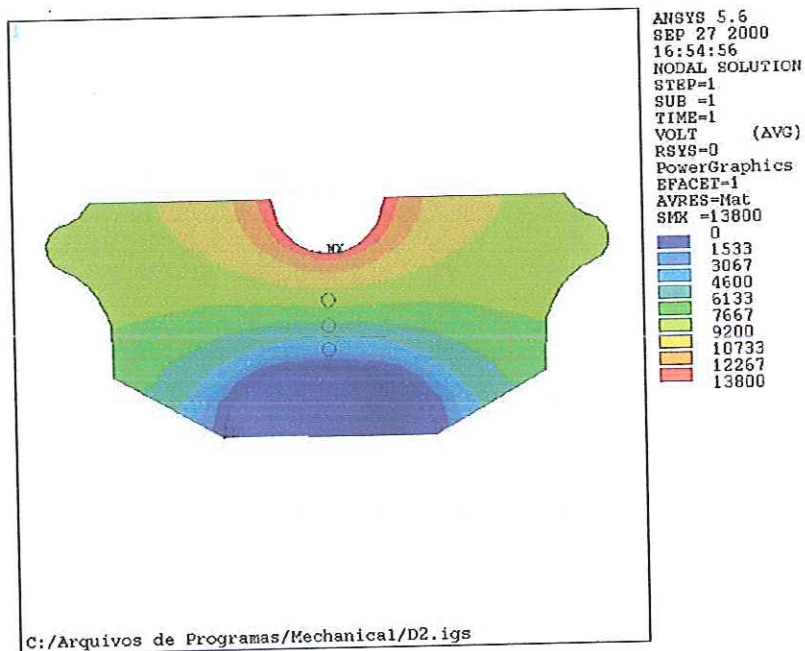


Figura 4.22: Equipotenciais para a nova “malhação”

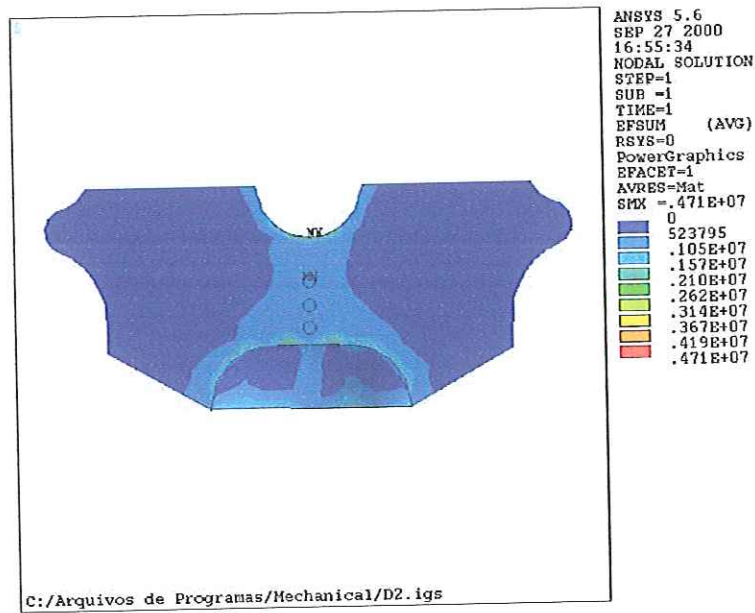


Figura 4.23: Campo elétrico para a nova “malhação”

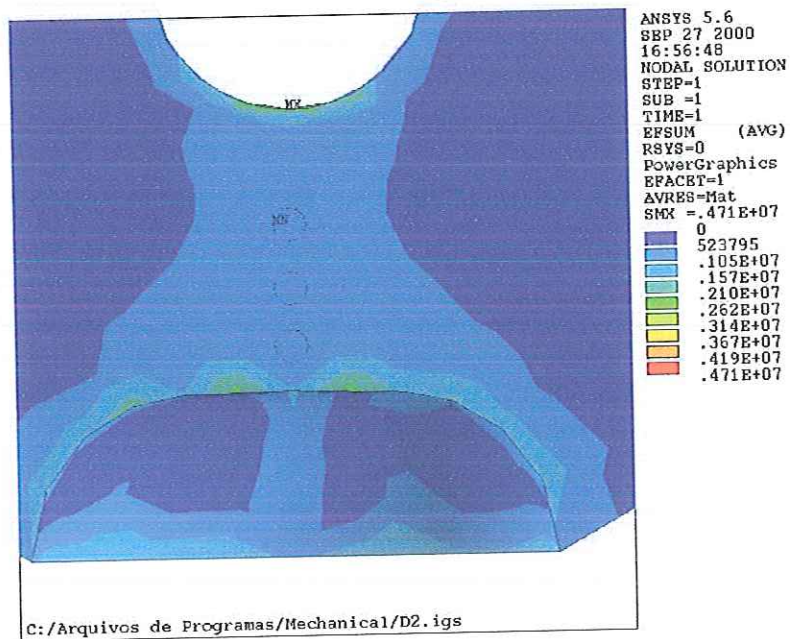


Figura 4.24: Campo elétrico para a nova “malhação” (Detalhes)

Observação: há uma sensível diferença quando se compara os resultados da figura 4.24 e 4.20, devido ao refinamento da “malhação”.



4.8 – Análise do Isolador Interno com o ANSYS, com “malhação” de 3209 elementos e 5894 nós. Esta seção também contribuiu para a geração do artigo referenciado como [26].

A figura 4.25 mostra o desenho do isolador interno, feito originalmente em AUTOCAD e importado pelo ANSYS.

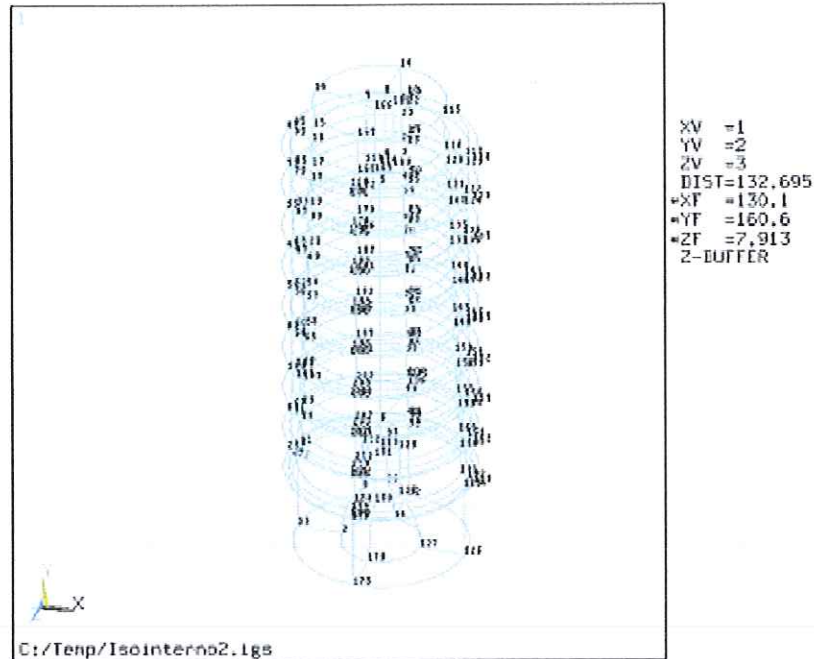


Figura 4.25: Isolador interno, mostrado em 3 dimensões, em perspectiva.

As figuras 4.26 e 4.27 mostram as equipotenciais, em 13,8kV no pino superior e 0V no pino inferior;

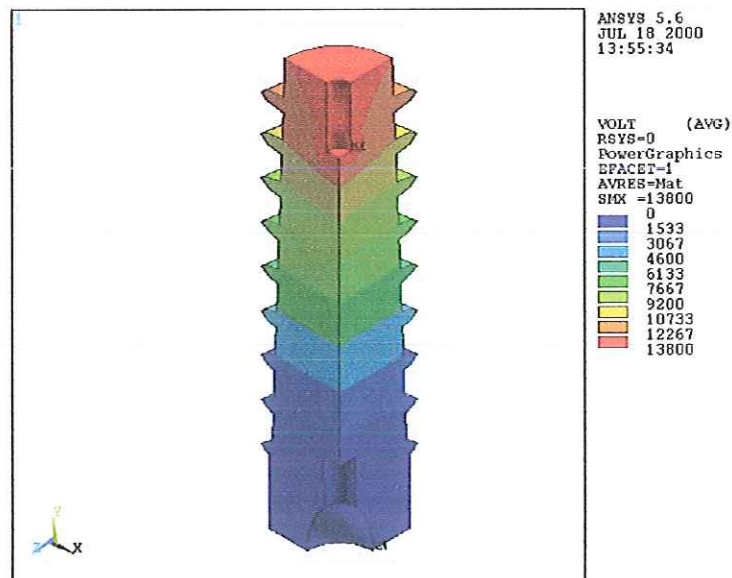


Figura 4.26: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90°

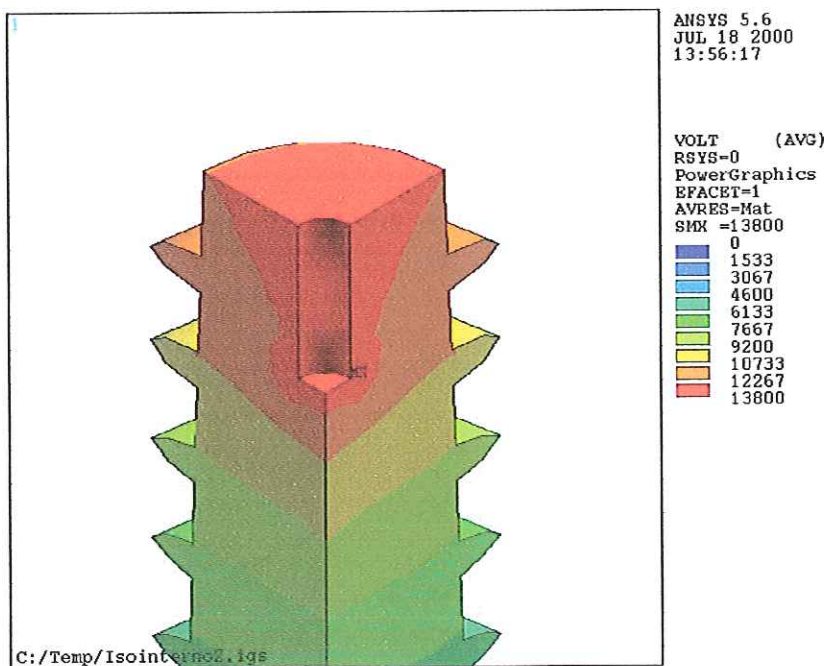


Figura 4.27: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90° (Detalhe)

As figuras 4.28 e 4.29 mostram as equipotenciais da mesma situação das duas anteriores.

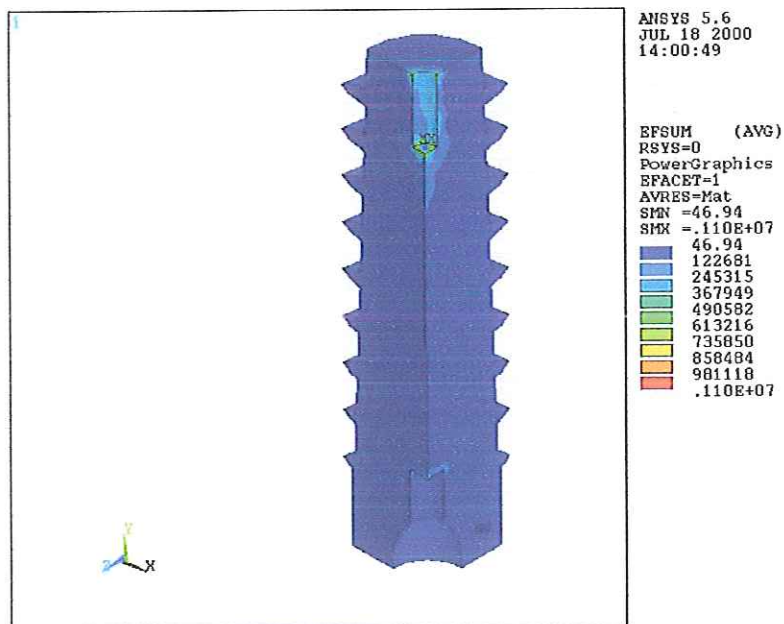


Figura 4.28: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°

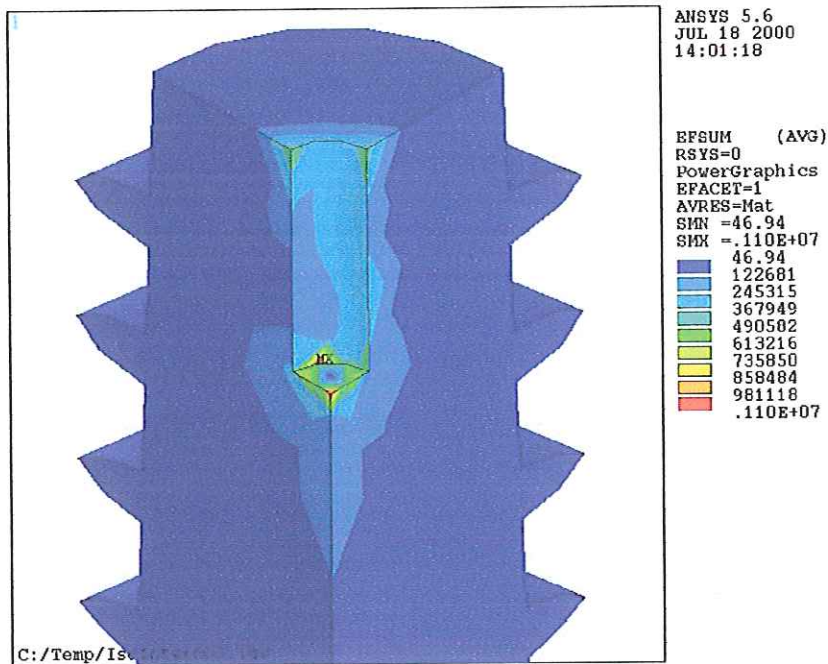


Figura 4.29 : Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°(Detalhe)

#### 4.9 – Introdução de bolhas de ar, nas mesmas condições elétricas e de “malhação”

Coordenadas das bolhas cilíndricas:

1ª Bolha (Cima)

Wpx:141,65

Wpy:236,75

Raio:1mm / Diâmetro:2mm

Profundidade: -20mm

2ª Bolha (Meio)

Wpx:141,65

Wpy:222,3

Raio:1mm / Diâmetro:2mm

Profundidade: -20mm

3ª Bolha (Meio)

Wpx: 141,65

Wpy: 204,00

Raio: 1mm / Diâmetro: 2mm

Profundidade: -20mm

4ª Bolha (Meio)

Wpx: 141,65

Wpy: 163,2

Raio: 1mm / Diâmetro: 2mm

Profundidade: -20mm

As figuras 4.30 e 4.31 mostram as equipotenciais e as figuras 4.32 e 4.33 mostram o campo elétrico quando há bolhas de ar disseminadas na resina constitutiva do isolador.

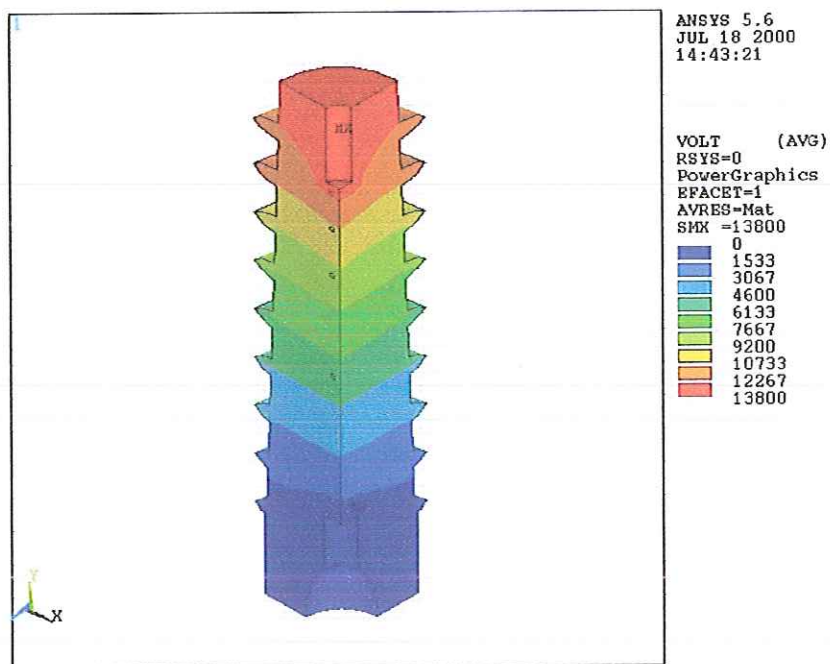


Figura 4.30: Equipotenciais em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar.

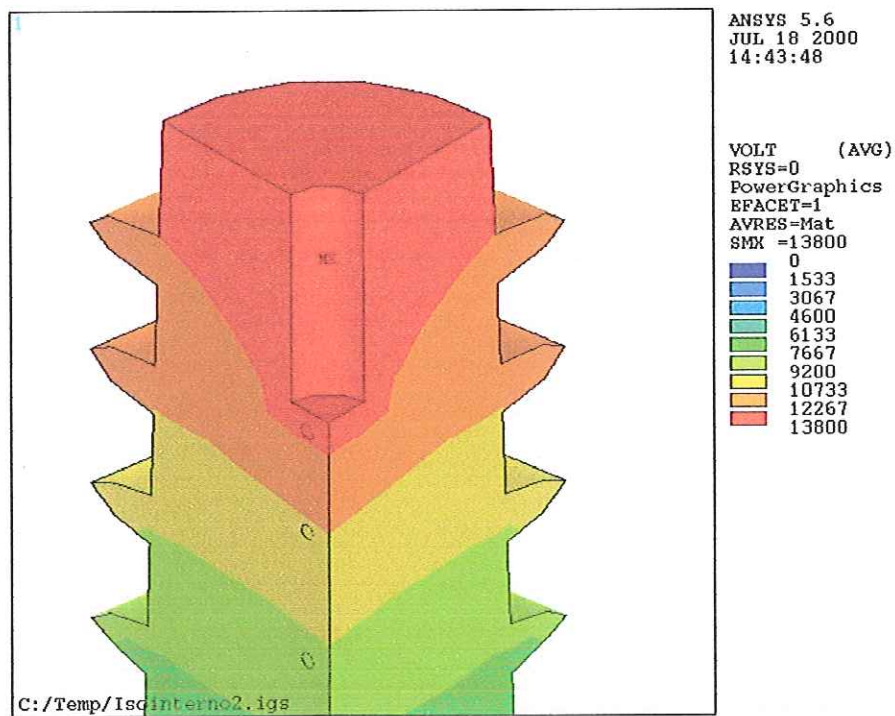


Figura 4.31: Eqüipotenciais em isolador interno, com corte de 90ºe com bolhas cilíndricas de ar (Detalhe)

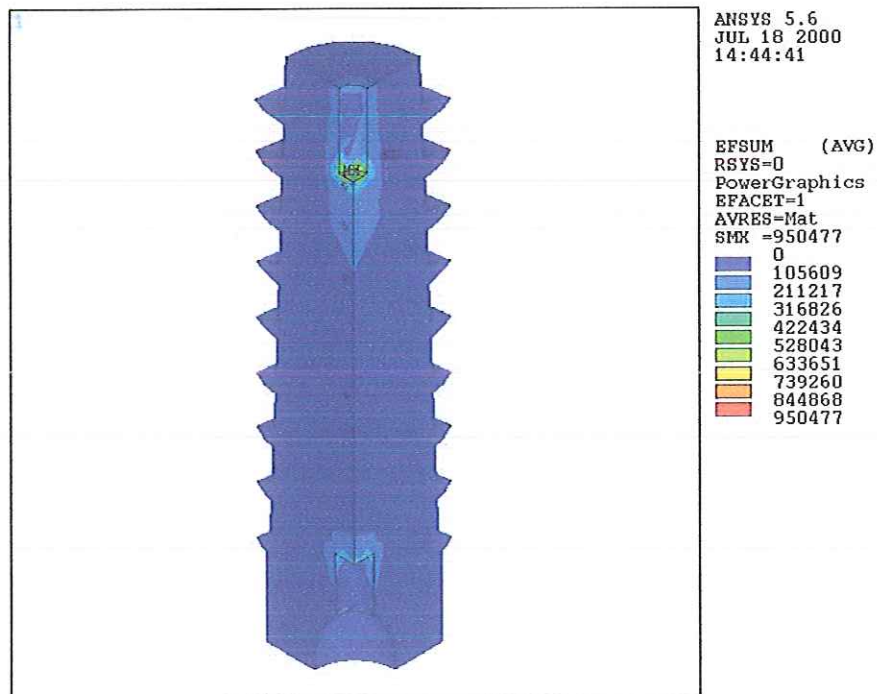


Figura 4.32: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90ºe com bolhas cilíndricas de ar

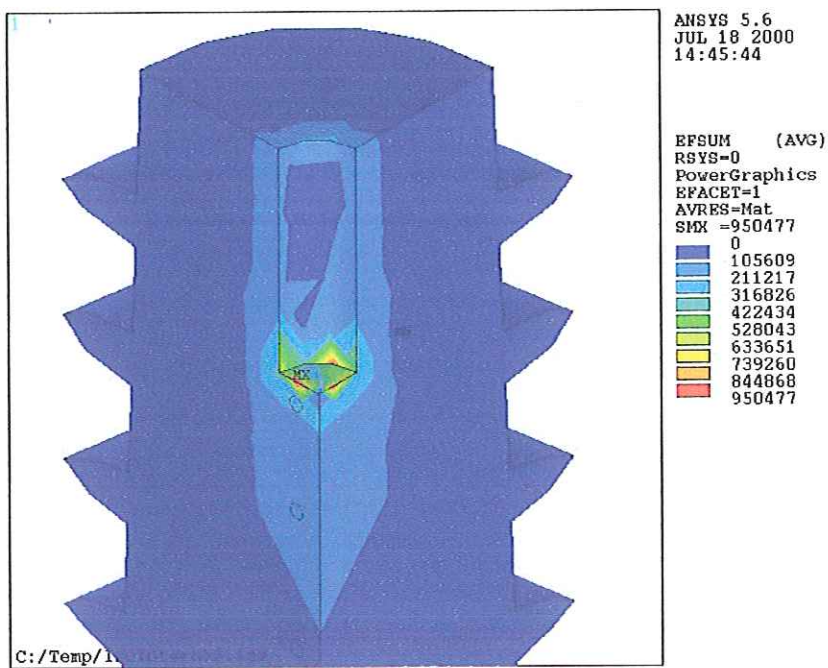


Figura 4.33: Campo Elétrico em isolador interno, com corte de 90°e com bolhas cilíndricas de ar (Detalhe).

## 4.10 – Mapeamento de um Transformador de Força utilizando o ANSYS

Seguindo as idéias básicas de projeto em Guerrini [25], para um Transformador de Força, consideramos os seguintes dados nominais:

Potência: 1.000kVA

Tensões Superiores: 13,8/13,2/12,6/12,0/11,4kV, ligação  $\Delta$ .

Tensões Inferiores: 220/127V, ligação Y – aterrado.

Frequência: 60Hz

Deslocamento angular  $\Delta$  - Y:  $30^\circ$

Resfriamento Forçado a Ar e a Óleo

## 4.10.1 – Cálculo do Fluxo:

A tensão por espira é:

$$V_e = \frac{E_f}{N} = K \cdot \sqrt{\text{medida em kVA}} = 0,6 \cdot \sqrt{1.000} = 18,97V / \text{Espira}$$

Da tabela 1 do Anexo D, temos  $k=0,6$  e como  $E_f=4,44N f \phi_{\text{máx}} 10^{-8}$  V

teremos:

$$\phi_{\text{máx}} = \frac{E_f}{N} \frac{1}{4,44 f 10^{-8}} = 7.120,87k \text{Maxwell}$$

Cálculo da área da seção transversal, usando chapa de aço silício, tipo E005, grão orientado ACESITA (Anexo D).

-Indução Magnética (B): 1,245 T (Nominal)

-Fator de Empilhamento (Fe): 0,95

-Espesura: 0,30mm

Com isso, obtemos a área de seção líquida ( $S_L$ ):

$$S_L = \frac{\phi_{\text{máx}}}{B} = 572 \text{ cm}^2$$

Já a área de seção bruta será:

$$S_B = \frac{S_L}{Fe} = 602 \text{ cm}^2$$

Escolha da seção do núcleo: seção tipo cruz com 4 dentes (Tabela 3 do Anexo D):

$$D = 1,2 \sqrt{S_B (\text{mm}^2)} = 294,4 \text{mm}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,42 \times 294,4 = 123,6 \text{mm} & h_2 &= 0,07 \times 294,4 = 20,6 \text{mm} & h_3 &= 0,075 \times 294,4 = 22,1 \text{mm} \\ h_4 &= 0,07 \times 294,4 = 20,6 \text{mm} & h_5 &= 0,05 \times 294,4 = 14,7 \text{mm} \end{aligned}$$

Cálculo do número de chapas: Espessura da chapa : 0,30mm

$$\begin{aligned} h_1 &= 123,6 \times 0,95 = 117,4 \text{mm} & h_2 &= 20,6 \times 0,95 = 19,6 \text{mm} & h_3 &= 22,1 \times 0,95 = 21,0 \text{mm} \\ h_4 &= 20,6 \times 0,95 = 19,6 \text{mm} & h_5 &= 14,7 \times 0,95 = 14,0 \text{mm} \end{aligned}$$

Feixe 1:  $h_1/0,3 = 117,4/0,3 = 391,3 \Rightarrow 450$  Chapas

Feixe 2:  $h_2/0,3 = 19,6/0,3 = 65,3 \Rightarrow 90$  Chapas

Feixe 3:  $h_3/0,3 = 21,0/0,3 = 70,0 \Rightarrow 95$  Chapas

Feixe 4:  $h_4/0,3 = 19,6/0,3 = 65,3 \Rightarrow 90$  Chapas

Feixe 5:  $h_5/0,30 = 14,0/0,3 = 46,6 \Rightarrow 75$  Chapas

Cálculo da nova área:  $\text{Área} = S = L.e.N$

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,95 \times 294,4 = 279,7 \text{mm} & L_2 &= 0,85 \times 294,4 = 250,2 \text{mm} & L_3 &= 0,71 \times 294,4 = 209,0 \text{mm} \\ L_4 &= 0,56 \times 294,4 = 164,9 \text{mm} & L_5 &= 0,42 \times 294,4 = 123,6 \text{mm} \end{aligned}$$

Cálculo da área:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0,3 \times 450 \times 279,6 = 37.746,4 \text{mm}^2 & S_2 &= 0,3 \times 90 \times 250,2 = 6.755,4 \text{mm}^2 \\ S_3 &= 0,3 \times 95 \times 209,0 = 5.956,5 \text{mm}^2 & S_4 &= 0,3 \times 90 \times 164,9 = 4.452,3 \text{mm}^2 \\ S_5 &= 0,3 \times 75 \times 123,6 = 2.781,0 \text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$S_{\text{nova}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 57.691,6 \text{mm}^2$$

A indução magnética, ou densidade de fluxo magnético, nova fica:

$$B_{\text{nova}} = (S_{\text{antiga}}/S_{\text{nova}})B_{\text{antiga}} = 11.829,6 \text{Gauss} = 1,183 \text{ Tesla}$$

A seguir será feito o Cálculo dos Enrolamentos:



## 4.10.2 – Escolha dos Condutores

Lado da Alta Tensão (TS) com ligação em  $\Delta$ :

$$I_S = \frac{(kVA)}{\sqrt{3} (kV)} \text{ (de linha)} \quad e \quad I_N = \frac{I_S}{\sqrt{3}} \text{ (de fase)}$$

Tensões nos Taps: 13,8/13,2/12,6/12,0/11,4 kV

Segundo a ABNT, devemos tomar uma variação de 5% para menos na maior tensão, resultando as correntes:

$$I_S=44,04A \quad e \quad I_N=25,42 A$$

Da tabela II, vem a densidade  $J=3,5 A/mm^2$  e a seção do condutor  $= 25,42/3,5 = 7,26 mm^2$ . Acessando uma tabela de bitolas de fios, temos que o condutor no sistema antigo seria de 4AWG (5,2mm) e no sistema métrico temos,  $25 mm^2$ , equivalentes para a finalidade deste trabalho.

Assim, teremos a densidade efetiva igual a :  $J = \frac{7,26}{25} \times 3,5 \approx 1,1 A/mm^2$

Lado da Baixa Tensão (Y aterrado)

$$I_n=2.624,3 A$$

Sendo a densidade igual a  $3,5A/mm^2$  (Tabela II, Anexo D)

$$S_c=6.560,8/3,5=1.874,5 mm^2$$

Utilizaremos 40 de  $12 \times 4 mm^2$  (superdimensionamento, para suportar 156% da carga), o que dá uma área de  $1.920 mm^2$ .

A densidade de corrente será:

$$J = \frac{749,8}{1920} \cdot 3,5 = 1,366 A/mm^2$$

## 4.10.3– Cálculo do número de espiras:

Lado da Baixa Tensão (TI):

$$E_f = 4,44 \cdot N \cdot f \cdot \phi_{m\acute{a}x} \cdot 10^{-8}$$

$$NTI = \frac{127}{4,44.60.7120,87.10^3.10^{-8}} = 6,695 \approx 7 \text{ espiras}$$

Lado da Alta Tensão (TS):

$$NTS = \frac{7 \times 13.800}{127} = 760,62 \approx 761 \text{ espiras}$$

4.10.4 – Dimensionamento do enrolamento de tensão inferior:

4.10.4.1 – Diâmetro Interno da bobina de TI (Baixa Tensão)

DITI = D + 2 (Espessura do cilindro isolante entre a bobina de TI e o Núcleo).

Espessura do Cilindro = 5mm

$$D = 294,4 + 10 = 304,4 \text{ mm}$$

4.10.4.2 – Comprimento Axial:

$$L_b = 8 \times 4,05 = 32,4 \text{ mm}$$

Como temos 40 camadas:  $L_{b(\text{efetivo})} = 1.296,0 \text{ mm}$

Adotaremos os calços da bobina = 20mm, assim:

$$L_c = 2 \times 20 = 40 \text{ mm}$$

Comprimento Total Axial:

$$L_a = L_b + L_c = 1.296 \text{ mm} + 40 \text{ mm} = 1.336 \text{ mm}$$

Desse modo:

$$DITI = 304,4 \text{ mm e comprimento: } 1.336,0 \text{ mm}$$

4.10.4.3 Diâmetro Externo da Bobina TI

$$DETI = 304,4 + (2 \times 12,05) = 328,5 \text{ mm}$$

4.10.5 Dimensionamento da Alta Tensão (TS):

4.10.5.1 Critérios de Bobinamento:

Os TAPs serão os seguintes: 13800

600V

13200  
600V  
12600  
600V  
12000  
600V  
11400

Adotaremos a bobinagem em panquecas, com 2.500V/Bobina, resultando em um total de 6 panquecas. Deste número, faremos a seguinte distribuição: 4 serão comuns e 2 serão centro,

$$\frac{NTS}{N^{\circ}Bobinas} = \frac{761}{6} = 126,83 \text{Espiras / Bobina}$$

$$\frac{NTI}{VTI} = \frac{7}{127} = 0,055 \text{Espiras / Volt}$$

O número de espiras por TAPS : NETAPS=600x0,055=33Espiras/Tap

Dimensões axiais e número de TAPs :

2 calços de bobina = 20mm cada

2 discos papelão, que irão juntos aos calços de bobina, 3mm

2 calços de bobina comum 6mm

3 calços de bobina de centro 9mm

Comprimento total dos calços: 85mm

Espaço disponível para bobinas ( $E_d$ ):

$$E_d = L_a - L_{te} = 1.336 - 85 = 1.251,0\text{mm}$$

Espaço por bobina ( $E_b$ ):

$$E_b = 1.251,0/6 = 208,5\text{mm}$$

Número de espiras por camada

$$NEC = 208,5/5,2 = 40,0 \text{Espiras/camada (4AWG)}$$

Número Camadas

$$N_E = 127/40 = 3,17 \Rightarrow 3 \text{ Camadas}$$

## 4.10.5.2 – Diâmetro Interno da Bobina de Alta Tensão (TS):

Entre a bobina superior e inferior deixamos o canal de refrigeração. Como a distância TI e TS é 23mm, temos:

$$DITS = DITI + 2 \times 23 = 374,5 \text{ mm}$$

## 4.10.5.3 – Diâmetro Externo da Bobina TS:

- 1 camadas condutores, fio 4 AWG
- 2 camadas de papel entre camadas

Da tabela 4 (Anexo D), tiramos a espessura do *fish paper*: 1mm

Espessura da bobina TS = 16,63mm + 5% acomodamento: 17,46mm

$$DETS = 444,62 \text{ mm}$$

## 4.10.6 – Dimensão do Núcleo

## 4.10.6.1 - Culatra

Seção do núcleo:  $57.689,97 \text{ mm}^2$

Espessura da Culatra = 254,5mm

Altura da Culatra = 226,7mm

A seção da culatra:  $254,5 \times 226,7 = 57.695,15 \text{ mm}^2$

## 4.10.6.2 – Janela do Núcleo

A distância entre fases é de 24mm, o fator de espaçamento é 0,2 e então a área da janela deverá ser:

$$H_j = 1.336,0 \text{ mm}$$

$$L_j = 1.336,0 / 3,5 = 381,71 \text{ mm} \quad (H_j / L_j = 3,5 \text{ recomendada})$$

$$\text{Área da Janela} = H_j \cdot L_j = 509.965,0 \text{ mm}^2$$

$$\text{Distância entre fases} = 381,71 - (444,62 - 294,4) = 231,49 \text{ mm}$$

Para completar, devemos colocar separadores entre as bobinas vizinhas, com espessura de 2mm. Resulta então a Figura 4.9.1, com o desenho do núcleo ferromagnético e o corte das bobinas:

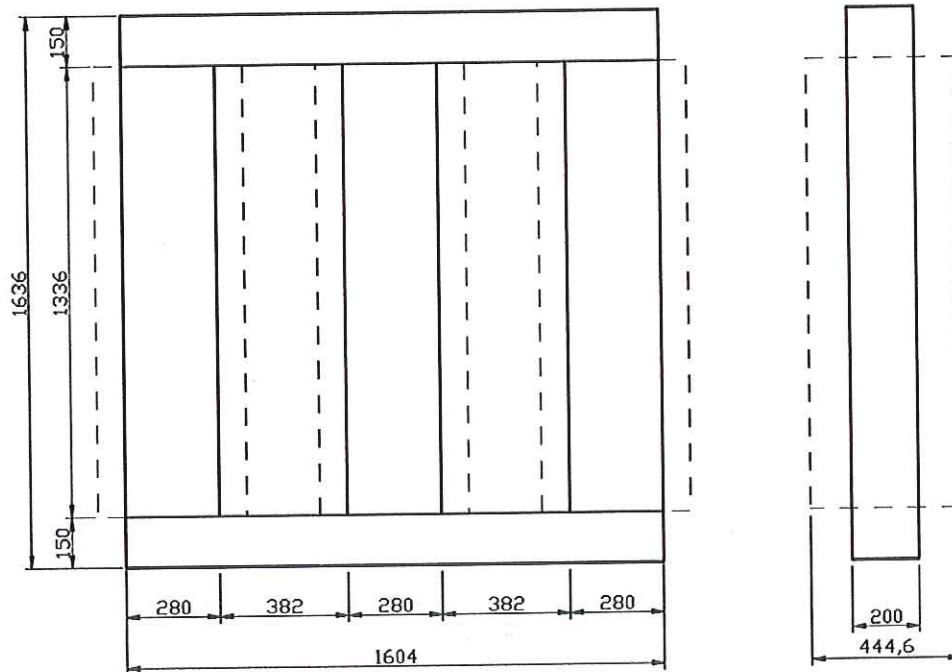


Figura 4.34 – Dimensões do Núcleo e das bobinas do transformador de 1.000kVA

#### 4.10.7 – Aplicação do ANSYS ao Transformador calculado

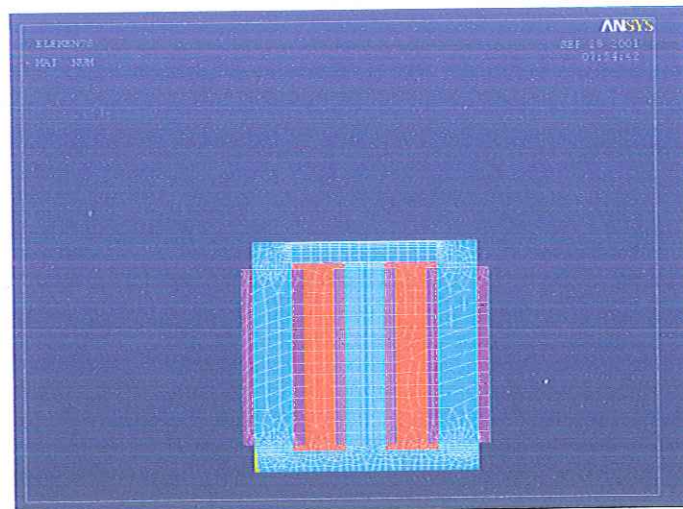


Figura 4.35 – “Malhação” do transformador: Vermelho : Ar / Roxo: Cobre / Azul : Núcleo

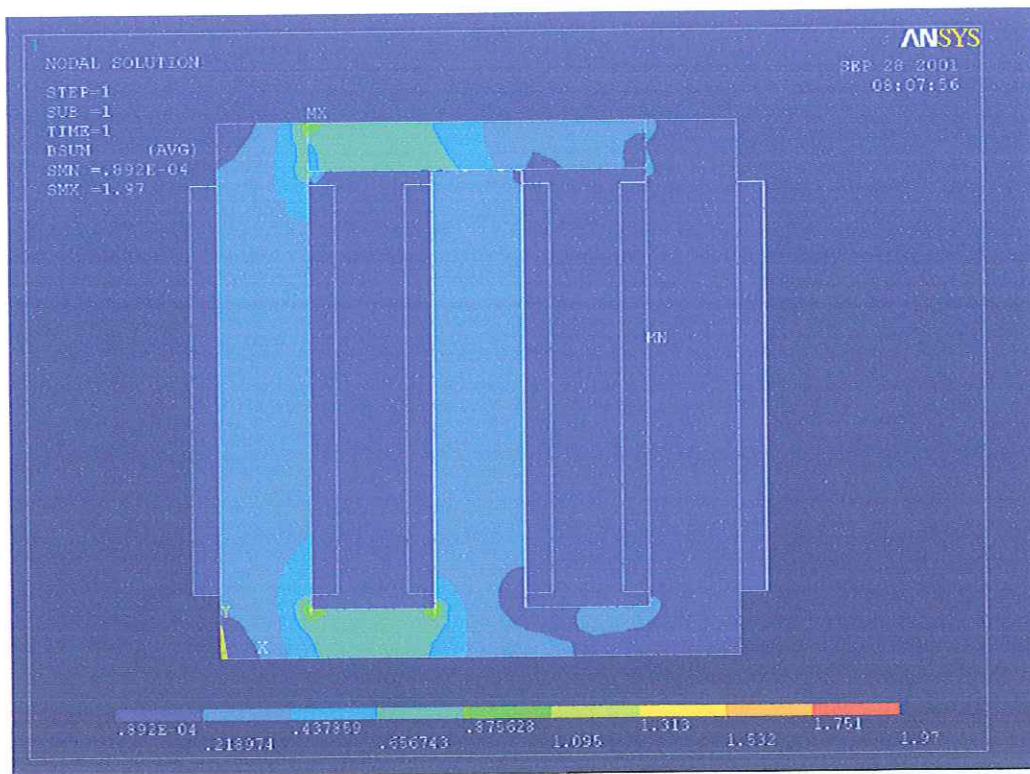


Figura 4.36: Densidade de fluxo magnético (Tesla), (fases: 240°, 0°, 120°)

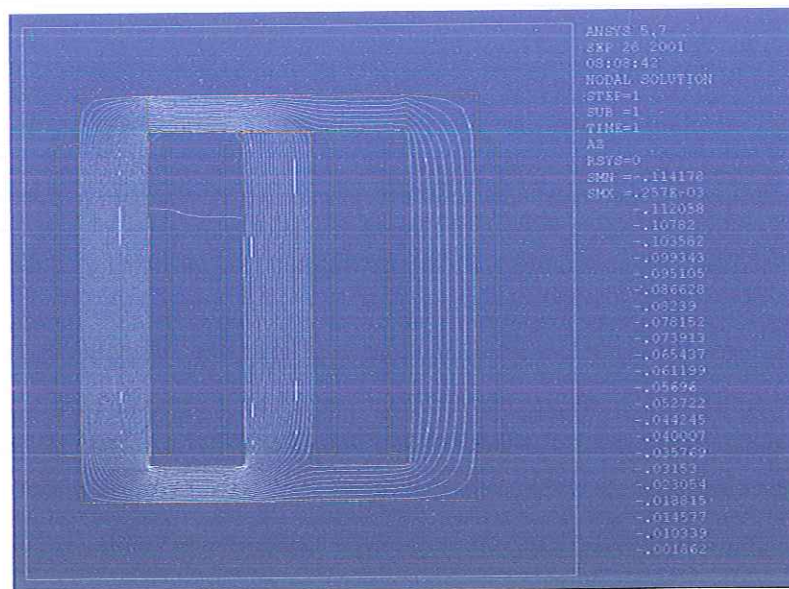


Figura 4.37 - Fluxo Magnético no núcleo (Weber).

### 4.11 - Projeto de um Reator

Dados do Reator magnético: Indutância de 2,3H, com 0,4A de corrente contínua e tensão alternada superposta de 165V<sub>AC</sub> a 120Hz. Aço Silício 4%. Há ampla bibliografia sobre este assunto, assim utilizamos [GOURISHANKAR], [27]], onde temos o seguinte procedimento:

$$N.A_m \geq 16,13 \times L I_{cc} 10^3 = 16,13 \cdot 2,3 \cdot 0,4 \cdot 10^3 = 14.839,6$$

$$N.A_m \geq 14.839,6 \text{ (m}^2 \text{ espiras)}$$

Adota-se Núcleo padrão 3:

$$2.a = 3 \text{ cm}$$

$$A_{\text{seção}} = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_m = 9 \times 0,9 = 8,1 \text{ cm}^2$$

$$L_m = 19,5 \text{ cm}$$

Como  $A_m = 8,1 \text{ cm}^2 > 6,36 \text{ cm}^2$ , adotaremos classe de potência 100VA.

$$A_{m\text{máx.}} = 1,2 \sqrt{P} = 12 \text{ cm}^2$$

Como  $A_m = 8,1 \text{ cm}^2 < 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow$  Classe 100VA

Adota-se  $J = 3,2 \text{ A / mm}^2$  (densidade de corrente)

$$S_{\text{condutor}} = 0,4 / 3,2 = 0,125 \text{ mm}^2 \text{ portanto 26 AWG}$$

Determinação do número de espiras:

$$N \geq 14839,6 / A_m = 1832,04 \text{ espiras portanto 1.833 espiras}$$

como será usado o fio #26AWG que possui  $\phi = 0,404 \text{ mm}$ , temos 22,5 espiras/cm (isolante: esmalte)

Assim, o número de espiras por camada =  $4,1 \text{ cm} \times 22,5 \text{ espiras/cm} = 92 \text{ espiras/camada}$  e o número de camadas é  $1833 / 92 = 20 \text{ camadas}$

Adotando-se isolamento entre camadas de 0,05mm

$$\text{Altura do enrolamento} = 20 \times 0,404 \text{ mm} = 8,08 \text{ mm}$$

$$\text{Altura isolamento: } 19 \times 0,05 \text{ mm} = 0,95 \text{ mm}$$

Isolação inicial: 2mm

Sobreca: 0,5mm

resultando um total de 11,53mm

Determinação da força magneto motriz total devido à corrente contínua:

$$F_{cc} = N.I = 1833 \times 0,4 = 733,2 \text{ Ae}$$

ou ainda:  $F_{cc} = 733,2 \times 1,256 = 920,8992$  Gilbert

$$\text{e } H_{cc} = 920,8992 / 19,5 = 47,23 \text{ Oe}$$

Supõe-se alternância 8:8

$$\text{temos } L_g = 0,1 \text{ cm} \quad \text{e } B_{cc} = 920,89 / 0,1 = 9.208,9 \text{ Gauss}$$

Invertendo a curva do entreferro e superpondo à curva de magnetização, na Figura 4.10.2, chegamos em:

$$H_{cc} = 3 \text{ Oe e } B_{ccm} = 8600 \text{ (Ponto 1 na Curva de Magnetização Aço-Si 4\%)}$$

Determinação de  $B_{ac}$  e Permeabilidade Magnética

$$B_{m\acute{a}x-ac} = 165 / (4,44 \times 120 \times 1833 \times 8,1 \times 10^{-4}) = 0,2086 \text{ T} = 2.086 \text{ Gauss}$$

$$\text{e } H_{cc} = 3 \text{ Oe}$$

Chegamos, portanto, em  $\mu_{ac} = 1000$  (Ponto 2 da Curva Magnetização Aço-Si 4%)

Cálculo de  $\mu_e$ :

$$\mu_e = 1 / [(1/\mu_{ac}) + (l_g/l_m)] = 142,5$$

$$L = (N^2 \cdot A_m \cdot \mu_e) \cdot 10^{-8} / l_m = 2,29 \text{ Henry}$$

$$\text{Densidade de corrente : } N.I / (A_{bobina}) = 1.833 \times 0,4 / (0,041 \times 0,05306) = 3,37 \text{ A/mm}^2$$



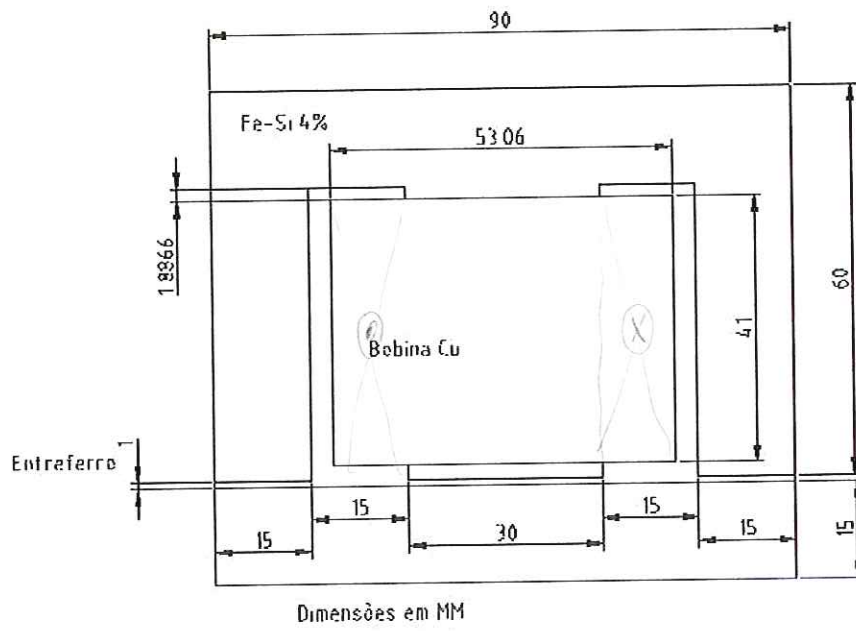


Figura 4.38 – Núcleo e bobina do Reator

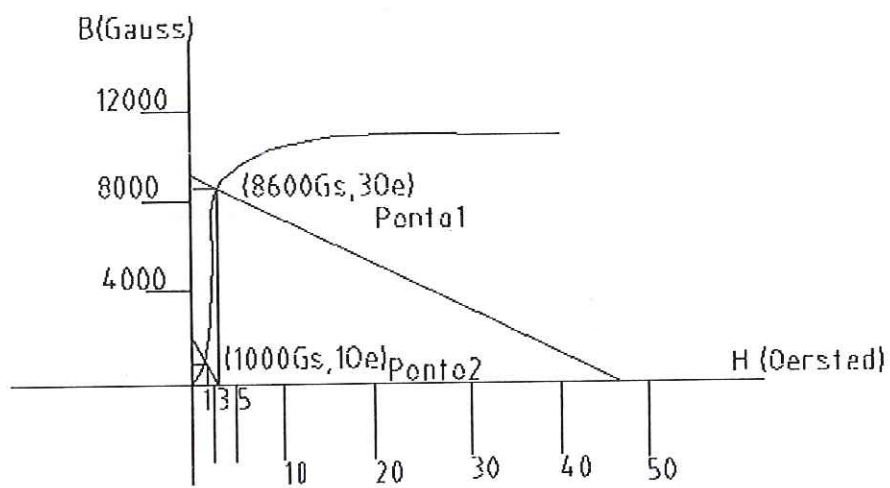


Figura 4.39 – Curva de Magnetização do Aço-Silício 4%

## Aplicação do ANSYS ao Reator

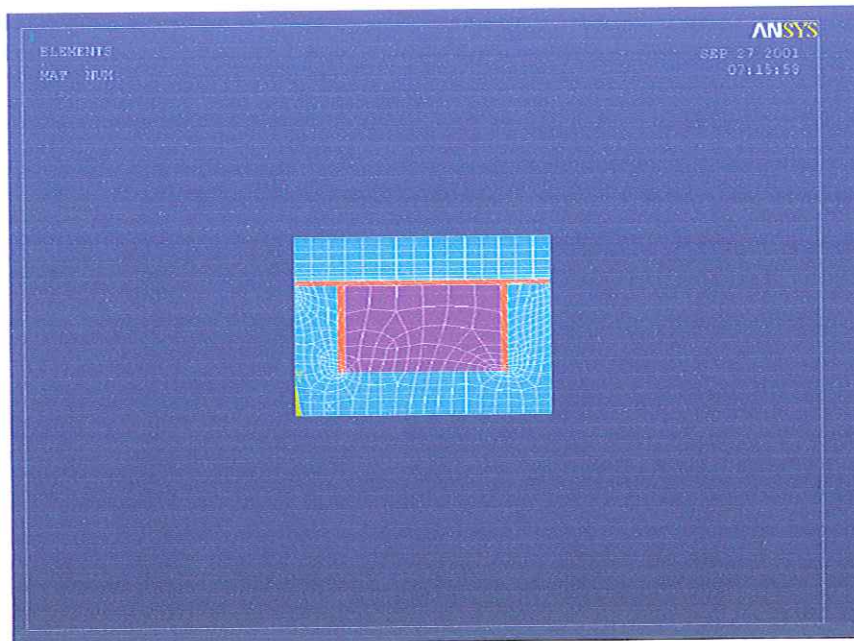


Figura 4.40 - Desenho da malhação do reator: Roxo: Cobre / Vermelho: Ar / Azul: Aço

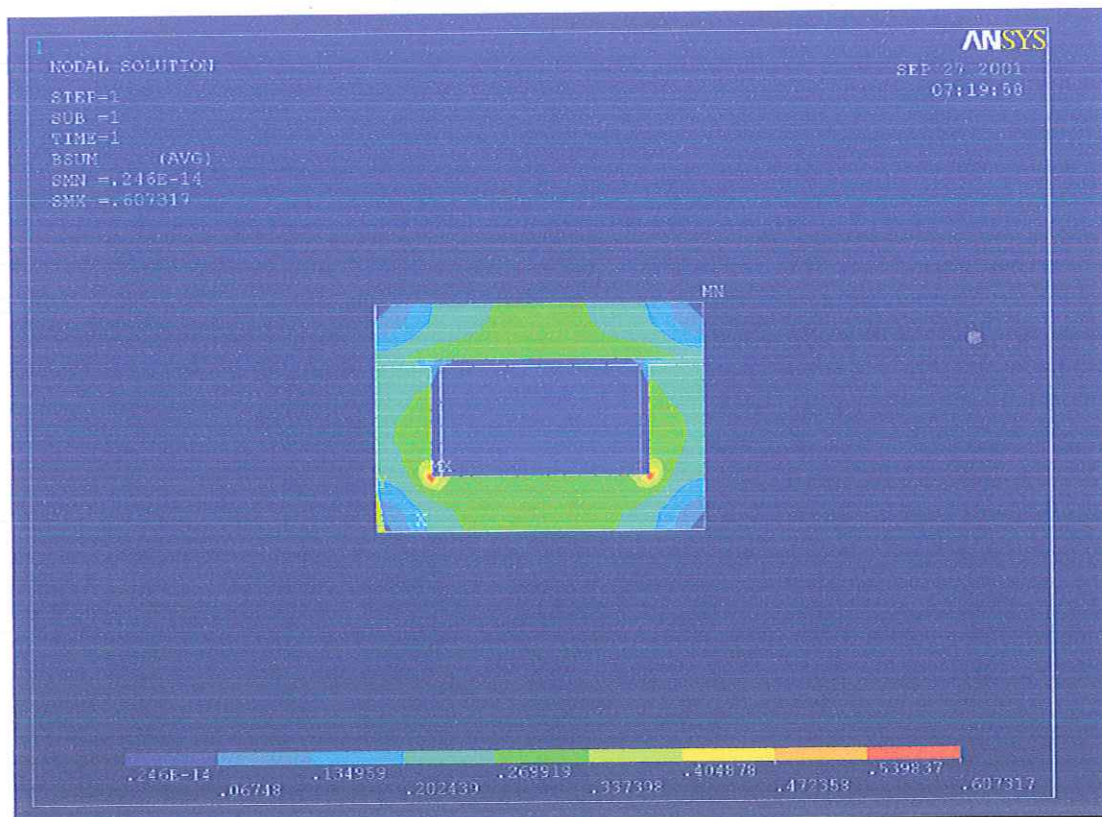


Figura 4.41 - Densidade de Fluxo Magnético B, do reator

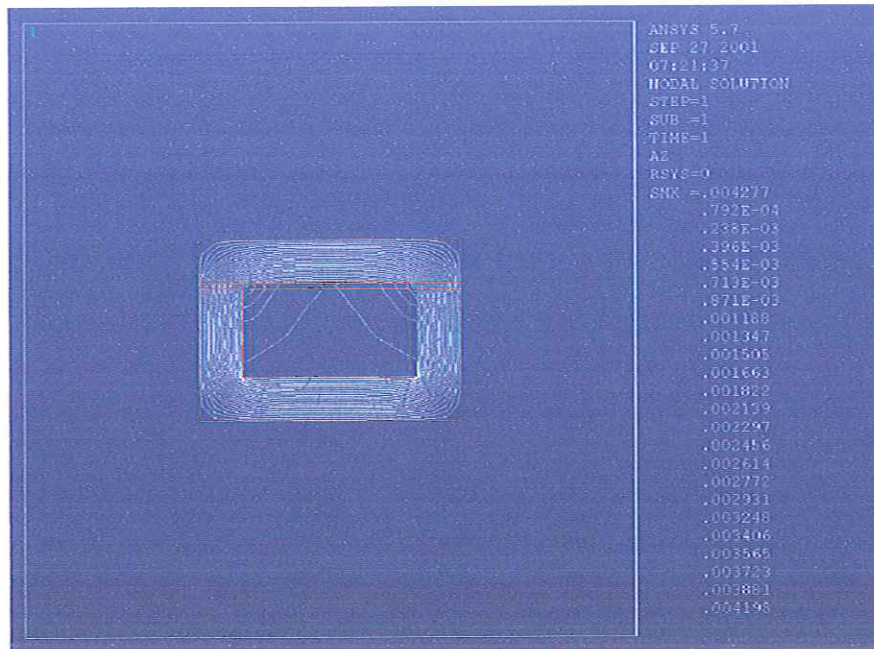


Figura 4.42 - Fluxo magnético do reator

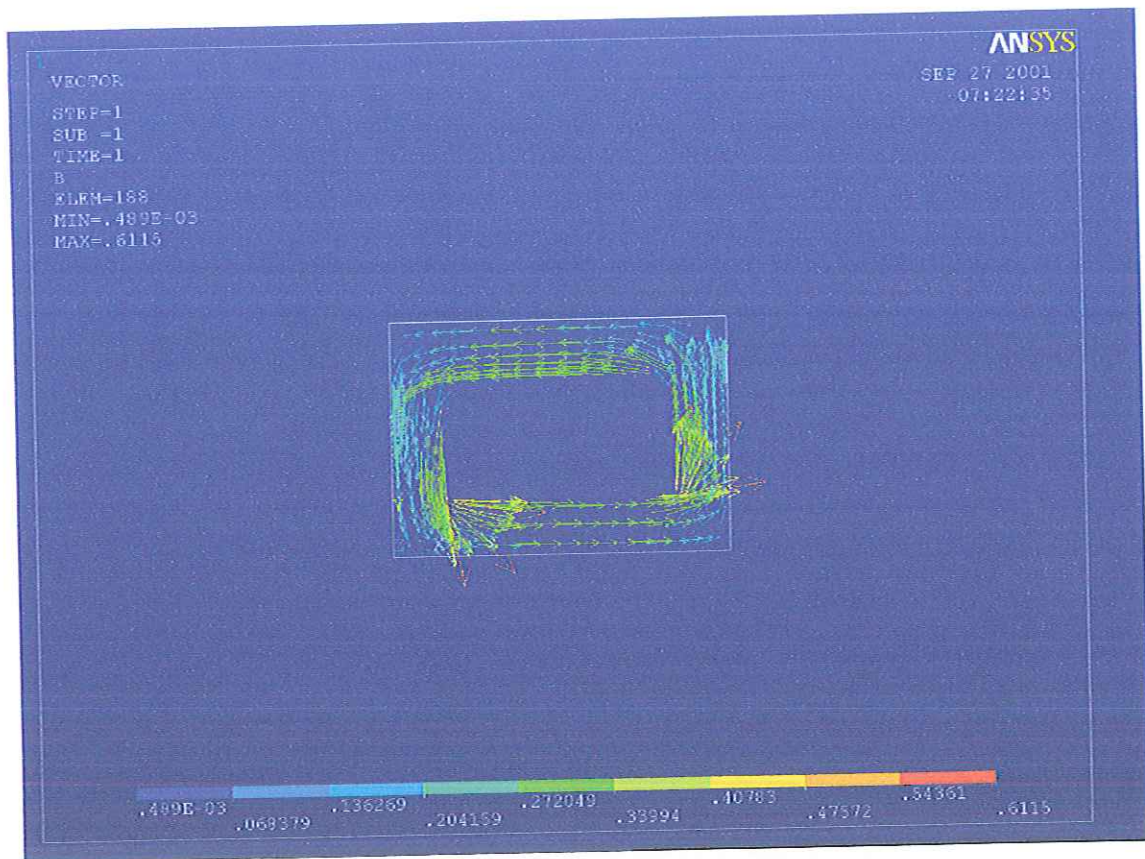


Figura 4.43 – Representação vetorial da Indução Magnética B (Tesla)

## 5 – Comentários e Conclusões

Como foi mostrado no capítulo 1, desde os primórdios da engenharia sempre houve a necessidade de se mapear grandezas que fossem de fundamental importância na análise, ou desenvolvimento de dispositivos físicos. Assim, muitos métodos foram experimentados com extrema dificuldade até bem pouco tempo. Com o avanço da informática, seja em termos de capacidade dos equipamentos (*hardware*), seja em termos do desenvolvimento de métodos numéricos e programação (*software*), houve muito progresso que redundou em melhores condições de se obter tais mapeamentos.

Por este nosso trabalho é visível a utilidade do MEF no mapeamento das grandezas, tais como as intensidades dos campos elétrico e magnético e potenciais elétrico e magnético, em dispositivos elétricos, além de comportamento térmico, todos regidos por modelos matemáticos análogos.

Por outro lado, quando o usuário não é especialista em programação de computadores, o uso de um *software* de caráter profissional, com todos os seus recursos, bem como seu aspecto de intercâmbio com outros *softwares* auxiliares e a relativa facilidade de seu uso, se mostra, então, de uma utilidade transcendental.

Ficou claro em nosso trabalho que o uso do pacote ANSYS é vantajoso se compararmos a uma programação usando FORTRAN, quando está envolvido um usuário que tenha por principal interesse os resultados, não possuindo habilidades ou não sendo versado em programação convencional.

Excursionou-se por várias versões do pacote ANSYS e, à medida que se utilizava uma versão mais nova, ou de maior capacidade de processamento, algumas dificuldades anteriores eram sanadas, como por exemplo os números de elementos e de nós, já que numa versão inicial, com capacidades de aproximadamente 983 elementos e 1992 nós, era grande a dificuldade para a escolha correta do corte do desenho do dispositivo sob análise, ou

facilmente aconteciam quedas do sistema no processamento. Para uma versão de maior capacidade, 8496 elementos e 13622 nós, este problema desapareceu. Assim, no caso do isolador interno utilizou-se um corte no desenho de  $90^\circ$ , com simetria axisimétrica e no caso do isolador interno o corte foi de  $180^\circ$ , com simetria planisimétrica, sem problemas de queda do sistema no processamento.

Um problema que persistiu foi o de entrada gráfica, já que este recurso no ANSYS, mesmo em versões recentes é ainda complexo, sendo preferível a utilização do AUTOCAD, uma ferramenta computacional de uso muito difundida nos trabalhos de engenharia, o qual é reconhecido e importado pelo ANSYS através do MECHANICAL DESKTOP. A utilização desses meios auxiliares por nossa parte, permitiu-nos um aprendizado complementar, ou seja, o uso do AUTOCAD na entrada de dados de geometria para o pré-processamento com o ANSYS, o que se afigura como uma ferramenta muito útil em engenharia.

Um fato importante no uso do ANSYS, de forma otimizada, foi a verificação na FIGURA 4.7 que as equipotenciais se concentraram na “cabeça” do isolador externo; assim, em lugar de se distribuir os elementos por toda a extensão do dispositivo, concentrou-se todo o potencial de “malhação” do ANSYS 5.6 – Versão Universitária, (8496 elementos e 13622 nós) nessa região, refinando aí o mapeamento. Esta conclusão foi corroborada por experiência realizada por Murakami, havendo um rompimento por sobrecarga do dielétrico nessa região, como é mostrado na FIGURA 5.1.



Figura 5.1: “Cabeça” do isolador onde é visível o rompimento do dielétrico, num isolador de resina poliuretana derivada de óleo de mamona

Esta parte do trabalho foi coroado pela publicação, em co-autoria, de um artigo na 2001 IEEE – 7<sup>th</sup> International Conference on Solids and Dielectrics, em Eindhoven/Holanda.

Finalmente, alguns fenômenos eletromagnéticos foram mostrados nos parágrafos 4.9 e 4.10, na forma dos mapeamentos de um transformador de distribuição de 1000kVA e de um reator magnético de 2,3H, como exemplos dessa classe de fenômenos.

## Anexo A

### Problemas em 3 dimensões

O capítulo 9 de [SILVESTER,[1]] mostra todos os detalhes da análise pelo MEF de problemas em 3D, e foi transcrito a seguir.

Na prática do dia a dia os fenômenos de Engenharia Elétrica nem sempre apresentam simetria, como são os casos de sólidos de revolução ou excitações circunferenciais os quais podem ser analisados em 2D e, então, nos casos assimétricos é necessária a análise em 3D. Considerando  $n$  o número adequado para a precisão requerida pelo problema sob análise, em 2D teremos  $n^2$  nós e em 3D teremos  $n^3$  nós, o que evidentemente mostra a necessidade maior de processamento e armazenamento em 3D, em relação às situações em 2D.

### Caso Eletrostático

#### Elementos escalares tetraédricos.

A dificuldade extra cresce em problemas 3D associados com um vetor. Todavia, há muitas situações onde os cálculos podem ser realizados inteiramente em uma variável escalar e é apropriada para examinar tal problema primeiro. A variação do tempo, escalar, em problemas de três dimensões é tipificado pelo caso de determinação do potencial eletrostático dentro de um volume  $\Omega$  ligado por eletrodos e potenciais especificados. Aqui, a equação que rege o potencial  $u$  é :

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) = -\rho \quad \text{Eq.A.1}$$

para um meio com permissividade variando no espaço ( $\epsilon$ ) e distribuição de carga  $\rho$ .

A energia eletrostática no caso 3D, fica:

$$\iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\epsilon_x \cdot (\partial u / \partial x)^2 + \epsilon_y \cdot (\partial u / \partial y)^2 + \epsilon_z \cdot (\partial u / \partial z)^2] \right\} dV \quad \text{Eq.A.2}$$

### Coordenadas homogêneas em 3 dimensões

Coordenadas homogêneas são usadas no caso em 3D, seguindo as propriedades essenciais do elemento simplex, devido a sua forma tetraédrica para ser separado de sua forma particular, tamanho e posição no espaço.



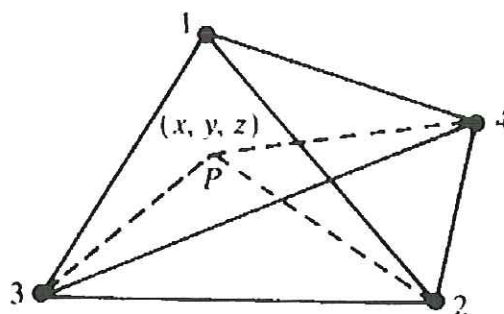


FIGURA A.1: Elemento finito tri-dimensional tetraédrico simplex

As coordenadas tetraédricas são definidas da seguinte maneira: considere P um ponto dentro do tetraedro, tendo coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Suponha que os volumes de quatro pequenos tetraedros, sejam  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$ , cada um dado por três dos originais quatro vértices  $(x_i, y_i, z_i)$ , com  $i=1, 2, 3$  e  $4$  e P. Logo, as coordenadas homogêneas de P são definidas por  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  e  $\zeta_4)$  onde  $V$  é o volume total do tetraedro e temos:

$$\zeta_1 = V_1/V \quad \text{Eq.A.3}$$

$$\zeta_2 = V_2/V \quad \text{Eq.A.4}$$

$$\zeta_3 = V_3/V \quad \text{Eq.A.5}$$

$$\zeta_4 = V_4/V \quad \text{Eq.A.6}$$

Claramente, a quarta coordenada não é linearmente independentemente mas satisfaz:

$$\sum_{i=1}^4 \zeta_i = 1 \quad \text{Eq.A.7}$$

É notado que:

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{Eq.A.8}$$

$$V_1 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{Eq.A.9 e Eq.A.10}$$

$$V_2 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{Eq.A.11 e Eq.A.12}$$

$$V_4 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}$$

Então é visto que a relação:

$$\zeta_i = \frac{a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y + d_i \cdot z}{3! \cdot V} \quad \text{Eq.A.13}$$

pode ser escrita, na qual  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  são cofatores apropriados coletados dos determinantes como aqueles mostrados nas Eq.2.10 e 2.11. Então o sistema de coordenadas ( $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$  e  $\zeta_4$ ) é definido explicitamente em termos de coordenadas cartesianas de vértice tetraédrico.

### Interpolação polinomial

Seguindo o procedimento adotado nos casos em duas dimensões, a interpolação polinomial:

$$\alpha_{ijkl} = R_i(n_0, \zeta_1) \cdot R_j(n_0, \zeta_2) \cdot R_k(n_0, \zeta_3) \cdot R_l(n_0, \zeta_4) \quad \text{Eq.A.14}$$

com  $i+j+k+l=n_0$ , então:

$$R_m(n_0, \zeta) = \frac{1}{m!} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (n_0 \cdot \zeta - k) \quad m > 0 \quad \text{Eq.A.15}$$

$$R_0(n_0, \zeta) = 1 \quad \text{Eq.A.16}$$

É prontamente verificado que  $\alpha_{ijkl}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$  é interpolatório em um polinômio de grau  $n_0$ .

Ele desaparece no conjunto de espaços regulares dos pontos  $\zeta_1=p/n_0$ ,  $\zeta_2=q/n_0$ ,  $\zeta_3=r/n_0$  e  $\zeta_4=s/n_0$  para valores integrais de p, q, r e s com  $p+q+r+s = n_0$ , exceto no caso  $p=i$ ,  $q=j$ ,  $r=k$ ,  $s=l$ , quando:

$$\alpha_{ijkl}(i/n_0, j/n_0, k/n_0, l/n_0) = 1 \quad \text{Eq.A.17}$$

### As relações matriciais para um simples tetraedro

Usando as propriedades das funções de interpolação descritas acima é claro que uma aproximação de grau  $n_0$

$$U = U_{ijkl} \cdot \alpha_{ijkl}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \quad \text{Eq.A.18}$$

pode ser feita para uma função potencial U dentro de um tetraedro.

Aqui, i, j, k e l são inteiros positivos ou zero, dos quais a soma é  $n_0$  e  $U_{ijkl}$  representa o já indeterminado conjunto de valores da função U e  $N=(n_0+1)(n_0+2)(n_0+3)/6$  os pontos de interpolação regularmente espaçados dentro ou nas faces do tetraedro. Usando argumentos similares àqueles postos adiante em 2D, continuidade de U é assegurada através das ligações do tetraedro na montagem dos elementos finitos de ordem N.

No caso eletrostático, comparando com a equação de Helmholtz, temos:

$$W = F(u) = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V |\nabla U|^2 dV \Rightarrow p = 1, k = 0, g = 0 \quad \text{Eq.A.19}$$

Temos o caso particular da Equação de Helmholtz:  $\nabla \cdot (\nabla u) = 0$ , Equação de Laplace

Assim seguindo a minimização do funcional acima:

$$\frac{\partial F}{\partial u_m} = 0 \quad \text{Eq.A.20}$$

Com N valores do multi-índice temos matricialmente:

$$[S] \cdot [U] = 0 \quad \text{Eq.A.21}$$

$$U = \sum_{m=1}^N U_m \cdot \alpha_m \quad \text{Eq.A.22}$$

$$\nabla U = \sum_{m=1}^N U_m \cdot \nabla \alpha_m \quad \text{Eq.A.23}$$

$$F(U) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^N \cdot \sum_{n=1}^N U_m \cdot U_n \cdot \iiint_{\Omega} (\nabla \alpha_m) \cdot (\nabla \alpha_n) d\Omega \quad \text{Eq.A.24}$$

Assim :

$$F(U) = \frac{1}{2} \cdot [U]^T \cdot [S] \cdot [U] \quad \text{Eq.23}$$

onde:

$$S_{mn} = \iiint_{\Omega} (\nabla \alpha_m) \cdot (\nabla \alpha_n) d\Omega \quad \text{Eq.24}$$

A integração da equação acima é levada sobre o volume do tetraedro,  $\Omega$ , com respeito às coordenadas de três dimensões (cartesianos  $(x, y, z)$ ), tal que  $d\Omega = dx \cdot dy \cdot dz$ . O procedimento formal para transformar em uma integral no espaço de coordenadas homogêneas de  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3$ , requer  $dx dy dz$  para ser repostos por:  $d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 / \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial(x, y, z)}$

Temos :

$$\frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{Eq.A.27}$$

Este é o determinante Jacobiano para a transformação de coordenadas. A escolha de  $\zeta_4$  como variável homogênea para ser eliminada usando Eq.A.7 é arbitrário. Qualquer outro conjunto  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  poderia ter sido selecionada. Temos  $d\Omega = dx dy dz$  que precisa ser repostos por  $3! \cdot V \cdot d\zeta_1 \cdot d\zeta_2 \cdot d\zeta_3$  em ordem para realizar as integrais de volume Eq.A.26 com respeito a coordenada homogênea  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  e  $\zeta_4 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3$ . Então, com a ajuda da Eq.A.13 e a regra da cadeia da diferenciação, Eq.A.26 pode ser reescrita:

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p \cdot K_{ij} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1-\zeta_2} \left( \frac{\partial \alpha_m}{\partial \zeta_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \alpha_n}{\partial \zeta_j} \right) \cdot d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad \text{Eq.A.28}$$

Onde :

$$K_{ij} = (b_i \cdot b_j + c_i \cdot c_j + d_i \cdot d_j) / 36V \quad \text{Eq.A.29}$$

Isto é entendido que em qualquer lugar que  $\zeta_4$  aparecer explicitamente na expressão polinomial da Eq.A.28, é para ser trocado por  $1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3$

Uma notação:

$$Q_{mn}^{ij} = -6 \cdot \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \alpha_m}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial \alpha_m}{\partial \zeta_j} \right) \left( \frac{\partial \alpha_n}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial \alpha_n}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad \text{Eq.A.30}$$

estendendo para 3D.

É achado que a Eq.A.28 pode ser escrita como:

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p \cdot K_{ij} \cdot Q_{mn}^{ij} \quad \text{Eq.A.31}$$

onde  $Q_{mn}^{ij}$  é um vetor numérico, o qual pode ser calculado de uma vez e para toda e qualquer ordem  $n_0$  de aproximação de interpolação polinomial, cujo vetor  $K_{ij}$  contém todas as informações específicas associadas com o formato geométrico, tamanho e posição do tetraedro. O somatório da Eq.A.31 envolve apenas seis índices pares (i, j) com  $i \neq j$ , correspondendo a seis bordas de tetraedro, os termos  $K_{ij}$  sendo ausentes. A Eq.A.31 pode ser verificada, por primeira observação, que a interdependência linear das quatro coordenadas homogêneas,  $\sum \zeta_i = 1$  requerem que os coeficientes b, c, e d na Eq.A.13 e na Eq.A.29 tenham somatório zero,

$$\sum_{i=1}^4 b_i = \sum_{i=1}^4 c_i = \sum_{i=1}^4 d_i = 0 \quad \text{Eq.A.32}$$

Então, é claro que os elementos diagonais do vetor  $K_{ij}$  com  $i=j$ , não precisam ser especificados independentemente, mas podem ser calculados de fora dos termos diagonais  $K_{ij}$ , com  $i \neq j$ , e que:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -(K_{12} + K_{13} + K_{14}) \\ K_{22} &= -(K_{21} + K_{23} + K_{24}) \\ K_{33} &= -(K_{32} + K_{34} + K_{31}) \\ K_{44} &= -(K_{41} + K_{42} + K_{43}) \end{aligned} \quad \text{Eqs.A.33}$$

### Avaliação da matriz Q

Nas matrizes  $Q^{ij}$ , ele pode ser observado que os coeficientes  $Q_{mn}^{ij}$  para cada um dos seis pares (i, j), com  $j > i$ , que representam bordas de tetraedros, que são requeridas em ordem para o conjunto do vetor  $S_{mn}$  da Eq.A.31. Os coeficientes  $Q_{mn}^{ij}$  são independentes do formato e tamanho do tetraedro onde eles são evidentemente determinados pela natureza da justaposição da borda (i, j) com respeito aos pontos nodais m e n. O atual rótulo das bordas e pontos devem ter nenhuma conexão com o número de resultados e isso segue para cada vetor  $Q^{ij}$  o qual deveria ter sido obtido da permutação de um conjunto de números,  $Q^{12}$  dito. O procedimento para obter todas as matrizes  $Q^{ij}$  de  $Q^{12}$  é melhor explicado com referência ao exemplo específico.

O caso  $n_0=2$ ,  $N=10$  com índice simples já empregado é escolhido novamente e ilustrado na figura A.2:

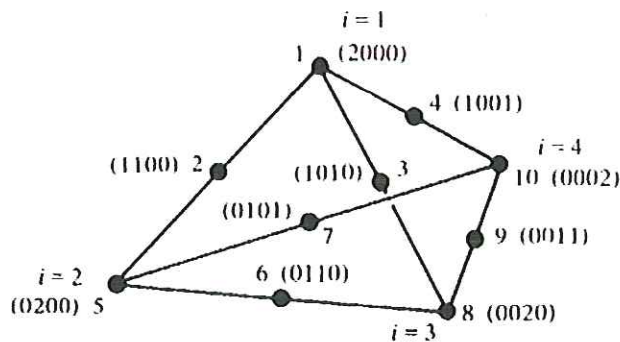


FIGURA A.2 : Tetraedro de segunda ordem.

Suponha que o conjunto de números  $Q_{mn}^{12}$  tem sido trabalhado. É claro por comparação de diagramas (a) e (b) da figura A.2 que por instância a equação

$$Q_{37}^{12} = Q_{29}^{12} \tag{Eq.A.34}$$

Desde que os números na matriz Q são determinados apenas por posições relativas dos pontos m, n e a borda (i, j) e não pelo rótulo particular designado por estes. No caso aqui, o mesmo número Q em questão representa a borda mostrada em linhas cheias, combinado com os dois pontos nodais circutados, entretanto estes podem ser identificados. Pode ser confirmado que a Eq.A.34 é uma equação particular obtida da permutação completa do elemento da matriz.

$$Q^{13} = R_1 \cdot Q^{12} \cdot R_1^T \tag{Eq.A.35}$$

Onde  $R_1$  é a matriz de rotação:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{Eq.A.36}$$

e  $R_1^T$  sua transposta. A notação  $R_1$  refere-se a permutação do índice de vértice correspondente pela rotação da mão direita sobre o eixo  $\zeta_1$ , que é para dizer o vértice 1

permanece tão rotulado como os vértices 2, 3, 4 são novamente rotulados em 3, 4 e 2, respectivamente. Neste esquema de permutações  $R_2, R_3$  e  $R_4$ , renomeiam os vértices 1, 2, 3 e 4 como 4,2,1,3; 2,4,3,1 e 3,1,2,4 respectivamente. Pode ser confirmado por extensão o argumento geométrico encorpado na figura A.2 e notar que  $Q^{ij}=Q^{ji}$ , que as cinco outras matrizes requeridas em adição a  $Q^{12}$  são:

$$\begin{aligned}
 Q^{13} &= R_1 \cdot Q^{12} \cdot R_1^T \\
 Q^{14} &= R_1 \cdot Q^{13} \cdot R_1^T \\
 Q^{24} &= R_2 \cdot Q^{12} \cdot R_2^T \\
 Q^{23} &= R_2 \cdot Q^{24} \cdot R_2^T \\
 Q^{34} &= R_1 \cdot Q^{23} \cdot R_1^T
 \end{aligned}
 \tag{Eqs.A.37}$$

Naturalmente, todos os 100 elementos de  $Q^{12}$  não tem sido computados nos princípios. Devido à simetria, poucos dos números  $Q_{mn}^{12}$  precisam ser calculados separadamente. A desnecessária avaliação independente para o caso  $n_0=2$ , aqui é facilmente selecionado por inspeção da figura A.2(a) ; por instância, claramente,  $Q_{13}^{12} = Q_{14}^{12} = Q_{56}^{12} = Q_{57}^{12}$ .

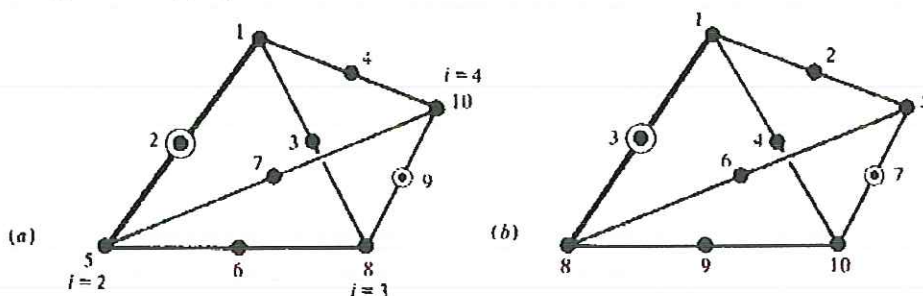


FIGURA A.3: (a) Tetraedro de segunda ordem. (b) A mesma vista após rotação sobre o eixo  $\zeta_1$ .

### Montagem da equação da matriz global

Tendo estabelecido  $S_{mn}$  para um simples tetraedro em um conjunto de elementos constituindo o espaço em 3 dimensões de algum problema, não há nenhuma dificuldade fundamental em obter a matriz global representando o conjunto de elementos conectados. Uma matriz  $C$  é estabelecida para expressar o vínculo imposto sobre os valores de potencial nodal  $U_{dis}$  associados com cada tetraedro numerado separadamente.

Então se:

$$[U_{dis}] = [C] \cdot [U_{con}]
 \tag{Eq.A.38}$$

Assim

$$[S]=[C]^T \cdot [S_{dis}] \cdot [C] \quad \text{Eq.A.39}$$

Na correspondente Eq.A.21 temos:

$$[S] \cdot [U_{con}]=0 \quad \text{Eq.A.40}$$

que precisa ser satisfeita. Este procedimento de conexão, é renomeado, crescendo essencialmente na contribuição de natureza aditiva  $F(U)$  dos elementos separados, definido pela Eq.A.25, para a função global para todo problema espacial. Tendo obtido a matriz global  $S$  para alguns problemas particulares as soluções para o potencial  $U_f$  em nós livres segue o procedimento adotado em 2 dimensões. Mais uma vez, as condições de contorno homogêneas de Neumann,  $\delta u/\delta n=0$ , são observadas naturalmente se os potenciais forem calculados nos pontos de contorno de Neumann e forem desvinculados, apenas se eles tivessem sido nós interiores.

### Equação Matricial para prisma retangular

Nesta seção a matriz  $S$  será aplicada para os 8 vértices (nós) de um prisma retangular tendo os lados  $a$ ,  $b$ , e  $c$  estabelecidos. O exemplo aqui é escolhido para ilustrar os passos práticos os quais precisam ser levados em ordem para aplicar a análise precedente para um problema real.

De modo a obter a relação de matriz, o prisma é considerado ser feito por cinco conexões, tetraedro de primeira ordem como mostrado na figura A.4

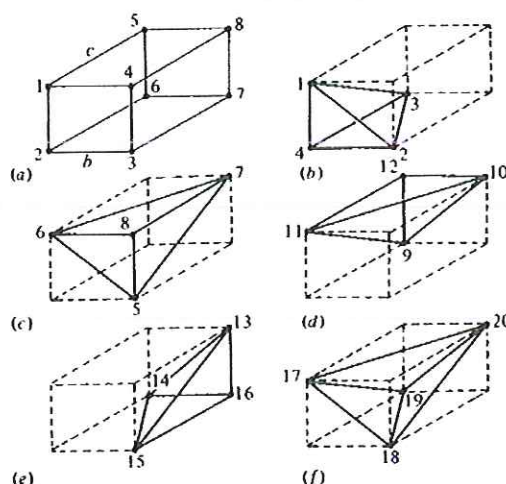


Figura A.4: (a) Prisma completo, volume  $a.b.c$ . (b)-(e) Elementos 1,2,3e4 são mostrados respectivamente. Eles são congruentes e cada um tem volume  $a .b.c/6$ . (f) Elemento 5 , o qual tem volume  $a.b.c/3$ . O número





Em geral:

$$\zeta_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6.V \quad \text{Eq.A.43}$$

Onde V é o volume do elemento, aqui  $a.b.c/6$ , o qual segue:

$$b_1 = b.c \quad , \quad c_1 = 0 \quad , \quad d_1 = 0$$

$$b_2 = 0 \quad , \quad c_2 = a.c \quad , \quad d_2 = 0$$

$$b_3 = 0 \quad , \quad c_3 = 0 \quad , \quad d_3 = a.b$$

$$b_4 = -b.c \quad , \quad c_4 = -a.c \quad , \quad d_4 = -a.b$$

Da Eq.A.29, substituindo no apropriado volume do elemento:

$$K_{ij} = b_i.b_j + c_i.c_j + d_i.d_j / 6.a.b.c \quad \text{Eq.A.44}$$

$$K_{14} = -b.c/6.a \quad K_{24} = -a.c/6.b \quad K_{34} = -a.b/6.c$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$$

É visto que:

$$Q^{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Eq.A.45}$$

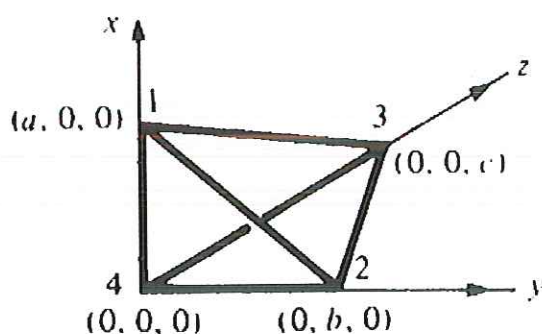


Figura A.5: Elemento 1 com eixo cartesiano superimposto.

Entretanto, neste caso simples, é visto que  $Q^{ij}$  é descrito por  $Q_{ii}^{ii} = Q_{ij}^{ij} = -1$  e  $Q_{ij}^{ji} = 1$ , com todos os outros termos zeros. Então a matriz S para o elemento 1 é, da Eq.A.31:

$$[S_1] = p \cdot [K_{14} \cdot Q^{14} + K_{24} \cdot Q^{24} + K_{34} \cdot Q^{34}] = -p \cdot \frac{b \cdot c}{6 \cdot a} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - p \cdot \frac{a \cdot c}{6 \cdot b} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$- p \cdot \frac{a \cdot c}{6 \cdot b} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = p \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & -\frac{1}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} & \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}\right) \end{bmatrix}$$

Eq.A.46

A qual é reescrita como:

$$[S_1] = p \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{6} \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -X \\ 0 & Y & 0 & -Y \\ 0 & 0 & Z & -Z \\ -X & -Y & -Z & A \end{bmatrix}$$

Eq.A.47

onde  $X=1/a^2$ ,  $Y=1/b^2$ ,  $Z=1/c^2$  e  $A=X+Y+Z$ . As matrizes S:  $S_2, S_3, S_4$  são idênticas.

Atenção é agora focada sobre o elemento 5, redesenhada na figura A.6 com os eixos cartesianos superpostos. Neste caso Eq.4, Eq.8 e Eq.9 dão as coordenadas homogêneas  $\zeta_1$  como:

$$\zeta_1 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} \div \left(\frac{a \cdot b \cdot c}{3}\right) = \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) / 2$$

Eq.A.48

Similarmente:

$$\zeta_3 = \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) / 2$$

Eq.A.49

$$\zeta_2 = \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) / 2$$

Eq.A.50

$$\zeta_4 = \left(-1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) / 2$$

Eq.A.51



Aplicação das Eq.A.13 e Eq.A.29, lembrando que o elemento de volume aqui é  $V=a.b.c/3$  e usando a notação da Eq.A.47:

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + Z \right) \\
 K_{13} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + Y \right) \\
 K_{14} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + X \right) \\
 K_{23} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + X \right) \\
 K_{24} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + Y \right) \\
 K_{34} &= \frac{a.b.c}{6} \cdot \left( \frac{-A}{2} + Z \right)
 \end{aligned}
 \tag{Eq.A.52}$$

Usando Eq.A.31 e notando que  $Q^j$  é sempre uma simples permutação da matriz Eq.A.45 para  $Q^{12}$ , é prontamente achado que para o elemento 5 temos:

$$[S_5] = p \cdot \frac{a.b.c}{6} \cdot \begin{bmatrix} A/2 & -A/2 + Z & -A/2 + Y & -A/2 + X \\ -A/2 + Z & A/2 & -A/2 + X & -A/2 + Y \\ -A/2 + Y & -A/2 + X & A/2 & -A/2 + Z \\ -A/2 + X & -A/2 + Y & -A/2 + Z & A/2 \end{bmatrix}
 \tag{Eq.51}$$

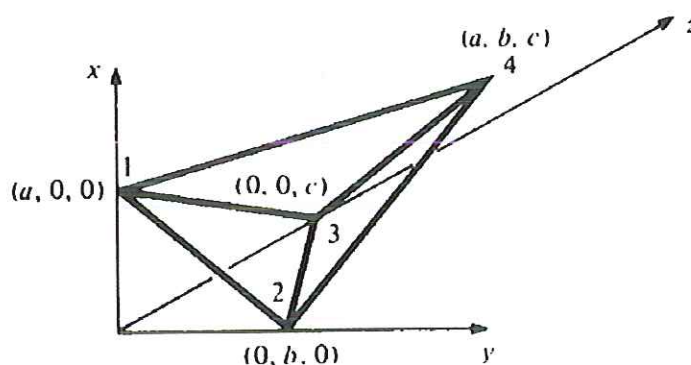


Figura A.6: Elemento 5 com eixo cartesiano super-imposto.

Então a forma desconectada da matriz S é escrita abaixo como:

$$[S_5] = \begin{bmatrix} S_1 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & S_3 & & \\ & & & S_4 & \\ & & & & S_5 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.54}$$

Onde  $S_1$  e  $S_5$  são matrizes  $4 \times 4$  definidas pelas Eq.A.46 e Eq.A.52. A matriz conectada requerida,  $[S_{con}] = [C^T] \cdot [S_{dis}] \cdot [C]$ , pode agora ser escrita abaixo, observando que  $C$  permanece como definida pela Eq.A.42. O resultado é:

$$[S_{con}] = p \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{6} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot A/2 & -X & Z - A/2 & -Y & -Z & Y - A/2 & 0 & X - A/2 \\ -X & A & -Y & 0 & 0 & -Z & 0 & 0 \\ Z - A/2 & -Y & 3 \cdot A/2 & -X & 0 & X - A/2 & -Z & Y - A/2 \\ -Y & 0 & -X & A & 0 & 0 & 0 & -Z \\ -Z & 0 & 0 & 0 & A & -X & 0 & -Y \\ Y - A/2 & -Z & X - A/2 & 0 & -X & 3 \cdot A/2 & -Y & Z - A/2 \\ 0 & 0 & -Z & 0 & 0 & -Y & A & -X \\ X - A/2 & 0 & Y - A/2 & -Z & -Y & Z - A/2 & -X & 3 \cdot A/2 \end{bmatrix}$$

Eq.A.55

Tendo obtido a matriz  $S$  para um paralelepípedo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , estamos na posição de trabalhar com o paralelepípedo usando operações de conexão. Logo, problemas de 3 dimensões envolvendo a equação não homogênea, com variável simples de Helmholtz, pode ser resolvidos por técnicas matriciais.

## Anexo B

### Programação em FORTRAN77.

Este anexo teve seu conteúdo tirado de [SILVESTER, [1]], tendo sido estudado, analisado e testado por nós em diversas situações, ou seja, problemas eletrostáticos, magnetostáticos, térmicos e mecânicos.

O pacote SIMPLE 2D apresentado aqui, em FORTRAN, compreende um programa principal e várias subrotinas. O programa principal não contém instruções executáveis.

Ele se comunica com subrotinas através de blocos comuns, os quais reaparecem identicamente em todas as subrotinas. Em outras palavras, os vetores e outros dados são colocados em uma área de estocagem acessível para todos os programas de segmentos. A significância prática deste arranjo de dados é importante, se qualquer alteração é requerida (por exemplo, caso as dimensões do vetor forem mudadas) é apenas necessário reestruturar o bloco comum apropriadamente e, então, recolocar o bloco comum em toda subrotina com uma cópia idêntica da versão nova.

O programa principal mostrado aqui é puramente um mecanismo de condução; ele define a estrutura de dados e seqüência de chamadas das subrotinas. Todas as outras funções do programa, tais como dados de entrada, montagem de elementos finitos e resolução de equações, permanecem inalteradas. Por exemplo, problemas axisimétricos podem ser tratados com este programa, providenciando uma subrotina de elemento axisimétrico.

As subrotinas chamadas pelo programa principal, em ordem de aparição, são:

MESHIN: lê e estoca os dados do problema. Ele faz apenas uma quantidade muito limitada de conferências válidas. Programas mais sofisticados deste tipo geralmente diferem em quantidade de dados verificados.

ELMATR: computa a representação de matriz de um elemento de primeira ordem triangular.

ELEMBD: embute as contribuições da matriz de um elemento finito na matriz global de coeficientes.

OUTPUT: imprime a solução uma vez que ela tenha sido obtida. Esta rotina é muito complicada em muitos programas de elementos finitos, eles geralmente incorporam a

*plotagem*, ou construção gráfica, cálculo de energia armazenada, determinação do máximo campo, e muitas outras quantidades de interesse. Aqui ele tinha sido reduzido para a forma mais elementar. A seguir será mostrado o programa SIMPLE 2D para análise eletrostática que foi baseado em [1]:

```

!*****First-order demonstration *****
!*****
!*****The subroutines that make up this program communicate
!*****via named common blocks.*****
!***** Problem definition and solution
!***** common / problm/
!      nodes = number of nodes used in problem*****
!      nelmts = number of elements in model
!      x,y = nodal coordinates
!      constr = logical, .true. for fixed potentials
!      potent = nodal potential array
!      nvtx = list of nodes for each element
!      source = source density in each element
!      Global matrix and right-hand side
!      commom/matrix/
!      s= global s-matrix for whole problem
!      rthdsd=right-hand side of system of equations
!      Temporary working arrays and variables
!      common/workng/
!      sel = S for one element (working array)
!      tel = T for one element (working array)
!      intg = integer working array
!      Predefined problem size parameters (array dimensions):
!      MAXNOD = maximum number of nodes in problem
!      MAXELM = maximum number of elements in problem
!      HUGE= upper bound for any numeric value
!=====
!      Global declarations--same in all program segments
!=====
parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
      logical constr
      common / problm / nodes,nelmts,x (MAXNOD),y (MAXNOD),
constr (MAXNOD),potent (MAXNOD),nvtx (3,MAXELM),source (MAXELM)
      common / matrix / s (MAXNOD,MAXNOD),rthdsd (MAXNOD)
      common / workng / sel (3,3),tel (3,3),intg (3)
!=====
!      Fetch input data form input file
!      call meshin
!      Set global s-matrix and right side to all zeros.
!      call matini (s,MAXNOD,MAXNOD)
!      call vecini (rthdsd,MAXNOD)
!      Assemble global matrix,element by element.
!      do 40 i=1,nelmts
!          construct element s and t matrices
!          ie=i
!          call elmatr (ie)
!          Embed matrices in global s;augment right side:
!          call elemdb (ie)
40      continue
!      Solve the assembled finite element equations

```

```

        call eqsolv (s,potent,rthdsd,nodes,MAXNOD)
!      Print out the resulting potential values
        call output
        stop
        end
!*****
        subroutine meshin
!*****
!      Read input data file in three parts: nodes,elements,
!      fixed potentials. Each part is concluded by a line that
!      contains only the / character at its leftmost position.
!      Nodes:      node number,x,y.
!      Elements:   node number,source density.
!      Potentials: node number,fixed value.
!      !=====
!      Global declaration--same in all program segments
!      !=====
        parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
        logical constr
common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM)
        common/matrix/s(MAXNOD,MAXNOD),rthdsd(MAXNOD)
        common/workng/sel(3,3),tel(3,3),intg(3)
!=====
        dimension nold(3),nnew(3)
        write (*,1140)
1140      format (1X // 8X,'Input node list'/3X,'n',8X,'X',11X,'y'/1X)
        nodes=0
        xold=HUGE
        yold=HUGE
20      read(*,*,end=911)xnew,ynew
        if (xnew .ne. xold .or. ynew .ne. yold) then
            nodes = nodes+1
            x(nodes)=xnew
            y(nodes)=ynew
            xold=xnew
            yold=ynew
            write (*,1105) nodes,x(nodes),y(nodes)
            goto 20
        endif
1105      format (1x,i3,2(2x,f10.5))
        Write(*,1160)
1160      format (1x//6x,'Input
list'/3x,'i',5x,'j','k',6x,'Source'/1x)
        nelmts=0
        do 25 i=1,3
25      nold(i)=0
30      read(*,*,end=911)nnew,srcnew
            if (nnew(1) .ne. nold(1) .or.
nnew(2) .ne. nold(2) .or. nnew(3) .ne. nold(3)) then
                nelmts=nelmts+1
                do 35 i=1,3
                    nvtx(i,nelmts)=nnew(i)
35      nold(i)=nnew(i)
                    source(nelmts)=srcnew
                    goto 30
                write(*,1180)nnew,srcnew

```



```

        goto 30
    endif
1180  format (1x,i3,2i6,2x,g10.5)
120   write(*,1200)
1200  format(1x // 5x,'Input fixed
potentials'/6x,'node',12x,'value'/1x)
    do 40 m=1,nodes
        constr(m)=.false.
40    continue
        call vecini(potent,nodes)
        nconst=0
        iold=0
60    read(*,*,end=911)inew,potnew
        if (inew .ne.iold)then
            nconst=nconst+1
            constr(inew)=.true.
            potent(inew)=potnew
            iold=inew
            write (*,1210)inew,potnew
            goto 60
        endif
1210  format (6x,i3,9x,f10.5)
911  call errexc('MESHIN',3)
    end
    subroutine elmatr(ie)
    parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
    logical constr
common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM)
    common/matrix/s(MAXNOD,MAXNOD),rthdsd(MAXNOD)
    common/workng/sel(3,3),tel(3,3),intg(3)
    i=nvtx(1,ie)
    j=nvtx(2,ie)
    k=nvtx(3,ie)
    area=abs((x(j)-x(i))*(y(k)-y(i))-(x(k)-x(i))*(y(j)-y(i)))/2
    do 20 l=1,3
        do 10 m=1,3
10    tel(l,m)=area/12
20    tel(l,1)=2.*tel(l,1)
        i1=1
        i2=2
        i3=3
        call matini(sel,3,3)
        do 50 nvrtext=1,3
    ctng=((x(j)-x(i))*(x(k)-x(i))+(y(j)-y(i))*(y(k)-y(i)))/(2.*area)
        ctng2=ctng/2.
        sel(i2,i2)=sel(i2,i2)+ctng2
        sel(i2,i3)=sel(i2,i3)-ctng2
        sel(i3,i2)=sel(i3,i2)-ctng2
        sel(i3,i3)=sel(i3,i3)+ctng2
        i4=i1
        i1=i2
        i2=i3
        i3=i4
        l=i
        i=j
        j=k

```

```

      k=1
50  continue
      return
      end
      subroutine elembd(ie)
      parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
      logical constr
common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM)
      common/matrix/s(MAXNOD,MAXNOD),rthdsd(MAXNOD)
      common/workng/sel(3,3),tel(3,3),intg(3)
      do 60 i=1,3
        irow=nvtx(i,ie)
        if (constr(irow))then
          s(irow,irow)=1
          rthdsd(irow)=potent(irow)
        else
          do 40 j=1,3
            icol=nvtx(j,ie)
            if (constr(icol))then
              rthdsd(irow)=rthdsd(irow)+tel(i,j)*source(ie)-
sel(i,j)*potent(icol)
            else
              s(irow,icol)=s(irow,icol)+sel(i,j)
              rthdsd(irow)=rthdsd(irow)+tel(i,j)*source(ie)
            endif
          40
        continue
      endif
60  continue
      return
      end
      subroutine output
      parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
      logical constr
common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM)
      common/matrix/s(MAXNOD,MAXNOD),rthdsd(MAXNOD)
      common/workng/sel(3,3),tel(3,3),intg(3)
      write(*,1000) (i,x(i),y(i),potent(i),i=1,nodes)
1000
3x,'i',8x,'x',9x,'y',7x,'potential'//(1x,i3,2x,f10.5,f10.5,3x,f10.5)
      format(1x//12x,'Final solution'/
      return
      end
      subroutine eqsolv(s,x,y,n,maxn)
      dimension s(maxn,maxn),x(maxn),y(maxn)
      call chlsky(s,s,n,maxn)
      call fwdelm(s,y,y,n,maxn)
      call backsb(s,y,x,n,maxn)
      return
      end
      subroutine chlsky(a,fl,n,maxn)
      dimension a(maxn,maxn),fl(maxn,maxn)
      do 70 j=1,n
        fl(j,j)=a(j,j)
        do 20 k=1,j-1
          fl(j,j)=fl(j,j)-fl(j,k)*fl(j,k)
20      continue

```

```

        if (fl(j,j) .gt. 0) then
            fl(j,j)=sqrt(fl(j,j))
            do 50 I=j+1,n
                fl(i,j)=a(i,j)
                do 40 k=1,j-1
                    fl(i,j)=fl(i,j)-fl(i,k)*fl(j,k)
40                continue
                fl(i,j)=fl(i,j)/fl(j,j)
                fl(j,i)=fl(i,j)
50            continue
            else
                call errexc('CHLSKY',j)
            endif
70            continue
            return
        end
        subroutine fwdelm(fl,b,y,n,maxn)
        dimension fl(maxn,maxn),b(maxn),y(maxn)
        y(1)=b(1)/fl(1,1)
        do 60 I=2,n
            y(i)=b(i)
            do 40 j=1,i-1
                y(i)=y(i)-fl(i,j)*y(j)
40            continue
            y(i)=y(i)/fl(i,i)
60            continue
            return
        end
        subroutine backsb(u,b,x,n,maxn)
        dimension u(maxn,maxn),b(maxn),x(maxn)
        x(n)=b(n)/u(n,n)
        do 60 I=n-1,1,-1
            x(i)=b(i)
            do 40 j=i+1,n
                x(i)=x(i)-u(i,j)*x(j)
40                continue
            x(i)=x(i)/u(i,i)
60                continue
            return
        end
        subroutine vecini(a,nr)
        dimension a(nr)
        do 10 i=1,nr
            a(i)=0
10            continue
            return
        end
        subroutine matini(a,nr,nc)
        dimension a(nr,nc)
        do 20 i=1,nr
            do 10 j=1,nc
                a(i,j)=0
10                continue
20                continue
            return
        end
        function locate(i,j)

```

```

      if (j .lt. i) then
        locate = (i*(i-1))/2+j
      else
        locate = (j*(j-1))/2+i
      endif
      return
    end
    subroutine errexc(prog,ierr)
      character*(*) prog
      write (*,100)prog,ierr
      return
100  format(1x/'stopped in routine',a6,',error','number',i5)
    end

```

### A estrutura do SATURM

A estrutura do programa baseia-se no método de Newton, pois o cálculo dos vetores potenciais magnéticos vem de uma equação não linear, devido o fato da relutividade magnética (dependente do campo) estar embutida na matriz geométrica.

As subrotinas do programa são:

**MESHIN**: Entrada dos dados dos elementos, em que neste caso coloca-se a densidade de fonte e também especificação do material.

**ELMATR**: Gera os elementos das matrizes no método de Newton.

**ELEMBD**: Embute as matrizes na matriz global do problema.

**RELUC**: Calcula a relutividade.

**OUTPUT**: Coloca os resultados na tela.

Agora será mostrado o programa de análise magnética pelo método dos elementos finitos segundo [1]:

```

!*****Programa de material saturado*****
  parameter (MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
  logical constr

  common/problm/nodes,nelmts,x (MAXNOD),y (MAXNOD),constr (MAXNOD),potent (MAXN
  OD),nvtx (3,MAXELM),source (MAXELM),materl (MAXELM)
  common/matrix/p (MAXNOD,MAXNOD),resid (MAXNOD),step (MAXNOD),b2max
  common/workng/pel (3,3),sel (3,3),tel (3,3),e (3)
  call meshin
  write (*,500)
500  format(1x/16x,'Newton
iteration'//1x,'newt',4x,'Bmax',3x,'dampg',3x,'stepnorm',4x,'potnorm',4x,
'convgc')
      convgc=1.
      newt=0
1    if (newt.lt.12.and.convgc.gt.1.e-5) then
      newt=newt+1
      b2max=0.
      call matini(p,MAXNOD,MAXNOD)
      call vecini(resid,MAXNOD)
      do 10 i=1,nelmts
        call elmatr(i)
        call elembd(i)
10   continue
      call eqsolv(p,step,resid,nodes,MAXNOD)
      ptnorm=1.e-30
      stnorm=1.e-30
      do 20 i=1,nodes

```

```

        ptnorm=max(ptnorm,abs(potent(i)),abs(step(i)))
        stnorm=max(stnorm,abs(step(i)))
20      continue
        convgc=stnorm/ptnorm
        damper=1.-0.5*min(1.0,convgc**2)
        do 30 i=1,nodes
            potent(i)=potent(i)+damper*step(i)
30      continue
        write(*,510) newt,sqrt(b2max),damper,stnorm,ptnorm,convgc
        goto 1
        endif
510     format(1x,i3,2x,0p,2f8.3,1p,5e11.2)
        call output
        stop
        end
        subroutine elmatr(ie)
            parameter(MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
            logical constr

            common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
            OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM),materl(MAXELM)
            common/matrix/p(MAXNOD,MAXNOD),resid(MAXNOD),step(MAXNOD),b2max
            common/workng/pel(3,3),sel(3,3),tel(3,3),e(3)
            i=nvtx(1,ie)
            j=nvtx(2,ie)
            k=nvtx(3,ie)
            area=abs((x(j)-x(i))*(y(k)-y(i))-(x(k)-x(i))*(y(j)-y(i)))/2.
            do 20 l=1,3
                do 10 m=1,3
                    tel(l,m)=area/12.
10             continue
                    tel(1,1)=2.*tel(1,1)
20             continue
                    i1=1
                    i2=2
                    i3=3
                    do 30 l=1,3
                        do 30 m=1,3
                            sel(l,m)=0.
30             continue
                    do 50 nvrtextex=1,3
                        ctng=((x(j)-x(i))*(x(k)-x(i))+(y(j)-y(i))*(y(k)-
                        y(i)))/(2.*area)
                        ctng2=ctng/2.
                        sel(i2,i2)=sel(i2,i2)+ctng2
                        sel(i2,i3)=sel(i2,i3)-ctng2
                        sel(i3,i2)=sel(i3,i2)-ctng2
                        sel(i3,i3)=sel(i3,i3)+ctng2
                        i4=i1
                        i1=i2
                        i2=i3
                        i3=i4
                        l=i
                        i=j
                        j=k
                        k=l
50             continue

```

```

        bsq=0.
        do 70 i=1,3
            e(i)=0.
            do 60 j=1,3
                e(i)=e(i)+sel(i,j)*potent(nvtx(j,ie))
60          continue
                bsq=bsq+e(i)*potent(nvtx(i,ie))/area
70          continue
                b2max=max(bsq,b2max)
                if (materl(ie).ne.0)then
                    call reluc(bsq,rnu,dnu)
                else
                    rnu=1.
                    dnu=0.
                endif
            do 90 i=1,3
                do 80 j=1,3
                    sel(i,j)=rnu*sel(i,j)
                    pel(i,j)=sel(i,j)+2.*dnu*e(i)*e(j)/area
80          continue
90          continue
                return
            end

            subroutine reluc(b2,rval,rder)
!Acha a relutividade e sua derivada com respeito a b2, a densidade de
fluxo quadrado.
!O material é melhor dito das folhas de aço comuns.
            Dimension b0(11),r0(11),r2(11)
            Data N,b0,r0,r2 / 11,0.0000000E+00,0.4000000E-
01,0.1600000E+00,0.3600000E+00,0.6400000E+00,0.1000000E+01,0.1440000E+01,
0.1690000E+01,0.1960000E+01,0.2250000E+01,0.2560000E+01,0.1090000E-
03,0.1090000E-03,0.1090000E-03,0.1100000E-03,0.1110000E-03,0.1120000E-
03,0.1200000E-03,0.1430000E-03,0.1960000E-03,0.4170000E-03,0.1250000E-
02,0.0000000E+00,0.0000000E+00,0.0000000E+00,0.0000000E+00,0.4393732E-
05,0.0000000E+00,0.2483705E-03,0.4209161E-03,0.4664167E-03,0.9512425E-
02,0.0000000E+00/
            if (b2.le.b0(N)) then
                kl=1
                kr=N
1          if (kr-kl.gt.1)then
                    k=(kr+kl)/2
                    if (b0(k).gt.b2)then
                        kr=k
                    else
                        kl=k
                    endif
                    goto 1
                endif
                dx=b0(kr)-b0(kl)
                du=(b0(kr)-b2)/dx
                dl=(b2-b0(kl))/dx
                du2=du**2
                dl2=dl**2
                rval=du*r0(kl)+dl*r0(kr)+((du2-1.)*du*r2(kl)+(dl2-
1.)*dl*r2(kr))*dx**2/6.

```

```

1.) *r2(kr)) *dx/6.
    rder=-(r0(kl)-r0(kr))/dx-((3.*du2-1.)*r2(kl)-(3.*dl2-

```

```

    else
    dx=b0(N)-b0(N-1)
    rder=-(r0(N-1)-r0(N))/dx+(+r2(N-1)+2.*r2(N))*dx/6.
    rval=r0(N)+(b2-b0(N))*rder
    endif
    return
    end
    subroutine elemdb(ie)
        parameter(MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)

```

```

    logical constr

```

```

common/problm/nodes, nelmts, x(MAXNOD), y(MAXNOD), constr(MAXNOD), potent(MAXN
OD), nvtx(3,MAXELM), source(MAXELM), materl(MAXELM)

```

```

common/matrix/p(MAXNOD,MAXNOD), resid(MAXNOD), step(MAXNOD), b2max
common/workng/pel(3,3), sel(3,3), tel(3,3), e(3)

```

```

do 30 i=1,3
    irow=nvtx(i,ie)
    if (constr(irow)) then
    p(irow,irow)=1.
    resid(irow)=0.
    else
    do 20 j=1,3
        icol=nvtx(j,ie)
        if(constr(icol)) then
            resid(irow)=resid(irow)+tel(i,j)*source(ie)-
sel(i,j)*potent(icol)
        else
            p(irow,icol)=p(irow,icol)+pel(i,j)
            resid(irow)=resid(irow)+tel(i,j)*source(ie)-
sel(i,j)*potent(icol)
        endif
    20    continue
    endif
    30    continue
    return
    end
    subroutine meshin
        parameter(MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
    logical constr

```

```

common/problm/nodes, nelmts, x(MAXNOD), y(MAXNOD), constr(MAXNOD), potent(MAXN
OD), nvtx(3,MAXELM), source(MAXELM), materl(MAXELM)

```

```

common/matrix/p(MAXNOD,MAXNOD), resid(MAXNOD), step(MAXNOD), b2max
common/workng/pel(3,3), sel(3,3), tel(3,3), e(3)

```

```

    Dimension nold(3), nnew(3)
    write(*,1140)
1140    format(1x//8x, 'Input node list'//3x, 'n', 8x, 'x', 11x, 'y'//1x)
        nodes=0
        xold=HUGE
        yold=HUGE
    20    read(*,*,end=911) xnew, ynew
        if (xnew.ne.xold.or.ynew.ne.yold) then
            nodes=nodes+1
            x(nodes)=xnew
            y(nodes)=ynew

```

```

        xold=xnew
        yold=ynew
        write(*,1105) nodes,x(nodes),y(nodes)
        goto 20
        endif
1105      format(1x,i3,2(2x,f10.5))
        write(*,1160)
1160      format(1x//6x,'Input element list'//3x,'i',5x,'j',
5x,'k',6x,'source',3x,'Material'/1x)
        nelmts=0
        do 25 i=1,3
25          nold(i)=0
30          read(*,*,end=911)nnew,srcnew,matnew
            if
(nnew(1).ne.nold(1).or.nnew(2).ne.nold(2).or.nnew(3).ne.nold(3)) then
                nelmts=nelmts +1
                do 35 i=1,3
35          nvtx(i,nelmts)=nnew(i)
                nold(i)=nnew(i)
                source(nelmts)=srcnew
                materl(nelmts)=matnew
                write(*,1180)nnew,srcnew,matnew
                goto 30
                endif
1180      format(1x,i3,2i6,2x,f10.5,i7)
120      write(*,1200)
1200     format(1x//4x,'Input
potentials'//6x,'node',12x,'value'/1x)
        do 40 m=1,nodes
        potent(m)=0
        constr(m)=.false.
40      continue
        nconst=0
        iold=0
60      read(*,*,end=911)inew,potnew
        if (inew.ne.iold) then
            nconst=nconst+1
            constr(inew)=.true.
            potent(inew)=potnew
            iold=inew
            write(*,1210)inew,potnew
            goto 60
            endif
1210     format(6x,i3,9x,f10.5)
900     return
911     call errexc('MESHIN',1)
        end

        subroutine output
        parameter(MAXNOD=50,MAXELM=75,HUGE=1.E+35)
        logical constr

        common/problm/nodes,nelmts,x(MAXNOD),y(MAXNOD),constr(MAXNOD),potent(MAXN
OD),nvtx(3,MAXELM),source(MAXELM),materl(MAXELM)
        common/matrix/p(MAXNOD,MAXNOD),resid(MAXNOD),step(MAXNOD),b2max
        common/workng/pel(3,3),sel(3,3),tel(3,3),e(3)
        write(*,1000)(i,x(i),y(i),potent(i),i=1,nodes)

```



```

1000          format(1x////12x,'Final
solution'//3x,'i',8x,'x',9x,'y',7x,'potential'//(1x,i3,2x,f10.5,F10.5,3x,
f10.5))
                return
                end

                subroutine eqsolv(s,x,y,n,maxn)
dimension s(maxn,maxn),x(maxn),y(maxn)
call chlsky(s,s,n,maxn)
call fwdelm(s,y,y,n,maxn)
call backsb(s,y,x,n,maxn)
return
end

subroutine chlsky(a,fl,n,maxn)
dimension a(maxn,maxn),fl(maxn,maxn)
do 70 j=1,n
fl(j,j)=a(j,j)
do 20 k=1,j-1
fl(j,j)=fl(j,j)-fl(j,k)*fl(j,k)
20 continue
if (fl(j,j) .gt. 0) then
fl(j,j)=sqrt(fl(j,j))
do 50 I=j+1,n
fl(i,j)=a(i,j)
do 40 k=1,j-1
fl(i,j)=fl(i,j)-fl(i,k)*fl(j,k)
40 continue
fl(i,j)=fl(i,j)/fl(j,j)
fl(j,i)=fl(i,j)
50 continue
else
call errexc('CHLSKY',j)
endif
70 continue
return
end

subroutine fwdelm(fl,b,y,n,maxn)

dimension fl(maxn,maxn),b(maxn),y(maxn)
y(1)=b(1)/fl(1,1)
do 60 I=2,n
y(i)=b(i)
do 40 j=1,i-1
y(i)=y(i)-fl(i,j)*y(j)
40 continue
y(i)=y(i)/fl(i,i)
60 continue
return
end

subroutine backsb(u,b,x,n,maxn)
dimension u(maxn,maxn),b(maxn),x(maxn)
x(n)=b(n)/u(n,n)
do 60 I=n-1,1,-1
x(i)=b(i)

```

```

      do 40 j=i+1,n
      x(i)=x(i)-u(i,j)*x(j)
40      continue

      x(i)=x(i)/u(i,i)
60      continue
      return
      end

      subroutine vecini(a,nr)
      dimension a(nr)
      do 10 i=1,nr
      a(i)=0
10      continue
      return
      end

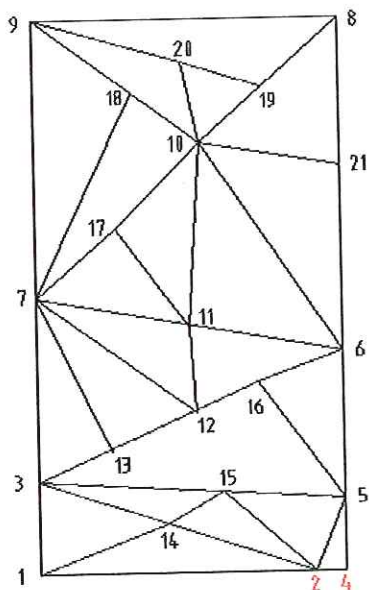
      subroutine matini(a,nr,nc)
      dimension a(nr,nc)
      do 20 i=1,nr
      do 10 j=1,nc
10          a(i,j)=0
20          continue
      continue
      return
      end

      function locate(i,j)

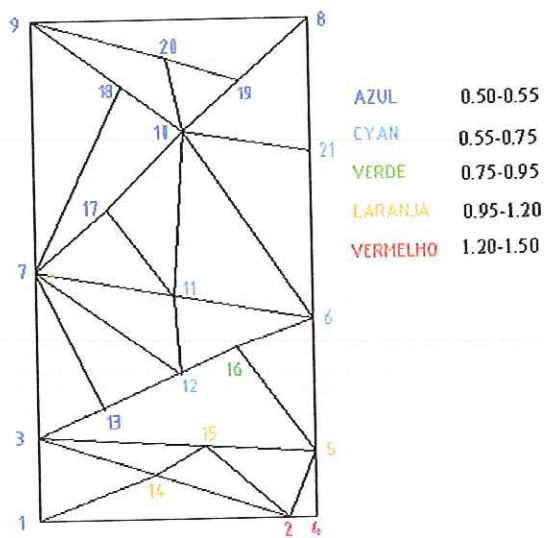
      if (j .lt. i) then
      locate = (i*(i-1))/2+j
      else
      locate = (j*(j-1))/2+i
      endif
      return
      end

      subroutine errexc(prog,ierr)
      character*(*) prog
      write (*,100)prog,ierr
      return
100      format(1x/'stopped
      routine',a6,',error','number',i5)
      end
      in
```

A Figura B.1, a seguir, mostra uma entrada e uma saída usando Fortran77:



(a) Entrada de dados



(b) Saída ou resultados

Figura B.1

## Anexo C

### C.1 - Descrição do pacote computacional ANSYS™

#### ANSYS/FULL

##### Finalidade:

O ANSYS™ é um *software* elaborado pela ANSYS, Inc. que possui aplicação geral em análise de problemas de engenharia do tipo CAE (Computer Aided Engineering) baseado no Método de Elementos Finitos.

O pacote oferece avançados recursos para a realização de análises estruturais estáticas e dinâmicas, lineares e não lineares, análises de transferência de calor e fluidos, análises eletromagnéticas e acústicas, contando com uma biblioteca de mais de 100 tipos de elementos, que o torna capaz de realizar uma vasta gama de simulações necessárias ao ambiente de projeto. O ANSYS conta com poderosos recursos gráficos para pré e pós-processamento, recursos de criação de geometrias equivalentes a modeladores sólidos consagrados no mercado, incluindo definição de primitivas e álgebra booleana, além de avançadas técnicas como submodelagem, subestruturação, malha adaptativa e otimização estrutural.

##### Ambiente Operacional:

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC, Workstations e Supercomputadores. Possui integração com vários softwares de CAD, através do arquivo IGES, e outros *softwares* tais como ADAMS, SYSNOISE, LS-DYNA3D, MOLDFLOW, etc.

#### ANSYS/FLOTRAN

##### Finalidade:

FLOTRAN é um dos módulos do software ANSYS/FULL que pode ser adquirido separadamente. Realiza análise dinâmica de escoamento de fluidos e transferência de calor utilizando o Método de Elementos Finitos.

O *software* FLOTRAN é usado para determinar as características de um fluido tais, como pressão, velocidade, direção do fluxo, linhas de corrente, energia cinética, forças de

arrasto, perda de carga e efeitos gerados pelo resfriamento ou aquecimento do fluido.

Resolve as seguintes análises de fluidos:

- Escoamento laminar e turbulento;
- Escoamento compressível e incompressível;
- Resistência de fluxo distribuído;
- Representação de meios porosos;
- Interação sólido-fluido;
- Simulação da propagação, absorção e reflexão de ondas de pressão em meio fluido.

Aplicações:

- fluxo de calor em componentes eletrônicos;
- dispersão de gases em ambientes;
- fluxo em escapamentos e radiadores;
- aerofólios em aviões;
- fluxo em tubulações, dutos, válvulas e trocadores de calor;
- fluxo em bombas, compressores, turbinas e rotores.

Ambiente operacional:

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC, Workstations e Supercomputadores.

### **ANSYS/Emag**

Finalidade:

ANSYS/Emag é um dos módulos do *software* ANSYS/FULL que pode ser adquirido separadamente. Permite realizar análises estáticas e em baixa frequência de campos eletromagnéticos.

Descrição:

Através do Método de Elementos Finitos o ANSYS/Emag realiza as seguintes análises:

- Análise eletrostática;
- Análise magnetostática;
- Análise magnetodinâmica (transiente e harmônica);
- Cálculo de campos;

- Cálculo de potenciais;
- Cálculo de induções;
- Cálculo de forças e torques ou conjugados;
- Cálculo de correntes induzidas;
- Cálculo de parâmetros do circuitos equivalentes.

**Aplicações:**

- análises em máquinas elétricas em geral;
- análises em relés e chaves;
- análises em sensores, transformadores, cabeças magnéticas, etc.
- análise de campos eletrostáticos em materiais elétricos CC e CA.

**Ambiente operacional:**

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC, Workstations e Supercomputadores.

**ANSYS/Thermal****Finalidade:**

ANSYS/Thermal é um dos módulos do software ANSYS/FULL que pode ser adquirido separadamente. Permite realizar análises térmicas.

**Descrição:**

Através do Método de Elementos Finitos o ANSYS/Thermal permite realizar as seguintes análises:

- Análises em regimes permanente (steady-state) e variável no tempo, ou transitória (transient);
- Modelos envolvendo os fenômenos de condução, radiação e convecção livre, forçada e combinada;
- Cálculo do coeficiente de película;
- Cálculo de fator de forma de radiação;
- Fenômeno de mudança de fase.

**Aplicações:**

- transistores e *chips*
- trocadores de calor e fornos

- radiadores e componentes de motores
- equipamentos aeroespaciais

Ambiente operacional:

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC, Workstations e Supercomputadores.

### **ANSYS/Linear**

Finalidade:

ANSYS/Linear é um dos módulos do software ANSYS/FULL que pode ser adquirido separadamente. Permite realizar análises estáticas ou dinâmicas em estruturas. Possui as mesmas facilidades de operação do ANSYS/FULL.

Descrição:

Através do Método de Elementos Finitos o ANSYS/Linear permite realizar as seguintes análises:

- Linear estática;
- Não-linear (grandes deflexões, *gaps*, etc);
- Modal;
- Linear transiente;
- Flambagem (autovalores);
- Resposta Harmônica.

Ambiente operacional:

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC, Workstations e Supercomputadores.

### **ANSYS/AutoFEA**

Finalidade:

O software ANSYS/Auto FEA possibilita ao usuário do AutoCAD realizar análises no projeto através do Método de Elementos Finitos dentro do ambiente AutoCAD. Analisando os projetos na fase de desenvolvimento o engenheiro reduzirá o tempo de projeto possibilitando reduzir o tempo de lançamento dos produtos.

Descrição:

Integrado ao AutoCAD o ANSYS/AutoFEA permite converter os desenhos em modelos, gerar as malhas e realizar análises linear estática, térmica e modal utilizando o Método dos Elementos Finitos. Após a análise o software poderá *plotar* os nós, os elementos, as cargas, as restrições, as tensões, as deformações, os deslocamentos, rotações, fluxo térmico, gradiente térmico, temperatura, vetores, gráficos e listas.

Ambiente operacional:

Está disponível para plataforma PC integrado ao AutoCAD.

### **ANSYS/EDU**

Finalidade:

Este software é destinado aos engenheiros, professores e estudantes interessados em aprender e utilizar o ANSYS.

Descrição:

É uma versão educacional do software ANSYS/FULL, possibilitando a realização das seguintes análises: estruturais estática, dinâmica e não lineares, transferência de calor, eletromagnetismo e CFD - Computacional Fluid Dynamics. É fácil de operar e vem acompanhado de um *tutorial* para os primeiros passos.

Ambiente operacional:

Está disponível para os principais computadores nas plataformas PC e Workstations.

## **C.2 – Procedimentos para o Uso do ANSYS**

### **C.2.1 - Introdução:**

O ANSYS está disponível em diversas versões, incluindo uma versão educacional e de treinamento chamada ANSYS/ED. Ela foi planejada para ser usada como uma ferramenta de treinamento pessoal na indústria, em universidades e outras instituições educacionais. O ANSYS/ED contém virtualmente todas as ferramentas da versão FULL ANSYS juntamente com as versões ANSYS/EMAG e ANSYS /FLOTRAN, exceto pelo limite de tamanho do modelo que pode ser criado e resolvido (limitado pela capacidade em número de elementos e nós).

As especificações para a versão 5.2 do ANSYS/ED são as seguintes (usando a versão full como referência):



-Tamanho do modelo: Não podem haver mais do que 1000 graus de liberdade no total do modelo (8400 para modelo FLOTRAN), e não mais do que 50 graus de liberdade mestre. Adicionalmente, os mais altos números permitidos são:

- 100 para Keypoints
- 100 para Linhas
- 50 para Áreas
- 10 para Volumes
- 500 para nós(1200 para modelos FLOTRAN)
- 250 para elementos (1000 para modelos FLOTRAN)

Observação: o problema pode causar queda do sistema quando os limites são excedidos.

#### C.2.2 - Procedimento de “entrada no ANSYS”:

Algumas definições são necessárias:

Jobname: É o prefixo do nome de todos os arquivos gerados pelo ANSYS ao rodar. Todos os arquivos são chamados Jobname.ext, onde ext é uma extensão do ANSYS que define o seu conteúdo. O jobname especificado ao se entrar no ANSYS é chamado de Jobname inicial ; você sempre pode mudar o jobname dentro de uma sessão do ANSYS.

Working directory (diretório de trabalho): Este é o diretório no qual a sessão do ANSYS será executada e onde todos os arquivos ANSYS serão armazenados.

Para se iniciar o ANSYS 5.2, na janela do sistema operacional UNIX, digite ANSYS52. Será aberta então uma janela conforme a figura F.1, abaixo. Siga, então, o procedimento:

- 1. Clique em Interactive
- 2. Digite o jobname inicial: suporte
- 3. Clique em Run
- 4. Pressione Enter

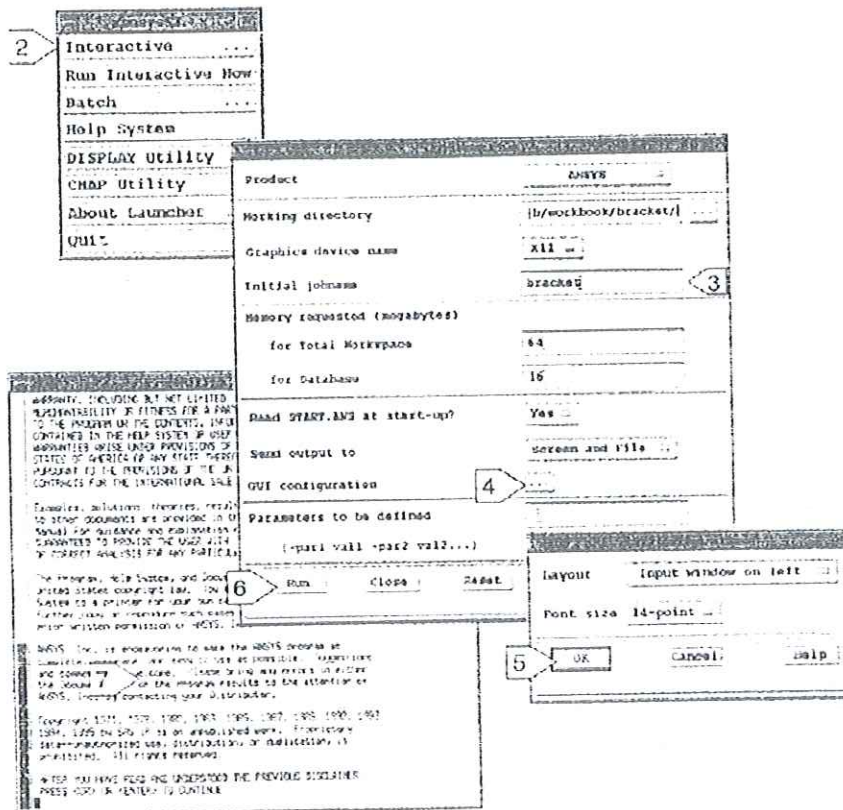


Figura C.1: Tela de abertura do Software ANSYS 5.2.

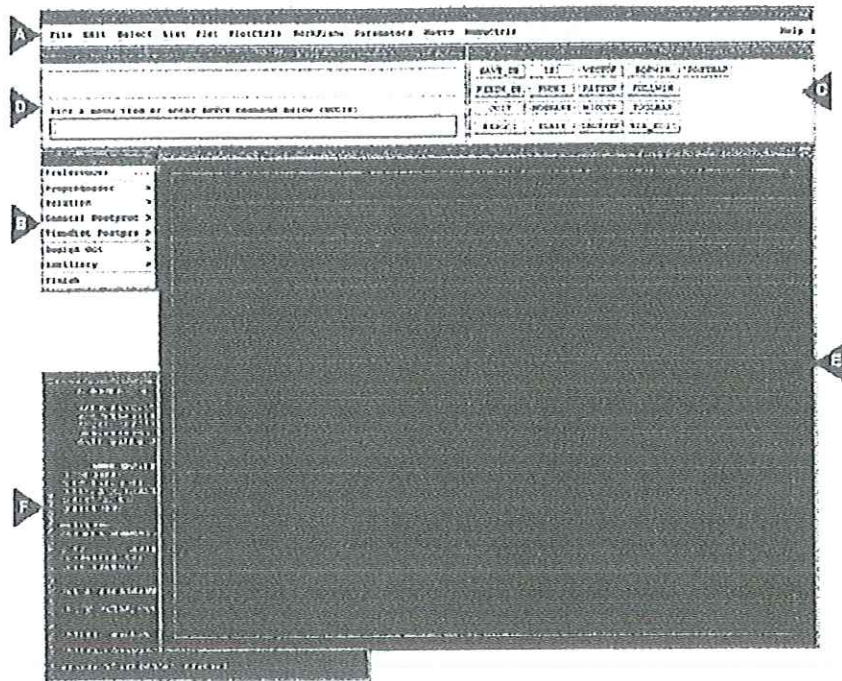


Figura C.2: Tela de trabalho do ANSYS.

A interface do ANSYS com o usuário consiste de seis janelas principais

- A. Utility Menu- Contém as funções de utilidade que são disponíveis durante a sessão do ANSYS, tal como os controles de arquivos, de seleção, controles gráficos e parâmetros. Você também sai do ANSYS neste menu.
- B. Main Menu - Contém as funções primárias do ANSYS, organizadas por processos (preprocessor, solution, general postprocessor, design optimizer, etc.)
- C. Toolbar - Contém os botões que executam os comandos e funções comumente executados no ANSYS. Você pode personalizar esta janela.
- D. Input Window - Mostra as mensagens de *prompt* do programa e permite que você digite os comandos diretamente.
- E. Graphics Window - Janela onde as figuras gráficas são mostradas.

F. Out Put Window - Recebe o texto de saída do programa. Está geralmente posicionada atrás das outras janelas e pode ser passada para a frente quando necessário.

## Eletromagnetismo

### Índice:

- Macro de pre-processamento e pós-processamento.
- Elemento 3D magnético
- Elemento Interface para vetor magnético-potencial e escalar - interface potencial.
- Elemento Infinito para contorno aberto
- Elemento de Campo acoplado para 3D de análise magneto-estrutural

### Macros:

PERBC2D: Análise 2D para condições de contorno periódico.

RACE: Cria uma malha de bobina de elementos SOURC36.

PLF2D: Plota linhas de fluxo para análise 2D.

TORQ2D: Calcula torque para um LPATH dado.

TORQC2D: Calcula torque sobre caminho circular.

FOR2D: Calcula força para um dado LPATH.

MMF: Calcula MMF (força magneto motriz) para um dado LPATH.

POWERH: Calcula perda energia em análise harmônica.

SRCS: Calcula parâmetro terminal de um condutor fonte.

FLXV : Calcula o fluxo passando através de um contorno fechado.

PLVJ3D : Plotagem 3D de corrente com vetores.

PERBC2D Macro

- Usando para aplicar condição de contorno periódica para um modelo simétrico circular de uma máquina. O macro seleciona nós pares em ângulos especificados e ligação deles com cada equação vinculada (Simetria Ímpar) ou nó acoplado (Simetria Par) .

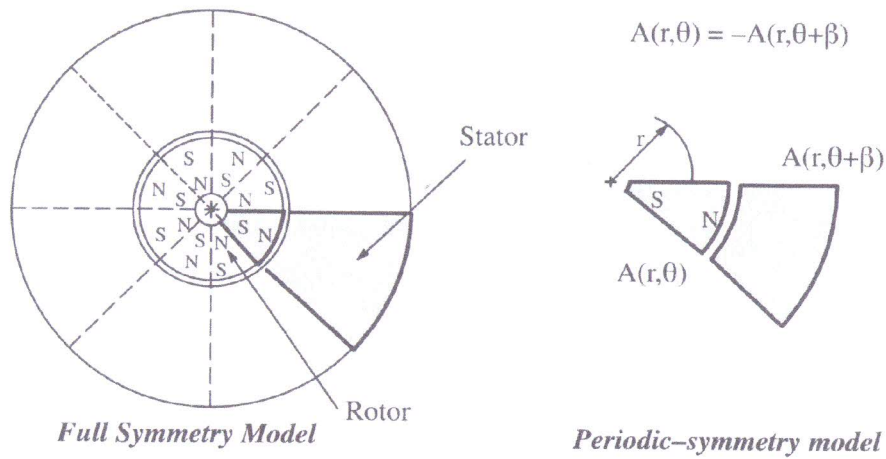


FIGURA C.3: Pólo Simples (ímpar) simetria periódico.

- PERBC2D Macro (Cont'd)

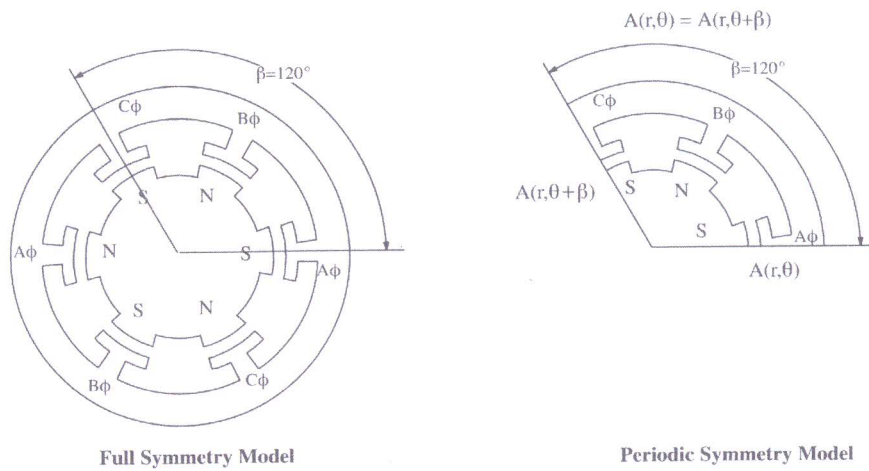
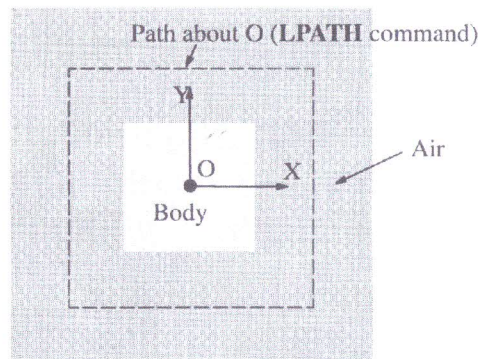


FIGURA C.4: Pólo Múltiplo (ímpar) simetria periódica

TORQ2D Macro

- Cálculo do torque em um corpo no campo magnético, sobre a origem global. Para alcançar isto, um caminho precisa ser definido no ar ao redor do objeto pelo qual o

cálculo do torque é levado. Uma ordem de nós no comando LPATH dará o sinal correto do torque resultante.

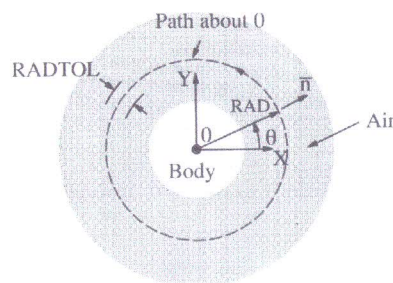


### General Path about Global Origin for Torque Calculation

FIGURA C.5: Caminho geral sobre a origem global para cálculo do torque

### TORQC2D Macro

Calculando o torque no corpo usando um caminho de integração circular (LPATH) o qual é automaticamente criado pelo macro, idealmente usado para máquinas elétricas rotacionais.



### Circular Integration Path Created by TORQC2D

FIGURA C.6 : Integração em caminho circular criado por TORQC2D

### Elemento 3D Magnético

- SOLID97 é um elemento de vetor potencial para análise estática e de baixa frequência no campo do eletromagnetismo.
- Inclui as capacidades de vetor potencial SOLID96.
- Inclui resistividade e permeabilidade orthotropica.

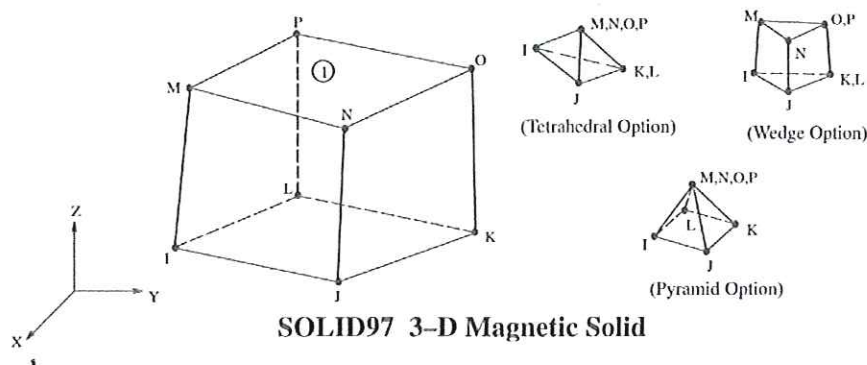
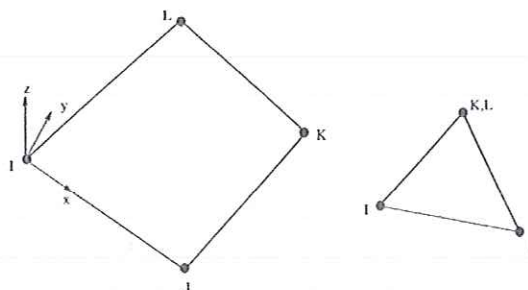


FIGURA C.7: Elemento magnético sólido em 3D (SOLID 97)

Elemento de Interface para vetor magnético e potencial escalar.

- Uma análise de campo magnético 3D pode fazer uso de ambos: formulação de vetor e potencial escalar quando interfaceado com o elemento INTER115.

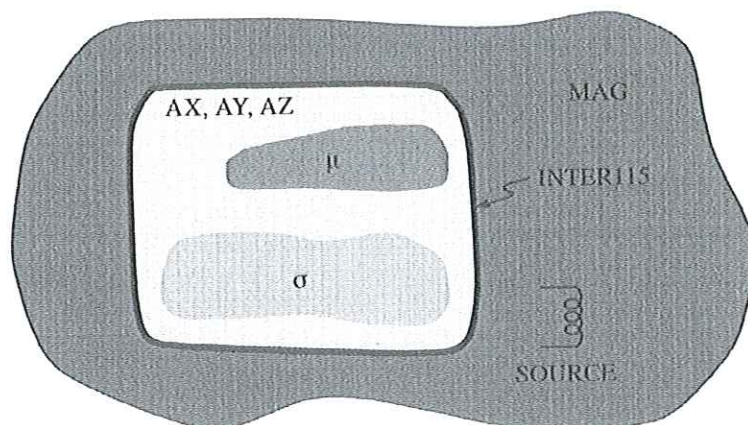


**INTER115 3-D Magnetic Interface Element**

FIGURA C.8: Elemento de interface magnética 3D (INTER115)

Vantagens do vetor combinado / Formulação Escalar

- Redução do tamanho dos problemas de análise transiente ou harmônico 3D pela introdução de um potencial escalar na região com ar.
- Permite a modelagem de condutores complicados com fontes primitivas em uma região escalar.



### Magnetic Problem Domain

FIGURA C.9: Domínio de problema magnético

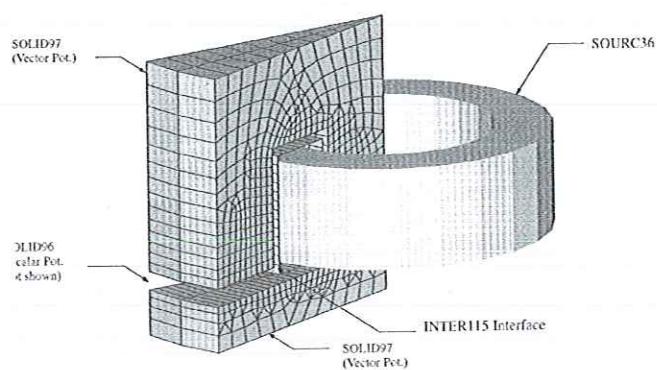


Figura C.10: Exemplo Máquina com ranhura



**Anexo D**

Segundo Guerrini [25] temos:

Dados de projeto:

Tabela I

Tipo de Construção	Valores de K
Núcleo envolvido de força	0,6
Núcleo envolvente de força	1,2
Núcleo envolvido de distribuição	0,4-0,5

Tabela II

Potência (kVA)	Densidade de Corrente (A/mm <sup>2</sup> )
Até 5	2
5 – 50	2 – 2,5
50 – 250	2,5 – 3
250 – 500	2 – 3,5
500-1000	2,5-4
1000-2500	3 – 5

Tabela III

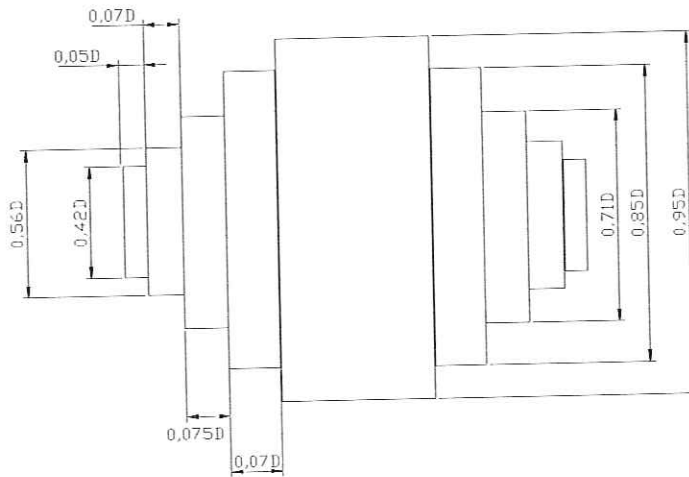
Tipo Secção	Potência (kVA)
Quadrada	Até 0,25
Cruz com 2 dentes	Até 5,0
Cruz com 3 dentes	5 – 50
Cruz com 4 dentes	Acima de 50

Tabela IV

Espessura do papel isolante colocado entre camadas

Fish Paper	Fio AWG
Espessura 0,10mm	n° 20 e seguintes
Espessura 0,20mm	n° 14 a n° 20
Espessura 0,50mm	n° 8 a n° 12

Seção do Núcleo Transformador



Especificações conforme ABNT

		ABNT Nbr.9119	Perda Magnética Máxima Max. Core Loss (W/Kg)				Indução Magnética Mínima Min. Magnetic Induction (T)						
			1,5 T	1,7 T									
			50 Hz	60 Hz	50 Hz	60 Hz	B 800	B 2500	B 10000				
E 004	0,27	GO 117-27	0,89	1,17	1,27	1,68				94,5			
E 005	0,30	GO 128-30	0,97	1,28	1,39	1,83	1,75	1,87	1,97	5	7,65	95,0	2
E 006	0,35	GO 146-35	1,11	1,46	1,57	2,07						95,5	

Os valores acima foram medidos conforme o método NBR 5161.  
 The values indicated above have been estimated in accordance with method NBR 5161.  
 ABNT - Brazilian Association of Technical Standards

Retiradas das especificações do fabricante

## Referências Bibliográficas

- [1] - SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L. (1996); "Finite Elements for Electrical Engineers"; Third Edition, Cambridge [UK].
- [2] - CARDOSO, J. C. (1990); "Introdução ao Método dos Elementos Finitos para Engenheiros Eletricistas"; 1ª Edição, São Paulo.
- [3] - RAO, S. S. (1989); "The Finite Elements Method in Engineering"; 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford [UK].
- [4] - BICKFORD, W. B. (1990); "A first course in the finite element method in electromagnetics"; John Wiley, New York [USA].
- [5] - Manual do Ansys Revision 5.1 New Features Manual (Release Notes) (1994); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [6] - Ansys Eletromagnetics Enhancements at Revision 5.1 (1994); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [7] - ANSYS Revision 4.3 Tutorials Volume II (1988); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [8] - Procedure Manual ANSYS 5.2 2/4 Volume I (1995); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [9] - Magnetics, Ansys User Guide for Revision 5.0 (1993); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [10] - Magnetics, User Guide for Revision 5.0, Solutions to Exercises (1993); Swanson Analysis Systems, Inc., Houston/Texas [USA].
- [11] - MURAKAMI, C. R., "Caracterização elétrica da resina poliuretana derivada do óleo de mamona, como dielétrico sólido"; (1998) Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação, Área de Engenharia Elétrica da EESC/USP.
- [12] - "Introdução ao Método dos Elementos Finitos"; (1998), Laboratório CAD/CAE, Departamento de Engenharia Mecânica, EESC/USP.

- [13] - COELHO, R., "Physics of Dielectrics for the Engineer"; (1979), Elsevier Scientific Publishing Company, London [UK].
- [14] - McCRUM, N. G.; READ, B. E.; WILLIAMS, G. "Anelastic and Dielectric Effects in Polymeric Solids"; (1967), John Wiley & Sons, London [UK].
- [15] - ANDERSON, J. C., "Dielectrics"; (1964), Chapman and Hall Ltd, London [UK].
- [16] - KRAUS, J. D.; CARVER, K. R., "Eletromagnetismo"; (1978), Segunda Edição, Guanabara-Dois/ McGraw-Hill, Rio de Janeiro [Brasil].
- [17] - SILVESTER, P. P.; CHARL, M. V. K. "Finite Solution of Saturable Magnetic Field Problems" . IEEE Transaction on PAS, 89(7):1642-50, Sep./Oct.(1970).
- [18] - JANISZEWSKI, J. M. "Método dos Elementos finitos aplicado a problemas de campos eletromagnéticos estáticos"; (1978), Tese de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [19] - KUHLMANN, J. H.; (1940) "Design of Electrical Apparatus", 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, [USA].
- [20] - ALCÂNTARA Jr., N. P.; "As Determinações dos Mapas das Densidades de Fluxo em Máquinas Elétricas pelo Método dos Elementos Finitos"; (1985), Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação na Área de Engenharia Elétrica, EESC/USP.
- [21] - SMITH, G. D.; "Numerical Solution of partial differential equation finite difference methods"; (1984), 3<sup>rd</sup> Edition, Clarendon Press-Oxford, [UK].
- [22] - ANNIGER, B. S.; TSENG, K.; "Boundary Element Methods in Engineering"; (1989), Ed. Springer Verlag, New York, [USA].
- [23] - GEORGE, P. L.; "Automatic Mesh Generation, Application to Finite Element Methods"; (1991), Ed. John Wiley & Sons, New York, [USA].
- [24] - ROCKEY, K. C.; EVANS, H. R.; GRIFFITHS, D. W. and NETHERCOT, D. A.; "The Finite Element Method – A Basic Introduction for Engineers"; (1983), Second Edition, Ed. John Wiley & Sons, New York, [USA].

- [25] - GUERRINI, D. P.; "Notas de aula do Curso de Conversão Eletromecânica de Energia", EESC-USP(1980), São Carlos, S.P, Brasil.
- [26] - ALTAFIM, R. A. C., GONZAGA, D. P., MURAKAMI, C. R., ATIQUE Jr., W., CHIERICE, G. O. and AGNELLI, J. A. M.; "Analysis of Performance of Polymeric Insulators Manufactured with Polyurethane Resins"; 2001 **IEEE** 7<sup>th</sup> International Conference on Solid Dielectrics, June 25-29, 2001, Eindhoven, The Netherlands, pp. 191-194, ISBN 0-7803-6352-3.
- [27] – GOURISHANKAR, V.; "Electromechanical Energy Conversion"; (1965); Scranton International Textbook Company; Scranton/Pa/USA.