Campus de São Carlos

ANÁLISE DE ESTABILIDADE
TRANSITÓRIA: ESTUDOS DO MÉTODO
BCU; PROPOSTA DE ESTIMATIVA DE
AMORTECIMENTO PARA ESTABILIDADE
ABSOLUTA EM "OMIBS"

LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO

Orientador: Prof. Newton G. Bretas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA:
ESTUDOS DO MÉTODO BCU; PROPOSTA DE
ESTIMATIVA DE AMORTECIMENTO PARA
ESTABILIDADE ABSOLUTA EM "OMIBS"**

LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Newton G. Bretas

DEDALUS - Acervo - EESC

31100013472

São Carlos

1997

Classe	TESE
Cod.	0168
Tombo	T 184/98

st 0934169

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

A334a Alberto, Luís Fernando Costa
Análise de estabilidade transitória : estudos
do método BCU; proposta de estimativa de
amortecimento para estabilidade absoluta em
"OMBIS" / Luís Fernando Costa Alberto. -- São
Carlos, 1997.

Dissertação (Mestrado). -- Escola de Engenharia
de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1997.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Newton G. Bretas.

1. Estabilidade transitória. 2. Método BCU.
3. Estimativa de amortecimento. I. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO**

Dissertação defendida e aprovada em 08-10-1997
pela Comissão Julgadora:

Prof. Titular **NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **LAURENCE DUARTE COLVARA**
(Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira)

Prof. Adjunto **ILDEMAR CASSANA DECKER**
(Universidade Federal de Santa Catarina)

Prof. Doutor **DENIS VINICIUS COURY**
Coordenador da Área de Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus avós Maria e José
pela significativa participação,
durante vários anos, em meus estudos.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador Newton Geraldo Bretas pelo incentivo e pela total confiança em minha capacidade de trabalho.

À Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.

Ao professor Hildebrando Munhoz Rodrigues pelos excelentes ensinamentos, sugestões e discussões que contribuíram significativamente à realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS _____	vi
LISTA DE TABELAS _____	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS _____	ix
LISTA DE SÍMBOLOS _____	x
RESUMO _____	xii
ABSTRACT _____	xiii
1. INTRODUÇÃO _____	1
2. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA _____	4
3. MODELAGEM CLÁSSICA DE SISTEMAS DE POTÊNCIA EM ESTABILIDADE TRANSITÓRIA _____	6
4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA ATRAVÉS DE MÉTODOS ENERGÉTICOS _____	11
4.1 Método de Lyapunov _____	11
4.2 Análise de Estabilidade Transitória Através do Método de Lyapunov _____	14
5. PROBLEMAS DO MÉTODO BCU PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA _____	15
6. ESTUDOS E CARACTERIZAÇÃO DA FRONTEIRA DA ÁREA DE ATRAÇÃO _____	27
6.1 Introdução _____	27
6.2 Campos de Morse-Smale _____	29
6.3 Caracterização da Fronteira da Área de Atração _____	29
6.4 Verificação das Propriedades para os Sistemas de Potência _____	40
6.5 Sistema Gradiente Associado _____	45

7. ESTIMATIVA DO AMORTECIMENTO PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA “MULTI-SWING” EM SISTEMAS DE UMA MÁQUINA VERSUS BARRAMENTO INFINITO _____	56
7.1 Introdução _____	56
7.2 Sistema de Uma Máquina Versus Barramento Infinito _____	58
7.3 Determinação do Amortecimento Crítico _____	63
7.4 Exemplo _____	66
8. CONCLUSÕES _____	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	69

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Sistema Elétrico de Potência _____	7
Figura 02 - Interpretação Geométrica do Teorema de Lyapunov _____	13
Figura 03 - Ilustração Geométrica da Estimativa da Área de Atração Utilizando o Conceito de Ponto de Equilíbrio de Controle _____	16
Figura 04 - Interpretação Geométrica do Algoritmo BCU _____	17
Figura 05 - Sistema de Uma Máquina Contra um Barramento Infinito _____	18
Figura 06 - Curto na Barra 1 do Sistema da Figura 05, tempo de abertura=0,259s, resistência de falta=0,03 pu _____	19
Figura 07 - Energia Potencial do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito da Figura 05 _____	20
Figura 08 - Retrato de Fase do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito da Figura 05 _____	20
Figura 09 - Sistema de 3 Barras e 3 Geradores _____	21
Figura 10 - Falta 1 com Tempo de Abertura de 0,194s _____	22
Figura 11 - Falta 1 com Tempo de Abertura de 0,195s _____	22
Figura 12 - Falta 1 com Tempo de Abertura de 0,197s _____	22
Figura 13 - Retrato de Fase do Sistema Reduzido Associado ao Sistema de 3 Barras e 3 Geradores da Figura 09 _____	23
Figura 14 - Falta 2 com Tempo de Abertura de 0,145s _____	24
Figura 15 - Falta 2 com Tempo de Abertura de 0,144s _____	24
Figura 16 - Falta 2 com Tempo de Abertura de 0,457s _____	24
Figura 17 - Idéia Geométrica da Demonstração do Teorema 2 _____	32

Figura 18 - Transitividade da Condição de Transversalidade _____	34
Figura 19 - Ilustração do λ -Lema _____	36
Figura 20 - Ilustração do PEBS _____	47
Figura 21 - Energia Potencial do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito _____	48
Figura 22 - Retrato de Fase do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito quando as condições de transversalidade são satisfeitas _____	54
Figura 23 - Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito _____	58
Figura 24 - Energia Potencial do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito _____	60
Figura 25 - Retrato de Fase do Sistema Conservativo de Uma Máquina versus Barramento Infinito _____	60
Figura 26 - Área de Atração de um Sistema que Possui um Amortecimento Levemente Positivo _____	61
Figura 27 - Estimativa da Área Crítica _____	64
Figura 28 - Condições Iniciais Utilizadas para o Cálculo das Órbitas do Sistema _____	67
Figura 29 - Método Iterativo para Encontrar o Amortecimento Crítico _____	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados do BCU para o Sistema de 3 Barras e 3 Geradores	25
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- BCU - Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point
- COA - Center of Angle as Reference
- PEBS - Potential Energy Boundary Surface
- OMIBS - “One Machine Infinite Bus Systems”, Uma Máquina versus Barramento Infinito

LISTA DE SÍMBOLOS

δ_i	- ângulo do rotor da máquina i
δ_{co}	- ponto de equilíbrio de controle do sistema gradiente reduzido associado
ω_i	- velocidade angular do rotor da máquina i
ω_o	- velocidade síncrona
ϕ_{ij}	- ângulo da impedância Y_{ij}
$A(x_s)$	- Área de Atração do ponto de equilíbrio x_s
D_{cr}	- Amortecimento Crítico
D_i	- Constante de Amortecimento da máquina i
E_i	- Força Eletromotriz da máquina i
G_{ij}	- Condutância referente a impedância Y_{ij}
M_i	- Constante de Inércia da máquina i
p_{ei}	- Potência Elétrica injetada na rede pela máquina i
p_{mi}	- Potência Mecânica aplicada á máquina i
t	- Tempo
t_{ab}	- Tempo de Abertura
t_{cr}	- Tempo Crítico de Abertura
V	- Função de Lyapunov ou Energia Total
V_k	- Energia Cinética
V_p	- Energia Potencial
V_{ab}	- Energia do Sistema no Tempo de Abertura
V_{cr}	- Energia Crítica

- $W^s(x_i)$ - Variedade Estável do Ponto de Equilíbrio x_i
 $W^u(x_i)$ - Variedade Instável do Ponto de Equilíbrio x_i
 $x_f(t)$ - Trajetória do Sistema durante a Falta
 Y_{BUS} - Matriz Admitância Nodal
 Y_{ij} - Elemento ij da Matriz Y_{BUS}

RESUMO

O crescimento da demanda de energia e das interligações entre os Sistemas Elétricos de Potência, assim como a necessidade de prestação de melhores serviços exigem que as técnicas de análise destes sejam cada vez mais rápidas e refinadas. Dentre estas técnicas, as análises de estabilidade transitória através de métodos energéticos são estudadas e o desenvolvimento de técnicas computacionais que permitam a análise em tempo real da estabilidade transitória é o principal objetivo deste trabalho. Os métodos energéticos são métodos diretos adequados à aplicações em tempo real, pois obtém informações a respeito da estabilidade diretamente das equações diferenciais do sistema, sem a necessidade do conhecimento das soluções das equações diferenciais. A aplicação de métodos energéticos aos estudos de estabilidade transitória evoluiu significativamente nos últimos anos. Esta evolução culminou com o desenvolvimento do método BCU. Este método está fundamentado no conceito de ponto de equilíbrio de controle e portanto, garante apenas a existência ou a estabilidade do primeiro “swing”. Embora este seja um método eficiente, existe uma grande quantidade de casos que são estáveis no primeiro “swing”, mas o sistema perde a estabilidade em “swings” subsequentes. Para resolver este problema, desenvolveu-se uma técnica de estimativa do parâmetro amortecimento para o caso de uma máquina versus barramento infinito. Estima-se o amortecimento necessário que a máquina deverá possuir tal que a estabilidade nos “swings” subsequentes seja garantida. Esta metodologia é utilizada em conjunto com o BCU garantindo a satisfação da condição de transversalidade exigida no desenvolvimento teórico deste método. Maiores investigações serão necessárias para estimar os amortecimentos em sistemas multimáquinas.

Palavras-chave: Estabilidade Transitória, Método BCU, Estimativa de Amortecimento

ABSTRACT

The increase of load demand and interconnection between power systems as well as the necessity of offering better customer services require fast and refined techniques to analyze these systems. In particular, the transient stability analysis is studied and the development of computational techniques suitable to real-time transient stability analysis is the main aim of this work. The energetic methods are direct methods suitable to real-time applications because they obtain qualitative information about the system without the knowledge of the differential equation solutions. The application of energetic methods to the transient stability analysis developed significantly in the last years. This evolution culminated with the development of the BCU method. This method is based on the concept of controlling equilibrium point, therefore it only guarantees the existence of the first swing. In spite of the efficiency of this method, there exists a high number of cases where the BCU predicts stability to the first swing but the system becomes unstable or loses synchronism in future swings. In order to solve this problem, a methodology to estimate the damping coefficient was developed to the machine versus infinite bus case. The damping coefficient that must be applied to the machine to guarantee the stability in future swings is estimated. This methodology is used together with the BCU method guaranteeing the satisfying of the transversality condition required by the BCU theory. Further investigations must be carried out to extend the methodology to multimachine systems.

Key-Words: Transient Stability, BCU Method, Damping Coefficient Estimation

1 INTRODUÇÃO

A complexidade do controle dos Sistemas Elétricos de Potência tem aumentado com o crescimento da demanda, das interligações e com a necessidade de prestação de melhores serviços. Os sistemas passaram a operar mais próximos dos limites de geração e transmissão, e conseqüentemente mais próximos dos limites da estabilidade. Os riscos de “black-out” são maiores. As proteções devem ser mais eficientes, e os estudos de estabilidade devem ser mais rápidos e precisos.

O estudo de estabilidade transitória traduz-se matematicamente no estudo da estabilidade de um sistema de equações diferenciais não lineares e autônomo. Como este sistema não possui solução analítica, a abordagem clássica utiliza-se de inúmeras soluções numéricas iterativas para a obtenção do tempo crítico de abertura. Obviamente este processo não é adequado a aplicações em tempo real.

Métodos diretos proporcionam grande velocidade na determinação do tempo crítico de abertura, permitindo que ações que garantam estabilidade sejam efetuadas em tempo hábil, aumentando consideravelmente a confiabilidade do sistema. Dentre os métodos existentes, o método de Lyapunov tem se destacado por ser um método energético e direto adequado ao estudo da estabilidade de sistemas não lineares. Maiores detalhes a respeito deste método podem ser encontrados em BRAUER & NOHEL (1969) e em PAI (1981).

Em geral, os sistemas não lineares não são estáveis globalmente (“in the large”). Existe um conjunto de condições iniciais que resultam em trajetórias estáveis. Esse conjunto denomina-se área de atração. Esta contém o ponto de operação estável, e a determinação de sua fronteira é o principal objetivo e o maior problema computacional na utilização de métodos diretos. Sabe-se que existem pontos de equilíbrio instáveis, ao redor do ponto de equilíbrio estável, que estão na fronteira desta região; portanto fornecem informações importantes a seu respeito.

No passado calculavam-se todos os pontos de equilíbrio instáveis e tomava-se como energia crítica o ponto de equilíbrio instável de menor energia ("closest equilibrium point"). CHIANG & THORP (1989) mostraram que este método apresenta resultados absolutos a respeito da estabilidade, embora muito conservativos para a maioria dos defeitos.

O PEBS(Potential Energy Boundary Surface) embora seja um método bastante rápido que não exige o cálculo de pontos de equilíbrio, falha, em muitos casos, na determinação do tempo crítico como mostram CHIANG et al. (1988).

O conceito de "ponto de equilíbrio instável de controle (controlling unstable equilibrium point)" evoluiu desde os modos aproximados de estabilidade até o método BCU (Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point) proposto por CHIANG et al. (1991). Estes definiram precisamente o Ponto de Equilíbrio Instável de Controle e, por este motivo, seus resultados são mais precisos e eficientes que todos os outros. O conceito de Ponto de Equilíbrio de Controle reduz a conservatividade do "closest equilibrium point" através da determinação do ponto de equilíbrio mais "importante" e significativo à limitação da área de atração para o primeiro "swing". Admite-se que os amortecimentos usuais em sistemas de potência encarreguem-se de garantir a estabilidade nos demais "swings" subsequentes ao primeiro.

Embora o BCU tenha contribuído significativamente à determinação do tempo crítico de abertura, LLAMAS et al. (1995) mostraram que, em certas condições de falta, algumas hipóteses dos teoremas aplicados ao BCU falham e este prediz estabilidade em muitos casos que não são estáveis. Em verdade, todos os métodos que se utilizam do conceito de ponto de equilíbrio de controle garantem apenas a existência do primeiro "swing". Se os amortecimentos não forem suficientemente grandes, o sistema poderá possuir energia suficiente para tornar-se instável nos "swings" subsequentes.

Questões como, qual amortecimento é suficiente ao sistema para garantir-se a estabilidade de forma absoluta, ou qual o novo tempo crítico de abertura que garanta a estabilidade absoluta na presença de um certo amortecimento, devem ser

respondidas. Além de respondê-las, métodos computacionais que permitam a aplicação destes conceitos em tempo real devem ser desenvolvidos.

Neste trabalho analisam-se o método BCU e seus problemas. Além disto, propõe-se um método para a estimação do amortecimento da máquina, necessário à garantia da estabilidade em “swings” subsequentes ao primeiro, para o problema de uma máquina versus o barramento infinito.

2 ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

Um Sistema Elétrico de Potência é constituído basicamente por geradores síncronos, cargas e linhas de transmissão que interligam estes elementos. O fluxo de potência nas linhas está intimamente relacionado às diferenças entre os ângulos de fase dos barramentos. Quando o sistema está operando em regime permanente, ou seja, quando suas grandezas não variam com o tempo, as diferenças angulares devem permanecer constantes para que o fluxo de potência também permaneça constante.

Nesta situação, todas as máquinas síncronas possuem a mesma velocidade angular (ângulos elétricos), e diz-se que o sistema está operando em um ponto de equilíbrio estável, onde a potência elétrica gerada nas máquinas é exatamente igual à soma das potências absorvidas nas cargas, mais as perdas nas linhas. O sistema permanecerá indefinidamente neste ponto até que algum distúrbio ou perturbação remova-o deste estado. Quando isto ocorre, deseja-se saber se o sistema encontrará uma situação de operação estável, aproximando-se de um ponto de equilíbrio, ou torna-se instável afastando-se indefinidamente de um possível ponto de operação.

Quando os distúrbios são pequenos, o estudo de estabilidade é conhecido como *estabilidade dinâmica*, e o modelo matemático para tal estudo é um conjunto de equações diferenciais lineares invariantes no tempo. Quando os distúrbios são grandes, as não linearidades, inerentes aos sistemas de potência, não podem ser desprezadas, e o estudo de estabilidade é conhecido como *estabilidade transitória*. O modelo matemático utilizado neste estudo é um conjunto de equações diferenciais não-lineares. Neste texto, trata-se apenas da estabilidade transitória, e daqui em diante, concentrar-se-á a atenção neste tipo de estudo.

Imagine que o sistema de potência esteja operando em regime permanente com as velocidades das máquinas constantes e iguais à ω_0 e com os ângulos de fase δ_i^0 . Nestas condições, a potência mecânica fornecida aos geradores é exatamente

igual à potência consumida nas cargas mais a potência perdida nas linhas. Suponha que no tempo $t=t_0$ ocorra um grande distúrbio, como a perda de uma linha ou uma falta em algum barramento. O distúrbio causa um desequilíbrio de potência; existirá um excesso ou déficit de energia nas máquinas que ocasionará a aceleração ou desaceleração de seus rotores. Conseqüentemente os ângulos das máquinas alteram-se na tentativa de restabelecer o equilíbrio de potência.

Se o defeito não é muito grave, o sistema pode, por si só, encontrar um novo ponto de equilíbrio restabelecendo o balanço de potências para uma nova configuração de ângulos δ_i 's. Quando o distúrbio (defeito) é mais significativo, o sistema torna-se instável, ou seja, não encontra um estado no qual ocorra o equilíbrio das potências. Nesta situação, é necessário atuar no sistema isolando o defeito, ou até realizando rejeição de cargas. Ao fazer-se isto, o sistema passa a ter uma nova configuração e deseja-se saber se o excesso de energia cinética, adquirida durante o defeito pelas máquinas, pode ser absorvida pela nova configuração do sistema, de forma a manter-se estável.

Se após a eliminação do defeito o sistema encontrar um ponto de operação, este é dito ser estável. A atuação no sistema, de forma a eliminar o defeito, deve ser feita rapidamente para que se garanta a estabilidade. O tempo máximo em que isto poderá ser feito, tal que o sistema permaneça estável, é conhecido como tempo crítico de abertura " t_{cr} ". Assim, a eliminação do defeito antes do tempo crítico proporciona um sistema estável, e após o tempo crítico um sistema instável.

3 MODELAGEM CLÁSSICA DE SISTEMAS DE POTÊNCIA EM ESTABILIDADE TRANSITÓRIA

Para estudar-se a estabilidade de um sistema, é necessário que este seja convenientemente descrito através de equações matemáticas. As equações diferenciais, que descrevem o comportamento dinâmico do sistema, podem ser obtidas através de um balanço de potência em cada máquina deste. Ou seja, a diferença entre a potência mecânica injetada na máquina e a potência elétrica entregue à rede por esta é igual à potência acelerante mais a potência de amortecimentos, como apresentado na equação (1).

$$M_i \ddot{\delta}_i + D_i \dot{\delta}_i = p_{mi} - p_{ei} \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

onde M_i - constante de inércia da máquina i

D_i - constante de amortecimento

p_{mi} - Potência mecânica injetada

p_{ei} - Potência elétrica injetada na rede pelo barramento i

δ_i - ângulo do rotor da máquina referido à velocidade síncrona.

n - número de geradores

A potência elétrica injetada p_{ei} é uma expressão complexa baseada nas equações diferenciais da máquina síncrona, e nas equações algébricas da rede e das máquinas. No estudo de estabilidade pretendido, não se faz necessária uma representação tão detalhada desta. Estabelecem-se algumas suposições simplificadoras de forma que p_{ei} possa ser descrita por uma expressão analítica em termos de δ_i 's, isto é:

- Admite-se que a rede esteja em regime permanente senoidal, ou seja, as constantes de tempo da rede de transmissão são desprezíveis quando comparadas à frequência eletromecânica de oscilação.
- A máquina síncrona é representada por uma fonte de tensão de magnitude constante, determinada pelas condições de regime permanente, existentes antes da falta, em série com uma reatância que é comumente chamada de reatância transitória de eixo direto.
- O ângulo de fase da tensão atrás da reatância transitória coincide com o ângulo do rotor δ_i .
- As cargas são representadas por impedâncias constantes calculadas das condições de tensão pré-falta obtidos de um fluxo de carga.
- Supõe-se que a potência mecânica p_{mi} permanece constante e igual ao seu valor pré-falta durante todo o intervalo de tempo de interesse para o estudo (1 a 2s). Embora existam atualmente reguladores de atuação rápida que invalidam esta suposição.

FIGURA 1 - Sistema Elétrico de Potência

Seja o sistema elétrico de potência da Figura 1 constituído por n geradores e pela rede de transmissão descrita pela matriz admitância $\underline{Y}_{BUS}$. Os n geradores estão conectados à rede através de suas reatâncias transitórias nos n primeiros nós da rede.

Nos próximos m nós da rede só existem cargas, e a rede de transmissão $\tilde{Y}_{BUS}$ completa possui $2n+m$ nós.

Do ponto de vista do estudo de estabilidade de frequência, está-se interessado primariamente na variação dos ângulos das máquinas com o tempo, e não com a variação das tensões nos barramentos. Portanto, pode-se reduzir $\tilde{Y}_{BUS}$ aos n primeiros nós obtendo-se uma matriz admitância reduzida de ordem n , da qual escrevem-se as expressões para a potência elétrica p_{ei} . É importante lembrar-se que os n nós da matriz reduzida são nós internos às máquinas, e a topologia real da rede fica mascarada. No entanto este artifício permite a obtenção de uma expressão analítica para p_{ei} em função dos ângulos δ_i 's, isto é:

$$p_{ei} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \cos(\phi_{ij} - (\delta_i - \delta_j)) \quad (2)$$

Substituindo-se na equação diferencial a expressão de p_{ei} e decompondo-se a função coseno, obtém-se finalmente a equação dinâmica do sistema que descreve o comportamento dos ângulos no tempo:

$$M_i \ddot{\delta}_i + D_i \dot{\delta}_i = p_{mi} - |E_i|^2 G_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \right] \quad (3)$$

onde:

$$D_{ij} = |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \cos \phi_{ij} = |E_i| |E_j| G_{ij}$$

$$C_{ij} = |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \sin \phi_{ij} = |E_i| |E_j| B_{ij}$$

Deseja-se determinar se um sistema é estável ou não para uma determinada contingência. Para ilustrar-se tal procedimento, imagine um sistema operando em regime permanente. Nesta situação, $\ddot{\delta}_i = 0$ e $\dot{\delta}_i = 0$, $(i = 1, \dots, n)$, ou seja, os ângulos δ_i 's permanecem constantes e podem ser determinados a partir de um fluxo de carga. A matriz admitância utilizada no fluxo de carga é obtida da topologia da rede em operação normal, comumente chamada de caso base.

Suponha que no tempo $t=0$ ocorra uma falta. Esta ocasiona alterações na topologia da rede e conseqüentemente na matriz admitância. Obtém-se então um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema em falta desde o tempo $t = 0$ até o tempo de abertura ou tempo de eliminação do defeito " t_{ab} ". No isolamento do defeito, ocorre outra alteração na topologia da rede. Portanto, um novo conjunto de equações diferenciais passam a descrever o comportamento do sistema (sistema pós-falta) para tempos maiores que o tempo de abertura.

O sistema é descrito matematicamente por dois conjuntos de equações diferenciais, sendo que um deles descreve o comportamento dinâmico do sistema durante a falta, e o outro após a eliminação do defeito (pós-falta). Estes se diferenciam devido à alterações na matriz admitância que alteram os termos C_{ij} e D_{ij} de p_{ei} .

Sistema em falta:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i & 0 < t \leq t_{ab} & \quad (4) \\ M_i \dot{\omega}_i + D_i \omega_i &= p_{mi} - p_{ei}^f & \delta_i(0) &= \delta_i^0, \omega_i(0) = 0 \\ & & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Sistema pós-falta:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i & t &\geq t_{ab} \\ M_i \dot{\omega}_i + D_i \omega_i &= p_{mi} - p_{ei}^{pf} & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

As condições iniciais, para as equações do pós-falta, são determinadas da solução do sistema de equações diferenciais do sistema faltoso calculada no tempo de abertura “ t_{ab} ”. Dada uma contingência, deseja-se descobrir qual o máximo valor que o tempo de abertura pode assumir, de forma que o sistema ainda permaneça estável, em outras palavras, deseja-se determinar o tempo crítico de abertura para programação dos relés de proteção.

É importante observar que não se está determinando a estabilidade de um conjunto de equações diferenciais, mas sim, de dois conjuntos com uma descontinuidade estrutural no tempo. Portanto, a solução deste problema a princípio só pode ser obtida através de soluções numéricas das equações diferenciais. Para determinar-se o tempo crítico de abertura, efetua-se iterativamente uma seqüência de simulações.

A simulação numérica de um sistema de potência de grande porte é algo que depende de muita memória e muito tempo de computação. Soluções numéricas são apenas viáveis para estudos “off-line” de planejamento, expansão e projeto.

4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA ATRAVÉS DE MÉTODOS ENERGÉTICOS

4.1 Método de Lyapunov

Esta técnica de determinação da estabilidade de um sistema foi descoberto por Lyapunov ao final do século XIX. O método de Lyapunov é um método direto de determinação da estabilidade pois, é aplicado diretamente às equações diferenciais sem que seja necessário o conhecimento de sua solução. Além de fornecer um critério para determinação da estabilidade, este permite estimar a região de estabilidade assintótica.

A idéia do método baseia-se nos resultados de Lagrange estabelecidos por volta de 1800: “Se uma certa posição de repouso de um sistema mecânico conservativo tem energia potencial mínima, então esta posição corresponde a um ponto de equilíbrio estável; se a posição de repouso não corresponde a um mínimo de energia potencial, o ponto de equilíbrio é instável”.

Entende-se por um sistema conservativo aquele em que a função “força” $\underline{f}(\underline{x})$ é determinada por uma função potencial U pela relação $\underline{f}(\underline{x}) = -\text{grad } U$, onde U é a função energia potencial do sistema. O método de Lyapunov é basicamente uma generalização das idéias de Lagrange. Para expô-lo considerar-se-á apenas sistemas autônomos da forma:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (6)$$

onde f e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, ($i = 1, \dots, n$) são contínuas numa região D do espaço n dimensional. Admitir-se-á que D contém a origem no seu interior e que a origem é um ponto crítico isolado da equação. Apresentar-se-á um critério para determinação da estabilidade da solução zero uma vez que se pode sempre transformar o problema para a investigação do ponto crítico na origem por definição de novas variáveis (translação do eixo de coordenadas).

Teorema 1: *Se existir uma função escalar $V(\underline{x})$ definida positiva, para a qual $\frac{dV(\Phi(t))}{dt} \leq 0$ em alguma região Ω contendo a origem, então a solução zero de $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ é estável nesta região.*

A função $V(\underline{x})$ é conhecida como função de Lyapunov. O Teorema 1 apresenta um caminho para estimar a região de estabilidade ou área de atração mas não diz nada a respeito de como encontrar a função $V(\underline{x})$. Um segundo problema do Teorema 1 é que este é uma condição suficiente para determinação da estabilidade e não uma condição necessária. Isto significa que, mesmo que a condição do teorema seja violada, nada se pode afirmar a respeito da estabilidade do sistema.

Para compreender o significado do Teorema 1, seria melhor observá-lo geometricamente através de um exemplo. Seja o sistema descrito pelas variáveis de estado $\underline{y}$ e pela equação $\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y})$ onde $\underline{y}=\underline{0}$ é o ponto crítico em estudo. Seja $V(\underline{y})$ uma função definida positiva em uma região Ω , ou seja, $V(\underline{y}) \geq 0$ para todo $\underline{y}$ e $V(\underline{y})=0$ somente para $\underline{y}=\underline{0}$. $V(\underline{y})=c$, para $c>0$, corresponde a uma superfície no espaço de estado. A Figura 2 ilustra o caso de 2 dimensões.

FIGURA 2 - Interpretação geométrica do teorema de Lyapunov

Desenvolvendo $\frac{dV(\underline{\Phi}(t))}{dt}$ pela regra da cadeia:

$$\frac{dV(\underline{\Phi}(t))}{dt} = \text{grad}V(\underline{y}) \cdot \underline{f}(\underline{y}) \quad (7)$$

Observe que a derivada de V é o produto escalar de dois vetores. $\underline{f}(\underline{y})$ é um vetor que aponta no sentido da tangente à trajetória do sistema naquele ponto, e $\text{grad}V$ é um vetor normal, no sentido de crescimento de V , à curva $V(\underline{y})=c$. Como $\frac{dV(\underline{\Phi}(t))}{dt} \leq 0$ em todos os pontos da região Ω , o ângulo formado entre estes dois vetores é obtuso e a trajetória tende a se aproximar do ponto crítico, caracterizando a estabilidade, ou seja, $\underline{f}(\underline{y})$ aponta para dentro da superfície $V(\underline{y})=c$. Portanto, Ω está contido na área de atração do sistema e uma maneira de estimá-la é procurar o máximo valor que a constante c pode assumir tal que o conjunto $\{y: V(y) < c\}$ esteja contido em Ω . Observe que este conjunto poderá ser uma estimativa bastante conservativa da área de atração, sua utilização é justificada pela simplicidade e operacionalidade de sua definição.

Informações detalhadas a respeito do método de Lyapunov podem ser encontradas em BRAUER & NOHEL (1969).

4.2 Análise de Estabilidade Transitória Através do Método de Lyapunov

No Capítulo 3 verificou-se que o Sistema de Potência, para efeito de análise de estabilidade transitória, é descrito matematicamente por um conjunto de equações diferenciais com uma descontinuidade, no tempo, dos parâmetros da potência elétrica p_{ei} . Esta descontinuidade é consequência das alterações que ocorrem no sistema de transmissão no momento da eliminação do defeito. Seria complicado construir uma função de Lyapunov para um sistema de equações com uma descontinuidade no tempo, portanto, divide-se o problema de análise da estabilidade em Sistemas de Potência em três passos:

- i) Constrói-se uma função de Lyapunov V para o sistema pós-falta.
- ii) Estima-se a região de atração ao redor do ponto de equilíbrio estável pós-falta definida pelo conjunto $\{x: V(\underline{x}) < V_{cr}\}$.
- iii) Integram-se as equações diferenciais do sistema em falta até que $V(\underline{x}) = V_{cr}$; o tempo em que isto ocorrer será uma estimativa do tempo crítico de abertura t_{cr} .

A construção de uma função de Lyapunov não é tarefa simples, pois não existe nenhum método sistemático que permita a obtenção de funções de Lyapunov para sistemas não lineares. Estes aspectos não serão discutidos neste trabalho. Na literatura existem várias propostas de funções de Lyapunov para sistemas de potência. Uma excelente discussão sobre o assunto pode ser encontrada no artigo de CHIANG (1989). O passo iii) consiste simplesmente da solução numérica das equações diferenciais do sistema em falta, e do cálculo da função energia $V(\underline{x})$ em cada passo da solução até que $V(\underline{x}) = V_{cr}$ donde determina-se t_{cr} . O passo ii) tem sido o maior problema na determinação da estabilidade.

Muitos métodos têm sido propostos para a estimação da área de atração. Estes evoluíram com o passar do tempo e atualmente, o método mais eficiente na estimação da área de atração é o método BCU desenvolvido por CHIANG et al. (1991) o qual será descrito a seguir detalhadamente.

5 PROBLEMAS DO MÉTODO BCU PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA

O método BCU fundamenta-se no conceito de ponto de equilíbrio instável de controle para a estimação da área de atração. A idéia deste conceito reside no fato de que não é necessário estimar a área de atração do sistema por completo, apenas a parte importante, relativa ao defeito em estudo, deve ser estimada. Todos os métodos que se utilizam desta idéia funcionam segundo o algoritmo a seguir:

Procedimento de análise de estabilidade através do conceito de ponto de equilíbrio de controle:

Passo 1 : Determina-se o ponto de equilíbrio instável de controle x_c correspondente à trajetória faltosa $x_f(t)$ (existem diversos métodos para encontrar o ponto de equilíbrio de controle; dentre eles destacam-se o critério de aceleração associado aos modos aproximados de instabilidade e o BCU)

Passo 2 : Determina-se o valor da energia crítica como sendo o valor da função energia calculada no ponto de equilíbrio instável de controle:

$$V_{cr} = V(x_c)$$

Utilizar-se-á a superfície de energia constante $\mathcal{S}(V_{cr})$ como sendo a aproximação da parte importante da fronteira da área de atração.

Passo 3 : Calcula-se a função energia do sistema pós-falta no instante da abertura:

$$V_{ab} = V(x_f(t_{ab}))$$

Passo 4 : Se $V_{ab} < V_{cr}$ o sistema é estável, caso contrário o sistema é instável.

A Figura 3 ilustra geometricamente o procedimento decrito anteriormente.

FIGURA 3 - Ilustração geométrica da estimativa da área de atração utilizando o conceito de ponto de equilíbrio de controle.

A eficiência do método BCU está justamente na definição precisa, baseada em teoria matemática, do ponto de equilíbrio instável de controle. Seja o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do sistema pós-falta:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i \\ M_i \dot{\omega}_i &= p_{mi} - p_{ei} - D_i \omega_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Para encontrar o ponto de equilíbrio de controle, o método BCU utiliza-se da relação existente entre a fronteira de estabilidade do sistema original (8) e a fronteira de estabilidade do sistema reduzido (9):

$$\dot{\delta}_i = p_{mi} - p_{ei} \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

segundo o algoritmo a seguir:

Algoritmo BCU:

- i) Da trajetória do sistema em falta $x_f(t)=(\delta(t),\omega(t))$, detecta-se o ponto de saída (“exit point”) δ^* que é o ponto em que a projeção da trajetória $\delta(t)$ cruza a fronteira de estabilidade do sistema reduzido.
- ii) Utiliza-se o ponto δ^* como condição inicial e resolve-se numericamente as equações diferenciais do sistema reduzido para encontrar o mínimo local de $\sum_{i=1}^n \|f_i(\delta)\|$; seja este ponto δ_o^* .
- iii) Utiliza-se o ponto δ_o^* como condição inicial para encontrar o zero da função $f(\delta)$, ou seja, encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle do sistema reduzido δ_{co}^* .
- iv) O ponto de equilíbrio instável de controle do sistema pós-falta será $(\delta_{co}^*, 0)$.

FIGURA 4 - Interpretação geométrica do algoritmo BCU

Para encontrar o ponto no qual a projeção da trajetória do sistema em falta cruza a fronteira de estabilidade do sistema reduzido pós-falta no passo i), verifica-se o momento no qual a energia potencial atinge um máximo, durante a trajetória. No

passo ii), a função $\sum_{i=1}^n \|f_i(\delta)\|$ é uma medida da distância entre um ponto δ qualquer e os pontos de equilíbrio do sistema reduzido. A figura 4 ilustra o algoritmo.

5.1 Problemas do Método BCU

O BCU tem se mostrado eficiente para várias situações de defeito, nos mais variados sistemas de potência mas, todos os métodos que se utilizam do conceito de ponto de equilíbrio de controle, por mais eficientes que sejam, garantem apenas a existência de estabilidade para o primeiro “swing”. LLAMAS et al. (1995) mostram, através de alguns exemplos simples, sistemas que são instáveis em “swings” subsequentes ao primeiro e que o BCU considera como estáveis. Para ilustrarem-se tais problemas, alguns destes exemplos foram aqui repetidos.

Exemplo 1:

Seja o sistema de uma máquina contra um barramento infinito da Figura 5.

FIGURA 5 - Sistema de uma máquina contra um barramento infinito

Um curto trifásico foi aplicado à barra 1 com uma resistência de falta igual a 0,03pu. O algoritmo BCU obteve, para este defeito, um tempo crítico de abertura de 0,259s. Eliminando-se o defeito neste tempo obtém-se, por simulação numérica das equações diferenciais, o comportamento angular da Figura 6. Nesta, observa-se que o sistema torna-se instável no segundo “swing”. Isto ocorre porque o curto provoca a desaceleração da máquina. Desta forma, o BCU define, através do sistema gradiente

associado, a sela localizada à esquerda do ponto de equilíbrio estável como sendo o ponto de equilíbrio de controle (Veja Figuras 7 e 8). Esta sela possui um nível de energia superior à sela localizada à direita do ponto de equilíbrio estável, de forma que a trajetória do sistema escapa da bacia de atração, após a eliminação do defeito, por esta sela de menor energia localizada à direita do ponto de equilíbrio estável.

FIGURA 6 - Curto na barra 1 do sistema da Figura 5, tempo de abertura = 0,259s, resistência de falta = 0,03pu

FIGURA 7 - Energia potencial do sistema de uma máquina versus um barramento infinito da Figura 5

FIGURA 8 - Retrato de Fase do Sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 5

Exemplo 2:

Seja o sistema de 3 barras e 3 geradores da Figura 9. Um curto trifásico sólido é aplicado a barra 2 e o defeito é eliminado pelo isolamento da linha 1-2. À esta contingência dar-se-á o nome de “Falta 1” para facilitar a referência. O tempo crítico foi determinado pelo método clássico, que se utiliza de inúmeras soluções numéricas das equações diferenciais, e através do algoritmo BCU.

FIGURA 9 - Sistema de 3 barras e 3 geradores

Durante o curto, a máquina 2 acelera e o tempo crítico de abertura encontrado através de simulação numérica das equações diferenciais está entre 0,194 e 0,195s. Os ângulos das máquinas com relação ao centro de ângulo como referência para os tempos de abertura de 0,194 e 0,195s estão apresentados respectivamente nos gráficos das Figuras 10 e 11. Para esta contingência, o tempo crítico estimado pelo algoritmo BCU é bastante próximo do tempo crítico real, como mostra a Tabela 1.

FIGURA 10 - Falta 1 com tempo de abertura de 0,194s

FIGURA 11 - Falta 1 com tempo de abertura de 0,195s

FIGURA 12 - Falta 1 com tempo de abertura de 0,197s

FIGURA 13 - Retrato de Fase do sistema reduzido associado ao sistema de 3 geradores e 3 barras da Figura 9. O COA foi utilizado como referência. Sobreposta ao retrato de fase está a projeção da trajetória do sistema em falta (Falta 1) no plano velocidade igual a zero.

À mesma barra, aplica-se um curto-circuito trifásico com uma resistência de falta de 0,03pu. Da mesma forma, o curto-circuito é isolado pela eliminação da linha 1-2. À esta contingência dar-se-á o nome de “Falta 2”. Nesta situação a máquina 2 desacelera durante o curto e o tempo crítico, determinado por simulação das equações diferenciais, está entre 0,144 e 0,145s de acordo com as Figuras 14 e 15. Aplicando-se o algoritmo BCU a esta contingência obtém-se um tempo crítico muito maior que o tempo verdadeiro (Veja Tabela 1). Note na Figura 16 que a eliminação do defeito no tempo de abertura estimado pelo BCU garante a existência do primeiro “swing”, mas o sistema torna-se instável no “swing” subsequente. O mesmo efeito ocorre para curtos na barra 1. Os resultados estão resumidos na Tabela 1.

FIGURA 14 - Falta 2 com tempo de abertura de 0,145s

FIGURA 15 - Falta 2 com tempo de abertura de 0,144s

FIGURA 16 - Falta 2 com tempo de abertura de 0,457s

TABELA 1 - Resultados do BCU para o sistema de 3 barras e 3 geradores

Falta	Barra	Imp. Falta(pu)	Controlling equilibrium point (COA)	Energia crítica	Tempo crítico(s)	Estimativa BCU(s)
1	2	0	-16,0°;117,0°;-30,2°	5,94	0,194	0,197
2	2	0,03	47,1°;-180,0°;32,8°	25,87	0,144	0,458
3	1	0	120,3°;-1,7°;-20,9°	2,01	0,174	0,175
4	1	0.06	-196,6°;41,3°;22,1°	10,7	0,122	0,326

A princípio, observando-se os resultados obtidos na Tabela 1, poder-se-ia concluir que o algoritmo BCU não é conservativo, contrariando as afirmações de CHIANG et al. (1991). Por exemplo, para a Falta 1, o tempo crítico estimado pelo BCU é igual à 0,197s enquanto que o tempo crítico verdadeiro está entre 0,194 e 0,195s como mostram os gráficos das Figuras 10 e 11. Em verdade, todo método de análise de estabilidade baseado na busca do ponto de equilíbrio de controle é fundamentado na análise do primeiro “swing”. Eliminando-se o defeito no tempo estimado pelo BCU, para a Falta 1, obtém-se o comportamento angular da Figura 12. Embora exista o primeiro “swing”, o sistema perde o sincronismo em um “swing” subsequente. Para que a estabilidade em “swings” subsequentes ao primeiro seja garantida, é necessário diminuir-se o tempo de abertura. Observa-se na Figura 11 que eliminando-se o defeito no tempo de 0,195s, garante-se a estabilidade para um número maior de “swings” subsequentes ao primeiro do que se garantia com o tempo de abertura estimado pelo BCU (0,197s).

Para que os tempos críticos determinados visualmente através de inúmeras soluções numéricas das equações diferenciais sejam os mesmos obtidos pelo BCU, deveríamos restringir a análise gráfica apenas ao intervalo de tempo da ocorrência do primeiro “swing”. No exemplo, a análise gráfica do sincronismo deveria estar restrita mais ou menos ao intervalo de 0 a 1s, que é aproximadamente o tempo em que o primeiro “swing” ocorre. Veja Figura 10.

Observa-se também no gráfico da Figura 11 que a máquina que perde o sincronismo é a máquina 1, embora o curto tenha acelerado inicialmente a máquina 2. Isto significa que a trajetória do sistema abandona a bacia de atração do ponto de equilíbrio estável ao passar por uma sela de menor energia que a sela de controle. Esta diferença de energia é que provoca a diferença na estimativa do tempo pelo BCU. Quanto maior esta diferença, maior será o erro cometido. O retrato de fase da Figura 13 ilustra claramente este comportamento.

Para a Falta 2 a situação é semelhante e mais evidente, a desaceleração da máquina 2 conduz a trajetória do sistema em falta à uma sela de energia muito elevada, ao eliminar-se o defeito, o sistema perde o sincronismo através de uma sela de menor energia no segundo “swing”.

LLAMAS et al. (1995) apresentam como causa das falhas do BCU a não satisfação da condição de transversalidade estabelecida por CHIANG et al. (1991), mas não apresentam nenhum método alternativo ou teoria que permita determinações do tempo crítico de abertura que não possuam tais dificuldades. Em verdade, estes problemas são inerentes a todos os métodos que se utilizam do conceito de ponto de equilíbrio de controle. Se os amortecimentos do sistema não forem suficientemente grandes, então o sistema poderá perder o sincronismo por pontos de menor energia na bacia de atração. Deve-se então procurar responder qual o amortecimento necessário ao sistema tal que a estabilidade absoluta, isto é, para todos os “swings” subsequentes, seja garantida, ou então, em quanto tempo precisamos diminuir o tempo crítico de abertura estimado pelo BCU para que a estabilidade em “swings” subsequentes seja garantida.

6 ESTUDOS E CARACTERIZAÇÃO DA FRONTEIRA DA ÁREA DE ATRAÇÃO

Para compreender precisamente o método BCU e suas falhas, assim como os efeitos da variação do amortecimento na fronteira da área de atração, são necessários estudos e uma perfeita caracterização da área de atração e de sua fronteira. A maior parte dos resultados estudados e apresentados a seguir pode ser encontrada nos trabalhos de TSOLAS et al. (1985), CHIANG et al. (1987), CHIANG et al. (1988) e CHIANG et al. (1991). Além de apresentá-los, este texto procura fornecer as justificativas e o contexto em que estão inseridos cada um dos resultados, além disto, os resultados são apresentados em um único texto numa sequência lógica e adequada à compreensão do algoritmo BCU.

Neste capítulo, mostra-se que o campo vetorial que rege o comportamento dos sistemas de potência é um campo de Morse-Smale. Portanto, as propriedades destes campos são exploradas para caracterizar a fronteira da área de atração.

6.1 Introdução

Antes de estudarem-se as características da fronteira da área de atração dos sistemas de potência, uma rápida introdução aos sistemas dinâmicos é necessária.

Seja o sistema autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{10}$$

onde o campo vetorial $f: R^n \rightarrow R^n$ é uma aplicação C^1 . A exigência de que f seja C^1 é uma condição suficiente à existência e unicidade das soluções. x_i é ponto de

equilíbrio de (10) se $f(x_i)=0$. E será o conjunto de todos os pontos de equilíbrio, $E=\{x:f(x)=0\}$.

O Jacobiano de f calculado no ponto x_i será denotado por $J(x_i)$. O tipo do ponto de equilíbrio x_i é definido como sendo o número de autovalores com parte real positiva do Jacobiano de f calculado em x_i . $E_i \subset E$ será o conjunto de pontos de equilíbrio de tipo i . A inércia de uma matriz M é definida por $In(M)=[n_s, n_u, n_c]$, onde n_s é o número de autovalores com parte real positiva, n_u é o número de autovalores com parte real negativa e n_c com parte real nula. A área de atração $A(x_s)$ do ponto de equilíbrio estável x_s é definida como sendo o conjunto:

$$A(x_s) = \left\{ x: \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = x_s \right\} \quad \text{onde } \varphi \text{ é o fluxo do sistema, ou seja,}$$

$A(x_s)$ é o conjunto de todas as condições iniciais que produzem trajetórias que se aproximam de x_s quando o tempo tende ao infinito. A fronteira da área de atração será denotada por $\partial A(x_s)$ e o fecho por $\overline{A(x_s)}$.

Se x_i é um ponto de equilíbrio hiperbólico, suas variedades estáveis e instáveis são definidas respectivamente por:

$$W^s(x_i) = \{x: \varphi(x, t) \rightarrow x_i \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \text{ e}$$

$$W^u(x_i) = \{x: \varphi(x, t) \rightarrow x_i \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

É importante salientar que as variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio são conjuntos invariantes.

Sejam A e B duas variedades em $\mathbb{R}^n$. A interseção de A e B satisfaz a condição de transversalidade se elas não se interceptam ou se, em cada ponto $x \in (A \cap B)$, os espaços tangentes de A e de B geram o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em x :

$$T_x(A) + T_x(B) = \mathbb{R}^n \quad \text{para } x \in (A \cap B).$$

6.2 Campos de Morse-Smale

Um sistema dinâmico é dito ser de Morse-Smale se satisfizer as seguintes propriedades:

- i) *todos os elementos críticos (pontos de equilíbrio, ciclos limites, ...) são hiperbólicos;*
- ii) *a interseção das variedades $W^s(x_i)$ e $W^u(x_j)$ satisfazem a condição de transversalidade para todos os pontos de equilíbrio x_i, x_j .*

$$W^s(x_i) \cap W^u(x_j) \neq \emptyset \Rightarrow TW^s(x_i) + TW^u(x_j) = R^n;$$

- iii) *os conjuntos α e ω -limites são elementos críticos.*

As propriedades i) e ii) são propriedades genéricas de sistemas dinâmicos, ou seja, quase todos os sistemas dinâmicos as possuem, logo, estas garantem a estabilidade estrutural dos sistemas Morse-Smale. Em outras palavras, o conjunto dos sistemas dinâmicos que são Morse-Smale são densos no universo dos sistemas dinâmicos.

A propriedade iii) tem o objetivo de eliminar possíveis comportamentos caóticos que possam existir no campo vetorial.

6.3 Caracterização da fronteira da área de atração

Para o estudo pretendido, admite-se que o campo vetorial f satisfaça as seguintes propriedades:

P1) *Existe um ponto de equilíbrio estável x_s do qual deseja-se conhecer a área de atração.*

P2) *O campo vetorial é um campo de Morse-Smale.*

P3) Além de ser um campo Morse-Smale, o campo vetorial possui uma função energia C^1 , $V:R^n \rightarrow R$, tal que:

- i) $\dot{V}(\varphi(x,t)) \leq 0$ para todo $x \notin E$;
- ii) O conjunto $\{t \in R, \dot{V}(\varphi(x,t)) = 0\}$ para $x \notin E$ tem medida zero em R .
- iii) Se $V(\varphi(x,t))$ é limitada, então $\varphi(x,t)$ é limitada.

Estas suposições sobre o campo vetorial tem o intuito de torná-lo “bem comportado”. A propriedade 1 é primordial, pois, apenas a existência de um ponto de equilíbrio estável pode justificar o estudo de sua área de atração. As propriedades dos campos Morse-Smale já foram citadas na seção 6.2. A existência da função energia restringe o conjunto dos pontos não-errantes a pontos de equilíbrio, logo, não poderão existir ciclos limites. Portanto, os elementos críticos são constituídos apenas por pontos de equilíbrio. Além disto, a suposição de hiperbolicidade garante que todos os pontos de equilíbrio são isolados.

Uma vez estabelecida a terminologia e as propriedades do campo vetorial, analisar-se-ão os resultados que caracterizam a área de atração. O teorema a seguir estabelece as condições necessárias e suficientes para que um ponto de equilíbrio pertença à fronteira da área de atração. É importante salientar que, embora o enunciado deste teorema possa parecer resultado de uma lógica bastante simples e intuitiva, a demonstração não é trivial e contém muitas informações importantes a respeito do comportamento do campo vetorial na fronteira da área de atração. Sua demonstração está ilustrada através de algumas figuras e a necessidade de utilização de resultados auxiliares é claramente justificada.

Teorema 2: Para um sistema dinâmico satisfazendo as propriedades P1), P2) e P3), x_i é um ponto de equilíbrio instável na fronteira da área de atração $\partial A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio x_s se e somente se $W^u(x_i) \cap A(x_s) \neq \emptyset$.

Dem.: A primeira observação que se deve fazer antes de demonstrar-se o teorema, é que um ponto de equilíbrio estável $\hat{x}$ não pode pertencer à fronteira da área de atração $\partial A(x_s)$. Isto é facilmente verificado, uma vez que existe uma vizinhança $B(\hat{x})$ de $\hat{x}$ onde todas as trajetórias convergem para $\hat{x}$. Portanto, $B(\hat{x}) \not\subset A(x_s)$ e consequentemente $\hat{x} \notin \partial A(x_s)$.

($\Leftarrow$) Admita que $W^u(x_i) \cap A(x_s) \neq \emptyset$. Sejam $\hat{x} \in W^u(x_i) \cap A(x_s)$ e a sequência $\{t_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Constrói-se uma sequência $\{x_n\}$ da seguinte forma:

$$x_n = \varphi(\hat{x}, -t_n).$$

Como $W^u(x_i)$ é um conjunto invariante, $x_n \in W^u(x_i)$ e $x_n \in A(x_s)$. Da definição de variedade instável de um ponto de equilíbrio, tem-se que $x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, portanto, $x_i \in \overline{A}(x_s)$. Mas $x_i \notin A(x_s)$, logo, $x_i \in \partial A(x_s)$.

($\Rightarrow$) Admita que $x_i \in \partial A(x_s)$. Seja B uma vizinhança de x_i . Como $x_i \in \partial A(x_s)$, existem pontos pertencentes à B que pertencem à $A(x_s)$ e outros que não. Construamos uma sequência $\{y_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_i$ e $y_n \in B \cap A(x_s)$. Como $y_n \in A(x_s)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(y_n, t) = x_s$. Então, seja uma bola C contendo a vizinhança B e seja a sequência $\{z_n\}$ construída de tal forma que z_n seja o ponto no qual a trajetória $\varphi(y_n, t)$ abandona a bola C . Do teorema da existência e unicidade de soluções, tem-se que, se $y_i \neq y_j$, então $z_i \neq z_j$. A fronteira da bola é um conjunto compacto, logo, existe alguma subsequência convergente $\{z_n'\}$. Seja $\bar{z}$ o limite desta subsequência.

Obviamente, $\varphi(z_n', -t_n) = y_n$ para algum $t_n > 0$. No limite, $\varphi(\bar{z}, -t) \rightarrow x_i$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $\bar{z} \in W^u(x_i)$. Como $\bar{z}$ é o limite da sequência $\{z_n'\}$ e $z_n' \in A(x_s)$, então $\bar{z} \in \overline{A}(x_s)$. Logo conclui-se que:

$$W^u(x_i) \cap \overline{A(x_s)} \neq \emptyset$$

A demonstração não termina aqui pois, $\bar{z}$ poderá pertencer à $A(x_s)$, como mostra a Figura 17, ou ainda poderá pertencer à fronteira $\partial A(x_s)$. Para terminar a demonstração alguns resultados intermediários e não menos importantes são necessários.

Lema 1: *Se o sistema dinâmico satisfizer a propriedade P3), então toda a trajetória na fronteira da área de atração se aproxima de um dos pontos de equilíbrio na fronteira quando o tempo tende ao infinito.*

Dem.: Seja $x \in \partial A(x_s)$. Da suposição i) de P3) e da continuidade de V tem-se que: $V(x_s) < V(\varphi(x, t)) < V(x)$ para todo $t > 0$. Portanto conclui-se a partir da suposição iii) de C3 que $\varphi(t, x)$ é limitada. Como $\varphi(t, x)$ só pode convergir para um ponto de equilíbrio ou caminhar em direção ao infinito, esta obrigatoriamente converge para um ponto de equilíbrio na fronteira da área de atração.

Este lema além de auxiliar na demonstração deste teorema, é fundamental à caracterização da fronteira da área de atração. Ele mostra que não podem existir

trajetórias cruzando a fronteira da área de atração. Esta deverá ser composta por trajetórias e pontos de equilíbrio. Além disto, todas as trajetórias na fronteira convergem para pontos de equilíbrio de tal forma que não poderão existir na fronteira ciclos limites ou comportamentos caóticos.

Do lema 1 conclui-se que se $\bar{z} \in \partial A(x_s)$, então a órbita $\varphi(\bar{z}, t)$ que está contida em $W^u(x_i)$ deve se aproximar de um outro ponto de equilíbrio x_j na fronteira da área de atração, caracterizando uma ligação entre pontos de equilíbrio nesta fronteira. A satisfação da condição de transversalidade limita as possibilidades destas ligações. Os lemas 2 e 3 descrevem estas possibilidades.

Lema 2: *Sejam x_1, x_2 dois pontos de equilíbrio que satisfazem a suposição ii) de 2. Se $\{W^u(x_1) - x_1\} \cap \{W^s(x_2) - x_2\} \neq \emptyset$, então $\dim W^u(x_1) > \dim W^u(x_2)$.*

Dem.: Da condição de transversalidade tem-se que $W^u(x_1)$ e $W^s(x_2)$ interceptam-se transversalmente:

$$\begin{aligned} \dim (W^u(x_1) \cap W^s(x_2)) &= \dim W^u(x_1) + \dim W^s(x_2) - \dim (W^u(x_1) \cup W^s(x_2)) \\ &= \dim W^u(x_1) + \dim W^s(x_2) - n \end{aligned}$$

$$\text{Como } \dim (W^u(x_1) \cap W^s(x_2)) \neq 0,$$

$$\dim W^u(x_1) + \dim W^s(x_2) - n > 0$$

$$\dim W^u(x_1) + n - \dim W^u(x_2) - n > 0$$

$$\dim W^u(x_1) > \dim W^u(x_2)$$

■

Retornemos à prova do teorema 2. Se x_i é um ponto de equilíbrio do tipo 1 e se $\bar{z} \in \partial A(x_s)$, então $\varphi(\bar{z}, t)$ deve se aproximar de um ponto de equilíbrio x_j na fronteira da área de atração. Do lema 2, $\dim W^u(x_i) = 0$, logo, x_j é um ponto de

equilíbrio estável. Como não existem pontos de equilíbrio estáveis na fronteira da área de atração, $\bar{z} \notin \partial A(x_s)$, logo, $\bar{z} \in A(x_s)$ e o teorema fica provado para pontos de equilíbrio do tipo 1.

Para provar o teorema 2 para pontos de tipo maior que 1, é necessário utilizar-se o seguinte resultado.

Lema 3: *Sejam x_1 , x_2 e x_3 pontos de equilíbrio hiperbólicos. Se $W^u(x_1)$ intercepta $W^s(x_2)$ transversalmente e se $W^u(x_2)$ intercepta $W^s(x_3)$ transversalmente, então $W^u(x_1)$ intercepta $W^s(x_3)$ transversalmente.*

Dem.: A Figura 18 mostra esquematicamente a idéia da demonstração. Sejam $p_1 \in W^u(x_1) \cap W^s(x_2)$ e $p_2 \in W^u(x_2) \cap W^s(x_3)$. Seja $D_2 \subset W^u(x_2)$ um disco fechado contendo x_2 e p_2 . D_2 é transversal à $W^s(x_3)$ por construção. Observe que qualquer disco $D \in C^1$ próximo de D_2 também intercepta $W^s(x_3)$ transversalmente. Agora seja um disco $D_1 \subset W^u(x_1)$ que contem x_1 e p_1 com a mesma dimensão de D_2 . Isto é possível devido ao Lema 2:

$$\dim W^u(x_1) > \dim W^u(x_2) > \dim W^u(x_3)$$

Devido ao λ -lema, o conjunto $\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi(D_1, t)$ contém um disco que é ε - C^l próximo de D_2 . Portanto, este disco intercepta $W^s(x_3)$ transversalmente, e consequentemente $W^u(x_1)$ intercepta $W^s(x_3)$ transversalmente.

■

Com base no lema 3 pode-se estender o resultado do teorema 2 para pontos de equilíbrio de tipo maior que 1. Admita que x_i seja do tipo 2 e $\bar{z} \in \partial A(x_s)$, então, $\varphi(\bar{z}, t)$ deve se aproximar de um ponto de equilíbrio do tipo 1 ou 0 na fronteira da área de atração. Como não podem existir pontos de equilíbrio na fronteira, $\varphi(\bar{z}, t)$ se aproxima de um ponto x_j do tipo 1. Do resultado anterior, tem-se que:

$$W^u(x_j) \cap A(x_s) \neq \emptyset.$$

Do lema 3, conclui-se que:

$$W^u(x_i) \cap A(x_s) \neq \emptyset.$$

Por indução prova-se para pontos de equilíbrio de qualquer tipo.

■

Sabe-se dos resultados anteriores que a fronteira da área de atração é composta apenas por trajetórias e pontos de equilíbrio. O teorema 3 fornece uma caracterização mais precisa desta fronteira.

Teorema 3: (Caracterização da fronteira da área de atração)

Se um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ satisfaz as propriedades P1), P2) e P3), e sejam x_i , $i=1,2,\dots$ os pontos de equilíbrio instáveis pertencentes à fronteira da área de atração $\partial A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio estável x_s , então

$$\partial A(x_s) = \bigcup_{x_i \in E \cap \partial A} W^s(x_i)$$

Dem.: Do Lema 1 sabe-se que todas as trajetórias na fronteira da área de atração se aproximam de um dos pontos de equilíbrio na fronteira; em outras palavras, as trajetórias pertencem à variedade estável de algum ponto de equilíbrio na fronteira.

$$\partial A(x_s) \subset \bigcup_i W^s(x_i)$$

Agora suponha que $x_i \in \partial A(x_s)$. Então, pelo Teorema 2, $W^u(x_i) \cap A(x_s) \neq \emptyset$. Seja $p \in W^u(x_i) \cap A(x_s)$ e seja D um disco contendo p com dimensão igual à codimensão de $W^u(x_i)$ e interceptando $W^u(x_i)$ transversalmente. Pelo λ -lema, sabe-se que:

$$W^s(x_i) \subset \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi(D, -t)}.$$

A Figura 19 ilustra este fato geometricamente.

$D \in A(x_s)$ e A é invariante, logo,

$$\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi(D, -t)} \subset \overline{A(x_s)}$$

Então, $W^s(x_i) \subset \overline{A}(x_s)$. Como $W^s(x_i) \cap A(x_s) = \emptyset$, $W^s(x_i) \subset \partial A(x_s)$.

Isto é verdade para todos os pontos de equilíbrio x_i , portanto:

$$\bigcup_i W^s(x_i) \subset \partial A(x_s)$$

$$\text{Portanto, } \partial A(x_s) = \bigcup_i W^s(x_i)$$

■

Todo ponto de equilíbrio x_i na fronteira da área de atração é um ponto de equilíbrio instável, logo, x_i é de tipo maior ou igual a 1. Como as variedades estáveis dos pontos de equilíbrio de tipo maior que 1 possuem menor dimensão do que aqueles de tipo 1, segue do teorema de Baire [LIMA (1977)] o seguinte Corolário.

Corolário 1: *Se um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ satisfaz as propriedades P1), P2) e P3), e sejam x_i , $i=1,2,\dots$ os pontos de equilíbrio instáveis de tipo 1 pertencentes à fronteira da área de atração $\partial A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio estável x_s , então*

$$\partial A(x_s) = \bigcup_{x_i \in E_1 \cap \partial A} \overline{W^s}(x_i)$$

O teorema 3 indica que a fronteira da área de atração é composta pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio que pertencem à fronteira da área de atração. Isto significa que a fronteira é composta pela união de diversos conjuntos, onde cada conjunto é formado por um único ponto de equilíbrio instável x_i e por uma infinidade de pontos que convergem para x_i . Da unicidade de soluções conclui-se que estes conjuntos são disjuntos. Com base nisto, é possível definir precisamente o ponto de equilíbrio de controle:

Definição: Define-se como ponto de equilíbrio de controle com relação a uma trajetória de falta $x_f(t)$, àquele ponto de equilíbrio instável x_i cuja variedade estável $W^s(x_i)$ contém o ponto no qual a trajetória da falta $x_f(t)$ abandona a área de atração ("exit point").

A definição acima parte do princípio de que a trajetória da falta abandona a área de atração em algum tempo após a eliminação do defeito. Isto sempre ocorrerá em defeitos que provoquem perturbações no sistema suficientemente grandes para tornarem o sistema instável.

O teorema 3 permitiu a caracterização do ponto de equilíbrio de controle. O teorema a seguir demonstra a conservatividade da utilização do ponto de equilíbrio de controle como estimativa da parte importante da área de atração.

Teorema 4: (Função energia e os pontos de equilíbrio)

(a) Se o sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ satisfizer a propriedade P3), então na variedade estável de x_i , $W^s(x_i)$, o ponto no qual a energia assumirá um valor mínimo é o próprio ponto de equilíbrio x_i , isto é:

$$V(x_i) = \min_{x \in W^s(x_i)} V(x)$$

Se o sistema dinâmico satisfizer as propriedades P1), P2) e P3), então:

(b) Na fronteira da estabilidade de x_s , o ponto no qual a função energia atingirá um mínimo deverá ser um ponto do tipo 1.

Dem.: a) Seja $p \in W^s(x_i)$. Como $\dot{V}(\varphi(x, t)) \leq 0$ para todo $x \in E$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(p, t) = x_i$, tem-se da continuidade de V que $V(x_i) < V(p)$ para qualquer $p \in W^s(x_i)$. Logo, x_i tem que ser obrigatoriamente um ponto de mínimo.

b) Da parte a) e do Teorema 3 sabe-se que o ponto no qual $V(x)$ atinge um valor mínimo deve ser um ponto de equilíbrio. Seja x_i este ponto de equilíbrio. Suponha que x_i não seja do tipo 1, então do Corolário 1 tem-se que $x_i \in \partial W^s(x_j)$ onde x_j é um ponto de equilíbrio do tipo 1 na fronteira da área de atração. Portanto, existem pontos na vizinhança de x_i que convergem para x_j . Como o campo vetorial satisfaz P3) e V é uma função contínua, obtém-se $V(x_i) > V(x_j)$.

■

O Teorema 4 permite justificar matematicamente o caráter conservativo da utilização do ponto de equilíbrio de controle como estimativa da estabilidade para efeito de primeiro “swing”. Com este teorema, é possível demonstrar que a trajetória da falta irá interceptar a superfície de energia constante $\{x: V(x) = V(x_{co})\}$ antes de interceptar $W^s(x_{co})$, onde x_{co} é o ponto de equilíbrio de controle, portanto, se o ponto de equilíbrio pertencer à fronteira da área de atração, o defeito será eliminado dentro da área de atração garantindo a estabilidade.

6.4 Verificação das Propriedades para os Sistemas de Potência

Como foi verificado nos resultados anteriores, P1), P2) e P3) garantem que o campo vetorial não possuirá comportamentos muito complexos, permitindo uma caracterização bastante precisa da área de atração e que poderão ser exploradas para estudar-se a estabilidade transitória. Antes de estudar-se a estabilidade transitória com base nesta teoria é necessário verificar se o campo vetorial do problema de análise de estabilidade transitória satisfaz P1), P2) e P3). Estas podem ser verificadas admitindo-se que as condutâncias de transferência da rede, reduzida aos nós das f.e.m's, são iguais a zero. Quando as condutâncias de transferência não são desprezadas, não existem funções de energia genéricas para os sistemas de potência. Este problema foi parcialmente resolvido com o trabalho de CHIANG (1989), no qual mostrou-se que podem existir funções energia que podem ser utilizadas para estimar a área de atração em conjuntos compactos.

Sejam as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema pós-falta:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i \\ M_i \dot{\omega}_i &= P_i - D_i \omega_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad i=1, \dots, n\end{aligned} \tag{11}$$

onde a tensão no nó $n+1$ é utilizada como referência: $E_{n+1}=1,0\text{pu}$ e $\delta_{n+1}=0$. Este sistema de equações diferenciais pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P - D\omega - f(\delta)\end{aligned} \tag{12}$$

onde $\delta=(\delta_1, \dots, \delta_n)^T$; $\omega=(\omega_1, \dots, \omega_n)^T$; $P=(P_1, \dots, P_n)^T$ e $f=(f_1, \dots, f_n)^T$ são vetores de dimensão n , e $M=\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ e $D=\text{diag}(D_1, \dots, D_n)$ são matrizes $n \times n$ diagonais.

$$f_i(\delta) = \sum E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad (13)$$

Admitindo-se que a matriz Jacobiana seja não-singular nos pontos de equilíbrio, mostra-se que os pontos de equilíbrio do modelo de sistemas de potência são hiperbólicos. Seja $(\bar{\delta}, \bar{\omega})$ um ponto de equilíbrio do sistema de potência. Calculando o Jacobiano neste ponto obtém-se:

$$J(\bar{\delta}, \bar{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}F(\bar{\delta}) & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad \text{onde } F(\delta) = \left[\frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta} \right].$$

Suponha que λ seja autovalor da matriz, então:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}F(\bar{\delta}) & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Portanto,

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ -M^{-1}F(\bar{\delta})x_1 - M^{-1}Dx_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad (15)$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda obtém-se:

$$-M^{-1}F(\bar{\delta})x_1 - M^{-1}D\lambda x_1 - \lambda^2 x_1 = 0 \quad (16)$$

Suponha que $\lambda=0$, então: $-M^{-1}F(\bar{\delta})x_1 = 0$. Como $F(\bar{\delta})$ é não-singular, a igualdade é uma contradição e $\lambda \neq 0$. Suponha agora que $\lambda=j\alpha$. Então:

$\begin{cases} M^{-1}D\alpha = 0 \\ M^{-1}F(\bar{\delta}) + \alpha^2 = 0 \end{cases}$. Como D é não-singular, a igualdade também é uma contradição, e portanto os pontos de equilíbrio são hiperbólicos.

Acima, verificou-se que o sistema satisfaz a propriedade i) dos sistemas Morse-Smale. A propriedade P3) pode também ser verificada se considerarmos a seguinte função energia para o sistema:

$$\begin{aligned} V(\delta, \omega) &= V_k(\omega) + V_p(\delta) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 - \sum_{i=1}^n P_i(\delta_i - \delta_i^s) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)] \end{aligned} \quad (17)$$

onde $x^s = (\delta^s, 0)$ é o ponto de equilíbrio estável em estudo e

$$V_k(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 \quad (18)$$

$$V_p(\delta) = - \sum_{i=1}^n P_i(\delta_i - \delta_i^s) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)] \quad (19)$$

são respectivamente a energia cinética e potencial do sistema. A seguir far-se-ão as verificações necessárias:

propriedade i) de P3): Derivando V ao longo das trajetórias obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\delta(t), \omega(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i 2\omega_i \dot{\omega}_i - \sum_{i=1}^n P_i \dot{\delta}_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j) = \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i \left(P_i - D_i \omega_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right) - \sum_{i=1}^n P_i \omega_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) (\omega_i - \omega_j) \\
&= - \sum_{i=1}^n D_i \omega_i^2 \leq 0
\end{aligned}$$

propriedade ii) de P3): Suponha existir um intervalo $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$ onde $\dot{V}(\delta(t), \omega(t)) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. De acordo com a desigualdade desenvolvida acima, $\omega(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Então, $\delta(t) = \text{cte}$ neste intervalo. Da equação diferencial verifica-se que este ponto, necessariamente, é um ponto de equilíbrio do sistema e a suposição ii) está verificada.

propriedade iii) de P3): Para demonstrar esta suposição é necessário utilizar a fórmula da variação das constantes. Seja o sistema:

$$\dot{x} = Ax + b(t) \quad \text{onde } A \text{ é uma matriz constante } n \times n.$$

Segundo a fórmula da variação das constantes,

$$x(t) = e^{At} \left[e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-As} b(s) ds \right] \quad (20)$$

Aplicando esta fórmula à equação de velocidade de (11), obtém-se:

$$\omega_i(t) = e^{-\frac{D_i}{M_i}t} \left\{ e^{\frac{D_i}{M_i}0} \omega_i(0) + \int_0^t e^{\frac{D_i}{M_i}s} \frac{1}{M_i} \left[P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right] ds \right\} =$$

$$e^{-\frac{D_i}{M_i}t} \omega_i(0) + \int_0^t e^{-\frac{D_i}{M_i}(t-s)} \frac{1}{M_i} \left[P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right] ds$$

O termo entre colchetes é uniformemente limitado, pois, P_i é constante, e a função seno tem módulo menor ou igual a 1. Seja a_i o limitante:

$$\frac{1}{M_i} \left| P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right| \leq a_i$$

Então, $\omega_i(t)$ é limitado por:

$$\begin{aligned} |\omega_i(t)| &\leq |\omega_i(0)| + \left| \int_0^t e^{-\frac{D_i}{M_i}(t-s)} a_i ds \right| = |\omega_i(0)| + \left| -a_i \frac{M_i}{D_i} \left[e^{-\frac{D_i}{M_i}(t-t)} - e^{-\frac{D_i}{M_i}(t-0)} \right] \right| \leq \\ &\leq |\omega_i(0)| + a_i \frac{M_i}{D_i} = b_i \end{aligned}$$

Observe que o termo linear da equação diferencial é o responsável pela limitação da velocidade. Sua limitação não está relacionada à limitação da função energia e sim às características do campo vetorial. Provar que a velocidade é limitada, não é suficiente para mostrar que a trajetória é limitada, é necessário mostrar que $\delta(t)$ também é limitada e para isto é necessário exigir a limitação da função energia. Suponha que $c_1 < V(\delta(t), \omega(t)) < c_2$. Então:

$$\begin{aligned} c_1 &< \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 - \sum_{i=1}^n P_i (\delta_i - \delta_i^s) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)] < c_2 \\ c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i b_i^2 &< - \sum_{i=1}^n P_i (\delta_i - \delta_i^s) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)] < c_2 \end{aligned} \quad (21)$$

O termo $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)]$ é uniformemente limitado. Seja c este limitante:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} E_i E_j B_{ij} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)] \right| < c \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21) tem-se:

$$c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i b_i^2 - c < - \sum_{i=1}^n P_i (\delta_i - \delta_i^s) < c_2 + c$$

Portanto, $P^T \delta$ é limitada e como P é constante, $\delta(t)$ é limitada. Como $\delta(t)$ e $\omega(t)$ são limitadas, então $\varphi(\delta(t), \omega(t))$ é limitada como queríamos demonstrar.

A única suposição que resta verificar é a suposição ii) de P2). Embora esta seja muito difícil de ser verificada, esta suposição é uma propriedade genérica dos campos vetoriais, ou seja, o conjunto de todos os sistemas dinâmicos que satisfazem esta relação é aberto e denso no universo dos sistemas dinâmicos, logo, pode-se considerar que os sistemas de potência satisfazem esta propriedade.

Portanto, os sistemas de potência são descritos por campos de Morse-Smale, que não possuem comportamentos caóticos, e são dissipativos segundo a propriedade P3), ou seja, não existem ciclos limites.

6.5 Sistema Gradiente Associado

Verificada a satisfação das suposições sobre o campo vetorial, todos os resultados obtidos anteriormente podem ser aplicados, logo a fronteira da área de

atração está caracterizada. Deve-se então desenvolver metodologias computacionais para o cálculo do ponto de equilíbrio de controle. A proposta utilizada pelo BCU utiliza-se de um sistema gradiente associado para o cálculo deste ponto de equilíbrio. Isto é realizado estudando-se as relações existentes entre o sistema original e este sistema gradiente. Uma das vantagens em se utilizar o sistema gradiente associado, é que este possui metade da dimensão do problema original; outras vantagens serão apresentadas ao longo do texto.

A idéia de utilizar-se o sistema gradiente associado teve origem no método designado por PEBS (Potential Energy Boundary Surface). A idéia do método é bastante simples. Através da função energia potencial $V_p(\delta)$ define-se uma bacia de atração, no espaço dos ângulos δ 's, de forma análoga à bacia hidrográfica de um rio. O ponto de equilíbrio estável está localizado na parte mais baixa da bacia com a menor energia potencial. A fronteira da bacia é composta por pontos extremos (máximos) de V_p e por linhas perpendiculares às curvas de nível de V_p de tal forma que estas linhas interligam os pontos extremos. Estas linhas são equivalentes aos divisores de água nas bacias hidrográficas. O conjunto formado por estas linhas e pelos pontos extremos é conhecido como PEBS. A Figura 20 ilustra o PEBS para um sistema de 3 geradores onde o COA foi utilizado como referência.

O método PEBS tem o intuito de evitar o cálculo de pontos de equilíbrio para a estimação da área de atração. Por este motivo é um método bastante rápido, porém pode efetuar estimações não conservativas do ponto de vista da estabilidade. Maiores detalhes podem ser encontrados em CHIANG et al. (1988). O método PEBS consiste do seguinte algoritmo:

FIGURA 20 - Ilustração do PEBS

Algoritmo PEBS:

i) Verifica-se o ponto no qual a trajetória faltosa $x_f(t)$ cruza o PEBS. (Ponto no qual a energia potencial atinge um máximo em cima da trajetória faltosa). Seja δ^* este ponto.

ii) O valor da energia potencial em δ^* será a energia crítica $V_{cr} = V_p(\delta^*)$. Se no tempo de abertura t_a , $V(t_a) < V_{cr}$, o sistema será estável.

No caso do sistema de uma máquina versus um barramento infinito, o PEBS funciona tão bem quanto o BCU. A energia potencial para este sistema é mostrada na Figura 21. A bacia de atração do ponto de equilíbrio x_s é formada pelo intervalo $[\delta_1^u, \delta_2^u]$. Os pontos extremos de $V_p(\delta)$, δ_1^u e δ_2^u , compõem o PEBS. Se a máquina acelera

durante o curto, $V_p(\delta^u_2)$ é utilizada como energia crítica para a estimativa da área de atração. Se desacelera, $V_p(\delta^u_1)$ é utilizada como estimativa. Neste caso de dimensão 1, o PEBS é composto apenas por pontos de equilíbrio, de tal forma que o algoritmo PEBS encontra os pontos de equilíbrio de controle para efetuar as estimativas da área de atração. Nos casos de várias máquinas, as complicações são maiores e o PEBS está sujeito à obtenção de resultados não conservativos. Embora nem sempre conservativos, os resultados fornecem estimativas muito boas do tempo de abertura.

FIGURA 21 - Energia potencial do sistema de 1 máquina x barramento infinito

Matematicamente, o PEBS é a fronteira da área de atração do sistema reduzido:

$$\dot{\delta} = P_m - P_e \quad (23)$$

Portanto, para entender-se o algoritmo BCU é necessário estudar-se as relações existentes entre este sistema reduzido e o modelo original:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P_m - P_e - D\omega\end{aligned}\tag{24}$$

A equação de swing anterior pode ser rescrita na seguinte forma:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0\tag{25}$$

onde V_p é a função energia potencial do sistema. Deseja-se compará-la ao sistema gradiente associado:

$$\dot{x} + \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0\tag{26}$$

Observe que V_p é uma função energia para o sistema gradiente associado, pois,

$$\dot{V}_p(x(t)) = \frac{\partial V_p}{\partial x} \dot{x} = -\left|\frac{\partial V_p}{\partial x}\right|^2 \leq 0$$

A comparação entre os sistemas é efetuada em três passos. No primeiro passo, comparam-se os sistemas dinâmicos:

$$\dot{x} + \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x} + D^{-1} \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0$$

que são sistemas gradientes com coeficientes D distintos. No segundo passo, comparam-se os sistemas dinâmicos:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon I\ddot{x} + D\dot{x} + \frac{\partial V_p}{\partial x} = 0$$

onde ε é um número pequeno. O objetivo é fazer com que o sistema gradiente seja um sistema degenerado deste último fazendo $\varepsilon=0$. Desta maneira é possível estabelecer relações entre os sistemas dinâmicos:

$$\varepsilon \ddot{x} + D\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x} + D^{-1} \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial x} = 0.$$

Primeiro Passo: (Relação entre os sistemas gradiente)

Sejam os sistemas gradiente denotados segundo a formulação abaixo:

$$d(D): \dot{x} + D^{-1} \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

Teorema 5: *Todos os sistemas gradientes da forma (27) possuem os mesmos pontos de equilíbrio e a mesma inércia. Além disto, todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos.*

Dem.: Os pontos de equilíbrio dos sistemas gradientes $d(D)$ devem satisfazer a equação $\frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial x} = 0$ independentemente do parâmetro D , logo todos eles possuem os mesmos pontos de equilíbrio. Linearizando-se o sistema em torno dos pontos de equilíbrio obtém-se:

$$\dot{x} = D^{-1} J \left(\frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial x}(\hat{x}) \right)$$

Como D^{-1} é uma matriz diagonal definida positiva, então, os autovalores de $J\left(\frac{\partial V_p}{\partial x}(\hat{x})\right)$ e os autovalores de $D^{-1}J\left(\frac{\partial V_p}{\partial x}(\hat{x})\right)$ possuem o mesmo sinal, logo a inércia da matriz é preservada.

Teorema 6: *Se $d(D)$ satisfaz a condição de transversalidade e possui um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração, então existe um número ε_D tal que, sempre que $\|\bar{D} - D\| < \varepsilon_D$ todo ponto de equilíbrio na fronteira da estabilidade de $d(D)$, estará também na fronteira de estabilidade de $d(\bar{D}), \partial A(\bar{D})$.*

O teorema 6 estabelece a relação local entre os pontos de equilíbrio. Ou seja, sistemas dinâmicos que são vizinhos no universo dos sistemas dinâmicos $d(D)$ possuem os mesmos pontos de equilíbrio, e se um ponto de equilíbrio está na fronteira de $d(D)$ estará também na fronteira de seu vizinho $d(\bar{D})$. A demonstração deste teorema não é simples e está fundamentada no fato de que localmente, as variedades estáveis e instáveis dependem continuamente do campo vetorial $d(D)$ em alguma topologia C^k .

O teorema 7 estabelece relações globais entre os pontos de equilíbrio dos sistemas $d(D)$. Para isto, impõe aos campos mais uma restrição relacionada à condição de transversalidade. Sua demonstração é mais complexa que a do teorema anterior e também não será apresentada. Maiores detalhes podem ser encontrados em CHIANG et al. (1988).

Teorema 7: *Seja $D_\lambda = \lambda D_1 + (1-\lambda)D_2$, $\lambda \in [0,1]$. Se $d(D_\lambda)$ satisfizer a condição de transversalidade e possuir um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração para todo $\lambda \in [0,1]$, então a fronteira da área de atração de $d(D_1)$ e $d(D_2)$ possuirão os mesmos pontos de equilíbrio.*

Em outras palavras, ao variar-se continuamente o parâmetro de amortecimento D , de um certo valor D_1 até um certo valor D_2 , não ocorrerem ligações de sela que violem a condição de transversalidade, então os sistemas $d(D_1)$ e $d(D_2)$ possuirão os mesmos pontos de equilíbrio na fronteira das respectivas áreas de atração.

Segundo Passo:

Sejam os sistemas dinâmicos da forma:

$$d(M, D): \begin{cases} \dot{x} = y \\ M\dot{y} = -Dy - \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (28)$$

Teorema 8: Todos os sistemas dinâmicos da forma $d(M, D)$ tem os mesmos pontos de equilíbrio e a mesma inércia. Além disto, todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos.

Teorema 9: *Se $d(M, D)$ satisfizer a condição de transversalidade e possuir um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração, então existirá $\varepsilon_{M,D}$ tal que todo ponto de equilíbrio em $\partial A(M, D)$ estará também em $\partial A(\overline{M}, D)$ sempre que o sistema dinâmico $d(\overline{M}, D)$ estiver na vizinhança $\varepsilon_{M,D}$ de $d(M, D)$.*

Teorema 10: *Seja $M_\lambda = \lambda M_1 + (1-\lambda)M_2$, $\lambda \in [0,1]$. Se $d(M_\lambda, D)$ satisfizer a condição de transversalidade e possuir um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração para todo $\lambda \in [0,1]$, então a fronteira da área de atração de $d(M_1, D)$, $\partial A(M_1, D)$ e $\partial A(M_2, D)$ possuirão os mesmos pontos de equilíbrio.*

Os três teoremas anteriores estabelecem resultados análogos aos obtidos no primeiro passo e dispensam maiores comentários.

Terceiro Passo: (Relação entre os sistemas $d(\bar{D})$ e $d(M, D)$).

Teorema 11:

- i) (x) é ponto de equilíbrio de $d(\bar{D})$ se e somente se $(x, 0)$ é ponto de equilíbrio de $d(M, D)$;
- ii) o número de autovalores do Jacobiano do campo, calculado nos pontos de equilíbrio, com parte real positiva n_s é igual nos dois sistemas dinâmicos.

Observe que se (x) for ponto de equilíbrio estável de $d(\bar{D})$, $(x, 0)$ será ponto de equilíbrio estável de $d(M, D)$. Para estabelecer a relação entre as fronteiras das áreas de atração dos sistemas $d(\bar{D})$ e $d(\varepsilon I, D)$, onde ε é um número pequeno, recorre-se à técnica da perturbação singular. O resultado importante reside no seguinte teorema:

Teorema 12: *Seja $A(\varepsilon I, D)$, a área de atração de um ponto de equilíbrio estável $(x_s, 0)$ de $d(\varepsilon I, D)$, e seja $A(\bar{D})$ a área de atração de (x_s) de $d(\bar{D})$. Então, para ε pequeno, o ponto de equilíbrio instável $(x_i, 0) \in \partial A(\varepsilon I, D)$ se e somente se $(x_i) \in \partial A(\bar{D})$.*

A combinação dos teoremas 7, 10, 12 exige que todos os pontos de equilíbrio (x_i) na fronteira da área de atração de $d(D)$ possuam os seus correspondentes $(x_i, 0)$ na

fronteira da área de atração de $d(M,D)$. Quando estas exigências são satisfeitas o BCU funciona perfeitamente. Se estas exigências são satisfeitas no problema de uma máquina versus barramento infinito o campo vetorial toma o aspecto da Figura 22.

Observe que, sob estas condições, todo ponto de equilíbrio de controle encontrado pelo método BCU estará na fronteira da área de atração do sistema de potência resultando em previsões corretas de estabilidade para todos os “swings”. Se estas condições forem violadas, então os pontos de equilíbrio de controle encontrados pelo algoritmo BCU poderão não pertencer à fronteira da área de atração do sistema de potência. Neste caso as previsões serão válidas somente para o primeiro “swing” e nada poderá ser dito a respeito do que acontecerá nos “swings” subsequentes. Reduzindo-se o parâmetro amortecimento no exemplo viola-se esta condição. Observe que existe um valor para o parâmetro amortecimento que causa a ligação das duas selas contrariando a satisfação da condição de transversalidade.

É evidente que estas exigências não podem ser satisfeitas para uma grande quantidade de sistemas de potência, logo, o desenvolvimento de técnicas de análise que permitam a previsão de estabilidade em “swings” subsequentes ao primeiro devem ser desenvolvidas.

Caracterizada a fronteira da área de atração e os problemas existentes com o BCU, esforços serão concentrados no desenvolvimento de métodos computacionais que permitam a predição de estabilidade para “swings” subseqüentes ao primeiro. Primeiramente tentar-se-á resolver o problema de uma máquina versus barramento infinito. Neste caso, a única maneira do sistema perder o sincronismo em “swings” subseqüentes ao primeiro é devido à desaceleração do gerador durante o defeito. Neste caso, a sela de maior energia δ^u_1 é utilizada como ponto de equilíbrio de controle. Se os amortecimentos não forem suficientemente grandes, o sistema abandona a bacia de atração do ponto de equilíbrio estável pela sela de menor energia δ^u_2 correspondente à aceleração da máquina no segundo “swing”. No próximo passo tentar-se-ão generalizações que permitam o tratamento dos problemas multimáquinas. A abordagem a ser utilizada será a estimação do amortecimento necessário à garantia da estabilidade em “swings” subseqüentes ao primeiro.

7 ESTIMATIVA DO AMORTECIMENTO PARA A ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA “MULTI-SWING” EM SISTEMAS DE UMA MÁQUINA VERSUS BARRAMENTO INFINITO

Para solucionar os problemas do BCU descritos no capítulo 8, desenvolveu-se uma metodologia que, quando incorporada ao método BCU de análise de estabilidade transitória, assegura, para o caso de uma máquina versus um barramento infinito, a estabilidade absoluta do sistema e não apenas a existência do primeiro “swing”. A metodologia consiste em determinar iterativamente o amortecimento que deve ser associado ao sistema para garantir que os pontos de equilíbrio instáveis (selas) utilizados como pontos de equilíbrio de controle pertençam à correspondente área de atração. A metodologia proposta é um método iterativo muito simples de ser implementado e não requer conhecimento da trajetória do sistema durante a falta.

7.1 Introdução

Muitos avanços ocorreram na utilização de métodos energéticos aplicados à análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência. Estes avanços culminaram com o desenvolvimento do método BCU. CHIANG et al. (1991) definiu precisamente o ponto de equilíbrio de controle fundamentado em teoria matemática como visto no capítulo 6. Ainda que este tenha sido aceito pela comunidade científica como sendo o método mais eficiente de análise de estabilidade transitória, este apresenta alguns problemas que ainda não foram resolvidos. No capítulo 5 foram mostrados alguns exemplos nos quais o método BCU prediz estabilidade e o sistema se torna instável em “swings” subsequentes ao primeiro. Em verdade, este tipo de predição errônea da estabilidade ocorre para uma grande quantidade de casos. Em algumas situações, a falta desacelera uma máquina do sistema, e uma sela de energia

elevada é utilizada como ponto de equilíbrio de controle. A falta é eliminada neste nível elevado de energia e o sistema torna-se instável no segundo “swing”, se o sistema não apresenta nenhum tipo de amortecimento. Em outros casos, a falta acelera uma máquina e o sistema torna-se instável por aceleração de outra máquina do sistema. Esta máquina possui um ponto de sela associado que possui menor energia do que a sela utilizada como ponto de equilíbrio de controle. No caso de uma máquina versus um barramento infinito, a desaceleração da máquina pode ser identificada facilmente e algum método para evitar a predição errônea da estabilidade pode ser utilizado.

Todos os métodos baseados no conceito de ponto de equilíbrio de controle permitem apenas a análise de estabilidade para o primeiro “swing”, e estes não podem garantir nada a respeito dos “swings” subsequentes. Os métodos existentes não verificam se o ponto de equilíbrio de controle pertence à fronteira da área de atração, que é condição crucial para a satisfação da condição de transversalidade imposta ao campo segundo os Teoremas 7 e 10 do Capítulo 6. Desta forma, estes métodos garantem apenas a existência do primeiro “swing”. Quando o sistema possui amortecimentos e as perdas de energia através do amortecimento são suficientemente grandes, os “swings” subsequentes ao primeiro irão ocorrer. No entanto, será necessário conhecer o quão grande deverá ser o amortecimento para que a ocorrência dos “swings” subsequentes ao primeiro seja garantida.

Neste capítulo, apresenta-se uma metodologia na qual estima-se o amortecimento mínimo que um sistema de uma máquina versus o barramento infinito deverá possuir para garantir a satisfação da condição de transversalidade. Utilizando o BCU para estimar o tempo crítico de abertura, e incorporando ao sistema o amortecimento estimado, todos os “swings” serão garantidos e conseqüentemente a estabilidade absoluta, ou seja, para todo o tempo após a eliminação do defeito, será garantida.

7.2 Sistema de Uma Máquina Versus Barramento Infinito

Seja o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 23. Este sistema é descrito pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P_m - P_{max} \sin \delta - D\omega\end{aligned}\quad (29)$$

FIGURA 23 - Sistema de Uma Máquina versus
Barramento Infinito

Os pontos de equilíbrio deste sistema são dados pelas equações:

$$\begin{aligned}\delta &= \arcsin\left(\frac{P_m}{P_{max}}\right) \\ \omega &= 0\end{aligned}\quad (30)$$

Seja $(\delta^s, 0)$ o ponto de equilíbrio estável. É trivial mostrar que $(\delta^{u_2}, 0) = ((\pi - \delta^s), 0)$ e $(\delta^{u_1}, 0) = ((-\pi - \delta^s), 0)$ são os pontos de equilíbrio instáveis mais próximos do ponto de equilíbrio estável $(\delta^s, 0)$. Seja a seguinte função energia para o sistema descrito pela equação (29) :

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2} M\omega^2 - P_m(\delta - \delta^s) - P_{max}(\cos \delta - \cos \delta^s) \quad (31)$$

Esta função energia pode ser dividida respectivamente em uma parte cinética e outra potencial como descrito abaixo:

$$\begin{aligned}
 V(\delta, \omega) &= V_k(\omega) + V_p(\delta) \\
 V_k(\omega) &= \frac{1}{2} M \omega^2 \\
 V_p(\delta) &= -P_m(\delta - \delta^s) - P_{max}(\cos \delta - \cos \delta^s)
 \end{aligned} \tag{32}$$

Se o amortecimento é desprezado, o sistema conserva a energia $V(\delta(t), \omega(t))$ ao longo de todas as trajetórias. Neste caso, a energia potencial assim como o retrato de fase estão apresentados nas Figuras 24 e 25. Quando $P_m > 0$, as selas possuem energias diferentes e $(\delta''_2, 0)$ possui energia menor que $(\delta''_1, 0)$, portanto, existe uma órbita homoclínica cujos α e ω -limites são o ponto de equilíbrio instável $(\delta''_2, 0)$. Esta órbita homoclínica é a fronteira $\partial A(\delta^s, 0)$ da área de atração $A(\delta^s, 0)$ do ponto de equilíbrio $(\delta^s, 0)$.

Quando um pequeno amortecimento positivo é adicionado ao sistema conservativo, a área de atração aumenta um pouco, tornando-se ilimitada devido à quebra da órbita homoclínica (este fato é facilmente demonstrado pelo princípio de invariância de LaSalle). O ponto de equilíbrio $(\delta''_2, 0)$ permanece na fronteira da área de atração $\partial A(\delta^s, 0)$ e a área de atração do sistema conservativo está contida na área de atração do sistema perturbado como pode ser visto na Figura 26.

Incrementando-se o parâmetro amortecimento, uma bifurcação global irá ocorrer no instante em que este amortecimento provocar a ligação entre as duas selas $(\delta''_1, 0)$ e $(\delta''_2, 0)$. Seja D_{cr} o valor do parâmetro amortecimento que causa a ligação entre as selas. O ponto de equilíbrio $(\delta''_1, 0)$ pertencerá à $\partial A(\delta^s, 0)$ se o amortecimento for maior que D_{cr} . Caso contrário, se $D < D_{cr}$, $(\delta''_1, 0)$ não pertencerá à fronteira da área de atração violando a satisfação da condição de transversalidade utilizada no desenvolvimento do método BCU. A parte computacional do método BCU não testa esta condição e este encontrará $(\delta''_1, 0)$ como sendo o ponto de equilíbrio de controle quando a falta provoca a desaceleração da máquina. Se o ponto de equilíbrio de controle não pertence à $\partial A(\delta^s, 0)$, então o método garante apenas a existência do primeiro “swing”.

FIGURA 24 - Energia Potencial do Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito

FIGURA 25 - Retrato de Fase do Sistema Conservativo de Uma Máquina versus Barramento Infinito

FIGURA 26 - Área de Atração de um Sistema que possui um amortecimento levemente positivo

Para evitar a instabilidade do sistema em "swings" subseqüentes ao primeiro, o parâmetro amortecimento deverá ser grande o suficiente para que o ponto de equilíbrio de controle pertença à $\partial A(\delta^s, 0)$. É evidente da discussão anterior que $D > D_{cr}$ garante tal fato, e o desenvolvimento de um método para encontrar tal amortecimento será o principal objetivo deste capítulo. Antes de apresentar o método para encontrar D_{cr} , algumas considerações preliminares são necessárias e estas são por si só resultados interessantes.

Antes de tudo analisar-se-á o comportamento do sistema conservativo de uma máquina versus barramento infinito. Será mostrado que o sistema conservativo será instável, e cruzará o PEBS (que neste caso é a fronteira do intervalo (δ'_1, δ'_2)) pelo ponto de equilíbrio do sistema reduzido associado δ'_2 se a sela $(\delta'_1, 0)$ for utilizada como ponto de equilíbrio de controle. O ponto de equilíbrio $(\delta'_2, 0)$ será a sela de menor energia na fronteira da área de atração, e este cruzará o PEBS em um tempo

finito se a energia da condição inicial no tempo de eliminação do defeito for maior que a energia potencial de δ''_2 .

Lema 4: *Seja (δ_o, ω_o) a condição inicial do sistema conservativo descrito pelas equações (29) com $D=0$. Seja δ''_1, δ''_2 os ângulos correspondentes respectivamente à sela de maior e menor energia pertencentes ao PEBS. Se $\delta_o \in (\delta''_1, \delta''_2)$ e se a energia V_o da condição inicial (δ_o, ω_o) é maior que $V_p(\delta''_2)$ e menor que $V_p(\delta''_1)$, então a projeção da órbita do sistema, que contém a condição inicial (δ_o, ω_o) , na reta $\omega=0$, cruza o PEBS em um tempo finito através do ângulo δ''_2 correspondente à sela de menor energia.*

Dem.: Se $\delta_o \in (\delta''_1, \delta''_2)$, então $V_p(\delta) \leq V_p(\delta_o) \leq V_p(\delta''_1)$. O problema será dividido em duas partes:

- i) $\omega_o > 0$. A continuidade de $\omega(t)$ garante que o ângulo δ estará aumentando pelo menos por um curto intervalo de tempo após $t=0$. Durante este intervalo, a energia total permanece constante e a máxima energia potencial, possível de ser atingida no intervalo (δ''_1, δ''_2) , é limitada superiormente por $V_{pmax} = \max(V_p(\delta''_2), V_p(\delta_o))$. Portanto, a energia cinética é limitada inferiormente por $V_K \geq V_o - V_{pmax}$. Consequentemente, a velocidade será sempre positiva e, num tempo finito, o ângulo cruzará o PEBS através de δ''_2 . Após cruzar o PEBS, o sistema não pode mais retornar ao intervalo (δ''_1, δ''_2) , uma vez que o mesmo procedimento pode ser aplicado ao novo intervalo $(\delta''_2, \delta''_2 + 2\pi)$ cujas selas possuem energia menor do que as selas do intervalo original.
- ii) $\omega_o < 0$. Como o sistema é conservativo e $V_o < V_p(\delta''_1)$, este não pode atingir o ângulo δ''_1 , consequentemente, a projeção da órbita não pode cruzar o PEBS através do ângulo δ''_1 . Isto significa que a velocidade tende para zero e pode tornar-se positiva. Como a aceleração é sempre negativa no intervalo (δ, δ''_2) , a projeção da órbita atinge o intervalo (δ''_1, δ) , onde a aceleração é sempre positiva. Como consequência, a velocidade assumirá o valor zero neste intervalo e tornar-

se-á positiva. Desta forma, o problema recai na primeira parte da demonstração e o Lema está demonstrado.

O Lema 4 mostra que apenas a sela de menor energia pode ser utilizada como ponto de equilíbrio de controle em um sistema conservativo de uma máquina versus barramento infinito. No caso em que a sela de maior energia é utilizada como ponto de equilíbrio de controle, apenas perdas de energia através de alguma forma de amortecimento pode garantir a estabilidade para "swings" subseqüentes ao primeiro. Neste caso em particular do sistema de uma máquina versus barramento infinito, a existência do segundo "swing" garante a estabilidade para sempre (estabilidade absoluta).

7.3 Determinação do Amortecimento Crítico (D_{cr})

As perdas de energia por ação do amortecimento podem ser descritas pela integral:

$$Perdas = D \int \omega(\delta) d\delta \quad (33)$$

Esta integral é dependente do caminho de integração, portanto, é necessário o conhecimento das órbitas do sistema para calcula-la. Neste trabalho, um método iterativo foi desenvolvido para calcular D_{cr} . O método baseia-se na informação contida no sistema conservativo para iniciar o processo iterativo.

Se $D=D_{cr}$, existirá uma órbita ligando as duas selas (Figura 27). Seu α -limite será $(\delta''_1, 0)$ e seu ω -limite será $(\delta''_2, 0)$. A energia perdida neste caminho (órbita heteroclínica) será igual à diferença de energia entre as duas selas:

$$Perdas_{cr} = V_p(\delta''_1) - V_p(\delta''_2). \quad (34)$$

Este caminho define uma área no retrato de fase que é proporcional às perdas, isto é:

$$\begin{aligned} Area_{cr} &= \int_{\Gamma_{D_{cr}} \cap (A(\delta^s) \times \mathbb{R}^+)} \omega(\delta) d\delta \\ Perdas_{cr} &= D_{cr} Area_{cr} \end{aligned} \quad (35)$$

FIGURA 27 - Estimativa da $Area_{cr}$

Uma boa estimativa da $Area_{cr}$ é necessária para encontrar-se D_{cr} . O sistema conservativo será utilizado para encontrar uma estimativa inicial do amortecimento crítico. Seja Γ_D a órbita do sistema cujo parâmetro amortecimento tem valor D e cujo α -limite seja a sela $(\delta''_1, 0)$. Pelo Lema 4, sabe-se que a projeção de Γ_o ($D=0$) no eixo $\omega=0$ cruza o PEBS com uma velocidade maior que zero, portanto, a área que esta órbita envolve desde o ponto $(\delta''_1, 0)$ até δ''_2 é maior do que $Area_{cr}$ (Figura 27). Utilizando esta área como estimativa de $Area_{cr}$, uma limitação inferior D_{LB} para D_{cr} é encontrada:

$$D_{LB} = \frac{Perdas_{cr}}{\int_{\Gamma_o \cap (A(\delta^*) \times R^+)} \omega(\delta) d\delta} \quad (35)$$

Seja $Area_h$ a metade da área envolvida pela órbita homoclínica. $Area_h$ é menor que $Area_{cr}$, portanto, um limitante superior D_{UB} para D_{cr} é encontrado:

$$D_{LB} = \frac{Perdas_{cr}}{Area_h} \quad (36)$$

As áreas envolvidas nestes cálculos estão mostradas no retrato de fase da Figura 27. Estas áreas são difíceis de serem calculadas, mas uma boa estimativa pode ser encontrada através de um processo iterativo que será descrito a seguir. O próximo Lema é utilizado para garantir a convergência deste processo.

Lema 5: Seja $D_1 < D_{cr}$ e $Area_1 = \int_{\Gamma_{D_1} \cap (A(\delta^*) \times R^+)} \omega(\delta) d\delta$, então $D_2 = \frac{Perdas_{cr}}{Area_1}$ será menor

que D_{cr} e maior do que D_1 .

Dem.: É evidente que $Area_1 > Area_{cr}$, portanto $D_2 < D_{cr}$. É evidente também que $Perdas_{cr} > Perdas_1$ uma vez que o sistema cruza o PEBS com uma velocidade positiva, então D_2 será maior do que D_1 .

Por indução do Lema anterior, pode-se estimar D_3 da mesma maneira que estimou-se D_2 tal que $D_1 < D_2 < D_3 < D_{cr}$. Fazendo isto iterativamente, é possível efetuar uma estimativa inferior do amortecimento convergindo monotonicamente para D_{cr} tão precisa quanto se queira.

O mesmo procedimento pode ser realizado para estimar superiormente D_{cr} iniciando com um amortecimento maior que D_{cr} . A diferença estará no limite superior da integral. Quando $D > D_{cr}$, a órbita Γ_D cruza o eixo $\omega=0$ com um ângulo $\delta_c < \delta^*_2$. Este ponto será o limite superior da integral.

Teoricamente o método está completamente definido mas algumas considerações práticas são necessárias para que a integral utilizada para estimar D_{cr} possa ser calculada. Para iniciar o processo iterativo de cálculo e obter uma rápida estimativa de D_{cr} , uma estimativa superior e inferior inicial são efetuadas como mostra a Figura 29. Estas áreas são facilmente encontradas sem nenhuma simulação numérica. Para isto utiliza-se os pontos de máxima velocidade nas órbitas do sistema conservativo. Para efetuar a estimativa inferior, utiliza-se a máxima velocidade da órbita Γ_o , e para efetuar a estimativa superior, utiliza-se o ponto de máxima velocidade na órbita homoclínica como mostra a Figura 29.

Neste processo iterativo, é impossível calcular as áreas sem o conhecimento das trajetórias. O cálculo destas nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio instáveis pode ser um problema de solução não muito simples. Para evitar esta dificuldade, iniciam-se as soluções numéricas das equações diferenciais com uma velocidade positiva pequena na órbita Γ_o para efetuar a estimativa inferior de D_{cr} , e inicia-se com um ângulo um pouco maior do que δ'_I no eixo $\omega=0$ para estimar superiormente D_{cr} (Figura 28). O método numérico, no caso da estimativa superior, não precisa ser muito preciso uma vez que este está para o lado da segurança do sistema.

7.4 Exemplo

Este método foi aplicado ao sistema utilizado por LLAMAS et al. (1995), tendo o parâmetro amortecimento como variável a ser determinada. Os resultados estão mostrados na Figura 29. O amortecimento estimado deve estar contido no intervalo (0,207;0,212); um passo de integração de 0,01s foi utilizado na determinação de D_{cr} .

FIGURA 28 - Condições iniciais utilizadas para o cálculo das órbitas do sistema

FIGURA 29 - Método iterativo para encontrar D_{cr}

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se detalhadamente o método BCU para análise de estabilidade transitória. Este método está fundamentado no conceito de ponto de equilíbrio de controle. Sua vantagem está na definição precisa, baseada em teoria matemática, do ponto de equilíbrio de controle. Todos os métodos baseados no ponto de equilíbrio de controle garantem apenas a existência do primeiro “swing”. Existem muitos casos em que o BCU prediz estabilidade para o primeiro “swing” mas o sistema torna-se instável em “swings” subsequentes. Isto ocorre porque no desenvolvimento do método computacional do BCU não se testa a satisfação da condição de transversalidade. Esta condição é fundamental para garantir que o ponto de equilíbrio pertença à fronteira da área de atração, garantindo assim que a eliminação do defeito será efetuada dentro da área de atração do ponto de equilíbrio estável pós-falta. Neste trabalho, desenvolveu-se uma metodologia de estimativa do amortecimento, que deverá ser aplicado à máquina para garantir a satisfação desta condição, no caso de uma máquina versus barramento infinito. O método é bastante simples e está baseado num simples cálculo iterativo de áreas no retrato de fase do sistema. As estimativas independem da trajetória do sistema durante a falta e estimativas grosseiras podem ser encontradas sem a necessidade de resolver as equações diferenciais. As estimativas podem ser refinadas através de um processo iterativo que converge para verdadeiro valor do amortecimento crítico. Neste processo iterativo é necessário resolver as equações diferenciais mas não é necessário grande precisão nos cálculos. Utilizando passos de integração grandes obtém-se estimativas rápidas e bastante precisas. Maiores investigações deverão ser feitas para estender a metodologia para sistemas multimáquinas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGEN, A.R.; HILL, D.J. (1981). A Structure Preserving Model for Power System Stability Analysis. *IEEE Trans on PAS*, v. PAS-100, n.1, jan.

BRAUER, F.; NOHEL, J.A. (1969). *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, Amsterdam, W.A.Benjamin Inc.

BRETAS, N.G.; ALBERTO, L.F.C. (1997). *Estabilidade Transitória em Sistemas Eletroenergéticos*. Texto produzido com o auxílio do PAE (Programa de Aperfeiçoamento de Ensino), Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

BRETAS, N.G.; ALBERTO, L.F.C. (1997). Some Considerations About Power System Modelling Concerning Transient Stability Analysis. *IMACS/IFAC Symposium (2nd), Mathematic Modelling, MATHMOD '2*, Technical University of Vienna, fev.

CHIANG, H-D.; WU ,F.F.; VARAYA, P.P.; (1987). Foundations of Direct Methods for Power System Transient Stability Analysis". *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-34, n.2, fev.

CHIANG, H-D.; WU, F.F.; VARAYA, P.P. (1988). Foundations of the Potential Energy Boundary Surface Method for Power System Transient Stability Analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems*, v.35, n.6, jun.

- CHIANG, H-D. (1989). Study of the Existence of Energy Functions for Power Systems with Losses, *IEEE Trans on Circuits and Systems*, v.36,n.11, nov.
- CHIANG, H-D.; THORP, J.S. (1989). The Closest Unstable Equilibrium Point Method for Power System Dynamic Security Assessment. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, v.36, n.9, set.
- CHIANG, H-D.; WU, F.F.; VARAYA, P.P. (1991). A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. *IEEE /1991/*.
- FOAD, A.A.; ANDERSON, P.M. (1997). *Power System Control and Stability*. New York, New York, The Iowa State University Press.
- GUCKENHEIMER, J.G.; HOLMES, P. (1985). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. *Applied Mathematical Sciences*, v.42, Springer-Verlag.
- GUPTA, C.L.; EL-ABIAD, A.H. (1976). Determination of the Closest Unstable Equilibrium State for Lyapunov Methods in Transient Stability Studies. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, PAS-95, n.5, set./out.
- HALE, J.K.; KOÇAK, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.
- HILL, D.J.; BERGEN, A.R. (1982). Stability Analysis of Multimachine Power Networks with Linear Frequency Dependent Loads. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-29,n.12, dez.
- KIMBARK, E.W. (1948). *Power System Stability*. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, v.1

- LIMA, E.L. (1977). *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq.
- LLAMAS, A.; LOPEZ, J.De L.R.; MILI, L.; PHADKE, A.G.; THORP, J.S. (1995). Clarifications of the BCU Method for Transient Stability Analysis. *IEEE Trans. on Power Systems*, v.10, n.1, fev.
- PAI, M.A. (1981). *Power System Stability: Analysis by the Direct Method of Lyapunov*. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publishing Company.
- RUDIN, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis*. Mc-Graw Hill Book Company, Kōgakusha Company Ltd, International Student Edition.
- STEVENSON JR., W.D. (1986). *Elementos de Análise de Sistemas de Potência*. McGraw-Hill, São Paulo, 4^a ed. Americana, 2^a ed. em Português.
- TSOLAS, N.A.; ARAPOSTATHIS, A.; VARAYA, P.P. (1985). A Structure Preserving Energy Function for Power System Transient Stability Analysis. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-32, n.10, out.