

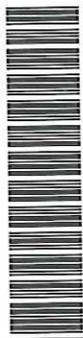
Filtros de Kalman para Sistemas Singulares em Tempo Discreto

Aline Fernanda Bianco

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

DEDALUS - Acervo - EESC



31100052116

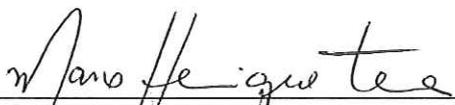


São Carlos
2005

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **ALINE FERNANDA BIANCO**

Dissertação defendida e julgada em 13-09-2004 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Associado **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

aprovada



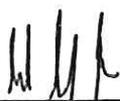
Prof. Dr. **JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA**
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADA



Prof. Dr. **VITOR HELOIZ NASCIMENTO**
(Escola Politécnica/USP)

APROVADA



Prof. Associado **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica



Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Dedico este trabalho
a todos os meus familiares.*

Agradecimentos

Primeiramente a Jesus Cristo, nosso mestre, espírito de luz e bondade.

Aos professores Marco Henrique Terra e João Y. Ishihara pela orientação, paciência, dedicação e incentivo nestes dois anos de trabalho.

Aos meus pais Miguel e Regina, minha irmã Alethéa, meus tios Neide e Luiz Carlos, primos Luciana e Marcelo e priminhos Guilherme e Rafael por serem as pessoas mais importantes da minha vida

Aos amigos de graduação Fernanda e Fábio por permanecerem tão presentes, mesmo com a distância física.

À Elis pela amizade, companheirismo e longas conversas que muito me auxiliaram em todo o mestrado.

Ao Marcus pelo cuidado, paciência, alegria e companhia que muito me fizeram bem.

Ao Cleber pelo carinho, apoio e lealdade, indispensáveis nestes anos.

Ao José Carlos pelo coleguismo e, principalmente pela generosidade e paciência que teve comigo.

Ao Fernando pelo divertimento, amizade e bom humor com que sempre me tratou.

Aos demais colegas do LASI (Laboratório de Sistemas Inteligentes), Arthur, Antonio, Gilson, Lucas, Karla, Adriano, Luciana, Everaldo, Márcio, Natanael, João Paulo, André e Hélio por estarem comigo todo esse tempo em harmonia.

Aos colegas e amigos de outros laboratórios, principalmente do LSEE (Laboratório de Sistemas de Energia Elétrica).

Aos professores Adriano, Vilma, Luiz Fernando e Murilo por ministrarem disciplinas importantes à minha formação.

À Denise e Marisa que, além de secretárias, tornaram-se minhas amigas.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, especialmente José Carlos, Vera e Cida por me darem respaldo todas as vezes que precisei.

À CAPES pela bolsa concedida.

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Símbolos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Lineares Singulares Discretos no Tempo	2
1.1.1 Conceitos Gerais	2
1.2 Filtragem de Kalman	3
1.2.1 Estimativas Filtrada, Preditora e Suavizada	3
1.3 Organização do Trabalho	4
2 Filtro de Kalman para Sistemas Singulares	6
2.1 Abordagem Estocástica	
Método da Máxima Verossimilhança	6
2.1.1 Estimativa Filtrada	12
2.2 Abordagem Determinística 1	15
2.2.1 Estabelecimento do Problema	15
2.2.2 Estimativa Filtrada	17
2.2.3 Estimativa Preditora	24
2.3 Abordagem Determinística 2	28
2.3.1 Estimativa Filtrada e Suavizada	28
2.3.2 Estimativa Preditora	37
2.4 Simulação	42
3 Casos particulares do filtro de Kalman proposto	44
3.1 Equivalência entre as estimativas filtradas	45

3.2	Equivalência entre as estimativas preditoras	51
4	Estabilidade e Convergência do Filtro de Kalman proposto	60
4.1	Resultados Auxiliares	62
4.2	Estabilidade	68
4.3	Convergência	73
5	Conclusões	78
	Referências Bibliográficas	80
A	Prova do Teorema 2.2.1	84

Lista de Figuras

2.1	Valor real do estado $x_1(k)$ e estimativa filtrada	43
2.2	Valor real do estado $x_2(k)$ e estimativa filtrada	43

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	corpo dos números reais
\mathbb{R}^n	conjunto dos vetores de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes de dimensão $n \times m$
E	esperança matemática

Resumo

Bianco A. F. *Filtros de Kalman para Sistemas Singulares em Tempo Discreto*. São Carlos, 2004, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Esta dissertação apresenta um estudo dos filtros de Kalman para sistemas singulares em tempo discreto. Novos algoritmos são formulados para as estimativas filtradas, preditoras e suavizadas com as correspondentes equações de Riccati para sistemas singulares variantes no tempo. Nesta dissertação considera-se também uma aproximação do problema de filtragem de Kalman como um problema determinístico de ajuste ótimo de trajetória. A formulação proposta permite considerar um atraso no sinal de medida, sendo permitida a correlação entre os estados e os ruídos da medida. Apresentam-se também as provas da estabilidade e da convergência destes filtros.

Palavras-Chave: Filtragem de Kalman, sistemas singulares, sistemas dinâmicos, estimativa de estados, tempo discreto, equação de Riccati.

Abstract

Bianco A. F. Kalman Filters for Discrete Time Singular Systems . São Carlos, 2004 Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This dissertation presents a study of Kalman filters for singular systems in discrete time. New algorithms are developed for the Kalman filtered, predicted and smoothed estimate recursions with the corresponding Riccati equations for time-variant singular systems. This dissertation addresses the Kalman filtering problem as a deterministic optimal trajectory fitting problem. The problem is formulated taking into account one delay in the measured signals and correlations between state and measurement noises. In the final, this work presents the stability and convergence proofs of these filters.

Key-Words: *Kalman filtering, singular systems, dynamic systems, state estimation, discrete-time, Riccati equation.*

Capítulo 1

Introdução

Este projeto de mestrado tem como objetivo fazer um estudo da filtragem dos sistemas singulares lineares discretos e variantes no tempo e apresentar novos algoritmos de filtragem para este tipo de sistema. Para melhor conceituar um sistema singular consultou-se referências clássicas como LUENBERGER (1977), LUENBERGER (1978), VERGHESE et al. (1981), CAMPBELL & MEYER (1979), CAMPBELL (1980), NEWCOMB (1981), CAMPBELL (1982), DAI (1989), LEWIS (1986) e trabalhos mais recentes como ISHIHARA & TERRA (2001) e GERMANI et al. (2001).

No estudo da estimativa de sistemas consultou-se trabalhos clássicos como ANDERSON & MOORE (1979), BRYSON & HO (1975), WHITTLE (1983), WHITTLE (1990), SAGE & MELSA (1971), SCHWEPPE (1973), SHAKED & SOUZA (1995) e trabalhos mais recentes. Um excelente trabalho nesta área é o livro KAYLATH et al. (2000), que apresenta uma abordagem atual do estudo da estimativa linear. Os trabalhos consultados para o estudo dos filtros singulares que tiveram mais relevância neste trabalho foram DAROUACH et al. (1993), XI (1997), DAROUACH et al. (1995), NIKOUKHAH et al. (1989), KELLER et al. (1992), DENG & LIU (1999), NIKOUKHAH et al. (1992), NIKOUKHAH et al. (1999), ZASADZINSKI et al. (1991), ISHIHARA et al. (2004).

1.1 Sistemas Lineares Singulares Discretos no Tempo

1.1.1 Conceitos Gerais

Considere um sistema dinâmico linear variante no tempo descrito por

$$E_{i+1}x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, \quad (1.1)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u_i \in \mathbb{R}^p$ o vetor de entrada, E_{i+1} e $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ matrizes conhecidas. Este sistema é denominado singular (em geral, E_{i+1} é não invertível).

A modelagem singular é mais abrangente que a modelagem feita no espaço de estados usual. Existem sistemas que só podem ser modelados através de sistemas singulares, uma vez que não possuem representação no espaço de estados.

Os sistemas singulares aparecem em diversas áreas, tais como robótica (MILLS & GOLDENBERG (1989)), processos de modelagem de sistemas econômicos (LUNENBERGER (1977)), modelagem de imagens (HASAN & AZIM-SADJANI (1995)), sistemas de potência, circuitos elétricos, engenharia aeroespacial, processos químicos, etc.

Quando são desconhecidos os valores assumidos pelos estados de um dado sistema dinâmico com um determinado tipo de comportamento aleatório, uma ferramenta de grande utilidade prática que nos permite obter estimativas a priori e a posteriori destes estados é o filtro de Kalman.

Para sistemas singulares discretos no tempo, tem havido um estudo intenso sobre filtros de Kalman (veja, por exemplo, DAI (1989), KELLER et al. (1992), NIKOUKHAH et al. (1992), DAROUACH et al. (1993), XI (1997), ZHANG et al. (1998), DENG & LIU (1999), NIKOUKHAH et al. (1999) e ISHIHARA et al. (2004)). Diferentes formulações têm sido propostas para a resolução do problema de estimativa recursiva. Em DAI (1989) o problema foi resolvido transformando um sistema singular em um sistema não singular estendido. Em um contexto puramente singular, pode-se considerar o método dos mínimos quadrados (KELLER et al. (1992), DAROUACH et al. (1993), ISHIHARA et al. (2004)), o critério da máxima verossimilhança (NIKOUKHAH et al. (1992), NIKOUKHAH et al. (1999)) e modelos de inovação tipo ARMA (*autoregressive*

moving average) (ZHANG et al. (1998) e DENG & LIU (1999)).

1.2 Filtragem de Kalman

Em 1960, Rudolf Emil Kalman publicou a solução recursiva para o problema de filtragem linear discreto, criando assim o filtro de Kalman. Este pode ser definido como um conjunto de equações matemáticas utilizado para estimar estados de um processo, minimizando o erro médio quadrático da estimativa.

O filtro de Kalman possui vários aspectos importantes, tais como produzir estimativas de estados passados, presentes e futuros e fazer isto mesmo quando a natureza exata do sistema modelado é desconhecida.

O filtro de Kalman é um dos desenvolvimentos mais relevantes da ciência aplicada no último século, com forte destaque para as aplicações em engenharia. Atualmente, muitas exposições desta teoria e suas aplicações estão disponíveis e muitas ainda estão sendo desenvolvidas.

1.2.1 Estimativas Filtrada, Preditora e Suavizada

Seja um sistema linear discreto definido pelas equações

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= Fx_i + w_i \\z_i &= Hx_i + v_i.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Como se trata de um sistema que possui ruídos, w_i e v_i , ele é caracterizado de modo estocástico, podendo-se considerar z_i como sendo um conjunto de medidas ou observações. Assim pode-se achar \hat{x}_i que é o valor estimado de x_i , a partir das observações z_i . Para tanto pode-se estimar x_i através de diversos métodos. Neste trabalho serão abordados dois deles sendo um o método dos mínimos quadrados e o outro o método da máxima verossimilhança.

Conforme a disponibilidade da quantidade de medidas, o conceito de estimativa recebe uma denominação diferente.

Quando se tem i medidas, ou seja z_0, z_1, \dots, z_i , então a estimativa de x_i , até a i -ésima medida é chamada de filtrada e é geralmente representada por $\hat{x}_{i|i}$.

Um exemplo típico da aplicação da estimativa filtrada é o caso da transmissão de sinais de rádio. Neste caso, o sinal de interesse é o sinal de voz. Este sinal chega ao receptor contendo ruídos e quando demodulado, ele é filtrado para recuperar o sinal de voz da melhor maneira possível.

A segunda denominação é a de estimativa preditora. Neste caso, deseja-se estimar o sinal x_{i+1} dispondo-se apenas de i medidas ou observações, ou seja, z_0, z_1, \dots, z_i . Sua representação é $\hat{x}_{i+1|i}$. Um exemplo típico é o acompanhamento da trajetória do lançamento de um objeto. Dependendo da experiência de quem acompanha a trajetória, é possível saber com boa aproximação o local exato onde ele deve cair. A aproximação deve-se aos ruídos, como velocidade do vento, etc.

A terceira denominação é a de estimativa suavizada. Neste caso, a quantidade de medidas disponível é superior ao número estados que pretende-se estimar, ou seja, as medidas seguintes podem ser usadas para obtenção da estimativa. Assim pode-se obter a estimativa \hat{x}_i dispondo-se das medidas z_0, z_1, \dots, z_{i+1} . Normalmente o processo de suavização pode se tornar mais exato do que o processo de filtragem, por envolver uma quantidade maior de medidas. O exemplo clássico de um suavizador é o caso de uma pessoa que fala muito rápido e o cérebro da pessoa que está ouvindo não consegue entender todas as palavras pronunciadas. Ao final da fala, a pessoa que está escutando poderá entender um percentual significativo do que foi dito, pela junção dos significados das palavras que ela entendeu.

1.3 Organização do Trabalho

Esta dissertação compõe-se da seguinte forma. No Capítulo 2 o filtro de Kalman é deduzido através de três maneiras distintas, sendo que uma possui abordagem estocástica e as outras duas tratamentos determinísticos.

No Capítulo 3 são mostrados casos particulares do filtro de Kalman proposto, após serem feitas simplificações no modelo do sistema.

Algumas propriedades dos filtros deduzidos nas seções 2.2 e 2.3 do Capítulo 2, tais como estabilidade e convergência são apresentadas no Capítulo 4.

Finalmente, o Capítulo 5 destaca as principais contribuições deste trabalho e as conclusões finais, bem como sugestões para trabalhos futuros.

A principal contribuição deste trabalho é apresentar os filtros deduzidos nas seções 2.2 e 2.3 do Capítulo 2 na forma de blocos matriciais de dimensão nove, uma vez que tal formulação promove a colocação de incertezas em todas as matrizes do modelo do sistema de uma maneira mais simplificada. Desta forma, a continuidade natural deste trabalho passa a ser a obtenção do filtro robusto de Kalman para sistemas singulares em tempo discreto, cujas incertezas estão presentes em todas as matrizes do sistema, de maneira unificada.

Capítulo 2

Filtro de Kalman para Sistemas Singulares

Neste capítulo serão apresentadas três abordagens para o problema de filtragem de sistemas singulares. A primeira delas é estocástica, em que as médias e as variâncias dos ruídos do sistema são levadas em consideração nas deduções dos filtros. As outras duas abordagens são determinísticas, sendo que em uma consta um funcional composto por um somatório de i até k e na outra há um funcional denominado "funcional de um passo". Os problemas definidos e resolvidos através das abordagens determinísticas são mais gerais que os encontrados na literatura, uma vez que tanto na equação de estado, como na equação da saída do sistema há matrizes $G_{v,i}$, $K_{w,i}$ e $K_{v,i}$ diferentes da matriz identidade e matriz nula e o sistema possui ruídos cruzados. Expressões equivalentes para o filtro de Kalman são obtidas através das três abordagens.

2.1 Abordagem Estocástica

Método da Máxima Verossimilhança

O filtro de Kalman para sistemas singulares que será apresentado nesta seção é baseado em NIKOUKHAH et al. (1992) que usa a estimativa de máxima verossimilhança. Este filtro será utilizado como referência para uma análise comparativa que será feita a partir dos filtros que serão deduzidos na sequência deste capítulo. Considere a equação de medida discreta dada por

$$y_k = C_k x_k + u_k, \quad (2.1)$$

sendo x_k o vetor desconhecido, y_k as medidas observadas, C_k uma matriz que tem posto coluna pleno e u_k o ruído de medida gaussiano cuja variância é dada por V .

Seja R uma matriz que tenha posto pleno, tal que $RR^T = V$. O ruído u da equação (2.1) pode ser escrito como $u = Rw$, com w sendo um ruído gaussiano com média nula e variância I . Por simplicidade será retirado o índice k da equação da medida, então

$$y = Cx + Rw. \quad (2.2)$$

Considerando esta equação como uma restrição linear de x e w , o problema da máxima verossimilhança é achar um par (x, w) que satisfaça (2.2) e minimize o funcional

$$J(w) = \frac{1}{2} w^T w. \quad (2.3)$$

Para resolver este problema, usa-se a função Lagrangiana dada por

$$L(w, x, \lambda) = \frac{1}{2} w^T w + \lambda^T (y - Cx - Rw). \quad (2.4)$$

As condições de otimalidade são

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w} &= w - R^T \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= C^T \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y - Cx - V\lambda = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pode-se re-escrever as expressões acima na seguinte forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A invertibilidade do bloco matricial à esquerda depende de C ter posto coluna pleno.

Lema 2.1.1 (NIKOUKHAH et al. (1992), p.1327) : *Seja V uma matriz semi-definida positiva e C uma matriz com posto coluna pleno. Então, se $\begin{bmatrix} V & C \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então a matriz $\begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.*

Prova: Supondo que

$$\begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{então} \quad (2.7)$$

$$x^T V + y^T C^T = 0, \quad (2.8)$$

$$x^T C = 0 \quad (2.9)$$

transpondo (2.9) e multiplicando à esquerda por y^T , tem-se

$$y^T C^T x = 0. \quad (2.10)$$

Pós-multiplicando (2.8) por x

$$x^T V x + y^T C^T x = 0, \quad (2.11)$$

ou seja,

$$x^T V x = 0. \quad (2.12)$$

Como V é semidefinida positiva, então $x^T V = 0$. A composição deste termo com (2.9) resulta em

$$x^T \begin{bmatrix} V & C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

isto implica que $x = 0$, pois $\begin{bmatrix} V & C \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno. Assim, (2.8) implica em $y^T C^T = 0$, mas como C tem posto coluna pleno, então $y = 0$, o que resulta na invertibilidade do bloco matricial à esquerda de (2.6).

□

Da equação (2.6) tem-se

$$\hat{x}_{ML} = x = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y. \quad (2.14)$$

Utiliza-se a seguir o lema da inversão de blocos matriciais, e considera-se a matriz V invertível,

$$\hat{x}_{ML} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}C(C^T V^{-1}C)^{-1}C^T V^{-1} & V^{-1}C(C^T V^{-1}C)^{-1} \\ (C^T V^{-1}C)^{-1}C^T V^{-1} & -(C^T V^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y \quad (2.15)$$

ou seja,

$$\hat{x}_{ML} = (C^T V^{-1}C)^{-1}C^T V^{-1}y \quad (2.16)$$

e a matriz da covariância do erro resulta da expressão:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{ML} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (Cx + u) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Cx \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{ML} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}C(C^TV^{-1}C)^{-1}C^TV^{-1} & V^{-1}C(C^TV^{-1}C)^{-1} \\ (C^TV^{-1}C)^{-1}C^TV^{-1} & -(C^TV^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Cx + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ou seja,

$$\hat{x}_{ML} = x + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2.19}$$

e, conseqüentemente,

$$x - \hat{x}_{ML} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2.20}$$

Logo, $P_{ML} = \mathcal{E}[(x - \hat{x}_{ML})(x - \hat{x}_{ML})^T]$ é dada por

$$\begin{aligned}
P_{ML} &= \mathcal{E}[(x - \hat{x}_{ML})(x - \hat{x}_{ML})^T] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{E}[uu^T] \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
P_{ML} &= \\
\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}C(C^TV^{-1}C)^{-1}C^TV^{-1}C^TV^{-1} & 0 \\ 0 & (C^TV^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Como o bloco (2, 2) de (2.22) tem sinal diferente do equivalente em (2.15), então pode-se escrever a equação da covariância do erro como

$$P_{ML} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Até este ponto, considerava-se que a matriz V era invertível. Quando V não possui inversa, com C tendo posto coluna pleno, então (2.14) e (2.23) tornam-se

$$\hat{x}_{ML} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} z \tag{2.24}$$

e

$$P_{ML} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2.1.1 Estimativa Filtrada

Seja o seguinte sistema descrito por

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + w_i \\ z_{i+1} &= H_{i+1}x_{i+1} + v_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

sendo que $x_i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $z_i \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medida da saída, E_i , $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes conhecidas, $w_i \in \mathbb{R}^m$, $v_i \in \mathbb{R}^p$ são respectivamente o ruído branco de estado e o ruído branco da medida da saída, ambos possuindo média zero, sendo independentes com matrizes de covariâncias dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{w_i w_j^T\} &= \begin{cases} Q_i > 0 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \mathbf{E}\{v_i v_j^T\} &= \begin{cases} R_i > 0 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \mathbf{E}\{w_i v_j^T\} &= \begin{cases} S_i > 0 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Além da equação de medida z_k será usada uma medida adicional $x_0 = x(0)$, representada pela equação:

$$\bar{x}_0 = x(0) + \nu \quad (2.28)$$

sendo que ν é Gaussiana com média zero e independente de w_i e de v_i , tendo covariância P_0 .

Estas três últimas equações proporcionam num intervalo de $0 \leq i \leq k-1$ um conjunto de medidas para o vetor $[x_0^T, x_1^T, \dots, x_k^T]$. Examinando estas medidas, vê-se que somente os termos nestas equações envolvendo x_k estão na forma $E_k x_k$ e $H_k x_k$, sendo por isso necessário que $\begin{bmatrix} E_k \\ H_k \end{bmatrix}$ possua posto coluna pleno para que x_k seja estimável.

Por indução, usando o procedimento da seção anterior e o fato de que x_0 é estimável a partir de (2.28), pode-se mostrar que esta é também uma condição suficiente para a estimabilidade, estabelecida a partir do lema a seguir.

Definição 2.1.1 : *Seja $P_{k|k}$ a matriz de covariância do erro associada com a estimativa $\hat{x}_{k|k}$, com $\hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$ e $P_{0|0}$ conhecido. Então $\hat{x}_{k+1|k+1}$ e $P_{k+1|k+1}$, são respectivamente, iguais a estimativa de máxima verossimilhança de x_{k+1} e sua matriz de covariância do erro baseadas nas seguintes observações:*

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= H_{k+1} x_{k+1} + v_k \\ F_k \hat{x}_{k|k} &= E_{k+1} x_{k+1} + F_k \nu_k - w_k \end{aligned} \quad (2.29)$$

com ν_k sendo variável Gaussiana, independente de w_k e de v_k , com média zero e variância $P_{k|k}$.

Teorema 2.1.1 : *A estimativa filtrada $\hat{x}_{k+1|k+1}$ e a correspondente matriz de covariância do erro $P_{k+1|k+1}$ podem ser obtidas a partir das seguintes equações recursivas:*

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k & E_{k+1} \\ -S_k^T & R_k & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

e

$$P_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k & E_{k+1} \\ -S_k^T & R_k & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Prova: Re-escrevendo (2.29) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix} x_{k+1} + \begin{bmatrix} F_k \nu_k - w_k \\ v_k \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Associando-se os termos desta equação com aqueles de (2.1), tem-se:

$$y_k = \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix} \text{ e } u_k = \begin{bmatrix} F_k \nu_k - w_k \\ v_k \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

A matriz de covariância será agora

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_k &= \mathbf{E}\{u_k u_k^T\} = \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} F_k \nu_k - w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \nu_k - w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \right\} \\ &= \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k \\ -S_k^T & R_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo as matrizes y_k , C_k e \mathbb{R}_k em (2.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k & E_{k+1} \\ -S_k^T & R_k & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e procedendo como em (2.24) e em (2.25) resulta

$$\hat{x}_{ML} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k & E_{k+1} \\ -S_k^T & R_k & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

e

$$P_{ML} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k & -S_k & E_{k+1} \\ -S_k^T & R_k & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

□

A seguir, serão apresentadas duas abordagens determinísticas para o problema de filtragem. A utilização de tais abordagens para obtenção do filtro de Kalman nas formas filtrada, preditora e suavizada são as principais contribuições deste trabalho, uma vez que a forma de blocos matriciais de dimensão nove em que os filtros são apresentados promove a colocação de incertezas em todas as matrizes do modelo do sistema de uma forma simplificada.

2.2 Abordagem Determinística 1

2.2.1 Estabelecimento do Problema

Considere o seguinte sistema singular estocástico discreto no tempo

$$\begin{aligned} E_{i+1} x_{i+1} &= F_i x_i + G_{w,i} w_i + G_{v,i+1} v_{i+1}, \\ z_{i+1} &= H_{i+1} x_{i+1} + J_i x_i + K_{w,i} w_i + K_{v,i+1} v_{i+1} \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo $i=0,1,2,\dots$; $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ a variável singular, $z_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ e $v_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ os ruídos de estado e de medida, respectivamente. A condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ é uma variável aleatória tal que $E_0 x_0$ tem média $F_{-1} \bar{x}_0$ e covariância P_0 ; w_i e v_i são

variáveis gaussianas, independentes de x_0 , com matrizes de covariância conhecidas:

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ v_{j+1} \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix} \delta_{ij} > 0. \quad (2.39)$$

sendo $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ caso contrário.

O problema do filtro de Kalman é construir recursivamente

(i) a estimativa linear filtrada

$$\hat{x}_{k|k} = \mathbf{E}\{x_k | z_k, z_{k-1}, \dots, z_0\} \quad (2.40)$$

(ii) a estimativa linear preditora

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbf{E}\{x_k | z_{k-1}, \dots, z_0\}. \quad (2.41)$$

(iii) a estimativa linear suavizada

$$\hat{x}_{k|k+1} = \mathbf{E}\{x_k | z_{k+1}, \dots, z_0\}. \quad (2.42)$$

Para sistemas no espaço de estados usual (quando E_i é a matriz identidade), o filtro de Kalman nas diferentes formas pode ser obtido por uma conveniente organização da estimativa via mínimos quadrados determinístico da trajetória $\{x_{0|k}, x_{1|k}, \dots, x_{k+1|k}\}$ dadas pelas medidas $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ (ver ANDERSON & MOORE (1979), Seção 6.2). Este resultado foi estendido para sistemas singulares por DAROUACH et al. (1993) para obter estimativas filtradas recursivas.

Na estrutura singular, o problema determinístico de ajuste da trajetória pode ser descrito como segue. Suponha que é dada uma sequência de medidas $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$, matrizes E_i, F_i, H_i com dimensões apropriadas, e um valor inicial \bar{x}_0 . Para cada sequência de estados $\{x_{0|k}, x_{1|k}, \dots, x_{k|k}, x_{k+1|k}\}$ pode-se definir os seguintes erros de ajuste

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{w,i} & G_{v,i+1} \\ K_{w,i} & K_{v,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i|k} \\ v_{i+1|k} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} E_{i+1}x_{i+1|k} - F_i x_{i|k} \\ z_{i+1} - H_{i+1}x_{i+1|k} - J_i x_{i|k} \end{bmatrix} \\ p_{0|k} &:= E_0 x_{0|k} - F_{-1} \bar{x}_0 \\ K_{v,0} v_{0|k} &:= z_0 - H_0 x_{0|k} \end{aligned}$$

em que as matrizes E_0 e F_{-1} também possuem dimensões apropriadas. Estas matrizes podem fornecer informação *a priori* do estado inicial x_0 , e usualmente é suposto que $E_0 = F_{-1} = I$.

O problema resume-se então a encontrar uma sequência de estados que minimize o funcional quadrático proposto dos erros definidos anteriormente, onde as matrizes de ponderação Q_j , R_i e P_0 para $w_{j|k}$, $v_{i|k}$, e $p_{0|k}$, respectivamente, são supostamente conhecidas.

2.2.2 Estimativa Filtrada

O lema a seguir será utilizado na demonstração do Teorema 2.2.1 que está inserida no Apêndice A. Por ser um resultado auxiliar, ele será apresentado sem a respectiva prova.

Lema 2.2.1 : *Seja a_1 invertível. Se $\begin{bmatrix} a_1 & b^T \\ b & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}$, então*

$$y = (a_2 - b a_1^{-1} b^T)^{-1} z$$

□

O problema determinístico de ajuste de trajetória é encontrar uma sequência $\{\hat{x}_{0|k}, \hat{x}_{1|k}, \dots, \hat{x}_{k|k}\}$ que minimize o seguinte funcional do erro de estimativa, $\mathcal{J}_k(\{x_{i|k}\}_{i=0}^k)$:

$$\mathcal{J}_0(x_{0|0}) := \frac{1}{2} \{ \|E_0 x_{0|0} - F_{-1} \bar{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|v_{0|0}\|_{R_0^{-1}}^2 \}, \quad (2.43)$$

sujeito a

$$z_0 = H_0 x_{0|0} + K_{v,0} v_{0|0} \quad (2.44)$$

para $k = 0$ e

$$\mathcal{J}_k \left(\{x_{i|k}\}_{i=0}^k \right) := \frac{1}{2} \left\{ \|E_0 x_{0|k} - F_{-1} \bar{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|v_{0|k}\|_{R_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} w_{i|k} \\ v_{i+1|k} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_{i|k} \\ v_{i+1|k} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.45)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} E_{i+1} x_{i+1|k} &= F_i x_{i|k} + G_{w,i} w_{i|k} + G_{v,i+1} v_{i+1|k}, \\ z_{i+1} &= H_{i+1} x_{i+1|k} + J_i x_{i|k} + K_{w,i} w_{i|k} + K_{v,i+1} v_{i+1|k}, \quad i = 0, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

para $k > 0$.

Para cada $k \geq 0$, temos que o problema de otimização (2.45)-(2.46) é equivalente ao seguinte problema de minimização

$$\min_{\mathfrak{X}_{k|k}, \mathfrak{Y}_{k|k}} \frac{1}{2} \mathfrak{Y}_{k|k}^T \mathfrak{R}_k^{-1} \mathfrak{Y}_{k|k} \quad (2.47)$$

sujeito a

$$\mathfrak{A}_k \mathfrak{X}_{k|k} + \mathfrak{R}_k \mathfrak{Y}_{k|k} - \mathfrak{B}_k = 0 \quad (2.48)$$

sendo que

$$\mathfrak{R}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{R}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{K}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{K}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_k & \mathcal{A}_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{k-1} & \mathcal{A}_{k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_{k-2} & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathcal{A}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_0 & \mathcal{A}_{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{V}_{k|k} := \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{k|k} \\ \mathcal{V}_{k-1|k} \\ \vdots \\ \mathcal{V}_{3|k} \\ \mathcal{V}_{2|k} \\ \mathcal{V}_{1|k} \\ \mathcal{V}_{0|k} \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_{k|k} := \begin{bmatrix} x_{k|k} \\ x_{k-1|k} \\ x_{k-2|k} \\ \vdots \\ x_{2|k} \\ x_{1|k} \\ x_{0|k} \end{bmatrix}, \mathfrak{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathcal{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_3 \\ \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{Z}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}_{j|k} := \begin{bmatrix} w_{j-1|k} \\ v_{j|k} \end{bmatrix}, \mathcal{E}_j := \begin{bmatrix} -E_j \\ H_j \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{j-1} := \begin{bmatrix} F_{j-1} \\ J_{j-1} \end{bmatrix}$$

para $0 \leq j \leq k$,

$$\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_{i-1} & S_{i-1} \\ S_{i-1}^T & R_i \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}, \mathcal{K}_i := \begin{bmatrix} G_{w,i-1} & G_{v,i} \\ K_{w,i-1} & K_{v,i} \end{bmatrix}$$

para $1 \leq i \leq k$ e

$$w_{-1|0} := E_0 x_{0|0} - F_{-1} \bar{x}_0, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{R}_0 := \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_0 := \begin{bmatrix} -F_{-1}\bar{x}_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_0 := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K_{v,0} \end{bmatrix}.$$

Para resolver o problema de otimização (2.47)-(2.48), serão consideradas as seguintes hipóteses

$$\mathbf{H 1} \quad \begin{bmatrix} -E_i & F_{i-1} & G_{w,i-1} & G_{v,i} \\ H_i & J_{i-1} & K_{w,i-1} & K_{v,i} \end{bmatrix} \text{ tem posto linha pleno para todo } 0 < i \leq k;$$

$$\mathbf{H 2} \quad \begin{bmatrix} H_0 & K_{v,0} \end{bmatrix} \text{ tem posto linha pleno};$$

$$\mathbf{H 3} \quad \begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix} \text{ tem posto coluna pleno para todo } 0 \leq i \leq k.$$

As hipóteses $H1$ e $H2$ estão relacionadas à consistência dos parâmetros do sistema e garantem que não há informações redundantes. A hipótese $H3$ é considerada para estimabilidade e garante a existência do filtro.

A solucionabilidade do problema de otimização acima será considerada no próximo lema.

Lema 2.2.2 *Para um dado k fixo, suponha dada uma sequência de saídas $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ e que as hipóteses $H1$ - $H3$ são satisfeitas. Então, o problema (2.45) tem uma única solução.*

Prova: Defina a variável auxiliar $w_{-1|0}$ como em (2.49). Para $k \geq 1$ temos a seguinte função Lagrangiana para o problema de minimização (2.47)-(2.48)

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \mathfrak{Y}_{k|k}^T \mathfrak{R}_k^{-1} \mathfrak{Y}_{k|k} + \Lambda_{k|k}^T (\mathfrak{B}_k - \mathfrak{A}_k \mathfrak{X}_{k|k} - \mathfrak{R}_k \mathfrak{Y}_{k|k}) \quad (2.50)$$

sendo que os multiplicadores de Lagrange são

$$\Lambda_{j|k} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{j|k} \\ \mathcal{L}_{j-1|k} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{0|k} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}_{j|k} := \begin{bmatrix} \mu_{j-1|k} \\ \lambda_{j|k} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k. \quad (2.51)$$

Introduzindo a variável auxiliar $\Upsilon_{k|k} := -\mathfrak{R}_k^{-1}\mathfrak{V}_{k|k}$ temos que segundo as condições de otimalidade $(\Lambda_{k|k}, \mathfrak{V}_{k|k}, \mathfrak{X}_{k|k}) = (\widehat{\Lambda}_{k|k}, \widehat{\mathfrak{V}}_{k|k}, \widehat{\mathfrak{X}}_{k|k})$ é o ponto mínimo de \mathfrak{J}_k somente se $(\Upsilon_{k|k}, \Lambda_{k|k}, \mathfrak{V}_{k|k}, \mathfrak{X}_{k|k}) = (\widehat{\Upsilon}_{k|k}, \widehat{\Lambda}_{k|k}, \widehat{\mathfrak{V}}_{k|k}, \widehat{\mathfrak{X}}_{k|k})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_k \Upsilon_{k|k} + \mathfrak{V}_{k|k} &= 0 \\ \mathfrak{K}_k \mathfrak{V}_{k|k} + \mathfrak{A}_k \mathfrak{X}_{k|k} &= \mathfrak{B}_k \\ \Upsilon_{k|k} + \mathfrak{K}_k^T \Lambda_{k|k} &= 0 \\ \mathfrak{A}_k^T \Lambda_{k|k} &= 0\end{aligned}\tag{2.52}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{K}_k & \mathfrak{A}_k \\ I & \mathfrak{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_{k|k} \\ \Lambda_{k|k} \\ \mathfrak{V}_{k|k} \\ \mathfrak{X}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{B}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{2.53}$$

Pelo Lema 2.1.1, temos que se as hipóteses $H1-H3$ são satisfeitas, então a matriz à esquerda de (2.53) é invertível. Isto garante que a solução é única.

A prova para $k = 0$ segue de maneira análoga. O problema de minimização (2.43) é equivalente a

$$\min_{x_{0|0}, w_{-1|0}, v_{0|0}} \frac{1}{2} \mathcal{V}_{0|0}^T \mathcal{R}_0^{-1} \mathcal{V}_{0|0}\tag{2.54}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}E_0 x_{0|0} - F_{-1} \bar{x}_0 - w_{-1|0} &= 0 \\ z_0 - H_0 x_{0|0} - K_{v,0} v_{0|0} &= 0\end{aligned}$$

que por sua vez possui a seguinte função Lagrangiana

$$L := \frac{1}{2} \mathcal{V}_{0|0}^T \mathcal{R}_0^{-1} \mathcal{V}_{0|0} + \mathcal{L}_{0|0}^T (z_0 - \mathcal{E}_0 x_{0|0} - \mathcal{K}_0 v_{0|0})\tag{2.55}$$

sendo que o multiplicador de Lagrange é dado por

$$\mathcal{L}_{0|0} := \begin{bmatrix} \mu_{-1|0} \\ \lambda_{0|0} \end{bmatrix}.$$

Segundo as condições de otimalidade do problema de otimização temos que

$$(\hat{x}_{0|0}, \hat{\mathcal{L}}_{0|0}, \hat{\mathcal{V}}_{0|0})$$

é um ponto de mínimo somente se

$$(x_{0|0}, \mathcal{L}_0, \mathcal{V}_{0|0}, \Upsilon_{0|0}) = (\hat{x}_{0|0}, \hat{\mathcal{L}}_{0|0}, \hat{\mathcal{V}}_{0|0}, \hat{\Upsilon}_{0|0})$$

é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_0 & \mathcal{E}_0 \\ I & \mathcal{K}_0^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_0^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_{0|0} \\ \mathcal{L}_{0|0} \\ \mathcal{V}_{0|0} \\ x_{0|0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

onde introduzimos a variável auxiliar

$$\Upsilon_{0|0} := -\mathcal{R}_0^{-1} \mathcal{V}_{0|0}. \quad (2.57)$$

Pelo Lema 2.1.1, temos que se as hipóteses $H1-H3$ são satisfeitas, então a matriz a esquerda de (2.56) é invertível. Isto garante a unicidade da solução. \square

Teorema 2.2.1 *Suponha que as hipóteses $H1-H3$ são satisfeitas e é dada uma sequência $\{z_0, z_1, \dots\}$. Então as estimativas sucessivas ótimas $\hat{x}_{k|k}$ resultantes da solução do problema ótimo de ajuste de trajetória (2.45) podem ser obtidas através do seguinte algoritmo recursivo*

Passo 0 (Condições Iniciais): Faça

$$\hat{x}_{0|0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{v,0} & H_0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & K_{v,0}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0^T & H_0^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{-1}\bar{x}_0 \\ z_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$P_{0|0} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{v,0} & H_0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & K_{v,0}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0^T & H_0^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Passo k: Atualize $\{\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}\}$ para $\{\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\}$ da seguinte maneira

$$\hat{x}_{k|k} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} X X^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.60)

para $k \geq 0$.

Para cada $k \geq 0$, o problema de otimização original é equivalente ao seguinte problema de minimização

$$\min_{\mathbb{X}_{k+1|k}, \mathbb{V}_{k+1|k}} = \frac{1}{2} \mathbb{V}_{k+1|k}^T \mathbb{R}_k^{-1} \mathbb{V}_{k+1|k} \quad (2.64)$$

sujeito a

$$\mathbb{Z}_k - \mathbb{E}_{k+1} \mathbb{X}_{k+1|k} - \mathbb{K}_k \mathbb{V}_{k|k} = 0, \quad (2.65)$$

sendo

$$\mathbb{V}_{k+1|k} := \begin{bmatrix} \Theta_{k|k} \\ \Theta_{k-1|k} \\ \vdots \\ \Theta_{3|k} \\ \Theta_{2|k} \\ \Theta_{1|k} \\ \Theta_{0|k} \\ \Theta_{-1|k} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{E}_{k+1} := \begin{bmatrix} \Sigma_{k+1} & \Delta_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_k & \Delta_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{k-1} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_2 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_1 & \Delta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{R}_k := \begin{bmatrix} \Omega_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K}_k := \begin{bmatrix} \Psi_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Z}_k := \begin{bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{k-1} \\ \vdots \\ \Phi_2 \\ \Phi_1 \\ \Phi_0 \\ \Phi_{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_{k+1|k} := \begin{bmatrix} x_{k+1|k} \\ x_{k|k} \\ \vdots \\ x_{2|k} \\ x_{1|k} \\ x_{0|k} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_i := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_i \end{bmatrix}, \quad \Delta_i := \begin{bmatrix} F_i \\ H_i \end{bmatrix}, \quad \Psi_i := \begin{bmatrix} G_{w,i} & G_{v,i} \\ K_{w,i} & K_{v,i} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \Theta_i := \begin{bmatrix} w_{i|k} \\ v_{i|k} \end{bmatrix} \quad 0 \leq i \leq k, \quad \Sigma_j := \begin{bmatrix} -E_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $1 \leq j \leq k+1$,

$$\Phi_{-1} := -F_{-1}\bar{x}_0, \quad \Omega_{-1} := P_0, \quad \Sigma_0 := -E_0$$

$$\Theta_{-1} := w_{-1} \quad \Psi_{-1} := I$$

e

$$w_{-1|0} := E_0 x_{0|0} - F_{-1} \bar{x}_0.$$

A solucionabilidade do problema de otimização acima é considerada no próximo lema.

Lema 2.2.3 *Para um dado k fixo suponha dada a sequência de saídas $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ e as seguintes hipóteses*

$$H \ 4 \quad \begin{bmatrix} -E_{i+1} & F_i & G_{w,i} & G_{v,i} \\ 0 & H_i & K_{w,i} & K_{v,i} \end{bmatrix} \text{ tem posto linha pleno;}$$

H 5 E_{i+1} tem posto coluna pleno;

para todo $0 < i \leq k$. Então o problema (2.62) tem solução única.

□

Teorema 2.2.2 *Suponha que as hipóteses H4-H5 são satisfeitas dada uma sequência $\{z_0, z_1, \dots\}$. Então as estimativas ótimas sucessivas $\hat{x}_{k+1|k}$ resultantes da solução do problema determinístico (2.62) podem ser obtidas através do seguinte algoritmo:*

Passo 0 (Condições Iniciais): Faça

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &:= P_0 \\ \hat{x}_{0|-1} &:= \bar{x}_0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Passo k: Atualize $\{\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\}$ para $\{\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}\}$ como segue

$$\hat{x}_{k+1|k} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k^T & R_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} & -E_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & G_{v,k}^T & K_{v,k}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

$$P_{k+1|k} := - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k^T & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} & -E_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & G_{v,k}^T & K_{v,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.3 Abordagem Determinística 2

Uma maneira alternativa para obtenção do filtro de Kalman para sistemas singulares nas formas filtrada, preditora e suavizada será apresentada nesta seção.

A partir das soluções recursivas obtidas no Teorema 2.2.1 e Teorema 2.2.2 da Seção 2.2 deste mesmo capítulo, conjecturou-se que poderiam ser considerados os seguintes problemas de otimização (2.69) e (2.89) para obter as recursões para $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$, respectivamente.

Esta nova formulação tem grande relevância, uma vez que no Teorema 2.3.1 também foi obtida a expressão recursiva para a estimativa suavizada dada por $\hat{x}_{k|k+1}$, o que não ocorreu na seção anterior.

Entretanto, essa nova formulação não fornece diretamente as expressões para as matrizes de ponderação $P_{k+1|k+1}$, $P_{k+1|k}$ e $P_{k|k+1}$.

2.3.1 Estimativa Filtrada e Suavizada

Teorema 2.3.1 *Considere o seguinte problema ótimo com restrição*

$$\begin{aligned}
& (\hat{x}_{k+1|k+1}, \hat{x}_{k|k+1}) := \\
& \arg \min_{x_k, x_{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right\} \quad (2.69)
\end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
E_{k+1}x_{k+1} &= F_k x_k + G_{w,k}w_k + G_{v,k+1}v_{k+1} \\
z_{k+1} &= H_{k+1}x_{k+1} + J_k x_k + K_{w,k}w_k + K_{v,k+1}v_{k+1} \quad (2.70)
\end{aligned}$$

sendo que

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.71)$$

O problema ótimo tem uma única solução se e só se $\begin{bmatrix} E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ -H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno. Supondo as condições de posto satisfeitas, a solução ótima é dada por

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \widehat{x}_{k+1|k+1} \\ \widehat{x}_{k|k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & -H_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_k^T & J_k^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{v,k+1}^T & K_{v,k+1}^T & 0 & 0 & I \\ E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & S_k^T & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & S_k & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ -\widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} & \quad (2.72)
\end{aligned}$$

Prova: O problema ótimo com restrição

$$\begin{aligned}
& (\widehat{x}_{k+1|k+1}, \widehat{x}_{k|k+1}) := \\
& \arg \min_{x_k, x_{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \widehat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right\} \quad (2.73)
\end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
E_{k+1}x_{k+1} &= F_k x_k + G_{w,k} w_k + G_{v,k+1} v_{k+1} \\
z_{k+1} &= H_{k+1} x_{k+1} + J_k x_k + K_{w,k} w_k + K_{v,k+1} v_{k+1} \quad (2.74)
\end{aligned}$$

é equivalente ao seguinte problema sem restrição

$$\begin{aligned}
& \min_{x_k, x_{k+1}, w_k, \lambda_k} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} \right. \\
& + \lambda_1^T (-E_{k+1}x_{k+1} + F_kx_k + G_{w,k}w_k + G_{v,k+1}v_{k+1}) \\
& \left. + \lambda_2^T (-z_{k+1} + H_{k+1}x_{k+1} + J_kx_k + K_{w,k}w_k + K_{v,k+1}v_{k+1}) \right\} \quad (2.75)
\end{aligned}$$

que por sua vez equivale ao seguinte problema de minimizaçãõ

$$\begin{aligned}
& \min_{x_k, x_{k+1}, w_k, \lambda_k} \left\{ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}^T \times \right. \\
& \left. \left(\begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ J_k \hat{x}_{k|k} - z_{k+1} \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Seja $T := \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$ e $\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$. Então, pode-se obter a primeira derivada do funcional J com respeito a T e λ como

$$\begin{aligned}
D_T J &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}^T \Lambda \\
D_\Lambda J &= \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ J_k \hat{x}_{k|k} - z_{k+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Definindo o seguinte vetor auxiliar

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Dessa forma pode-se re-escrever as derivadas como

$$\begin{aligned}
D_T J &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ 0 & \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}^T \Lambda \\
D_\Lambda J &= \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ J_k \hat{x}_{k|k} - z_{k+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando as derivadas acima a zero a fim de minimizar o funcional, obtêm-se as seguintes equações

$$-E_{k+1}^T \lambda_1 + H_{k+1}^T \lambda_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k^T & J^T \\ G_{w,k}^T & K_{w,k}^T \\ G_{v,k+1}^T & K_{v,k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que resulta no seguinte sistema de equações matriciais

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \\ 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & -H_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & J_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & G_{v,k+1}^T & K_{v,k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_{k+1} \\ -x_k \\ -w_k \\ -v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.79)

Como, por hipótese $\begin{bmatrix} E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k+1} \\ -H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & K_{v,k+1} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno, tem-se pelo Lema 2.1.1 que o sistema acima apresenta solução única. Logo, segue a recursão (2.72).

□

Fazendo $G_{v,k+1} = 0$ e $K_{v,k+1} = I$ obtém-se imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 2.3.1 *Considere o seguinte problema ótimo com restrição*

$$\begin{aligned} & (\hat{x}_{k+1|k+1}, \hat{x}_{k|k+1}) := \\ & \arg \min_{x_k, x_{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ w_k \\ z_{k+1} - H_{k+1}x_{k+1} - J_kx_k - K_{w,k}w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1} &= F_kx_k + G_{w,k}w_k \\ z_{k+1} &= H_{k+1}x_{k+1} + J_kx_k + K_{w,k}w_k + v_{k+1} \end{aligned} \quad (2.81)$$

sendo que as matrizes de ponderação

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.82)$$

O problema ótimo tem uma única solução se e só se $\begin{bmatrix} E_{k+1} & F_k & G_{w,k} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno. Supondo as condições de posto satisfeitas, a solução ótima é dada por

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_{k+1|k+1} \\ \widehat{x}_{k|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & -J_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_{w,k}^T & -K_{w,k}^T & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & -J_k & -K_{w,k} & 0 & R_{k+1} & S_k^T & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & S_k & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{k+1} \\ 0 \\ -\widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Prova: Pelo Teorema 2.3.1, a solução do problema de otimização (2.69)-(2.70) satisfaz a equação (2.79).

Como $G_{v,k+1} = 0$ e $K_{v,k+1} = I$, o sistema (2.79) pode ser re-escrito como

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{k+1} & J_k & K_{w,k} & I \\ 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & -H_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & J_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_{k+1} \\ -x_k \\ -w_k \\ -v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widehat{x}_{k|k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Da linha 3 e linha 5 de (2.84) segue que

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$-v_{k+1} = \begin{bmatrix} H_{k+1} & -J_k & -K_{w,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ -x_k \\ -w_k \end{bmatrix} - z_{k+1}. \quad (2.86)$$

Logo, substituindo (2.86) em (2.85) tem-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & S_k^T & R_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{k+1} & -J_k & -K_{w,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ -x_k \\ -w_k \end{bmatrix} = z_{k+1}. \quad (2.87)$$

Por outro lado segue da última linha de (2.84) que $\lambda_5 = -\lambda_2$. Assim, pode-se eliminar λ_2 e v_{k+1} . Com isto, o sistema (2.84) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & S_k^T & R_{k+1} & 0 & H_{k+1} & -J_k & -K_{w,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_{w,k} \\ 0 & 0 & H_{k+1}^T & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -J_k^T & F_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -K_{w,k}^T & G_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_1 \\ x_{k+1} \\ -x_k \\ -w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ 0 \\ z_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Assim, como por hipótese $\begin{bmatrix} E_{k+1} & F_k & G_{w,k} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno, então obtém-se a recursão (2.83). \square

2.3.2 Estimativa Preditora

Teorema 2.3.2 : *Considere o seguinte problema ótimo com restrição*

$$(\hat{x}_{k+1|k}, \hat{x}_{k|k}) := \arg \min_{x_k, x_{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right\} \quad (2.89)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1} &= F_k x_k + G_{w,k}w_k + G_{v,k}v_k \\ z_k &= H_k x_k + K_{w,k}w_k + K_{v,k}v_k \end{aligned} \quad (2.90)$$

sendo as matrizes de ponderação dadas por

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix} > 0. \quad (2.91)$$

O problema ótimo tem uma única solução se e só se $\begin{bmatrix} -E_{k+1} & G_{w,k} & G_{v,k} & F_k \\ 0 & K_{w,k} & K_{v,k} & H_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e E_{k+1} tem posto coluna pleno. Supondo as condições de posto satisfeitas, a solução ótima é dada por

$$\widehat{x}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & S_k^T & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} & -E_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & G_{v,k}^T & K_{v,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Prova: O problema ótimo com restrição

$$(\widehat{x}_{k+1|k}, \widehat{x}_{k|k}) := \arg \min_{x_k, x_{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \widehat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right\} \quad (2.93)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1} &= F_kx_k + G_{w,k}w_k + G_{v,k}v_k \\ z_k &= H_kx_k + K_{w,k}w_k + K_{v,k}v_k \end{aligned} \quad (2.94)$$

é equivalente ao seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
\min_{x_k, x_{k+1}} & \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \right. \\
& + \lambda_1^T (-E_{k+1}x_{k+1} + F_kx_k + G_{w,k}w_k + G_{v,k}v_k) + \\
& \left. + \lambda_2^T (-z_k + H_kx_k + K_{w,k}w_k + K_{v,k}v_k) \right\} \quad (2.95)
\end{aligned}$$

que por sua vez equivale a

$$\begin{aligned}
\min_{x_k, x_{k+1}, w_k, v_k, \lambda_k} & \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}^T \right. \\
& \times \left. \left(\begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k\hat{x}_{k|k-1} \\ H_k\hat{x}_{k|k-1} - z_k \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Seja $U = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$. Então, pode-se obter a primeira derivada do

funcional J com respeito a U e λ da seguinte maneira:

$$D_U J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix}^T \Lambda \quad (2.97)$$

$$D_\Lambda J = \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} F_k\hat{x}_{k|k-1} \\ H_k\hat{x}_{k|k-1} - z_k \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Definindo

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} := - \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

segue que

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k \\ 0 & S_k^T & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Então, pode-se escrever as derivadas (2.97) e (2.98) como

$$D_U J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix}^T \Lambda \quad (2.101)$$

$$D_\Lambda J = \begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ u_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k-1} \\ H_k \hat{x}_{k|k-1} - z_k \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Igualando as derivadas acima a zero para minimizar o funcional obtêm-se

$$-E_{k+1}^T \lambda_1 = 0, \quad (2.103)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k^T & H_k^T \\ G_{w,k}^T & K_{w,k}^T \\ G_{v,k}^T & K_{v,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.104)$$

$$\begin{bmatrix} -E_{k+1} & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} \\ 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ u_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_k \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Assim, $(x_k, w_k, v_k, x_{k+1}, \Lambda)$ é um ponto mínimo do funcional J somente se

$$(x_k, w_k, v_k, x_{k+1}, \Lambda) = (\hat{x}_{k|k}, \hat{w}_{k|k}, \hat{v}_{k|k}, \hat{x}_{k+1|k}, \hat{\Lambda})$$

é solução do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & S_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & S_k^T & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_k & G_{w,k} & G_{v,k} & -E_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_k & K_{w,k} & K_{v,k} & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_{w,k}^T & K_{w,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & G_{v,k}^T & K_{v,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \hat{x}_{k|k} \\ \hat{w}_{k|k} \\ \hat{v}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Como, por hipótese $\begin{bmatrix} -E_{k+1} & G_{w,k} & G_{v,k} & F_k \\ 0 & K_{w,k} & K_{v,k} & H_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e E_{k+1} tem posto coluna pleno, então o sistema acima tem solução única. Logo, obtém-se a

recursão (2.92). □

Para obter as estimativas com ruídos correlacionados, como ocorreu nos resultados principais das seções 2.2 e 2.3, existe um procedimento usual que consiste no decorrelacionamento dos ruídos. Porém, tal procedimento produz expressões muito complexas se comparadas às obtidas neste trabalho, o que pode torná-lo menos conveniente.

2.4 Simulação

Nesta seção será apresentado um exemplo de um sistema singular, com ruídos correlacionados, descrito por (2.38), onde as matrizes do sistema são dadas por

$$E_{i+1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_i = F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix};$$

$$G_{w,i} = G_w = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 6 \end{bmatrix}; \quad G_{v,i+1} = G_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$H_i = H = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 \end{bmatrix}; \quad J_i = 0;$$

$$K_{w,i} = K_w = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.4 \end{bmatrix}; \quad K_{v,i+1} = K_v = 1$$

e a covariância de w_k e v_k (com termos cruzados) são dadas respectivamente por

$$Q = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = 0.1; \quad S = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.05 \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

A simulação que resulta do algoritmo do Teorema 2.2.1 é apresentada nas figuras que

encontram-se a seguir.

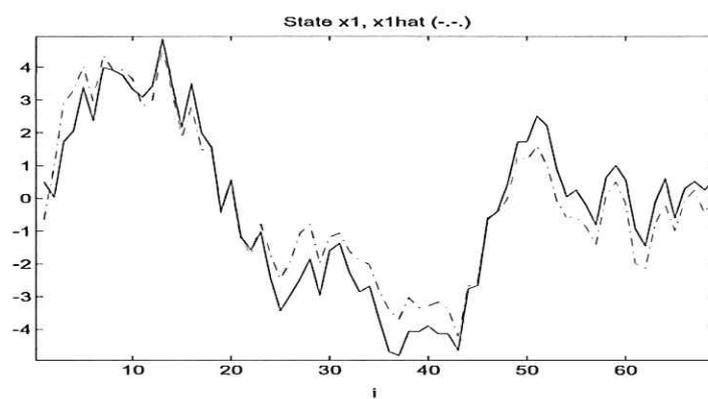


Figura 2.1: Valor real do estado $x_1(k)$ e estimativa filtrada .

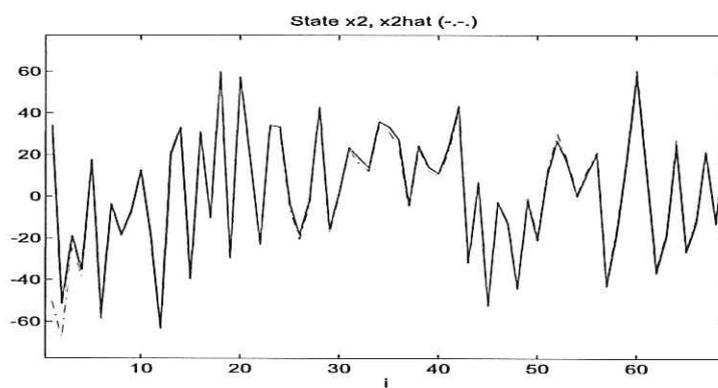


Figura 2.2: Valor real do estado $x_2(k)$ e estimativa filtrada .

Capítulo 3

Casos particulares do filtro de Kalman proposto

Dado o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1} &= F_k x_k + G_k u_k \\ z_{k+1} &= H_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

com

$$\begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.2)$$

mostra-se neste capítulo que o filtro de Kalman obtido nas seções 2.2 e 2.3 do Capítulo 2 equivale ao filtro deduzido por NIKOUKHAH et al. (1992)), que por sua vez pode ser reduzido à forma encontrada em DAROUACH et al. (1993).

Lema 3.0.1 *Sejam $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível, definida positiva e $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matriz posto coluna pleno. Neste caso, $A^T R^{-1} A$ é invertível e sua inversa pode ser calculada por*

$$\begin{aligned}
(A^T R^{-1} A)^{-1} &= - \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

3.1 Equivalência entre as estimativas filtradas

Lema 3.1.1 *Suponha que* $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ *tem posto coluna pleno,* $\begin{bmatrix} R_{k+1} & H_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{k+1} & F_k & G_k \end{bmatrix}$ *tem posto linha pleno e* $\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix} > 0$ *para todo* $k \geq 0$ *. Neste caso,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

é invertível. Se $\begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ *tem posto linha pleno, então pode-se re-escrever*

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{k+1} \\ 0 \\ -\widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e

$$P_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

como

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & 0 & E_{k+1} \\ 0 & R_{k+1} & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \widehat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e

$$P_{k+1|k+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & 0 & E_{k+1} \\ 0 & R_{k+1} & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ou como

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1} E_{k+1}^T (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} z_{k+1} \quad (3.11)$$

e

$$P_{k+1|k+1} := (E_{k+1}^T (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} E_{k+1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1}. \quad (3.12)$$

Prova: A princípio, os sistemas (3.13) e (3.14) são equivalentes pois apenas a ordem das linhas e colunas está alterada

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ -x_k \\ -u_k \\ \lambda_i \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{k+1} \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & H_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_k \\ 0 & 0 & H_{k+1}^T & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_k \\ x_{k+1} \\ -x_k \\ -u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ z_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Considerando o sistema (3.14), valem as seguintes relações

$$-\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{k|k} F_k^T \\ Q_k G_k^T \end{bmatrix} \lambda_k \quad (3.15)$$

$$R_{k+1}\lambda_3 + H_{k+1}x_{k+1} = z_{k+1} \quad (3.16)$$

$$E_{k+1}x_{k+1} - \begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.15) em (3.17) segue que

$$E_{k+1}x_{k+1} + (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T) \lambda_k = F_k \hat{x}_{k|k}. \quad (3.18)$$

Assim, por (3.16), (3.18) e pela quinta linha de (3.14) obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & 0 & E_{k+1} \\ 0 & R_{k+1} & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k \\ \lambda_3 \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Como, por hipótese $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então o bloco matricial à esquerda de (3.19) é invertível. Logo, segue a recursão (3.9).

Mostra-se a seguir que (3.10) pode ser escrita como (3.12).

Os sistemas (3.20) e (3.21) são equivalentes pois apenas a ordem das linhas e colunas está alterada

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_{k+1} \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & H_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_k \\ 0 & 0 & H_{k+1}^T & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & F_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -P_{k+1} \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A partir do sistema (3.21), considera-se as seguintes relações

$$\begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{k|k} F_k^T \\ Q_k G_k^T \end{bmatrix} \lambda_4 \quad (3.22)$$

$$R_{k+1} \lambda_3 - H_{k+1} P_{k+1} = I \quad (3.23)$$

$$- E_{k+1} P_{k+1} + \begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.22) em (3.24) obtém-se

$$- E_{k+1} P_{k+1} - (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T) \lambda_4 = 0. \quad (3.25)$$

Assim, por (3.23), (3.25) e pela quinta linha de (3.21) obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & 0 & E_{k+1} \\ 0 & R_{k+1} & H_{k+1} \\ E_{k+1}^T & H_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_4 \\ \lambda_3 \\ -P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Como, por hipótese $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então conclui-se que o bloco à esquerda do sistema (3.26) é invertível. Logo, a recursão (3.10) está demonstrada.

Ainda resta mostrar que (3.9) e (3.10) podem ser escritas como (3.11) e (3.12), respectivamente.

Utilizando o Lema 3.0.1 tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} = & \left(\begin{bmatrix} E_{k+1}^T & H_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} E_{k+1}^T & H_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} = & \left(E_{k+1}^T (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} E_{k+1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right)^{-1} \\ & E_{k+1}^T (F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T)^{-1} F_k \hat{x}_{k|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} z_{k+1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definindo $P_{k+1|k+1}$ como em (3.12) obtém-se a estimativa $\hat{x}_{k+1|k+1}$ dada por (3.11).

Finalmente, falta mostrar que (3.10) pode ser escrita como (3.12). Utilizando novamente o Lema 3.0.1 segue de forma direta que $P_{k+1|k+1}$ é dada por (3.12).

□



3.2 Equivalência entre as estimativas preditoras

Lema 3.2.1 *Suponha que E_{k+1} tem posto coluna pleno, $\begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix} > 0$ e*

$\begin{bmatrix} R_k & 0 & H_k & 0 \\ 0 & E_{k+1} & F_k & G_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo $k \geq 0$. Neste caso,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_k & 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

é invertível. Se $\begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então pode-se re-escrever

$$\hat{x}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_k & 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_k \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e

$$P_{k+1|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_k & 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

como

$$\hat{x}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & -F_k P_{k|k-1} H_k^T & E_{k+1} \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & 0 \\ E_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e

$$P_{k+1|k} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T & -F_k P_{k|k-1} H_k^T & E_{k+1} \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & 0 \\ E_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

ou como

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= P_{k+1|k} E_{k+1}^T (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} \\ &\times F_k \hat{x}_{k|k-1} + P_{k+1|k} E_{k+1}^T (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} \\ &\times F_k P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

e

$$P_{k+1|k} := (E_{k+1}^T (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} E_{k+1})^{-1}. \quad (3.35)$$

onde $Y := F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$.

Prova: A princípio, os sistemas (3.36) e (3.37) são equivalentes pois apenas a ordem das linhas e colunas está alterada

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_k & 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ -x_k \\ -u_k \\ \lambda_k \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_k \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & H_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T \\ I & 0 & H_k^T & 0 & 0 & 0 & F_k^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & G_k^T \\ 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ x_{k+1} \\ -x_k \\ -u_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ -z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A partir do sistema (3.37) obtêm-se as seguintes relações matriciais

$$\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} \lambda_k - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2 \quad (3.39)$$

$$E_{k+1}x_{k+1} - \begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = 0. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.39) em (3.38) obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix} \left(- \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} \lambda_k - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2 \right) + \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Substituindo agora $\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}$ por (3.41) tem-se que

$$E_{k+1}x_{k+1} + F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \lambda_k + F_k P_{k|k-1} H_k^T \lambda_2 = F_k \hat{x}_{k|k-1}. \quad (3.42)$$

Considerando novamente o sistema (3.37) obtém-se, a partir das linhas um, três e cinco

$$x_k = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} \lambda_1 \quad (3.43)$$

$$\lambda_1 = -H_k^T \lambda_2 - F_k^T \lambda_k \quad (3.44)$$

$$R_k \lambda_2 - H_k x_k + z_k = 0. \quad (3.45)$$

Substituindo (3.43) em (3.45) segue que

$$R_k \lambda_2 - H_k (\hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} \lambda_1) + z_k = 0. \quad (3.46)$$

E, substituindo novamente (3.44) em (3.45) obtém-se

$$- (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T) \lambda_2 - H_k P_{k|k-1} F_k^T \lambda_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}. \quad (3.47)$$

Desta forma, vale a seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T & E_{k+1} \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & 0 \\ E_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k \\ -\lambda_2 \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Como, por hipótese $\begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e E_{k+1} tem posto coluna pleno, então o bloco à esquerda de (3.48) possui inversa. Obtém-se assim a equação (3.32).

Agora mostra-se que (3.32) pode ser escrita como (3.34).

A partir da equação (3.48), seguem as seguintes relações

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

e

$$\begin{bmatrix} E_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.50)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} E_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{k+1} \\
&= \begin{bmatrix} E_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix}. \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Como a inversa do bloco matricial central de (3.51) pode ser calculada através da fatoração LDU (Lower Diagonal Upper), tem-se que

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_k H_k P_{k|k-1} F_k^T & I \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k \\ 0 & I \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sendo que $B_k := (R_k + H_k P_{k|k-1} H^T)^{-1}$.

Portanto segue que

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} E_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{k+1} \\
&= E_{k+1}^T (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} F_k \hat{x}_{k|k-1} + E_{k+1}^T \times \\
& (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}). \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Assim, a estimativa preditora $\hat{x}_{k+1|k}$ pode ser escrita como (3.34), após $P_{k+1|k}$ ser definida por (3.35).

Agora mostra-se que (3.31) pode ser re-escrita como (3.35).

Os sistemas (3.53) e (3.54) são equivalentes pois apenas a ordem das linhas e colunas está alterada

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^T & H_k^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & G_k^T & 0 & I & 0 \\ E_{k+1} & F_k & G_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_k & 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_{k+1} \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & H_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k+1}^T \\ I & 0 & H_k^T & 0 & 0 & 0 & F_k^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & G_k^T \\ 0 & 0 & 0 & E_{k+1} & F_k & G_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -P_{k+1} \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Tem-se a partir do sistema (3.54) que

$$\begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

e

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} \lambda_7 - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_3. \quad (3.56)$$

Substituindo (3.56) em (3.55) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1}(F_k^T \lambda_7 - H_k^T \lambda_3) \\ Q_k G_k^T \lambda_7 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Além disto a partir de (3.54) segue que

$$-E_{k+1}P_{k+1} + \begin{bmatrix} F_k & G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.58)$$

Substituindo $\begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$ por (3.55) obtém-se

$$-E_{k+1}P_{k+1} + (F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T) \lambda_7 - F_k P_{k|k-1} H_k^T \lambda_3 = 0. \quad (3.59)$$

Considerando novamente o sistema (3.54) pode-se encontrar as seguintes relações

$$\lambda_5 = -P_{k|k-1} \lambda_1 \quad (3.60)$$

$$\lambda_1 = -H_k^T \lambda_3 - F_k^T \lambda_7 \quad (3.61)$$

$$R_k \lambda_3 + H_k \lambda_5 = 0. \quad (3.62)$$

Substituindo (3.60) em (3.62) obtém-se

$$R_k \lambda_3 - H_k (P_{k|k-1} \lambda_1) = 0. \quad (3.63)$$

E, substituindo novamente (3.61) em (3.63) tem-se

$$-(R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T) \lambda_3 - H_k P_{k|k-1} F_k^T \lambda_7 = 0. \quad (3.64)$$

Desta forma, segue o seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T & E_{k+1} \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & 0 \\ E_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_7 \\ -\lambda_3 \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

A partir das hipóteses do teorema, segue que o bloco matricial à esquerda de (3.65) é invertível. Logo, segue que (3.31) pode ser re-escrita como (3.33). Finalmente, resta mostrar que (3.33) pode ser escrita como (3.35). Temos pelo Lema (3.0.1) que

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T & E_{k+1} \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & 0 \\ E_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y & -F_k P_{k|k-1} H_k^T \\ -H_k P_{k|k-1} F_k^T & R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando a mesma fatoração utilizada na demonstração de $\hat{x}_{k+1|k}$ obtém-se

$$P_{k+1|k} = \left(\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Y - F_k P_{k|k-1} H_k^T B_k H_k P_{k|k-1} F_k^T)^{-1} & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

ou seja, $P_{k+1|k}$ passa a ser escrita como (3.35).

□

Capítulo 4

Estabilidade e Convergência do Filtro de Kalman proposto

Neste capítulo será feito um estudo das propriedades do filtro proposto na Seção 2.2 do Capítulo 2 que é apresentado na forma de blocos matriciais de dimensão nove, através da análise de sua equação algébrica de Riccati correspondente. Condições para estabilidade e convergência da solução para tal equação são fornecidas, assim como condições sob as quais a equação de Riccati resultante tem uma única solução semi-definida positiva. Considere o seguinte sistema invariante no tempo:

$$Ex_k = Fx_{k-1} + G_w w_{k-1} + G_v v_k, \quad (4.1)$$

$$z_k = Hx_k + Jx_{k-1} + K_w w_{k-1} + K_v v_k. \quad (4.2)$$

Pode-se re-escrevê-lo da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} 0 \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} F \\ J \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Definindo

$$\mathcal{Z}_k := \begin{bmatrix} 0 \\ z_k \end{bmatrix}, \mathcal{E} := \begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix}, \mathcal{A} := \begin{bmatrix} F \\ J \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{V}_k := \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix}, \mathcal{R} := \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}, \mathcal{K} := \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

tem-se que o sistema (4.1)-(4.2) pode ser expresso por

$$\mathcal{Z}_k = \mathcal{E}x_k + \mathcal{A}x_{k-1} + \mathcal{K}\mathcal{V}_k. \quad (4.6)$$

As estimativas $\hat{x}_{k|k}$ dadas em (2.60) podem ser re-escritas da seguinte forma

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ \mathcal{Z}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

sendo a Equação Algébrica de Riccati P associada à recursão de Riccati $P_{k|k}$ dada por

$$P = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

4.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentam-se lemas auxiliares que serão utilizados nas próximas seções deste capítulo.

Lema 4.1.1 (NIKOUKHAH et al. (1992), p.1334) *Seja R semidefinida positiva e H posto coluna pleno. Então*

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger + \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} = I \quad (4.10)$$

□

Lema 4.1.2 *Se*

$$P = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

então

$$P = LRL^T \quad (4.12)$$

com

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Além disto, definindo

$$K := -P \quad (4.14)$$

tem-se

$$\begin{aligned} LR + KH^T &= 0 \\ LH &= I. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Prova: A matriz P é dada por (4.11). Pelo Lema 4.1.1

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Logo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Definindo

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Tem-se que $P = LRL^T$. Definindo $K := -P$ tem-se

$$\begin{bmatrix} L & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Logo

$$\begin{aligned} LR + KH^T &= 0 \\ LH &= I. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lema 4.1.3 *Sejam*

$$P = L_{31}PL_{31}^T + L_{32}\mathcal{R}L_{32}^T \quad (4.22)$$

com

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Então, $-L_{33}\mathcal{A} = L_{31}$.

□

Lema 4.1.4 *A recursão do filtro de Kalman dada por*

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ \mathcal{Z}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com

$$P = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

pode ser re-escrita como

$$\hat{x}_{k|k} = L_{31} \hat{x}_{k-1|k-1} + L_{33} \mathcal{Z}_k \quad (4.24)$$

$$P = L_{31} P L_{31}^T + L_{32} \mathcal{R} L_{32}^T \quad (4.25)$$

respectivamente.

Prova: Define-se

$$\mathbb{P} := - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Então, P é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathbb{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Aplicando o Lema 4.1.2 pode-se reescrever \mathbb{P} da seguinte forma

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}^T \quad (4.28)$$

Assim, a equação (4.27) torna-se

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ou seja,

$$P = L_{31} P L_{31}^T + \begin{bmatrix} L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{32}^T \\ L_{33}^T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

que equivale a

$$P = L_{31}PL_{31}^T + L_{32}\mathcal{R}L_{32}^T \quad (4.31)$$

com L_{31} e L_{32} dados por (4.23).

Portanto, P é dada por (4.25) e o filtro tem a forma

$$\hat{x}_{k|k} = L_{31}\hat{x}_{k-1|k-1} + L_{33}\mathcal{Z}_k \quad (4.32)$$

uma vez que $\hat{x}_{k|k}$ é dada por

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{Z}_k \right). \quad (4.33)$$

Como

$$L_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

e

$$L_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

então segue (4.32). \square

Lema 4.1.5 *Para matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ conhecidas, a equação de Stein*

$$S - BSA = \Gamma \quad (4.36)$$

tem uma única solução se e só se $\lambda_r \mu_s \neq 1$ para todo $\lambda_r \in \sigma(A)$ e $\mu_s \in \sigma(B)$.

\square

4.2 Estabilidade

Nesta seção apresentam-se resultados que evidenciam a estabilidade do filtro proposto no Capítulo 2. Tais resultados por sua vez mostram que a equação algébrica de Riccati resultante possui uma única solução semi-definida positiva.

Teorema 4.2.1 *Suponha que $\begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} + \mathcal{A} & \mathcal{K} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para $|\lambda| \geq 1$, $\mathcal{R} > 0$ e \mathcal{E} tem posto coluna pleno. Seja P solução da EAR (4.25). Se $P \geq 0$, então P é a solução estabilizante para (4.25).*

Prova: Suponha que exista uma solução semidefinida positiva P para a equação de Riccati (4.25). Devemos mostrar que L_{31} é estável. Pelo Lema 4.1.3 temos que $L_{31} = -L_{33}A$ e

$$\hat{x}_{k|k} = -L_{33}A\hat{x}_{k-1|k-1} + L_{33}Z_k \quad (4.37)$$

$$P = L_{33}(APA^T + \mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^T)L_{33}^T \quad (4.38)$$

Assim, é suficiente mostrar que $-L_{33}\mathcal{A}$ é estável.

Suponha, por contradição que $-L_{33}\mathcal{A}$ não é estável. Então, existe um número complexo λ e um vetor v ($v \neq 0$) tal que $|\lambda| \geq 1$ e $-v^T L_{33}\mathcal{A} = \lambda v^T$. Entretanto, tem-se pelo Lema 4.1.2 que

$$L_{33}\mathcal{E} = I.$$

Multiplicando a equação acima por λv^T obtém-se

$$\lambda v^T L_{33}\mathcal{E} = \lambda v^T$$

e como $\lambda v^T = -v^T L_{33}\mathcal{A}$ segue que

$$\begin{aligned} \lambda v^T L_{33}\mathcal{E} &= -v^T L_{33}\mathcal{A} \\ v^T L_{33}(\lambda \mathcal{E} + \mathcal{A}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Entretanto, pré-multiplicando (4.38) por v^T e pós-multiplicando por v , obtém-se

$$v^T P v = v^T (L_{33}\mathcal{A}) P (L_{33}\mathcal{A})^T v + v^T L_{33}\mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^T L_{33}^T v.$$

Desde que $\lambda v^T = -v^T L_{33}\mathcal{A}$, a equação acima torna-se

$$v^T P v = \lambda v^T P (\lambda v^T)^T + v^T L_{33}\mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^T L_{33}^T v. \quad (4.40)$$

Assim,

$$(|\lambda|^2 - 1)v^T P v + v^T L_{33}\mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^T L_{33}^T v = 0. \quad (4.41)$$

Sabe-se que $|\lambda| \geq 1$, $P \geq 0$ e $\mathcal{R} \geq 0$. Então

$$(|\lambda|^2 - 1)v^T P v \geq 0 \quad (4.42)$$

e

$$v^T L_{33} \mathcal{K} \mathcal{R} \mathcal{K}^T L_{33}^T v \geq 0 \quad (4.43)$$

De (4.41), (4.42) e (4.43) segue que

$$v^T L_{33} \mathcal{K} = 0. \quad (4.44)$$

De (4.39) e (4.44) obtém-se

$$v^T L_{33} \left(\begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} + \mathcal{A} & \mathcal{K} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{com} \quad |\lambda| \geq 1. \quad (4.45)$$

Como L_{33} tem posto linha pleno, segue que $v \neq 0 \iff v^T L_{33} \neq 0$. Assim, em (4.45), $\begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} + \mathcal{A} & \mathcal{K} \end{bmatrix}$ não tem posto linha pleno para $|\lambda| \geq 1$, ou seja, obtém-se uma contradição. Então, $L_{33} \mathcal{A}$ é estável.

□

Definição 4.2.1 *É dito que P é uma solução estabilizante da Equação Algébrica de Ricatti (EAR) (4.25) se*

- P satisfaz a EAR ;
- L_{31} é estável.

Lema 4.2.1 *Considere a EAR (4.25). Se a solução estabilizante existe, ela é única.*

Prova: Agora mostra-se que (4.25) possui uma única solução estabilizante. Para isso, suponha que existam 2 soluções P_1 e P_2 , com

$$\begin{bmatrix} L_{11}^1 & L_{12}^1 & L_{13}^1 \\ L_{21}^1 & L_{22}^1 & L_{23}^1 \\ L_{31}^1 & L_{32}^1 & L_{33}^1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{12}^2 & L_{13}^2 \\ L_{21}^2 & L_{22}^2 & L_{23}^2 \\ L_{31}^2 & L_{32}^2 & L_{33}^2 \end{bmatrix}$$

suas matrizes correspondentes. Então, $L_{33}^1 \mathcal{A} = -L_{31}^1$ e $L_{33}^2 \mathcal{A} = -L_{31}^2$ são estáveis e

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} P_2 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$\Omega_i := \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T (\Omega_2^{-1} - \Omega_1^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} = \Omega_2 \Omega_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T = \Omega_1^{-1} \Omega_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T.$$

Voltando a $P_1 - P_2$ tem-se

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \Omega_1^{-1} (\Omega_1 - \Omega_2) \Omega_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Mas

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (P_1 - P_2) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.48)$$

Assim

$$P_1 - P_2 = L_{31}^1 (P_1 - P_2) L_{31}^{2T}. \quad (4.49)$$

Utilizando-se o Lema 4.1.5 conclui-se que $P_1 - P_2 = 0$. Logo $P_1 = P_2$. \square

4.3 Convergência

Nesta seção serão apresentados resultados que garantem que a recursão de Riccati é uma sequência não decrescente. Para mostrar a convergência da mesma, deveria ser mostrado que $P_{k|k}$ é limitada superiormente por P , solução única semi-definida positiva da equação algébrica de Riccati dada em (4.25). Porém, o resultado que garante que a recursão é limitada superiormente por P ainda não está demonstrado.

Lema 4.3.1 *Se $P_{k|k} \geq 0$ então*

$$P_{k+1|k+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.50)$$

\square

Lema 4.3.2 *Sejam duas matrizes $P_{k|k,1}$ e $P_{k|k,2}$, considere as seguintes definições para $i = 1, 2$:*

$$P_{k+1|k+1,i} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,i} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$F_{fk,i} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,i} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Então têm-se

$$P_{k+1|k+1,1} - P_{k+1|k+1,2} = F_{fk,1} (P_{k|k,1} - P_{k|k,2}) (F_{fk,2})^T \quad (4.53)$$

$$F_{fk,1} - F_{fk,2} = F_{fk,2} (P_{k|k,1} - P_{k|k,2}) \times \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (4.54)$$

□

Lema 4.3.3 *Sejam duas matrizes $P_{k|k,1}$ e $P_{k|k,2}$, considere para $i = 1, 2$:*

$$P_{k+1|k+1,i} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,i} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Se $P_{k|k,1} \geq P_{k|k,2}$ então $P_{k+1|k+1,1} \geq P_{k+1|k+1,2}$.

Prova: Pelo Lema (4.3.2), vale a seguinte relação (4.53). Além disso

$$F_{fk,1} = F_{fk,2} \left[I + (P_{k|k,1} - P_{k|k,2}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Assim,

$$P_{k+1|k+1,1} - P_{k+1|k+1,2} = F_{fk,2} \left[I + (P_{k|k,1} - P_{k|k,2}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] (P_{k|k,1} - P_{k|k,2}) (F_{fk,2})^T.$$

Como $P_{k|k,1} - P_{k|k,2} \geq 0$,

$$P_{k+1|k+1,1} - P_{k+1|k+1,2} = F_{fk,2} (P_{k|k,1} - P_{k|k,2})^{\frac{1}{2}} [I + (P_{k|k,1} - P_{k|k,2})^{\frac{1}{2}} \times \\ \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k,1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_k & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ 0 & I & 0 & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) (P_{k|k,1} - P_{k|k,2})^{\frac{1}{2}} \times \\ (P_{k|k,1} - P_{k|k,2})^{\frac{1}{2}} (F_{fk,2})^T$$

Assim, pelo Lema (4.3.1), segue que $P_{k+1|k+1,1} - P_{k+1|k+1,2} \geq 0$. \square

Lema 4.3.4 *Suponha que $\mathcal{R} \geq 0$ e defina $\{P_{k|k}\}_{k=0}^{\infty}$ por*

$$P_{k|k} = f(P_{k-1|k-1}, L_{33,k-1}) := L_{33,k-1} (\mathcal{A}P_{k-1|k-1}\mathcal{A}^T + \mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^T) L_{33,k-1}^T \quad (4.56)$$

sendo

$$L_{33,k-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{K} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

com $P_{0|0} = 0$. Então $\{P_{k|k}\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência não decrescente.

Prova: Como $\mathcal{R} \geq 0$ e $P_{k|k}$ é dada por (4.56) segue que para $P_{0|0} = 0$ temos $P_{1|1} \geq 0$ e $P_{1|1} - P_{0|0} \geq 0$.

Fazendo a hipótese de indução $P_{k|k} - P_{k-1|k-1} \geq 0$ tem-se pelo Lema 4.3.3 que se $P_{k|k} \geq P_{k-1|k-1}$ então $P_{k+1|k+1} \geq P_{k|k}$. Segue portanto que

$$0 = P_{0|0} \leq P_{1|1} \leq \dots \leq P_{k-1|k-1} \leq P_{k|k} \leq P_{k+1|k+1} \leq \dots \quad (4.58)$$

□

Observação 4.3.1 *Para mostrar a convergência de $P_{k|k}$ deve-se verificar ainda que ela é uma sequência limitada superiormente por P , solução única semi-definida positiva de (4.25).*

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação foram derivadas recursões para o filtro de Kalman para uma classe geral de sistemas singulares, variantes no tempo em tempo discreto.

Os filtros deduzidos aparecem nas formas de estimativas filtradas, preditoras e suavizadas. As deduções foram feitas via abordagem determinística, utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), partindo da minimização de funcionais quadráticos, cujas restrições eram as equações dinâmicas do estado e da saída do sistema.

O sistema dinâmico considerado possui uma formulação mais geral que os encontrados na literatura com, por exemplo, ruídos de estado e medida correlacionados. O filtro ótimo com a respectiva equação de Riccati associada, foram expressos na forma de blocos matriciais de dimensão nove.

Após o resultado principal inserido na Seção 2.2 do Capítulo 2, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A, também considerou-se o funcional denominado "funcional de um passo", que por sua vez objetiva minimizar os erros da estimativa. Através da minimização de tal funcional, foram obtidas as mesmas expressões para os filtros, mostrando assim que há equivalência entre os procedimentos. Além disto, a estimativa suavizada foi alcançada juntamente com a obtenção da estimativa filtrada.

A abordagem determinística feita neste trabalho também é importante porque alcança a mesma recursão para o filtro de Kalman através de dois funcionais formulados de maneira distinta e, mais ainda porque permite ao sistema ter um modelo mais completo, constando termos cruzados e atraso na saída. Isto também pode ser feito a partir

da abordagem estocástica, entretanto produz expressões muito mais complicadas que as obtidas nesta dissertação.

Uma outra contribuição deste trabalho é que a forma de blocos matriciais que aparece nas expressões das estimativas e das recursões de Riccati é simples, podendo ainda ser preenchida, ou seja, conforme há colocação de novos elementos nas equações dinâmicas do sistema, estes deverão aparecer de maneira natural na forma matricial.

As propriedades de estabilidade e convergência demonstradas no Capítulo 4 atestam a viabilidade do filtro de Kalman singular proposto e completam esta dissertação. Como trabalho futuro, pretende-se deduzir a versão robusta dos filtros apresentados.

Referências Bibliográficas

- ANDERSON & MOORE (1979). ANDERSON, B. D. O. & MOORE, J. B. (1979). *Optimal Filtering*. Prentice-Hall.
- BRYSON & HO (1975). BRYSON, A. E. J. & HO, Y. C. (1975). *Applied Optimal Control*. John Wiley & Sons.
- CAMPBELL (1980). CAMPBELL, S. L. (1980). *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman.
- CAMPBELL (1982). CAMPBELL, S. L. (1982). *Singular Systems of Differential Equations II*. Pitman.
- CAMPBELL & MEYER (1979). CAMPBELL, S. L. & MEYER, C. D. (1979). *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Pitman.
- DAI (1989). DAI, L. (1989). Impulsive modes and causality in singular systems. *Int. J. Control*, 50(4):1267–1281.
- DAROUACH et al. (1993). DAROUACH, M., ZASADZINSKI, M., & MEHDI, D. (1993). State estimation of stochastic singular linear systems. *Int. Journal. of Systems Science*, 24(2):345–354.
- DAROUACH et al. (1995). DAROUACH, M., ZASADZINSKI, M., ONANA, A. B., & NOWAKOWSKI, S. (1995). Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimate of singular systems. *Int. Journal. of Systems Science*, 26(10):2015–2028.
- DENG & LIU (1999). DENG, Z. & LIU, Y. (1999). Descriptor Kalman estimators. *Int. Journal of Systems Science*, 30(11):1205–1212.

-
- GERMANI et al. (2001). GERMANI, A., MANES, C., & PALUMBO, P. (2001). Optimal Linear filtering for Stochastic Non-Gaussian Descriptor Systems. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, pages 2514–2519.
- HASAN & AZIM-SADJANI (1995). HASAN, M. A. & AZIM-SADJANI, M. R. (1995). Noncausal image modeling using *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 42(8):536–540.
- ISHIHARA & TERRA (2001). ISHIHARA, J. Y. & TERRA, M. H. (2001). Impulsive Controllability and Observability of Rectangular Descriptor Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46(6):991–994.
- ISHIHARA et al. (2004). ISHIHARA, J. Y., TERRA, M. H., & CAMPOS, J. C. T. (2004). Kalman Estimators for Discrete-Time Descriptor Systems. *Proceedings of the American Control Conference ACC04*.
- KAYLATH et al. (2000). KAYLATH, T., SAYED, A. H., & HASSIBI, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice-Hall.
- KELLER et al. (1992). KELLER, J. Y., NOWAKOWSKI, S., & DAROUACH, M. (1992). State estimation and failure detection in singular systems. *Control-Theory and Advanced Technology*, 8(4):755–762.
- LEWIS (1986). LEWIS, F. L. (1986). A survey of linear singular systems. *Circ., Syst. Sig. Proc.*, 5(1):3–36.
- LUENBERGER (1978). LUENBERGER, D. G. (1978). Time-Invariant Descriptor Systems. *Automatica*, 14:473–480.
- LUENBERGER (1977). LUENBERGER, D. V. (1977). Dynamic Equations in Descriptor Form. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22(3):312–321.
- MILLS & GOLDENBERG (1989). MILLS, J. K. & GOLDENBERG, A. A. (1989). Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 68:30–46.
- NEWCOMB (1981). NEWCOMB, R. W. (1981). The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 28(1):62–71.

-
- NIKOUKHAH et al. (1999). NIKOUKHAH, R., CAMPBELL, S. L., & DELEBECQUE, F. (1999). Kalman Filtering for General Discrete-Time Linear Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(10):1829–1839.
- NIKOUKHAH et al. (1989). NIKOUKHAH, R., M. B. ADAMS, A. S. W., & LEVY, C. (1989). Estimation for Boundary Value Descriptor Systems. *Circ., Syst. Sig. Proc.*, 8(1):25–48.
- NIKOUKHAH et al. (1992). NIKOUKHAH, R., WILLSKY, A. L., & LEVY, B. C. (1992). Kalman Filtering and Riccati Equations for Descriptor Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(9):1325–1342.
- SAGE & MELSA (1971). SAGE, A. P. & MELSA, J. L. (1971). *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*. McGraw-Hill, N Y.
- SCHWEPPE (1973). SCHWEPPE, F. C. (1973). *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- SHAKED & SOUZA (1995). SHAKED, U. & DE SOUZA, C. E. (1995). Robust Minimum Variance Filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(11):2474–2483.
- VERGHESE et al. (1981). VERGHESE, G. C., LEVY, B. C., & KAILATH, T. (1981). A Generalized State-Space for Singular Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26(4):811–831.
- WHITTLE (1983). WHITTLE, P. (1983). *Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods*. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.
- WHITTLE (1990). WHITTLE, P. (1990). *Risk-sensitive Optimal Control*. John Wiley & Sons.
- XI (1997). XI, H. (1997). The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise. *Int. Journal. of Systems Science*, 28(1):113–121.
- ZASADZINSKI et al. (1991). ZASADZINSKI, M., MEHDI, D., & DAROUACH, M. (1991). Recursive State Estimation for Singular Systems. volume 2 of *Proceedings of the American Control Conference, Boston*, pages 2850–2851.

ZHANG et al. (1998). ZHANG, H., XIE, L., & SOH, Y. C. (1998). Optimal Recursive State Estimation for Singular Stochastic Discrete-Time Systems. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, USA, pages 2908–2913.

Apêndice A

Prova do Teorema 2.2.1

Primeiramente o passo $k = 0$ será mostrado. Da equação (2.56) tem-se que a solução ótima é dada por

$$\hat{x}_{0|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{R}_0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_0 & \mathcal{E}_0 \\ I & \mathcal{K}_0^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_0^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Z_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Escrevendo em termo dos parâmetros originais do sistema obtém-se (2.58). Para $k \geq 1$, tem-se que o valor ótimo de \mathfrak{J}_k satisfaz

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_k & \mathfrak{Q}_k \\ I & \mathfrak{R}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}_{k|k} \\ \hat{\Lambda}_{k|k} \\ \hat{\mathfrak{W}}_{k|k} \\ \hat{\mathfrak{X}}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{B}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Considera-se a seguir as seguintes partições

$$\mathfrak{W}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{k|k} \\ \mathfrak{W}_{k-1|k} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_{k|k} = \begin{bmatrix} \eta_{k|k} \\ \Upsilon_{k-1|k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{X}_{k|k} = \begin{bmatrix} x_{k|k} \\ \mathfrak{X}_{k-1|k} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathfrak{B}_{k-1} \end{bmatrix}, \Lambda_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{k|k} \\ \Lambda_{k-1|k} \end{bmatrix}, \mathfrak{A}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_k & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & \mathfrak{A}_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{R}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{k-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{K}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{K}_{k-1} \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbb{A}_{k-1} := \mathcal{A}_{k-1} \mathcal{I}_{k-1}^T := \mathcal{A}_{k-1} \begin{bmatrix} I & \underbrace{0 \cdots 0}_k \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, (2.53) equivale aos seguintes sistemas de equações

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_{k-1|k} \\ \widehat{\Lambda}_{k-1|k} \\ \widehat{\mathfrak{Y}}_{k-1|k} \\ \widehat{\mathfrak{X}}_{k-1|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\eta}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{V}}_{k|k} \\ \widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{A}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_{k-1|k} \\ \widehat{\Lambda}_{k-1|k} \\ \widehat{\mathfrak{Y}}_{k-1|k} \\ \widehat{\mathfrak{X}}_{k-1|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\eta}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{V}}_{k|k} \\ \widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{B}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Considerando (A.2) para $k-1$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{A}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_{k-1|k-1} \\ \widehat{\Lambda}_{k-1|k-1} \\ \widehat{\mathfrak{Y}}_{k-1|k-1} \\ \widehat{\mathfrak{X}}_{k-1|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{B}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem-se de (A.4) e (A.5) que

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{Q}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
& \times \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{k|k} \\ \hat{\mathcal{L}}_{k|k} \\ \hat{\nu}_{k|k} \\ \hat{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_k - \mathbb{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Notando que

$$\mathbb{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} = \mathcal{A}_{k-1} \mathcal{I}_{k-1}^T \hat{x}_{k-1|k-1} = \mathcal{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \tag{A.7}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{I}_{k-1}^T \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

define-se a seguinte variável auxiliar

$$P_{k-1|k-1} := - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{I}_{k-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{Q}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{I}_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{A.9}$$

Assim, a equação (A.6) torna-se

$$\left(\begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P_{k-1|k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \widehat{\eta}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{V}}_{k|k} \\ \widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_k - \mathcal{A}_{k-1} \widehat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Introduzindo as variáveis auxiliares

$$\kappa_{k|k} := -\mathcal{A}_{k-1} \widehat{\mathcal{L}}_{k|k}$$

e

$$\iota_{k|k} := P_{k-1|k-1} \mathcal{A}_{k-1}^T \widehat{\mathcal{L}}_{k|k} + \widehat{x}_{k-1|k-1}$$

obtém-se o seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{k-1} & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_{k-1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{k|k} \\ \widehat{\eta}_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{k|k} \\ \iota_{k|k} \\ \widehat{\mathcal{V}}_{k|k} \\ \widehat{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ \mathcal{Z}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Pelo Lema 2.1.1, a matriz à esquerda de (A.11) é não singular. Logo

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{k-1} & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_{k-1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ 0 \\ Z_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Escrevendo em termo dos parâmetros originais do problema, obtém-se (2.60). Na sequência, será feita a dedução da recursão $P_{k|k}$. Por (A.9) com $k = 1$, segue que $P_{0|0}$ é dada por

$$P_{0|0} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{R}_0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_0 & \mathcal{E}_0 \\ I & \mathcal{K}_0^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_0^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação acima com os parâmetros originais do problema demonstra-se (2.59). Para $k > 1$, a recursão $P_{k|k}$ é dada por

$$P_{k|k} := - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{I}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{K}_k & \mathfrak{Q}_k \\ I & \mathfrak{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{I}_k \end{bmatrix}.$$

Considerando as mesmas partições usadas na demonstração de $\hat{x}_{k|k}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{A}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \\ f \\ g \\ a \\ c \\ e \\ P_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{k-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_{k-1} & \mathfrak{A}_{k-1} \\ I & \mathfrak{R}_{k-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{k-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \\ P_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Usando as equações (A.9) e (A.14) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{k-1} P_{k-1|k-1} \mathcal{A}_{k-1}^T & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \\ P_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}.$$

Definindo as variáveis auxiliares

$$\mu_1 := -\mathcal{A}_{k-1}^T c$$

e

$$\mu_2 := -P_{k-1|k-1}\mu_1$$

temos que

$$\begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{k-1} & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_{k-1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ a \\ c \\ \mu_2 \\ e \\ P_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

ou

$$P_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{k-1} & \mathcal{K}_k & \mathcal{E}_k \\ I & 0 & \mathcal{A}_{k-1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{K}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_k^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Escrevendo em termo dos parâmetros originais a recursão (2.61) é demonstrada. \square