EDMILSON ROGÉRIO SANAGIOTTI

Estudo Comparativo entre a Modelagem com a Transformação dq0 e a
Modelagem por Vetores Espirais para o Motor de Indução Bifásico
Simétrico

Dissertação apresentada à Escola
de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, para
obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas
Dinâmicos

Orientador: Dr. Azauri Albano de
Oliveira Júnior

São Carlos
2007

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Sanagiotti, Edmilson Rogério

S197e Estudo comparativo entre a modelagem com a transformação dq0 e a modelagem por vetores espirais para o motor de indução bifásico simétrico / Edmilson Rogério Sanagiotti ; orientador Azauri Albano de Oliveira Júnior. — São Carlos, 2007.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2007.

1. Motor de indução bifásico. 2. Transformação dq0.
3. Vetores espirais. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDMILSON ROGERIO SANAGIOTTI**

Dissertação defendida e julgada em 22/06/2007 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **AZAURI ALBANO DE OLIVEIRA JUNIOR (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) aprovado

Prof. Titular **DARIZON ALVES DE ANDRADE**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU) aprovado

Prof. Associado **DIÓGENES PEREIRA GONZAGA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) aprovado

Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
em Engenharia Elétrica e
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedico este trabalho aos meus pais.

*Pois somente eles acreditaram, acreditam
e acreditarão em mim incondicionalmente.*

Aproveito para homenagear Nikola Tesla.
Com certeza um dos maiores Engenheiros
do ramo da eletricidade de todos os tempos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar ao Prof. Dr. Azauri Albano de Oliveira Jr, pela orientação, paciência e amizade ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Aos professores Dr. Manoel Luis de Aguiar, Dr. José Roberto Boffino de Almeida Monteiro, Dr. Diógenes Pereira Gonzaga e aos colegas do Laboratório de Controle e Eletrônica de Potência (LACEP) pelo apoio e sugestões.

Aos que contribuíram direta ou indiretamente para realização desse trabalho.

RESUMO

SANAGIOTTI, E. R. Estudo Comparativo entre a Modelagem com a Transformação dq0 e a Modelagem por Vetores Espirais para o Motor de Indução Bifásico Simétrico. 2007. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

O presente trabalho é um estudo comparativo entre a modelagem de motores de indução bifásicos simétricos com o uso da transformação dq0, que é uma modelagem matemática clássica na análise dos motores de indução bifásicos e a modelagem através da teoria do vetor espiral, proposta na década de 80 para os motores de indução trifásicos. A modelagem clássica é apresentada detalhadamente, bem como a modelagem por vetores espirais. Foram realizadas simulações para comparar os resultados entre as diferentes abordagens.

Palavras – chave: motor de indução bifásico, transformação dq0, vetores espirais.

ABSTRACT

SANAGIOTTI, E. R. A Comparative Study between Symmetrical Two-Phase Induction Motor Model Using dq0 Transformation and Model Using Spiral Vector Theory. 2007.
M. Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

This work is a comparative study between the classic modeling using dq0 transformation and the spiral vector theory applied to study symmetrical two-phase induction machine. The spiral vector theory was proposed by Dr. Sakae Yamamura to study electrical machines in the middle of 1980s. To compare both types of modeling, simulations were performed to solve differential equations.

Key – words: two-phase induction motor, dq0 transformation, spiral vector.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Vetor espiral no plano complexo.....	29
Figura 1.2 – Representação esquemática da alimentação desbalanceada para o MIBS através de componentes simétrica.....	33
Figura 1.3 – Diagramas fasoriais das componentes simétricas bifásicas.....	34
Figura 2.1 – Representação da máquina de indução bifásica.....	39
Figura 2.2 – Representação gráfica da transformação dq0 para o referencial no estator.....	45
Figura 3.1 – Modelo do motor de indução bifásico.....	56
Figura 3.2 – Circuito equivalente de regime permanente para o MIBS.....	61
Figura 3.3 – Circuito equivalente transiente para controle por corrente.....	62
Figura 3.4 – Circuito equivalente transiente para controle por tensão.....	71
Figura 3.5 – Representação esquemática da decomposição das tensões de v_a e v_b em termos de suas componentes simétricas de sequência positiva e negativa.....	73
Figura 3.6 – Decomposição de excitação desbalanceada aplicada às fases de uma máquina bifásica simétrica.....	75
Figura 3.7 – Circuito equivalente transiente de sequência positiva da máquina de indução bifásica simétrica.....	75
Figura 3.8 – Circuito equivalente transiente de sequência negativa da máquina de indução bifásica simétrica.....	76
Figura 4.1 – Evolução do torque eletromagnético ao longo do tempo.....	80
Figura 4.2 – Evolução da velocidade mecânica do motor ao longo do tempo.....	81
Figura 4.3 – Evolução das correntes de estator do motor ao longo do tempo.....	81
Figura 4.4 – Evolução das correntes de rotor do motor ao longo do tempo.....	82
Figura 4.5 – Torque eletromagnético de sequência positiva, negativa e resultante no tempo.	83
Figura 4.6 – Velocidade mecânica do motor no tempo.....	83

Figura 4.7 - Curva torque x velocidade.....	84
Figura 4.8 – Torque eletromagnético resultante da modelagem dq0 (DQ) e torque resultante da soma dos torques de seqüência positiva e negativa obtido por vetores espirais (VE).....	85
Figura 4.9 – Velocidades resultantes da modelagem dq0 (DQ) e por vetores espirais (VE)...	86
Figura 4.10 – Torque eletromagnético resultante e seus componentes obtidos pela modelagem por vetores espirais.....	89
Figura 4.11 – Corrente de seqüência negativa do estator e rotor.....	90
Figura 4.12 – Corrente de seqüência negativa do estator e rotor.....	91
Figura 4.13 – Corrente de seqüência positiva do estator e rotor.....	91
Figura 4.14 – Vetor espiral de corrente de seqüência positiva de estator.....	92
Figura 4.15 – Vetor espiral de corrente de seqüência positiva de rotor.....	92
Figura 4.16 – Vetor espiral de corrente de seqüência negativa de estator.....	93
Figura 4.17 – Vetor espiral de corrente de seqüência negativa de rotor.....	93
Figura 4.18 – Vetor espiral de corrente da fase <u>a</u> de estator.....	94
Figura 4.19 – Vetor espiral de corrente da fase <u>b</u> de estator.....	95
Figura 4.20 – Vetor espiral de corrente da fase <u>r</u> de rotor.....	95
Figura 4.21 – Vetor espiral de corrente da fase <u>s</u> de rotor.....	96
Figura 5.1 – Conexão Scott.....	98
Figura 5.2 – Diagrama fasorial da ligação Scott.....	98
Figura 5.3 – Circuito equivalente de regime permanente do MIBS.....	100
Figura 5.4 – Representação esquemática para o ensaio de rotor travado do MIBS.....	101
Figura 5.5 – Circuito equivalente aproximado do MIBS na situação de rotor bloqueado.....	101
Figura 5.6 – Representação esquemática do ensaio em vazio do MIBS.....	102
Figura 5.7 – Circuito equivalente aproximado do MIBS operando em vazio.....	103
Figura 5.8 – Tensão aplicada no enrolamento <u>a</u> do MIBS.....	107

Figura 5.9 – Tensão aplicada no enrolamento <u>b</u> do MIBS.....	107
Figura 5.10 – Corrente teórica no enrolamento <u>a</u> do MIBS operando com tensão balanceada.....	108
Figura 5.11 – Corrente experimental no enrolamento <u>a</u> do MIBS operando com tensão balanceada.....	108
Figura 5.12 – Corrente teórica no enrolamento <u>b</u> do MIBS operando com tensão balanceada.....	109
Figura 5.13 – Corrente experimental no enrolamento <u>b</u> do MIBS operando com tensão balanceada.....	109
Figura 5.14 – Ligação Scott com variac monofásico para controle da amplitude de tensão.	110
Figura 5.15 - Tensão desbalanceada aplicada no enrolamento <u>a</u> do MIBS.....	111
Figura 5.16 - Tensão desbalanceada aplicada no enrolamento <u>b</u> do MIBS.....	111
Figura 5.17 – Corrente teórica no enrolamento <u>a</u> do MIBS operando com tensão desbalanceada.....	112
Figura 5.18 – Corrente experimental no enrolamento <u>a</u> do MIBS operando com tensão desbalanceada.....	112
Figura 5.19 – Corrente teórica no enrolamento <u>b</u> do MIBS operando com tensão desbalanceada.....	113
Figura 5.20 – Corrente experimental no enrolamento <u>b</u> do MIBS operando com tensão desbalanceada.....	113

LISTA DE SIGLAS

FAM	Field Acceleration Method
MIBS	Motor de Indução bifásico simétrico

LISTA DE SÍMBOLOS

i	função exponencial complexa e/ou corrente elétrica que evolui no tempo
A	valor constante
δ	expoente complexo da função exponencial
t	tempo
η	termo real do expoente δ
j	letra que designa a parte imaginária de um número ou função complexa
ω	termo imaginário do expoente δ , frequência de alimentação da rede
a, b, c	coeficientes constantes de uma equação diferencial de segunda ordem
v	tensão elétrica instantânea
V	amplitude máxima da tensão v
ϕ	defasagem angular
$\dot{V}$	fasor de tensão que gira com determinada velocidade angular
i_s	parte estacionária da solução geral da resposta da corrente
I	amplitude máxima da corrente i
$\dot{I}$	fasor de corrente que gira com determinada velocidade angular
i_t	parte transiente da solução geral da resposta da corrente
p	operador linear d/dt
$\dot{V}_a$	fasor de tensão que alimenta a fase <u>a</u> do motor
$\dot{V}_b$	fasor de tensão que alimenta a fase <u>b</u> do motor
$\dot{V}_a^+$	fasor de tensão de seqüência positiva relacionado à tensão v_a

$\dot{V}_a^-$	fasor de tensão de seqüência negativa relacionado à tensão v_a
$\dot{V}_b^+$	fasor de tensão de seqüência positiva relacionado à v_b
$\dot{V}_b^-$	fasor de tensão de seqüência negativa relacionado à v_b
$\dot{I}_a$	fasor de corrente que circula pela a fase <u>a</u> do motor
$\dot{I}_a^+$	fasor de corrente de seqüência positiva relacionado à corrente I_a
$\dot{I}_a^-$	fasor de corrente de seqüência negativa relacionado à corrente $\dot{I}_a$
$\dot{I}_b$	fasor de corrente que circula pela a fase <u>b</u> do motor
T_{el}^+	torque eletromagnético de seqüência positiva
T_{el}^-	torque eletromagnético de seqüência negativa
R_{E_1}	Resistência do enrolamento 1 do estator.
L_{E_1}	Auto-indutância do enrolamento 1 do estator.
R_{E_2}	Resistência do enrolamento 2 do estator.
L_{E_2}	Auto-indutância do enrolamento 2 do estator.
R_R	Resistência do rotor.
L_R	Auto-indutância do rotor.
M_{ER}	indutância mútua entre enrolamentos de estator e rotor.
M_{max}	valor máximo da indutância mútua entre enrolamentos de estator e rotor.
M_1	valor máximo da indutância mútua entre o enrolamento 1 do estator e o rotor.
M_2	valor máximo da indutância mútua entre o enrolamento 2 do estator e o rotor.

v_{Ki}	tensão total do i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.
R_{Ki}	resistência do i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.
i_{Ki}	corrente que circula no i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.
λ_{Ki}	Fluxo magnético total concatenado pelo i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.
L_{Ki}	Auto-indutância do i-ésimo enrolamento do estator associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.
M_{ij}	Indutância mútua entre o i-ésimo e o j-ésimo enrolamento sejam eles de estator ou rotor.
J	momento de inércia do sistema
K_d	coeficiente de atrito dinâmico.
T_c	torque de carga aplicado à máquina.
T_{el}	torque eletromagnético produzido pela máquina.
ω_{mec}	velocidade angular mecânica do eixo da máquina.
θ	ângulo entre o eixo magnético do estator e do rotor
λ_{Ed}	fluxo magnético de eixo direto do estator
i_{Ed}	corrente de eixo direto de estator
i_{Eq}	corrente de eixo em quadratura de estator
i_{Rd}	corrente de eixo em quadratura de estator
i_{Rq}	corrente de eixo em quadratura do rotor

λ_{E_q}	fluxo magnético de eixo em quadratura do estator
λ_{R_d}	fluxo magnético de eixo direto do rotor
λ_{R_q}	fluxo magnético de eixo em quadratura do rotor
L_1	auto-indutância do estator (primário)
L_2	auto-indutância do rotor (secundário)
θ_{mec}	deslocamento angular mecânico do eixo da máquina
P	número de pólos da máquina de indução.
z_p	número de pares de pólos da máquina de indução.
l_1	indutância de dispersão dos enrolamentos do estator
l_2	indutância de dispersão dos enrolamentos do rotor
M	valor máximo da indutância mútua entre estator e rotor
v_a	tensão instantânea aplicada ao enrolamento da fase <u>a</u>
R_1, R_2	resistência dos enrolamentos do estator e rotor respectivamente
x_1, x_2	reatância indutiva do estator e rotor respectivamente
x_m	reatância de magnetização
i_a	corrente instantânea que circula no enrolamento da fase <u>a</u>
λ_a	fluxo concatenado total no enrolamento da fase <u>a</u>
λ_{ga}	fluxo concatenado do campo girante no entreferro produzido pela corrente da fase <u>a</u> , também denominado fluxo principal
i_r, i_s	corrente instantânea que circula no enrolamento da fase <u>r</u> e <u>s</u>
λ_{gr}	fluxo concatenado do campo girante no entreferro produzido pela corrente da fase <u>r</u>

$\dot{I}_1$	fasor de corrente de estator
ω_1	freqüência de alimentação da rede
ϕ_1	deslocamento angular da corrente de estator
$\dot{I}_2$	fasor da corrente de rotor
ω_2	freqüência angular do rotor referida ao estator
ϕ_2	deslocamento angular da corrente de rotor
i_b	corrente instantânea que circula no enrolamento da fase <u>a</u>
ω_r	velocidade angular do rotor da máquina em radianos elétricos por segundo
v_1	tensão instantânea aplicada ao estator
i_1	corrente instantânea que circula no enrolamento de estator
i_2	corrente instantânea que circula no enrolamento de rotor referida ao estator
e_s	tensão contra-eletromotriz
i_{2t}	parte transiente da solução geral da resposta da corrente de i_2
i_{2s}	parte de regime permanente da solução geral da resposta da corrente de i_2
T_c	constante de tempo
s	escorregamento
θ_2, θ_2'	defasagem angular
i_0	corrente instantânea de magnetização
t_1	torque eletromagnético devido ao efeito de uma fase do motor
t_2	torque eletromagnético devido ao efeito de duas fases do motor
i_2^*	complexo conjugado da corrente de rotor referida ao estator
δ_1, δ_2	raízes características

v_a, v_b	tensões instantâneas aplicadas aos enrolamentos <u>a</u> e <u>b</u> do motor
v_a^+, v_a^-	vetores espirais de tensão de seqüência positiva e negativa da fase <u>a</u>
$\dot{V}_a^+, \dot{V}_a^-$	fases de tensão de seqüência positiva e negativa da fase <u>a</u>
ϕ^+, ϕ^-	defasagens angulares relacionadas às componentes de seqüência positiva e negativa
i_a^+, i_a^-	vetores espirais de corrente de seqüência positiva e negativa da fase <u>a</u>
e_s^+, e_s^-	tensão contra-eletromotriz de seqüência positiva e negativa
Z^+, Z^-	impedância de entrada de seqüência positiva e negativa
T_{el}^+, T_{el}^-	torque eletromagnético de seqüência positiva e negativa
i_r^+, i_r^-	vetores espirais de corrente de seqüência positiva e negativa da fase <u>r</u>
$(i_r^{+'})^*, (i_r^{-'})^*$	complexo conjugado dos vetores espirais de corrente de seqüência positiva e negativa da fase <u>r</u> referida ao estator
$\dot{V}_{cd}, \dot{V}_{ec}, \dot{V}_{de}$	tensões trifásicas aplicadas aos transformadores da conexão Scott
$\dot{V}_{eo}, \dot{V}_{oc}$	componentes ortogonais da tensão $\dot{V}_{ec}$
$\dot{V}_{do}, \dot{V}_{oe}$	componentes ortogonais da tensão $\dot{V}_{de}$
V_{rb}	tensão aplicada no ensaio de rotor travado
Z_{rb}	impedância total do circuito equivalente para ensaio com rotor travado
P_1, P_2	potência ativa medida nos enrolamentos <u>a</u> e <u>b</u> respectivamente no ensaio de rotor travado ou do ensaio do motor em vazio
I_a, I_b	corrente medida nos enrolamentos <u>a</u> e <u>b</u> respectivamente no ensaio de rotor travado ou no ensaio do motor em vazio

P_{rb}, I_{rb}	soma das potências P_1 e P_2 e soma das correntes I_a e I_b respectivamente
V_v	tensão aplicada no ensaio do motor em vazio
Z_v	impedância total do circuito equivalente para ensaio do motor em vazio
I_{rb}, I_v	metade da soma das correntes I_a e I_b
m_c	massa do rotor cilíndrico do motor ensaiado
R_c	raio do rotor cilíndrico do motor ensaiado
P_{rot}	potência devida as perdas rotacionais
k_d	coeficiente de atrito viscoso estimado do motor ensaio

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução.....	25
1.1 – Contextualização.....	25
1.2 – O Vetor Espiral.....	28
1.3 – Componentes Simétricas Bifásicas.....	32
 Capítulo 2 – Modelagem do Motor de Indução Bifásico Utilizando a Transformação dq0....	37
2.1 – Introdução.....	37
2.2 – Equações de Tensão e Torque da Máquina de Indução Bifásica.....	38
2.3 – Equações da Máquina de Indução Bifásica usando a Transformação dq0: fluxos, tensões e torque.....	45
2.4 – Representação da Máquina Bifásica Através de Equação de Estado.....	52
 Capítulo 3 – Modelagem do Motor de Indução Bifásico Utilizando Vetores Espirais.....	55
3.1 – Introdução.....	55
3.2 – Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico (MIBS) Através da Teoria dos Vetores Espirais.....	55
3.3 – Análise do Transiente Eletromagnético do MIBS Através da Teoria dos Vetores Espirais.....	62
3.3.1 – Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico para Controle por Corrente.....	62
3.3.2 – Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico para Controle por Tensão.....	70
3.4 – Análise do Torque Eletromagnético do MIBS sob Operação de Tensão Desbalanceada utilizando Vetores Espirais e Componentes Simétricas.....	72
3.5 – Representação da Máquina Bifásica Simétrica Através de Equação de Estado.....	77

Capítulo 4 – Simulações e Discussão dos Resultados.....	79
4.1 – Introdução.....	79
4.2 – Operação do MIBS Sob Tensão Balanceada.....	79
4.3 – Operação do MIBS Sob Tensão Desbalanceada.....	82
Capítulo 5 – Parametrização e Ensaio do Motor de Indução Bifásico Simétrico.....	97
5.1 – Introdução.....	97
5.2 – A Conexão Scott.....	97
5.3 – Parametrização do MIBS.....	100
5.3.1 – Ensaio de Rotor Travado.....	100
5.3.2 – Ensaio do Motor em Vazio.....	102
5.3.3 – Ensaio do MIBS.....	103
5.3.4 – Parâmetros Mecânicos.....	105
5.4 – Resultados Experimentais e Teóricos.....	106
5.4.1 – Operação com Tensão Balanceada.....	106
5.4.2 – Operação com Tensão Desbalanceada.....	110
5.4.3 – Conclusão.....	114
Capítulo 6 – Conclusão e Proposta de Continuidade.....	115
6.1 – Conclusão.....	115
6.2 – Proposta de Continuidade.....	116
Capítulo 7 – Referências.....	117

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

A eletrônica de potência é utilizada para processar a energia elétrica para que seja possível obter-se uma maior eficiência e uma melhor qualidade de energia. Os métodos empregados para conseguir tais objetivos baseiam-se no emprego de dispositivos semicondutores operando em regime de comutação para que seja possível controlar o fluxo de energia e a conversão das formas de onda de tensão e corrente entre fonte e carga.

Com a criação do tiristor houve um grande avanço tecnológico da eletrônica de potência, neste ínterim houve o lançamento das bases teóricas que possibilitaram a realização de muitos trabalhos de pesquisa e desenvolvimento. Paralelamente, o avanço da microeletrônica contribuiu e, ainda, continua contribuindo para que fosse possível a implantação de melhores circuitos de controle, com a utilização de microcontroladores e processadores digitais de sinais, bem como o desenvolvimento de novos tipos de chaves com as mais variadas tensões de bloqueio, correntes de condução e frequência de comutação. Da interação entre a microeletrônica e a eletrônica de potência tem resultado uma crescente popularização dos conversores estáticos, sobretudo no acionamento de máquinas elétricas.

Além disso, quanto ao acionamento e controle de velocidade o desenvolvimento da eletrônica de potência propiciou uma redução nos custos nos conversores para acionamento de máquinas de corrente alternada, fato este, que levou os pesquisadores a estudar e desenvolver várias técnicas de controle escalar e vetorial juntamente com os inversores para

acionar e controlar o motor de indução trifásico, pois estes são robustos, construtivamente simples e de menor custo em relação a um motor de corrente contínua equivalente. Por estes motivos os mesmos são muito utilizados pela indústria tanto em aplicações de alta potência como em aplicações que exijam potências menores que 1000 W.

Da mesma forma que para o motor de indução trifásico, uma gama muito grande de trabalhos foi realizada para desenvolver estudos quanto ao tipo de estruturas de acionamento para os motores de indução bifásicos, sejam eles simétricos ou assimétricos, com o objetivo de estudar a viabilidade de funcionamento com velocidade variável e controle de torque, como visto (1) a (9). Além disso, os estudos realizados para controle de velocidade e torque de alto desempenho tal como em (10) a (12) utilizam os mesmos métodos desenvolvidos para os motores trifásicos, o que é bastante natural, pois em engenharia é comum utilizar conhecimentos adquiridos para estudar problemas correlatos, portanto, estudos com relação ao tipo de modulação, da mesma forma que para o caso do motor de indução trifásico, também foram realizados como visto em (13) e (14). Entretanto, todos estes estudos fazem uso da transformação $dq0$ em vários sistemas de referência, que é clássica na análise de máquinas elétricas, para modelar matematicamente o motor de indução bifásico de acordo com (15) a (17).

Na década de 80, Yamamura apresenta uma proposta para modelar o motor de indução trifásico baseado no conceito que este denominou de vetor espiral, que nada mais é do que escrever as equações da máquina em termos de funções exponenciais complexas englobando o conceito de fasor como mostrado em (18) e (19). Com esta abordagem Yamamura não revoluciona a análise de máquinas elétricas, entretanto, lança uma outra perspectiva de abordagem da máquina de indução dando origem ao FAM (*Field Acceleration Method*), que também é uma técnica de controle de alto desempenho para controle de torque, que atua no fluxo do entreferro através da corrente de magnetização (20).

Juntamente com o conceito de vetor espiral Yamamura aplica o método das componentes simétricas (21) dando origem ao que este chamou de método da segregação de fase, que consiste em escrever as equações do motor de indução trifásico em termos de uma equação de tensão para o estator e uma equação de tensão para o rotor na forma complexa.

Desde a década de 80 até o presente momento foram realizados alguns estudos para aplicar e avaliar a proposta de Yamamura como constatado em (20) e (22) a (28). É neste contexto que este trabalho está inserido, pois, o conceito de vetor espiral juntamente com o conceito de componente simétrica é aplicado para modelar o motor de indução bifásico simétrico operando sob tensão balanceada e desbalanceada.

O estudo da operação balanceada do motor de indução bifásico simétrico utilizando-se os vetores espirais é realizado para avaliar se a proposta de Yamamura é válida para este caso também, uma vez que o autor, ou algum autor conhecido até o presente momento, não faz menção alguma da aplicação do método para máquina de indução bifásica, neste sentido o presente trabalho é inédito.

Já com relação ao estudo do motor bifásico simétrico, operando sob tensão desbalanceada, este é realizado com intuito também de verificar se a proposta de Yamamura é válida para o caso das componentes simétricas bifásicas e, além disso, para avaliar se há algum novo aspecto resultante desta análise.

Os resultados oriundos da modelagem através de vetores espirais são comparados com os resultados da modelagem através da transformação $dq0$.

Ainda neste capítulo é apresentada uma introdução da teoria do vetor espiral e também o conceito de componentes simétricas aplicado aos sistemas bifásicos.

Os próximos capítulos deste trabalho estão assim estruturados:

- Capítulo 2 – Apresenta toda a modelagem do motor de indução bifásico com a transformação $dq0$;

- Capítulo 3 – Apresenta a modelagem do motor bifásico de indução aplicando os conceitos de vetor espiral e componente simétricas para operação do motor funcionando com tensão balanceada e tensão desbalanceada;
- Capítulo 4 – Apresenta e discute os resultados das simulações realizadas para as duas abordagens (transformação dq0 e vetor espiral);
- Capítulo 5 – Apresenta as conclusões do trabalho juntamente com a proposta de continuidade do mesmo;
- Capítulo 6 – Contém as referências bibliográficas consultadas para realização do trabalho.

1.2 O Vetor Espiral

De maneira geral circuitos e máquinas elétricas podem ser modelados por equações diferenciais. As soluções destas equações podem ser escritas em termos de funções exponenciais complexas temporais, ou seja:

$$i = Ae^{\delta t}, \text{ com } \delta = -\eta + j\omega \text{ e } \eta \geq 0 \quad (1.1).$$

Quando δ é complexo, como na equação (1.1), com a evolução do tempo i toma a forma de uma espiral no plano complexo como mostra a figura 1.1. A função que está definida pela equação (1.1) é chamada de **vetor espiral** e o valor da constante A é igual ao valor de $i(t)$ no instante t igual a zero. A função definida em (1.1) pode ser usada como uma entidade que pode representar correntes e tensões (18) e (19).

Figura 1.1 – Vetor espiral no plano complexo.

Para exemplificar a utilização do vetor espiral na solução de equações diferenciais será resolvida como exemplo uma equação diferencial de segunda ordem dada por:

$$a \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + b \cdot \frac{di}{dt} + c \cdot i = v \quad (1.2).$$

Seja v a tensão dada por:

$$v = \sqrt{2}|V|e^{j(\omega t + \phi)} = \sqrt{2}Ve^{j\omega t} = \sqrt{2}\dot{V} \quad (1.3).$$

A equação (1.3) é um vetor espiral com $\eta = 0$, formando assim, uma trajetória circular no plano complexo. O vetor espiral com $\eta = 0$ será chamado **vetor circular**.

De (1.3) vem que $\dot{V} = \frac{v}{\sqrt{2}} = Ve^{j\omega t}$ (vetor circular) e $|V|e^{j\phi}$ é um **fasor**.

Seja a solução da equação (1.2) dada pelo vetor espiral:

$$i = Ae^{\delta t} \quad (1.4).$$

Em regime permanente $\delta = j\omega$, portanto, i é um vetor circular.

Como $\frac{di}{dt} = \frac{d(Ae^{\delta t})}{dt} = \frac{d(Ae^{j\omega t})}{dt} = Ae^{j\omega t} j\omega = j\omega \cdot i$ e $\frac{d^2 i}{dt^2} = (j\omega)^2 \cdot i$, portanto da

equação (1.2) é possível escrever que:

$$a \cdot (j\omega)^2 \cdot i + b \cdot j\omega \cdot i + c \cdot i = \sqrt{2}|V|e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \left[a \cdot (j\omega)^2 + b \cdot j\omega + c \right] \cdot i = \sqrt{2}|V|e^{j(\omega t + \phi)},$$

portanto a corrente de regime permanente i_s é dada por:

$$i_s = \frac{\sqrt{2}|V|}{(c - a\omega^2) + j\omega b} e^{j(\omega t + \phi)} = \sqrt{2} \cdot I e^{j\omega t} = \sqrt{2} \cdot \dot{I} \quad (1.5).$$

$$\text{Com } I = \frac{|V|}{(c - a\omega^2) + j\omega b} e^{j\phi}, \quad \dot{I} = I e^{j\omega t} = \frac{|V|e^{j\phi}}{(c - a\omega^2) + j\omega b} e^{j\omega t}, \quad \dot{I} = \frac{i_s}{\sqrt{2}}.$$

Para encontrar o termo transiente da corrente basta inserir a equação (1.4) na equação (1.2) e igualar a zero, portanto:

$$a \cdot \frac{d^2(Ae^{\delta t})}{dt^2} + b \cdot \frac{d(Ae^{\delta t})}{dt} + c \cdot (Ae^{\delta t}) = 0 \Rightarrow a\delta Ae^{\delta t} \frac{d(e^{\delta t})}{dt} + b\delta Ae^{\delta t} + cAe^{\delta t} = 0$$

$$a\delta^2 Ae^{\delta t} + b\delta Ae^{\delta t} + cAe^{\delta t} = 0 \Rightarrow a\delta^2 + b\delta + c = 0$$

(1.6).

A equação (1.6) possui duas raízes características dadas por $\delta_1, \delta_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

portanto o termo transiente da corrente é escrito em função de dois vetores espirais, ou seja:

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \quad (1.7).$$

A solução geral é dada pela soma de (1.5) e (1.7), logo:

$$i = i_s + i_t = \frac{\sqrt{2}|V|}{(c - a\omega^2) + j\omega b} e^{j(\omega t + \phi)} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \quad (1.8).$$

A_1 e A_2 são constantes arbitrárias que devem ser determinadas através das condições iniciais. Na equação todos os termos, tanto os de regime permanente quanto os de transiente,

são vetores espirais. O termo de regime permanente i_s é um vetor circular, ou seja, um vetor espiral com $\eta = 0$.

Quando as variáveis de estado são expressas em termos de vetores espirais, tanto a resposta de regime permanente quanto a resposta transiente, podem ser tratadas de maneira unificada como mostrado em (18) e (19).

Para as soluções de regime permanente $\frac{d}{dt} = p$ torna-se $j\omega$ e para as soluções transientes p torna-se δ . Para a integração $1/p$ torna-se $1/j\omega$ e $1/\delta$ respectivamente.

Para circuitos de parâmetros concentrados e constantes seu equacionamento pode ser escrito de maneira genérica como:

$$i = \frac{A(p)}{B(p)} \cdot v \quad (1.9).$$

Na equação (1.9) $A(p)$ e $B(p)$ são polinômios em p . Quando a tensão de entrada v é um vetor circular como o da equação (1.3) a solução de regime permanente da equação (1.9) é dada por;

$$i_s = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \cdot \sqrt{2} \cdot v e^{j\omega t} = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \cdot \sqrt{2} \cdot \dot{V} \quad (1.10).$$

Na equação (1.10) $B(j\omega) / A(j\omega)$ é a impedância CA nos terminais de entrada. A equação característica de (1.9) é dada por:

$$B(p) = 0 \quad (1.11).$$

Considerando as raízes características da equação (1.11) dadas por $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ a solução transiente da equação (1.9) é dada por:

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \dots + A_n e^{\delta_n t} \quad (1.12).$$

Portanto, a solução geral de (1.9) é:

$$i = i_s + i_t = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \sqrt{2} |V| e^{j\omega t} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \dots + A_n e^{\delta_n t} \quad (1.13).$$

Quando o termo forçante v da equação (1.9) é um vetor espiral da forma

$$v = \sqrt{2}|V|e^{\delta t}, \quad \delta = -\eta + j\omega \quad (1.14),$$

a solução geral da equação (1.9) é dada por:

$$i = i_s + i_t = \frac{A(\delta)}{B(\delta)}v + A_1e^{\delta_1 t} + A_2e^{\delta_2 t} + \dots + A_ne^{\delta_n t} \quad (1.15).$$

A equação (1.15) é uma generalização da solução dada pela equação (1.13).

1.3 Componentes Simétricas Bifásicas

Um motor de indução polifásico está operando sob condição desbalanceada quando as tensões aplicadas ao estator não constituem um conjunto polifásico simétrico, ou quando os enrolamentos do estator ou rotor não são simétricos relativamente às fases. Neste item será apresentado o conceito de componentes simétricas aplicado à máquina de indução bifásica simétrica operando sob tensão desbalanceada.

Supondo um sistema bifásico de tensões, $\dot{V}_a$ e $\dot{V}_b$, desbalanceadas que pode ser decomposto em dois sistemas de tensões bifásicas balanceadas, um de sequência positiva, componente simétrica de sequência positiva, e outro de sequência negativa, componente simétrica de sequência negativa, é possível escrever que as equações (1.16) e (1.7) de acordo com (29) e (30):

$$\dot{V}_a = \dot{V}_a^+ + \dot{V}_a^- \quad (1.16),$$

$$\dot{V}_b = \dot{V}_b^+ + \dot{V}_b^- \quad (1.17).$$

Sabendo-se que a sequência de fases positiva e negativa giram em sentidos contrários e que a fase a está a 90 graus da fase b é possível escrever as equações (1.16) e (1.17) como:

$$\dot{V}_a = \dot{V}_a^+ + \dot{V}_a^- \quad (1.18),$$

$$\dot{V}_b = -j\dot{V}_a^+ + j\dot{V}_a^- \quad (1.19).$$

Desta maneira o motor de indução bifásico pode ser alimentado por um conjunto de tensões bifásicas balanceadas como mostrado na figura 1.2.

Figura 1.2 – Representação esquemática da alimentação balanceada para o MIBS através de componentes simétricas.

Então, por superposição as correntes nos enrolamentos podem também ser escritas em termos de componentes simétricas, ou seja:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_a^+ + \dot{I}_a^- \quad (1.20),$$

$$\dot{I}_b = -j\dot{I}_a^+ + j\dot{I}_a^- \quad (1.21).$$

Freqüentemente é necessário determinar as componentes simétricas das tensões e correntes em termos das tensões e correntes especificadas, ou seja:

$$\dot{V}_a^+ = \frac{1}{2} \left(\dot{V}_a + j\dot{V}_b \right) \quad (1.22),$$

$$\dot{V}_a^- = \frac{1}{2} \left(\dot{V}_a - j\dot{V}_b \right) \quad (1.23).$$

A figura 1.3 mostra os diagramas fasoriais das equações (1.22), (1.23), (1.18) e (1.19).

Figura 1.3 – Diagramas fasoriais das componentes simétricas bifásicas.

Os resultados mostrados nas equações (1.18) e (1.19) podem ser interpretados fisicamente como se cada fase do motor, que está operando sob tensão desbalanceada fosse alimentada por um conjunto de tensões de seqüência positiva e negativa balanceadas. O conjunto de seqüência positiva em cada fase, $\dot{V}_a^+$ e $-j\dot{V}_a^+$, pode ser considerado o responsável pela produção do campo magnético girante que interage com o rotor para produzir um torque de seqüência positiva T_{el}^+ . Da mesma forma o conjunto de tensões de seqüência negativa, $\dot{V}_a^-$ e $j\dot{V}_a^-$, é responsável pela produção de um campo magnético girante, na direção contrária ao de seqüência positiva, que interage com o rotor para produzir

um torque de seqüência negativa T_{el}^- . O torque resultante é a diferença entre os torques de seqüência positiva e de seqüência negativa (29).

A teoria sobre componentes simétricas foi aqui apresentada em termos fasoriais, entretanto, será mostrada no capítulo 3 a sua aplicação juntamente com os vetores espirais para analisar o torque eletromagnético do motor de indução bifásico simétrico.

Capítulo 2

Modelagem do Motor de Indução Bifásico Utilizando a Transformação dq0

2.1 Introdução

Os modelos utilizados em acionamentos elétricos utilizam os conceitos de circuitos acoplados para a modelagem da máquina de indução bifásica, portanto, essa passa a ser representada por equações elétricas constituídas de auto-indutâncias, indutâncias mútuas e resistências. Entretanto, essa modelagem não é conveniente, pois as equações diferenciais resultantes são lineares com coeficientes variantes no tempo e, portanto, de difícil manipulação devido à dependência das mesmas do ângulo θ do rotor com relação ao estator. Para contornar a dependência das equações de θ é utilizada a teoria dos eixos de referências que se baseia em transformações ortogonais. Uma transformação ortogonal bastante conhecida, também muito utilizada em modelagem de máquinas elétricas, é a transformação dq0.

Neste capítulo será feito todo o equacionamento da máquina de indução bifásica levando em consideração a assimetria da mesma, pois este é o caso mais geral.

2.2 Equações de Tensão e Torque da Máquina de Indução Bifásica

Antes de iniciar a modelagem matemática da máquina é necessário conhecer um conjunto de hipóteses simplificadoras que facilitam a análise da mesma, porém, não prejudica de forma significativa a precisão dos resultados obtidos. As hipóteses simplificadoras (31) são:

- Os enrolamentos da máquina, que na realidade são distribuídos, são analisados como concentrados nos seus respectivos eixos magnéticos.
- Quando o rotor é do tipo gaiola de esquilo este é tratado como um enrolamento simétrico com o mesmo número de fases do enrolamento do estator.
- As auto-indutâncias de rotor e estator são consideradas de valor constante e independente da posição relativa entre os mesmos.
- Os elementos elétricos podem ser tratados como circuitos lineares.
- Como o rotor gira, as indutâncias mútuas entre os elementos de estator e rotor são dependentes da posição relativa entre os mesmos.
- A espessura do entreferro é considerada constante.
- Para simplificar ainda mais a análise matemática os efeitos de perda no núcleo, saturação magnética, efeito pelicular, capacitâncias entre as espiras e a variação da resistência devido à variação de temperatura são ignorados.
- Não há indutâncias mútuas entre as fases 1 e 2 do estator, pois os eixos magnéticos estão em quadratura. Esta mesma consideração é assumida para o rotor.

Os enrolamentos que estão alocados no estator da máquina são dispostos (distribuídos) de forma que a força magneto-motriz se distribua senoidalmente ao longo do estator.

A figura 2.1 representa a máquina de indução bifásica de dois pólos de maneira esquemática simplificada, pois do ponto de vista construtivo existe um estator (estrutura fixa onde os enrolamentos são alocados de maneira conveniente) e um rotor (estrutura girante que pode ou não conter enrolamentos).

Figura 2.1 – Representação da máquina de indução bifásica.

$R_{E_1} \equiv$ Resistência do enrolamento da fase 1 do estator.

$L_{E_1} \equiv$ Auto-indutância do enrolamento da fase 1 do estator.

$R_{E_2} \equiv$ Resistência do enrolamento da fase 2 do estator.

$L_{E_2} \equiv$ Auto-indutância do enrolamento da fase 2 do estator.

$R_R \equiv$ Resistência do rotor por fase.

$L_R \equiv$ Auto-indutância do rotor por fase.

De maneira geral, as máquinas de indução possuem rotor do tipo gaiola de esquilo que, grosso modo, é constituído de barras condutoras paralelas, sobre uma superfície cilíndrica, em cujos extremos são curto-circuitadas por dois aros, também condutores, daí outra denominação de rotor em curto-circuito. Este dispositivo está “mergulhado” em um núcleo ferromagnético. Não há acesso elétrico a este enrolamento de rotor, apenas acesso

eletromagnético. Na figura 2.1 os índices E_1 e E_2 dos eixos estão relacionados aos eixos magnéticos que representam os enrolamentos contidos no estator e os índices R_1 e R_2 estão relacionados aos eixos magnéticos que representam os enrolamentos (reais ou fictícios) no rotor.

Devido ao movimento do rotor, há um deslocamento angular entre os eixos magnéticos do rotor e estator, de maneira que os fluxos concatenados mútuos variam, portanto, as indutâncias mútuas são dependentes da posição relativa entre rotor e estator. A indutância mútua possui valor máximo positivo quando os eixos magnéticos estão alinhados e no mesmo sentido. Possui valor máximo negativo quando os eixos magnéticos estão alinhados e em sentidos contrários e o fluxo concatenado mútuo é nulo quando os eixos magnéticos estão defasados de $\pi/2$, ou seja:

Se $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi \rightarrow$ indutância mútua entre estator (E) e rotor (R) é máxima com valor positivo.

Se $\theta = \pm\pi \rightarrow$ indutância mútua entre estator (E) e rotor (R) é máxima com valor negativo.

Portanto, a indutância mútua entre os enrolamentos do estator e do rotor pode ser escrita, com boa aproximação como na equação (2.1).

$$M_{ER}(\theta) = M_{\max} \cos(\theta) \quad (2.1).$$

$M_{ER} \equiv$ indutância mútua entre enrolamentos de estator e rotor.

$M_{\max} \equiv$ valor máximo da indutância mútua entre enrolamentos de estator e rotor.

O fluxo total nos enrolamentos do estator é a soma do fluxo produzido pelo próprio enrolamento mais o fluxo produzido pelo enrolamento do rotor, desta maneira a figura 2.1 representa as bobinas concentradas sobre os eixos magnéticos da máquina bifásica. A partir da figura 2.1 é possível escrever as seguintes equações para as indutâncias mútuas:

$$M_{E_1 R_1} = M_{R_1 E_1} = M_1 \cos(\theta) \quad (2.2),$$

$$M_{E_1R_2} = M_{R_2E_1} = M_1 \cos(\theta + \pi/2) = -M_1 \sin(\theta) \quad (2.3),$$

$$M_{E_2R_1} = M_{R_1E_2} = M_2 \cos(\theta - \pi/2) = M_2 \sin(\theta) \quad (2.4),$$

$$M_{E_2R_2} = M_{R_2E_2} = M_2 \cos(\theta) \quad (2.5).$$

$M_1 \equiv$ Valor máximo da indutância mútua entre a fase 1 do estator e o rotor.

$M_2 \equiv$ Valor máximo da indutância mútua entre a fase 2 do estator e o rotor.

As tensões nos terminais da máquina são dadas pelas quedas das tensões nos elementos resistivos e pela lei de Faraday. Logo, é possível escrever de maneira geral que:

$$v_{Ki} = R_{Ki} i_{Ki} + \frac{d(\lambda_{Ki})}{dt} \quad (2.6).$$

$v_{Ki} \equiv$ Tensão total do i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.

$R_{Ki} \equiv$ Resistência do i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.

$i_{Ki} \equiv$ Corrente que circula no i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.

$\lambda_{Ki} \equiv$ Fluxo magnético total concatenado pelo i-ésimo enrolamento associado ao K-ésimo eixo magnético da máquina.

O índice i da equação (2.6) está relacionado com o número de enrolamentos, sejam eles reais ou fictícios, associados a uma determinada diferença de potencial aplicada em seus terminais. Além disso, o fluxo total concatenado pode ser escrito como

$\lambda_{Ki} = L_{Ki} \cdot i_{Ki} + \sum_{j \neq i} M_{ij} \cdot i_{Kj}$, ou seja, o fluxo total é a soma do fluxo concatenado que enlaça a

bobina K_i devido à corrente que flui por esta $(L_{Ki} i_{Ki})$ mais o somatório dos fluxos

concatenados devido às correntes que fluem nas outras bobinas adjacentes $\left(\sum_{j \neq i} M_{ij} \cdot i_{Kj} \right)$,

logo:

$$v_{Ki} = R_{Ki} \cdot i_{Ki} + \frac{d(L_{Ki} \cdot i_{Ki})}{dt} + \sum_{j \neq i} \frac{d(M_{ij} \cdot i_{Kj})}{dt} \quad (2.7).$$

$L_{Ki} \equiv$ Auto-indutância do i -ésimo enrolamento do estator associado ao K -ésimo eixo magnético da máquina.

$M_{ij} \equiv$ Indutância mútua entre os as fases de estator e rotor. Se o índice i refere-se ao estator o índice j refere-se ao rotor e vice-versa.

As tensões nos terminais E_1 , E_2 , R_1 e R_2 da máquina são dadas pela aplicação da equação (2.6), ou seja:

$$v_{E_1} = R_{E_1} \cdot i_{E_1} + \frac{d(\lambda_{E_1})}{dt} \quad (2.8),$$

$$v_{E_2} = R_{E_2} \cdot i_{E_2} + \frac{d(\lambda_{E_2})}{dt} \quad (2.9),$$

$$v_{R_1} = R_R \cdot i_{R_1} + \frac{d(\lambda_{R_1})}{dt} \quad (2.10),$$

$$v_{R_2} = R_R \cdot i_{R_2} + \frac{d(\lambda_{R_2})}{dt} \quad (2.11).$$

Mas o fluxo relacionado a cada enrolamento é dado por:

$$\lambda_{E_1} = L_{E_1} \cdot i_{E_1} + M_{E_1R_1} \cdot i_{R_1} + M_{E_1R_2} \cdot i_{R_2} + M_{E_1E_2} \cdot i_{E_2} \quad (2.12),$$

$$\lambda_{E_2} = L_{E_2} \cdot i_{E_2} + M_{E_2R_1} \cdot i_{R_1} + M_{E_2R_2} \cdot i_{R_2} + M_{E_2E_1} \cdot i_{E_1} \quad (2.13),$$

$$\lambda_{R_1} = L_R \cdot i_{R_1} + M_{R_1E_1} \cdot i_{E_1} + M_{R_1E_2} \cdot i_{E_2} + M_{R_1R_2} \cdot i_{R_2} \quad (2.14),$$

$$\lambda_{R_2} = L_R \cdot i_{R_2} + M_{R_2E_1} \cdot i_{E_1} + M_{R_2E_2} \cdot i_{E_2} + M_{R_2R_1} \cdot i_{R_1} \quad (2.15).$$

Substituindo as equações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11), respectivamente, e escrevendo na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_{E_1} \\ v_{E_2} \\ v_{R_1} \\ v_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & pM_{E_1R_1} & pM_{E_1R_2} \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & pM_{E_2R_1} & pM_{E_2R_2} \\ pM_{R_1E_1} & pM_{R_1E_2} & R_R + pL_R & 0 \\ pM_{R_2E_1} & pM_{R_2E_2} & 0 & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_1} \\ i_{E_2} \\ i_{R_1} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.16).$$

Na expressão (2.16) $p = d/dt$. Note que os termos cujos eixos estão deslocados de $\theta = 90^\circ$ tornaram-se zero, pois não há acoplamento magnético entre os mesmos. Levando em conta (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} v_{E_1} \\ v_{E_2} \\ v_{R_1} \\ v_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & pM_1\cos(\theta) & -pM_1\sin(\theta) \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & pM_2\sin(\theta) & pM_2\cos(\theta) \\ pM_1\cos(\theta) & pM_2\sin(\theta) & R_R + pL_R & 0 \\ -pM_1\sin(\theta) & pM_2\cos(\theta) & 0 & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_1} \\ i_{E_2} \\ i_{R_1} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.17).$$

Desenvolvendo cada linha da equação matricial (2.17) com relação às derivadas vem que:

$$v_{E_1} = R_{E_1} i_{E_1} + L_{E_1} \frac{di_{E_1}}{dt} + M_1\cos(\theta) \frac{di_{R_1}}{dt} - M_1\sin(\theta) \frac{di_{R_2}}{dt} - M_1 [i_{R_1}\sin(\theta) + i_{R_2}\cos(\theta)] \frac{d\theta}{dt} \quad (2.18),$$

$$v_{E_2} = R_{E_2} i_{E_2} + L_{E_2} \frac{di_{E_2}}{dt} + M_2\sin(\theta) \frac{di_{R_1}}{dt} + M_2\cos(\theta) \frac{di_{R_2}}{dt} + M_2 [i_{R_1}\cos(\theta) - i_{R_2}\sin(\theta)] \frac{d\theta}{dt} \quad (2.19),$$

$$v_{R_1} = R_R i_{R_1} + L_R \frac{di_{R_1}}{dt} + M_1\cos(\theta) \frac{di_{E_1}}{dt} + M_2\sin(\theta) \frac{di_{E_2}}{dt} - [M_1 i_{E_1} \sin(\theta) - M_2 i_{E_2} \cos(\theta)] \frac{d\theta}{dt} \quad (2.20),$$

$$v_{R_2} = R_R i_{R_2} + L_R \frac{di_{R_2}}{dt} - M_1\sin(\theta) \frac{di_{E_1}}{dt} + M_2\cos(\theta) \frac{di_{E_2}}{dt} - [M_1 i_{E_1} \cos(\theta) + M_2 i_{E_2} \sin(\theta)] \frac{d\theta}{dt} \quad (2.21).$$

Os primeiros termos das equações (2.18) a (2.21) representam as quedas de tensão nas resistências dos enrolamentos que modelam a máquina. Já os segundos, terceiros e quartos representam as tensões geradas nos enrolamentos causadas pela variação das correntes e são denominadas tensões **variacionais**. Por fim, os quintos termos são as tensões geradas nos enrolamentos quando há movimento relativo entre eles e são denominadas tensões **rotacionais** (32).

Para completar a modelagem da máquina só resta deduzir a expressão do torque eletromagnético e relacionar este com as grandezas mecânicas da máquina.

O torque total produzido pela máquina de indução é soma dos torques de relutância e excitação (32), como o entreferro é praticamente constante só existe contribuição do torque de excitação na expressão do torque eletromagnético, portanto, a equação para o torque é:

$$T_{el} = -M_1 i_{E_1} [i_{R_1} \sin(\theta) + i_{R_2} \cos(\theta)] + M_2 i_{E_2} [i_{R_1} \cos(\theta) - i_{R_2} \sin(\theta)] \quad (2.22).$$

A equação mecânica do sistema é dada por:

$$J \frac{d\omega_{mec}}{dt} = T_{el} - K_d \omega_{mec} - T_c \quad (2.23).$$

$J \equiv$ momento de inércia total do sistema.

$K_d \equiv$ coeficiente de atrito dinâmico.

$T_c \equiv$ torque de carga aplicado à máquina.

$T_{el} \equiv$ torque eletromagnético produzido pela máquina.

$\omega_{mec} \equiv$ velocidade angular mecânica do eixo da máquina.

Do equacionamento exposto nota-se que a dependência da indutância mútua com relação ao deslocamento angular do rotor provoca dificuldades em analisar a máquina. Para contornar esta dificuldade utiliza-se a teoria de referencial de eixos, onde todas as variáveis são transpostas para um único referencial (estator, campo girante do estator, rotor, etc.).

2.3 Equações da Máquina de Indução Bifásica usando a Transformação dq0: fluxos, tensões e torque.

No item anterior foram obtidas as equações que descrevem o comportamento da máquina de indução bifásica, entretanto, estas possuem a desvantagem de serem escritas em função da posição relativa do rotor. Para contornar esta dificuldade é aplicada a transformação dq0. A idéia da transformação dq0 é escrever as equações da máquina que se deseja analisar em um referencial de eixos conveniente, como por exemplo, o eixo do estator, do rotor ou mesmo o campo girante.

A figura 2.2 apresenta em termos gráficos a transformação dq0 com referencial no estator.

Figura 2.2 – Representação gráfica da transformação dq0 para o referencial no estator.

Serão aqui deduzidas as equações da máquina bifásica com o referencial no estator como mostra a figura 2.2. Portanto, para transpor as correntes, tensões e fluxos do rotor para o estator, basta aplicar um giro de θ graus no sentido horário da figura 2.2 a.

As equações (2.12) a (2.15) do item anterior serão transpostas para o referencial do estator, portanto:

$$\lambda_{E_d} = \lambda_{E_1} = L_{E_1} \cdot i_{E_1} + M_{E_1 R_1} \cdot i_{R_1} + M_{E_1 R_2} \cdot i_{R_2} + M_{E_1 E_2} \cdot i_{E_2} \quad (2.24).$$

Como a equação (2.24) depende das correntes de estator e rotor é necessário escrevê-las em termos da transformação dq0.

$$i_{E_1} = i_{E_d} \quad (2.25),$$

$$i_{E_2} = i_{E_q} \quad (2.26),$$

$$i_{R_1} = i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta) \quad (2.27),$$

$$i_{R_2} = -i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta) \quad (2.28).$$

Substituindo as equações (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) na equação (2.24) vem que:

$$\lambda_{E_d} = L_{E_1} \cdot i_{E_d} + M_{E_1 R_1} \cdot [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] + M_{E_1 R_2} \cdot [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)] + M_{E_1 E_2} \cdot i_{E_q} \quad (2.29).$$

Lembrando as equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) e combinando estas com a equação (2.29) e desenvolvendo é possível escrever:

$$\lambda_{E_d} = L_{E_1} \cdot i_{E_d} + M_1 \cdot i_{R_d} \quad (2.30).$$

Para a equação (2.13), analogamente, vem:

$$\lambda_{E_q} = L_{E_2} \cdot i_{E_q} + M_2 \cdot i_{R_q} \quad (2.31).$$

Para encontrar os fluxos λ_{R_d} e λ_{R_q} basta aplicar a transformação que “leva” os fluxos λ_{R_1} e λ_{R_2} para o referencial do estator, ou seja:

$$\lambda_{R_d} = \lambda_{R_1} \cos(\theta) - \lambda_{R_2} \sin(\theta) \quad (2.32).$$

Substituindo (2.27) e (2.28) em (2.32) e desenvolvendo os termos vem que:

$$\lambda_{R_d} = i_{R_d} L_R \cos^2(\theta) + i_{R_q} L_R \sin(\theta) \cos(\theta) + i_{E_d} M_1 \cos^2(\theta) + i_{E_q} M_2 \sin(\theta) \cos(\theta) + i_{R_d} L_R \sin^2(\theta) - i_{R_q} L_R \sin(\theta) \cos(\theta) + i_{E_d} M_1 \sin^2(\theta) - i_{E_q} M_2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.33),$$

$$\lambda_{R_d} = L_R \cdot i_{R_d} + M_1 \cdot i_{E_d} \quad (2.34).$$

Para o fluxo λ_{R_q} o desenvolvimento é o mesmo que foi feito para obtenção da equação (2.34), ou seja, é necessário substituir as equações (2.27) e (2.28) na equação (2.35), desta forma é possível escrever que:

$$\lambda_{R_q} = \lambda_{R_1} \sin(\theta) + \lambda_{R_2} \cos(\theta) \quad (2.35),$$

$$\lambda_{R_q} = \left(L_R \cdot i_{R_1} + M_{R_1 E_1} \cdot i_{E_1} + M_{R_1 E_2} \cdot i_{E_2} \right) \cdot \sin(\theta) + \left(L_R \cdot i_{R_2} + M_{R_2 E_1} \cdot i_{E_1} + M_{R_2 E_2} \cdot i_{E_2} \right) \cdot \cos(\theta) \quad (2.36),$$

$$\lambda_{R_q} = L_R \cdot i_{R_q} + M_2 \cdot i_{E_q} \quad (2.37).$$

Reescrevendo as equações (2.30), (2.31), (2.34) e (2.37) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{E_d} \\ \lambda_{E_q} \\ \lambda_{R_d} \\ \lambda_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{E_1} & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & L_{E_2} & 0 & M_2 \\ M_1 & 0 & L_R & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_d} \\ i_{E_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (2.38).$$

Com a equação matricial (2.38) ficam determinados os fluxos no referencial do estator.

Serão obtidas, agora, as equações das tensões no referencial do estator através da transformação dq0.

Foi demonstrado anteriormente (equação (2.18)) que:

$$v_{E_1} = R_{E_1} i_{E_1} + L_{E_1} \frac{di_{E_1}}{dt} + M_1 \cos(\theta) \frac{di_{R_1}}{dt} - M_1 \sin(\theta) \frac{di_{R_2}}{dt} - M_1 \left[i_{R_1} \sin(\theta) + i_{R_2} \cos(\theta) \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (2.39).$$

Lembrando as equações (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e que $v_{E_1} = v_{E_d}$ é possível escrever a equação (2.39) como:

$$\begin{aligned}
v_{E_d} = & R_{E_1} i_{E_d} + L_{E_1} \frac{di_{E_d}}{dt} + M_1 \cos(\theta) \frac{d}{dt} [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] - \\
& M_1 \sin(\theta) \frac{d}{dt} [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)] - M_1 \sin(\theta) [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] \frac{d\theta}{dt} - \\
& M_1 \cos(\theta) [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)] \frac{d\theta}{dt}
\end{aligned} \quad (2.40).$$

Desenvolvendo-se todos os termos de (2.40) é possível escrever esta como:

$$v_{E_d} = R_{E_1} i_{E_d} + L_{E_1} \frac{di_{E_d}}{dt} + M_1 \frac{di_{R_d}}{dt} \quad (2.41).$$

Para v_{E_q} o equacionamento é análogo ao anterior, portanto:

$$v_{E_q} = R_{E_2} i_{E_q} + L_{E_2} \frac{di_{E_q}}{dt} + M_2 \frac{di_{R_q}}{dt} \quad (2.42).$$

Falta ainda encontrar v_{R_d} e v_{R_q} . Da mesma forma que para o fluxo λ_{R_d} a tensão

v_{R_d} pode ser escrita como:

$$v_{R_d} = v_{R_1} \cos(\theta) - v_{R_2} \sin(\theta) \quad (2.43).$$

Substituindo v_{R_1} e v_{R_2} (equações (2.20) e (2.21)) em (2.43) e substituindo nestas as equações (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) e desenvolvendo os termos encontra-se:

$$\begin{aligned}
v_{R_d} = & R_R [i_{R_d} \cos^2(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta) \cos(\theta)] + L_R \cos(\theta) \frac{d}{dt} [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] + \\
& M_1 \cos^2(\theta) \frac{di_{E_d}}{dt} + M_2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{di_{E_q}}{dt} - M_1 i_{E_d} \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} + \\
& M_2 i_{E_q} \cos^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} - R_R [-i_{R_d} \sin^2(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta) \sin(\theta)] - \\
& L_R \sin(\theta) \frac{d}{dt} [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)] + M_1 \sin^2(\theta) \frac{di_{E_d}}{dt} + M_1 \sin^2(\theta) \frac{di_{E_d}}{dt} - \\
& M_2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{di_{E_q}}{dt} + M_1 i_{E_d} \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} + M_2 i_{E_q} \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{dt}
\end{aligned} \quad (2.44).$$

Desenvolvendo-se e simplificando os termos de (2.44) encontra-se:

$$v_{R_d} = M_1 \frac{di_{E_d}}{dt} + M_2 \frac{d\theta}{dt} i_{E_q} + R_R i_{R_d} + L_R \frac{di_{R_d}}{dt} + L_R \frac{d\theta}{dt} i_{R_q} \quad (2.45).$$

Analogamente ao fluxo λ_{R_q} é possível escrever v_{R_q} como:

$$v_{R_q} = v_{R_1} \sin(\theta) + v_{R_2} \cos(\theta) \quad (2.46).$$

Realizando o mesmo procedimento que foi desenvolvido para encontrar (2.45) é possível escrever v_{R_q} como:

$$v_{R_q} = -M_1 \frac{d\theta}{dt} i_{E_d} + M_2 \frac{di_{E_q}}{dt} - L_R \frac{d\theta}{dt} i_{R_d} + R_R i_{R_q} + L_R \frac{di_{R_q}}{dt} \quad (2.47).$$

Escrevendo as equações (2.41), (2.42), (2.45) e (2.47) na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_{E_d} \\ v_{E_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & pM_1 & 0 \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & 0 & pM_2 \\ pM_1 & M_2 \dot{\theta} & R_R + pL_R & L_R \dot{\theta} \\ -M_1 \dot{\theta} & pM_2 & -L_R \dot{\theta} & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_d} \\ i_{E_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \Rightarrow [v_{ER}] = [Z] \cdot [i_{ER}] \quad (2.48).$$

Para completar a modelagem em termos da transformação dq0 é necessário deduzir a equação do torque eletromagnético em função das correntes i_{E_d} , i_{E_q} , i_{R_d} e i_{R_q} . Foi deduzido anteriormente que:

$$T_{el} = -i_{E_1} i_{R_1} M_1 \sin(\theta) - i_{E_2} i_{R_2} M_1 \cos(\theta) + i_{E_2} i_{R_1} M_2 \cos(\theta) - i_{E_2} i_{R_2} M_2 \sin(\theta) \quad (2.49).$$

Substituindo as equações [21], [22], [23] e [24] na equação [37] é possível escrever que:

$$T_{el} = -i_{E_d} M_1 \sin(\theta) [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] - i_{E_d} M_1 \cos(\theta) [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)] + i_{E_q} M_2 \cos(\theta) [i_{R_d} \cos(\theta) + i_{R_q} \sin(\theta)] - i_{E_q} M_2 \sin(\theta) [-i_{R_d} \sin(\theta) + i_{R_q} \cos(\theta)]$$

$$T_{el} = -M_1 i_{E_d} i_{R_q} + M_2 i_{E_q} i_{R_d} \quad (2.50).$$

Até aqui nenhuma variável foi referida do rotor para o estator. Entretanto, quando são desenvolvidos circuitos equivalentes de máquinas elétricas é comum referir as variáveis de rotor para o estator (15), (16) e (32).

Se for considerado que uma máquina de indução bifásica possui número diferente de espiras para cada enrolamento do estator é conveniente referir as variáveis do eixo q do rotor à fase 2 do estator com N_2 espiras e as variáveis do eixo d do rotor à fase 1 do estator com N_1 espiras.

Para referir as variáveis do rotor ao estator define-se:

$$\begin{bmatrix} v_{E_d}^* \\ v_{E_q}^* \\ v_{R_d}^* \\ v_{R_q}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1/N_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2/N_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{E_d} \\ v_{E_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} \Rightarrow [v_{ER}^*] = [B] \cdot [v_{ER}] \quad (2.51),$$

$$\begin{bmatrix} i_{E_d}^* \\ i_{E_q}^* \\ i_{R_d}^* \\ i_{R_q}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_R/N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_R/N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_d} \\ i_{E_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \Rightarrow [i_{ER}^*] = [B]^{-1} \cdot [i_{ER}] \quad (2.52).$$

Como $[v_{ER}] = [Z] \cdot [i_{ER}]$, $[v_{ER}^*] = [B] \cdot [v_{ER}]$ e $[i_{ER}^*] = [B]^{-1} \cdot [i_{ER}]$ é possível escrever que $[B]^{-1} \cdot [v_{ER}^*] = [Z] \cdot [B] \cdot [i_{ER}^*]$, sendo esta pré-multiplicada por $[B]$ vem que:

$$[B] \cdot [B]^{-1} \cdot [v_{ER}^*] = [B] \cdot [Z] \cdot [B] \cdot [i_{ER}^*] \quad (2.53),$$

$$[v_{ER}^*] = [B] \cdot [Z] \cdot [B] \cdot [i_{ER}^*] \quad (2.54).$$

Desenvolvendo $[B] \cdot [Z] \cdot [B]$ de (2.54) encontra-se a matriz mostrada em (2.55).

$$[B][Z][B] = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & \frac{N_1}{N_R} pM_1 & 0 \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & 0 & \frac{N_2}{N_R} pM_2 \\ \frac{N_1}{N_R} pM_1 & \frac{N_1}{N_R} M_2 \dot{\theta} & \left(\frac{N_1}{N_R}\right)^2 (R_R + pL_R) & \frac{N_1 N_2}{(N_R)^2} L_R \dot{\theta} \\ -\frac{N_2}{N_R} M_1 \dot{\theta} & \frac{N_2}{N_R} pM_2 & -\frac{N_1 N_2}{(N_R)^2} L_R \dot{\theta} & \left(\frac{N_2}{N_R}\right)^2 (R_R + pL_R) \end{bmatrix} \quad (2.55).$$

Definindo-se:

$$m_1 = \frac{N_1}{N_R} M_1; m_2 = \frac{N_2}{N_R} M_2; R_{R_1} = \left(\frac{N_1}{N_R} \right)^2 R_R; L_{R_1} = \left(\frac{N_1}{N_R} \right)^2 L_R; R_{R_2} = \left(\frac{N_2}{N_R} \right)^2 R_R;$$

$$L_{R_2} = \left(\frac{N_2}{N_R} \right)^2 L_R \text{ e substituindo estas nos elementos em (2.55) vem que:}$$

$$[B][Z][B] = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & pm_1 & 0 \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & 0 & pm_2 \\ pm_1 & \frac{N_1}{N_2} m_2 \dot{\theta} & R_{R_1} + pL_{R_1} & \frac{N_1}{N_2} L_{R_2} \dot{\theta} \\ -\frac{N_2}{N_1} m_1 \dot{\theta} & pm_2 & -\frac{N_2}{N_1} L_{R_1} \dot{\theta} & R_{R_2} + pL_{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.56).$$

Até este ponto a modelagem da máquina foi feita considerando esta com dois pólos (um par de pólos). De agora em diante a modelagem será generalizada para z_p pares de pólos. Para isto basta lembrar que:

$\theta_{\text{elétricos}} = z_p \cdot \theta_{\text{mecânicos}}$, portanto, $\dot{\theta} = z_p \cdot \omega_{\text{mec}}$. ω_{mec} é a velocidade mecânica do rotor e $\dot{\theta}$ é dado em rad.el/s.

Será definido também que $N = N_1/N_2$ e considerando o rotor como gaiola de esquilo é possível escrever a equação (2.54) como:

$$\begin{bmatrix} v_{E_d} \\ v_{E_q} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{E_1} + pL_{E_1} & 0 & pm_1 & 0 \\ 0 & R_{E_2} + pL_{E_2} & 0 & pm_2 \\ pm_1 & N \cdot m_2 \cdot z_p \cdot \omega_{\text{mec}} & R_{R_1} + pL_{R_1} & N \cdot L_{R_2} \cdot z_p \cdot \omega_{\text{mec}} \\ -\frac{1}{N} m_1 \cdot z_p \cdot \omega_{\text{mec}} & pm_2 & -\frac{1}{N} L_{R_1} \cdot z_p \cdot \omega_{\text{mec}} & R_{R_2} + pL_{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{E_d} \\ i_{E_q} \\ i_{R_d}^* \\ i_{R_q}^* \end{bmatrix} \quad (2.57).$$

Basta agora escrever a equação do torque eletromagnético. Já foi demonstrado que $T_{\text{el}} = -M_1 i_{E_d} i_{R_q} + M_2 i_{E_q} i_{R_d}$, generalizando para z_p pares de pólos:

$$T_{\text{el}} = z_p \left(-M_1 i_{E_d} i_{R_q} + M_2 i_{E_q} i_{R_d} \right) \quad (2.58).$$

Mas $i_{E_d} = i_{E_d}^*$, $i_{E_q} = i_{E_q}^*$, $i_{R_d} = \frac{N_1}{N_R} i_{R_d}^*$, $i_{R_q} = \frac{N_2}{N_R} i_{R_q}^*$, portanto,

$$T_{el} = z_p \left(-M_1 i_{Ed} \frac{N_2}{N_R} i_{Rq}^* + M_2 i_{Eq} \frac{N_1}{N_R} i_{Rd}^* \right), \text{ mas } m_1 = \frac{N_1}{N_R} M_1 \text{ e } m_2 = \frac{N_2}{N_R} M_2, \text{ ou seja:}$$

$$T_{el} = z_p \left(-m_1 \frac{N_2}{N_1} i_{Ed} i_{Rq}^* + m_2 \frac{N_1}{N_2} i_{Eq} i_{Rd}^* \right) \quad (2.59).$$

As indutâncias mútuas serão as mesmas quando ambas estiverem sob o mesmo referencial desde que o sistema não sature (15), portanto é válida a seguinte relação:

$$\frac{m_2}{N_2^2} = \frac{m_1}{N_1^2} \Rightarrow m_1 = \frac{N_1^2}{N_2^2} m_2, \text{ que substituída na equação (2.59) leva ao resultado}$$

mostrado a seguir.

$$T_{el} = z_p \cdot N \cdot m_2 \cdot (i_{Eq} i_{Rd}^* - i_{Ed} i_{Rq}^*) \quad (2.60).$$

2.4 Representação da Máquina Bifásica Através de Equação de Estado

Para que seja possível simular a dinâmica da máquina de indução bifásica é necessário escrever as equações de tensão, torque eletromagnético e equação mecânica do sistema na forma de variáveis de estado. Reescrevendo a equação (2.57) na forma de variáveis de estado vem que:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{E_d}}{dt} \\ \frac{di_{E_q}}{dt} \\ \frac{di_{R_d}^*}{dt} \\ \frac{di_{R_q}^*}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_{E_1} L_{R_1}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{N.m_1 m_2 z_p \omega_{mec}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{m_1 R_{R_1}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{N.m_1 L_{R_2} z_p \omega_{mec}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} \\ \frac{-m_1 m_2 z_p \omega_{mec}}{N(L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2)} & \frac{-R_{E_2} L_{R_2}}{L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2} & \frac{-m_2 L_{R_1} z_p \omega_{mec}}{N(L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2)} & \frac{m_2 R_{R_2}}{L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2} \\ \frac{m_1 R_{E_1}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{-N.m_2 L_{E_1} z_p \omega_{mec}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{-R_{R_1} L_{E_1}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} & \frac{-N.L_{E_1} L_{R_2} z_p \omega_{mec}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} \\ \frac{m_1 L_{E_2} z_p \omega_{mec}}{N(L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2)} & \frac{m_2 R_{E_2}}{(L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2)} & \frac{L_{E_2} L_{R_1} z_p \omega_{mec}}{N(L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2)} & \frac{-R_{R_2} L_{E_2}}{L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{E_d} \\ i_{E_q} \\ i_{R_d}^* \\ i_{R_q}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_{R_1} v_{E_d}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} \\ \frac{L_{R_2} v_{E_q}}{L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2} \\ \frac{-m_1 v_{E_d}}{L_{E_1} L_{R_1} - m_1^2} \\ \frac{-m_2 v_{E_q}}{L_{E_2} L_{R_2} - m_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.61).$$

A equação mecânica do sistema na forma de variável de estado é escrita como:

$$\frac{d\omega_{mec}}{dt} = \frac{T_{el}}{J} - \frac{K_d \omega_{mec}}{J} - \frac{T_c}{J} \quad (2.62).$$

Se for necessário é possível ainda utilizar $\frac{d\theta}{dt} = z_p \omega_{mec}$ para calcular a posição angular

do rotor.

A equação do torque eletromagnético é dada por:

$$T_{el} = z_p \cdot N \cdot m_2 \cdot (i_{E_q} i_{R_d}^* - i_{E_d} i_{R_q}^*) \quad (2.63).$$

Com as equações (2.61) a (2.63) é possível simular a dinâmica do motor bifásico.

Capítulo 3

Modelagem do Motor de Indução Bifásico Utilizando Vetores Espirais

3.1 Introdução

Para a modelagem do motor de indução bifásico utilizando vetores espirais as hipóteses simplificadoras utilizadas para facilitar a análise da máquina são as mesmas usadas para a modelagem com a transformação $dq0$ descrita no capítulo 2, entretanto, o desenvolvimento que será realizado neste capítulo leva em consideração que a máquina bifásica é simétrica, ou seja, as duas fases do motor possuem o mesmo número de espiras e estão espacialmente defasadas de 90 graus elétricos entre si. Será analisada também neste capítulo a operação do motor bifásico simétrico com tensão desbalanceada, obrigando assim, a ser desenvolvido o conceito de componentes simétricas bifásicas para que seja possível uma análise mais detalhada das componentes de sequência positiva e negativa do torque eletromagnético.

3.2 Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico (MIBS) Através da Teoria dos Vetores Espirais

A figura 3.1 mostra uma representação esquemática do MIBS que será analisado.

Figura 3.1 – Modelo do motor de indução bifásico.

Neste caso será considerado que o número de espiras da fase a do estator é igual ao número de espiras da fase b. Além disso, os enrolamentos das bobinas do estator estão defasados de 90° elétricos entre si.

Sendo a indutância própria (ou auto-indutância) do estator (ou primário) e do rotor (ou secundário) denotadas por L_1 e L_2 respectivamente, estas podem ser divididas em duas partes:

$$L_1 = l_1 + M \quad (3.1),$$

$$L_2 = l_2 + M \quad (3.2).$$

Nas equações (3.1) e (3.2) l_1 e l_2 são as indutâncias de dispersão e M é o máximo valor da indutância mútua entre os enrolamentos do estator e rotor.

Como mostra a figura 3.1, se a diferença espacial entre a fase a e a fase r é θ , então a indutância mútua entre estas duas fases é dada, com boa aproximação, por:

$$M'(\theta) = M \cdot \cos \theta \quad (3.3).$$

A equação (3.3) é válida quando é assumida uma distribuição senoidal do campo magnético no entreferro da máquina. Aqui θ é expresso em radianos elétricos e está relacionado com o deslocamento mecânico (θ_{mec}) do rotor da máquina através de:

$$\theta = \frac{P}{2} \theta_{\text{mec}} = z_p \cdot \theta_{\text{mec}} \quad (3.4).$$

$P \equiv$ Número de pólos da máquina de indução.

$z_p \equiv$ Número de pares de pólos da máquina de indução.

Escrevendo a equação de tensão para a fase a vem que:

$$v_a = R_1 \cdot i_a + p\lambda_a \quad (3.5).$$

$v_a \equiv$ Tensão aplicada ao enrolamento da fase a.

$R_1 \equiv$ Resistência dos enrolamentos da fase a, como a máquina possui enrolamentos iguais este valor é mesmo para a fase b.

$i_a \equiv$ Corrente que circula no enrolamento da fase a.

$p \equiv$ Operador linear d/dt .

$\lambda_a \equiv$ Fluxo concatenado total no enrolamento da fase a.

O fluxo concatenado λ_a (ou de acoplamento) pode ser dividido em duas partes:

$$\lambda_a = l_1 \cdot i_a + \lambda_{ga} \quad (3.6).$$

O primeiro termo da equação (3.6) é o fluxo de dispersão primário do fluxo concatenado (λ_a) e λ_{ga} é o fluxo concatenado do campo girante no entreferro produzido pela corrente da fase a, que é chamado de fluxo principal. Substituindo a equação (3.6) na equação (3.5) vem que:

$$v_a = R_1 \cdot i_a + l_1 \cdot p i_a + p\lambda_{ga} \quad (3.7).$$

Para a fase $\underline{r}$ os terminais são curto-circuitados devido ao fato de estar sendo aqui considerado um motor de indução com rotor do tipo gaiola de esquilo, portanto, a equação de tensão para a fase $\underline{r}$ é:

$$0 = R_2 \cdot i_r + l_2 \cdot p i_r + p \lambda_{gr} \quad (3.8).$$

Os fluxos principais λ_{ga} e λ_{gr} são produzidos pelas correntes do estator e do rotor e são dados por:

$$\lambda_{ga} = M \cdot i_a + M \cdot i_b \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + M \cdot i_r \cos\theta + M \cdot i_s \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.9),$$

$$\lambda_{gr} = M \cdot i_r + M \cdot i_s \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + M \cdot i_a \cos(-\theta) + M \cdot i_b \cos\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.10).$$

A trigonometria mostra que $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$ e $\cos\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$, substituindo estes resultados em (3.9) e (3.10) vem que:

$$\lambda_{ga} = M(i_a + i_r \cos\theta + i_s \sin\theta) \quad (3.11),$$

$$\lambda_{gr} = M(i_r + i_a \cos\theta - i_b \sin\theta) \quad (3.12).$$

Considerando que na máquina de indução bifásica simétrica as correntes são defasadas de 90 graus e que possuem a mesma amplitude em regime permanente, estas podem ser representadas por vetores espirais, que neste caso são vetores circulares, e são dados por:

$$i_a = \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} \text{ e } i_b = \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega_1 t + \phi_1 + \pi/2)} \quad (3.13),$$

$$i_r = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j(\omega_2 t + \phi_2)} \text{ e } i_s = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j(\omega_2 t + \phi_2 + \pi/2)} \quad (3.14).$$

Nas equações (3.13) e (3.14) ω_1 e ω_2 são as frequências angulares do estator e rotor respectivamente.

Das equações (3.13) e (3.14) é possível escrever que:

$$i_b = \underbrace{\sqrt{2} |I_1|}_{i_a} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} e^{j\frac{\pi}{2}} = i_a e^{j\frac{\pi}{2}}, \text{ mas } e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \text{ portanto:}$$

$$i_b = j \cdot i_a \quad (3.15).$$

Analogamente à i_b é possível escrever para i_s que:

$$i_s = j \cdot i_r \quad (3.16).$$

Substituindo (3.16) em (3.11) e (3.15) em (3.12) vem que:

$$\lambda_{ga} = M \cdot i_a + M \cdot i_r \cdot e^{j\theta} \quad (3.17),$$

$$\lambda_{gr} = M \cdot i_r + M \cdot i_a \cdot e^{-j\theta} \quad (3.18).$$

Substituindo (3.17) em (3.7) e (3.18) em (3.8) é possível escrever:

$$v_a = R_1 \cdot i_a + l_1 \cdot p i_a + M \left[p i_a + p(i_r e^{j\theta}) \right] \quad (3.19),$$

$$0 = R_2 \cdot i_r + l_2 \cdot p i_r + M \left[p i_r + e^{-j\theta} \cdot p i_a + i_a \cdot p(e^{-j\theta}) \right] \quad (3.20).$$

Mas $p(e^{-j\theta}) = e^{-j\theta} \cdot (-j) \cdot p\theta$, em que $p\theta = \omega_r$ é a velocidade angular do rotor em radianos elétricos por segundo, portanto, (3.20) torna-se:

$$0 = R_2 \cdot i_r + l_2 \cdot p i_r + M \left[p i_r + e^{-j\theta} \cdot p i_a - j \cdot \omega_r \cdot e^{-j\theta} \cdot i_a \right] \quad (3.21).$$

Multiplicando (3.21) por $e^{j\theta}$ vem que:

$$0 = R_2 \cdot i_r \cdot e^{j\theta} + (l_2 + M) \cdot e^{j\theta} \cdot p i_r + M(p - j \cdot \omega_r) \cdot i_a \quad (3.22).$$

Realizando a mudança de variável tal que:

$$i_r' = i_r \cdot e^{j\theta} = i_r \cdot e^{j\omega_r t} \quad (3.23).$$

Aplicando o operador linear p em (3.23) vem que:

$$p i_r' = (p i_r) \cdot e^{j\theta} + (p e^{j\theta}) \cdot i_r = (p i_r) \cdot e^{j\theta} + j \cdot \omega_r \cdot \underbrace{e^{j\theta} \cdot i_r}_{i_r'},$$

$$p i_r' = (p i_r) \cdot e^{j\theta} + j \omega_r \cdot i_r' \quad (3.24).$$

Substituindo as equações (3.23) e (3.24) em (3.19) e (3.22) e desenvolvendo os termos encontra-se:

$$v_a = R_1 \cdot i_a + (l_1 + M) \cdot p i_a + M \cdot p i_r' \quad (3.25).$$

$$0 = R_2 \cdot i_r' + (l_2 + M) \cdot (p - j \cdot \omega_r) \cdot i_r' + M(p - j \cdot \omega_r) \cdot i_a \quad (3.26).$$

Neste ponto é interessante notar que as equações (3.25) e (3.26) são escritas apenas em função das variáveis da fase a de estator e da fase r de rotor da mesma forma que para o caso trifásico (18) e (19), ou seja, foi obtida para o MIBS a chamada segregação de fase.

Apesar das equações (3.13) e (3.14) terem sido escritas para o regime permanente é objeto de estudo do deste trabalho avaliar se as equações (3.25) e (3.26) são válidas para o regime transiente e para o regime permanente da mesma maneira que para o caso do motor trifásico.

Lembrando que a fase a representa o estator (ou primário) e a fase r o rotor (ou secundário) os subscritos a e r serão mudados para 1 e 2 respectivamente, portanto, as equações (3.25) e (3.26) tornam-se:

$$v_1 = R_1 \cdot i_1 + (l_1 + M) \cdot p i_1 + M \cdot p i_2 \quad (3.27),$$

$$0 = R_2 \cdot i_2 + (l_2 + M) \cdot (p - j \omega_r) \cdot i_2 + M(p - j \omega_r) \cdot i_1 \quad (3.28).$$

Nas equações (3.27) e (3.28) $i_2 = i_r'$. A frequência de i_2 é dada por $\omega_2 = \omega_1$ em que ω_1 (ou ω , que também é usada neste texto) é a frequência da fonte de alimentação.

Neste ponto surge a questão: com as equações (3.27) e (3.28) é possível obter o mesmo circuito equivalente de regime permanente como na modelagem clássica (33)? A resposta é sim, como mostrada a seguir.

As derivadas temporais que estão relacionadas com as correntes tornam-se $j\omega$ no regime permanente, portanto, as equações (3.27) e (3.28) podem ser escritas como:

$$v_1 = R_1 \cdot i_1 + j \cdot \omega \cdot (l_1 + M) \cdot i_1 + M \cdot j \cdot \omega \cdot i_2 \quad (3.29),$$

$$0 = M \cdot j \cdot \omega \cdot i_1 + \frac{R_2}{s} \cdot i_2 + j \cdot \omega \cdot (l_2 + M) \cdot i_2 \quad (3.30).$$

Na equação (3.30) s é o escorregamento dado por:

$$s = \frac{\omega - \omega_r}{\omega} \quad (3.31).$$

Trocando a notação de vetores espirais para vetores circulares as equações (3.29) e (3.30) tornam-se:

$$\dot{V}_1 = R_1 \cdot \dot{I}_1 + j \cdot (x_1 + x_m) \cdot \dot{I}_1 + j \cdot x_m \cdot \dot{I}_2 \quad (3.32),$$

$$0 = j \cdot x_m \cdot \dot{I}_1 + \frac{R_2}{s} \cdot \dot{I}_2 + j \cdot (x_2 + x_m) \cdot \dot{I}_2 \quad (3.33).$$

As reatâncias de (3.32) e (3.33) são $x_1 = \omega \cdot l_1$, $x_2 = \omega \cdot l_2$, $x_m = M \cdot \omega$ onde x_1 é a reatância de dispersão do primário, x_2 é a reatância de dispersão do secundário e x_m é a reatância de magnetização.

Das equações (3.32) e (3.33) é possível obter o circuito equivalente para nas condições de regime permanente para o MIBS como mostra a figura 3.2.

Figura 3.2 – Circuito equivalente de regime permanente para o MIBS.

3.3 Análise do Transiente Eletromagnético do MIBS Através da Teoria dos Vetores Espirais

Até este ponto foi mostrado que é possível encontrar um modelo de regime permanente para o motor de indução bifásico simétrico (MIBS) utilizando a teoria dos vetores espirais. Entretanto, a teoria dos vetores espirais permite que seja utilizado o mesmo circuito para representar o regime transiente do MIBS, porém, o processo de dedução analítica é o mesmo utilizado para o regime permanente (18) e (19), desta forma o mesmo modelo usado na figura 3.1 pode ser utilizado para análise do transiente eletromagnético do MIBS.

3.3.1 Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico para Controle por Corrente

A equação (3.33) pode ser usada para analisar a resposta transiente do MIBS para o controle por corrente, portanto, esta é aqui reescrita:

$$0 = R_2 \cdot i_2 + (l_2 + M) \cdot (p - j\omega_r) \cdot i_2 + M(p - j\omega_r) \cdot i_1 \quad (3.34).$$

A equação (3.34) pode ser representada por um circuito elétrico equivalente como mostra a figura 3.3.

Figura 3.3 – Circuito equivalente transiente para controle por corrente.

Na figura 3.3 a tensão e_s é dada por:

$$e_s = -j\omega_r M \cdot i_1 - j\omega_r (l_2 + M) \cdot i_2 \quad (3.35).$$

A solução geral de (3.34) em termos de i_2 é:

$$i_2 = i_{2t} + i_{2s} \quad (3.36).$$

Em que i_{2t} corresponde à parte transiente da solução e i_{2s} corresponde à solução de regime permanente. Como a corrente de primário (i_1) é a variável de entrada no controle por corrente, então o transiente ocorre somente em i_2 . Desta forma, a solução transiente da corrente de secundário (i_{2t}) é encontrada resolvendo-se a equação homogênea a seguir:

$$R_2 \cdot i_2 - j\omega_r (l_2 + M) + (l_2 + M) \cdot p i_2 = 0 \quad (3.37).$$

A solução genérica (19) de (3.37) é:

$$i_{2t} = A \cdot e^{\left(\frac{-R_2 t}{l_2 + M} + j\omega_r t\right)} = A \cdot e^{\frac{-R_2 t}{l_2 + M}} \cdot e^{j\omega_r t} \quad (3.38).$$

Se $T_c = \frac{l_2 + M}{R_2}$ então (3.38) pode ser escrita como:

$$i_{2t} = A \cdot e^{\frac{-t}{T_c}} \cdot e^{j\omega_r t} \quad (3.39).$$

Quando a corrente i_1 é dada por: $i_1 = \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega t + \phi_1)}$ a correspondente corrente de secundário de regime permanente (i_{2s}) é:

$$i_{2s} = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j(\omega t + \phi_2)} = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} e^{j\omega t} \quad (3.40).$$

Como a equação (3.34) também é válida para o regime permanente, basta que $p=j\omega$ para que seja possível encontrar que:

$$[R_2 + (l_2 + M)j\omega] \cdot \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} = j\omega M \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1},$$

$$\left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} = \frac{-j\omega M}{\frac{R_2}{s} + j\omega(l_2 + M)} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1} \quad (3.41).$$

Substituindo (3.41) em (3.40) é possível escrever que:

$$i_{2s} = \frac{-j\sqrt{2}\omega M}{\frac{R_2}{s} + j\omega(l_2 + M)} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1} e^{j\omega t} = \sqrt{2}\omega M \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega t + \phi_1)} \cdot \frac{-j}{\frac{R_2}{s} + j\omega(l_2 + M)} \quad (3.42).$$

Mas $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, além disso, $\frac{1}{\frac{R_2}{s} + j\omega(l_2 + M)} = r \cdot e^{j\theta'_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + \omega^2(l_2 + M)^2}} e^{j\theta'_2},$

$$\theta'_2 = \arctan \left[\frac{\frac{-\omega(l_2 + M)}{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + \omega^2(l_2 + M)^2}}{\frac{R_2/s}{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + \omega^2(l_2 + M)^2}} \right] = \arctan \left[\frac{-\omega(l_2 + M)}{R_2/s} \right] \Rightarrow \tan(\theta'_2) = \frac{-\omega(l_2 + M)}{R_2/s}, \text{ como}$$

$$\tan(-\theta'_2) = -\tan(\theta'_2) \Rightarrow -\theta'_2 = \arctan \left[\frac{\omega(l_2 + M)}{R_2/s} \right], \text{ ou seja, (3.42) pode ser escrita como:}$$

$$i_{2s} = \frac{\sqrt{2}\omega M \left| \dot{I}_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + \omega^2(l_2 + M)^2}} \cdot e^{j[\omega t + \phi_1 - (\pi/2) - \theta'_2]} \quad (3.43).$$

Mas de (3.41) é possível concluir que $\left| \dot{I}_2 \right| = \frac{\omega M}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + \omega^2(l_2 + M)^2}} \cdot \left| \dot{I}_1 \right|$, portanto,

(3.43) pode ser escrita como:

$$i_{2s} = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} \text{ com } \theta_2 = \theta'_2 + (\pi/2) \quad (3.44).$$

De posse de (3.44) e (3.39) é possível escrever a solução geral de i_2 , ou seja:

$$i_2 = A \cdot e^{\frac{-t}{T_c}} \cdot e^{j\omega_m t} + \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} \quad (3.45).$$

No circuito equivalente da figura 3.3 a corrente de estator (ou primário) i_1 , que é a corrente de controle, é dividida em duas parcelas (i_2 e i_0) no instante $t = 0^+$, que são inversamente proporcionais às indutâncias de cada ramo (18) e (19), ou seja:

$$i_2 = \frac{-M}{l_2 + M} i_1, \quad i_0 = \frac{l_2}{l_2 + M} i_1 \quad \text{em } t = 0^+ \quad (3.46).$$

Substituindo i_2 de (3.46) em (3.45) vem que:

$$\frac{-M}{l_2 + M} \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1} = A + \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} \quad \phi_2 = \phi_1 - \theta_2 \quad \text{em } t = 0^+ \quad (3.47).$$

Da equação (3.47) é possível encontrar a constante A, ou seja:

$$A = -\sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \cdot \frac{M}{l_2 + M} \cdot e^{j\phi_1} \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega(l_2 + M)} \quad (3.48).$$

Das equações (3.48) e (3.45) vem que i_2 é:

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} - \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \cdot \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot e^{-\lambda t} e^{j(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2)} \quad (3.49).$$

Na equação (3.49) $Z_2 = |R_2 + j\omega(l_2 + M)|$.

De posse da resposta analítica de i_2 juntamente com e_s é possível calcular o torque por fase através da expressão abaixo (18) e (19):

$$t_1 = \frac{P}{2 \cdot \omega_r} \cdot \text{Re}\{i_2\} \cdot \text{Re}\{e_s\} \quad (3.50).$$

Como $e_s = -j\omega_r M \cdot i_1 - j\omega_r(l_2 + M) \cdot i_2$, então e_s também pode ser escrita como:

$$e_s = -j\omega_r M \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega t + \phi_1)} - j\omega_r(l_2 + M) \left[\sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} - \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} e^{-\lambda t} e^{j(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2)} \right] \quad (3.51).$$

Tomando a parte real de (3.51) vem que:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{e_s\} = & \omega_r M \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| \text{sen}(\omega t + \phi_1) + \omega_r (l_2 + M) \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| \text{sen}(\omega t + \phi_1 - \theta_2) - \\ & \omega_r \frac{R_2}{Z_2} M \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{-\lambda t} \text{sen}(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \end{aligned} \quad (3.52).$$

Tomando a parte real de i_2 (equação 3.49) é possível escrever:

$$\text{Re}\{i_2\} = \sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| \cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) - \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| \frac{R_2}{Z_2} \cdot \frac{M}{l_2 + M} e^{-\lambda t} \cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \quad (3.53).$$

Portanto, substituindo (3.52) e (3.53) em (3.50) vem que:

$$\begin{aligned} t_1 = & \frac{P}{2} \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| 2M \cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \text{sen}(\omega t + \phi_1) + 2 \left| \dot{I}_2 \right|^2 (l_2 + M) \cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \cdot \right. \\ & \left. \text{sen}(\omega t + \phi_1 - \theta_2) - 2M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \text{sen}(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') - \right. \\ & \left. 2 \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{l_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 e^{-\lambda t} \cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \text{sen}(\omega t + \phi_1) - 2 \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M e^{-\lambda t} \cdot \right. \\ & \left. \cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \text{sen}(\omega t + \phi_1 - \theta_2) + 2 \frac{R_2^2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right|^2 M^2 e^{-2\lambda t} \cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \cdot \right. \\ & \left. \cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \text{sen}(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Lembrando algumas relações trigonométricas básicas e manipulando (3.54) é possível escrever que:

$$\begin{aligned} t_1 = & P \left\{ \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \frac{1}{2} [\text{sen}(2\omega t + 2\phi_1 - \theta_2) + \text{sen}\theta_2] + \left| \dot{I}_2 \right|^2 (l_2 + M) \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega t + 2\phi_1 - 2\theta_2)] - \right. \\ & M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega_r t - \omega t - \theta_2' + \theta_2) + \text{sen}(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2' - \theta_2)] - \\ & \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{l_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 e^{-\lambda t} \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega t - \omega_m t + \theta_2') + \text{sen}(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2)] - \\ & \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M e^{-\lambda t} \frac{1}{2} [\text{sen}(\omega t - \omega_r t - \theta_2 + \theta_2') + \text{sen}(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2' - \theta_2)] + \\ & \left. \frac{R_2^2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right|^2 M^2 e^{-2\lambda t} \frac{1}{2} [\text{sen}(2\omega_r t + 2\phi_1 - 2\theta_2')] \right\}. \end{aligned} \quad (3.55).$$

O torque devido às duas fases do motor é soma do torque devido à fase a mais o torque devido à fase b ($t_2 = t_{1a} + t_{1b}$). Além disso, o ângulo ϕ_1 , que está relacionado com a fase a do motor, possui uma diferença de $\pi/2$ em relação à fase b, desta maneira o torque devido às duas fases pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 t_2 = P \left\{ \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \left[\cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \sin(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2) \sin(\omega t + \phi_1 + \pi/2) \right] + \right. \\
 \left. \left| \dot{I}_2 \right|^2 (I_2 + M) \left[\cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \sin(\omega t + \phi_1 - \theta_2) + \cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2) \cdot \right. \right. \\
 \left. \left. \sin(\omega t + \phi_1 - \theta_2 + \pi/2) \right] - M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega t + \phi_1 - \theta_2) \sin(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') + \right. \right. \\
 \left. \left. \cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2) \sin(\omega_r t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2') \right] - \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{I_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 e^{-\lambda t} \cdot \right. \\
 \left. \left[\cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \sin(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega_r t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2') \sin(\omega t + \phi_1 + \pi/2) \right] - M \frac{R_2}{Z_2} \cdot \right. \\
 \left. \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \sin(\omega t + \phi_1 - \theta_2) + \cos(\omega_r t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2') \cdot \right. \right. \\
 \left. \left. \sin(\omega t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2) \right] + \frac{R_2^2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right|^2 M^2 e^{-2\lambda t} \left[\cos(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') \sin(\omega_r t + \phi_1 - \theta_2') + \right. \right. \\
 \left. \left. \cos(\omega_r t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2') \sin(\omega_r t + \phi_1 + \pi/2 - \theta_2') \right] \right\} \\
 (3.56).
 \end{aligned}$$

Da trigonometria $\sin A \cdot \cos B = (1/2) [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$ e

$\sin(2A) = 2 \cos A \cdot \sin A$, portanto, t_2 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
t_2 = P \left\{ \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \frac{1}{2} \left[\sin(2\omega t + \phi_1 - \theta_2) + \sin\theta_2 + \sin(2\omega t + 2\phi_1 + \pi - \theta_2) + \sin\theta_2 \right] + \right. \\
\left| \dot{I}_2 \right|^2 (I_2 + M) \frac{1}{2} \left[\sin(\omega t + 2\phi_1 - 2\theta_2) + \sin(\omega t + 2\phi_1 + \pi - 2\theta_2) \right] - \\
M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \left[\sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2 - \theta_2') + \sin(\omega_r t - \omega t + \theta_2 - \theta_2') + \right. \\
\left. \sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 + \pi - \theta_2 - \theta_2') + \sin(\omega_r t - \omega t + \theta_2 - \theta_2') \right] - \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{I_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 \cdot \\
e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \left[\sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2') + \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') + \sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 + \pi - \theta_2') + \right. \\
\left. \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') \right] - M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \left[\sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 - \theta_2' - \theta_2) + \right. \\
\left. \sin(\omega t - \omega_r t - \theta_2 + \theta_2') - \sin(\omega_r t + \omega t + 2\phi_1 + \pi - \theta_2' - \theta_2) + \sin(\omega t - \omega_r t - \theta_2 + \theta_2') \right] + \\
\left. \frac{R_2^2}{Z_2^2} \left| \dot{I}_1 \right|^2 M^2 e^{-2\lambda t} \frac{1}{2} \left[\sin(2\omega_r t + 2\phi_1 - 2\theta_2') + \sin(2\omega_r t + 2\phi_1 + \pi - 2\theta_2') \right] \right\} \\
(3.57).
\end{aligned}$$

Como da trigonometria $\sin A + \sin(A + \pi) = 0$ a equação (3.57) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
t_2 = P \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \sin\theta_2 + M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \sin(\omega t - \omega_r t - \theta_2 + \theta_2') - \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{I_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 e^{-\lambda t} \cdot \right. \\
\left. \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') - M \frac{R_2}{Z_2} \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| e^{-\lambda t} \sin(\omega t - \omega_r t - \theta_2 + \theta_2') \right] \\
(3.58)
\end{aligned}$$

Relembrando que $\theta_2 = \theta_2' + \pi/2$ e $\sin(\theta_2' + \pi/2) = \cos(\theta_2')$ (3.58) pode ser reescrita como:

$$t_2 = P \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \cos\theta_2' - \frac{R_2}{Z_2} \frac{M^2}{I_2 + M} \left| \dot{I}_1 \right|^2 e^{-\lambda t} \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') \right] \quad (3.59).$$

Mas de acordo com equação (3.41) é possível escrever que:

$$\left| \dot{I}_2 \right| = \frac{s\omega M}{\sqrt{R_2^2 + s^2\omega^2(I_2 + M)^2}} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| = \frac{s\omega M}{Z_2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \quad (3.60), \text{ portanto, a equação}$$

(3.59) pode ser escrita na sua forma final como:

$$t_2 = P \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \cos \theta'_2 - \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| \frac{R_2}{s\omega(l_2 + M)} M e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta'_2) \right] \quad (3.61).$$

A equação (3.61) é a mesma obtida por Yamamura (19) para o caso do motor trifásico, portanto, resta provar as outras relações de torque (em termos de vetores espirais) em função de i_1 e i_2 , que são elas: $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \text{Re}\{-j \cdot i_1 \cdot i_2^*\}$ e $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \text{Im}\{i_1 \cdot i_2^*\}$.

$$\text{Prova de } t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \text{Re}\{-j \cdot i_1 \cdot i_2^*\}$$

Já foi mostrado que as equações de i_1 e i_2 podem ser escritas como:

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \cdot e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad e \quad i_2 = \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} - \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \cdot \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot e^{-\lambda t} e^{j(\omega_r t + \phi_1 - \theta'_2)}.$$

Escrevendo o complexo conjugado de i_2 vem que:

$$i_2^* = \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{-j(\omega t + \phi_1 - \theta_2)} - \sqrt{2} \cdot \left| \dot{I}_1 \right| \cdot \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot e^{-\lambda t} e^{-j(\omega_r t + \phi_1 - \theta'_2)}, \text{ que multiplicada por } i_1 \text{ leva à}$$

expressão abaixo:

$$i_1 \cdot i_2^* = 2 \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| \cdot e^{j\theta_2} - 2 \left| \dot{I}_1 \right|^2 \cdot \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot e^{-\lambda t} e^{j(\omega t - \omega_r t + \theta'_2)} \quad (3.62).$$

Multiplicando (3.62) por $-jM$ e desenvolvendo as exponenciais em termos de seno e co-seno vem que:

$$-jMi_1i_2^* = -j2 \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) + j2 \left| \dot{I}_1 \right|^2 \frac{M^2}{l_2 + M} \frac{R_2}{Z_2} e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega t - \omega_r t + \theta'_2) + j \sin(\omega t - \omega_r t + \theta'_2) \right] \quad (3.63).$$

Tomando a parte real da expressão de (3.63) é possível escrever:

$$\text{Re}\{-jMi_1i_2^*\} = 2M \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| \sin \theta_2 - 2 \left| \dot{I}_1 \right|^2 \frac{M^2}{l_2 + M} \frac{R_2}{Z_2} e^{-\lambda t} \sin(\omega t - \omega_r t + \theta'_2) \quad (3.64)$$

Portanto t_2 pode ser escrito como:

$$t_2 = P \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \cos(\theta_2') - \left| \dot{I}_1 \right|^2 \frac{M^2}{l_2 + M} \frac{R_2}{Z_2} e^{-\lambda t} \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') \right] \text{ que é idêntica a equação (3.59),}$$

logo, fica provado que $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \operatorname{Re} \{ -j \cdot i_1 \cdot i_2^* \}$ é válida.

$$\text{Prova de } t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \operatorname{Im} \{ i_1 \cdot i_2^* \}$$

Tomando a parte imaginária de (3.63) vem que:

$$\operatorname{Im} \{ i_1 \cdot i_2^* \} = 2 \left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| \cdot \sin \theta_2 - 2 \left| \dot{I}_1 \right|^2 \frac{M}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2'), \text{ multiplicando ambos os}$$

membros por $M(P/2)$ têm-se:

$$t_2 = \frac{P}{2} M \operatorname{Im} \{ i_1 \cdot i_2^* \} = P \left[\left| \dot{I}_1 \right| \left| \dot{I}_2 \right| M \cdot \cos \theta_2' - \left| \dot{I}_1 \right|^2 \cdot \frac{M^2}{l_2 + M} \cdot \frac{R_2}{Z_2} \cdot \sin(\omega t - \omega_r t + \theta_2') \right] \text{ que também é}$$

igual a equação (3.59), desta forma fica provado também que $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \operatorname{Im} \{ i_1 \cdot i_2^* \}$ é válida.

A expressão $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \operatorname{Re} \{ -j \cdot i_1 \cdot i_2^* \}$ obtida neste item é a mesma obtida por Krause

(15) para o regime permanente, entretanto, a expressão aqui obtida pode ser usada tanto para a análise de regime permanente quanto para o regime transiente, desta forma, este resultado pode ser considerado como uma contribuição deste trabalho.

3.3.2 Análise do Motor de Indução Bifásico Simétrico para Controle por Tensão

As equações (3.27) e (3.28) podem ser escritas matricialmente para que seja possível representar estas através de um circuito equivalente transiente (18) e (19), ou seja:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + (l_1 + M)p & Mp \\ M(p - j\omega_r) & R_2 + (l_2 + M)(p - j\omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (3.65).$$

A equação (3.65) é muito importante e é válida para o regime permanente e transiente e suas variáveis são as variáveis originais do motor sendo expressas como vetores espirais. A figura 3.4 mostra o circuito equivalente correspondente à equação (3.65).

Figura 3.4 – Circuito equivalente transiente para controle por tensão.

Na figura 3.4 $e_s = -j\omega_r [M \cdot i_1 + (l_2 + M) \cdot i_2]$.

Das expressões (3.62) e (3.64) é evidente que é necessário encontrar i_1 e i_2 . Isto é possível calculando as raízes características de (3.65) com relação à p , ou seja:

$$\begin{vmatrix} R_1 + (l_1 + M)p & Mp \\ M(p - j\omega_r) & R_2 + (l_2 + M)(p - j\omega_r) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.66).$$

Como a equação (3.66) é de segunda ordem com relação à p é possível obter duas raízes características δ_1 e δ_2 , portanto, a solução geral de (3.65):

$$i_1 = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad (3.67),$$

de forma que a corrente i_2 é encontrada substituindo-se (3.67) na segunda linha de (3.65), ou seja:

$$i_2 = \frac{-M(\delta_1 - j\omega_r)}{R_2 + (l_2 + M)(\delta_1 - j\omega_r)} A_1 e^{\delta_1 t} - \frac{M(\delta_2 - j\omega_r)}{R_2 + (l_2 + M)(\delta_2 - j\omega_r)} A_2 e^{\delta_2 t} + \sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j(\omega t + \phi_1)} - \sqrt{2} \frac{j\omega M}{R_2 + j\omega(l_2 + M)} e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad (3.68).$$

Assumindo que em $t = 0$ $i_1 = i_2 = 0$, então é possível escrever que:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1} M(\delta_1 - j\omega_r) [R_2 + (l_2 + M)(\delta_1 - j\omega_r)]}{M(\delta_1 - \delta_2)} + \frac{\sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} [R_2 + (l_2 + M)(\delta_1 - j\omega_r)] [R_2 + (l_2 + M)(\delta_1 - j\omega_r)]}{M \cdot R_2 (\delta_1 - \delta_2)} \quad (3.69),$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2} \left| \dot{I}_1 \right| e^{j\phi_1} M(\delta_1 - j\omega_r) [R_2 + (l_2 + M)(\delta_2 - j\omega_r)]}{M(\delta_1 - \delta_2)} - \frac{\sqrt{2} \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\phi_2} [R_2 + (l_2 + M)(\delta_1 - j\omega_r)] [R_2 + (l_2 + M)(\delta_2 - j\omega_r)]}{M(\delta_1 - \delta_2)} \quad (3.70).$$

Uma vez obtido os valores instantâneos de i_1 e i_2 o torque pode ser calculado

utilizando-se $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \text{Re} \{ -j \cdot i_1 \cdot i_2^* \}$ ou $t_2 = \frac{P}{2} M \cdot \text{Im} \{ i_1 \cdot i_2^* \}$.

3.4 Análise do Torque Eletromagnético do MIBS sob Operação de Tensão Desbalanceada utilizando Vetores Espirais e Componentes Simétricas

Será considerada aqui uma máquina de indução bifásica simétrica na qual serão aplicadas tensões v_a e v_b desbalanceadas nas fases a e b do motor. As tensões v_a e v_b podem ser consideradas como superposição das componentes v_a^+ (componente simétrica de seqüência positiva da tensão v_a) e v_a^- (componente simétrica de seqüência negativa da tensão v_a) tal que aos enrolamentos da máquina bifásica sejam aplicadas (33):

- 1) Uma componente simétrica de seqüência positiva ou direta;

v_a^+ aplicada à fase a,

$-jv_a^+$ aplicada à fase b,

2) Uma componente simétrica de seqüência negativa ou inversa;

v_a^- aplicada à fase a,

jv_a^- aplicada à fase b.

Esquemáticamente representa-se a excitação da máquina como mostra a figura 3.5 a seguir.

Figura 3.5 – Representação esquemática da decomposição das tensões de v_a e v_b em termos de suas componentes simétricas de seqüência positiva e negativa.

Como há equivalência, as somas $(v_a^+ + v_a^-)$ e $(-jv_a^+ + jv_a^-)$ devem representar as tensões v_a e v_b tais que:

$$\begin{cases} v_a = v_a^+ + v_a^- = \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^+ \right| \cos(\omega t + \phi^+) + \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^- \right| \cos(\omega t + \phi^-) \\ v_b = -jv_a^+ + jv_a^- = -\sqrt{2} \left| \dot{V}_a^+ \right| \cos(\omega t + \phi^+ + \pi/2) + \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^- \right| \cos(\omega t + \phi^- + \pi/2) \end{cases} \quad (3.71).$$

Escrevendo (3.71) como vetores espirais:

$$\begin{cases} v_a = \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^+ \right| e^{j(\omega t + \phi^+)} + \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^- \right| e^{j(\omega t + \phi^-)} \\ v_b = -\sqrt{2} \left| \dot{V}_a^+ \right| e^{j(\omega t + \phi^+ + \pi/2)} + \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^- \right| e^{j(\omega t + \phi^- + \pi/2)} \end{cases}, \text{ ou seja, } v_a^+ \text{ e } v_a^- \text{ são também vetores}$$

espirais (vetores circulares) escritos como:

$$v_a^+ = \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^+ \right| e^{j(\omega t + \phi^+)} \quad v_a^- = \sqrt{2} \left| \dot{V}_a^- \right| e^{j(\omega t + \phi^-)} \quad (3.72).$$

Reescrevendo (3.71) matricialmente e considerando v_a^+ e v_a^- vetores espirais vem que:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a^+ \\ v_a^- \end{bmatrix} \quad (3.73).$$

Para que o método seja aplicável é necessário que a decomposição de v_a e v_b seja possível em qualquer caso, de forma que estas possam ser reconstruídas a partir de suas componentes de seqüência positiva e negativa através da transformação inversa da matriz de (3.73). Isto é garantido pelo fato que o determinante da matriz 2x2 em (3.73) ser 2j tornando, assim, possível de se obter a relação inversa de (3.73) através de:

$$\begin{bmatrix} v_a^+ \\ v_a^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \quad (3.74),$$

mostrando que dados quaisquer valores de v_a é sempre possível determinar v_a^+ e v_a^- .

Uma vez determinados v_a^+ e v_a^- determinam-se as correntes e torques produzidos pelas componentes agindo separadamente e obtém-se a seguir as correntes e torque total produzidos por v_a e v_b como superposição daqueles.

A figura 3.6 mostra de maneira esquemática a independência dos efeitos de seqüência positiva e negativa conseguida através da decomposição por componentes simétricas.

Figura 3.6 – Decomposição de excitação desbalanceada aplicada às fases de uma máquina bifásica simétrica.

A seqüência positiva $(v_a^+, -jv_a^+)$ age sobre o circuito equivalente usual, pois gera uma velocidade síncrona ω gerando, assim, um torque eletromagnético de seqüência positiva T_{el}^+ e a corrente de seqüência positiva $i_a^+ = v_a^+ / Z^+$ em que Z^+ é a impedância de entrada do circuito equivalente de seqüência positiva como mostra a figura 3.7.

Figura 3.7 – Circuito equivalente transiente de seqüência positiva da máquina de indução bifásica simétrica.

Como as componentes de seqüência positiva e negativa são independentes então é possível escrever a equação matricial elétrica do circuito equivalente da figura 3.7 bem como seu torque eletromagnético correspondente, ou seja:

$$\begin{bmatrix} v_a^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + (l_1 + M)p & Mp \\ M(p - jz_p \omega_{mec}) & R_2 + (l_2 + M)(p - jz_p \omega_{mec}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^+ \\ i_r^{+'} \end{bmatrix} \quad (3.75),$$

$$T_{el}^+ = z_p \cdot M \cdot \text{Im} \left\{ i_a^+ \cdot (i_r^{+'})^* \right\} \quad (3.76).$$

$z_p \equiv$ número de pares de pólos da máquina de indução.

Da mesma forma a seqüência negativa (v_a^-, jv_a^-) age sobre o circuito equivalente usual, pois gera uma velocidade síncrona $-\omega$ gerando, assim, um torque eletromagnético de seqüência negativa T_{el}^- e a corrente de seqüência negativa $i_a^- = v_a^- / Z^-$ em que Z^- é a impedância de entrada do circuito equivalente de seqüência negativa como mostra a figura 3.8.

Figura 3.8 – Circuito equivalente transiente de seqüência negativa da máquina de indução bifásica simétrica.

Da mesma forma que para o circuito de seqüência positiva é possível escrever a equação matricial elétrica do circuito equivalente da figura 3.8 bem como seu torque eletromagnético correspondente, ou seja:

$$\begin{bmatrix} v_a^- \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + (l_1 + M)p & Mp \\ M(p + jz_p \omega_{mec}) & R_2 + (l_2 + M)(p + jz_p \omega_{mec}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^- \\ i_r^- \end{bmatrix} \quad (3.77),$$

$$T_{el}^- = -z_p \cdot M \cdot \text{Im} \left\{ i_a^- \cdot (i_r^-)^* \right\} \quad (3.78).$$

Note que o sinal da equação (3.78) é negativo, indicando assim, que T_{el}^- age em sentido contrário à rotação do motor por ser produzido pela seqüência negativa que gera uma velocidade síncrona $-\omega$. Como o torque eletromagnético resultante é a soma dos torques de seqüência positiva e negativa este pode ser escrito como:

$$T_{el} = z_p \cdot M \cdot \text{Im} \left\{ i_a^+ \cdot (i_r^+)^* \right\} - z_p \cdot M \cdot \text{Im} \left\{ i_a^- \cdot (i_r^-)^* \right\} \quad (3.80).$$

3.5 Representação da Máquina Bifásica Simétrica Através de Equação de Estado

Para estudar o MIBS sob operação desbalanceada é necessário escrever as equações (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) juntamente com a equação mecânica do sistema na forma de variáveis de estado para que seja possível simulá-las através de algum software dedicado (como o Matlab) ou mesmo em linguagem de programação convencional (C ou Fortran, por exemplo), ou seja;

$$\begin{bmatrix} \dot{p}i_a^+ \\ \dot{p}i_a^- \\ \dot{p}i_r^+ \\ \dot{p}i_r^- \\ p\omega_{mec} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -(L_2 R_1 + jM^2 z_p \omega_{mec}) & 0 & M(R_2 - jL_2 z_p \omega_{mec}) \\ 0 & -(L_2 R_1 - jM^2 z_p \omega_{mec}) & 0 \\ M(R_1 + jL_1 z_p \omega_{mec}) & 0 & -L_1(R_2 - jL_2 z_p \omega_{mec}) \\ 0 & M(R_1 - jL_1 z_p \omega_{mec}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^+ \\ i_a^- \\ i_r^+ \\ i_r^- \\ \omega_{mec} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_2 v_a^+ \\ L_2 v_a^- \\ -M v_a^+ \\ -M v_a^- \\ \Delta(T_{el} - T_c)/J \end{bmatrix} \quad (3.79).$$

Na equação (3.79) $L_1 = l_1 + M$, $L_2 = l_2 + M$ e $\Delta = M l_1 + M l_2 + l_1 l_2$.

Capítulo 4

Simulações e Discussão dos Resultados

4.1 Introdução

Neste capítulo serão mostrados vários resultados de simulação e estes resultados serão discutidos ao longo do texto.

O primeiro item deste capítulo mostra e discute os resultados para simulação do MIBS com a modelagem usando a transformação $dq0$ e com a modelagem utilizando vetores espirais para o caso da máquina operar em condição de tensão balanceada (as tensões aplicadas aos enrolamentos da máquina são de mesma amplitude e defasadas de 90 graus).

Já no segundo item a tensão aplicada à máquina é desbalanceada, pois é necessário constatar a validade das componentes simétricas para o regime permanente e transiente como proposto por Yamamura (19) bem como discutir sobre os torques de sequência positiva e negativa quando o MIBS esta operando em condição de tensão desbalanceada.

4.2 Operação do MIBS Sob Tensão Balanceada

Para simular o MIBS com tensão balanceada foram utilizados os parâmetros de um MIBS real (8) cujos parâmetros estão listados a seguir.

Notação usada para os parâmetros da modelagem dq0

$$R_{E_1} = R_{E_2} = 9,92 [\Omega] \quad R_{R_1} = R_{R_2} = 7,38 [\Omega] \quad L_{E_1} = L_{E_2} = L_{R_1} = L_{R_2} = 0,366 [H]$$

$$m_1 = m_2 = 0,327 [H] \quad z_p = 2 \quad V = 154 [V] \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot 60 [\text{rad/s}] \quad N = 1$$

$$J = 0,006 [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad K_d = 0,0035 [\text{Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}] \quad T_c = 0 [N]$$

Notação usada para os parâmetros da modelagem com vetores espirais

$$R_1 = 9,92 [\Omega] \quad R_2 = 7,38 [\Omega] \quad l_1 = 0,039 [H] \quad l_2 = 0,039 [H] \quad M = 0,327 [H] \quad z_p = 2$$

$$V = 154 [V] \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot 60 [\text{rad/s}] \quad J = 0,006 [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad K_d = 0,0035 [\text{Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}]$$

$$T_c = 0 [N]$$

A primeira questão que surge quando são estudados dois tipos de modelagem é: a modelagem proposta (modelagem por vetores espirais) produz os mesmos resultados (dinâmica elétrica e mecânica) que a modelagem já consagrada (modelagem dq0)? E a resposta para esta pergunta é sim como mostram as figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

Figura 4.1 – Evolução do torque eletromagnético ao longo do tempo.

Figura 4.2 – Evolução da velocidade mecânica do motor ao longo do tempo.

Figura 4.3 – Evolução das correntes de estator do motor ao longo do tempo.

Figura 4.4 – Evolução das correntes de rotor do motor ao longo do tempo.

4.3 Operação do MIBS Sob Tensão Desbalanceada

Como o objetivo é estudar uma assimetria nas tensões aplicadas aos enrolamentos da máquina simétrica, foi aplicada uma tensão $v_a = \sqrt{2} \cdot 154 \cos(\omega t)$ no enrolamento da fase a e uma tensão $v_b = 0,5 \cdot \sqrt{2} \cdot 154 \cos(\omega t - \pi/2)$ na fase b do motor, ou seja, as tensões são ortogonais, mas a amplitude da tensão aplicada à fase b é metade da tensão aplicada à fase a. As figuras a seguir mostram os resultados obtidos para o torque eletromagnético, velocidade e torque versus velocidade.

Figura 4.5 – Torque eletromagnético de sequência positiva, negativa e resultante no tempo.

Figura 4.6 – Velocidade mecânica do motor no tempo.

Figura 4.7 - Curva torque x velocidade.

As figuras 4.5 e 4.7 mostram que o torque de seqüência negativa tem uma influência muito menor do que o torque de seqüência positiva no torque resultante. Este desenvolvimento do torque eletromagnético em termos de suas componentes de seqüência positiva e negativa pode ser considerado como uma contribuição deste trabalho ao estudo da máquina bifásica simétrica de indução visto que não há descrição completa do fenômeno (existe a descrição apenas para o regime permanente) na presente literatura.

Outro fato que merece ser mostrado aqui é que o torque resultante da soma dos torques de seqüência positiva e negativa, resultante da modelagem por vetores espirais, conduz ao valor médio do torque resultante da modelagem dq0 como mostra a figura 4.8. Uma vez obtidas as componentes de seqüência positiva e negativa do torque outra pergunta que surge é: quanto que a velocidade resultante das componentes de seqüência positiva e negativa difere da velocidade da modelagem dq0? A resposta para esta pergunta é o gráfico mostrado na

figura 4.9, ou seja, a dinâmica da velocidade resulta das componentes de seqüência positiva e negativa.

Figura 4.8 – Torque eletromagnético resultante da modelagem dq0 (DQ) e torque resultante da soma dos torques de seqüência positiva e negativa obtido por vetores espirais (VE).

Figura 4.9 – Velocidades resultantes da modelagem dq0 (DQ) e por vetores espirais (VE).

Visto que o torque resultante da soma dos torques de sequência positiva e negativa leva ao valor médio do torque da modelagem dq0 outra questão a ser respondida é: quais as composições das correntes de sequência positiva e negativa de estator e rotor são responsáveis pelas oscilações de torque quando a tensão aplicada é desbalanceada? Evidentemente há dois caminhos a seguir para responder esta questão. O primeiro é buscar uma dedução analítica para o desenvolvimento da expressão do torque eletromagnético como foi feito para o caso da tensão aplicada ser balanceada, entretanto, esta tarefa não é de rápida execução e um tanto quanto trabalhosa. O segundo caminho é buscar uma comparação entre os resultados obtidos da modelagem dq0 e os resultados obtidos através da aplicação da teoria do vetor espiral, e é este que será executado neste texto.

Para iniciar a investigação é necessário lembrar que o torque eletromagnético deduzido pela modelagem dq0 para um MIBS tem a seguinte relação de proporcionalidade com as correntes de eixo direto e em quadratura (de estator e rotor):

$$T_{el} \propto K \cdot (i_{E_q} \cdot i_{R_d} - i_{E_d} \cdot i_{R_q}) \quad (4.1).$$

Isto posto, é necessário encontrar quais as relações das componentes de sequência positiva e negativa das correntes de estator e rotor da modelagem por vetores espirais são equivalentes às correntes i_{E_d} , i_{E_q} , i_{R_d} e i_{R_q} na modelagem dq0. Tais relações são dadas por:

$$\begin{aligned} i_{E_d} &= \text{Re}\{i_a^+\} + \text{Re}\{i_a^-\} \\ i_{E_q} &= \text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} + \text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \\ i_{R_d} &= \text{Re}\{i_r^+\} + \text{Re}\{i_r^-\} \\ i_{R_q} &= \text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} + \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} \end{aligned} \quad (4.2).$$

Realizando o produto $i_{E_q} \cdot i_{R_d}$ em termos das relações dadas em (4.2) vem que:

$$\begin{aligned} i_{E_q} \cdot i_{R_d} &= \left(\text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} + \text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \right) \cdot \left(\text{Re}\{i_r^+\} + \text{Re}\{i_r^-\} \right), \\ i_{E_q} \cdot i_{R_d} &= \text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \text{Re}\{i_r^+\} + \text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \text{Re}\{i_r^-\} + \text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \text{Re}\{i_r^+\} + \text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \text{Re}\{i_r^-\} \end{aligned} \quad (4.3).$$

Realizando o produto $i_{E_d} \cdot i_{R_q}$ em termos das relações dadas em (4.2) vem que:

$$\begin{aligned} i_{E_d} \cdot i_{R_q} &= \left(\text{Re}\{i_a^+\} + \text{Re}\{i_a^-\} \right) \cdot \left(\text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} + \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} \right), \\ i_{E_d} \cdot i_{R_q} &= \text{Re}\{i_a^+\} \text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} + \text{Re}\{i_a^+\} \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} + \text{Re}\{i_a^-\} \text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} + \text{Re}\{i_a^-\} \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} \end{aligned} \quad (4.4).$$

Subtraindo $i_{E_q} \cdot i_{R_d}$ de $i_{E_d} \cdot i_{R_q}$ é possível escrever:

$$\begin{aligned} i_{E_q} \cdot i_{R_d} - i_{E_d} \cdot i_{R_q} &= \left(\text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \text{Re}\{i_r^+\} - \text{Re}\{i_a^+\} \text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} \right) + \left(\text{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \text{Re}\{i_r^-\} - \right. \\ &\quad \left. \text{Re}\{i_a^+\} \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} \right) + \left(\text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \text{Re}\{i_r^+\} - \text{Re}\{i_a^-\} \text{Re}\{-j \cdot i_r^+\} \right) + \\ &\quad \left(\text{Re}\{j \cdot i_a^-\} \text{Re}\{i_r^-\} - \text{Re}\{i_a^-\} \text{Re}\{j \cdot i_r^-\} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

É necessário agora desenvolver cada termo entre parênteses da equação (4.5), entretanto, é necessário lembrar três propriedades dos números complexos que serão de grande valia neste momento, são elas:

$$\text{Re}\{Z_1 Z_2\} = \text{Re}\{Z_1\} \text{Re}\{Z_2\} - \text{Im}\{Z_1\} \text{Im}\{Z_2\} \quad (4.6),$$

$$\text{Im}\{Z_1\} = \frac{(Z_1 - Z_1^*)}{2j} = \frac{-j}{2} (Z_1 - Z_1^*) \quad (4.7),$$

$$\operatorname{Re}\{Z_1\} = \frac{(Z_1 + Z_1^*)}{2} \quad (4.8).$$

Em (4.6), (4.7) e (4.8) Z_1 e Z_2 são dois números complexos quaisquer e o asterisco significa o conjugado do número complexo Z_1 .

Aplicando (4.6) e (4.7) no primeiro parênteses de (4.5) e desenvolvendo vem que:

$$z_p \cdot M \cdot \left(\operatorname{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \operatorname{Re}\{i_r^{+'}\} - \operatorname{Re}\{i_a^+\} \operatorname{Re}\{-j \cdot i_r^{+'}\} \right) = z_p \cdot M \cdot \operatorname{Im}\{i_a^+ \cdot (i_r^{+'})^*\} \quad (4.9).$$

Portanto, a equação (4.9) representa o torque de seqüência positiva.

Desenvolvendo o quarto termo entre parênteses de (4.5) de maneira análoga ao que foi feito para o primeiro termo concluí-se que:

$$z_p \cdot M \cdot \left(\operatorname{Re}\{j \cdot i_a^-\} \operatorname{Re}\{i_r^{-'}\} - \operatorname{Re}\{i_a^-\} \operatorname{Re}\{j \cdot i_r^{-'}\} \right) = -z_p \cdot M \cdot \operatorname{Im}\{i_a^- \cdot (i_r^{-'})^*\} \quad (4.10).$$

Ou seja, a equação (4.10) representa o torque de seqüência negativa. Portanto, os dois termos restantes (segundo e terceiro) de (4.5) são responsáveis pelas oscilações do torque eletromagnético. Entretanto, resta conhecer como os componentes de seqüência positiva e negativa, de estator (i_a^+ e i_a^-) e rotor ($i_r^{+'}$ e $i_r^{-'}$), estão relacionados para formar as oscilações de torque eletromagnético.

Desenvolvendo o segundo termo de (4.5) utilizando (4.6), (4.7) e (4.8) vem que:

$$z_p \cdot M \cdot \left(\operatorname{Re}\{-j \cdot i_a^+\} \operatorname{Re}\{i_r^{-'}\} - \operatorname{Re}\{i_a^+\} \operatorname{Re}\{j \cdot i_r^{-'}\} \right) = z_p \cdot M \cdot \operatorname{Im}\{i_a^+ \cdot i_r^{-'}\} \quad (4.11).$$

De maneira análoga ao que foi feito para o segundo termo de (85) desenvolvendo o terceiro concluí-se que:

$$z_p \cdot M \cdot \left(\operatorname{Re}\{j \cdot i_a^-\} \operatorname{Re}\{i_r^{+'}\} - \operatorname{Re}\{i_a^-\} \operatorname{Re}\{-j \cdot i_r^{+'}\} \right) = -z_p \cdot M \cdot \operatorname{Im}\{i_a^- \cdot i_r^{+'}\} \quad (4.12).$$

A figura 4.10 mostra o resultado do torque eletromagnético resultante, as componentes oscilantes e os torques de seqüência positiva e negativa.

Figura 4.10 – Torque eletromagnético resultante e seus componentes obtidos pela modelagem por vetores espirais.

Portanto, o torque eletromagnético pode ser escrito em termos de vetores espirais como:

$$T_{el} = z_p \cdot M \left\{ \text{Im} \left\{ i_a^+ \cdot (i_r^+)^* \right\} - \text{Im} \left\{ i_a^- \cdot (i_r^-)^* \right\} + \text{Im} \left\{ i_a^+ \cdot i_r^- \right\} - \text{Im} \left\{ i_a^- \cdot i_r^+ \right\} \right\} \quad (4.13).$$

Além dos resultados obtidos com a decomposição do torque é importante conhecer as formas das curvas das correntes de sequência positiva e negativa para o estator e o rotor. Surge aqui mais um resultado interessante devido aplicação da teoria do vetor espiral e o torque de sequência negativa mostrado na figura 4.10 dá uma pista a respeito da forma de onda das correntes de sequência negativa. Uma vez que o torque de sequência negativa oscila muito pouco no momento da partida (atentar para o intervalo de zero a 0,25 s na figura 4.10) é

razoável supor que as correntes de seqüência negativa de estator e rotor assim também o façam. É exatamente isto que mostra a figura 4.11.

Figura 4.11 – Corrente de seqüência negativa do estator e rotor.

A figura 4.11 mostra que as correntes de seqüência negativa oscilam pouco ao longo do tempo. A figura 4.12 mostra um “zoom” da envoltória das correntes de seqüência negativa.

Figura 4.12 – Corrente de seqüência negativa do estator e rotor.

Diferentemente das correntes de seqüência negativa as correntes de seqüência positiva oscilam de maneira bastante acentuada como mostra a figura 4.13.

Figura 4.13 – Corrente de seqüência positiva do estator e rotor.

As figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17 mostram os vetores espirais das correntes de seqüência positiva e negativa tanto de estator como de rotor.

Figura 4.14 – Vetor espiral de corrente de seqüência positiva de estator.

Figura 4.15 – Vetor espiral de corrente de seqüência positiva de rotor.

Figura 4.16 – Vetor espiral de corrente de seqüência negativa de estator.

Figura 4.17 – Vetor espiral de corrente de seqüência negativa de rotor.

É possível escrever as correntes da fase a (i_a) e da fase b (i_b) do estator como soma das componentes simétricas de seqüência positiva e negativa, ou seja:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^+ \\ i_a^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a^+ + i_a^- \\ -j \cdot i_a^+ + j \cdot i_a^- \end{bmatrix} \quad (4.14).$$

As figuras 4.18 e 4.19 mostram os vetores espirais das correntes i_a e i_b .

Figura 4.18 – Vetor espiral de corrente da fase a de estator.

Figura 4.19 – Vetor espiral de corrente da fase b de estator.

Já as figuras 4.20 e 4.21 mostram os vetores espirais das correntes i_r e i_s .

Figura 4.20 – Vetor espiral de corrente da fase r de rotor.

Figura 4.21 – Vetor espiral de corrente da fase $\underline{s}$ de rotor.

Capítulo 5

Parametrização e Ensaio do Motor de Indução Bifásico Simétrico

5.1 Introdução

Nesta seção é apresentada a medição dos parâmetros de um motor de indução bifásico simétrico juntamente com os ensaios do motor operando com tensão balanceada e desbalanceada.

O método utilizado para medir os parâmetros do motor bifásico é mesmo método utilizado para o motor trifásico, ou seja, foram realizados ensaios do motor em vazio e com o rotor travado.

Para que o motor operasse com tensão balanceada foi montado um arranjo com dois transformadores (conexão Scott) para produzir tensões com mesma amplitude e defasadas de noventa graus.

Este capítulo tem como objetivo avaliar o desempenho do modelo matemático desenvolvido com o resultado experimental.

5.2 A Conexão Scott

É possível obter um sistema bifásico balanceado a partir de um sistema trifásico balanceado com um arranjo conveniente de dois transformadores. Este arranjo é conhecido como conexão Scott (34) e (35).

A figura 5.1 mostra a conexão Scott para a transformação da tensão trifásica em tensão bifásica e a figura 5.2 mostra o diagrama fasorial para a conexão Scott.

Figura 5.1 – Conexão Scott.

Figura 5.2 – Diagrama fasorial da ligação Scott.

O transformador A da figura 5.1 deve ser enrolado de forma que a tensão de fase bifásica $\dot{V}_a$ seja igual à tensão $\dot{V}_{cd}$, portanto, o número de espiras do primário do transformador A deve ser igual o número de espiras do secundário. Além disso, o enrolamento primário do transformador A deve possuir uma derivação central, pois esta é

conectada ao transformador B para que seja possível a obtenção da tensão $\dot{V}_b$ com defasagem de 90 graus em relação à tensão $\dot{V}_a$ e com mesma amplitude para que o sistema seja balanceado.

Para que a tensão $\dot{V}_{eo}$ esteja a 90 graus da tensão $\dot{V}_{oc}$, portanto, também a 90 graus de $\dot{V}_a$ é necessário que:

$$\left| \dot{V}_{oc} \right| = \sin(30^\circ) \cdot \left| \dot{V}_{ec} \right| = \frac{1}{2} \left| \dot{V}_{ec} \right| \quad (5.1)$$

$$\left| \dot{V}_{eo} \right| = \cos(30^\circ) \cdot \left| \dot{V}_{ec} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \dot{V}_{ec} \right| \quad (5.2)$$

Da equação (5.2) e da figura 5.1 conclui-se que se o transformador B for enrolado com o mesmo número de espiras no secundário e no primário o módulo da tensão $\dot{V}_b$ será $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vezes maior que o módulo da tensão $\dot{V}_a$, pois $\left| \dot{V}_b \right| = \left| \dot{V}_{eo} \right|$. Por conseguinte, o número de espiras do secundário do transformador B dever ser $\frac{2}{\sqrt{3}}$ o número de espiras do primário.

Logo, para que as tensões $\dot{V}_a$ e $\dot{V}_b$ tenham a mesma amplitude e estejam defasadas de 90 graus, o número de espiras do primário do transformador A deve ser igual ao número de espiras do secundário, além disso, o número de espiras do primário do transformador B deve ser $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vezes o número de espiras do secundário (34). O ponto o, como mostrado na figura 5.1, é a derivação central do primário do transformador A.

Quando for necessário variar o módulo da tensão bifásica basta colocar um transformador regulador de tensão na entrada do sistema trifásico, desta forma, tem-se uma variação da tensão bifásica proporcional à tensão trifásica.

5.3 Parametrização do MIBS

Esta seção é dividida em dois tópicos. O primeiro trata do teste de rotor travado que é feito para encontrar, de maneira aproximada, os valores das reatâncias de dispersão do estator e rotor e também a resistência do rotor. Já o teste do motor em vazio possibilita encontrar, de maneira aproximada, o valor da reatância de magnetização. Os dois testes são realizados com base no circuito de regime permanente do MIBS. A figura 5.3 mostra o circuito equivalente de regime permanente para o MIBS. Todos os parâmetros são referenciados ao estator.

Figura 5.3 – Circuito equivalente de regime permanente do MIBS.

5.3.1 Ensaio de Rotor Travado

Este ensaio é análogo ao teste de curto-circuito realizado em um transformador. Neste teste o eixo da máquina é preso de forma a não girar quando a tensão é aplicada, assim, a velocidade do rotor é nula, consequentemente, o escorregamento tem valor unitário (35). As grandezas a serem medidas neste ensaio são as potências ativas e as correntes de cada fase do motor bem como a tensão aplicada nos enrolamentos da máquina. A figura 5.4 mostra de maneira esquemática a montagem realizada para o ensaio de rotor travado do MIBS.

5.4 – Representação esquemática para o ensaio de rotor travado do MIBS.

Nas condições de rotor bloqueado o valor de x_m é tipicamente 25 vezes maior que $R_2 + jx_2$, portanto, x_m poder ser desconsiderado, resultando em um circuito equivalente como mostrado na figura 5.5.

Figura 5.5 – Circuito equivalente aproximado do MIBS na situação de rotor bloqueado.

Equacionando o circuito da figura 5.4 é possível escrever que:

$$Z_{rb} = R_1 + R_2 + j(x_1 + x_2) \quad (5.1).$$

O valor da resistência do estator (R_1) poder ser medida diretamente com um ohmímetro. Com os valores medidos da potência ativa e conhecendo-se R_1 é possível encontrar a resistência do rotor através das equações 5.2, 5.3 e 5.4.

$$P_{rb} = P_1 + P_2 \quad (5.2)$$

$$I_{rb} = \frac{I_a + I_b}{2} \quad (5.3)$$

$$R_2 = \frac{P_{rb}}{2I_{rb}^2} - R_1 \quad (5.4)$$

A soma da reatância de dispersão do estator e do rotor é obtida através da equação 5.5.

$$x_1 + x_2 = \sqrt{\left(\frac{V_{rb}}{I_{rb}}\right)^2 - \left(\frac{P_{rb}}{2I_{rb}}\right)^2} \quad (5.5)$$

A parcela a ser considerada separadamente da indutância de dispersão entre rotor e estator depende do projeto da máquina, entretanto, na maioria dos casos este dado não é conhecido. Como regra geral as parcelas são divididas igualmente, ou seja:

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{V_{rb}}{I_{rb}}\right)^2 - \left(\frac{P_{rb}}{2I_{rb}}\right)^2}}{2} \quad (5.6)$$

5.3.2 Ensaio do Motor em Vazio

O ensaio do motor em vazio é análogo ao ensaio de circuito aberto do transformador (35). Neste ensaio é aplicada tensão nominal do motor sem nenhuma carga no eixo. As potências, correntes e tensão aplicada são medidas da mesma forma que no ensaio de rotor travado.

Figura 5.6 – Representação esquemática do ensaio em vazio do MIBS.

Quando o motor trabalha sem carga o fator de potência é muito baixo, portanto, a corrente é predominantemente reativa. Além disso, com o motor em vazio R_2 é muito menor $R_2(1-s)/s$, desta forma a perda do cobre no rotor pode ser negligenciada. Com estas considerações o circuito equivalente para o ensaio em vazio é mostrado na figura 5.7.

Figura 5.7 – Circuito equivalente aproximado do MIBS operando em vazio.

Como R_1 é muito menor que $x_1 + x_m$ é possível escrever que:

$$I_v = \frac{I_a + I_b}{2} \quad (5.7)$$

$$|Z_v| = \frac{V_v}{I_v} \cong x_1 + x_m \quad (5.8)$$

$$x_m = \frac{V_v}{I_v} - x_1 \quad (5.9).$$

5.3.3 Ensaio do MIBS

Foi utilizado um motor bifásico simétrico com um par de pólos para montagem de rotor travado e em vazio. Os valores do ensaio de rotor travado e em vazio são mostrados a seguir.

Ensaio de rotor travado: $V_{tb} = 90$ V, $P_1 = 80$ W, $P_2 = 125$ W, $I_a = 2,13$ A, $I_b = 2,0$ A.

Ensaio em vazio: $V_v = 127 \text{ V}$, $P'_1 = 24 \text{ W}$, $P'_2 = 30 \text{ W}$, $I'_a = 0,50 \text{ A}$, $I'_b = 0,462 \text{ A}$,
 $\omega_{\text{mec}} = 3560 \text{ rpm} = 372,8 \text{ rad/s}$.

Com os valores do ensaio de rotor travado e com as equações 5.2 a 5.6 é possível calcular os valores da resistência do rotor e da indutância de dispersão do estator e rotor.

$$P_{rb} = P_1 + P_2 = 80 + 125 = 205 \text{ W} \quad (5.10)$$

$$I_{rb} = \frac{I_a + I_b}{2} = \frac{2,13 + 2,0}{2} = 2,065 \text{ A} \quad (5.11)$$

Para calcular a resistência de rotor é necessário conhecer a resistência do estator como mostra a equação (5.4). Com o ohmímetro foi encontrada uma resistência de estator igual a aproximadamente $9,17 \Omega$, portanto, a resistência de rotor é calculada a seguir.

$$R_2 = \frac{P_{rb}}{2I_{rb}^2} - R_1 = \frac{205}{2(2,065)^2} - 9,17 = 14,41 \Omega \quad (5.12)$$

Como regra geral as parcelas das reatâncias de dispersão, do estator e rotor, são divididas igualmente, ou seja:

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{V_{rb}}{I_{rb}}\right)^2 - \left(\frac{P_{rb}}{2I_{rb}}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{90}{2,065}\right)^2 - \left[\frac{205}{2(2,065)^2}\right]^2}}{2} = 18,18 \Omega \quad (5.13).$$

Dividindo-se o valor da equação (5.13) por $2\pi \cdot 60$ são encontrados os valores da indutância de dispersão do estator e rotor $l_1 = l_2 = 0,0482 \text{ H}$.

Com os valores do ensaio do motor em vazio e com as equações 5.7 a 5.9 é possível calcular a reatância de magnetização.

$$I_v = \frac{I'_a + I'_b}{2} = \frac{0,503 + 0,462}{2} = 0,48 \text{ A} \quad (5.14)$$

$$|Z_v| = \frac{V_v}{I_v} \cong x_1 + x_m = \frac{90}{0,48} = 187,5 \Omega \quad (5.15)$$

$$x_m = \frac{V_v}{I_v} - x_1 = 187,5 - 18,18 = 169,32 \Omega \quad (5.16)$$

Dividindo-se o valor de x_m por $2\pi \cdot 60$ encontra-se o valor da indutância mútua de 0,45 H.

A seguir é apresentado um sumário dos parâmetros elétricos do motor.

$$R_1 = 9,17 \, \Omega \quad R_2 = 14,14 \, \Omega$$

$$l_1 = l_2 = 0,0482 \, \text{H} \quad M = 0,45 \, \text{H}$$

5.3.4 Parâmetros Mecânicos

Além dos parâmetros elétricos, foram estimados o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso da máquina, que são os parâmetros mecânicos utilizados no modelo. Para o cálculo do momento de inércia o rotor foi considerado como um cilindro de raio R_c e massa m_c . Tendo sido o raio do cilindro medido bem como sua massa o momento de inércia do rotor (J) é dado por:

$$J = \frac{1}{2} m_c R_c^2 = \frac{1}{2} 1,114 \cdot (0,03475)^2 = 0,6726 \cdot 10^{-3} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (5.17).$$

Com os dados do motor operando em vazio é possível estimar o atrito viscoso. Quando o motor está operando em vazio a potência ativa de entrada é usada para suprir três perdas: a perda no cobre do estator, a perda no núcleo do estator e as perdas rotacionais. Normalmente não há dados sobre as perdas no núcleo e as perdas rotacionais, desta forma, as mesmas são consideradas iguais.

$$P_v = P_1 + P_2 = 2I_v^2 \cdot R_1 + P_n + P_{\text{rot}} = 2(I_v^2 \cdot R_1 + P_{\text{rot}}) \quad (5.18)$$

$$P_{\text{rot}} = k_d \omega_{\text{mec}}^2 \quad (5.19)$$

Substituindo a equação (5.19) na equação (5.18) é possível obter-se uma estimativa do coeficiente de atrito viscoso.

$$k_d = \frac{\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) - I_v^2 R_1}{\omega_{mec}^2} = \frac{\left(\frac{24 + 30}{2}\right) - (0,48)^2 \cdot 9,17}{(372,8)^2} = 0,179 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad} \quad (5.20)$$

5.4 Resultados Experimentais e Teóricos

Nesta seção serão apresentados os resultados oriundos do acionamento do MIBS operando sob tensão balanceada e desbalanceada. Os resultados experimentais obtidos são comparados com os resultados teóricos. Na simulação optou-se por utilizar os valores das tensões reais aplicadas nos enrolamentos da máquina ao invés de senóides perfeitas, uma vez que os valores das tensões aplicadas foram armazenados com o auxílio de um osciloscópio digital e transferidos para o computador.

5.4.1 Operação com Tensão balanceada

Para obtenção da tensão bifásica balanceada foi montado um arranjo com dois transformadores conhecido como ligação Scott como mostrado na figura 5.1. Para controlar a amplitude da tensão foi utilizado um variac trifásico conectado com o arranjo dos transformadores. A seguir nas figuras 5.8 e 5.9 são apresentados os gráficos das tensões aplicadas aos enrolamentos do MIBS. As tensões aplicadas foram coletadas com um osciloscópio digital da marca Tektronix modelo TDS 3034B com quatro canais. Os pontos coletados foram transferidos para o computador e desenhados com o software Matlab. As figuras 5.8 e 5.9 mostram as tensões balanceadas aplicadas no MIBS.

As figuras 5.10 a 5.13 mostram as correntes experimentais e simuladas nos enrolamentos do MIBS.

Figura 5.8 – Tensão aplicada no enrolamento a do MIBS. Figura 5.9 – Tensão aplicada no enrolamento b do MIBS.

Figura 5.10 – Corrente teórica no enrolamento a do MIBS operando com tensão balanceada.

Figura 5.11 – Corrente experimental no enrolamento a do MIBS operando com tensão balanceada.

Figura 5.12 – Corrente teórica no enrolamento b do MIBS operando com tensão balanceada.

Figura 5.13 – Corrente experimental no enrolamento b do MIBS operando com tensão balanceada.

5.4.2 Operação com Tensão Desbalanceada

Para obtenção da tensão bifásica desbalanceada foi montado um arranjo com dois transformadores da mesma maneira como mostrado na figura 5.1. Entretanto, para controlar a amplitude de uma das tensões defasadas de 90 graus foi necessário conectar um variac monofásico como mostra a figura 5.14.

Figura 5.14 – Ligação Scott com variac monofásico para controle da amplitude de tensão.

Foi aplicada no enrolamento a do MIBS uma tensão de 127 V enquanto que no enrolamento b foi aplicada metade da tensão do enrolamento a. As figuras 5.15 e 5.16 mostram as tensões desbalanceadas aplicadas em cada enrolamento do MIBS.

Da mesma forma que no caso balanceado as tensões aplicadas foram coletadas com um osciloscópio digital da marca Tektronix modelo TDS 3034B com quatro canais. Os pontos coletados foram transferidos para o computador e desenhados com o software Matlab. As figuras 5.17 a 5.20 mostram os resultados teóricos e experimentais para as correntes nos enrolamentos a e b do MIBS.

Figura 5.15 - Tensão desbalanceada aplicada no enrolamento a do MIBS.

Figura 5.16 - Tensão desbalanceada aplicada no enrolamento b do MIBS.

Figura 5.17 – Corrente teórica no enrolamento a do MIBS operando com tensão desbalanceada.

Figura 5.18 – Corrente experimental no enrolamento a do MIBS operando com tensão desbalanceada.

Figura 5.19 – Corrente teórica no enrolamento b do MIBS operando com tensão desbalanceada.

Figura 5.20 – Corrente teórica no enrolamento a do MIBS operando com tensão desbalanceada.

5.4.3 Conclusão

Quando o MIBS alcança o estado de regime permanente o modelo produz uma resposta com amplitude maior do que realmente ocorre na realidade, seja no caso em que o motor opera com tensão desbalanceada ou balanceada. Entretanto, quando o motor está em regime transiente a constatação anterior não é válida. De fato, observa-se o oposto do regime permanente, ou seja, a resposta produzida pelo modelo teórico é menor que o resultado observado na prática. Porém, as conclusões anteriores não podem ser generalizadas para as máquinas de indução bifásicas em geral uma vez que foram realizados ensaios somente com um motor.

É importante ressaltar que o método utilizado na parametrização do motor de indução bifásico é o mesmo utilizado na modelagem de motores de indução trifásicos que foi adaptado do ensaio para parametrização do transformador. Este método é usado de maneira corriqueira sem maiores questionamentos. Existem estudos que foram realizados visando melhorar a predição do modelo do motor de indução monofásico (36) e (37), que é um motor de indução bifásico assimétrico, entretanto, nenhuma discussão é realizada a respeito de quais são as consequências no regime transiente mediante as modificações introduzidas nos métodos propostos. Por outro lado, foram realizados estudos para melhorar a predição dos resultados dos modelos do motor de indução trifásico no regime permanente e transiente (38) e (39), entretanto, estes estudos introduzem modificações nos ensaios do motor e maior complexidade na modelagem e nos cálculos. Portanto, investigar quais os métodos de ensaio para parametrização do motor de indução bifásico, sejam eles simétricos ou assimétricos, são mais adequados ou que produzam melhor predição em regime transiente e/ou permanente consiste em mais uma frente de pesquisa que pode ser desenvolvida em trabalhos futuros.

Capítulo 6

Conclusão Final e Proposta de Continuidade

6.1 Conclusão Final

Modelar o MIBS com vetores espirais ou com a transformação $dq0$ levou aos mesmos resultados de velocidade, torque e corrente como esperado. Entretanto, quando é utilizada a modelagem com vetor espiral é possível representar o MIBS através de um circuito elétrico equivalente que é válido tanto para o regime permanente quanto para o regime transiente. Notadamente este circuito elétrico equivalente é o mesmo circuito usado nas abordagens clássicas de regime permanente.

Com a utilização da modelagem por vetores espirais é possível decompor o torque eletromagnético em suas componentes de sequência positiva e negativa quando o MIBS está operando com tensão desbalanceada, uma vez que os vetores espirais permitem que o conceito de componentes simétricas seja aplicado não somente para o regime permanente, mas também para o regime transiente. Como resultado desta decomposição conclui-se que a soma dos torques de sequência positiva e negativa leva ao valor médio do torque resultante, fato este que não pode ser observado com a modelagem através da transformação $dq0$, pois esta não provê a separação das correntes em termos de suas componentes de sequência positiva e negativa, a não ser em regime permanente. Além disso, outra conclusão é que a dinâmica da velocidade depende somente das componentes de sequência positiva e negativa, pois as oscilações de torque não produzem trabalho efetivo.

Outro fato que merece destaque é que as componentes de seqüência negativa das correntes, sejam elas de rotor ou estator, possuem os valores de regime transiente muito próximo dos valores de regime permanente, ou seja, a dependência exponencial do transiente não é tão acentuada como nos casos das correntes de seqüência positiva.

Com relação à montagem prática, os valores de regime permanente obtidos mostraram-se menores que os valores preditos pelo modelo teórico, entretanto, no regime transiente a constatação foi oposta a do regime permanente, para o motor ensaiado.

6.2 Proposta de Continuidade

Como propostas de continuidade do trabalho podem ser consideradas as seguintes etapas:

- Aplicação da teoria dos vetores espirais na modelagem do motor de indução monofásico operando como bifásico assimétrico;
- Propor um circuito elétrico equivalente que seja válido para o regime permanente e transiente para o motor monofásico;
- Implantação de estratégias de controle baseada na modelagem com vetores espirais aplicadas ao motor monofásico;
- Determinação dos parâmetros da máquina de indução bifásica simétrica e assimétrica através de outros métodos.

Capítulo 7

Referências

- (1) MAKKU, A-R. A. M.; ABDEL-RAHIM, G. M.; EL-LATIF, N. A. A Novel DC Chopper Drive for a Single-Phase Induction Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, February 1995, vol. 42, p. 33 – 39.
- (2) LIU, T-H. A Maximum Torque Control with a Controlled Capacitor for a Single-Phase Induction Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, February 1995, vol. 42, p. 17 – 24.
- (3) ROCHA, R.; MARTINS FILHO, L. S.; MELO, J. C. D. A Speed Control for Variable-Speed Single-Phase Induction Motor Drives. *IEEE ISIE*, 20-23 June 2005, vol. 1, p. 43 – 48.
- (4) CORRÊA, M. B. R.; JACOBINA, C. B.; LIMA, A. M. N.; SILVA, E. R. C. A Novel DC Chopper Drive for a Single-Phase Induction Motor. *IEEE Transactions on Power Electronics*, July 2002, vol. 17, p. 517 – 523.
- (5) BLAABJERG, F.; LUNGANU, F.; SKAUG, K.; TONNES, M. Two-Phase Induction Motor Drives – Low-cost topologies for TPIM drives in industrial applications. *IEEE Industrial Applications Magazine*, July/August 2004, vol. 10, p. 24 – 32.
- (6) CHOMAT, M.; LIPO, T. Adjustable-Speed Single-Phase IM Drive With Reduced Numbers of Switches. *IEEE Transactions on Industry Applications*, May/June 2003, vol. 39, p. 819 – 825.
- (7) COLLINS, E. R. Torque and Slip Behavior of Single-Phase Induction Motors Driven from Variable-Frequency Supplies. *IEEE Transactions on Industry Applications*, May/June 1992, vol. 28, p. 710 – 715.
- (8) TOMASELLI, L. C.; LAZZARIN, T. B.; MARTINS, D. C.; BARBI, I. Drive for Symmetrical Two-Phase Induction Machine using Vector Modulation. *VI Induscon*, 2004.
- (9) ABDEL-RAHIM, N. M.; SHALTOUT, A. A. Slip-Frequency Control Induction Motor Operated as Two-Phase Motor. *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2-6 November 2004, p. 1417– 1422.
- (10) REYCE, Sh.; VAEZ-ZADEH, S. Vector Control of Single-Phase Induction Macnine with Maximum Torque Operation. *IEEE ISIE*, 20-23 June 2005, vol. 3, p. 923 – 928.
- (11) CORRÊA, M. B. R.; JACOBINA, C. B.; LIMA, A. M. N.; SILVA, E. R. C. Rotor-Flux-Oriented Control of a Single-Phase Induction Motor Drive. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, August 2000, vol. 47, p. 832 – 841.

- (12) POPESCU, M.; IONEL, D. M.; DORRELL, D. G. Vector Control of Unsymmetrical Two-Phase Induction Machine, *IMDC 2001*, p. 95–101.
- (13) JABBAR, M. A.; KHAMBADKONE, A. M.; YANFENG, Z. Space-Vector Modulation in a Two-Phase Induction Motor Drive for Constante Power Operation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, October 2004, vol. 51, p. 1081 – 1088.
- (14) JANG, Do-H.; YOON, Duck-Y. Space-Vector PWM Technique for Two-Phase Inverter-Fed Two-Phase Induction Motors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, March/April 2003, vol. 51, p. 542 – 549.
- (15) KRAUSE, P. C.; WASYNCHUK, O.; SUDHOFF, S. D. *Analysis of Electric Machinery*. Piscataway: IEEE PRESS, 1995.
- (16) KRAUSE, P. C. Simulation of Unsymmetrical 2-Phase Induction Machines. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, November 1965, vol. 84, p. 1025 – 1037.
- (17) ONG, Chee-M. *Dynamic simulation of electric machinery : using MATLAB/SIMULINK*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.
- (18) YAMAMURA, S. *AC Motors for High-Performance Applications*. New York: Marcel Dekker Inc., 1986.
- (19) YAMAMURA, S. *Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machine*. New York: Claredo Press Oxford (Monographs in electrical and electronic engineering: 26), 1992.
- (20) FERRAZ, W. D. *Modelagem e Controle de Conjugado do Motor de Indução Utilizando o Método de Aceleração de Campo (FAM)*, São Carlos: Departamento de Engenharia Elétrica; Escola de Engenharia de São Carlos, 1997, 76 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica.
- (21) FORTESCUE, C. L. Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks, *Trans. AIEE*, 1918, vol. 37, p. 1027–1140.
- (22) TSUJI, M.; YAMADA, E.; YAMADA, K.; OYAMA, J. An Analysis of the Field Acceleration Method and Vector Control of Induction Motors. *Electrical Engineering in Japan*, February 1993, vol. 113, p. 79–90.
- (23) KOVACS, K. P. Some Remarks of Prof Yamamura's Lecture about Theories of AC Motor Analysis and Control. *Int. Conf. on Electrical Machines*, Pisa, Italy, September 1988, p. 7–9.
- (24) STEPINA, J. Complex Equations for Electric Machines at Transient Conditions. *Proceedings of ICEM*, 1990, p. 43–47.
- (25) ROSSI, R. D. F. *Alternativas de Controle Vetorial do Motor de Indução – Orientação pelo Campo versus Aceleração de Campo*. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 1993, 131 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica.

- (26) OLIVEIRA JUNIOR, A. A. Considerations About the Induction Motor Model Using Spiral Vectors. *Conferência de Aplicações Industriais*, São Paulo, 1998, vol. 3, p. 245–248.
- (27) MENAA, M.; TOUHAMI, O.; IBTIOUEN, R.; IUNG, C. Vector Control of Induction Motor by Spiral Vector Theory. *IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste, Italy, 1-4 September 1998, vol. 2, p. 1265–1270.
- (28) MENAA, M.; TOUHAMI, O.; IBTIOUEN, R. Estimation of Rotor Resistance of an Induction Motor Using Extended Kalman Filter and Spiral Vector Theory. *Proceedings of IEEE Conference on Control Applications*, 23-25 June 2003, vol. 2, 1262–1266.
- (29) DEL TORO, V. *Electromechanical Devices for Energy Conversion and Control Systems*. Englewood: PRENTICE-HALL, INC., 1968.
- (30) GOURISHANKAR, V. *Conversion de Energia Electromecanica*. México: Representaciones y Servicios de Ingenieria S.A., 1975.
- (31) Venkata, R. *Transient Analysis of Single-Phase Induction Motors*. New York: Asia Publishing House, 1964.
- (32) BARBI, I. *Teoria Fundamental do Motor de Indução*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1985.
- (33) BOFFI, L. V.; SOBRAL Jr, M.; DANGELO, J. C. *Conversão Eletromecânica de Energia*. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1977.
- (34) MOZAMBANI, J. A. *Estudo do Conversor Mono-trifásico Rotativo, Utilizando um Motor de Indução Bifásico*, São Carlos: Departamento de Engenharia Elétrica; Escola de Engenharia de São Carlos, 1991, 146 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica.
- (35) McPHERSON, G.; LARAMORE, R. D. *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*. New York: WILEY, 1990.
- (36) UMANS, S. D. Steady-state, Lumped-Parameter Model for Capacitor-Run, Single-Phase Induction Motors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, January/February 1996, vol. 32, p. 169 – 179.
- (37) BUSTMANTE, E. F. Evaluating The Parameters of the Equivalent Circuit Model of Single-Phase Induction Motors. *Electric Machines and Power Systems*, 1987, vol. 13, p. 173 – 184.
- (38) COUTO, E. B. *Identificação Paramétrica de Um Motor de Indução Trifásico Através de Ensaio Degrau em Corrente Contínua*, São Carlos: Departamento de Engenharia Elétrica;

Escola de Engenharia de São Carlos, 1996, 90 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica.

(39) SILVA, A. A. S. *Identificação Paramétrica de Uma Máquina Assíncrona pelo Método da Potência Reativa*, São Carlos: Departamento de Engenharia Elétrica; Escola de Engenharia de São Carlos, 1996, 89 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica.