Campus de São Carlos

ABORDAGEM DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA
ÓTIMO POR MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR
VIA PENALIDADE QUADRÁTICA E FUNÇÃO
LAGRANGEANA AUMENTADA

Autora: Clebea Araújo Nascimento

Orientador: Prof.Dr. Geraldo R.M. da Costa

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

✓

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica

*Abordagem do Problema de Fluxo de Potência Ótimo por
Métodos de Programação Não-Linear Via Penalidade
Quadrática e Função Lagrangeana Aumentada*

Clebea Araújo Nascimento

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador : Prof. Dr. Geraldo R. M. da Costa

São Carlos

1997

DEDALUS - Acervo - EESC

31100035928

Class.	TESE-EESC
Cutt.	3867
Tombo	T153197

Área. Engenharia Elétrica.

st 0934054

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

N244a Nascimento, Clebea Araújo
Abordagem do problema de fluxo de potência
ótimo por métodos de programação não-linear via
penalidade quadrática e função Lagrangeana
aumentada. -- São Carlos, 1997.

Dissertação (Mestrado). -- Escola de Engenharia
de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1997.
Área: Engenharia Elétrica
Orientador: Prof. Dr. Geraldo R. M. da Costa

1. Otimização não-linear. 2. Multiplicadores de
Lagrange. 3. Lagrangeana aumentada. 4. Função
penalidade. 5. Sistemas elétricos de potências.
I. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidata: Licenciada **CLEBEA ARAUJO NASCIMENTO**

Dissertação defendida e aprovada em 25-7-1997
pela Comissão Julgadora:

Prof. Doutor **GERALDO ROBERTO MARTINS COSTA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Livre-Docente **MARCOS NEREU ARENALES**
(Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **JOSÉ ROBERTO SANCHES MANTOVANI**
(Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira)

Prof. Doutor **DENIS VINICIUS COURY**
Coordenador da Área de Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais,
Maria e Zenildo,
meus primeiros e eternos educadores.*

AGRADECIMENTOS

Antes de mais nada, agradeço à minha família: minha mãe, meu pai, meus irmãos Cássio e Adriano, minhas pequenas sobrinhas Emanuela, Dandara e Mayara e minhas cunhadas Elenize e Itimarce, por manterem em mim a chama necessária para realizar este trabalho, apesar da enorme saudade.

Minha vida acadêmica junto ao departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos-USP foi profícua nas relações pessoais encontradas. Esse trabalho tem muito de cada uma dessas pessoas. Agradeço:

Ao professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa, pela orientação e ajuda no decorrer deste trabalho. Aos professores Dr. Marcos Arenales e Dr. Marinho de Andrade, pelas sugestões dadas, como banca examinadora de qualificação, com a qual foi possível finalizar esta dissertação. À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudo concedida. Ao casal amigo, Cristina e Ricardo, em quem encontrei coragem, tranquilidade e principalmente amadurecimento, em alguns momentos difíceis que aqui passei. À turma de Mestrado: Mário, Patrícia, Elenilton, Luís, Renato, Hélio, Marcelo, Arthur, Guilherme, João Bosco e Alexandre. Ao Carlos e Alessandra, pela inestimável cooperação nos programas computacionais.

A enorme saudade da minha família foi muitas vezes esquecida graças aos amigos que aqui encontrei. Agradeço: Às meninas da minha república, Rô, Ci e Carol, pela convivência, respeito, amizade e principalmente pela “grande família” que construímos nas nossas “puxadas de papo”. À minha amiga Lú (Luciana Martinez) pela amizade e ajuda. Aos amigos e companheiros, Adriana e Ednilson, por quem carrego muita admiração, e a tantos outros a quem peço desculpas pelas omissões.

SUMÁRIO

<i>Lista de figuras</i>	<i>vi</i>
<i>Lista de tabelas</i>	<i>vii</i>
<i>Lista de símbolos</i>	<i>viii</i>
<i>Resumo</i>	<i>ix</i>
<i>Abstract</i>	<i>x</i>
 <i>Capítulo 1</i>	
<i>Introdução</i>	<i>1</i>
<i>1.1 Introdução</i>	<i>1</i>
<i>1.2 Objetivos</i>	<i>2</i>
<i>1.3 O Fluxo de Potência Ótimo - FPO</i>	<i>2</i>
<i>1.4 Organização do Trabalho</i>	<i>4</i>
 <i>Capítulo 2</i>	
<i>Resolução de problemas de otimização restritos por meio de problemas de otimização irrestritos aproximados</i>	<i>5</i>
<i>2.1 Introdução</i>	<i>5</i>
<i>2.2 Caso convexo: Lagrangeana</i>	<i>6</i>
<i>2.2.1 Problema Lagrangeano</i>	<i>7</i>
<i>2.2.2 Representação Geométrica</i>	<i>9</i>
<i>2.2.3 Condições de Otimalidade para o Problema Lagrangeano</i>	<i>10</i>
<i>2.2.3.1 Ponto de sela</i>	<i>13</i>
<i>2.3 Caso Não-convexo: Penalidade</i>	<i>17</i>
<i>2.3.1 Problema Penalizado</i>	<i>18</i>
<i>2.3.2 Função Penalidade</i>	<i>19</i>
<i>2.3.3 Representação Geométrica</i>	<i>24</i>
<i>2.3.4 Condições de Otimalidade para o Problema Penalizado</i>	<i>27</i>

2.3.5 Restrições de Igualdade	28
2.3.6 Problema de Otimização Geral	28
2.4 Conclusões	29
 Capítulo 3	
Método da Função Lagrangeana Aumentada	31
3.1 Introdução	31
3.2 Lagrangeana Aumentada	32
3.2.1 Atualização dos Multiplicadores de Lagrange	34
3.2.2 Representação Geométrica	37
3.2.3 Restrições de Desigualdades	44
3.2.4 Problema de Otimização Geral	49
 Capítulo 4	
Testes e Resultados	50
4.1 Sistema Elétrico de 2 Barras	50
4.1.1 Resolução do problema FPO de 2 Barras pelo Método da Função Penalidade	54
4.1.2 Resolução do Problema FPO de 2 Barras pelo Método da Função Lagrangeana Aumentada	58
4.2 Resolução do Problema FPO de 8 Barras pelo Método da Função Lagrangeana Aumentada	61
 Capítulo 5	
Conclusões	64
Bibliografia	66
 Apêndice 1	
Apêndice 1	1
Apêndice 2	2
Apêndice 3	4

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 2.1: Representação Geométrica do Método da Função Lagrangeana para um Problema Convexo</i>	10
<i>Figura 2.2: Representação Geométrica do Método da Função Lagrangeana para um Problema Não-convexo</i>	16
<i>Figura 2.3: Representação do Problema Penalizado</i>	25
<i>Figura 2.4: Representação Geométrica do Método da Função Penalidade</i>	26
<i>Figura 3.1: Representação Geométrica da Função Lagrangeana Aumentada</i>	39
<i>Figura 3.2: Representação Geométrica da Iteração do Multiplicador de Lagrange</i>	43
<i>Figura 4.1: Representação de um Sistema Elétrico com 2 Barras</i>	51

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1: Resumo dos cálculos do Método da Função Penalidade Quadrática para um Sistema Elétrico de 2 Barras</i>	56
<i>Tabela 2: Resumo dos cálculos do Método da Função Lagrangeana Aumentada para um Sistema Elétrico de 2 Barras</i>	60
<i>Tabela 3: Resumo dos cálculos do Método da Função Lagrangeana Aumentada para um Sistema Elétrico de 8 Barras</i>	61

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{R}$	- reta real
$\mathbf{R}^n$	- espaço n-dimensional
λ	- vetor Multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade
μ	- vetor Multiplicador de Lagrange associado às restrições de desigualdade
∇_x	- gradiente com relação à variável x
$\{t_k\}$	- seqüência dos parâmetros de penalidades
ε	- perturbação da restrição e erro de tolerância
β	- função penalidade
z^2	- variáveis de folgas
e	- variáveis de folgas
P^{esp}	- potência ativa especificada
V^{min}	- limite mínimo da tensão
V^{max}	- limite máximo da tensão
θ	- ângulo de defasagem das tensões
g_{ij}	- condutância série entre a barra i e a barra j
b_{ij}	- susceptância da linha entre a barra i e a barra j
b^{sh}	- susceptância shunt
r_{ij}	- resistência da linha entre a barra i e a barra j
x_{ij}	- reatância da linha entre a barra i e a barra j
z_{ij}	- impedância série da linha entre a barra i e a barra j
y_{ij}	- admitância série da linha entre a barra i e a barra j
Y	- matriz admitância nodal
ΔP	- correção da variação da potência

RESUMO

Neste trabalho são estudadas três metodologias de otimização não-linear: o Método da Função Lagrangeana, o Método da Função Penalidade e o Método da Função Lagrangeana Aumentada. Com o estudo da Função Lagrangeana e do Método da Função Penalidade, foi possível alcançar a formulação da Função Lagrangeana Aumentada com o objetivo de resolver problemas de programação não-linear não-convexos. Testes numéricos são apresentados para o problema não-convexo de programação não-linear conhecido como Fluxo de Potência Ótimo.

Palavras chaves: Otimização não-linear, Multiplicadores de Lagrange, Lagrangeana Aumentada, Função Penalidade, Sistemas Elétricos de Potência.

ABSTRACT

In this dissertation, three nonlinear optimization methodologies are studied: the Lagrangian Function Method, the Penalty Function Method and Augmented Lagrangian Function Method. Through the studies of the Lagrangian Function and the Penalty function Method, it was possible to reach the formulation of the Augmented Lagrangian Function aiming to solve nonlinear nonconvex programming problems. Numerical tests are presented for the nonconvex nonlinear programming problem known as optimal power flow.

Keywords: nonlinear Optimization, Lagrange's Multipliers, Augmented Lagrangian Function, Penalty Function, Power Systems.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são apresentados: o contexto do tema da Dissertação - *Abordagem do Problema de Fluxo de Potência Ótimo por Métodos de Programação Não-linear Via Penalidade Quadrática e Função Lagrangeana Aumentada* dentro da área de otimização não-linear, o problema estudado, os objetivos principais a serem atingidos e a organização da dissertação.

1.1 Introdução

Quando um problema de programação não-linear não-convexo é analisado em termos de sua Função Lagrangeana Clássica pode existir um “Gap de Dualidade”, o que não ocorre para problemas convexos, isto é, minimização de funções convexas restritas a conjuntos convexos. Muitos pesquisadores têm questionado se o “Gap de Dualidade” em programação não convexa pode ser tratado pela alteração da Função Lagrangeana Clássica e que tal mudança seja computacionalmente eficiente. É

possível tratar este “gap” através do uso da Função Lagrangeana Aumentada, a qual possui termos de penalidade quadráticos.

Neste trabalho, é estudado as técnicas de programação não-linear que dão origem à Lagrangeana Aumentada e sua aplicação na resolução de um problema de Sistemas Elétrico de Potência.

1.2 Objetivos

Com a crescente utilização da Função Lagrangeana Aumentada e suas variantes na resolução de problemas de programação não-linear em particular para problemas na área de Engenharia Elétrica, é objetivo deste trabalho sintetizar os conceitos básicos associados a esta metodologia registrando sua eficiência na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. Aplicações numéricas foram realizadas para ilustrar o estudo realizado.

1.3 O Fluxo de Potência Ótimo - FPO

O FPO é um problema de otimização não-linear, estático, o qual determina um conjunto de variáveis ótimas de estado da rede, a partir de dados de carga e dos parâmetros do sistema. Uma função objetivo como: custo de geração; perdas ativas na transmissão ou outro critério qualquer é minimizada sujeita a restrições de igualdade e desigualdade. As restrições de igualdade representam as equações não-lineares do fluxo de potência e as restrições de desigualdade representam os limites de geração de potência ativa e reativa, de magnitude das tensões nos barramentos, dos taps nos transformadores, dos fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão e transformadores e das potências de intercâmbio entre áreas.

O FPO é um problema de otimização não-linear, não-convexo e pode ser representado matematicamente como:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\
& \text{s.a: } h(\mathbf{x}) = 0 \\
& \quad g(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& \quad \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}
\end{aligned} \tag{1}$$

onde:

$\mathbf{x}$ é o vetor das variáveis de estado;

$f(\mathbf{x})$ é a função objetivo;

$h(\mathbf{x})$ representa as equações do fluxo de potência;

$g(\mathbf{x})$ consiste os limites sobre as restrições funcionais do fluxo de potência;

$\mathbf{x}^{\min}$, $\mathbf{x}^{\max}$ limites das variáveis de estado.

Vários métodos têm sido desenvolvidos para resolver o problema de FPO, incluindo métodos de primeira ordem, métodos de segunda ordem e programação linear. Os métodos de primeira ordem utilizam gradiente da função objetivo para determinar como as variáveis de controle devem ser ajustadas para atingir o mínimo. Esses métodos caminham passo a passo pelo recálculo das informações, assegurando que todas as restrições sejam satisfeitas e executando o fluxo de potência até que a tolerância de convergência seja atingida. Nos métodos de segunda ordem pode-se destacar o da programação quadrática sucessiva, em que a função objetivo é aproximada por uma função quadrática. A cada passo do processo iterativo, as restrições são aproximadas por um conjunto de restrições linearizadas. A programação linear é usada para resolver problemas envolvendo função objetivo e restrições lineares. É aplicável aos problemas não-lineares pela aproximação linear da função objetivo e das restrições; neste caso, é necessário que a função objetivo seja separável. Na programação linear a formulação clássica do problema de FPO é modificada para expressar o FPO de forma adequada a um otimizador de

programação linear e tem-se mostrado eficiente na resolução do problema de otimização de sistemas de potência apresentando confiabilidade e velocidade.

1.4 Organização do Trabalho

Os capítulos seguintes estão assim organizados:

No capítulo 2, é apresentado e discutido o Método da Função Lagrangeana, visando a aproximar problemas de otimização restritos por problemas de otimização irrestritos e o Método da Função Penalidade.

No capítulo 3, é apresentado e discutido o Método da Função Lagrangeana Aumentada.

No capítulo 4, é feita a aplicação numérica dos Métodos da Função Penalidade e da Função Lagrangeana Aumentada para resolver um problema de fluxo de potência ótimo, sendo apresentados a formulação do problema, os cálculos do processo de otimização e comentários dos resultados obtidos.

Finalmente, no capítulo 5, encontram-se as conclusões do estudo realizado e as propostas futuras de trabalho.

Capítulo 2

Resolução de problemas de otimização restritos por meio de problemas de otimização irrestritos aproximados

São abordadas neste capítulo duas técnicas de resolução de problemas de otimização restritos por meio de problemas de otimização irrestritos aproximados.

2.1 Introdução

Dado um problema de otimização não-linear restrito, existe outro problema de otimização não-linear “irrestrito” ou que possui restrições mais “simples” comparadas com as restrições do problema original e que, sob certas suposições, possui a mesma solução ótima. Conseqüentemente, pode-se resolver o problema de otimização não-linear restrito indiretamente, pela resolução do problema de otimização não-linear “irrestrito” (Bazaraa, 1993).

A estratégia de solução dos métodos aqui apresentados consiste em relaxar certas restrições multiplicando-as por parâmetros que são alterados até chegar a uma solução ótima para o problema original restrito. No caso convexo essa relaxação chamamos de Lagrangeana e, no caso não-convexo, Penalidade.

2.2 Caso convexo: *Lagrangeana*

No ano de 1760 o matemático Lagrange, cujo nome é dado à técnica, propôs uma solução para o seguinte problema :

$$\begin{array}{ll} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a:} & (2) \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, \dots, p \end{array}$$

onde, f é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

h é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, a qual define a região de factibilidade que é representada pelo conjunto F a seguir:

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p \}$$

Segundo Lagrange, a solução de (2) pode ser obtida por ponderar o efeito das restrições na função objetivo, tornando (2) um problema irrestrito.

A aproximação de (2) por um problema irrestrito, foi baseada na possibilidade de resolução de um sistema de equações (e possivelmente inequações), que tem como característica atrativa o mesmo número de equações e incógnitas. Tal sistema é

referente às condições necessárias de otimalidade para um problema de otimização restrito. Para (2), essas condições são:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = \nabla_x f(\mathbf{x}) + \nabla_x h(\mathbf{x})' \lambda = 0 \quad (2a)$$

$$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda) = h(\mathbf{x}) = 0 \quad (2b)$$

onde L é a Função Lagrangeana associada à (2) dada por: $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda' h(\mathbf{x})$.

Nessa abordagem, modificações são feitas simultaneamente sobre $\mathbf{x}$ e λ . Por essa razão, métodos desse tipo são conhecidos como Lagrangeanos.

Os primeiros trabalhos usando a abordagem Lagrangeana foram realizados por (Everett, 1963), mostrando que a solução do problema (2), sob certas condições, pode ser alcançada através da solução do problema irrestrito.

2.2.1 Problema Lagrangeano

Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{s. a:} \\ &\quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \\ &\quad g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde, f é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$,

h é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$

g é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

As funções h e g definem a região de factibilidade que é representada pelo conjunto F :

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p, \text{ e } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \dots, m \}$$

A Função Lagrangeana associada ao problema (2.1) pode ser definida como:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}) \mid \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

onde, λ e μ são chamados de Multiplicadores de Lagrange.

A Função Lagrangeana $L(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ representada pela incorporação das restrições na função objetivo através dos Multiplicadores de Lagrange, é uma relaxação do problema (2.1). Pode-se observar que os multiplicadores associados às restrições de desigualdade são não negativos, enquanto que os multiplicadores associados às restrições de igualdade são irrestritos isto é, podem ser positivos ou negativos.

Resolver o problema (2.1) é equivalente a resolver o problema irrestrito, ou seja, encontrar λ^*_j e μ^*_i tais que, minimizem a Função Lagrangeana $L(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ (Bazaraa, 1993).

Desta forma, para resolver (2.1) os seguintes subproblemas podem ser resolvidos:

Fixados λ_0 e $\mu_0 \geq 0$, resolver:

$$\min_x L(\mathbf{x}, \lambda_0, \mu_0)$$

Determina-se um valor $\mathbf{x}^*$ tal que L aplicada neste ponto é mínima.

Atualiza-se λ_k e μ_k de maneira que o valor de $L(\mathbf{x}, \lambda_k, \mu_k)$ seja aumentado, mantendo-se $\mu_k \geq 0$, para qualquer k , e o processo é repetido, até que o ponto de ótimo do problema original seja alcançado.

2.2.2 Representação Geométrica

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \quad & g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

A Função Lagrangeana associada ao problema (2.2) é dada por:

$$L(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) - \mu g(\mathbf{x}) \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mu \geq 0.$$

O contorno de $f(\mathbf{x}) - \mu g(\mathbf{x}) = k$ é ilustrado no espaço $[g(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})]$ da Figura (2.1) pela reta pontilhada com inclinação $+\mu$. Assim, para um dado $\mu > 0$, o valor ótimo do problema Lagrangeano é a interseção da reta $f(\mathbf{x}) - \mu g(\mathbf{x})$ com o eixo $f(\mathbf{x})$.

Atualizando μ , uma nova reta $f(\mathbf{x}) - \mu' g(\mathbf{x})$ é encontrada, Figura (2.1).

Figura 2.1: Representação Geométrica do Método da Função Lagrangeana para um Problema Convexo

Da Figura (2.1) observa-se que o Método da Função Lagrangeana consiste em encontrar a inclinação máxima da reta $f(x) - \mu g(x) = k$ que intercepta o eixo $f(x)$. A solução ótima da Função Lagrangeana, variando somente os Multiplicadores de Lagrange, é dada por μ' , a qual coincide com o valor ótimo do problema (2.2).

2.2.3 Condições de Otimalidade para o Problema Lagrangeano

TEOREMA 2.1:

Um vetor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global do problema (2.1) se existirem os escalares λ_j^* , $j = 1, \dots, p$, e $\mu_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, tais que:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) &= f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) \\
 &= \min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i^* g_i(\mathbf{x}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{(iii)} \quad h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

$$\text{(iv)} \quad g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

O Teorema 2.1 enuncia as condições suficientes para otimalidade, podendo não ser necessárias, pois podem não existir λ^* e $\mu^* \geq 0$ tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$ satisfaça as condições (i) e (ii).

Um resultado muito importante no desenvolvimento das condições necessárias de otimalidade surgiu com os resultados independentes de Karush em 1939, Kuhn e Tucker em 1951, chamadas condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplesmente condições de KKT, cujo resultado é expresso em forma do teorema abaixo:

TEOREMA 2.2:

Seja $\mathbf{x}^*$ uma solução ótima local do problema (2.1). Suponha que as funções f , h_j para qualquer j , e g_i para $i \in I$, funções diferenciáveis em $\mathbf{x}^*$, onde $I = \{i \mid g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$ é o conjunto dos índices das restrições ativas em $\mathbf{x}^*$ (apêndice 1). Suponha também que as funções g_i para $i \notin I$, as funções inativas em $\mathbf{x}^*$, sejam continuamente

diferenciáveis em $\mathbf{x}^*$. Então, existem escalares λ_j , para $j = 1, \dots, p$, e $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, tais que:

$$(i) \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$(ii) \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iii) \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iv) g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(v) h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

Observa-se pelo Teorema 2.2, que as restrições inativas não têm influência na caracterização do mínimo local do problema (2.1), pois, se $g_i(\mathbf{x}^*) > 0$ tem-se $\mu_i^* = 0$, pela condição (ii). Nota-se, também, que as condições de KKT são uma reformulação das condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, visto que existe uma relação de equilíbrio, balanceada pelos Multiplicadores de Lagrange, entre o vetor gradiente da função objetivo e os vetores gradientes das restrições ativas, ou seja: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*)$. Esse equilíbrio pode ser visto em detalhes no apêndice 2.

Também se nota que as condições de KKT enunciadas pelo Teorema 2.2 podem somente identificar pontos candidatos a ponto de ótimo, sem nenhuma garantia de que o ponto identificado seja realmente o ótimo, já que as condições são somente necessárias e não suficientes.

A busca de solução ótima para a Função Lagrangeana é a base de várias estratégias que tentam encontrar os pontos x^* , λ^* e μ^* que satisfaçam as condições de otimalidade global enunciadas no Teorema 2.1. A fundamentação teórica dessas estratégias está baseada no conceito de ponto de sela, a qual é estudada nas próximas seções.

2.2.3.1 Ponto de sela

Seja a Função Lagrangeana associada ao problema (2.1):

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) - \mu' g(x) \mid \mu \geq 0$$

Uma solução (x^*, λ^*, μ^*) é por definição um ponto de sela da Função Lagrangeana $L(x, \lambda, \mu)$ se, e somente se:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*), \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^n$$

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \geq L(x^*, \lambda, \mu), \text{ para qualquer } \mu \geq 0$$

Essas desigualdades podem ser vistas da seguinte forma:

Seja uma função L^* de x que minimiza $L(x, \lambda^*, \mu^*)$ com λ^* e μ^* fixos, e uma função L' de λ e μ que maximiza $L(x^*, \lambda, \mu)$ com x^* fixo, definidas como:

$$L^*(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) \quad (2.3)$$

$$L'(\lambda, \mu) = \max_{\lambda, \mu \geq 0} L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) \quad (2.4)$$

De (2.3), tem-se:

$$L^*(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) \leq L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*)$$

Tomando-se, para um dado $\mathbf{x}$, um caso particular de igualdade:

$$L^*(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) = L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*)$$

e considerando a condição (i) do Teorema 2.1:

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) = L^*(\mathbf{x}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (2.5)$$

De maneira análoga, de (2.4) tem-se:

$$L'(\lambda, \mu) = \max_{\lambda, \mu \geq 0} L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) \geq L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu)$$

Tomando-se, para um dado (λ, μ) , um caso particular de igualdade:

$$L'(\lambda, \mu) = \max_{\lambda, \mu \geq 0} L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) = L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu)$$

Mas,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) &= f(\mathbf{x}^*) + \lambda h(\mathbf{x}^*) - \mu g(\mathbf{x}^*) \\ &\leq f(\mathbf{x}^*) + \lambda^* h(\mathbf{x}^*) - \mu^* g(\mathbf{x}^*) \\ &= L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \end{aligned}$$

pois, pelo Teorema 2.1

$$\mu^* g(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ e } h(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ e sendo } \mu g(\mathbf{x}^*) \geq 0.$$

Tem-se:

$$L'(\lambda, \mu) = L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) \leq L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \quad (2.6)$$

Então:

$$L'(\lambda, \mu) = L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) \leq L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) = L^*(\mathbf{x})$$

Ou equivalentemente,

$$L'(\lambda, \mu) \leq L^*(x)$$

O “Gap de Dualidade” existe quando a desigualdade acima é estritamente satisfeita e, nessa situação, o Método da Função Lagrangeana falha na busca da solução ótima do problema original, como pode ser visto pela Figura (2.2).

Figura 2.2: Representação Geométrica do Método da Função Lagrangeana para um Problema Não-convexo

Para superar tal dificuldade, é necessária e suficiente a existência de um ponto de sela na Função Lagrangeana irrestrita, como mostra o teorema abaixo.

TEOREMA 2.3:

O ponto (x^*, λ^*, μ^*) com $\mu^* \geq 0$, satisfaz as condições de otimalidade enunciadas no Teorema 2.1 se, e somente se, é um ponto de sela da Função Lagrangeana.

O Teorema 2.3 mostra que a definição de ponto de sela e o Teorema 2.1 são equivalentes.

Mesmo que o problema original tenha uma solução ótima, não está necessariamente assegurada a existência do ponto de sela na Função Lagrangeana. A convexidade do problema original garante tal existência.

2.3 Caso Não-convexo: *Penalidade*

Métodos que usam Funções Penalidades aproximam problemas de otimização restritos por meio de um único problema irrestrito equivalente ou numa sequência de problemas irrestritos. A função objetivo do problema modificado depende das penalidades, sendo que os pontos de minimização irrestritos também são soluções do problema restrito para valores suficientemente grandes das penalidades.

A aproximação do problema de otimização restrito por problemas de otimização irrestritos é atribuída a (Courant, 1943), e foi empregada em otimização numérica por muitos anos. Entretanto, o método foi popularizado, principalmente, pelos trabalhos clássicos de Fiacco e McCormick, na década de 60, sob o título SUMT (Técnica de Minimização Seqüencial Irrestrita).

Basicamente, existem duas maneiras de aproximar problemas de otimização restritos por problemas de otimização irrestritos. Na primeira delas, chamada Método da Função Penalidade Exterior ou somente penalidade, um termo de penalidade é adicionado à função objetivo para qualquer violação das restrições. Este método gera uma sequência de pontos infactíveis, em que o ponto limite da sequência gerada é uma solução ótima para o problema de otimização restrito. O nome penalidade exterior surge da trajetória infactível que o método toma em direção ao ponto de ótimo procurado. Na segunda aproximação, chamada de Função Penalidade Interior ou simplesmente barreira, adiciona-se um termo de barreira à função objetivo do problema restrito a fim de evitar que os pontos gerados pelo método saiam da região de factibilidade. Este método gera uma sequência de pontos factíveis, em que o ponto

limite da sequência gerada é uma solução ótima para o problema de otimização restrito.

É interesse deste trabalho somente o estudo do Método da Função Penalidade Quadrática.

2.3.1 Problema Penalizado

Primeiro é apresentado o Método da Função Penalidade para problemas com restrições de desigualdade e, em seguida, realiza-se um estudo para problemas com restrições de igualdade e desigualdade.

Seja o problema (2.1), com somente restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \quad & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.7)$$

A idéia do Método da Função Penalidade é substituir o problema (2.7) por um problema irrestrito da forma:

$$\min \{f(\mathbf{x}) + tp(\mathbf{x})\} \quad (2.8)$$

onde t é chamado de parâmetro de penalidade que assume valores da sequência $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $t_{k+1} > t_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$
- $\{t_k\} \rightarrow \infty, k = 0, 1, 2, \dots$

e p é uma função do $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, chamada de Função Penalidade, que depende das restrições g_i e satisfaz as seguintes condições:

- $p(\mathbf{x})$ é uma função contínua em $\mathbf{R}^n$
- $p(\mathbf{x})$ é uma função não-negativa para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
- $p(\mathbf{x})$ é uma função nula se, e somente se, $\mathbf{x}$ for ponto factível.

Para valores grandes de t , o mínimo do problema (2.7) deverá ocorrer na região onde a função p é pequena, ou seja, deseja-se que as soluções correspondentes se aproximem da região de factibilidade e minimizem $f(\mathbf{x})$. Então, quando $\{t_k\} \rightarrow \infty$ espera-se que a seqüência de soluções do problema (2.9) convirja para a solução do problema (2.7).

2.3.2 Função Penalidade

Para obter a função p , ou seja, a função que transforma o problema restrito em um problema irrestrito, perturbações nas condições necessárias de KKT para o problema restrito são realizadas, segundo (Fiacco e McCormick, 1968).

Sejam as condições necessárias de KKT, como visto no Teorema 2.2, para o problema (2.7):

$$g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad i=1, \dots, m \quad (\text{i})$$

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i=1, \dots, m \quad (\text{ii})$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m \quad (\text{iii})$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{iv})$$

Aumentando a região de factibilidade do problema (2.7) pela relaxação das restrições, da seguinte forma:

$$g_i(\mathbf{x}) \geq -r, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

sendo r um número positivo e supondo que, para r pequeno, exista um $\mathbf{x}$ que dependa de r próximo da solução ótima $\mathbf{x}^*$ do problema (2.7), e que satisfaça a relaxação (2.9).

Além disso, realizando uma perturbação da condição (ii), de maneira que, ela exista para valores infactíveis e reduza para a própria equação quando $r \rightarrow 0$, a perturbação apresenta a seguinte forma:

$$\mu_i r = -\min [0, g_i(\mathbf{x})], \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

Se para r pequeno, $\mathbf{x}(r)$ satisfaz (2.9), ou seja, para algum i , $g_i[\mathbf{x}(r)] \geq 0$, então:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu_i(r) = 0$$

Se $g_i[\mathbf{x}(r)] < 0$ então:

$$\mu_i r = -g_i[\mathbf{x}(r)], \quad i = 1, \dots, m$$

tomando o limite quando $r \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \mu_i(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \{-\min [0, g_i[\mathbf{x}(r)]]\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \{-g_i[\mathbf{x}(r)]\} \\
 &= -g_i\{\lim_{r \rightarrow 0} [\mathbf{x}(r)]\} \\
 &= -g_i(\mathbf{x}^*) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Como por (2.9), $g_i[\mathbf{x}(r)] \geq -r$, $i = 1, \dots, m$, e por (2.10) $\lim_{r \rightarrow 0} \mu_i(r).r = 0$ então:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu_i(r)g_i[\mathbf{x}(r)] = 0$$

A condição (ii) é satisfeita no limite.

Também pode ser observado que $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, m$, é satisfeito por (2.10).

As demais das condições necessárias são perturbadas da seguinte maneira:

$$\mu_i(r) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11)$$

$$\nabla f[\mathbf{x}(r)] - \sum_{i=1}^m \mu_i(r) \nabla g_i[\mathbf{x}(r)] = 0 \quad (2.12)$$

Para cada i , resolvendo a equação (2.10) e substituindo em (2.12), tem-se:

$$\nabla f[\mathbf{x}(r)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\min[0, g_i[\mathbf{x}(r)]]}{r} \nabla g_i[\mathbf{x}(r)] = 0 \quad (2.13)$$

A equação (2.13) representa a primeira derivada de uma função, a qual se anula no ponto $\mathbf{x}(r)$, ou seja, satisfeita a condição necessária de primeira ordem, $\mathbf{x}(r)$ será um ponto de mínimo local irrestrito da integral indefinida de (2.13):

$$f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\{\min[0, g_i(\mathbf{x})]\}^2}{2r} \quad (2.14)$$

A função $\sum_{i=1}^m \{\min[0, g_i(\mathbf{x})]\}^2$ é uma função contínua, não-negativa e, para valores de $\mathbf{x}$ factíveis a função assim definida se anula, então, a função $\sum_{i=1}^m \{\min[0, g_i(\mathbf{x})]\}^2$ satisfaz as propriedades de uma Função Penalidade.

Conseqüentemente obteve-se $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \{\min[0, g_i(\mathbf{x})]\}^2$, como sendo a Função Penalidade Quadrática.

Por um outro lado, como r é um número positivo que tende para zero, tomando $t = \frac{1}{r}$, t será um número positivo tendendo para o infinito positivamente, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty, \quad \text{se} \quad t_k = \frac{1}{r_k}, \quad \text{com } r_k \rightarrow 0$$

Definindo t_k como acima, tem-se que $\{t_k\}$ é uma seqüência monótona crescente de valores positivos, satisfazendo as propriedades vistas anteriormente para a seqüência t .

Substituindo t e p na função (2.14) tem-se a seguinte função:

$$P(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t p(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

onde (2.15) é chamada de função objetivo do problema penalizado associado ao problema (2.7), ou seja o problema penalizado de (2.7) é:

$$\text{minimizar } \left\{ f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t p(\mathbf{x}) \right\}$$

Então,

Dado $t_1 > 0$, minimiza-se $P(\mathbf{x}, t_1)$ e determina-se $\mathbf{x}^*(t_1)$, ponto de mínimo local irrestrito da função $P(\mathbf{x}, t_1)$.

Atualiza-se o termo de penalidade e tomando $t_2 > t_1 > 0$, o processo é repetido até que o ponto de ótimo do problema (2.7) seja alcançado.

Procedendo dessa maneira, minimiza-se $P(\mathbf{x}, t_k)$ por uma seqüência monótona crescente estrita $\{t_k\}$. Quando $\{t_k\} \rightarrow +\infty$, espera-se que a seqüência de mínimos locais irrestritos, $\{\mathbf{x}^*(t_k)\}$, tenda para $\mathbf{x}^*$, mínimo local restrito para o problema (2.7).

2.3.3 Representação Geométrica

Para facilitar a visualização geométrica do Método da Função Penalidade, considera-se o seguinte:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a:} \\ &h(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Relaxando a restrição $h(x)$, tem-se:

$$h(x) = \varepsilon$$

Assim, o seguinte problema relaxado de (2.16) é obtido:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a:} \\ &h(x) = \varepsilon \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para um $t > 0$ fixo, o problema penalizado é:

$$\text{minimizar } \left\{ f(x) + \frac{1}{2} t[h(x)]^2 \right\}$$

A Figura (2.3) mostra a parábola $f(x) + \frac{1}{2} t[h(x)]^2$ ilustrada no espaço $[h(x), f(x)]$.

Figura 2.3: Representação do Problema Penalizado

Como $f(x) = -\frac{1}{2}t[h(x)]^2 + k$ e $h(x)$ é a variável no problema penalizado e tendo tal variável quadrática sinal negativo, obtém-se uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Como $f(x) + \frac{1}{2}t[h(x)]^2$, com $t > 0$ fixo, está sendo minimizada então, a parábola $f(x) + \frac{1}{2}t[h(x)]^2$ deve ser deslocada de cima para baixo tanto quanto possível, tendo pelo menos um ponto em comum com a área hachurada. Isso significa que, para um dado $t > 0$, o valor ótimo do problema penalizado é a interseção da parábola $f(x) + \frac{1}{2}t[h(x)]^2$ com o eixo $f(x)$.

Tomando $t' > t$, o processo acima é repetido e uma nova parábola, $f(x) + \frac{1}{2}t'[h(x)]^2$ é encontrada, Figura (2.4).

Figura 2.4: Representação Geométrica do Método da Função Penalidade

Pela Figura (2.4), pode-se notar que a solução do problema penalizado é infactível para o problema original, ou seja, os pontos $x^*(t)$ e $x^*(t')$ têm imagens fora da semi-reta que representa o conjunto de factibilidade. Além disso, observa-se que os pontos gerados pela minimização dos problemas penalizados são menores que o ponto de ótimo do problema original. Também é notado que, com o aumento do termo de penalidade t , a parábola $f(x) + \frac{1}{2}t[h(x)]^2$ torna-se cada vez mais fechada, fazendo com que o ponto de tangenciamento da parábola com o conjunto hachureado se aproxime cada vez mais do ponto de ótimo do problema original.

Como visto, o Método da Função Lagrangeana falha com a presença do “Gap de Dualidade”, já que a aproximação Lagrangeana é linear. Ao contrário, o Método da Função Penalidade com aproximação não-linear pode alcançar o ponto de ótimo mesmo com a presença do “Gap de Dualidade”, desde que os parâmetros de penalidades t sejam suficientemente grandes.

2.3.4 Condições de Otimalidade para o Problema Penalizado

LEMA 2.1:

$$(1) P[\mathbf{x}^*(t_{k+1}), t_{k+1}] \geq P[\mathbf{x}^*(t_k), t_k]$$

$$(2) p[\mathbf{x}^*(t_k)] \geq p[\mathbf{x}^*(t_{k+1})]$$

$$(3) f[\mathbf{x}^*(t_{k+1})] \geq f[\mathbf{x}^*(t_k)]$$

Pelo Lema 2.1, a cada ponto gerado pelo Método da Função Penalidade, a função objetivo do problema penalizado aumenta seu valor numérico, sendo que a função objetivo do problema original (2.7) e os pontos de mínimo gerados pelo método são aproximados cada vez mais da região de factibilidade.

Da interpretação geométrica feita anteriormente nota-se que as desigualdades vistas no Lema 2.1, seguem diretamente da definição de $\mathbf{x}^*(t_k)$ e da desigualdade $t_{k+1} > t_k > 0$, para qualquer $k = 0, 1, 2, \dots$

LEMA 2.2:

Seja $\mathbf{x}^*$ uma solução ótima para o problema (2.7). Então, para cada k tem-se:

$$f[\mathbf{x}^*(t_k)] \leq P[\mathbf{x}^*(t_{k+1}), t_{k+1}] \leq f(\mathbf{x}^*).$$

Já pelo Lema 2.2, o problema penalizado é limitado superiormente pelo valor ótimo do problema original (2.7).

TEOREMA 2.4:

Considere o problema original (2.7) onde, $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ são funções contínuas do $\mathbf{R}^n$. Seja $\{\mathbf{x}^*(t_k)\}$ a sequência de mínimos gerada pelo Método da

Função Penalidade. Então, qualquer ponto limite dessa sequência é solução ótima para o problema original (2.7).

2.3.5 Restrições de Igualdade

Seja o problema (2.1), com somente restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \quad & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sendo $p(\mathbf{x}) = [h(\mathbf{x})]^2$, uma função contínua no $\mathbf{R}^n$, não negativa para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, e uma função nula se, e somente se, $\mathbf{x}$ for ponto factível, então a função assim definida é uma Função Penalidade para o problema (2.18).

O problema penalizado associado ao problema (2.18) é dado por:

$$\text{minimizar} \left\{ f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p t_j [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\}$$

2.3.6 Problema de Otimização Geral

Os problemas com restrições de igualdade (2.18) e desigualdade (2.7) apresentados nas seções (2.3.5) e (2.3.2) respectivamente, são combinados para criarem a função penalizada para o problema de otimização geral (2.1), ou seja:

$$P(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p t_j [h_j(\mathbf{x})]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m t_i [\beta_i]^2 \quad (2.19)$$

onde $\beta_i = -\min[0, g_i(\mathbf{x})]$

2.4 Conclusões

Uma característica importante encontrada no Método da Função Lagrangeana é que várias técnicas de resolução de problemas na área de otimização são baseadas na filosofia desse método. Também é interessante sobre o ponto de vista computacional, pois induz à resolução de um sistema de equações que possui o mesmo número de equações e incógnitas, resultante das condições necessárias de otimalidade. Porém, uma das primeiras dificuldades encontrada no método é tratar da resolução do sistema quando sua dimensão torna-se elevada, já que para cada restrição, é associado um Multiplicador de Lagrange, aumentando assim o número de variáveis no problema.

Uma estratégia de solução pelo Método da Função Lagrangeana consiste em encontrar os Multiplicadores de Lagrange λ^* e $\mu^* \geq 0$ ótimos e, então, obter uma solução para o problema (2.1), tal que fiquem satisfeitas as condições de otimalidade. Contudo, esses multiplicadores podem não existir, como visto na seção (2.2.2). Para assegurar sua existência, é necessária a qualificação das restrições: suposição de convexidade de todas as funções envolvidas no problema, o conjunto de factibilidade deve ser convexo e alguma suposição de regularidade deve ser considerada. Porém, nem todos os problemas de otimização não-lineares apresentam tais características.

Já com relação ao Método da Função Penalidade percebe-se que a solução do problema penalizado pode ser escolhida arbitrariamente próxima da solução ótima do problema original, através da escolha do parâmetro de penalidade t , suficientemente grande. Entretanto, se tomarmos um t muito grande na tentativa de resolver o

problema penalizado, algumas dificuldades computacionais podem surgir, devido ao mal condicionamento do mesmo. Com um valor grande de t , maior ênfase será dada à factibilidade e rapidamente pode ser encontrado um ponto factível e uma parada prematura poderá acontecer, mesmo que este ponto esteja longe do ponto de ótimo.

Com o intuito de contornar tais dificuldades e de estender as idéias básicas da metodologia de penalidade, vários autores estudaram os seus aspectos numéricos, especialmente com relação a como fazer uma escolha ponderada do valor inicial do parâmetro de penalidade, como alterá-lo eficientemente, como aumentar a convergência da sequência de pontos gerados, como levar vantagem sobre a estrutura especial da Função Penalidade e como desenvolver novas técnicas para minimizar a função irrestrita. Baseado nesses aspectos, surgiu o Método da Função Lagrangeana Aumentada, que será discutido no próximo capítulo.

Capítulo 3

Método da Função Lagrangeana Aumentada

Neste capítulo é apresentado e discutido o Método da Função Lagrangeana Aumentada.

3.1 Introdução

A idéia básica do Método Original dos Multiplicadores, proposto independentemente por (Powell, 1969) e (Hestenes, 1969), foi fundir o Método da Função Penalidade com o Método da Função Lagrangeana, obtendo a Função Lagrangeana Aumentada. A motivação inicial dessa combinação era tentar evitar o problema do mal condicionamento associado ao Método da Função Penalidade, quando o fator de penalidade tendia para o infinito.

Como o Método dos Multiplicadores é uma combinação dos métodos da Função Penalidade e da Função Lagrangeana para resolver problemas de programação não-linear, tal combinação é interessante enquanto ganho proveniente dessas duas concepções sem as deficiências existentes em ambos os métodos quando tratados separadamente. Por suas características atrativas, o Método dos Multiplicadores e suas variações emergiram como uma classe importante e eficiente de métodos de otimização restrita.

O nome Método dos Multiplicadores se deve a Hestenes, e o método também é conhecido como Método da Função Lagrangeana Aumentada.

3.2 Lagrangeana Aumentada

O Método da Função Lagrangeana Aumentada foi originalmente desenvolvido para problemas com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{s. a:} \\ &h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.1}$$

Seja a Função Lagrangeana do problema (3.1):

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

A condição de estacionaridade da função $L(\mathbf{x}, \lambda)$ junto com a satisfação da equação que representa a factibilidade do problema (3.1) resultarão nas condições de otimalidade para o problema (3.1), ou seja:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla_{\lambda} L(\mathbf{x}, \lambda) = h_j(\mathbf{x}) = 0, j=1, \dots, p \end{cases}$$

Pode-se mostrar, por considerações teóricas, que o ponto de mínimo da Função Lagrangeana (3.2) sujeita à satisfação da restrição do problema (3.1) produz uma solução para o problema (3.1), ou seja:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \left\{ L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \right\} \\ \text{s. a:} \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, j=1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.3)$$

O problema (3.3) é equivalente ao problema (3.1), pois combinação das restrições estando na função objetivo não influencia no valor de mínimo do problema.

Transformando o problema (3.3) em um problema irrestrito, através da Função Penalidade Quadrática, obtém-se:

$$\min_{\mathbf{x}} L_A(\mathbf{x}, \lambda, t) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t \sum_{j=1}^p [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\} \quad (3.4)$$

A função objetivo $L_A(\mathbf{x}, \lambda, t)$ do problema (3.4) é a Função Lagrangeana Aumentada associada ao problema (3.1).

Enquanto a Função Lagrangeana Aumentada do problema (3.4) parece ser uma modificação simples do Método da Função Penalidade Quadrática, essa função tem algumas características interessantes. Primeiro, tomando os $\lambda_j = 0$ para qualquer j , a função objetivo do problema (3.4) passa a ser a Função Penalidade Quadrática. Nesse caso, o problema (3.1) é resolvido seqüencialmente, pela minimização de (3.4) com $t \rightarrow \infty$. Conhecendo a priori λ^* e tomando seu valor, somente uma minimização irrestrita seria suficiente para determinar o ponto de ótimo do problema (3.1). Porém, na prática não se conhece o valor de λ^* . Seria então necessário procurar uma maneira inteligente de reajustar os multiplicadores λ depois de cada minimização da forma (3.4) tal que, começando com um λ arbitrário, a aproximação do ponto de ótimo do problema (3.1) seja mais rápida.

3.2.1 Atualização dos Multiplicadores de Lagrange

O problema (3.1) é substituído por uma seqüência de minimização em $\mathbf{x}$ da forma (3.4) para λ e t fixos. Teoricamente, a condição necessária de primeira ordem deve ser satisfeita ao final de cada minimização de $L_A(\mathbf{x}, \lambda, t)$, ou seja:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L_A(\mathbf{x}, \lambda, t) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) + t \sum_{j=1}^p h_j(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.5)$$

a equação (3.5) pode ser escrita como:

$$\nabla_x L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \nabla_x f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p [\lambda_j + th_j(\mathbf{x})] \nabla_x h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.6)$$

Como $\boldsymbol{\lambda}$ e t são arbitrários, o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz a equação (3.6) é tal que $h(\mathbf{x}) \neq 0$. Isso nos leva a pensar em encontrar uma regra adequada de atualização dos λ_j tal que a condição de ponto de ótimo seja satisfeita exatamente, ou seja, $h(\mathbf{x}) = 0$.

Seja $(\lambda)_k$ o Multiplicador de Lagrange da presente iteração, e seja $(\lambda)_{k+1}$ o Multiplicador de Lagrange da próxima iteração.

Se $(\lambda)_{k+1}$ for escolhido como:

$$(\lambda_j)_{k+1} = (\lambda_j)_k + th_j(\mathbf{x}) \quad j=1, \dots, p \quad (3.7)$$

a equação (3.6) reduz para:

$$\nabla_x L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \nabla_x f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p (\lambda_j)_{k+1} \nabla_x h_j(\mathbf{x}) = 0$$

significando que a combinação de $\mathbf{x}$ e $(\lambda)_{k+1}$ deste modo obteve exatamente a satisfação da condição de ponto de ótimo.

Ao final de cada iteração, sempre que o valor dos Multiplicadores de Lagrange são mudados de $(\lambda)_k$ para $(\lambda)_{k+1}$, a Função Lagrangeana Aumentada $L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)$ aumenta seu valor pela soma:

$$L_A[\mathbf{x}, (\lambda)_{k+1}, t] - L_A[\mathbf{x}, (\lambda)_k, t] = t \sum_{j=1}^p [h_j(\mathbf{x})]^2 \quad (3.8)$$

A positividade do lado direito da equação (3.8) é a chave do mecanismo sobre o qual o Método da Função Lagrangeana Aumentada é baseada.

Apesar da iteração principal no Método da Função Lagrangeana Aumentada ser com relação ao Multiplicador de Lagrange λ , o parâmetro de penalidade t também é reajustado durante o processo de otimização. Porém, t é aumentado como no Método da Função Penalidade Quadrática, exceto que um limitante superior finito é agora usado, tal que t seja limitado para $(t)_{\max}$.

Então,

Dados λ_0 e t_0 , minimiza-se $L_A(\mathbf{x}, \lambda_0, t_0)$, e determina-se $\mathbf{x}^*(\lambda_0, t_0)$ ponto de mínimo da função $L_A(\mathbf{x}, \lambda_0, t_0)$.

Atualiza-se λ_k por (3.7) e t_k como antes, e o processo acima é repetido até que a solução ótima do problema (3.1) seja alcançada. Porém t_k agora tem valor relativamente modesto para qualquer k .

Se a priori, os Multiplicadores de Lagrange ótimos para o problema (3.1) forem conhecidos então, uma sugestão para um valor inicial dos multiplicadores seria considerar tal valor ótimo. Se não for conhecido, mas existir alguma informação para tais multiplicadores, então esta poderá ser usada para obter um valor inicial dos Multiplicadores de Lagrange considerado "bom". Porém, se não for conhecido e não existirem informações, a sugestão seria que na primeira iteração a Função Lagrangeana Aumentada fosse idêntica à Função Penalidade, ou seja, $(\lambda_j)_0 = 0$, $j=1, \dots, p$.

3.2.2 Representação Geométrica

A representação geométrica é feita para um problema sujeito à uma restrição de igualdade.

Seja o problema:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ h(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Perturbando (3.9), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(u) = \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a: } h(\mathbf{x}) = u \end{aligned}$$

a minimização é suposta ser localmente próxima de $\mathbf{x}^*$, solução ótima do problema (3.9). Uma especificação mais precisa da função p pode ser encontrada em (Bertsekas, 1982). Também é mostrado em (Bertsekas, 1982) que, quando a perturbação é suficientemente pequena, ou seja, próxima de zero, o valor do problema perturbado é igual ao valor ótimo do problema (3.9), e o vetor gradiente do problema perturbado, aplicado no ponto zero, é igual ao Multiplicador de Lagrange ótimo do problema (3.9), ou seja:

$$p(0) = f(\mathbf{x}^*) \text{ e, } \nabla p(0)^t = -\lambda^*$$

Para um dado $t > 0$, o Método da Função Lagrangeana Aumentada procuraria minimizar $\left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t [h(\mathbf{x})]^2 \right\}$. Isso equivale a encontrar o menor valor de k tal que o contorno de $f + \lambda h + \frac{1}{2} t h^2 = k$ tangencie a função perturbação p no espaço (h, f) . Então, expressando o mínimo da Função Lagrangeana Aumentada associada ao problema (3.9) em termos da função perturbação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} L_A(\mathbf{x}, \lambda, t) &= \min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda^t h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t [h(\mathbf{x})]^2 \right\} \\
 &= \min_{(\mathbf{x}, u)} \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t [u]^2 \mid h(\mathbf{x}) = u \right\} \\
 &= \min_u \left[\min_{h(\mathbf{x})=u} \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t [u]^2 \right\} \right] \\
 &= \min_u \left[p(u) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t [u]^2 \right]
 \end{aligned}$$

A minimização acima representa uma minimização feita em dois estágios. A primeira minimiza sobre todos os $\mathbf{x}$ tais que $h(\mathbf{x}) = u$ com u fixo, e a segunda é feita sobre u .

$$p(u) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t [u]^2 = k$$

ou equivalentemente:

$$p(u) = -\lambda^t u - \frac{1}{2} t [u]^2 + k$$

As curvas $p(u)$ e $\left\{ p(u) + \frac{1}{2} t [u]^2 \right\}$ são representadas na Figura (3.1).

Figura 3.1: Representação Geométrica da Função Lagrangeana Aumentada

O mínimo da função $\left\{ p(u) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t[u]^2 \right\}$ é atingido no ponto $u(\lambda, t)$

para qual o vetor gradiente se anula, ou seja:

$$\frac{\partial \left[p(u) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t[u]^2 \right]}{\partial u} \Big|_{u=u(\lambda, t)} = 0$$

ou equivalentemente:

$$\nabla \left\{ p(u) + \frac{1}{2} t[u]^2 \right\} \Big|_{u=u(\lambda, t)} = -\lambda$$

A função $\left\{ p(u) + \frac{1}{2} t[u]^2 \right\}$ aplicada ao ponto $u(\lambda, t)$ tem valor igual a:

$$\left\{ p[u(\lambda, t)] + \frac{1}{2} t[u(\lambda, t)]^2 \right\}$$

O valor acima, pela Figura (3.1), é dado por w adicionado de $-\lambda^t u(\lambda, t)$, ou seja:

$$p[u(\lambda, t)] + \frac{1}{2} t[u(\lambda, t)]^2 = w - \lambda^t u(\lambda, t)$$

isolando w :

$$w = p[u(\lambda, t)] + \lambda' u(\lambda, t) + \frac{1}{2} t [u(\lambda, t)]^2$$

Mas,

$u(\lambda, t)$ é ponto de mínimo, ou seja:

$$w = \min_u \left\{ p[u(\lambda, t)] + \lambda' u(\lambda, t) + \frac{1}{2} t [u(\lambda, t)]^2 \right\}$$

Então:

$$w = \min_u \left[p[u(\lambda, t)] + \lambda' u(\lambda, t) + \frac{1}{2} t [u(\lambda, t)]^2 \right] = \min_x L_A(x, \lambda, t)$$

como pode ser visto pela Figura (3.1). Nota-se também que:

$$\min_x L_A(x, \lambda, t) - \lambda' u(\lambda, t) = p[u(\lambda, t)] + \frac{1}{2} t [u(\lambda, t)]^2$$

é o hiperplano tangente ao gráfico da curva $p(u) + \frac{1}{2}t[u]^2$ no ponto $u(\lambda, t)$, tendo inclinação $-\lambda$ e que intercepta o eixo vertical no valor $\min_x L_A(x, \lambda, t)$.

O valor de $\min_x L_A(x, \lambda, t)$ estará próximo de $p(0) = f(x^*)$ se λ estiver próximo de λ^* , pela Figura (3.1), podendo também ser visto da seguinte maneira:

Tomando $\lambda = \lambda^*$ e definindo $P(u) = p(u) + \lambda^* u + \frac{1}{2}t[u]^2$, então para valores de t suficientemente grande, a função P torna-se uma função estritamente convexa na vizinhança de $u = 0$. Observa-se que:

$$\nabla P(u) = \nabla p(u) + \lambda^* + t[u]$$

e sendo a função P estritamente convexa próxima de $u = 0$ tem-se:

$$\nabla P(0) = \nabla p(0) + \lambda^* = 0$$

$$\nabla P(0) = \nabla p(0) = -\lambda^*$$

conseqüentemente, obteve-se um mínimo local estrito para a função P em $u = 0$.

Para problemas não-convexos, o procedimento é similar, porém nesse caso a solução ótima é alcançada somente quando t toma valor suficientemente grande, ao contrário do Método da Função Lagrangeana que falha na presença do “Gap de Dualidade”, e do Método da Função Penalidade que necessita ter $t \rightarrow +\infty$.

Já o processo de adaptação do Multiplicador de Lagrange λ_k é representado pela Figura (3.2):

Figura 3.2: Representação Geométrica da Iteração do Multiplicador de Lagrange

Como $\min_x L_A(x, \lambda, t) - \lambda^t u(\lambda, t) = p[u(\lambda, t)] + \frac{1}{2} t [u(\lambda, t)]^2$, se x_k minimiza $L_A(\cdot, \lambda_k, t_k)$ conseqüentemente o vetor $u_k = h(x_k)$ minimiza $p(u) + \lambda^t u + \frac{1}{2} t [u]^2$.

Então:

$$\nabla \left\{ p(u) + \frac{1}{2} t[u]^2 \right\} \Big|_{u=u_k} = -\lambda_k$$

$$\nabla p(u_k) = -(\lambda_k + t_k u_k) = -[\lambda_k + t_k h(x_k)]$$

O próximo multiplicador λ_{k+1} , será:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + t_k h(x_k) = -\nabla p(u_k)$$

como representado na Figura (3.2).

Pela Figura (3.2), nota-se que, com λ_k suficientemente próximo de λ^* ou t_k suficientemente grande, o próximo multiplicador λ_{k+1} estará mais próximo de λ^* do que λ_k .

3.2.3 Restrições de Desigualdades

Seja o problema de otimização com restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{s. a: } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Convertendo (3.10), em um problema com restrições de igualdade equivalente, através da introdução de variáveis de folga nas restrições de desigualdade obtém-se:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a: } g_i(\mathbf{x}) - z_i^2 = 0 \quad \text{com } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.11)$$

Convertido o problema, espera-se aplicar de forma simples a teoria vista do Método da Função Lagrangeana Aumentada para problemas de otimização com restrições de igualdade.

A Função Lagrangeana Aumentada para o problema (3.11) tem a seguinte forma:

$$L_A(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{z}, t) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2] + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^m [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2]^2 \quad (3.12)$$

Com o fim de criar a Função Lagrangeana Aumentada para o problema (3.10) foi necessário adicionar m variáveis de folgas z_i^2 , aumentando assim o número de variáveis na Função Lagrangeana Aumentada. Contudo, a minimização de $L_A(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{z}, t)$ com relação a $\mathbf{z}$ pode ser feita explicitamente para cada $\mathbf{x}$ fixo, como visto abaixo:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} L_A(\mathbf{x}, \mu, \mathbf{z}, t) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} \left\{ f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2] + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^m [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2]^2 \right\} \quad (3.13)$$

A minimização com relação a $\mathbf{z}$ pode ser feita separadamente para cada $\mathbf{x}$ fixo, já que a variável z_i^2 aparece somente na seguinte expressão:

$$\min_{\mathbf{z}} \left\{ -\sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2] + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^m [g_i(\mathbf{x}) - z_i^2]^2 \right\}$$

Fazendo $e_i = z_i^2$ por simplicidade de notação, a minimização com relação a $\mathbf{z}$ é equivalente a:

$$\min_{e \geq 0} \left\{ -\sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - e_i] + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^m [g_i(\mathbf{x}) - e_i]^2 \right\} \quad (3.14)$$

A função objetivo da minimização (3.14) é quadrática em e_i , então seu mínimo irrestrito é o escalar $\hat{e}_i$ no qual o vetor gradiente se anula:

$$\mu_i - t[g_i(\mathbf{x}) - \hat{e}_i] = 0$$

ou seja:

$$\hat{e}_i = - \left[\frac{\mu_i}{t} - g_i(\mathbf{x}) \right]$$

Há duas possibilidades:

Se $\hat{e}_i > 0$, a derivada deve desaparecer, ou

Se $\hat{e}_i = 0$, a derivada deve ser não-negativa.

Então:

$$\hat{e}_i = \begin{cases} -(\mu_i / t) + g_i(x) & \text{se } -(\mu_i / t) + g_i(x) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a solução do problema (3.14) é da forma:

$$e_i^* = \max\{0, -[(\mu_i / t) - g_i(x)]\}$$

sendo:

$$-e_i^* = \min\{0, [(\mu_i / t) - g_i(x)]\}$$

logo:

$$g_i(x) - e_i^* = \min\{g_i(x), (\mu_i / t)\}$$

Substituindo esse resultado em (3.12), a Função Lagrangeana Aumentada se transforma em:

$$L_A(x, \mu, t) = f(x) + \sum_{i=1}^m \left[-\mu_i \varphi_i + \frac{1}{2} t [\varphi_i]^2 \right]$$

onde:

$$\varphi_i = \min\left\{g_i(x), \frac{\mu_i}{t}\right\} \quad (3.15)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \min L_A(x, \mu, z, t) \\ \text{s.a: } (x, z) \in \mathbb{R}^{n+m} \end{aligned} \quad (3.16)$$

é equivalente ao problema:

$$\begin{aligned} \min L_A(x, \mu, t) \\ \text{s.a: } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo $[x(\mu, t), z(\mu, t)]$ uma solução do problema (3.16) se e, somente se, $x(\mu, t)$ for solução do problema (3.17) e $z_i(\mu, t)^2 = \max\{0, -[(\mu_i/t) - g_i[x(\mu, t)]]\}$ para qualquer $i=1, \dots, m$.

Como era de se esperar, o Método da Função Lagrangeana Aumentada para problemas com restrições de igualdade pode ser aplicado para problemas com restrições de desigualdade, depois deste ter sido convertido para um problema com restrições de igualdade. Porém, o cálculo do valor ótimo do problema original (3.10) por si próprio não necessita envolver as variáveis adicionais $z_1, z_2, \dots, z_m$, já que pode-se resolver no lugar de (3.16) o problema equivalente (3.17).

Ao final da minimização irrestrita, os Multiplicadores de Lagrange são adaptados pela substituição de $h(x)$ em (3.7) por φ , dada por (3.15), ou seja:

$$\mu_i^{k+1} = \begin{cases} \mu_i^k + t\varphi_i & \text{se } \varphi_i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

3.2.4 Problema de Otimização Geral

Os problemas com restrições de igualdade e desigualdade das seções (3.2) e (3.2.3) são combinados para criar a Função Lagrangeana Aumentada geral:

$$L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, t) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \left\{ \lambda_j h_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} t [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\} + \sum_{i=1}^m \left\{ -\mu_i \varphi_i + \frac{1}{2} t [\varphi_i]^2 \right\} \quad (3.18)$$

onde:

$$\varphi_i = \min \left\{ g_i(\mathbf{x}), \frac{\mu_i}{t} \right\}$$

As fórmulas de atualizações dos Multiplicadores de Lagrange são:

$$\begin{aligned} \mu_i^{k+1} &= \begin{cases} \mu_i^k + t\varphi_i & \text{se } \varphi_i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}, i=1, \dots, m \\ \lambda_j^{k+1} &= \lambda_j^k + t h_j(\mathbf{x}) \quad , j=1, \dots, p \\ t^{k+1} &= t^k \beta \text{ onde } \beta > 1.0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Obs: O termo de penalidade t não necessita ser o mesmo para as restrições de igualdade e desigualdade; consideramos tal igualdade por simplicidade de notação matemática. É interessante que eles sejam diferentes, dependendo do problema a ser tratado.

Capítulo 4

Testes e Resultados

Neste capítulo apresenta-se o desempenho dos métodos descritos sobre um problema de programação não-linear não-convexo conhecido como o problema de fluxo de potência ótimo, o qual foi apresentado por (Stott et al., 1980) como um desafio matemático. As metodologias de resolução de problemas de programação não-linear estudadas neste trabalho foram implementadas e aplicadas em sistemas elétricos de potência com 2 e 8 barras.

4.1 Sistema Elétrico de 2 Barras

O FPO é resolvido para a função objetivo de minimização de perdas de potência ativa na linha de transmissão em um sistema de 2 barras. O problema estudado pode ser expresso em termos de variáveis de um sistema elétrico de potência como:

minimizar $f(\mathbf{V}, \theta)$

s.a:

$$P(\mathbf{V}, \theta) - P^{\text{esp}} = 0$$

$$\mathbf{V}^{\min} \leq \mathbf{V} \leq \mathbf{V}^{\max}$$

Tal sistema elétrico e a linha de transmissão são representados na figura abaixo:

Figura 4.1: Representação de um Sistema Elétrico com 2 Barras

Com o objetivo de minimizar a perda de potência ativa na transmissão, o problema de FPO pode ser apresentado como:

$$\text{minimizar } g_{1,2} \{ V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 [\cos(\theta_{2,1})] \}$$

sujeito a:

$$P_2^{\text{esp}} - \{ G_{2,2}V_2^2 + V_1V_2[G_{1,2}\cos(\theta_{2,1}) + B_{1,2}\sin(\theta_{2,1})] \} = 0 \quad (4.1)$$

$$V_1^{\min} \leq V_1 \leq V_1^{\max}$$

$$V_2^{\min} \leq V_2 \leq V_2^{\max}$$

onde:

$g_{1,2}$ - condutância série;

$b_{1,2}$ - susceptância série;

b^{sh} - susceptância shunt;

são dados pelas seguintes expressões:

$$g_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{(r_{1,2})^2 + (x_{1,2})^2} \quad \text{e} \quad b_{1,2} = -\frac{x_{1,2}}{(r_{1,2})^2 + (x_{1,2})^2}$$

Os dados do sistema elétrico são mostrados nas tabelas abaixo:

Dados da Barra

Barra	Tipo	P	V	θ
1	SLACK	—	—	0,0
2		-0,4	—	—

Dados da Linha

Linha	r	x	b ^{sh}
1-2	0,2	1	0,02

A impedância-série e a admitância-série da linha 1-2 são, respectivamente,

$$z_{1,2} = r_{1,2} + j x_{1,2}$$

$$y_{1,2} = g_{1,2} + j b_{1,2} = (z_{1,2})^{-1} = 0.1923 - j 0.9615$$

A admitância-shunt da linha é:

$$y_{1,2}^{sh} = j b_{1,2}^{sh} = j 0.020$$

A matriz admitância nodal é:

$$Y = G + j B = \begin{bmatrix} 0,1923 - j 0,9415 & -0,1923 + j 0,9615 \\ -0,1923 + j 0,9615 & 0,1923 - j 0,9415 \end{bmatrix}$$

sendo as matrizes G e B dadas, respectivamente, por:

$$G = \begin{bmatrix} 0,1923 & -0,1923 \\ -0,1923 & 0,1923 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0,9415 & 0,9615 \\ 0,9615 & 0,9415 \end{bmatrix}$$

4.1.1 Resolução do problema FPO de 2 Barras pelo Método da Função Penalidade

A Função Penalidade (2.18) associada ao problema (4.1) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & f(V_1, V_2, \theta) + \frac{1}{2} t_1 [\Delta P]^2 \\ & + \frac{1}{2} t_2 \begin{cases} [V_1 - V_1^{\max}]^2 & \text{se } V_1 > V_1^{\max} \\ [V_1^{\min} - V_1]^2 & \text{se } V_1 < V_1^{\min} \\ 0 & \text{se } V_1^{\min} \leq V_1 \leq V_1^{\max} \end{cases} \\ & + \frac{1}{2} t_3 \begin{cases} [V_2 - V_2^{\max}]^2 & \text{se } V_2 > V_2^{\max} \\ [V_2^{\min} - V_2]^2 & \text{se } V_2 < V_2^{\min} \\ 0 & \text{se } V_2^{\min} \leq V_2 \leq V_2^{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

$$\Delta P = P_2^{\text{esp}} - \{ G_{2,2} V_2^2 + V_1 V_2 [G_{2,1} \cos(\theta_{2,1}) + B_{2,1} \sin(\theta_{2,1})] \} = 0$$

As condições de otimalidade aplicadas à Função Penalidade (4.2) resultam no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} \mathbf{P} &= 0 \\ \nabla_{V_2} \mathbf{P} &= 0 \\ \nabla_{\theta} \mathbf{P} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

O sistema (4.3), ao ser resolvido pelo Método de Newton, dá origem ao seguinte sistema matricial:

$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_1 \partial V_1}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_1 \partial V_2}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_1 \partial \theta}(V_1, V_2, \theta)$	$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_{V_1} \mathbf{P} \\ -\nabla_{V_2} \mathbf{P} \\ -\nabla_{\theta} \mathbf{P} \end{bmatrix}$
$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_2 \partial V_1}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_2 \partial V_2}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial V_2 \partial \theta}(V_1, V_2, \theta)$	
$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \theta \partial V_1}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \theta \partial V_2}(V_1, V_2, \theta)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \theta \partial \theta}(V_1, V_2, \theta)$	

Os valores V_1 , V_2 e θ são atualizados por ΔV_1 , ΔV_2 e $\Delta \theta$ respectivamente e a solução do sistema (4.3) é obtida. Verifica-se se os valores obtidos como solução do sistema (4.3) são uma solução factível para o problema (4.1); se forem, o problema (4.1) está resolvido, caso contrário os termos de penalidades são atualizados pela relação $t^{k+1} = \beta * t^k$ com $\beta > 1$ e mais uma iteração é efetuada.

Algoritmo Simplificado

Inicialização:

Entre com os valores dos parâmetros de penalidades t_1 , t_2 , t_3 e os valores das tensões V_1 , V_2 e θ .

1. Para esses valores das tensões V_1 e V_2 defina a Função Penalidade P (4.2).
2. Calcule as condições de otimalidade (4.3).
3. Se os valores das tensões V_1 , V_2 e o ângulo de defasagem de tensão θ obtidos no passo 2 satisfizerem o teste de convergência,

o problema de FPO (4.1) está resolvido.

Caso contrário,

4. Aumente os valores dos termos de penalidades e volte ao passo 1.

Resultados

O resumo dos cálculos do processo de otimização usando o Método da Função Penalidade Quadrática são apresentados na tabela 1 que expressa tanto a variação da região de factibilidade quanto a variação do termo de penalidade pela quantidade de iterações. Foram considerados:

Penalidade inicial das tensões e da potência de 1,0;

Erro de tolerância de 10^{-3} ;

Limites de tensão:

Barra 1 $V^{\min} = 0,95$ p. u. $V^{\max} = 1,1$ p.u.

Barra 2 $V^{\min} = 0,95$ p.u. $V^{\max} = 1,1$ p.u.

A solução ótima do problema de FPO com 2 Barras é:

Tensão na Barra 1: 1,1 p.u.

Tensão na Barra 2: 1,0 p.u.

Ângulo da tensão da Barra 2: -20,91 graus

Perda de potência ativa na linha de transmissão: 0,0305 p.u.

	Fator de penal. $\beta = 1,2$	Fator de penal. $\beta = 2,0$
Ponto inicial factível $V_1 = 1,0$ p.u. $V_2 = 1,0$ p.u.	29 Iterações	8 Iterações
Ponto inicial infactível $V_1 = 2,0$ p.u. $V_2 = 1,5$ p.u.	29 Iterações	8 Iterações

Tabela 1: Resumo dos cálculos do Método da Função Penalidade Quadrática para um Sistema Elétrico de 2 Barras

Foi notado que o processo de otimização ao partir de um ponto factível foi conduzido para a região infactível para posteriormente retornar à região factível. Também foi observado que, nas duas primeiras iterações, a resolução do sistema que representa as condições de otimalidade tem maiores números de iterações, sendo que, depois, somente uma única iteração para alcançar a solução do sistema (condição de otimalidade) foi necessária. Quando inicializado de um ponto infactível, o processo de otimização comportou-se identicamente ao processo de otimização inicializado de um ponto factível.

Partindo-se de um ponto factível, porém aumentando o fator de incremento de penalidade de forma que, a cada iteração os parâmetros de penalidades fossem reajustados do dobro do anterior, o número de iterações reduziu significativamente com relação aos demais testes, na obtenção de uma solução factível para o problema (4.1), porém a quantidade de iterações para obter uma solução do sistema (condição de otimalidade) variou bastante em relação aos dois testes anteriores.

4.1.2 Resolução do Problema FPO de 2 Barras pelo Método da Função Lagrangeana Aumentada

A Função Lagrangeana Aumentada (3.18) associada ao problema (4.1) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 L_A = & f(V_1, V_2, \theta) \\
 & + \lambda_1 \{P_2^{\text{esp}} - [G_{2,2} V_2^2 + V_1 V_2 (G_{2,1} \cos(\theta) + B_{2,1} \sin(\theta))]\} \\
 & + \frac{1}{2} t_1 \{P_2^{\text{esp}} - [G_{2,2} V_2^2 + V_1 V_2 (G_{2,1} \cos(\theta) + B_{2,1} \sin(\theta))]\}^2 \\
 & + \begin{cases} \mu_1 (V_1 - V_1^{\text{max}}) + \frac{1}{2} t_2 (V_1 - V_1^{\text{max}})^2 & \text{se } \mu_1 + t_2 (V_1 - V_1^{\text{max}})^2 > 0 \\ \mu_1 (V_1 - V_1^{\text{min}}) + \frac{1}{2} t_2 (V_1 - V_1^{\text{min}})^2 & \text{se } \mu_1 + t_2 (V_1 - V_1^{\text{min}})^2 < 0 \\ -\frac{(\mu_1)^2}{2t_2} & \text{caso contrario} \end{cases} \\
 & + \begin{cases} \mu_2 (V_2 - V_2^{\text{max}}) + \frac{1}{2} t_3 (V_2 - V_2^{\text{max}})^2 & \text{se } \mu_2 + t_3 (V_2 - V_2^{\text{max}})^2 > 0 \\ \mu_2 (V_2 - V_2^{\text{min}}) + \frac{1}{2} t_3 (V_2 - V_2^{\text{min}})^2 & \text{se } \mu_2 + t_3 (V_2 - V_2^{\text{min}})^2 < 0 \\ -\frac{(\mu_2)^2}{2t_3} & \text{caso contrario} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

As condições de otimalidade aplicadas à Função Lagrangeana Aumentada (4.4) resultam no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\nabla_{V_1} L_A &= 0 \\
\nabla_{V_2} L_A &= 0 \\
\nabla_{\theta} L_A &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Verifica-se se os valores de V_1 , V_2 e θ obtidos como solução do sistema (4.5) são solução factível para o problema (4.1); se não forem, os termos de penalidades e os Multiplicadores de Lagrange são reajustados conforme (3.19) e mais uma iteração é efetuada.

Algoritmo Simplificado

Inicialização:

Entre com os valores dos parâmetros de penalidades t_1 , t_2 , t_3 , os Multiplicadores de Lagrange λ_1 , μ_1 , μ_2 e os valores das tensões V_1 , V_2 e θ .

1. Defina a Função Lagrangeana Aumentada L_A (4.4).
2. Calcule as condições de otimalidade (4.5).
3. Se os valores das tensões V_1 , V_2 e o ângulo de defasagem de tensão θ obtido no passo 2 satisfizerem o teste de convergência, o problema de FPO (4.1) está resolvido.
Caso contrário,
4. Reajustar os termos de penalidades, os Multiplicadores de Lagrange como (3.19) e voltar ao passo 1.

Resultados

O resumo dos cálculos do processo de otimização usando o Método da Função Lagrangeana Aumentada são apresentados na Tabela 2 considerando os mesmos parâmetros e variações usados no teste do Método da Função Penalidade Quadrática.

	Fator de penal. $\beta = 1,2$	Fator de penal. $\beta = 2,0$
Ponto inicial factível $V_1 = 1,0$ p.u. $V_2 = 1,0$ p.u.	<i>4 Iterações</i>	<i>4 Iterações</i>
Ponto inicial infactível $V_1 = 2,0$ p.u. $V_2 = 1,5$ p.u.	<i>4 Iterações</i>	<i>4 Iterações</i>

Tabela 2: Resumo dos cálculos do Método da Função Lagrangeana Aumentada para um Sistema Elétrico de 2 Barras

O processo de otimização quando inicializado de um ponto factível foi conduzido para a região infactível para posteriormente retornar à região factível, tal como no Método da Função Penalidade Quadrática. Na primeira iteração, a solução do sistema foi obtida após 10 iterações, enquanto que nas iterações restantes esse número teve brusca diminuição (a maior foi de 3 iterações). Inicializando o processo de otimização de pontos infactíveis, a otimização foi praticamente a mesma de quando inicializado de ponto factível.

Aumentando o fator de incremento do parâmetro de penalidade, o processo de otimização obteve uma solução factível com a mesma quantidade de iterações dos testes anteriores.

4.2 Resolução do Problema FPO de 8 Barras pelo Método da Função Lagrangeana Aumentada

O FPO foi resolvido para o sistema elétrico de 8 barras, com minimização da perda de potência ativa na transmissão. O método da função penalidade quadrática não foi usado como técnica de resolução do FPO para o sistema de 8 barras por dificuldade computacional. Para esse sistema foi implementado o Método da Função Lagrangeana Aumentada, apresentando-se abaixo os resultados. No apêndice 3 são apresentados os dados de entrada do sistema.

ITERAÇÕES	Penalidade inicial das tensões	Fator de incremento do termo de penalidade das tensões	Fator de incremento do termo de penalidade das potências
11	10	2,0	2,0
8	100	2,0	2,0
6	1.000	2,0	2,0
8	100	2,0	1,1
5	1.000	2,0	1,1
3	10.000	2,0	1,1
3	100.000	2,0	1,1
6	10	4,0	1,1

Tabela 3: Resumo dos cálculos do Método da Função Lagrangeana Aumentada para um Sistema Elétrico de 8 Barras

Foi considerado valor 1 para as penalidades iniciais das potências para todos os testes realizados. Mostra-se a seguir uma saída completa do processo de

otimização para o problema de 8 Barras para o caso de penalidade inicial das tensões de 10^5 .

NUMERO DE BARRA-CARGA= 6
 NUMERO DE BARRAS-CARGA E CONTROLE DE REATIVO= 7
 NUMERO DE BARRA DE GERACAO= 1
 LIMITES DE TENSAO(p.u.):MIN.= .95 MAX.=1.10

SISTEMA COM: 8-BARRAS 9-LINHAS 2-TRAFO COM TAP FIXO

CONVERGÊNCIA EM 3 ITERACOES

ESTADO DO SISTEMA				FLUXOS NAS LINHAS		
BARRA	TP	NOME	TENSAO	ANG.	MW	MVAR
1	SL	PRIM-500	1.0552	.00	-1710.6	-196.3
			BARRA	MW	MVAR	
			2	761.30	49.39	
			2	769.28	51.95	
			7	180.00	94.93	

2	CG	SEG-500	1.0170	-11.80	.0	.0
			BARRA	MW	MVAR	
			1	-752.00	-124.69	
			1	-759.79	-123.18	
			3	781.72	-18.52	
			4	730.08	-43.90	
			CAP/REAT	-310.3		

3	CG	TERC-500	1.0044	-23.11	.0	.0
			BARRA	MW	MVAR	
			2	-772.76	-24.49	
			5	482.76	-120.41	
			8	290.00	69.24	
			CAP/REAT	-75.7		

4	CG	QUA-500	1.0082	-22.58	134.0	-32.0
			BARRA	MW	MVAR	
			2	-721.78	-21.62	
			5	587.78	-88.69	
			CAP/REAT	-142.3		

5	CG	QUI-500	1.0064	-32.09	1300.0	50.0
			BARRA	MW	MVAR	

			3	-478.37	-52.68					
			4	-582.00	-31.46					
			6	-239.63	-107.66					
		CAP/REAT		-141.8						
6	CR SEX-500	1.0146	-30.77	-240.0	-27.5					
		BARRA	MW	MVAR						
		5	240.00	27.47						
		REAT.GER.= 27.5 [LIMITES:MAX= 50. MIN= -50.]								
7	CG PRIM-345	1.0344	-2.27	180.0	86.0					
		BARRA	MW	MVAR						
		1	-180.00	-86.00						
8	CG TERC-345	.9902	-27.14	290.0	48.0					
		BARRA	MW	MVAR						
		3	-290.00	-48.00						
ITER.	PERDAS	IT.INT.	DPMAX->BARRA	DQMAX->BARRA	VMAX->BARRA	VMIN->BARRA				
1	46.596	2	-.0043	7 -1.0484	2 1.055	1 .990	8			
2	46.583	1	-.0001	2 -.1462	2 1.055	1 .990	8			
3	46.582	1	.0000	5 -.0015	3 1.055	1 .990	8			

Os Multiplicadores de Lagrange, associados às restrições de desigualdades terminam o processo de otimização com valores zero, mostrando a factibilidade da solução. Verificou-se que, inicializando o processo de otimização com o mesmo valor de penalidade para as restrições das potência ativa e reativa, e reajustando tais penalidades de maneiras idênticas, ocorreu nos testes realizados a satisfação primeiramente das restrições da potência ativa, apesar de a margem de tolerância de convergência ser maior para a potência reativa.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho propôs-se a estudar os Métodos da Função Lagrangeana, Função Penalidade e Função Lagrangeana Aumentada, sendo que o Método da Função Penalidade e da Função Lagrangeana Aumentada foram implementados para resolver um problema de FPO com 2 e 8 barras. Este último (8 barras) foi implementado somente com o Método da Função Lagrangeana Aumentada.

A Função Lagrangeana serviu de base teórica para compreensão da filosofia de resolução de problemas de otimização restritos por problemas de otimização irrestritos aproximados.

Os testes foram inicializados de pontos factíveis e infactíveis tanto para o Método da Função Penalidade quanto para o da Função Lagrangeana Aumentada. Pôde-se observar que ambos os métodos não tiveram mudanças significativas no processo de convergência, quando iniciados das duas maneiras. Porém, variando o

fator de incremento dos parâmetros de penalidade, constatou-se que o Método da Função Penalidade é extremamente sensível a tal variação enquanto que o Método da Função Lagrangeana Aumentada não é tão sensível, comparando com a Penalidade Quadrática.

Pelo fato de não necessitar de parâmetros de penalidades altos a fim de alcançar uma solução ótima para o problema tratado, o Método da Função Lagrangeana Aumentada não torna o sistema que representa a condição de otimalidade mal condicionado, como o Método da Função Penalidade. O Método da Penalidade Quadrática apresenta muitas vezes “overflow” numérico na sua programação, devido ao mal condicionamento do problema penalizado.

A presente investigação, dados os limites de um trabalho de mestrado, deixou em aberto vários pontos, que podem suscitar novos estudos teóricos e empíricos. Entre esses pontos, gostaríamos de enfatizar os seguintes, como temas prioritários para futuras pesquisas:

Determinação do valor inicial para os fatores de penalidades por métodos não empíricos.

Estudo da influência do fator de penalidade sobre os Multiplicadores de Lagrange para o problema FPO.

Bibliografia

Bazaraa, M. S., Shetty, C. M., *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.

Bertsekas, Dimitri P., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, Inc, 1982.

Bertsekas, Dimitri P., *Combined Primal-Dual and Penalty Methods for Constrained Minimization*, SIAM J. Control, vol.13, n^o 03, pp 521-544, May, 1975.

Boukari, D., Fiacco, A. V., *Survey of Penalty, Exact-Penalty and Multiplier Methods from 1968 to 1993*, Optimization, vol. 32, pp 301-334, 1995.

Buchet, R. C. et. al., *Quadratically Convergent Optimal Power Flow*, IEEE Transaction on Power Apparaty and Systems, vol.103, pp. 3267-3275, 1985.

Courant, R., *Variation Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations*, Bulletin American Mathematical Society, vol. 49, pp. 1-23, 1943.

Dommel, H. W., Tinney, W. F., *Optimal Power Flows Solutions*, IEEE Transations on Power Apparatus and Systems, vol. 87, pp. 1866-1876, October, 1968.

Everett, H., *Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Research*, Operations Research, vol. 58, pp. 453-467, 1971.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, A Primal-Dual Method*, Management Science, vol. 10, pp. 360-366, 1964a.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming*, Management Science, vol. 10, pp. 601-617, 1964b.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *Extensions of SUMT for Nonlinear Programming: Equality Constrained and Extrapolation*, Management Science, vol. 12, pp. 816-828, 1966.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *The Slacked Unconstrained Minimization Technique for Convex Programming*, SIAM, vol. 15, pp. 505-515, 1978a.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *The Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMT), Without Parameters*, Operations Research, vol. 15, pp. 820-827, 1967b.

Fiacco, A. V., and McCormick, G. P., *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Optimization Techniques*, John Wiley, New York, 1968.

Hestenes, M., R., *Multiplier and Gradient Methods*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 4, pp. 303-320, 1969.

Huneault, M., Galiana, F. D., *A Survey of the Optimal Power Flow Literature*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 6, pp. 762-770, 1991.

Jr., Santos A., Costa, G. R. M., *Optimal-power-flow solution by Newton's method applied to an augmented Lagrangian function*, IEE Proc - Gener. Transm. Distrib., Vol. 142, No. 1, pp. 33-36, January 1995.

Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing company, 1984.

Mangasarian, A. L., *Unconstrained Lagrangians in Nonlinear Programming*, SIAM J. Control, vol. 13, n° 04, July, 1975.

Miele, A., Moseley, P. E., Levy, A. V., and Caggins, G. M., *On the Method of Multipliers for Mathematical Programming Problems*, JOTA, vol. 10, n° 01, pp. 1-33, 1972.

Monticelli, A., *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Edgard Bliicher Ltda, São Paulo, 1983.

Monticelli, A., Liu, Wen-Hsiung, *Adaptive Movement Penalty method for the Newton Optimal Power Flow*, Transactions on Power Systems, vol. 07, n° 01, February, 1992.

Pantoja, J. F. A. de D., and Mayne, D. Q., *Exact Penalty Function Algorithm with Simple Updating of the Penalty Parameter*, JOTA, vol. 69, n° 03, June, 1991.

Pillo, G., Grippo, L., *An Exact Penalty Function Method with Global Convergence Properties for Nonlinear Programming Problems*, Mathematical Programming 36, pp. 1-18, 1986.

Powell, M. J. D., *A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems, in Optimization*, Academic Press, New York, 1969.

Rockafellar, R. Tyrrell, *Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming*, SIAM J. Control, pp. 268-285, May, 1974.

Santos, A., Deckman, S., Soares, S., *A Dual Augmented Lagrangian Approach for Optimal Power Flow*, IEEE Transaction on Power Systems, vol. 03, pp. 1020-1025, August, 1988.

Sasson, A. M., Vilorio, F., Aboytes, F., *Optimal Load Flow Solution Using the Hessian Matrix*, IEEE Transaction on Power apparatus and Systems, vol. 92, pp.31-41, January, 1973.

Stott B., Alsac O., Marinho J. L., *The Optimal Power Flow Problem, from Electric Power Problems: The Mathematical Challenge*, SIAM, pp. 327-351, 1980.

Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design-with Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1984.

Wash, G. R., *Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, 1925.

Yu-Chi Wu, Atif S. D. and Ray E. M., *A direct nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows*, IEEE Transaction on Power Systems, vol. 09, pp. 876-883, May, 1994.

APÊNDICE 1

As restrições de desigualdade $g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, que são satisfeitas exatamente no ponto $\mathbf{x}^*$ são chamadas restrições ativas em $\mathbf{x}^*$, ou seja, $g_i(\mathbf{x}^*)$ é ativa em $\mathbf{x}^*$ se, e somente se, $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, para algum i . Enquanto que, se $g_i(\mathbf{x}^*) > 0$ para algum i , é dita ser inativa ou folgada em $\mathbf{x}^*$.

APÊNDICE 2

Figura a2: Representação do Equilíbrio dos Gradientes segundo KKT.

Da Figura (a2), nota-se que, no ponto x_1 o vetor $-\nabla f(x_1)$, está dentro do cone gerado pelos vetores gradientes negativos das restrições ativas no ponto x_1 , ao contrário do ponto x_2 .

Observa-se também pela Figura (a2), que qualquer direção factível no ponto x_1 forma um ângulo menor ou no máximo igual a 90° com o vetor $\nabla f(x_1)$, ou seja, satisfeita a condição necessária de otimalidade de ponto de mínimo local. Enquanto que, no ponto x_2 existem direções factíveis que formam um ângulo maior que 90° com o vetor $\nabla f(x_2)$, sendo assim, existe pelo menos um d , direção factível em x_2 , tal que, $\nabla f(x_2)d < 0$. Essa desigualdade é condição necessária e suficiente para que d seja

direção de descida (Luenberger, 1984). Então, sendo $\mathbf{d}$ direção de descida no ponto $\mathbf{x}_2$, pode-se caminhar nessa direção, e com isso ainda melhorar a solução do problema.

Portanto, para evitar que existam direções de descida em um ponto é necessário que o vetor $-\nabla f$ esteja dentro do cone gerado pelos vetores gradientes negativos das restrições ativas nesse ponto, justificando assim a formulação das condições de KKT. Ou seja, se f e todos os g_i forem diferenciáveis, uma condição necessária para $\mathbf{x}^*$ ser um ponto de mínimo restrito do problema (3.1) é que, $-\nabla f(\mathbf{x}^*)$ seja combinação não negativa dos gradientes das restrições ativas em $\mathbf{x}^*$.