Laringe Digital

Marcelo de Oliveira Rosa

Tese de doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Tit. José Carlos Pereira

São Carlos
2002

Dedicatória

Ao Senhor Deus.

À minha família (José, Josefa (*in memoriam*),

Paulina, Fernando e Larissa).

Agradecimento

Ao meu amigo Prof. Tit. José Carlos Pereira, que sempre me incentivou desde o período do mestrado, resolvendo problemas burocráticos e sempre deixando sua porta aberta sem a necessidade de marcar horários. O mais importante: liberdade para seguir minhas próprias idéias.

Ao Prof. Assoc. Marcos Grellet (depto de otorrinolaringologia da FMRP/USP), meu co-orientador e amigo, por ter permitido o acesso as dependências do HC/Ribeirão Preto onde aprendi sobre a laringe *in-loco*. Seus comentários e explicações ajudaram a compreender o funcionamento desta estrutura orgânica.

À Profª. Abeer Alwan (*University of California, Los Angeles*) por ter me recebido em seu laboratório para realizar meu estágio de doutorado, fornecendo material e discutindo idéias para resolução do problema proposto. Sua ajuda foi fundamental para eu rapidamente me incorporar ao seu laboratório e a me adaptar ao país. Os seis meses em que estive sob sua tutela certamente moldaram minha visão sobre pesquisa científica. Ainda na UCLA, ao Prof. Marvin Bergsneider, pelas discussões (bem humoradas) e orientação em modelagem de estruturas orgânicas, e ao Profs. John Kim e Shao-Ching Huang pelo auxílio na compreensão de aspectos básicos da dinâmica dos fluidos.

Aos Profs. Philip Gresho e Alan Hindmarsh (*Lawrence Livermore National Lab*), Marek Behr (*Rice University*), John Burkardt (*Iowa State University*) e Peter Minev (*University of Alberta, Canadá*) por prontamente discutirem problemas relacionados à solução das equações de Navier-Stokes, atentando para minhas indagações e fornecendo idéias para a construção de algoritmos.

Aos Profs. Marcelo Basílio Joaquim, Aluizio Fausto Ribeiro Araújo e Marco Henrique Terra pelo apoio e incentivo durante o mestrado e doutorado. Aos Profs. José Eloir Krupechacke e Luiz Antonio Pavão (PUC-PR) pelo constante incentivo para realizar meus estudos de pós-graduação. Ao Prof. João Lirani e ao eng. Sérgio Evangelista pela pronta disposição de responder minhas dúvidas em relação à mecânica estrutural, problemas de contato e visualização gráfica de grandezas físicas.

Aos professores membros da banca de doutorado pela paciente avaliação da tese, fazendo sugestões e comentários para aprimoramento do documento final. Certamente foi uma tarefa complicada.

Aos meus amigos do interior de São Paulo (Arthur, Guilherme, Renato e Lúcia, João Bosco e Meiri, Maria Cristina, Ricardo Sovat, Ricardo Mori, Hélio e Lu, Wagner e Adriana, Profª. Elvia, Aparecida Guerra, Luiz Granato, Daniel Razera, Patrícia, Mario, Karla, Andréa Alves) de Curitiba (Luiz Bona, Acyr, Emile,

Juliano, Hubert e Janete, Cristiane, Magaly, e Ana) e de Ribeirão Preto (Dra. Simone, Maria, Francisco, Lilian e Dr. Colafemina). Sem vocês, tudo certamente não teria muita graça.

Aos funcionários José Carlos, Marisa, Marcelo Xaraba, Jussara, Roseli, Gerson e Aura que sempre prontamente me ajudaram a resolver os problemas burocráticos que a USP sempre criava.

Aos meus amigos adventistas (Prof. Wellington, Liliane, e Danielle, Sr. Waldemar e Auriete, Dr. Edison e Marlene, Francely e Luci, Erly e Roberto, Ricardo e Gabriela, Marcos e Ellen, Dr. Aliomar e Dulce, Alessandra, Sumaira, Luiz e Simone) que sempre me acolheram em suas residências e estiveram comigo durante os seis anos longe de casa.

Aos meus amigos na California (Katherine Comanor, Markus Iseli, Sankaran Panchapagesan, Jintao Jiang, Ricardo Merced e Gustavo Aires) que foram, são e serão grandes amigos. A vida na Califórnia não seria sobre as ondas se não fosse por vocês.

Especialmente agradeço ao meu pai (José de Oliveira Rosa), que sempre me disse que educação é o bem mais valioso que temos, incentivando-me sempre a continuar estudando. Suas palavras e proteção estarão sempre comigo.

Este trabalho foi financiado pela FAPESP.

Sumário

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	vii
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Aparelho Fonador e Modelos da Laringe	6
2.1 Os Pulmões	6
2.2 Laringe	7
2.3 Músculos da laringe	9
2.4 Cavidades da laringe	12
2.5 Pregas vocais verdadeiras	13
2.6 Falsas pregas vocais	16
2.7 Características Viscoelásticas da Laringe	16
2.8 Teoria Mioelástica-aerodinâmica da Laringe	20
2.9 Modelos da Laringe	24
2.10 Aspectos adicionais da dinâmica da laringe	34
3 Equações do Problema	37
3.1 Escoamento de Ar	37
3.2 Equações do Músculo	40
4 Modelo de Simulação da Laringe	44
4.1 Método de Elementos Finitos	45
4.2 Solução Numérica do Escoamento de Ar	49
4.2.1 Método Galerkin “Clássico”	49
4.2.2 Método não-estacionário	59
4.2.3 Método Segregado	61
4.2.4 Aproximação Algébrica da “Bacia de Convergência” - Stokes Modificado	64
4.2.5 Esquemas UPWINDING	66
4.2.6 Métodos monotônicos	69
4.2.7 Método das Características	77
4.2.8 Método de Primeira-Ordem	79
4.2.9 Método das Bases Reduzidas	81
4.2.10 Modelo de Turbulência	84
4.2.11 Condições de Contorno de Saída	86
4.2.12 Método Híbrido para Solução do Escoamento de Ar na Laringe	88

4.3 Solução Numérica da Dinâmica dos Músculos da Laringe	92
4.3.1 <i>Problema de Contato</i>	97
4.4 Gerador e Adaptação da Malha	104
4.4.1 <i>Adaptação da Malha</i>	109
4.5 Matrizes Esparsas e Solver LU	112
4.5.1 <i>Matrizes Esparsas</i>	112
4.5.2 <i>Fatoração LU</i>	114
4.5.3 <i>Fatoração LU por Bifatoração</i>	115
4.5.4 <i>Fatoração LU por técnica de supernós</i>	116
5 Resultados e Discussões	119
5.1 Análise do Escoamento	119
5.2 Propriedades Mecânicas da Laringe X Vibração das Pregas Vocais	154
5.3 Análise da Dinâmica de Laringes Normais	169
5.4 Análise dos Movimentos das Pregas Vocais	179
5.5 Introspecções sobre doenças da laringe	206
5.5.1 <i>Câncer</i>	207
5.5.2 <i>Paralisia Unilateral</i>	215
5.5.3 <i>Sulco Vocal</i>	226
5.5.4 <i>Outras doenças</i>	245
6 Conclusão e Trabalhos Futuros	246
7 Referências Bibliográficas	252
8 Bibliografia Consultada	258

Lista de Figuras

Figura 2.1	Posição da laringe na garganta	7
Figura 2.2	Cartilagens da laringe	8
Figura 2.3	Visão dos músculos da laringe e suas conexões com cartilagens.	9
Figura 2.4	Visão dos músculos e cartilagens dentro da laringe	11
Figura 2.5	Ação de alguns músculos intrínsecos na adução e abdução da glote.	12
Figura 2.6	Divisão histológica das pregas vocais verdadeiras.	14
Figura 2.7	Efeito da passagem de ar sob folha de papel.	21
Figura 2.8	Movimentos das pregas vocais.	23
Figura 2.9	Modelo uma-massa.	25
Figura 2.10	Modelo duas-massas.	27
Figura 2.11	Modelo multi-massas.	30
Figura 4.2.1	Influência das iterações iniciais na convergência do método Newton-Raphson (NR).	58
Figura 4.2.2	Influência das iterações iniciais na convergência do método Quasi-Newton (QN).	58
Figura 4.2.3	Influência das iterações iniciais na convergência do método segregado.	64
Figura 4.2.4	Influência da técnica SUPG na convergência de métodos iterativos.	69
Figura 4.2.5	Influência da técnica SUPG na convergência do método segregado.	69
Figura 4.2.6	Diagrama de pontos <i>downwind</i> , <i>upwind</i> e caminho <i>streamline</i> .	72
Figura 4.2.7	Determinação do ponto “ <i>upwind</i> ” e caminho “ <i>streamline</i> ” em um triângulo.	74
Figura 4.2.8	Expansão do caminho <i>streamline</i> .	76
Figura 4.2.9	Definição do ponto <i>downwind</i> , <i>upwind</i> e elemento <i>upwind</i> usados no método de primeira ordem.	80
Figura 4.2.10	Esquema espacial para descrição dos gradientes de velocidade.	89
Figura 4.3.1	Diagrama de pesquisa dos nós envolvidos na colisão.	99
Figura 4.3.2	Abordagem alternativa para determinação de faces colididas.	99
Figura 4.3.3	Determinação de PT_{atual} e PT_{face} para cálculo das forças de colisão.	100
Figura 4.3.4	Diagrama do problema de contato para cálculo das forças de ação e reação.	101
Figura 4.3.5	Situação que gera indeterminação no cálculo das forças de reação.	103
Figura 4.4.1	Discretização espacial da laringe: seções e superfícies.	105

Figura 4.4.2	Tipos de seções da laringe: circunferência, elipse, elipse de 4 raios e cunha/hiperelipse.	106
Figura 4.4.3	Distribuição dos raios em uma seção “elíptica”.	106
Figura 4.4.4	Malha gerada para músculo e escoamento em corte transversal.	107
Figura 4.4.5	Diferenciação histológica da laringe “digital” em corte transversal (Amarelo = cobertura, Vermelho = ligamento, Laranja = corpo).	108
Figura 4.5.1	Forma de armazenamento “ <i>skyline</i> ”.	113
Figura 4.5.2	Formato esparsa da matriz de um problema de NS.	113
Figura 5.1.1	Perfis geométricos convergentes COM e SEM as falsas pregas pregas, respectivamente. .	120
Figura 5.1.2	Perfis geométricos divergentes COM e SEM as falsas pregas vocais, respectivamente. ...	121
Figura 5.1.3	Perfis geométricos paralelos COM e SEM as falsas pregas vocais, respectivamente.	122
Figura 5.1.4	Distribuição de pressões na laringe para perfil convergente COM falsas pregas vocais. ...	123
Figura 5.1.5	Distribuição de pressões na laringe para perfil convergente SEM falsas pregas vocais. ...	123
Figura 5.1.6	Distribuição de pressões na laringe para perfil divergente COM falsas pregas vocais.	124
Figura 5.1.7	Distribuição de pressões na laringe para perfil divergente SEM falsas pregas vocais.	124
Figura 5.1.8	Distribuição de pressões na laringe para perfil paralelo COM falsas pregas vocais.	125
Figura 5.1.9	Distribuição de pressões na laringe para perfil paralelo SEM falsas pregas vocais.	125
Figura 5.1.10	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.	127
Figura 5.1.11	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	128
Figura 5.1.12	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	128
Figura 5.1.13	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.	129
Figura 5.1.14	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	129
Figura 5.1.15	Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	130
Figura 5.1.16	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.	130
Figura 5.1.17	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	131
Figura 5.1.18	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	131
Figura 5.1.19	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.	132
Figura 5.1.20	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	132
Figura 5.1.21	Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	133

Figura 5.1.22	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.	133
Figura 5.1.23	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	134
Figura 5.1.24	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	134
Figura 5.1.25	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.	135
Figura 5.1.26	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.	135
Figura 5.1.27	Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.	136
Figura 5.1.28	Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil convergente.	139
Figura 5.1.29	Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil divergente.	139
Figura 5.1.30	Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil paralelo.	140
Figura 5.1.31	Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil convergente.	141
Figura 5.1.32	Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil divergente.	141
Figura 5.1.33	Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil paralelo.	142
Figura 5.1.34	Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil convergente - corte transversal.	142
Figura 5.1.35	Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil divergente - corte transversal.	143
Figura 5.1.36	Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil paralelo - corte transversal.	143
Figura 5.1.37	Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil convergente.	144
Figura 5.1.38	Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil divergente.	145
Figura 5.1.39	Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil paralelo.	145
Figura 5.1.40	Distribuição de pressão média para diferentes perfis geométricos da laringe “estreita”. ..	146
Figura 5.1.41	Distribuição de pressão média para diferentes perfis geométricos da laringe “larga”.	146
Figura 5.1.42	Diferença de pressão média entre laringes convergentes “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.	148
Figura 5.1.43	Diferença de pressão média entre laringes divergentes “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.	149
Figura 5.1.44	Diferença de pressão média entre laringes paralelas “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.	149
Figura 5.1.45	Vetores velocidade para a laringe convergente com falsas pregas vocais “grandes” - corte transversal.	150
Figura 5.1.46	Verificação das áreas de recirculação de ar no ventrículo laríngeo em duas vistas oblíquas distintas: ampliações da Figura 5.1.45.	151
Figura 5.1.47	Perfil geométrico simulado por Guo e Scherer (1993).	152
Figura 5.1.48	Curva de pressão na superfície muscular para laringe de Guo e Scherer (1993).	152

Figura 5.1.49	Curva de pressão na superfície muscular em laringes “estreitas”: comparação com Guo de Scherer (1993).	153
Figura 5.2.1	Efeitos do aumento de massa na vibração da laringe.	158
Figura 5.2.2	Efeitos da constante de cisalhamento longitudinal do ligamento na vibração da laringe. . .	159
Figura 5.2.3	Efeitos do módulo de Young transversal da cobertura na vibração das pregas vocais. . . .	160
Figura 5.2.4	Efeitos da viscosidade na vibração das pregas vocais.	161
Figura 5.2.5	Efeitos da constante de cisalhamento longitudinal da cobertura na vibração das pregas vocais.	162
Figura 5.2.6	Efeito da largura das pregas vocais na vibração de laringes com cobertura “rígida”.	164
Figura 5.2.7	Efeito da largura das pregas vocais na vibração de laringes com cobertura “mole”.	164
Figura 5.2.8	Efeito do módulo de Young longitudinal na vibração de laringe “curta”.	165
Figura 5.2.9	Comparação entre laringes “curta” e “normal” com rigidez longitudinal ajustada.	166
Figura 5.2.10	Redução do espaço glotal - Comparação entre vibração de laringes “curta” e normal. . . .	167
Figura 5.2.11	Laringe exatamente no instante de fechamento glotal - duas vistas oblíquas.	168
Figura 5.3.1	Ponto geométrico “instável” durante colisão.	170
Figura 5.3.2	Sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 kdyna/cm ²	171
Figura 5.3.3	Derivada do sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 kdyna/cm ²	172
Figura 5.3.4	Ampliação da derivada do sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 kdyna/cm ²	172
Figura 5.3.5	Modelo LF para descrição da derivada do sinal. (a) Representação da derivada sinal glotal. Exemplo de sinal glotal (b) e sua derivada (c).	173
Figura 5.3.6	Comparação de sinais glotais para laringes excitadas por diferentes pressões subglotais. . .	174
Figura 5.3.7	Densidade de potência espectral dos sinais glotais para pressões de 5 e 8 kdyna/cm ²	175
Figura 5.3.8	Comparação de sinais glotais para laringes excitadas por diferentes pressões subglotais. . .	176
Figura 5.3.9	Comparação entre sinais glotais de laringes “normal” e “rígida”.	177
Figura 5.3.10	Comparação de sinais glotais para laringes “rígidas” excitadas por diferentes pressões subglotais.	178
Figura 5.4.1	Sinal glotal da laringe LAR37 para descrição dos movimentos das pregas vocais.	180
Figura 5.4.2	Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04260 s e 0,04290 s, respectivamente.	180
Figura 5.4.3	Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04320 s, 0,04350 s, 0,04380 s, 0,04410 s, 0,04440 s e 0,04470 s, respectivamente.	181
Figura 5.4.4	Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04500 s, 0,04530 s, 0,04560 s, 0,04590 s, 0,04620 s e 0,04650 s, respectivamente.	182
Figura 5.4.5	Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04680 s, 0,04710 s, 0,04740 s, 0,04770 s, 0,04800 s e 0,04830 s, respectivamente.	183
Figura 5.4.6	Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04860 s, 0,04890 s e 0,04920 s, respectivamente.	184
Figura 5.4.7	Sinal glotal da laringe LAR40 para descrição dos movimentos das pregas vocais.	185
Figura 5.4.8	Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,02820 s, 0,02850 s, 0,02880 s, 0,02910 s, 0,02940 s e 0,02970 s, respectivamente.	186

Figura 5.4.9	Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03000 s, 0,03030 s, 0,03060 s, 0,03090 s, 0,03120 s e 0,03150 s, respectivamente.	187
Figura 5.4.10	Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03180 s, 0,03210 s, 0,03240 s, 0,03270 s, 0,03300 s e 0,03330 s, respectivamente.	188
Figura 5.4.11	Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03360 s, 0,03390 s, 0,03420 s, 0,03450 s, 0,03480 s e 0,03510 s, respectivamente.	189
Figura 5.4.12	Passos de simulação da laringe LAR40 no instante de tempo 0,03540 s.	190
Figura 5.4.13	Sinal glotal da laringe LAR38 para descrição dos movimentos das pregas vocais.	191
Figura 5.4.14	Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s, 0,07350 s, 0,07380 s e 0,07410 s, respectivamente.	192
Figura 5.4.15	Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07440 s, 0,07470 s, 0,07500 s, 0,07530 s, 0,07560 s e 0,07590 s, respectivamente.	193
Figura 5.4.16	Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07620 s, 0,07650 s, 0,07680 s, 0,07710 s e 0,07740 s, respectivamente.	194
Figura 5.4.17	Passos de simulação da laringe LAR38 (prega vocal inteira) nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s, 0,07350 s, 0,07380 s, 0,07410 s, 0,07440 s, 0,07470 s, 0,07500 s e 0,07530 s, respectivamente.	195
Figura 5.4.18	Passos de simulação da laringe LAR38 (prega vocal inteira) nos instantes de tempo 0,07560 s, 0,07590 s, 0,07620 s, 0,07650 s, 0,07680 s, 0,07710 s e 0,07740 s, respectivamente.	196
Figura 5.4.19	Pontos de avaliação dos deslocamentos.	197
Figura 5.4.20	Deslocamento do ponto 365 para a laringe simulada LAR38.	198
Figura 5.4.21	Deslocamento do ponto 367 para a laringe simulada LAR38.	198
Figura 5.4.22	Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR38.	199
Figura 5.4.23	Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR38.	199
Figura 5.4.24	Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR38.	200
Figura 5.4.25	Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR38.	200
Figura 5.4.26	Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR40.	201
Figura 5.4.27	Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR40.	201
Figura 5.4.28	Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR40.	202
Figura 5.4.29	Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR40.	202
Figura 5.4.30	Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR42.	203
Figura 5.4.31	Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR42.	203
Figura 5.4.32	Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR42.	204
Figura 5.4.33	Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR42.	204
Figura 5.4.34	Movimento de um dos nós superficiais da laringe de Alipour-Haghighi et al. (2000).	206
Figura 5.5.1	Distribuição de pressões na laringe com câncer.	208
Figura 5.5.2	Distribuição de pressões médias ao longo da laringe com câncer.	209
Figura 5.5.3	Vetores velocidade para um instante de tempo típico da laringe com câncer - corte transversal.	209

Figura 5.5.4	Instante inicial e final da simulação - pequeno deslocamento para cima das pregas vocais.	210
Figura 5.5.5	Comparação entre os sinais glotais de duas laringes com câncer.	211
Figura 5.5.6	Sinal glotal da laringe com câncer para descrição dos movimentos das pregas vocais.	212
Figura 5.5.7	Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05610 s e 0,05640 s, respectivamente.	212
Figura 5.5.8	Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05670 s, 0,05700 s, 0,05730 s, 0,05760 s, 0,05790 s e 0,05820 s, respectivamente.	213
Figura 5.5.9	Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05850 s, 0,05880 s, 0,05910 s, 0,05940 s, 0,05970 s e 0,06000 s, respectivamente.	214
Figura 5.5.10	Distribuição de pressões ao longo da prega vocal “paralisada” na laringe com paralisia unilateral.	216
Figura 5.5.11	Distribuição de pressões ao longo da prega vocal “normal” na laringe com paralisia unilateral.	217
Figura 5.5.12	Distribuição das pressões ao longo da superfície da laringe com paralisia unilateral.	217
Figura 5.5.13	Vetores velocidade para laringe com paralisia unilateral - corte transversal.	218
Figura 5.5.14	Sinal glotal para uma laringe com paralisia unilateral.	219
Figura 5.5.15	Sinal glotal da laringe com paralisia unilateral para descrição dos movimentos das pregas vocais.	220
Figura 5.5.16	Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05700 s e 0,05730 s, respectivamente.	220
Figura 5.5.17	Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05760 s, 0,05790 s, 0,05820 s, 0,05850 s, 0,05880 s e 0,05910 s, respectivamente.	221
Figura 5.5.18	Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05940 s, 0,05970 s, 0,06000 s, 0,06030 s, 0,06060 s e 0,06090 s, respectivamente.	222
Figura 5.5.19	Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,06120 s, 0,06150 s, 0,06180 s, 0,06210 s, 0,06240 s e 0,06270 s, respectivamente.	223
Figura 5.5.20	Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,06300 s e 0,06330 s, respectivamente.	224
Figura 5.5.21	Deslocamento do ponto 405 para a laringe com paralisia unilateral.	224
Figura 5.5.22	Deslocamento do ponto 407 para a laringe com paralisia unilateral.	225
Figura 5.5.23	Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe com paralisia unilateral.	225
Figura 5.5.24	Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe com paralisia unilateral.	226
Figura 5.5.25	Posição da alteração orgânica na laringe com sulco vocal “tipo 1”.	227
Figura 5.5.26	Sinais glotais para uma laringe com sulco vocal.	228
Figura 5.5.27	Sinal glotal da laringe com sulco vocal “tipo 1” para descrição dos movimentos das pregas vocais.	229
Figura 5.5.28	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06180 s, 0,06210 s, 0,06240 s, 0,06270 s, 0,06300 s e 0,06330 s, respectivamente.	230

Figura 5.5.29	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06360 s, 0,06390 s, 0,06420 s, 0,06450 s, 0,06480 s e 0,06510 s, respectivamente.	231
Figura 5.5.30	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06540 s, 0,06570 s, 0,06600 s, 0,06630 s, 0,06660 s e 0,06690 s, respectivamente.	232
Figura 5.5.31	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06720 s, 0,06750 s, 0,06780 s, 0,06810 s, 0,06840 s e 0,06870 s, respectivamente.	233
Figura 5.5.32	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06900 s, 0,06930 s, 0,06960 s, 0,06990 s, 0,07020 s e 0,07050 s, respectivamente.	234
Figura 5.5.33	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,07080 s, 0,07110 s, 0,07140 s, 0,07170 s, 0,07200 s e 0,07230 s, respectivamente.	235
Figura 5.5.34	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s e 0,07350 s, respectivamente.	236
Figura 5.5.35	Posição da alteração orgânica na laringe com sulco vocal “tipo 2”.	237
Figura 5.5.36	Sinal glotal da laringe com sulco vocal “tipo 2” para descrição dos movimentos das pregas vocais.	237
Figura 5.5.37	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03450 s, 0,03480 s, 0,03510 s, 0,03540 s, 0,03570 s e 0,03600 s, respectivamente.	238
Figura 5.5.38	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03630 s, 0,03660 s, 0,03690 s, 0,03720 s, 0,03750 s e 0,03780 s, respectivamente.	239
Figura 5.5.39	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03810 s, 0,03840 s, 0,03870 s, 0,03900 s, 0,03930 s e 0,03960 s, respectivamente.	240
Figura 5.5.40	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03990 s, 0,04020 s, 0,04050 s, 0,04080 s, 0,04110 s e 0,04140 s, respectivamente.	241
Figura 5.5.41	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04170 s, 0,04200 s, 0,04230 s, 0,04260 s, 0,04290 s e 0,04320 s, respectivamente.	242
Figura 5.5.42	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04350 s, 0,04380 s, 0,04410 s, 0,04440 s, 0,04470 s e 0,04500 s, respectivamente.	243
Figura 5.5.43	Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04530 s, 0,04560 s, 0,04590 s e 0,04620 s, respectivamente.	244

Lista de Tabelas

Tabela 5.1.1	Descrição geométrica dos perfis convergentes	120
Tabela 5.1.2	Descrição geométrica dos perfis divergentes	121
Tabela 5.1.3	Descrição geométrica dos perfis paralelos	122
Tabela 5.1.4	Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil convergente	138
Tabela 5.1.5	Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil divergente	138
Tabela 5.1.6	Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil paralelo	138
Tabela 5.1.7	Descrição geométrica das falsas pregas vocais de tamanho “normal” para todos os perfis	148
Tabela 5.2.1	Descrição geométrica GEO1	156
Tabela 5.2.2	Descrição geométrica GEO2	156
Tabela 5.2.3	Descrição geométrica GEO3	157
Tabela 5.2.4	Descrição geométrica GEO4	157
Tabela 5.2.5	Descrição geométrica GEO5	157
Tabela 5.2.6	Laringe com ligamento mais ESPESSE (LAR11)	158
Tabela 5.2.7	Laringe com ligamento mais FINO (LAR13)	158
Tabela 5.2.8	Laringe com MENOR constante de cisalhamento longitudinal no ligamento (LAR14) ...	159
Tabela 5.2.9	Laringe com MAIOR constante de cisalhamento longitudinal no ligamento (LAR17)	159
Tabela 5.2.10	Laringe com MENOR módulo de Young transversal na cobertura (LAR15)	160
Tabela 5.2.11	Laringe com MAIOR viscosidade em todos os tecidos (LAR18)	161
Tabela 5.2.12	Laringe com MENOR constante de cisalhamento longitudinal na cobertura (LAR21) ...	162
Tabela 5.2.13	Laringe com MAIOR constante de cisalhamento longitudinal na cobertura (LAR22)	162
Tabela 5.2.14	Laringe MAIS “curta” com MENOR módulo de Young transversal da cobertura (LAR26)	163
Tabela 5.2.15	Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young transversal da cobertura (LAR27)	163
Tabela 5.2.16	Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young longitudinal (LAR28)	163
Tabela 5.2.17	Laringe com MAIOR módulo de Young longitudinal no ligamento (LAR29)	165
Tabela 5.2.18	Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young longitudinal no ligamento (LAR30)	166

Tabela 5.2.19	Laringe com espaço glotal reduzido (LAR31)	167
Tabela 5.2.20	Laringe MAIS “curta” com espaço glotal reduzido (LAR32)	167
Tabela 5.3.1	Laringe normal com pressão subglotal de 8 kdina/cm ² (LAR37)	170
Tabela 5.3.2	Laringe normal com pressão subglotal de 5 kdina/cm ² (LAR42)	174
Tabela 5.3.3	Laringe normal com pressão subglotal de 7 kdina/cm ² (LAR41)	175
Tabela 5.3.4	Laringe normal com pressão subglotal de 9 kdina/cm ² (LAR40)	175
Tabela 5.3.5	Laringe mais rígida com pressão subglotal de 8 kdina/cm ² (LAR38)	177
Tabela 5.3.6	Laringe mais rígida com pressão subglotal de 9 kdina/cm ² (LAR39)	178
Tabela 5.5.1	Descrição geométrica da laringe com câncer (CNC28)	207
Tabela 5.5.2	Laringe com câncer	210
Tabela 5.5.3	Laringe com câncer “menos rígido”	210
Tabela 5.5.4	Descrição geométrica da laringe com paralisia unilateral	215
Tabela 5.5.5	Laringe com sulco vocal “tipo 1” e “tipo 2”	228

Resumo

Este trabalho descreve um modelo matemático para simulação da laringe humana durante a fonação. O objetivo foi produzir uma técnica computacional de grande escala de processamento para capturar os fenômenos fisiológicos que ocorrem na laringe durante a vocalização e servir de base para estudos mais aprofundados sobre esta importante estrutura do corpo humano. Usando o método dos elementos finitos como base para discretizar as equações dos tecidos musculares da laringe e das equações de Navier-Stokes, e um modelo de descrição da colisão entre as pregas vocais, o sinal glotal foi obtido a partir de diferentes geometrias de laringes com diferentes propriedades viscoelásticas. Os resultados confirmaram a teoria mioelástica-aerodinâmica que descreve a dinâmica da fonação, reproduzindo inclusive fenômenos fisiológicos que os modelos existentes são incapazes de simular. Estudos adicionais foram feitos para verificar a viabilidade do modelo para simular algumas doenças que danificam a laringe.

Palavras-chave: simulação, método dos elementos finitos, dinâmica computacional dos fluidos, problema de contato, dinâmica de estruturas, laringe, processamento digital da fala, engenharia biomédica.

Abstract

This work describes a mathematical model to simulate the human larynx during a phonation. The objective was to produce a large-scale computational technique to capture several physiological phenomena that take place on the larynx during the vocalization and to assist further studies about this important structure of the human body. Using the finite element methods as the way to discretize the muscle tissue equations of the larynx and the Navier-Stokes equations and a model to describe the collision between both vocal folds, the glottal signal for different larynx geometries with different viscoelastic properties was obtained. The results confirmed the myoelastic-aerodynamic theory which describes the dynamic of the phonation, also reproducing physiologic phenomena that current models are unable to simulate. Additional studies were conducted to confirm the feasibility of the model to simulate some diseases that affect the larynx.

Keywords: simulationg, finite element methods, computational fluid dynamics, contact problem, structure dynamics, larynx, digital speech processing, biomedical engineering.

I Introdução

O ato de simular tem por objetivo reproduzir em um modelo a maior gama possível de fenômenos físicos e compreender os mecanismos que o geraram. Com essa idéia em mente resolvemos estudar a laringe reconstruindo-a matematicamente a partir das equações que descrevem os fenômenos físicos que ali ocorrem durante a fonação e de sua geometria.

A pergunta natural seria: por que a laringe? A fala é um dos importantes meios que o ser humano tem para se expressar com o mundo ao seu redor. Apesar dos animais serem capazes de emitir sons para se comunicarem entre si, o ser humano é capaz de produzir um conjunto complexo de sons, ou fonemas que, combinados, geram a gama de palavras para transmissão de idéias a seus semelhantes.

Analisando como a fala é produzida chegamos a uma estrutura chamada laringe cujas dimensões são da ordem de poucos centímetros de comprimento, largura e altura. Visualmente, ela pode ser notada pela protuberância no pescoço do ser humano, sustentada e protegida por um conjunto de cartilagens.

Funcionalmente a fala se inicia com a contração dos pulmões criando uma condição aerodinâmica (diferença de pressão entre o ar nos pulmões e o ar à frente da boca) para gerar um escoamento de ar. Esse escoamento passa pela laringe “transformando-se” em um série de “pulsos” de ar que finalmente atingem a boca e a cavidade nasal. Nessas duas estruturas, o “trem de pulsos” aerodinâmico é modulado pela língua, dentes, lábios, enfim, pela geometria desses estruturas, de forma a produzir o que conhecemos por fala.

Como todos fonemas são gerados nas cavidades bucal e nasal, resta à laringe a “simples” tarefa de gerar o “trem de pulsos” em uma determinada frequência e amplitude para que sons sonoros sejam produzidos. Entretanto essa “simplicidade” tem deixado os pesquisadores muito atarefados. Ocorre que esse “trem de pulsos” (mais conhecido por sinal glotal) possui propriedades importantes de difícil reprodução que estão intimamente ligadas às características anatômicas e fisiológicas da laringe.

Imaginou-se inicialmente que os movimentos das pregas vocais (principal estrutura da laringe) seriam estimulados neurologicamente. Essa idéia foi rapidamente eliminada quando se verificou que a laringe pode vibrar a frequências muito mais rápidas do que os pulsos neurais poderiam estimular os músculos abdutores e adutores da laringe.

Surgiu então a teoria mioelástica-aerodinâmica. Essa teoria definiu que o movimento de vibração das pregas vocais é regido pelas propriedades mecânicas dos tecidos musculares da laringe e pelas forças

aerodinâmicas que se distribuem ao longo da laringe durante a fonação. A ação neural consiste apenas em aproximar ambas as pregas vocais verdadeiras de tal forma que a superfície destas vibrem.

Para analisar os movimentos da laringe, os especialistas recorrem a alguns procedimentos e equipamentos. O mais tradicional é a laringoscopia que consiste na introdução de um pequeno espelho no fundo da boca e próximo a epiglote através do qual se pode examinar a laringe. Uma evolução desse equipamento é o fibroscópio (rígido ou flexível) que é basicamente uma fibra óptica introduzida pela boca ou nariz de forma que imagens da laringe durante a fonação sejam capturadas. Adicionalmente a luz estroboscópica é empregada para que as ondas mecânicas que se propagam sobre a superfície das pregas vocais sejam melhor examinadas.

Outro método de avaliar a laringe durante a fonação é medir a intensidade das ondas propagadas através do músculo do pescoço. Sensores piezoelétricos são colocados sob a pele e transformam as variações de movimento dessa superfície em sinais elétricos. Entretanto, vibrações muito rápidas e/ou de pequena amplitude podem ser mascaradas pois os músculos do pescoço acabam atenuando tais sinais.

Uma abordagem alternativa é empregar imagens de ressonância magnética (IRM). Similarmente ao emprego de sensores piezoelétricos, tal abordagem não causa transtornos ao paciente e permite que o mesmo vocalize normalmente, diferentemente de quando laringoscópios e fibroscópios são usados. As imagens de IRM permitem que se visualize a laringe em diversos planos. Infelizmente essa técnica não é útil para capturar os movimentos das pregas vocais, pois cada imagem exige um tempo de exposição que é incompatível com o período de vibração da superfície da laringe.

O uso da voz para analisar as condições da laringe tem também sido empregado como uma forma não-invasiva de diagnóstico. Medidas acústicas (Rosa, 1998) são obtidas a partir do sinal de voz para quantificar a extensão do dano causado por doença nas pregas vocais. Perturbações em frequência e em amplitude (*jitter* e *shimmer*), relação entre componentes harmônicas e não-harmônicas e quantidade de ruído no espectro do sinal de voz são formas de avaliar se a laringe está vibrando adequadamente ou não.

Para tentar compreender melhor o funcionamento da laringe, alguns modelos matemáticos foram construídos. O mais significativo é o modelo de duas massas de Ishizaka e Flanagan (1972) no qual ambas as pregas vocais são convertidas em equivalentes mecânicos como massas, molas e amortecedores. Com simplicidade e eficiência, o sinal glotal e a voz foram sintetizados, permitindo um estudo mais objetivo de como os tecidos musculares da laringe e o escoamento de ar interagem durante a fonação. Refinamentos posteriores mostraram que os sinais sintetizados eram perceptualmente compatíveis com a voz real.

O uso de modelos matemáticos permite que avaliemos quais os fatores físicos afetam a vibração das pregas vocais, pois adota-se uma representação realística da laringe incluindo suas características anatômicas e fisiológicas. Assim, quando adotamos tal representação, podemos avaliar como uma determinada doença afeta a formação das ondas mecânicas e como isso se reflete no sinal glotal e conseqüentemente no sinal de voz. É interessante lembrar que esses modelos também permitem que determinemos quais as condições fisiológicas (pressão pulmonar, viscoelasticidade dos tecidos, geometria da glote) são necessárias para que os movimentos das pregas vocais tornem-se auto-sustentados, ou seja, que a troca de energia entre o escoamento de ar e os

músculos seja suficiente para manter a formação das ondas mecânicas na superfície das pregas vocais verdadeiras.

Considerando a importância da laringe como um dos agentes fundamentais na fala, desenvolvemos um modelo matemático tridimensional para representar a laringe. Diferentemente dos modelos que seguem a idéia de Ishizaka e Flanagan (1972), reconstruímos geometricamente a laringe humana, definimos as características viscoelásticas e equações dinâmicas dos seus tecidos musculares, e usamos as equações de Navier-Stokes para descrever o escoamento e simular os movimentos da laringe. Em suma, juntamos diversos “blocos” bem fundamentados da anatomia, fisiologia, física e matemática para representar com o maior grau de precisão a dinâmica da laringe durante a fonação. Infelizmente, percebemos durante o desenvolvimento da pesquisa que cada um desses “blocos” era um problema que a ciência ainda estava estudando.

O escoamento foi descrito através das equações de Navier-Stokes, cuja solução para geometrias genéricas somente é possível através de métodos numéricos. Mesmo quando empregamos tais métodos, essas equações são “diabólicas”, pois o escoamento nas condições de fonação pode produzir elevado número de Reynolds, algo que dificulta sobremaneira a convergência dos métodos iterativos. Sem mencionar o fato de que a não-linearidade associada à convecção do fluido exigiu alguns cuidados para estabilização da solução. Finalmente, a condição de contorno de saída exigiu uma análise cuidadosa para que pudéssemos obter soluções fisiologicamente plausíveis, uma vez que a zona de recirculação de ar após a constrição glotal era grande por causa das características físicas do fluido.

A descrição matemática dos músculos da laringe também exigiu um esforço considerável. Usamos uma descrição ortotrópica linear para descrever as propriedades viscoelásticas do tecido, pois encontramos um número escasso de trabalhos sobre as características mecânicas dos tecidos da laringe. Fundamentalmente partimos de alguns valores de constantes viscoelásticas conhecidos e estimamos os demais com base em análises teóricas fornecidas em alguns trabalhos. Variando sistematicamente esse conjunto de constantes, testamos a influência dos mesmos na vibração das pregas vocais.

Outra dificuldade que enfrentamos foi representar a colisão entre as pregas vocais. Novamente, esse é mais um dos problemas físicos ainda não totalmente resolvidos. Apesar da descrição matemática do fenômeno (desconsiderando a fricção entre as superfícies colididas) ser bastante simples, sua solução numérica exigiu algumas operações sofisticadas para torná-la o mais robusta possível (dentro das limitações deste trabalho).

Para resolver numericamente as equações do problema, empregamos fundamentalmente o método dos elementos finitos, pois esse era facilmente aplicado ao variacional do músculo e às equações de Navier-Stokes. Isso permitiu uma padronização nos algoritmos computacionais. Além disso, o método é aplicado a malhas não-estruturadas favorecendo a discretização espacial tanto do músculo quanto do escoamento na laringe.

A geração de malha também tornou-se um problema. Mais precisamente a adaptação da malha do escoamento pois os movimentos da malha dos tecidos da laringe é implícita à sua descrição matemática. A maior dificuldade foi reorganizar os elementos dentro da laringe quando as duas pregas vocais se aproximavam muito ou colidiam. Dessa forma, fomos obrigados a empregar uma abordagem híbrida de

adaptação de malha: em situações ideais, movíamos a malha supondo que o próprio espaço interno da laringe era um material elástico deformável (aplicando assim o próprio método dos elementos finitos para calcular os deslocamentos nodais); nas situações mais complexas (quando a abordagem anterior falhava) ajustávamos a malha para aproximar ao máximo a geometria da superfície da laringe. Claro que esta última técnica fez com que a malha de escoamento não seguisse exatamente o músculo mas os resultados obtidos (sinal glotal e movimentação da laringe, entre outros) não diferiam significativamente daqueles provenientes de laringes reais.

Computacionalmente o modelo da laringe exigiu grandes quantidades de memória, pois tanto o escoamento quanto o músculo exigiam a solução de sistemas de equação lineares com um número de incógnitas superior a 10.000. Como os sistemas matriciais eram esparsos, fomos obrigados a estudar técnicas de armazenamento e de fatoração LU de alta performance para que o tempo de simulação não fosse proibitivo. Isso resultou no desenvolvimento de algoritmos e estruturas de dados específicas para problemas de grande escala e na adaptação da técnica de fatoração LU de matrizes esparsas SuperLU (Demmel et al., 1999) que foi crucial para esta pesquisa.

Considerando a diversidade de temas envolvidos nesta pesquisa, procuramos descrever ao máximo cada aspecto da solução do problema, as dificuldades que encontramos e os métodos usados para resolvê-los. Primeiramente apresentamos uma descrição do trato vocal, focalizando especificamente a laringe e sua composição. A teoria mioelástica-aerodinâmica é posteriormente apresentada juntamente com os modelos biomecânicos e matemáticos encontrados na literatura.

Na seqüência, apresentamos o equacionamento do escoamento e da laringe, e uma breve descrição do método dos elementos finitos. A discretização dessas equações também é mostrada em detalhes. Como o escoamento foi um dos principais problemas encontrados, procuramos descrever detalhadamente todos os passos que tomamos durante a pesquisa.

Após a descrição matemática do problema, apresentamos os resultados obtidos com a simulação da laringe. Primeiramente apresentamos o comportamento do escoamento para os principais perfis geométricos da glote (facilitando a comparação com outros trabalhos) e, em seguida, a dinâmica da laringe e condições de vibração auto-sustentada das pregas vocais. Essa separação foi realizada para evitar repetições desnecessárias de informações sobre o comportamento do escoamento entre os parágrafos de descrição da dinâmica dos músculos da laringe. Os resultados foram apresentados de forma análoga a encontrada na literatura para facilitar a comparação entre os estudos.

Finalmente, apresentamos algumas especulações sobre a dinâmica de laringes acometidas por doenças específicas. Essas foram escolhidas pela facilidade de adaptação da geometria e característica viscoelástica do nosso modelo de laringe. Comentários sobre outras condições patológicas da laringe que não foram simuladas (por não dispormos de recursos computacionais em maior escala) foram feitos a partir de extrapolações dos resultados encontrados para as doenças simuladas e para os estudos dos efeitos das características viscoelásticas na vibração da superfície das pregas vocais.

Apesar da extensão deste trabalho, procuramos detalhar ao máximo todos os aspectos envolvidos na pesquisa para facilitar a reprodução das simulações. Além disso, a descrição dos diversos métodos matemáticos que tentamos aplicar e que não surtiram o efeito desejado permite que outros pesquisadores não precisem gastar esforços desnecessariamente ou encontrem as falhas que não permitiram que nós os usássemos.

2 Aparelho Fonador e Modelos da Laringe

As estruturas responsáveis pela produção da fala são pulmões e traquéia (atuando como geradores de energia para o sistema fonador), laringe (um sistema complexo de músculos responsável pela geração de um sinal pulsátil quasi-periódico em fonemas sonoros) e cavidade supraglotal (um sistema de ressonância cujo formato é intimamente relacionado com o fonema produzido). Todas essas estruturas operam como uma unidade em que variações (aumento de pressão dos pulmões ou abertura do palato mole para acoplamento das vias nasais) em qualquer uma delas influencia o sinal de voz gerado. Entretanto, para compreendermos melhor as atividades fisiológicas do sistema fonador, tais estruturas serão agrupados em três grandes classes baseados nas suas características dinâmicas. Neste capítulo, a anatomia e fisiologia do aparelho fonador serão apresentadas com ênfase especial na laringe.

Os principais modelos da laringe serão descritos neste capítulo. O intuito é traçar um comparativo das idéias empregadas para defini-los, particularmente nas dificuldades de obter a distribuição das pressões ao longo do tecido muscular e de caracterizar as propriedades viscoelásticas da laringe.

2.1 Os Pulmões

Sua atividade principal é criar condições aerodinâmicas para absorver (inspiração) e expulsar (expiração) ar de/para a atmosfera através de movimentos musculares. É claro que adicionalmente a presença dos alvéolos permite que trocas gasosas (de oxigênio e gás carbônico) sejam realizadas. Tanto inspiração quanto a expiração são realizadas a partir de movimentos de contração e expansão das paredes dos pulmões que por sua vez são realizados pela movimentação da caixa torácica, em particular pelo diafragma (membrana que separa os sistemas respiratório e cardíaco na região abdominal) e pelos músculos intercostais. Na produção de fala, os movimentos expiratórios do pulmão são os responsáveis pela geração de energia sob a forma de um escoamento de ar com determinada vazão. Essa vazão de ar é definida pela diferença de pressão nos pulmões e a pressão atmosférica (pressão fora da boca) e também pela geometria do trato fonador.

Note que os músculos na cavidade pulmonar têm ação ativa durante o processo inspiratório. Já na expiração, sua ação é passiva pois ela resulta do relaxamento natural desses músculos. Somente em situações específicas como no aumento da vazão de ar para elevação da frequência fundamental do sinal de fala, por exemplo, é que alguns músculos intercostais e abdominais atuam de modo ativo na expiração. O próprio

controle da fonação em uma voz cantada exige que esses músculos sofram algum tipo de excitação “forçada” para que níveis de altura vocal sejam atingidos.

Quantitativamente, a capacidade vital dos pulmões, que é o máximo volume de ar admitido dentro dos pulmões, a partir de uma profunda inspiração até a máxima expiração, em um adulto varia entre 3000 e 5000 cm³. Entretanto, apenas um volume entre 500 e 1000 cm³ de ar são expelidos durante uma fonação normal.

Durante uma fonação normal, a pressão dos pulmões geralmente situa-se entre 5 e 10 cm H₂O (Titze, 1992; Titze et al., 1995), apesar de que variações de prosódia (basicamente refletindo-se sobre variações de frequência fundamental) exijam excursões maiores da pressão pulmonar. Posteriormente, será definido qual a pressão pulmonar mínima (Titze, 1992) para que os movimentos auto-sustentados das pregas vocais ocorram (geralmente próximo a 3 cm H₂O).

2.2 Laringe

A função primária da laringe é impedir que corpos estranhos atinjam os pulmões (função principalmente realizada pela epiglote) e auxiliar na deglutição através de um movimento vertical de toda a estrutura laríngea exercido pelos músculos extrínsecos (músculos que conectam-na a outras partes do corpo). A ação de produzir o sinal glotal é uma função secundária da laringe. Isso ocorre por causa da morfologia específica de alguns de seus músculos, particularmente das pregas vocais verdadeiras. Simplificadamente podemos dizer que a laringe é uma válvula de controle de vazão de ar.

Figura 2.1 - Posição da laringe na garganta

A laringe é constituída de um conjunto de músculos intrínsecos e extrínsecos que movimentam ou sustentam as cartilagens na garganta (Figura 2.1). Os músculos extrínsecos movimentam a laringe como um todo, dando sustentação à mesma, enquanto que os músculos intrínsecos são responsáveis por movimentos que existem dentro da própria laringe. A fonação é particularmente dependente da ação desses músculos intrínsecos. Eles são responsáveis pela abertura (abdução) e fechamento (adução) do espaço glotal, atividades que efetivamente controlam a vibração das pregas vocais.

Figura 2.2 - Cartilagens da laringe

Cabe adiantar que a vibração das pregas vocais não se dá pela ação ativa dos músculos de abrir e fechar, seqüencialmente, a glote (espaço entre as pregas vocais verdadeiras). A vibração é uma atividade influenciada pelo escoamento de ar na constrição glotal e pela diferença histológica das pregas vocais conforme descrição posterior.

Inicialmente trataremos das cartilagens que compõem a laringe. A descrição que segue objetiva caracterizar a interação destas com os músculos intrínsecos e os seus efeitos na geração do sinal glotal. As cartilagens da laringe (em um total de nove) são a tireóide, a cricóide, a epiglote, as (2) aritenóides, as (2) corniculadas e as (2) cuneiformes. Essas cartilagens podem ser vistas na Figura 2.2. As cartilagens corniculadas e cuneiformes têm pouca importância para o processo de fonação e portanto não serão aqui descritas.

A cartilagem tireóide é composta por duas placas (lâminas) fundidas na posição anterior em ângulo reto (as vezes um pouco maior ou menor do que noventa graus) e abertas posteriormente, adquirindo assim um formato em “V”. Note que nas bordas posteriores de cada lâmina existem prolongamentos (superior e inferior) que são denominados cornos. Os cornos superiores ligam-se às pontas dos cornos do osso hióide enquanto que os cornos inferiores conectam-se às faces da cartilagem cricóide.

Uma das funções da cartilagem tireóide é proteger a estrutura da laringe. É essa a cartilagem, cuja proeminência conhecida por “pomo de Adão” corresponde a uma elevação onde as lâminas se fundem, que é palpável e vista no ser humano.

Possuindo a forma de um anel de sinete, a cartilagem cricóide serve de plataforma para a tireóide. Ela possui uma placa posterior (lâmina) e uma parte anterior estreita (arco). Em cada lado da borda superior da lâmina há uma faceta para junção com uma das cartilagens aritenóides. Sua borda inferior define o término da faringe e laringe e o início do esôfago e traquéia.

Já a epiglote tem a função de evitar que corpos estranhos cheguem aos pulmões. Ela fecha a laringe durante a deglutição e a abre na fonação. Ela está presa ao osso hióide (localiza-se atrás da base da língua e a frente da abertura superior da laringe) e tem a forma de folha.

As cartilagens aritenóides estão apoiadas sobre a cartilagem cricóide. Esse acoplamento permite que elas tenham dois movimentos importantes: o “*rocking*”, que corresponde a uma rotação (em torno do próprio eixo ou sobre a própria junção), e o “*gliding*”, que é um pequeno deslizamento (translação) dessas cartilagens sobre a cricóide. Possui um formato piramidal e seu ápice dá apoio às cartilagens corniculadas. Sobre duas de suas faces definem-se os processos ditos vocal e muscular. O primeiro corresponde à face em cada uma das cartilagens de onde o músculo vocal parte enquanto que o último à face onde os demais músculos se conectam às aritenóides. Essa diferença de posição de contato muscular influencia na direção de rotação dessas cartilagens e, por conseguinte, na ação de abertura e fechamento glotal.

2.3 Músculos da laringe

Como já mencionado, os músculos intrínsecos são aqueles que estão ligados ao processo de fala. Todos são inervados pelo nervo laríngeo recorrente, com exceção do cricotireóideo, que é inervado pelo ramo laríngeo externo do nervo laríngeo superior. A Figura 2.3 mostra os músculos intrínsecos.

Figura 2.3 - Visão dos músculos da laringe e suas conexões com cartilagens.

Os músculos cricotireóideos têm origem na superfície lateral da cartilagem cricóide e se inserem na margem inferior da lâmina da cartilagem tireóide. Isso faz com que eles desloquem a cartilagem tireóide para baixo e/ou a cartilagem cricóide para cima. Dessa forma, as pregas vocais são tensionadas e a glote é fechada. Note que o movimento dessas cartilagens é realizado sobre a junção em que ambas se conectam.

Os músculos cricoaritenóideos posteriores ligam a porção posterior da lâmina da cricóide ao processo muscular das cartilagens aritenóides e são os únicos músculos abdutores das pregas vocais. Suas posições permitem que eles desloquem o processo muscular para baixo e girem lateralmente o processo vocal, aumentando o espaço glotal.

Já os músculos cricoaritenóides laterais partem do arco da cricóide e atingem o processo muscular das aritenóides. A ação de ambos desloca o processo muscular na direção anterior e gira o processo vocal (ambos nas aritenóides). Assim, as pregas vocais são estiradas e o espaço glotal é reduzido.

Originando-se na superfície interna da cartilagem tireóide (próximo à junção de suas lâminas), os músculos tireoaritenóideos ligam-se na superfície ântero-lateral e no processo muscular das cartilagens aritenóides. Existem algumas fibras que também conectam a tireóide (partindo da junção das lâminas) às aritenóides (nos seus processos vocais ao invés dos musculares) que alguns autores (Snell, 1984; Lieberman, 1967) tratam como sendo parte dos músculos tireoaritenóideos e, portanto, esses seriam também conhecidos por músculos vocais que fazem parte das pregas vocais verdadeiras. Outros autores (Gardner et al., 1978) diferenciam essas fibras dos músculos tireoaritenóideos e, assim, definir-se-iam músculos intrínsecos adicionais chamados músculos vocais. De qualquer forma, as fibras definidas nesse parágrafo são parte constitutiva das pregas vocais. Elas respondem pela variação de tensão nas pregas vocais verdadeiras e, assim, na variação de frequência do sinal glotal. Maiores comentários sobre a influência da tensão aplicada direta ou indiretamente sobre esse(s) músculo(s) serão apresentados posteriormente.

Dois outros músculos interligam as cartilagens aritenóides. Os músculos aritenóideos transversos (ou interaritenóideo) conectam as superfícies mediais das duas cartilagens e sua ação aproxima ambas as cartilagens e produz a adução das pregas vocais verdadeiras. Já os músculos aritenóideos oblíquos partem do processo muscular das cartilagens aritenóides e atingem o ápice das cartilagens aritenóides opostas. Sua ação (adiccionada à ação do músculo ariepiglótico) controla o fechamento da glote, particularmente quando o ser humano está deglutindo.

Figura 2.4 - Visão dos músculos e cartilagens dentro da laringe.

A Figura 2.5 mostra um esquema simplificado (no plano horizontal) da ação desses músculos sobre as cartilagens e seu efeito na adução e abdução das pregas vocais verdadeiras. As flechas em A mostram os movimentos de rotação (“*rocking*”) e deslizamento (“*gliding*”) que as aritenóides realizam. Note em C a posição de inserção dos músculos adutores da laringe.

O primeiro estágio da adução é realizado pelos músculos cricoaritenóideos laterais que giram as cartilagens aritenóides e aduzem as pregas vocais. Por contração, os músculos aritenóideos transversos aproximam as cartilagens aritenóides. Finalmente, com o espaço glotal reduzido, a tensão dos músculos das pregas vocais é controlada por ação dos músculos cricótireóideos.

Figura 2.5 - Ação de alguns músculos intrínsecos na adução e abdução da glote.

É curioso notar que, à exceção do músculo cricoaritenóideo posterior, os demais músculos intrínsecos têm ação adutora. Podemos capturar disso que a fonação é uma atividade que exige um controle bastante preciso do fechamento (ou quase-fechamento) da glote. O estado relaxado dos músculos aumenta o espaço glotal, o que é útil para a atividade respiratória. Para a geração de fonemas vocálicos sustentados, esses músculos adutores são extremamente importantes. Os músculos abdutores cricoaritenóideos posteriores também têm ação importante na fonação, pois a glote não é totalmente fechada. A ação unicamente dos adutores não possibilitaria esse controle fino da área glotal.

Além disso, os músculos intrínsecos são acionados a partir do nervo recorrente da laringe. Danos causados a esses nervos conduzem a paralisia nos movimentos de fechamento das pregas vocais e incapacidade de fonação.

Em adição aos músculos supracitados, existe uma estrutura conhecida por cone elástico que também é parte integrante das pregas vocais verdadeiras. Ela estende-se do arco da cartilagem cricóide aos processos vocais das cartilagens aritenóides e na junção da cartilagem tireóide. Essa extensão permite sua divisão em: membrana cricotireóide e membrana vocálica. Podemos notar na Figura 2.4. que sua presença “aumenta” o volume das pregas vocais verdadeiras quando os músculos intrínsecos posicionam-se para a ação fonatória. Sua porção superior também é conhecida por ligamento vocal.

2.4 Cavidades da laringe

A laringe pode ser dividida em quatro seções conforme a Figura 2.4: o vestíbulo, que se estende da epiglote até as falsas pregas vocais (também chamadas de pregas vestibulares); os ventrículos laríngenos, que são os espaços entre as falsas pregas e as pregas vocais verdadeiras; a glote, que corresponde ao espaço localizado entre as duas pregas vocais; e a cavidade infraglótica que se estende das pregas vocais verdadeiras até a traquéia. A descrição desses espaços visa dar uma compreensão da geometria da laringe, pois, posteriormente, a mesma será descrita com a finalidade de simular a dinâmica da laringe.

As falsas pregas vocais são duas proeminentes massas com aparência flácida e consistência macia, com superfície maior do que a das pregas vocais verdadeiras. Sua importância no processo de vocalização está na redução da impedância aerodinâmica, acarretando queda de pressão mais tênue a partir da constrição glotal. Note que os músculos que a compõem não têm ação durante a fonação (apesar da similaridade com os músculos intrínsecos anteriormente citados) mas sua relevância está no seu formato geométrico.

Os ventrículos laríngicos são um espaço que geralmente contém ar estagnado quando se considera a fonação. Possui um formato de canoa colocada de lado. Um apêndice de cada um dos ventrículos, também chamado de sáculo, estende-se em direção superior. Algumas glândulas situadas ali secretam líquidos que ajudam na lubrificação das pregas vocais. Entretanto, o ar não chega a esse espaço. Dada a posição em relação as pregas vocais, durante a fonação, alguns vórtices secundários são formados nos ventrículos laríngicos por causa da incompressibilidade do ar.

Glote é o nome dado ao espaço entre as duas pregas vocais. Sua área tem importância relevante no processo de fonação. Note que, durante a fonação o espaço glotal é bastante reduzido, quando comparado com área da traquéia. Assim, a resistência aerodinâmica é aumentada de forma a controlar a vazão de ar na laringe.

Finalmente temos a cavidade infraglotica, que é a primeira resistência aerodinâmica da laringe. Note, particularmente, a variação gradual da geometria da traquéia até as pregas vocais verdadeiras. Adicionalmente, percebemos a presença de uma estrutura muscular chamada cone elástico que se origina na cartilagem cricóide e prolonga-se até o músculo vocal. Esse músculo age como um apoio para o músculo vocal.

2.5 Pregas vocais verdadeiras

As pregas vocais verdadeiras são importantes para o estudo da laringe, pois ondas mecânicas (que geram o sinal glotal) são formadas sobre sua superfície. Tais ondas ocorrem por causa de diferenças orgânicas e mecânicas dos tecidos que compõem essa estrutura.

Basicamente é possível reconhecer que as pregas vocais verdadeiras são compostas por um tecido superficial e um tecido muscular interno. Histologicamente, elas são divididas em epitélio, *lamina propria* e corpo muscular.

O epitélio é formado por células escamosas estratificadas. Essas células possuem uma maior adesão com as suas vizinhas pela presença de um componente orgânico (desmossoma). Adicionalmente, podemos verificar que na proximidade da superfície, a quantidade de desmossoma é diretamente proporcional à profundidade em que estão os agregados celulares do epitélio, tornando-se praticamente nula na superfície do epitélio. Isso permite que as células mortas sejam facilmente eliminadas (desfolheação) e substituídas. Devemos lembrar que por causa da colisão de corpos que ocorre durante a fonação, as células do epitélio exigem uma reposição maior. Assim, a ligação intracelular deve ser relaxada. Quanto à espessura do epitélio, ela é bastante reduzida quando comparada com as demais subdivisões histológicas.

Figura 2.6 - Divisão histológica das pregas vocais verdadeiras.

A *lamina propria* pode ser subdividida em três camadas: superficial, intermediária e profunda. Isso ocorre por uma razão: dentro da própria *lamina propria* existem algumas diferenças em termos de fibras (elásticas e colágenas).

A camada superficial (também conhecida por espaço de Reinke) é flácida e “mole”. É essa a camada com maior vibração durante a fonação. Assim, qualquer modificação (como algum traumatismo ou doença) que a torne mais rígida resultará em uma menor vibração da prega vocal e, conseqüentemente, dificuldades na fonação. O aumento de sua espessura ou uma maior flacidez do tecido também gera problemas nos movimentos das pregas vocais (como no edema de Reinke, por exemplo).

A camada intermediária é constituída, principalmente, de fibras elásticas enquanto que a camada profunda, de fibras colágenas. Histologicamente, a diferença entre as camadas superficial e intermediária é bem maior do que a diferença entre as camadas intermediária e profunda. Outra característica importante é que quanto mais nos aproximamos do músculo vocal, o número de fibras colágenas aumenta enquanto que o de fibras elásticas diminui. Assim, a rigidez das camadas intermediária, profunda e músculo vocal aumenta com a profundidade.

Cabe justificar esse aumento da rigidez com a profundidade. As fibras elásticas agrupam-se em linha formando redes ou ramificam-se a medida que as percorremos. Tais fibras podem ser esticadas até duas vezes o seu tamanho e retornam ao comprimento original quando da remissão da força externa.

Já as colágenas enrolam-se umas as outras, podendo adquirir o aspecto de uma mola pela torsão. Esse arranjo permite que elas se expandam e rapidamente retornem ao tamanho original. Entretanto, exigem um esforço maior do que as fibras elásticas justamente pela pré-torsão que suas características orgânicas exigem.

Outra característica interessante tanto das fibras elásticas e colágenas da *lamina propria* como das fibras musculares do músculo vocal é que todas têm direções paralelas em relação à superfície das pregas vocais verdadeiras, ou seja, nenhuma fibra é perpendicular à esta superfície. Esse é um dos fatores que curiosamente

facilita o movimento vibratório. Outro arranjo vantajoso para tal movimento é a disposição dos vasos sanguíneos na mucosa e *lamina propria*. Esses vasos entram pelos extremos anterior e posterior das pregas vocais verdadeiras e estendem-se paralelamente à superfície dessas, de modo análogo ao que ocorre com as fibras.

Em termos patológicos, a *lamina propria* (e em particular, a sua camada superficial) é o “lar” de lesões como nódulos e pólipos. Isso ocorre dada a proximidade da superfície das pregas vocais verdadeiras onde exigências mecânicas extremas da vibração das pregas vocais verdadeiras acabam produzindo esses crescimentos orgânicos. Uma das diferenças entre essas duas lesões é que alguns casos de pólipos residem unicamente na *lamina propria* enquanto que os nódulos são respostas naturais a danos mais superficiais das paredes das pregas vocais (particularmente na zona membranosa de assentamento, que é descrita logo abaixo). Adicionalmente, alguns cistos (cistos de retenção) são também encontrados aqui. Isso se deve à presença de alguns orgânulos de secreção existentes. Uma retenção cumulativa dessas secreções, algumas serosas e outras de muco, acarretam na formação desses cistos. Note que essas lesões têm características mecânicas distintas das estruturas onde se localizam pela presença de líquidos, pela concentração de estruturas reconstrutoras ou pelo desarranjo estrutural causado pelo dano físico. Posteriormente, essas modificações na elasticidade da *lamina propria* serão melhor analisados.

Finalmente, temos o músculo vocal (ou conforme alguns autores, os músculos vocal e tireoaritenóideo). Sua constituição é basicamente a mesma dos músculos do esqueleto do corpo humano, sendo longo e cilíndrico. É claro que danos nesses músculo acarretaram na incapacidade de aproximação na redução do espaço glotal e conseqüente incapacidade de fonação. Como já mencionado, esse músculo é responsável por definir o volume das pregas vocais verdadeiras. Aumentando-se sua tensão (por ativação neurológica), as suas fibras se reorganizam, aumentando a densidade fibrilar e reduzindo o volume de massa das pregas vocais. O inverso é intuitivamente claro.

Adicionalmente às divisões das pregas vocais apresentadas acima, existe uma estrutura cujo interesse é clínico. A zona membranosa de assentamento (*basement membrane zone*) é uma área de transição entre o epitélio e a camada superficial da *lamina propria*. Essa estrutura é responsável por manter essas duas camadas presas uma a outra. O conhecimento desta estrutura ainda é incompleto. Entretanto, algumas de suas proteínas e membranas específicas são de interesse em pesquisas de algumas doenças das pregas vocais. Particularmente, foi detectado que essa estrutura tem uma predisposição a danificar-se quando as exigências mecânicas de vibração das pregas vocais verdadeiras é muito grande. Em casos extremos, o epitélio pode desprender-se da camada superficial.

Nódulos e outras lesões benignas das pregas vocais podem originar-se nessa estrutura. Isso ocorre pela sua má-formação. Normalmente, na presença de algum dano nessa estrutura (que é muito próxima à superfície da própria laringe), algumas proteínas são lançadas de tal forma a induzir a sua reconstrução, causando um rearranjo das células (algumas são reposicionadas, outras são geradas). Dependendo das características genéticas das células e extensão do dano, essa zona membranosa permanece desarranjada por um longo tempo (podendo chegar a meses e anos). Isso é uma fonte propícia para o aparecimento de nódulos.

Se agora considerarmos a composição das pregas vocais ao longo de sua superfície, ou seja na direção longitudinal, notaremos que existe pouca variação de espessura e elasticidade. Entretanto, ao nos aproximarmos da comissura anterior e posterior, percebemos algumas diferenças. A porção anterior à camada intermediária aumenta formando uma massa ovalada chamada *flava macula anterior*. Ela é composta de uma pequena rede de fibras elásticas fibroblastos e estroma. Essa estrutura conecta-se, anteriormente, a uma outra massa constituída de fibras colágenas chamada tendão da comissura anterior que por sua vez prende-se à cartilagem tireóide. Note assim que a elasticidade do tecido laríngeo diminui à medida que nos aproximamos da região anterior da laringe.

Na porção posterior também existe uma pequena massa oval, chamada de *flava macula posterior*. Essa massa prende-se ao processo vocal da cartilagem aritenóide. Da mesma forma que a *flava macula anterior*, a elasticidade do tecido laríngeo diminui com a proximidade da cartilagem de suporte.

Essa pequena variação nas características mecânicas ao longo das pregas vocais verdadeiras (com gradiente elevado apenas nos extremos) é importante para a modelagem matemática desta estrutura, tornando-a mais simples como veremos posteriormente.

2.6 Falsas pregas vocais

Também chamadas de pregas vestibulares, as falsas pregas vocais têm uma constituição “mole” e flácida muito semelhante à camada superficial da *lamina propria* e contém poucas fibras musculares quando comparadas com as pregas vocais verdadeiras. A ação exercida pelo músculo vocal nas pregas vocais verdadeiras não ocorre aqui. Curiosamente a geometria divergente dessas estruturas têm importante implicação no desenvolvimento do escoamento de ar na laringe.

Alguns estudos indicam que a manutenção da voz sussurada (quando as pregas vocais verdadeiras não produziram a mínima área glotal para a fonação normal) exige (Pereira, 1987) a aproximação destas estruturas reduzindo o nível de turbulência produzido pelo escoamento de ar. Alguns modelos matemáticos que, por eliminarem essa estrutura da análise dinâmica da laringe, geralmente produzem pressão pós-glotal incompatível com os valores fisiológicos.

Posteriormente serão tecidos maiores comentários sobre qual é a função das falsas pregas vocais no processo fonatório.

2.7 Características Viscoelásticas da Laringe

Hirano (1975) mostrou que os tecidos da laringe (particularmente das pregas vocais) podem ser subdivididos segundo suas propriedades mecânicas em cobertura, ligamento e corpo. A Figura 2.6 mostra um corte transversal de uma das pregas vocais onde podemos ver essa subdivisão.

A cobertura é composta pelo epitélio e pela camada superficial da *lamina propria*. O ligamento constitui-se das camadas intermediária e profunda da *lamina propria*, enquanto que, o corpo é precisamente o músculo vocal.

Os parâmetros viscoelásticos definem a resposta estática e dinâmica do músculo a um esforço externo aplicado sobre a sua superfície. Seus valores afetam diretamente os modos e as frequência de vibração das pregas vocais.

Hirano (1975) sugeriu que a razão entre a rigidez dos dois tecidos em sua teoria corpo-cobertura seja 10:3 para o corpo e a cobertura, respectivamente. Já Titze e Talkin (1979) estenderam essa razão entre os três tecidos (cobertura, ligamento e corpo) para 10:4:2. Ou seja, considerando uma referência qualquer, o corpo seria 10 vezes mais rígido enquanto o ligamento e a cobertura seriam 4 e 2 vezes mais rígido, respectivamente. O autor ainda determinou as curvas de tensão-deformação na direção longitudinal (no caso, o módulo de Young) para os três tecidos. Seus resultados indicaram que a cobertura é mais rígida do que o ligamento e ambas mais rígidas do que o corpo muscular. Já Titze e Talkin (1979) consideraram que a cobertura deve ter a constante de cisalhamento longitudinal menor do que a do ligamento.

Para determinar a relação entre tensão e deformação, Perlman et al. (1984) retirou a laringe de cachorros e empregou o seguinte procedimento para determinar a curva: aplicou diversas tensões longitudinais nas pregas vocais (os autores mantiveram a prega vocal presa às cartilagens tireóide e aritenóide) e mediu a deformação obtida. Um grupo de laringes era retirada e imediatamente analisada enquanto outro grupo era guardada para posterior análise. Isso foi feito para verificar os efeitos da ressecção sobre a elasticidade dos tecidos da laringe.

Os autores chegaram a diversos valores dos módulos de Young longitudinais para as medidas realizadas. Esses foram iguais a 347 ± 156 kdina/cm². Examinando os dados, notamos que a quantidade de amostras usadas foi pequena (em média, 7 laringes para cada valor produzido). Apesar dos valores terem desvio-padrão relativamente grande, isto se deve particularmente à linearização imposta à curva tensão-deformação. Os próprios autores afirmaram que a curva é não-linear, pois a medida que a deformação aumentava, mais resistente o músculo ficava. Esse é um fenômeno muito comum em tecidos humanos e que ocorre também na laringe.

Posteriormente, Alipour-Haghighi e Titze (1991) realizaram novas medições das curvas de tensão-deformação em laringes de cães. Segundo os autores, o método empregado por Perlman et al. (1984) usou uma referência fisiologicamente acima do comprimento operacional das pregas vocais (que posteriormente foi corrigido em outro trabalho dos autores conforme mencionado em Alipour-Haghighi e Titze (1991)).

Empregando uma técnica mais acurada de forma a evitar histerese do músculo devido a um número excessivo de ensaios, os autores chegaram a uma curva não-linear para tensão-deformação da cobertura e corpo muscular da laringe canina (os cães não possuem ligamento). Linearizando tal curva os autores obtiveram como módulo de Young longitudinal 207 ± 24 kdina/cm² para o corpo muscular e 419 ± 71 kdina/cm² para a cobertura. A explicação dos autores para esses valores - que fogem ao consenso de que a

cobertura é mais “mole” do que o corpo - é de que a falta do ligamento na laringe dos cães (que absorve grandemente o impacto das tensões longitudinais por estar preso mais firmemente ao corpo muscular do ser humano, enquanto a cobertura fica mais “solta” para vibrar) faz com que naturalmente a cobertura seja mais rígida. Isso justificaria o fato da laringe de cães não sustentarem altas frequências de vibração.

Considerando que as propriedades dos tecidos orgânicos é viscoelástica, Alipour-Haghighi e Titze (1985) usaram o modelo viscoelástico de Maxwell (Haddad, 1995) para aproximar o módulo de Young longitudinal através de dados obtidos de tensão-deformação. Os resultados certamente aproximam muito bem os dados experimentais mas foram obtidos apenas para o corpo muscular e na direção longitudinal.

Chan e Titze (1999, 2000) empregaram modelos viscoelásticos mais sofisticados do que o modelo de Maxwell, que levam em conta o espectro de frequências de vibração e o arranjo molecular dos tecidos da laringe. Algumas conclusões dos autores são interessantes: segundo seus resultados, o número de sítios de interações moleculares na mucosa dos homens é quatro vezes maior do que nas mulheres. Adicionalmente a *lamina propria* do homens possuía uma concentração maior de colágenos e outras moléculas do que a das mulheres. Isso justificaria então o fato de que a elasticidade e viscosidade das mucosa dos homens é devida à concentração maior de colágenos na *lamina propria*. Novamente as análises dos autores privilegia uma direção (longitudinal).

Para determinar o módulo de Young transversal, Tran et al. (1993) desenvolveram um dispositivo para medir a curva tensão-deformação diretamente na laringe, sem a necessidade de intervenção cirúrgica. Seu método consistiu em estimular o nervo esquerdo recorrente usando uma pequena corrente elétrica de forma a aduzir a prega vocal esquerda, e medir as deformações do tecido quando pequenas tensões transversais são aplicadas. Isso permitiu que os autores medissem o módulo de Young transversal. Os resultados obtidos pelos autores para as situações de descanso, alta e baixa estimulação (proporcionais a corrente aplicada) foram 126 ± 76 kdina/cm², 215 ± 11 kdina/cm² e 191 ± 111 kdina/cm². A avaliação estatística da reprodutibilidade do experimento (e dos resultados) mostrou que esses valores são bastante satisfatórios. A vantagem é que a laringe opera nas condições “normais” ao invés de ser excitada artificialmente, pois sua movimentação é feita indiretamente por ativação elétrica e não distensão direta das cartilagens aritenóides.

Do ponto de vista teórico, Titze e Strong (1975) forneceram as magnitudes que algumas constantes elásticas teriam, considerando os modos e frequências de vibração dos tecidos que formam as pregas vocais. Segundo eles, tanto o módulo de Young quanto a constante de cisalhamento, transversais, deviam ter magnitude de aproximadamente 100 kdina/cm². Particularmente, o módulo de Young transversal é compatível com as medições feitas por Tran et al. (1993).

Já a constante de cisalhamento longitudinal situou-se no intervalo de 100×10^3 a 10×10^6 dina/cm², com valor médio de 1 Mdina/cm². Esses valores, particularmente altos, afetam diretamente a propagação da onda mecânica na superfície das pregas vocais.

Entretanto, no trabalho de Titze (1976) foram usadas constantes de cisalhamento transversal e longitudinal iguais a 25 kdina/cm² e 100 kdina/cm² para realizar análises de propagação e atenuação de ondas mecânicas. Note, particularmente, que a constante de cisalhamento longitudinal situa-se no limite inferior do

intervalo definido por Titze e Strong (1975). Segundo os autores, vozes com alta frequência fundamental exigiriam que essa constante seja muito maior do que a constante de cisalhamento transversal.

Em outro estudo teórico, Titze e Talkin (1979) empregaram valores ainda mais baixos para essas constantes de cisalhamento. Considerando um valor de referência $\mu_0=20$ kdina/cm², os autores definiram as constantes de cisalhamento transversal para a cobertura, ligamento e corpo muscular com os valores $0,2 \mu_0$, $0,4 \mu_0$ e $1,0 \mu_0$, respectivamente. Já as constantes de cisalhamento longitudinal da cobertura, ligamento e corpo muscular receberam os valores $0,25 \mu_M$, $0,5 \mu_M$ e $1,0 \mu_M$, respectivamente, onde $\mu_M=100$ kdina/cm². Os autores chegaram a esses valores a partir dos estudos de elasticidade dos tecidos de Hirano (1975), já mencionados anteriormente. Também empregaram análise modal para determinar quais os valores produziram oscilação dos tecidos em uma determinada frequência.

Considerando os modos e frequências de vibração, Berry e Titze (1996) utilizaram valores em torno de 100 kdina/cm² para o módulo de Young transversal e a constante de cisalhamento longitudinal. Então, eles associaram os modos e as frequências de vibração com os valores dessas propriedades mecânicas, variando-as entre 10 kdina/cm² e 1,0 Mdina/cm².

Os autores concluíram que valores grandes do módulo de Young transversal (maior resistência) produzem um maior espaçamento entre as baixas autofrequências de vibração. Eles observaram também que a vibração das pregas vocais ocorre pela superposição de dois modos dominantes, um dos quais produz o componente de diferença de fase vertical. Isso seria essencial para gerar a oscilação auto-sustentada da vibração das pregas vocais. Além disso, aparentemente as autofrequências desses dois modos de vibração se aproximariam durante a fonação, facilitando novamente a oscilação.

Os trabalhos de Berry et al. (1994) e Alipour-Haghighi et al. (2000) apresentam valores mais precisos para as constantes elásticas dos tecidos musculares. No primeiro trabalho, o módulo de Young transversal da cobertura, ligamento e corpo eram iguais a 20 kdina/cm², 20 kdina/cm² e 40 kdina/cm², respectivamente, pouco diferindo daqueles usados por Titze e Talkin (1979). Já as constantes de cisalhamento longitudinal para esses tecidos eram iguais a 100 kdina/cm², 400 kdina/cm² e 120 kdina/cm². A magnitude dessas constantes é a mesma da empregada em Titze e Talkin (1979) e está no intervalo fornecido por Titze e Strong (1975) nas análises de Berry e Titze (1996). Já no segundo trabalho, ao invés de fornecer o módulo de Young transversal, os autores forneceram a constante de cisalhamento transversal (5,3 kdina/cm², 8,7 kdina/cm² e 10,5 kdina/cm² para a cobertura, ligamento e músculo). A magnitude é condizente com a do módulo de Young de Berry et al. (1994), pois, matematicamente existe uma relação entre essas propriedades mecânicas em meios isotrópicos (os autores usaram materiais transversalmente isotrópicos).

O que chama a atenção é a constante de cisalhamento do ligamento. Aparentemente a justificativa é a ligação entre esse tecido e o corpo, permitindo que a cobertura seja mais “solta”. Titze e Talkin (1979) também comentaram essa característica e atribuíram tal característica à distribuição de fibras colágenas e elásticas entre a camada profunda da *lamina propria* e o músculo vocal. Alipour-Haghighi e Titze (1991) em seu estudo da laringe caninas justificaram o fato da cobertura nos cães ser mais rígida do que o corpo muscular

pela falta do ligamento. Assim, o ligamento teria naturalmente uma rigidez longitudinal maior por estar preso ao corpo, nos seres humanos, liberando a cobertura para vibrar.

Note que o ligamento nesses dois trabalhos possui constante de cisalhamento quatro vezes maior do que a do corpo enquanto as medidas feitas em cães produziram uma cobertura (admitindo equivalência nas ligações entre a cobertura e o corpo muscular dos cães com a ligação entre o ligamento e o corpo muscular nos seres humanos) com duas vezes mais resistência ao cisalhamento longitudinal.

É interessante avaliar como a constante de viscosidade variou ao longo dos trabalhos. Um dos primeiros trabalhos que definiu esse valor foi Titze (1976). Para sua análise de propagação e atenuação, eles usaram 150 Poise pois basearam-se em estudos de viscoelasticidade de outros músculos do corpo humano. Entretanto, em Titze e Talkin (1979) constante de viscosidade entre 6 a 10 Poise foram usadas. Sua justificativa é de que os tecidos recebem mais irrigação do que outras partes do corpo (de onde estimou-se, originalmente, o valor de 150 Poise). Eles mencionam que tais valores são “ótimos” para uma fonação “satisfatória”. Muitas das considerações aparentam ser especulações sobre as propriedades viscosas dos tecidos da laringe (em alguns momentos, eles justificam sua definição admitindo que a camada superficial da *lamina propria* teria comportamento de líquidos). Mesmo assim, Titze e Talkin (1979) comentam sobre a necessidade de mais estudos sobre essa propriedade mecânica.

Aparentemente esses valores de viscosidade decaem ao longo do tempo. Berry et al. (1994), que realizaram uma análise de componentes principais do sistema acoplado ar-músculo, usaram uma constante de viscosidade para todos os tecidos igual a 6 Poise. Já em Alipour-Haghighi et al. (2000) a constante de viscosidade para a cobertura, ligamento e corpo é 3 Poise, 5 Poise e 6 Poise, respectivamente. Aparentemente os autores “ajustaram” esses valores para obter os resultados desejados.

2.8 Teoria Mioelástica-aerodinâmica da Laringe

Do ponto de vista da fonação, os músculos intrínsecos e o sistema neurológico da laringe têm por função básica reduzir o espaço glotal, criando uma área mínima necessária para excitar a vibração das paredes das pregas vocais verdadeiras. Conforme mencionado, a laringe por si é incapaz de efetuar o movimento de abrir e fechar da glote na taxa exigida para a produção da fala. A proposta de que sinais elétricos atuariam sobre os músculos adutores e abdutores da laringe, abrindo-a e fechando-a a uma taxa próxima à da frequência fundamental (Laget, 1953) de tal forma a produzir o sinal glotal quasi-periódico é inadequada: isso particularmente ocorre porque alguns músculos da laringe têm tempo de resposta lenta e dessa forma sinais glotais de frequência muito alta seriam impossíveis de serem obtidos. O segundo problema com essa proposta é que os movimentos mecânicos como “*rocking*” e “*sliding*”, que são desenvolvidos pelas cartilagens aritenóides sobre a cartilagem cricóide, também imporiam restrições à frequência do sinal glotal. A terceira dificuldade que essa abordagem neurológica trás, é que ela é incapaz de explicar os efeitos de acoplamento entre as cavidades glotal e supraglotal. É sabido que as configurações geométricas da boca, por exemplo, afetam a pressão de saída da laringe e, assim, alteram em alguns casos significativamente o sinal glotal. Outras características dinâmicas da laringe também não são explicadas pela teoria neurológica da fonação (que não

serão apresentadas aqui). Mas conclui-se que tal teoria é inadequada para explicar a fonação humana tanto por restrições mecânicas como neurológicas.

Na busca pela compreensão mais adequada de como a laringe gera o sinal glotal, a teoria mioelástica-aerodinâmica da laringe (TMA) foi proposta (van den Berg, 1958, Titze, 1980) com base na troca sustentada de energia entre as camadas mais à superfície da laringe (epitélio e *lamina propria*) e o escoamento de ar oriundo dos pulmões.

O fenômeno que ocorre na laringe é similar ao efeito de assoprarmos sob uma folha de papel (conforme Figura 2.7). O ar de alta velocidade cria uma condição de baixa pressão sob a folha. Devido à diferença de pressão entre as duas faces, uma força de baixo para cima é aplicada sobre a folha, deslocando-a para cima (a). A medida que parte da folha de papel movimenta-se, novas configurações aerodinâmicas são formadas, alterando a direção e a intensidade da força aerodinâmica aplicada sobre o papel.

Note que existe então um momento em que a força aerodinâmica é menor ou de mesmo sentido da força gravitacional. Isso faz com que o papel seja trazido para baixo (b). O ciclo fecha-se com o aparecimento de configurações aerodinâmicas que resultam no aparecimento de nova força de baixo para cima, empurrando a folha de papel para cima (c).

Figura 2.7 - Efeito da passagem de ar sob folha de papel.

Apesar de bastante simplificada, essa ilustração demonstra o princípio básico de como as pregas vocais vibram. No caso da laringe, as diferenças histológicas das pregas vocais verdadeiras (onde o epitélio e a camada superficial da *lamina propria* são elasticamente mais “moles” do que a camada profunda e músculo vocal) permitem que uma onda mecânica seja formada pela ação da pressão aerodinâmica. Assim, as camadas de superfície das pregas vocais seriam equivalentes à folha de papel.

Essa teoria define, então, que o movimento oscilatório das pregas vocais é definido pela interação entre as forças aerodinâmicas aplicadas sobre a superfície livre das pregas vocais e as forças de restauração geradas dentro do tecido muscular. Como esse “equilíbrio” de forças é assimétrico ao longo da superfície da laringe devido à distribuição peculiar das tensões aerodinâmicas (principalmente as pressões) movimentos em forma de onda são formados na entrada da constrição glotal e são “puxados” para cima pela diferença de pressão criada pelo escoamento de ar.

Essa geração de ondas mecânicas na superfície das pregas vocais é contínua e auto-sustentado (dada que suas condições de oscilação sejam mantidas). O músculo, por si, é incapaz de sustentar um movimento oscilatório uma vez que seus componentes de amortecimento reduzem sua ação ao longo do tempo (dependendo da constituição histológica, pode ser subamortecido, amortecido criticamente ou sobreamortecido). Dessa forma, a energia aerodinâmica age como uma fonte de energia que equipara-se ou supera as forças de amortecimento do músculo. Como o movimento das pregas vocais é ondulatório, existe então uma diferença de fase vertical ao longo da superfície glotal que é bastante mencionada na literatura.

Outra característica importante na geração do sinal glotal é a presença de uma pressão negativa que geralmente localiza-se próximo à saída da glote. Alguns autores evidenciam-na como um fator preponderante para a manutenção do regime oscilatório. Analisando-se cuidadosamente o escoamento, percebemos que ela é formada pela convecção do ar que na constrição glotal adquire grandes velocidades. Admitindo-se que o ar é um fluido quase-incompressível (pelas características do escoamento na laringe), a manutenção da equação de continuidade, naturalmente, produz uma pressão negativa juntamente com um refluxo de ar sob a forma de vórtices logo após a glote. Esse fenômeno é algumas vezes referenciado como efeito Bernoulli pois algumas manipulações algébricas e considerações em relação a “perdas” de energia no escoamento permitem reduzir as equações de Navier-Stokes à equação de Bernoulli para escoamentos não-rotacionais.

Muitos autores enfatizam ora a porção mioelástica da laringe (Lieberman, 1967), enquanto outros, consideram mais relevante a ação aerodinâmica do ar (Fant, 1960). No entanto, como podemos perceber, ambos estão fortemente acoplados e a auto-sustentação da oscilação somente é possível quando determinadas condições são alcançadas.

Os fatores que influenciam essa auto-sustentação segundo a TMA são: a massa efetiva da porção superficial das pregas vocais verdadeiras, a tensão que efetivamente é aplicada à essa porção, a área glotal durante a fonação (que determina a resistência ao escoamento), a pressão subglotal e as características histológicas das fibras das pregas vocais.

Podemos enumerar alguns efeitos de acoplamento na TMA: os movimentos das pregas vocais alteram a geometria do escoamento de ar e criam, assim, nova distribuição de tensão aerodinâmica sobre a superfície da laringe. A variação da pressão subglotal afeta diretamente o escoamento do ar, podendo acelerar ou não a geração e os movimentos das ondas materiais das pregas vocais.

A massa efetiva influi também na oscilação. Isso ocorre por causa do componente inercial envolvido nos movimentos das pregas vocais. Dependendo da quantidade de massa, a oscilação pode ser quasi-senoidal ou totalmente instável pois o balanço de forças na glote é influenciado pelo componente inercial dos músculos. Doenças, particularmente o edema de Reinke (aumento anormal do espaço de Reinke), são exemplos de como a massa influencia a fonação. É claro que um aumento na tensão transversal do músculo vocal também altera a massa efetiva uma vez que pode reduzir a massa efetiva e dessa forma, juntamente com um aumento da pressão subglotal, elevar a taxa de vibração das pregas vocais.

Um elemento que não é comentado na TMA original (van den Berg, 1958) mas, discutido posteriormente (Titze, 1980; Ishizaka e Flanagan, 1972), é a influência da colisão na dinâmica da fonação. Para

facilitar o entendimento, vamos considerar o perfil glotal. A Figura 2.8 apresenta uma amostra desses perfis, que conduzem a vazões de ar na laringe variantes no tempo. Podemos notar algumas características. Primeiramente, o sinal é quasi-periódico, pois existem pequenas variações nos períodos fundamentais. Entretanto, essas variações são certamente compensadas pela natureza auto-sustentada que impõem uma região bem definida de oscilação das pregas vocais verdadeiras.

Outra característica importante é a subida mais suave do que a queda, que é mais abrupta. Essa diferença está relacionada com a força de contato aplicada sobre as paredes das pregas vocais verdadeiras quando ambas colidem-se. Sem essa força de contato, os movimentos seriam praticamente senoidais quando levamos em conta a baixa viscosidade dos tecidos superficiais das pregas vocais. Essas forças de contato são naturalmente não-lineares e contribuem, assim, para alterar o sinal glotal, adicionando-lhe componentes harmônicos que dão ao seu espectro de frequências um formato bastante característico (Deller et al., 1993).

Figura 2.8 - Movimentos das pregas vocais.

Considerando os aspectos apresentados nos parágrafos anteriores, podemos então ordenar os eventos físicos envolvidos na TMA. Admitindo-se que o músculo vocal foi trazido para sua posição de quasi-fechamento glotal (pela ação dos músculos implícitos sobre cartilagens específicas), o pulmão gera uma condição de pressão maior do que a pressão na cavidade supraglotal. Assim, um escoamento de ar é desenvolvido ao longo da laringe e pressões são distribuídas sob a superfície das pregas vocais.

Como o espaço glotal é bastante pequeno, se comparado com a área do tubo traqueal, as pregas vocais são a primeira resistência ao escoamento. Isso faz com que aja uma forte queda de pressão ao longo da glote. Assim, a entrada da glote está sob ação de uma pressão maior do que as paredes transglotal e supraglotal das pregas vocais. Os tecidos localizados na entrada da glote são pressionados e pela sua incompressibilidade geram a onda material superficial. Geometricamente temos um perfil divergente na glote. Note que a energia aerodinâmica começa a ser transferida para os músculos onde é armazenada sob a forma de energia elástica.

Essa onda material é “empurrada” para cima pela ação da diferença de pressão abaixo e acima dela. A medida que essa onda vai sendo movimentada, as pregas vocais verdadeiras colidem-se pois, o espaço glotal é bastante reduzido. Apesar do escoamento cessar, a pressão do pulmão agora distribui-se por toda a porção inferior da laringe enquanto que a porção superior tem pressão nula. Além disso, os movimentos horizontais das pregas vocais praticamente cessam-se. Os tecidos agora começam a perder força inercial e as forças elásticas começam a agir para abduzir das pregas vocais. Note que as porções inferiores das pregas vocais são as primeiras a se abrirem devido à diferença de fase nos movimentos das pregas vocais.

No instante em que a onda mecânica praticamente já atingiu a porção superior das pregas vocais, a glote “se abre” novamente, permitindo que novo escoamento seja desenvolvido. Com a ajuda da força inercial dos tecidos e da força aerodinâmica, o espaço glotal abre-se e parte da energia dessas duas forças é armazenada novamente sob a forma de energia elástica. Atingido o equilíbrio (e maior área glotal), via energia armazenada nas fibras musculares, começa a etapa de adução da glote pela movimentação dos tecidos da porção inferior das pregas vocais. O perfil é novamente o divergente e o ciclo oscilatório está fechado, ou seja, a onda material que se forma na porção inferior da glote é novamente “empurrada” para cima.

Note que a etapa de formação da “primeira” onda material envolve necessariamente uma adução da glote. Essa onda material é disparada para todo o processo oscilatório das pregas vocais. Existem situações em que as pregas vocais fecham totalmente o espaço glotal, mas, mesmo assim, a tensão aerodinâmica gerada pelo pulmão é capaz de abrir a glote, pois os tecidos superficiais das pregas vocais são mais elásticos do que o músculo vocal (é claro que existem situações que a tensão no músculo vocal é tal que impede qualquer adução glotal mas isso ocorre em atividades alheias à vocalização como o ato de soerguer algum objeto pesado, por exemplo).

Outra característica peculiar à dinâmica da laringe é a existência de uma diferença de fase horizontal. Além da diferença de fase vertical no movimento oscilatório das pregas vocais, essa nova diferença de fase ocorre por diferenças geométricas na direção anterior-posterior. Se analisarmos a laringe, veremos que o movimento das cartilagens aritenóides, para posicionar as pregas vocais verdadeiras para a fonação, dá à glote um formato de gota pois a comissura anterior é sempre fixa (como o ponto de apoio de um alicate). Assim, a distribuição de pressão na seção horizontal não é uniforme e dessa forma diferentes forças são aplicadas sobre a superfície das pregas vocais.

2.9 Modelos da Laringe

Para melhor compreender a dinâmica da laringe, uma série de modelos matemáticos foram propostos variando quanto à complexidade e à compreensão do próprio funcionamento das pregas vocais. Como pudemos notar nas descrições dos movimentos da laringe e de seus tecidos com base na TMA, o acoplamento entre o escoamento de ar e a dinâmica dos tecidos das pregas vocais é complexo particularmente pelo escasso conhecimento sobre as características elásticas de suas fibras.

Mais ainda, o próprio escoamento de ar exige a resolução de equações diferenciais parciais na qual o fluido é não-estacionário, de alta velocidade e elevado número de Reynolds (na zona de transição para uma voz normal).

Para melhor compreender os eventos que ocorrem na laringe durante a vocalização, um conjunto de modelos matemáticos foram propostos. Um dos primeiros modelos empregou um tubo metálico (Wegel, 1930) por onde o escoamento de ar flui. As pregas vocais verdadeiras eram representadas por pequenas portinholas presas ao final do tubo que fechavam a “glote” com ângulos de ataque variáveis em perfil convergente. Sua suposição era que o escoamento de ar atuava de forma preponderante na geração do sinal glotal.

Assim, a vazão foi variada de 50 a 200 cm³/s (que são valores encontrados na laringe humana durante a fonação) e em seguida a impedância (razão entre pressão e vazão) da glote foi determinada em função da área da constrição e do seu comprimento horizontal. Wegel (1930) também constatou que com um ângulo de ataque mais acentuado (80 graus) a queda de pressão ocorria próximo à entrada da glote e, dessa forma, recirculações sob a forma de vórtices ocorriam tanto na subglote quanto na “glote”. Ficou evidente a formação da *vena contracta* em ângulos de ataque abruptos, pois o escoamento de ar não consegue seguir o perfil da própria “glote” e “escapa”. A *vena contracta* consiste, assim, de um pequeno salto que o ar faz entre as pregas vocais verdadeiras cuja área de seção transversal é menor do que a área glotal.

Com base nos resultados, a resistência glotal imposta pela constrição foi calculada baseada na pressão (subglotal) aplicada, área da constrição e velocidade do escoamento. É interessante notar que a forma da glote também influencia a equação da resistência aerodinâmica. Tal condição alterou a equação da resistência com a aparição de uma potência n -ésima do comprimento da constrição. Fica claro assim que pequenas modificações na geometria da laringe têm significativas repercussões nos resultados por causa da impossibilidade de se obter uma forma fechada para as equações de Navier-Stokes, além de enfatizar o caracter não-linear do escoamento.

Figura 2.9 - Modelo uma-massa.

O modelo uma-massa (Flanagan e Landgraf, 1968) permitiu que análises matemáticas sobre a dinâmica da laringe fossem realizadas. A laringe aqui foi modelada (conforme Figura 2.9) usando um corpo de massa M , uma mola K e um amortecedor B que representam, respectivamente, a massa das pregas vocais, sua elasticidade e sua capacidade de amortecimento (ou perda de energia). Note que essa representação é bastante simplificada, pois não leva em conta as diferentes camadas das pregas vocais, por exemplo. Mesmo assim, o resultado final do modelagem matemática dessa estrutura é uma equação diferencial de segunda ordem, que sabidamente, pode gerar movimentos oscilatórios da massa (subamortecimento).

A fonte de energia para contrabalancear as perdas de energia no músculo (corpo) é o escoamento de ar. Com o aumento da pressão subglotal, uma pressão negativa (P_2) se forma na superfície superior das pregas vocais. Assim, cria-se uma “sucção” nas paredes das pregas vocais, aproximando-as. Matematicamente, admitiu-se o efeito Bernoulli agindo na constrição e a equação de continuidade como condições de

escoamento. A equação final foi corrigida para que os efeitos de viscosidade (e formação da *vena contracta*) fossem contabilizados.

Com o fechamento da glote, a pressão P2 vai a zero e a única força agindo sobre o músculo é a acumulada na massa M. Essa força causa a retração da massa M, afastando as pregas vocais uma da outra. O ciclo é estabelecido com a ação das forças de sucção sobre as paredes do músculo e novamente a aproximação das pregas vocais.

Uma característica interessante do modelo uma-massa (e usado extensamente em outros) foi a admissão do princípio de Bernoulli (maior velocidade gera menor pressão estática, e vice-versa) como fenômeno importante na geração da pressão negativa sob as pregas vocais. Note que a equação de Bernoulli somente é válida sobre determinados trechos das pregas vocais, assim como a equação de Poiseuille é aplicada sob trechos de perfil paralelo (tanto as equações de Poiseuille quanto a de Bernoulli são formas simplificadas das equações de Navier-Stokes sob específicas condições geométricas e aerodinâmicas). Além disso, os efeitos de viscosidade (que estão parcialmente contidos na equação de Poiseuille) foram traduzidos como “perdas” de energia na equação final “representativa” do escoamento.

Toda a dificuldade reside no fato que convecção, difusão e incompressibilidade são calculadas separadamente a partir de suposições quanto à dimensão da “*vena contracta*” (e tamanho de vórtices) e o ponto de reconexão do escoamento às paredes da laringe. A equação de Navier-Stokes é a forma que representa todos esses efeitos, mas ela tem uma forma analítica fechada genérica - somente para formas geométricas bastante simples isto é possível. Na literatura encontramos muitas simplificações para essa equação cujos efeitos que seriam oriundos da viscosidade são muitas vezes confundidos como perdas de energia (apesar do escoamento ser isotérmico).

Outro trabalho (Gupta et al., 1973) examinou o escoamento mais detalhadamente. Em um de seus modelos mecânicos, o “músculo” movimentava-se por um mecanismo externo ao escoamento - não existe um acoplamento “direto” entre músculo e ar. Para determinar os “*puffs*” de ar, a vibração mecânica era gerada em uma frequência específica. Essa nuance técnica visou apenas calcular o sinal glotal sem entrar nas complexidades das características dos músculos laríngenos.

Como em muitos trabalhos, o escoamento foi simplificado e as análises foram realizadas com base na impedância que a constrição gera sobre o escoamento de ar. Constatou-se que a impedância de entrada devia ter um componente capacitivo: isso equivale a dizer que o aumento ou redução da área glotal deve pouco afetar a vazão. Assim, modelos de escoamento incompressíveis, em que a vazão é imposta como condição de contorno devem possuir mecanismos para compatibilizar a razão vazão/área glotal. Um método sugerido pelos Gupta et al. (1973) para resolver esse problema é considerar o ar como um fluido compressível e dessa forma o componente capacitivo aparecia sob a forma de variação da densidade.

Concluiu-se que uma adequada descrição para a impedância de entrada da laringe é suficiente para atingir a oscilação auto-sustentada. Isso foi confirmado através de um modelo simplificado da laringe sem muita preocupação com constantes elásticas dos músculos: o objetivo era medir a tensão aplicada sobre a superfície da constrição.

Comparando estes dois últimos trabalhos (Flanagan e Landgraf, 1968 e Gupta et al., 1973) podemos inicialmente perceber uma dificuldade para compatibilizar seus modelos aerodinâmicos. Enquanto o primeiro sugere que o escoamento é incompressível, o segundo reverte essa abordagem com base na variação de densidade. Podemos considerar que a segunda abordagem não leva em conta que o pulmão apenas cria a condição aerodinâmica (pressão maior do que a pressão atmosférica) para gerar o fluxo de ar. Assim, mantendo-se a diferença de pressão constante, obtemos naturalmente (como em Flanagan e Landgraf, 1968) uma vazão variável.

Um dos modelos mais completos e simples da laringe é o modelo duas-massas (Ishizaka e Flanagan, 1972). Como uma extensão do modelo uma-massa, a laringe é representada por dois corpos de massa, M_1 e M_2 , ligadas à uma parede rígida por duas molas, K_1 e K_2 e dois amortecedores, B_1 e B_2 . O acoplamento das duas massas era feito por uma terceira mola, K_3 . O diagrama completo é mostrado na Figura 2.10.

Figura 2.10 - Modelo duas-massas.

Alguns aspectos relevantes nesse modelo são a relação não-linear entre o deslocamento das massas e a força necessária para movê-las. Isso permite compatibilizar a característica não-linear das fibras que compõem as pregas vocais (maior deslocamento acarreta em maior rigidez) e a diferenciação dos tecidos musculares. Além disso, durante uma colisão (fechamento glotal) uma força de contato é aplicada (não-linear) de tal forma a conter o movimento das massas.

Algumas considerações foram feitas para simplificar as equações de escoamento. Admitiu-se que uma contração abrupta (a glote, no caso) exigiria um aumento de 37% da queda de pressão (valor empírico) naquela região por causa da formação da *vena contracta*. Isso foi contabilizado como uma “perda” de energia no problema.

Dadas as complicações matemáticas que a expansão (também abrupta) causa na obtenção de uma forma analítica para a razão pressão/vazão, admitiu-se também uma segunda “perda” de energia para contabilizar os efeitos de recirculação de ar na saída da glote. Conforme os deslocamentos X_1 e X_2 (ou, o perfil geométrico equivalente glotal), uma pressão negativa era obtida em algum ponto da glote.

O trato supraglotal também foi representado (com base nas seções transversais daquele trato) de tal forma que a voz era completamente sintetizada pelo modelo. É interessante notar que os autores mostraram que a configuração supraglotal não afetava significativamente a vibração das pregas vocais. Devemos lembrar

que mesmo fonemas como /i/, que produzem uma segunda resistência aerodinâmica na base da língua, somente produzem aumento da frequência de vibração pelo aumento da pressão subglotal. Essa foi justamente uma das conclusões de Ishizaka e Flanagan (1972): a frequência fundamental é diretamente proporcional à pressão subglotal (2 a 3 Hz/cm H₂O).

O fenômeno de diferença de fase vertical no movimento das pregas vocais também foi obtido pelo modelo (entre 0 e 60 graus). Adicionalmente, Ishizaka e Flanagan (1972) relacionaram a região de oscilação auto-sustentada do modelo com a área glotal inicial (*“glottal resting area”*), com as constantes elásticas e de amortecimento e com a tensão das pregas vocais.

Diferente do modelo uma-massa, o modelo de duas massas produziu um diagrama de pressões muito similar ao encontrado nas pregas vocais humanas. Isso porque esse modelo produziu “perfis” geométricos similares (e onda mecânica associada) aos encontrados na laringe. Uma única massa exigiria um refinamento maior para se obter tal diagrama de pressões.

Variações do modelo duas-massas são encontradas na literatura. Koizumi et al. (1987) (com correções em Koizumi et al., 1989) construíram três modelos duas-massas modificando as posições das molas e amortecedores e admitiram que a massa M2 não está acoplada à superfície rígida. Uma alteração adicional (no acoplamento) permitiu inclusive que a massa M2 se movesse verticalmente. Além disso, assumiram que as pregas vocais eram incompressíveis. Isso foi feito, nesses modelos, através da variação das dimensões da massa. Note que o modelo duas-massas original é compressível. Titze (1976) advogou que modelos compressíveis produziram ondas com modos de oscilação diferentes daqueles encontrados nos incompressíveis. A propagação das ondas, por dedução matemática, em meio incompressível foi de uma a duas ordens de grandeza superiores à das ondas em meio compressível. Essa diferença entre propagações certamente é mais evidente durante a colisão em que as forças de contato agem de modo a bloquear o movimento das pregas vocais. Como a energia cinética ainda deve ser transformada em energia elástica (ou dissipada), pela incompressibilidade outras porções das pregas vocais acabam movendo-se na direção vertical.

As equações de escoamento foram tratadas do mesmo modo que no modelo original. Apesar do aumento dos graus de liberdade do modelo, ele é tão eficiente computacionalmente quanto o modelo duas-massas original. Segundo Koizumi et al. (1987), o sinal de voz sintetizado era perceptualmente melhor em seus três modelos propostos em relação ao modelo de duas-massas de Ishizaka e Flanagan (1972). Adicionalmente, efeitos oriundos da interação entre a laringe e o trato vocal (como o *skewing*, a truncagem e a superposição) foram observados no sinal glotal calculado. Maiores detalhes desses efeitos de acoplamento são encontrados em Koizumi et al. (1987).

Com um enfoque maior no escoamento, Pelorson et al. (1994) equacionaram os efeitos da separação do escoamento (logo após a seção da laringe com menor área) quando um fluido escoar com elevado número de Reynolds (Re) ao invés de simplesmente calcularem a pressão de recuperação através de supostas “perdas”. Seu método era baseado em aproximações da camada-limite, dividindo o escoamento em duas partes: uma dependente da viscosidade (em que ocorre a recirculação) e outra independente (em que a equação de Bernoulli tem validade). Usando uma série de simplificações para evitar instabilidades numéricas, Pelorson et

al. (1994) demonstraram que sua abordagem era útil para determinar o diagrama de pressões sobre as pregas vocais para escoamentos com Re elevado. Um detalhe curioso é que sua abordagem mostrou que tais escoamentos podem ser assimétricos (efeito Coanda). Devemos lembrar que as equações de Navier-Stokes propicia o aparecimento de tais eventos. Adicionalmente, eles propuseram um modelo duas-massas alternativo com geometria mais suave e com molas lineares (Pelorson et al., 1994). Sua descrição mecânica da laringe suportava um modelo de contato que é diferente do empregado tradicionalmente (em que a colisão é representada por um aumento da rigidez de algumas molas).

Curiosamente, Pelorson et al. (1994) concluíram que alguns efeitos (Coanda, formação da *vena contracta* na entrada da glote e a recuperação do escoamento na saída da glote) pareciam ser pouco significantes na fonação. Entretanto, outras características como a formulação matemática do ponto de separação móvel do escoamento após a constrição, a geometria do modelo duas-massas modificado e o tratamento não-uniforme do fechamento glotal (as paredes de ambas as pregas vocais não se fecham simultaneamente) produziram diferentes resultados daqueles obtidos pelo modelo duas-massas clássico. Segundo eles, os sinais gerados foram perceptualmente mais realistas do que aqueles da formulação original da laringe.

Pereira (1987) também propôs um modelo baseado no modelo duas-massas, com a inclusão de uma massa adicional para representar as falsas pregas vocais. Analogamente a Pelorson et al. (1994), a derivação das equações de escoamento foi refinada para os três perfis geométricos básicos da laringe (divergente, paralelo e convergente) para a resposta glotal durante a vibração auto-sustentada. Adicionalmente, verificou-se que vozes sussuradas eram melhor obtidas por seu modelo devido a inclusão da massa adicional (que acaba atuando como uma resistência aerodinâmica que reduz os efeitos da recirculação de ar pós-glote e dessa forma, afeta diretamente a magnitude da pressão negativa na posição superior das pregas vocais verdadeiras).

Com uma proposta para conseguir uma movimentação mais suave das pregas vocais e tentar reproduzir a diferença de fase horizontal (na direção longitudinal - comissura anterior/posterior), Titze (1973, 1974) e Titze e Strong (1975) propuseram um modelo com 16 massas dispostas em duas fileiras (e por simetria, mais outras duas fileiras de 8 massas cada uma) para representar as pregas vocais, conforme mostrado na Figura 2.11.

O uso de duas fileiras de massas objetivou reproduzir a diferenciação de tecidos da teoria corpo-cobertura de Hirano (1975). A fileira mais profunda (corpo) foi fixada rigidamente por um conjunto de molas enquanto que a fileira mais superficial (cobertura) foi fixada sobre as molas do corpo. Todas essas molas tinham resposta não-linear.

Note particularmente a disposição vertical das massas m e M na Figura 2.11. Semelhante ao modelo de Koizumi et al. (1987), a massa menor, representando o ligamento, não foi fixada às paredes rígidas como no modelo duas-massas clássico. O objetivo desse arranjo foi capturar o movimento vertical que é encontrado em laringes humanas causado pelas forças aerodinâmicas (pressão) geradas pelo pulmões.

Figura 2.11 - Modelo multi-massas.

Adicionalmente, as tensões produzidas pela ação dos músculos cricotireóideo e tiroaritenóideo foram representadas pelas tensões t e T na Figura 2.11. Segundo o autor, seu modelo também superou limitações comuns aos modelos uma-massa e duas-massas como, por exemplo, a impossibilidade destes em representar as diferenças elásticas e geométricas ao longo do comprimento das pregas vocais ou a fixação do músculo vocal (condição de contorno) nas comissuras anterior e posterior.

Uma tentativa adicional para representar melhor a laringe foi feita por Titze e Talkin (1979) com base na classificação histológica da laringe de Hirano (1975) no qual os tecidos musculares são divididos em três camadas (mucosa, ligamento e músculo). Geometricamente a laringe (tridimensional) foi subdividida em $4 \times 4 \times 4$ “elementos” (tais elementos não têm qualquer ligação com o método de elementos finitos).

Para caracterizar matematicamente os três tecidos, um modelo viscoelástico foi adotado. Cabe uma consideração sobre o que os autores consideraram como viscoelasticidade. Diferente dos modelos em reologia (Haddad, 1995) como o de Maxwell, por exemplo, os autores apenas atribuíram distintos valores para constantes elásticas (módulos de Young e de cisalhamento) e viscosas para cada um dos tecidos musculares. Assim, a laringe como um todo tinha uma característica “viscoelástica”.

As propriedades mecânicas dos tecidos foram definidas como sendo ortotrópicas (ou transversalmente isotrópicas). Isso vem do fato que os tecidos têm suas fibras longitudinalmente orientadas e, assim, as propriedades elásticas nessa direção são naturalmente diferentes daquelas no plano transversal. Posteriormente essa característica mecânica dos tecidos será melhor discutida pois influe decisivamente na vibração auto-sustentada da laringe. Titze e Talkin (1979) teceram comentários de tal influência.

Adicionalmente, as curvas de tensão-deformação foram consideradas lineares para facilitar a compreensão da influência dos parâmetros mecânicos do tecido. Os conhecimentos reduzidos e a dificuldade prática de obtenção das constantes “viscoelásticas” dos tecidos musculares certamente contribuíram para essa linearização.

O cálculo da vazão e do diagrama de pressões ao longo da laringe foi obtida de modo semelhante ao modelo duas-massas clássico, ou seja, admitindo que o escoamento em determinadas porções do trato glotal fosse simplificado pelas equações de Bernoulli e Poiseuille, e associando “perdas” para compensar os efeitos de recirculação e separação de ar. Alguns ajustes matemáticos foram impostos para projetar a geometria da laringe tridimensional sobre um plano unidimensional onde o escoamento foi efetivamente desenvolvido.

Algumas considerações foram feitas sobre o controle da colisão entre as pregas vocais. Usando projeções semelhantes às aquelas feitas no cálculo das pressões (tensões aerodinâmicas), as forças de contato foram calculadas através do que foi chamado de função fracionada de contato (infelizmente não descrita).

Os resultados apresentados por Titze e Talkin (1979) (variando os parâmetros mecânicos de “viscoelasticidade”) mostraram coerência com os resultados de modelos duas-massas. Os movimentos vertical e horizontal para diversas configurações assemelharam-se com as formas geométricas produzidas pelas pregas vocais reais durante a fonação. Muitas de suas observações servem de base para a construção do modelo apresentado nesta tese.

Seguindo essa linha de análise, De Vries et al. (1999) propuseram uma forma de determinar os parâmetros “viscoelásticos” dos modelos duas-massas a partir de uma estratégia envolvendo o método de elementos finitos. Usando parâmetros adaptados de Berry e Titze (1996), um modelo tridimensional das pregas vocais e cálculo do escoamento segundo Ishizaka e Flanagan (1972) e Pelorson et al. (1994) determinou-se os deslocamentos de posições específicas na superfície do modelo proposto e finalmente os parâmetros do modelo duas-massas. Segundo De Vries et al. (1999), sua abordagem produzia sinais glotais sob condições elásticas mais realísticas.

Em outro trabalho, De Vries (2000) forneceu um método mais completo para simular a dinâmica da laringe. O método de elementos finitos foi usado para descrever a dinâmica tridimensional dos tecidos musculares (usando a teoria cobertura-corpo de Hirano (1975)). Para calcular as velocidades e pressões do ar na laringe, o autor empregou o método de diferenças finitas MAC (*mark-and-cell*) em um plano bidimensional. Para acoplar ambos os sistemas, em cada instante de tempo, a laringe tridimensional foi projetada sob um plano bidimensional e o espaço glotal onde o ar escoava foi determinado. As pressões de ar eram então obtidas e aplicadas sobre as paredes do modelo de músculo. Note que com essa projeção, as pressões ao longo das pregas vocais são iguais em todos os planos transversais. Assim, a potencialidade que a descrição tridimensional das pregas vocais teria para dar maior realismo à simulação foram reduzidas apesar de De Vries (2000) fixarem a comissura anterior e posterior (condição de Dirichlet). Isso nos leva a crer que eles poderiam simplesmente ter adotado um modelo bidimensional para o músculo com resultados similares e computacionalmente mais eficiente.

Titze e Strong (1975) e Titze (1976) realizaram análises matemáticas sobre as equações dinâmicas (lineares) do músculo. No primeiro trabalho, eles mostraram analiticamente quais os modos de vibração das pregas vocais e quais as frequências desses modos. Tais autores comentaram que caso a diferença de fase vertical ocorresse inicialmente dentro do músculo vocal, essa seria definida a partir de um modo específico de vibração e, dessa forma, controlada pelo módulo de cisalhamento daquele tecido. Adicionalmente também comentam que outra forma de produzir tal diferença de fase seria pela movimentação da mucosa e ligamento vocal (Hirano, 1975) produzindo uma onda material que se propaga da porção inferior para a porção superior das pregas vocais.

Em Titze (1976), a ênfase foi a onda mecânica produzida pelas forças aerodinâmicas e diferenças elásticas nos tecidos das pregas vocais. Partindo das equações de Laplace e de Helmholtz, os autores determinaram quais as características de propagação e atenuação dos tecidos em relação às constantes elásticas e viscosas. Considerando os conhecimentos esparsos sobre tais parâmetros mecânicos, tais autores determinaram quais os valores adequados que produziriam os modos e autofrequências das pregas vocais. Particularmente a viscosidade do tecido, que primeiramente foi obtida a partir de valores determinados em outros músculos do corpo humano e foi “ajustada” com base em análise matemática para que os movimentos representados pelos modelos matemáticos fossem próximos daqueles da laringe real. Posteriormente veremos que a determinação dessas constantes é ainda incompleta e os modelos que as empregaram precisaram ser ajustados manualmente para funcionar corretamente.

É interessante notar que a primeira autofrequência de vibração do músculo localizou-se muito próxima da frequência fundamental (F_0) do sinal glotal (mas não necessariamente igual). Muitos trabalhos mostraram que essa proximidade certamente exige que o escoamento transfira energia em fase com essa autofrequência ou as ondas mecânicas na superfície das pregas vocais serão anuladas.

Titze e Strong (1975) e Titze (1976) também buscaram estabelecer a relação entre as autofrequências e as constantes elásticas e qual as relações entre essas constantes de tal forma a obter condições de vibração fonatória. Por exemplo, definiu-se que essas autofrequências são fortemente influenciadas pela constante de cisalhamento longitudinal (tecido transversalmente isotrópico).

Mais recentemente, Berry e Titze (1996) utilizaram o mesmo modelo elástico ortotrópico para calcular os modos e as autofrequências dos tecidos da laringe usando o método de elementos finitos para análise modal. Entretanto, ao invés de fixar as constantes elásticas dos tecidos segundo alguma medição física ou suposição teórica, os autores as variaram para determinar a sua influência sobre os modos e autofrequências de vibração.

Note que as análises modais (Titze e Strong, 1975; Titze, 1976 e Berry e Titze, 1996) foram realizadas unicamente sobre as características “viscoelásticas” dos tecidos musculares. Berry et al. (1994) analisaram os movimentos das pregas vocais para determinar os modos e as autofrequências de vibração do sistema acoplado ar-músculo. Sua estratégia era empregar uma análise “caótica” (método das autofunções ortogonais empíricas) sobre os deslocamentos do músculo (que é movimentado pelo escoamento). Novamente, os tecidos foram considerados transversalmente isotrópicos e as constantes “viscoelásticas” foram fixadas em

valores que produziam uma “fonação normal”. Curiosamente, a viscosidade dos tecidos (cobertura, ligamento e corpo) era bastante reduzida se comparada com a de Titze e Strong (1976) o que nos leva a crer que alguns dos parâmetros fornecidos foram ajustados para que a oscilação auto-sustentada ocorresse.

Uma experiência interessante que Berry et al. (1994) realizaram foi reduzir drasticamente o módulo de Young da cobertura para verificar qual o comportamento vibratório da laringe. Eles verificaram que as pregas vocais vibram com as constantes elásticas em regiões bem específicas. Fora dessa região, os movimentos das pregas vocais tornaram-se bastante irregulares. Segundo sua análise modal, essa região de irregularidade ocorre por causa de uma dessincronização entre os modos de vibração.

Considerando que os modelos (simples ou mais complexos) são parametrizados, os mesmos podem ser usados para simular doenças da laringe. Smith et al. (1992) modificaram o modelo duas-massas de Koizumi et al. (1987) para suportar a assimetria observada em alguns casos de paralisia da laringe. Variando um conjunto de 5 parâmetros, os autores foram capazes de representar paralisia do nervo superior, paralisia do nervo recorrente, paralisia vaga aguda e paralisia vaga crônica.

É interessante que o modelo mecânico assimétrico permitiu que o fechamento glotal se deslocasse lateralmente em relação à linha central. As forças aerodinâmicas aparentemente ajudaram na compensação da paralisia, algo que realmente ocorre no caso real.

Wong et al. (1991) também empregaram modelos duas-massas e multimassas para simular alterações patológicas nas características elásticas e de massa das pregas vocais. Isso foi feito alterando-se os parâmetros mecânicos dos modelos e observando os sinais glotais produzidos. Ao final, os autores compararam os resultados com alguns casos patológicos como laringite crônica e câncer. Eles verificaram que aumentos localizados de massa produziam movimentos irregulares das pregas vocais enquanto que a redução da elasticidade dos modelos amorteciam componentes subharmônicos no sinal glotal. Também verificaram que pequenas tensões longitudinais eram condições necessárias para gerar perturbações nos movimentos das pregas vocais.

Um modelo proposto por Titze (1984) seguiu uma linha diferente dos modelos até aqui discutidos. Considerando que se conhece mais sobre os movimentos das pregas vocais do que da constituição de seus tecidos e do escoamento de ar, o autor propôs um método parametrizado com base nas características do sinal glotal. Aproximando a área de contato entre as duas pregas vocais, a área glotal e de vazão e a pressão de ar na glote (este último calculado com base na teoria de *travelling waves*) na glote, seu modelo produziu sinais glotais bastante similares àqueles produzidos pelo modelo duas-massas. Uma das principais vantagens desse método é a pequena quantidade de parâmetros necessários para definir uma condição específica de fonação. Para exemplificar, o autor analisou um sinal glotal real e sincronamente produziu parâmetros para sintetizá-lo, comparando-os ao final. Entretanto, o próprio autor indicou a necessidade de ampliar o modelo como, por exemplo, adicionar novo parâmetro para representar diferença de movimentos entre a porção superior e inferior das pregas vocais e melhorar a representação da área de contato entre as massas.

Finalmente, Alipour-Haghighi et al. (2000) apresentaram o modelo baseado em elementos finitos que rivaliza com trabalho desta tese. As pregas vocais foram discretizadas tridimensionalmente (apesar dos autores

apenas apresentarem uma seção descrita por triângulos) e um modelo linear de tensão-deformação descrevia o comportamento mecânico dos tecidos da laringe. Não foi mencionado o método de obtenção da pressão e velocidade do ar ao longo da glote (se o mesmo é feito em um plano bidimensional e projetado sobre a superfície dos músculos da laringe ou é calculado sobre um modelo igualmente tridimensional). Além disso, comparando os valores das constantes elásticas ao longo dos trabalhos anteriormente referenciados com os utilizados por Alipour-Haghighi et al. (2000), achamos que eles foram ajustados adequadamente para produzir as oscilações. O movimento de alguns pontos da laringe apresentada por Alipour-Haghighi et al. (2000) aparentam ser excessivamente grandes, certamente devido à pouca resistência oferecida pela modelagem dos tecidos. Novamente a viscosidade também parece ter sido “ajustada” para a simulação.

Mesmo assim, o modelo apresentado serve como uma demonstração de que a técnica numérica permite simular com precisão os movimentos das pregas vocais.

2.10 Aspectos adicionais da dinâmica da laringe

Um aspecto interessante da fonação é a pressão subglotal. A pergunta que se faz é qual a pressão mínima necessária para produzir a vibração auto-sustentada. Além disso, qual a influência dessa pressão sobre o sinal glotal. Titze (1992) estabeleceu que a pressão subglotal diretamente influencia a frequência fundamental (F_0).

Segundo suas análises, a pressão mínima para gerar a oscilação auto-sustentada é diretamente proporcional ao coeficiente de pressão transglotal, à velocidade da onda material, à viscosidade média do tecido e à largura da glote (posição pré-fonatória) e inversamente proporcional à espessura. Assim, acima dessa pressão-limite, a energia aerodinâmica é transferida para os tecidos musculares e o amortecimento natural dos músculos é incapaz de dissipá-la totalmente.

Adicionalmente Titze (1992) procurou relacionar a pressão-limite com algumas características do sinal glotal como sua frequência fundamental e os quocientes de abertura e de velocidade. Esses quocientes serviram de estimadores numéricos da forma do sinal glotal. Os cálculos empíricos no trabalho indicaram uma relação não-linear entre a pressão e tais quocientes.

Seguindo a mesma abordagem, Titze et al. (1995) construíram um modelo físico da laringe (especificamente das pregas vocais) em que representaram a mucosa (epitélio + camada superficial da *lamina propria*) usando uma membrana siliconada (epitélio) que formava um espaço vazio quando preso à “laringe” artificial. Esse espaço era preenchido com fluidos de diferentes viscosidades para formar a camada superficial. Assim, os autores puderam gerar o sinal pulsátil e determinar a pressão mínima que gerava oscilações sobre a “mucosa” artificial. Segundo esse estudo, a pressão-limite confirmou as previsões teóricas. É interessante notar que Titze et al. (1995) acabam empregando valores de viscosidade para o “tecido superficial” diferentes daqueles inicialmente previstos em Titze (1976) e Titze e Strong (1979). É interessante notar que essas análises de pressão-limite foram realizadas com base na teoria de oscilações de pequena amplitude (Titze, 1988). Esse trabalho novamente citou os efeitos inerciais do escoamento na produção de pressões negativa e positiva sobre a glote. Essa linha de análise tende a considerar que o principal agente na geração do sinal glotal

é o escoamento de ar. Assim, na porção final da glote (superior) a pressão aplicada sobre os tecidos se alternam entre positiva e negativa conforme as pregas vocais realizam os movimentos de abertura e fechamento, respectivamente. Entretanto, no mesmo trabalho o autor também considerou que a onda mucosa (e os modos de vibração, conseqüentemente) é o principal elemento na oscilação auto-sustentada. Esse método iguala a pressão supraglotal com a pressão atmosférica e elimina os efeitos pós-constricção (“perdas” no modelo duas-massas) como um dos elementos importantes da fonação. De modo a compatibilizar ambas as abordagens, Titze et al. (1995) emprega a técnica das oscilações de pequena amplitude para determinar qual o comportamento oscilatório da superfície das pregas vocais (usando a equação de onda e a solução geral de d’Alembert). Claramente simplificações foram feitas no trabalho: apenas uma massa, um amortecedor e uma mola são empregados. Além disso, a velocidade de propagação da onda material foi usada na análise matemática. A colisão entre as pregas vocais não foi considerada pois além de ser um fenômeno não-linear não é suportada pela teoria de oscilações de pequena amplitude. Titze et al. (1995) concluíram que as linearizações aplicadas produziram soluções similares àquelas encontradas por Ishizaka e Flanagan (1972) e que a propagação da onda mucosa somente pode ocorrer de baixo para cima. Também reafirmaram que a suposição do escoamento ser preponderante (inércia aerodinâmica alternando a pressão supraglotal entre valores positivos e negativos) na oscilação auto-sustentada é incorreta.

Outros estudos foram realizados para representar de maneira simples e precisa o escoamento. Como já mencionado, a maioria das simplificações admite restrições sobre o tipo de escoamento em determinadas regiões da laringe e adicionam termos (sob o termo de “perdas”) na equação final como forma de reestabelecer características importantes, particularmente o aparecimento da pressão negativa em pontos específicos da superfície das pregas vocais.

Adicionalmente ao apresentado nos modelos mecânicos na seção anterior, Conrad (1980) apresentou um método baseado na suposição de que as pregas vocais funcionam como um admitância aerodinâmica não-linear. Isso resultaria no que foi denominado teoria de tubos colapsados que seria simples e eficiente para representar o escoamento de ar na laringe. Entretanto, Pereira (1987) e Titze (1988) restringiram sua aplicação generalizada aos perfis geométricos produzidos pelas pregas vocais.

Scherer et al. (1983) construíram um modelo físico da laringe, com perfil retangular para estabelecer empiricamente a relação entre vazão e pressão. Seus resultados indicam claramente que a proposta de Wegel (1930) para a resistência aerodinâmica é errônea por causa modelo físico construído. Suas análises indicam que o modelo proposto por Ishizaka e Flanagan (1972) é satisfatoriamente adequado para representar o escoamento de ar.

Outro estudo, computacionalmente mais complexo e bastante similar a abordagem empregada nesta tese, analisou o escoamento de ar em diversos perfis geométricos (plano bidimensional) através do método de elementos finitos. Discretizando as equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível, laminar e estacionário, Guo e Scherer (1993) produziram uma grande quantidade de dados de coeficiente de pressão transglotal e a comparação desses valores com dados empíricos mostrou grande similaridade. Suas análises permitiram verificar qual a distribuição de pressão para perfis convergentes, paralelos e divergentes de laringe.

Recentemente, Scherer et al. (2001) ampliaram a gama de simulação para perfis oblíquos, em que o escoamento não é mais paralelo a linha de simetria entre as pregas vocais. Segundo eles, um ângulo de divergência de 10 graus é muito comum nos ciclo de oscilação e produz uma queda de pressão sobre as paredes das pregas vocais mais acentuada do que aquela encontrada nos perfis paralelos e convergente. Um modelo físico foi construído e sensores de pressão foram colocados ao longo das “pregas vocais” para coleta de dados. Esses dados empíricos foram comparados com os valores produzidos pelo método de volumes finitos, mostrando bastante similaridade (mesmo considerando que um “ajuste” na condição de contorno de saída seja feito para que a simulação numérica produzisse resultados adequados).

Alguns pontos foram levantados sobre a ocorrência de assimetria no escoamento mesmo quando o perfil geométrico é simétrico. Matematicamente é possível pois as equações de Navier-Stokes tem uma tendência implícita para assimetria (mesmo para Re baixo, como por exemplo, $Re=100$). A questão levantada é se existiria tempo suficiente, logo após a abertura da glote, para o desenvolvimento de um escoamento assimétrico e qual sua influência sobre a distribuição de pressões na superfície da laringe, especialmente na região glotal. Pelorson et al. (1994) apresentou um estudo preliminar sobre a resposta impulsiva do escoamento após a abertura abrupta das pregas vocais que permite obtermos alguma idéia a respeito desse intervalo de tempo.

Quanto ao efeito das assimetrias no escoamento sobre a oscilação, Pelorson et al. (1994) confirmou (efeito Coanda) que elas são insignificantes na excitação de novos modos de vibração das pregas vocais.

3 Equações do Problema

A laringe consiste de um conjunto de músculos e cartilagens que quando são apropriadamente excitados por pressões aerodinâmicas aplicadas na sua superfície podem sustentar uma vibração e produzir um sinal (glotal) que se tranforma em sons sonoros após uma modulação na cavidade supraglotal.

Neste capítulo apresentamos as equações que regem separadamente a dinâmica do músculo e o escoamento de ar. Algumas simplificações serão feitas motivadas pelo reduzido conhecimento das propriedades viscoelásticas do músculos e para facilitar a obtenção da distribuição de pressões ao longo da superfície da laringe. Para facilitar a descrição matemática, empregamos as notações tensorial e vetorial onde for apropriado.

3.1 Escoamento de Ar

As equações usadas para descrever o escoamento na laringe são as equações de Navier-Stokes (NS). Sua abrangência permite representar qualquer tipo de escoamento. Elas podem ser separadas em um conjunto de 5 equações a saber: equação da continuidade, da conservação do momento, da conservação da energia, da primeira e da segunda leis da termodinâmica.

O escoamento de ar na laringe durante a fonação facilmente atinge uma vazão de $300 \text{ cm}^3/\text{s}$. Considerando as dimensões da área da menor constrição glotal, podemos ter escoamento com número de Reynolds igual a 4000. Isso significa que o escoamento entra na região de transição laminar-turbulento e pode estar sujeito a instabilidades. Mesmo assim, as equações de Navier-Stokes são capazes de tratar tais escoamentos.

Adicionalmente, as variações de temperatura e densidade do ar na laringe são pequenas (Pereira, 1987). Isso permite que as leis de conservação de energia e da termodinâmica sejam ignoradas. Assim, o escoamento do ar admitido na laringe é isotérmico e incompressível.

As equações resultantes dessa simplificação são:

$$\nabla \cdot U_f = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial U_f}{\partial t} + (U_f \cdot \nabla) U_f \right] = \nabla \cdot (\underline{\tau} - P I) + \rho F_f \quad (3.2)$$

onde $\underline{\tau} = \mu_f (\nabla U_f + (\nabla U_f)^T)$,

$$\frac{\partial U_f}{\partial t} + \text{Re}[(U_f \cdot \nabla) U_f] = \nabla \cdot (\underline{\tau} - P I) + F_f \quad (3.3)$$

onde $\underline{\tau} = (\nabla U_f + (\nabla U_f)^T)$.

Nas Equações 3.1-3.3, μ_f é a viscosidade absoluta do fluido (g/cm.s), ρ é a sua densidade (g/cm³), $\overline{U}_f$ é o vetor velocidade (cm/s), P é a pressão estática fluido (dina/cm²), $\underline{\tau}$ é o tensor de tensão (*stress tensor*) (dina/cm²) e I é a matriz identidade.

As equações adimensionais (Eq. 3.3) foram obtidas a partir de uma velocidade (U_0), comprimento (L_0), tempo (t_0) e pressão (P_0) (parâmetros característicos) que servem de escala para as equações de momento (Eq. 3.2) e produzem o valor adimensional Re , ou seja,

$$\text{Re} = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu_f}. \quad (3.4)$$

A forma diferencial das equações de Navier-Stokes foi usada para que se pudesse calcular as velocidades e pressões ao longo de diversos pontos da laringe. É importante reforçar que tais equações não fornecem uma forma analítica, fechada, para obtermos a velocidade e pressão para perfis geométricos complexos, exigindo que a solução seja numericamente aproximada.

Note que a equação da continuidade (Eq. 3.1) que impõe a incompressibilidade ao escoamento não possui nenhuma variável de pressão em seus termos. Isso reflete-se no fato de que a pressão tem velocidade de propagação infinita, pois automaticamente ela é definida para o escoamento incompressível. Posteriormente veremos que a pressão matematicamente é um multiplicador de Lagrange que ajusta o vetor velocidade de forma a garantir a continuidade.

Outra característica das equações de momento é a não-linearidade imposta pelo termo convectivo $(U_f \cdot \nabla) U_f$. Se efetuarmos algumas simplificações nessa equação (escoamento unidimensional, laminar, irrotacional e não-viscoso) podemos obter a equação de Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{U_f^2}{2} = \text{constante}. \quad (3.5)$$

Note que a velocidade (pelas simplificações que geram a equação de Bernoulli) é quadrática e dessa forma exige que métodos iterativos sejam empregados para obter a solução do escoamento.

O termo advectivo, representado pelo tensor de tensão $\underline{\tau}$, é responsável pela recirculação de ar (ou vórtices) na vizinhança da constrição, fazendo com que o escoamento torne-se rotacional. Esses vórtices são formados pela incapacidade do escoamento acompanhar o contorno da superfície de análise, “desprendendo-se” (por ação do termo convectivo), e pela continuidade. Esses efeitos conjugados produzem uma zona de baixa pressão que passa a “atrair” as “partículas” de ar, caracterizando assim os vórtices. A chamada *venna contracta*, que aparece em trabalhos de modelagem da laringe, é uma zona de recirculação de ar formada na glote por causa da velocidade do escoamento e da rotacionalidade do escoamento. Tais trabalhos

(Pereira, 1987; Pelorson et al. 1994) simplificaram os perfis geométricos de forma a determinar as dimensões dessas regiões e da camada-limite e ajustar suas equações simplificadas de escoamento.

Algumas considerações são importantes para estabelecer algumas nomenclaturas. Admitindo-se uma viscosidade nula, as equações de momento passam a ser denominadas equações de Euler, ou seja:

$$\rho \left(\frac{\partial U_f}{\partial t} + U_f \cdot \nabla U_f \right) = \rho F_f - \nabla \cdot (PI). \quad (3.6)$$

Escoamentos muito rápidos possuem termos convectivos com magnitude superior aos termos advectivos e dessa forma resultam nas equações de Euler. Essas equações, por manipulações algébricas (e supondo um escoamento irrotacional) produzem a equação de Bernoulli.

Suprimindo o termo convectivo e a derivada temporal da velocidade da Eq. 3.2, obtemos as equações estacionárias de Stokes, ou seja:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{\tau} - PI) + \rho F_f &= 0 \\ \text{onde } \underline{\tau} &= \mu_f (\nabla U_f + (\nabla U_f)^T). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Existem controvérsias sobre a existência de uma equação de Stokes transiente. Por definição, a equação de Stokes é o caso limite de $Re \ll 1$. Neste trabalho, a Eq. 3.7 será definida como equação de Stokes. Seu uso decorre do processo iterativo para solução numérica das equações do escoamento pois a Eq. 3.7 fornece a solução inicial U_0 .

Analisando a dedução das equações de momento, temos que:

$$\frac{dU_f}{dt} = \frac{\partial U_f}{\partial t} + (U_f \cdot \nabla) U_f, \quad (3.8)$$

ou seja, o termo convectivo é efetivamente uma parte da derivada temporal total. Isso nos mostra que algumas “instabilidades” no escoamento são, na verdade, oscilações temporais. Posteriormente, serão feitos alguns comentários sobre tais instabilidades e qual o seu efeito sobre a solução numérica das equações de Navier-Stokes.

Finalmente, as equações diferenciais parciais acima necessitam de condições de contorno para sua solução. As condições forçadas (Dirichlet) normalmente são aplicadas nas paredes do escoamento, onde admite-se que a velocidade do escoamento é igual à velocidade dessas superfícies. As condições naturais (Neumann) são aplicadas onde a tensão aerodinâmica (pressão ou derivadas direcionais da velocidade) são conhecidas. Finalmente, as condições mistas (Robin ou Cauchy-Neumann) são usadas onde a velocidade e a tensão aerodinâmica estão relacionadas.

É sabido (Hirsch, 1988a; Hirsch, 1988b) que as equações de Navier-Stokes (simplificadas conforme já descrito) podem ser do tipo hiperbólicas ou elípticas. O caso hiperbólico ocorre nas equações de Euler e isso elimina a restrição de aplicarmos a condição de contorno na saída do escoamento (especificamente, isso depende das linhas características do escoamento). Por outro lado, uma equação diferencial elíptica exige a aplicação das condições de contorno em toda a superfície externa do problema considerado.

O método de elementos finitos discretiza as equações diferenciais parciais de forma a produzir um sistema de equações acoplado que assume a forma elíptica. Assim, naturalmente aplicaremos condições de contorno em toda a superfície do escoamento. Considerações sobre a condição de contorno de saída (que nos trouxe alguns dificuldades) serão feitas posteriormente.

3.2 Equações do Músculo

Os músculos do corpo humano têm por característica básica o fato de serem orientados por fibras. As propriedades mecânicas dessas fibras altera-se em função do estiramento ou relaxamento imposto por tensões externas. Além disso, as propriedades mecânicas na direção das fibras (longitudinal) são certamente diferentes daquelas no plano cujo vetor direto segue a direção das fibras (plano transversal).

Se não bastasse, tais fibras são incompressíveis pois sua resistência aos esforços externos é pequena e dessa forma, a ação em uma determinada direção provoca uma reação em outra direção de forma a manter o volume praticamente constante.

Adicionalmente, os tecidos musculares permitem alterações superiores ao seu tamanho original, como por exemplo, dobrar de tamanho na direção das fibras. Finalmente, os músculos possuem comportamento viscoelástico. Particularmente os tecidos que compõem as pregas vocais variam com a profundidade conforme visto anteriormente.

Toda essa gama de característica impõem um conhecimento detalhado das propriedades mecânicas da laringe para que se pudesse representar tais materiais do modo mais realístico possível. Entretanto, as dimensões da laringe e dos tecidos na laringe restringem a sua determinação experimental. Certamente que o ideal seria realizar tais medidas *in-vivo*, o que não é possível.

Ao invés de empregar um modelo sofisticado mas incompleto (do ponto de vista das constantes viscoelásticas), neste trabalho usamos um modelo linear com propriedades elásticas e viscosas diferentes para cada um dos tecidos da laringe (cobertura, ligamento e corpo muscular).

Para representar melhor as fibras que constituem os músculos, esse modelo linear foi definido como sendo transversalmente isotrópico (ou ortotrópico). Isso significa que as propriedades elásticas no plano transversal são isotrópicas (a mesma em todas as direções nesse plano) enquanto que na direção longitudinal (ao longo das pregas vocais) possuem definições elásticas específicas não necessariamente iguais às do plano isotrópico.

Com essas simplificações, os tecidos musculares da laringe “digital” aproximam-se discretamente da representação viscoelástica real, facilitando as análises matemáticas dos efeitos das propriedades mecânicas sobre a vibração das pregas vocais.

Da teoria da elasticidade temos que um corpo infinitesimal sujeito à tensões normais às suas faces deforma-se. Quando retiramos tais esforços externos, o corpo retorna a sua forma original (perfeita elasticidade). Assim, as deformações em um modelo tridimensional são definidas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{\partial(U_m)_i}{\partial x_i} \\ \gamma_{ij} &= \frac{\partial(U_m)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(U_m)_j}{\partial x_i},\end{aligned}\quad (3.9)$$

onde $U_m = \{(U_m)_i\}^T$ é o vetor deslocamento, ε_i são as deformações lineares e γ_{ij} são as deformações angulares. Os índices i e j representam uma direção do sistema de referência ortogonal (no caso tridimensional, $1 \leq i, j \leq 3$, e $1=x$, $2=y$ e $3=z$).

Relacionando as tensões (σ_i e τ_{ij}) e deformações através da lei de Hooke temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde a matriz C (simétrica) representa a resistência (rigidez) do corpo à deformação. Sua inversa é denominada matriz de flexibilidade (D), ou seja:

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} &= [C^{-1}]\{\sigma\}, \text{ ou } \{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Para calcular os deslocamentos, aplicamos a condição de equilíbrio estático entre forças internas (de resistência) e as externas (esforços). Isso resulta no seguinte sistema de equações diferenciais parciais (EDPs):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{mx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{my} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{mz} &= 0,\end{aligned}\quad (3.12)$$

onde F_{mx} , F_{my} e F_{mz} são as forças de corpo (forças por volume do elemento, como por exemplo, a força gravitacional). As condições de contorno naturais (ou de Neumann) são definidas pelas relações:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \bar{\sigma}_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ \bar{\sigma}_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,\end{aligned}\quad (3.13)$$

onde l , m e n são os cossenos diretores das faces onde tensões externas são aplicadas.

O próximo passo na derivação das equações do músculo seria determinar as condições de compatibilidade (evitando-se, assim, a obtenção de múltiplas soluções para o equilíbrio e a falta de

continuidade entre as soluções ao longo dos corpos infinitesimais). Entretanto, o uso do método de elementos finitos para resolver numericamente as equações de equilíbrio, naturalmente, impõe a continuidade (se as funções de interpolação forem corretamente definidas e os elementos finitos forem compatíveis - critérios para que a solução numérica seja convergente). Assim, não apresentaremos tais condições.

Para finalizar a derivação das equações de equilíbrio, definiremos a matriz de rigidez para o tecido muscular. Considerando um corpo isotrópico tridimensional, podemos definir seu comportamento elástico através de duas constantes: o módulo de Young (E) e a constante de Poisson (ν). Assim, temos:

$$C_{isotrópico} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Note que a constante de cisalhamento μ_m é dependente do módulo de Young e da constante de Poisson e, portanto, não precisa ser explicitada na matriz $C_{isotrópico}$.

O objetivo de derivarmos a matriz de rigidez para um corpo isotrópico é mostrar que existe um limite para ν que é 0,5. Teoricamente, quando esse limite é alcançado, o elemento é perfeitamente incompressível. Entretanto, a matriz de flexibilidade ($D = C^{-1}$) torna-se singular. Acima desse valor, as Eqs. 3.12 tornam-se termodinamicamente impossíveis, pois passam a produzir energia interna.

Para um material transversalmente isotrópico, as propriedades elásticas variam segundo uma direção específica. Admitindo-se que as fibras musculares das pregas vocais estejam alinhadas com o eixo cartesiano X (direção longitudinal), isso implica em uma matriz $C_{ortotrópica}$ definida por:

$$C_{ortotrópica} = \begin{bmatrix} \frac{E'^2(\nu-1)}{k} & \frac{-E E' \nu'}{k} & \frac{E E' \nu'}{k} & & & \\ \frac{-E E' \nu'}{k} & \frac{(-E' + \nu'^2 E)E}{(1+\nu)k} & \frac{-(\nu E' + \nu'^2 E)E}{(1+\nu)k} & & & \\ \frac{E E' \nu'}{k} & \frac{-(\nu E' + \nu'^2 E)E}{(1+\nu)k} & \frac{(-E' + \nu'^2 E)E}{(1+\nu)k} & & & \\ & & & \mu'_m & & \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \mu'_m \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$k = E'(\nu - 1) + 2\nu'^2 E,$$

onde E e E' são as constantes de Young transversal e longitudinal, respectivamente, ν e ν' são as constantes de Poisson transversal e longitudinal, respectivamente, e μ'_m é a constante de cisalhamento longitudinal.

Invertendo-se essa matriz, obtemos a matriz de flexibilidade, ou seja:

$$D_{ortotrópica} = C_{ortotrópica}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E'} & -\frac{\nu'}{E'} & -\frac{\nu'}{E'} & & & \\ -\frac{\nu'}{E'} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu'}{E'} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{\mu'_m} & & \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & \\ & & & & & \frac{1}{\mu'_m} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Diferentemente de um material isotrópico, as constantes de Poisson ν e ν' necessariamente não são limitadas superiormente por 0,5. A análise termodinâmica do sistema de equações de equilíbrio estático (Lempriere, 1968) revela que as constantes de Poisson devem ser limitadas pelo intervalo:

$$\nu \leq 1 - 2\nu'^2 \frac{E}{E'}. \quad (3.17)$$

Alguns trabalhos (Berry e Titz, 1996; Alipour-Haghighi et al., 2000) usam $\nu' = 0$ por admitirem que os tecidos musculares não movem-se na direção longitudinal (isso exigiu dos autores uma alteração nas relações tensão-deformação para manter a compatibilidade entre os diversos planos transversais). Neste trabalho, entretanto, não iremos impor tal restrição. Posteriormente, na discussão das simulações, apresentaremos os valores empregados para as constantes de Poisson. Admitiremos apenas que o músculo é quase-incompressível de modo que a Eq. 3.17 esteja próxima do limite termodinâmico, mas levando em conta os aspectos da incompressibilidade descritos em Bathe (1996).

A última etapa para definição das equações do músculo é a aplicação das condições de contorno forçadas (Dirichlet). No problema, algumas superfícies do problema são rigidamente apoiadas, ou seja, $U_m = \{0\}$.

Considerando que estaremos analisando os aspectos dinâmicos da laringe, deveríamos também definir as equações diferenciais que regem esse fenômeno. Entretanto, o método de elementos finitos permite que derivemos os sistemas de equações diferenciais diretamente dos variacionais associados ao problema dinâmico. Assim, iremos postergar tal apresentação para o próximo capítulo.

4 Modelo de Simulação da Laringe

Em termos de engenharia, a simulação da laringe equivale à solução da interação fluido-estrutura com restrições físicas à colisão entre múltiplos corpos. Estritamente falando, as equações que regem o escoamento e os músculos da laringe devem ser resolvidas simultaneamente em que as condições de contorno e a geometria do problema acoplam ambos os sistemas. Adicionalmente restrições sob a forma de multiplicadores de Lagrange impedem que as pregas vocais verdadeiras penetrem-se mutuamente.

Sabemos que, para tais problemas separadamente, ainda não existe uma solução analítica fechada ou numericamente robusta pelas características tanto do escoamento quanto do músculo (conforme descrito no capítulo 2). Neste trabalho procuramos produzir um método eficiente, robusto e compatível com o modelo real que é representado pelo seguinte algoritmo:

1. resolução das equações do escoamento de ar;
2. coleta das pressões ao longo da superfície de contorno para formar as condições de contorno do músculo;
3. resolução das equações dinâmicas do músculo;
4. deformação da malha do músculo;
5. deformação da malha do escoamento;
6. retorno ao passo 1.

Podemos perceber novamente que o acoplamento entre os sistemas é feito através da alteração da geometria e passagem de informações do escoamento (pressões) para o músculo sob a forma de condições de contorno de Neumann.

Neste trabalho enfrentamos um grande número de problemas técnicos para resolver o problema da simulação dinâmica da laringe. Verificamos durante o decorrer das atividades que a grande maioria desses subproblemas ainda não foram totalmente solucionados pela ciência, levando-nos a adotar certas simplificações que nos levassem a obter o sinal glotal.

Neste capítulo apresentaremos cada um desses subproblemas, as dificuldades técnicas associadas e o método que empregamos para solucioná-los. Iniciaremos por uma descrição sucinta sobre método de elementos finitos, que serviu como meio para discretizar as equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento do escoamento e do músculo.

4.1 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos (MEF) consiste em uma técnica para discretização espacial não-uniforme de equações diferenciais parciais (EDPs), transformando-as em um sistema (linear ou não-linear) de equações e fornecendo a solução nos nós da malha. Usando a função interpoladora do problema, pode-se conhecer a solução das EDPs discretizadas em qualquer ponto interno da malha.

Alguns comentários sobre os tipos EDPs existentes tornam-se necessários. Existem três tipos de EDPs: as hiperbólicas, parabólicas e as elípticas. Essa divisão é baseada nas suas “características”. As características de uma EDP são linhas n -dimensionais em que as derivadas de mais alta ordem são descontínuas. Para as equações elípticas não existem características reais enquanto as parabólicas apresentam tanto características imaginárias quanto reais e as hiperbólicas somente possuem características reais e distintas.

A importância do tipo de EDP resulta no modo com que as equações serão resolvidas. Por não possuir característica real, as elípticas exigem que se conheça as condições de contorno em toda a superfície de modo que a solução em todo o domínio seja simultaneamente resolvido. Já as equações parabólicas e hiperbólicas, por dependerem de condições iniciais, tornam-se problemas de propagação.

Além disso, as parabólicas podem ser resolvidas pelo conceito de frente de onda a partir de algumas condições de contorno bem definidas. Dessa forma, variáveis ainda desconhecidas são resolvidas com base nas soluções já obtidas de “frente de onda”. Por fim, com menor dependência, as hiperbólicas permitem que a solução seja calculada a partir das condições de contorno em uma parte do contorno e da condição inicial, em uma parte do domínio interno do problema.

Assim, de acordo com o problema, é necessário aplicar as condições de contorno e inicial adequadas para que o MEF reproduza corretamente os fenômenos físicos modelados.

O problema padrão (EDP) a ser resolvido é definido por:

$$\Gamma(\phi) - f = 0, \quad (4.1.1)$$

onde Γ é o operador parcial diferencial, linear ou não, ϕ é uma função escalar definida em um domínio Ω com superfície $\partial\Omega$ e f é uma função conhecida de variáveis independentes (o desenvolvimento será realizado em apenas uma dimensão por comodidade). A função ϕ é a “variável” do problema.

O passo natural seria integrar a Eq. 4.1.1 considerando as condições de contorno adequadas e obter a solução. Entretanto, algumas dificuldades matemáticas pesam sobre esse procedimento convencional (geralmente usada para equações mais simples). Uma alternativa seria construir um funcional (função de energia do sistema) equivalente e determinar as funções que maximizam, minimizam ou tornam o sistema estacionário a partir das mesmas condições de contorno. O uso de variacionais (“derivadas” dos funcionais) possibilita que calculemos soluções para problemas mais complexos, pois fazemos uso de derivadas de ordem inferior às da Eq. 4.1.1 e usamos diretamente as condições de Neumann do problema.

Para se determinar o funcional, multiplicamos a Eq. 4.1.1 pela primeira variação de ϕ ($\delta\phi$) e integramos o resultado no domínio Ω , ou seja:

$$\int_{\Omega} \delta\phi [\Gamma(\phi) - f] d\Omega = 0. \quad (4.1.2)$$

Manipulando algebricamente a Eq. 4.1.2 de forma a mover o operador de diferenciação δ para fora do integrando, obtemos:

$$\delta \int_{\Omega} [\Gamma^*(\phi) - f\phi] d\Omega = 0, \quad (4.1.3)$$

onde $\Gamma^*(\phi)$ é um novo operador diferencial devido à manipulação.

Com o variacional obtido (Eq. 4.1.3), o funcional para a Eq. 4.1.1 é:

$$I(\phi) = \int_{\Omega} [\Gamma^*(\phi) - f\phi] d\Omega. \quad (4.1.4)$$

O método apresentado é um dentre as possíveis técnicas encontradas na literatura. Um procedimento clássico envolve a construção dos espaços de Hilbert e Sobolev cuja intersecção nos fornece os funcionais quadráticos desejados (nas quais MEF se insere matematicamente).

Com o funcional calculado, aplicamos o método de Ritz para determinar a função ϕ . O método consiste em assumir uma determinada forma para essa função (geralmente polinomial pela facilidade de integração e diferenciação) com parâmetros desconhecidos:

$$\phi = \sum_i^n C_i N_i, \quad (4.1.5)$$

onde C_i são os parâmetros constantes a determinar, N_i são funções que formatam a solução e n é o número total de nós de TODA a malha. Essa função é substituída no funcional que torna-se dependente de C_i 's. Tais parâmetros são então determinados minimizando-se o funcional $I(\phi)$ em relação a cada um dos parâmetros, criando-se ao final um sistema de n equações lineares com n parâmetros a serem determinados, ou seja:

$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial C_n} = 0. \quad (4.1.6)$$

É claro que o método de Ritz consegue produzir a solução ϕ exata se a forma exata N_i do problema for conhecida. A aproximação também pode ser mais precisa com o aumento de n . É importante notar que o método considera que as funções N_i devem ser definidas em todo Ω . Esse é o elemento que difere o método de Ritz do MEF e que geralmente reduz sua aplicação a problemas com geometria simples. No MEF, tais funções necessitam apenas ser definidas dentro dos “elementos finitos”. Dessa forma, agrupando-se um conjunto de elementos com geometria simples, podemos definir domínios mais complexos. Isso faz com que a solução final seja obtida a partir da subdivisão espacial do problema.

Primeiramente devemos definir o domínio de solução e subdividi-lo em elementos de geometria simples onde seus vértices definem os nós do problema. Nesses nós a solução (denominada ϕ_e) será determinada e “interpolada” ao longo do elemento.

É claro que tais funções N_i (funções de interpolação) devem obedecer certas restrições para que a solução correta seja obtida (para $n \rightarrow \infty$, ela deve convergir para a solução contínua). Essas restrições são conhecidas por continuidade e completeza. Supondo que a derivada parcial de mais alta ordem no funcional

$I(\phi)$ seja r , a primeira restrição define que a função ϕ , e qualquer derivada parcial até a ordem $r-1$, deve ser contínua, produzindo uma solução também contínua. Isso assegura que a integral do funcional é bem definida e a solução será única (a solução produzida nos elementos que compartilham um mesmo nó produzem a mesma solução nesse nó). Assim, na interface do elemento devemos ter continuidade C^{r-1} .

A completude define que todos os estados de ϕ e suas derivadas parciais até a mais alta ordem no funcional devem estar na função-solução do elemento. Tecnicamente isso significa que dentro do elemento devemos ter continuidade C^r . Se essas duas restrições não forem mantidas ou obtidas, problemas de convergência poderão surgir. Alguns resultados experimentais descrevem que cuidadosa manipulação das condições de contorno pode evitar tais problemas mas a convergência não é garantida. Neste trabalho, as funções de interpolação usadas são contínuas e completas.

Conhecido o funcional do problema (que por manipulação algébrica inclui automaticamente as condições de Neumann, ou naturais), escolhidas as funções de interpolação, dividido o domínio em subelementos de geometria simples (polígonos e nós que os definem), o passo seguinte seria solucionar as Eqs. 4.1.6 para todos os nós simultaneamente (problema elíptico) com as condições de Dirichlet e pós-processar o resultado para obter informações secundárias como reações ou tensões devido à resistência do material, por exemplo.

É claro que existem outros aspectos importantes (particularmente para o problema do escoamento definido pelas equações de Navier-Stokes - NS). Primeiramente, não se conhece, as vezes, o funcional do problema. Ou ele simplesmente não existe como no caso de NS, apesar de alguns trabalhos empregarem pseudo-funcionais (Olson, 1975). Para esse caso, empregamos o procedimento de Galerkin (ou dos resíduos ponderados). Considerando novamente a Eq. 4.1.1 do funcional, admitimos que a solução ϕ pode ser aproximada por ϕ^* . Essa aproximação é definida em termos de funções de forma conhecida N_i , ou seja:

$$\phi \approx \phi^* = \sum_{i=1}^n N_i C_i. \quad (4.1.7)$$

Aplicando a Eq. 4.1.7 na Eq. 4.1.1 tem-se:

$$\Gamma(\phi^*) - f = R \neq 0, \quad (4.1.8)$$

onde R é o erro ou resíduo provocado pela aproximação da solução. Para minimizar esse erro, aplicamos um procedimento de média ponderada para encontrar as constantes C_i que minimizam essa expressão, ou seja:

$$\int_{\Omega} [\Gamma(\phi^*) - f] G_i d\Omega = \int_{\Omega} R G_i d\Omega = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.9)$$

A dificuldade agora reside em como definir as funções de ponderação, que devem ser linearmente independentes. Entra em cena então o método Bubnov-Galerkin (ou simplesmente Galerkin em algumas referências), onde $G_i = N_i$ para $i=1, 2, \dots, n$. Existem situações em que podemos aplicar $G_i \neq N_i$ como as funções de ponderação do tipo *upwinding*, usadas como dissipadores artificiais em problemas de dinâmica dos fluidos ou transferência de calor em geometrias contendo constrições. Nesse caso, o método passa a ser chamado Petrov-Galerkin. Posteriormente comentaremos essa abordagem para escoamentos com número de Reynolds (Re) elevado.

Adaptando agora a Eq. 4.1.9 para o domínio de cada elemento, tem-se:

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\Gamma(\phi^{(e)}) - f^{(e)}] N_i^{(e)} d\Omega^{(e)} = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.10)$$

onde n é o número de nós do ELEMENTO geométrico. A partir desse ponto a solução ϕ é uma aproximação da função correta, ϕ^* . Agora o problema é remetido para a questão de como encontrar apropriadas funções de interpolação. Além da restrição de continuidade e completeza, o método de Galerkin ainda restringe mais o leque de opções (ortogonalidade).

Primeiramente, as funções empregadas são as polinomiais pela sua fácil integração e derivação. Sua ordem é determinada a partir do tipo de geometria do elemento (linhas, triângulos, quadriláteros, tetraedros, hexaédros, etc.) e da quantidade de variáveis atribuídas ao elemento (graus de liberdade).

Para manter a restrição de completeza, o polinômio deve possuir invariância à mudança de sistema de coordenadas ortogonais, ou seja, possuir isotropia geométrica. Isso porque a convergência da solução é garantida quando a malha torna-se mais e mais refinada. A isotropia é obtida quando o número de coeficientes do polinômio é igual ao número de variáveis nodais (tais coeficientes são também chamados de coordenadas generalizadas).

Conhecida a ordem do polinômio e o número de coeficientes, é necessário obtê-los. Seus valores são funções da geometria e da manutenção de continuidade entre os elementos (via seus valores nodais). Como uma função polinomial interpola a solução dos nós ao longo do domínio descrito pela geometria do elemento, conhecida a posição espacial e a própria solução em cada nó podemos obter os coeficientes dos polinômios resolvendo um sistema de equações simultâneas. Esse processo, entretanto, envolve inversão de matrizes para cada um dos elementos que descreve o domínio Ω . Para suplantear essa dificuldade, o método das coordenadas naturais foi usado, operando em um sistema de coordenadas locais em que todas as coordenadas do elemento são restritas ao intervalo fechado $[0, 1]$. A vantagem desse método é a forma simples que as integrais de funções no domínio do elemento adquire. Outra vantagem é a possibilidade de elevar a ordem do polinômio. A descrição detalhada desse método, assim como do método das coordenadas generalizadas, pode ser encontrada em livros e não será aqui apresentada.

Como já comentado, a “mínima” ordem do polinômio é definida pelas restrições de continuidade e completeza e, dessa forma, é função da ordem das derivadas do funcional do problema. Como já citado, o polinômio descreve o tipo de interpolação empregada, podendo ser constante, linear, quadrática e assim por diante. É possível aumentar a precisão da solução elevando a ordem do polinômio, o que pela restrição da completeza exige mais nós ao longo do domínio do elemento e mais graus de liberdade. O compromisso entre precisão e graus de liberdade globais é algo que vem à tona nesse tipo de abordagem. Agora, essas funções de interpolação (em função dos coeficientes desconhecidos, que em última análise são os valores nodais) são substituídas nas Eqs. 4.1.10. Assim, para cada elemento, tal integral deve ser resolvida. Para coordenadas naturais, sua solução é simplificada. Entretanto, se transformações de coordenada forem necessárias (geralmente em elementos de geometria curva - uma alternativa em MEF) surgem matrizes jacobianas que podem dificultar a integração analítica. Nesses casos, a integração numérica através do método de Newton-Cotes ou Gauss-Legendre é utilizada (a maioria das referências reporta o uso direto da integração

numérica pelo segundo método, pois pode ser empregado em qualquer tipo de elemento, oferece alta precisão e é extremamente rápido, uma vez que somente poucos pontos da função a ser integrada são usados e calculados na integração).

Com todas as matrizes dos elementos calculadas, as matrizes globais são determinadas (o uso do plural é devido a existência de mais de uma matriz final, de acordo com o problema analisado). A construção é simples e envolve apenas a soma dos efeitos de todas as matrizes locais de acordo com a “ligação” internodal dos elementos.

Obtemos então um sistema (linear ou não-linear) contendo, ou não, derivadas totais no tempo para resolver. Antes da aplicação de algoritmos como Gauss-Siedle para um sistema linear ou Runge-Kutta para uma integração temporal, é necessário a aplicação das condições de Dirichlet de contorno (as condições de Neumann já foram introduzidas na integração por partes das Eqs. 4.1.10). Sem essas, o problema é indefinido pois algumas matrizes do problema possuem pelo menos um autovetor nulo e, portanto, são singulares. Adicionalmente, para um problema do tipo parabólico ou hiperbólico é necessário também aplicar as condições iniciais para $t=0$.

Como podemos notar, o problema é decomposto em partes em que se descreve o comportamento das EDPs com base em propriedades materiais e, principalmente, geométricas. Finalmente, ele é recomposto em um grande sistema de equações envolvendo todas as variáveis nodais que são resolvidas simultaneamente. Apesar da idéia ser simples, alguns problemas técnicos devido ao tamanho dos sistemas simulados foram encontrados e serão detalhados posteriormente.

4.2 Solução Numérica do Escoamento de Ar

A solução das equações de Navier-Stokes (Eq. 3.2) exigiu que desenvolvêssemos uma estratégia híbrida por causa de problemas envolvendo o alto número de Reynolds, grande zona de recirculação pós-construção, quantidade relativamente pequena de elementos finitos nas regiões de gradientes elevados de velocidade e condições de contorno de saída. Assim, nesta seção apresentaremos as decisões e simplificações adicionais consideradas para construir essa abordagem híbrida.

4.2.1 Método Galerkin “Clássico”

A primeira etapa de definição do problema é escolher as condições de contorno apropriadas. Dentre os tipos existentes, usamos as condições de Dirichlet (ou essenciais) e as de Neumann (ou naturais). As condições essenciais para o escoamento de ar são:

$$(U_v)_i = (U_v)_i^0, i \in \{\text{nós de } \partial\Omega\}, \quad (4.2.1)$$

ou seja, alguns vetores velocidade situados na superfície de contorno são fixados com valores conhecidos do escoamento. No problema do escoamento de ar na laringe, definimos velocidade nula ao longo das paredes do músculo.

Já as condições naturais (nome atribuído ao fato dessas “naturalmente” aparecerem no equacionamento durante a aplicação do teorema de Gauss) são definidas por:

$$\mu_f [n \cdot \nabla U_v + \nabla(n \cdot U_v)] - P n = T, \quad i \in \{\text{nós de } \partial\Omega\}, \quad (4.2.2)$$

onde T é o valor da tração atribuída e n é o vetor normal a superfície do domínio.

Note que a pressão não é atribuída como uma condição de contorno de Dirichlet, mas como uma condição de Neumann (somente em casos especiais de escoamento em cavidades fechadas é que existe a possibilidade criteriosa de fazer uso de condições essenciais para pressão). Pelo fato da pressão ser vista como um multiplicador de Lagrange, que garante a incompressibilidade do escoamento, ela é automaticamente ajustada (diz-se que a pressão “se propaga” com velocidade infinita pelo domínio para se ajustar ao escoamento).

Como a laringe é um tubo, excitamos o escoamento usando as condições de Neumann aplicadas na entrada (pressão subglotal) e na saída (pressão supraglotal) da laringe. Alguns comentários adicionais serão feitos particularmente na condição de contorno de saída.

As equações de Navier-Stokes não possuem variacional, diferente do que acontece com as equações do músculo. Assim, a tarefa de discretizá-las por MEF é feita através do método dos resíduos ponderados, mais especificamente Bubnov-Garlekin, em que as funções de interpolação são iguais às funções de ponderação. Primeiro porque essas garantem a melhor solução (Gresho e Sani, 1998) e a solução obtida é a mais próxima da real. O uso de outras funções, como as encontradas no método de Petrov-Garlekin, produz dissipação artificial de modo a “reorganizar” os vetores velocidades na “suposta” correta direção, mas “esconde” prováveis problemas na solução como *wiggles* (Gresho e Lee, 1979). Tais *wiggles* são indicadores de falta de nós para melhor discretizar largos gradientes que se formam na vizinhança da constrições.

Para discretizar o domínio de solução, usamos tetraedros como elementos geométricos, pois hexaedros e outros polígonos exigem um cuidado maior durante a geração da malha (e deformação principalmente), pois podemos ter elementos degenerados que inviabilizam a inversão de algumas matrizes ou produção de jacobianos por causa das dificuldades numéricas impostas. Além disso, a integração de funções polinomiais sobre a superfície ou volume dos elementos pode ser facilmente realizada analiticamente (o que foi feito).

Aplicando o método de Galerkin nas Eqs 3.1 e 3.2 e admitindo estacionaridade (sem o termo de derivada temporal), temos para o caso tridimensional:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left\{ \rho \left[U_{vx}^{(e)} \frac{\partial U_{vx}^{(e)}}{\partial x} + U_{vy}^{(e)} \frac{\partial U_{vx}^{(e)}}{\partial y} + U_{vz}^{(e)} \frac{\partial U_{vx}^{(e)}}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial(\sigma_x - P^{(e)})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] - \rho F_{vx} \right\} G_i d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \left\{ \rho \left[U_{vx}^{(e)} \frac{\partial U_{vy}^{(e)}}{\partial y} + U_{vy}^{(e)} \frac{\partial U_{vy}^{(e)}}{\partial y} + U_{vz}^{(e)} \frac{\partial U_{vy}^{(e)}}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - P^{(e)})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right] - \rho F_{vy} \right\} G_i d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \left\{ \rho \left[U_{vx}^{(e)} \frac{\partial U_{vz}^{(e)}}{\partial z} + U_{vy}^{(e)} \frac{\partial U_{vz}^{(e)}}{\partial z} + U_{vz}^{(e)} \frac{\partial U_{vz}^{(e)}}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_z - P^{(e)})}{\partial z} \right] - \rho F_{vz} \right\} G_i d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \left[\frac{\partial U_{vx}^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial U_{vy}^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{vz}^{(e)}}{\partial z} \right] H_i d\Omega &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

onde $U_{vx}^{(e)}$, $U_{vy}^{(e)}$, $U_{vz}^{(e)}$ são os componentes do vetor velocidade $U_v^{(e)}$, $P^{(e)}$ é o escalar pressão e todos esses representam a solução dentro do elemento (e), G_i e H_i são funções de ponderação com $i=1, 2, \dots, n$ (n é o grau de liberdade ou número de nós dentro do elemento).

A derivação completa não será apresentada mas apenas os passos serão descritos para obtenção das equações discretizadas. O próximo passo é aplicar o teorema de Gauss nas Eqs. 4.2.3 ou seja:

$$\int_{\Omega} W(\nabla \cdot F) d\Omega = \int_{\partial\Omega} W(F \cdot n) d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} F \cdot \nabla W d\Omega, \tag{4.2.4}$$

onde W é uma função escalar, F é uma função vetorial e n é o vetor normal à superfície de Ω . Entretanto, há uma exceção: não se aplica tal teorema nos termos de convecção pois não temos condições de Neumann para eles.

Neste ponto as funções de interpolação são introduzidas. A primeira idéia seria usar a mesma função polinomial para os componentes de velocidade e para a pressão (quatro variáveis por nó). Entretanto, análises matemáticas (Huyakorn et al., 1977; Gresho e Sani, 1998; Sani et al., 1980) demonstram que essa abordagem é incorreta e “delimitam” do que as funções de interpolação dos componentes de velocidade devem ser no mínimo uma ordem maior que as da pressão. Caso ambas sejam de mesma ordem, será produzido o “tabuleiro de damas” nas soluções obtidas para a pressão (Gresho e Sani, 1987). Dessa forma, foi admitido que os vetores velocidade têm variação quadrática e a pressão tem variação linear ao longo do elemento. Assim, para a velocidade, em vez de apenas quatro nós por elemento, tem-se 10 nós (6 localizados nas arestas do tetraedro, onde apenas a velocidade é computada). Ou seja, os polinômios são:

$$\begin{aligned}
U_{vx}^{(e)} &= \sum_{i=1}^{10} N_i (U_{vx})_i^{(e)*}, \quad U_{vy}^{(e)} = \sum_{i=1}^{10} N_i (U_{vy})_i^{(e)*}, \quad U_{vz}^{(e)} = \sum_{i=1}^{10} N_i (U_{vz})_i^{(e)*} \\
P^{(e)} &= \sum_{i=1}^4 N_i^P P_i^{(e)*},
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

onde $(U_{vx})_i^{(e)*}$, $(U_{vy})_i^{(e)*}$, $(U_{vz})_i^{(e)*}$ e $P_i^{(e)*}$ representam a solução no i -ésimo nó do e -ésimo elemento, N_i é a função de interpolação para os componentes de velocidade e N_i^P para a pressão.

Outros estudos (Rice e Schnipke, 1986; Sampaio, 1991; Tedzuyar et al., 1992) desenvolveram métodos alternativos de modo que variações lineares pudessem ser usadas simultaneamente para os vetores velocidade e pressões. Isso implicaria no acréscimo de termos na formulação discreta do escoamento por MEF e não a utilizamos por uma questão de decisões iniciais de projeto. Por exemplo, no nosso caso o número de elementos é menor do que o exigido para essa abordagem.

Como usamos inicialmente o método de Galerkin, $G_i = N_i$ e $H_i = N_i^p$, obtivemos a seguinte equação matricial que representa o problema “do ponto de vista” de MEF (automaticamente incorporando as condições de contorno essenciais de Neumann):

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 2K_{1,1} + K_{2,2} + K_{3,3} & K_{1,2} & K_{1,3} & L_1 \\ K_{2,1} & K_{1,1} + K_{2,2} + K_{3,3} & K_{2,3} & L_2 \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{1,1} + K_{2,2} + 2K_{3,3} & L_3 \\ -L_1^T & -L_2^T & -L_3^T & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} U_{vx}^{(e)} \\ U_{vy}^{(e)} \\ U_{vz}^{(e)} \\ P^{(e)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} R_{v1}^{(e)} \\ R_{v2}^{(e)} \\ R_{v3}^{(e)} \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} C_1 + C_2 + C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 + C_2 + C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 + C_2 + C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (4.2.6)$$

onde cada elemento da matriz é uma matriz, $U_{vx}^{(e)}$, $U_{vy}^{(e)}$, $U_{vz}^{(e)}$ e $P^{(e)}$ são vetores (desconhecidos) contendo as soluções nodais e o vetor à direita contém elementos vetoriais. Ou seja, ao final temos um sistema de equações lineares para cada elemento geométrico do tipo:

$$K^{(e)}(U_v^{(e)}) \left\{ \begin{array}{c} U_v^{(e)} \\ P^{(e)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_v^{(e)} \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (4.2.7)$$

A matriz de advecção (*advection*) K representando o efeito de viscosidade é:

$$K_{ij}^{l,m} = \mu_f \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} d\Omega, \quad (4.2.8)$$

onde os índices l e m pertencem ao intervalo fechado $[1, 10]$ e indicam a posição do elemento a ser integrado dentro da matriz K_{ij} . As variáveis x_k representam a coordenada empregada na derivação ($x_1=x$, $x_2=y$ e $x_3=z$). Essa matriz é simétrica e singular, o que simplifica a verificação dos seus componentes após a sua integração.

A matriz de divergência L (ou matriz gradiente, L^T) é definida por:

$$L_i^{l,m} = - \int_{\Omega^{(e)}} N_l \frac{\partial N_m}{\partial x_i} d\Omega. \quad (4.2.9)$$

A matriz de convecção, representada pela matriz C , é definida por:

$$C_i^{l,m} = \rho \int_{\Omega^{(e)}} N_l U_{vi} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} d\Omega = \rho \int_{\Omega^{(e)}} N_l \left[\sum_{k=1}^{10} N_k (U_{vi}^{(e)})_k \right] \frac{\partial N_m}{\partial x_i} d\Omega, \quad (4.2.10)$$

onde $U_{vi}^{(e)}$ representa a direção do vetor velocidade empregada ($U_{v1}^{(e)}=U_{vx}^{(e)}$, $U_{v2}^{(e)}=U_{vy}^{(e)}$ e $U_{v3}^{(e)}=U_{vz}^{(e)}$). O vetor U_{vi} representa a velocidade em todo o volume do elemento (aproximada pela expressão entre colchetes).

Algumas peculiaridades podem ser vista na matriz C . Primeiramente, ela representa uma integração de três funções de interpolação. Apesar de aparentemente complexa, sua integração é simples (apesar de trabalhosa). Alguns textos referem-se a ela como uma hipermatriz e apresentam método de índices para melhor operá-la.

Outro estratagema observado é a “linearização” de C , isto é, parte dos vetores velocidade é mantida nas matrizes C enquanto outra parte é isolada no vetor das variáveis desconhecidas. Essa separação é feita para permitir a resolução iterativa, ao invés de direta (com termos quadráticos). A porção de vetores

velocidade mantida nessa matriz são valores calculados na iteração anterior. O algoritmo para tal solução será apresentado posteriormente.

Finalmente, os vetores R_{vi} , representando principalmente o efeito produzido pelas condições de Neumann para o problema, são definidos por:

$$R_{vi}^l = \int_{\partial\Omega^{(e)}} \sigma_{x_i} N_l n_{x_i} d(\partial\Omega) + \rho \int_{\Omega^{(e)}} F_{v x_i} N_l d\Omega, \quad (4.2.11)$$

onde n_{x_i} corresponde ao componente do vetor normal à superfície $\partial\Omega$ e σ_{x_i} é o componente da tensão normal (ou basicamente pressão, pois essa é a informação conhecida) sobre tal superfície, ambos na direção x_i . Note que enquanto a primeira integral é calculada somente sobre as porções da superfície onde se conhece as condições de Neumann, o efeito das forças de corpo (no caso, gravidade) é calculado para todos os elementos.

Enfim, o sistema representado pela Eq. 4.2.6 pode ser reescrito, simplificadamente, por:

$$K^{(e)}(U_v^{(e)}) \begin{Bmatrix} U_v^{(e)} \\ P^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_v^{(e)} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Apesar dessa matriz ser a versão discretizada das equações de NS para os elementos finitos, individualmente, a matriz global tem o mesmo formato, pois todas as matrizes “locais” são somadas para formar as versões globais (incluindo os termos não-lineares), ou seja:

$$K(U_f)U_f = R_f. \quad (4.2.13)$$

onde U_f representa o vetor global de velocidades e pressões nos nós da malha.

A solução da Eq. 4.2.13 exige um procedimento mais complexo o do que usado para problemas “tradicionais” de MEF. Primeiramente, a matriz $K(U_v)$ é não-linear e, segundo, ela é não-simétrica. Isso exige algoritmos mais versáteis e, dessa forma, mais complicados, pois a quantidade de memória e esforço computacional são muito maiores. Mais detalhes sobre as técnicas computacionais usadas para fatoração e solução dos sistemas de equações lineares serão dadas na seção posterior.

Para resolver o problema não-linear de MEF, a técnica de Newton-Raphson (NR) foi tentada. Como todo procedimento iterativo, esse exige um adequado valor inicial para o sistema convergir para a solução correta. Além disso, é necessário determinar-se o jacobiano da Eq. 4.2.13.

O método de NR baseia-se na expansão de Taylor do seguinte problema:

$$K(U_f^n)\{U_f^n\} - R_f = F(U_f^n) = 0. \quad (4.2.14)$$

Assim, temos que:

$$F(U_f^n + \delta U_f) = F(U_f^n) + J(U_f^n) \cdot \delta U_f + O((\delta U_f)^2), \quad (4.2.15)$$

onde o jacobiano (J) é definido por:

$$J_{ij}(U_f^n) = \frac{\partial F_i(U_f^n)}{\partial x_j}. \quad (4.2.16)$$

A construção da matriz jacobiana foi feita analiticamente pois no método de Bubnov-Galerkin as integrais sobre os tetraedros são simples. A matriz resultante é definida por:

$$J = K^{(e)}(U_f^{(e)}) + N'(U_f^{(e)}), \quad (4.2.17)$$

onde

$$(N_{ij}^{l,m})' = \rho \sum_{k=1}^{10} (U_{vi}^{(e)})_k \int_{\Omega^{(e)}} N_l N_m \frac{\partial N_k}{\partial x_j} d\Omega, \quad (4.2.18)$$

Desprezando-se o termo de segunda ordem da Eq. 4.2.15, assumindo-se o seu lado esquerdo igual a zero (resíduo final nulo) e reagrupando-se os termos remanescentes, temos:

$$J(U_f^{m-1}) \cdot \delta U_f = -F(U_f^{m-1}). \quad (4.2.19)$$

Uma vez que o incremento do vetor de velocidades/pressões é determinado, temos:

$$U_f^m = U_f^{m-1} + \delta U_f. \quad (4.2.20)$$

Note que a matriz $K(U_f)$ e $J(U_f)$ precisa ser construída a cada iteração até que algum critério de convergência seja atingido. Outro ponto observado é que apesar de tratar-se de uma convergência quadrática, exige-se um bom vetor inicial U_f^0 . Para controlar a convergência, entretanto, aplicamos relaxação nas iterações, substituindo a Eq. 4.2.20 por:

$$\begin{aligned} U_v^n &= U_v^{n-1} + \alpha_u \cdot \delta U_v, \\ P^n &= P^{n-1} + \alpha_p \cdot \delta P, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

onde $U_f^n = \{(U_v^n)^T; (P^n)^T\}^T$, $\delta U_f^n = \{(\delta U_v^n)^T; (\delta P^n)^T\}^T$, e α_u e α_p são, respectivamente os fatores de relaxamentos para velocidade e pressão. Determinamos tais fatores empiricamente usando testes com escoamentos de $Re=100$. Verificamos que os valores ótimos eram $\alpha_u = \alpha_p = 0,5$ para NR.

O passo inicial foi fornecido pela simulação das equações de Stokes (escoamento viscoso sem advecção, ou seja, termo não-linear), que tecnicamente é definido por $U_f^0 = \{0\}$ na Eq. 4.2.13. Mesmo sendo um sistema assimétrico, esse pode tornar-se simétrico por um truque matemático aplicado nas equações de continuidade. Isso não foi feito, pois o algoritmo de fatoração LU, para resolver um sistema de equações lineares, é extremamente eficiente mesmo para matrizes assimétricas.

Entretanto, mesmo com esse passo inicial, a convergência oscila grandemente no início da convergência e pode perder a trilha na direção da solução correta devido a peculiaridades numéricas como o elevado número de Reynolds causado pela “alta” pressão nos pulmões. Tudo porque o raio de convergência de NR é pequeno. Para evitar esses problemas, usou-se o processo de iteração de Piccard devido ao seu grande raio de convergência para poucos passos iniciais (após a solução de Stokes). Isso garante que mesmo em grandes oscilações, o sistema (mesmo convergindo linearmente) atinja o reduzido raio de convergência de NR e a partir desse ponto, seja resolvido por NR. Tal processo é definido a partir da Eq. 4.2.13 com uma pequena modificação:

$$K(U_f^{m-1})U_f^m = R_f. \quad (4.2.22)$$

A cada iteração obtemos um novo vetor de solução que é reaplicado na Eq. 4.2.22. Uma variante desse método foi utilizada para novamente evitar um grande número de iterações devido à oscilação inicial:

$$\begin{aligned} K(U_f^{n-1})U_f^* &= R_f \\ U_v^n &= a_u U_v^{n-1} + (1 - a_u)U_v^* \\ P^n &= a_p P^{n-1} + (1 - a_p)P^*. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Da mesma forma que em NR, o método de substituição sucessiva funcionou melhor quando $\alpha_u = \alpha_p = 0,5$. Note que a rigor, uma sucessão de sistemas de equações lineares é criada e precisa ser resolvida. Isso exige um considerável tempo de computação. Alguns trabalhos (Gresho et al., 1980) sugerem o uso do método de Newton-Modificado, em que o jacobiano da Eq. 4.2.19 é calculado apenas na primeira iteração, fatorado e usado para as iterações posteriores. Entretanto, o problema analisado era transiente e a cada iteração (no tempo) de um integrador - Adams-Bashforth - um adequado passo inicial para a solução de um problema não-linear similar era produzido. Isso finalmente, eliminava a necessidade do passo de Piccard e apenas exigia poucos passos de iteração, chegando ao ponto de Gresho et al. (1980) sugerirem que apenas um passo de Newton era suficiente para a obtenção de bons resultados.

A convergência das equações para a solução correta exige um adequado critério de parada dos métodos iterativos. A primeira possibilidade é avaliar se o valor absoluto da alteração em todos os nós é menor do que uma determinada tolerância ε_0 . Entretanto, esse método é extremamente dependente da magnitude das velocidades e pressões. Para melhorar essa estimativa foi sugerida (Yamada et al., 1975) uma modificação em tal procedimento:

$$\max \left(\left| \frac{(U_{vx})_i^n - (U_{vx})_i^{n-1}}{(U_{vx})_i^n} \right|, \left| \frac{(U_{vy})_i^n - (U_{vy})_i^{n-1}}{(U_{vy})_i^n} \right|, \left| \frac{(U_{vz})_i^n - (U_{vz})_i^{n-1}}{(U_{vz})_i^n} \right|, \left| \frac{P_i^n - P_i^{n-1}}{P_i^n} \right| \right) \leq \varepsilon_0, \quad (4.2.24)$$

ou seja, a máxima diferença relativa entre todas as pressões e componentes de velocidade em todos os nós na iteração atual (n) e na iteração anterior (n-1) deve ser inferior a um valor tolerável (no caso, 10^{-6}).

Algumas considerações são importantes. Primeiramente como já visto, a pressão não é utilizada na computação dos componentes de advecção. Outro ponto importante é que tal variável é vista como um multiplicador de Lagrange que automaticamente se ajusta para garantir a manutenção da equação de continuidade. Por essas peculiaridades, outra forma de avaliar a convergência foi proposta (no programa comercial Fluent FIDAP) envolvendo a avaliação da norma relativa entre os componentes de velocidade no estado atual e no estado anterior, ou seja:

$$\frac{\|U_v^n - U_v^{n-1}\|}{\|U_v^n\|} \leq \varepsilon_0. \quad (4.2.25)$$

Geralmente, $\varepsilon_0=10^{-4}$ é sugerido para o método completo de NR enquanto $\varepsilon_0=10^{-5}$ para Newton-Modificado, (Gresho et al. 1984a; Gresho et al. 1984b). Empregamos no trabalho $\varepsilon_0=10^{-4}$ para todos os métodos iterativos estudados. Complementando esse critério, uma avaliação baseada no resíduo (Eq. 4.2.14) foi também usada, pois esse também tende a zero quando a correta solução é atingida. Assim, tem-se:

$$\frac{\|K(U_f^{n+1})U_f^{n+1} - R_f\|}{N_{\text{nodos}}} = \frac{\|F(U_f^{n+1})\|}{N_{\text{nodos}}} \leq \varepsilon_1, \quad (4.2.26)$$

onde ε_1 é igual a 10^{-10} , independente do método iterativo de solução e N_{nodos} é o número de graus de liberdade do problema.. Particularmente esse último método é útil quando os fatores de relaxação são muito pequenos. Isso ocorre quando empregamos *linear-searchers* na iteração.

Os resultados preliminares mostraram que o emprego da estratégia Stokes-Piccard-NR fornecia resultados adequados com um número de iterações não muito grande. Entretanto notamos que NR era muito sensível à geometria analisada. Muitas vezes a solução produzida por Stokes-Piccard convergia, entretanto, NR subitamente oscilava e divergia. Concluímos que tais condições de contorno de saída também afetavam fortemente NR. Confirmamos também que NR é muito sensível ao passo inicial. Como excitamos o escoamento por diferença de pressão (mais precisamente por tensões, via condição de Neumann), as velocidades obtidas para o problema de Stokes ($K(\{0\})U_f^0 = R_f$) eram muito maiores do que as da solução final. Quando o escoamento era excitado por velocidades na face de entrada (condição de Dirichlet não-nula) e admitindo-se a tensão nula na face de saída, as pressões eram bem maiores do que as da solução final. Os experimentos de Gartling et al. (1977) demonstram dificuldades de convergência similares para um problema de escoamento em cavidade (*cavity flow*). Esses dois fatos mesmo que “opostos” mostram que as iterações iniciais oscilam grandemente e exigem inicialmente valores de relaxação α_u e α_p menores do que nas iterações finais. Ou seja, um método de relaxação variável era necessário. Algoritmos para relaxação adaptativa são também conhecidos como *linear-searchers*.

O primeiro algoritmo de relaxação adaptativa desenvolvido operou em conjunto com NR, o qual chamamos NRLS. Ele foi executado logo após a realização de um conjunto de 5 iterações do método de Piccard - este número é baseado apenas em observações iniciais do erro de convergência.

O princípio é buscar uma solução U_f de tal forma a minimizar o quadrado do resíduo, ou seja:

$$\min f = \frac{1}{2} \cdot (K(U_f) - R_f)^T \cdot (K(U_f) - R_f) = \frac{1}{2} \cdot F(U_f)^T \cdot F(U_f). \quad (4.2.27)$$

Isso implica em:

$$\nabla f \cdot \delta \bar{U} = \{F(U_f)^T \cdot J(U_f)\} \cdot \{-J(U_f)^{-1} \cdot F(U_f)\} = -F(U_f)^T \cdot F(U_f) < 0, \quad (4.2.28)$$

ou seja, devemos achar α na Eq. 4.2.27 tal que a Eq. 4.2.28 seja sempre menor do que zero. A idéia básica é que o mínimo para a Eq. 4.2.28 seja um indicativo da direção da solução da Eq. 4.2.13. Infelizmente, os resultados que obtivemos convergiam em sua grande maioria para mínimos locais.

A primeira providência foi buscar um método alternativo ao Newton-Raphson, que possuía uma bacia de convergência bastante reduzida para o problema matricial analisado. Os trabalhos de Matthies e Strange (1979) e Engelman et al. (1981), particularmente o último, mostraram que o método de Quasi-Newton (QN) com algumas modificações poderia produzir grande velocidade de convergência com relativa robustez. O método por eles apresentado possui também um *linear-search* onde α é o valor que zera a Eq. 4.2.29:

$$G(a) = \delta U_f^T \cdot F(U_f - a \cdot \delta U_f). \quad (4.2.29)$$

Isso foi feito através de uma modificação no método de *regula-falsi* que busca o zero com uma determinada tolerância numérica. O método de Quasi-Newton baseia-se na seguinte recursão:

$$(J^i)^{-1} = [I - \rho^i \cdot t^i \cdot (\gamma^i)^T] \cdot (J^{i-1})^{-1} \cdot [I - \rho^i \cdot (\gamma^i)^T \cdot t^i] + \rho^i \cdot t^i \cdot (t^i)^T, \quad (4.2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} t^i &= U_f^i - U_f^{i-1} = -a_{i-1} \cdot \delta U_f^{i-1} \\ \gamma^i &= [K(U_f^i)U_f^i - R_f] - [K(U_f^{i-1})U_f^{i-1} - R_f] \\ \rho^i &= \frac{1}{(t^i)^T \cdot \gamma^i}. \end{aligned}$$

Assim, ao invés de utilizarmos diretamente a matriz jacobiana inversa para o cálculo da nova direção $\delta U^i = (J^i)^{-1} \cdot \{K(U_f^i)U_f^i - R_f\}$, a seguinte recursão foi usada:

1. Calcule $q_i = \{K(U_f^i)U_f^i - R_f\}$
2. Para $j=i-1$ até 0
3. Calcule $\beta^j = \rho^{j+1} \cdot (t^{j+1})^T \cdot q^{j+1}$
4. Calcule $q^j = q^{j+1} - \gamma^{j+1} \cdot \beta^j$
5. Fim Para
6. Resolva $J^0 \cdot \delta U_f^0 = q^0$
7. Para $j=1$ até i
8. Calcule $\delta U_f^j = \delta U_f^{j-1} + t^j \cdot (\beta^{j-1} - \rho^j \cdot (\gamma^j)^T \cdot \delta U_f^{j-1})$
9. Fim Para

Note que a cada iteração, α_i é estimado através do método *linear-search* já mencionado. Podemos perceber no passo 6 que não é necessário resolver o sistema diretamente. Basta fatorar a matriz J^0 uma única vez e resolver aquela equação aplicando os fatores LU sobre q_0 . Outro ponto importante é que armazenamos apenas um subconjunto m dos vetores δU_f^k , β^k e do escalar ρ^k ao invés de todos estes vetores ($i=m$). Quando tal limite (m) é atingido, a matriz jacobiana é atualizada e novas seqüências dos vetores e escalar são armazenadas. Isso equivale dizer que a cada m passos a matriz $J^0 = J^i$, reiniciando assim os passos como se i fosse zero. Nas análises realizadas, $m=10$.

Apesar da melhora na convergência, quando se atingia os valores de pressão desejados (os testes iniciavam com pequenas quedas de pressão nas faces de entrada e de saída até se atingir os valores desejados para a fonação) ainda tivemos problemas de divergência para alguns perfis geométricos.

Para melhor demonstrarmos os problemas de convergência, desenvolvemos um problema simples mas de difícil solução. A geometria foi definida por um tubo com 2 cm de comprimento e 2 cm de diâmetro, com uma constrição elíptica de diâmetros 1 e 0,5 cm. A diferença de pressão entre a entrada e saída do tubo foi de 80 dina/cm². Na superfície do tubo, a condição de Dirichet (velocidade nula) foi usada. O fluido foi o ar. Tal problema gera um escoamento com alta vazão que dificulta a obtenção da solução devido à proximidade das extremidades do tubo com a constrição. Para complicar mais, a malha continha 372 nós lineares e 2333 nós quadráticos, ou seja, uma malha grossa (*coarse*).

Primeiramente mostraremos a sensibilidade do método NR em relação aos passos iniciais. A Figura 4.2.1 mostra que usando algumas iterações de Piccard (2 no presente caso, com $\alpha_u=0,5$ e $\alpha_p=0,5$) antes de aplicar o método NR, ajuda significativamente a convergência. Conforme comentado, o método de Piccard possui uma bacia de convergência maior do que o método de NR.

Figura 4.2.1 - Influência das iterações iniciais na convergência do método Newton-Raphson (NR).

Adicionalmente, testamos igualmente a influência das iterações iniciais na convergência do algoritmo (QN) para solução do escoamento. A Figura 4.2.2 mostra os resultados obtidos.

Figura 4.2.2 - Influência das iterações iniciais na convergência do método Quasi-Newton (QN).

Os resultados indicaram que o método QN (que emprega um *linear-search*) converge mais rapidamente do que o método NR. Aparentemente o fato de reter a matriz jacobiana intacta por m passos e o controle do passo oferecido pelo *linear-search* competem para fornecer tal resultado. Note que apesar das curvas na Figura 4.2.2 indicarem uma divergência do método, o caso geral - que nós comprovamos - é que QN é melhor em velocidade de convergência e tem menor sensibilidade aos passos iniciais do que NR.

Adicionalmente, podemos ver pelas Figuras 4.2.1 e 4.2.2 que os métodos apresentados (NR e QN) não forneceram a robustez exigida pelo problema do escoamento de ar na laringe.

4.2.2 Método não-estacionário

Nas tentativas apresentadas anteriormente ficou patente que o U_f^0 inicial, mesmo que obtido através da solução de um problema de Stokes, ainda estava suficientemente longe da bacia de convergência dos algoritmos, dificultando, assim, obtenção da solução para escoamentos com número de Reynolds elevado. Ou seja, ficou evidente a necessidade de algum termo ser somado ao sistema matricial (Eq. 4.2.13) nas iterações iniciais para “controlar” a convergência até a solução correta.

Assim, usamos o artifício de que na versão não-estacionária de NS, para $\Delta t \rightarrow \infty$, U_v torna-se estacionário ($\frac{dU_v}{dt} = 0$) seguindo a proposta de Gresho et al. (1978), Gresho et al. (1980) e Gresho e Sani (1998). O sistema matricial resultante para a discretização de NS incompressível, não-estacionário e laminar é:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_v \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{a+c}(U_v) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_v \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_v \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.2.31)$$

onde

$$K_{a+c} = \begin{bmatrix} K_{1,1} + K_{2,2} + K_{2,2} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{1,1} + K_{2,2} + K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{1,1} + K_{2,2} + K_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & & \\ & C & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad R_v = \begin{Bmatrix} R_{v1} \\ R_{v2} \\ R_{v3} \end{Bmatrix}, \quad U_v = \begin{Bmatrix} U_{vx} \\ U_{vy} \\ U_{vz} \end{Bmatrix}.$$

As submatrizes K_{ij} , L_i , C e R_{vi} são definidas pelas Eqs. 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.11 respectivamente. U_v contém os componentes globais dos vetores velocidade.

A matriz M é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} M' & 0 & 0 \\ 0 & M' & 0 \\ 0 & 0 & M' \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

$$M^{l,m'} = \rho \int_{\Omega(e)} N_l N_m d\Omega,$$

onde N_k é a função de interpolação associada ao k -ésimo nó do tetraedro e ρ é a densidade do fluido.

Esse método usou duas técnicas de integração numérica de segunda ordem: a regra trapezoidal implícita e a fórmula explícita de Adams-Bashforth. O Δt foi automaticamente definido pela função de erro de integração dessas duas técnicas, quando as suas séries de Taylor são avaliadas.

A iniciação do método exigiu uma solução de velocidades dita solenoidal, ou seja, que verificasse a equação de continuidade ($\nabla \cdot U_v^0 = 0$) - a pressão é automaticamente determinada, pois somente um único vetor de pressões é associado ao vetor de velocidades. A aceleração inicial foi obtida resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} M & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_v^0 \\ P^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_f - K_{a+c}(U_v^0)U_v^0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.33)$$

Com as condições iniciais de integração determinadas, iniciou-se a integração propriamente dita. Essa envolve primeiramente um passo preditor (Adams-Bashforth) em que o vetor de velocidades foi estimado e posteriormente, corrigido para formar o vetor de velocidades da n-ésima iteração.

$$U_{v*}^{n+1} = U_v^n + \frac{\Delta t_n}{2} \cdot \left[\left(2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \right) \cdot \dot{U}_v^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \dot{U}_v^{n-1} \right]. \quad (4.2.34)$$

No passo corretor (regra trapezoidal), tem-se o seguinte sistema de equações a resolver, pois essa é uma técnica implícita:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t_n} M + K_{a+c}(U_v^{n+1}) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_v^{n+1} \\ P^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \cdot \left(\frac{2}{\Delta t_n} \cdot U_v^n + \dot{U}_v^n \right) + R_v \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.35)$$

Como esse sistema é semelhante ao da Eq. 4.2.13, ele é resolvido usando o método de Newton-Raphson através do que se intitula “método de Newton de um passo”, pois ao invés de se determinar iterativamente a solução da Eq. 4.2.35 até que um erro de convergência fosse alcançado, somente uma iteração é feita. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t_n} M + [K_{a+c} + K'_{a+c}](U_{v*}^{n+1}) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta U_v^{n+1} \\ \delta P^{n+1} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} M \cdot \left(\frac{2}{\Delta t_n} \cdot U_v^n + \dot{U}_v^n \right) + R_v \\ 0 \end{Bmatrix} - \\ &\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t_n} M + K_{a+c}(U_{v*}^{n+1}) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{v*}^{n+1} \\ P^n \end{Bmatrix} \quad (4.2.36) \\ \begin{Bmatrix} U_v^{n+1} \\ P^{n+1} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \delta U_v^{n+1} \\ \delta P^{n+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{v*}^{n+1} \\ P^n \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

O emprego desse método é baseado no fato de que U_{v*}^{n+1} já é um “excelente” passo inicial para convergência. Outra justificativa importante para essa simplificação é o fato de que a matriz M, ponderada por $2/\Delta t_n$, “controla” a magnitude das velocidades pela característica inercial das equações de NS não-estacionárias. Inicialmente Δt é pequeno e a ponderação sobre M é grande. Com o passar do “tempo”, Δt é incrementado pelo passo adaptativo e o termo inercial de NS se torna desprezível.

Finalmente, a aceleração é atualizada:

$$\dot{U}_v^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n} \cdot (U_v^{n+1} - U_v^n) - \dot{U}_v^n. \quad (4.2.37)$$

As equações acima formam os passos para se atingir iterativamente a estacionariedade.

Os critérios de parada são os mesmos adotados para as técnicas iterativas convencionais, ou seja, Eqs. 4.2.25 e 4.2.26. Note que no cálculo do resíduo para controle de convergência, o sistema de equações considerado são as Eqs. 4.2.13 ao invés das Eqs. 4.2.31.

A adaptação do passo temporal foi baseada na seguinte norma:

$$\|d_T\|^2 \equiv \frac{1}{N_x + N_y + N_z} \left[\frac{1}{(U_{vx})_{\max}^2} \sum_{i=1}^{N_x} d(u_x)_i^2 + \frac{1}{(U_{vy})_{\max}^2} \sum_{i=1}^{N_y} d(u_y)_i^2 + \frac{1}{(U_{vz})_{\max}^2} \sum_{i=1}^{N_z} d(u_z)_i^2 \right], \quad (4.2.38)$$

Onde $(U_{vx})_{\max}$, $(U_{vy})_{\max}$ e $(U_{vz})_{\max}$ são os valores máximos dos componentes x, y e z de velocidade, respectivamente, do vetor U_v^{n+1} ; N_x , N_y e N_z são os números de componentes de velocidade em x, y e z, respectivamente; e $d(u_x)_i$ (e similarmente $d(u_y)_i$ e $d(u_z)_i$) é dado por:

$$du_i = \frac{U_v^{n+1} - U_{v*}^{n+1}}{3 \cdot \left(1 + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n}\right)}, i = 1, 2, \dots, N_u. \quad (4.2.39)$$

Com a Eq. 4.2.38, definimos então a expressão de atualização de Δt , ou seja:

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \cdot \left(\frac{\mathbf{e}}{\|d_T\|} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.2.40)$$

onde $\mathbf{e}$ é um parâmetro definido pelo usuário e está intimamente relacionado com a teoria de estimação do erro de integração baseada na série de Taylor, comportamento oscilatório quando grandes d_T são empregados e dificuldades inerentes ao passo corretor pois U_{v*}^{n+1} pode tornar-se muito distante de U_v^{n+1} . Notou-se por tentativa e erro que $\mathbf{e}=0,0001$ era um valor adequado para o problema apesar de Gresho et al. (1980) adotar $\mathbf{e}=0,001$ como sendo um valor quase-ótimo. Essa diferença pode estar relacionada com a diferença de tamanho e quantidade de pontos da malha entre os dois problemas.

Um procedimento adicional baseado em princípios qualitativos de custo-benefício foi também aplicado:

1. se $\Delta t_{n+1} > \Delta t_n$, aceita-se o incremento de tempo;
2. se $\Delta t_{n+1} < \Delta t_n$ e $\Delta t_{n+1} > 0,8 \Delta t_n$, aceita-se a solução mas $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n$;
3. se $\Delta t_{n+1} < 0,8 \Delta t_n$, aceita-se redução mas rejeita-se a solução atual (repete-se o passo com o decremento de tempo).

Esse método apresentou resultados satisfatórios de convergência apesar de exigir um número elevado de passos. Entretanto, ainda não se conseguiu uma robustez para muitos escoamentos de “alta velocidade”. Muitas vezes Δt_n atingia um patamar máximo (o qual não se conseguia ultrapassar), após esse valor começava decair automaticamente e tornava a convergência instável a partir desse ponto.

Apesar de sua ineficácia, em alguns casos de teste, o método apresentado forneceu alguma idéia de como a solução do escoamento poderia ser obtida.

4.2.3 Método Segregado

Em todos os métodos apresentados anteriormente, as equações de momento acoplavam-se entre si e às equações de continuidade e, dessa forma, exigiam que um grande sistema de equações fosse resolvido simultaneamente.

Alternativamente, os métodos ditos segregados (Patankar, 1980; Benin e Zinser, 1985; Haroutunian et al., 1993) permitem que os componentes de velocidade e pressão sejam resolvidos separadamente o que acarreta em uma redução dos requisitos de memória. O contraponto seria a necessidade de um número maior

de iterações para que a solução final fosse atingida. Entretanto, mesmo com um número de iterações superior ao dos métodos tradicionais/acoplados, o tempo de fatoração das matrizes que surgem no processo de solução seria significativamente menor.

Adicionalmente ao ganho de velocidade e à possibilidade de aumento do número de pontos da malha (fato que melhora a convergência e reduz a quantidade de *wiggles*), uma relaxação implícita é aplicada de forma a “segurar” as oscilações de convergência das iterações iniciais. Esse elemento inercial tem efeitos muito semelhantes à ponderação adaptativa do método de Gresho et al. (1980). A diferença é que aqui o fator de relaxação é constante.

Outra característica importante é que a derivação do método é inteiramente realizada sobre o sistema de equações globais, não implicando em nenhuma suposição sobre a discretização de MEF, funções de interpolação ou tipo de elemento empregado. Considere então o seguinte sistema de equações de escoamento incompressível:

$$\begin{bmatrix} (K_{a+c})_{1,1} & (K_{a+c})_{1,2} & (K_{a+c})_{1,3} & -B_1 \\ (K_{a+c})_{2,1} & (K_{a+c})_{2,2} & (K_{a+c})_{2,3} & -B_2 \\ (K_{a+c})_{3,1} & (K_{a+c})_{3,2} & (K_{a+c})_{3,3} & -B_3 \\ B_1^T & B_2^T & B_3^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{vx} \\ U_{vy} \\ U_{vz} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{v1} \\ R_{v2} \\ R_{v3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.41)$$

onde $(K_{a+c})_{ij}$ é a submatriz global que contém os efeitos de viscosidade e convecção, ou seja, é dependente de U_f . B_i^T é a submatriz global divergente (note que $B_i = -L_i$, conforme as Eqs. 4.2.31 e nas definições das matrizes locais/globais na Eq. 4.2.9).

Reorganizando as Eqs. 4.2.41 temos que:

$$\begin{aligned} (K_{a+c})_{1,1} \cdot U_{vx} - B_1 \cdot P &= R_{v1} - (K_{a+c})_{1,2} \cdot U_{vy} - (K_{a+c})_{1,3} \cdot U_{vz} = f_1 \\ (K_{a+c})_{2,2} \cdot U_{vy} - B_2 \cdot P &= R_{v2} - (K_{a+c})_{2,1} \cdot U_{vx} - (K_{a+c})_{2,3} \cdot U_{vz} = f_2 \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

$$\begin{aligned} (K_{a+c})_{3,3} \cdot U_{vz} - B_3 \cdot P &= R_{v3} - (K_{a+c})_{3,1} \cdot U_{vx} - (K_{a+c})_{3,2} \cdot U_{vy} = f_3 \\ B_1^T \cdot U_{fx} + B_2^T \cdot U_{fy} + B_3^T \cdot U_{fz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Analogamente às Eqs. 4.2.42, onde temos expressões explícitas para os componentes de velocidade, é necessário proceder algebricamente sobre as Eqs. 4.2.42 e 4.2.43 para se obter uma forma explícita para as pressões, ou seja:

$$\sum_{i=1}^3 (B_i^T \cdot K_{i,i}^{-1} \cdot B_i) \cdot P = \sum_{i=1}^3 (-B_i \cdot K_{i,i}^{-1} \cdot f_i). \quad (4.2.44)$$

Algebricamente a Eq. 4.2.44 foi obtida pela multiplicação à esquerda de cada uma das Eqs (4.2.42) de momento por $B_1^T \cdot K_{1,1}^{-1}$, $B_2^T \cdot K_{2,2}^{-1}$ e $B_3^T \cdot K_{3,3}^{-1}$, respectivamente. Finalmente, essas novas expressões são somadas e as equações de continuidade então reforçadas na expressão resultante, produzindo a Eq. 4.2.44.

Cabe agora resolver as Eqs. 4.2.42 e 4.2.43 sequencialmente. Para isso, um método baseado na técnica SIMPLER (Patankar, 1980), comumente encontrado nos métodos de diferenças finitas, foi seguido. Primeiramente, uma estimativa de pressão é feita e os componentes de velocidade são calculados

seqüencialmente. Finalmente, a pressão estimada é “corrigida” permitindo que a continuidade seja reforçada por intermédio de uma projeção irrotacional dos componentes de velocidade no subespaço de divergência livre (ou seja, ajuste volumétrico de massa).

Em forma de algoritmo, temos para o i -ésimo passo:

1. determinação da estimativa inicial de pressão:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left(B_i^T \cdot (\widetilde{K}_{a+c})_{i,i}^{-1} \cdot B_i \right) \cdot P^{i+1/2} = & -B_1 \cdot (\widetilde{K}_{a+c})_{1,1}^{-1} \cdot (f_1 - (K_{a+c})_{1,1} \cdot U_{v,x}^i) \\ & - B_2 \cdot (\widetilde{K}_{a+c})_{2,2}^{-1} \cdot (f_2 - (K_{a+c})_{2,2} \cdot U_{v,y}^i) \\ & - B_3 \cdot (\widetilde{K}_{a+c})_{3,3}^{-1} \cdot (f_3 - (K_{a+c})_{3,3} \cdot U_{v,z}^i); \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

2. relaxação da pressão:

$$P^{i+1} = a_p \cdot P^i + (1 - a_p) \cdot P^{i+1/2}; \quad (4.2.46)$$

3. resolução das equações de momento para obtenção dos componentes de velocidade:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{1,1} + (K_{a+c})_{1,1} \right] \cdot U_{v,x}^{i+1/2} = & f_1 + B_1 \cdot P^{i+1} + \left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{1,1} \cdot U_{v,x}^i \\ \left[\left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{2,2} + (K_{a+c})_{2,2} \right] \cdot U_{v,y}^{i+1/2} = & f_2 + B_2 \cdot P^{i+1} + \left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{2,2} \cdot U_{v,y}^i \\ \left[\left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{3,3} + (K_{a+c})_{3,3} \right] \cdot U_{v,z}^{i+1/2} = & f_3 + B_3 \cdot P^{i+1} + \left(\frac{a_u}{1 - a_u} \right) (\widetilde{K}_{a+c})_{3,3} \cdot U_{v,z}^i; \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

4. determinação da “pressão corrigida”:

$$\sum_{i=1}^3 \left(B_i^T \cdot (\widetilde{K}_{a+c})_{i,i}^{-1} \cdot B_i \right) \cdot P^s = -B_1^T \cdot U_{v,x}^{i+1/2} - B_2^T \cdot U_{v,y}^{i+1/2} - B_3^T \cdot U_{v,z}^{i+1/2}; \quad (4.2.48)$$

5. ajuste de massa:

$$\begin{aligned} U_{v,x}^{i+1} &= U_{v,x}^{i+1/2} + (\widetilde{K}_{a+c})_{1,1}^{-1} \cdot B_1 \cdot P^s \\ U_{v,y}^{i+1} &= U_{v,y}^{i+1/2} + (\widetilde{K}_{a+c})_{2,2}^{-1} \cdot B_2 \cdot P^s \\ U_{v,z}^{i+1} &= U_{v,z}^{i+1/2} + (\widetilde{K}_{a+c})_{3,3}^{-1} \cdot B_3 \cdot P^s; \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Alguns procedimentos são visíveis nas subetapas que descrevem uma iteração do método de projeção de pressão (versão no MEF de SIMPLER). Note que a matriz inversa $(K_{a+c})_{i,i}^{-1}$ não aparece, mas sim, uma matriz $(\widetilde{K}_{a+c})_{i,i}^{-1}$. As deduções a partir das Eqs. 4.2.42 e 4.2.44 implicariam na necessidade de inversão e manutenção de $(K_{a+c})_{i,j}$, o que acarretaria em dispêndios proibitivos de memória, pois essa matriz não é esparsa. Entretanto, conforme Haroutunian et al. (1993), essa nova matriz somente precisa ter a mesma dimensão de $K_{i,j}$. Assim, como a inversa de uma matriz diagonal é direta, usamos o seguinte método de diagonalização:

$$(\widetilde{K}_{a+c})_{i,i}^{l,l} = \sum_m |(K_{a+c})_{i,i}^{l,m}|. \quad (4.2.50)$$

A relaxação implícita (ou inercial) também foi usada para controlar a convergência. Note que um produto matriz-vetor se soma a ambos os lados das Eqs. 4.2.47. Particularmente o lado esquerdo dessas expressões torna-se diagonalmente dominantes, permitindo o controle das oscilações nos passos iterativos iniciais. Além disso, em um passo infinito e convergente, os termos $(\widetilde{K}_{a+c})_{i,i}$ contidos nessas expressões se cancelam.

Durante os testes, esse método conseguiu a atingir convergência para diferenças de pressões maiores do que todos os demais métodos. Além disso, permitiu que a quantidade de pontos da malha do escoamento fosse substancialmente elevada, reduzindo assim os *wiggles* da solução.

Figura 4.2.3 - Influência das iterações iniciais na convergência do método segregado.

Note adicionalmente que os passos iterativos iniciais também influenciam o método segregado. Entretanto, seu comportamento é mais suave do que o dos métodos “acoplados”. Aparentemente, a relaxação implícita contribui para tal fenômeno. Adicionalmente, as iterações do método segregado são muito mais rápidas, entretanto, necessitamos de um maior número delas para que a solução seja atingida.

Podemos perceber na Figura 4.2.3 que o método de Piccard aumenta inicialmente o resíduo. Isso ocorre por causa da formação de vórtices após a constrição, exigindo, assim, que os algoritmos revertam muitos vetores velocidade na solução nessa região. Entretanto, a velocidade de convergência de Piccard+Segregado é maior do que Stokes+Segregado. Isso fez com que o número de passos para obter a solução do sistema seja menor (na Figura 4.2.3 apresentamos somente um conjunto reduzido de iterações para demonstrar as características dos algoritmos).

4.2.4 Aproximação Algébrica da “Bacia de Convergência” - Stokes Modificado

Para reduzir a quantidade de iterações e reduzir as oscilações iniciais, uma estimativa inicial para U_v é fundamental. Mesmo a solução inicial obtida a partir do problema de Stokes tem o agravante de produzir seja pressões ou componentes de velocidade com magnitudes muito superiores ao encontrado na solução final. Esse problema já foi apresentado anteriormente e é uma das causas das oscilações na convergência em escoamentos dominados por convecção.

Uma pequena manipulação algébrica, direcionada ao tipo de condições de contorno de excitação do escoamento, permitiu que a solução original de Stokes fosse aproximada à bacia de convergência dos métodos tradicionais e segregados.

Compreendendo que as pressões geradas pelo método de Stokes apresentam magnitudes similares às encontradas na solução final quando as condições de contorno de Neumann são a fonte de excitação do escoamento (nas paredes a velocidade é nula - condição de Dirichlet), foi possível formular:

$$\begin{bmatrix} K + C(a \cdot U_v^0) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \cdot U_v^0 \\ P^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_v \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.2.51)$$

ou seja, existe uma constante α que minimiza o erro residual. U_v é o vetor que contém somente as componentes de velocidade de U_f .

Isso implica em:

$$\min_{\alpha} \|C(a \cdot U_v^0) \cdot a \cdot U_v^0 + K \cdot a \cdot U_v^0 + L \cdot P^0 - R_v\|. \quad (4.2.52)$$

A condição de continuidade mantém-se válida para qualquer α , podendo assim ser removida do problema de minimização uma vez que U_v^0 é uma solução solenoidal. Como as funções não-lineares em C são polinomiais, elas permitem a manipulação algébrica da Eq 4.2.52. Derivando-a em relação a α e igualando a zero, tem-se a expressão polinomial que permite a determinação direta de α :

$$\left\{ \begin{aligned} &4a^3 \cdot \|C(U_v^0) \cdot U_v^0\| + 6a^2 \cdot \|C(U_v^0) \cdot U_v^0\| \cdot \|K \cdot U_v^0\| + \\ &+ 4a^2 \cdot (\|C(U_v^0) \cdot U_v^0\| \cdot \|L \cdot P^0 - R_v\| + \|K \cdot U_v^0\|) + \\ &+ 2 \cdot \|K \cdot U_v^0\| \cdot \|L \cdot P^0 - R_v\| \end{aligned} \right\} = 0. \quad (4.2.53)$$

Existem dois casos a considerar na extração da raiz desse polinômio de terceira ordem. Quando somente um zero real é encontrado, essa é diretamente usada na Eq. 4.2.51 para produzir o passo inicial de Stokes “modificado”:

$$U_f^1 = \begin{Bmatrix} a \cdot U_v^0 \\ P^0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.54)$$

Caso existam três raízes reais, somente a de menor valor positivo dentre elas é empregada em na Eq. 4.2.54. Para sustentar tal afirmação, foram realizados testes em que α é sequencialmente pesquisado no intervalo $[0, 1]$ de forma a solucionar a Eq. 4.2.52. Os resultados confirmaram que a menor raiz positiva produz o menor mínimo. A existência de três raízes reais torna claro o problema dos mínimos locais durante o uso de *linear-searchers*, outrora mencionado. Essa técnica foi empregada em todas as análises apresentadas neste capítulo. Assim, quando lemos “Passo de Stokes”, estamos nos referindo ao método derivado nesta seção. Certamente que empregando o método de Stokes ($K(\{0\})=R_v$) implicaria em um módulo de resíduo muito mais elevado do que o produzido pelo método de Stokes modificado. Note nas Figuras 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, nas quais o passo de Stokes modificado foi usado, a presença de um “*overshoot*” inicial. Isso ocorreu em todas as análises produzidas em que o resíduo sempre foi menor do que as primeiras 2 ou 3 iterações sucedentes. No caso do método de Stokes “convencional”, aplicado a escoamentos excitados unicamente por diferenças de pressão, esse “*overshoot*” inexistente.

4.2.5 Esquemas *UPWINDING*

Mesmo com as operações algébricas melhorando sobremaneira a obtenção da solução para a Eq. 4.2.13 em uma variedade maior de perfis geométricos e números de Reynolds, a divergência ainda ocorria. Isso exigiu o estudo dos esquemas ditos *upwinding* para dar maior robustez ao processo de obtenção da solução do escoamento na laringe.

O problema básico com a formulação Bubnov-Galerkin (ou simplesmente Galerkin) reside na assimetria que uma convecção dominante (escoamento com elevado número de Reynolds) gera na matriz global final $K(U_i)$. Se a formulação Galerkin for analisada, podemos verificar que ela tem a característica de produzir a melhor aproximação da solução exata, baseada no fato de que se minimiza a diferença entre a solução exata e a solução provida por MEF, segundo uma determinada norma.

Quando o escoamento se torna convectivamente dominante, essa característica importante se perde gradativamente, ou seja, se torna subótima. A formulação Galerkin então produz o que se conhece por *wiggles*, que são oscilações espúrias entre nós com um formato tipo “dente de serra”. Gresho et al. (1980) apontou que essas soluções corrompidas estão exigindo um refinamento maior da malha naquelas regiões oscilatórias. Ou seja, a formulação Galerkin, até aqui empregada, produziria uma solução correta mas demandaria um elevado número de pontos para que essas oscilações matemáticas (não-físicas) desaparecessem.

Se analisarmos a maneira pela qual o termo convectivo é discretizado, perceberemos que ela é similar às aproximações de diferenças centrais cuja precisão é de segunda ordem (*second-order accurate*). Estudos em diferenças finitas (Roache, 1976) mostraram que esse tipo de aproximação é inconveniente para a convecção. Se uma malha uniforme fosse construída e numerada seqüencialmente e o termo convectivo discretizado, perceberíamos o total desacoplamento entre as equações envolvendo os nós pares e ímpares na aproximação de diferenças centrais. Isso nos ajuda a compreender como MEF Galerkin é afetado quando um escoamento convectivamente dominante é analisado.

As explanações acima mostram que o modo “correto” de usar a formulação Galerkin para resolver as equações de Navier-Stokes seria aumentar a quantidade de pontos nas regiões de elevado gradiente de velocidade (onde os *wiggles* manifestam-se), para evitar que o desacoplamento implícito afete a solução (causando a divergência).

Para contornar esse problema, a literatura apresenta formulações ditas Petrov-Galerkin (PG), em que as funções de ponderação já não são iguais às funções de interpolação. Essas funções de ponderação agora levam em conta a direção do escoamento dentro de cada elemento finito. Analiticamente em diferenças finitas podemos demonstrar que o controle e remoção dos *wiggles* passa pela adição de uma quantidade de difusão artificial nos aproximadores de diferenças centrais e essa difusão é aplicada no sentido do escoamento. O equivalente em elementos finitos é justamente modificar a função de ponderação de forma que, os nós “*upstream*” devem ser mais “ponderados” do que os nós “*downstream*”. Note que essa quantidade de difusão deve ser bem avaliada, caso contrário a solução também será fisicamente irreal pois terá mais difusão (artificial).

Algumas das formulações PG infelizmente não são consistentes. Ou seja, podem apresentar soluções incorretas para termos “fonte-de-massa” presentes em NS. Outras são desenvolvidas para elementos finitos usando função de interpolação linear. Dados os requisitos desejáveis de precisão, o uso de funções quadráticas torna-se importante, com resultados numéricos (DeBlois, 1996) justificando seu emprego. Além disso mantemos a estrutura computacional já desenvolvida até aqui.

A formulação adotada neste trabalho foi a *Streamline Upwinding*/Petrov-Garlekin (SUPG), cuja idéia básica é adicionar difusão somente na direção do escoamento em uma quantidade que é função do número de Reynolds local (Brooks e Hughes, 1982; Donea et al., 1985; Hughes et al., 1986). A derivação das equações foi feita a partir da abordagem Galerkin *Least-Square* de Sampaio (1991).

A função de ponderação Q_i foi definida por::

$$\begin{aligned} Q_i = N_i + \frac{\tau_{su}}{2} \cdot \left\{ [(U_{vx})_k \cdot N_k] \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + [(U_{vy})_k \cdot N_k] \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} + [(U_{vz})_k \cdot N_k] \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} - \\ - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\mu_f}{\rho} \cdot \nabla^2 N_i \\ = N_i + M_i, \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Onde N_i é a função de ponderação convencional de Galerkin (ou a função de interpolação) aplicada sobre o i -ésimo nó do elemento finito; $(U_{vx})_k$, $(U_{vy})_k$ e $(U_{vz})_k$ são as velocidades nodais e τ_{su} é a quantidade de *upwinding* dependente da geometria do elemento finito e do número de Reynolds local. A sua composição provém diretamente da derivação consistente (através de mínimos resíduos quadrados) de SUPG para as equações de Navier-Stokes. Tal derivação produziu o seguinte sistema matricial global que deve ser somado ao sistema matricial da formulação Galerkin (Eq. 4.2.6):

$$\begin{bmatrix} C^{(su)} + D^{(su)} & 0 & 0 & L_1^{(su)} \\ 0 & C^{(su)} + D^{(su)} & 0 & L_2^{(su)} \\ 0 & 0 & C^{(su)} + D^{(su)} & L_3^{(su)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{vx} \\ U_{vy} \\ U_{vz} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{v1}^{(su)} \\ R_{v2}^{(su)} \\ R_{v3}^{(su)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.56)$$

onde:

$$\begin{aligned} C^{(su)l,m} &= \rho \int_{\Omega} M_l \left[\sum_{k=1}^{10} N_k (U_{vx})_k \right] \frac{\partial N_m}{\partial x} d\Omega + \rho \int_{\Omega} M_l \left[\sum_{k=1}^{10} N_k (U_{vy})_k \right] \frac{\partial N_m}{\partial y} d\Omega + \\ &\quad \rho \int_{\Omega} M_l \left[\sum_{k=1}^{10} N_k (U_{vz})_k \right] \frac{\partial N_m}{\partial z} d\Omega \\ D^{(su)l,m} &= -\mu \int_{\Omega} M_l \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial^2 z} \right) d\Omega \\ L_i^{(su)l,m} &= - \int_{\Omega} M_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial^2 x_i} d\Omega \\ R_i^{(su)l} &= \int_{\Omega} M_l b_i d\Omega, \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

para $b_1=b_x$, $b_2=b_y$, $b_3=b_z$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$.

A consistência vem naturalmente quando a Eq. 4.2.55 é aplicada sobre todos os termos das equações de momento. Algumas formulações não são consistentes justamente por serem aplicadas somente sobre termos convectivos. Note que sendo M_i uma função descontínua na borda dos elementos finitos, ela somente é integrada no interior desses. Ou seja, o teorema de Green não foi aplicado nas integrais de volume dos termos difusivos ponderados por tais funções.

Resta finalmente definir o termo τ_{su} . Seu cálculo envolveu a determinação do comprimento dito característico do elemento finito e do número de Reynolds local, definidos por:

$$\tau_{su} = \frac{\gamma \cdot h}{|U|}, \quad \gamma = \coth\left(\frac{Re}{2}\right) - \frac{2}{Re}, \quad Re = \frac{\rho}{\mu_f} \cdot |U_v| \cdot h. \quad (4.2.58)$$

Alguns autores chamam τ_{su} de tempo característico. Note que U_v é o vetor velocidade em um determinado ponto interno do elemento. Isso exigiu que integrássemos numericamente a matriz global (Eq. 4.2.56) e as submatrizes (Eq. 4.2.57). O método de integração numérica empregado foi o Gauss-Legendre com 5 x 5 x 5 pontos no tetraedro. Embora certamente essa quantidade de pontos possa ser reduzida, infelizmente não foram encontradas tabelas de integração adequadas para tetraedros que garantissem a não-singularidade de algumas matrizes do sistema (particularmente a matriz de massa).

O parâmetro h é o comprimento característico do elemento finito. Analogamente ao triângulo (Mizukami, 1985; DeBlois, 1996), ele corresponde ao maior comprimento encontrado no tetraedro em uma direção específica (no caso, a direção de U na Eq. 4.2.58).

Toda essa formulação foi desenvolvida e testada. Os resultados mostraram que uma boa robustez foi alcançada para escoamentos dominados por convecção. Particularmente foi possível aliar o desempenho do método segregado com a robustez da formulação SUPG.

A sequência final empregada para se resolver as equações de NS foi:

1. resolução do problema de Stokes Modificado;
2. resolução de 2 iterações de Piccard-SUPG;
3. resolução do método segregado-SUPG até convergência.

Note que os métodos Newton-Raphson e Quasi-Newton não foram modificados para suportar SUPG, pois a obtenção da matriz jacobiana para a nova matriz (Eq. 4.2.56) somente seria possível numericamente. Devido aos problemas de convergência enfrentados com a sensibilidade de tais métodos no passo inicial, optamos por nos restringir apenas ao método de substituição sucessiva.

Para verificar qual a influência dessa técnica na convergência para a solução de NS, comparamos os métodos Piccard, NR e QN com o método de Piccard empregando SUPG para o problema-teste citado anteriormente. A Figura 4.2.4 mostra que o emprego de SUPG permitiu uma convergência melhor e mais estável do que os métodos anteriormente mostrados. Isso mesmo considerando uma malha grossa.

Figura 4.2.4 - Influência da técnica SUPG na convergência de métodos iterativos.

Considerando agora a abordagem segregada, pudemos constatar que SUPG realmente auxilia no controle da convergência. A Figura 4.2.5 mostra que a convergência torna-se mais suave do que aquela empregando Galerkin “clássico” (vide Figura 4.2.3).

Figura 4.2.5 - Influência da técnica SUPG na convergência do método segregado.

Adicionalmente, o mesmo fenômeno observado com relação à influência das iterações iniciais no método segregado ocorreu quando usamos SUPG no MEF. Note na Figura 4.2.5 que a velocidade de convergência de Piccard+Segregado é maior do que Stokes+Segregado.

4.2.6 Métodos monotônicos

Infelizmente a estabilização das equações de momento (particularmente o operador convectivo $(U_v \cdot \nabla)U_v$) através do método SUPG (*streamline upwinding*/Petrov-Garlekin) não foi suficiente para controlar as oscilações que afloraram durante os testes finais dos algoritmos.

Analizamos o problema e constatamos que as fontes de dificuldade (mesmo com sucesso na obtenção da solução para algumas malhas representativas da laringe) eram:

- 1) condição de contorno de saída;
- 2) número de Reynolds elevado;

3) malha insuficiente logo após a constrição glotal.

Todos esses problemas concorreram, algumas vezes simultaneamente e outras separadamente, para divergir a solução durante o processo iterativo ou simplesmente torná-la oscilante. Esse último efeito era caracterizado pela alternância cíclica da solução durante as iterações inviabilizando, assim, os métodos utilizados para determinar quando uma solução convergiu - aqui ela nunca convergia mas também nunca divergia.

O primeiro problema refere-se à dificuldade de se estimar a condição de contorno de saída, que no nosso caso corresponde à distribuição da pressão ao longo da seção após a glote. No presente caso, estamos efetuando um corte abaixo e acima da laringe onde desejamos conhecer quantitativamente o escoamento de ar. O ideal seria “coletar” a distribuição das pressões nessas seções e utilizá-las como condições de contorno (condições naturais ou de Newmann) nas equações NS (Navier-Stokes).

Entretanto temos apenas uma noção do valor médio da pressão de entrada e saída do domínio finito, no qual se busca a solução do escoamento na laringe. Ou seja, somos obrigados a definir condições de contorno sintéticas e que não necessariamente são idênticas às condições reais.

Mesmo assim, podemos considerar que a distribuição de pressão na entrada da laringe é constante ao longo da seção transversal. Isso porque admitimos que o escoamento de ar vindo dos pulmões já estava totalmente desenvolvido. O mesmo não podia ser dito da pressão no contorno de saída da laringe. Como a zona de recirculação é grande, naturalmente o perfil de distribuição de pressão naquela seção não é mais constante. Mas quais os efeitos de se atribuir uma pressão constante sobre a simulação via condições de Newmann? Primeiramente, se alguma solução for obtida ela poderia não ser fisicamente realizável. O fato de utilizarmos a expressão “poderia” é baseado em determinadas características do método de elementos finitos que geram uma distribuição de pressões não constante mas com valor médio igual ao definido pelas condições de contorno naturais. Mas esses são casos específicos que derrubam a idéia de um procedimento robusto e genérico de solução de NS.

Adicionalmente, a solução na vizinhança dos nós pertencentes ao contorno de saída era poluída com “*wiggles*”, que são potenciais formadores de instabilidade no processo iterativo de solução do sistema de equações não-lineares. Em algumas de nossas análises constatamos que a solução não convergia e sim oscilava em consequência dos “*wiggles*”. O problema da condição de contorno será discutido posteriormente.

O segundo problema é a alta velocidade do escoamento de ar na laringe. Juntamente com as características físicas de densidade e viscosidade, o número de Reynolds é elevado e induzia potencialmente a presença de turbulência. Turbulência não pode ser confundida com um fenômeno puramente aleatório. Ela é caracterizada pela presença de recirculações microscópicas de ar que se dilatam à medida que o escoamento se desenvolve, no nosso caso, na saída da constrição glotal. Ou seja, para capturar esses movimentos do ar seriam necessários elementos finitos muito pequenos o que acarreta no aumento significativo do sistema de equações a ser resolvido. A sua não captura poderia resultar em potencial fonte de oscilações nas iterações para solução do problema não-linear.

Outra consequência do grande número de Reynolds é o aumento da magnitude dos componentes da matriz de convecção em relação à matriz de difusão. Isso acarreta em um sistema não-linear de alta sensibilidade. Ou seja, pequenas oscilações que poluíam U_v^{n-1} (vetor de solução no passo anterior) durante o processo iterativo (seja ele, método de substituição sucessiva, Newton ou Quasi-Newton) produziam grandes variações em U_v^n (vetor de solução no passo atual).

Finalmente a última dificuldade foi a falta de elementos finitos na saída da constrição glotal. Isso está intimamente ligado ao aspecto anteriormente descrito, ou seja, a falta de um número suficiente de pontos para capturar as variações “importantes” de velocidade do ar ao longo perfil simulado. O termo “importante” é devido à necessidade de adicionar novos nós de forma a apenas reduzir as oscilações e não indiscriminadamente capturar todos os gradientes de velocidade no escoamento. Nossas análises comprovaram que o aumento da densidade da malha reduz as oscilações, mas também mostraram que o aumento da velocidade também requisita mais e mais nós. Ou seja, a solução começa a ficar proibitiva se novas técnicas de estabilização não forem empregadas.

Do ponto de vista do escoamento, esses são os últimos problemas identificados e que demandaram um tempo considerável de análise. Assim, tivemos de balancear precisão e eficiência computacional. Note que empregaremos o termo oscilação para indicar que as interações não reduzem a diferença entre soluções U_v^n sucessivas, ou seja, as iterações não convergem mas também não divergem.

Como já mencionado anteriormente, as equações de NS são influenciadas pelo modo que o operador convectivo é discretizado. A escolha do método afeta diretamente a estabilidade e precisão da solução numérica. Como mencionamos, o método convencional de Galerkin causa instabilidades quando o escoamento é dominado pelo termo convectivo (elevado número de Reynolds), pois é equivalente ao método de diferenças finitas centrais de segunda ordem, reconhecidamente instável (Hirsch, 1988a, 1988b).

Como infelizmente o método de estabilização *Streamline Upwinding*/Petrov-Galerkin (SUPG) não foi capaz de controlar os “wiggles”, buscamos métodos alternativos mais estáveis. O primeiro deles é o método monotônico cuja principal característica é a de ser incondicionalmente estável apesar do aumento excessivo de difusão numérica ao longo do escoamento quando comparado ao método SUPG.

A idéia por trás do método monotônico de Rice e Schnipke (1985) é realizar a integração do operador convectivo ao longo do caminho “*streamline*”, considerando que o gradiente presente nesse operador é numericamente resolvida através de uma diferença finita atrás de primeira ordem (*first-order backward finite difference*). Tal método pode ser empregado tanto em elementos finitos lineares (Rice e Schnipke, 1985) ou quadráticos (Hill, 1993).

Primeiramente é importante definir o que é um caminho *streamline*. Esse caminho corresponde ao lugar geométrico onde os vetores de velocidade são tangentes. Considerando um escoamento estacionário, se largássemos uma partícula em um ponto desse caminho, ele percorreria exatamente o caminho *streamline*. Outra característica desse caminho é que não existe transferência de massa através do seu lugar geométrico.

O primeiro problema foi determinar o nó de saída (*downwind node*) do elemento. A partir desse nó, determinamos qual o ponto na superfície do elemento (estamos considerando um elemento finito

tridimensional) de tal forma que o caminho *streamline* cruzasse ambos os pontos. A Figura 4.2.6 mostra um diagrama desses pontos.

Figura 4.2.6 - Diagrama de pontos downwind, upwind e caminho streamline.

Com esses dois pontos determinados, reescrevemos o operador convectivo no sistema de coordenadas do caminho *streamline* considerando-se uma equação de transporte pura. Ou seja:

$$\rho \cdot U_{vx} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho \cdot U_{vy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \rho \cdot U_{vz} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \cdot U_{vs} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{constante}, \quad (4.2.59)$$

onde ρ é a densidade do fluido; U_{vx} , U_{vy} e U_{vz} são os componentes de velocidade na direção dos eixos ordenados; U_{vs} é a velocidade na direção streamline; e ϕ é o componente transportado (no caso de Navier-Stokes, ele é a velocidade).

Integrando a Eq. 4.2.59 no elemento, temos:

$$\int_{\Omega(e)} N_i \cdot \left(\rho \cdot U_{vs} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) dV = \left(\rho \cdot U_{vs} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \int_{\Omega(e)} N_i \cdot dV, \quad (4.2.60)$$

onde N_i é a função de ponderação (quadrática no presente trabalho) para o i -ésimo nó (no caso, o nó *downwind*). Discretizando a derivada parcial na Eq. 4.2.60 segundo o método de primeira ordem já mencionado, temos:

$$\left(\rho \cdot U_{vs} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \int_{\Omega(e)} N_i \cdot dV \approx \left(\rho \cdot \|U_v\| \cdot \frac{\phi_i - \phi'}{\Delta s} \right) \int_{\Omega(e)} N_i \cdot dV, \quad (4.2.61)$$

onde $\|U_v\|$ é a norma euclidiana da velocidade no nó *downwind*, ϕ_i e ϕ' são, respectivamente, os componentes transportados no nó *downwind* e no ponto *upwind* e Δs é o comprimento do caminho *streamline* ligando ambos os nós. Note que os componentes transportados são variáveis a serem determinadas.

É claro que o ponto *upwind* não necessariamente recai sobre um dos nós remanescentes do elemento finito. Assim ele passou a ser definido como

$$\phi' = \sum_{j \neq i} a_j \cdot \phi_j, \quad (4.2.62)$$

ou seja, α são fatores proporcionais à posição geométrica do ponto *upwind*. Também são conhecidos como fatores de interpolação.

Resta definir o nó *downwind* e o próprio caminho *streamline*. Em todos os nós do elemento (principais e intermediários, para elementos quadráticos) verificamos quais os nós cujo negativo da velocidade (sentido oposto) apontavam para dentro do elemento. Esses eram então considerados nós *downwind*. O cálculo desses nós foi facilmente desenvolvido em termos de produtos interno entre o vetor velocidade no nó e os vetores normais às superfícies que continham tal nó.

Com o nó *downwind* definido, determinamos o ponto *upwind* (naturalmente entre ambos os pontos está o caminho *streamline*). Nos trabalhos pesquisados (Rice e Schnipke, 1985; Hill, 1993) o balanço entre os fluxos de massa através das faces dos elementos finitos, tendo como referência o nó *downwind* em análise, foi usado. Isso vem da definição de caminho *streamline* no qual não existe transferência de massa através do caminho. A diferença entre massas que entram e saem do elemento finito é nula (pela equação da continuidade localmente aplicada) e a relação entre essas massas permite a determinação dos fatores de interpolação (que em última análise formarão o caminho *streamline* e o próprio ponto *upwind*). A Figura 4.2.7 mostra, simplificada, a determinação do ponto *upwind* com base em um elemento finito triangular.

Figura 4.2.7 - Determinação do ponto “*upwind*” e caminho “*streamline*” em um triângulo.

Encontrado ponto *upwind* (através dos fatores de interpolação), definimos o comprimento de arco Δs para ser empregado na Eq. 4.2.61. Neste cálculo podemos admitir que o caminho *streamline* seja uma linha (Schnipke, 1985) ou considerar a própria curvatura do elemento finito (Hill, 1993). Como ϕ_i e ϕ_j nas Eqs. 4.2.61 e 4.2.62 são incógnitas, elas auxiliaram na montagem da matriz de convecção final, no qual somente os nós *downwind* têm contribuição.

Tudo seria bastante simples se não esbarrássemos em um pequeno detalhe: ambos os trabalhos analisados consideraram que o diagrama de velocidades no elemento finito obedecia localmente a continuidade (*divergence free* ou solenoidal). Naqueles trabalhos o objeto de estudo eram as equações de difusão-convecção (ou transporte) e o diagrama de velocidades foi fornecido *a priori*. No caso das equações de

NS, numericamente resolvidas pelo MEF, a continuidade é mantida em um sentido fraco (*weak sense*) de tal forma a minimizar o funcional equivalente. Isso leva à manutenção de uma continuidade global e não local, o que explica as pequenas oscilações de pressão e vazão ao longo do escoamento.

Claro que no limite de volume/área dos elementos finitos tender a zero, a continuidade local é obtida mas isso a custa de um número proibitivo de elementos finitos. Alguns programas de computador (Ansys FLOTRAN, por exemplo) seguem essa metodologia na solução das equações de NS. Acreditamos que tais programas aplicam métodos de estabilização também para as equações de continuidade, de tal forma a forçar a continuidade local no MEF, mas isto às custas de novos termos nas equações diferenciais parciais. Para tentar contornar esse problema, nós procuramos determinar o caminho *streamline* através da integração da sua equação diferencial ordinária, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dh} &= U_v(X) \\ \frac{d}{dh} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} U_{vx}(X, Y, Z) \\ U_{vy}(X, Y, Z) \\ U_{vz}(X, Y, Z) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

Onde X, Y, Z definem o lugar geométrico do caminho *streamline*, U_{vx} , U_{vy} e U_{vz} são as componentes da velocidade no espaço tridimensional e h é o “instante de tempo” (note que h deve ser negativo e foi calculado com base na dimensão do elemento finito e nas velocidades nodais).

Considerando que o espaço dentro do elemento era definido por um polinômio e que as velocidades foram definidas por um outro polinômio em relação ao valor das velocidades nos nós, temos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{Bmatrix} \cdot \frac{d}{dh} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i N_i(U_{vx})_i \\ \sum_i N_i(U_{vy})_i \\ \sum_i N_i(U_{vz})_i \end{Bmatrix}, \quad (4.2.64)$$

onde s, t, r são as coordenadas locais do elemento finito.

Finalmente, após um rearranjo das Eqs. 4.2.64 obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias no espaço de coordenadas locais do elemento finito, ou seja:

$$\frac{d}{dh} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ r \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_i N_i(U_x)_i \\ \sum_i N_i(U_y)_i \\ \sum_i N_i(U_z)_i \end{Bmatrix}. \quad (4.2.65)$$

A Eq. 4.2.65 foi então integrada numericamente a partir do nó *downwind* até cruzar alguma superfície de contorno do elemento finito. Para um melhor controle da integração, de modo a reduzir o erro de integração e ao mesmo tempo obter alguma eficiência no processo, alguns algoritmos clássicos foram adaptados para a tarefa.

O primeiro passo de integração foi realizado através do método de integração de Euler. Isso foi feito para que o caminho *streamline* a partir do nó downwind tenha sempre pelo menos um ponto adicional dentro do elemento finito em análise. A distribuição quadrática da velocidade dentro do elemento gera algumas curvas *streamline* que passam muito “levemente” pelo elemento finito e isso acarreta problemas, pois alguns nós *downwind* simplesmente não admitem outros pontos do lugar geométrico do caminho *streamline* dentro do elemento finito na integração da Eq. 4.2.65 por métodos mais sofisticados, a não ser pelo uso de passos h extremamente pequenos sob pena de gerar instabilidades numéricas na integração.

Uma vez “entrado” no interior do elemento finito em análise, lançou-se mão de métodos mais sofisticados de integração. O método adaptativo de Runge-Kutta 4/5 foi empregado. Nesse método, foram feitas “paralelamente” duas integrações da Eq. 4.2.65 empregando o método Runge-Kutta de quarta e quinta ordens. Pela comparação de erros entre esses dois métodos, o passo de integração h foi aumentado ou reduzido de acordo com o gradiente local suave ou áspero de velocidades, respectivamente.

É claro que o método seria bastante oneroso se não fosse por algumas peculiaridades na escolha dos coeficientes de integração presentes no método de Runge-Kutta (Butcher, 1987). Essas características permitiram que se integrasse e avaliasse o “erro de integração” simultaneamente.

O último controle realizado na integração foi quando essa cruzava os limites do elemento finito. Quando isso ocorria, retrocedíamos ao último ponto calculado do caminho *streamline* situado internamente no elemento finito. A partir desse ponto, utilizávamos um integrador convencional de Runge-Kutta de quarta ordem com um passo suficiente para que os passos sucessivos não ultrapassassem o contorno do elemento finito. Cada ponto gerado era então avaliado quanto a sua proximidade das superfícies. Caso a distância δ entre o ponto e a superfície mais próxima fosse inferior a um valor pré-definido, permitíamos que o caminho *streamline* cruzasse tal superfície e o ponto de cruzamento fosse definido como ponto *upwind*. Tal sofisticação foi importante, pois o MEF garante que as funções de interpolação sejam contínuas na interface dos elementos finitos. Fora da interface cada elemento finito descreve a distribuição de velocidades de um modo diferente.

Finalmente, com o ponto *upwind* definido, calculamos os fatores de interpolação através do uso do próprio polinômio de interpolação de velocidades. Isso equivale a calcular a proximidade de cada nó do elemento finito em relação ao ponto *upwind*. Note que devido à quantidade de pontos que compõem a face do tetraedro com distribuição quadrática de velocidades, existe a geração natural (apesar de indesejada) de difusão numérica na solução de NS por MEF. O ideal seria que o ponto *upwind* coincidisse com algum dos nós do elemento finito.

Outro problema ocorreu: em alguns elementos finitos, a distância entre os nós *downwind* e *upwind* era extremamente pequena. Isso produziu uma difusão numérica muito grande, pois induzia numericamente à “inexistência” de caminho *streamline* nesse nó *downwind*. A ocorrência desse fenômeno se dava nas regiões de recirculação onde os gradientes de velocidade são naturalmente grandes. Para contornar esse problema, decidimos expandir a computação do caminho *streamline* de tal forma que o ponto *upwind* fosse determinado na face oposta ao nó *downwind* em qualquer elemento finito que o contenha. A Figura 4.2.8 ilustra essa idéia.

Figura 4.2.8 - Expansão do caminho streamline.

Analizamos então o trabalho de Tabata e Fujima (1991) em que um esquema para discretização do termo convectivo foi definido com base em pontos na direção *upwind* e *downwind* que não pertencem aos elementos que contém o nó considerado. Suas idéias são compatíveis com as nossas, pois eles utilizaram um conjunto de pontos externos ao elemento para definir seu método de diferenças finitas sobre a malha do MEF.

Naturalmente continuamos com os princípios originais do método, ou seja, dado dois pontos (um *upwind* e outro *downwind*) realizamos a integração do termo convectivo sobre o caminho *streamline*. Outra vantagem desse método é que o comprimento de arco Δs era facilmente determinado através da soma de todos os semi-arcos formados, a medida que o caminho era formado pelos métodos de integração numérica.

Entretanto, mesmo com toda essa sofisticação, uma dificuldade ainda permaneceu: por causa da recirculação, existiam pontos internos aos elementos finitos onde a velocidade (interpolada a partir das velocidades nodais) é nula. Ou seja, em algumas situações, o ponto *upwind* é interno ao elemento finito (onde exatamente a velocidade é nula). Nossa ação foi simplesmente calcular os fatores de interpolação de tal forma que todos os nós (inclusive nó *downwind*) recebam influência sob a forma de difusão desse ponto interno. Infelizmente não encontramos nenhuma referência indicando o método correto para tratar tal dificuldade. Como já mencionado, os trabalhos que empregam a técnica *upwinding* monótona efetuam os cálculos com base na taxa de fluxo de massa no elemento finito e consideram a validade local da continuidade. Nossa implementação desse método produziu alguns efeitos: realmente a velocidade de convergência foi maior do que a dos métodos até agora definidos (considerando o processo de Piccard ou substituição sucessiva), ou seja, método convencional de Galerkin e SUPG. Entretanto, a difusão numérica foi comprovadamente maior. Isso produziu o efeito secundário que a região de recirculação, após a cavidade glotal, era menor do que a calculada pelos demais métodos resultando em uma pressão negativa menor sobre a glote. Talvez a manutenção local da continuidade pudesse resolver esse problema, mas preferimos não nos aprofundar nele.

Outro problema que ocorreu foi que, quando a condição de contorno de saída produzia significativos gradientes de velocidade naquela região, os vetores de velocidade resultantes do método aqui descrito causavam uma instabilidade local difícil de ser controlada nas iterações posteriores. Para uma mesma condição de pressão, entretanto, o método SUPG era bem mais estável durante o processo de substituição sucessiva.

Uma outra abordagem envolvendo a modificação da função de ponderação (como em SUPG), proposta por Sheu et al. (1997), afirmava ser monotônica. Baseado na busca de propriedades desejáveis dos esquemas de discretização do termo convectivo, os autores construíram tais funções de interpolação

empregando exponenciais orientadas na direção característica do escoamento no elemento finito. Entretanto o método apresentado foi desenvolvido para quadriláteros lineares. Sua extensão para elementos tridimensionais lineares é direta. Contudo, sua modificação para elementos finitos quadráticos dependia de um estudo mais aprofundado.

4.2.7 Método das Características

Constatamos que devia existir alguma informação adicional na implementação do método monotônico descrito anteriormente que não era explicitado nos trabalhos. Como já dispunhamos de um código eficiente para computação do caminho *streamline* para qualquer nó de qualquer elemento finito partimos para uma abordagem que é conhecida por ser incondicionalmente estável.

O método das características (Thomasset, 1981) permite algumas manobras no processo de iteração, em que a mais importante é o fato de o sistema final de equações ser linear (fluido newtoniano) e necessitando apenas que uma fatoração seja feita. Isso acelera, em muito, o processo de convergência.

A idéia é então resolver as equações não-estacionárias de NS de forma que, em um intervalo de tempo razoavelmente grande, o escoamento se torne naturalmente estacionário. A idéia é muito similar a apresentada por Gresho et al. (1980). Primeiramente, o operador convectivo foi separado do resto de NS (Maday et al., 1990) e foi integrado sobre as linhas características, que nada mais são do que os caminhos *streamline* em todos os nós da malha. A porção remanescente (um problema generalizado de Stokes) foi então resolvido convencionalmente contabilizando-se os efeitos convectivos, ou seja:

$$\rho \left(\frac{\partial U_v}{\partial t} + (U_v \cdot \nabla) U_v \right) = -\nabla P + \mu_f \nabla^2 U_v \quad (4.2.66)$$

$$\nabla \cdot U_v = 0.$$

Note que a Eq. 4.2.66 é um pouco diferente da Eq. 3.2 original. Isso ocorre porque aqui nós expandimos os tensões $\underline{\tau}$ e acabamos por modificar as condições de contorno de Neumann durante a aplicação do teorema de Green. Essa operação pode ser encontrada em detalhes em Yamada et al. (1975). O termo convectivo foi então removido para ser integrado separadamente, ou seja:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U_v \cdot \nabla) U_v = 0. \quad (4.2.67)$$

Como esse termo é na realidade uma derivada total separada em relação ao tempo e ao espaço, podemos então reescrever a Eq. 4.2.66 da seguinte forma:

$$\rho \left(\frac{dU_v}{dt} \right) = -\nabla P + \mu_f \nabla^2 U_v \quad (4.2.68)$$

$$\nabla \cdot U_v = 0,$$

que é na realidade um problema de Stokes generalizado e discretizado pelo método de Galerkin. Os trabalhos originais aproximavam a derivada temporal da Eq. 4.2.68 usando métodos de diferenças atrás de primeira ordem. Para melhorar a estabilidade e precisão do método, as diferenças finitas atrás de segunda ordem foram empregadas (Minev e Ethier, 1999; Bourkir et al., 1997), ou seja:

$$\frac{3U_v^{n+1} - 4\widetilde{U}_v^n + \widetilde{U}_v^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} = -\nabla P^{n+1} + \mu_f \nabla^2 U_v^{n+1} \quad (4.2.69)$$

$$\nabla \cdot U_v^{n+1} = 0,$$

onde $\widetilde{U}_v^n, \widetilde{U}_v^{n-1}$ são as velocidades “convectadas” nos instantes iterativos n e $n-1$. Elas são obtidas pela integração da Eq. 4.2.67 ao longo do caminho *streamline*.

Para realizar a integração, primeiro é necessário calcular as curvas características:

$$\frac{dX_x^{n+1}}{dt} = U(X_x^{n+1}(t)) \text{ em } [t^{n-1}, t^{n+1}] \quad (4.2.70)$$

$$X_x^{n+1}(t^{n+1}) = x,$$

onde x é a posição de todos os nós da malha e, dessa forma, a posição inicial das curvas características conforme a segunda equação na Eq. 4.2.70. Assim, $X_x^{n+1}(t)$ é a posição nas curvas características na iteração $n+1$ no instante t .

Para melhor compreender os passos para solução de NS pelo método das características (de segunda ordem, no presente caso), o seguinte diagrama é apresentado:

- 1) calcule uma extrapolação de segunda ordem das velocidades nodais no tempo t^{n+1} :

$$U_{ve}^{n+1} = 2U_v^n - U_v^{n-1} \quad (4.2.71)$$

- 2) integre a Eq. 4.2.70 para obter a posição onde as velocidades “convectadas” serão colhidas:

$$X_x^{n+1}(t) = X_x^{n+1}(t^{n+1}) - \Delta t \cdot U_{ve}^{n+1} \quad (4.2.72)$$

$$X_x^{n+1}(t-1) = X_x^{n+1}(t^{n+1}) - 2 \cdot \Delta t \cdot U_{ve}^{n+1}$$

- 3) determine as velocidades “convectadas” dentro da malha:

$$\widetilde{U}_v^n(x) = U_v^n(X_x^{n+1}(t)) \quad (4.2.73)$$

$$\widetilde{U}_v^{n-1}(x) = U_v^{n-1}(X_x^{n+1}(t-1))$$

- 4) resolva o problema generalizado de Stokes dado pela Eq. 4.2.69.

Note que a integração numérica da Eq. 4.2.70 definida na Eq. 4.2.72 é exatamente o método de Euler. Aqui reside o ponto em que os algoritmos desenvolvidos para o método monotônico, anteriormente discutidos, foram inseridos. Pela sua sofisticação em controlar os erros de integração intra- e inter-elementos finitos, chegamos o mais próximo da solução exata. Como mencionado, o método das características é incondicionalmente estável. Entretanto, isso ocorre apenas com uma integração exata das curvas características.

Outra vantagem do método desenvolvido para construir tais curvas é que se obtem mais facilmente as velocidades “convectadas” dentro da malha. Outros trabalhos (Minev e Ethier, 1999) indicam que esse normalmente é o gargalo para o uso dessa técnica, pois exige-se a busca do elemento finito que contenha

X_x^{n+1} . Além disso, o próprio processo de integração da Eq. 4.2.70 exige o cálculo da velocidade em alguns pontos do domínio finito e nova busca deve ser realizada. Todas essas dificuldades são automaticamente resolvidas.

Comparativamente ao método monotônico que parte de NS estacionária, aqui é necessário realizar um grande número de iterações para se atingir a solução estacionária. Entretanto, note que o sistema de equações gerado pela Eq. 4.2.69 pode ser fatorado uma vez e as matrizes L e U aplicadas para cada novo par de velocidades “convectadas”. Outros trabalhos sugerem o emprego do método de Uzawa (Bourkir et al., 1997) ou de projeção (Minev e Ethier, 1999). Optamos pelo emprego do método direto de solução de sistemas de equações lineares (posteriormente descrito), pois ele gerava as matrizes L e U que eram armazenadas na primeira iteração e empregadas nas demais.

Durante os testes notamos que o método parece não divergir mesmo em escoamentos com número de Reynolds elevado. Além disso, ao contrário de nossa implementação do método monotônico, a quantidade de difusão gerada não era grande. A diferença entre um escoamento calculado pelo método SUPG e pelo método das características não era significativa. Os problemas ocorreram pela presença de instabilidades numéricas que faziam com que a solução oscilasse. Isso é uma característica que acontece quando a captura dos gradientes de velocidade é insuficiente. A dificuldade em se determinar, adequadamente, as condições de contorno também tem participação nessas oscilações, pois produz gradientes de velocidade na proximidade do contorno de saída.

Note que apesar de não ocorrer divergência, tornou-se complicado determinar quando o escoamento já atingiu uma “estacionariedade”, ou seja, uma solução fisicamente realista empregando os métodos típicos de avaliação de convergência. Poderíamos acertar um conjunto fixo de passos admitindo que nessa iteração final a solução seria adequada. Entretanto, acima de um determinado número de Reynolds (não definimos esse limite, apenas constatamos que existe um limite) o método não conseguia desenvolver o escoamento após a constrição global. Aparentemente ele travava na forma “cogumelo”; não conseguia se expandir (o “cogumelo” representa a resposta ao impulso do fluido quando existe uma excitação súbita, seja pela definição da vazão ou pela pressão da entrada).

Possivelmente a aplicação paulatina da excitação do escoamento (aumento da pressão de entrada) permitisse um controle melhor da convergência para um escoamento “estacionário”. Entretanto, foi complicado definir uma lei matemática ou heurística para tal incremento em função do tempo, o que fez com que abandonássemos essa abordagem, apesar da eficiência da computação do caminho *streamline*.

4.2.8 Método de Primeira-Ordem

Outra técnica que tentamos empregar para estabilizar o termo convectivo de NS foi o método de primeira ordem (Tabata e Fujima, 1991; FIDAP, 1999). Os métodos de primeira ordem são conhecidos por sua robustez e estabilidade (Hirsch, 1988a; 1988b), tendo sido primeiramente desenvolvidos no contexto do método das diferenças finitas e posteriormente implementados nos métodos dos volumes finitos. Entretanto,

esses métodos também são conhecidos por adicionarem grande difusão na solução, maior do que a do método monotônico apresentado anteriormente.

Como todo método *upwinding*, o objetivo é discretizar o termo convectivo segundo uma direção preferencial, capturando, assim, a direção característica do escoamento. Tradicionalmente, os métodos de diferenças/volumes finitos empregam esquemas adicionais, como o MUSCL e o TVD (Hirsch, 1988b; Giraldo, 1995) para aumentar a resolução do método de primeira ordem. Isso é feito basicamente através da análise do gradiente de velocidade ao longo da malha de modo a determinar se aquela região pode ou não ser calculada com um método de alta ordem. Assim, um valor chamado limitador é determinado (dependendo do método - MUSCL ou TVD, por exemplo) e com base nele é feita a alternância entre primeira e alta ordens. Nós posteriormente comentaremos a adaptação dessa técnica para o MEF.

Figura 4.2.9 - Definição do ponto *downwind*, *upwind* e elemento *upwind* usados no método de primeira ordem.

Da mesma forma que no método monotônico de Rice e Schnipke (1985), os pontos *upwind* e *downwind* devem ser determinados para que o termo convectivo seja calculado. O ponto *downwind* foi naturalmente determinado, pois corresponde ao nó em análise. Já o ponto *upwind* depende diretamente da direção da velocidade. Cria-se então a idéia do “elemento” *upwind* que corresponde ao elemento que é apontado pela vetor inverso ao da velocidade no ponto *downwind*. A Figura 4.2.9 mostra bidimensionalmente tais entes geométricos.

Podemos notar que o elemento *upwind* na verdade é subdividido em 4 subelementos (muito similar ao elemento Bercovier-Pironneau (Girault e Raviart, 1986) que é uma variante do elemento Hood-Taylor empregado neste trabalho). Esses subelementos tornaram-se efetivamente o “elemento” *upwind* da análise. Para encontrá-los, simplesmente procuramos na ordenada analisada (x , y ou z) pelo elemento *upwind* e finalmente o subelemento desse que possui o nó *downwind*. Enquanto FIDAP (1999) mostrou em suas descrições o método para um elemento linear, nós seguimos a abordagem de Tabata e Fujima (1991) que usou um elemento quadrático. Note que isso permitiu que usássemos o mesmo procedimento para descobrir os nós *downwind* e *upwind* para os nós intermediários.

O termo convectivo passou a ser discretizado pela seguinte expressão:

$$\rho \int_{\Omega(r)} \left(U_{vx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U_{vy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + U_{vz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot N_i \cdot dV \approx \rho(\phi - \phi') \left(\frac{\|U_{vx}\|}{\Delta x} + \frac{\|U_{vy}\|}{\Delta y} + \frac{\|U_{vz}\|}{\Delta z} \right) \cdot \int_{\Omega(r)} N_i \cdot dV, \quad (4.2.74)$$

onde ϕ e ϕ' são os termos “convectado”, respectivamente nos pontos *upwind* e *downwind*, que em NS correspondem a um dos componentes de velocidade U_{vx} , U_{vy} e U_{vz} (velocidade no nó *downwind*); e $\Omega(r)$ é o domínio que contém o nó *downwind*.

Assim, o termo convectivo foi separado em seus componentes x, y e z, segundo o caminho *upwind* usando um operador diferença de primeira ordem. A integral $\int_{\Omega(e)} N_i \cdot dV$ é feita sobre todos os elementos que contém o nó *downwind* - chamada de medida baricêntrica em Tabata e Fujima (1991). Isso é feito para manter as características matemáticas do MEF “intactas”. Adicionalmente, o emprego do módulo dos componentes de velocidade se deve ao fato de que a “direção” de integração é definida pelo caminho *streamline* aproximado pelos pontos *upwind* e *downwind*.

Como o ponto *upwind* geralmente não recai sobre um nó da malha, os efeitos convectivos da discretização sobre tal ponto é distribuído linearmente para os nós que compõem a face contendo o nó *upwind*. Note que essa face pode ser qualquer uma das “subfaces” que formam o elemento, como em Tabata e Fujima (1991).

O termo convectivo (Eq. 4.2.74) foi calculado para todos os pontos da malha (apesar de ser descartado automaticamente nos nós que tinham condição de Dirichlet no processo de construção das matrizes globais). Todos os demais termos em NS são integrados pelo método de Galerkin convencional.

Os resultados mostraram que a sua convergência é mais rápida do que os métodos até então apresentados, além da simplicidade de cálculo (dependendo, é claro da organização das estruturas de dados para se buscar os elementos “*upwind*”). Entretanto, como mencionado em FIDAP (1999) e Tabata e Fujima (1991), a quantidade de difusão artificial na solução é muito alta. Particularmente, observamos que a queda de pressão logo após a constrição glotal era muito pequena, parecendo-nos que o problema havia adquirido uma viscosidade extra. Entretanto, a robustez e velocidade permitia que nós acelerássemos a convergência, estabilizando a convergência nas primeiras iterações e, posteriormente, poder-se-ia trocar para outro método (como SUPG) para um refinamento da solução nas iterações finais. Tais idéias serão vistas quando na apresentação da abordagem por nós usada na solução de NS para o escoamento de ar na laringe.

4.2.9 Método das Bases Reduzidas

Todas as técnicas discutidas até aqui apresentaram algum problema para resolver individualmente as equações de Navier-Stokes para escoamentos de alta velocidade (como os que ocorrem na laringe): apesar da solução ser alcançada mediante controle adequado das condições de contorno e da integração do operador convectivo, todo o processo exigia altíssimo esforço computacional. Oscilações numéricas originadas pela alta velocidade do escoamento ou pela falta de elementos finitos após a constrição para capturar os significativos

gradientes de velocidade por vezes perturbavam as iterações e exigiam recálculo de alguns passos com relaxação reduzida.

Para acelerar a obtenção de uma solução muito próxima do resultado correto mesmo em condições de alta velocidade de escoamento, optamos finalmente pelo método das bases reduzidas (Peterson, 1989; Gunzburger, 1989).

Por trás dessas metodologias está a tentativa de, a partir de algo conhecido, como se poderia estimar o desconhecido. Assim, as soluções de um conjunto de n subproblemas envolvendo NS - em que a diferença entre os problemas é apenas um parâmetro (número de Reynolds, vazão de entrada ou pressão de entrada) - foram combinados linearmente tal que a solução encontrada seja suficiente para resolver a NS desejada (ou seja, no parâmetro desejado).

Isso quer dizer que construímos um espaço reduzido de bases no qual a solução para o problema desejado é calculada. O espaço formado com as “subsoluções” para NS em diversos parâmetros é chamado de espaço de Lagrange. Se a NS é expandida em sua série de Taylor e as subsoluções correspondendo ao valor das derivadas em relação ao parâmetro em pontos específicos, o espaço formado é chamado espaço de Taylor.

Matematicamente temos um problema definido por:

$$F(U_f, \lambda) = 0, \quad (4.2.75)$$

para $\lambda \in \mathfrak{R}^1$, $U_f \in \mathfrak{R}^N$ e N é a dimensão do problema.

Empregamos o espaço de Lagrange pois o espaço de Taylor é de difícil derivação quando se emprega o método SUPG para estabilização das equações de momento.

Admitindo-se U_f^k , para $k=0\dots p$, as soluções da Eq. 4.2.75 para diversos parâmetros λ (pressão média no contorno de entrada, no nosso caso). Definimos X_R como o espaço de dimensão $(p+1)$ definido pelas bases $\{U_f^k\}$. Assim, para um novo problema com $\lambda=\lambda_q$, sua solução é obtida por combinação linear dos vetores que formam a base X_R .

Assim, o problema final é:

$$F(a_k \cdot U_f^k, \lambda_q) = 0. \quad (4.2.76)$$

Note que a Eq. 4.2.76 é um problema denso ao contrário da Eq. 4.2.75, que é esparso. Temos então ao final um problema de minimização em relação a α_k . Apesar de ser um problema denso, a quantidade de variáveis a serem encontradas é muito do menor que em 4.2.75, o que permitiu aplicar métodos de continuação sem ônus computacional. Peterson (1989) sugeriu o uso do método PITCON (Rheinboldt e Burkardt, 1983), talvez prevendo dificuldades numéricas com pontos singulares e atratores espúrios ao longo do caminho de continuação. Em nossos testes com o método de Newton-Raphson e PITCON, não encontramos nenhuma dificuldade com NR, fazendo com que o escolhêssemos pela simplicidade e eficiência.

Note que precisamos ainda determinar subproblemas e suas subsoluções. Isso foi feito automaticamente iniciando com pressões de entrada extremamente baixas ($0,5 \text{ dina/cm}^2$). Optamos por um

incremento de 1 dina/cm² na pressão de entrada na geração de subproblemas. A busca por subproblemas é encerrada quando a convergência não é mais assintótica. Verificamos que isso ocorria sempre que as oscilações numéricas começam a afetar o processo iterativo. Essa estratégia propicia a geração de 5 a 8 vetores para a construção da base reduzida. Essas subsoluções são construídas empregando o método SUPG com a condição de contorno de saída aberta. Note que tanto a pressão inicial quanto os incrementos são dependentes da geometria da laringe. Assim, esses valores são definidos empiricamente com base em testes preliminares com a geometria inicial da laringe. Tentamos formular uma expressão que tornasse o processo automático mas não conseguimos pois a expressão era dependente de muitas variáveis como: número de Reynolds do escoamento, abertura glotal e distância entre a constrição até a saída da laringe simulada.

Cabe aqui algumas explicações do ponto de vista de implementação do método. Peterson (1989) e Gunzburger (1989) usaram o número de Reynolds com parâmetro para construir as bases reduzidas. Nós empregamos a diferença de pressão. Isso exigiu algumas modificações no método, que são descritas abaixo.

Uma vez de posse das bases reduzidas, não podíamos resolver diretamente a Eq. 4.2.76 pois produziríamos velocidades e pressões incorretas. Isso ocorre porque a relação entre a pressão e a velocidade em NS não é linear como a combinação linear das bases reduzidas supõem. Para contornar essa dificuldade, “projetamos” as bases reduzidas para um novo espaço. Primeiro, escalamos as pressões considerando tal que a diferença de pressão entre os nós das camadas de entrada e saída seja igual à diferença de pressão desejada, ou seja:

$$P_i^k = P_{\text{out_subprob}}^k + (P_i^k - P_{\text{out_subprob}}^k) \frac{P_{\text{in_desejada}}^k - P_{\text{out_desejada}}^k}{P_{\text{in_subprob}}^k - P_{\text{out_subprob}}^k}. \quad (4.2.77)$$

Para “corrigir” as velocidades segundo o novo diagrama de pressões, aplicamos o método de Stokes modificado (sem resolver o problema $K(0)U_f=R_f$) para determinar o coeficiente α , ou seja:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} K + C(a \cdot U_v^k) & L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \cdot U_v^k \\ P_{\text{novo}}^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R_v \\ 0 \end{Bmatrix} \right\|. \quad (4.2.78)$$

Note que $\{R_f\}$ (ou $\{R_v\}$ na Eq. 4.2.78) é construído para o problema final desejado pois é dependente das condições de contorno de saída. Assim, obtemos a k-ésima base reduzida, ou seja:

$$U_{f\text{novo}}^k = \begin{Bmatrix} a \cdot U_v^k \\ P_{\text{novo}}^k \end{Bmatrix}. \quad (4.2.79)$$

Note mais uma vez que as subsoluções continuam validando as equações de continuidade (subsoluções solenodais), pois apenas multiplicamos as velocidades por uma constante. É importante salientar que tanto as manobras algébricas desenvolvidas por nós quanto o método das bases reduzidas apenas APROXIMAM o vetor U da solução - fornecem uma boa condição inicial. Após a aplicação do método, devemos usar um método (como SUPG ou segregado) para convergir até a solução correta.

Nossos testes mostraram que a técnica é muito eficiente pois acelera a convergência para escoamentos de alta velocidade (empregamos nesses testes o método SUPG para discretizar NS e resolver os subproblemas). Posteriormente definiremos a estratégia final para solução de NS.

Note que nossa abordagem é muito específica para o problema analisado (escoamento da laringe). Nosso intuito não é o de gerar uma abordagem genérica para escoamentos excitados por diferenças de pressão ou por condições de Dirichlet.

4.2.10 Modelo de Turbulência

Além dos problemas de instabilidade numérica, a alta velocidade de escoamento também traz dificuldades para resolver um sistema de equações altamente acoplado. Como já mencionado, a falta de elementos finitos suficientes não permite captura dos gradientes de velocidade ao longo da laringe, principalmente após a constrição glotal. É sabido que escoamentos com número de Reynolds superior à 5000 são potencialmente turbulentos (o que traz dificuldades para escoamentos em laringes de pacientes com câncer, por exemplo).

O escoamento turbulento é um fenômeno bastante complexo pois ele normalmente se origina a partir de pequenas instabilidades (como rugosidades nas paredes que suportam o escoamento) que se propagam no fluido. Como o escoamento é de alta velocidade, essas pequenas instabilidades são amplificadas e tornam-se significativas. Assim, a turbulência é função do tempo e preponderantemente tridimensional. Basicamente o escoamento é caracterizado pelo aparecimento de torvelinhos (*eddies*) de tamanhos variados. Dada a alta velocidade do escoamento (e assim, elevada não-linearidade), esses torvelinhos tendem a aumentar de tamanho. O mais curioso é que eles também começam a se quebrar em novos torvelinhos. Logo a necessidade de um número substancial de elementos finitos para capturar todas essas variações de velocidade torna-se proibitivo.

A idéia então é tentar caracterizar o escoamento em termos de quantidade de velocidades e pressões médias de tal forma que torvelinhos de tamanho “insignificante” sejam eliminados ao mesmo tempo que as características principais do escoamento não sejam perdidas.

A escolha do modelo de turbulência para o nosso trabalho foi tomada pela facilidade de implementação. Modelos sofisticados como o κ - ϵ produzem resultados muito satisfatórios mas exigem um bom conhecimento da dinâmica da turbulência, além da correta especificação dos diversos parâmetros e condições de contorno. Optamos então pelo modelo de Smagorinsky-Lilly, pois sua única exigência de implementação é a definição da viscosidade do torvelinho que será somada à viscosidade do próprio fluido.

O modelo foi deduzido a partir do conhecimento das dimensões da malha e da taxa de deformação do escoamento. A taxa de deformação é definida pelo tensor:

$$\bar{S}_{ij} = 0,5 \cdot \left(\frac{\partial U_{vi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{vj}}{\partial x_i} \right), \quad (4.2.80)$$

onde U_{vi} são os componentes de velocidade em um sistema de coordenadas (no nosso caso, cartesiano tridimensional) e x_i são as coordenadas propriamente ditas.

Admitindo-se a notação tensorial, tem-se que o escalar deformação é dado por:

$$\bar{S}^2 = S_{ij} \cdot S_{ij}. \quad (4.2.81)$$

Finalmente, define-se a viscosidade do torvelinho como sendo:

$$\mu_s = \rho \cdot C_s \cdot h^2 \sqrt{2 \cdot \bar{S}^2}, \quad (4.2.82)$$

onde h é o comprimento característico da malha (no nosso caso foi definido com o maior comprimento de aresta do tetraedro) e C_s é a constante de Smagorinsky e foi definida como 0,0225 (Güler et al., 1999). Note que essa constante é dependente do escoamento. As demais informações necessárias são função da posição espacial, onde a viscosidade do torvelinho está sendo calculada. Uma vez determinada, a viscosidade do torvelinho foi simplesmente adicionada à viscosidade do fluido na computação das matrizes de difusão do escoamento. É óbvio que sendo μ_s variável ao longo do elemento finito, ela deve ser integrada juntamente com os operadores de difusão de NS.

Conforme outros trabalhos mencionam (Voke, 1993; FIDAP, 1999), nossa implementação provou que o tempo de convergência é realmente bem reduzido. Entretanto, as características do escoamento, como recirculação após a constrição glotal e distribuição negativa de pressão ao longo de parte das pregas vocais, foram simplesmente alterados pela presença de uma enorme quantidade de difusão proveniente da viscosidade estimada dos torvelinhos. Apesar da convergência, os resultados certamente produziriam pressões errôneas sobre as pregas vocais e certamente os movimentos musculares seriam incorretos.

Nossa estratégia então foi diminuir C_s (mantendo-a constante) fazendo com que as características já mencionadas aparecessem, ou seja $C_s=0,05$. Acreditamos que a constante utilizada anteriormente (Güler, 1999) seja mais adequada para água do que para o ar.

Existem alternativas (Voke, 1993) para que a aplicação de difusão via adição de viscosidade de torvelinhos se dê somente em regiões onde o escoamento apresenta grandes gradientes de velocidade. A idéia é admitir-se que C_s não é mais constante e sim função das características do escoamento. Note que a complexidade aumenta e isso tem impacto sobre a integração da matriz de difusão. Um número maior de pontos torna-se necessário para tal integração.

Em nosso modelo final, o modelo de turbulência somente foi ativado quando estávamos próximos da solução correta durante o processo de convergência (ou seja, quando já estimamos uma boa solução usando o método de bases reduzidas). Isso evita que as equações para determinação da viscosidade dos torvelinhos capture grandes gradientes de velocidade (que naturalmente ocorrem durante as iterações iniciais) como sendo reais torvelinhos.

Adicionalmente, somente empregamos o modelo para escoamentos com $Re > 6000$ (como em laringes de pacientes com paralisia - unilateral ou bilateral - e câncer) para evitar a “poluição” da solução com difusão artificial. Devemos lembrar que a solução já está “poluída” pelos métodos não-Bubnov-Galerkin outrora apresentados. A ativação ou não do método tornou-se, assim, manual.

4.2.11 Condições de Contorno de Saída

Considerando o escoamento de ar na laringe, a principal condição de contorno que excita o escoamento de ar é a condição de contorno natural ou de Newmann, que deriva “naturalmente” da integração por partes dos termos de difusão e gradiente de pressão da equação de Navier-Stokes.

Durante o desenvolvimento do trabalho, originalmente optamos pelas condições de contorno “não-faça-nada” (*do-nothing approach*) de Gresho e Sani (1987) onde temos:

$$\begin{aligned} \left(P - \mu_f \frac{\partial U_{vn}}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega_i} &= P_i \\ \frac{\partial U_{vs}}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_i} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.83)$$

onde P_i é a pressão média é definida em uma superfície de contorno $\partial\Omega_i$; U_{vn} e U_{vs} são, respectivamente, as velocidades normais e tangenciais a superfície e n e s são os vetores normais à superfície.

Análises (Heywood et al., 1996) indicaram que essa é a mais adequada forma para solucionar o problema da falta de conhecimento do perfil de pressões para definir as condições de contorno sintéticas. Particularmente, os autores apresentaram soluções para problemas (simulação do tubo de Pitot) no qual o número de Reynolds era elevado ($Re=1000$). Nesse problema ficou evidente uma característica qualitativa que também encontramos em nossas simulações: pequenas oscilações numéricas (não comentadas naquele trabalho) induzem a uma curvatura no escoamento. Entretanto essa curvatura não se mantém na mesma posição ao longo do tempo (os autores empregaram a forma não-estacionária de NS). As instabilidades numéricas (mais precisamente imprecisões numéricas inerentes ao cálculo de ponto fixo) produzem oscilações nas soluções (apesar do problema ser “*bounded*”). Essa característica também foi encontrada durante nossas simulações mesmo quando empregada a forma estacionária de NS.

A dificuldade desse método, entretanto, está no fato de que temos que empregar o método de continuação para paulatinamente atingir a diferença de pressão desejada (entre o pulmão e a “boca”). Esse método, convencional em muitos trabalhos, consiste em resolver as equações de NS a partir de pequenas diferenças de pressões. Isso gera um conjunto de subproblemas em que a solução de um subproblema é usado como condição inicial para o próximo subproblema. A determinação dos subproblemas em termos de um parâmetro (como pressão no presente caso ou o número de Reynolds do escoamento) é dependente do escoamento.

Na tentativa de acelerar o processo de convergência e ao mesmo tempo permitir subproblemas com intervalos de diferenças de pressão maiores, a técnica empregada pelo programa de computador Fluent FIDAP foi considerada (Sani e Gresho, 1994). O problema básico é a imposição de incompressibilidade do escoamento. Como a pressão tem velocidade de propagação infinita, ela se atualiza rapidamente ao longo do domínio finito. Podemos notar na Eq. 4.2.83 que a variação de velocidade e pressão relacionam-se de modo que a pressão média seja constante no contorno de saída. Assim, um aumento de pressão pode ser incompatível com a pressão média P_i na face, o que é contrabalanceado com um aumento (incorreto) do gradiente de velocidade. Assim, naturalmente se o aumento do gradiente de velocidade não for

adequadamente controlado podemos instabilizar completamente as iterações seguintes. A solução sugerida para aliviar esse problema é liberar a condição de contorno de saída dada pela Eq. 4.2.83. Isso é feito variando-se o termo de pressão naquela expressão com base no valor da pressão na iteração anterior. Assim, temos:

$$K(U_f)U_f = R_f(P), \quad (4.2.84)$$

ou seja, aumentamos a não-linearidade do problema original com o mérito de impor o mínimo de perturbação no contorno de saída do escoamento.

Os testes que desenvolvemos realmente mostraram que a atualização da pressão na condição de contorno de Neumann permite uma redução no tempo de convergência, mas ainda assim, não elimina totalmente as oscilações durante as iterações.

Outra técnica (bastante controversa) é o que se denomina condição de contorno de saída “inexistente” ou “livre” (Papanastasiou et al., 1992). Ela é controversa pois quando analisada sob o ponto de vista contínuo, ela produz uma equação diferencial parcial mal definida (“*ill-posed*”). Ou seja, faltam informações para que ela gere uma única solução. Entretanto quando discretizada pelo MEF no qual o objetivo é minimizar o funcional equivalente de NS, o emprego desse tipo de condição de contorno “livre” gera soluções com menor resíduo “funcional”.

Muitas discussões (Sani e Gresho, 1994; Griffiths, 1997) foram feitas quanto à existência de soluções e até sobre qual o problema efetivo que está sendo resolvido. Os resultados de alguns problemas convencionais em dinâmica dos fluidos (especificamente o problema de escoamento em um tubo com expansão abrupta de área ou *backward-facing step*) mostraram que o comportamento do escoamento é correto (Papanastasiou, 1992; Park e Lee, 1999).

A implementação do método consistiu em avaliar as integrais de superfície da Eq. 4.2.83 nos nós que compõem a superfície de contorno de saída em termos das variáveis de velocidade e pressão que são agora desconhecidas. Ou seja, admite-se que nada é conhecido a respeito das pressões e gradientes de velocidade no contorno de saída. Tais integrais são passadas para o lado esquerdo da expressão $K(U) = R$, onde R não conterá mais as integrais de superfície das condições de Neumann para o contorno de saída. Toda essa manobra é equivalente a estender a validade das equações de momento para o contorno de saída.

Algumas considerações são importantes aqui. Todos os trabalhos em que esse método foi implementado não trazem muita menção sobre alguns detalhes que julgamos importantes (por exemplo, no estudo de escoamentos não-newtonianos de Park e Lee (1999)). Particularmente a pergunta mais importante é como se define a pressão em algum ponto do contorno de saída. Algumas análises (Sani e Gresho, 1994) demonstram que o sistema de equações não-lineares final é indeterminado, algo que, no entanto, não é mencionado no trabalho original do método. A situação é simples: o sistema fica sem uma referência de pressão para o cálculo das velocidades e pressões nodais. Um olhar mais cuidadoso na referência (Papanastasiou et al., 1992) indica que os autores usaram uma condição de Dirichlet para a pressão (*pressure datum*) através da eliminação de uma única condição de continuidade com a menção de acelerar a convergência. Nós acreditamos que essa é a condição necessária e suficiente para se obter um sistema possível

e determinado de equações. Isso é corroborado pela análise de trabalhos envolvendo superfície livre (Tezduyar et al., 1992; Güler et al., 1999) em que os autores especificaram a pressão em alguma região do domínio finito.

Outra característica importante é que na maioria dos trabalhos estudados, o escoamento foi excitado por velocidades no contorno de entrada, ou seja, empregavam-se condições de Dirichlet. Poderia aparentemente parecer que o emprego desse tipo de condição de contorno de saída somente seria operacional nessa situação mas isto não é verdade.

Durante nossos testes, verificamos primeiramente que a especificação de única pressão em algum ponto do contorno do problema é realmente necessária e suficiente para que se tenha um sistema de equações possível e determinado a cada iteração para um escoamento excitado por condições de Dirichlet.

Quando excitamos o escoamento com condições de Newmann, curiosamente a única referência era a pressão na entrada da laringe. Como já mencionamos, o MEF minimiza o funcional equivalente à equação diferencial parcial do problema. Assim, como não existia especificação de pressão de saída, a distribuição de pressão ao longo do domínio que minimiza tal funcional é constante, ou seja, não há queda de pressão que excite o escoamento. Assim a vazão desse funcional é nula. O que intuitivamente é correto.

Quando empregamos as condições de Dirichlet isso não ocorreu pois existia uma vazão forçada. Assim, o sistema ficava indefinido e necessitava que a pressão em apenas um ponto do contorno fosse especificada.

O motivo que nos levou a abandonar essa abordagem foi o fato de que a imposição de pressão em algum nó do contorno do problema, para que o método funcione, exigia a remoção da condição de continuidade naquele nó. Assim quebraríamos uma das regras que rege um escoamento incompressível.

Bao (1997) tentou determinar quais as condições de contorno de saída com a suposição de que se conhece as condições de fluxo em uma posição infinitamente distante desse contorno. É claro que seu trabalho é bastante restrito quanto a sua aplicação e depende de sofisticadas técnicas matemáticas para resolver analiticamente NS em domínios hipotéticos.

Baseado nos testes que realizamos, a abordagem sugerida pelo programa de computador Fluent FIDAP aparentou ser a mais adequada, pois restringia a continuidade do escoamento e era bastante similar à condição de contorno livre uma vez que continuávamos assumindo que não conhecíamos qual a distribuição de pressão no contorno de saída. Considerando os problemas que tivemos com as modificações das condições de contorno de saída, optamos por adotar a solução “não-faça-nada” de Gresho e Sani (1987).

4.2.12 Método Híbrido para Solução do Escoamento de Ar na Laringe

Para resolver NS para as diversas configurações geométricas da laringe, desenvolvemos um método híbrido empregando alguns dos métodos apresentados. Procuramos obter um algoritmo final que fosse robusto de forma a sempre produzir uma solução para qualquer configuração que os músculos da laringe pudessem gerar, eficiente para que não tomasse um tempo proibitivo na determinação da solução e preciso,

mesmo que aproximado, para que não tivéssemos a infeliz surpresa de que a solução fosse completamente incorreta.

Considerando os algoritmos analisados, primeiramente “juntamos” os métodos SUPG (obtido via Galerkin *Least-Square* de Sampaio (1991)) e de primeira ordem seguindo uma idéia muito em prática nos métodos de diferenças e volumes finitos. Tal idéia é discutida nos parágrafos abaixo.

É conhecido que os métodos de primeira ordem são robustos para escoamentos de alta velocidade mas geram grande quantidade de difusão numérica na solução. Já os métodos de ordem superior (como SUPG) produzem soluções mais precisas mas não são robustos para Re muito elevado. Considerando tais relações e seguindo as idéias apresentadas no programa comercial Fluent FIDAP (FIDAP, 1999), desenvolvemos um método que varia o grau de aplicação de um ou outro método ao longo da malha. Note que as propriedades matemáticas da matriz de convecção são mantidas, apenas a discretização de $(U_v \cdot \nabla)U_v$ varia.

Primeiramente foi necessário determinar as variações de gradiente ao longo da malha, ou seja, onde o escoamento varia muito e onde ele é mais suave. Assim, devemos considerar o seguinte esquema espacial de elementos

Figura 4.2.10 - Esquema espacial para descrição dos gradientes de velocidade.

O objetivo é calcular o valor α_{blending} (chamado também de valor de *blending*) tal que quando $\alpha_{\text{blending}}=0$, aplicamos somente o método SUPG e quando $\alpha_{\text{blending}}=1$, somente o método de primeira ordem. Os valores intermediários definem a interpolação linear entre ambos os métodos na confecção das matrizes locais.

Para cada face do elemento analisado (sobre o qual estamos calculando as matrizes locais de MEF para NS), calculamos a magnitude de alteração do componente U_{vi} ($U_{v1}=U_{vx}$, $U_{v2}=U_y$ e $U_{v3}=U_{vz}$) usando a expressão:

$$\delta_i^j = \frac{|U_{vi}^{\text{projetada}} - 2U_{vi}^{\text{face}} + U_{vi}^{\text{oposta}}|}{2 \cdot \max(|U_{vi}^{\text{projetada}} - U_{vi}^{\text{face}}|, |U_{vi}^{\text{face}} - U_{vi}^{\text{oposta}}|)}, \quad (4.2.85)$$

onde δ_i^j é um filtro laplaciano aplicado sobre a j -ésima face em relação a três pontos. Adicionalmente, tanto U_{vi}^{oposta} quanto U_{vi}^{face} são coletados a partir do centro geométrico das faces, enquanto $U_{vi}^{\text{projetada}}$ é calculada na intersecção da reta que liga U_{vi}^{oposta} e U_{vi}^{face} com a j -ésima face do elemento.

Note que cada face possui duas faces opostas (ou três, no caso tridimensional) e dessa forma, dois (ou três) δ_i^j para a face analisada. Sendo assim, definimos δ_i^j da j -ésima face como sendo o maior valor dentre os calculados a partir da face analisada (note que não precisamos considerar o maior absoluto pois δ_i^j é sempre não-negativo).

Agora calculamos qual o valor característico do gradiente do componente U_{vi} dentro do elemento através da média ponderada:

$$\delta_i = \frac{\sum_{j=1}^{num\ faces} (\delta_i^j)^2}{\sum_{j=1}^{num\ faces} \delta_i^j}. \quad (4.2.86)$$

Poderíamos considerar um valor característico para cada componente mas isso implicaria em mudanças na estruturação dos cálculos, particularmente da matriz de convecção (conforme as Eqs. 4.2.6 e 4.2.31). Assim, simplificamos o procedimento adotado o valor máximo de δ_i como sendo o valor de gradiente total dentro do elemento analisado, ou seja $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ (ou $\max(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ para o caso tridimensional).

FIDAP (1999) recomenda a expressão final para definir $\alpha_{blending}$ como:

$$\alpha_{blending} = \alpha_{blending}^{\min} + (\alpha_{blending}^{\max} - \alpha_{blending}^{\min})\delta^2. \quad (4.2.87)$$

Neste trabalho, adotamos $\alpha_{blending}^{\min} = 0$ e $\alpha_{blending}^{\max} = 1$. Esse valor de *blending* foi então usado para determinar as matrizes locais de todos os elementos geométricos e, finalmente, montar o sistema matricial global a ser resolvido.

Entretanto, precisamos adotar também um procedimento paulatino de aplicação da diferença de pressão, pois quando empregamos diretamente o método de Stokes, como o primeiro passo da iteração (ou mesmo $U_f=0$ para qualquer dos métodos), os vetores de velocidade sempre possuem uma magnitude muito elevada, de forma que as iterações sucessivas tornavam-se altamente instáveis (esse fato é muito freqüente em laringes com câncer ou paralisia, pois a área glotal é muito grande, quando comparada a uma laringe normal).

Usamos o método das bases reduzidas para extrapolar a solução de baixas diferenças de pressões para a diferença de pressão desejada. O número de bases reduzidas geradas foi 5, pois cada convergência consumiu em média 10 iterações do método de Piccard para o método SUPG.

Tentamos criar um método para gerar a diferença de pressão-base (a partir do qual dividíamos em 5 para gerar os subproblemas para o método das bases reduzidas) com base na estimação do “raio de convergência” do problema. A idéia era que resolvendo um problema de Stokes ($K(0)U_{f1}=R_f$), determinaríamos iterativamente uma diferença de pressão tal que $\|K(\alpha U_{f1})\{\alpha U_{f1}\} - R_f\|$ fosse mínimo (segundo o método de Stokes modificado, já apresentado) com $\alpha = \alpha_{desejado}$. Tal $\alpha_{desejado}$ forneceria uma idéia de quão “longe” estaríamos da solução, pois valores muito pequenos indicam que estamos consideravelmente longe da solução, ao passo que $\alpha \rightarrow 1$, estamos muito próximos da solução. Empregamos um método baseado em busca binária que varia a queda de pressão de modo a atingir o valor $\alpha_{desejado}$ minimizando a norma quadrática.

Note que o método híbrido é semi-automático, pois constatamos que α_{desejado} é dependente das características geométricas da laringe, particularmente da altura da camada-limite. Verificamos que para laringes “normais”, $\alpha_{\text{desejado}}=0,40$ e para laringes com glote muito aberta, como em câncer, $\alpha_{\text{desejado}}=0,5$.

Tais valores são bastante dependentes das características do problema. Para estimá-lo, simulamos numericamente um grande número de laringes (diferentes perfis geométricos glotais e diferentes distâncias entre a superfície da condição de contorno de saída e a constrição glotal) e observamos a velocidade de convergência do método de Piccard para SUPG unicamente. O valor desejado era aquele que não convergia muito rapidamente e nem divergia, tudo em um intervalo de 10 iterações. Certamente a especificação é muito dependente da geometria e também do conhecimento de que os tecidos da laringe não produzem movimentos drásticos durante a fonação. Caso contrário, certamente teríamos que especificar tal coeficiente com base na camada-limite do problema, geometria da laringe e número de Reynolds do escoamento (variáveis que aparentemente para nós influenciam a convergência de NS).

Toda essa sofisticação teve por intuito produzir um conjunto representativo de bases reduzidas de modo que a solução estimada pelo método das bases reduzidas fosse realmente bem próximo da solução final.

Com as bases reduzidas obtidas, projetávamos a solução final (conforme a descrição do método em seção anterior). Considerando que essa aproximação é uma boa condição inicial para a solução de NS, realizamos de 5 passos do método híbrido (conforme a velocidade de convergência - se o valor ϵ_0 da Eq. 4.2.25 aumentasse, parávamos as iterações) para obter a solução final APROXIMADA do escoamento na laringe.

Assim, o algoritmo final para solução de NS por MEF ficou:

1. Para i de 1 até 5;
 - 1.1. Gere a i -ésima base reduzida usando SUPG via método de Piccard;
2. Calcule a solução U_x para a diferença de pressão desejada usando as bases reduzidas;
3. Itere 5 passos usando SUPG/primeira-ordem via método de Piccard a partir de U_x (nova condição inicial).

Para validar nossos resultados, simulamos perfis geométricos da laringe e comparamos nossos resultados com os obtidos por Guo e Scherer (1994), que usaram laringes bidimensionais e também resolveram NS usando MEF. Nossa abordagem, além de mais rápida, produz resultados muito próximos daqueles autores (diferença máxima de 1% na distribuição de pressões ao longo da laringe entre os resultados dos dois trabalhos). Devemos considerar que Guo e Scherer (1994) admitiram implicitamente que seu perfil bidimensional era um corte transversal de uma laringe cuja largura é infinita enquanto nossa geometria tem largura finita e a área glotal não é retangular.

Note novamente que nossa solução é APROXIMADA pois não forçamos a convergência no estágio final de cálculo. Devemos nos lembrar das limitações de malha na região glotal e supraglotal da laringe além do problema da condição de contorno de saída (onde usamos a abordagem “não-faça-nada” de Gresho e Sani (1987)). O ideal seria: a) descrever geometricamente toda a laringe e boca de tal forma que a pressão nula

fosse atribuída fora da boca; ou b) estender o tubo da laringe “digital” a um comprimento suficientemente grande tal que não houvesse gradientes de tensão aerodinâmica no plano onde as condições de contorno de saída fosse especificado. Claro que ambas as abordagens são inviáveis para a capacidade computacional disponível durante o desenvolvimento de nossa pesquisa. Mesmo assim, nossas avaliações dos resultados (e comparação com trabalhos como Guo e Scherer (1994)) mostrou que nossa abordagem cumpriu os requisitos de robustez, eficiência e precisão para estimular os movimentos dos tecidos musculares da laringe.

4.3 Solução Numérica da Dinâmica dos Músculos da Laringe

Diferente das equações de NS, o músculo como um sólido deformável para uma análise dinâmica possui funcional. Normalmente para problemas estáticos em mecânica dos sólidos, podemos optar pelo tratamento direto das equações diferenciais do problema (através dos métodos dos deslocamentos, das forças ou misto) ou através dos métodos variacionais.

Como o problema sugere uma análise dinâmica dos deslocamentos (e deformações) dos nós da malha representando o músculo, seguimos uma abordagem baseada no método variacional conhecido por equações lagrangeanas do movimento. Basicamente esse método envolve a minimização da função de energia do problema (representado pelo funcional). Tal funcional é também conhecido como função lagrangeana (L) do sistema e é definido por:

$$L = K_C - \Pi$$

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho \{ \dot{U}_m \}^T \{ \dot{U}_m \} - \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} + 2 \{ U_m \}^T \{ F_m \} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{ U_m \}^T \{ T \} d(\partial\Omega), \quad (4.3.1)$$

onde K_C e Π são a energia cinética e a energia potencial do problema, respectivamente, T é a tração aplicada sobre a superfície do domínio; e F_m são as forças de corpo aplicadas sobre o domínio.

Finalmente, as equações lagrangeanas do movimento definem que:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_m} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial U_m} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{U}_m} \right\} = 0, \quad (4.3.2)$$

onde R representa os efeitos de amortecimento (ou dissipação) proporcionais à velocidade da deformação e à “viscosidade” do sólido (músculo no caso).

Uma vez que o domínio foi dividido em elementos finitos, os componentes K_C , Π e R podem ser obtidos diretamente para cada um desses subespaços, ou seja:

$$K_C^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \rho \{ \dot{U}_m^{(e)} \}^T \{ \dot{U}_m^{(e)} \} d\Omega$$

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \{ \varepsilon^{(e)} \}^T \{ \sigma^{(e)} \} d\Omega - \int_{\partial\Omega^{(e)}} \{ U_m^{(e)} \}^T \{ T^{(e)} \} d(\partial\Omega) - \int_{\Omega^{(e)}} \{ U_m^{(e)} \}^T \{ F_m^{(e)} \} d\Omega \quad (4.3.2)$$

$$R^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \eta \{ \dot{U}_m^{(e)} \}^T \{ \dot{U}_m^{(e)} \} d\Omega.$$

Considerando que a solução é obtida para os nós da malha e posteriormente interpolada no domínio descrito pelo elemento finito, temos a relação:

$$U_m^{(e)} = [N]U_m^{(e)*}, \quad (4.3.3)$$

onde $U_m^{(e)*}$ é o vetor contendo a solução n-dimensional (no caso, tridimensional) nos nós do e-ésimo elemento finito.

Aplicando as Eqs. 4.3.4 e 3.9 (que relaciona tensão-deformação) nas Eqs. 4.3.3, obtém-se os componentes globais de K_C , Π e R , ou seja:

$$\begin{aligned} K_C &= \sum_e K_C^{(e)} = \frac{1}{2} \{ \dot{U}_m \}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^{(e)}} \rho [N]^T [N] d\Omega \right] \{ \dot{U}_m \} \\ \Pi &= \sum_e \Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \{ U_m \}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T [C] [N] d\Omega \right] \{ U_m \} - \\ &\quad - \{ U_m \}^T \sum_e \left[\int_{\partial\Omega^{(e)}} [N]^T [T] d(\partial\Omega) + \int_{\Omega^{(e)}} [N]^T [F] d\Omega \right] \\ R &= \sum_e R^{(e)} = \frac{1}{2} \{ \dot{U}_m \}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^{(e)}} \eta [N]^T [N] d\Omega \right] \{ \dot{U}_m \}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

A matriz $[B]$ é para representar a seguinte relação existente entre os deslocamentos nodais e a deformação do corpo:

$$\varepsilon = [B]U_m, \quad (4.3.6)$$

onde B para o caso tridimensional é obtido por:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Com o funcional completamente definido em todo o domínio com base nos “subdomínios”, aplicamos a Eq. 4.3.5 na Eq. 4.3.2 (equações de Lagrange) para obtermos as equações dinâmicas de deformação do corpo, ou seja:

$$[M]\{\ddot{U}_m\} + [C]\{\dot{U}_m\} + [K]\{U_m\} = \{F_s\} + \{F_c\}, \quad (4.3.8)$$

onde

$$\begin{aligned}
[M] &= \rho \int_{\Omega(e)} [N]^T [N] d\Omega \\
[C] &= \eta \int_{\Omega(e)} [N]^T [N] d\Omega \\
[K] &= \int_{\Omega(e)} [B]^T [C] [B] d\Omega \\
\{F_s\} &= \int_{\partial\Omega(e)} [N]^T [T] d(\partial\Omega) \\
\{F_c\} &= \int_{\Omega(e)} [N]^T [F_m] d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Fisicamente, a matriz M representa a inércia da deformação, a matriz C as perdas por dissipação viscosa e a matriz K a resistência do elemento à deformação. Os vetores F_s e F_c correspondem à ação de trações e forças de corpo, respectivamente.

Teoricamente, o problema está completamente definido. Do ponto de vista de MEF basta construirmos o sistema definido pela Eq. 4.3.8 com as matrizes para cada elemento finito definidas pela Eq. 4.3.9. A integração dessas foi feita analiticamente usando funções de interpolação quadrática e comportamento ortotrópico para C .

A geometria dos elementos finitos usada foi a tetraédrica. Geralmente os trabalhos para mecânica dos sólidos empregando MEF recomendam o uso de hexaédros, pois esses fornecem uma precisão maior nos resultados. A justificativa para o uso dos tetraedros é a facilidade de gerar automaticamente os polígonos que discretizam o domínio de solução e evitar problemas como polígonos degenerativos (que acarretam dificuldades numéricas nas integrações na Eq. 4.3.9).

Para melhorar a precisão, a interpolação quadrática foi usada (como no problema de escoamento) com os tetraedros possuindo 10 nós. O uso dessa forma geométrica facilitou também a integração, pois podemos usar formas analíticas fechadas.

A solução da equação diferencial ordinária (EDO) definida pela Eq. 4.3.8 exigiu alguns cuidados. Normalmente empregam-se técnicas baseadas em diferenças finitas. Por ser de segunda ordem (em relação ao tempo), dentre as possibilidades estão o método das diferenças centrais, o método de Houbolt, de Wilson- θ e de Newmark. Desses, o último foi empregado por ser incondicionalmente estável (segundo literatura) e largamente empregado com sucesso (Bathe, 1996). Métodos como de Euler ou de Crank-Nicholson somente podem ser aplicados para obtenção de resultados coerentes em sistemas de primeira ordem.

O método das diferenças centrais poderia ser empregado pelas simplificações que esse permite como a redução da matriz de massas de sua forma consistente, ou completa (*consistent matrix*) para uma forma condensada (*lumped matrix*), com elementos apenas na diagonal principal. Isso permitiria uma inversão rápida, reduzindo drasticamente o tempo de processamento. Mas a desvantagem é que o passo de tempo deve ser muito pequeno (analiticamente determinável). Tudo porque a integração da EDO torna-se explícita, ou seja, a solução no tempo $t+\Delta t$ depende de condições de equilíbrio no tempo t .

Considerando observações na literatura (Bathe, 1996), o método de Neumark foi utilizado por ser incondicionalmente estável, ou seja, não é dependente da especificação de passos de tempo para produzir

soluções precisas (claro que é importante definir alguns critérios para que a solução seja coerente com o problema).

Sua derivação é baseada nas seguintes discretizações temporais:

$$\begin{aligned}\{U_m\}^{s+1} &= \{U_m\}^s + \Delta t \{\dot{U}_m\}^s + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \{\ddot{U}_m\}^{s+\gamma} \\ \{\dot{U}_m\}^{s+1} &= \{\dot{U}_m\}^s + \Delta t \{\ddot{U}_m\}^{s+\alpha},\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

onde $\{\ddot{U}_m\}^{s+\theta} = (1-\theta)\{\ddot{U}_m\}^s + \theta\{\ddot{U}_m\}^{s+1}$.

Substituindo a Eq. 4.3.10 na Eq. 4.3.8, obtemos a seguinte relação para cada iteração de tempo:

$$\begin{aligned}([K] + a_0[M] + a_5[C])\{U_m\}^{s+1} &= \{R_m\}^{s+1} + [M](a_0\{U_m\}^s + a_1\{\dot{U}_m\}^s + a_2\{\ddot{U}_m\}^s) + \\ &\quad [C](a_5\{U_m\}^s + a_6\{\dot{U}_m\}^s + a_7\{\ddot{U}_m\}^s) \\ \{\ddot{U}_m\}^{s+1} &= a_0(\{U_m\}^{s+1} - \{U_m\}^s) - a_1\{\dot{U}_m\}^s - a_2\{\ddot{U}_m\}^s \\ \{\dot{U}_m\}^{s+1} &= \{\dot{U}_m\}^s + a_2\{\ddot{U}_m\}^s + a_1\{\ddot{U}_m\}^{s+1},\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

onde as constantes a_i são definidas por:

$$a_0 = \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2}, a_1 = \frac{2}{\gamma\Delta t}, a_2 = \frac{1}{\gamma} - 1, a_5 = \frac{2a}{\gamma\Delta t}, a_6 = \frac{2a}{\gamma} - 1, a_7 = \Delta t\left(\frac{a}{\gamma} - 1\right)\tag{4.3.12}$$

e $\{R_m\}^s = \{F_s\}^s + \{F_c\}^s$.

As constantes α e γ são parâmetros que controlam a integração e podem definir outros métodos. Por exemplo, $\alpha = 0,5$ e $\gamma = 0$ conduz ao método das diferenças centrais (para isso, devemos dividir toda as equações por γ e então aplicar os valores, particularmente o último). Para garantir uma estabilidade incondicional, optamos por $\alpha = \gamma = 0,5$. Tal configuração também é conhecida por método da aceleração média constante (*constant average acceleration method*).

Devido à característica implícita da solução, temos um contingente enorme de equações (triplo do número de variáveis globais) a ser resolvido simultaneamente. Um modo de manter as características do problema e reduzir a sua complexidade é particionar a Eq. 4.3.11 no que se denomina modelo preditor-corretor. A porção preditora é definida por:

$$\begin{aligned}\widetilde{\{\ddot{U}_m\}}^{s+1} &= -a_0\{U_m\}^s - a_1\{\dot{U}_m\}^s - a_2\{\ddot{U}_m\}^s \\ \widetilde{\{\dot{U}_m\}}^{s+1} &= \{\dot{U}_m\}^s + a_2\{\ddot{U}_m\}^s.\end{aligned}\tag{4.3.13}$$

Podemos notar que as porções dependentes de $s+1$ foram temporariamente removidas. De posse das variáveis de aceleração e velocidade preditas, resolvemos efetivamente o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
([K] + a_0[M] + a_5[C])\{U_m\}^{s+1} &= \{R_m\}^{s+1} + [M]\left(a_0\{U_m\}^s + a_1\left\{\widetilde{\dot{U}}_m\right\}^s + a_2\{\ddot{U}_m\}^s\right) + \\
&[C]\left(a_5\{U_m\}^s + a_6\left\{\widetilde{\dot{U}}_m\right\}^s + a_7\left\{\widetilde{\ddot{U}}_m\right\}^s\right).
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

E finalmente, conhecendo agora o deslocamento no passo $s+1$, corrigimos os vetores da Eq. 4.3.13 através de:

$$\begin{aligned}
\{\ddot{U}_m\}^{s+1} &= \left\{\widetilde{\ddot{U}}_m\right\}^{s+1} + a_0\{U_m\}^{s+1} \\
\{\dot{U}_m\}^{s+1} &= \left\{\widetilde{\dot{U}}_m\right\}^{s+1} + a_1\{\ddot{U}_m\}^{s+1}.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Percebemos que a correção envolve a recomposição dos termos anteriormente removidos na definição da Eq. 4.3.13. Essa transformação permitiu que o problema fosse melhor “digerido” pelo computador. Como um problema transiente, foi necessário definir as condições iniciais. Para isso, basta retornar na EDO original (Eq. 4.3.8) e considerar as informações iniciais disponíveis, ou seja:

$$[M]\{\ddot{U}_m\}^0 = \{R_m\}^0 - [C]\{\dot{U}_m\}^0 - [K]\{U_m\}^0. \tag{4.3.16}$$

Como tanto o deslocamento quanto velocidade inicial dos nós estavam em repouso (pois assumimos que ainda não há escoamento inicial para “pressionar” as paredes musculares), a aceleração inicial naturalmente é zero.

As condições de contorno do problema foram deslocamento nulo em alguns nós da malha (Dirichlet) e tensões normais nos nós remanescentes (Neumann), sendo esses nós situados na superfície do domínio em contato com o escoamento. As primeiras foram aplicadas após a construção das matrizes globais, enquanto as últimas foram aplicadas diretamente no processo do funcional e estão contidas no vetor $\{F_s\}$.

Para auxiliar a compreensão da solução final, segue o algoritmo do processo:

Iniciação

1. Construção das matrizes locais $M^{(e)}$, $C^{(e)}$ e $K^{(e)}$;
2. Montagem das matrizes globais M , C e K ;
3. Montagem da matriz global $[K] + a_0[C] + a_5[K]$;
4. Aplicação das condições de Dirichlet sobre a matriz do passo 3;
5. Fatoração desta matriz;
6. Iniciação dos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração.

Iteração no passo s

1. Montagem dos vetores locais $F_s^{(e)}$ e $F_c^{(e)}$;
2. Montagem dos vetores globais F_s e F_c ;
3. Construção do vetor do lado direito da Eq. 4.3.14;
4. Aplicação das condições de Dirichlet sobre o vetor formado no passo 3;

5. Passo Preditor (Eq. 4.3.13);
6. Resolução das Eq. 4.3.14;
7. Passo Corretor (Eq. 4.3.15).

Resta somente definir o passo de tempo Δt que regiu o sistema. As referências para solução de EDOs através de métodos condicionalmente estáveis ajudaram a definir um intervalo de tempo adequado. Considerando que o método das diferenças centrais por realizar uma integração explícita depende de um passo de tempo pequeno, pode ser demonstrado (Hughes, 1987) que a solução é estável com:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crítico}} = \frac{T_{\min}}{\pi}, \quad (4.3.17)$$

onde $T_{\min}$ é o menor período de vibração natural de um sistema dinâmico.

Assim, sabendo que as maiores frequências naturais das pregas vocais concentram-se abaixo dos 500 Hz (Titze, 1975; Berry e Titze, 1996), para uma integração explícita o valor definido pela Eq. 4.3.17 seria $6,366 \times 10^{-4}$. Tendo-se esse valor referência, adotamos inicialmente $\Delta t = 0,001$ s. Posteriormente esse valor foi reduzido para simular sinais glotais contendo frequências fundamentais mais elevadas (compatíveis com aumento da tensão nas pregas vocais e representado por constantes de elasticidades mais altas).

4.3.1 Problema de Contato

O problema de contato corresponde ao método de contabilizar as forças de ação e reação envolvidas na colisão/contato entre corpos. Tais forças devem ser tais que um corpo não penetre no outro.

Matematicamente é um problema complexo pois só sabemos se ocorreu a colisão quando ela efetivamente acontece. Ou seja, o contato não permite o cálculo das forças a priori. Bathe (1996) descreve o problema a partir de dois corpos (respectivamente mestre e escravo), apropriadamente separados, que em um instante t qualquer colidem. A superfície de ambos que se tocam, mutuamente, é chamada de contato.

Sobre essa superfície de contato (na verdade duas, uma para cada corpo), duas forças F (forças de contato) são aplicadas, uma para cada superfície, de tal forma que ambas têm a mesma direção e sentidos opostos. Essas forças equivalem à lei de ação e reação de Newton.

Para definir adequadamente as forças de contato, determinamos um nó x no elemento mestre e um nó y no elemento escravo tal que a distância entre esses dois pontos seja mínima (o elemento mestre fornece o nó fixo). Dessa forma, temos:

$$g(x) = (x - y)^T \cdot n, \quad (4.3.18)$$

onde n é o vetor normal a superfície de contato no nó x .

Se considerarmos λ e t como sendo os componentes normal e tangencial à superfície de contato, respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda &= F^T \cdot n \\ t &= F^T \cdot s, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

onde s é o vetor tangencial à superfície de contato no nó x .

Dessa forma, definimos as restrições matemáticas para o contato:

$$g \geq 0, \lambda \geq 0, g \cdot \lambda = 0. \quad (4.3.20)$$

Essas equações dizem que o espaço entre as superfícies dos corpos deve ser sempre positivo (impenetrabilidade), as forças de contato devem repelir os corpos que tentam a penetração e não segurá-los, e finalmente, se os corpos estão afastados não existe força de contato, ou, se existir força de contato, não existe espaço entre os corpos (*gap* nulo).

É claro que as equações dinâmicas do músculo são adicionadas de um vetor força, contendo os componentes normal e tangencial de tal forma que:

$$M \cdot \ddot{U} + C \cdot \dot{U} + K \cdot U = F_s + F_c + F_{colisão}, \quad (4.3.21)$$

onde $F_{colisão}$ é a força proveniente do contato entre corpos. Os demais componentes estão descritos na seção anterior.

Para completar o sistema de equações (Eq. 4.3.21) é necessário empregar as restrições (4.3.20). Esse problema recebe o nome de problema de complementaridade em otimização. Os métodos adotados para sua solução passam pelo emprego de operadores de Lagrange ou pela técnica de função penalidade para reforçar as restrições (Eq. 4.3.20) (Simo et al., 1984; Bathe e Chaudhary, 1985; Eterovic e Bathe, 1991).

Note que o método depende da determinação dos nós penetrantes e faces dos elementos finitos penetrados, ou seja, os algoritmos de detecção de colisão devem ser eficientes. Além disso, reforçar as inequações (Eq. 4.3.20) exige adicional tratamento que dependendo da abordagem adotada (operadores de Lagrange, por exemplo) resultam no aumento do sistema de equações final a ser resolvido.

Uma abordagem alternativa e aparentemente bastante eficiente é a do algoritmo *Pinball* (Belytschko e Neal, 1991) em que a detecção da colisão é mais eficiente e produz informações sobre a extensão da penetração (g , que no caso pode admitir valores negativos). Esse parâmetro é útil para o método proposto por tais autores pois sua formulação, baseada na dinâmica dos corpos (seu variacional), é diferente do empregado nos problemas de contato. A principal idéia extraída deste trabalho e empregada para a solução do problema da colisão global foi a possibilidade de cálculo da força de colisão “diretamente” das restrições (Eq. 4.3.21).

A primeira idéia considerada para detectar a colisão e para “saber de onde o nó veio” é simples: as posições dos nós de músculo no último instante imediatamente antes da existência de qualquer colisão são armazenadas e servem de guias para determinar a direção do movimento dos nós de superfície. A detecção pode ser vista na Figura 4.3.1.

Figura 4.3.1 - Diagrama de pesquisa dos nós envolvidos na colisão.

Os pontos PT_{ant} e PT_{atual} são o “mesmo ponto” de um mesmo elemento finito em um instante imediatamente anterior a qualquer colisão e em um instante de colisão, respectivamente. O ponto PT_{face} é o ponto considerado de colisão sobre a face de superfície de contato ABC de um outro elemento finito qualquer.

Entretanto, tivemos problemas com essa abordagem. Verificamos que em algumas situações, a técnica não era capaz de detectar o ponto PT_{face} , pois tanto PT_{ant} quanto PT_{atual} se localizavam dentro do elemento “colidido”. Como a busca é feita entre tais pontos, a técnica falha para alguns nós da superfície da malha.

A alternativa adotada foi definir qual a direção de busca da superfície colidida com base nas superfícies colididas. Considere dois corpos que colidem em um instante de tempo qualquer. A colisão é definida pelos nós de um corpo que estão contidos no elemento oposto. A Figura 4.3.2 mostra esse evento.

Figura 4.3.2 - Abordagem alternativa para determinação de faces colididas.

Note que cada corpo A possui um conjunto de nós que penetraram no corpo oposto B. Definimos então o vetor “equivalente” v_A e v_B da superfícies de penetração. Isso é feito somando-se todos os vetores

normais às superfícies finitas que possuem algum nó que penetrou no corpo oposto. A magnitude desses vetores não é unitária e sim contém o valor da área daquela superfície finita.

Finalmente, considerando que v_A é “oposto” a v_B , calculamos o vetor direção de colisão médio, ou seja, $v = (v_A / \|v_A\|) - (v_B / \|v_B\|)$ e finalmente definimos os vetores de busca da colisão v_A' e v_B' como sendo igual a v e $-v$, respectivamente. O vetor v é normalizado após a subtração.

Agora, para cada nó de B que penetrou no corpo oposto A, buscamos na direção $-v_B'$ a superfície finita de A mais distante do nó analisado. Isso é representado pela Figura 4.3.3.

Figura 4.3.3 - Determinação de PT_{atual} e PT_{face} para cálculo das forças de colisão.

Note que essa abordagem exige a definição dos corpos A e B. Em nosso problema, definimos quatro corpos para avaliação da colisão entre eles: as pregas vocais verdadeiras direita e esquerda e as falsas pregas vocais direita e esquerda. Esses corpos são definidos geometricamente para cada laringe estudada a partir de um hexaédro espacial para cada um dos corpos - todos os tetraedros cujos centros geométricos estão contidos neste hexaédro pertencem àquele corpo.

Simplificadamente, nosso intuito foi determinar a direção de busca com base nas superfícies de colisão, “linearizando” tais superfícies. Além de facilitar a busca das superfícies de reação aos nós colididos, essa abordagem conduziu a forças de ação e reação menores do que a abordagem anterior (quando aquela conseguia detectar todas as colisões existentes).

Assim, deve existir uma força de amplitude λ , normal à superfície ABC, de forma a impedir a penetração nessa direção. Ou seja, o ponto PT_{atual} poderá deslizar paralelamente ao plano ABC mas jamais “penetrá-lo” (ocorrerão pequenas penetrações pois para que sejam detectadas, o ponto PT_{atual} deve ter penetrado algum elemento mas com o controle do Δt da simulação, esse ponto se localizará muito próximo à superfície ABC). Note também que não existe tratamento para a ação da fricção das superfícies sobre o deslocamento tangencial do ponto PT_{atual} . Essa é uma das principais simplificações do modelo e também pode ser justificada pela falta de conhecimento das leis de fricção sobre as paredes do músculo na glote (além das dificuldades computacionais envolvidas).

Tal força de contato, efetivamente aplicada no ponto PT_{face} , deve produzir uma reação sobre a superfície ABC do elemento colidido de forma a validar a lei da ação e reação de Newton.

A busca então de todos os planos ABC ditos de restrição e pontos de contato PT_{face} é realizada para que as restrições de movimento sejam montadas. A formulação final resume-se então resolver:

$$K \cdot U_m = R_m + A^T \cdot F_{colisão}, \quad (4.3.22)$$

sujeito às restrições de contato

$$A \cdot U_m = U_s, \quad (4.3.23)$$

onde as restrições nada mais são do que os planos ABCs de restrição que contém os pontos PT_{face} s. K e R_m são, respectivamente, a matriz de rigidez (já contendo as informações inerciais e de amortecimento conforme o método de integração de Newmark) e o vetor de ação externa.

Figura 4.3.4 - Diagrama do problema de contato para cálculo das forças de ação e reação.

Para calcular a Eq. 4.3.23 devemos novamente considerar a restrição de impenetrabilidade entre os elementos da malha, definido na Figura 4.2.1 pela distância entre o nó PT_{atual} à superfície do elemento penetrado ABC, que deve ser não-negativa, ou seja:

$$g(PT_{atual}) = (PT_{atual} - PT_{face})^T \cdot n \geq 0. \quad (4.3.24)$$

Considere agora o diagrama mais detalhado apresentado na Figura 4.3.4 do qual podemos estabelecer a relação entre o ponto PT_{atual} e PT_{face} :

$$\text{diferença} = (PT_{atual} - PT_{face})^T \cdot n = (PT_{atual} - \sum_l \alpha_l \cdot PT_l)^T \cdot n = 0. \quad (4.3.25)$$

Os coeficientes α_l foram obtidos diretamente do polinômio que descreve o deslocamento dentro do elemento finito (no caso, quadrático). Note que a força λ associada a essa restrição foi aplicada totalmente sobre o nó PT_{atual} e proporcionalmente $(-\alpha_l)$ aos nós da superfície de colisão. Entretanto, devemos ainda expandir a Eq. 4.3.25 em termos dos deslocamentos nodais pois estes são, efetivamente, são as variáveis cujos valores estão restritos pela condição de impenetrabilidade. Assim, temos:

$$(PT_{atual} - \sum_l \alpha_l \cdot PT_l)^T \cdot n = \left[(PT_{atual}^{orig} + U_{m\ atual}) - \sum_l \alpha_l \cdot (PT_l^{orig} + U_{m\ l}) \right]^T \cdot n = 0, \quad (4.3.26)$$

onde PT_{atual}^{orig} e PT_l^{orig} são os pontos iniciais da malha para os nós analisados na colisão e $U_{m\ atual}$ e $U_{m\ l}$ são os deslocamentos nodais atuais da malha (sem a restrição de colisão). O uso dos pontos iniciais se deveu a

característica do modelo dinâmico empregado em que a matriz global (lado direito da Eq. 4.3.14) é fatorada apenas no início da solução. Caso atualizássemos tal matriz ao longo das iterações, seria necessário considerar os pontos utilizados nessa atualização da matriz global.

Finalmente construímos o sistema matricial das restrições por:

$$\left(U_{m\text{ atual}} - \sum_l a_l \cdot U_{m\ l} \right)^T \cdot n = \left(\sum_l a_l \cdot PT_l^{\text{orig}} - PT_{\text{atual}}^{\text{orig}} \right)^T \cdot n \quad (4.3.27)$$

$$A \cdot U_m = U_s.$$

A solução do sistema dinâmico (definido simplifcadamente na Eq. 4.3.22) sujeito às restrições dadas pela Eq. 4.3.27 é obtida através do seguinte algoritmo:

1. $F_{\text{colisão}} = \{0\}^T$;
2. Enquanto a existência de colisão não for detectada;
 - 2.1. Aplicação do método das forças de restrição (Narayanaswamy, 1985) para calcular $F_{\text{subcolisão}}$;
 - 2.2. $F_{\text{colisão}} = F_{\text{colisão}} + 0,4 \cdot F_{\text{subcolisão}}$;
 - 2.3. Cálculo dos deslocamentos propriamente ditos;
2. Fim enquanto.

Note que adotamos uma relaxação (fator igual a 0,4) para aplicar paulatinamente a força de colisão. Isso permite que novos nós (que consideramos como colisões secundárias) sejam detectados e dessa forma nenhum nó penetre em qualquer elemento ao final iteração temporal da dinâmica muscular considerada. Essas colisões secundárias podem ocorrer quando a força inercial é muito grande. Se aplicássemos somente uma iteração do algoritmo acima (sem relaxação) possivelmente outros nós que anteriormente não estavam sujeitos à restrição de colisão passassem a penetrar algum elemento finito. Certamente que outra forma de evitar esses efeitos secundários seria a redução do intervalo de tempo Δt do integrador de Newmark, mas isso traria um custo ainda maior para as simulações. Nossos ensaios mostraram que essa abordagem torna a solução bastante suave, com poucas oscilações de alta frequência perturbando a integração.

O método das forças de restrição envolveu uma manipulação algébrica envolvendo a Eq. 4.3.27 e a Eq. 4.3.22, ou seja:

$$U_m = K^{-1} \cdot (R_m + A^T \cdot F_{\text{colisão}}), \quad (4.3.28)$$

que substituído na Eq. 4.3.23 produz:

$$[A \cdot K^{-1} \cdot A^T] \cdot F_{\text{colisão}} = U_s - A \cdot K^{-1} \cdot R_m. \quad (4.3.29)$$

Note que apesar da necessidade da inversa de K, isso é apenas aparente, pois:

$$K^{-1} \cdot A^T = X, \quad (4.3.30)$$

ou seja, uma vez que K é fatorada, X é obtida rapidamente apenas pela aplicação LU. A única fase em que é necessário resolver um sistema $A \cdot X = B$ é na Eq. 4.3.29 para obter $F_{\text{colisão}}$. Uma vez que a força de colisão é calculada, as forças de reação são automaticamente determinadas.

O procedimento é bastante eficiente pois envolveu apenas uma solução $AX=B$ completa (Eq. 4.3.29) e aplicações de fatores LU já calculados. A parte mais lenta é a detecção da colisão, pois envolve um processo combinatório de verificação de quais faces são interceptadas por retas, mesmo que restrito aos nós e elementos finitos da superfície de interface.

Devemos lembrar que logo após o cálculo das forças de colisão, são anuladas todas as posições no vetor $F_{\text{colisão}}$ que sejam negativas. A motivação teórica disso advém da Eq. 4.3.20, ou seja, as forças de colisão normais às faces colididas devem ser não-negativas. Caso contrário, os nós de colisão “grudar-se-iam” às paredes dos elementos finitos penetrados. O fato de existirem forças de colisão negativas indica que aquele nó específico está iniciando um movimento contrário ao da penetração pois forças externas não mais o “incita” à colisão. Assim o seu descarte é justificado.

Outra técnica adotada para “suavizar” a colisão é calcular o vetor normal n com base nos vetores normais das superfícies vizinhas à superfície de reação. A idéia vem dos algoritmos de suavização de malha comuns em computação gráfica. Considerando a superfície de reação representada pela Figura 4.3.4, calculamos o vetor normal médio em cada nó principal (PT_0 , PT_1 e PT_2) da superfície de reação. Isso é feito tirando-se a média de todos os vetores normais das superfícies ligadas ao nó principal analisado (ao final do cálculo da média, normalizamos tal vetor). Usando esses vetores normais, localizados nos nós principais, interpolamos linearmente o vetor n no ponto P_{face} . Esse procedimento evita problemas de cálculo das forças de colisão para superfícies serrilhadas que foram geradas em algumas simulações da laringe. Novamente constatamos que essa técnica conduziu a valores de força de colisão menores do que quando não a empregávamos. Além disso, a taxa de forças de colisão negativa também se reduziu (em algumas simulações, praticamente inexistiu). Devemos lembrar que a solução deve deslizar ao longo da superfície do elemento. Como estamos “interpolando/suavizando” tal superfície, os movimentos dos nós do músculo são mais suaves.

Devemos tomar cuidado antes de efetivamente considerar a Eq. 4.3.27 como condições de restrição. Isso ocorre por causa de um caso específico de colisão entre corpos, que é apresentado na Figura 4.3.5.

Figura 4.3.5 - Situação que gera indeterminação no cálculo das forças de reação.

O problema é de ordem matemática. Se analisarmos as equações para cálculo das forças de reação, perceberemos que o sistema matricial representado pela Eq. 4.3.29 pode apresentar um ranqueamento (*rank*) menor do que o número de restrições. Lembramos que cada nó que colide com algum elemento finito gera

uma condição restritiva do tipo da Eq. Eq. 4.3.27. Quando o ranqueamento do sistema matricial for inferior ao número de restrições, o sistema de equações que determina a força de reação fica indeterminado.

Para exemplificar, podemos admitir que as únicas restrições sejam aquelas mostradas na Figura 4.3.5 em que o ponto P1 colide com o elemento E2 exatamente sobre o seu nó P2. Isso implica também que o nó P2 colide também com o elemento E1 no nó P1. Isso gera o seguinte sistema de equações de restrição

$$\begin{aligned}(U_1 - U_2)^T \cdot n &= 0 \\ (U_2 - U_1)^T \cdot n &= 0.\end{aligned}\tag{4.3.31}$$

Sendo as equações idênticas, elas formam uma base de ranqueamento 1 ao invés de 2. Isso gera um sistema indeterminado pois considerando que a Eq. 4.3.31 equivale a uma matriz A , o cálculo da força de reação é da forma:

$$F_{colisão} = [A \cdot K^{-1} \cdot A^T]^{-1} \cdot \{U_s - A \cdot K^{-1} \cdot R_m\},\tag{4.3.32}$$

onde U_s é um vetor nulo conforme a restrição (4.3); K é a matriz de rigidez do músculo; e R_m são as forças externas (não incluindo as forças de colisão). Note que mesmo K sendo positiva definida, o sistema torna-se indeterminado.

Note que nenhuma menção sobre esse detalhe é feito nos trabalhos que serviram de referência para este trabalho. Muitos deles trabalham com o conceito de nós mestre-escravos. Os nós mestres são aqueles que efetivamente penetram os elementos contendo os nós escravos. Assim, não se permite a formação das Eq. 4.3.31.

Para solucionarmos esse problema, antes de incorporarmos uma nova restrição, verificamos se o novo vetor é ortogonal aos já existentes. Assim eliminamos a redundância que poderia gerar problemas na resolução da colisão.

4.4 Gerador e Adaptação da Malha

Uma primeira análise do problema indicou que seria necessário construir um gerador automático de malha, pois com a modificação da malha do músculo seria necessário gerar uma nova malha para o escoamento de ar.

Assim, é necessário o desenvolvimento de alguma técnica para produzir as malhas do músculo e do escoamento e, ainda, permitir que diferentes características histológicas fosse atribuídas à diferentes camadas e seções do músculo. Outro problema, do ponto de vista técnico, seria como “descobrir” automaticamente a superfície de contorno de ambos os sistemas para aplicação das condições de contorno.

Adicionalmente deveríamos nos preocupar com o problema da colisão entre as superfícies musculares durante o fechamento glotal em que a malha de escoamento seria “dividida” em duas partes separadas. Mesmo em condições de abdução, as dimensões extremamente reduzidas da glote exigiriam cuidados maiores para que a malha de escoamento não gerasse singularidades matemáticas nas matrizes de MEF para NS.

Para lidar com todas essas dificuldades, desenvolvemos um gerador de malha baseado em elipses e hiperelipses que definem primariamente a superfície interna e externa dos músculos da laringe. Sabendo que o escoamento é interno a laringe, sua superfície interna tornou-se conseqüentemente a superfície externa de escoamento. Dessa forma as elipses e hiperelipses definiram todas as seções axiais da laringe.

A partir dessas seções, as superfícies interna e externa da laringe são definidas. Para exemplificar essas idéias apresentamos na Figura 4.4.1 uma representação geométrica na qual as seções e superfícies da “laringe” estão representadas.

Figura 4.4.1 - Discretização espacial da laringe: seções e superfícies.

Para definir uma seção da laringe é necessário especificar o centro das elipses internas e externas, um único vetor diretor para ambas, os raios interno e externos (em um total de quatro raios internos e quatro raios externos que deram uma grande versatilidade à definição das seções). Adicionalmente acrescentamos a definição da espessura dos três tecidos funcionais da laringe (cobertura, ligamento e corpo) para cada seção pois a variação desses ao longo da laringe não é linear.

As seções (e conseqüentemente as superfícies) são divididas em um número fixo de segmentos (definido pelo usuário). No caso apresentado pela Figura 4.4.1, usamos 40 segmentos. Apesar de quanto maior o número, melhor é a definição da curvatura das elipses, isto gera um conjunto de pontos na malha para solucionar as equações diferenciais parciais que pode ser proibitivo do ponto de vista computacional. Em nossas simulações empregamos entre 10 e 12 divisões de seções.

Podemos perceber então que a laringe foi então definida por um conjunto de seções axiais cujo perfil geométrico variou conforme a característica seção na laringe real. Em nossas simulações essa geometria foi construída a partir de imagens de ressonância magnética disponibilizadas pela Prof. Abeer Alwan do Speech Production and Auditory Perception Lab da Universidade da Califórnia, Los Angeles, e medições em laringes de cadáveres junto ao Prof. Marcos Grellet do Departamento de Otorrinolaringologia da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, USP.

Para completar a especificação das seções, a Figura 4.4.2 mostra os tipos de seções que fomos capazes de representar geometricamente. Note que o caso mais simples é a elipse. Para que pudéssemos modelar a

paralisia unilateral, adicionamos mais dois raios à especificação normal da laringe de modo que um lado da elipse representasse uma prega vocal “saudável” e o outro lado uma prega vocal “danificada”, conforme mostrado na Figura 4.4.2.

Figura 4.4.2 - Tipos de seções da laringe: circunferência, elipse, elipse de 4 raios e cunha/hiperelipse.

Adicionalmente incluímos uma hiperelipse (também com quatro raios de controle) para representar o formato de cunha que a laringe tem por causa do movimento das aritenóides durante a vocalização. A Eq. 4.4.1 foi usada para descrever parametricamente essa hiperelipse.

$$\begin{aligned} X &= R * \cos^a(\theta) \\ Y &= R * \sin^b(\theta). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Os valores $a=1$ e $b=0,7$ para o intervalo entre $0,5\pi$ e $1,5\pi$ enquanto $a=1$ e $b=1,6$ para os demais pontos entre 0 e 2π foram utilizados para definir a superfície de contato na passagem glotal. Apesar da Eq. 4.4.1 mostrar apenas um raio, usamos quatro (conforme mencionado) para ter maior liberdade na descrição da cunha. A Figura 4.4.3 mostra como esses raios foram distribuídos ao longo do plano bidimensional para descrever as curvas mencionadas.

Figura 4.4.3 - Distribuição dos raios em uma seção “elíptica”.

Consideramos usar curvas de Berzier para modelar condições patológicas como crescimentos orgânicos na superfície das pregas vocais mas acabamos por negligenciá-las por questões de tempo e quantidade de pontos na malha exigidos para representar algumas doenças da laringe. Futuramente tais curvas poderão ser incluídas se o gerador de malha for modificado. Posteriormente trataremos com detalhes tais melhorias.

A partir dessas especificações geométricas, “quebramos” a porção muscular da laringe e o escoamento em tetraedros. No primeiro caso, o algoritmo desenvolvido divide a linha que liga um ponto da superfície interna ao ponto equivalente da superfície externa em três (3) segmentos segundo os tipos de músculos da laringe (note que essa divisão geométrica ainda não representa a divisão histológica - as propriedades mecânicas desses tecidos somente foram atribuídas após a malha ter sido gerada). Cada um desses segmentos foi então subdividido segundo especificação do usuário. Isso permitiu que aumentássemos ou diminuíssemos a densidade de malha ao longo da laringe. Considerando todos esses segmentos juntos, podemos dizer que interpolamos diversas superfícies entre a interna e externa de forma a discretizar a laringe segundo sua constituição física. Podemos notar que isso nos deu versatilidade para gerar inclusive algumas condições patológicas da laringe.

No caso do escoamento, calculamos o centro de cada seção e dividimos a linha que liga esse centro a cada ponto da seção em um número de segmentos cujos comprimentos são proporcionais a uma relação numérica (tanto o número de segmentos quanto a relação são especificadas pelo usuário). Ou seja, dado um número n de segmentos, os seus comprimentos são proporcionais a $s_0:s_1:s_2:...:s_n$ tal que $s_0+s_1+s_2+...+s_n = s$, onde s é o comprimento do segmento analisado. Novamente, devemos equilibrar a relação precisão/quantidade de memória quando definimos o número de divisões. Para clarificar essa geração de malha, a Figura 4.4.4 mostra a malha gerada para o músculo e escoamento considerando a “laringe” apresentada na Figura 4.4.1.

Figura 4.4.4 - Malha gerada para músculo e escoamento em corte transversal.

Falta apenas dizer que a cada tetraedro da malha do músculo qual tipo de tecido ele pertence. Algumas regras foram adotadas. Especificar que os polígonos situados entre duas determinadas superfícies (interna, externa e interpolada) pertencem à um dos três tipos de tecido (cobertura, ligamento e músculo). Para que as

simulações fossem realísticas, os polígonos entre a superfície interna e a primeira superfície interpolada foram definidos como pertencentes à cobertura.

Na especificação do ligamento, usamos além da especificação das superfícies, dois planos, um ponto pertencente a ambos os planos e um ponto adicional para determinar a região espacial onde este tecido se situava. Como temos duas pregas vocais, dois conjuntos de dados foram usados. Isso porque o ligamento não está presente na comissura anterior e posterior. Adicionalmente especificamos também entre quais seções os polígonos do ligamento estavam. Isso é justificado pela presença desse tecido apenas nas pregas vocais, não se espalhando pela laringe. Apesar da quantidade de informação para descrever tal tecido ser grande, não encontramos dificuldades para especificá-lo geometricamente.

Finalmente todos os polígonos remanescentes na malha foram definidos como corpo muscular. Para facilitar o entendimento, a Figura 4.4.5 mostra uma laringe já diferenciada em cobertura, ligamento e corpo.

Figura 4.4.5 - Diferenciação histológica da laringe “digital” em corte transversal (Amarelo = cobertura, Vermelho = ligamento, Laranja = corpo).

É importante lembrar que a construção da malha do escoamento foi feita a partir dos pontos da superfície interna do músculo. Optamos por tal procedimento para garantir que durante as adaptações da malha do músculo, pudéssemos seguir seus pontos superficiais para gerar uma nova malha para o escoamento. Esse procedimento foi feito para que os nós entre os dois meios “casassem” espacialmente, evitando procedimentos complexos (Gartling e Hogan, 1994) que exigiriam localizar qual o nó superficial do escoamento mais próximo do nó muscular analisado, durante a coleta de pressões aerodinâmicas que acoplam os dois sistemas, além de situações geométricas de difícil solução.

Apesar da simplicidade, a geração da malha suporta um grande leque de possíveis laringes cuja dinâmica desejamos estudar. Por exemplo, caso seja necessário acrescentar mais nós em regiões de alto gradiente, basta adicionar mais seções ou mais camadas. Claro que isso depende de se avaliar o grau de precisão da solução.

4.4.1 Adaptação da Malha

A adaptação da malha foi um dos paradigmas importantes para a simulação da laringe. Como um problema de interação fluido-estrutura, a segunda forma de acoplamento entre ambos os sistemas foi a alteração da geometria do escoamento e, conseqüentemente, ela influi na distribuição de pressões sobre as paredes da laringe.

A malha do músculo foi automaticamente atualizada por conta das próprias equações que controlam sua movimentação. Assim, os nós eram automaticamente atualizados a cada iteração de tempo.

Já para atualizar a malha de escoamento, a única informação que dispúnhamos era o deslocamento nodal de sua superfície externa (que é a superfície interna do músculo). Inicialmente empregamos os algoritmos já definidos para construção da malha de escoamento, pois esses são baseados unicamente na posição dos nós da superfície interna do músculo. Entretanto, alguns movimentos da laringe fazem com que esse algoritmo gere malhas com elementos de volume negativo. Devemos lembrar que a interconexões entre sucessivas seções geram os tetraedros em uma ordem fixa. Assim, quando a superfície do músculo assume formas côncavas por conta da pressão subglotal e inércia dos tecidos, muitos tetraedros situados na parte superior das pregas vocais têm volumes negativos.

A primeira etapa para vencer tal dificuldade foi usar a idéia de que a malha de escoamento representasse um sólido que devia deformar-se sob a ação de deslocamentos de todos os seus nós superficiais. Essa idéia foi apresentada por Johnson e Tezduyar (1994) e usada por Guler et al. (1999) pois ela permite que evitemos reconstruir toda a malha (particularmente os geradores de malha genéricos consomem muito tempo de processamento, rivalizando com o tempo de solução das EDPs).

Assim, consideramos que o escoamento é um sólido isotrópico com propriedades mecânicas λ e μ (constantes de Lamé - não confundir μ_m com o módulo de cisalhamento dos Capítulos 3 e 4) sujeito a condições de contorno de Dirichlet em toda a sua superfície externa. Note que não aplicamos nenhuma “força” ou “tensão” externa sob a forma de condições de contorno de Neumann. Isso porque conhecemos os deslocamentos externos da malha e queremos saber qual o arranjo dos nós internos sob essa nova condição geométrica.

Usamos o MEF para resolver a solução desse problema de estática considerando como elementos geométricos os próprios tetraedros da malha, com funções de interpolação linear. Isso garante que a malha do escoamento mantenha as mesmas propriedades geométricas em todas as iterações.

Matematicamente adotamos as Eqs. 3.9, 3.10 e 3.12 para descrever o comportamento estático do “sólido”. Note que precisamos definir as constantes de Lamé para o problema. Seguindo a sugestão de Johnson e Tezduyar (1994), usamos a relação $\lambda/\mu = 2$ pois ela produz elementos com pequena distorção geométrica. Assim, nossa matriz de rigidez $[C]$ fica:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda/\mu + 2 & \lambda/\mu & \lambda/\mu & & & \\ \lambda/\mu & \lambda/\mu + 2 & \lambda/\mu & & & \\ \lambda/\mu & \lambda/\mu & \lambda/\mu + 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4.2)$$

O procedimento final para deformação/adaptação da malha do escoamento ficou:

1. Colete os deslocamentos nodais da superfície interna da laringe (U_m);
2. Recupere a malha inicial do escoamento para formar a matriz de rigidez estática do MEF;
3. Deforme a malha inicial do escoamento usando como condições de Dirichlet (U_m).

O uso da malha inicial está relacionado com o fato de que os deslocamentos musculares também são feitos com base na malha muscular inicial. A principal justificativa para tal abordagem é que durante a colisão entre as pregas vocais, o escoamento de ar é dividido em dois e assim, a deformação da malha atual (na iteração corrente) usando esse método exigiria manipulações geométricas adicionais pois muitos elementos finitos simplesmente deixam de existir.

Durante as simulações verificamos que o método é extremamente eficaz para lidar com os movimentos da laringe. Entretanto, existiram situações em que a glote ficava muito pequena e o método de deformação não conseguia produzir uma malha com todos os elementos tendo volume positivo. Para lidar com isso, realizamos nos passos 1-3 um número fixo m de iterações, sendo que em cada iteração aplicamos U_m/m . Adicionalmente, a malha ia sendo atualizada e as matrizes do MEF eram compostas a partir dessas novas geometrias. Isso permitiu que a deformação fosse realizada em diversas situações geradas pelo movimento da laringe. Essas subiterações somente eram feitas quando a aplicação de U_m , totalmente, não era capaz de gerar uma malha de escoamento correta.

Mesmo assim, durante a colisão de partes das pregas vocais (ela não se fecha uniformemente, conforme mostrado posteriormente) ambos os procedimentos acima falhavam. Para remediar esse problema, adotamos uma abordagem simplificada, que era apenas aproximada (caso o deformador de malha por método estático falhasse).

Primeiramente, empregamos o método de geração de malha de escoamento para colher as posições dos nós da superfície interna da laringe. Assim, reconstruímos as seções da laringe usando as relações entre tais nós na malha inicial.

O próximo passo consistiu em reorganizar os centros das seções de forma a tentar evitar que elementos negativos fossem criados. O algoritmo determinava os conjuntos de seções em sequência que estavam gerando elementos negativos. Os centros dessas seções eram então reordenados espacialmente para corrigir os defeitos de malha, considerando uma linha reta entre duas seções que limitavam as seções

“problemáticas” da laringe. Usamos as relações de distâncias entre os centros das seções para reposicioná-los nessa linha reta.

Note que esse procedimento não garantia ainda que a malha gerada fosse imune a elementos negativos. O passo seguinte foi projetar os nós da i -ésima seção sobre a superfície do plano da mesma seção. Isso foi feito de forma a contornar o problema dos elementos negativos que as geometrias côncavas das seções produzem. A malha gerada pela $(i-1)$, i e $(i+1)$ -ésimas seções era verificada a cada iteração de projeção até que ou os seus elementos tivessem volumes positivos ou que todos os nós da i -ésima seção estivessem sobre o plano da seção. A cada iteração, consideramos a reta normal r_n ao plano que passa pelo nó analisado. Calculávamos então a distância d entre o nó e o plano da i -ésima seção e posicionávamos esse nó sob a reta r_n , a uma distância $(1-\alpha)d$ do plano.

Finalmente, se alguma seção ainda apresentasse problemas na deformação da malha, reposicionávamos os nós dentro da seção. Como a geração da malha nas seções é feita com relação ao centro da própria seção, os triângulos $[(k-1) (k) (\text{centro})]$, formados na i -ésima seção, tinham “área negativa” e dessa forma, reposicionávamos o k -ésimo nó para a posição igual a média entre os nós $(k-1)$ e $(k+1)$. Isso era feito um número fixo de passos ou até que não existissem mais triângulos. O termo “área negativa” vem do fato que como especificamos uma direção do plano normal de todas as seções, os seus nós são percorridos segundo uma ordem estabelecida. Assim, problemas de concavidade na seção são detectados pela geração de triângulos com direção oposta à direção do plano normal, caracterizando a “área negativa”.

Obviamente durante a colisão, o algoritmo não é capaz de gerar qualquer malha totalmente sem elementos negativos. Isso porque a glote se fechou. Assim, caso um tetraedro de uma seção com volume negativo fosse detectado, todos os tetraedros daquela seção eram eliminados.

Antes de adotar essa atitude, tentamos eliminar apenas os tetraedros com volume negativo juntamente com aqueles tetraedros que se sobrepunham espacialmente. Adicionalmente também eliminamos os tetraedros com volume nulo e todos os seus vizinhos (uma situação que nossos testes não revelaram mas por via das dúvidas, adotamos tal postura).

Simulando esses casos geométricos, verificamos que as matrizes produzidas por MEF eram singulares. Isso ocorria porque a porção subglotal do escoamento era ligada à porção supraglotal apenas por um nó. Como atribuímos a condição de Dirichlet (pois nas paredes do escoamento em contato com o músculo a velocidade do ar é nula) para tais nós, acabávamos em um problema indeterminado, pois o sistema não sabia que pressão atribuir para tal elemento. Problemas com malha, particularmente triângulos e tetraedros, são conhecidos na literatura (Gresho e Sani, 1998), pois, além de afetar a solução, podem produzir singularidades nos sistemas de equações resultantes da discretização das EDPs.

Tentamos detectar as situações em que as seções subglotal e supraglotal eram ligadas apenas por um nó ou uma linha, mas isto implicaria em um algoritmo muito específico. Além disso, não encontramos uma maneira matematicamente viável para caracterizar essas duas situações.

Tais fatos justificaram a eliminação das seções “problemáticas”. Assim, algumas situações patológicas como a presença de pólipos e nódulos não puderam ser simuladas precisamente (do ponto de vista físico)

pois o gerador/deformador de malha desenvolvido era muito simples. Sem dúvida o gerador de malha foi o problema mais complicado do nosso trabalho.

4.5 Matrizes Esparsas e *Solver* LU

Após calcularmos os sistemas matriciais de MEF para o escoamento e o músculo necessitamos resolver um conjunto de sistemas lineares do tipo $A X = B$. Nesse instante, encontramos uma série de problemas que basicamente eram restritos ao consumo de memória extremamente elevado e o desempenho na resolução de sistemas de equações lineares (e não-lineares, consequentemente). Nesta seção tais problemas serão apresentados e descreveremos as técnicas usados para resolvê-los.

4.5.1 Matrizes Esparsas

O principal agravante no emprego de métodos numéricos para resolver equações como as apresentadas é a quantidade de memória necessária para a sua solução. Requisitos de malha e nós para capturar peculiaridades exigem espaço de armazenamento. A segunda dificuldade é o desempenho dos algoritmos para resolver sistemas não-lineares de grande escala, que geralmente aparecem no MEF.

Desde o início do projeto as soluções numéricas foram desenvolvidas sobre matrizes esparsas. Para exemplificar as dimensões do problema, considere um problema envolvendo a simulação tridimensional do escoamento laminar de ar em um tubo circular. Discretizando-o com apenas 450 elementos finitos com 124 pontos, seriam necessárias matrizes com dimensão igual a 2275×2275 , o que equivale em dupla precisão numérica a um total de 41,5 Mbytes. Entretanto, a sua ocupação por valores não-zeros é inferior a 1%. Ficou evidente que as matrizes esparsas eram preponderante tanto em termos de memória quanto no desempenho dos algoritmos (algoritmos de fatoração/inversão matricial apresentam complexidade $O(n^3)$), ambos proibitivos nessa condição.

Analisando os métodos usados em programas comerciais do MEF, o método de armazenamento usado geralmente é baseado no fato de que a concentração de não-zeros nas matrizes do MEF ocorre na região da diagonal principal e isso permite seu armazenamento em uma formato denominado *skyline* (Bathe, 1996), em que determina-se a banda da matriz e efetua-se uma “rotação” da matriz para que somente parte da mesma seja realmente armazenada, conforme a Figura 4.5.1.

matriz simétrica (os problemas nos quais normalmente empregamos MEF produzem matrizes positivas definidas e dessa forma, simétricas). A porção não-linear (convectiva) de Navier-Stokes é não-simétrica.

Assim, usamos uma técnica de armazenamento empregada, comumente, em sistemas de potência denominada Zollenkopf (Zollenkopf, 1970). Esse método, como outros revistos em literatura, são fortemente baseados em estruturas de dados, empregando o conceito de filas ordenadas e encadeadas. Para cada coluna, são armazenados apenas os valores não-zeros e seu número de linha em uma lista. Todas as matrizes simétricas do sistema foram armazenadas empregando o que se denomina matriz esparsa totalmente simétrica.

Para as matrizes não-simétricas do problema, o conceito de matriz simétrica de posição foi adotado, ou seja, apesar de numericamente assimétrica, para cada valor a_{ij} , existe um valor simétrico de posição $\tilde{a}_{ji}$ de diferente magnitude. Assim, adicionalmente às informações já citadas, guardamos também o valor transposto.

As vantagens desse armazenamento adicional estão intimamente ligadas ao desempenho dos algoritmos como: multiplicações das matrizes por vetores, soma de matrizes, além de certas operações de fatoração.

Seguindo técnicas oriundas de programas como MathSoft MatLab, otimizamos a construção das matrizes. Inicialmente, tentamos desenvolver um método para abstrair as estruturas de dados dos algoritmos convencionais para operações matriciais (como se sabe, MEF emprega soma das matrizes individuais dos elementos finitos em uma matriz global, além de multiplicações envolvendo matrizes e vetores). Entretanto, esse método falhou em desempenho, pois demandava exaustivamente operações de inserção e ordenação. Em termos de tempo, o pequeno exemplo já citado consumia 40 minutos de CPU para construção de cada matriz global. Para contornar esse problema optamos pelo que se denominam operações proporcionais à quantidade de valores não-zero. Assim, ao invés de percorrer posições virtuais (onde se tem valores nulos) devido à abstração de dados, somente operamos numericamente onde realmente existia um valor. Isso permitiu que o mesmo exemplo citado fosse construído em poucos segundos.

Outras variantes dessa técnica foram desenvolvidas de forma que as muitas operações matriciais fossem otimizadas. Assim, para sistema “real” a única penalidade existente, em termos de consumo de processamento computacional, era a solução de sistemas de equações lineares.

4.5.2 Fatoração LU

Estritamente falando, o problema de solução numérica usando MEF encerra-se na resolução de um grande sistema de equações lineares. As técnicas convencionais como Gauss-Siedle, Gauss-Jacobi poderiam ser empregadas, mas geralmente esbarram no problema de desempenho. Além do mais, um problema geralmente ignorado em pequenos sistemas, mas que é extremamente difícil de ser controlado, é a propagação de erros numéricos mesmo quando usamos ponto flutuante de dupla precisão. Apenas para reforçar, a complexidade desses algoritmos é $O(n^3)$.

Outro ponto importante em termos de fatoração é que, dada a condição de memória limitada para armazenar as matrizes de simulação (mesmo com o uso de mídia secundária), o aparecimento de novos

valores não-zeros (*fill-ins*) durante o processo de fatoração pode resultar em perda completa da esparsidade. Apenas para citar, a inversa de uma matriz esparsa não é uma matriz esparsa. Para evitar esses sobressaltos de memória, empregamos o procedimento de fatoração LU (ou Cholesky para matrizes simétricas) pois as matrizes L e U são menos esparsas do que a matriz inversa. Além disso, uma vez fatorada, podemos aplicar apenas a retropropagação na solução de $A X = B$. Esse é um ponto importante pois a simulação do movimento do músculo tira vantagem desse fato, além de algumas técnicas de solução de NS.

Para abordar esses problemas foram considerados dois algoritmos sendo que o primeiro foi uma tentativa que se mostrou deficitária para a solução do problema de Navier-Stokes devido a estrutura da matriz global resultante (Fig. 4.5.2) e uma segunda técnica, extremamente eficiente, que realmente permitiu reduzir drasticamente o tempo de simulação.

4.5.3 Fatoração LU por Bifatoração

Devido à estrutura de matriz esparsa empregada, a técnica denominada Zollenkopf ou de Bifatoração foi primeiramente considerada e segue o princípio do pivoteamento parcial por colunas. Geralmente emprega-se a bifatoração em matrizes simétricas, positivas-definidas ou diagonalmente dominante (o que é o caso em algumas matrizes de MEF). Para se resolver $A X = B$ temos três etapas: a ordenação e simulação, em que determinamos a melhor ordem para as operações de pivoteamento e fatoração simbólica, a redução, que realizamos a fatoração numérica da matriz A, e a resolução por retropropagação, para a qual obtemos o resultado de $A^{-1} B$.

O processo de ordenação é extremamente importante, pois, se mal realizado, acarretará no aparecimento de grande quantidade de *fill-ins*. Na técnica empregada, a coluna selecionada como pivô foi aquela com menor número de valores não-zeros e em caso de múltiplas possibilidades, qualquer uma dessas é selecionada (por critérios de algoritmo, optamos pela primeira das colunas). Já a simulação envolveu a construção das matrizes de fatoração. Apesar do termo matrizes, essas somente diferem da matriz identidade em uma linha ou coluna específica (matriz de fatoração à direita ou à esquerda, respectivamente). Assim, somente se armazena tais linhas (ou colunas) na estrutura esparsa já definida.

A redução inicia propriamente a solução de $A X = B$. O princípio é que existe um conjunto de matrizes de fatoração que pré- e pós-multiplicam A de forma a torná-la uma matriz identidade. Tais matrizes são então usadas em ordem reversa para multiplicar uma matriz identidade produzindo então a matriz inversa A^{-1} . Por fim, aplicamos o processo de solução que ao invés de reproduzir a matriz inversa e pré-multiplicar B emprega as matrizes de fatoração para obter a solução X.

A implementação desse método foi feita tanto para matrizes totalmente simétricas quanto para matrizes simétricas de posição. A diferença entre ambos basicamente se restringiu ao armazenamento de estruturas adicionais além de algumas otimizações que foram possíveis para o caso totalmente simétrico em que as matrizes de fatoração à direita e à esquerda eram iguais.

Testes de desempenho foram realizados nessa técnica que inicialmente foi vista como a melhor solução em termos de velocidade e armazenamento de dados. Para a solução do sistema de equações lineares no

entanto, notamos algumas dificuldades que tornaram oneroso o uso da bifatoração. Normalmente esse tipo de método é aplicado em sistemas de potência nos quais se tem grandes matrizes extremamente esparsas. Construindo os grafos desses problemas, verificamos a existência de ligações entre nós distantes, o que gera *fill-ins*, exigindo então um eficiente procedimento de ordenação para o processo de pivoteamento.

Os problemas de MEF caracterizam-se em sua maioria por matrizes de rigidez diagonalmente dominantes (ou matrizes de banda) o que tornaria eficiente o uso do método de bifatoração, particularmente, para o problema da dinâmica da musculatura laríngea. Entretanto, durante testes envolvendo a resolução de NS, ficou evidente que essa abordagem não poderia ser utilizada.

Primeiramente, a matriz final, mesmo para um problema de Stokes, é assimétrica devido à presença de componentes da equação de continuidade. Para o caso do escoamento de Stokes, isso pode ser resolvido através de uma consideração simples que torna a matriz simétrica. Mas quando passamos a operar sobre NS, temos novamente uma matriz assimétrica.

O ponto mais grave foi que devido à condição lagrangeana de restrição (representado pela equação da continuidade e por componentes de pressão), o grafo representativo gerava ligações entre pontos distantes na matriz. Assim, durante o processo de fatoração, uma grande quantidade de *fill-ins* era gerada mesmo com métodos de ordenação altamente otimizados.

A segunda dificuldade encontrada foi no tempo de resolução de $A X = B$. Para o problema outrora citado, foram dispendidas mais de 5 horas para a aplicação dos três passos da bifatoração (matriz 2275×2275 em um computador Pentium III 450 MHz). Considerando que para a solução do problema não-linear do fluido incompressível é necessário o uso de métodos iterativos, como Newton-Raphson ou Newton-Modificado (que em essência são fatorações LU para resolver $A(X) X = B$), a técnica mostrou-se proibitiva.

4.5.4 Fatoração LU por técnica de supernós

Como já citado, grande parte da dificuldade em simular as equações de NS vem da restrição da equação de continuidade. Isso produz uma matriz não mais positiva definida por causa dos termos de convecção. Muitos métodos convencionais de solução iterativa que usam preconditionadores esbarram nessas dificuldades que, geralmente, acarretam problemas de instabilidade numérica e divergência da solução. É importante lembrar que a ordem das matrizes é elevada (no problema da laringe, superior à 10000×10000).

Geralmente, o procedimento para resolver tais sistemas é a modificação de algoritmos iterativos tradicionais como os Gradientes Biconjugados (que empregam subespaços de Krylov e vetores de Lanczos) para obter soluções mais estáveis e evitar a divergência). Como todos os métodos iterativos, há uma dependência de bons vetores iniciais no qual seu grau de influência varia de acordo com o algoritmo e o refinamento matemático imposto. A convergência geralmente depende de parâmetros específicos do método numérico apesar do armazenamento dos dados em memória não ser elevado pois a cada iteração é realizado um refinamento da solução X_i , o que evita a “geração” da matriz inversa.

Outra alternativa é o uso de algoritmos diretos para a fatoração de matrizes. No problema do fluido, foi empregado a técnica de Supernós (Demmel et al., 1999). A idéia básica foi tentar fatorar a matriz esparsa por blocos de forma a empregar alta velocidade nos procedimentos numéricos ao invés de manipulação de estrutura de dados (grave problema em matrizes esparsas).

Enquanto em matrizes simétricas é possível realizar toda a fatoração simbólica (determinação da estrutura não-nula dos fatores triangular L e U a partir da matriz A) antes da fatoração numérica (atualização numérica dos fatores L e U da j -ésima coluna a partir dos fatores L e U das i -ésimas colunas, $i < j$), nas matrizes assimétricas estes dois passos devem ser intercalados com um pivoteamento (total ou parcial) para manter a estabilidade numérica dos procedimentos.

Para realizar a fatoração simbólica, Demmel et al. (1999) sugeriram o uso de uma técnica chamada busca em primeira profundidade (*depth-first search*) ao invés de realizar uma simulação numérica para determinar a estrutura não-nula da j -ésima coluna. Uma vez determina a ordem topológica (pós-ordem reversa da busca do grafo da submatriz analisada) para atualização dos fatores para a fatoração numérica, tais autores “podaram” (*pruning*) a estrutura de árvore (em que tais buscas topológicas são realizadas) de modo a acelerar a busca em primeira profundidade. Foi demonstrado (Gilbert e Peierls, 1988) que essa técnica permite que as operações em ponto-flutuante realizadas sejam proporcionais ao número de elementos não-nulos da matriz. Note que após a determinação da ordem topológica de busca das colunas de L que afetam a j -ésima coluna analisada, os supernós foram então determinados, agrupando colunas de L que possuem o mesmo padrão “espacial” de valores não-nulos.

A técnica dos supernós é uma abordagem que visa reduzir o tempo de manipulação de estruturas de dados (principalmente a ordenação de filas), permitindo a fatoração de blocos compactos de dados (densos) ao invés de colunas individuais. Note que as árvores de busca representam as dependências entre as colunas em uma fatoração LU convencional da qual obtemos a seqüência de permutação quando a percorremos em pós-ordem.

Adicionalmente estruturas chamadas de painéis (*panels*) são construídas a partir de sucessivas colunas a partir de j ($j:j+w$) de forma a aplicar a fatoração numérica usando os supernós de L sobre várias colunas ao invés de uma única. Para fazer isso, Demmel et al. (1999) usaram uma busca em profundidade primeira para manter a ordem topológica de aplicação dos supernós sobre as w colunas do painel ativo.

Todas essas reorganizações das colunas em lista (a partir de grafos estruturais) foram realizadas para acelerar a computação dos fatores L e U, tentando agrupar os valores numéricos em blocos para que algoritmos matemáticos ditos densos possam ser aplicados ao invés de empregar um procedimento misto envolvendo operação matemática e ordenação de listas em matrizes esparsas.

Uma vez que a fatoração simbólica foi realizada, a fatoração numérica é realizada usando os supernós e painéis ativos. Outra motivação para o uso dos painéis é tirar vantagem de construções de memória hierárquias nos computadores, ou seja, da memória *cache*. Pela sua velocidade e tamanho reduzido, o algoritmo foi organizado de forma a concentrar os supernós nessa memória enquanto as colunas dos painéis são

acessadas e atualizadas. Isso foi feito através da reorganização de laços no algoritmo (algo muito similar com técnicas de otimização de velocidade em compiladores modernos).

Todas essas operações foram realizadas sobre estruturas esparsas diferentes das utilizadas para armazenamento das matrizes do problema. Isso porque essa técnica de fatoração é eficiente por navegar sobre as estruturas de memória contínua enquanto a anterior pode ser implementada para memória fragmentada, e é extremamente eficiente para a construção das matrizes de MEF.

A estrutura utilizada pela técnica de supernós foi a de Harwell-Boeing (Duff et al., 1992) em que temos um vetor para o armazenamento de todos os valores não-zeros percorrendo a matriz “virtual” completa em colunas. Um segundo vetor guardava os índices de linha dos valores não-zeros e finalmente um terceiro vetor era usado para guardar “ponteiros” para o vetor de valores não-zeros indicando o início de cada coluna na matriz “virtual”.

Os testes demonstraram sua eficiência. Para o problema-teste contendo 2275 variáveis, o tempo total foi de apenas 10 segundos (versus as mais de 5 horas do método Zollenkopf, ambos sendo executados em um computador Pentium III 450 MHz). Ficou claro que a técnica apesar de usar mais memória que do método de bifatoração anteriormente discutido, era extremamente eficiente. Portanto, apesar de sua complexidade (justamente para acelerar o procedimento e torná-lo proporcional ao número de não-zeros), o método dos supernós é similar ao da bifatoração pois ambos necessitam realizar um passo de ordenação, simulação, redução e solução.

5 Resultados e Discussões

Primeiramente analisaremos os resultados da simulação do escoamento para alguns perfis geométricos. Isso é importante para demonstrar a precisão do algoritmo de solução uma vez que desenvolvemos um método híbrido para calcular as velocidades e pressões ao longo da laringe simulada.

Em seguida apresentaremos a análise de simulações completas, que envolveram a interação entre escoamento e músculo para gerar o sinal glotal. Simulamos um conjunto representativo de laringes, variando parâmetros musculares e geométricos, que atestaram a funcionalidade do modelo. Finalmente, mostraremos alguns resultados especulatórios sobre a dinâmica de laringes patológicas considerando que tínhamos em mãos poucos dados sobre as características mecânicas destas.

5.1 Análise do Escoamento

Os três principais perfis geométricos que a laringe produz são os perfis convergente, paralelo e divergente. Durante a ação das forças musculares e aerodinâmicas sobre os tecidos da laringe, a superfície apresenta tais configurações geométricas (com variações de ângulo e posição da mínima constrição na glote).

O estudo de tais configurações permitiu avaliar a funcionalidade do algoritmo de solução de NS uma vez que alguns trabalhos calcularam numericamente a distribuição das pressões sobre as pregas vocais verdadeiras. Além disso, analisamos qualitativa e quantitativamente a distribuição de pressões na laringe. Veremos, particularmente, que a distribuição das forças aerodinâmicas sobre as pregas vocais no sentido longitudinal não é uniforme. Isso implica que os movimentos das pregas vocais não deve ser uniforme nessa direção. Posteriormente notaremos que isso implica na formação da fenda fusiforme na comissura anterior, algo que nosso modelo foi capaz de reproduzir. Tais evidências fisiológicas são importantes pois têm profundas implicações na formulação de modelos reduzidos da laringe.

Primeiramente mostraremos os perfis geométricos usados em que simulamos numericamente o escoamento de ar. Analisamos a laringe com e sem as falsas pregas vocais. A ausência desse corpo é justificada para que pudéssemos comparar nosso trabalho com outros. Em sua grande maioria, os trabalhos pesquisados simulam a laringe sem as falsas pregas vocais.

A Figura 5.1.1 mostra os perfis convergentes da laringe enquanto a Tabela 5.1.1 apresenta as definições geométricas das elipses usadas para construir tais laringes.

Figura 5.1.1 - Perfis geométricos convergentes COM e SEM as falsas pregas pregas, respectivamente.

Tabela 5.1.1 - Descrição geométrica dos perfis convergentes

Seção	COM falsas pregas		SEM falsas pregas	
	Centro (cm)	Raio (cm)	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,065 0,7 0,065	0; 0; -0,33	0,7 0,065 0,7 0,065
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,055 0,7 0,055	0; 0; -0,26	0,7 0,055 0,7 0,055
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,035 0,7 0,035	0; 0; -0,12	0,7 0,035 0,7 0,035
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,1	0,7 0,515 0,7 0,515	0; 0; 0,1	0,7 0,6 0,7 0,6
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45	0; 0; 0,23	0,7 0,7 0,7 0,7
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46	0; 0; 0,35	0,7 0,7 0,7 0,7
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; 0,48	0,7 0,7 0,7 0,7
S18	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7

A Figura 5.1.2 mostra os perfis divergentes da laringe enquanto a Tabela 5.1.2 apresenta as definições geométricas das elipses usadas para construir tais laringes.

Figura 5.1.2 - Perfis geométricos divergentes COM e SEM as falsas pregas vocais, respectivamente.

Tabela 5.1.2 - Descrição geométrica dos perfis divergentes

Seção	COM falsas pregas		SEM falsas pregas	
	Centro (cm)	Raio (cm)	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,025
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,035 0,7 0,035	0; 0; -0,26	0,7 0,035 0,7 0,035
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,055 0,7 0,055	0; 0; -0,12	0,7 0,055 0,7 0,055
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,065 0,7 0,065	0; 0; -0,05	0,7 0,065 0,7 0,065
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,1	0,7 0,515 0,7 0,515	0; 0; 0,1	0,7 0,6 0,7 0,6
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45	0; 0; 0,23	0,7 0,7 0,7 0,7
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46	0; 0; 0,35	0,7 0,7 0,7 0,7
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; 0,48	0,7 0,7 0,7 0,7
S18	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7

A Figura 5.1.3 mostra os perfis paralelos da laringe enquanto a Tabela 5.1.3 apresenta as definições geométricas das elipses usadas para construir tais laringes.

Figura 5.1.3 - Perfis geométricos paralelos COM e SEM as falsas pregas vocais, respectivamente.

Tabela 5.1.3 - Descrição geométrica dos perfis paralelos.

Seção	COM falsas pregas		SEM falsas pregas	
	Centro (cm)	Raio (cm)	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -2,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -1,00	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,025
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,26	0,7 0,025 0,7 0,025
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,19	0,7 0,025 0,7 0,025
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,12	0,7 0,025 0,7 0,025
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,1	0,7 0,515 0,7 0,515	0; 0; 0,1	0,7 0,6 0,7 0,6
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45	0; 0; 0,23	0,7 0,7 0,7 0,7
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46	0; 0; 0,35	0,7 0,7 0,7 0,7
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6	0; 0; 0,48	0,7 0,7 0,7 0,7
S18	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7

Para concluir a descrição geométrica dos modelos, todos os vetores normais ao plano das elipses foram definidos como sendo $\{0 \ 0 \ 1\}^T$, ou seja, apontando na direção do eixo z. Optamos por apresentar apenas a seção transversal das laringes, pois as demais vistas não mostram informações significativas.

Figura 5.1.4 - Distribuição de pressões na laringe para perfil convergente COM falsas pregas vocais.

Figura 5.1.5 - Distribuição de pressões na laringe para perfil convergente SEM falsas pregas vocais.

Empregamos 8000 e 0 dina/cm² para as pressões subglotal e supraglotal, respectivamente. Usamos o ar como fluido escoando pela laringe (densidade $\rho=0,001230$ g/cm³ e viscosidade $\mu=0,000179$ dina.s/cm²).

Figura 5.1.6 - Distribuição de pressões na laringe para perfil divergente COM falsas pregas vocais.

Figura 5.1.7 - Distribuição de pressões na laringe para perfil divergente SEM falsas pregas vocais.

Figura 5.1.8 - Distribuição de pressões na laringe para perfil paralelo COM falsas pregas vocais.

Figura 5.1.9 - Distribuição de pressões na laringe para perfil paralelo SEM falsas pregas vocais.

Resolvendo NS usando o método híbrido para o perfil convergente da laringe com as falsas pregas vocais (Figura 5.1.4), notamos que a principal queda de pressão ocorre muito próximo a constrição de menor área. Adicionalmente, a pressão negativa se formou exatamente sob e “propagou-se” após tal constrição.

Adicionalmente, a pressão sobre a porção glotal que antecede esse lugar geométrico é praticamente igual à pressão pulmonar. Isso implica que partes diferentes das pregas vocais verdadeiras são excitadas com diferentes pressões. Certamente essa distribuição tem importante papel na movimentação auto-sustentada dos tecidos musculares da laringe.

Comparando as distribuições de pressões entre as laringes COM e SEM as falsas pregas vocais (Figuras 5.1.4 e 5.1.5) percebemos que não houve diferença qualitativa entre ambas. A altura das falsas pregas vocais causou pequena alteração nas forças aerodinâmicas aplicadas sobre a laringe (posteriormente quantificaremos tal diferença). Isso motivou a redução da escala das figuras nos quais avaliamos a ausência das falsas pregas vocais (a relação cor/pressão é a mesma para os pares COM/SEM desse corpo).

Na Figura 5.1.6 (e Figura 5.1.7) notamos que o perfil divergente também teve sua principal queda de pressão localizada na região da constrição de menor área. Adicionalmente essa queda de pressão ocorreu na porção central da laringe (longe das comissuras anterior e posterior). De forma análoga ao perfil convergente, a pressão na porção inferior das pregas vocais foi praticamente igual à pressão subglotal.

Uma olhada mais cuidadosa revelou a existência de uma segunda região de pressão negativa nesse perfil (quantitativamente tornaremos esse fenômeno mais evidente). Certamente a zona de recirculação de ar nesse perfil foi maior do que nos demais perfis e a formação de uma pressão negativa está ligado ao fato de que logo após a glote outra zona de recirculação foi gerada (sobre os ventrículos laríngenos e as falsas pregas vocais). Essas duas regiões de vórtices contribuíram para a geração das duas zonas de pressão negativa na glote.

Tanto no perfil convergente quanto no perfil divergente, a queda de pressão ocorre em uma região muito estreita das pregas vocais (de cima para baixo). O perfil paralelo não seguiu esse padrão. Podemos perceber nas Figuras 5.1.8 e 5.1.9 que a queda de pressão ocorreu ao longo de toda a superfície glotal. A pressão negativa somente se formou no final da glote.

Considerando os resultados até aqui apresentados, podemos preliminarmente especular sobre os efeitos dessas três principais formações geométricas na fonação. A constrição de menor área sempre definiu o lugar geométrico onde a principal queda de pressão ocorreu; somente em um perfil paralelo é que a queda de pressão foi mais suave.

Adicionalmente, antes dessa constrição, a pressão é praticamente igual à pressão do pulmão, significando que os tecidos musculares nessa região são pressionados. Já os tecidos localizados após a constrição estão sob a ação de uma pressão negativa (de magnitude absoluta muito menor do que a pressão subglotal) ou da pressão supraglotal. Dessa forma, tais tecidos ou são “puxados/sugados” ou não sofrem ação de força aerodinâmica significativa.

Considerando que os tecidos musculares são quase-incompressíveis, os tecidos musculares que são comprimidos provocam a expansão dos tecidos menos tensionados (que localizam-se após a constrição). Isso induz a formação das ondas mecânicas sobre a glote, que é propagada na direção vertical, de baixo para cima (para a nossa simulação). Em termos de força aerodinâmica, os tecidos musculares são sempre “empurrados” para cima por causa da distribuição de pressão nas pregas vocais.

Podemos especular também que a ordem seqüencial dos perfis geométricos é: primeiramente a laringe assume a forma divergente. Pela ação das pressões aerodinâmicas sobre os tecidos musculares, ela torna-se paralela. Finalmente, pela quase-incompressibilidade dos músculos da laringe e conseqüente “movimentação de massas”, a laringe produz um perfil convergente. Esse ciclo é refeito por causa das condições inerciais dos músculos da laringe, que posteriormente serão discutidos.

Agora iremos apresentar o diagrama de velocidades ao longo da laringe. Como o problema é tridimensional, optamos por apresentar cada vista (que julgamos importante) usando duas descrições visuais. O comprimento dos vetores nas figuras que seguem são proporcionais à magnitude dos vetores velocidade nos nós globais da malha. Na primeira representação visual (à esquerda) as cores são também proporcionais à magnitude (a cor vermelha representa a velocidade de pequena magnitude enquanto a cor azul representa uma velocidade de grande magnitude).

Na segunda representação visual (à direita) as velocidades nodais que “apontam para cima” tem cor azul enquanto que aquelas que “apontam para baixo” tem cor vermelha. Matematicamente definimos um vetor de referência ($\{0 \ 0 \ 1\}^T$, no caso) e calculamos o produto interno $(vel/\|vel\|) \cdot vetor_{ref}$. O vetor com valor unitário possui cor azul e o vetor com valor -1 possui cor vermelha.

Apresentamos agora os vetores velocidade para as laringes com perfil geométrico convergente, divergente e paralelo, com ou sem falsas pregas vocais. As explicações sobre os resultados obtidos serão apresentados logo em seguida.

Figura 5.1.10 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.11 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.12 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Figura 5.1.13 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.14 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.15 - Vetores velocidade para perfil convergente da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Figura 5.1.16 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.17 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.18 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Figura 5.1.19 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.20 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.21 - Vetores velocidade para perfil divergente da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Figura 5.1.22 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.23 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.24 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe COM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Figura 5.1.25 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - corte transversal.

Figura 5.1.26 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - corte longitudinal.

Figura 5.1.27 - Vetores velocidade para perfil paralelo da laringe SEM falsas pregas vocais - vista oblíqua.

Primeiramente podemos perceber que logo após a constrição TODOS os escoamentos foram zonas de recirculação. A diferença entre os perfis foi justamente a extensão desses vórtices. Podemos notar que em todas as situações, a zona de recirculação principal localizou-se sobre o ventrículo laríngeo e falsas pregas vocais. Quando essa última estrutura foi removida, percebemos o aumento da área de recirculação.

Analisando o escoamento para os diferentes perfis podemos perceber algumas características qualitativas. O perfil convergente produziu menos oscilações na glote. Isso significa que não houve praticamente nenhuma formação de zona de recirculação de área na glote. Somente na entrada da glote é que há um pequeno salto (podemos perceber isto olhando cuidadosamente os vetores de coloração avermelhada na entrada glotal). Note que dentro da glote os vetores de velocidade praticamente alinham-se com o próprio perfil geométrico. A magnitude dos vetores mais próximos à borda foi menor do que à daqueles situados mais ao centro da glote, confirmando assim o perfil parabólico do escoamento que muitos autores assumem na glote e recirculação extremamente pequena naquela região. Esses dois fatos justificam assim o uso da equação de Poiseuille para descrever o escoamento na glote.

Entretanto, quando olhamos o escoamento de ar no perfil divergente, notamos primeiramente que a zona de recirculação principal foi a menor. Certamente que quanto maior do ângulo de divergência, tanto menor será a zona de recirculação em comparação com os demais perfis. Devemos nos lembrar entretanto que o escoamento era de alta velocidade, reforçando a presença de recirculação de ar, independente do ângulo de divergência.

Adicionalmente verificamos que o perfil divergente possuiu uma zona de recirculação adicional dentro da própria glote, logo após a constrição de menor área. Isso pode ser confirmado visualmente pelas

“oscilações” dos vetores de velocidade dentro da glote. Note particularmente os vetores de coloração vermelha “saindo” da glote na Figura 5.1.19. Compare esse perfil com o perfil convergente e podemos, dessa forma, confirmar evidência qualitativamente. Se voltarmos à Figura 5.1.6 notaremos a presença de duas zonas de pressão negativa. Certamente a principal zona de pressão negativa “sugou” ar da região supraglotal para formar essa zona de recirculação secundária por causa da posição da constrição de mínima área muito próxima à entrada da cavidade glotal. Como tal zona de pressão estava muito afastada da região supraglotal e a zona de pressão secundária era menor do que a principal, esta conformação de pressões certamente teve influência sobre o fato da zona de recirculação principal (sobre as falsas pregas vocais) ser a menor em extensão em relação aos demais perfis.

Finalmente o perfil paralelo possuiu um padrão de escoamento que aparentemente encaixou-se entre os perfis convergente e divergente. Note novamente a presença de uma zona de recirculação secundária logo após a abertura glotal (não tão próxima quanto no perfil convergente, é claro) que foi menor do que àquela formada pelo perfil divergente.

É interessante perceber que a zona de recirculação principal foi maior do que a encontrada nos demais perfis. Julgamos que isso decorre do fato de que a geometria paralela “força” o alinhamento dos vetores de velocidade de forma que o ar deixava a glote como um jato bem alinhado.

Até este ponto, nossas avaliações foram realizadas com base no corte transversal da glote. Não encontramos nenhum trabalho descrevendo a distribuição das velocidades em um corte longitudinal da laringe. Assim, devemos tecer alguns comentários que certamente influenciam nossos resultados quando comparados aos trabalhos que empregam apenas análises bidimensionais do escoamento na laringe.

Observamos que o escoamento de ar não é paralelo ao longo da extensão das pregas vocais. Os trabalhos que encontramos sempre admitem tal suposição independente do perfil geométrico da glote. Inclusive De Vries (2000) em sua tese representa o escoamento de ar em um plano bidimensional para posteriormente propagar a distribuição de pressões para os demais planos de sua laringe tridimensional.

Note que em todos os perfis geométricos a tendência dos vetores velocidade era de afunilarem-se logo na entrada da glote e de manterem tal formação na cavidade supraglotal. Dentre os perfis estudados, o que mais evidência esse fenômeno é o perfil divergente. Note que o jato de ar é muito mais afunilado possivelmente pela posição da constrição de menor área logo na entrada da glote.

O perfil paralelo também apresenta tal característica apesar da menor intensidade. Acreditamos que o afunilamento é proporcional à menor área glotal. Outro fator que influencia nesse fenômeno também é a posição da constrição de menor área. Isso porque o perfil convergente apresentou o menor afunilamento dos vetores de velocidade - muito provavelmente pelo alinhamento forçado desses vetores com o perfil geométrico da glote.

Se olharmos todas as figuras que mostram o corte longitudinal da laringe, notamos (particularmente através da representação visual das direções do escoamento) que também existe uma zona de recirculação de ar lateral. Como os vetores de velocidade se afunilam e aumentam de velocidade na glote, aqueles vetores mais próximos da comissura anterior e posterior foram “sugados” para baixo. Essa é uma evidência física

pouco discutida na literatura. Certamente que as zonas de pressão negativa na glote foram responsáveis por tal fenômeno. Devemos sempre nos lembrar que a distribuição de pressões na laringe é não uniforme, justificando a presença de tais zonas de recirculação de ar na glote e sobre o ventrículo laríngeo e falsas pregas vocais.

Para avaliar melhor todos os perfis geométricos apresentados, aumentamos a área das seções glotais para laringes com pregas vocais conforme mostra as Tabelas 5.1.4, 5.1.5 e 5.1.6. Note que somente apresentamos as seções que foram modificadas nas Tabela 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3.

Tabela 5.1.4 - Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil convergente

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,080 0,7 0,080
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,070 0,7 0,070
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,060 0,7 0,060
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,050 0,7 0,050
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,040 0,7 0,040
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,030 0,7 0,030

Tabela 5.1.5 - Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil divergente

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,045 0,7 0,045
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,052 0,7 0,052
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,064 0,7 0,064
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,076 0,7 0,076
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,084 0,7 0,084

Tabela 5.1.6 - Descrição geométrica da laringe “larga” com perfil paralelo

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,045 0,7 0,045
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,045 0,7 0,045
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,045 0,7 0,045
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,045 0,7 0,045

Note particularmente que aumentamos em 0,02 cm os raios transversais do perfil paralelo enquanto que aumentamos o ângulo do perfil de divergência juntamente com sua área. Já para o perfil convergente, apenas elevamos em 0,005 cada um dos raios transversais das seções elípticas.

Figura 5.1.28 - Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil convergente.

Figura 5.1.29 - Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil divergente.

Figura 5.1.30 - Distribuição de pressões na laringe “larga” com perfil paralelo.

Comparando a Figura 5.1.28 com a Figura 5.1.4 podemos perceber apenas uma pequena diferença qualitativa entre os perfis convergentes quando aumentamos os raios transversais que as definem geometricamente. A região onde a pressão caiu da pressão subglotal (aproximadamente) para zero (pouco antes da constrição de mínima área) foi maior (ocupa mais seções elípticas) na laringe convergente de maior área (Figura 5.1.28). O aumento da área glotal fez com que os gradientes de pressão tornassem mais suaves.

Tal fenômeno é particularmente mais evidente quando comparamos as laringes “estreitas” (Figura 5.1.6) e “largas” (Figura 5.1.29) nos perfis divergentes. Anteriormente notamos o acentuado gradiente de pressão na glote, inclusive com o aparecimento de uma zona de pressão negativa secundária após a constrição de menor área. Quando aumentamos os raios transversais que definem a laringe, notamos que a zona de pressão negativa principal foi reduzida e a zona de pressão negativa secundária foi “empurrada” para a borda de saída da glote. Finalmente, quando analisamos os perfis paralelos, notamos o mesmo comportamento do escoamento (apesar das diferenças de escala cores x magnitude de pressão das Figura 5.1.8 e 5.1.30).

Assim podemos formular que o aumento de área glotal provoca alterações significativas na distribuição das pressões ao longo das pregas vocais. Quanto mais estreito a passagem glotal, maior o gradiente de pressões que se forma na vizinhança da constrição de mínima área. Isso tem implicações importantes na excitação de movimentos dos tecidos musculares. A medida que as pregas vocais se aproximam, porções muito próximas de tecido sofrem ação de diferentes magnitudes de pressão.

Também podemos encontrar justificativa do porquê laringes com condições patológicas desfavoráveis como câncer e paralisias (bilaterais ou unilaterais) não conseguem vibrar adequadamente: a distribuição muito suave da pressão ao longo das pregas vocais, possivelmente impedindo que ocorra uma “transferência” de massas dentro da camada superficial da *lamina propria* (incompressibilidade do músculo). Assim, o aumento ou redução da área glotal provoca alterações na distribuição de pressões que diretamente afeta a excitação de movimentos ondulatórios na superfície das pregas vocais.

Figura 5.1.31 - Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil convergente.

Podemos analisar agora a distribuição de pressões dentro das seções elípticas. Podemos novamente perceber que a distribuição das pressões não foi uniforme. A seção 10 - na saída da glote - mostra que as pressões negativas concentraram-se sobre as paredes das pregas vocais, mais precisamente sobre a porção central da glote. Já a seção 9 notamos que a distribuição de pressões é não-linear. Devemos nos lembrar que tanto os métodos numéricos quanto o termo convectivo produzem assimetrias na solução de NS e isto pode justificar a variação da pressão nesta seção.

Figura 5.1.32 - Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil divergente.

Considerando agora a Figura 5.1.32, na qual o perfil divergente é analisado, vemos que a pressão negativa coletada exatamente sobre a constrição de mínima área reforça nossa idéia de que a região central das pregas vocais sofre maior ação da pressão negativa (seção S7).

Note que as pressões na região central das seções S5 e S6 foram menores do que nas comissuras anterior e posterior, o que confirma novamente a distribuição não uniforme das pressões. Isso tem fundamental importância quando analisarmos os movimentos dos tecidos da laringe. Podemos antecipar que

existiu uma diferença de fase horizontal devido ao gradiente de pressão ao longo da linha longitudinal das pregas vocais.

Figura 5.1.33 - Distribuição de pressão em seções glotais da laringe “larga” com perfil paralelo.

Finalmente, o perfil paralelo foi aquele cujo gradiente de pressões nas seções da laringe foi mais suave. Note novamente que as pressões negativas localizaram-se na seção de saída da glote (S10). Enquanto isso, o gradiente de pressões nas demais seções glotais foram bem menores do que os produzidos nos perfis geométricos convergente e divergente.

Figura 5.1.34 - Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil convergente - corte transversal.

Figura 5.1.35 - Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil divergente - corte transversal.

Figura 5.1.36 - Vetores velocidade para a laringe “larga” com perfil paralelo - corte transversal.

Analisando agora o comportamento dos vetores de velocidade ao longo da laringe podemos perceber que com o aumento da área glotal (e conseqüente aumento da vazão), as zonas de recirculação aumentaram. Isso pode ser percebido pelo aumento da magnitude dos vetores de velocidade que apontam no sentido contrário ao do escoamento (os vetores localizados sobre o ventrículo laríngeo e sobre as falsas pregas vocais). Também podemos perceber que na vizinhança da saída glotal, os vetores de velocidade da zona de recirculação são “sugados” mais fortemente quando comparados àqueles da Figura 5.1.10.

Devemos perceber entretanto que qualitativamente o comportamento dos vetores de velocidade para ambos os perfis convergentes foi o mesmo, ou seja, dentro da glote o escoamento foi forçado a alinhar-se com a geometria formada pelas duas pregas vocais. Também notamos que as zonas de recirculação também ocorreram antes da entrada glotal (em pequena magnitude) e logo após a constrição de mínima área.

Quando comparamos os perfis divergentes “estreito” e “largo” notamos o aumento da zona de recirculação com maior evidência. Particularmente na entrada da glote (um pouco antes da constrição de mínima área) verificamos um aumento da recirculação de ar.

Finalmente, os perfis paralelos também produziram o mesmo fenômeno. Apesar disso, salientamos novamente que as propriedades qualitativas que distinguem o escoamento nos três perfis geométricos foi mantida mesmo com o aumento de área glotal.

Esse aumento de zona de recirculação está ligado ao aumento de vazão e conseqüente aumento do número de Reynolds do escoamento. Sabemos que quanto maior esse número adimensional, tanto maior são as oscilações numéricas provocadas pelo termo convectivo de NS.

Figura 5.1.37 - Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil convergente.

Figura 5.1.38 - Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil divergente.

Figura 5.1.39 - Distribuição de pressão média ao longo de laringes “estreita” e “larga” com perfil paralelo.

Figura 5.1.40 - Distribuição de pressão média para diferentes perfis geométricos da laringe “estreita”.

Figura 5.1.41 - Distribuição de pressão média para diferentes perfis geométricos da laringe “larga”.

Discutiremos agora os valores de pressão média ao longo das laringes “estreita” e “larga”, COM falsas pregas vocais. Tais medidas de pressão média foram obtidas calculando-se a média das pressões em cada uma das 21 seções elípticas que compõem as laringes tridimensionais. Guo e Scherer (1993) usaram como pressão

de referência por seção a pressão localizada exatamente sobre a superfície da laringe de modo a comparar com os resultados obtidos a partir de sensores colocados em modelos mecânicos da laringe. Nossa decisão foi baseada no fato de que usando uma representação tridimensional da laringe, seria complicado especificar um ponto superficial onde a pressão é calculada, além dessa decisão poder ser interpretada como “ajustada” para fornecer resultados próximos aos obtidos por outros autores. Os autores citados puderam fazer essa medida de pressão na superfície de sua laringe pois admitiam que seu plano bidimensional era um corte transversal de uma seção longitudinal infinita.

Podemos ver na Figura 5.1.37 que as diferenças entre as distribuições de pressão das laringes “estreita” e “larga” foram pequenas quando comparadas aos perfis divergente e paralelo (Figuras 5.1.38 e 5.1.39, respectivamente). Percebemos que o aumento de área glotal implicou no deslocamento à direita das curvas de distribuição de pressão para todos os perfis geométricos. O comportamento da distribuição da pressão ao longo da laringe, entretanto, manteve-se praticamente a mesmo. Note também que o gradiente de pressão nas pregas vocais é maior para a laringe “estreita” do que para a laringe “larga”, conforme já mencionado.

Tanto o perfil convergente quanto o perfil paralelo exigiram uma pressão negativa menor na constrição de mínima área quando a vazão aumentou. Entretanto, esse fenômeno inverteu-se para o perfil divergente. Possivelmente o fato de existir uma segunda zona de pressão negativa sobre as pregas vocais tenha contribuído para esse acontecimento (elevamos a quantidade de pontos da malha, para dirimir dúvidas, e obtivemos os mesmos resultados).

Note que o pequeno salto na curva de pressão média do perfil paralelo para a laringe “estreita”, da seção S7 para a seção S8 está relacionado com as características geométricas da laringe estreita. O mesmo verificou-se para a laringe “larga” (apesar da inclinação do salto ser bem menor). Isso ocorreu por causa da formação de uma zona de recirculação de ar (muito pequena quando comparada à formada no perfil divergente) que normalmente é denominada *vena contracta*.

O perfil divergente foi o que apresentou a menor pressão negativa dentre todos os perfis geométricos. A curva de pressão média também reforça nossas especulações qualitativas sobre o alto gradiente de pressão formado na vizinhança da constrição de mínima área. Como comentamos anteriormente, uma segunda zona de recirculação de ar foi formada (no presente caso, ao redor da seção S10). Quando alargamos o espaço glotal, essa segunda zona de recirculação amalgamou-se com a primeira, como podemos constatar na Figura 5.1.38.

Comparando as curvas de pressão média para a laringe “estreita” e variando os perfis podemos reafirmar que a pressão negativa formou-se sobre e logo após a constrição de área mínima. Note também que enquanto no perfil divergente, tal zona ocorreu na porção inferior das pregas vocais, no perfil convergente ela formou-se na porção superior. Para o perfil paralelo, a distribuição de pressões foi mais suave ao longo de toda as pregas vocais, “interpolando-se” entre os dois outros perfis geométricos.

O mesmo ocorreu com o alargamento da área glotal. Comparando-se as Figuras 5.1.40 e 5.1.41, notamos que com o aumento do espaço glotal, a distribuição de pressões ao longo das pregas vocais tornou-se mais suave (particularmente sobre as pregas vocais).

Tabela 5.1.7 - Descrição geométrica das falsas pregas vocais de tamanho “normal” para todos os perfis

TAMANHO	Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
“normal”	S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45
	S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46
“médio”	S15	0; 0; 0,23	0,7 0,35 0,7 0,35
	S16	0; 0; 0,35	0,7 0,36 0,7 0,36
“grande”	S15	0; 0; 0,23	0,7 0,25 0,7 0,25
	S16	0; 0; 0,35	0,7 0,26 0,7 0,26

Avaliamos também os efeitos das falsas pregas vocais na distribuição de pressão média ao longo da laringe. A Tabela 5.1.7 mostra as alterações que foram feitas na laringe “estreita” (Tabelas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3) resumindo-se a reduzir o espaço entre as duas falsas pregas vocais. As demais definições geométricas permaneceram constantes.

Figura 5.1.42 - Diferença de pressão média entre laringes convergentes “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.

Podemos perceber que as falsas pregas vocais alteram o escoamento de ar na laringe. Especificamente podemos notar na Figura 5.1.42 que a pressão negativa formada na constrição de mínima área torna-se ainda mais negativa a medida que aumentamos a dimensão das falsas pregas vocais. O mesmo acontece com as pressões sobre o ventrículo laríngeo (note que a Figura 5.1.42 assim como as Figura 5.1.43 e 5.1.44 mostram a diferença entre a curva de pressão média das laringes com falsas pregas vocais “normais”, “médias” e “grandes” e a curva das laringes sem pregas vocais, essa última tomada assim como referência).

Esse fenômeno certamente está relacionado com o aumento da influência da zona de recirculação de ar no ventrículo laríngeo. Certamente o ar “preso” nessa região afetou a *vena contracta* que se formou logo após a constrição no perfil convergente a medida que elevamos as falsas pregas vocais.

Figura 5.1.43 - Diferença de pressão média entre laringes divergentes “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.

Figura 5.1.44 - Diferença de pressão média entre laringes paralelas “estreitas” COM e SEM falsas pregas vocais.

Quando analisamos a Figura 5.1.43, podemos perceber o comportamento mais uniforme das curvas de pressão média para o perfil divergente. Novamente a pressão negativa formada na constrição de mínima área da glote foi reduzida pelo aumento das falsas pregas vocais.

Percebemos adicionalmente que a seção S14 (pouco antes da constrição mínima das falsas pregas vocais - note que adotamos o perfil divergente para descrever estas estruturas da laringe) também teve sua pressão reduzida. Certamente que, como “divisor” de zonas de recirculação de ar, esse lugar geométrico deveria sofrer algum tipo de modificação pela alteração geométrica da laringe.

Finalmente, o perfil paralelo produziu curvas de pressão média (Figura 5.1.44) cujo comportamento qualitativo foi similar ao encontrado nos demais perfis. Note entretanto as pressões médias ao longo da glote (pouco antes da constrição de mínima área) para falsas pregas vocais “normal” aumentou ao invés de diminuir. Mas a medida que reduzimos o espaço entre as falsas pregas vocais, as pressões naquela região (que são em sua grande maioria positivas) foram reduzidas.

Figura 5.1.45 - Vetores velocidade para a laringe convergente com falsas pregas vocais “grandes” - corte transversal.

Com base nos resultados encontrados podemos definir que as falsas pregas vocais ajudam a reduzir ainda mais a pressão negativa formada nas pregas vocais pela passagem do ar durante a fonação. Aparentemente essas modificações estão ligadas à circulação de ar no ventrículo laríngeo, pois quando calculamos olhamos, os vetores velocidade em uma laringe com falsas pregas vocais “grandes” (Figura 5.1.45), notamos que existem duas recirculações de ar sendo formadas no ventrículo laríngeo: a primeira, localiza mais próxima do “jato de ar” saindo da glote e a segunda mais afastada deste “jato” (que mais se assemelha a uma zona de estagnação de ar). Essa complexidade no escoamento certamente favoreceu as alterações que obtivemos nas curvas de pressão média ao longo da laringe. Podemos verificar melhor tais zonas de recirculação de ar na Figura 5.1.46 na qual enfatizamos graficamente esse fenômeno.

Figura 5.1.46 - Verificação das áreas de recirculação de ar no ventrículo laríngeo em duas vistas oblíquas distintas: Ampliações da Figura 5.1.45.

Devemos lembrar que as diferenças de magnitude para as curvas obtidas para as diferentes dimensões de falsas pregas vocais foram bem pequenas quando as comparamos com a pressão subglotal e à queda de pressão que ocorre na glote. Estudos (Pereira, 1987) demonstraram que as falsas pregas vocais são importantes para simulação de voz sussurada pois essas estruturas aproximam-se ainda mais uma das outras, criando uma nova constrição de dimensões próximas as formadas pelas pregas vocais verdadeiras. Como mostramos aqui, a pressão negativa que é formada sobre a superfície glotal é bem menor do que em uma situação normal de fonação. Isso justifica o fato de necessitarmos então de uma pressão subglotal menor para atingir o regime auto-sustentado de vibração das pregas vocais.

Validamos, finalmente, nossos resultados com Guo e Scherer (1993) cujo trabalho mais se aproxima do nosso. A Figura 5.1.47 mostra um perfil divergente da laringe bidimensional simulada. Tais autores variaram o ângulo da superfície glotal para formar os perfis convergente, divergente e paralelo. Comparativamente, nossa laringe não possui uma queda na porção supraglotal das pregas vocais tão abrupta quanto a usada por Guo e Scherer (1993).

Também devemos notar que a superfície das pregas vocais verdadeiras simulada por Guo e Scherer (1993) é mais suave do que a nossa. Isso fez com que a zona de pressão negativa se localizasse um pouco acima da constrição glotal de área mínima. Ademais, as características geométricas entre nosso modelo e o de tais autores é a mesma. Guo e Scherer (1993) usaram o método dos elementos finitos para calcular as velocidades e pressões de ar na cavidade laríngeo usando o método das substituições sucessivas e função de penalidade para forçar a incompressibilidade do ar. Adicionalmente eles usaram a simetria entre as pregas vocais para simular somente “meia” laringe. As condições de contorno empregadas por tais autores foram

pressão nula na saída do tubo da laringe e velocidade constante (perfil parabólico) na entrada da laringe. Admitiram também velocidade nula ao longo das paredes musculares. Na superfície remanescente (de simetria) eles forçaram a velocidade na direção y e a derivada de velocidade na direção x serem nulas.

Figura 5.1.47 - Perfil geométrico simulado por Guo e Scherer (1993).

O diagrama de pressões calculadas por Guo e Scherer (1993) são mostradas na Figura 5.1.48. Devemos ter em mente que tais autores coletaram as pressões sobre a superfície da laringe enquanto nossa curva corresponde ao valor médio na seção. Assim, nossas pressões foram assim naturalmente menores do que os obtidos por Guo e Scherer (1993).

Figura 5.1.48 - Curva de pressão na superfície muscular para laringe de Guo e Scherer (1993).

Comparando as curvas apresentadas na Figura 5.1.48 com aquelas apresentadas anteriormente podemos notar qualitativamente a semelhança, inclusive de magnitude. Novamente nos perfis divergentes a zona de pressão negativa localizou-se próximo à entrada da glote enquanto que nos perfis convergentes, elas ocorreram próximo a saída glotal. Pela curvatura tanto da saída quanto da entrada da glote que o modelo

geométrico de Guo e Scherer (1993) possuía, as posições da zona de pressão negativa diferiram das nossas. Em nossas laringes, a entrada e saída glotais são abruptas, o que gerou tal diferença.

Outra diferença que pode ser notada é na magnitude das pressões ao longo das pregas vocais. Dois fatores colaboram para que nossas pressões (particularmente as negativas) fossem menores do que as de Guo e Scherer (1993): o primeiro fator é o fato de nós usarmos a média das pressões por seção ao invés do valor colhido da superfície das pregas vocais. Olhando as Figuras 5.1.28, 5.1.29 e 5.1.30, por exemplo, facilmente notamos que as magnitudes produzidas pelas nossas simulações equiparam-se àquelas da Figura 5.1.48.

O segundo e principal fator, inclusive mencionado em Guo e Scherer (1993) que admitiram que o corte bidimensional foi tirado de uma seção longitudinal infinita da laringe, é o fato de que nosso modelo tridimensional da laringe é finito e as seções possuem geometria elíptica. Isso implica que mesmo usando diâmetros muito semelhantes para descrever a porção central da laringe, as regiões das comissuras anterior e posterior afetaram a distribuição de pressões e vetores de velocidade ao longo das pregas vocais. Isso ficou claro nos parágrafos anteriores em que discutimos essas características qualitativas do escoamento.

Para evitar dúvidas de interpretação, coletamos a pressão na superfície da laringe ao longo da seção transversal central, de modo igual ao definido por Guo e Scherer (1993). Simulamos as laringes “estreitas” para os três perfis básicos para uma pressão de 6 kdina/cm² (note que os autores mencionados usaram 6 cm H₂O, que é igual a 6122 dina/cm²). A Figura 5.1.49 quando comparada à Figura 5.1.48 mostrou que ambos os resultados foram tanto quantitativa quanto qualitativamente muito similares, dirimindo assim dúvidas sobre o procedimento matemático adotado.

Figura 5.1.49 - Curva de pressão na superfície muscular em laringes “estreitas”: Comparação com Guo e Scherer (1993).

As diferenças que apareceram em ambos os resultados estão relacionados com a maior suavidade da malha de Guo e Scherer (1993) e ao fato de nossa laringe não ter comprimento longitudinal “infinito” como a suposição feita pelos mesmos. Note particularmente que em nosso perfil divergente, entretanto, obtivemos uma segunda zona de pressão negativa na superfície das pregas vocais. Acreditamos que isso está intimamente ligado à superfície não-suave de nossas pregas vocais na entrada glotal.

Mesmo com essas diferenças, ficou claro pelos resultados obtidos e comparados com aqueles apresentados em literatura que nossa simulação do escoamento usando um modelo híbrido produziu valores fisiologicamente corretos (Guo e Scherer, 1993; Titze, 1992).

5.2 Propriedades Mecânicas da Laringe X Vibração das Pregas Vocais

Primeiramente iremos analisar quais os efeitos produzidos pelas diferentes propriedades elásticas que definem os músculos da laringe. Partimos de alguns valores encontrados em literatura, particularmente o do módulo de Young transversal (E) que Tran et al. (1993) definiram entre 191 e 215 kdina/cm^2 . Segundo esses autores, esse intervalo de valores refere-se ao efeito conjunto de toda a prega vocal verdadeira. Nós definimos então para o módulo de Young transversal para o corpo o valor de 200 kdina/cm^2 pois o ligamento e a cobertura possuem estruturas mais “moles” conforme Hirano (1975).

Realizamos diversos ensaios computacionais para definir adequadamente essas constantes para o ligamento e a cobertura. Também aproveitamos as definições mais precisas encontradas em Berry et al. (1994) para suportar nossas análises.

O módulo de Young longitudinal (E') foi o mais intensamente analisado, particularmente pela facilidade de medição. Optamos por usar valores próximos a 200 kdina/cm^2 enquanto Alipour-Haghighi e Titze (1991) sugeriram $207 \pm 24 \text{ kdina/cm}^2$ para o corpo muscular e $419 \pm 71 \text{ kdina/cm}^2$ para a cobertura. Note que tais autores realizaram essas medições em laringes de cachorros (animais que não possuem ligamento). Nossa suposição foi a de que tecidos mais moles possuem naturalmente módulos de Young longitudinais menores.

A constante de cisalhamento longitudinal foi que causou maior dificuldade na definição. Conforme mencionado em capítulo anterior, existem muitas especulações sobre seu correto valor, geralmente reduzindo o problema a definição de sua magnitude (Titze e Strong, 1975). Os poucos trabalhos que fornecem indicação foram Berry et al. (1994), Berry e Titze (1996) e Alipour-Haghighi et al. (2000) cujos valores fornecidos serviram de base para as nossas definições.

A constante de viscosidade também gerou controvérsias que foram comentadas anteriormente. Optamos por atribuir uma constante de viscosidade alta para o corpo e baixa para o ligamento e cobertura. Como o corpo tem constituição similar ao de outros músculos do corpo humano, cuja viscosidade é igual a 150 Poise, usamos esse valor para o tecido do corpo laríngeo. Nossas análises preliminares indicaram que esse valor permite que as pregas vocais como um todo estabilizem-se rapidamente em uma posição espacial mais ou menos “fixa” durante a fonação (valores baixos fizeram com que nossas “pregas vocais” oscilassem por

um período de tempo maior antes de assumirem uma posição “constante” ao longo do tempo). Note que a definição matemática da dinâmica da laringe pode ser grosseiramente simplificada para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (no tempo). Assim, conforme a teoria de controle podemos reduzi-la a um sistema subamortecido, amortecido criticamente e sobreamortecido. Aparentemente o valor da viscosidade do músculo vocal faz com que o sistema muscular seja subamortecido ou amortecido criticamente, rapidamente assumindo uma posição mais ou menos constante ao longo do tempo.

Já os tecidos que constituem o ligamento e a cobertura são mais moles (com constituição similar a um líquido, segundo Titze e Talkin (1979)). Isso fez com que nossas definições para a constante viscosidade desses tecidos fosse de 10 Poise.

Finalmente avaliamos a constante de Poisson, que define a compressibilidade do músculo. Conforme os trabalhos avaliados, os músculos da laringe são incompressíveis. Em um modelo matemático isotrópico, certamente adotaríamos um valor muito próximo a 0,5 (limite termodinâmico teórico) - com especial atenção na singularidade matricial à medida que nos aproximamos de tal valor.

Entretanto, como empregamos um modelo ortotrópico (transversalmente isotrópico), seria necessário definir duas constantes de Poisson, uma transversal e outra longitudinal. Berry et al. (1994), Berry e Titze (1996) e Alipour-Haghighi et al. (2000) derivaram um modelo que permite fixar ν' em zero e ajustar ν para alcançar a incompressibilidade. No nosso caso, isso fazia com que as oscilações de nossas laringes fossem irregulares, muito provavelmente pela falta de “ligação” entre os diversos planos transversais das pregas vocais. Sendo assim, ν' e ν deviam ser não-nulos.

Para facilitar as análises, optamos por $\nu' = \nu$ e eliminamos três graus de liberdade (diferentes tecidos da laringe). Para atingir a quase-incompressibilidade, determinamos o limite teórico (Eq. 3.17) e definimos os valores dessas constantes de forma a evitar os problemas de singularidade matricial como ocorre no caso isotrópico. Tomemos por exemplo os seguintes valores de E , E' e μ_m' como sendo 60, 200 e 200, respectivamente (em kdyna/cm²). Adicionalmente ν' igual a 0,65 produz um limite teórico para ν igual a 0,7465. Isso permite que definamos $\nu = 0,65$.

Com a definição das propriedades elásticas genericamente apresentadas, definimos então a geometria da laringe para as simulações. Especificamos uma espessura de 0,5 mm para a cobertura e ligamento conforme Hirano (1975) e Alipour-Haghighi et al. (2000), por exemplo. Tais espessuras foram elevadas para verificar seu efeito (aumento de massa nas pregas vocais) na geração do sinal glotal. O músculo vocal ocupou o espaço remanescente entre a superfície de contato entre laringe/ar e o espaço de simulação do músculo. Em todas as simulações fixamos um diâmetro externo para toda a laringe simulada de 2 cm.

Adicionalmente definimos $\Delta t = 0,001$ s nas simulações para podermos avaliar o comportamento oscilatório das pregas vocais e verificar se as mesmas atingiam ou não o regime auto-sustentado de vibração. Posteriormente reduzimos esse valor para capturar com mais detalhes os movimentos da laringe bem como obter estabilidade no algoritmo de colisão e em outras situações em que os movimentos da laringe eram elevados (outros detalhes serão comentados posteriormente). Como resultado da simulação, determinamos o

sinal glotal que fisicamente corresponde à vazão ao longo do tempo na saída da laringe que será apresentado e comentado ao longo desta seção.

Tabela 5.2.1 - Descrição geométrica GEO1

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,80	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,075
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,045 0,7 0,045
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,045 0,7 0,045
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,045 0,7 0,045
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,045 0,7 0,045
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,045 0,7 0,045
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,10	0,7 0,515 0,7 0,515
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6
S18	0; 0; 0,60	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,30	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2	0,7 0,7 0,7 0,7
Espessura cobertura		Espessura ligamento
0,5 mm		1,0 mm

A Tabela 5.2.1 descreve uma laringe com um espaço glotal razoavelmente elevado (0,09 cm de diâmetro) e com uma espessura de ligamento grande. O objetivo de usar tal abertura glotal é que queríamos analisar exclusivamente o comportamento oscilatório da laringe, confirmando assim os valores de elasticidade empregados. Já a laringe da Tabela 5.2.2 possui a mesma geometria da Tabela 5.2.1 variando-se apenas a espessura dos tecidos (por esse motivo apresentamos somente os termos que variaram entre as duas).

Tabela 5.2.2 - Descrição geométrica GEO2

Seções equivalentes a:	GEO1
Espessura cobertura	Espessura ligamento
0,5 mm	0,5 mm

A laringe da Tabela 5.2.2 possui as mesmas características geométricas de uma laringe normal com exceção do espaço glotal. Na Tabela 5.2.3 apresentamos a descrição geométrica de uma laringe denominada “curta” pois estávamos interessados em saber qual o efeito de redução de massa das pregas vocais verdadeiras na fonação.

Tabela 5.2.3 - Descrição geométrica GEO3

Seções equivalentes a:		GEO1
Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S3	0; 0; -0,58	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,43	0,7 0,3 0,7 0,3
S5	0; 0; -0,32	0,7 0,1 0,7 0,1
S6	0; 0; -0,25	0,7 0,045 0,7 0,045
S7	0; 0; -0,20	0,7 0,045 0,7 0,045
S8	0; 0; -0,15	0,7 0,045 0,7 0,045
S9	0; 0; -0,10	0,7 0,045 0,7 0,045
Espessura cobertura		Espessura ligamento
0,5 mm		0,5 mm

Finalmente apresentamos as laringes com abertura glotal fisiologicamente compatível com a atividade fonatória (Ishizaka e Flanagan, 1972; Pereira, 1987) através das Tabelas 5.2.4 e 5.2.5.

Tabela 5.2.4 - Descrição geométrica GEO4

Seções equivalentes a:		GEO1
Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,025
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,025 0,7 0,025
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,025 0,7 0,025
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,025 0,7 0,025
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025
Espessura cobertura		Espessura ligamento
0,5 mm		0,5 mm

Tabela 5.2.5 - Descrição geométrica GEO5

Seções equivalentes a:		GEO1
Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S3	0; 0; -0,58	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,43	0,7 0,3 0,7 0,3
S5	0; 0; -0,32	0,7 0,1 0,7 0,1
S6	0; 0; -0,25	0,7 0,025 0,7 0,025
S7	0; 0; -0,20	0,7 0,025 0,7 0,025
S8	0; 0; -0,15	0,7 0,025 0,7 0,025
S9	0; 0; -0,10	0,7 0,025 0,7 0,025
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,025
Espessura cobertura		Espessura ligamento
0,5 mm		0,5 mm

Para completar as definições geométricas, fixamos o ligamento entre as seções S4 e S11 em todas as geometrias. A Figura 4.4.5 mostra graficamente o posicionamento dos diferentes tecidos da laringe. Com

todas as definições geométricas prontas, analisamos o comportamento oscilatório de diferentes laringes (variando as geometrias e as propriedades elásticas) de modo a identificar a relação entre essas características e a vibração auto-sustentada da laringe.

A primeira análise consistiu em verificar qual o efeito do aumento de espessura dos tecidos moles (especificamente do ligamento) na vibração das pregas vocais. As Tabelas 5.2.6 e 5.2.7 mostram as definições dessas duas laringes cujos sinais glotais foram comparados.

Tabela 5.2.6 - Laringe com ligamento mais ESPESSE (LAR11)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO1

Tabela 5.2.7 - Laringe com ligamento mais FINO (LAR13)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Figura 5.2.1 - Efeitos do aumento de massa na vibração da laringe.

Note que apenas variamos a geometria da laringe, mantendo fixas todas as constantes elásticas. Note que optamos inicialmente por inverter as constantes de Young transversais da cobertura e do ligamento apenas para enrijecer “um pouco” mais as pregas vocais verdadeiras para evitar a colisão entre ambas.

Podemos ver que o aumento de massa causa um imediato aumento de amplitude nas vibrações das pregas vocais. No nosso caso, isso fez com que a laringe atingisse o regime auto-sustentado de oscilação mais rapidamente. Adicionalmente podemos verificar uma redução de frequência de oscilação. Esse fenômeno ocorreu devido ao maior percurso que as pregas vocais tiveram de realizar com o aumento de inércia.

Tabela 5.2.8 - Laringe com MENOR constante de cisalhamento longitudinal no ligamento (LAR14)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	100k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Tabela 5.2.9 - Laringe com MAIOR constante de cisalhamento longitudinal no ligamento (LAR17)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	900k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Figura 5.2.2 - Efeitos da constante de cisalhamento longitudinal do ligamento na vibração da laringe.

A segunda análise que realizamos foi verificar qual a influência da constante de cisalhamento do ligamento na vibração das pregas vocais. Segundo Titze e Talkin (1979) esse valor deve ser grande para compatibilizar a ligação entre as camadas intermediária e profunda da *lamina propria*, e destas com o músculo vocal. As Tabelas 5.2.8 e 5.2.9 apresentam as constantes viscoelásticas usadas na simulação. Note que a laringe LAR14 possui uma constante de cisalhamento longitudinal que é 9 vezes menor do que na laringe LAR17. Isso foi feito para evidenciar bem as diferenças na vibração das duas laringes.

A Figura 5.2.2 mostra que um aumento considerável nessa constante praticamente eliminou o potencial de oscilação auto-sustentado da laringe. As forças de pressão que foram aplicadas sobre a superfície das pregas vocais foram insuficientes para vencer a resistência do ligamento vocal. Podemos ver que a vibração reduziu-se com o tempo para a laringe LAR17. Já a laringe LAR14 confirma essa relação entre a constante e a vibração das pregas vocais. Para facilitar a visualização dos efeitos na Figura 5.2.2, não incluímos a LAR13 (que possui μ_m' intermediário). Essa simulação também confirmou a relação direta já discutida.

Tabela 5.2.10 - Laringe com MENOR módulo de Young transversal na cobertura (LAR15)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	200k	200k	0,68	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Figura 5.2.3 - Efeitos do módulo de Young transversal da cobertura na vibração das pregas vocais.

Para avaliar os efeitos do módulo de Young transversal na fonação, comparamos as laringes LAR11 e LAR15 (as propriedades viscoelástica dessa última são descritas na Tabela 5.2.10). Podemos notar

primeiramente que a redução do módulo de Young da cobertura elevou a amplitude de oscilação das pregas vocais, juntamente com um aumento de frequência de vibração. Note que esse aumento de frequência foi exatamente o oposto ao que se esperava ou seja: quando sua magnitude fosse reduzida, a cobertura ficaria mais “mole” e isto implicaria num aumento da amplitude de movimentos. Essa maior amplitude resultaria em maior tempo de excursão das pregas vocais e então, menor frequência de vibração. Acreditamos que esse resultado “adverso” originou-se de algum batimento vibratório dos tecidos da cobertura e ligamento por serem ambos bastante “moles” em comparação ao músculo vocal mas ainda sim, com diferentes propriedades elásticas (E' e μ_m' , particularmente).

Verificamos também qual seria o efeito que o aumento de viscosidade nos tecidos da cobertura e ligamento causaria na vibração, particularmente por causa dos variados valores que a literatura apresentou para a viscosidade. Comparamos a laringe LAR14 com a laringe LAR18 (descrita na Tabela 5.2.11).

Tabela 5.2.11 - Laringe com MAIOR viscosidade em todos os tecidos (LAR18)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	100
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	100
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Figura 5.2.4 - Efeitos da viscosidade na vibração das pregas vocais.

Note que o aumento de 10 vezes na viscosidade dos dois tecidos “moles” das pregas vocais amortecem as vibrações da laringe. Isso significa que as forças aerodinâmicas foram incapazes de transmitir energia suficiente para que as pregas vocais vencessem a resistência viscosa dos tecidos musculares. Adicionalmente,

notamos que a viscosidade atuou somente na amplitude de vibração, deixando a frequência de vibração inalterada.

Tabela 5.2.12 - Laringe com MENOR constante de cisalhamento longitudinal na cobertura (LAR21)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	100k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Tabela 5.2.13 - Laringe com MAIOR constante de cisalhamento longitudinal na cobertura (LAR22)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	400k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Figura 5.2.5 - Efeitos da constante de cisalhamento longitudinal da cobertura na vibração das pregas vocais.

O próximo conjunto de simulações envolveu a análise da constante de cisalhamento longitudinal da cobertura. Titze e Talkin (1979) e mais recentemente Berry e Titze (1996) indicaram que essa componente elástica da laringe influencia diretamente a propagação da onda mucosa sobre a superfície das pregas vocais, e conseqüentemente, altera a vibração da laringe. Para avaliar esse fenômeno, simulamos duas laringes (LAR21 e LAR22, apresentadas respectivamente nas Tabelas 5.2.12 e 5.2.13) com diferença de 400k dina/cm² entre ambas as constantes de cisalhamento longitudinal.

O resultado obtido (Figura 5.2.5) mostrou que tanto a amplitude média quanto as amplitudes pico-a-pico foram modificadas por conta da alteração dessa propriedade elástica da cobertura das pregas vocais. Fisicamente, as pregas vocais ficaram mais abertas para uma “pequena” constante de cisalhamento, além de mais “moles”, dando suporte assim a vibração auto-sustentada da laringe. Note que a laringe mais rígida novamente criou uma resistência à propagação da onda mucosa nas pregas vocais.

Diferente do que qualitativamente possa parecer, existe uma pequena diferença de frequência de vibração entre as duas simulações, apesar de aparentar também uma diferença de fase nas curvas. Não quantificamos os valores aqui pois a quantidade de amostras coletadas e frequência de amostragem eram pequenas para formalizarmos efetivamente qual a diferença. Tal fenômeno é novamente ligado à variação das constante de cisalhamento longitudinal dos tecidos da cobertura.

Tabela 5.2.14 - Laringe MAIS “curta” com MENOR módulo de Young transversal da cobertura (LAR26)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	60k	0,65	200k	200k	0,65	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO3

Tabela 5.2.15 - Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young transversal da cobertura (LAR27)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	200k	200k	0,68	10
Ligamento	20k	0,68	100k	300k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO3

Tabela 5.2.16 - Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young longitudinal (LAR28)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,75	400k	200k	0,75	10
Ligamento	20k	0,75	200k	300k	0,75	10
Corpo	200k	0,56	400k	300k	0,56	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO3

A próxima sequência de análises envolveu a redução da largura das pregas vocais (usando a geometria GEO3 para qualificar a laringe “curta” em relação a laringe “normal”, denominada GEO2). Note que fisiologicamente essas laringes podem ser comparadas com as laringes de crianças, que possuem assim uma pequena massa. Comparamos os sinais glotais produzidos pelas laringes descritas nas Tabelas 5.2.14 (LAR26) e 5.2.15 (LAR27) com aqueles das laringes LAR13 e LAR15 (com as mesmas propriedades viscoelásticas).

Figura 5.2.6 - Efeito da largura das pregas vocais na vibração de laringes com cobertura “rígida”.

Figura 5.2.7 - Efeito da largura das pregas vocais na vibração de laringes com cobertura “mole”.

Inicialmente percebemos que a redução de massa fez com que ambas as laringes “curtas” (com diferentes módulos de Young transversais) vibrassem com menor amplitude do que as suas equivalentes mecânicas de maior largura. Entretanto, também percebemos que a redução de massa permitia que a laringe

ficasse mais aberta, como podemos perceber pela vazão média nas Figura 5.2.6 e 5.2.7. A questão é: qual o mecanismo físico que laringes “curtas” vibram pois uma redução muito grande no módulo de Young transversal podia produzir uma laringe fisiologicamente inexistente.

Encontramos a resposta quando aumentamos o módulo de Young longitudinal (que fisiologicamente pode ser entendido como um aumento da resistência à tração longitudinal das pregas vocais pelos músculos adutores). A Figura 5.2.8 mostra que a duplicação dessa constante elástica para todos os tecidos da laringe resultou no aumento da amplitude de vibração das pregas vocais.

Figura 5.2.8 - Efeito do módulo de Young longitudinal na vibração de laringe “curta”.

Esse resultado é importante pois justifica a idéia de que o aumento da tensão das pregas vocais pelos músculos adutores resulta em uma vibração mais estável das pregas vocais. Em pequeno grau, notamos um pequeno aumento de frequência de vibração. Certamente que um aumento mais significativo dessa frequência deve ser resultado de outras alterações conjugadas da viscoelasticidade dos tecidos que constituem as pregas vocais verdadeiras.

Tabela 5.2.17 - Laringe com MAIOR módulo de Young longitudinal no ligamento (LAR29)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	200k	200k	0,68	10
Ligamento	20k	0,78	200k	300k	0,78	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO2

Tabela 5.2.18 - Laringe MAIS “curta” com MAIOR módulo de Young longitudinal no ligamento (LAR30)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,75	400k	200k	0,75	10
Ligamento	20k	0,80	300k	300k	0,80	10
Corpo	200k	0,45	400k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO3

Figura 5.2.9 - Comparação entre laringes “curta” e “normal” com rigidez longitudinal ajustada.

Para confirmar que laringes “curtas” exigem maior tensão aplicada nas pregas vocais, comparamos os sinais glotais de duas laringes: uma “curta” (GEO3) e outra “normal” (GEO2) em que adicionalmente à variação da geometria, as duas diferem apenas nos módulos de Young longitudinais.

Conforme vemos na Figura 5.2.9, podemos perceber que a amplitude de vibração das duas estruturas é muito similar. Particularmente notamos o aumento da frequência de vibração da laringe “curta” frente a laringe “normal”. Isso reforçou nossa idéia de que o aumento de massa das pregas vocais exige menor tensão para que a oscilação auto-sustentada seja obtida.

É sabido que as pregas vocais de mulheres possuem menor massa do que a dos homens, além da maior tensão que suas pregas vocais estão sujeitas. Os resultados obtidos com essa simulação (apresentados na Figura 5.2.9) demonstraram que tal mecanismo produz uma maior frequência de vibração das pregas vocais, justificando assim o fato físico. Particularmente notamos que o módulo de Young longitudinal possui papel significativo nesse fenômeno. Fisicamente, devemos lembrar que como aumentamos a resistência à tração longitudinal, a quase-incompressibilidade do tecido exige que o movimento dos tecidos se de transversalmente, por causa da menor resistência à tração neste plano.

Nossos estudos também demonstraram que essa propriedade mecânica das pregas vocais (cujo equivalente em Alipour-Haghighi et al. (2000) foi uma constante denominada *bulging factor*) também induz uma maior estabilidade na vibração das pregas vocais. Isso pode ser confirmado pelos resultados apresentados na Figura 5.2.6 para a qual a laringe LAR26 produziu um padrão menos “estável” do que a equivalente LAR13.

Tabela 5.2.19 - Laringe com espaço glotal reduzido (LAR31)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	200k	200k	0,68	10
Ligamento	20k	0,78	200k	300k	0,78	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO4

Tabela 5.2.20 - Laringe MAIS “curta” com espaço glotal reduzido (LAR32)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	400k	200k	0,68	10
Ligamento	20k	0,80	300k	300k	0,80	10
Corpo	200k	0,45	400k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO5

Figura 5.2.10 - Redução do espaço glotal - Comparação entre vibração de laringes “curta” e normal.

Note que até este ponto, as simulações não produziram colisão entre as duas pregas vocais. Isso ocorreu por causa da grande abertura glotal, justificado para verificar melhor os efeitos das propriedades mecânicas dos tecidos da laringe sobre a vibração das pregas vocais.

Reduzimos então o espaço glotal tanto da laringe “curta” quanto da “normal”, resultando nas geometrias GEO4 e GEO5, anteriormente descritas. Empregando as mesmas propriedades mecânicas mostradas nas Tabelas 5.2.19 e 5.2.20 (que são as mesmas das laringes LAR29 e LAR30) obtivemos os sinais glotais apresentados na Figura 5.2.10. Podemos perceber que a diferença entre ambas as frequências de vibração das pregas vocais foram mantidas mesmo com o fechamento glotal. Adicionalmente, a laringe “curta” produziu amplitudes maiores do que a laringe “normal”.

Curiosamente percebemos que as pregas vocais não se fecharam totalmente. Nosso algoritmo de adaptação de malha tenta mapear todo o espaço interno (determinado pela superfície interna da laringe conforme descrito anteriormente). Podemos notar isso através da Figura 5.2.11.

Figura 5.2.11 - Laringe exatamente no instante de fechamento glotal - duas vistas oblíquas.

Note que existem espaços sendo formados em ambas as comissuras anterior e “posterior” (apesar de fisiologicamente ser mais plausível tal formação somente na comissura anterior). Devemos lembrar que a distribuição das forças aerodinâmicas sobre as pregas vocais é mais concentrada na região central das pregas vocais verdadeiras conforme já demonstramos anteriormente. Assim, os tecidos na região das comissuras aparentemente somente colidem quando são “levados” pelas porções mais centrais dos tecidos das pregas

vocais. Isso cria uma diferença de fase horizontal nas pregas vocais e dependendo das propriedades mecânicas das pregas vocais, o fechamento da glote não é total, como ocorreu na Figura 5.2.10.

Curiosamente, Pelorson et al. (1994) comentam que esse incompleto fechamento das pregas vocais contribui para uma voz sintetizada perceptualmente mais realística. Esse foi um dos resultados que mostrou-nos a viabilidade do modelo numérico aqui apresentado para capturar as nuances da dinâmica de vibração das pregas vocais durante a fonação.

Pudemos perceber nesta seção que as propriedades mecânicas da laringe afetam diretamente a vibração das pregas vocais. Usando um intervalo de integração (Δt) relativamente grande, fomos capazes de rapidamente obter valores fisiologicamente corretos (quando comparados com os valores apresentados na literatura) para as constantes viscoelásticas de nosso modelo linear do músculo.

Conseguimos demonstrar que as principais relações entre essas constantes com a amplitude e frequência de vibração dos tecidos das pregas vocais (e, conseqüentemente, sinal glotal) foram reproduzidas por nosso modelo tridimensional. Além disso, alguns fenômenos físicos como a diferença de fase horizontal na vibração dos tecidos das pregas vocais foi capturado por nosso modelo, algo que é pouco comentado ou até mesmo reproduzido por outros modelos da literatura (apesar das discussões teóricas feitas por Titze e Strong (1975) a respeito de seu modelo multi-massas).

5.3 Análise da Dinâmica de Laringes Normais

Para capturar detalhadamente os movimentos da laringe e dar maior estabilidade ao algoritmo de contato, reduzimos o intervalo de integração Δt de 0,001 s para 0,00030 s. Isso permitiu que avaliássemos melhor a formação das ondas materiais sobre as pregas vocais verdadeiras e investigássemos algumas propriedades temporais do sinal glotal.

Adicionalmente definimos adequadamente o módulo de Young transversal (E), seguindo particularmente os trabalhos de Berry et al. (1994), Berry e Titze (1996) e Alipour-Haghighi et al. (2000). A constante de cisalhamento longitudinal (μ_m) do ligamento também foi redefinida para compatibilizar as especulações de Titze e Talkin (1979) - essas baseadas nas observações de Hirano - a respeito do “entrelaçamento” entre o corpo e o ligamento nas pregas vocais verdadeiras.

Uma diferença que será notada nas simulações que seguem em relação às duas últimas (LAR31 e LAR32) contidas na seção anterior, para a qual reduzimos o espaço glotal para permitir o contato entre as pregas vocais, é que naquela oportunidade nós permitimos que o algoritmo de adaptação de malha tentasse gerar malhas que reproduzissem aproximadamente os espaços formados nas regiões das duas comissuras.

Nas simulações apresentadas nesta seção, se algum ponto de uma seção da laringe colidissem com alguma superfície da mesma (não necessariamente na mesma seção), não aplicávamos o último passo de adaptação de malha, no qual os nós daquela seção eram reposicionados para tentar se evitar a geração de elementos finitos de volume negativo. Assim, permitimos que elementos negativos fossem criados. Logo após a geração da malha, todas as seções contendo elementos negativos foram eliminadas.

Isso fez com que o algoritmo assumisse que colisões entre as pregas vocais correspondessem a fechamentos completos da laringe. Seguimos essa abordagem pois observamos dois fenômenos na simulação: o primeiro, conforme a Figura 5.2.10 mostra, foi que a vazão durante o fechamento incompleto das pregas vocais era bastante pequeno em relação à vazão média na laringe (e conseqüentemente ao pico de vazão durante a máxima abertura glotal); o segundo fenômeno foi a instabilidade numérica que algumas malhas geradas por esse algoritmo produziram nas matrizes do MEF.

Essa instabilidade resultava do fato de que em algumas situações, a malha deformada (após a eliminação dos elementos finitos sobrepostos e negativos) possuía alguns pontos ligando duas regiões de pressão distintas, conforme mostra a Figura 5.3.1.

Figura 5.3.1 - Ponto geométrico “instável” durante colisão.

As condições de contorno aplicadas ao nó “problema” são as de Dirichlet (velocidade nula). Isso implica que a sua pressão torna-se a incógnita no MEF. Como as duas regiões que fazem fronteira nesses nós possuem pressões diferentes, o sistema matricial fica indeterminado. O ideal seria que o gerador de malha detectasse tal fenômeno e “separasse” as duas regiões através da criação de um nó “gêmeo” na mesma posição do nó “problema” e dessa forma, a singularidade matemática desapareceria pois ambos os nós não estariam acoplados. Infelizmente não fomos capazes de definir um algoritmo robusto para tal finalidade o que nos levou a tomar a medida drástica de eliminar todos os elementos finitos da seção que possuísse um elemento finito negativo.

Feita essa consideração, iniciamos a simulação da primeira laringe normal (LAR37) cuja descrição geométrica e viscoelástica é apresentada na Tabela 5.3.1.

Tabela 5.3.1 - Laringe normal com pressão subglotal de 8 kdyna/cm² (LAR37)

Músculo	E (dyna/cm ²)	ν	E' (dyna/cm ²)	μ_m' (dyna/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dyna/cm ²)		8k		Geometria		GEO4

Figura 5.3.2 - Sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 Kdina/cm².

Com base na simulação, obtivemos uma frequência fundamental aproximada de 164 Hz. Esse valor elevado foi condizente com a elevada constante de cisalhamento longitudinal, conforme demonstrado por Berry e Titze (1996). Também podemos comparar o sinal glotal na Figura 5.3.2 com o produzido por Alipour-Haghighi et al. (2000) cuja frequência fundamental obtida foi de 147 Hz. Isso mostra, juntamente com as análises anteriores, que essa característica mecânica da laringe também influencia significativamente a vibração das pregas vocais.

Podemos perceber também na Figura 5.3.2 que o tempo de fechamento da glote aumenta com o tempo até alcançar um valor final para toda a fonação. Na simulação realizada, esse tempo foi de 0,0022 s. Outra medida útil de avaliação da vibração das pregas vocais é o quociente de abertura (*open quotient* ou OC). Enquanto que Alipour-Haghighi et al. (2000) obtiveram um valor igual a 0,9 e, dessa forma, uma laringe com pouco tempo de fechamento glotal, nossa simulação produziu um quociente de abertura igual a 0,6347. Isso significa que nosso modelo, nas condições viscoelásticas e geométricas geradas, passou 63,47 % do tempo abduzido e 36,53 % aduzido. Certamente as forças inerciais produzidas pelos tecidos das pregas vocais em nossa simulação conseguiram sobrepujar em maior magnitude as forças aerodinâmicas do que a laringe simulada por Alipour-Haghighi et al. (2000). Note que esse valor foi calculado a partir dos nove ciclos finais do sinal glotal apresentado na Figura 5.3.2, quando as propriedades temporais do mesmo se estabilizaram.

Inicialmente notamos que o sinal glotal possui um transiente no qual as pregas vocais começam a ser excitadas pela pressão aerodinâmica. Seu período é maior porque as pregas vocais ainda não possuíam nenhuma energia elástica armazenada. Enquanto outros trabalhos (Pereira, 1987) elevaram do zero a pressão até o valor da pressão subglotal desejada em um intervalo de 20 ms, nós pudemos aplicar diretamente a

pressão subglotal. Mesmo assim podemos notar que o transiente durou aproximadamente 20 ms, tempo até que a primeira colisão das pregas vocais ocorresse.

Figura 5.3.3 - Derivada do sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 $kdina/cm^2$.

Figura 5.3.4 - Ampliação da derivada do sinal glotal para laringe normal - Pressão subglotal de 8 $kdina/cm^2$.

Comparando a derivada do sinal glotal (Figura 5.3.3 com ampliação mostrada na Figura 5.3.4) com o modelo LF (Ananthapadmanabha e Fant, 1982) apresentado na Figura 5.3.5, podemos notar que nosso modelo produziu alguns “saltos” ao longo da curva de derivada, que pode ser atribuído à concepção descontínua no tempo de solução das equações de Navier-Stokes e a não-uniformidade da geometria da laringe juntamente com a não-linearidade do escoamento.

Note que o modelo LF é teórico e, dessa forma, não contabiliza todas as peculiaridades geométricas das pregas vocais. Entretanto, o aspecto geral da curva na Figura 5.3.4 foi muito similar ao modelo LF, particularmente na fase de retorno, quando as pregas vocais começam a se fechar a partir do instante de maior abertura glotal. Durante a fase de abertura, podemos notar que nossa curva possui uma inclinação mais acentuada à esquerda do que no modelo teórico LF. Entretanto, se comparamos os sinais glotais produzidos pela laringe LAR37 com a de Alipour-Haghighi et al. (2000) (que infelizmente não determinou o sinal residual) - de características elásticas mais “relaxadas” - verificaremos que ambos são bastante similares pois possuem uma acentuada abertura glotal logo após a adução total da glote.

Figura 5.3.5 - Modelo LF para descrição da derivada do sinal.
(a) Representação da derivada sinal glotal. Exemplo de sinal glotal (b) e sua derivada (c).

A próxima análise que realizamos foi simular a mesma laringe com uma pressão baixa (5 kdina/cm^2). Nessa condição aerodinâmica, a laringe (LAR42), descrita na Tabela 5.3.2, não conseguiu fechar o espaço glotal pois não havia energia suficiente para vencer a rigidez elástica dos tecidos da cobertura das pregas vocais (elemento onde as ondas mecânicas se formam).

Tabela 5.3.2 - Laringe normal com pressão subglotal de 5 Kdina/cm² (LAR42)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		5k		Geometria		GEO4

Figura 5.3.6 - Comparação de sinais glotais para laringes excitadas por diferentes pressões subglotais.

Note pela Figura 5.3.6 que a amplitude do sinal glotal para 5 kdina/cm² foi insuficiente para provocar a colisão das pregas vocais apesar da frequência fundamental não ter sido modificada significativamente. Entretanto, a condição de oscilação auto-sustentada se perpetuou. Isso significa que as forças aerodinâmicas transmitiram energia suficiente para vencer a dissipação causada pela movimentação dos tecidos da laringe.

Podemos perceber que nessa condição de “baixa pressão” subglotal, alguns transientes se perpetuaram além dos 20 ms originalmente encontrados na laringe simulada com uma pressão de 8 kdina/cm². Isso pode estar relacionado à possível proximidade dessa pressão subglotal do valor limite necessário para provocar a vibração auto-sustentada das pregas vocais.

Quando levantamos as curvas de densidade de potência espectral para ambos os sinais glotais (Figura 5.3.7) percebemos uma das claras diferenças entre ambos. Enquanto a laringe LAR37 produziu um conjunto de 5 harmônicos visíveis, somente notamos três componentes harmônicos na laringe LAR42. Além disso, a queda no espectro dessa última foi mais acentuada.

Figura 5.3.7 - Densidade de potência espectral dos sinais glotais para pressões de 5 e 8 k dina/cm^2 .

Podemos definir então que a presença dos componentes harmônicos no sinal glotal é devido ao período de fechamento glotal, quando a vazão torna-se nula. Essa descontinuidade exige então um maior número de componentes harmônicos com maior amplitude para reproduzir espectralmente esse evento físico.

Notamos também que o sinal glotal da laringe LAR42 possui uma aparência “senoidal”. Os desvios dessa tendência provavelmente sejam atribuídos à não-uniformidade da laringe e da distribuição das pressões ao longo das pregas vocais.

Tabela 5.3.3 - Laringe normal com pressão subglotal de 7 k dina/cm^2 (LAR41)

Músculo	E (dina/cm^2)	ν	E' (dina/cm^2)	μ_m' (dina/cm^2)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150

Pressão subglotal (dina/cm^2)	7k	Geometria	GEO4
--	----	-----------	------

Tabela 5.3.4 - Laringe normal com pressão subglotal de 9 k dina/cm^2 (LAR40)

Músculo	E (dina/cm^2)	ν	E' (dina/cm^2)	μ_m' (dina/cm^2)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150

Pressão subglotal (dina/cm^2)	9k	Geometria	GEO4
--	----	-----------	------

Figura 5.3.8 - Comparação de sinais glotais para laringes excitadas por diferentes pressões subglotais.

Quando variamos a pressão subglotal (produzindo as laringes LAR40, LAR41) e comparamos com a laringe LAR37, notamos (Figura 5.3.8) que tanto a amplitude quanto a frequência fundamental do sinal glotal variam. Para uma pressão de 7 kdyna/cm² (LAR41), obtivemos uma frequência fundamental igual a 167,4 Hz enquanto para 9 kdyna/cm² (LAR40), 161,3 Hz. Esse resultado corrobora a expectativa de que uma variação da pressão subglotal causa uma variação de frequência fundamental. Note que a variação dessa frequência com a pressão foi linear. (Ishizaka e Flanagan (1972) em seu modelo duas-massas, indicaram que a variação seria de 2 a 3 Hz/cmH₂O ou aproximadamente 2,04 a 3,06 Hz/(kdyna/cm²)). Notamos que de 7 para 8 kdyna/cm², a variação foi de 2,1 Hz/(kdyna/cm²) enquanto que de 8 para 9 kdyna/cm², a variação foi de 3,4 Hz/(Kdyna/cm²). Infelizmente não encontramos um trabalho equivalente para comparar nossos resultados e adequadamente formular uma relação entre a frequência fundamental e a pressão subglotal.

Quando analisamos o quociente de abertura das três laringes simuladas, confirmamos que a maior pressão subglotal contribui para uma maior excursão dos movimentos das pregas vocais. Isso significa que nessa condição aerodinâmica, as pregas vocais adquirem maior inércia e permanecem um maior tempo colididas. Para a laringe LAR42 (baixa pressão) obtivemos 0,6747, enquanto para a laringe LAR41 (alta pressão), 0,6249. Novamente notamos que a relação é não linear, provocado pela distribuição não-linear das pressões ao longo das pregas vocais e diferentes geometrias que a superfície da laringe gera para o escoamento.

Tabela 5.3.5 - Laringe mais rígida com pressão subglotal de 8 kdina/cm² (LAR38)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	30k	0,73	200k	200k	0,73	10
Ligamento	50k	0,66	200k	400k	0,66	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO4

Figura 5.3.9 - Comparação entre sinais glotais de laringes “normal” e “rígida”.

Quando aumentamos a rigidez (módulo de Young transversal) do ligamento e da cobertura, notamos como a frequência fundamental e o quociente de abertura modificaram-se significativamente. A laringe LAR38 produziu uma frequência fundamental de 188,8 Hz para um aumento de 10 kdina/cm² no módulo de Young transversal da cobertura e do ligamento, ou seja, uma elevação aproximada de 2,5 Hz/(kdina/cm²) nessa propriedade mecânica.

Percebemos que a amplitude foi naturalmente reduzida por causa da maior resistência das pregas vocais em se movimentarem. Isso provocou um aumento do quociente de abertura, cujo valor obtido foi igual a 0,8582. Notamos na Figura 5.3.9 que as pregas vocais se encontram por um período curto de tempo, similar ao que ocorre quando reduzimos a pressão subglotal.

Novamente avaliamos o efeito de aumento de pressão subglotal, agora para a condição mais rígida da laringe. A Tabela 5.3.6 descreve a simulação. Confirmamos que a frequência fundamental aumenta com a pressão subglotal (para LAR39 obtivemos uma frequência de 190,3 Hz). Quando comparamos a elevação da pressão subglotal de 8 para 9 kdina/cm² da laringe “normal” com a laringe “rígida” percebemos que a relação foi dependente das propriedades elásticas da laringe. Isso significa que cada indivíduo (ou laringe) produz vozes (ou sinais glotais) com frequência fundamental dependente das características viscoelásticas das laringes.

Isso implica que dois indivíduos produzem vozes com frequência igual se demandarem diferentes pressões subglotais para “equipararem” as diferenças de suas laringes (geométricas e viscoelásticas).

Tabela 5.3.6 - Laringe mais rígida com pressão subglotal de 9 Kdina/cm² (LAR39)

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	30k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	50k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		9k		Geometria		GEO4

Figura 5.3.10 - Comparação de sinais glotais para laringes “rígidas” excitadas por diferentes pressões subglotais.

Novamente, quando calculamos o quociente de abertura (obtendo um valor igual a 0,8361), confirmamos que o aumento de pressão produz um tempo maior de colisão entre as pregas vocais devido à maior inércia dos tecidos musculares.

Podemos resumir agora os efeitos das propriedades viscoelásticas dos músculos na vibração das pregas vocais. O módulo de Young transversal (E) é responsável pela frequência fundamental e pela amplitude do sinal glotal. Juntamente com a constante de cisalhamento longitudinal (μ_m'), regulam a propagação das ondas mecânicas sobre a superfície das pregas vocais. Isso confirma as evidências teóricas de Berry e Titze (1996) que variaram esses valores quando determinaram matematicamente os modos e frequências de vibração de um modelo da laringe. Aumentando sua magnitude notamos um aumento da frequência fundamental e uma redução da amplitude de vibração das pregas vocais.

Já o módulo de Young longitudinal possui uma relação inversa com a oscilação auto-sustentada. Quando aumentamos seu valor, as pregas vocais ficam longitudinalmente mais resistentes a tração. Isso faz

com que o único meio do músculo “absorver” a força aerodinâmica seja deformando-se transversalmente. Notamos isso quando simulamos uma laringe “estreita”, cuja falta de massa reduzia a força inercial dos tecidos musculares. Manipulando essa propriedade mecânica, fomos capazes de compensar essa deficiência e a prega vocal foi capaz de oscilar sustentadamente.

A viscosidade dos tecidos reduz a mobilidade das pregas vocais pois aumenta a dissipação de energia dentro do músculo. Diferente dos trabalhos já citados, mantivemos a suposição de que o músculo vocal (corpo) possui propriedades viscosas similares aos dos tecidos de outras partes do corpo humano, conforme referenciado no trabalho de Titze (1976) apesar do mesmo julgar mais conveniente, via formulação matemática simplificada, que o ideal seria empregar 50 Poise. Posteriormente viscosidades muito mais baixas foram usadas (Berry et al., 1994; Berry e Titze, 1996; Alipour-Haghighi et al., 2000) sem uma boa argumentação, aparentando apenas um “adequado” ajuste para se atingir resultados previstos. Nossas simulações mostraram que o corpo (músculo vocal+camada profunda da *lamina propria*) comporta uma viscosidade compatível com a dos tecidos de outros músculos do corpo humano. A argumentação de que a cobertura tem uma composição similar aos líquidos é plausível pois este tecido é “mole” conforme as observações de Hirano (1975) e Gray et al. (1993) e pelos resultados obtidos, a estrutura que dá sustentação às ondas mecânicas.

Notamos também que as observações de Titze e Talkin (1979) sobre a importância da incompressibilidade dos tecidos na vibração das pregas vocais foram comprovados quando tentamos empregar $v'=0$ e compensar tal atribuição variando v . Notamos que as pregas vocais tornaram-se instáveis ou com oscilações de baixa amplitude (algumas vezes resultando na perda da característica de oscilação auto-sustentada mesmo quando as demais constantes elásticas estavam adequadamente definidas para tal finalidade). Isso ocorreu porque desfizemos o acoplamento entre os planos transversais ao longo da linha longitudinal das pregas vocais, reduzindo o grau de liberdade dos tecidos de propagar as deformações dentro da laringe.

Finalmente, fomos capazes de demonstrar que a pressão aerodinâmica também afeta o sinal glotal, modificando suas propriedades temporais. Nossas análises demonstraram que cada laringe (geometria e propriedades mecânicas) necessita de uma determinada distribuição de pressões para oscilar adequadamente. Além disso, para atingir sinais glotais com as mesmas propriedades temporais para duas laringes distintas, é necessário aplicar pressões subglotais diferentes para compensar tais diferenças nos tecidos musculares.

5.4 Análise dos Movimentos das Pregas Vocais

Para compreender melhor os movimentos das pregas vocais, reproduzimos agora alguns ciclos de simulação nos quais poderemos perceber algumas características importantes. Os sinais apresentados apenas fornecem uma idéia do conjunto dos movimentos da laringe. O nosso objetivo é apresentar mais claramente o comportamento dos tecidos durante a abertura, fechamento e colisão das pregas vocais.

A primeira laringe a ser apresentada é a LAR37 (descrita na Tabela 5.3.1) no intervalo de tempo entre 0,04260 s e 0,04920 s conforme mostra a Figura 5.4.1.

Figura 5.4.1 - Sinal glotal da laringe LAR37 para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Como podemos ver, escolhemos um ciclo completo de vibração das pregas vocais, quando ambas as pregas estavam sendo aduzidas, colidindo-se. Em seguida a pressão subglotal e as forças de restauração muscular afastaram as duas pregas vocais, até atingir a área máxima da glote, no ciclo, após o que as pregas reiniciaram o movimento de fechamento.

Figura 5.4.2 - Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04260 s e 0,04290 s, respectivamente.

Figura 5.4.3 - Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04320 s, 0,04350 s, 0,04380 s, 0,04410 s, 0,04440 s e 0,04470 s, respectivamente.

Figura 5.4.4 - Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04500 s, 0,04530 s, 0,04560 s, 0,04590 s, 0,04620 s e 0,04650 s, respectivamente.

Figura 5.4.5 - Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04680 s, 0,04710 s, 0,04740 s, 0,04770 s, 0,04800 s e 0,04830 s, respectivamente.

Figura 5.4.6 - Passos de simulação da laringe LAR37 nos instantes de tempo 0,04860 s, 0,04890 s e 0,04920 s, respectivamente.

Uma visão geral da seqüência mostra que a parte mais “oscilante” das pregas vocais é a extremidade de saída das pregas vocais. Em todas as nossas simulações, a vibração da laringe teve sempre início nos tecidos localizados naquela região.

Podemos perceber também que essa porção das pregas vocais possuiu uma magnitude de movimentos muito maior do que as demais porções da prega vocal pois a pressão subglotal a empurrou (Figuras 5.4.4 e 5.4.5) logo após a colisão.

Durante o fechamento da glote, os movimentos foram mais suaves do que os do abertura. Isso ocorreu por que a pressão aerodinâmica agiu no sentido contrário ao das forças inerciais do tecido muscular. Durante a fase de abertura (logo após a colisão) ambas cooperaram pois eram aproximadamente de mesma direção.

Podemos perceber a diferença de fase quando as pregas vocais realizavam o movimento de abertura. Enquanto as porções superiores das pregas vocais se afastavam rapidamente (atingindo na Figura 5.4.5 a sua máxima extensão) as porções inferiores dessas se aproximavam por ação da distribuição de pressões. Notamos que essa aproximação foi discreta, provocada pela variação de massa dentro dos tecidos da laringe (particularmente da cobertura). Tal diferença de fase ocorreu por dois motivos: o primeiro, já citado foi a

variação da distribuição de pressões, pois a geometria da laringe tornou-se divergente. O segundo motivo foi a quase-incompressibilidade dos tecidos na laringe. Isso fez com que enquanto algumas partes do tecido eram “esmagadas” por forças inerciais, outras eram “esticadas” pela “transferência de massa” que caracterizou a propagação das ondas mecânicas dentro da laringe.

Note que os tecidos da cobertura foram os que mais se movimentaram durante o ciclo fonatório. Isso se deveu a suas características elásticas “moles” em relação aos demais. O ligamento o seguiu em ordem de magnitude de movimentos. O fato da onda mecânica ter ocorrido preponderantemente na cobertura foi devido a resistência ao cisalhamento longitudinal exigir uma força maior sendo aplicada nesse tecido para movê-lo em maior magnitude.

Também podemos perceber a diferença de fase horizontal nas pregas vocais. A parte do tecido da cobertura localizado na região da comissura anterior moveu-se em menor amplitude e com fase diferente daquela parte mais central do tecido. Isso é justificado pela distribuição heterogênea da pressão na superfície das pregas vocais.

Figura 5.4.7 - Sinal glotal da laringe LAR40 para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Quando aumentamos a pressão suglotal, notamos que a extensão de movimentos das pregas vocais foi maior, além do quociente de abertura ser menor por causa do tempo que essas estruturas permanecem juntas durante a colisão por causa das forças inerciais dos tecidos musculares.

Figura 5.4.8 - Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,02820 s, 0,02850 s, 0,02880 s, 0,02910 s, 0,02940 s e 0,02970 s, respectivamente.

Figura 5.4.9 - Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03000 s, 0,03030 s, 0,03060 s, 0,03090 s, 0,03120 s e 0,03150 s, respectivamente.

Figura 5.4.10 - Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03180 s, 0,03210 s, 0,03240 s, 0,03270 s, 0,03300 s e 0,03330 s, respectivamente.

Figura 5.4.11 - Passos de simulação da laringe LAR40 nos instantes de tempo 0,03360 s, 0,03390 s, 0,03420 s, 0,03450 s, 0,03480 s e 0,03510 s, respectivamente.

Figura 5.4.12 - Passos de simulação da laringe LAR40 no instante de tempo 0,03540 s.

Usando a Figura 5.4.7 como referência para a simulação da laringe LAR40 (descrita na Tabela 5.3.4) que foi excitada por uma pressão subglotal de 9 kdina/cm^2 podemos notar que a cobertura movimentou-se mais abruptamente do que quando excitada por 8 kdina/cm^2 . A transferência de massa dentro daquele tecido foi naturalmente maior, como podemos ver durante a fase de maior abertura glotal (Figura 5.4.9).

Durante a fase de fechamento glotal, ocorreu o aparecimento de uma ondulação na superfície das pregas vocais conforme mostra a Figura 5.4.10. Ela se formou pouco antes do fechamento glotal e provavelmente foi atribuído a uma compressão dos tecidos da cobertura. Enquanto a porção superior da glote movimentava-se para baixo por causa das forças inerciais, a porção superior era “empurrada” para cima por ação aerodinâmica. Isso fez com que uma maior quantidade de massa se acumulasse na parte central das pregas vocais (incompressibilidade do tecido muscular), provocando o aparecimento rápido de uma ondulação na superfície das pregas vocais. Titze e Strong (1975) mencionou a possibilidade de aparecimento de alguns modos de ordem superior em determinadas condições quando altas frequências fundamentais são atingidas. Assim, ficaria justificado o aparecimento dessa oscilação em nossa simulação pois como demonstramos, essa laringe produziu um sinal glotal com frequência fundamental igual a $161,3 \text{ Hz}$.

Outra possibilidade é o fato da constante de cisalhamento longitudinal ser muito elevada em relação ao módulo de Young transversal. Isso provocaria tal oscilação pois transversalmente o tecido era muito mole e a compressão dos tecidos na região central estimularia partes do tecido moverem-se transversalmente ao invés de longitudinalmente. Novamente isso confirmaria as observações de Titze (1975) por causa das propriedades elásticas do tecido muscular simulado.

Note que o “esmagamento” da cobertura, particularmente na região central da prega vocal foi maior do que na laringe LAR37 enquanto no intervalo de colisão, esse tecido foi concentrado. Novamente, as forças aerodinâmicas e inerciais (particularmente da região superior das pregas vocais) contribuíram para essa expansão e compressão do tecido da cobertura.

Se olharmos ambas as simulações, notamos que durante a fase final da colisão, a pressão subglotal já conseguiu se equiparar às forças inerciais do músculo e começou a afastar as duas pregas vocais. Note em

ambas as simulações que suas paredes inferiores foram as primeiras a serem empurradas. À medida que novas superfícies da porção colidida são expostas ao ar do pulmão, estas também foram empurradas de tal forma a alargar o espaço glotal. As últimas porções das pregas vocais a se afastarem mutuamente foram as superiores, onde a ação das forças inerciais foi mais intensa. Assim, a diferença de fase vertical é um mecanismo que envolve a dissipação da energia inercial pelas forças aerodinâmicas e pelas forças de colisão.

Figura 5.4.13 - Sinal glotal da laringe LAR38 para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Já os movimentos das laringes mais rígidas (representada pela laringe LAR38) foram mais suaves. A Figura 5.4.13 apresenta no sinal glotal os instantes de tempo que serão apresentados aqui. Note novamente o quociente de abertura foi elevado pois as pregas vocais mal se colidiam devido à resistência oferecida pelos tecidos musculares.

Analisando as Figuras 5.4.14, 5.4.15 e 5.4.16 notamos que durante a aproximação das pregas vocais e efetiva colisão, a superfície glotal assumiu um formato em arco que diferiu das ondulações produzidas pela laringe LAR40 (mais rígida e com maior pressão subglotal). Além disso, a porção central da glote parece levemente pressionada por ação da incompressibilidade pois a porção inferior das pregas vocais foi “empurrada” para cima enquanto a porção superior foi trazida para baixo por causa da forças inerciais dos tecidos musculares.

Notamos também que como a pressão foi “pequena” em relação às propriedades elásticas das pregas vocais, o “esmagamento” da cobertura foi menor apesar da diferença de fase vertical ser levemente visível (notadamente na Figura 5.4.14 em que as porções inferiores das pregas vocais aproximaram-se uma das outras, enquanto as porções superiores das mesmas se afastaram).

Figura 5.4.14 - Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s, 0,07350 s, 0,07380 s e 0,07410 s, respectivamente.

Figura 5.4.15 - Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07440 s, 0,07470 s, 0,07500 s, 0,07530 s, 0,07560 s e 0,07590 s, respectivamente.

Figura 5.4.16 - Passos de simulação da laringe LAR38 nos instantes de tempo 0,07620 s, 0,07650 s, 0,07680 s, 0,07710 s e 0,07740 s, respectivamente.

Resolvemos também apresentar essa mesma simulação sob outra vista, de modo a enfatizar a incompressibilidade da laringe durante o mesmo ciclo glotal. As Figura 5.4.17 e 5.4.18 mostram a mesma prega vocal sem o corte transversal.

Figura 5.4.17 - Passos de simulação da laringe LAR38 (prega vocal inteira) nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s, 0,07350 s, 0,07380 s, 0,07410 s, 0,07440 s, 0,07470 s, 0,07500 s e 0,07530 s, respectivamente.

Figura 5.4.18 - Passos de simulação da laringe LAR38 (prega vocal inteira) nos instantes de tempo 0,07560 s, 0,07590 s, 0,07620 s, 0,07650 s, 0,07680 s, 0,07710 s e 0,07740 s, respectivamente.

Podemos notar que as pregas vocais alternam entre esticamento e compressão durante a fase de abertura e fechamento glotal, respectivamente. Isso confirma a característica de incompressibilidade da laringe que foi incorporado ao modelo matemático da laringe através do ajuste das constantes de Poisson (ν e ν'). Segundo Titze (1976) essa característica garante que a condição de vibração auto-sustentada das pregas vocais seja alcançada mesmo quando a viscosidade dos tecidos é alta. Tal autor inclusive finalizou o trabalho

mencionando que modelos que desprezam a incompressibilidade em sua definição matemática descreveram de modo impreciso a diferença de fase vertical nos movimentos dos tecidos musculares.

Se olharmos novamente alguns modelos duas-massas, aparentemente o modelo de Koizumi et al. (1987) mencionaram que quando adaptaram essa característica das pregas vocais em seu modelo duas-massas, obtiveram uma voz sintetizada mais realística.

Certamente que o modelo mais adequado para contabilizar essa propriedade no MEF seria adotar um procedimento similar ao adotado na solução das equações de Navier-Stokes, ou seja, adicionar as condições de incompressibilidade através de multiplicadores de Lagrange. Mesmo assim, o ajuste cuidadoso das constantes de Poisson permitiu que a laringe modelada produzisse resultados fisiologicamente corretos.

Note adicionalmente que os valores de frequência fundamental (da ordem de 150 Hz) para um modelo quase-incompressível dos tecidos da laringe foram compatíveis com as estimativas teóricas de Berry e Titze (1996). Esses mostraram que a incompressibilidade juntamente com o módulo de Young transversal e a constante de cisalhamento longitudinal permitiram a obtenção de tais frequências de vibração.

Figura 5.4.19 - Pontos de avaliação dos deslocamentos.

Adicionalmente avaliamos os movimentos de alguns pontos específicos das pregas vocais para verificar o seu comportamento durante a fonação. Escolhemos três laringes distintas que se caracterizam por uma pequena colisão (LAR38), grande colisão (LAR40) e nenhuma colisão (LAR42).

Escolhemos os pontos mais próximos da saída da glote pois notamos que esses são os nós cujo deslocamento foi o maior dentro da laringe durante a fonação, independente do grau de colisão.

Figura 5.4.20 - Deslocamento do ponto 365 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.21 - Deslocamento do ponto 367 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.22 - Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.23 - Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.24 - Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.25 - Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR38.

Figura 5.4.26 - Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR40.

Figura 5.4.27 - Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR40.

Figura 5.4.28 - Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR40.

Figura 5.4.29 - Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR40.

Figura 5.4.30 - Deslocamento do ponto 405 para a laringe simulada LAR42.

Figura 5.4.31 - Deslocamento do ponto 407 para a laringe simulada LAR42.

Figura 5.4.32 - Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe simulada LAR42.

Figura 5.4.33 - Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe simulada LAR42.

Avaliando os gráficos notamos que as amplitudes de movimento dos nós apresentados na direção X (ao longo das pregas vocais, ou longitudinal) são bastante pequenas se comparadas às amplitudes de movimento das outras direções. Isso justifica o fato de Alipour-Haghighi et al. (2000) terem suprimido esse

grau de liberdade de seu modelo. Curiosamente, entretanto, podemos notar que o movimento nessa direção foi cíclico como mostram as Figuras 5.4.20 e 5.4.21. Tal direção (X) possui também um maior número de componentes de alta frequência do que as demais direções. Isso pode ser percebido quando olhamos atentamente as oscilações dentro dos movimentos na direção X ao longo do tempo e os comparamos com os movimentos nas direções Y e Z. Isso pode estar relacionado com o intervalo de integração. Certamente que uma redução mais significativa de Δt implicaria na eliminação/filtragem de um número significativo desses componentes.

Quanto mais próximos da saída da glote, maior a amplitude dos movimentos das pregas vocais. Isso foi confirmado em todas as análises dos movimentos das pregas vocais, estando relacionado com a incompressibilidade do tecido e da distribuição não-uniforme das pressões sobre a superfície das pregas vocais. Adicionalmente podemos perceber que devido à rigidez das pregas vocais, essas colidem-se somente por poucos instante de tempo e mais especificamente nos nós 405 e 406 (LAR38). Assim, quando olhamos as Figuras 5.4.24 e 5.4.25 podemos perceber alguns eventos não-lineares na extremidade inferior esquerda das curvas. Por causa da colisão e da inércia do tecido, a superfície na saída glotal tende a descer verticalmente na laringe simulada.

Quando simulamos a laringe LAR40 (mais “mole” e excitada com maior pressão subglotal) percebemos que os movimentos da malha tendem a ser mais “abertos” por causa da sua maior amplitude. Isso faz com que o menor diâmetro das “elipses” formada nas Figuras 5.4.28 e 5.4.29 seja maior do que o menor diâmetro nas Figuras 5.4.24 e 5.4.25.

Analisando essas Figuras, podemos perceber que a tendência dos nós 405 e 407 foi de formarem um “8” durante os ciclos de fonação. Aparentemente a colisão afetou a tendência elíptica da curva, significando que esse fenômeno é não-linear.

Notamos também alguns sobressaltos dos nós durante a colisão. Consultando alguns pesquisadores nesta área, verificamos que essa é uma tendência natural dos algoritmos. A colisão é matematicamente um evento *a-posteriori* pois somente podemos aplicar as forças de colisão quando os tecidos colidiram e então temos que retornar no instante de simulação anterior para iterativamente calcular a ação e reação envolvida no fenômeno. Acreditamos que aumentando a densidade de pontos na região da colisão e reduzindo o intervalo de tempo de integração, obteremos mais suavidade nas curvas durante o contato entre as duas pregas vocais.

As curvas do movimento na direção Y produziram maior nível de oscilação durante a fonação. Isso é atribuído ao fato de termos posicionado a laringe de tal forma que o contato entre as pregas seja preponderante nessa direção (apesar dos algoritmos serem independentes de uma direção privilegiada), o que facilitou as análises dos movimentos das pregas vocais.

Entretanto, quando a colisão não ocorreu (por características específicas de simulação como na laringe LAR42), percebemos que os movimentos nas direções Y e Z foram muito mais suaves. Note inclusive a tendência senoidal das Figuras 5.4.30 e 5.2.31. Mesmo assim o movimento na direção X continuou apresentando componentes de alta frequência.

Por produzir as menores amplitudes de movimentos em relação às outras laringes apresentadas, a laringe LAR42 produziu movimentos “elípticos” quando combinamos os movimentos na direção Y e Z para construir as Figuras 5.4.32 e 5.4.33, sem a formação de “8”s durante a fonação. Isso confirmou que a colisão altera de maneira não-linear os movimentos das pregas vocais (mesmo considerando que adotamos modelos lineares para descrever os tecidos das pregas vocais).

Figura 5.4.34 - Movimento de um dos nós superficiais da laringe de Alipour-Haghighi et al. (2000).

Quando comparamos as curvas da laringe LAR38 com a de Alipour-Haghighi et al. (2000), pois ambas colidem levemente e produzem assim grandes valores do quociente de abertura, notamos que elas apresentam um perfil qualitativo muito semelhante, conforme podemos notar através da Figura 5.4.34, na qual reproduzimos as curvas produzidas pelos autores. É importante lembrar que a laringe simulada por tais autores possui algumas diferenças na formulação matemática dos tecidos (uma das direções de movimento da laringe - a longitudinal - foi eliminada, via manipulação algébrica, simplificando assim a representação da colisão) e sua laringe era simétrica em relação ao plano de centro glotal (somente uma das pregas vocais foi simulada). Notamos que os movimentos na direção X de suas pregas vocais foi tomado relativamente ao plano de centro glotal.

5.5 Introspecções sobre doenças da laringe

Com base nas simulações anteriores, podemos perceber que a constituição viscoelástica e a geometria da laringe afetam a fonação significativamente. Adicionalmente, notamos que o modelo empregado para representar a laringe foi capaz de capturar os principais fenômenos físicos durante a fonação.

É de se esperar então que uma manipulação judiciosa dos parâmetros “laríngicos” permitam investigar como as pregas vocais se comportam em condições patológicas. Para isso, tentamos simular um conjunto de três doenças cuja geometria difere significativamente do caso normal e fizemos algumas especulações sobre

outras condições patológicas com base nos resultados apresentados nas seções anteriores. Muitos dos valores viscoelásticos foram determinados a partir da condição de voz normal e adaptados de forma a representar as doenças. Assim, é de se esperar que eles possam não ser fisiologicamente compatíveis com as condições reais pois não encontramos na literatura tais constantes viscoelásticas (isso é muito claro para os casos de câncer). Entretanto, casos como o da paralisia unilateral provêm de condições geométricas irregulares (por inabilidade do músculos adutores trazerem uma das pregas vocais para a posição de fonação) e podem ser considerados fisiologicamente corretos em termos das constantes elásticas.

Com isso, ao invés de representar com elevada precisão a laringe “patológica”, queremos demonstrar a funcionalidade do modelo no estudo aprimorado das condições que levam a laringe a produzir oscilação auto-sustentada. Assim, quando estudos mecânicos forem realizados em tais laringes, seremos capazes de representar matematicamente todos os movimentos das pregas vocais durante a fonação.

5.5.1 Câncer

A primeira doença representada foi o câncer. Geometricamente representamos um caso extremo (carcinoma invasivo avançado com paralisia das pregas vocais T3 e T4) em que as pregas vocais não conseguem ser aduzidas até a posição de fonação. Adicionalmente, as células da laringe sofrem alterações em suas características mecânicas com o ressecamento dos tecidos e conseqüente enrijecimento dos tecidos.

Tabela 5.5.1 - Descrição geométrica da laringe com câncer (CNC28)

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2,0	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1,0	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,8	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,2 0,7 0,2
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,2 0,7 0,2
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,2 0,7 0,2
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,2 0,7 0,2
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,2 0,7 0,2
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,2 0,7 0,2
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,1	0,7 0,515 0,7 0,515
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6
S18	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7

Podemos perceber pela Tabela 5.5.1 (descrição geométrica da laringe com câncer) que empregamos um diâmetro de 0,4 cm na porção mais central da glote. Assim, a solução numérica do escoamento para uma diferença de pressão de 8 kdyna/cm² entre as duas faces do tubo da laringe exigiu o emprego do modelo de turbulência para suportar a alta velocidade do escoamento. Note que essa é a primeira laringe simulada onde se emprega esse termo de difusão (modelo de Smagorinsky-Lilly conforme discutido anteriormente). Verificamos que sem incluir essa compensação numérica, o sistema de equações não-lineares não convergiu adequadamente e em algumas situações divergiu.

Figura 5.5.1 - Distribuição de pressões na laringe com câncer.

Primeiramente discutiremos o comportamento do escoamento ao longo da laringe. A Figura 5.5.1 mostra a distribuição das pressões ao longo da laringe. Tomando por base o escoamento em laringe “normal” com perfil paralelo (Figura 5.1.8), podemos perceber que a pressão negativa que se formou na saída das pregas vocais foi mais elevada quando a glote estava mais aberta. Adicionalmente, podemos perceber também que a queda de pressão foi mais suave ao longo da glote do que no caso “normal”.

A região de pressão negativa também se estendeu além da superfície glotal. Diferente do que observamos em laringes normais em que a zona de pressão negativa praticamente ficou restrita à prega vocal e uma pequena porção do ventrículo laríngeo, aqui a pressão negativa atingiu inclusive a superfície das falsas pregas vocais. Isso pode ser melhor percebido através da Figura 5.5.2 na qual contabilizamos a pressão média ao longo das seções da laringe com câncer.

Figura 5.5.2 - Distribuição de pressões médias ao longo da laringe com câncer.

Quando comparamos a Figura 5.5.2 com as Figuras 5.1.41 e 5.1.42 podemos notar que quanto mais aberta a glote, mais suave é a distribuição de pressões. Aparentemente esse fenômeno foi importante para que as pregas vocais atinjam a vibração auto-sustentada como veremos a seguir.

Figura 5.5.3 - Vetores velocidade para um instante de tempo típico da laringe com câncer - corte transversal.

Quando examinamos a distribuição dos vetores velocidade ao longo da glote podemos perceber que um largo “jato” de ar foi formado e manteve o mesmo “perfil” sobre o ventrículo e falsas pregas vocais.

Qualitativamente, o resultado mostrado na Figura 5.5.3 foi semelhante àqueles obtido para a laringe “normal” com perfil paralelo (Figuras 5.1.22 e 5.1.36). Uma das diferenças é o tamanho da zona de recirculação que foi maior para uma laringe de glote estreita em comparação a laringe com câncer.

Tabela 5.5.2 - Laringe com câncer

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	40k	0,68	200k	200k	0,68	10
Ligamento	60k	0,63	200k	400k	0,63	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		CNC28

Para simular a laringe com câncer, empregamos as constantes viscoelásticas descritas na Tabela 5.5.2 cujos valores diferem da laringe “normal” apenas na maior rigidez transversal, ditada pelo módulo de Young transversal da cobertura e do ligamento. Usando tais parâmetros observamos que a laringe apresentou movimento ondulatório pouco significativo. Apenas notamos que as pregas vocais foram pressionadas para cima por ação da pressão subglotal, conforme mostra a Figura 5.5.4.

Figura 5.5.4 - Instante inicial e final da simulação - pequeno deslocamento para cima das pregas vocais.

Tentamos então verificar se com condições elásticas mais relaxadas as pregas vocais para uma glote dessa magnitude poderia vibrar (optamos por empregar as mesmas propriedades viscoelásticas da laringe “normal” - Tabela 5.3.1). Assim, simulamos uma laringe com câncer cujas propriedades viscoelásticas estão definidas na Tabela 5.5.3.

Tabela 5.5.3 - Laringe com câncer “menos rígido”

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m' (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		CNC28

Primeiramente podemos analisar os sinais glotais na Figura 5.5.5.

Figura 5.5.5 - Comparação entre os sinais glotais de duas laringes com câncer.

Devemos inicialmente considerar a escala do sinal glotal para o câncer em relação às demais laringes simuladas até agora. Como afirmamos, a vazão foi extremamente elevada e, dessa forma, confirmou a necessidade do uso de um modelo de turbulência pois o escoamento possui certamente $Re > 6000$.

Dessa forma, as oscilações que obtivemos para a vazão devem ser consideradas cuidadosamente pois podem ser parte dos microredemoinhos que se propagaram após a constrição glotal. Além disso, observamos que mesmo os pequenos movimentos da laringe com câncer “mais rígido” produziram oscilações consideráveis se comparamos os resultados da Figura 5.5.5 com as simulações de laringes normais.

Adicionalmente podemos perceber que o sinal glotal apresentou tanto alterações de *jitter* quanto de *shimmer*, que são variações nas frequências e amplitudes fundamentais, respectivamente. Isso foi observado em ambas as condições cancerígenas. Dessa forma, confirmamos as considerações de que laringes com câncer são fontes de grandes perturbações na voz, mesmo se levamos em conta a supressão de grande parte dos redemoinhos a partir do uso do modelo Smagorinsky-Lilly.

Para analisar em detalhes alguns dos movimentos feitos pela superfície das pregas vocais nas laringes com câncer, apresentamos alguns instantes de tempo da simulação realizada. A Figura 5.5.6 mostra a vazão nesses instantes.

Figura 5.5.6 - Sinal glotal da laringe com câncer para descrição dos movimentos das pregas vocais.

As Figura 5.5.7, 5.5.8 e 5.5.9 mostram a laringe no intervalo de tempo 0,05610 s até 0,05 s. Podemos perceber alguns movimentos de compressão e tração que as pregas vocais sofrem. De maneira similar ao que ocorreu na laringe sob condições normais de fonação, a porção inferior foi empurrada para cima por ação aerodinâmica, enquanto que a porção superior foi puxada para baixo por ação inercial. Adicionalmente, a porção superior também foi excitada pelas pressões negativas que são maiores nesse caso patológico do que na laringe normal. Como vemos particularmente na Figura 5.5.9, a porção central das pregas vocais foi comprimida, enquanto as porções extremas foram tracionadas na direção do centro da glote. Isso criou uma pequena “bacia” que certamente aumentou as dimensões da *vena contracta* e, assim, reduziu a vazão

Figura 5.5.7 - Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05610 s e 0,05640 s, respectivamente.

Figura 5.5.8 - Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05670 s, 0,05700 s, 0,05730 s, 0,05760 s, 0,05790 s e 0,05820 s, respectivamente.

Também podemos notar nas Figura 5.5.7 e 5.5.8 a presença de algumas pequenas ondulações na superfície das pregas vocais, causadas pela compressão da porção central das pregas vocais. Acreditamos que as diferenças elásticas entre as camadas de tecido da cobertura e ligamento também influenciaram na formação dessas ondulações.

Figura 5.5.9 - Passos de simulação da laringe com câncer nos instantes de tempo 0,05850 s, 0,05880 s, 0,05910 s, 0,05940 s, 0,05970 s e 0,06000 s, respectivamente.

Como vimos, as amplitudes de movimento da superfície das pregas vocais reduziu-se sensivelmente quando aumentamos consideravelmente o diâmetro glotal. Laringes com paralisia bilateral e câncer provocam tais condições. Notamos também que o aumento da rigidez das pregas vocais, através da alteração unicamente do módulo de Young transversal, afetou significativamente o movimento das pregas vocais, o que era esperado pelas análises feitas nas seções anteriores.

A vazão aumentou significativamente conforme mostrado na Figura 5.5.5. Certamente que o ser humano não é capaz de sustentar poucos instantes de fonação nessas condições (integrando numericamente os sinais glotais ao longo dos 0,09 segundos de simulação, obtivemos um volume de ar igual a 40139,1 cm³ e 40026 cm³ para as laringe mais e menos rígida, respectivamente. Considerando que o volume pulmonar é da ordem de 6000 cm³, justificamos assim a incapacidade dos pacientes com câncer de sustentar tal fonação.

5.5.2 Paralisia Unilateral

A paralisia unilateral caracteriza-se pela incapacidade de um das pregas vocais ser trazida até a posição de fonação. Isso pode ocorrer por causa de um dano na estrutura neural que ativa os músculos adutores da laringe ou mesmo por alguma deformação nas estruturas musculares de uma das pregas vocais. O fato de ser unilateral significa que uma das pregas movimenta-se adequadamente enquanto a outra não. Adicionalmente, quando a origem da paralisia é neural, as características viscoelásticas dos tecidos musculares permanecem em condições normais; a laringe apenas não consegue atingir as condições físicas para sustentar as vibrações na superfície das pregas vocais.

Tabela 5.5.4 - Descrição geométrica da laringe com paralisia unilateral

Seção	Centro (cm)	Raio (cm)
S0	0; 0; -2,0	0,7 0,7 0,7 0,7
S1	0; 0; -1,0	0,7 0,7 0,7 0,7
S2	0; 0; -0,8	0,7 0,7 0,7 0,7
S3	0; 0; -0,61	0,7 0,6 0,7 0,6
S4	0; 0; -0,47	0,7 0,25 0,7 0,25
S5	0; 0; -0,40	0,7 0,075 0,7 0,2
S6	0; 0; -0,33	0,7 0,025 0,7 0,2
S7	0; 0; -0,26	0,7 0,025 0,7 0,2
S8	0; 0; -0,19	0,7 0,025 0,7 0,2
S9	0; 0; -0,12	0,7 0,025 0,7 0,2
S10	0; 0; -0,05	0,7 0,025 0,7 0,2
S11	0; 0; 0	0,7 0,235 0,7 0,235
S12	0; 0; 0,03	0,7 0,35 0,7 0,35
S13	0; 0; 0,07	0,7 0,5 0,7 0,5
S14	0; 0; 0,1	0,7 0,515 0,7 0,515
S15	0; 0; 0,23	0,7 0,45 0,7 0,45
S16	0; 0; 0,35	0,7 0,46 0,7 0,46
S17	0; 0; 0,48	0,7 0,6 0,7 0,6
S18	0; 0; 0,6	0,7 0,7 0,7 0,7
S19	0; 0; 1,3	0,7 0,7 0,7 0,7
S20	0; 0; 2,0	0,7 0,7 0,7 0,7

A Tabela 5.5.4 descreve a geometria usada para simular a paralisia unilateral. Note que uma das pregas vocais foi posicionada próxima ao centro do tubo laríngeo (lado normal), enquanto que a outra ficou significativamente afastada dessa região geométrica (lado “paralisado”).

Primeiramente apresentaremos a distribuição das pressões ao longo da laringe. A Figura 5.5.10 mostra as pressões sobre a superfície da laringe onde está a prega vocal “paralisada”. Note que o perfil foi muito semelhante ao de uma laringe com câncer, ou seja, a zona de pressão negativa apresentou grande extensão quando a comparamos com uma simulação de laringe normal.

Figura 5.5.10 - Distribuição de pressões ao longo da prega vocal “paralisada” na laringe com paralisia unilateral.

A distribuição das pressões nesse lado da laringe também foi mais suave em relação a uma laringe normal. Novamente, isso se deveu a grande abertura da glote. A queda de pressão transglotal, dessa forma, foi menos abrupta e certamente influenciou na vibração dessa prega vocal.

Note, entretanto, que na Figura 5.5.11, na qual a distribuição das pressões na prega vocal normal é apresentada, a zona de pressão negativa sobre a sua superfície apresentou menor extensão. Além disso, a queda de pressão na porção inferior dessa prega vocal foi mais abrupta por causa da resistência maior provocada pela sua geometria. Provavelmente, essa queda abrupta na entrada da glote, nessa prega vocal, orientou a formação da zona de pressão negativa maior na prega vocal oposta.

Figura 5.5.11 - Distribuição de pressões ao longo da prega vocal “normal” na laringe com paralisia unilateral.

Figura 5.5.12 - Distribuição das pressões ao longo da superfície da laringe com paralisia unilateral.

Quando analisamos a curva de pressão média ao longo das seções das pregas vocais, percebemos que ela foi bem suave em relação às pressões colhidas ao longo das superfícies da laringe. Determinamos essas pressões superficiais por causa da assimetria da laringe.

Conforme vemos na Figura 5.5.12, a queda de pressão na entrada da glote foi mais abrupta na superfície da prega vocal normal do que na “paralisada”, confirmando nossas observações qualitativas. Também podemos notar que a zona de pressão negativa foi mais significativa na superfície da prega vocal “paralisada”.

Adicionalmente percebemos que a pressão média não ofereceu uma boa análise desses fenômenos físicos quando a laringe era assimétrica. Entretanto, quando olhamos para as superfícies a partir das falsas pregas vocais, percebemos que a pressão média e superficiais continuaram negativa, um fenômeno qualitativamente semelhante ao que ocorreu com a laringe com câncer.

Podemos assim afirmar que quanto maior o espaço glotal, maior a extensão das pressões negativas ao longo da laringe, com início definido sob a superfície das pregas vocais verdadeiras.

Figura 5.5.13 - Vetores velocidade para laringe com paralisia unilateral - corte transversal.

Quando determinamos os vetores velocidade ao longo da laringe, percebemos a assimetria dos mesmos seguindo o perfil geométrico das pregas vocais. Após a constrição, verificamos a formação de uma grande área de recirculação de ar no lado da prega vocal normal. Em menor magnitude e praticamente se restringindo ao ventrículo laríngeo, outra área de recirculação de ar se formou do lado da prega vocal “paralisada”.

Os vetores velocidade abaixo da constrição glotal também apresentaram um grau de assimetria a medida que se aproximavam das pregas vocais. Tal fenômeno fica mais nítido quando observamos os vetores velocidade próximos das paredes inferiores das pregas vocais verdadeiras. Apesar de não ficar nítido na Figura

5.5.13, os vetores mais ao centro do tubo laríngeo e abaixo da glote também se inclinaram como resultado da propagação da resistência aerodinâmica assimétrica que caracterizou a laringe.

Como na simulação do câncer, a laringe com paralisia unilateral também produziu uma elevada vazão durante o intervalo de tempo simulado. Da mesma forma, a sustentação desse escoamento de ar através da laringe não pode ser suportado por muito tempo pelo paciente.

Figura 5.5.14 - Sinal glotal para uma laringe com paralisia unilateral.

Quando analisamos a Figura 5.5.14 podemos perceber que as pregas vocais produziram uma oscilação sustentada mesmo para a condição aerodinâmica desfavorável. Se observarmos atentamente a curva a partir dos 0,05s, veremos que a frequência fundamental do sinal ficou muito próximo daquele produzido pela laringe normal. O sinal entretanto foi poluído por *shimmer* (oscilações em amplitude) por causa da alta velocidade do escoamento, sendo assim muito sensível às variações de movimento das pregas vocais.

Da mesma maneira que na laringe com câncer, empregamos o modelo Smagorinsky-Lilly para modelar o regime turbulento do escoamento. Isso implica que se empregarmos uma malha extremamente fina e modelos mais sofisticados, muitos redemoinhos outrora filtrados começarão a aparecer após a constrição glotal. Tais redemoinhos serão posteriormente identificados como ruído na voz pois a glote não se fecha, apesar dos movimentos da prega vocal normal.

Para identificar melhor esses movimentos da laringe com paralisia unilateral, apresentamos uma série sequencial de instantâneos da laringe durante a simulação. A Figura 5.5.15 permite acompanhar no sinal glotal esses instantâneos da simulação.

Figura 5.5.15 - Sinal glotal da laringe com paralisia unilateral para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Podemos perceber que a prega vocal normal apresentou movimentos muito similares ao das pregas vocais na laringe normal. Já a prega paralisada movimentou-se de modo análogo ao das pregas vocais em laringes com câncer. Aparentemente as características encontradas nas laringes normais e com câncer se sobrepuseram para definir a dinâmica da laringe com paralisia unilateral.

1

2

Figura 5.5.16 - Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05700 s e 0,05730 s, respectivamente.

Figura 5.5.17 - Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05760 s, 0,05790 s, 0,05820 s, 0,05850 s, 0,05880 s e 0,05910 s, respectivamente.

Podemos notar na Figura 5.5.17 que o movimento de “fechamento” realizado pela prega vocal normal começou com a compressão das porções inferior das pregas vocais pela força aerodinâmica e superior pela força inercial dos tecidos naquela região.

Figura 5.5.18 - Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,05940 s, 0,05970 s, 0,06000 s, 0,06030 s, 0,06060 s e 0,06090 s, respectivamente.

Verificamos na Figura 5.5.18 que a prega vocal normal sofreu uma compressão na sua porção central por causa dos movimentos em sentidos opostos das porções inferior e superior. Adicionalmente, a amplitude desses movimentos foi bastante inferior ao produzido pela laringe em condições normais de fonação. Certamente a distribuição de pressões ao longo da superfície glotal teve papel preponderante nesse fenômeno.

Figura 5.5.19 - Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,06120 s, 0,06150 s, 0,06180 s, 0,06210 s, 0,06240 s e 0,06270 s, respectivamente.

As Figuras 5.5.19 e 5.5.20 mostram o final do ciclo, em que a porção superior da prega vocal foi “empurrada” para fora da glote. Novamente fica patente que as forças aerodinâmicas distribuídas ao longo da laringe foram incapazes de transferir energia suficiente para a onda mecânica atingir as magnitudes daquela que se forma na laringe normal. Certamente a colisão entre as pregas vocais é impossível dadas as dimensões

dos tecidos musculares que compõem a cobertura, mesmo que as magnitudes da onda mecânica fossem iguais àquelas encontradas na laringe normal.

Figura 5.5.20 - Passos de simulação da laringe com paralisia unilateral nos instantes de tempo 0,06300 s e 0,06330 s, respectivamente.

As Figuras 5.5.21 e 5.5.22 mostram que as extremidades da prega vocal normal praticamente oscilaram no plano YZ. Na direção X, os deslocamentos dos nós 405 e 407 foram praticamente constantes, apresentando pequenas oscilações ao longo desta que é a direção longitudinal das pregas vocais.

Figura 5.5.21 - Deslocamento do ponto 405 para a laringe com paralisia unilateral.

Figura 5.5.22 - Deslocamento do ponto 407 para a laringe com paralisia unilateral.

Figura 5.5.23 - Deslocamento no plano transversal do ponto 405 para a laringe com paralisia unilateral.

Figura 5.5.24 - Deslocamento no plano transversal do ponto 407 para a laringe com paralisia unilateral.

Quando determinamos o deslocamento desses pontos da superfície da prega vocal normal ao longo do tempo, podemos perceber que esses apresentaram um comportamento muito semelhante ao produzido pela laringe normal (conforme Figuras 5.4.24 e 5.4.25). Entretanto, os resultados mostram (Figuras 5.5.23 e 5.5.24) que a prega vocal normal da laringe com paralisia unilateral movimentou-se mais suavemente. Isso pode estar relacionado com o fato da distribuição de pressões ao longo da superfície dessa laringe ser mais suave. Mesmo assim, os movimentos da laringe com paralisia unilateral ainda apresentaram oscilações como mostra a Figura 5.5.22, particularmente no terceiro ciclo.

A simulação de uma laringe com paralisia unilateral mostrou que a prega vocal normal ainda consegue oscilar mesmo com as condições aerodinâmicas adversas impostas pela patologia. Entretanto, sendo a magnitude dessa oscilação pequena e a espessura da cobertura e ligamento da laringe muito menor do que o diâmetro glotal, o fechamento glotal não ocorre.

Assim confirmamos que o espaço glotal é um dos fatores fundamentais para produzir ondas mecânicas em amplitude suficiente para que a glote seja fechada. Curiosamente, quando apenas uma das pregas está em posição de fonação, sua superfície glotal produz ondas muito semelhantes àsquelas produzidas em laringes normais. A explicação está na queda abrupta de pressão que ocorre na porção inferior da prega vocal normal e nos movimentos causados por forças inerciais da porção superior desta estrutura orgânica.

5.5.3 Sulco Vocal

O sulco vocal é uma fissura que aparece na direção longitudinal que se localiza na cobertura (epitélio e camada superficial da *lamina propria*) e acaba se aderindo rigidamente ao ligamento vocal. Como é possível

encontrarmos um processo inflamatório nessa região, podemos caracterizá-la mecanicamente como um corpo com rigidez superior ao da própria cobertura.

Existe a possibilidade do sulco ocorrer bilateralmente. Neste trabalho entretanto, optamos pelo caso unilateral pois esse permitirá algumas considerações interessantes sobre o movimento das pregas vocais quando existe assimetria nas características viscoelásticas da mesma.

Usamos as mesmas definições geométricas da laringe normal (Tabela 5.2.4) para construir a laringe com sulco vocal enquanto que as suas propriedades mecânicas estão descritas na Tabela 5.5.5. Em nossos experimentos procuramos verificar os efeitos do posicionamento do sulco vocal nas pregas vocais. Na laringe com sulco vocal por nós definida de “tipo 1”, a alteração orgânica foi posicionada próximo a saída da glote enquanto que na laringe com sulco vocal de “tipo 2”, ela foi posicionada um pouco abaixo do centro da superfície das pregas vocais verdadeiras. A Figura 5.5.25 apresenta a alteração orgânica na laringe com sulco vocal “tipo 1”.

Figura 5.5.25 - Posição da alteração orgânica na laringe com sulco vocal “tipo 1”.

Geometricamente, tal alteração (em tonalidade azul) estendeu-se de uma comissura até a outra e contém todos os elementos finitos que modelam os tecidos musculares da cobertura. Considerando que a cobertura tem sua irrigação alterada pelo sulco, aumentamos a viscosidade do tecido (para 150 Poise). Adicionalmente, como a cobertura prende-se mais rigidamente ao ligamento, aumentamos também a constante de cisalhamento longitudinal, seguindo a idéia de Hirano (1975) e Títze e Talkin (1979) para a mesma propriedade elástica do ligamento em relação ao corpo.

Finalmente, o módulo de Young transversal foi também aumentado pois o tecido nessa região é relativamente mais rígido do que a cobertura. Isso fez com que as ondas mecânicas não consigam se propagar corretamente entre os dois meios mecânicos. Mantivemos o módulo de Young longitudinal igual ao dos demais tecidos pois achamos que sua magnitude já era considerável. Conforme as análises anteriores, essa propriedade mecânica estabiliza as oscilações no tecido. Entretanto, veremos que quase nenhuma onda se propaga nesse tecido e, assim, o efeito de E' do sulco na vibração não seria significativamente percebido.

Tabela 5.5.5 - Laringe com sulco vocal “tipo 1” e “tipo 2”.

Músculo	E (dina/cm ²)	ν	E' (dina/cm ²)	μ_m (dina/cm ²)	ν'	η (Poise)
Cobertura	20k	0,76	200k	200k	0,76	10
Ligamento	40k	0,68	200k	400k	0,68	10
Corpo	200k	0,45	200k	300k	0,45	150
SULCO	100k	0,56	200k	300k	0,56	150
Pressão subglotal (dina/cm ²)		8k		Geometria		GEO4

Como o perfil geométrico da laringe era igual ao da laringe normal, os estudos estáticos do escoamento não serão repetidos. Dessa forma apresentamos os sinais glotais para as simulações da laringe com sulco vocal “tipo 1” e “tipo 2” na Figura 5.5.26.

Figura 5.5.26 - Sinais glotais para uma laringe com sulco vocal.

Percebemos que o sinal glotal para o sulco vocal de “tipo 1” foi bastante irregular tanto em frequência quanto em amplitude. Note também que as pregas vocais não se tocaram durante a simulação pois a alteração orgânica impediu os movimentos da porção final de uma das pregas vocais.

Entretanto, no “tipo 2”, as pregas vocais apresentaram mobilidade suficiente para fechar a glote. Isso significa que modificações mecânicas nos tecidos da parte superior das pregas vocais afetam significativamente o sinal glotal. Entretanto, podemos perceber que o sinal glotal também apresentou perturbações em frequência e amplitude. Particularmente o quociente de abertura variou significativamente ao longo do período de simulação. Constatamos que a colisão nesse tipo de laringe não era tão simétrica quanto àquela que ocorreu na simulação da laringe normal.

Tal assimetria na colisão mostra que a modelagem desse fenômeno físico exige uma sofisticação maior do que aquela assumida por Alipour-Haghighi et al. (2000) em que os autores simplesmente zeraram uma das ordenadas quando uma prega vocal (modelo simétrico) atravessava uma barreira hipotética representando o plano central da glote. Notamos que em alguns instantes de colisão, uma prega vocal deslizava sobre a outra e não simplesmente tinha seu movimento estancado pela prega vocal oposta. Assim, nossa representação do problema de contato parece ser mais adequada para a simulação da laringe. Possivelmente seja necessário representar a fricção entre as superfícies glotais mas isto exigiria maior sofisticação do algoritmo, mais informações sobre a rugosidade dos tecidos e maior estabilidade do modelo.

É interessante notar que as perturbações em frequência e em amplitude do sinal glotal estão ligadas com a assimetria de movimentos das pregas vocais. Para demonstrar isso, apresentaremos uma sequência de instantâneos da laringe cuja vazão equivalente é mostrada na Figura 5.5.27.

Figura 5.5.27 - Sinal glotal da laringe com sulco vocal "tipo 1" para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Figura 5.5.28 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06180 s, 0,06210 s, 0,06240 s, 0,06270 s, 0,06300 s e 0,06330 s, respectivamente.

Notamos inicialmente que a prega vocal normal teve uma extensão de movimento maior do que a da prega vocal contendo o sulco. Note particularmente que a porção da prega vocal logo abaixo do sulco vocal foi comprimida por causa da pressão aerodinâmica, iniciando a onda mecânica. Entretanto, essa onda não se propagou para cima por causa da rigidez do tecido alterado.

Figura 5.5.29 - Passos de simulação da laringe com sulco vocall “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06360 s, 0,06390 s, 0,06420 s, 0,06450 s, 0,06480 s e 0,06510 s, respectivamente.

A Figura 5.5.29 mostra que a prega normal inicia um movimento de aproximação contra prega vocal oposta por causa da inércia dos seus tecidos e compressão de sua porção inferior. Enquanto isso, a prega vocal contendo sulco vocal realizou um movimento de rotação mas não foi capaz de “se dobrar” para efetivar a colisão.

Figura 5.5.30 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06540 s, 0,06570 s, 0,06600 s, 0,06630 s, 0,06660 s e 0,06690 s, respectivamente.

Como as forças aerodinâmicas eram positivas logo abaixo da porção superior da prega vocal normal e maiores do que as forças inerciais, a prega vocal normal foi “empurrada” para fora da glote. O mesmo ocorreu com a prega vocal com sulco. Entretanto, como sua inclinação era bem menor, a pressão aplicada sobre sua face foi menor do que aquela aplicada na superfície da prega vocal oposta.

Figura 5.5.31 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06720 s, 0,06750 s, 0,06780 s, 0,06810 s, 0,06840 s e 0,06870 s, respectivamente.

Nessa sequência, as pregas vocais reiniciam novamente a tentativa de fechar a glote. Percebemos que abaixo do sulco, o tecido foi ora comprimido e ora tracionado por ação da pressão aerodinâmica na entrada da glote e pelas diferenças na composição mecânica da cobertura.

Figura 5.5.32 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,06900 s, 0,06930 s, 0,06960 s, 0,06990 s, 0,07020 s e 0,07050 s, respectivamente.

Na Figura 5.5.32 vemos que a prega vocal normal tentou se aproximar da prega vocal com sulco vocal. Entretanto, a distribuição de pressões na superfície dessa última a afastaram da prega vocal normal, criando, assim, um perfil oblíquo da glote. Isso demonstra que assimetrias nas propriedades mecânicas também provocam assimetria nos movimentos das pregas vocais.

Figura 5.5.33 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,07080 s, 0,07110 s, 0,07140 s, 0,07170 s, 0,07200 s e 0,07230 s, respectivamente.

Finalmente as pregas vocais, incapazes de sustentar a posição de “fechamento” glotal, foram novamente colocadas em movimento de abdução. Novamente a maior rigidez do sulco o impediu de se dobrar analogamente à porção superior da prega vocal normal.

Figura 5.5.34 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 1” nos instantes de tempo 0,07260 s, 0,07290 s, 0,07320 s e 0,07350 s, respectivamente.

Os instantâneos apresentados para o sulco vocal do “tipo 1” mostraram que alterações nas propriedades mecânicas das pregas vocais, particularmente no seu final impediram a completa adução da glote. Certamente uma redução nas dimensões glotais permitiria que a prega vocal normal colidisse com sua oposta. Mesmo assim, os movimentos assimétricos de ambas acabaram produzindo um sinal glotal com perturbações em amplitude e em frequência.

Particularmente notamos que a glote produziu perfis geométricos oblíquos por causa da aproximação da prega vocal normal e simultâneo afastamento da prega vocal com sulco. Isso foi provocado por diferenças nas forças inerciais em cada uma delas. Esse fenômeno é aparentemente cíclico e de frequência superior ao da vibração da superfície glotal. Infelizmente não fomos capazes de detectar sua influência exata no sinal glotal.

Na outra simulação do sulco vocal, movemos o sulco para baixo, conforme mostra a Figura 5.5.35. As características viscoelásticas foram apresentadas na Tabela 5.5.5. O trecho selecionado contém dois ciclos completos de vibração das pregas vocais. Note na Figura 5.5.36 que a rampa de subida do ciclo central foi diferente da rampa de subida no ciclo seguinte, confirmando as presença de irregularidades em amplitude e frequência no sinal glotal.

Figura 5.5.35 - Posição da alteração orgânica na laringe com sulco vocal “tipo 2”.

Também notamos a presença de uma rápida abertura durante a fase de fechamento glotal. Isso ocorreu porque o algoritmo de detecção de colisão não encontrou nenhum contato entre as superfícies e o gerador de malhas aproximou a área glotal segundo os critérios já apresentados. O fato de não ter ocorrido colisão naquele instante sugere que as forças de ação e reação no instante anterior devem ter sido maiores do que o necessário para impedir a penetrabilidade entre as superfícies. Isso é confirmado pelo fato de que no instante seguinte à “rápida abertura” as pregas vocais colidem novamente.

Figura 5.5.36 - Sinal glotal da laringe com sulco vocal “tipo 2” para descrição dos movimentos das pregas vocais.

Figura 5.5.37 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03450 s, 0,03480 s, 0,03510 s, 0,03540 s, 0,03570 s e 0,03600 s, respectivamente.

Ambas as pregas vocais apresentaram movimentos irregulares durante a fonação. Isso se deve às diferenças viscoelásticas entre as duas pregas vocais. Note que mesmo liberando a porção superior da prega com sulco vocal, a extensão dos movimentos da mesma foi ainda menor do que aquela da prega vocal normal.

Figura 5.5.38 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03630 s, 0,03660 s, 0,03690 s, 0,03720 s, 0,03750 s e 0,03780 s, respectivamente.

A Figura 5.5.38 mostra como a colisão entre as superfícies de ambas as pregas aconteceu. A prega vocal com sulco vocal não permitiu a formação da onda mecânica na entrada da glote. Assim, seus movimentos foram mais curtos do que os da prega vocal normal. Assim, a cobertura na porção final da prega vocal danificada conseguiu alcançar a superfície da prega vocal oposta em um tempo menor. Notamos ainda o deslizamento entre as duas superfícies causado pela diferença de fase das duas pregas.

Figura 5.5.39 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03810 s, 0,03840 s, 0,03870 s, 0,03900 s, 0,03930 s e 0,03960 s, respectivamente.

Essa diferença de fase também acabou modificando a distribuição de pressões. Isso fica evidente quando percebemos que após o contato entre as duas pregas, a prega normal ainda permanece alguns instantes dobrada para dentro da glote. Isso fez com que o escoamento seja projetado sobre a superfície da outra prega vocal e, assim, pressionou-a para se afastar mais do centro da glote.

Figura 5.5.40 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,03990 s, 0,04020 s, 0,04050 s, 0,04080 s, 0,04110 s e 0,04140 s, respectivamente.

Entretanto, quando o espaço glotal foi aberto com maior intensidade (com as duas pregas ganhando mais velocidade e assim, energia inercial), o perfil geométrico da glote muito se assemelha àquele produzido pelas pregas vocais normais. Mesmo assim, podemos perceber a diferença de fase entre os movimentos das duas pregas vocais verdadeiras.

Figura 5.5.41 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04170 s, 0,04200 s, 0,04230 s, 0,04260 s, 0,04290 s e 0,04320 s, respectivamente.

O ciclo de fechamento da glote foi novamente repetido. Na Figura 5.5.41 podemos notar que a prega vocal contendo o sulco se deitou sobre a prega vocal oposta ao mesmo tempo em que essa última pressionou-a na sua posição mais superior.

É interessante notar que numericamente o modelo de contato em algumas situações aplicou forças de ação e reação um pouco maiores do que aquelas necessárias apenas para manter a impenetrabilidade do tecido

muscular. Isso fica patente pelos movimentos “estranhos” que ambas as pregas vocais realizavam logo após a colisão. Acreditamos que um aumento de malha e redução no intervalo de integração resolveriam esse problema, pois a colisão entre as superfícies seria mais suave.

Figura 5.5.42 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04350 s, 0,04380 s, 0,04410 s, 0,04440 s, 0,04470 s e 0,04500 s, respectivamente.

A Figura 5.5.42 mostra como a diferença de fase entre os movimentos das duas pregas vocais ocorre com o passar do tempo, juntamente com o aumento da conversão de energia aerodinâmica em inercial, até que um ponto de convergência seja atingido em alguns ciclos à frente.

Figura 5.5.43 - Passos de simulação da laringe com sulco vocal “tipo 2” nos instantes de tempo 0,04530 s, 0,04560 s, 0,04590 s e 0,04620 s, respectivamente.

Os resultados indicaram que a posição do sulco vocal afeta significativamente o sinal glotal. Os movimentos da laringe confirmaram os dados de vazão. Assim, podemos afirmar que de acordo com a posição onde a prega vocal é danificada, maior ou menor serão os efeitos sobre a vocalização. Percebemos, assim, que a falta de simetria nas características viscoelásticas das pregas vocais também afeta a geração do sinal glotal.

Se considerarmos que a falta de simetria geométrica (paralisia unilateral) altera a distribuição de pressões ao longo da laringe e, conseqüentemente, produz movimentos assimétricos das pregas vocais, concluímos que qualquer alteração na estrutura simétrica da laringe, particularmente na região glotal, faz com que o sinal glotal possua uma quantidade maior de *jitter* e *shimmer*.

Note que o modelo de geração de malha adotado não conseguiu representar exatamente a prega vocal. Assim, em muitos instantes que o modelo da laringe predissesse um fechamento glotal, na verdade ainda existia espaço por onde o ar escoaria. Isso nos indica que a glote não se fecha totalmente em algumas

situações fisiológicas. Como os movimentos das pregas vocais em condição patológica são mais “aleatórios”, é provável que o sinal glotal deva apresentar mais oscilações durante o contato entre as pregas vocais do que o predito nos resultados que apresentamos.

5.5.4 Outras doenças

Infelizmente os requisitos computacionais para simular doenças como pólipos, nódulos e cistos são muito maiores do que os disponíveis. Tais doenças exigem uma densidade de malha muito elevada para uma correta representação. Adicionalmente, um outro gerador de malha deveria ser empregado para representar a vizinhança de tais crescimentos orgânicos.

Entretanto, se considerarmos que tais doenças são também caracterizadas por diferenças de propriedades viscoelásticas, os resultados obtidos na simulação do sulco vocal mostram que tais crescimentos orgânicos afetam a mobilidade das pregas vocais, gerando *jitter* e *shimmer* no sinal glotal. Claro que a extensão do sulco vocal é muito maior do que a de cistos, pólipos e nódulos. Entretanto, alterações nos movimentos das pregas vocais na sua vizinhança refletem-se diretamente na geometria glotal e, assim, no escoamento de ar.

Outra doença de grande interesse que foi analisada é o Edema de Reinke. Ele afeta a camada superficial da *lamina propria* tornando-a mais espessa. Isso significa que as pregas vocais têm sua massa aumentada. Como vimos nas análises das propriedades elásticas e seus efeitos sobre a mobilidade da laringe, tal aumento de massa se reflete como uma redução de frequência. Com o aumento de massa, temos um aumento na inércia e conseqüentemente, modificação nos períodos de fechamento e abertura das pregas vocais. Por já termos feito comentários e análises de tais aspectos geométricos e viscoelásticos no capítulo anterior, não reapresentamos esses resultados novamente.

Como mencionamos, o objetivo dessas simulações de casos patológicos teve por objetivo mostrar, primeiramente a funcionalidade do modelo em representar a dinâmica de tais doenças. Certamente que mais estudos devem ser feitos a respeito das características viscoelásticas das alterações orgânicas, pois essas informações são fundamentais para uma adequada simulação das doenças.

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

A simulação da laringe usando um modelo tridimensional da laringe mostrou que os principais fenômenos físicos que são descritos na literatura foram reproduzidos. Podemos perceber a formação da abertura na comissura anterior em algumas simulações, causada pela distribuição não-uniforme das pressões sob a superfície das pregas vocais verdadeiras. Os modelos encontrados na literatura não fazem comentários sobre a formação dessa abertura apesar de Pelorson et al. (1994) citar que os modelos devem considerar que a laringe permite pequenos escapes de ar, sem, entretanto, caracterizar geometricamente tais aberturas.

Verificamos que o aumento de pressão produziu um aumento da frequência fundamental em uma relação muito similar à predita por Ishizaka e Flanagan (1972), ou seja, entre 2 a 3 Hz/cmH₂O. Entretanto, essa relação mostrou-se dependente das características viscoelásticas da laringe pois quando consideramos uma laringe mais rígida, a relação alterou-se. Finalmente, verificamos que a razão entre a frequência fundamental e a pressão subglotal era não linear apesar de não especificarmos qual o seu comportamento por insuficiência de simulações.

Note que além da diferença de fase vertical, pudemos verificar, analisando o comportamento de alguns pontos da malha do músculo, que a laringe também apresenta diferença de fase horizontal. A porção central da prega vocal moveu-se primeiro, “puxando” as porções mais laterais pois as pressões aerodinâmicas tinham maior magnitude na região central da glote.

A diferença de fase vertical foi criada por um conjunto de fenômenos físicos atuando de forma coordenada. Primeiramente a distribuição de pressões não-linear pressionou a porção inferior das pregas vocais, comprimindo-a. Pela incompressibilidade dos tecidos musculares, as demais porções “incharam-se”. Como o perfil geométrico da glote modifica-se, o segmento das pregas vocais que se elevou passou a ser pressionado pelo escoamento e movimentou-se para a porção final das pregas vocais.

Com a transferência de energia aerodinâmica para o músculo, a amplitude dos movimentos das pregas vocais, em especial da sua porção superior, aumentam até que o regime de vibrações auto-sustentadas seja alcançado. Verificamos que esse regime era bastante dependente das características geométricas das pregas vocais, seguido das características elásticas dos músculos. Também constatamos que a viscosidade do tecido teve papel significativo na vibração das pregas vocais, reduzindo a amplitude dos movimentos.

O módulo de Young transversal e a constante de cisalhamento longitudinal determinaram qual a frequência de vibração das pregas vocais, confirmando as observações teóricas de Berry e Titze (1996). Assim, essas constantes devem ser ajustadas em conjunto para definir o padrão oscilatório fisiológico. Valores baixos para cada um desses parâmetros provaram causar movimentos instáveis na superfície das pregas vocais, mesmo com alterações individuais. Confirmamos que o aumento de rigidez reduziu a amplitude de movimentos dos tecidos. Somente um aumento de pressão subglotal permitiu que a vibração auto-sustentada fosse mantida. Curiosamente essa dupla ação (aumento de rigidez e pressão subglotal) produziu um aumento na frequência fundamental com “manutenção” da amplitude do sinal glotal. Isso faz juz ao fato conhecido de que as laringes das mulheres são mais tencionadas do que as dos homens, exigindo, assim, maiores níveis de pressão.

O módulo de Young longitudinal é uma das constantes elásticas mais consideradas na literatura mas empregada de maneira indireta nos modelos matemáticos da laringe. Alipour-Haghighi et al. (2000) mencionaram o uso de um parâmetro denominado *bulging factor* que se relaciona com a ação do músculo tireoaritenóideo, levando-nos a pensar que o módulo de Young longitudinal esteja relacionado com tal parâmetro. Nossas análises mostraram que o aumento da rigidez longitudinal implica no aumento da amplitude do sinal glotal. Isso está relacionado com o fato de que a maior rigidez impede maior deslocamento nodal na direção longitudinal e a incompressibilidade do tecido provoca o movimento no plano transversal. Concluímos que essa características elástica pode justificar o fato de que laringes curtas como a de crianças produzem vozes mais agudas do que adultos (particularmente homens) por causa do aumento da resistência longitudinal das pregas vocais.

Quando simulamos um problema análogo ao de Alipour-Haghighi et al. (2000) e outros, obtivemos uma frequência fundamental de 164 Hz, aproximadamente enquanto tais autores encontraram 147 Hz. A diferença pode estar ligada às diferenças que separam ambas as simulações. Eles discretizaram unicamente as pregas vocais, mais precisamente uma delas, pois admitiam que sua laringe era simétrica e essa suposição reduziria a quantidade de cálculos. Também representaram simplificadaamente a colisão, pois admitiram que ela ocorria somente se alguns dos pontos da malha muscular cruzasse o plano de simetria - nesse caso, apenas suprimiram uma das coordenadas para evitar a colisão.

Além disso, eles criaram um modelo híbrido 2D/3D de representação da laringe em que as pregas vocais eram definidas a partir de planos transversais ao longo da linha longitudinal. Para acoplar tais planos, manipularam algebricamente as relações de tensão e deformação antes de discretizar as equações dinâmicas do músculo. Finalmente fixaram as superfícies dos planos das comissuras anterior e posterior via condição de contorno de Dirichlet (deslocamento nulo).

Infelizmente Alipour-Haghighi et al. (2000) não descrevem como as pressões e velocidade do ar foram calculadas ao longo da laringe. Mesmo assim, considerando as diferenças na caracterização do músculo, em particular da colisão, fornecem subsídios para justificar os resultados obtidos. Assim, percebemos que tanto o sinal glotal como os movimentos das pregas vocais de nossas laringes foram muito semelhantes qualitativa e quantitativamente aos de tais autores.

Se examinarmos o trabalho de Guo e Scherer (1993) podemos notar que nossa abordagem de solução do escoamento forneceu valores muito próximos aos desses autores, mesmo se considerarmos as diferenças geométricas entre as malhas (nossa malha era menos detalhada do que a desses autores). Quando aferimos a distribuição de pressões sobre a superfície das pregas vocais (para compatibilizar ambas as análises) confirmamos que nosso método híbrido de solução das equações de Navier-Stokes foi bastante satisfatório e eficiente para ser aplicado no problema da dinâmica da laringe.

Verificamos, entretanto, diferenças entre a vazão produzida por Alipour-Haghighi et al. (2000) e a calculada pelo nosso método. Quando examinamos nosso escoamento, percebemos que o mesmo se afunila na glote tanto no plano transversal (como era natural ocorrer por causa da constrição imposta pelas pregas vocais) quanto no plano longitudinal. Esse último, que foi fruto da geometria elíptica da glote e fisiologicamente associado às comissuras) não é comentado na literatura e pode ser a razão da diferença entre os sinais glotais da literatura em relação ao produzido por nosso modelo.

A inclusão da falsa prega vocal confirmou nossas suposições de que ela afeta a distribuição de pressões nas pregas vocais. Nossos ensaios mostraram que a redução do espaço entre as duas falsas pregas vocais aumenta a magnitude da pressão negativa. Isso justificaria os achados de Pereira (1987) que afirma que um fechamento maior daquele espaço seria necessário para sintetizar o sinal glotal em vozes sussuradas, cuja principal característica é a redução da pressão subglotal). Isso faria com que a distribuição de pressões fosse suficiente para excitar movimento oscilatório auto-sustentado nas pregas vocais nesses níveis reduzidos de pressão subglotal.

Quando simulamos algumas patologias da laringe, confirmamos que a abertura glotal tem grande importância na vibração das pregas vocais. Glotes com áreas elevadas produzem distribuições de pressão mais suaves do que o necessário para excitar adequadamente as ondas materiais sob a superfície glotal. Isso fica claro quando simulamos o “câncer” e a paralisia unilateral. Nesse último caso, verificamos que a prega vocal não danificada produziu uma oscilação de maior amplitude do que a prega vocal oposta. Somente um “apertado” espaço entre as pregas vocais produz uma abrupta queda de pressão capaz de formar a onda mecânica na entrada da cavidade glotal. Quanto mais suave a distribuição de pressões, menor a probabilidade das pregas vocais se colidirem.

Também concluímos que diferenças de viscoelasticidade entre as duas pregas vocais afetam o sinal glotal com aumento de harmônicos “espúrios”. A diferença de fase entre ambas as estruturas pode ser causada por crescimentos orgânicos conforme mostramos na simulação do sulco vocal. Como a onda mecânica não se propaga adequadamente nas regiões mais rígidas dos tecidos da cobertura, ambas as pregas acabam vibrando em frequências diferentes.

A posição onde a prega vocal é deformada também afeta significativamente o sinal glotal, evitando inclusive que o fenômeno da colisão ocorra. Quanto mais próximo da saída da glote, menor é a amplitude do sinal glotal e maior a probabilidade de presença de ruído no sinal de voz por causa da incompleta adução da laringe. Isso significa que males causados pelo uso excessivo da voz fazem com que as colisões ocorram com maior intensidade (como vimos, a inércia é maior com o aumento de pressão subglotal) e os tecidos

musculares são mais prejudicados justamente na região superior das pregas vocais. Como as simulações mostraram, essa porção da laringe é fundamental para que a vibração se sustente.

O aumento de massa, que caracteriza o Edema de Reinke, provocou uma redução na frequência fundamental do sinal glotal. Isso é condizente com o fato de que os tecidos da laringe possuíam maior inércia (se dispensarmos o aumento de pressão nos pulmões) e, dessa forma, a extensão de seus movimentos será maior.

Verificamos também que para simular laringes assimétricas necessitamos de modelos adequados para representar a colisão. Isso é justificado pelo escorregamento de uma prega vocal sobre a outra quando simulamos a laringe com sulco vocal. As idéias bastante simples de Alipour-Haghighi et al. (2000) certamente necessitariam ser modificadas para contemplar tais situações.

A possibilidade de ensaios examinando cada detalhe fisiológico da laringe é enorme e infelizmente não fomos capazes de abranger mais características pelas exigências computacionais e tempo de simulação de cada laringe. Podemos perceber, entretanto, que o modelo pode ser usado para maiores estudos da laringe.

É importante ressaltar que o modelo tridimensional da laringe empregou um conjunto de técnicas matemáticas sofisticadas mas que são encontradas em literatura. O mérito da pesquisa foi agregá-las e ajustá-las para simular a laringe. Quando comparamos este modelo com aqueles da literatura, percebemos que o principal mérito desta tese foi simular um modelo totalmente tridimensional e completo da laringe, sem simplificações como remoção de estruturas orgânicas (falsas pregas vocais e ventrículo laríngeo) ou admissão de simetria na laringe. Adicionalmente incorporamos um modelo de representação da colisão, onde forças de restrição de movimento da superfície das pregas vocais são calculadas (o modelo de duas massas de Ishizaka e Flanagan (1972) modifica a resistência dos tecidos da laringe enquanto Alipour-Haghighi et al. (2000) simplesmente elimina uma das coordenadas dos nós que participam da colisão). Isso permite que o contato entre as duas pregas vocais verdadeiras em nosso modelo seja mais realístico do ponto de vista físico do que os demais modelos existentes.

No entanto, devemos citar algumas restrições (ou gargalos) de nossa abordagem tridimensional. Primeiramente, nosso algoritmo de geração de malha é bastante simples. Muitas laringes exigem um paciente processo de montagem das elipses que descrevem as superfícies do músculo para evitar que elementos finitos muito pequenos sejam gerados. Certamente que um método mais sofisticado como o encontrado em programas profissionais seria mais adequado para gerar os polígonos ao longo da laringe (alguns cuidados, é claro, devem ser tomados para descrever automaticamente os diferentes tipos de tecidos da laringe).

A maior dificuldade na construção de um algoritmo de geração de malha para simular a laringe é lidar com o fechamento glotal. Como vimos, em muitas situações ele não é total e, dessa forma, o mapeamento das superfícies internas da laringe exigirá mais pesquisa. Nosso algoritmo é aproximativo mas o ideal seria que o escoamento seguisse exatamente a superfície interna da laringe.

O modelo do escoamento também exige algumas modificações para aumentar a precisão no cálculo da vazão. Primeiramente, seria útil adotar um esquema numérico que eliminasse as pressões espúrias da solução final. Diversas técnicas são comumente encontradas na literatura e somente não foram implementadas por

exigirem adaptação para uma malha não estruturada como a usada em nossas simulações e já estarmos em estágio avançado de desenvolvimento quando as analisamos. Adicionalmente, esse mesmo esquema permitiria a redução da ordem do polinômio de interpolação com conseqüente aumento no número de nós da malha de escoamento.

O ponto mais importante que merece atenção posterior é o fato de termos assumido que o escoamento é estacionário entre cada instante de tempo de simulação. Isso fez com que a curva de derivada do sinal glotal apresentasse descontinuidades. Isso significa que nosso sinal glotal é descontínuo. Acreditamos que o procedimento sugerido por Tezduyar et al. (1992) para solucionar escoamentos não-estacionários poderia ser adotado. Em tal trabalho, o movimento da malha de escoamento é contabilizado na solução das equações de Navier-Stokes, encaixando-se perfeitamente na simulação da laringe.

Entretanto, o fechamento glotal exigirá uma adequada modificação do método de Tezduyar et al. (1992) pois a abertura é matematicamente representada por um escoamento impulsivo (Pelorson et al.; 1994) e dessa forma, exige cuidados que não foram originalmente considerados.

Uma vez concluída que o método de Tezduyar et al. (1992) seja adaptado, acreditamos que os problemas de convergência e tempo de simulação do escoamento e da laringe serão reduzidos sensivelmente uma vez que tais autores sugeriram em seu trabalho que apenas 4 passos iterativos do método de Newton seriam necessários para calcular as velocidades e pressões do escoamento entre cada intervalo de tempo (nosso modelo exigiu pelo menos 10 passos).

Apesar da eficiência do *solver* utilizado para fatoração e solução de sistemas de equações lineares, acreditamos que o uso de um método iterativo acoplado ao modelo de Tezduyar et al. (2000) permitira o incremento significativo da malha de escoamento. Diversos trabalhos indicam que quanto mais densa a malha for, mais precisa é a solução. Métodos iterativos como os sugeridos por tais autores permitem que se trabalhe diretamente sobre as matrizes locais, evitando a construção (onerosa) das matrizes globais. Isso significa reduzir os dispêndios de memória que “estressam” o sistema operacional do computador.

No caso do músculo, é necessário mais estudos sobre as propriedades viscoelásticas da laringe. O conjunto de parâmetros que definem os tecidos da laringe é considerável (mesmo admitindo a ortotropicidade). Além disso, é difícil relacionar a tensão ou relaxação das pregas vocais a partir dessas constantes elásticas. Como vimos, cada constante (ou um conjunto delas) influencia diretamente os movimentos da superfície das pregas vocais.

O ideal seria adotar um modelo viscoelástico para a laringe. Entretanto isso exige ensaios mecânicos sofisticados pois os músculos da laringe são pequenos (dimensões milimétricas) e com baixa resistência, em comparação aos ensaios de estruturas mecânicas convencionais. Muitos trabalhos (Alipour e Titze, 1985; Chan e Titze, 1999; Chan e Titze, 2000) atestam essas dificuldades mas seria conveniente que esforços fossem feitos nessa direção, pois aumentaria o grau de realismo das simulações uma vez que a estrutura fisiológica da laringe (fibrosa) estaria sendo considerada adequadamente.

Empregamos um modelo linear para representar a dinâmica da laringe. O ideal seria adotar modelos não-lineares para grandes deslocamentos, particularmente quando grandes pressões subglotais são geradas.

Tais modelos são bastante conhecidos e não ofereceriam dificuldades de implementação. Não foram implementados porque queríamos validar nossos algoritmos com modelos encontrados em literatura (particularmente Alipour-Haghighi et al. (2000)) e também por questões de tempo de implementação e teste.

O modelo de colisão deve também ser revisto. A idéia central pode ser mantida mas o controle das iterações exige mais estudos. Particularmente, quando as forças inerciais são elevadas, observamos uma tendência do modelo de contato produzir forças superiores àquelas que, aparentemente, seriam necessárias apenas para evitar a penetrabilidade entre as pregas vocais verdadeiras. Certamente que um número maior de pontos na região da glote ajudaria, pois o algoritmo teria mais graus de liberdade para reforçar as restrições ao deslocamento. Acharmos que a implementação do modelo para grandes deslocamentos também tornaria o processo de solução das equações do músculo, durante a colisão, mais robusto, pois o processo iterativo envolvido deslocaria paulatinamente os nós da malha até que as restrições fossem verificadas (nossa abordagem incremental é uma variação muito simplificada dessa idéia).

Seria possível acoplar futuramente este modelo da laringe com uma representação do trato supraglotal e sintetizar a voz completamente. Tais modelos supraglotalis são reconhecidamente eficientes e o acoplamento entre ambos tornaria o sinal glotal mais real. É sabido que a pressão acima da laringe não é nula mas dependente das geometrias das cavidades glotal e supraglotal. Avançando ainda mais, poderíamos representar toda a supraglote tridimensionalmente e resolver as equações de Navier-Stokes para todo o trato vocal para uma configuração fonética específica. Certamente isso exigiria recursos computacionais muito além dos que foram utilizados nesta pesquisa, mas essa idéia não é tão hipotética quanto aparenta ser. Trabalhos envolvendo malhas de escoamento com 1.000.000 de pontos são encontrados na literatura e justificam tal idéia. Isso ajudaria também a “resolver” o problema da condição de contorno de saída.

O modelo tridimensional apresentado é uma primeira etapa na busca pelo conhecimento do funcionamento da laringe. Agrupando diversas teorias e algoritmos de áreas distintas, produzimos simulações cujos resultados foram bastante coerentes com as características fisiológicas da laringe. Diversas simplificações e suposições foram feitas e que podem ser removidas a partir das sugestões e da análise dos procedimentos que detalhamos nesta tese. Certamente novas portas se abrem para futuros trabalhos apenas estudando os efeitos que a geometria e as propriedades viscoelásticas têm sobre o sinal glotal.

7 Referências Bibliográficas

- Ananthapadmanabha, T. V. e Fant, G. (1982) "Calculation of true glottal flow and its components", *Speech Communications*, 167-184.
- Alipour-Haghighi, F., Berry, D. A. e Titze, I. R. (2000) "A finite-element model of vocal-fold vibration", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106, 3003-3012.
- Alipour-Haghighi, F. e Titze, I. R. (1985) "Viscoelastic modeling of canine vocalis muscle in relaxation", *Journal of the Acoustical Society of America*, 78, 1939-1943.
- Alipour-Haghighi, F. e Titze, I. R. (1991) "Elastic models of vocal fold tissues", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90, 1326-1331.
- Bao, W. (1997) "Artificial boundary conditions for two-dimensional incompressible viscous flows around an obstacle", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147, 263-273.
- Bathe, K.-J. (1996) *Finite element procedures*, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River.
- Bathe, K.-J. e Chaudhary, A. (1985) "A solution method for planar and axisymmetric contact problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 65-88.
- Belytscheko, T. e Neal M. O. (1991) "Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 547-572.
- Benim, A. C. e Zinser, W. (1986) "A segregated formulation of Navier-Stokes equations with finite elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, 223-237.
- Berry, D. A. e Titze, I. R. (1996) "Normal modes in a continuum model of vocal fold tissues", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100, 3345-3354.
- Berry, D. A., Herzel, H. Titze, I. R. e Krischer, K. (1994) "Interpretation of biomechanical simulations of normal and chaotic vocal fold oscillations with empirical eigenfunctions", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95, 3595-3604.
- Bourkir, K., Maday, Y., Métivet, B. e Razafindrakoto, E. (1997) "A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25, 1421-1454.
- Brooks, A. e Hughes, T. J. R. (1982) "Streamline upwind/Petrov-Garlekin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199-259.
- Butcher, J. C. (1987) *The numerical analysis of ordinary differential equations - Runge-Kutta and general linear methods*, John-Wiley & Sons, Chichester.
- Chan, R. W. e Titze, I. R. (1999) "Viscoelastic shear properties of human vocal fold mucosa: Measurement methodology and empirical results", *The Journal of Acoustical Society of America*, 106, 2008-2021.
- Chan, R. W. e Titze, I. R. (2000) "Viscoelastic shear properties of human vocal fold mucosa: Theoretical characterization based on constitutive modeling" *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107, 565-580.

- Conrad, W. (1980) "A new model of the vocal cords based on the collapsible tube analogy", *Medical Research and Engineering*, 13, 7-10.
- De Vries, M. P. (2000) *A new voice for the voiceless - Design and in-vitro testing of a voice-producing element*, Tese de doutorado, University of Groningen.
- De Vries, M. P., Schutte, H. K. e Verkerke, G. J. (1999) "Determination of parameters for lumped parameter models of the vocal folds using a finite-element method approach", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106, 3620-3628.
- DeBlois, B. M. (1996) "Quadratic, streamline upwinding for finite element method solutions to 2-D convective transport problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134, 107-115.
- Deller Jr., D. R., Proakis, J. G. e Hansen, J. H. L. (1993) *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, MacMillan Publishing Co., New York.
- Demmel, J. W., Eisenstat, S. C., Gilbert, J. R., Li, X. S. e Liu, J. W. H. (1999) "A supernodal approach to sparse partial pivoting", *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, 20, 720-755.
- Donea, J., Belytschko, T. e Smolinski, P. (1985) "A generalized Galerkin method for steady convection-diffusion problems with application to quadratic shape function elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 25-43.
- Duff, I. S., Grimes, R. G. e Lewis, J. G. (1992) "Users' guide for the Harwell-Boeing sparse matrix collection (release 1)", *Relatório Técnico RAL-92-086*, Rutherford Appleton Laboratory.
- Engelman, M. S., Strang, G. e Bathe, K.-J. (1981) "The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 707-718.
- Eterovic, A. L. e Bathe, K.-J. (1991) "On the treatment of inequality constraints arising from contact conditions in finite-element analysis", *Computer and Structures*, 40, 203-209.
- Fant, G. (1960) *Acoustic theory of speech production*. Mouton and Co, Netherlands.
- Flanagan, J. e Landgraf, L. (1968) "Self-oscillating source for vocal-tract synthesizers", *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 16, 57-64.
- FIDAP (1999) *Fidap 8 Theory Manual*, Fluent Inc.
- Gardner, E., Gray, D. J. e O'Rahilly, R. (1978) *Anatomia - Estudo regional do corpo humano*, 4o. Ed., Editora Guanabara Koogan S. A., Rio de Janeiro.
- Zienkiewicz, O. C. (1977) *The Finite element methods*, 3o. Ed., McGraw-Hill Co., New York.
- Gartling, D. K. e Hogan, R. E. (1994) "Coyote - A finite element computer program for nonlinear heat conduction problems, part 1 - Theoretical background", *Relatório Técnico SAND94-1173*, Engineering Sciences Center, Sandia National Laboratories, EUA.
- Gartling, D. K., Nickell, R. E. e Tanner, R. I. (1977) "A finite element convergence study for accelerating flow problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1155-1174.
- George, P. (1991) *Automatic mesh generation - application to finite element methods*, John Wiley & Sons, Masson.
- Gilbert, J. R. e Peierls, T. (1988) "Sparse partial pivoting in time proportional to arithmetic operations", *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computation*, 9, 862-874.
- Giraldo, F. X. (1995) *A space marching adaptive remeshing technique applied to the 3D Euler equations for supersonic flow*, Tese de Doutorado, University of Virginia.
- Girault, V. e Raviart, P. A. (1986) *Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlim.
- Gray, S. D., Hirano, M. e Sato, K. (1993) "Molecular and cellular structure of vocal fold tissue" in: *Vocal Fold Physiology - Frontiers in Basic Science*, I. Titze (Ed), Singular Publishing Group, Inc.: San Diego.

- Gresho, P. M., Lee, R. L., Sani, R. L. e Stullich, T. W. (1978) "On the time-dependent FEM solution of the incompressible Navier-Stokes equations in two- and three-dimensions", *International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Swansea.
- Gresho, P. M., e Lee, R. L. (1979) "Don't suppress the wiggles - They're telling you something", *Proceeding of Special Symposium on Finite Element Methods for Convection-Dominated Flow*, Winter Annual ASME Meeting, New York.
- Gresho, P. M., Lee, R. L. e Sani, R. L. (1980) "On the time-dependent solution of the incompressible Navier-Stokes in two and three dimensions", In: *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, vol 1, 27-80.
- Gresho, P. M e Sani, R. L. (1987) "On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7, 1111-1145.
- Gresho, P. M. e Sani, R. L. (1998) *Incompressible flow and the finite element method: Advection-diffusion and isothermal laminar flow*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Griffiths, D. F. (1997) "The 'no boundary condition' outflow boundary condition", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24, 393-411.
- Guo, C.-G. E Scherer, R. C. (1993) "Finite element simulation of glottal flow and pressure", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94, 688-700.
- Gupta, V., Wilson, T. e Beavers, G. (1973) "A model for vocal cord excitation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54, 1607-1617.
- Gunzburger, M. (1989) *Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice and algorithms*, Academic Press, Boston.
- Haddad, Y. M. (1995) *Viscoelasticity of engineering materials*, Chapman & Hall, New York.
- Haroutunian, V., Engelman, M. S. e Hasbani, I. (1993) "Segregated finite element algorithms for the numerical solution of large-scale incompressible flow problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17, 323-348.
- Heywood, J. G., Rannacher, R. e Turek, S. (1996) "Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22, 325-352.
- Hirano, M. (1975) "Phonosurgery: Basic and clinical investigations", *Otologia (Fukuoka)*, 21, 239-240.
- Hirsch, C. (1988a) *Numerical computation of internal and external flows*, vol 1, John Wiley & Sons, Chichester.
- Hirsch, C. (1988b) *Numerical computation of internal and external flows*, vol 2, John Wiley & Sons, Chichester.
- Hill, D. L. e Baskharone, E. A. (1993) "A monotone streamline upwind method for quadratic finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17, 463-475.
- Hughes, T. R. (1987) *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.
- Hughes, T. J. R., Mallet, M. e Mizukami, A. (1986) "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54, 341-355.
- Huyakorn, P. S., Taylor, C., Lee, R. L. e Gresho, P. M. (1978) "A comparison of various mixed-interpolation finite elements in the velocity-pressure formulation of the Navier-Stokes equations", *Computer & Fluids*, 6, 25-35.
- Ishizaka, K. e Flanagan, J. (1972) "Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords", *Bell System Tech Journal*, 51, 1233-1268.
- Johnson, A. A. e Tezduyar, T. E. (1994) "Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 119, 73-94.

- Koizumi, T., Taniguchi, S. e Hiromitsu, S. (1987) "Two-mass models of the vocal cords for natural sounding voice synthesis" *The Journal of the Acoustical Society of America*, 82, 1179-1192.
- Koizumi, T. Taniguchi, S. e Hiromitsu, S. (1989) "Reply to 'Comments on 'Two-mass models of the vocal cords for natural sounding voice synthesis'", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 85, 2221-2223.
- Lempriere, B. M. (1968) "Poisson's ratio in orthotropic materials", *AIAA*, 6, 2226-2227.
- Lieberman, P. (1967) *Intonation, perception and language*, MIT Press, Cambridge.
- Maday, Y., Patera, A. T. e Ronquist, E. M. (1990) "An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: application to incompressible fluid flow", *Journal of Scientific Computation*, 5, 263-291.
- Matthies, H. e Strang, G. (1979) "The solution of nonlinear finite element equations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 1613-1626.
- Minev, P. D. e Ethier, C. R. (1999) "A characteristic/finite element algorithm for the 3-D Navier-Stokes equations using unstructured grids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 39-50.
- Mizukami, A. (1985) "An implementation of the streamline-upwind/Petrov-Garlekin method for linear triangular elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, 357-364.
- Narayanaswamy, O. S. (1985) "Processing nonlinear multipoint constraints in the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1283-1288.
- Olson, M. D. (1975) "Variational-finite element methods for two-dimensional and axisymmetric Navier-Stokes equations", In: *Finite Elements in Fluids*, 1, (Ed.) R. H. Gallagher et al., John Wiley & Sons, London, 57-72.
- Patankar, S. V. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill Co. New York.
- Papanastasiou, T. C., Malamataris, N. e Ellwood, K. (1992) "A new outflow boundary condition", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14, 587-608.
- Park, S. J. e Lee, S. J. (1999) "On the use of the open boundary condition method in the numerical simulation of nonisothermal viscoelastic flow", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 87, 197-214.
- Pelorson, X. Hirschberg, A., van Hassel, R. R., Wijnands, A. P. J. E Auregan, Y. (1994) "Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-mass model", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96, 3416-3431.
- Pereira, J. (1987) *Laryngeal source excitation modelling*, Tese de Doutorado, University of Southampton. U.K.
- Perlman, A., Titze, I. R. e Cooper, D. S. (1984) "Elasticity of canine vocal fold tissue", *Journal of Speech and Hearing Research*, 27, 212-219.
- Peterson, J. S. (1989) "The reduced basis method for incompressible viscous flow calculations", *SIAM Journal of Scientific Statistic and Computing*, 10, 777-786.
- Rheinboldt, W. C. e Burkardt, J. (1983) "A program for a locally-parametrized continuation process", *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9, 215-235.
- Rice, J. G. e Schnipke R. J. (1985) "A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 313-327.
- Rice, J. G. e Schnipke, R. J. (1986) "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58, 135-149.
- Roache, P. J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque.
- Rosa, M. O. (1998) *Análise acústica da voz para pré-diagnóstico de patologias da laringe*, Dissertação de Mestrado, Depto. de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

- Sampaio, P. A. B. (1991) "A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 1135-1149.
- Sani, R. L. e Gresho, P. M. (1994) "Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18, 983-1008.
- Sani, R. L., Gresho, P. M., Lee, R. L. e Griffiths, D. F. (1981) "The cause and cure (?) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1, 17-43.
- Scherer, R., Shinwari, D., De Witt, K., Zhang, C., Kucinski, B. R. e Afjeh, A. A. (2001) "Intraglottal pressure profiles for a symmetric and oblique glottis with a divergence angle of 10 degrees", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109, 1616-1629.
- Sheu, T. W. H., Tsai, S. F. e Wang, M. M. T. (1997) "A monotone finite element method with test space of Legendre polynomials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143, 349-372.
- Simo, J. C., Wriggers, P. e Taylor, R. L. (1985) "A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, 163-180.
- Sing, L. (1994) *Mesbing and substructuring of 3D stress analysis models*, Tese de Doutorado, The Queen's University of Belfast.
- Smith, M. E., Berke, G. S., Gerratt, B. R. E Kreiman, J. (1992) "Laryngeal paralyses: theoretical considerations and effects on laryngeal vibration", *Journal of Speech and Hearing Research*, 35, 545-554.
- Snell, R. S. (1984) *Anatomia*, 2a. Ed., Editora Médica e Científica Ltda., Rio de Janeiro.
- Tabata, M. e Fujima, S. (1991) "An upwind finite element scheme for high-Reynolds-number flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, 305-322.
- Tezduyar, T. E., Behr, M. e Liou, J. (1992) "A new stratedy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space- time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, 339-351.
- Thomasset, F. (1981) *Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, New York.
- Titze, I. R. (1973) "The human vocal cords: a mathematical model - part I", *Phonetica*, 28, 129-170.
- Titze, I. R. (1974) "The human vocal cords: a mathematical model - part II", *Phonetica*, 29, 1-21.
- Titze, I. R. (1976) "On the mechanisms of vocal-fold vibration", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 60, 1366-1380.
- Titze, I. R. (1980) "Comments on the myoelastic-aerodynamic theory of phonation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 23, 495-510.
- Titze, I. R. (1984) "Parameterization fo the glottal area, glottal flow and vocal fold contact area", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 75, 570-580.
- Titze, I. R. (1988) "The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83, 1536-1552.
- Titze, I. R. (1992) "Phonation threshold pressure: A missing link in glottal aerodynamics", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91, 2926-2935.
- Titze, I. R. e Strong, W. (1975) "Normal modes in vocal cord tissues", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57, 736-744.
- Titze, I. R. e Talkin, D. (1979) "A theoretical study of the effects of various laryngeal configurations on the acoustics of phonation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 60-74.
- Titze, I. R., Schmidt, S. S. e Titze, M. R. (1995) "Phonation threshold pressure in a physical model of the vocal fold muscosa", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97, 3080-3084.

- Tran, Q. T., Gerratt, B. R., Berke, G. S. e Kreiman, J. K. (1993) "Measurement of Young's modulus in the in-vivo human vocal folds", *Annals of Otolaryngology & Laryngology*, 102, 584-591.
- van den Berg, J. (1958) "Myoelastic-aerodynamic theory of voice production", *Journal of Speech and Hearing Research*, 1, 227-244.
- Voke, P. R. (1993) "Low Reynolds-number subgrid-scale models", *Relatório Técnico ME-FD/94-26*, Departamento de Engenharia Mecânica, University of Surrey, UK.
- Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Tamano, T. E Ohtsubo T. (1975) "Finite element analysis of steady fluid and metal flow", In: (Ed.) R. H. Gallagher et al. *Finite Elements in Fluids*, 1, John Wiley & Sons, London, 73-94.
- Wegel, R. (1930) "Theory of vibration of the larynx", *Bell System Tech Journal*, 9, 207-227.
- Wong, D., Ito, M. R., Cox, Neil, B. E Titze, I. R. (1991) "Observation of perturbations in a lumped-element model of the vocal folds with application to some pathological cases", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89, 383-394.
- Zollenkopf, K. (1970) "Bi-Factorisation - Basic Computational Algorithm and Programming Techniques", In: J. K. Reid (Ed.) *Proceedings of Conference on Large Sparse Sets of Linear Systems*, Oxford, 75-96.

8 Bibliografia Consultada

- Akin, J. E. (1982) *Application and implementation of finite element method*, Academic Press Inc., Orlando.
- Alku, P., Vilkman, E. e Laukkanen, A. (1998) "Parametrization of the voice source by combining spectral decay and amplitude features of the glottal wave", *Journal of Speech, Language and Hearing Research*, 41, 990-1002.
- Barlow, J. (1982) "Constraint relationships in linear and nonlinear finite element analyses", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 521-533.
- Barney, A., Shadle, C. e Davies, P. (1999a) "Fluid flow in a dynamic mechanical model of the vocal folds and tract. I. Measurements and theory", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105, 444-455.
- Barney, A., Shadle, C. e Davies, P. (1999b) "Fluid flow in a dynamic mechanical model of the vocal folds and tract. II. Implications for speech production studies", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105, 456-466.
- Behr, M. (1992) *Stabilized finite element methods for incompressible flow with emphasis on moving boundaries and interfaces*, Tese de doutorado, University of Minnesota.
- Bickley, C. (1991) "Vocal-fold vibration in a computer model of a larynx", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Boone, D. R. e McFarlane, S. C. (1994) *A voz e a terapia vocal*, Artes Médicas, Porto Alegre.
- Chan, S. M. e Brandwajn, V. (1986) "Partial matrix refactorization", *IEEE Transactions on Power Systems*, 1, 193-200.
- Choi, H. G. Choi, H. e Yoo, J. Y. (1997) "A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143, 333-348.
- DeBlois, B. M. (1996) "Quadratic, streamline upwinding for finite element method solutions to 2-D convective transport problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134, 107-115.
- Desai, C. S. e Abel, J. F. (1972) *Introduction to the finite element method*, Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- Engelman, M., Sani, R. L. e Gresho, P. M. (1982) "The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2, 225-238.
- Fant, G. (1960) *Acoustic theory of speech production*. Mouton and Co, Netherlands.
- Fant, G. (1986) "Glottal flow: models and interaction", *Journal of Phonetics*, 14, 393-399.
- Fant, G. e Lin, Q. (1991) "Comments on glottal flow modelling and analysis", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.

- Fletcher, C. (1991a) *Computational techniques for fluid dynamics*, vol 1, Springer-Verlag, New York
- Fletcher, C. (1991b) *Computational techniques for fluid dynamics*, vol 2, Springer-Verlag, New York.
- Fokkema, D., Sleijpen, G. L. G. e Van Der Vorst, H. A. (1998) "Accelerated inexact Newton schemes for large systems of nonlinear equations", *SIAM Journal of Scientific Computation*, 19, 657-674.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981) *Introdução à mecânica dos fluidos*, Ed. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro.
- Fukuda, H., Kawasaki, Y., Kawaida, M., Shiotani, A., Oki, K., Tsuzuki, T., Fujioka, T. e Takayama, E. (1991) "Physiological properties and wave motion of the vocal fold membrane viewed from different directions", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Gilbert, J. R., Moler, C. e Schreiber, R. (1992) "Sparse matrices in Matlab: Design and implementation", *SIAM Journal of Matrix Analysis*, 13, 333-356.
- Goudreau, G. L. e Hallquist, J. O. (1983) "Selection and optimization of nonlinear material models for lagrangian continuum computation", *Recent Developments in Computing Methods for Nonlinear Solid & Structural Mechanics - ASME Joint Meeting*, Houston.
- Gray, S. (1991) "Basement membrane zone injury in vocal nodules" In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Gresho, P. M., Chan, S. T. K., Lee, R. L. e Upson, C. G. (1981) "Solution of the time-dependent, three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations via FEM", *International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flow*, Venice.
- Gresho, P. M., Gartling, D. K., Cliffe, K. A., Garratt, T. J., Spence, A., Winters, K. H., Goodrich, J. W. e Torczynski, J. R. (1993) "Is the steady viscous incompressible 2D flow over a backward-facing step at $Re=800$ stable?", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17, 501-541.
- Guler, I., Behr, M. e Tezduyar, T. (1999) "Parallel finite element computation of free-surface flows", *Computational Mechanics*, 23, 117-123.
- Hallquist, J. O. (1976) "A procedure for the solution of finite-deformation contact-impact problems by the finite element method", *Relatório Técnico UCRL-52066*, Lawrence Livermore Laboratory.
- Hallquist, J. O. (1976) "An efficient method for determining the effects of mass modifications in damped systems", *Journal of Sound and Vibration*, 44, 449-459.
- Hallquist, J. O. e Feng, W. W. (1976) "On the explicit finite element formulation of the dynamic contact problem of hyperelastic membranes", *13th Annual Meeting Society of Engineering Science*, Hampton, Virginia
- Hallquist, J. O., Goudreau, G. L. e Benson, D. J. (1984) "Sliding interfaces with contact-impact in large scale lagrangian computations", *The Third International Conference on Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, Stuttgart, Alemanha.
- Hirano, M., Yoshida, T. e Tanaka, S. (1991) "Vibratory behaviour of human vocal folds viewed from below", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Hubner, K. H. e Thornton, E. A. (1982) *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, New York.
- Hughes, T. J. R. (1995) "Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127, 387-401.
- Johnson, A. R. (1999) "A viscoelastic hybrid shell finite element", *Tenth Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications*, Uxbridge, Reino Unido.
- Johnson, A. R. e Tessler, A. (1996a) "Viscous effects in the elastodynamics of thick beams", *14th Army Symposium on Solid Mechanics*, Myrtle Beach, Carolina do Sul.

- Johnson, A. R. e Tessler, A. (1996b) "A viscoelastic higher-order beam finite element", *Ninth Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications*, Uxbridge, Reino Unido.
- Johnson, A. R., Tanner, J. A. e Mason, A. J. (1999) "Quasi-static viscoelastic finite element model of an aircraft tire", *Relatório Técnico NASA/TM-1999-209141*.
- Katz, I. M., Davis, B. M. e Martonen, T. B. (1999) "A numerical study of particle motion within the human larynx and trachea", *Journal of Aerosol Science*, 30, 173-183.
- Katz, I. M., Martonen, T. B. e Flaa, W. (1997) "Three-dimensional computational study of inspiratory aerosol flow through the larynx: The effect of glottal aperture modulation", *Journal of Aerosol Science*, 28, 1073-1083.
- Kim, S.-W. e Decker, R. A. (1989) "Velocity-pressure integrated versus penalty element methods for high-Reynolds-number flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 9, 43-57.
- Koike Y. e Hirano, M. (1973) "Glottal-area time function and subglottal-pressure variation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54, 1618-1627.
- Kondo, N. e Yamada, S. (1995) "Third-order upwind finite element computation of the incompressible Navier-Stokes equations. Part I. Computation of flow around rectangular cylinders", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127, 87-97.
- Laschefski, H., Braess, D., Hamke, H. e Mitra, N. K. (1994) "Numerical investigation of radial jet reattachment flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18, 629-646.
- Leone, J. M. e Gresho, P. M. (1981) "Finite element simulations of steady, two-dimensional, viscous incompressible flow over a step", *Journal of Computational Physics*, 41, 167-191.
- Liljencrants, J. "Numerical simulations of glottal flow" In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Meneveau, C. e Lund, T. S. (1997) "The dynamic Smagorinsky model and scale-dependent coefficients in the viscous range of turbulence", *Physics Fluids*, 9, 3932-3934.
- Minev, P. D. e Ethier, C. R. (1999) "A semi-implicit projection algorithm for the Navier-Stokes equations with application to flows in complex geometries", *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 73, 223-231.
- Mizukami, A. e Hughes, T. J. R. (1985) "A Petrov-Garlekin finite element method for convection-dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, 181-193.
- Oden, J., Zienkiewicz, O., Gallagher, R. e Taylor, C. (1974) *Finite element methods in flow problems*, UAH Press, Huntsville.
- Olson, M. D. (1975) "Variational-finite element methods for two-dimensional and axisymmetric Navier-Stokes equations", In: *Finite Elements in Fluids*, 1, (Ed.) R. H. Gallagher et al., John Wiley & Sons, London, 57-72.
- Plumpe, M. D., Quatieri, T. F. e Reynolds, D. A. (1999) "Modeling of the glottal flow derivative waveform with application to speaker identification", *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 7, 569-586.
- Qi, Y., e Bi, N. (1996) "A simplified approximation of the four-parameters LF model of voice source", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96, pt. 1, 1182-1185.
- Rao, S. S. (1989) *The finite element method in engineering*, Pergamon Press, Oxford.
- Reddy, J. N. (1993) *An introduction to the finite element methods*, 2. edição, McGraw-Hill, New York.
- Reddy, J. N. e Gartling, D. K. (1994) *The finite element methods in heat transfer and fluid dynamics*, CRC Press, Boca Raton.
- Roache, P. J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque.
- Rubin, P., Baer, T. e Mermelstein, P. (1981) "An articulatory synthesizer for perceptual research", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70, 321-328.

- Sampaio, P. A. B. e Coutinho, A. L. G. A. (2000) "Simulating vortex shedding at high Reynolds numbers", *Proceedings of the Tenth International Offshore and Polar Engineering Conference*, Seattle.
- Sani, R. L., Eaton, B. E., Gresho, P. M., Lee, R. L. e Chan, S. T. K. (1981) "On the solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations via a penalty Galerkin finite element method", *International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flow*, Venice.
- Sani, R. L., Gresho, P. M., Tuerpe, D. R. e Lee, R. L. (1978) "The imposition of incompressibility constraints via variational adjustment of velocity fields", *International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Swansea.
- Sarin, V. e Sameh, A. (1998) "An efficient iterative method for the generalized Stokes problem", *SIAM Journal of Scientific Computation*, 19, 206-226.
- Scherer, R. e Guo, C. "Generalized translaryngeal pressure coefficient for a wide range of laryngeal configurations", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Scherer, R., Shinwari, D., De Witt, K., Zhang, C., Kucinski, B. R. e Afjeh, A. A. (2001) "Intraglottal pressure profiles for a symmetric and oblique glottis with a divergence angle of 10 degrees", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109, 1616-1629.
- Shadle, C., Barney, A. e Thomas, D. (1991) "An investigation into the acoustics and aerodynamics of the larynx", In: Gauffin, J. e Hammaberg, B. (Eds) *Vocal fold physiology – Acoustic, perceptual, and physiological aspects of voice mechanisms*, Singular Publishing Group Inc., San Diego.
- Smith, M. E., Berke, G. S., Gerratt, B. R. E Kreiman, J. (1992) "Laryngeal paralyses: theoretical considerations and effects on laryngeal vibration", *Journal of Speech and Hearing Research*, 35, 545-554.
- Sondhi, M. M. e Schroeter, J. (1987) "A hybrid time-frequency domain articulatory speech synthesizer", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35, 955-967.
- Sundberg, J. e Gauffin, J. (1989) "Spectral correlates of glottal voice source waveform characteristics", *Journal of Speech and Hearing Research*, 32, 556-565.
- Svec, J. G. (2000) *On vibration properties of human vocal folds: voice registers, bifurcations, resonance characteristics, development and application of videokymography*, Tese de doutorado, University of Groningen.
- Taylor, C. e Hood, P. (1973) "A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique", *Computers and Fluids*, 1, 73-100.
- Thomas, T. J. (1986) "A finite element model of fluid flow in the vocal tract", *Computers, Speech and Language*, 1, 131-151.
- Timoshenko, S. P. e Goodier, J. N. (1970) *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Kogakusha Co. Ltd, Tokyo.
- Tinney, W. F., Brandwajn, V. e Chan, S. M. (1985) "Sparse vector methods", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 104, 295-301.
- Titze, I. R. e Sundberg, J. (1992) "Vocal intensity in speakers and singers", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91, 2936-2946.
- Toit, C. G. (1998) "Finite element solution of the Navier-Stokes equations for incompressible flow using a segregated algorithm", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151, 131-141.
- Turek, S. (1997) "On discrete projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations: an algorithmical approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143, 271-288.
- van den Berg, J., Zantema, J. e Doornenbal Jr., P. (1957) "On the air resistance and the Bernoulli effect of the human larynx", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 29, 626-631.
- van den Berg, J. e Tan, T. (1959) "Results of experiments with human larynges", *Practica Oto-Rhino-Laryngologica*, 21, 425-450.
- Yeckel, A. e Derby, J. J. (1999) "On setting a pressure datum when computing incompressible flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29, 19-24.

- Yeung, M.-C. e Chan, T. F. (1999) “ML(K)BiCGSTAB: A BiCGSTAB variant based on multiple Lanczos starting vectors”, *SIAM Journal of Scientific Computation*, 21, 1263-1290.
- Zhang, L. (1994) *Study of human laryngeal motion through mathematical modeling*, Tese de Doutorado, University of Maryland.
- Zhang, S.-L. (1997) “GPBi-CG: Generalized product-type methods based on Bi-CG for Solving Nonsymmetric Linear Systems”, *SIAM Journal of Scientific Computation*, 18, 537-551.
- Zienkiewicz, O. C. (1977) *The Finite element methods*, 3o. Ed., McGraw-Hill Co., New York.