Campus de São Carlos

UMA METODOLOGIA DE PROJETO
DE CONTROLADORES DE GANHO
PROGRAMADO PARA SISTEMAS NÃO
LINEARES

Aluno: Eduardo Fontoura Costa

Orientadora: Prof. Dr. Vilma Alves de Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

UMA METODOLOGIA DE PROJETO DE CONTROLADORES DE GANHO PROGRAMADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

Eduardo Fontoura Costa

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Vilma Alves de Oliveira

São Carlos
1998

DEDALUS - Acervo - EESC

31100016506

Class. TFSE-EESC
 Curt. 1685
 Tombo T0121/98

st 0980568

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
 da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

C837m Costa, Eduardo Fontoura
 Uma metodologia de projeto de controladores de
 ganho programado para sistemas não lineares /
 Eduardo Fontoura Costa. -- São Carlos, 1998.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia
 de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1998.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Vilma Alves de Oliveira.

1. Sistemas dinâmicos não lineares. 2. Sistemas lineares com incerteza. 3. Controladores de ganho programado. 4. Controle de custo garantido. 5. Desigualdade de matrizes lineares. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **EDUARDO FONTOURA COSTA**

Dissertação defendida e aprovada em 26-03-1998
pela Comissão Julgadora:

Profª. Doutora **VILMA ALVES DE OLIVEIRA (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Associado **JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA**
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **MARIO FRANCISCO MUCHERONI**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **DENIS VINICIUS COURY**
Coordenador da Área de Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

À Cláudia, meu amor.

À Professora Vilma Alves de Oliveira, pela excelente orientação fornecida durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores e amigos Marco H. Terra, Aluizio F. R. Araújo e Jerson B. de Vargas, pela preciosa colaboração e ensinamentos que carregarei por toda minha vida.

À minha mãe Maria de Lourdes, minha tia Maria José e meus irmãos Augusto e Luciano, por todo incentivo, suporte e carinho. Aos meus avós Clorinda e Dermeval, meus primeiros professores, por ensinarem tudo o que sei.

À Cláudia, pela dedicação, paciência e amor que me ajudaram nas decisões mais difíceis, motivando-me sempre a prosseguir.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudo concedida durante o primeiro ano de mestrado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo, pela bolsa de estudo concedida durante o segundo ano de mestrado.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC/USP.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO - CONTROLADORES DE GANHO PROGRAMADO	1
1.1. Controladores de Ganho Programado	2
1.2. Conteúdo do Trabalho	4
2. CONTROLE DE CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS ESTRUTURADAS	6
2.1. Descrição do Problema de Controle	7
2.2. Encontrando uma Lei de Controle de Custo Garantido	9
2.3. Minimização de um Limite Superior para o Custo Garantido	12
3. CONTROLE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA UMA DESCRIÇÃO POR SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZA	16
3.1. Descrição do Problema de Controle	17
3.2. Obtenção do SLI para Representação do SNL em uma Região	17
3.3. Principais Resultados	20
4. CONTROLADORES DE GANHO PROGRAMADO PARA REGULAÇÃO DE ESTADO E MUDANÇA DE PONTO DE OPERAÇÃO	24
4.1. Uma abordagem de Controladores de Ganho Programado para Regulação de Estados em Sistemas não Lineares.	25
4.2. Uma Metodologia para Mudança de Pontos de Operação em Sistemas não Lineares utilizando Controladores de Ganho Programado	27
5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	34
5.1. Regulação de Estados - Sistema de Suspensão Magnética	34
5.2. Garantindo Mudança de Ponto de Operação - Sistema de Suspensão Magnética	46
5.3. Garantindo Mudança de Ponto de Operação - Sistema de Bioxidação de Sorbitol a Sorbose	60

6. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
APÊNDICE A. DEFINIÇÕES UTILIZADAS E PROVAS DE LEMAS E TEOREMAS	74
APÊNDICE B. SISTEMA DE SUSPENSÃO MAGNÉTICA	80
APÊNDICE C. PROCESSO DE BIOXIDAÇÃO DE SORBITOL A SORBOSE.	88
APÊNDICE D. MINIMIZAÇÃO DO LIMITE SUPERIOR PARA O CUSTO GARANTIDO COM MATRIZES DE INCERTEZA DE RANK GENÉRICO	97
APÊNDICE E. LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ilustração de $D_{LM}(0)$ e $R\phi'$.	23
Figura 2. Ilustrando um caminho $x_{EQ}(\zeta)$	29
Figura 3. Ilustração dos passos 10 a 12 do projeto com $i=1$. Também ilustra-se uma trajetória $s(t)$ que tende para um ponto na fronteira de D_1 .	31
Figura 4. Regiões $R\phi_1'$ obtidas com ϕ_{21} variando entre 0,1 e 0,9.	36
Figura 5. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_1=L_{v1}(c_{max1})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_1 . Também exibe-se a resposta do sistema (B.3) ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.	38
Figura 6. Resposta do sistema (B.3) realimentado com o sinal de controle u_1 ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.	39
Figura 7. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_2=L_{v2}(c_{max2})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_2 .	41
Figura 8. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_3=L_{v3}(c_{max3})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_3 .	41
Figura 9. Sinais de controle u_1 e u_G , obtidos através de simulação do sistema (B.3) com $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.	42
Figura 10. Resposta do sistema (B.3) realimentado com u_1 e u_G ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.	42
Figura 11. Trajetórias e sinal de controle obtidos com o uso da lei de controle u_{FL} e com $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.	45
Figura 12. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego da lei de controle u_{padr} .	54
Figura 13. Detalhe da Figura 12 mostrando u_{padr} .	54
Figura 14. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador $u_{K0,1}$.	56
Figura 15. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador $u_{K0,9}$.	56
Figura 16. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador u_ϕ .	57

Figura 17. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador u_Q	59
Figura 18. Resposta simulada dos estados do sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose (C.2) ao estado inicial x_I	64
Figura 19. Resposta simulada dos sinais de controle do sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose ao estado inicial x_I	65
Figura 20. Respostas simulada dos estados do sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose (C.2) ao estado inicial x_I , com a lei u_G (em linha cheia) e em malha aberta (em linha tracejada).....	66
Figura 21. Sistema de Suspensão Magnética.	80
Figura 22. Conjuntos $D_{LM}(c_{max})$ e $R\varphi$	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Custos obtidos utilizando as leis de controle u_1 e u_G em função de diferentes estados iniciais.....	43
Tabela 2. Norma da diferença entre P obtida respectivamente por (3.17) e por (2.21) em função de φ_2	44
Tabela 3. Custos obtidos em função de x_0 com diferentes leis de controle.	44
Tabela 4 - T versus κ	55

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C	- matrizes que descrevem um sistema dinâmico linear
A_i, B_i	- matrizes de incerteza
D, D_{LM}, L_v	- subconjuntos do domínio de atração de um sistema não linear
D, O, F, G	- matrizes relacionadas com as matrizes de incerteza e as matrizes de ponderação
f	- função que descreve um sistema não linear
i	- número do i -ésimo controlador
J	- função de custo
J_G	- custo garantido
k	- índice do controlador
K	- matriz de realimentação de estado
n	- ordem de um sistema
p	- número de entradas de um sistema
P, W	- matrizes definidas positivas relacionadas com a solução do problema de controle de custo garantido
$R\phi$	- região do espaço de estados na qual uma desigualdade relacionada com a linearidade do comportamento de um sistema é satisfeita
R_i	- região na qual o i -ésimo controlador atua
$s(t, x_0)$	- trajetória de estado de um sistema iniciado em x_0
Q_0, R_0	- matrizes de ponderação
T	- total de controladores
u	- entrada de um sistema
u_I, u_F	- entradas constantes relacionadas com os pontos de operação x_I, x_F respectivamente
$u_{EQ}(\zeta)$	- entrada relacionada com o estado de equilíbrio $x_{EQ}(\zeta)$, parametrizada pelo escalar ζ
$u_{eq\ i}$	- entrada relacionada com o estado de equilíbrio $x_{eq\ i}$
V	- função de Lyapunov de um sistema
x	- estado de um sistema
x_0	- estado inicial de um sistema

x_I, x_F	- pontos de operação de um sistema, com as entradas u_I e u_F respectivamente
$x_{EQ}(\zeta)$	- estado de equilíbrio com a entrada $u_{EQ}(\zeta)$, parametrizado pelo escalar ζ
$x_{eq\ i}$	- estado de equilíbrio utilizado no projeto do controlador de índice i .
y	- saída de um sistema
$\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$	- funções escalares do tipo Lebesgue mensurável
λ	- autovalor de uma matriz
$\varphi, \tau, \iota, \xi, \delta, \varepsilon, \kappa$	- escalares constantes

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um procedimento de projeto para sistemas dinâmicos com não linearidades do tipo setor. Um sistema linear com incerteza estruturada é utilizado para descrever o sistema não linear, permitindo encontrar funções de Lyapunov, subconjuntos do domínio de atração e regiões invariantes do sistema não linear de forma relativamente simples. O controlador de ganho programado utiliza os estados do sistema para chavear controladores lineares robustos em subconjuntos do domínio de atração do sistema em torno do ponto de operação. O procedimento garante a estabilidade do sistema em malha fechada e reduz o conservadorismo que resulta quando uma grande região de atração é considerada. Além disto, também considera-se o problema de transição garantida entre pontos de operação, utilizando um caminho pré especificado no espaço de estado. Para o controle do sistema linear com incerteza, apresenta-se uma técnica de controle de custo garantido utilizando desigualdades de matrizes lineares. Um sistema de suspensão magnética e um sistema de biooxidação microbiana de sorbitol a sorbose são apresentados como exemplos de aplicação do controlador de ganho programado.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos não lineares; sistemas lineares com incerteza; controladores de ganho programado; controle de custo garantido; desigualdades de matrizes lineares.

ABSTRACT

In this work a gain scheduling controller design procedure for dynamic systems with sector nonlinearities is given. An uncertain linear system with structured uncertainty is used to describe the nonlinear system, yielding an easy way to obtain Lyapunov functions, invariant sets and subsets of the system domain of attraction. The gain scheduling controller proposed uses the system state to switch linear robust controllers in subsets of the system domain of attraction around the operating point. The procedure guarantees the stability of the closed loop system and reduces the amount of conservatism that results when a large region of attraction around the operating point is considered. In addition, we also consider the problem of guaranteed transition between operating points by using a pre specified path in the state space for the system operating points. A guaranteed cost control law for uncertain linear systems using linear matrix inequalities is also presented. A magnetic suspension system and a sorbitol to sorbose microbial oxidation system are presented as applications of the gain scheduled controller.

Keywords: nonlinear dynamical systems, uncertain linear systems, gain scheduled controllers, guaranteed cost control, linear matrix inequalities.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas de controle utilizando ganho programado encontram-se entre os mais utilizados na prática atualmente. Entre as características que explicam a popularidade destes controladores citam-se a possibilidade de aplicação em plantas com características variadas (como plantas não lineares ou variantes no tempo), a possibilidade de utilização em diferentes problemas de controle (como regulação de estado ou seguimento de trajetória) e a possibilidade de conjugação de técnicas diferenciadas de projeto.

Se por um lado os controladores de ganho programado apresentam grande versatilidade, por outro lado resultados genéricos são de difícil obtenção. Condições que garantem a estabilidade de controladores de ganho programado são disponíveis apenas para classes específicas de problemas de controle (plantas e controladores pertencentes a classes específicas), e podem ser de difícil verificação prática, como em Shamma and Athans (1990, 1992).

Neste trabalho, utiliza-se um controlador de ganho programado que consiste no chaveamento entre controladores que atuam em subconjuntos invariantes do domínio de atração do sistema, como em Davison and Bortoff (1994). Uma das maiores dificuldades encontradas no projeto deste controlador consiste na determinação dos subconjuntos invariantes do sistema não linear. Assim sendo, um dos objetivos deste trabalho é o de obter com relativa facilidade estes subconjuntos invariantes, o que é alcançado através da descrição do sistema não linear em uma região através de uma classe de sistemas lineares com incerteza e através de uma metodologia de projeto para esta classe de sistemas. Estes dois tópicos são inicialmente estudados separadamente e em seguida são utilizados em conjunto em um controlador de ganho programado. Os problemas de controle

tratados são o de mudança de ponto de operação e de regulação de estados em sistemas não lineares.

A seguir, após uma breve revisão dos controladores de ganho programado, o conteúdo do trabalho é descrito.

1.1. Controladores de Ganho Programado

A denominação “controlador de ganho programado” (*gain scheduled controller*) refere-se, em geral, a controladores projetados através da abordagem de interpolação de diferentes controladores, resultando em controladores com parâmetros dependentes. O princípio básico deste tipo de controlador é o de fazer com que parâmetros do controlador sejam dependentes de variáveis externas que reflitam (ou “capturem”) as variações da dinâmica da planta, com o objetivo de compensá-las de forma que o sistema controlado tenha as características desejadas de estabilidade e desempenho em toda a faixa de operação da planta (Kramer and Martin, 1996).

O procedimento de projeto de controladores de ganho programado envolve quatro etapas básicas (Kramer and Martin, 1996; Lawrence and Rugh, 1995; Kaminer *et al*, 1995).

1ª etapa. - Determinar a variável de programação e definir um conjunto de pontos de operação que envolvam a região de operação desejada.

2ª etapa - Escolher a estrutura dos controladores e projetar controladores para cada ponto de operação com as características desejadas de estabilidade, robustez e desempenho.

3ª etapa - Construir uma função de interpolação de forma que os controladores atuem em toda a região desejada, ou seja, encontrar um controlador global parametrizado pela variável de programação. Implementar (realizar) o controlador global.

4ª etapa - Testar o resultado obtido com o controlador global em toda região de operação.

Em cada uma das três primeiras etapas, o projetista dispõe de uma variedade de opções. Não existem regras completamente estabelecidas para cada uma das etapas, mas diretrizes que podem ser utilizadas como guia em cada etapa.

Na primeira etapa, a variável tempo, os estados, a saída, ou alguma variável externa, como a temperatura ambiente, indutância de uma bobina, etc, podem ser utilizadas como variável de programação. Diretrizes para esta escolha são bem estabelecidas na literatura (Shamma and Athans, 1990, 1991, 1992; Lawrence and Rugh, 1990, 1995). Algumas destas diretrizes estabelecem que a variável de programação deva “capturar” as não linearidades da planta (ou seja, fornecer suficiente informação sobre a planta em cada instante), e que a variável de programação deva variar “lentamente”.

Na segunda etapa, uma grande variedade de procedimentos de projeto encontra-se disponível na literatura. A estrutura do controlador geralmente é escolhida pelo projetista de acordo com a planta a ser controlada, os objetivos de controle, a presença ou não de perturbações, a exigência ou não de robustez de estabilidade e/ou desempenho, etc. Kramer e Martin (1996) referem-se a estas escolhas como sendo uma questão de decisão de engenharia (*engineering judgement*).

Com relação à terceira etapa, a interpolação pode ser feita utilizando desde um simples chaveamento abrupto, passando por funções mais complexas até o uso de redes neurais. Vários trabalhos têm surgido nos últimos anos explorando condições de interpolação e de realização para que o desempenho e a estabilidade em cada ponto de operação sejam conservados e para que haja uma boa expectativa em relação ao resultado global. Leithhead *et al.* (1991) , Nichols *et al.* (1993), Meresi e Paden (1994), Leith e Leithhead (1994) , Lawrence e Rugh (1993,1995) , Kraminer *et al* (1995). Outra questão a ser ponderada na etapa 3 é a da complexidade da estrutura do controlador, a qual deve ser minimizada, segundo Kramer e Martin (1996).

Com relação à última etapa, a verificação do comportamento do sistema global geralmente é feita (como em Lawrence e Rugh (1995)) através de testes de simulação, o que, se por um lado não permite concluir rigorosamente se as características desejadas

são alcançadas em toda a região operacional, por outro lado apresenta-se como um procedimento relativamente simples.

Entre as principais características dos controladores de ganho programado, citam-se a possibilidade de aplicação em plantas com características variadas (como plantas não lineares ou variantes no tempo), a possibilidade de utilização em diferentes problemas de controle (como regulação de estado ou seguimento de trajetória) e a possibilidade de conjugação de técnicas diferenciadas de projeto. Estas características explicam a popularidade destes controladores, os quais se encontram entre os mais utilizados na prática, como em aplicações recentes apresentadas em Hyde e Glover (1993), Kellett (1991), Nichols *et al* (1993), Leith e Leithead (1996) e Reeve e Sultan (1994).

1.2. Conteúdo do Trabalho

O controlador de ganho programado considerado neste trabalho consiste no chaveamento entre controladores que atuam em subconjuntos invariantes do domínio de atração do sistema não linear. Conforme antes descrito, a maior dificuldade encontrada no projeto é a determinação destes subconjuntos invariantes. Neste trabalho, propõe-se uma abordagem que busca a solução do problema de controle do sistema não linear (denotado pela sigla SNL deste ponto em diante) através da descrição deste sistema via uma classe de sistemas lineares com incerteza (SLI) (Kosmidou et al., 1991; Kosmidou and Broulès, 1994; Fishman et al., 1996; Costa et al., 1997; Costa and Oliveira, 1998) em cada ponto de operação, permitindo encontrar com relativa facilidade subconjuntos do domínio de atração, regiões invariantes e funções de Lyapunov do SNL através do SLI.

Uma metodologia de projeto de controladores de custo garantido é estudada para o controle do SLI. Nesta metodologia a solução do controle de custo garantido é construída em termos de uma equação algébrica de Riccati aumentada, de forma que uma função de Lyapunov para o SLI é prontamente encontrada, a qual é usada na obtenção do subconjunto invariante do domínio de atração. Neste tópico, as principais contribuições deste trabalho referem-se a minimização de um limite superior para a

função custo e a revisão de resultados anteriores encontrados na literatura (Kosmidou et al., 1991; Kosmidou and Bourlès, 1994; Fishman et al., 1996).

Dois são os problemas de controle considerados.

O primeiro é o conhecido problema de regulação de estados em sistemas não lineares. De fato, o uso de controladores de ganho programado para este problema foi motivado por uma das características dos controladores de custo garantido: o custo e os ganhos obtidos aumentam com o aumento das incertezas do SLI e estas, pela abordagem deste trabalho, estão relacionadas às não linearidades do SNL, de forma que se torna interessante que diferentes controladores atuem em diferentes regiões.

O segundo é o problema de mudança de pontos de operação em sistemas não lineares, que consiste na transferência do SNL em um ponto de operação para um outro ponto de operação desejado. Como contribuição a este problema, é apresentada uma metodologia estruturada de projeto que garante que o ponto de operação inicial esteja contido no domínio de atração do SNL no ponto de operação desejado.

O trabalho encontra-se dividido nos seguintes capítulos. O projeto de controladores de custo garantido para uma classe de SLI é apresentado no Capítulo 2 e a descrição do SNL via SLI é apresentada no Capítulo 3. No Capítulo 4, os dois problemas de controle são tratados e, finalmente, no Capítulo 6, dois sistemas são utilizados como exemplo de aplicação - um sistema de suspensão magnética e um sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose.

2. CONTROLE DE CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS ESTRUTURADAS

No projeto de um controlador de ganho programado, é necessário que em cada ponto de operação as características de robustez de estabilidade e desempenho sejam atendidas. Neste trabalho o controlador para o SNL em um ponto de operação é obtido através da descrição via sistemas lineares com incertezas estruturadas, para a qual adota-se a abordagem de controle de custo garantido. Esta abordagem fornece robustez de estabilidade para o SLI, além de vantagens como facilidade de projeto e fornecimento de uma função de Lyapunov para o SLI, o que será útil, em conjunto com os resultados do Capítulo 3, para determinar subconjuntos do domínio de atração do sistema não linear.

A abordagem de controle de custo garantido aqui empregada baseia-se em resultados encontrados em Kosmidou and Bourlès (1994) e em Fishman *et al.* (1996). Em Kosmidou and Bourlès (1994), uma solução do controle de custo garantido é dada, mas, na forma apresentada, nem sempre fornece um custo garantido. Esta solução foi revista e reapresentada no Teorema 2.1. Em Fishman *et al.* (1996), uma nova solução baseada na de Kosmidou é formulada em termos de desigualdades de matrizes lineares (*Linear Matrix Inequality*, LMI). Neste trabalho, a solução dada em Fishman é revista (pois esta se baseava na condição de Kosmidou, aqui reformulada) e é apresentada no Teorema 3.2, incorporando também as matrizes Q e R . Em adição, encontra-se uma solução que minimiza um limite superior para o custo garantido, conforme descrito na Seção 2.3.

Este capítulo inicia descrevendo o problema de controle. Na Seção 2.2, através das condições de existência dos Teoremas 2.1 e 2.2, encontram-se uma lei de controle de custo garantido e uma função de Lyapunov da forma $V(x) = x'Px$. Na Seção 2.3 trata-se o problema de minimização de um limite superior para o custo garantido, chegando ao Teorema 2.3 que fornece a lei de controle através de um problema de otimização envolvendo restrições do tipo LMI.

2.1. Descrição do Problema de Controle

Considere o sistema linear com incerteza descrito por

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \quad (2.1)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ o estado, $u \in \mathbb{R}^p$ a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrizes constantes e

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i ; \quad \Delta B(t) = \sum_{i=1}^q \beta_i(t) B_i \quad (2.2)$$

sendo $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ são funções escalares do tempo do tipo Lebesgue mensuráveis,

$$\begin{aligned} |\alpha_i(t)| &\leq 1, & i &= 1, \dots, r \\ |\beta_i(t)| &\leq 1; & i &= 1, \dots, q \end{aligned}$$

e A_i , B_i são as matrizes de incerteza assumidas conhecidas, constantes e do tipo rank-1, escritas como

$$A_i = d_i o_i' ; \quad B_i = f_i g_i' ; \quad (2.3)$$

Observação 2.1. Se as matrizes não forem rank-1, as incertezas podem ser majoradas para obter matrizes da forma desejada (Petersen, 1985).

Representam-se as matrizes de incerteza por matrizes simétricas constantes T , Y , U , X dadas por

$$\begin{aligned} T &\triangleq \sum_{i=1}^r l_i d_i d_i' = DLD'; & Y &\triangleq \sum_{i=1}^q v_i f_i f_i' = FVF'; \\ U &\triangleq \sum_{i=1}^r l_i^{-1} o_i o_i' = O'L^{-1}O; & X &\triangleq \sum_{i=1}^q v_i^{-1} g_i g_i' = G'V^{-1}G; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{com} \quad D &\triangleq [d_1 \dots d_r]; & F &\triangleq [f_1 \dots f_q] \\ O &\triangleq [o_1 \dots o_r]'; & G &\triangleq [g_1 \dots g_q]' \\ L &\triangleq \text{diag}(l_1 \dots l_r); & V &\triangleq \text{diag}(v_1 \dots v_q) \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo L e V matrizes de escalonamento definidas positivas.

Definição 2.1. (Petersen, 1985) O sistema dinâmico (2.1) realimentado é garantidamente assintoticamente estável com a função de Lyapunov $V(x)$ se existir uma constante positiva $\tau \in R$ tal que a derivada $\dot{V}(x,t)$ correspondente ao sistema (2.1) satisfaça a inequação $\dot{V}(x,t) \leq -\tau(\|x\|^2)$ para todo $x \in R^n$ e $t \in R$ dadas quaisquer $\alpha_i(\cdot)$, $\beta_i(\cdot)$ admissíveis.

Definição 2.2. (Fishman *et al.*, 1996) Considere o sistema linear com incerteza (2.1). Se existirem uma lei de controle de realimentação de estado $u(t)$ e um escalar positivo J_G tal que

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \{x'(t)Q_0x(t) + u'(t)R_0u(t)\}dt \leq J_G \quad (2.6)$$

para quaisquer $\Delta A(t)$ e $\Delta B(t)$ em (2.1), então J_G é um custo garantido e $u(t)$ é uma lei de controle de custo garantido para o sistema (2.1).

O problema de controle aqui considerado consiste em encontrar uma lei de controle de custo garantido da forma $u(t) = -Kx(t)$. Em adição, considera-se o problema de minimizar um limite superior para a função de custo (2.6).

2.2. Encontrando uma Lei de Controle de Custo Garantido

Teorema 2.1. Considere o sistema com incerteza (2.1) e a função custo (2.6). Se existir uma matriz P simétrica e positiva definida satisfazendo

$$A'P + PA + U - P[B(R_0^{-1} - R_0^{-1}X R_0^{-1})B' - Y - T]P + Q_0 = 0 \quad (2.7)$$

com Q_0, R_0 simétricas e definidas positivas, então

$$u(t) = -R_0^{-1}B'P x(t) \quad (2.8)$$

é uma lei de controle de custo garantido e o custo garantido é dado por

$$J_G = x_0' P x_0. \quad (2.9)$$

Prova. Apêndice A.

Para a aplicação do Teorema 2.1 é necessário conhecer T, U, Y, X (2.4) relacionadas com as matrizes de incerteza, o que pressupõe a escolha de L e V (2.5), e o que, por sua vez, significa adotar uma decomposição tipo rank-1 das matrizes de incerteza.

O seguinte teorema apresenta uma alternativa para encontrar uma lei de controle de custo garantido a partir da solução de LMIs onde a busca de uma decomposição adequada tipo rank-1 é incorporada. Este teorema foi inspirado nos resultados encontrados em Fishman *et al.* (1996), diferindo na incorporação das matrizes Q e R e na solução do controle de custo garantido.

Teorema 2.2. Considere o sistema com incerteza (2.1) e a função custo (2.6). Se existir uma solução (W, L, V, Q, M) com W, Q, M simétricas e positivas definidas e L, V diagonais e positivas definidas tal que as seguintes desigualdades de matrizes lineares sejam satisfeitas

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \Phi & WO' & BMG' & W \\ OW & L & 0 & 0 \\ GMB' & 0 & V & 0 \\ W & 0 & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.10a)$$

$$(ii) \quad Q - Q_0 > 0 \quad (2.10b)$$

$$(iii) \quad R - R_0 > 0 \quad (2.10c)$$

sendo $\Phi = -WA' - AW + BMB' - DLD' - FVF$

então a lei de controle

$$u(t) = -R^{-1}B'P x(t) \quad (2.11)$$

com $P := W^{-1}$ e $R := M^{-1}$, é uma lei de controle de custo garantido e o custo garantido para o sistema (2.1) é dado por

$$J_G = x_0' P x_0. \quad (2.12)$$

Prova. Aplicando o complemento de Schur (Boyd et al., 1994; Doyle et al., 1991) à (2.10a), pré e pós multiplicando por P e após algumas manipulações, obtém-se

$$A'P + PA + O'L^{-1}O - P\{BR^{-1}B' - BR^{-1}G'V^{-1}GR^{-1}B' - FVF' - DLD'\}P + Q < 0$$

Com $Q_1 > Q$ e utilizando (2.4), tem-se

$$A'P + PA + U - P\{BR^{-1}B' - BR^{-1}X R^{-1}B' - Y - T\}P + Q_1 = 0 \quad (2.13)$$

Desta forma, pelo Teorema 2.1, tem-se que a lei de controle (2.11) é uma lei de controle de custo garantido e assegura

$$J_1(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \{x'(t)Q_1x(t) + u'(t)Ru(t)\}dt \leq J_G$$

De (2.10b) e (2.10c) vem $Q > Q_0$ e $R > R_0$, e pode-se escrever

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \{x'(t)Q_0x(t) + u'(t)R_0u(t)\}dt < \int_0^\infty \{x'(t)Q_1x(t) + u'(t)Ru(t)\}dt \leq J_G$$

de maneira que o custo J_G é um custo garantido. $\square$

A principal vantagem do Teorema 2.2 é a possibilidade de encontrar uma lei de controle de custo garantido para o sistema com incerteza (2.1) sem a necessidade de ter decomposições rank-1 adequadas *a-priori*. Por outro lado, perde-se o papel de ponderação que as matrizes Q_0 e R_0 têm na equação de Riccati aumentada (2.7) (representando parâmetros que o projetista ajusta de forma a obter respostas adequadas), dificultando a obtenção de uma lei de controle apropriada.

A seguir uma solução do problema de custo garantido que minimiza um limite superior para o custo garantido J_G é apresentada. O efeito de ponderação exercido por Q_0 e R_0 é também recuperado.

2.3. Minimização de um Limite Superior para o Custo Garantido

Lema 2.1. Se $J_G = x_0' P x_0$ for um custo garantido para o sistema (2.1) considerando uma função de custo $J(x_0, u(t))$, então

$$J_L = \lambda_{\max}(P) \|x_0\|^2 \quad (2.14)$$

é um custo garantido para o sistema (2.1) e um limite superior de J_G .

Prova. Desde que J_G é um custo garantido, tem-se $J(x_0, u(t)) \leq J_G$. Sendo que $x_0' P x_0 \leq \lambda_{\max}(P) \|x_0\|^2$, tem-se que $J_G \leq J_L$ e, portanto, $J(x_0, u(t)) \leq J_G \leq J_L$, de forma que J_L é um custo garantido para o sistema (2.1) e um limite superior para J_G .

Lema 2.2. Seja uma matriz qualquer P simétrica e positiva definida. Os seguintes problemas de minimização são equivalentes.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \min \tau \\ & \text{sujeito à} \quad P < \tau I \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \min \tau \\ & \text{sujeito à} \quad \tau > \lambda_{\max}(P) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Prova. Apêndice A.

Teorema 2.3. Considere o sistema com incerteza (2.1), a lei de controle da forma (2.11), a função custo (2.6) e o custo garantido (2.12). A minimização do limite superior J_L (2.14) do custo garantido (2.6) para o sistema (2.1) é assegurada pela lei de controle (2.11) se o seguinte problema de otimização tiver um conjunto não vazio de soluções admissíveis (W, L, V, Q, M) , com as matrizes W, Q, M simétricas e positivas definidas e L, V diagonais e positivas definidas:

$$\min_{W,L,V,Q,M} \quad \gamma \quad (2.17)$$

$$\text{sujeito a} \quad \text{i) } \gamma I - I > 0 \quad (2.18)$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} \Phi & WO' & BMG' & W \\ OW & L & 0 & 0 \\ GMB' & 0 & V & 0 \\ W & 0 & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{iii) } Q - Q_0 > 0$$

$$\text{iv) } R - R_0 > 0$$

onde $\Phi := -WA' - AW + BR^1B' - DLD' - FVF'$, $P := W^1$ e $R := M^1$.

Prova. a) Dadas as restrições (ii)-(iv), usando o Teorema 2.2 tem-se que o custo $J_G = x_0' P x_0$ é um custo garantido assegurado pela lei de controle $u(t)$ dada por (5.11).

b) Multiplicando (2.18) por $P=W^1$, tem-se

$$P < \gamma I$$

Pelo Lema 2.2, tem-se que esta restrição é equivalente à restrição $\gamma > \lambda_{\max}(P)$. Assim, a minimização de γ acarreta na minimização de $\lambda_{\max}(P)$, e esta, por sua vez, na minimização de J_L . A convexidade da função objetivo e das restrições garante a otimalidade da solução. $\square$

A metodologia de projeto descrita apresenta algumas características interessantes, comentadas nas observações a seguir.

Observação 2.2. $P = W^1$ com W encontrado através do problema de minimização (2.17) tende para a solução da equação de Riccati aumentada

$$-A'P - PA - U + P[B(R^{-1} - R^{-1} X R^{-1})B' - Y - T]P - Q = 0 \quad (2.19)$$

com L, V, Q, R também obtidos por (2.17). Também, em geral Q e R aproximam-se de Q_0 e R_0 e, desta forma, a escolha das matrizes Q_0 e R_0 tem um papel análogo ao da escolha das matrizes de ponderação da equação de Riccati.

Observação 2.3. Caso as incertezas associadas a um sistema sejam nulas, a equação de Riccati acima é simplificada para

$$-A'P - PA + PB R^{-1} B' P - Q = 0 \quad (2.20)$$

que é a bem conhecida equação de Riccati. Também, Q e R aproximam-se de Q_0 e R_0 , de maneira que P encontrado através de (2.17) tende para P encontrado através de

$$-A'P - PA + PB R_0^{-1} B' P - Q_0 = 0 \quad (2.21)$$

que é a Riccati utilizada na solução ótima para a função de custo

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \{x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t)\} dt$$

e portanto o custo garantido $J_G = x_0' P x_0$, neste caso, tende ao custo ótimo J^* .

Observação 2.4. Pode-se mostrar que $V(x) = x' P x$ é uma função de Lyapunov do sistema (2.1). O lema a seguir formaliza esta observação.

Lema 2.3. Considere o sistema (2.1) realimentado com a lei de controle da forma (2.8) com P obtido através das expressões (2.7), (2.10) ou (2.17). Então a função $V(x) = x' P x$ é uma função de Lyapunov do sistema (2.1) realimentado, satisfazendo $\dot{V}(x, t) \leq -\tau (\|x\|^2)$ para todo $x \in R^n$ e $t \in R$.

Prova. Apêndice A.

Observação 2.4. De acordo com a Observação 2.1, as matrizes de incerteza de rank genérico (ou seja, não necessariamente rank-1) podem ser majoradas em matrizes rank-1. Entretanto, uma vez que para a aplicação dos teoremas deste capítulo é necessário que as matrizes de incerteza sejam do tipo rank-1 e que há um número ilimitado de formas de realizar a majoração citada, os resultados fornecidos por estes teoremas ficam dependentes da majoração das matrizes de incerteza adotada. No Apêndice D, apresenta-se um teorema extraído de (Costa and Oliveira, 1998) que permite encontrar o menor limite superior para o custo garantido fornecido pelo Teorema 2.3 considerando todas as majorações possíveis das matrizes de incerteza.

3. CONTROLE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA UMA DESCRIÇÃO POR SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZA

No projeto de um controlador de ganho programado, após escolherem-se os pontos de operação, projetam-se controladores para cada ponto de forma que as características de robustez de estabilidade e desempenho desejadas sejam atendidas, conforme descrito no Capítulo 1.

Apesar de haver uma variedade de métodos para o projeto de controladores para sistemas não lineares, entre as quais citam-se os métodos de controle ótimo e o método de linearização por realimentação, dependendo das características do sistema não linear a aplicação destas metodologias encontra grande dificuldade. Isto é o que ocorre freqüentemente quando, por exemplo, a ordem do sistema é elevada ou as não linearidades do sistema são complexas. Uma abordagem bastante utilizada e que contorna estes problemas é a que consiste na linearização e uso de técnicas de projeto para sistemas lineares; entretanto, se por um lado esta abordagem é uma das que apresentam maior facilidade de aplicação, por outro lado a estabilidade alcançada é de natureza local (Vidyasagar, 1993; Wiggins, 1990). Também enfrentam-se dificuldades para obter subconjuntos do domínio de atração do sistema não linear.

Neste trabalho, a seguinte abordagem é proposta. Um sistema linear com incertezas é utilizado para representar o SNL em uma região envolvendo o ponto de equilíbrio. Em seguida, o controlador é projetado para o SLI, utilizando a metodologia

encontrada no Capítulo 2. Finalmente, encontram-se subconjuntos do domínio de atração, conjuntos invariantes e funções de Lyapunov para o SNL através do SLI.

Este capítulo encontra-se dividido em três seções. Na Seção 3.1 descreve-se o problema de controle. Na Seção 3.2 apresenta-se a descrição da planta não linear via um sistema linear com incertezas estruturadas. A relação entre o SLI e o SNL é estudada na Seção 3.3, fornecendo resultados que permitem encontrar subconjuntos do domínio de atração, regiões invariantes e funções de Lyapunov para o SNL através do SLI.

3.1. Descrição do Problema de Controle

Considere o sistema não linear

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

sendo $f: R^{n+p} \rightarrow R^n$ uma função continuamente diferenciável com $f(0,0)=0$, $x \in R^n$ o estado e $u \in R^p$ o controle. Ou a sua forma alternativa,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

O problema de controle considerado é o de obter funções de Lyapunov, subconjuntos do domínio de atração e regiões invariantes do SNL (3.1) com a lei de controle $u(t)$ (definições no Apêndice A).

3.2. Obtenção do SLI para Representação do SNL em uma Região

Considere a linearização de (3.1) em torno da origem,

$$\dot{x}(t) = f_l(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.3)$$

sendo

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0)$$

com $\partial f / \partial x$ denotando a matriz cujo ij -ésimo elemento é $\partial f_i / \partial x_j$ e $\partial f / \partial u$ denotando a matriz cujo ij -ésimo elemento é $\partial f_i / \partial u_j$.

Inspirando-se nas restrições do tipo setor (Vidyasagar, 1993; Khalil, 1996), definem-se as seguintes restrições sobre a função f

$$(1 - \varphi_j) f_{lj}(x, u) \leq f_j(x, u) \leq (1 + \varphi_j) f_{lj}(x, u) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

com φ_j sendo escalares constantes e sendo f_{lj} a j -ésima linha da função f_i , ou seja,

$$f_{lj} = [a_{j1} \dots a_{jn}] x + [b_{j1} \dots b_{jp}] u$$

com a_{ij} e b_{ij} sendo respectivamente os elementos de A e B , e define-se o conjunto

$$R\varphi = \{[x \ u] \in R^{n+p} : (1 - \varphi_j) f_{lj}(x, u) \leq f_j(x, u) \leq (1 + \varphi_j) f_{lj}(x, u), j = 1, \dots, p\} \quad (3.5)$$

Desta forma, na região $R\varphi$, a razão entre a derivada de cada estado do sistema linear (f_{lj}) e a derivada do estado correspondente do sistema não linear (f_j) encontra-se entre $(1 - \varphi_j)$ e $(1 + \varphi_j)$. Por exemplo, com $\varphi_j = 0,2$, tem-se que o valor de f_{lj} encontra-se entre 80% e 120% do valor de f_j .

Objetivando encontrar um sistema linear com incerteza que “cubra” o sistema não linear na região $R\varphi$, reescrevem-se as restrições (3.4) como

$$f_j(x, u) = (1 + \varphi_j \beta_j(x, u)) f_{lj}(x, u) \quad (3.6)$$

sendo $\beta_j(x, u)$ funções escalares no intervalo $[-1, 1]$. Observe que a restrição sobre os escalares β_j faz com que os estados e controles que satisfazem (3.6) também satisfaçam (3.4) e vice-versa, de maneira que (3.6) é satisfeita em $R\varphi$, observe também que se as restrições sobre os escalares β_j não fossem consideradas, quaisquer estado e sinal de controle satisfariam (3.6) para valores adequados de β_j .

Se na expressão (3.6) os escalares β_j forem substituídos por funções escalares tipo Lebesgue mensuráveis, denotadas por $\alpha_j(t)$, utilizando as expressões (3.1) e (3.6), encontra-se

$$\dot{x}_j(t) = [a_{j1} \dots a_{jn}]x + [b_{j1} \dots b_{jp}]u + \varphi_j \alpha_j(t) [a_{j1} \dots a_{jn}]x + \varphi_j \alpha_j(t) [b_{j1} \dots b_{jp}]u \quad (3.7)$$

ou, na forma matricial,

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (3.8)$$

com $\Delta A(t)$ e $\Delta B(t)$ tais que seus elementos são respectivamente $\varphi_j a_{jk} \alpha_j(t)$ e $\varphi_j b_{jm} \alpha_j(t)$, $k, j=1, \dots, n$, $m=1, \dots, p$. O SLI (3.8) é um sistema linear com incertezas estruturadas encontrado com frequência na literatura (Fishman *et al.* (1996), Kosmidou and Bourlès (1994), Costa and Oliveira (1998)).

Observação 3.1. Considere o seguinte caso particular de (3.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) \quad (3.9)$$

sendo $f: R^n \rightarrow R^n$ uma função continuamente diferenciável e $B \in R^{n \times p}$ uma matriz constante. Procedendo de forma similar, define-se a região $R\varphi'$ como

$$R\varphi = \{x \in R^n: (1 - \varphi_j)f_{1j}(x) \leq f_j(x) \leq (1 + \varphi_j)f_{1j}(x), j = 1, \dots, p\} \quad (3.10)$$

e encontra-se o SLI

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x + Bu \quad (3.11)$$

com ΔA tal que seus elementos sejam $\varphi_j \alpha_{jk} \alpha_j(t)$.

Observação 3.2. Considere o seguinte caso particular de (3.1). Seja o sistema (3.1) com uma lei de controle $u(x)$. Neste caso, o SLI é dado por (3.8), como antes, mas dada a dependência de u e x , a região $R\varphi$ pode ser escrita como $R\varphi'$.

3.3. Principais Resultados

Quais as relações entre as soluções do SLI e do SNL, entre suas funções de Lyapunov, entre seus domínios de atração e de conjuntos invariantes são algumas das questões que surgem e que serão tratadas nesta seção, através dos teoremas apresentados a seguir.

Teorema 3.1. Qualquer solução do sistema não linear (3.1) em $R\varphi$ pertence ao conjunto de soluções do sistema linear com incerteza (3.8).

Prova. Sejam $s(t, x_0, u) \in R^n$ e $s_u(t, x_0, u) \in R^n$ soluções de (3.1) e (3.8) respectivamente, e $[x_0 \ u] \in R\varphi$. Mostra-se que $\forall s(t, x_0, u): [(s(t, x_0, u) \ u)] \in R\varphi$ é solução do sistema linear com incerteza (3.8). Sendo que $\alpha_j(t)$ pode assumir qualquer valor no intervalo $[-1, 1]$, admite-se $\alpha_j(t) = \beta_j(x, u)$, $\forall [x \ u] \in R\varphi$, lembrando que o valor de $\beta_j(x, u)$ também encontra-se no mesmo intervalo. Utilizando esta igualdade e a expressão (3.6), encontra-se

$$f_j(x, u) = (1 + \varphi_j \beta_j(x, u)) f_{lj}(x, u) = (1 + \varphi_j \alpha_j(t)) f_{lj}(x, u)$$

ou,

$$f(x, u) = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (3.12)$$

de forma que a derivada do estado é igual para ambos os sistemas. Conclui-se que $s_u(t, x_0, u) = s(t, x_0, u)$. $\square$

Teorema 3.2. Uma função de Lyapunov $V(x)$, com $-\dot{V}(x)$ definida positiva, para o sistema linear com incerteza (3.8) com uma lei de controle u é também uma função de Lyapunov em $R\phi$ com $-\dot{V}(x)$ localmente definida positiva em $R\phi$ (ou seja, com $[x \ u] \in R\phi$) para o sistema não linear (3.1) controlado pela mesma lei. Em adição, se $V(x)$ for decrescente, o sistema (3.1) controlado é assintoticamente estável na origem.

Prova: a) Por hipótese, tem-se que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $[x \ u] \in R^n$ e quaisquer $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, ou seja, $(\partial V / \partial x) \cdot [(A_i + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u(x)] < 0$. Da prova do Teorema 1 tem-se que $f(x, u) = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u$ para $[x \ u] \in R\phi$ e para algum $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ admissível. Assim, conclui-se que $(\partial V / \partial x) f(x, u) < 0$, $[x \ u] \in R\phi$, ou seja, que $-\dot{V}(x)$ em $R\phi$ é localmente definida positiva.

b) Considerando $V(x)$ decrescente, e sendo que $-\dot{V}$ é localmente definida positiva $R\phi$, o equilíbrio 0 é assintoticamente estável (Vidyasagar, 1993). $\square$

Teorema 3.3. Considere os sistemas (3.1) e (3.8), uma lei de controle $u(t)$ e um conjunto de estados e controles denotado por R_i . Se $[s_u(t, x_0, u) \ u(t)] \in R_i \subset R\phi$, $\forall t > 0$, $[x_0 \ u(0)] \in R_i$, então $[s(t, x_0, u) \ u(t)] \in R_i \subset R\phi$, $\forall t > 0$. Além disto, se (3.8) é assintoticamente estável, então $s(t, x_0, u) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Prova. a) Considere a negativa da tese, ou seja, para algum t tem-se $[s(t, x_0, u) \ u(t)] \notin R_i$, $[x_0 \ u(0)] \in R_{inv}$. Dado que $[s(0, x_0, u(0)) \ u(0)] \in R_i$, em algum instante t_1 verifica-se que: $[s(t_1, x_0, u) \ u(t_1)] \in R_i$, $[s(t_1 + \delta, x_0, u) \ u(t_1 + \delta)] \notin R_i$, $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno. No instante t_1 , tem-se do Teorema 1 que $f(x, u) = (A + \Delta A(t_1))x + (B + \Delta B(t_1))u(x)$ para $x, u \in R\phi$ e para algum $\Delta A(t_1)$, $\Delta B(t_1)$ admissível, implicando que $[s_u(t_1 + \delta, x_0, u) \ u(t_1 + \delta)] \notin R_i$, que é a negativa da hipótese, provando a primeira parte por contradição.

b) Para $[s(t, x_0, u) \ u(t)] \in R_i$, tem-se que $s_u(t, x_0, u) = s(t, x_0, u)$ para algum $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ admissível. Portanto, dado que $s_u(t, x_0, u) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ para qualquer $\Delta A(t_1), \Delta B(t_1)$ admissível, conclui-se que $s(t, x_0, u) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. $\square$

Corolário 3.3. Considere os sistemas (3.9) e (3.11) e uma lei de controle $u(x)$. Se $R_{inv} \subset R\varphi'$ é um conjunto invariante de (3.11), então R_{inv} é um conjunto invariante de (3.9). Além disto, se (3.11) é garantidamente assintoticamente estável, então R_{inv} é um subconjunto do domínio de atração de (3.9).

Observação 3.3. Seja um conjunto de nível L_v consistindo da componente conexada de $M = \{x \in R^n : V(x) \leq c\}$ sendo $V(x)$ uma função de Lyapunov do SLI com a lei de controle u que garante estabilidade assintótica. Pode-se mostrar que L_v é um subconjunto do domínio de atração e um conjunto invariante do SLI. Assim, dispondo de $V(x)$, para encontrar regiões invariantes e estimativas de subconjuntos do domínio de atração do SLI contidas em $R\varphi'$, pode-se simplesmente buscar o valor de c adequado (suficientemente pequeno) tal que $L_v \subset R\varphi'$ e utilizar o Corolário 3.3.

Observação 3.4. Para os casos particulares considerados nas Observações 1 e 2, resultados similares aos dos Teoremas 1 e 2 são facilmente obtidos, não sendo aqui descritos. Para o caso particular considerado na Observação 1, resultados análogos aos do Corolário 3.3 são facilmente obtidos.

Observação 3.5. É interessante notar que se um subconjunto do domínio de atração for encontrado utilizando a Observação 3.3 e o Corolário 3.3, o conjunto $L_v(c)$ obtido encontra-se contido em $R\varphi'$, já que a função de Lyapunov é válida em $R\varphi'$. Neste caso, a questão que surge naturalmente é como encontrar o maior valor de c tal que $L_v(c)$ permaneça contido em $R\varphi'$, de forma que se obtenha o “maior” conjunto $L_v(c)$ no sentido de que contém qualquer outro conjunto obtido pelo uso da função de Lyapunov, ou seja, $L_v(c) \subseteq L_v(c_{max}), c \leq c_{max}$. Esta questão foi estudada para os exemplos de aplicação considerados neste trabalho e os resultados encontrados são apresentados no Apêndice B e C. A Figura 1 ilustra $L_v(c_{max})$ e conjuntos de nível L_v .

Figura 1. Ilustração de $L_v(c_{max})$ e $R\phi'$.

Observação 3.6. Deve-se ter em mente que os resultados obtidos são em geral conservadores. Como exemplo, a condição de invariância de R_i no Teorema 3.3 é suficiente, mas não necessária. Assim, espera-se que o sistema não linear controlado seja atrativo em regiões além daquelas estabelecidas.

Observação 3.7. Apesar dos resultados apresentados não tratarem da estabilidade assintótica de (3.1) na origem, pode-se mostrar que se o sistema linear com incerteza realimentado for assintoticamente estável em 0, o sistema não linear realimentado será assintoticamente estável em 0, dado que as soluções do último estão contidas nas soluções do primeiro.

4. CONTROLADORES DE GANHO PROGRAMADO PARA REGULAÇÃO DE ESTADO E MUDANÇA DE PONTO DE OPERAÇÃO

Neste capítulo os resultados dos Capítulos 2 e 3, que permitem encontrar subconjuntos invariantes do domínio de atração do SNL através do SLI, são utilizados no projeto de controladores de ganho programado para o problema de regulação de estados e o problema de mudança de ponto de operação em sistemas não lineares.

A aplicação de controladores de ganho programado para regulação de estado em SNL inspira-se no conservadorismo inerente ao processo de representação via SLI e ao projeto do controlador para o SLI pela metodologia do Capítulo 2. Este conservadorismo está relacionado com as não linearidades do SNL, de forma que é conveniente a conjugação de controladores especializados para diferentes regiões envolvendo o ponto de operação. Também cita-se como contribuição a apresentação de uma metodologia estruturada de projeto para um controlador de ganho programado para o problema de mudança de ponto de operação.

Este capítulo encontra-se dividido nas seguintes seções. A Seção 4.1 apresenta a abordagem de controle de ganho programado para ao problema de regulação de estados em SNL e a Seção 4.2 apresenta a metodologia de projeto de controladores de ganho programado para o problema de mudança de ponto de operação em SNL.

4.1. Uma abordagem de Controladores de Ganho Programado para Regulação de Estados em Sistemas não Lineares.

Considere um regulador de estado $u_1(x)$ para o sistema (3.1) projetado através do sistema linear com incerteza (3.8) e um subconjunto invariante do domínio de atração de (3.1), denotado por R_1 , obtido através dos resultados do Capítulo 3.

Conforme encontra-se descrito no início deste capítulo, uma das críticas que se pode fazer com relação a utilização deste controlador refere-se ao conservadorismo inerente ao processo de representação via SLI (ver Observação 3.4) e inerente ao projeto do controlador pela metodologia do Capítulo 2. Este conservadorismo pode ter diferentes impactos no sistema de controle, como elevação dos ganhos ou aumento do custo.

É possível reduzir o conservadorismo existente valendo-se do fato de que, em geral, quanto menores forem os valores de ϕ_j considerados (ou seja, quanto melhor for a aproximação entre o SNL e sua linearização em uma região), menos conservadores são a representação linear com incerteza e o projeto do controlador. Assim sendo, projetam-se controladores para atuar em regiões “menores” (sob o ponto de vista destas corresponderem a representações lineares com menor incerteza), denotadas por R_i , $i=2,\dots,T$, onde T é o número total de controladores. Dado que os diferentes controladores são projetados para atuar em regiões específicas do espaço de estado, a variável de programação adotada é o estado do sistema. A lei de controle, denotada por u_G , é dada por

$$u_G(x) = \begin{cases} u_1, & x \in R_1 - \bigcup_{k=2}^T R_k \\ u_i, & x \in R_i - \bigcup_{k=i+1}^T R_k, \\ u_T, & x \in R_T \end{cases} \quad i = 2, \dots, T-1 \quad (4.1)$$

onde R_i é a região para a qual o controlador i foi projetado e u_i é a lei de controle referente ao controlador i .

Esta estratégia de chaveamento estabelece uma relação hierárquica entre os controladores na qual o controlador menos “periférico” (de maior índice i) tem prioridade. Observe que o domínio de $u_G(x)$ definido por (4.1) é $R_1 \cup R_2 \dots \cup R_T$. Na prática, considerando que o domínio de atração do sistema não linear controlado por cada controlador u_i é em geral maior que o correspondente subconjunto R_i , pode ser conveniente estender o domínio da lei $u_G(x)$ para todo R^n .

De acordo com a Observação 3.1, é possível obterem-se conjuntos invariantes e subconjuntos do domínio de atração do SNL da forma $L = \{x \in R^n : x'Px \leq c_{\max i}\}$ onde P e $c_{\max}$ são, respectivamente, uma matriz simétrica positiva definida e um escalar real positivo. Para saber se $x(t)$ pertence a um dado conjunto L_i , pode-se simplesmente verificar se $x(t)'Px(t) \leq c_{\max i}$. Desta forma, a lei de controle (4.1) pode ser reescrita como (4.2). A vantagem encontra-se na facilidade de implementação prática, pois a verificação da condição “ $x(t)'Px(t) \leq c_{\max i}$ ” é mais simples do que a verificação de “ $x \in D_i$ ”.

$$u(x) = \begin{cases} K_i x, & xP_i x \leq c_{\max i}, \quad xP_k x > c_{\max k}, \quad k = i+1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, T-1 \\ K_T x, & xP_T x \leq c_{\max T} \end{cases} \quad (4.2)$$

O restante desta seção é dedicado a análise do sistema controlado por (4.1) ou (4.2). Para simplificar a notação e tornar o texto mais didático, consideram-se apenas dois controladores. A extensão para mais de dois controladores é simples e não será apresentada. A lei de controle da forma (4.1) é, portanto, expressa por

$$u_G(x) = \begin{cases} u_1, & x \in R_1 - R_2 \\ u_2, & x \in R_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Lema 4.1. Se R_1 e R_2 são subconjuntos do domínio de atração e conjuntos invariantes de (3.1) respectivamente com a lei de controle u_1 e u_2 , então $R_1 \cup R_2$ é um subconjunto do domínio de atração e um conjunto invariante de (3.1) com a lei de controle (4.3).

Prova. Apêndice A.

Caso mais de dois controladores sejam utilizados na construção de uma lei de controle da forma (4.3), o Lema 4.1 é facilmente estendido, não sendo portanto descrito. Nota-se também que a lei de controle (4.2) representa apenas uma forma alternativa de (4.1), e portanto os resultados do Lema 4.1 são válidos para (4.2).

4.2. Uma Metodologia para Mudança de Pontos de Operação em Sistemas não Lineares utilizando Controladores de Ganho Programado

A mudança de ponto de operação de processos não lineares consiste em um interessante problema de controle encontrado na prática. As razões para um determinado sistema mudar de ponto de operação podem ser várias, entre as quais citam-se ocorrências de alterações no sistema (devido a desgaste ou envelhecimento de componentes), de alterações no meio ambiente e de alterações de ordem econômica (como mudança da demanda de um mercado consumidor).

Nesta seção, é apresentada uma abordagem para este problema de controle baseada nos resultados dos Capítulos 2 e 3, com a principal característica de garantir a transição desejada.

Esta seção encontra-se subdividida em 3 partes. Na Seção 4.2.1, descreve-se o problema de controle e na Seção 4.2.2, a metodologia de projeto. Finalmente, na Seção 4.2.3 apresentam-se resultados que garantem a transição entre pontos de operação.

4.2.1. Descrição do Problema de Controle

Considera-se o sistema dinâmico descrito por (3.1),

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

sendo $f: R^{n+p} \rightarrow R^n$ uma função continuamente diferenciável com $f(0,0)=0$, $x \in R^n$ o estado e $u \in R^p$ o controle.

O problema de controle consiste em efetuar a transição de x_I para x_F , ambos pontos de operação de (3.1), com os controles u_I e u_F respectivamente, de forma que

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_I, u_I) \\ 0 &= f(x_F, u_F) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Considera-se que a transição entre os pontos de operação deva ser garantida, segundo a seguinte definição.

Definição 4.1. A transição do ponto de operação x_I para o ponto de operação x_F é denominada garantida se x_I pertencer ao domínio de atração $D(x_F)$ do sistema (3.1) realimentado.

Em outras palavras, se a transição for garantida, pode-se afirmar que $s(t, x_I) \rightarrow x_F$ quando $t \rightarrow \infty$.

5.2.2. Metodologia de Projeto

Nesta seção apresenta-se a metodologia de projeto para o problema de controle descrito na Seção 4.2.1, através dos passos envolvidos no projeto encontrados na sequência.

Passo 1: Determinar o conjunto de estados de equilíbrio $X_{EQ} = \{x_{EQ} \in R^{n+p} : f(x_{EQ}, u_{EQ}) = 0\}$.

Passo 2: Verificar se x_I e x_F são conectados em X_{EQ} , ou, equivalentemente, se existe um caminho em X_{EQ} que liga x_I e x_F .

Passo 3: Especificar um caminho $x_{EQ}(\zeta), u_{EQ}(\zeta)$ parametrizado por um escalar $\zeta: 0 \leq \zeta \leq 1$ ligando x_I e x_F tal que $x_{EQ}(0) = x_I$, $u_{EQ}(0) = u_I$, $x_{EQ}(1) = x_F$, $u_{EQ}(1) = u_F$. Ver ilustração na Figura 2.

Figura 2. Ilustrando um caminho $x_{EQ}(\zeta)$

Observação 4.1. Uma forma alternativa de determinar este caminho consiste em encontrar as funções $u_{EQ}(w)$ e $z_{EQ}(w)$ tais que

$$f(w, z_{EQ}(w), u_{EQ}(w)) = 0$$

onde decompõe-se $x = [w' \ z']'$ de forma que para todo w existem um x_{EQ} e um u_{EQ} únicos, de forma similar a Shamma and Athans (1990). Então, faz-se $x_{EQ}(\zeta) = [w_\zeta(\zeta)', z_{EQ}(w_\zeta)']'$, $u_{EQ}(\zeta) = u_{EQ}(w_\zeta)$, com $w_\zeta(\zeta) = \zeta(w_{EQ2} - w_{EQ1}) + w_{EQ1}$, $0 \leq \zeta \leq 1$.

Passo 4: Fazer $i = 1$, $x_{eq\ 1} = x_F$, $u_{eq\ 1} = u_F$ e $\xi_0 = 1$.

Passo 5: Realizar a mudança de variáveis $x_p = x - x_{eqi}$ e $u_p = u - u_{eqi}$, com as quais tem-se

$$\dot{x}_p = f(x_p, u_p), \quad f(0, 0) = 0 \quad (4.5)$$

Passo 6: Linearizar o sistema em $x_p = 0$, $u_p = 0$, obtendo o sistema $\dot{x}_p = Ax_p + Bu_p$.

Passo 7: Verificar se o sistema linearizado é controlável, ou seja, se $\text{rank}[B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n$.

Passo 8: Escolher os valores de φ_i (3.4). Encontrar a representação

$$\dot{x}_u = (A_i + \Delta A_i)x_u + (B + \Delta B)u_p \quad (4.6)$$

através da expressão (3.8).

Passo 9: Encontrar a lei de controle $u_p(x_p) = -R^{-1}B'W^{-1}x_p(t)$ com R e W fornecidos pela solução do problema de otimização (2.17). Pelo Lema 2.3, $V(x_p) = x_p'W^{-1}x_p$ com W obtido por (2.17) é uma função de Lyapunov do sistema (4.6).

Passo 10: Encontrar $c_{\max}$ tal que $L_v(c_{\max}) = \{x_p \in R^n : V(x_p) \leq c_{\max}\}$ esteja contido em $R\varphi'$ (3.10). Através de $L_v(c_{\max})$, encontrar $D_i(x_{eq\ i}) = \{x \in R^n : (x - x_{eq\ i}) \in L_v(c_{\max})\}$. Ou seja, $D_i(x_{eq\ i})$ é equivalente à $L_v(c_{\max})$, fazendo a mudança de variável $x_p = x - x_{eq\ i}$.

Observação 4.2. Pode-se mostrar com facilidade que $L_v(c_{\max})$ é um conjunto conectado (pois W é simétrica definida positiva, implicando que $L_v(c_{\max})$ é convexo). Sendo que $L_v(c_{\max}) \subset R\varphi'$, de acordo com a Observação 3.3 $L_v(c_{\max})$ é um subconjunto invariante do domínio de atração de (4.6). Em adição, sendo que a lei de controle $u_p(x_p)$ garante estabilidade assintótica de (4.6), pelo Corolário 3.3 tem-se que $L_v(c_{\max})$ é um subconjunto invariante do domínio de atração do sistema não linear (3.1) com a lei de controle u_p .

Passo 11: Se $x_{eq\ i} = x_I$, o projeto está completo. A lei de controle é dada por (4.7). Senão, se x_I for ponto interior de $D_i(x_{eq\ i})$, fazer $i = i+1$, $x_{eq\ i} = x_I$, $u_{eq\ i} = u_I$ e voltar para o passo 4.

Passo 12: Encontrar $\zeta_{\min} = \min(\zeta)$ sujeito à $x_{EQ}(\zeta) \in D_i(x_{eq\ i})$ e $0 \leq \zeta \leq 1$. Fazer $\xi_i = \zeta_{\min} + \delta$, sendo δ um escalar real $0 < \delta < \xi_{i-1} - \zeta_{\min}$. Fazer $i = i+1$, $x_{eq\ i} = x_{EQ}(\xi_i)$ e voltar para o passo 4.

Uma vez que δ deve variar no projeto (pois é restrito em função de ξ_i), pode-se automatizar a escolha de δ fazendo $\delta = \kappa(\xi_{i-1} - \zeta_{\min})$, com $0 < \kappa < 1$.

O fator δ foi incluído para garantir que $x_{eq\ i}$ seja um ponto interior do domínio D_{i-1} . Caso contrário, $x_{eq\ i}$ poderia estar exatamente na fronteira do domínio de atração D_{i-1} , e portanto não se poderia garantir que uma trajetória pertencente a D_i passasse a pertencer ao domínio D_{i-1} . Uma vez que a garantia da transição está baseada na ocorrência do chaveamento dos controladores, o fato descrito implica na perda de tal garantia, já que não há chaveamento se a trajetória não entrar em D_{i-1} . A Figura 3 ilustra este raciocínio, mostrando como uma trajetória $s(t) \rightarrow x_{EQ}(\zeta_{\min})$, com $x_{EQ}(\zeta_{\min})$ na fronteira de D_1 , pode nunca passar a pertencer à D_1 , e também ilustra os passos 11 e 12 para $i = 1$.

Figura 3. Ilustração dos passos 10 a 12 do projeto com $i=1$. Também ilustra-se uma trajetória $s(t)$ que tende para um ponto na fronteira de D_1 .

$$u_G(x) = \begin{cases} -R_T^{-1}B'W^{-1}_T(x(t) - x_{eq\ T}) + u_{eq\ T}, & x \in R^n - \bigcup_{i=1}^{T-1} D_i \\ -R_j^{-1}B'W^{-1}_j(x(t) - x_{eq\ j}) + u_{eq\ j}, & x \in R^n - \bigcup_{i=1}^{j-1} D_i, \quad j = 2, \dots, T-1 \\ -R_1^{-1}B'W^{-1}_1(x(t) - x_{eq\ 1}) + u_{eq\ 1}, & x \in D_1 \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo T é o total de controladores, P_j e R_j são encontrados através do problema de otimização (5.17), e os domínios D_j são encontrados no passo 10.

Observação 4.3. Apesar de a lei de controle u_p ter sido encontrada através do problema de otimização encontrado no Teorema 2.3, podem-se também utilizar os Teoremas 2.1 e 2.2, assim como o Teorema D.1 (Apêndice D).

4.2.3. Estudo da Garantia da Transição entre os Pontos de Operação

O Teorema 4.1 estabelece que o projeto descrito na Seção 4.2.2 garante a transição dos pontos operacionais de equilíbrio. Os Lemas 4.1 e 4.2 apresentados a seguir são utilizados na prova do Teorema 4.1

Lema 4.2. Considere um conjunto S e um ponto interior deste conjunto $x_{eq} \in R^n$. Se uma trajetória $s(t) \rightarrow x_{eq}$ então $s(t_1) \in S$, para algum $t_1 \in R$.

Prova: Apêndice A.

Lema 4.3. Considere um ponto qualquer $x_{eq} \in R^n$, e um conjunto S . Se $s(t) \notin S \forall t \in R$ e se x_{eq} é ponto interior de S , então $s(t)$ não tende para x_{eq} .

Prova: Decorre imediatamente do *Lema 4.2*.

Teorema 4.1. Se $x(t_0) \in D_T(x_I)$, então o sistema (3.1) com a lei de controle (4.7) apresenta transição garantida de x_I para x_F .

Prova. $x(t_0) \in D_T(x_{eqT})$ (lembrando que $x_{eqT} = x_I$) implica que após algum instante $t_1 > t_0$, $s(t_1, x(t_0)) \in D_{(j)}(x_{eq(j)})$ para algum $j: 1 \leq j \leq T-1$. Para demonstrar tal afirmação, pode-se utilizar contradição: se $s(t_1, x(t_0)) \notin D_{(j)}(x_{eq(j)})$, $\forall j: 1 \leq j \leq T-1$, $\forall t > t_0$, tem-se através de (4.5) que apenas o controlador T atua no sistema, e assim, que $s(t_1, x(t_0)) \rightarrow x_{eqT}$. Uma vez que x_{eqT} é um ponto interior de $D_{(T-1)}(x_{eq(T-1)})$ (o que é garantido pela escolha de x_{eqT} no passo 11), o fato de $s(t_1, x(t_0)) \notin D_{(j)}(x_{eq(j)})$, $\forall j: 1 \leq j \leq T-1$, $\forall t > t_0$ implica pelo *Lema 4.3*, que $s(t_1, x(t_0))$ não tende para x_{eqT} , chegando a um absurdo.

Da mesma forma, tem-se que $x(t_1) := s(t_1, x(t_0)) \in D_{(T-1)}(x_{eq(T-1)})$ implica que $s(t_2, x(t_1)) \in D_{(j)}(x_{eq(j)})$ para algum $j: 1 \leq j \leq T-2$ e algum instante $t_2 > t_1$. Repetindo este

raciocínio, chega-se a $x(t_{(T-1)}) := s(t_{(T-1)}, x(t_{(T-2)})) \in D_{(2)}(x_{eq(2)})$ para algum instante $t_{(T-1)}$ implicando que $s(t_{(T)}, x(t_{(T-1)})) \in D_1(x_{eq1})$ para algum instante $t_T > t_{(T-1)}$ e conseqüentemente tem-se $s(t_{(T)}, x(t_{(T-1)})) \rightarrow x_{eq1}$. Dado que $x_{eqT} = x_I$ e que $x_{eq1} = x_F$ a transição de x_I para x_F é garantida. $\square$

Observação 4.4. Note que se $x(t_0) \in D_T(x_I)$, então garante-se que a trajetória tende para x_F . Este fato é importante se considerarmos que, sob condições práticas, é virtualmente impossível que o sistema esteja exatamente em x_I no instante t_0 , devido à presença de ruídos e perturbações.

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Este capítulo descreve a aplicação dos controladores de ganho programado descritos no Capítulo 4 ao sistema de suspensão magnética descrito no Apêndice B e ao sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose descrito no Apêndice C.

Divide-se este capítulo em 3 seções. Na Seção 5.1, aplica-se a abordagem descrita na Seção 4.1 ao sistema de suspensão magnética, encontrando um controlador de ganho programado para o problema de regulação de estado. Nesta mesma seção, apresentam-se resultados obtidos pela técnica de linearização por realimentação, com fins comparativos. Na Seção 5.2 aplica-se a metodologia da Seção 4.2 ao problema de mudança de ponto de operação do sistema de suspensão magnética e, finalmente, na Seção 5.3 esta metodologia é aplicada ao sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose.

5.1. *Regulação de Estados - Sistema de Suspensão Magnética*

Esta seção inicia encontrando, através da descrição da planta não linear via um SLI, uma lei de controle estabilizadora, para o sistema de suspensão magnética. Em seguida, um controlador de ganho programado da forma (4.2) é encontrado. Os resultados obtidos são apresentados e comparados entre si e entre os resultados da metodologia de linearização por realimentação.

Considere o modelo da planta em torno do ponto de equilíbrio $x_c = [0,010 \ 0 \ 0,8765]$ dado pela expressão (B.3) do Apêndice B e o problema de encontrar uma lei de

controle estabilizadora e um subconjunto do domínio de atração utilizando a abordagem descrita no Capítulo 3, ou seja, através da descrição de (B.3) via um SLI. Considera-se também a seguinte função de custo

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} (x' Q_0 x + u' R_0 u) dt \quad (5.1)$$

com $Q_0 = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_0 = 0,001$.

A metodologia adotada para o projeto do controlador para o sistema linear com incerteza é a descrita no Capítulo 2. O controlador projetado será identificado com o índice “1” pelo fato de, adiante, utilizarmos este controlador em conjunto com outros controladores. Portanto, a lei de controle é da forma $u(x) = -K_1 x$.

Inicia-se encontrando, através da expressão (B.7), a representação linearizada expressa de forma aproximada por (5.2).

$$\dot{x}_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1219 & 0 & -22,4 \\ 0 & 0 & -42,3 \end{bmatrix} x_l + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,13 \end{bmatrix} u_l \quad (5.2)$$

Em seguida, devem-se escolher os valores de φ_{11} , φ_{21} e φ_{31} (o segundo índice refere-se ao controlador 1) expressos em (3.4). Observando que apenas $\dot{x}_2(t)$ é uma função não linear, conclui-se que mesmo se adotarmos $\varphi_{11}=0$ e $\varphi_{31}=0$, a expressão (3.4) para $j=1$ e $j=3$, respectivamente, não representará qualquer restrição sobre os estados.

Dado que se deseja analisar o efeito da escolha de φ_{21} , obtém-se a expressão analítica (5.3) para a representação de (B.3) via SLI. Sendo que o sistema é da forma considerada na Observação 3.1, a região na qual o sistema linear com incerteza representa o sistema não linear é da forma $R\varphi'$ (3.10). A Figura 4 exhibe $R\varphi_1'$ em função de diferentes valores de φ_{21} . Nesta figura, o eixo de x_2 não aparece pois a não linearidade do sistema não depende de x_2 e, desta forma, qualquer valor de x_2 é permitido em $R\varphi_1'$.

$$\dot{x}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1219 & 0 & -22,4 \\ 0 & 0 & -42,3 \end{bmatrix} x_I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1219 & \varphi_{21} \alpha_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_I + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,13 \end{bmatrix} u_I \quad (5.3)$$

Figura 4. Regiões R_{φ_1}' obtidas com φ_{21} variando entre 0,1 e 0,9.

Para efeito de ilustração da aplicação do método de projeto para sistemas lineares com incerteza, adota-se $\varphi_{21} = 0,8$. Esta escolha reflete em uma região R_{φ_1} na qual a aproximação do sistema não linear pelo sistema linearizado é ruim, pois a razão entre o valor de $\dot{x}_2$ do sistema linearizado e o valor de $\dot{x}_2$ do sistema não linear encontra-se entre 20% e 180%. Adota-se também $Q_1 = Q_0 = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_1 = R_0 = 0,001$.

Através do problema de otimização (2.17) do Teorema 2.3 encontram-se os valores de K_1 e P_1 expressos em (5.4)-(5.9), juntamente com os valores de $L, V, Q, R, \lambda_{\max}(P), \iota$ obtidos. A lei de controle (5.10) é então obtida.

$$K_1 \cong [-3,098 \times 10^5 \quad -6,425 \times 10^3 \quad 4,803 \times 10^2] \quad (5.4)$$

$$P_1 \cong \begin{bmatrix} 1,728 \times 10^5 & 3,258 \times 10^3 & -1,456 \times 10^2 \\ 3,258 \times 10^3 & 5,518 \times 10^1 & -3,020 \times 10^0 \\ -1,456 \times 10^2 & -3,020 \times 10^0 & 2,257 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$R \cong 1,000 \times 10^{-3} \quad (5.6)$$

$$Q \cong \begin{bmatrix} 1,000 \times 10^6 & 6,200 \times 10^{-1} & -5,117 \times 10^{-2} \\ 6,200 \times 10^{-1} & 1,013 \times 10^0 & -1,001 \times 10^{-3} \\ -5,117 \times 10^{-2} & -1,001 \times 10^{-3} & 1,000 \times 10^0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\lambda_{\max}(P_1) \cong 1,728 \times 10^5 \quad \iota \cong 1,728 \times 10^5 \quad (5.8)$$

$$L \cong 1,278 \times 10^1 \quad V \cong 7,071 \times 10^7 \quad (5.9)$$

$$u_1 \cong [3,098 \times 10^5 \quad 6,425 \times 10^3 \quad -4,803 \times 10^2] x \quad (5.10)$$

Note que $\iota \cong \lambda_{\max}(P_1)$, conforme esperado, já que se minimiza ι sujeito a restrição $\iota > \lambda_{\max}(P)$. Também, resolvendo a equação de Riccati aumentada (2.19) em P , com os valores de U, T, X, Y encontrados pela expressão (2.4) nas quais utilizam-se os valores de L e V de (5.10), encontra-se P_1 idêntico ao expresso por (5.5), confirmando a Observação 2.2. Com isto, nota-se que Q_0 e R_0 têm o papel de ponderação útil no projeto.

Para encontrar o subconjunto invariante do domínio de atração $L_{VI}(c_{\max 1})$, utiliza-se o método descrito no Apêndice B, chegando a

$$c_{\max 1} \cong 0,075. \quad (5.11)$$

O conjunto $L_{V1}(c_{max1})$ é ilustrado pela Figura 5 através de cortes ao longo do eixo x_2 . Denota-se, adiante, $L_{V1}(c_{max1})$ como R_1 . Note que, de acordo com a Observação 3.3, $L_{V1}(c_{max1})$ é um subconjunto invariante do domínio de atração de (5.3). Também, pelo Lema 2.3, $V(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado com u_1 , de forma que pelo Corolário 3.3, $L_{V1}(c_{max1})$ é um subconjunto do domínio de atração de (B.3).

Para que se possam comparar os custos obtidos com os diferentes controladores utilizados, adota-se o estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$. As Figuras 5 e 6 exibem a resposta ao estado inicial x_0 .

Através da resposta do sistema ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$, obtida por simulação, calcula-se o custo como sendo $J(x_0, u_1(t)) \cong 0,0537$. O custo garantido (2.9), para o mesmo estado inicial, é $J_{G1} \cong 0,0674$, maior que $J(x_0, u_1(t))$, como esperado.

Figura 5. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_1 = L_{V1}(c_{max1})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_1 . Também exibe-se a resposta do sistema (B.3) ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.

Figura 6. Resposta do sistema (B.3) realimentado com o sinal de controle u_1 ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.

Considere agora a questão de encontrar um controlador de ganho programado para diminuir o conservadorismo, descrita na Seção 4.1. A lei de controle aqui considerada é da forma (4.1), com três controladores chaveados de forma abrupta,

$$u_G(x) = \begin{cases} u_1, & x \in R^n - R_2 \cup R_3 \\ u_2, & x \in R_2 - R_3 \\ u_3, & x \in R_3 \end{cases} \quad (5.12)$$

onde cada lei de controle u_i , $i = 1, \dots, 3$, é da forma (2.11) e u_1 é dado por (5.11).

Para obter os dois controladores restantes, consideram-se as mesmas matrizes de ponderação $Q_i=Q_0$, $R_i=Q_0$, $i = 1, \dots, 3$. Considera-se $\varphi_{22} = 0,5$ e $\varphi_{23} = 0,2$. Através do problema de otimização (2.17), obtém-se

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3,930 \times 10^4 & 5,257 \times 10^2 & -3,737 \times 10^1 \\ 5,257 \times 10^2 & 8,851 \times 10^0 & -6,956 \times 10^{-1} \\ -3,737 \times 10^1 & -6,956 \times 10^{-1} & 9,376 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$K_2 \cong [-7,951 \times 10^4 \quad -1,480 \times 10^3 \quad 1,995 \times 10^2] \quad (5.14)$$

$$P_3 \cong \begin{bmatrix} 2,461 \times 10^4 & 2,568 \times 10^2 & -2,227 \times 10^1 \\ 2,568 \times 10^2 & 3,704 \times 10^0 & -3,766 \times 10^{-1} \\ -2,227 \times 10^1 & -3,766 \times 10^{-1} & 5,989 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$K_3 \cong [-4,738 \times 10^4 \quad -8,012 \times 10^2 \quad 1,274 \times 10^2] \quad (5.16)$$

Os subconjuntos do domínio de atração são obtidos como descrito no Apêndice B, e são $R_2 = L_{v2}(c_{max2}) = \{x \in R^n : x'P_2x \leq c_{max2}\}$ e $R_3 = L_{v3}(c_{max3}) = \{x \in R^n : x'P_3x \leq c_{max3}\}$, com os valores de c_{max2} e c_{max3} dados em (5.17). As Figuras 7 e 8 exibem cortes destes conjuntos.

$$c_{max2} \cong 0,0180 \quad c_{max3} \cong 0,00175 \quad (5.17)$$

Através de simulação obtiveram-se a trajetória do sistema controlado pela lei de controle u_G e o custo $J(x(t), u_G(t)) \cong 5,24 \times 10^{-2}$. O sinal de controle u_G é visto na Figura 7, juntamente com o sinal de controle u_1 .

Figura 7. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_2 = L_{v2}(c_{max\ 2})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_2 .

Figura 8. Subconjunto invariante do domínio de atração $R_3 = L_{v3}(c_{max\ 3})$ do sistema de suspensão realimentado com o sinal de controle u_3 .

Figura 9. Sinais de controle u_1 e u_G , obtidos através de simulação do sistema (B.3) com $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.

Figura 10. Resposta do sistema (B.3) realimentado com u_1 e u_G ao estado inicial $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$.

Embora as respostas obtidas com os diferentes controladores sejam sensivelmente diferentes (principalmente o sinal de controle), o custo calculado nos dois casos resulta próximo, conforme pode-se observar na Tabela 1. Isto ocorre porque uma grande parcela do custo (em ambos os casos) deve-se ao intervalo de tempo entre $t=0$ e o momento no

qual ocorre o primeiro chaveamento, intervalo no qual ambos os sinais de controle são iguais. Para que se tenha uma real percepção da relação entre o custo resultante com as leis de controle u_1 e u_G , calcularam-se os custos para respostas a diferentes estados iniciais, começando com o mesmo estado inicial antes considerado, que se encontra relativamente distante da origem, e chegando a um estado inicial relativamente próximo à origem. Os resultados obtidos são expressos na Tabela 1.

Tabela 1. Custos obtidos utilizando as leis de controle u_1 e u_G em função de diferentes estados iniciais.

x_0	$J(x_0, u_1(t))$	$J(x_0, u_G(t))$	redução(%)
$[2,50 \times 10^{-3} \ -1,50 \times 10^{-1} \ -4,00 \times 10^{-1}]'$	$5,37 \times 10^{-2}$	$5,24 \times 10^{-2}$	2,59
$[1,36 \times 10^{-3} \ -8,34 \times 10^{-2} \ -2,29 \times 10^{-1}]'$	$1,63 \times 10^{-2}$	$1,47 \times 10^{-2}$	10,1
$[6,97 \times 10^{-4} \ -5,20 \times 10^{-2} \ -9,35 \times 10^{-2}]'$	$6,88 \times 10^{-3}$	$3,03 \times 10^{-3}$	60,0
$[2,98 \times 10^{-4} \ -2,94 \times 10^{-2} \ -6,83 \times 10^{-2}]'$	$2,89 \times 10^{-3}$	$4,62 \times 10^{-4}$	84,0
$[8,38 \times 10^{-5} \ -1,40 \times 10^{-2} \ -5,57 \times 10^{-2}]'$	$8,46 \times 10^{-4}$	$5,39 \times 10^{-5}$	93,6

Como se nota através da Tabela 1, os custos obtidos com a utilização de ambos controladores são compatíveis quando o estado inicial encontra-se “distante da origem”, mas há uma melhora bastante sensível para estados iniciais próximos a origem, quando observa-se uma redução de até 93,6% do custo obtido com o sinal de controle u_1 .

Conforme descrito na Observação 2.3, a solução do problema de minimização (2.17) tende para a solução da usual equação de Riccati (2.21) quando $\varphi \rightarrow 0$. Para comprovar este fato, exibimos na Tabela 2 a norma da diferença das soluções P obtidas respectivamente por (2.17) e (2.21), denotada por $\|P_{OPT} - P_{RIC}\|$, em função de φ_2 .

Tabela 2. Norma da diferença entre P obtida respectivamente por (2.17) e por (2.21) em função de φ_2 .

φ_2	$\ P_{OPT} - P_{RIC}\ $
$1,0 \times 10^{-1}$	$1,805 \times 10^3$
$1,0 \times 10^{-2}$	$1,624 \times 10^2$
$1,0 \times 10^{-3}$	$1,608 \times 10^1$
$1,0 \times 10^{-5}$	$1,606 \times 10^{-1}$

Por último, considere a lei de controle u_{FL} (E.11) obtida pela técnica de linearização por realimentação, encontrada no Apêndice E. A Figura 11 ilustra as trajetórias do sistema linear e do sistema não linear original, assim como as entradas de ambos os sistemas. O desempenho deste controlador foi verificado para diferentes estado iniciais; a Tabela 3 resume os custos obtidos com diferentes abordagens utilizadas.

Tabela 3. Custos obtidos em função de x_0 com diferentes leis de controle.

x_0	$J(x_0, u_1(t))$	$J(x_0, u_G(t))$	$J(x_0, u_{FL}(t))$
$[2,50 \times 10^{-3} \ -1,50 \times 10^{-1} \ -4,00 \times 10^{-1}]'$	$5,37 \times 10^{-2}$	$5,24 \times 10^{-2}$	$4,90 \times 10^{-2}$
$[1,36 \times 10^{-3} \ -8,34 \times 10^{-2} \ -2,29 \times 10^{-1}]'$	$1,63 \times 10^{-2}$	$1,47 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$
$[6,97 \times 10^{-4} \ -5,20 \times 10^{-2} \ -9,35 \times 10^{-2}]'$	$6,88 \times 10^{-3}$	$3,03 \times 10^{-3}$	$3,04 \times 10^{-3}$
$[2,98 \times 10^{-4} \ -2,94 \times 10^{-2} \ -6,83 \times 10^{-2}]'$	$2,89 \times 10^{-3}$	$4,62 \times 10^{-4}$	$4,89 \times 10^{-4}$
$[8,38 \times 10^{-5} \ -1,40 \times 10^{-2} \ -5,57 \times 10^{-2}]'$	$8,46 \times 10^{-4}$	$5,39 \times 10^{-5}$	$5,84 \times 10^{-5}$

Figura 11. Trajetórias e sinal de controle obtidos com o uso da lei de controle u_{FL} e com $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]^T$.

Esta seção é finalizada com alguns comentários e comparações.

Comparando as leis de controle u_1 e u_G , observa-se que, em geral, quanto menor for o intervalo de tempo durante o qual o sistema ficar submetido às leis de controle projetadas para atuar em regiões menos lineares, maior é a redução do custo obtido. Este fato tem importância prática, pois em operação normal, um sistema encontra-se frequentemente exposto à perturbações e ruídos, os quais causam deslocamentos da

trajetória na vizinhança do equilíbrio, na qual atuam os controladores projetados para atuar em regiões mais lineares.

Cita-se como uma das vantagens do controlador chaveado (u_G) o fato de ser possível obter um desempenho próximo do ótimo em regiões próximas à origem através da construção de controladores específicos para estas regiões. A desvantagem é a maior complexidade do controlador e a obtenção de um sinal de controle não contínuo e com variações abruptas.

O desempenho obtido via linearização por realimentação (lei de controle u_{FL}) mostrou-se apenas um pouco inferior ao obtido com u_G (5.12). Na verdade, para o exemplo apresentado, espera-se que o custo obtido com este controlador não seja substancialmente diferente do ótimo, dada a linearização específica descrita no Apêndice E (mantendo 2 dos 3 estados originais) e o processo de escolha de matrizes de ponderação do regulador linear quadrático. Por outro lado, o sistema de controle não é estável em todo o R^n sendo que a restrição (E.10) deve ser verificada para cada trajetória do sistema linear.

5.2. *Garantindo Mudança de Ponto de Operação - Sistema de Suspensão Magnética*

Nesta seção aplica-se a metodologia de projeto descrita na Seção 4.2 ao problema de mudança de ponto de operação com o sistema de suspensão magnética. Inicia-se, na Seção 5.2.1, ilustrando os passos envolvidos no projeto através de um exemplo simples. Em seguida, na Seção 5.2.2, considera-se um problema de controle mais difícil e apresentam-se resultados obtidos com diferentes parâmetros de projeto, utilizados para fins comparativos.

5.2.1. Projeto do Controlador

Nesta seção considera-se o modelo do sistema descrito por (B.1), no qual os estados e o sinal de controle correspondem a grandezas físicas do sistema. Lembrando que na Seção 5.1 foi utilizado o modelo descrito pela expressão (B.3), no qual foi feita uma mudança de variáveis para que o ponto de equilíbrio fosse a origem, uma breve explicação faz-se necessária. A opção pelo modelo (B.1) deu-se principalmente pelo fato de fazerem-se várias mudanças de variável durante o projeto (uma para cada ponto de equilíbrio utilizado no projeto), o que poderia gerar dúvidas caso se adotasse o modelo (B.3). Com esta opção também tem-se como vantagem o fato dos estados e do sinal de controle terem significado físico.

Conforme descreve-se no Apêndice B, para cada posição da esfera é possível encontrar um estado e uma entrada de equilíbrio, dados pela expressão (B.2). Nesta seção, as posições inicial e final foram escolhidas próximas entre si ($x_{I1} = 0,009$ e $x_{F1} = 0,010$) para que o número de controladores projetados fosse pequeno, diminuindo o número de etapas a serem descritas. Os estados e entradas de equilíbrio correspondentes são encontrados através de (B.2) fazendo $x_{e1}=x_{I1}$ e $x_{e1}=x_{F1}$,

$$\begin{aligned} x_I &= [0,009 \ 0 \ 0,8220] & x_F &= [0,010 \ 0 \ 0,8765] & (5.18) \\ u_I &= 16,3573 & u_F &= 17,4427 \end{aligned}$$

Também consideram-se os seguintes parâmetros de projeto: $\varphi_2 = 0,8$; $Q_0 = [10^6 \ 0 \ 0 ; 0 \ 1 \ 0 ; 0 \ 0 \ 1]$; $R_0 = 0,001$; $\kappa = 0,1$.

A seguir descrevem-se os passos envolvidos no projeto, conforme encontrado na Seção 4.2.

Passo 1. $X_{EQ} = \{ x_{EQ} \in R^{3 \times 1} : x_{EQ2} \ x_{EQ3} \text{ satisfazendo (5.19), } \forall x_{EQ1} \}$.

Passo 2. O caminho $x_{EQ}(\zeta)$ é dado no passo 3.

Passo 3. A expressão (B.2) fornece o estado e entradas de equilíbrio em função da posição de equilíbrio. Portanto, pode-se obter a parametrização desejada fazendo $x_{EQ1}(\zeta) = \zeta(x_{F1} - x_{I1}) + x_{I1}$ e fazendo $x_{c1} = x_{EQ1}(\zeta)$ em (B.2). Assim procedendo, obtém-se

$$\begin{aligned} x_{EQ2}(\zeta) &= 0 \\ x_{EQ3}(\zeta) &= \sqrt{\frac{2amg}{L_{bo}}} (1 + x_{EQ1}(\zeta) / a) \\ u_c &= R_b \sqrt{\frac{2amg}{L_{bo}}} (1 + x_{EQ1}(\zeta) / a) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Passo 4. $i = 1$, $x_{eq1} = x_F$, $u_{eq1} = u_F$ e $\xi_0 = 1$.

Passo 5. $x_p = x - x_{eqi} = x - x_F$ e $u_p = u - u_{eqi} = u - u_F$.

Passo 6. Obtem-se a equação do sistema linearizado em $x_p = 0$, $u_p = 0$ de forma similar à descrita no Apêndice B como sendo

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1,2209 \times 10^3 & 0 & -2,2384 \times 10^1 \\ 0 & 0 & -4,2340 \times 10^1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,1277 \end{bmatrix} u_p \quad (5.20)$$

Passo 7. $\text{rank}[B : AB : \dots : A^{n-1}B] = 3$

Passo 8. $\varphi_{21} = 0,8$. O sistema na forma (4.6) é encontrado similarmente a (5.3).

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1,2209 \times 10^3 & 0 & -2,2384 \times 10^1 \\ 0 & 0 & -4,2340 \times 10^1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9,7673 \times 10^2 \alpha(t) & 0 & 1,7907 \times 10^1 \alpha(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,1277 \end{bmatrix} u_p \quad (5.21)$$

Passo 9. A lei de controle é obtida através do problema de otimização (2.17).

$$u_p = -K_p x_p$$

sendo

$$K_p = R^{-1}B'P_1 = [-3,0989 \times 10^5 \quad -6,4245 \times 10^3 \quad 4,8053 \times 10^2]$$

com R , P_1 obtidos através do problema de otimização (2.17) como sendo

$$R = 1 \times 10^{-3}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,7278 \times 10^5 & 3,2569 \times 10^3 & -1,4565 \times 10^2 \\ 3,2569 \times 10^3 & 6,5113 \times 10^1 & -3,0195 \times 10^0 \\ -1,4565 \times 10^2 & -3,0195 \times 10^0 & 2,2585 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Com $u_i = u_p + u_{eqi}$, tem-se

$$u_1 = -K_p (x - x_{eq1}) + u_{eq1} \quad (5.22)$$

$$u_1 = [3,0989 \times 10^5 \quad 6,4245 \times 10^3 \quad -4,8053 \times 10^2] x - 2,6603 \times 10^3 \quad (5.23)$$

Passo 10. Para encontrar o subconjunto do domínio de atração do sistema não linear (B.1) com a lei de controle (N.8) utilizou-se o procedimento descrito no Apêndice B, Seção B, chegando-se a $L_v(c_{max}) = \{x_p \in R^n: x_p' P_1 x_p \leq c_{max}\}$, sendo $c_{max} = 7,4329 \times 10^{-2}$. Assim sendo, tem-se $D_1(x_{eq1}) = \{x \in R^n: (x - x_{eq1})' P_1 (x - x_{eq1}) \leq c_{max1}\}$, com $c_{max1} = 7,4329 \times 10^{-2}$.

Passo 11. $x_{eq1} \neq x_1$, portanto o projeto não está completo. x_1 não é ponto interior de $D_1(x_{eq1})$ pois $(x_1 - x_{eq1})' P_1 (x_1 - x_{eq1}) = 6,4273 \times 10^{-1} > c_{max1}$.

Passo 12. Para encontrar $\zeta_{min} = \min(\zeta)$ sujeito a $x_{EQ}(\zeta) \in D_1(x_{eq1})$ e $0 \leq \zeta \leq 1$, optou-se por um método aproximado bastante simples, inspirado no método de bissecção. Faz-se inicialmente $\zeta_A = 0$ e $\zeta_B = \xi_{i-1} = \xi_0$. Em seguida, toma-se $\zeta_T = 0,5(\zeta_A + \zeta_B)$. Se $x_{EQ}(\zeta_T) \in D_1(x_{eq1})$, faz-se $\zeta_A = \zeta_T$ e caso contrário, faz-se $\zeta_B = \zeta_T$. Repete-se este procedimento até que a diferença entre ζ_A e ζ_B seja menor que um valor pré-especificado, denotado por ζ_{ERR} . Aqui adotou-se $\zeta_{ERR} = 1 \times 10^{-10}$. Procedendo desta forma, obteve-se $\zeta_{min} = 3,1317 \times 10^{-1}$.

Faz-se $\xi_i = \xi_1 = \zeta_{min} + \delta$, sendo $\delta = 0,1(\xi_{i-1} - \zeta_{min})$, resultando em $\xi_1 = 3,8185 \times 10^{-1}$. Finalmente, faz-se $i = i+1 = 2$, $x_{eqi} = x_{eq2} = x_{EQ}(\xi_i)$, e pela expressão (5.19) obtem-se $x_{eq2} = [9,3819 \times 10^{-1} \ 0 \ 8,4280 \times 10^{-1}]$. Obtem-se também $u_{eqi} = u_{eq2} = u_{EQ}(\xi_i) = 1,6772 \times 10^1$.

A partir deste ponto, o projeto torna-se repetitivo, voltando ao passo 4. Assim sendo, a descrição será resumida.

Passo 4. ($i=2$) $x_p = x - x_{eqi} = x - x_{eq2}$ e $u_p = u - u_{eqi} = u - u_{eq2}$.

Passo 6. ($i=2$) Obtem-se a equação do sistema linearizado em $x_p = 0$, $u_p = 0$ de forma similar à descrita no apêndice B.

Passo 8. ($i=2$) $\varphi_{21} = 0,8$. O sistema na forma (4.6) é encontrado similarmente a (5.3).

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1,2698 \times 10^3 & 0 & -2,3279 \times 10^1 \\ 0 & 0 & -4,2340 \times 10^1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,0158 \times 10^3 \alpha(t) & 0 & 1,8624 \times 10^1 \alpha(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,1277 \end{bmatrix} u_p \quad (5.24)$$

Passo 9. ($i=2$) A lei de controle é obtida através do problema de otimização (2.17),

$$u_p = -R^{-1}B'P_2 x_p = [3,1396 \times 10^5 \quad 6,3911 \times 10^3 \quad -4,8942 \times 10^2]x_p$$

com R, P_2 obtidos através do problema de otimização como sendo

$$R = 1 \times 10^{-3}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,7332 \times 10^5 & 3,2124 \times 10^3 & -1,4756 \times 10^2 \\ -1,4756 \times 10^2 & 6,3071 \times 10^1 & -3,0038 \times 10^0 \\ -1,4756 \times 10^2 & -3,0038 \times 10^0 & 2,3003 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Com $u_i = u_p + u_{eqi}$, tem-se

$$u_2 = [3,1396 \times 10^5 \quad 6,3911 \times 10^3 \quad -4,8942 \times 10^2]x - 2,5163 \times 10^3 \quad (5.25)$$

Passo 10. ($i=2$) $D_2(x_{eq2}) = \{x \in R^n : (x - x_{eq2})'P_2(x - x_{eq2}) \leq c_{max2}\}$, sendo $c_{max2} = 6,8531 \times 10^{-2}$.

Passo 11. ($i=2$) $x_{eq2} \neq x_I$, portanto o projeto não está completo. x_I é ponto interior de $D_2(x_{eq2})$ pois $(x_I - x_{eq2})'P_2(x_I - x_{eq2}) = 2,3024 \times 10^{-2} < c_{max2}$. $i = i+1 = 3$. $x_{eqi} = x_{eq3} = x_I$, $u_{eqi} = u_{eq3} = u_I$.

Passo 4. ($i=3$) $x_p = x - x_{eqi} = x - x_I$ e $u_p = u - u_{eqi} = u - u_I$.

Passo 6. ($i=3$) Obtém-se a equação do sistema linearizado em $x_p = 0$, $u_p = 0$ de forma similar à descrita no Apêndice B.

Passo 8. ($i=3$) $\varphi_{21} = 0,8$. O sistema na forma (4.6) é encontrado similarmente a (5.3).

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1,3019 \times 10^3 & 0 & -2,3869 \times 10^1 \\ 0 & 0 & -4,2340 \times 10^1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,0415 \times 10^3 \alpha(t) & 0 & 1,9095 \times 10^1 \alpha(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,1277 \end{bmatrix} u_p \quad (5.26)$$

Passo 9. ($i=3$) A lei de controle, obtida através do problema de otimização (2.17), é dada por

$$u_p = -R^{-1}B'P_3 x_p = [3,1661 \times 10^5 \quad 6,3704 \times 10^3 \quad -4,9520 \times 10^2] x_p$$

com R, P_3 obtidos através do problema de otimização como sendo

$$R = 1 \times 10^{-3}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1,7368 \times 10^5 & 3,1847 \times 10^3 & -1,4881 \times 10^2 \\ 3,1847 \times 10^3 & 6,1808 \times 10^1 & -2,9941 \times 10^0 \\ -1,4881 \times 10^2 & -2,9941 \times 10^0 & 2,3275 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Com $u_i = u_p + u_{eqi}$, tem-se

$$u_3 = [3,1661 \times 10^5 \quad 6,3704 \times 10^3 \quad -4,9520 \times 10^2] x - 2,4261 \times 10^3 \quad (5.27)$$

Passo 10. ($i=3$) $D_3(x_{eq3}) = \{x \in R^n : (x - x_{eq3})' P_3 (x - x_{eq3}) \leq c_{max2}\}$. $c_{max2} = 6,5066 \times 10^{-2}$.

Passo 11. ($i=3$) $x_{eq3} = x_I$, portanto o projeto está completo.

A lei de controle da forma (4.7) é dada por

$$u = \begin{cases} u_1, & x \in D_1 \\ u_2, & x \in D_2 - D_1 \\ u_3, & x \in R^n - D_1 \cup D_2 \end{cases} \quad (5.28)$$

sendo que a condição “ $x \in D_i$ ”, $i=1,2,3$ é verificada da seguinte forma: $x \in D_i \Leftrightarrow (x - x_{eqi})' P_i (x - x_{eqi}) \leq c_{maxi}$.

5.2.2. Resultados Obtidos

Nesta seção, apresentam-se resultados de simulação obtidos com controladores projetados pela metodologia da Seção 4.2 aplicados ao sistema de suspensão magnética.

Com a finalidade de analisar o efeito dos parâmetros de projeto nos resultados, diferentes controladores projetados com diferentes parâmetros são considerados e os resultados são analisados e comparados. Para tal, apresenta-se um projeto inicial, o qual é denominado “padrão” e, em seguida, cada um dos parâmetros de projeto (κ , φ , Q_0 e R_0) são alterados isoladamente, para que se observem seus efeitos nos resultados obtidos.

O problema de controle aqui considerado é similar ao considerado na Seção 6.4.1, diferindo apenas na posição inicial, mais distante da posição final, $x_{I1} = 0,005$. Assim sendo, tem-se

$$x_I = [0,005 \ 0 \ 0,6038] \quad x_F = [0,010 \ 0 \ 0,8765] \quad (5.29)$$

- Controlador padrão.

Considere os seguintes parâmetros de projeto: $\varphi = 0,8$; $\kappa = 0,5$; $Q_0 = [10^6 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$; $R_0 = 0,01$. O projeto do controlador é realizado de acordo com a Seção 4.2, similarmente ao projeto descrito na Seção 5.3.1 e, assim sendo, suas etapas não serão descritas. A lei de controle obtida é aqui denotada por u_{padr} .

Os resultados de simulação obtidos são encontrados na Figura 12.

Figura 12. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego da lei de controle u_{padr} .

Figura 13. Detalhe da Figura 12 mostrando u_{padr} .

Conforme esperado, através das Figuras 12 e 13 observa-se que a transição entre os estados x_I e x_F é efetuada e que o sinal de controle apresenta variações abruptas e oscilações, devido ao chaveamento abrupto entre os controladores. Nota-se também que o sistema leva aproximadamente 0,15s para entrar em regime e que há um total de 32 controladores empregados.

- Variação do parâmetro κ .

Conforme descrito na Seção 4.2.2 (passo 12 do projeto), o parâmetro κ está relacionado com a escolha dos pontos de equilíbrios a serem utilizados no projeto do controlador. De fato, quanto maior o valor de κ ($0 < \kappa < 1$), mais próximos entre si e mais numerosos são os pontos de equilíbrio. Os resultados contidos na Tabela 4 confirmam o esperado, exibindo o valor de κ utilizado no projeto e o total de controladores T obtido.

Tabela 4 - T versus κ . Os demais parâmetros de projeto permanecem sendo $\varphi = 0,8$; $Q_0 = [10^6 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$; $R_0 = 0,01$.

κ	0,10	0,20	0,50	0,80	0,90
T	19	21	32	78	169

As Figuras 14 e 15 exibem, respectivamente, os resultados de simulação com $\kappa = 0,10$ e $\kappa = 0,90$. As leis de controle correspondentes são denotadas por $u_{\kappa 0,1}$ e $u_{\kappa 0,9}$. Como se nota através das figuras, com o aumento de κ tem-se um aumento do número de controladores, fazendo com que o sinal de controle, assim como os estados, tenham menor oscilação. Além disto, com o aumento de κ percebe-se uma diminuição do tempo que o sistema leva para entrar em regime permanente, o que pode ser considerado como uma melhoria de desempenho.

Figura 14. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador $u_{k0,1}$.

Figura 15. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador $u_{k0,9}$.

- Variação do parâmetro φ .

Conforme descrito nas Seção 3.2, o parâmetro φ relaciona-se com a região $R\varphi$ de forma que quanto menor o valor de φ , “menor” é esta região.

Em geral, espera-se que menores regiões $R\varphi$ levem a menores subconjuntos do domínio de atração encontrados no passo 10 do projeto e, assim, acarretem um maior número de controladores. Entretanto, pode haver casos nos quais a diminuição de φ leve à diminuição do número de controladores. Como exemplo, quando se considera $\varphi = 0,5$ (e mantêm-se os demais parâmetros), obtém-se $T = 16$, metade do número de controladores obtidos com $\varphi = 0,8$. Neste caso, a diminuição de φ provocou alterações nos subconjuntos do domínio de atração os quais passaram a conter maiores parcelas do caminho $x_{EQ}(\zeta)$, levando a diminuição do número de controladores. A Figura 16 exibe os resultados de simulação com o controlador obtido, denominado u_φ .

Figura 16. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_I , com o emprego do controlador u_φ .

Através da Figura 16, também observa-se que apesar de o sistema levar mais tempo para entrar em regime permanente quando comparado ao caso padrão, este tempo é compatível quando comparado ao do sistema controlado por $u_{k0,1}$, que tem aproximadamente o mesmo número de controladores. Nota-se também que a tensão aplicada na bobina apresenta menores amplitudes, o que é esperado, já que com menores valores de φ espera-se que a matriz de realimentação de estado tenha menores ganhos.

- Variação em Q_0 e R_0

Os efeitos de alterações nas matrizes de ponderação Q_0 e R_0 são, em geral, similares aos obtidos no problema clássico do regulador linear quadrático: aumento de Q_0 e diminuição de R_0 levam a respostas mais rápidas e sinais de controle de maiores amplitudes. Quanto ao aumento ou decréscimo no total de controladores, pode-se dizer que é difícil prever o resultado, pois é difícil relacionar Q_0 e R_0 com a parcela do caminho $x_{EQ}(\zeta)$ contido no subconjunto do domínio de atração obtido. A Figura 17 exhibe os resultados obtidos considerando, no projeto, $R_0 = 0,001$ (e mantendo os demais parâmetros iguais); o sinal de controle é denominado u_Q . O total de controladores obtidos foi de $T = 18$. Conforme esperado, o sinal de controle apresenta maior amplitude (assim como maior oscilação) e a resposta do sistema é mais rápida, chegando em regime em aproximadamente 0,12s.

Figura 17. Resposta simulada do sistema de suspensão magnética ao estado inicial x_l , com o emprego do controlador u_Q .

5.3. *Garantindo Mudança de Ponto de Operação - Sistema de Bioxidação de Sorbitol a Sorbose*

Esta seção descreve, resumidamente, a aplicação da metodologia de projeto de controladores de ganho programado para o problema de mudança de ponto de operação, descrita na Seção 4.2, ao sistema de bioxidação de sorbitol a sorbose descrito no Apêndice C.

Em virtude dos passos envolvidos no projeto terem sido exemplificados em detalhes na Seção 5.2, nesta seção apresentam-se brevemente alguns dos passos envolvidos no projeto apenas na primeira iteração ($i=1$), com objetivo essencialmente didático. Em seguida exibem-se e comentam-se os resultados obtidos.

É importante ressaltar que a finalidade da aplicação deste método ao sistema em questão é de ilustração da metodologia. Na verdade, na prática o sistema apresenta peculiaridades como não observabilidade (Bonomi et al., 1993) que não foram consideradas aqui, de forma que não se objetiva implementar o controlador obtido.

Seja o sistema descrito por (C.2) (Apêndice C) operando, inicialmente, no ponto de equilíbrio

$$\begin{aligned} x_I &= [3,2380 \quad 3,9290 \times 10^2 \quad 2,0790 \times 10^1 \quad 3,0380]^T \\ u_I &= [4,0000 \times 10^{-2} \quad 1,5970 \times 10^{-3} \quad 4,2213 \times 10^2 \quad 7,9740]^T \end{aligned} \quad (5.30)$$

(o qual foi encontrado por Bonomi et al. (1993) através de um processo de otimização). Neste exemplo, considera-se que a vazão específica no equilíbrio, D_e , deva aumentar de $4,0000 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ para $4,1000 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$, mantendo a concentração de sorbose s_{1e} , de forma que a produção de sorbose seja aumentada.

Conforme descreve-se no Apêndice C, tendo os valores de x_e, p_e, s_{1e} e D_e é possível encontrar os valores de s_{2e}, o_e, s_{1ae} e s_{2ae} através da expressão (C.6). Optou-se em manter os valores de x_e, p_e, s_{1e} iguais, na transição, de forma que o ponto de equilíbrio desejado foi encontrado como sendo

$$\begin{aligned} x_F &= [3,2380 \quad 3,9290 \times 10^2 \quad 2,0790 \times 10^1 \quad 3,2472] \\ u_F &= [4,1000 \times 10^{-2} \quad 1,7666 \times 10^{-3} \quad 4,2213 \times 10^2 \quad 8,1832]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Os parâmetros de projeto foram adotados como se segue. Com a finalidade de obter um número pequeno de controladores, adotaram-se $\varphi_j = 0,8$ ($j=1,\dots,4$) e $\kappa = 0,2$. Os valores das matrizes de ponderação Q_0 e R_0 foram escolhidos de forma que o sistema linearizado em x_l com um regulador linear quadrático apresentasse variações percentuais em torno do equilíbrio aproximadamente iguais em todos os estados e em todos controles e de forma que os pólos do sistema realimentado não resultassem excessivamente mais rápidos que os do sistema sem controle, com a finalidade de não violar a hipótese feita no Apêndice C de que a variação da concentração de oxigênio dissolvido é muito mais rápida que as variações nos estados.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-1} \end{bmatrix}; R_0 = \begin{bmatrix} 1 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

A seguir, apresentam-se alguns dos passos envolvidos no projeto.

Passo 3. Obtem-se a parametrização desejada fazendo $D_{EQ}(\zeta) = \zeta(D_F - D_I) + D_1$, $x_{EQ}(\zeta) = [x_e \ p_e \ s_{1e} \ s_{2e}(x_e, p_e, s_{1e}, D_{EQ}(\zeta))]$ sendo $x_e = x_{11}$, $p_e = x_{12}$, $s_{1e} = x_{13}$ e $s_{2e}(x_e, p_e, s_{1e}, D_{EQ}(\zeta))$ dado por (C.6). Quanto ao controle, tem-se $u_{EQ}(\zeta) = [D_{EQ}(\zeta) \ o_e \ s_{1ae} \ s_{2ae}]$ com o_e, s_{1ae}, s_{2ae} dados por (C.6) em função de x_e, p_e, s_{1e} e $D_{EQ}(\zeta)$.

Passo 4. $i = 1$, $x_{eq1} = x_F$, $u_{eq1} = u_F$ e $\xi_0 = 1$.

Passo 5. $x_p = x - x_{eqi} = x - x_F$ e $u_p = u - u_{eqi} = u - u_F$.

Passo 6. Obtem-se a equação do sistema linearizado em $x_p = 0$, $u_p = 0$ de forma similar à descrita no Apêndice C como sendo $\dot{x}_p = Ax_p + Bu_p$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7,1754 \times 10^{-4} & 4,2044 \times 10^{-4} & 1,0510 \times 10^{-2} \\ 4,8536 \times 10^0 & -5,3346 \times 10^{-2} & 1,3010 \times 10^{-1} & 1,9549 \times 10^{-1} \\ -4,9579 \times 10^0 & 1,4397 \times 10^{-2} & -1,7208 \times 10^{-1} & -2,1089 \times 10^{-1} \\ -6,0976 \times 10^{-2} & 1,0938 \times 10^{-3} & -6,4091 \times 10^{-4} & -5,6022 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -3,2380 \times 10^0 & 7,3015 \times 10^0 & 0 & 0 \\ -3,9290 \times 10^2 & 2,2530 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 4,0134 \times 10^2 & -2,2872 \times 10^3 & 4,0000 \times 10^{-2} & 0 \\ 4,9360 \times 10^0 & -1,1130 \times 10^1 & 0 & 4,0000 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Passo 8. $\varphi_j = 0,8$; $j = 1, \dots, 4$. O sistema na forma (4.6) é encontrado como sendo $\dot{x}_p = (A + \Delta A)x_p + (B + \Delta B)u_p$ com A e B dados acima e

$$\Delta A = 0,5 \begin{bmatrix} 0 & -7,1754 \times 10^{-4} \alpha_1(t) & 4,2044 \times 10^{-4} \alpha_1(t) & 1,0510 \times 10^{-2} \alpha_1(t) \\ 4,8536 \times 10^0 \alpha_2(t) & -5,3346 \times 10^{-2} \alpha_2(t) & 1,3010 \times 10^{-1} \alpha_2(t) & 1,9549 \times 10^{-1} \alpha_2(t) \\ -4,9579 \times 10^0 \alpha_3(t) & 1,4397 \times 10^{-2} \alpha_3(t) & -1,7208 \times 10^{-1} \alpha_3(t) & -2,1089 \times 10^{-1} \alpha_3(t) \\ -6,0976 \times 10^{-2} \alpha_4(t) & 1,0938 \times 10^{-3} \alpha_4(t) & -6,4091 \times 10^{-4} \alpha_4(t) & -5,6022 \times 10^{-2} \alpha_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta B = 0,5 \begin{bmatrix} -3,2380 \times 10^0 \beta_1(t) & 7,3015 \times 10^0 \beta_1(t) & 0 & 0 \\ -3,9290 \times 10^2 \beta_2(t) & 2,2530 \times 10^3 \beta_2(t) & 0 & 0 \\ 4,0134 \times 10^2 \beta_3(t) & -2,2872 \times 10^3 \beta_3(t) & 4,0000 \times 10^{-2} \beta_3(t) & 0 \\ 4,9360 \times 10^0 \beta_4(t) & -1,1130 \times 10^1 \beta_4(t) & 0 & 4,0000 \times 10^{-2} \beta_4(t) \end{bmatrix}$$

Passo 9. A lei de controle é obtida através do problema de otimização (2.17).

$$u_p = -R^{-1}B'P_1 x_p = -K_p x_p$$

sendo

$$K_p = \begin{bmatrix} -1,8436 \times 10^{-3} & 2,5925 \times 10^{-5} & -1,1245 \times 10^{-5} & -3,9255 \times 10^{-4} \\ -4,1893 \times 10^{-4} & 8,9137 \times 10^{-6} & -1,1737 \times 10^{-6} & -1,3577 \times 10^{-4} \\ 7,4498 \times 10^1 & 6,8725 \times 10^{-1} & 5,1399 \times 10^0 & -2,0654 \times 10^1 \\ 1,5978 \times 10^0 & -6,9974 \times 10^{-2} & -3,0086 \times 10^{-2} & 2,1591 \times 10^0 \end{bmatrix}$$

e

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5,3514 \times 10^2 & -3,4676 \times 10^0 & 5,1187 \times 10^0 & 5,1434 \times 10^1 \\ -3,4676 \times 10^0 & 1,5634 \times 10^{-1} & 2,8019 \times 10^{-2} & -2,3956 \times 10^0 \\ 5,1187 \times 10^0 & 2,8019 \times 10^{-2} & 3,2613 \times 10^{-1} & -1,0774 \times 10^0 \\ 5,1434 \times 10^1 & -2,3956 \times 10^0 & -1,0774 \times 10^0 & 7,4316 \times 10^1 \end{bmatrix}$$

Com $u_i = u_p + u_{eqi}$, tem-se

$$u_1 = -K_p (x - x_{eq1}) + u_{eq1} \quad (5.33)$$

$$u_1 = - \begin{bmatrix} -1,8436 \times 10^{-3} & 2,5925 \times 10^{-5} & -1,1245 \times 10^{-5} & -3,9255 \times 10^{-4} \\ -4,1893 \times 10^{-4} & 8,9137 \times 10^{-6} & -1,1737 \times 10^{-6} & -1,3577 \times 10^{-4} \\ 7,4498 \times 10^1 & 6,8725 \times 10^{-1} & 5,1399 \times 10^0 & -2,0654 \times 10^1 \\ 1,5978 \times 10^0 & -6,9974 \times 10^{-2} & -3,0086 \times 10^{-2} & 2,1591 \times 10^0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4,2790 \times 10^{-2} \\ 3,3058 \times 10^{-3} \\ 9,7749 \times 10^2 \\ -8,4114 \times 10^0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Passo 10. Para encontrar o subconjunto do domínio de atração do sistema não linear (C.2) com a lei de controle (5.34) utilizou-se o procedimento descrito no Apêndice C, obtendo $D(0) = \{x_p \in R^n: x_p' P_1 x_p \leq c_{max}\}$, sendo $c_{max} = 1,0121 \times 10^{-3}$. Assim sendo, tem-se $D_1(x_{eq1}) = \{x \in R^n: (x - x_{eq1})' P_1 (x - x_{eq1}) \leq c_{max1}\}$, com $c_{max1} = 1,01021 \times 10^{-3}$. Observe que o domínio de atração é da forma descrita na Observação 3.3.

Passo 11. $x_{eq1} \neq x_1$, portanto o projeto não está completo. x_1 não é ponto interior de $D_1(x_{eq1})$ pois $(x_1 - x_{eq1})' P_1 (x_1 - x_{eq1}) = 3,2538 > c_{max1}$.

Passo 12. Para encontrar $\zeta_{min} = \min(\zeta)$ sujeito a $x_{EQ}(\zeta) \in D_1(x_{eq1})$ e $0 \leq \zeta \leq 1$, utilizou-se o mesmo método descrito na Seção 5.2. Procedendo desta forma, obteve-se $\zeta_{min} = 9,816 \times 10^{-1}$.

Faz-se $\xi_i = \xi_1 = \zeta_{min} + \delta$, com $\delta = \kappa(\xi_{i-1} - \zeta_{min})$, resultando em $\xi_1 = 9,853 \times 10^{-1}$. Finalmente, faz-se $i = i+1 = 2$, $x_{eqi} = x_{eq2} = x_{EQ}(\xi_i)$, obtendo $x_{eq2} = [3,2380 \quad 3,9290 \times 10^2 \quad 2,0790 \times 10^1 \quad 3,0409]$ e $u_{eqi} = u_{eq2} = u_{EQ}(\xi_i) = [4,0015 \times 10^{-2} \quad 1,5993 \times 10^{-3} \quad 4,2213 \times 10^2 \quad 7,9769]$.

A partir deste ponto, o projeto torna-se repetitivo, não sendo descrito. As Figuras 18 e 19 exibem resultados de simulação com o controlador obtido. O total de controladores foi $T = 70$. A lei de controle é da forma (4.7) e é denotado por u_G .

Figura 18. Resposta simulada dos estados do sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose (C.2) ao estado inicial x_1 .

Conforme se observa através das Figuras 18 e 19, o tempo de transição entre x_I e x_F é bastante longo, devido principalmente ao grande número de controladores ($T=70$). De fato, devido às particularidades do sistema em questão, (em especial o fato de ser inerentemente estável), o tempo de resposta é elevado até mesmo quando comparado ao do sistema em malha aberta, como se vê através da Figura 20, a qual exibe a resposta dos estados do sistema ao estado inicial x_I com u_G e em malha aberta. Concluindo, a metodologia de projeto cumpre seu objetivo: garante a transição entre x_I e x_F .

Figura 19. Resposta simulada dos sinais de controle do sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose ao estado inicial x_I .

Figura 20. Respostas simulada dos estados do sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose (C.2) ao estado inicial x_I , com a lei u_G (em linha cheia) e em malha aberta (em linha tracejada).

6. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma abordagem de controladores de ganho programado para sistemas não lineares. O controlador de ganho programado utilizado consiste no chaveamento de diferentes controladores que atuam em subconjuntos invariantes do domínio de atração do SNL. Apresenta-se uma descrição do sistema não linear via sistema linear com incertezas estruturadas, o que permite encontrar com facilidade funções de Lyapunov, subconjuntos do domínio de atração e regiões invariantes do SNL através do SLI. Para o controle do SLI, o presente trabalho descreve uma técnica de controle de custo garantido. Consideram-se dois problemas de controle de SNL: o problema de controle de regulação de estados e o problema de controle de mudança de pontos de operação. Como exemplo de aplicação das abordagens de controle, um sistema de suspensão magnética e um sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose são utilizados.

Uma das principais características da metodologia de controle de custo garantido para SLI é a facilidade de projeto, a qual resulta, principalmente, do uso de LMIs na formulação da solução do problema, incorporando a busca por uma decomposição rank-1 adequada. Destaca-se também a similaridade das matrizes de ponderação Q_0 e R_0 com as matrizes de ponderação encontradas nos reguladores lineares quadráticos, levando a facilidade na escolha destas matrizes. Outra característica interessante é a aproximação entre a solução deste controle e a solução do regulador linear quadrático que se dá com a diminuição das incertezas, conforme comentado na Observação 2.3 e verificada nos resultados obtidos com os exemplos de aplicação. É também importante o fato desta metodologia fornecer uma função de Lyapunov para o SLI, assim como garantir a

estabilidade assintótica deste sistema em todo o espaço de estados. Neste tópico, as principais contribuições deste trabalho são as revisões e reformulações de resultados encontrados em Kosmidou and Boursès (1994) e em Fishman *et al.* (1996) e, em especial, a obtenção de uma solução que minimiza um limite superior para o custo garantido.

A descrição do SNL via SLI proposta no Capítulo 3 possibilita a determinação, com relativa facilidade, de funções de Lyapunov, subconjuntos do domínio de atração e regiões invariantes do SNL através do SLI. Quando comparada à abordagem de linearização (na qual esta se inspira), podem-se fazer os seguintes comentários. O conjunto de soluções do SLI contém as soluções do SNL em uma região, enquanto as soluções do sistema linearizado consistem apenas de aproximações das do SNL; assim sendo, através do SLI é possível obter conclusões acerca da estabilidade assintótica do SNL em uma região, enquanto através do sistema linearizado é possível concluir apenas sobre a estabilidade assintótica na vizinhança do ponto de linearização. A região $R\phi$, definida através da imposição de restrições do tipo setor sobre o sistema não linear, é refletida no SLI obtido (ou seja, uma maior $R\phi$ leva a incertezas maiores), e assim incorpora informações sobre o SNL no projeto do controlador, o que é útil no projeto de um controlador na medida em que o projetista passa a dispor de parâmetros de projeto relacionados diretamente com a não linearidade do SNL. A abordagem de projeto através do SLI, em geral, fornece soluções com robustez a variações de parâmetros do SNL, desde que estas variações não façam com que $f(x,u)$ deixe de satisfazer as restrições de setor (3.4).

Os subconjuntos do domínio de atração e regiões invariantes do SNL em um ponto de operação, conseguidos através da representação via um SLI e com o projeto do controlador de custo garantido, são utilizados em uma abordagem de controladores de ganho programado que consiste no chaveamento de controladores que atuam em subconjuntos invariantes do domínio de atração do SNL. Esta abordagem é aplicada ao problema de regulação de estados em SNL, visando conjugar controladores especializados para diferentes regiões envolvendo o ponto de operação e, desta forma,

reduzir o conservadorismo inerente ao processo de representação via SLI e ao projeto do controlador de custo garantido. Também aplica-se esta abordagem no problema de mudança de ponto de operação em SNL, levando a uma metodologia de projeto estruturada, de aplicação relativamente fácil e que garante a transição entre os pontos de operação.

Finalmente, com relação aos exemplos de aplicação, fazem-se os seguintes comentários. A aplicação da abordagem de controladores de ganho programado ao problema de regulação de estado envolvendo o sistema de suspensão magnética mostrou que, de fato, consegue-se um melhor desempenho (no que se refere ao custo), principalmente quando o estado inicial encontra-se mais próximo da origem, o que é de importância prática, já que os sistemas usualmente operam em torno da origem.. A metodologia de projeto para o problema de mudança de ponto de operação mostrou-se de fácil aplicação tanto para o sistema de suspensão como para o mais complexo sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose, realizando a mudança de ponto de operação em ambos os casos, conforme esperado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bonomi, A., E.F.P. Augusto, N.S. Barbosa, M.N. Mattos, L.R. Magosi and A.L. Santos (1993). Unstructured model proposal for the microbial oxidation of D-sorbitol to L-sorbose. *Journal of Biotechnology*, vol. 31, pp. 39-59.

Boyd, S., L.E. Gahoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM.

Costa, E.F., M.H. Terra and Vilma A. Oliveira (1997). Observer-based controller for a class of uncertain linear systems: a linear matrix inequality approach. *In Proc. of the IEEE Singapore International Symposium on Control Theory and Applications*, pp. 404-408.

Costa, Eduardo F. and Vilma A. Oliveira (1998). Using linear matrix inequalities for guaranteed cost control with generic rank uncertainty matrices. To be published in *Proc. of the American Control Conference 1998*.

Davison, D.E. and Scott A. Bortoff (1994). Enlarge your region of attraction using high-gain feedback. *In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 634-639.

Doyle, J. C., A. Packard and K. Zhou (1991). Review of LFT's, LMI's and μ . *In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, vol.2, pp.1227-1232.

Doyle, J.C., J.A. Primbs, B. Shapiro and V. Nevstic (1996). Nonlinear games: examples and counterexamples. In *Proc. Conf. Decision and Control*, vol 4, pp.3915-3920.

Fischman, A., J.M. Dion, L. Dugard and A.T.T. Neto (1996). A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control. In *Proc. of the 13th IFAC World Congress*, pp.197-202.

Hyde, R. A. and K.Glover (1993). The application of scheduled H_∞ controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-38, pp. 1021-1039.

Kaminer, I., A.M. Pascoal, P.P.Khargonekar and E.E.Coleman (1995). A velocity algorithm for the implementation of gain scheduled controllers. *Automatica*, vo. 31, n. 8, pp. 118

Khalil, K. (1996). *Nonlinear systems*. Prentice Hall International Editions, 2nd ed.

Kramer, S.C. and Robert C. Martin IV (1996). Direct optimization of gain scheduled controllers via genetic algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 19, n.3, pp. 636-642.

Kellett, M.G. (1991). Continuous scheduling of H_∞ controllers for a MS760 Paris aircraft. In P. H. Hammond (Ed.), *Robust Control System Design Using H_∞ and Related Methods*, pp. 197-223. Institute of Measurements and Control, London. 5-1191.

Kim, C.Y. and K.H. Kim (1994). Gain scheduled control of magnetic bearings technology. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, pp.3127-3131.

Kosmidou, O. I., H. Abou-Kandil and P. Bertrand. A game theoretic approach for guaranteed cost control (1991). In *Proc. European Control Conference*, pp.2220-2225.

Kosmidou, O.I. and H. Bourlès (1994). Gain and phase margins of the guaranteed cost regulator. *Int. J. Control*, vol. 60, n. 1, pp. 1-15.

Lawrence, D.A. and W.J. Rugh (1993). Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*.

Lawrence, D.A. and W.J. Rugh (1995). Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automática*, vol.31, n.3, pp. 381-390.

Leith, D.J. and W.E. Leithead (1996). Appropriate realization of gain-scheduled controllers with application to wind turbine regulation. *Int. J. Control*, 2 (65),pp.223-248.

Leithead, W.E., S.A. de la Salle and A. Reardon (1991). Wind turbine control systems modelling and design, phase I and II. *Department of Grade & Industry Report*. n. ETSU WN 5108.

Nichols, R.A., R.T. Reichert and W.J. Rugh (1993). Gain scheduling for H_∞ controllers: a flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technologies*, 1, pp. 69-75.

Petersen, I.R. (1985). A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, n.30, pp. 904-907.

Reeve, J. M. Sultan (1994). Gain scheduling adaptive control strategies for HVDC systems to accommodate large disturbances. *IEEE Trans. on Power Systems*, (9)1, pp.366-372.

Shamma, J. and M. Athans (1990). Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol.35, n.8, pp.898-907.

Shamma, J. and M. Athans (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, vol.27, n.3, pp.559-564.

Shamma, J. and M. Athans (1992). Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems Magazine*, vol.12, n.3, pp. 101-107

Trumper, D.L., S.M. Olson and K. Subrahmanyam, (1997). Linearizing control of magnetic suspension systems. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 5, n.4, pp.427-438.

Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall International Editions, 2nd ed.

Wiggins, S. (1990). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer - Verlag.

APÊNDICE A. DEFINIÇÕES UTILIZADAS E PROVAS DE LEMAS E TEOREMAS

A.1 Definições

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

com $x \in R^n$, $u \in R^p$ e $f: R^{n+p} \rightarrow R^n$ contínua.

Definição A.1. x_c é um *equilíbrio* do sistema (A.1) se $f(x_c, u_c) = 0$, $\forall t \geq 0$ para algum u_c .

Definição A.2. Um conjunto $M \subseteq R^n$ é um *conjunto invariante* do sistema (A.1) se para cada $x_0 \in M$ existir um $t_0 \in R_+$ tal que $s(t, x_0) \in M$, $\forall t \geq t_0$.

Definição A.3. O equilíbrio x_c é *atrativo* se para cada $t_0 \in R$ existe um $\eta(t_0) > 0$ tal que $\|x_0 - x_c\| < \eta$, $t_0 \geq 0 \Rightarrow s(t_0 + t, x_0) \rightarrow x_c$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição A.4. Suponha que x_c é um equilíbrio atrativo do sistema (A.1). O *domínio de atração* $D(x_c)$ é definido como $D(x_c) = \{x_0 \in R^n : s(t, x_0) \rightarrow x_c \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$. Também utiliza-se esta mesma notação para subconjuntos do domínio de atração..

Definição A.5. Considere $f: R^n \rightarrow R^m$ uma função com componentes continuamente diferenciáveis com respeito a cada um de seus argumentos (usualmente diz-se “ f é C^1 ”).

A matriz cujo ij -ésimo elemento é $\partial f / \partial x_i$ é chamada a *matriz Jacobiana* de f e é denotada por $\partial f / \partial x$.

Definição A.6. Sejam U e V conjuntos abertos de R^n e $f: R^n \rightarrow R^m$, com f sendo C^1 . f é um *difeomorfismo* de U em V se (i) $f(U)=V$, (ii) f é um-para-um e (iii) a função inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ é C^1 .

Definição A.7. Suponha $f, g \in V(X)$. $V(X)$ é o conjunto de todas as funções suaves que mapeiam o conjunto aberto $X \subseteq R^n$ em R^n . Denota-se por $[f, g]$ o campo vetorial definido por

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

Definição A.8. O operador “ad” é definido da seguinte forma: $\text{ad}_f^0 g = g$, $\text{ad}_f^{i+1} = [f, \text{ad}_f^i g]$. Por exemplo, $\text{ad}_f^2 = [f, [f, g]]$.

Considere a seguinte notação. $V(X)$ é o conjunto de todas as funções suaves que mapeiam o conjunto aberto $X \subseteq R^n$ em R^n . O conjunto de todas as funções suaves de valor real mapeando X em R^n é denotado por $S(X)$.

Definição A.9. Uma *distribuição* k -dimensional em X é um mapeamento que assinala, para cada $x \in X$, um subespaço vetorial de R^n de dimensão k tal que as seguintes condições de suavidade são satisfeitas. Para cada $x_0 \in X$ há um conjunto aberto $U \subseteq V$ contendo x_0 e k funções $f_1, \dots, f_k$ suaves mapeando X em R^n tal que (i) $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ é LI para cada $x \in U$ e (ii) $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, $\forall x \in U$.

Definição A.10. Uma distribuição é *involutiva* se $[f, g] \in \Delta$, sempre que $f, g \in \Delta$, com Δ definido acima.

A.2 Provas de Lemas e Teoremas

Teorema 2.1.

Prova. Inicia-se a prova mostrando que o sistema (2.1) realimentado com a lei de controle (2.8) é garantidamente assintoticamente estável. Em seguida, baseando-se neste resultado, mostra-se que o custo (2.9) é um custo garantido.

Utilizando as equações (2.1)-(2.5), a equação (2.8) e com $V(x) = x'Px$, encontra-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,t) &= 2x'P\left\{(A + \Delta A) - (B + \Delta B)R_0^{-1}B'P\right\}x \\ \dot{V}(x,t) &= x'\left\{A'P + PA - 2PBR_0^{-1}B'P + 2P\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i o_i' - 2P\sum_{i=1}^q \beta_i f_i g_i' R_0^{-1}B'P\right\}x\end{aligned}\quad (A.2)$$

Utilizando a inequação fundamental $2|ab| \leq a^2 + b^2$ para quaisquer escalares $a, b \in R$, de maneira similar à encontrada em (Petersen, 1985), tem-se

$$\begin{aligned}2x'P\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i o_i' x &= 2\sum_{i=1}^r x' P d_i o_i' \alpha_i x \leq 2\sum_{i=1}^r |x' P d_i o_i' x| = 2\sum_{i=1}^r |x' P l_i^{1/2} d_i o_i' l_i^{-1/2} x| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r x' P l_i d_i d_i' P x + \sum_{i=1}^r x' l_i^{-1} o_i o_i' x = x' PTPx + x' Ux\end{aligned}\quad (A.3)$$

Similarmente,

$$2x'P\sum_{i=1}^q \beta_i f_i g_i' R_0^{-1}B'Px = x'PBR_0^{-1}XR_0^{-1}B'Px + x'PYPx \quad (A.4)$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.2), chega-se a (A.5)

$$\dot{V}(x, t) \leq -x' \left\{ -A'P - PA - U + P[B(2R_0^{-1} - R_0^{-1} X R_0^{-1})B' - Y - T]P \right\} x \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado, por hipótese a equação de Riccati (2.7) tem uma solução P , da qual vem

$$Q_0 + PBR_0^{-1}B'P = -A'P - PA - U + P[B(2R_0^{-1} - R_0^{-1} X R_0^{-1})B' - Y - T]P \quad (\text{A.6})$$

De (A.5) e (A.6), tem-se

$$\dot{V}(x, t) \leq -x'(Q_0 + PBR_0^{-1}B'P)x \quad (\text{A.7})$$

Uma vez que Q_0 , R_0 e P são positivos definidos, então $\tau := \lambda_{\min}(Q_0 + PBR_0^{-1}B'P) > 0$.

Assim, pode-se escrever

$$\dot{V}(x, t) \leq -\tau \|x\|^2 \quad (\text{A.8})$$

para todo $x \in R^n$ e $t \in R$, e segundo a Definição 2.1, o sistema (2.1) é garantidamente assintoticamente estável.

Utilizando (2.8), a função custo dada por (2.6) pode ser reescrita como

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \left\{ x'(t) [Q_0 + PBR_0^{-1}B'P] x(t) \right\} dt \quad (\text{A.9})$$

De (A.7), obtém-se

$$x'(Q_0 + PBR_0^{-1}B'P)x \leq -\dot{V}(x, t) = -\frac{d}{dt}V(x) = -\frac{d}{dt}x'Px \quad (\text{A.10})$$

de forma que de (A.9) e (A.10) vem

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \left\{ x'(t) [Q_0 + PBR_0^{-1}B'P]x(t) \right\} dt \leq \int_0^\infty \left\{ -\frac{d}{dt} x'Px(t) \right\} dt = -x(\infty)'Px(\infty) + x_0'Px_0 \quad (\text{A.11})$$

Dado que o sistema é garantidamente assintoticamente estável, pode-se escrever $x(\infty)'Px(\infty) = 0$, e (A.11) assume a forma

$$J(x_0, u(t)) \leq x_0'Px_0 = J_G$$

Assim, a lei de controle (2.8) é uma lei de controle de custo garantido, garantindo o custo (2.9). $\square$

Lema 2.2.

Prova. Mostra-se que $P < \mathfrak{I}I$ se e somente se $\mathfrak{r} > \lambda_{\max}(P)$, de forma que as restrições são equivalentes e os problemas de minimização são equivalentes.

Inicia-se mostrando que $\mathfrak{r} > \lambda_{\max}(P) \Rightarrow P < \mathfrak{I}I$. Sabe-se que $P \leq \lambda_{\max}(P)I$, portanto $P \leq \lambda_{\max}(P)I < \mathfrak{I}I$, e tem-se $P < \mathfrak{I}I$.

Mostra-se agora que $P < \mathfrak{I}I \Rightarrow \mathfrak{r} > \lambda_{\max}(P)$.

Considerando $P < \mathfrak{I}I$ e denotando respectivamente por $\mathfrak{v}_i$ e λ_i os autovalores de P e de $P - \mathfrak{I}I$, tem-se

$$\det(\mathfrak{v}_i I - P + \mathfrak{I}I) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\det(\lambda_i I - P) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\mathfrak{v}_i < 0, \lambda_i > 0 \quad (\text{A.14})$$

Comparando (A.12) e (A.13), conclui-se que

$$\mathfrak{v}_i + \mathfrak{r} = \lambda_i$$

Ou seja,

$$v_i = \lambda_i - 1 \quad (\text{A.15})$$

De (A.14) e (A.15), tem-se $\lambda_i < 1$. Portanto, 1 será maior que qualquer λ_i , e em particular, $1 > \lambda_{\max}(P)$. $\square$

Lema 2.3.

Prova. Caso P tenha sido obtido através de (2.7), a expressão (A.8) estabelece o resultado desejado. Caso P tenha sido obtida através de (2.10) ou (2.17), pode-se mostrar de forma análoga à prova do Teorema 2.1 que $\dot{V}(x, t) \leq -x'(Q_1 + PBR^{-1}B'P)x$, e dado que $Q_1 > 0$ e $R > 0$, encontrar $\dot{V}(x, t) \leq -\tau \|x\|^2$, de forma que $V(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov do sistema (2.1) realimentado com (2.11). $\square$

Lema 4.1.

Prova. (a) Considere $x_o \in R_2$. De acordo com (3.10), o sinal de controle é dado por u_2 , então $s(t, x_o) \in R_2, \forall t$, e $s(t, x_o) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

(b) Considere agora $x_o \in R_1 - R_2$; pela equação (4.3), enquanto $s(t, x_o) \in R_1 - R_2$, o sinal de controle é dado por u_1 , de forma que $s(t, x_o)$ não abandona R_1 e se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$. Caso $s(t, x_o)$ passe a pertencer à R_2 , com $t > t_1$ em algum instante t_1 , a situação (a) se repete. Assim, tem-se que $s(t, x_o) \in R_1 \cup R_2, \forall t$, e $s(t, x_o) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. $\square$

Lema 4.2.

Prova. Se $s(t) \notin S, \forall t \in R$, tem-se que $s(t) \notin B_\delta(x_{eq}) = \{x \in R^n : \|x - x_{eq}\| < \delta\}, \forall t$, com δ suficientemente pequeno tal que $B_\delta(x_{eq}) \subseteq S$. Observe que δ existe, pois x_{eq} é um ponto interior de S . Conclui-se que $\|s(t) - x_{eq}\| \geq \delta, \forall t \in R$, contrariando a hipótese de que $s(t) \rightarrow x_{eq}$. $\square$

APÊNDICE B. SISTEMA DE SUSPENSÃO MAGNÉTICA

Este apêndice descreve o sistema de suspensão magnética utilizado como exemplo. O modelo matemático do sistema em tempo contínuo é apresentado, assim como a sua correspondente discretização. Descreve-se também o processo de linearização em torno de um ponto.

Finalmente, estuda-se a questão da obtenção do conjunto $L_v(c_{max}) = \{x \in R^n : x'Px \leq c_{max}\}$ tal que $L_v(c_{max}) \subseteq R\varphi'$.

B.1. O Sistema de Suspensão Magnética

A planta consiste em uma esfera que é suspensa por um campo magnético gerado pela corrente circulando em uma bobina, conforme ilustra a Figura 21. As variáveis de estado são a posição da esfera, a velocidade da esfera e a corrente na bobina, e a variável de controle é a tensão aplicada nos terminais da bobina.

Figura 21. Sistema de Suspensão Magnética.

Como principais características do sistema físico apontam-se a não linearidade, as restrições na posição, na corrente da bobina e na tensão de controle (as duas últimas, com o objetivo de não superaquecer a bobina e, assim, aumentar sua durabilidade). O sistema físico real é portátil, apresenta relativa fácil construção, quando linearizado apresenta pólos de frequência não elevada (o que facilita o controle digital), entre outras características que o tornam muito adequado e interessante para práticas de laboratório de controle. Também, recentemente novos trabalhos têm surgido aplicando diferentes técnicas de controle para estes sistemas, como em Trumper *et al.* (1997), que aplicam a técnica de linearização por realimentação (para um sistema de suspensão de uma barra) e Kim e Kim (1994), que utilizam ganho programado.

B.2 Modelo do Sistema em Tempo Contínuo

O modelo do sistema de suspensão magnético utilizado é

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r1} &= x_{r2} \\ \dot{x}_{r2} &= g - \frac{L_{b0}}{2am} \frac{x_{r3}^2}{(1 + (x_{r1} / a)^2)} \\ \dot{x}_{r3} &= -(R_b / L_b)x_{r3} + (1 / L_b)u_r\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde têm-se as variáveis x_{r1} - a posição da esfera, x_{r2} - velocidade da esfera, x_{r3} - corrente na bobina e u_r - tensão aplicada na bobina (sinal de controle). Tem-se também g - gravidade, m - massa da esfera, R - resistência da bobina, L - indutância da bobina, L_{b0} e a - constantes. Os valores utilizados destes parâmetros são encontrados na Tabela B.1.

Tabela B.1. Parâmetros do sistema de suspensão magnética

$g(m/s^2)$	$m(kg)$	$R(\Omega)$	$L(mH)$	$L_{b0}(H)$	a
9,81	0,0226	19,9	0,470	0,0245	$6,07 \times 10^{-3}$

Igualando (B.1) a zero, obtém-se os pontos de equilíbrio x_{c1} , x_{c2} e x_{c3} , assim como a tensão de equilíbrio u_c . A expressão abaixo fornece x_{c2} , x_{c3} e u_c em função de x_{c1} .

$$\begin{aligned} x_{c2} &= 0 \\ x_{c3} &= \sqrt{\frac{2amg}{L_{bo}}} (1 + x_{c1}/a) \\ u_c &= R_b \sqrt{\frac{2amg}{L_{bo}}} (1 + x_{c1}/a) \end{aligned} \quad (B.2)$$

Fazendo $x_1 = x_{r1} - x_{c1}$, $x_2 = x_{r2} - x_{c2}$, $x_3 = x_{r3} - x_{c3}$, e $u = u_r - u_c$, obtém-se a representação (B.3) na qual os novos estados e sinal de controle são nulos no equilíbrio (ou seja, $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ u] = 0 \Rightarrow [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3] = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{L_{bo}}{2am} \frac{(x_3 + x_{3c})^2}{(1 + (x_1 + x_{1c})/a)^2} \\ \dot{x}_3 &= -(R_b / L_b)x_3 + (1 / L_b)u \end{aligned} \quad (B.3)$$

Note que (B.3) está na forma $\dot{x} = f(x) + Bu$, onde $f: R^3 \rightarrow R^3$ é uma função continua com derivadas de todas as ordens contínuas, $f(0)=0$ e $B \in R^{3 \times 1}$.

Finalizando, frisamos que reservamo-nos a liberdade de alterar algumas das características do sistema em função de cada aplicação, de forma que diferentes métodos possam ser utilizados. Como exemplo, no presente relatório não se consideram restrições no estado ou no sinal de controle.

B.3 Modelo do Sistema em Tempo Discreto

O sistema (B.3) foi discretizado para simulação em computador. Utilizando a aproximação *backward* encontra-se

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= T_0 x_2(k) + x_1(k) \\x_2(k+1) &= T_0 \left\{ g - \frac{L_{bo}}{2am} \frac{(x_3(k) + x_{3c})^2}{(1 + (x_1(k) + x_{1c})/a)^2} \right\} + x_2(k) \\x_3(k+1) &= -T_0 (R_b / L_b) x_3(k) + x_3(k) + T_0 (1 / L_b) u\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

onde T_0 é o período de amostragem e k denota o instante $k T_0$ (assumindo que $t_0=0$).

Uma das regras normalmente utilizadas na discretização de sistemas estabelece que a frequência de amostragem ($1/T_0$) deve ser superior a duas vezes a frequência do pólo mais rápido do sistema (controlado). Entretanto, dada a aproximação utilizada, recomenda-se que uma maior frequência de amostragem seja utilizada. Para garantir que os efeitos da aproximação utilizada sejam desprezíveis, adotamos nas simulações uma frequência de amostragem de 10^4 Hz, verificando sempre se a frequência relativa ao pólo mais rápido não excede 10% da frequência de amostragem adotada.

B.4 Sistema Linearizado em um Ponto

A linearização do sistema em torno de um ponto qualquer x_{pl} é dada pela expressão

$$\dot{x}_l = \nabla(f(x_l))|_{x_{pl}} (x_l - x_{pl}) + B u + f(x_{pl}) \quad (\text{B.5})$$

onde o índice l foi inserido no estado para deixar claro que se trata do sistema linearizado. Quando x_{pl} é um ponto de equilíbrio, fazendo a mudança de variável $u_l = u - u_c$, reescreve-se (B.5) como

$$\dot{x}_l = \nabla(f(x_l))|_{x_c} (x_l - x_c) + B u_l \quad (\text{B.6})$$

Utilizando (B.6) e (B.3), tem-se

$$\dot{x}_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & -R_b / L_b \end{bmatrix} (x_l) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 / L_b \end{bmatrix} u_l \quad (\text{B.7})$$

onde

$$k_1 = \frac{L_{bo}}{a^2 m} \frac{(x_{3l} + x_{3c})^2}{(1 + (x_{1l} + x_{1c}) / a)^3} ; \quad k_2 = \frac{-L_{bo}}{a m} \frac{(x_{3l} + x_{3c})}{(1 + (x_{1l} + x_{1c}) / a)^2} ;$$

B.5 Obtendo $L_v(c_{max})$

Consideramos agora a seguinte questão relacionada com a obtenção dos domínios de atração $L_v(c_{max})$ descritos na Seção 3.2: obter o valor máximo do escalar positivo c_{max} tal que o conjunto $L_v(c_{max}) = \{x \in R^n : x' P x \leq c_{max}\}$ satisfaça $L_v(c_{max}) \subseteq R\varphi'$, com $R\varphi'$ algum conjunto e P simétrica definida positiva.

Evidentemente, este se trata de um problema de otimização com restrições. Nesta seção, fornecemos condições necessárias para a otimalidade da solução, descrevendo de forma superficial a obtenção destas condições.

Imaginemos um conjunto $R\varphi'$ qualquer e um conjunto $L_v(c)$ qualquer, lembrando que $L_v(c)$ é convexo, dado as características de P , como na Figura 24.

Figura 22. Conjuntos $L_v(c_{max})$ e $R\varphi'$.

Facilmente percebe-se que uma condição para a otimalidade da solução é a de que haja ao menos um ponto pertencente à união da fronteira entre $L_v(c_{max})$ e R'' e a fronteira entre $R\varphi'$ e R'' . Desta forma, denotando este ponto por x_{sol} , temos que x_{sol} pertence à fronteira entre $R\varphi'$ e R'' . A outra condição necessária é a de que, nos pontos pertencentes à esta união, os vetores Δ_D e Δ_R ortonogonais às superfícies formadas pelas fronteiras (entre $L_v(c_{max})$ e R'' , e entre $R\varphi'$ e R'' , respectivamente) dos dois conjuntos sejam linearmente dependentes.

Para o sistema em questão, a fronteira entre $R\varphi'$ e R'' é caracterizada pelas expressões

$$\dot{x}_2 = (1 \pm \varphi)\dot{x}_{2l} \Rightarrow g - \frac{L_{vo}(x_3 + x_{3c})^2}{2am(1 + (x_1 + x_{1c})/a)^2} = (1 \pm \varphi)(k_1x_1 + k_2x_3) \quad (B.8)$$

onde, baseando-se na expressão (B.7), fez-se $\dot{x}_{2l} = (k_1x_1 + k_2x_3)$.

A fronteira de $L_v(c_{max})$ é dada simplesmente por

$$x'Px = c_{max}. \quad (B.9)$$

Os vetores Δ_D e Δ_R são, respectivamente, o gradiente de (B.8) e (B.9) em x_{sol} , ou seja,

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} \frac{L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})^2}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^3} - (1 \pm \varphi)k_1 & 0 & \frac{-L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^2} - (1 \pm \varphi)k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_D = 2x_{sol}'P$$

As duas condições encontradas podem, portanto, ser escritas como

$$g - \frac{L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})^2}{2am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^2} - (1 \pm \varphi)(k_1 x_{1sol} + k_2 x_{3sol}) = 0 \quad (B.10)$$

$$\left[\frac{L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})^2}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^3} - (1 \pm \varphi)k_1 \quad 0 \quad \frac{-L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^2} - (1 \pm \varphi)k_2 \right] - 2\gamma x'P = 0 \quad (B.11)$$

para algum $\gamma \in R_+$.

De (B.11) vem, após algumas manipulações,

$$x_{2sol} = -P_{22}^{-1}(x_{1sol} P_{12} + x_{3sol} P_{23}) \quad (B.12)$$

e

$$\begin{aligned} & \left[\frac{L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})^2}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^3} - (1 \pm \varphi)k_1 \right] (P_{13}x_3 + P_{23}x_2 + P_{33}x_3) - \\ & \left[\frac{-L_{bo}(x_{3sol} + x_{3c})}{am(1 + (x_{1sol} + x_{1c})/a)^2} - (1 \pm \varphi)k_2 \right] (P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + P_{13}x_3) = 0 \end{aligned} \quad (B.13)$$

onde P_{ij} são os elementos de P .

Conseguiu-se o sistema de equações (B.10), (B.12), (B.13). Na verdade, sendo que há o termo $\pm\varphi$, há dois sistemas de equações, resolvidos separadamente para $+\varphi$ e para $-\varphi$. Com as soluções destes sistemas, encontram-se diferentes x_{sol} , e, com estes, diferentes valores de $c_{max} = x_{sol}'Px_{sol}$. É possível mostrar que, dadas as características de $R\varphi'$ e de L_v , a solução desejada (o maior valor de c_{max} satisfazendo $\{x_{sol} \in R^n : x_{sol}'Px_{sol} \leq c_{max}\} \subseteq R\varphi'$) é igual ao menor c_{max} entre os obtidos.

APÊNDICE C. PROCESSO DE BIOXIDAÇÃO DE SORBITOL A SORBOSE.

Neste apêndice trata-se do processo de oxidação microbiana de sorbitol a sorbose utilizado como exemplo no Capítulo 5. Descrevem-se o modelo matemático do sistema juntamente com sua discretização, a linearização em torno de um ponto de equilíbrio, e a obtenção de $L_v(c_{max})$

C.1 O Sistema de Bioxidação de D-Sorbitol a L-Sorbose

O processo de bioxidação de D-Sorbitol a L-Sorbose pela bactéria *Gluconobacter oxydans* consiste em uma das principais etapas na produção de vitamina C (ácido ascórbico) pelo processo químico de Reichstein. O modelo matemático aqui considerado (C.1) descreve o sistema em operação contínua e é encontrado em Bonomi et al. (1993), juntamente com os parâmetros exibidos na Tabela C.1, levantados nos laboratórios do IPT.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_r &= D(-x_r) + \mu x_r \\
 \dot{p}_r &= D(-p_r) + (\alpha\mu + \beta)x_r \\
 \dot{s}_{r1} &= D(s_{1a} - s_{r1}) + ((-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})\mu + (-1/Y_{ps1})\beta)x_r \\
 \dot{s}_{r2} &= D(s_{2a} - s_{r2}) + ((-1/Y_{xs2})\mu)x_r \\
 \dot{o}_r &= D(c_g - o_r) + ((-1/Y_{xo} - \alpha/Y_{po})\mu + (-1/Y_{po})\beta)x_r + K_I a(c_g - o_r)
 \end{aligned} \tag{C1}$$

com

$$\mu = \mu_0 \frac{s_{r1}}{(K_{s1} + s_{r1} + s_{r1}^2 / w)} \frac{s_{r2}}{(K_{s2} + s_{r2})} \frac{o_r}{(K_o + o_r)} \exp(-K_p p_r)$$

$$\beta = \beta_0 \frac{s_{r1}}{(K_{\beta s1} + s_{r1})} \frac{o_r}{(K_{\beta o} + o_r)}$$

sendo

variáveis de estado: x_r - concentração de bactérias (g/l), p - concentração de sorbitol dissolvido (g/l), s_{r1} - concentração de sorbose dissolvida (g/l), s_{r2} - concentração de extrato de levedura (g/l), o_r - concentração de oxigênio dissolvido (mg/l),

variáveis de controle: D - vazão específica (h^{-1}), s_{1a} - concentração de sorbitol na alimentação (g/l), s_{2a} - concentração de extrato de levedura na alimentação (g/l), K_{1a} - coeficiente de transferência de oxigênio (h^{-1}),

μ - velocidade específica de crescimento celular (h^{-1}), β - velocidade específica de produção de sorbose não associada ao crescimento celular (h^{-1}), e os parâmetros encontrados na Tabela C.1.

Ao linearizar o sistema em torno de um ponto de operação, nota-se que um dos autovalores é bem mais rápido que os demais (autovalores: $-4,81 \times 10^2$; $-6,98 \times 10^{-2} + 4,84 \times 10^{-3}i$; $-6,98 \times 10^{-2} - 4,84 \times 10^{-3}i$; $-4,00 \times 10^{-2}$; $-4,00 \times 10^{-2}$).

Sendo que se utiliza aproximação *backward* para encontrar o modelo discretizado, o que requer um período amostral substancialmente menor que a menor constante de tempo do sistema, o tempo de simulação em ambiente Matlab em Pentium 100MHz seria excessivamente grande (estimado como sendo da ordem de 100 horas).

Para solucionar este problema, optou-se em utilizar a aproximação do modelo do sistema descrita a seguir. O autovalor rápido está relacionado com a equação que descreve a dinâmica da concentração de oxigênio dissolvido. Partindo da hipótese de que a concentração de oxigênio varia rapidamente em relação as demais variáveis de estado do sistema, e sendo que esta concentração pode ser controlada pelo coeficiente de

transferência de oxigênio $K_L a$, pode-se desprezar a dinâmica da concentração do oxigênio e considerar esta variável como entrada do sistema. Desta forma, o modelo do sistema é dado por (C2) e $K_L a$ é dado por (C.3)

Tabela 5. Parâmetros do sistema de biooxidação de sorbitol a sorbose.

α	parâmetro de formação de sorbose associada ao crescimento (g/g)	18,60
Y_{xs1}	fator de conversão sorbitol/célula (g/g)	0,7950
Y_{xs2}	fator de conversão levedura/célula (g/g)	0,6560
Y_{ps1}	fator estequiométrico de conversão sorbitol/sorbose (g/g)	0,9890
Y_{xo}	fator de conversão oxigênio/célula (g/g)	0,6640
Y_{po}	fator estequiométrico de conversão oxigênio/sorbose (g/g)	11,25
μ_0	velocidade específica máxima de crescimento celular sem inibição pelo substrato (h^{-1})	0,6640
β_0	velocidade específica máxima de produção de sorbose não associada ao crescimento (h^{-1})	6,811
K_{s1}	parâmetro de saturação do crescimento pelo sorbitol (g/l)	3,930
K_{s2}	parâmetro de saturação do crescimento pela levedura (g/l)	0,9940
K_o	parâmetro de saturação do crescimento pelo oxigênio (g/l)	$1,580 \times 10^{-4}$
K_p	parâmetro de inibição exponencial do crescimento pelo produto (l/g)	0,005540
$K_{\beta s1}$	parâmetro de saturação da produção de sorbose não associada ao crescimento (g/l)	4,910
$K_{\beta o}$	parâmetro de saturação por oxigênio da produção de sorbose não associada ao crescimento (g/l)	$5,440 \times 10^{-4}$
w	parâmetro de inibição do crescimento pelo sorbitol (g/l)	204
c_g	oxigênio dissolvido em equilíbrio (g/l)	$7,50 \times 10^{-3}$

$$\dot{x}_r = D(-x_r) + \mu x_r$$

$$\dot{p}_r = D(-p_r) + (\alpha\mu + \beta)x_r$$

$$\dot{s}_{r1} = D(s_{1a} - s_{r1}) + ((-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})\mu + (-1/Y_{ps1})\beta)x_r \quad (C2)$$

$$\dot{s}_{r2} = D(s_{2a} - s_{r2}) + ((-1/Y_{xs2})\mu)x_r$$

sendo

$$\mu = \mu_0 \frac{s_{r1}}{(K_{s1} + s_{r1} + s_{r1}^2 / w)} \frac{s_{r2}}{(K_{s2} + s_{r2})} \frac{o_r}{(K_o + o_r)} \exp(-K_p p_r)$$

$$\beta = \beta_0 \frac{s_{r1}}{(K_{\beta s1} + s_{r1})} \frac{o_r}{(K_{\beta o} + o_r)}$$

sendo agora o_r uma entrada.

$$K_I a = \frac{D(c_g - o_r) + ((-1 / Y_{xo} - \alpha / Y_{po})\mu + (-1 / Y_{po})\beta)x_r}{(o_r - c_g)} \quad (C.3)$$

C.2 Modelo do Sistema em Tempo Discreto

Utilizando aproximação *backward*, encontra-se a discretização do sistema (C.2)

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= T_0(-D(k)x_r + \mu(k)x_r(k)) + x_r(k) \\ p_r(k+1) &= T_0(-D(k)p_r(k) + (\alpha\mu(k) + \beta(k))x_r(k)) + p_r(k) \\ s_{r1}(k+1) &= T_0(D(k)(s_{1a} - s_{r1}(k)) + ((-1 / Y_{xs1} - \alpha / Y_{ps1})\mu(k) + (-1 / Y_{ps1})\beta(k))x_r(k)) + s_{r2}(k) \\ s_{r2}(k+1) &= T_0(D(k)(s_{2a} - s_{r2}(k)) + ((-1 / Y_{xs2})\mu(k))x_r(k)) + s_{r2}(k) \end{aligned} \quad (C.4)$$

sendo

$$\mu(k) = \mu_0 \frac{s_{r1}(k)}{(K_{s1} + s_{r1}(k) + s_{r1}(k)^2 / w)} \frac{s_{r2}(k)}{(K_{s2} + s_{r2}(k))} \frac{o_r(k)}{(K_o + o_r(k))} \exp(-K_p p_r(k))$$

$$\beta(k) = \beta_0 \frac{s_{r1}(k)}{(K_{\beta s1} + s_{r1}(k))} \frac{o_r(k)}{(K_{\beta o} + o_r(k))}$$

com T_0 o período de amostragem e k denotando o instante kT_0 . T_0 é escolhido pelos mesmos critérios descritos na Seção B.4, com valor $T_0 = 0,1h$.

C.3 Sistema Linearizado em um Ponto

A linearização do sistema (C2) em torno de um ponto de equilíbrio $(x_e, p_e, s_{1e}, s_{2e}, D_e, o_e, s_{1ae}, s_{2ae})$ é dada pela expressão

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (C.5)$$

com $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [(x_r - x_e) \ (p_r - p_e) \ (s_{1r} - s_{1e}) \ (s_{2r} - s_{2e})]'$, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4] = [(D - D_e) \ (o_r - o_e) \ (s_{1a} - s_{1ae}) \ (s_{2a} - s_{2ae})]'$, a matriz A com elementos $a_{i,j}$ dados por

$$a_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \quad i = 1, \dots, 4; \ j = 1, \dots, 4$$

sendo $x_{eq} = (x_e, p_e, s_{1e}, s_{2e})$, $u_{eq} = (D_e, o_e, s_{1ae}, s_{2ae})$ e

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= -D + \mu_e & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= \alpha \mu_e + \beta_e & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= -D_e + \alpha x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= \alpha x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} + x_e \left. \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= \alpha x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} &= (-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})\mu_e \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = (-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = -D_e + (-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} + (-1/Y_{ps1})x_e \left. \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = (-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial x_1} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = (-1/Y_{xs2})\mu_e \quad \left. \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = (-1/Y_{xs2})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = (-1/Y_{xs2})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = -D_e + (-1/Y_{xs2})x_e \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = -K_p \mu_0 \frac{s_{1e}}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2/w)} \frac{s_{2e}}{(K_{s2} + s_{2e})} \frac{o_e}{(K_o + o_e)^2} \exp(-K_p p_e)$$

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = \mu_0 \frac{s_{2e}}{(K_{s2} + s_{2e})} \frac{o_e}{(K_o + o_e)} \exp(-K_p p_e) \left(\frac{1}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2/w)} - \frac{s_{1e}(1 + 2s_{1e}/w)}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2/w)^2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial x_4} \right|_{x_{eq}, u_{eq}} = \mu_0 \frac{s_{1e}}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2/w)} \frac{o_e}{(K_o + o_e)} \exp(-K_p p_e) \left(\frac{1}{(K_{s2} + s_{2e})} - \frac{s_{2e}}{(K_{s2} + s_{2e})^2} \right)$$

e a matriz B dada por

$$B = \begin{bmatrix} -x_e & x_e \frac{\partial \mu}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} & 0 & 0 \\ -p_e & \alpha x_e \frac{\partial \mu}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} + x_e \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & (-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1}) x_e \frac{\partial \mu}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} + (-1/Y_{ps1}) x_e \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} & D_e & 0 \\ s_{2ae} - s_{2e} & (-1/Y_{xs2}) x_e \frac{\partial \mu}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} & 0 & D_e \end{bmatrix}$$

sendo

$$\frac{\partial \mu}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} = \mu_0 \frac{s_{1e}}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2/w)} \frac{s_{2e}}{(K_{s2} + s_{2e})} \exp(-K_p p_e) \left(\frac{1}{(K_o + o_e)} - \frac{o_e}{(K_o + o_e)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_3} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} = \beta_0 \frac{o_e}{(K_{\beta o} + o_e)} \left(\frac{1}{(K_{\beta s1} + s_{1e})} - \frac{s_{1e}}{(K_{\beta s1} + s_{1e})^2} \right)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t_2} \Big|_{x_{eq}, u_{eq}} = \beta_0 \frac{s_{1e}}{(K_{\beta s1} + s_{1e})} \left(\frac{1}{(K_{\beta o} + o_e)} - \frac{o_e}{(K_{\beta o} + o_e)^2} \right)$$

Quanto a obtenção do ponto de operação, caso tenha-se como meta a produção comercial de sorbose, pode-se utilizar um processo de otimização que minimize uma função objetivo atendendo a vários requisitos do processo, inclusive requisitos econômicos. Maiores detalhes podem ser encontrados em Bonomi et al. (1990). Neste trabalho, uma vez que se visa obter um caminho de pontos de equilíbrio, é interessante obter um conjunto de variáveis entre as variáveis $\{x_e, p_e, s_{1e}, s_{2e}, D_e, o_e, s_{1ae}, s_{2ae}\}$ que possa ser escolhido de forma arbitrária e que leve a uma única solução para as demais variáveis. Foi obtido o conjunto $\{x_e, p_e, s_{1e}, D_e\}$ que leva a uma única solução $\{s_{2e}, o_e, s_{1ae}, s_{2ae}\}$

para as equações dinâmicas do sistema (C.2) igualadas a zero. De fato, escolhendo x_e , p_e , s_{1e} e D_e , encontram-se os valores de s_{2e} , o_e , s_{1ae} e s_{2ae} através das seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 o_e &= \beta_e K_{bo} \left(-\beta_e + \frac{\beta_0 s_{1e}}{(K_{\beta s1} + s_{1e})} \right)^{-1} \\
 s_{2e} &= D_e K_{s2} \left(-D_e + \mu_0 \frac{s_{1e}}{(K_{s1} + s_{1e} + s_{1e}^2 / w)} \frac{o_e}{(K_o + o_e)} \exp(-K_p p_e) \right)^{-1} \quad (C.6) \\
 s_{1ae} &= \frac{D_e s_{1e} - ((-1/Y_{xs1} - \alpha/Y_{ps1})D_e + (-1/Y_{ps1})\beta_e)x_e}{D_e} \\
 s_{2ae} &= \frac{D_e s_{2e} + (1/Y_{xs2})D_e x_e}{D_e}
 \end{aligned}$$

com

$$\beta_e = (D_e p_e - \alpha D_e x_e) / x_e$$

C.4 Encontrando $L_v(c_{max})$

Apesar da relativa simplicidade do sistema de suspensão magnética, o procedimento adotado no Apêndice B para a obtenção do valor de c_{max} levou a condições de otimalidade que constituem um sistema de equações não lineares, cuja solução não é trivial. No caso do sistema em questão, além das não linearidades aparecerem em todas as equações dinâmicas do sistema, há não linearidades envolvendo os sinais de controle em conjunto com os estados, de forma que o problema de determinação de c_{max} torna-se substancialmente mais complexo. Nesta seção, adota-se um método mais direto: inicialmente encontra-se um intervalo $[0, c_s]$ que contém c_{max} e em seguida utiliza-se de um método de bissecção para encontrar c_{max} . Também é considerada a realimentação de

estado da forma $\dot{x} = -Kx$, com a qual o sistema pode ser escrito na forma $\dot{x} = f(x)$; assim sendo, para encontrar c_{max} , é necessário conhecer a matriz de realimentação de estado K .

O intervalo $[0 \ c_s]$ é determinado da seguinte forma. Adota-se uma direção v qualquer e um valor inicial c_0 . Encontram-se os dois pontos x_a e x_b que são a união entre uma reta que passa pela origem e que se estende através de v e entre a fronteira de $L_v(c_0) = \{x \in R^n: x'Px \leq c_0\}$, através das expressões

$$x_a = \sqrt{c_0 / (v' P v)} \ v \quad x_b = -\sqrt{c_0 / (v' P v)} \ v$$

Em seguida, verifica-se se x_a e x_b satisfazem as restrições do tipo setor (3.4) definidas para o sistema. Se sim, multiplica-se o valor de c_0 por um fator $f_s > 1$ e repete-se o procedimento. Se não, o procedimento é finalizado. O valor de c_s é adotado como o último valor de c_0 .

O método de bissecção é descrito resumidamente como se segue. Com o intervalo $[c_{smin} \ c_{smax}]$ inicialmente igual a $[0 \ c_s]$, faz-se $c_T = (c_{smin} + c_{smax})/2$, escolhem-se p_T pontos no interior de $L_v(c_T)$ e verifica-se se estes pontos satisfazem as restrições (3.4). Se sim, faz-se $c_{smin} = c_T$, caso contrário, faz-se $c_{smax} = c_T$. Repete-se o procedimento até que $c_{smax} - c_{smin} < e_s$, com e_s o erro admissível adotado. O valor de c_{max} é adotado como sendo igual a c_T . Observa-se que não há garantia de que o valor de c_{max} realmente tenha a precisão adotada, exceto se o número de pontos p_T for suficientemente grande.

APÊNDICE D. MINIMIZAÇÃO DO LIMITE SUPERIOR PARA O CUSTO GARANTIDO COM MATRIZES DE INCERTEZA DE RANK GENÉRICO

Conforme descrito na Observação 2.4, caso as matrizes de incerteza não sejam rank-1, torna-se necessário majorá-las para obter matrizes de incerteza rank-1. Desta forma, os resultados encontrados pela aplicação dos teoremas do Capítulo 2 ficariam dependentes da majoração adotada. Por exemplo, no caso do Teorema 2.3, a minimização do limite superior do custo garantido ficaria condicionada a majoração adotada. O teorema a seguir contorna este problema incorporando a busca pela majoração adequada na solução do problema de minimização.

Teorema D.1. (Costa and Oliveira, 1998). Considere o sistema com incerteza (2.1), a lei de controle da forma (2.11), a função custo (2.6) e o custo garantido (2.12). Se o seguinte problema de otimização tiver um conjunto de soluções (W, Q, R, L_i, V_j) , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ sendo $W, Q, L_i, V_j \in R^{n \times n}$ e $R \in R^{p \times p}$ matrizes simétricas definidas positivas

$$\min_{(W, Q, M, L_i, V_j)} \quad \gamma$$

sujeito a

$$\text{i) } I < I W$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} \Phi & WA_1' & \dots & WA_r' & BMB_1 & \dots & BMB_q & W \\ A_1W & L_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ A_rW & & & L_r & & & & \\ B_1MB' & & & & V_1 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \\ B_qMB & & & & & & V_q & \\ W & & & & & & & Q^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{iii) } Q - Q_0 > 0$$

$$\text{iv) } R - R_0 > 0$$

sendo

$$\Phi = -WA' - AW + BMB' - \sum_{i=1}^r L_i - \sum_{j=1}^q V_j$$

$Q_0 \in R^{n \times n}$ e $R_0 \in R^{p \times p}$ matrizes de ponderação simétricas e definidas positivas, então o limite superior $J_N = \lambda_{\max}(W^{-1})\|x_0\|^2$ para o custo garantido (2.12) é assegurado pela lei de controle $u = R^{-1}B'P$ (com $P := W^{-1}$ e $R := M^{-1}$) e é arbitrariamente próximo ao mínimo limite superior J_L (2.14) obtido pelo Teorema 2.3 considerando todas as possíveis decomposições rank-1 para as matrizes de incerteza A_i, B_j de rank genérico.

Prova. Encontrada em (Costa and Oliveira, 1998)

APÊNDICE E. LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

Este apêndice apresenta a técnica de linearização por realimentação para sistemas não lineares com uma única entrada. O objetivo é apenas fornecer noções sobre a metodologia, respondendo a questões como o que é linearização por realimentação e quais condições o sistema deve satisfazer para ser linearizável por realimentação. O caso multi-entradas pode ser considerado como uma extensão do caso de uma única entrada, e é facilmente encontrado na literatura básica, como em (Vidyasagar, 1993).

Considere inicialmente a seguinte notação. $V(X)$ é o conjunto de todas as funções suaves que mapeiam o conjunto aberto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as funções suaves de valor real mapeando X em $\mathbb{R}$ é denotado por $S(X)$.

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x} = f(x) + u g(x) \tag{E.1}$$

onde f e g são funções suaves em algum conjunto aberto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo o elemento nulo e com $f(0) = 0$.

Definição E.1. O sistema (E.1) é denominado linearizável por realimentação se existirem funções suaves $q, s \in S(X)$ com $s(x) \neq 0$ para todo x em alguma vizinhança da origem e um difeomorfismo (ver Definição A.6) local $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $T(0)=0$ tal que se for definido

$$v = q(x) + s(x)u \quad z = T(x) \quad (\text{E.2})$$

então as variáveis z e v satisfazem uma equação diferencial linear da forma

$$\dot{z} = Az + bv \quad (\text{E.3})$$

com o par (A, b) controlável.

Assim, um sistema não linear linearizável por realimentação pode ser transformado em um sistema linear através do sinal de realimentação e uma transformação no vetor de estado.

Podem-se utilizar métodos de geometria diferencial para encontrar condições necessárias e suficientes para que o sistema (E.1) seja linearizável. O Teorema E.1 enuncia estas condições, utilizando a notação apresentada no Apêndice A.

Teorema C.1. O sistema (E.1) é linearizável por realimentação se e somente se as seguintes condições são satisfeitas em alguma vizinhança da origem,

- (a) o conjunto de vetores $\{ \text{ad}_f^0 : \text{ad}_f^1 : \dots : \text{ad}_f^{n-1} \}$ é linearmente independente.
- (b) o conjunto de vetores $\{ \text{ad}_f^0 : \text{ad}_f^1 : \dots : \text{ad}_f^{n-2} \}$ é involutivo (ver Def. A.10).

A prova pode ser encontrada em Vidyasagar (1993).

É importante observar que, pelo fato de T ser um difeomorfismo local, pode não haver a correspondência entre x e z em todo R^n . Em outras palavras, apesar de a qualquer x corresponder um z , não necessariamente qualquer z corresponde a um x . Desta forma, é preciso verificar se para a solução do sistema linear encontrada existe a correspondente solução do sistema não linear.

Uma crítica freqüentemente encontrada na literatura é que o método de linearização por realimentação cancela possíveis efeitos benéficos das não linearidades do sistema. Em (Doyle *et al.*, 1996) encontramos uma análise desta e de outras questões, como a geração de exemplos onde o método de linearização por realimentação fornece a solução ótima.

6.1. Linearização por Realimentação - Sistema de Suspensão Magnética

Considere o sistema de suspensão magnética descrito em (B.3) e considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 ; \quad z_2 = x_2 \\ z_3 &= g - \frac{(x_3 + x_{3c})^2}{(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Derivando z_1, z_2, z_3 em relação ao tempo encontra-se

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (\text{E.5a})$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \quad (\text{E.5b})$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{2c(x_3 + x_{3c})\dot{x}_3}{(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} + \frac{2c(x_3 + x_{3c})^2 \dot{x}_1}{a(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^3} \quad (\text{E.5c})$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\dot{z}_3 = +\frac{2cR_b(x_3 + x_{3c})x_3}{L_b(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} + \frac{2c(x_3 + x_{3c})^2 x_2}{a(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^3} - \frac{2c(x_3 + x_{3c}) u}{L_b(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} \quad (\text{E.6})$$

Fazendo

$$v = + \frac{2cR_b (x_3 + x_{3c}) x_3}{L_b (1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} + \frac{2c(x_3 + x_{3c})^2 x_2}{a(1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^3} - \frac{2c (x_3 + x_{3c}) u}{L_b (1 + (x_1 + x_{1c}) / a)^2} \quad (\text{E.7})$$

e utilizando (E.5), encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= v \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Não é difícil observar que a transformação expressa por (E.4) e (E.7) satisfazem as exigências da *Definição* E.1, o que permite concluir que (B.3) é linearizável por realimentação, sendo (E.8) uma linearização de (B.3). É importante observar que o difeomorfismo expresso por (E.4) é apenas local pois nem para todo z_3 há um x_3 , ou em outras palavras, a relação (E.4) não é inversível em todo R^n . De fato, de (E.4) vem a relação

$$x_3 = (1 + (x_1 + x_{1c}) / a) \sqrt{(g - z_3)} - x_{3c} \quad (\text{E.9})$$

que só resulta x_3 real se

$$z_3 \leq g. \quad (\text{E.10})$$

Um fato interessante de observar é que, com a linearização adotada, tanto z_3 como a restrição (E.10) têm significado físico: z_3 é a aceleração da esfera e a restrição (E.10) nos diz que a aceleração (para “baixo”) não pode ser maior que a aceleração da gravidade, o que é óbvio, já que a bobina apenas exerce força de atração (para “cima”).

Conforme descrito no Apêndice C, é necessário observar se a solução do sistema linearizado tem correspondência com uma solução do sistema não linear, o que é feito verificando se a restrição (E.10) é satisfeita.

Consideramos agora o problema de regulação de estados da Seção 5.1. A posição de equilíbrio é a origem e o estado inicial é $x_0 = [0,0025 \ -0,15 \ -0,4]'$. Considera-se também o mesmo índice de desempenho (5.1).

Utiliza-se como controlador para o sistema (E.8) um regulador linear quadrático, com sinal de controle da forma $v = -K_{FL} z$. Através da expressão (E.7), encontra-se o sinal de controle do sistema não linear original,

$$u = \frac{L_b (1 + (x_1 + x_{1c})/a)^2}{2c (x_3 + x_{3c})} \left[R_b x_3 + \frac{(x_3 + x_{3c}) x_2}{a(1 + (x_1 + x_{1c})/a)} + K_{FL} T(x) \right] \quad (E.11)$$

onde fez-se $z = T(x)$, com T simbolizando a transformação (E.4).

Durante o projeto do regulador, é necessário escolher matrizes de ponderação Q_{FL} e R_{FL} , o que pode tornar-se difícil caso se deseje que o desempenho do sistema não linear seja bom. No caso em questão, entretanto, tem-se que dois dos estados do sistema não linear permanecem os mesmos no sistema linearizado ($z_1 = x_1$ e $z_2 = x_2$), de forma que os termos da matriz de ponderação Q_{FL} relacionados às variáveis z_1 e z_2 podem ser iguais aos de Q_0 . Assim sendo, considerando Q_{FL} diagonal positivo definido da forma $Q_{FL} = [q_1 \ 0 \ 0; 0 \ q_2 \ 0; 0 \ 0 \ q_3]$, e com o mesmo valor de Q_0 dado em (6.2), tem-se $q_1 = 10^6$ e $q_2 = 1$. Os valores de q_3 e R podem ser encontrados de forma heurística, buscando um bom desempenho e observando se a restrição (E.10) é satisfeita. Procedendo desta forma, encontra-se $q_3 = 0,01$ e $R = 5 \times 10^{-6}$.